ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

Francesco Brioschi

e continuati dai professori:

Luigi Bianchi *in Pisa*	**Ulisse Dini** *in Pisa*
Luigi Cremona *in Roma*	**Giuseppe Jung** *in Milano*

SERIE III.ª – TOMO IV.

MILANO,

TIPOGRAFIA BERNARDONI DI C. REBESCHINI E C.

1900.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO IV.° (SERIE III.ª)

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Sulla deformazione dei paraboloidi di rotazione negli spazî di curvatura costante.

(Di Luigi Bianchi, *a Pisa.)*

INTRODUZIONE.

Nella prefazione alla mia recente Memoria: *Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante* (*), ho già accennato come i teoremi di Guichard relativi alla deformazione delle quadriche di rotazione, dai quali ho dedotto le nuove trasformazioni delle superficie a curvatura costante e delle superficie d'area minima, abbiano i loro analoghi e conservino nelle loro conseguenze la medesima importanza anche nella geometria degli spazî a curvatura costante positiva, o negativa.

Di queste nuove ricerche espongo nella presente Memoria soltanto la parte che riguarda le superficie d'area minima dello spazio ellittico ed iperbolico e quelle superficie a curvatura media costante $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$ dello spazio iperbolico di curvatura $K=-\frac{1}{R^2}$ per le quali si ha:

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{2}{R}.$$

Mi è sembrato opportuno riunire lo studio di queste ultime superficie a quello delle superficie minime, perchè nell'uno e nell'altro caso i risultati a cui pervengo sono la naturale estensione allo spazio curvo del teorema fondamentale di Guichard relativo alle superficie applicabili sul paraboloide di rotazione nello spazio euclideo.

(*) Questi *Annali.* Tomo III, serie 3.ª

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

In ulteriore lavoro dimostrerò che i medesimi metodi si applicano in generale alle seguenti tre classi di superficie negli spazî a curvatura costante:

1.° alle superficie S_1 di curvatura totale costante,

2.° alle superficie S_2 di curvatura media costante,

3.° alle superficie S_3 per le quali è costante la somma dei raggi principali (ridotti) di curvatura (*).

Queste ricerche più generali daranno l'estensione allo spazio non-euclideo degli altri teoremi di Guichard concernenti la deformazione delle altre quadriche di rotazione.

Come nella mia Memoria sopra citata, che richiamerò ora ed in seguito colla segnatura (M), il punto di partenza sarà anche qui nella teoria della deformazione delle congruenze rettilinee normali, i cui raggi siano invariabilmente collegati ad una superficie S di partenza in tutte le deformazioni di questa superficie.

Stabilite nei §§ 1, 2 le formole fondamentali per la deformazione delle congruenze in geometria ellittica ed iperbolica, faccio nei due seguenti paragrafi una breve digressione dall'argomento principale per stabilire un semplice teorema relativo alla superficie di curvatura totale nulla, teorema che vale in tutte tre le geometrie: ellittica, iperbolica e parabolica (euclidea).

Servendomi dei medesimi metodi di cui mi sono valso nella Memoria precedente pel caso euclideo, passo quindi a trattare il seguente problema fondamentale (Cf. (M) prefazione), che dirò anche qui il problema [A]: *Nello spazio ellittico od iperbolico si consideri una congruenza rettilinea normale C, i cui raggi escono dai punti di una superficie S e sono invariabilmente legati alla S nelle sue flessioni. Quando accadrà che, flettendo comunque la superficie S di partenza, una delle superficie $\overline{S}$ normali ai raggi della congruenza abbia costantemente i raggi principali (ridotti) di curvatura r_1, r_2 legati da una relazione fissa:*

$$f(r_1, r_2) = 0?$$

Trascurando il caso in cui i raggi escano *tangenzialmente* alla superficie di partenza, caso che conduce al noto teorema di Weingarten sulle su-

(*) Per lo spazio euclideo la ricerca delle S_2 non differisce, pel teorema di Bonnet, da quella delle S_1 a curvatura positiva mentre le S_3 non sono che le parallele alle superficie d'area minima. Per gli spazî curvi invece la ricerca dell'una o dell'altra classe di superficie dà luogo a problemi distinti, o che almeno solo parzialmente si riducono l'uno all'altro, come verrà più da vicino esaminato nel prossimo lavoro.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

perficie W in geometria non-euclidea, risolvo nel presente lavoro il problema [A] nei due casi già sopra accennati, e cioè:

a) per le superficie $\overline{S}$ d'area minima dello spazio ellittico ed iperbolico,

b) per le superficie $\overline{S}$ dello spazio pseudosferico di raggio R che hanno la curvatura media costante $= \frac{2}{R}\cdot$

I risultati a cui pervengo sono i seguenti:

a) Affinchè una delle superficie $\overline{S}$ normali alla congruenza sia costantemente ad area minima è necessario e sufficiente:

1.° che la superficie S di partenza sia applicabile sulla quadrica di rotazione che ha per meridiano una parabola (paraboloide), intendendo per parabola del piano ellittico od iperbolico quella curva i cui punti equidistano da un punto fisso (fuoco) e da una retta fissa (direttrice).

2.° Quando la S è conformata a paraboloide di rotazione i raggi della congruenza C debbono concorrere tutti nel fuoco, ovvero esserne i riflessi sulla superficie, nel qual caso essi riescono normali ad un medesimo piano (direttore), cioè concorrono in un secondo fuoco, che nel caso iperbolico è ideale.

3.° Sopra ogni raggio della congruenza il segmento intercetto fra la superficie di partenza S e la superficie d'area minima $\overline{S}$ ortogonale ai raggi eguaglia la distanza focale.

b) Affinchè nello spazio iperbolico una delle superficie $\overline{S}$ ortogonali alla congruenza abbia sempre la curvatura media costante $\frac{2}{R}$ è necessario e sufficiente:

1.° Che la superficie di partenza S sia applicabile sulla quadrica di rotazione che ha per meridiano la conica luogo dei punti equidistanti in un piano da un punto fisso (fuoco) e da un oriciclo, curva che si può ancora riguardare come una parabola di cui il secondo fuoco è a distanza infinita, nel centro dell'oriciclo (*). Questa superficie si dirà ancora un paraboloide; ma, per distinguerlo da quello prima considerato, lo chiameremo *di seconda specie.*

Quanto alle altre condizioni esse non subiscono alterazione dal caso precedente e cioè:

(*) Nel caso *a*), come già si è detto, il secondo fuoco è invece ideale.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

2.° Conformata la S a paraboloide di rotazione (di seconda specie) i raggi della congruenza concorreranno tutti nel fuoco a distanza finita o in quello all'infinito (saranno paralleli, nel senso non-euclideo, all'asse di rotazione).

3.° Il segmento intercetto sopra ogni raggio della congruenza fra S ed $\overline{S}$ uguaglierà ancora la distanza focale.

Tanto nel caso a) quanto nel caso b), ad ogni superficie S applicabile sul paraboloide di rotazione, di prima o di seconda specie, sono così coordinate *due* congruenze C che risolvono il problema [A] e sono riflesse l'una dell'altra sulla superficie di partenza; queste diciamo le *congruenze associate* alla S.

Le seguenti ricerche della presente Memoria riguardano il problema di inversione (Cf. (M) § 11) e sviluppano la teoria delle trasformazioni che ne conseguono per le superficie d'area minima o di curvatura media costante $=\frac{2}{R}\cdot$ Così in particolare troviamo che, data comunque una superficie S d'area minima nello spazio ellittico od iperbolico, è sempre possibile riportare sopra ogni sua normale un tale segmento, variabile da punto a punto, che il luogo $\overline{S}$ degli estremi risulti applicabile sul paraboloide di rotazione (di 1.^{a} specie) e la congruenza delle normali alla S sia una delle due associate alla S. Anzi si dimostrerà di più che, data comunque la S, vi sono sempre ∞^3 superficie $\overline{S}$ applicabili sul paraboloide che risolvono la questione. Prendendo poi ogni volta la superficie S' *simmetrica* della primitiva S rispetto alla superficie $\overline{S}$ riflettente delle normali di S, si avrà una nuova superficie d'area minima le cui normali sono i raggi riflessi.

Risultati del tutto analoghi valgono pel caso delle superficie a curvatura media costante $\frac{2}{R}$ nello spazio pseudosferico di raggio R.

Osserveremo in fine che queste nuove ricerche sulle superficie d'area minima nello spazio non-euclideo acquistano nell'ordinario spazio euclideo un doppio significato. In primo luogo se rappresentiamo in modo conforme sullo spazio ordinario Σ_0 lo spazio Σ di curvatura costante:

$$K=\pm\frac{1}{R^2},$$

le superficie d'area minima in Σ vengono ad avere in Σ_0 per immagini le

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

superficie integrali della equazione a derivate parziali:

$$\frac{(1+q^2)\,r-2\,p\,q\,s+(1+p^2)\,t}{1+p^2+q^2}+\frac{4\,(z-p\,x-q\,y)}{x^2+y^2+z^2\pm\dfrac{1}{4\,R^2}}=0\ (*).$$

Queste ultime superficie dello spazio euclideo hanno le linee di curvatura isoterme e le attuali ricerche insegnano dunque il modo di far derivare da ogni superficie nota di questa classe una tripla infinità di nuove superficie della medesima classe.

In secondo luogo la ricerca delle superficie d'area minima dello spazio ellittico ed iperbolico equivale rispettivamente, come altrove ho dimostrato (**), a quello delle superficie di Liouville nello spazio euclideo che hanno rispettivamente l'elemento lineare:

$$d\,s^2=(\cos u+\cos v)\,(\cos u\,d\,u^2+\cos v\,d\,v^2), \qquad (\alpha)$$

o l'altro:

$$d\,s^2=(\operatorname{senh} u+\operatorname{senh} v)\,(\operatorname{senh} u\,d\,u^2+\operatorname{senh} v\,d\,v^2). \qquad (\beta)$$

Possiamo dunque dire che i nuovi risultati ci pongono in grado di trovare quante si vogliono superficie di Liouville d'elemento lineare (α) o (β).

Le formole fondamentali per la teoria delle superficie in geometria ellittica ed iperbolica, a cui dovrò ricorrere, si trovano esposte nel Cap. 22 dell'edizione tedesca delle mie: *Lezioni di geometria differenziale;* le citazioni relative saranno contrassegnate con: *Vorlesungen.*

§ 1.

Formole per la deformazione delle congruenze in geometria ellittica.

Consideriamo nello spazio ellittico, la cui curvatura K poniamo per semplicità $=+1$, una congruenza normale C di raggi emananti dai punti di una superficie S di partenza ed invariabilmente legata alle flessioni di questa superficie. Riferiamo la S ad un sistema di coordinate curvilinee ortogonali u, v, di cui le linee $u=$ cost. siano quelle normali ai raggi della con-

(*) Vedi la mia Memoria: *Sulle superficie d'area minima negli spazî a curvatura costante.* (Atti dei Lincei, Tomo IV, serie 4.ª, 1888.)

(**) Questi *Annali.* Tomo II, 1898.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

gruenza. In una speciale configurazione di S siano:

$$E\,d\,u^2 + G\,d\,v^2$$
$$D\,d\,u^2 + 2\,D'\,d\,u\,d\,v + D''\,d\,v^2,$$

le sue due forme quadratiche fondamentali. I coefficienti di queste due forme, oltre che dalle due equazioni di CODAZZI che non importa qui trascrivere, sono legati dalla equazione di GAUSS:

$$\frac{D\,D'' - D'^2}{E\,G} = K - 1,$$

designando con K la curvatura assoluta di S, cioè la curvatura della prima forma fondamentale (*). Riferendo i punti dello spazio ad un sistema di coordinate di WEIERSTRASS, siano:

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,$$

le coordinate di un punto M mobile sopra S e siano rispettivamente:

$$\begin{matrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_0 & \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_0 & \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3, \end{matrix}$$

i coseni di direzione nel punto M (**): 1.° della normale alla superficie, 2.° della tangente alla linea $v =$ cost., 3.° della tangente alla linea $u =$ cost. Le formole (51), (52) a pag. 625 delle *Vorlesungen* ci dànno allora le seguenti formole fondamentali:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u} = \sqrt{E}\,\eta, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \sqrt{G}\,\zeta \\
&\frac{\partial \xi}{\partial u} = -\frac{D}{\sqrt{E}}\,\eta - \frac{D'}{\sqrt{G}}\,\zeta, \quad \frac{\partial \eta}{\partial u} = -\sqrt{E}\,x + \frac{D}{\sqrt{E}}\,\xi - \frac{1}{\sqrt{G}}\,\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\,\zeta \\
&\frac{\partial \zeta}{\partial u} = \frac{D'}{\sqrt{G}}\,\xi + \frac{1}{\sqrt{G}}\,\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\,\eta \\
&\frac{\partial \xi}{\partial v} = -\frac{D'}{\sqrt{E}}\,\eta - \frac{D''}{\sqrt{G}}\,\zeta, \quad \frac{\partial \eta}{\partial v} = \frac{D'}{\sqrt{E}}\,\xi + \frac{1}{\sqrt{E}}\,\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\,\zeta \\
&\frac{\partial \zeta}{\partial v} = -\sqrt{G}\,x + \frac{D''}{\sqrt{G}}\,\xi - \frac{1}{\sqrt{E}}\,\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\,\eta,
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

(*) Vorlesungen, § 342, pag. 624.

(**) Per coseni di direzione di una retta *in un punto* intendiamo le coordinate (di WEIERSTRASS) del piano normale in quel punto alla retta. Si ricordi che le coordinate x di punto, come quelle ξ di piano, sono legate dalle identità:

$$\Sigma\,x_i^2 = 1, \qquad \Sigma\,\xi_i^2 = 1.$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

dove abbiamo soppresso, per brevità di scrittura, gli indici alle lettere x, ξ, η, ζ, intendendo che le formole scritte valgono attribuendo a queste lettere il medesimo indice i $(i=0,\ 1,\ 2,\ 3)$.

Si indichi ora con $\sigma=\sigma(u,\ v)$ l'angolo d'inclinazione del raggio della congruenza, uscente dal punto M di S, sulla S stessa, cioè sulla linea $v=$ cost. e siano:

$$X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,$$

i coseni di direzione di questo raggio in M; avremo:

$$X=\eta\cos\sigma+\xi\operatorname{sen}\sigma. \tag{2}$$

Di qui derivando otteniamo, per le (1):

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial u}&=-\sqrt{E}\cos\sigma\, x+\cos\sigma\left(\frac{D}{\sqrt{E}}+\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)\xi-\operatorname{sen}\sigma\left(\frac{D}{\sqrt{E}}+\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)\eta-\\&\qquad-\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}+\frac{\operatorname{sen}\sigma\, D'}{\sqrt{G}}\right)\zeta\\\frac{\partial X}{\partial v}&=\cos\sigma\left(\frac{D'}{\sqrt{E}}+\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)\xi-\operatorname{sen}\sigma\left(\frac{D'}{\sqrt{E}}+\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)\eta+\\&\qquad+\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}-\frac{\operatorname{sen}\sigma\, D''}{\sqrt{G}}\right)\zeta.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

La congruenza C essendo supposta normale, se sopra ogni raggio della congruenza stacchiamo, a partire da M, un conveniente segmento:

$$M\overline{M}=\tau,$$

dove τ sarà una funzione di u, v da determinarsi, la superficie $\overline{S}$ luogo degli estremi $\overline{M}$ risulterà ortogonale ai raggi.

Se si pone:

$$U=\Sigma X\frac{\partial x}{\partial u}=\sqrt{E}\cos\sigma,\quad V=\Sigma X\frac{\partial x}{\partial v}=0,$$

la funzione τ sarà determinata, come in geometria euclidea, a meno di una costante additiva dalle condizioni:

$$\frac{\partial\tau}{\partial u}=-U=-\sqrt{E}\cos\sigma,\quad\frac{\partial\tau}{\partial v}=-V=0,$$

onde l'ipotesi che la congruenza C sia normale si tradurrà nella equa-

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

zione:

$$\frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{E}\cos\sigma) = 0, \tag{4}$$

e τ sarà una funzione della sola u tale che si abbia:

$$\tau' = \frac{d\tau}{du} = -\sqrt{E}\cos\sigma. \tag{5}$$

Indicando ora con:

$$\bar{x}_0,\ \bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \bar{x}_3$$

le coordinate del punto $\overline{M}$, ove la $\overline{S}$ sega ortogonalmente il raggio della congruenza uscente da M, avremo:

$$\bar{x} = x\cos\tau + X\operatorname{sen}\tau, \tag{6}$$

e le coordinate del piano tangente in $\overline{M}$ alla $\overline{S}$ saranno:

$$\bar{\xi} = x\operatorname{sen}\tau - X\cos\tau. \tag{7}$$

Calcoliamo ora i coefficienti delle tre forme quadratiche fondamentali della superficie $\overline{S}$ e cioè:

$$\Sigma\, d\bar{x}^2 = \overline{E}\,du^2 + 2\,\overline{F}\,du\,dv + \overline{G}\,dv^2$$

$$-\Sigma\, d\bar{x}\,d\bar{\xi} = \overline{D}\,du^2 + 2\,\overline{D'}\,du\,dv + \overline{D''}\,dv^2$$

$$\Sigma\, d\bar{\xi}^2 = \bar{e}\,du^2 + 2\bar{f}\,du\,dv + \bar{g}\,dv^2,$$

delle quali la terza rappresenta il quadrato dell'elemento lineare della superficie polare di $\overline{S}$.

Servendosi delle formole precedenti e ponendo per brevità:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= \left(\frac{D}{\sqrt{E}} + \frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} + \frac{\operatorname{sen}\sigma\, D'}{\sqrt{G}}\right)^2\\
\beta &= \left(\frac{D}{\sqrt{E}} + \frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)\left(\frac{D'}{\sqrt{E}} + \frac{\partial\sigma}{\partial v}\right) -\\
&\qquad - \left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} + \frac{\operatorname{sen}\sigma\, D'}{\sqrt{G}}\right)\cdot\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\operatorname{sen}\sigma\, D''}{\sqrt{G}}\right)\\
\gamma &= \left(\frac{D'}{\sqrt{E}} + \frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\operatorname{sen}\sigma\, D''}{\sqrt{G}}\right)^2,
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

si trovano le espressioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{E} &= \alpha \operatorname{sen}^2 \tau - 2\sqrt{E} \operatorname{sen}\sigma \left(\frac{D}{\sqrt{E}} + \frac{\partial \sigma}{\partial u}\right) \operatorname{sen}\tau \cos\tau + E \operatorname{sen}^2\sigma \cos^2\tau \\
\overline{F} &= \beta \operatorname{sen}^2 \tau - 2\left(\cos\sigma \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} + \operatorname{sen}\sigma\, D'\right) \operatorname{sen}\tau \cos\tau \\
\overline{G} &= \gamma \operatorname{sen}^2 \tau + 2\sqrt{G}\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\operatorname{sen}\sigma\, D''}{\sqrt{G}}\right) \operatorname{sen}\tau \cos\tau + G \cos^2\tau.
\end{aligned}\right\} \quad (A)$$

$$\left.\begin{aligned}
\overline{D} &= \sqrt{E} \operatorname{sen}\sigma \left(\frac{D}{\sqrt{E}} + \frac{\partial \sigma}{\partial u}\right) \operatorname{sen}^2\tau + (\alpha - E \operatorname{sen}^2\sigma) \operatorname{sen}\tau \cos\tau - \\
&\qquad - \sqrt{E} \operatorname{sen}\sigma \left(\frac{D}{\sqrt{E}} + \frac{\partial \sigma}{\partial u}\right) \cos^2\tau \\
\overline{D}' &= \left(\cos\sigma \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} + \operatorname{sen}\sigma\, D'\right) \operatorname{sen}^2\tau + \beta \operatorname{sen}\tau \cos\tau - \\
&\qquad - \left(\cos\sigma \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} + \operatorname{sen}\sigma\, D'\right) \cos^2\tau \\
\overline{D}'' &= -\sqrt{G}\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\operatorname{sen}\sigma\, D''}{\sqrt{G}}\right) \operatorname{sen}^2\tau + (\gamma - G) \operatorname{sen}\tau \cos\tau + \\
&\qquad + \sqrt{G}\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\operatorname{sen}\sigma\, D''}{\sqrt{G}}\right) \cos^2\tau.
\end{aligned}\right\} \quad (B)$$

$$\left.\begin{aligned}
\overline{e} &= \alpha \cos^2\tau + 2\sqrt{E} \operatorname{sen}\sigma \left(\frac{D}{\sqrt{E}} + \frac{\partial \sigma}{\partial v}\right) \operatorname{sen}\tau \cos\tau + E \operatorname{sen}^2\sigma \operatorname{sen}^2\tau \\
\overline{f} &= \beta \cos^2\tau + 2\left(\cos\sigma \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} + \operatorname{sen}\sigma\, D'\right) \operatorname{sen}\tau \cos\tau \\
\overline{g} &= \gamma \cos^2\tau - 2\sqrt{G}\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\operatorname{sen}\sigma\, D''}{\sqrt{G}}\right) \operatorname{sen}\tau \cos\tau + G \operatorname{sen}^2\tau.
\end{aligned}\right\} \quad (C)$$

Importa osservare che sommando le corrispondenti (A), (C) si ottengono le formole semplici:

$$\overline{E} + \overline{e} = \alpha + E \operatorname{sen}^2\sigma, \quad \overline{F} + \overline{f} = \beta, \quad \overline{G} + \overline{g} = \gamma + G. \tag{9}$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

§ 2.

Formole per la deformazione delle congruenze in geometria iperbolica.

Nel caso della geometria iperbolica, ove supporremo la curvatura dello spazio $= -1$, otterremo formole analoghe alle precedenti e basterà soltanto rilevare le differenze dal caso precedente.

Conservando le notazioni introdotte al § 1 per la superficie S di partenza, bisognerà per altro ricordare che le identità dalle quali sono legate nel caso attuale le coordinate x di punto e quelle ξ di piano si scrivono:

$$\sum_{i=1}^{i=3} x_i^2 - x_0^2 = -1$$

$$\sum_{i=1}^{i=3} \xi_i^2 - \xi_0^2 = 1.$$

La prima modificazione che si introduce nelle formole del paragrafo precedente, a causa della mutata curvatura dello spazio, porta sulla formola (γ) di Gauss che diventa qui:

$$\frac{D D'' - D'^2}{E G} = K + 1. \qquad (\gamma^*)$$

Le formole (1) risulteranno poi modificate solo in ciò che nei secondi membri il coefficiente del termine lineare in x muterà segno; scrivendole esplicitamente, avremo:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u} = \sqrt{E} \,.\, \eta, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \sqrt{G} \,.\, \zeta \\
&\frac{\partial \xi}{\partial u} = -\frac{D}{\sqrt{E}} \eta - \frac{D'}{\sqrt{G}} \zeta, \quad \frac{\partial \eta}{\partial u} = \sqrt{E} x + \frac{D}{\sqrt{E}} \xi - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \zeta \\
&\frac{\partial \zeta}{\partial u} = \frac{D'}{\sqrt{G}} \xi + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \eta \\
&\frac{\partial \xi}{\partial v} = -\frac{D'}{\sqrt{E}} \eta - \frac{D''}{\sqrt{G}} \zeta, \quad \frac{\partial \eta}{\partial v} = \frac{D'}{\sqrt{E}} \xi + \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \zeta \\
&\frac{\partial \zeta}{\partial v} = \sqrt{G} x + \frac{D''}{\sqrt{G}} \xi - \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \eta.
\end{aligned}\right\} \qquad (1^*)$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Pei coseni di direzione del raggio della congruenza avremo ancora:

$$X = \eta \cos\sigma + \xi \operatorname{sen}\sigma, \tag{2*}$$

da cui derivando:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial X}{\partial u} &= \sqrt{E}\cos\sigma\, x + \cos\sigma\left(\frac{D}{\sqrt{E}} + \frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)\xi - \operatorname{sen}\sigma\left(\frac{D}{\sqrt{E}} + \frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)\eta - \\
&\quad - \left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} + \frac{\operatorname{sen}\sigma\, D'}{\sqrt{G}}\right)\zeta \\
\frac{\partial X}{\partial v} &= \cos\sigma\left(\frac{D'}{\sqrt{E}} + \frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)\xi - \operatorname{sen}\sigma\left(\frac{D'}{\sqrt{E}} + \frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)\eta + \\
&\quad + \left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\operatorname{sen}\sigma\, D''}{\sqrt{G}}\right)\zeta.
\end{aligned}\right\} \tag{3*}$$

La condizione affinchè la congruenza sia normale è sempre espressa dalla (4):

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{E}\cos\sigma\right) = 0, \tag{4*}$$

ed il segmento τ del raggio della congruenza che intercede fra la S e la superficie $\overline{S}$ ortogonale sarà definito dalla medesima formola (5):

$$\tau' = -\sqrt{E}\cos\sigma. \tag{5*}$$

Indicando nuovamente con:

$$\overline{x}_0,\ \overline{x}_1,\ \overline{x}_2,\ \overline{x}_3,$$

le coordinate di $\overline{M}$ e con:

$$\overline{\xi}_0,\ \overline{\xi}_1,\ \overline{\xi}_2,\ \overline{\xi}_3,$$

quelle del piano ivi tangente alla $\overline{S}$ (cioè del piano normale al raggio della congruenza), avremo:

$$\overline{x} = x \cosh\tau + X \operatorname{senh}\tau \tag{6*}$$

$$\overline{\xi} = x \operatorname{senh}\tau + X \cosh\tau. \tag{7*}$$

Ritenendo allora le quantità α, β, γ il significato loro attribuito nelle (8), troveremo qui pei coefficienti delle tre forme quadratiche fondamentali della $\overline{S}$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

le espressioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{E} &= \alpha \operatorname{senh}^2\tau - 2\sqrt{E}\operatorname{sen}\sigma\left(\frac{D}{\sqrt{E}} + \frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)\operatorname{senh}\tau\cosh\tau + E\operatorname{sen}^2\sigma\cosh^2\tau\\
\overline{F} &= \beta\operatorname{senh}^2\tau - 2\left(\cos\sigma\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} + \operatorname{sen}\sigma\, D'\right)\operatorname{senh}\tau\cosh\tau\\
\overline{G} &= \gamma\operatorname{senh}^2\tau + 2\sqrt{G}\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\operatorname{sen}\sigma\, D''}{\sqrt{G}}\right)\operatorname{senh}\tau\cosh\tau + G\cosh^2\tau.
\end{aligned}\right\}\quad (\text{A}^*)$$

$$\left.\begin{aligned}
\overline{D} &= \sqrt{E}\operatorname{sen}\sigma\left(\frac{D}{\sqrt{E}} + \frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)\operatorname{senh}^2\tau - (\alpha + E\operatorname{sen}^2\sigma)\operatorname{senh}\tau\cosh\tau +\\
&\qquad + \sqrt{E}\operatorname{sen}\sigma\left(\frac{D}{\sqrt{E}} + \frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)\cosh^2\tau\\
\overline{D}' &= \left(\cos\sigma\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} + \operatorname{sen}\sigma\, D'\right)\operatorname{senh}^2\tau - \beta\operatorname{senh}\tau\cosh\tau +\\
&\qquad + \left(\cos\sigma\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} + \operatorname{sen}\sigma\, D'\right)\cosh^2\tau\\
\overline{D}'' &= -\sqrt{G}\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\operatorname{sen}\sigma\, D''}{\sqrt{G}}\right)\operatorname{senh}^2\tau - (\gamma + G)\operatorname{senh}\tau\cosh\tau -\\
&\qquad - \sqrt{G}\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\operatorname{sen}\sigma\, D''}{\sqrt{G}}\right)\cosh^2\tau.
\end{aligned}\right\}\quad (\text{B}^*)$$

$$\left.\begin{aligned}
\overline{e} &= \alpha\cosh^2\tau - 2\sqrt{E}\operatorname{sen}\sigma\left(\frac{D}{\sqrt{E}} + \frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)\operatorname{senh}\tau\cosh\tau + E\operatorname{sen}^2\sigma\operatorname{senh}^2\tau\\
\overline{f} &= \beta\cosh^2\tau - 2\left(\cos\sigma\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} + \operatorname{sen}\sigma\, D'\right)\operatorname{senh}\tau\cosh\tau\\
\overline{g} &= \gamma\cosh^2\tau + 2\sqrt{G}\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\operatorname{sen}\sigma\, D''}{\sqrt{G}}\right)\operatorname{senh}\tau\cosh\tau + G\operatorname{senh}^2\tau.
\end{aligned}\right\}\quad (\text{C}^*)$$

Dalle (A*) (C*) corrispondenti seguono, per sottrazione, le formole:

$$\overline{E} - \overline{e} = E\operatorname{sen}^2\sigma - \alpha,\quad \overline{F} - \overline{f} = -\beta,\quad \overline{G} - \overline{g} = G - \gamma. \qquad (9^*)$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

§ 3.

Esame del caso in cui sopra S, $\overline{S}$ si corrispondono le assintotiche.

Stabilite nei due paragrafi precedenti le formole fondamentali per la teoria della deformazione delle congruenze in geometria ellittica ed iperbolica, applichiamole dapprima alla risoluzione del seguente problema (Cf. (M) § 10):

Quando accadrà che, in tutte le flessioni della superficie di partenza S, alle linee assintotiche di S corrispondano le assintotiche della superficie $\overline{S}$ normale ai raggi della congruenza?

Perchè ciò accada dovranno aver luogo, comunque si fletta la S, le proporzioni:

$$\overline{D} : \overline{D}' : \overline{D}'' = D : D' : D''.$$

Svolgiamo completamente i calcoli pel solo caso ellittico, limitandoci per l'iperbolico ad enunciare i risultati che si stabiliscono in modo del tutto analogo.

L'equazione:

$$D' \overline{D} - D \overline{D}' = 0,$$

sostituendo per $\overline{D}$, $\overline{D}'$ i valori (B) § 1, diventa:

$$D' \left\{ (\alpha - E \operatorname{sen}^2 \sigma) \operatorname{sen} \tau \cos \tau - \sqrt{E} \operatorname{sen} \sigma \left(\frac{D}{\sqrt{E}} + \frac{\partial \sigma}{\partial u} \right) \cos 2\tau \right\} -$$
$$- D \left\{ \beta \operatorname{sen} \tau \cos \tau - \left(\cos \sigma \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} + \operatorname{sen} \sigma D' \right) \cos 2\tau \right\} = 0.$$

Poniamovi per α, β i loro effettivi valori (8) ed eliminiamo D'' col sostituire, secondo la formola (γ), al prodotto $D D''$ la quantità equivalente $D'^2 + (K-1) E G$; troviamo la equazione seguente:

$$\left\{ D \left(\cos \sigma \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} + \operatorname{sen} \sigma D' \right) - \sqrt{E} \operatorname{sen} \sigma D' \left(\frac{D}{\sqrt{E}} + \frac{\partial \sigma}{\partial u} \right) \right\} \cos 2\tau +$$
$$+ \left\{ D' \left[\left(\frac{D}{\sqrt{E}} + \frac{\partial \sigma}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\cos \sigma}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} + \frac{\operatorname{sen} \sigma D'}{\sqrt{G}} \right)^2 \right] - \right.$$
$$- D \left(\frac{D}{\sqrt{E}} + \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right) \left(\frac{D'}{\sqrt{E}} + \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right) - E \operatorname{sen}^2 \sigma D' +$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$$+\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}+\frac{\operatorname{sen}\sigma\, D'}{\sqrt{G}}\right)\cdot\left[\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}D-\right.$$
$$\left.-\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{G}}\left(D'^2+(K-1)E\,G\right)\right]\Bigg\}\operatorname{sen}\tau\cos\tau=0.$$

Questa, dovendo essere verificata in tutte le flessioni di S, sarà necessariamente un'identità in D, D' (Cf. (M) § 2. Eguagliando a zero il coefficiente di D'^2, e trascurando i casi noti in cui sia $\sigma=0$ o $\sigma=\frac{\pi}{2}$ (*), troviamo che deve essere intanto:

$$\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}=0,$$

indi, per la (4), anche $\frac{\partial\sigma}{\partial v}=0$. Possiamo dunque fare $E=1$, $\sigma=\sigma(u)$ e ponendo:

$$\sigma'=\frac{d\sigma}{du},$$

la precedente, divisa per D', ci dà:

$$\sigma'\operatorname{sen}\sigma\cos 2\tau=\left\{\left(\sigma'+\frac{\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)D+\sigma'^2-\operatorname{sen}^2\sigma\, K\right\}\operatorname{sen}\tau\cos\tau,$$

e si scinde nelle due:

$$\left.\begin{aligned}\sigma'+\frac{\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}&=0\\ 2\sigma'\operatorname{sen}\sigma\cos 2\tau&=(\sigma'^2-\operatorname{sen}^2\sigma\,K)\operatorname{sen}2\tau.\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

Si noti poi che la seconda delle (10), cioè la equazione:

$$D'\overline{D}''-D''\overline{D}'=0,$$

conduce ancora, ove si escludano i valori 0, $\frac{\pi}{2}$ per σ, alle due medesime equazioni (11) le quali, insieme alla (4):

$$\tau'=-\cos\sigma,$$

(*) Nel caso $\sigma=0$ la S è la evoluta della $\overline{S}$ che è necessariamente a curvatura costante; viceversa l'evoluta S di una superficie a curvatura costante risolve il problema nel caso di Weingarten $\sigma=0$. Quando poi $\sigma=\frac{\pi}{2}$ necessariamente la S e la $\overline{S}$ sono superficie parallele a curvatura nulla (Cf. la nota al seguente § 4).

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

rappresentano così le condizioni necessarie e sufficienti pel verificarsi della proprietà voluta.

Con calcoli analoghi pel caso iperbolico si trova che deve aversi ancora $\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = 0$, $\frac{\partial \sigma}{\partial v} = 0$, e fatto nuovamente:

$$E = 1, \quad \sigma = \sigma(u),$$

risultano le due equazioni:

$$\left.\begin{aligned} \sigma' + \frac{\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = 0 \\ 2\,\sigma' \operatorname{sen}\sigma \cosh 2\,\tau = (\sigma'^2 - \operatorname{sen}^2\sigma\, K) \operatorname{senh} 2\,\tau, \end{aligned}\right\} \tag{11*}$$

che insieme alla:

$$\tau' = -\cos\sigma,$$

esprimono tutte le condizioni richieste.

Dalla 1.ª delle (11) o (11*) integrando, e disponendo convenientemente del parametro v, segue:

$$\sqrt{G} = \cot\sigma.$$

L'elemento lineare della nostra superficie è adunque:

$$d\,s^2 = d\,u^2 + \cot^2\sigma\, d\,v^2;$$

esso appartiene dunque ad una superficie di rotazione e i raggi della congruenza sono normali alle trasformate dei paralleli. Quanto alla forma della curva meridiana essa risulta definita dalla equazione differenziale per σ, che si ottiene dalla 2.ª delle (11) o (11*) combinata colla condizione:

$$\tau' = -\cos\sigma.$$

§ 4.

Caso particolare delle superficie a curvatura nulla.

Lasciamo al prossimo lavoro lo studio della soluzione generale del problema del paragrafo precedente, limitandoci qui ad osservare il caso particolare ben semplice in cui si abbia:

$$\sigma = \text{cost.}, \quad G = 1,$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

indi $K = 0$. Allora le (11) o (11*) trovansi soddisfatte *per qualunque valore di* τ, quindi sopra tutte le superficie parallele normali ai raggi della congruenza si corrispondono le linee assintotiche (i sistemi coniugati). Ora questa circostanza può presentarsi solo in due casi e cioè o quando una e quindi tutte le superfici parallele sono a curvatura totale nulla, ovvero quando queste superficie siano sfere concentriche (*). L'ultimo caso si esclude subito perchè allora dovrebbero sussistere, in tutte le flessioni e per qualunque valore di τ, le proporzioni:

$$\overline{E} : \overline{F} : \overline{G} = \overline{e} : \overline{f} : \overline{g}.$$

Scrivendole allora sotto la forma:

$$\overline{E} + \overline{e} : \overline{F} + \overline{f} : \overline{G} + \overline{g} = \overline{e} : \overline{f} : \overline{g},$$

nel caso ellittico e sotto l'altra:

$$\overline{E} - \overline{e} : \overline{F} - \overline{f} : \overline{G} - \overline{g} = \overline{e} : \overline{f} : \overline{g},$$

nel caso iperbolico, le formole dei §§ 1, 2 dimostrano subito l'assurdità della ipotesi.

(*) Per vedere in modo semplice la cosa si riferisca una delle superficie parallele S alle sue linee di curvatura u, v e siano r_1, r_2 i suoi raggi principali di curvatura; si avrà:

$$D = -\frac{E}{r_2}, \quad D'' = -\frac{G}{r_1}, \quad F = D' = 0.$$

Per una superficie $\overline{S}$ parallela e alla distanza w da S avremo p. e. nel caso ellittico:

$$\begin{aligned} -\overline{D} &= E\left(\cos w + \frac{\operatorname{sen} w}{r_2}\right)\left(\operatorname{sen} w - \frac{\cos w}{r_2}\right) \\ -\overline{D}'' &= G\left(\cos w + \frac{\operatorname{sen} w}{r_1}\right)\left(\operatorname{sen} w - \frac{\cos w}{r_1}\right) \\ \overline{D}' &= 0. \end{aligned}$$

Se si suppone che sia $\overline{D} : \overline{D}'' = D : D''$ e si escludono per w i valori $w = 0, \frac{\pi}{2}$ si ottiene:

$$(r_1 - r_2)(r_1 r_2 + 1) = 0,$$

onde o $r_1 = r_2$ o $r_1 r_2 = -1$. Analogamente pel caso iperbolico.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Se ne conclude che le superficie ortogonali ai raggi sono a curvatura nulla. D'altra parte anche la superficie di partenza S è a curvatura K nulla; anzi, avendosi pel quadrato del suo elemento lineare:

$$d s^2 = d u^2 + d v^2,$$

si vede che le linee $u =$ cost. sono geodetiche parallele nel senso euclideo. Abbiamo dunque stabilito il teorema seguente che vale in qualunque spazio a curvatura costante, incluso l'euclideo (Cf. (M) § 2): *Sopra una qualsiasi superficie a curvatura totale nulla di uno spazio di curvatura costante si tracci un sistema di geodetiche g parallele nel senso euclideo, indi per ogni punto della superficie si conduca un raggio normale alla geodetica g, che vi passa, ed inclinato di un angolo costante σ arbitrario alla superficie. La congruenza così ottenuta è una congruenza normale e le superficie ortogonali ai raggi sono esse stesse a curvatura nulla.*

Come si vede, abbiamo così ottenuta una semplice soluzione del problema fondamentale [A] pel caso in cui le superficie $\overline{S}$ normali ai raggi siano a curvatura nulla. Osserveremo ancora che si può dare alla superficie S la forma di una superficie di rotazione in guisa che le geodetiche $u =$ cost. diventino i paralleli. In tal caso, il raggio del parallelo essendo costante, la curva meridiana è una linea geodeticamente parallela all'asse di rotazione, cioè un circolo che nel caso iperbolico avrà il centro ideale. Viceversa facendo rotare un circolo attorno alla retta del suo piano che è ad esso geodeticamente parallela si genera una superficie a curvatura nulla. Nello spazio ellittico l'asse di rotazione è la polare del centro del circolo e la superficie generata non è altro che la superficie di CLIFFORD (*).

(*) Vedi la mia Memoria: *Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica.* (Questi *Annali.* Tomo XXIV, 1896.)

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

§ 5.

Risoluzione del problema [A] per una superficie $\overline{S}$ d'area minima.

Trattiamo ora il problema fondamentale [A] pel caso in cui una delle superficie $\overline{S}$ normali alla congruenza debba costantemente restare ad area minima. Anche qui svilupperemo i calcoli pel solo caso ellittico, limitandoci ad indicare i risultati per l'iperbolico.

Se la superficie $\overline{S}$ deve restare ad area minima, dovrà aver luogo la proporzionalità fra i coefficienti della prima e della terza forma fondamentale di $\overline{S}$; sussisteranno cioè le proporzioni:

$$\overline{E}:\overline{F}:\overline{G}=\overline{e}:\overline{f}:\overline{g}.$$

Queste non sono veramente caratteristiche per una superficie $\overline{S}$ ad area minima, ma varrebbero egualmente se la $\overline{S}$ fosse una sfera. In quest'ultimo caso però la detta proporzionalità dovrebbe aver luogo in tutte le flessioni della superficie S di partenza e *per qualunque valore di* τ, ciò che già al paragrafo precedente abbiamo avvertito essere assurdo.

Basterà dunque ricercare quando potranno verificarsi, comunque si fletta la S, le proporzioni precedenti che nel caso ellittico gioverà scrivere:

$$\overline{E}:\overline{F}:\overline{G}=\overline{E}+\overline{e}:\overline{F}+\overline{f}:\overline{G}+\overline{g}. \tag{12}$$

Ora prendasi la prima:

$$\overline{F}(\overline{E}+\overline{e})-\overline{E}(\overline{F}+\overline{f})=0,$$

che, per la formola in fine al § 1, si scrive:

$$\left\{\beta\,\mathrm{sen}^2\tau-2\left(\cos\sigma\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}+\mathrm{sen}\,\sigma\,D'\right)\mathrm{sen}\,\tau\cos\tau\right\}\cdot(\alpha+E\,\mathrm{sen}^2\sigma)-$$
$$-\left\{\alpha\,\mathrm{sen}^2\tau-2\sqrt{E}\,\mathrm{sen}\,\sigma\left(\frac{D}{\sqrt{E}}+\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)\mathrm{sen}\,\tau\cos\tau+E\,\mathrm{sen}^2\sigma\cos^2\tau\right\}\cdot\beta=0.$$

Sviluppando e ricordando che, per la (4), si ha:

$$\cos\sigma\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}+\mathrm{sen}\,\sigma\,D'=\sqrt{E}\,\mathrm{sen}\,\sigma\left(\frac{D'}{\sqrt{E}}+\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right),$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

la precedente diviene:

$$E \operatorname{sen}^2 \sigma \cdot \beta \cos 2\tau = \left\{ \sqrt{E} \operatorname{sen} \sigma \left(\frac{D}{\sqrt{E}} + \frac{\partial \sigma}{\partial u} \right) \beta - \right.$$
$$\left. - \sqrt{E} \operatorname{sen} \sigma \left(\frac{D'}{\sqrt{E}} + \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right) (\alpha + E \operatorname{sen}^2 \sigma) \right\} \operatorname{sen} 2\tau.$$

Dividendo per $\sqrt{E} \operatorname{sen} \sigma$ (*), sostituendo ad α, β i loro effettivi valori (8) § 1 e ponendo per brevità:

$$T = \operatorname{tg} 2\tau, \tag{13}$$

otteniamo:

$$\left.\begin{aligned} &T \left\{ \left(\frac{D'}{\sqrt{E}} + \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right) \left(\frac{\cos \sigma}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} + \frac{\operatorname{sen} \sigma \, D'}{\sqrt{G}} \right)^2 + \left(\frac{D'}{\sqrt{E}} + \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right) E \operatorname{sen}^2 \sigma + \right. \\ &+ \left(\frac{D}{\sqrt{E}} + \frac{\partial \sigma}{\partial u} \right) \left(\frac{\cos \sigma}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} + \frac{\operatorname{sen} \sigma \, D'}{\sqrt{G}} \right) \left. \left(\frac{\cos \sigma}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\operatorname{sen} \sigma \, D''}{\sqrt{G}} \right) \right\} + \\ &\qquad + \sqrt{E} \operatorname{sen} \sigma \left\{ \left(\frac{D}{\sqrt{E}} + \frac{\partial \sigma}{\partial u} \right) \left(\frac{D'}{\sqrt{E}} + \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right) - \right. \\ &\qquad - \left(\frac{\cos \sigma}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} + \frac{\operatorname{sen} \sigma \, D'}{\sqrt{G}} \right) \left. \left(\frac{\cos \sigma}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\operatorname{sen} \sigma \, D''}{\sqrt{G}} \right) \right\} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Moltiplichiamo questa per D e sostituiamo, come al solito, al prodotto $D D''$ la quantità equivalente:

$$D'^2 + (K - 1) E G.$$

Nella equazione risultante, che deve essere un'identità in D, D', basta eguagliare a zero il coefficiente di $D D'^2$ per ottenere:

$$\cos \sigma \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} + \operatorname{sen} \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial v} = 0,$$

e, ricordando che si ha $\frac{\partial}{\partial v} (\sqrt{E} \cos \sigma) = 0$, ne deduciamo: (**)

$$\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial v} = 0.$$

(*) Con ciò escludiamo il caso $\sigma = 0$, corrispondente alle evolute delle superficie d'area minima.

(**) Si trascura naturalmente il caso $\sigma = \frac{\pi}{2}$, di cui l'impossibilità è chiara a priori.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Potremo dunque porre $E = 1$, $\sigma = \sigma(u)$, dopo di che la (14), divisa per D', ci darà:

$$T\left\{\frac{\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}D + \frac{\sigma'\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} - \right.$$
$$\left. - \frac{\sigma'\operatorname{sen}^2\sigma\, D''}{G} + \operatorname{sen}^2\sigma\left(1 - \frac{D D'' - D'^2}{G}\right)\right\} +$$
$$+ \operatorname{sen}\sigma\left\{D + \frac{\operatorname{sen}^2\sigma\, D''}{G} + \sigma' - \frac{\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right\} = 0.$$

Essendo per l'equazione di GAUSS:

$$\frac{D D'' - D'^2}{G} = K - 1,$$

la precedente si cangia in una relazione *lineare* fra D, D'' e però deve risultare identica. Se ne deducono, dividendo per $\operatorname{sen}\sigma$, le tre equazioni:

$$\left.\begin{aligned} &T\sigma' = \operatorname{sen}\sigma \\ &T\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} + 1 = 0 \\ &T\left\{\frac{\sigma'\cos\sigma}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} + \operatorname{sen}\sigma(2 - K)\right\} + \sigma' - \frac{\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Ed ora molto facilmente si vede che la seconda delle proporzioni (12) non porta altre relazioni oltre le (15), sicchè tutte e sole le soluzioni dell'attuale problema si otterranno soddisfacendo alle (15).

Eliminando T fra la prima e la seconda delle (15), si ha:

$$\sigma' + \frac{\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = 0,$$

da cui integrando e disponendo convenientemente del parametro v, risulta che possiamo porre anche qui:

$$\sqrt{G} = \cot\sigma. \quad (16)$$

La terza delle (15) diventa:

$$\operatorname{sen}^2\sigma\,(2 - K) + \sigma'^2 = 0. \quad (17)$$

Ma per la (16) si ha:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2} = \frac{\sigma''}{\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma} - \frac{2\sigma'^2}{\operatorname{sen}^2\sigma},$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

onde la (17) si trasforma nella seguente equazione differenziale per σ:

$$\sigma'' = 3 \cot \sigma \,.\, \sigma'^2 + 2 \operatorname{sen} \sigma \cos \sigma. \tag{18}$$

Determinato σ da questa (Vedi paragrafo seguente), avremo per $T = \operatorname{tg} 2\tau$ il valore:

$$\operatorname{tg} 2\tau = \frac{\operatorname{sen} \sigma}{\sigma'}, \tag{19}$$

e tutte le nostre condizioni saranno soddisfatte purchè risulti:

$$\frac{d\tau}{du} = \tau' = -\cos \sigma.$$

Ciò ha luogo in effetto poichè, derivando la (19) e sostituendo $-\cos \sigma$ per τ', otteniamo precisamente la equazione differenziale (18) per σ.

Esiste dunque una superficie S di rotazione dello spazio ellittico che risolve il problema [A] quando la superficie $\overline{S}$ ortogonale ai raggi della congruenza associata ad S debba essere ad area minima; l'elemento lineare S è dato da:

$$d s^2 = d u^2 + \cot^2 \sigma \, d v^2, \tag{20}$$

la funzione σ della sola u dovendo soltanto soddisfare alla equazione differenziale (18).

Pel caso iperbolico, servendoci delle proporzioni:

$$\overline{E} : \overline{F} : \overline{G} = E - \overline{e} : F - \overline{f} : G - \overline{g},$$

con calcoli del tutto simili, troviamo che la soluzione del problema proposto è data da uua superficie S di rotazione d'elemento lineare (20), la funzione σ della u soddisfacendo qui alla equazione differenziale:

$$\sigma'' = 3 \cot \sigma \, \sigma'^2 - 2 \operatorname{sen} \sigma \cos \sigma. \tag{18*}$$

La formola (19) viene poi sostituita dalla seguente:

$$\operatorname{tgh} 2\tau = \frac{\operatorname{sen} \sigma}{\sigma'} \,. \tag{19*}$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

§ 6.

L'elemento lineare della superficie S.

Si tratta ora di determinare la forma della superficie di rotazione dello spazio ellittico ed iperbolico, che abbiamo sopra ottenuto come soluzione del problema [A] pel caso di una superficie $\overline{S}$ d'area minima.

Cominciando dal caso ellittico, osserviamo che per integrare la (18) basta prendere per variabile indipendente σ in luogo di u ed assumere σ'^2 come funzione incognita, ciò che dà luogo ad una equazione lineare del 1.° ordine. Si ottiene così:

$$\sigma' = \operatorname{sen} \sigma \sqrt{k^2 \operatorname{sen}^4 \sigma - 1},$$

indicando k una costante che, per avere superficie reali, dovremo evidentemente supporre, in valore assoluto, maggiore dell'unità. L'elemento lineare della S avrà dunque nel caso ellittico la forma:

$$d s^2 = \frac{d \sigma^2}{\operatorname{sen}^2 \sigma \, (k^2 \operatorname{sen}^4 \sigma - 1)} + \cot^2 \sigma \, d v^2, \tag{21}$$

mentre la formola:

$$\operatorname{tg} 2 \tau = \frac{1}{\sqrt{k^2 \operatorname{sen}^4 \sigma - 1}}, \tag{22}$$

definirà l'ampiezza τ del segmento intercetto sul raggio della congruenza associata fra la superficie S e la superficie $\overline{S}$ d'area minima ortogonale ai raggi.

Nel caso iperbolico otteniamo similmente per l'elemento lineare della S:

$$d s^2 = \frac{d \sigma^2}{\operatorname{sen}^2 \sigma \, (k^2 \operatorname{sen}^4 \sigma + 1)} + \cot^2 \sigma \, d v^2, \tag{21*}$$

e per l'ampiezza τ del segmento:

$$\operatorname{tgh} 2 \tau = \frac{1}{\sqrt{k^2 \operatorname{sen}^4 \sigma + 1}} \cdot \tag{22*}$$

Nel caso attuale la costante k non è soggetta a veruna limitazione; soltanto è da escludersi il valore $k = 0$ perchè allora la (22) darebbe un valore infinito per τ, ciò che non corrisponde più ad una effettiva soluzione del

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

problema [A] (*). Ci proponiamo ora di dimostrare che l'elemento lineare (21) o (21*) appartiene al *paraboloide di rotazione* del rispettivo spazio ellittico od iperbolico. Per definire la superficie a cui diamo questo nome diciamo che, per analogia colle denominazioni dello spazio euclideo, intendiamo nella geometria ellittica od iperbolica per *parabola* quella curva piana (conica) i cui punti equidistano da un punto fisso (fuoco) e da una retta fissa (direttrice), scelti nel piano della curva. Chiamiamo quindi paraboloide (di rotazione) la superficie generata dal rotare della parabola attorno alla retta (asse) condotta pel fuoco perpendicolarmente alla direttrice.

È bene avvertire che nel caso ellittico la parabola può anche ritenersi come un'ellisse il cui asse maggiore abbia la lunghezza di un quadrante. E invero se della direttrice consideriamo il polo e questo riguardiamo come un secondo fuoco, la somma delle distanze focali eguaglierà per ogni punto della curva, precisamente un quadrante. Nel caso ellittico potremo adunque riguardare il paraboloide come un ellissoide di rotazione il cui asse maggiore (asse di rotazione) ha la lunghezza di un quadrante. Nel caso iperbolico invece il secondo fuoco è un punto ideale e il paraboloide si dirà *di prima specie* per distinguerlo da un paraboloide *di seconda specie* che incontreremo più oltre (§ 20).

§ 7.

Il paraboloide di Guichard in geometria ellittica.

Per dimostrare le nostre ultime asserzioni premettiamo le osservazioni seguenti:

Se per una superficie di rotazione dello spazio ellittico indichiamo con α l'arco di meridiano e con r il raggio del parallelo, che sarà una funzione della sola α, l'elemento lineare ds della superficie sarà dato dalla for-

(*) In questo caso l'elemento lineare (21*), posto $\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}\sigma = u$ diventa:

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{senh}^2 u \, dv^2,$$

ed appartiene alle *sviluppabili* dello spazio iperbolico. Allora si potrebbe dimostrare che in tutte le flessioni della sviluppabile S i raggi della congruenza sono le normali di una curva dello spazio.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

mola:

$$d s^2 = d \alpha^2 + \text{sen}^2 r \, d \beta^2, \tag{23}$$

indicando β la longitudine (*).

Ora assumiamo nel piano ellittico un sistema di coordinate di WEIERSTRASS x_0, x_1, x_2, e poniamo:

$$x_0 = \text{sen}\, u \cos v, \quad x_1 = \text{sen}\, u \,\text{sen}\, v, \quad x_2 = \cos u,$$

Consideriamo una parabola, il cui primo fuoco F sia nel punto:

$$F \equiv (0, 0, 1) \quad \text{o} \quad u = 0,$$

e il secondo fuoco nel punto:

$$F' \equiv (\text{sen}\, c, \ 0, \ \cos c) \quad \text{o} \quad u = c, \ v = 0,$$

talchè c indicherà la distanza focale, ossia il complemento della distanza del fuoco F dalla sua direttrice. Per la distanza $M F$ di un punto $M \equiv (x_0, x_1, x_2)$ dal primo fuoco si ha:

$$\cos M F = \cos u,$$

e se il punto M appartiene alla parabola dovremo avere:

$$\cos M F' = \text{sen}\, u.$$

Ma si ha:

$$\cos M F' = x_0 \,\text{sen}\, c + x_2 \cos c;$$

lungo la parabola si ha dunque:

$$\text{sen}\, u \cos v \,\text{sen}\, c + \cos u \cos c = \text{sen}\, u,$$

cioè:

$$\cos v = \frac{\text{sen}\, u - \cos u \cos c}{\text{sen}\, u \,\text{sen}\, c}, \tag{24}$$

e però:

$$\text{sen}^2 v = \frac{\text{sen}\, 2\, u - \cos c}{\text{sen}^2 u \,\text{sen}^2 c}.$$

L'elemento d'arco $d\alpha$ della parabola è dato da:

$$d\alpha^2 = du^2 + \text{sen}^2 u \, d v^2,$$

(*) Ciò risulta subito dall'osservare che nel piano ellittico l'elemento d'arco di un circolo di raggio r, che sottenda al centro l'angolo infinitesimo $d\beta$, è dato da:

$$\text{sen}\, r \, d\beta.$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

essendo u, v legati dalla (24). E poichè da questa, differenziando, segue:

$$\operatorname{sen} v\, d\, v = -\frac{\cot c\, d\, u}{\operatorname{sen}^2 u},$$

ne dedurremo:

$$d\,\alpha^2 = \frac{\operatorname{sen} 2\, u\, d\, u^2}{\operatorname{sen} 2\, u - \cos c}.$$

Ora le coordinate dell'asse della parabola sono:

$$\xi_0 = 0 \quad \xi_1 = 0 \quad \xi_2 = 1,$$

da cui segue:

$$\operatorname{sen} r = \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v,$$

e però dalla (23) per l'elemento lineare del paraboloide di rotazione otteniamo:

$$d\, s^2 = \frac{\operatorname{sen} 2\, u}{\operatorname{sen} 2\, u - \cos c}\, d\, u^2 + \frac{(\operatorname{sen} 2\, u - \cos c) \cos c}{\operatorname{sen}^2 c}\, d\,\beta^2. \tag{25}$$

Indicando ora con σ l'angolo d'inclinazione del raggio focale sulla parabola, abbiamo:

$$\operatorname{tg} \sigma = \operatorname{sen} u \frac{d\, v}{d\, u} = -\frac{\cot c}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v} = -\sqrt{\frac{\cos c}{\operatorname{sen} 2\, u - \cos c}},$$

ovvero:

$$\operatorname{sen} 2\, u = \frac{\cos c}{\operatorname{sen}^2 \sigma}. \tag{26}$$

Ora se si trasforma l'elemento lineare (25) esprimendo u per σ e ponendo inoltre:

$$\beta = v \operatorname{tg} c, \quad k = \frac{1}{\cos c},$$

si trova appunto l'elemento lineare (21). La nostra superficie S è adunque un paraboloide di rotazione e si noti che la formola $k = \dfrac{1}{\cos c}$ sta in armonia colla condizione $k^2 > 1$ del § 6.

Risulta di più dal nostro calcolo che l'angolo σ d'inclinazione dei raggi della congruenza associata sul paraboloide coincide coll'angolo d'inclinazione dei raggi focali sulla superficie stessa, onde si conclude che, conformata la S a paraboloide di rotazione, i raggi della congruenza associata si dirige-

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

ranno tutti verso l'uno o verso l'altro fuoco. Infine, se ricorriamo alla formola (22), otteniamo per la (26):

$$\operatorname{tg} 2\tau = \frac{1}{\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^4 \sigma}{\cos^2 c} - 1}} = \operatorname{tg} 2u.$$

Dunque il segmento τ eguaglia precisamente il raggio focale.

Possiamo riassumere i nostri risultati col teorema seguente che è l'estensione alla geometria ellittica del primo teorema di Guichard (Cf. (M) prefazione):

Si consideri nello spazio ellittico un paraboloide di rotazione, o ciò che è lo stesso, un ellissoide di rotazione il cui asse maggiore abbia la lunghezza di un quadrante, e si immaginino i segmenti che dai punti della superficie vanno all'uno o all'altro fuoco invariabilmente connessi alla superficie nelle sue flessioni. Flettendo comunque il paraboloide che seco trasporti i detti segmenti, il luogo dei loro estremi, riuniti primitivamente nel fuoco, sarà sempre una superficie d'area minima.

Se si rammenta di più che nello spazio ellittico la superficie polare di una superficie ad area minima (cioè la sua parallela alla distanza di un quadrante) è ancora ad area minima, si vede che ad ogni superficie S applicabile sul paraboloide vengono a coordinarsi *quattro* superficie d'area minima, due a due simmetriche rispetto alla S, riguardata come superficie riflettente delle loro normali.

§ 8.

Il paraboloide di Guichard in geometria iperbolica.

Stabiliremo analogamente l'estensione del primo teorema di Guichard alla geometria iperbolica, servendoci della formola qui corrispondente alla (23):

$$d s^2 = d \alpha^2 + \operatorname{senh}^2 r \, d \beta^2, \tag{23*}$$

che dà l'elemento lineare di una superficie di rotazione.

Cerchiamo dunque in primo luogo l'elemento d'arco $d\alpha$ di una parabola nel piano iperbolico. Scelto perciò in questo piano un sistema di coordinate di Weierstrass x_0, x_1, x_2 e posto:

$$x_0 = \cosh u, \quad x_1 = \operatorname{senh} u \cos v, \quad x_2 = \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v,$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

ciò che dà all'elemento lineare del piano la forma tipica:

$$d\,s^2 = d\,x_1^2 + d\,x_2^2 - d\,x_0^2 = d\,u^2 + \operatorname{senh}^2 u\,d\,v^2,$$

consideriamo una parabola il cui fuoco F sia nel punto $F \equiv (1,\ 0,\ 0)$. Indicando con c la distanza del fuoco dalla direttrice, potremo assumere come direttrice la retta di coordinate:

$$\xi_0 = \operatorname{senh} c, \quad \xi_1 = \cosh c, \quad \xi_2 = 0,$$

cosicchè l'asse della parabola avrà le coordinate:

$$\eta_0 = 0, \quad \eta_1 = 0, \quad \eta_2 = 1.$$

Poichè ogni punto della parabola equidista dal fuoco $F \equiv (1,\ 0,\ 0)$ e dalla direttrice $d \equiv (\operatorname{senh} c,\ \cosh c,\ 0)$, avremo lungo la curva:

$$\operatorname{senh} u = \operatorname{senh} c \cosh u - \cosh c \operatorname{senh} u \cos v,$$

da cui:

$$\cos v = \frac{\operatorname{senh} c \cosh u - \operatorname{senh} u}{\cosh c \operatorname{senh} u};$$

e però:

$$\operatorname{sen}^2 v = \frac{\operatorname{senh} 2\,u \operatorname{senh} c - \operatorname{senh}^2 c}{\cosh^2 c \operatorname{senh}^2 u},$$

e differenziando:

$$\operatorname{sen} v\,d\,v = \frac{\operatorname{tgh} c}{\operatorname{senh}^2 u}\,d\,u.$$

Per l'elemento d'arco $d\,\alpha$ della parabola abbiamo dunque:

$$d\,\alpha^2 = \frac{\operatorname{senh} 2\,u}{\operatorname{senh} 2\,u - \operatorname{senh} c}\,d\,u^2;$$

e poichè per la distanza r del punto $(u,\ v)$ dall'asse di rotazione $(0,\ 0,\ 1)$ si ha:

$$\operatorname{senh} r = \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v = \frac{\sqrt{\operatorname{senh} 2\,u \operatorname{senh} c - \operatorname{senh}^2 c}}{\cosh c},$$

ne risulterà per l'elemento lineare del paraboloide:

$$d\,s^2 = \frac{\operatorname{senh} 2\,u}{\operatorname{senh} 2\,u - \operatorname{senh} c}\,d\,u^2 + \frac{\operatorname{senh} 2\,u \operatorname{senh} c - \operatorname{senh}^2 c}{\cosh^2 c}\,d\,\beta^2. \qquad (25^*)$$

Indicando ora nuovamente con σ l'angolo d'inclinazione del raggio focale

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

sulla parabola, abbiamo:

$$\operatorname{tg}\sigma = \operatorname{senh} u \frac{dv}{du} = \frac{\operatorname{tgh} c}{\operatorname{senh} u \operatorname{sen} v},$$

cioè:

$$\operatorname{tg}\sigma = \sqrt{\frac{\operatorname{senh} c}{\operatorname{senh} 2u - \operatorname{senh} c}},$$

ovvero:

$$\operatorname{senh} 2u = \frac{\operatorname{senh} c}{\operatorname{sen}^2 \sigma}. \tag{26*}$$

Trasformiamo l'elemento lineare (25*) esprimendo u per σ e ponendo:

$$\beta = v \coth c, \quad k = \frac{1}{\operatorname{senh} c};$$

troviamo così appunto l'elemento lineare (21*) del § 6. Questo appartiene dunque al paraboloide di rotazione e la formola:

$$k = \frac{1}{\operatorname{senh} c},$$

stabilisce il significato geometrico della costante k, essendo c la distanza del fuoco dalla direttrice.

Pel significato di σ, si vede poi che, conformata la S a paraboloide di rotazione, i raggi della congruenza associata si dirigono tutti al fuoco, ovvero sono i riflessi dei raggi focali sul paraboloide.

In fine la formola (22*), confrontata colla (26*), ci dà:

$$\operatorname{tgh} 2\tau = \operatorname{tgh} 2u,$$

e dimostra che il segmento τ eguaglia il corrispondente raggio focale.

Possiamo dunque enunciare, anche per la geometria iperbolica, il teorema:

Si consideri un paraboloide di rotazione, che si fletta comunque trasportando seco, invariabilmente legati alla superficie, i segmenti che dai punti di questa vanno al fuoco F; il luogo dei loro estremi, riuniti nella configurazione iniziale in F, sarà sempre una superficie d'area minima $\overline{S}$ ortogonale ai segmenti. Una seconda superficie minima si otterrà ogni volta prendendo la simmetrica di $\overline{S}$ rispetto alla superficie riflettente S, e le sue normali saranno i raggi riflessi.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Se ricordiamo i risultati del calcolo al § 5, vediamo che così non soltanto abbiamo trovata l'estensione del primo teorema di Guichard agli spazî di curvatura costante, ma abbiamo di più dimostrato che: *Le uniche soluzioni del problema fondamentale* [A], *quando la superficie* $\overline{S}$ *ortogonale ai raggi della congruenza debba restare costantemente ad area minima, sono fornite dal paraboloide di rotazione e dalle due congruenze associate, prescindendo dalle evolute delle superficie minime che risolvono il problema stesso nel caso* $\sigma = 0$.

§ 9.

Corrispondenza fra i sistemi coniugati di S ed i sistemi ortogonali di $\overline{S}$.

Per preparare la trattazione del problema d'inversione è utile che studiamo le proprietà della corrispondenza, che la costruzione geometrica stessa stabilisce fra i punti di una superficie S applicabile sul paraboloide di rotazione ed i punti della superficie d'area minima $\overline{S}$ normale ai raggi di una delle due congruenze associate, quando ad ogni punto M di S si faccia corrispondere quel punto $\overline{M}$ di $\overline{S}$, ove il raggio della congruenza associata uscente da M incontra normalmente la $\overline{S}$.

Ci proponiamo di dimostrare il teorema:

Ad ogni sistema coniugato di S *corrisponde sopra* $\overline{S}$ *un sistema ortogonale.*

Facciamo anzi una ricerca molto più generale considerando una congruenza normale C che si deformi flettendo la superficie S di partenza e domandando se può accadere che ad ogni sistema coniugato di S corrisponda sempre, sopra *una* delle superficie $\overline{S}$ ortogonali alla congruenza, un sistema ortogonale.

La proprietà supposta si traduce nel sussistere delle proporzioni:

$$\overline{E} : \overline{F} : \overline{G} = D : D' : D''.$$

Prendiamo ora ad esempio il caso ellittico e nella equazione:

$$D' \overline{E} - D \overline{F} = 0,$$

sostituiamo per $\overline{E}$, $\overline{F}$ i valori (A) § 1 ed eliminiamo, nel solito modo, D'';

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

troveremo l'equazione:

$$\Big\{ D'\left[\left(\frac{D}{\sqrt{E}}+\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}+\frac{\operatorname{sen}\sigma\, D'}{\sqrt{G}}\right)^2\right]-$$
$$-D\left(\frac{D}{\sqrt{E}}+\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)\left(\frac{D'}{\sqrt{E}}+\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)+$$
$$+\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}+\frac{\operatorname{sen}\sigma\, D'}{\sqrt{G}}\right)\cdot\left[\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}D-\right.$$
$$\left.-\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{G}}\left(D'^2+(K-1)EG\right)\right]\Big\}\operatorname{sen}^2\tau+$$
$$+2\left(\cos\sigma\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}D-\sqrt{E}\operatorname{sen}\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial u}D'\right)\operatorname{sen}\tau\cos\tau+E\operatorname{sen}^2\sigma\cos^2\tau\, D'=0,$$

che dovrà essere un'identità in D, D'. Basta eguagliare a zero il coefficiente di D^2 per ottenere $\frac{\partial\sigma}{\partial v}=0$, onde segue anche $\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}=0$, dopo di che possiamo fare nuovamente:

$$E=1,\quad \sigma=\sigma(u),$$

e l'equazione precedente, divisa per D', diventa:

$$\left\{\left(\sigma'+\frac{\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)D+\sigma'^2+\operatorname{sen}^2\sigma(1-K)\right\}.\operatorname{sen}^2\tau-$$
$$-2\sigma'\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\tau\cos\tau+\operatorname{sen}^2\sigma\cos^2\tau=0.$$

Deve quindi aversi ulteriormente:

$$\sigma'+\frac{\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}=0,$$

da cui al solito integrando e disponendo del parametro v, si ha:

$$\sqrt{G}=\cot\sigma.$$

Ne risulta che la S è necessariamente applicabile sopra una superficie di rotazione ed inoltre si deve avere:

$$(3\sigma'^2-\sigma''\operatorname{tg}\sigma+\operatorname{sen}^2\sigma)\operatorname{sen}^2\tau-2\sigma'\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\tau\cos\tau+\operatorname{sen}^2\sigma\cos^2\tau=0, \quad (27)$$

insieme coll'altra:

$$\tau'=-\cos\sigma.$$

La seconda proporzione $\overline{F}:\overline{G}=D':D''$ porta alle medesime equazioni; queste adunque caratterizzano tutti i casi in cui ha luogo la proprietà voluta determinando la forma della curva meridiana. Non ci occuperemo qui di tro-

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

vare la soluzione più generale, ma solo osserveremo che nel caso di una superficie S applicabile sul paraboloide di rotazione e della superficie minima $\overline{S}$ normale ai raggi della congruenza associata la (27) è soddisfatta poichè, a causa della (18) § 5, essa si riduce alla (19) del paragrafo stesso.

Un calcolo perfettamente analogo conduce nel caso iperbolico alla equazione:

$$(3\sigma'^2 - \sigma'' \operatorname{tg}\sigma + \operatorname{sen}^2\sigma)\operatorname{senh}^2\tau - 2\sigma' \operatorname{sen}\sigma \operatorname{senh}\tau \cosh\tau + \operatorname{sen}^2\sigma \cosh^2\tau = 0, \quad (27^*)$$

che trovasi identicamente soddisfatta per le formole del § 5.

Dalla dimostrata proprietà della corrispondenza fra i sistemi coniugati di S ed i sistemi ortogonali di $\overline{S}$ risulta, come corollario: *La corrispondenza fra i punti delle due superficie d'area minima $\overline{S}$, $\overline{S}'$, normali ai raggi delle due congruenze associate ad una superficie S applicabile sul paraboloide di rotazione, è una corrispondenza conforme.*

§ 10.

Il problema d'inversione.

Procedendo ora a trattare il problema d'inversione (Cf. (M) Cap. III), supponiamo data nello spazio ellittico od iperbolico una qualunque superficie d'area minima S e domandiamo se è possibile riportare sopra ogni normale di S, a partire dal piede M, un tale segmento $M\overline{M} = \tau$ (variabile da punto a punto) che la superficie $\overline{S}$ luogo dell'estremo $\overline{M}$ risulti applicabile sul paraboloide di rotazione e la congruenza delle normali di S costituisca una delle due congruenze associate alla $\overline{S}$. Dimostreremo che la cosa è in effetto sempre possibile ed anzi, data la S, vi è una *tripla infinità* di superficie $\overline{S}$ che risolvono il problema d'inversione.

Nella ricerca che segue ci fonderemo unicamente sulle due seguenti proprietà, che i nostri risultati precedenti assicurano dovere aver luogo nella corrispondenza fra i punti delle due superficie S, $\overline{S}$:

1.° Essendo, come sopra, $M\overline{M} = \tau$ e indicando con σ l'angolo d'inclinazione del segmento MM sulla S deve aversi (§ 6):

$$\operatorname{sen}^2\sigma = \frac{1}{k \operatorname{sen} 2\tau},$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

nel caso ellittico ed invece:

$$\operatorname{sen}^2 \sigma = \frac{1}{k \operatorname{senh} 2\tau},$$

nel caso iperbolico, indicando k una costante.

2.° In ambedue i casi alle linee di curvatura di S deve corrispondere sopra $\overline{S}$ un sistema coniugato, ciò che è un caso particolare della proprietà dimostrata al paragrafo precedente.

Separando ora la trattazione dei due casi, occupiamoci dapprima dello spazio ellittico. La determinazione delle superficie d'area minima in questo spazio dipende dalla medesima equazione a derivate parziali:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + 4 \operatorname{senh} \theta \cosh \theta = 0, \tag{D}$$

che si presenta per le superficie a curvatura media costante dello spazio euclideo, ovvero per le superficie a curvatura totale costante positiva ($= 2$) di questo medesimo spazio (*). Ad ogni soluzione della (D) corrisponde nello spazio ellittico una superficie d'area minima S, perfettamente determinata di forma, coll'elemento lineare:

$$d s^2 = e^{2\theta} (d u^2 + d v^2),$$

le linee u, v essendo le linee di curvatura e coi raggi principali di curvatura:

$$r_1 = e^{2\theta}, \quad r_2 = - e^{2\theta} \; (**).$$

Per l'attuale superficie S, avendosi:

$$D = -\frac{E}{r_2} = 1, \quad D' = 0, \quad D'' = -\frac{G}{r_1} = -1,$$

le formole fondamentali (1) § 1 diventano le seguenti:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial u} = e^{\theta} \eta, \quad \frac{\partial \xi}{\partial u} = -e^{-\theta} \eta, \quad \frac{\partial \eta}{\partial u} = - e^{\theta} x + e^{-\theta} \xi - \frac{\partial \theta}{\partial v} \zeta, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v} \eta \\ &\frac{\partial x}{\partial v} = e^{\theta} \zeta, \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} = e^{-\theta} \zeta, \quad \frac{\partial \eta}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u} \zeta, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial v} = - e^{\theta} x - e^{-\theta} \xi - \frac{\partial \theta}{\partial u} \eta. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

(*) Cf. Vorlesungen, pag. 628, o la mia Memoria del 1888 già citata nella prefazione. (*Atti dei Lincei*, Tomo IV, serie 4.ª)

(**) La più semplice superficie d'area minima dello spazio ellittico è quella che corrisponde alla soluzione $\theta = 0$ della equazione fondamentale (D). La sua curvatura totale è nulla ed essa è una superficie di Clifford generata dal rotare di un circolo, di raggio eguale ad un semi-quadrante $\frac{\pi}{4}$, attorno alla polare del centro (Cf. § 4 in fine).

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Riportando sopra ogni normale di S il segmento $M\overline{M} = \tau$, le coordinate:

$$\overline{x}_0,\ \overline{x}_1,\ \overline{x}_2,\ \overline{x}_3,$$

dell' estremo $\overline{M}$ saranno date dalle formole:

$$\overline{x} = x \cos \tau + \xi \operatorname{sen} \tau,$$

da cui derivando ed osservando le (28) otteniamo:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \overline{x}}{\partial u} &= (e^{\theta} \cos \tau - e^{-\theta} \operatorname{sen} \tau)\, \eta + (\xi \cos \tau - x \operatorname{sen} \tau) \frac{\partial \tau}{\partial u} \\ \frac{\partial \overline{x}}{\partial v} &= (e^{\theta} \cos \tau + e^{-\theta} \operatorname{sen} \tau)\, \zeta + (\xi \cos \tau - x \operatorname{sen} \tau) \frac{\partial \tau}{\partial v} . \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Se poniamo per un momento:

$$\rho^2 = \frac{\left(\frac{\partial \tau}{\partial u}\right)^2}{(e^{\theta} \cos \tau - e^{-\theta} \operatorname{sen} \tau)^2} + \frac{\left(\frac{\partial \tau}{\partial v}\right)^2}{(e^{\theta} \cos \tau + e^{-\theta} \operatorname{sen} \tau)^2} + 1,$$

e indichiamo con $\overline{\xi}_0$, $\overline{\xi}_1$, $\overline{\xi}_2$, $\overline{\xi}_3$ le coordinate del piano tangente in $\overline{M}$ alla $\overline{S}$, avremo subito dalle precedenti le formole:

$$\rho\, \overline{\xi} = x \operatorname{sen} \tau - \xi \cos \tau + \frac{\frac{\partial \tau}{\partial u}}{e^{\theta} \cos \tau - e^{-\theta} \operatorname{sen} \tau}\, \eta + \frac{\frac{\partial \tau}{\partial v}}{e^{\theta} \cos \tau + e^{-\theta} \operatorname{sen} \tau}\, \zeta. \tag{30}$$

§ 11.

Le equazioni di trasformazione pel caso ellittico.

Preparate così le nostre formole, andiamo a stabilire il sistema di equazioni a derivate parziali cui deve soddisfare la funzione incognita τ di u, v. Per ciò osserviamo che essendo:

$$x_i \operatorname{sen} \tau - \xi_i \cos \tau,$$

le coordinate del piano normale in $\overline{M}$ al raggio $M\overline{M}$, si ha:

$$\operatorname{sen} \sigma = \Sigma\, \overline{\xi}\, (x \operatorname{sen} \tau - \xi \cos \tau),$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

e però dalle (30):

$$\operatorname{sen}^2 \sigma = \frac{1}{\rho^2},$$

ossia per quanto abbiamo osservato in principio al § 10:

$$\rho^2 = k \operatorname{sen} 2\tau.$$

Ponendo per ρ^2 il suo valore, vediamo intanto che τ deve soddisfare all'equazione del 1.° ordine:

$$\frac{1}{(e^\theta \cos\tau - e^{-\theta} \operatorname{sen}\tau)^2}\left(\frac{\partial \tau}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{(e^\theta \cos\tau + e^{-\theta} \operatorname{sen}\tau)^2}\left(\frac{\partial \tau}{\partial v}\right)^2 + 1 = k \operatorname{sen} 2\tau. \qquad \text{(I)}$$

Esprimiamo in secondo luogo che le linee u, v tracciano sulla $\overline{S}$ un sistema coniugato; avremo perciò l'equazione:

$$\Sigma\, \overline{\xi}\, \frac{\partial^2 \overline{x}}{\partial u\, \partial v} = 0,$$

che calcolata per mezzo delle (28), (29) e (30) ci dà:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau}{\partial u\, \partial v} &= \frac{e^\theta \cos\tau + e^{-\theta} \operatorname{sen}\tau}{e^\theta \cos\tau - e^{-\theta} \operatorname{sen}\tau}\frac{\partial \theta}{\partial v}\frac{\partial \tau}{\partial u} + \frac{e^\theta \cos\tau - e^{-\theta} \operatorname{sen}\tau}{e^\theta \cos\tau + e^{-\theta} \operatorname{sen}\tau}\frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial \tau}{\partial v} - \\ &- \left\{\frac{e^\theta \operatorname{sen}\tau + e^{-\theta}\cos\tau}{e^\theta \cos\tau - e^{-\theta} \operatorname{sen}\tau} + \frac{e^\theta \operatorname{sen}\tau - e^{-\theta}\cos\tau}{e^\theta \cos\tau + e^{-\theta} \operatorname{sen}\tau}\right\}\frac{\partial \tau}{\partial u}\frac{\partial \tau}{\partial v}. \end{aligned}\right\} \text{(II)}$$

Le equazioni simultanee (I), (II) formano, come ora si vedrà, un sistema completamente integrabile e la loro soluzione più generale τ, contiene quindi, oltre k, due costanti arbitrarie.

Scriviamo, perchè necessario alle verifiche seguenti, il sistema completo di equazioni del 2.° ordine che risultano dal combinare la (I) derivata rapporto ad u e v colla (II). Otteniamo così (*):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{e^\theta \cos\tau - e^{-\theta} \operatorname{sen}\tau}\frac{\partial \tau}{\partial u}\right) = k \cos 2\tau\,(e^\theta \cos\tau - e^{-\theta} \operatorname{sen}\tau) + \\ &\quad + \frac{e^\theta \operatorname{sen}\tau + e^{-\theta}\cos\tau}{(e^\theta \cos\tau + e^{-\theta} \operatorname{sen}\tau)^2}\left(\frac{\partial \tau}{\partial v}\right)^2 - \frac{\partial \theta}{\partial v}\frac{1}{e^\theta \cos\tau + e^{-\theta} \operatorname{sen}\tau}\frac{\partial \tau}{\partial v} \\ &\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{e^\theta \cos\tau - e^{-\theta} \operatorname{sen}\tau}\frac{\partial \tau}{\partial u}\right) = \frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{1}{e^\theta \cos\tau + e^{-\theta} \operatorname{sen}\tau}\frac{\partial \tau}{\partial v} - \\ &\quad - \frac{e^\theta \operatorname{sen}\tau - e^{-\theta}\cos\tau}{e^\theta \cos\tau - e^{-\theta} \operatorname{sen}\tau}\frac{\partial \tau}{\partial u}\frac{1}{e^\theta \cos\tau + e^{-\theta} \operatorname{sen}\tau}\frac{\partial \tau}{\partial v} \end{aligned}\right\} \text{(III)}$$

(*) Escludiamo i casi ovvii in cui forse $\frac{\partial \tau}{\partial u} = 0$ o $\frac{\partial \tau}{\partial v} = 0$. (Cf. (M) § 13.)

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{e^\theta\cos\tau+e^{-\theta}\operatorname{sen}\tau}\frac{\partial\tau}{\partial v}\right)=\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{1}{e^\theta\cos\tau-e^{-\theta}\operatorname{sen}\tau}\frac{\partial\tau}{\partial u}-\\
&\qquad-\frac{e^\theta\operatorname{sen}\tau+e^{-\theta}\cos\tau}{e^\theta\cos\tau-e^{-\theta}\operatorname{sen}\tau}\frac{\partial\tau}{\partial u}\frac{1}{e^\theta\cos\tau+e^{-\theta}\operatorname{sen}\tau}\frac{\partial\tau}{\partial v}\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{e^\theta\cos\tau+e^{-\theta}\operatorname{sen}\tau}\frac{\partial\tau}{\partial v}\right)=k\cos 2\tau\,(e^\theta\cos\tau+e^{-\theta}\operatorname{sen}\tau)+\\
&\quad+\frac{e^\theta\operatorname{sen}\tau-e^{-\theta}\cos\tau}{(e^\theta\cos\tau-e^{-\theta}\operatorname{sen}\tau)^2}\left(\frac{\partial\tau}{\partial u}\right)^2-\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{1}{e^\theta\cos\tau-e^{-\theta}\operatorname{sen}\tau}\frac{\partial\tau}{\partial u},
\end{aligned}\right\}\quad\text{(III)}$$

dove per simmetria e comodità di calcolo abbiamo scritto due volte, sotto forme diverse, l'equazione media (II). Poste le equazioni di trasformazione sotto questa forma, facilmente si vede che le condizioni d'integrabilità sono identicamente soddisfatte (Cf. (M) § 13); ma è inutile insistervi poichè vedremo al § 13 come l'attuale sistema (I), (III) si riconduca ad un sistema già considerato nella memoria precedente.

§ 12.

Verifiche relative alla superficie riflettente $\overline{S}$.

Supponiamo d'avere scelto per τ una qualsiasi delle ∞^2 soluzioni del sistema simultaneo (I), (III) e consideriamo la superficie $\overline{S}$ luogo dell'estremo $\overline{M}$ del segmento $M\overline{M}=\tau$ staccato sulla normale della S. Verificheremo che la S è applicabile sul paraboloide di rotazione e la congruenza delle normali di S è una delle due associate alla $\overline{S}$.

Indicando con:

$$\overline{d s}^2=\overline{E}\,d u^2+2\,\overline{F}\,d u\,d v+\overline{G}\,d v^2,$$

l'elemento lineare di $\overline{S}$, dedurremo per $\overline{E}$, $\overline{F}$, $\overline{G}$ le espressioni seguenti:

$$\overline{E}=\left(\frac{\partial\tau}{\partial u}\right)^2+(e^\theta\cos\tau-e^{-\theta}\operatorname{sen}\tau)^2,\quad \overline{F}=\frac{\partial\tau}{\partial u}\frac{\partial\tau}{\partial v},$$

$$\overline{G}=\left(\frac{\partial\tau}{\partial v}\right)^2+(e^\theta\cos\tau+e^{-\theta}\operatorname{sen}\tau)^2,$$

dalle quali, osservando la (I), si trae:

$$\overline{E}\,\overline{G}-\overline{F}^2=k\operatorname{sen}2\tau\,(e^\theta\cos\tau+e^{-\theta}\operatorname{sen}\tau)^2\,(e^\theta\cos\tau-e^{-\theta}\operatorname{sen}\tau)^2.$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Calcoliamo mediante la formola di BONNET (*) la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_\tau}$ che hanno sulla $\overline{S}$ le linee $\tau = \text{cost.}$ Osservando che si ha:

$$\overline{E}\frac{\partial \tau}{\partial v} - \overline{F}\frac{\partial \tau}{\partial u} = (e^\theta \cos\tau - e^{-\theta}\operatorname{sen}\tau)^2 \frac{\partial \tau}{\partial v},$$

$$\overline{F}\frac{\partial \tau}{\partial v} - \overline{G}\frac{\partial \tau}{\partial u} = (e^\theta \cos\tau + e^{-\theta}\operatorname{sen}\tau)^2 \frac{\partial \tau}{\partial u}$$

$$\overline{E}\left(\frac{\partial \tau}{\partial v}\right)^2 - 2\overline{F}\frac{\partial \tau}{\partial u}\frac{\partial \tau}{\partial v} + \overline{G}\left(\frac{\partial \tau}{\partial u}\right)^2 =$$

$$= (k \operatorname{sen} 2\tau - 1)(e^\theta \cos\tau + e^{-\theta}\operatorname{sen}\tau)^2 (e^\theta \cos\tau - e^{-\theta}\operatorname{sen}\tau)^2,$$

ne deduciamo:

$$\frac{1}{\rho_\tau} = \frac{-1}{\sqrt{k \operatorname{sen} 2\tau}\,(e^\theta \cos\tau + e^{-\theta}\operatorname{sen}\tau)(e^\theta \cos\tau - e^{-\theta}\operatorname{sen}\tau)}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{\sqrt{k \operatorname{sen} 2\tau - 1}}\,\frac{e^\theta \cos\tau + e^{-\theta}\operatorname{sen}\tau}{e^\theta \cos\tau - e^{-\theta}\operatorname{sen}\tau}\frac{\partial \tau}{\partial u}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{\sqrt{k \operatorname{sen} 2\tau - 1}}\,\frac{e^\theta \cos\tau - e^{-\theta}\operatorname{sen}\tau}{e^\theta \cos\tau + e^{-\theta}\operatorname{sen}\tau}\frac{\partial \tau}{\partial v}\right]\right\}.$$

Ma in forza delle (I), (III) si riscontra subito che ha luogo l'identità:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{e^\theta \cos\tau + e^{-\theta}\operatorname{sen}\tau}{e^\theta \cos\tau - e^{-\theta}\operatorname{sen}\tau}\frac{\partial \tau}{\partial u}\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{e^\theta \cos\tau - e^{-\theta}\operatorname{sen}\tau}{e^\theta \cos\tau + e^{-\theta}\operatorname{sen}\tau}\frac{\partial \tau}{\partial v}\right] =$$

$$= 2k \cos 2\tau\,(e^\theta \cos\tau + e^{-\theta}\operatorname{sen}\tau)(e^\theta \cos\tau - e^{-\theta}\operatorname{sen}\tau),$$

onde la precedente si muta nella formola semplice:

$$\frac{1}{\rho_\tau} = \frac{-k\cos 2\tau}{\sqrt{k \operatorname{sen} 2\tau\,(k \operatorname{sen} 2\tau - 1)}},$$

che ci dimostra intanto come le linee $\tau = \text{cost.}$ abbiano curvatura geodetica costante.

Di più se si considerano le loro traiettorie ortogonali, la cui equazione differenziale è:

$$(e^\theta \cos\tau - e^{-\theta}\operatorname{sen}\ )^2 \frac{\partial \tau}{\partial v} d\,u - (e^\theta \cos\tau + e^{-\theta}\operatorname{sen}\tau)^2 \frac{\partial \tau}{\partial u} d\,v = 0,$$

(*) *Lezioni*, pag. 145.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

facilmente si vede che esse hanno nulla la curvatura geodetica, cioè sono geodetiche (Cf. (M) § 14). Per l'arco α di queste geodetiche contato da una linea fissa $\tau = \text{cost.}$, mediante la formola a pag. 163 delle *Lezioni*, si trova:

$$\alpha = \int \sqrt{\frac{k \operatorname{sen} 2\tau}{k \operatorname{sen} 2\tau - 1}}\, d\tau.$$

L'elemento lineare della $\overline{S}$, riferito alle linee $\alpha = \text{cost.}$ (o $\tau = \text{cost.}$) e alle geodetiche ortogonali $v_1 = \text{cost.}$ avrà dunque la forma tipica di una superficie di rotazione:

$$\overline{d s^2} = d\alpha^2 + r^2\, d v_1^2,$$

la r essendo una funzione della sola α.

A causa della (31), per determinare r in funzione di α avremo:

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\alpha} = \frac{k \cos 2\tau}{\sqrt{k \operatorname{sen} 2\tau\,(k \operatorname{sen} 2\tau - 1)}},$$

ed esprimendo invece r per τ:

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\tau} = \frac{k \cos 2\tau}{k \operatorname{sen} 2\tau - 1},$$

da cui integrando:

$$r = c\sqrt{k \operatorname{sen} 2\tau - 1},$$

con c costante. Posto allora $c\, v_1 = \beta$, abbiamo:

$$\overline{d s^2} = \frac{k \operatorname{sen} 2\tau}{k \operatorname{sen} 2\tau - 1}\, d\tau^2 + (k \operatorname{sen} 2\tau - 1)\, d\beta^2.$$

Basta ora esprimere τ per σ, colla formola (§ 11):

$$k \operatorname{sen} 2\tau = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \sigma},$$

per ottenere:

$$\overline{d s^2} = \frac{d\sigma^2}{\operatorname{sen}^2\sigma\,(k^2 \operatorname{sen}^4\sigma - 1)} + \cot^2\sigma\, d\beta^2,$$

formola che ci dà appunto l'elemento lineare (21) (§ 6) del paraboloide di rotazione.

Siccome poi i segmenti $M\overline{M} = \tau$, costanti lungo le linee $\tau = \text{cost.}$, escono normalmente alla S essi saranno altresì perpendicolari alle linee $\tau = \text{cost.}$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

sulla $\overline{S}$, cioè alle trasformate dei paralleli del paraboloide. Osservando in fine il significato dell'angolo σ, ne concludiamo che i raggi $M\overline{M}$ formano una delle due congruenze associate alla $\overline{S}$.

Così trovansi dimostrate tutte le nostre asserzioni.

§ 13.

Le attuali equazioni di trasformazione (I), (III) ridotte a quelle delle ordinarie superficie a curvatura costante positiva.

Se della superficie ad area minima S assumiamo la simmetrica S' rispetto ad una qualunque delle ∞^3 superficie riflettenti $\overline{S}$ (applicabili sul paraboloide), fissata dal valore scelto per k e dalla soluzione τ scelta per le equazioni di trasformazione, questa nuova superficie S' sarà ancora, per i teoremi dimostrati, una superficie d'area minima. Otteniamo così un metodo di trasformazione delle superficie d'area minima in geometria ellittica, che permette di dedurre da ogni tale superficie nota una tripla infinità di superficie della medesima classe.

Potremmo qui dare le formole effettive per le superficie trasformate; ma, riserbandoci di stabilire le corrispondenti formole nel caso iperbolico, possiamo qui ometterle poichè le trasformazioni in discorso si riconducono sostanzialmente, come ora dimostreremo, a quelle già studiate nello spazio euclideo per le superficie applicabili sulla sfera.

È stato già sopra osservato invero che l'equazione a derivate parziali (D) per la ricerca delle superficie d'area minima dello spazio ellittico coincide con quella che nello spazio euclideo determina le superficie a curvatura costante positiva. Ed ora dimostreremo che le equazioni di trasformazione (I), (II) § 11 si riconducono alla loro volta, con una conveniente sostituzione, alle equazioni di trasformazione per le superficie a curvatura costante positiva dello spazio euclideo, come le abbiamo stabilite al § 12 (M).

Pongasi per ciò:

$$T = \cot\left(\frac{\pi}{4} + \tau\right) = \frac{1 - \operatorname{tg}\tau}{1 + \operatorname{tg}\tau}, \tag{31}$$

e la (I) § 11 si cangierà nella corrispondente equazione per T:

$$\frac{1}{(\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{(\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + 4 = (2\,k + 2)(1 - T^2).$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Ora mutando in questa rispettivamente $2u$, $2v$ in u, v (sostituzione che cangia appunto la (D) § 10 nella (3) § 12 (M)) e ponendo:

$$c = -\frac{k+1}{2},$$

essa si scrive:

$$\frac{1}{(\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{(\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + 1 = c\,(T^2 - 1),$$

che è precisamente la (I) § 12 (M). E si noti che avendosi:

$$c\,(c+1) = \frac{k^2-1}{4},$$

sarà $c\,(c+1) > 0$, conformemente alla condizione imposta (§ 12 (M)) alla costante c.

Similmente prendasi ora la (II) § 11, scritta per es. sotto la forma della terza delle (III). Colla medesima sostituzione (32) essa si cangia nella seguente:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\right) =$$

$$= \frac{\operatorname{senh}\theta}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u}\frac{1}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v} + \frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{1}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v},$$

la quale conserva la medesima forma col mutamento di $2u$, $2v$ in u, v rispettivamente e coincide coll'altra equazione fondamentale per le trasformazioni già ricordate nello spazio euclideo e precisamente colla seconda delle (III*) § 13 (M).

Dopo ciò è manifesto che tutti gli sviluppi analitici dati nella Memoria precedente, in particolare le conseguenze del teorema di permutabilità, valgono inalterati per le trasformazioni delle superficie minime in geometria ellittica.

Non insisterò quindi maggiormente su queste trasformazioni, aggiungendo solo quanto è necessario per riconoscere il significato della sostituzione (32), colla quale abbiamo ricondotto il nuovo sistema di equazioni di trasformazione all'antico.

Nello spazio ellittico (di curvatura $K = +1$) le due superficie parallele ad una superficie d'area minima ed equidistanti da questa per un semi-qua-

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

drante $\frac{\pi}{4}$ sono due superficie (polari l'una dell'altra) colla curvatura costante positiva $= 2$, avendo i rispettivi elementi lineari:

$$\left.\begin{aligned} d s_1^2 &= 2 (\cosh^2 \theta \, d u^2 + \operatorname{senh}^2 \theta \, d v^2) \\ d s_2^2 &= 2 (\operatorname{senh}^2 \theta \, d u^2 + \cosh^2 \theta \, d v^2) \text{ (*)}. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Invece di parlare delle trasformazioni delle superficie d'area minima nello spazio ellittico, possiamo dunque riferirci a queste loro parallele di curvatura $K = 2$. Allora il valore $\frac{\pi}{4} + \tau$ che figura nelle (31) dà precisamente il segmento di normale ad una delle anzidette superficie S intercetto dalla $\overline{S}$, applicabile sul paraboloide di rotazione, a cui la congruenza delle normali della S è associata.

D'altronde gli elementi lineari (32) appartengono altresì, nello spazio euclideo, a due superficie di curvatura $K = 2$ riferite alle loro linee di curvatura e che sono trasformate l'una dell'altra per la trasformazione involutoria di Hazzidakis. La (31) ci mostra la semplice relazione che passa fra il segmento $\frac{\pi}{4} + \tau$ da staccarsi sulla normale della superficie S nello spazio ellittico ed il segmento omologo T da riportarsi, nello spazio euclideo, sulla normale alla superficie col medesimo elemento lineare di S per ottenere nel luogo degli estremi, per lo spazio ellittico, una superficie applicabile sul paraboloide di rotazione, per l'euclideo invece una superficie applicabile sull'ellissoide (allungato) o sull'iperboloide di rotazione a due falde.

Se in fine aggiungiamo (ciò che facilmente si dimostra sviluppando i calcoli effettivi) che le rispettive superficie a curvatura costante $= 2$ trasformate nello spazio ellittico e nell'euclideo stanno ancora fra loro nella medesima relazione delle primitive, cioè offrono il medesimo elemento lineare, corrispondendo ancora ad una medesima nuova soluzione θ' della (D), avremo ricondotto completamente le trasformazioni delle superficie d'area minima in geometria ellittica a quelle per le superficie a curvatura costante positiva nello spazio euclideo.

(*) Cf. M. c. *Atti dei Lincei*, Serie 4.ª, tomo IV.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

§ 14.

Le equazioni di trasformazione pel caso iperbolico.

Volgiamoci ora alle ricerche analoghe per le superficie d'area minima dello spazio iperbolico, la cui curvatura si supporrà al solito $= -1$. La determinazione di queste superficie dipende dalla integrazione della equazione a derivate parziali:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = e^{2\theta} + e^{-2\theta}, \tag{E}$$

ad ogni soluzione θ di questa equazione corrispondendo una superficie d'area minima S dello spazio iperbolico, che, riferita alle linee di curvatura u, v, ha l'elemento lineare:

$$d s^2 = e^{2\theta}(d u^2 + d v^2),$$

ed i raggi principali di curvatura:

$$r_1 = e^{2\theta}, \quad r_2 = -e^{2\theta} \text{ (*)}.$$

Per la nostra superficie minima S le formole fondamentali (1*) § 2 diventano:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial u} = e^{\theta}\eta, \quad \frac{\partial \xi}{\partial u} = -e^{-\theta}\eta, \quad \frac{\partial \eta}{\partial u} = e^{\theta}x + e^{-\theta}\xi - \frac{\partial \theta}{\partial v}\zeta, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v}\eta \\ &\frac{\partial x}{\partial v} = e^{\theta}\zeta, \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} = e^{-\theta}\zeta, \quad \frac{\partial \eta}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u}\zeta, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial v} = e^{\theta}x - e^{-\theta}\xi - \frac{\partial \theta}{\partial u}\eta. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Applicando ora le considerazioni generali del § 10, riportiamo sopra ogni normale di S, a partire dal piede M, un segmento $M\overline{M} = \tau$, dove τ sarà una funzione da determinarsi di u, v. Per le coordinate:

$$\overline{x}_0, \ \overline{x}_1, \ \overline{x}_2, \ \overline{x}_3,$$

dell'estremo $\overline{M}$ avremo:

$$\overline{x} = x \cosh \tau + \xi \operatorname{senh} \tau,$$

(*) Cf. Vorlesungen, serie 628 o *Atti dei Lincei*, tomo IV, serie 4.ª

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

da cui derivando ed osservando le (33) deduciamo:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} &= (e^{\theta}\cosh\tau - e^{-\theta}\operatorname{senh}\tau)\,\eta + (x\operatorname{senh}\tau + \xi\cosh\tau)\frac{\partial\tau}{\partial u}\\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} &= (e^{\theta}\cosh\tau + e^{-\theta}\operatorname{senh}\tau)\,\zeta + (x\operatorname{senh}\tau + \xi\cosh\tau)\frac{\partial\tau}{\partial v}\cdot\end{aligned}\right\}\quad(34)$$

Indichiamo ora $\bar{\xi}_0$, $\bar{\xi}_1$, $\bar{\xi}_2$, $\bar{\xi}_3$ le coordinate del piano tangente in $\bar{M}$ alla superficie $\bar{S}$ luogo di questo estremo. Ponendo per brevità:

$$\rho^2 = \frac{\left(\frac{\partial\tau}{\partial u}\right)^2}{(e^{\theta}\cosh\tau - e^{-\theta}\operatorname{senh}\tau)^2} + \frac{\left(\frac{\partial\tau}{\partial v}\right)^2}{(e^{\theta}\cosh\tau + e^{-\theta}\operatorname{senh}\tau)^2} + 1,\qquad(35)$$

deduciamo dalle (34) le formole seguenti:

$$\left.\begin{aligned}\rho\,\bar{\xi} &= x\operatorname{senh}\tau + \xi\cosh\tau -\\ &- \frac{\frac{\partial\tau}{\partial u}}{e^{\theta}\cosh\tau - e^{-\theta}\operatorname{senh}\tau}\,\eta - \frac{\frac{\partial\tau}{\partial v}}{e^{\theta}\cosh\tau + e^{-\theta}\operatorname{senh}\tau}\,\zeta.\end{aligned}\right\}\quad(36)$$

Ora le coordinate del piano normale in $\bar{M}$ al segmento $M\bar{M}$ sono date dalle espressioni:

$$x_i\operatorname{senh}\tau + \xi_i\cosh\tau\;(i = 0,\ 1,\ 2,\ 3),$$

e per l'angolo σ d'inclinazione del segmento $M\bar{M}$ sulla superficie $\bar{S}$ abbiamo quindi:

$$\operatorname{sen}\sigma = \sum_{i=1}^{i=3}\bar{\xi}_i(x_i\operatorname{senh}\tau + \xi_i\cosh\tau) - \bar{\xi}_0(x_0\operatorname{senh}\tau + \xi_0\cosh\tau),$$

e però per le (36):

$$\operatorname{sen}\sigma = \frac{1}{\rho}\cdot$$

D'altronde dobbiamo avere (§ 10),

$$\operatorname{sen}^2\sigma = \frac{1}{k\operatorname{senh}2\tau},$$

onde, avendo riguardo al valore (35) di ρ^2, deduciamo intanto che la funzione τ dovrà soddisfare l'equazione a derivate parziali del 1.° ordine:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{(e^{\theta}\cosh\tau - e^{-\theta}\operatorname{senh}\tau)^2}\left(\frac{\partial\tau}{\partial u}\right)^2 +\\ &+ \frac{1}{(e^{\theta}\cosh\tau + e^{-\theta}\operatorname{senh}\tau)^2}\left(\frac{\partial\tau}{\partial v}\right)^2 + 1 = k\operatorname{senh}2\tau.\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{I}^*)$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Esprimiamo ora in secondo luogo, mediante l'equazione:

$$\sum_{i=1}^{i=3} \bar{\xi}_i \frac{\partial^2 \bar{x}_i}{\partial u \, \partial v} - \bar{\xi}_0 \frac{\partial^2 \bar{x}_0}{\partial u \, \partial v} = 0,$$

che sulla superficie $\overline{S}$ le linee u, v debbono tracciare un sistema coniugato (§ 10) e troveremo per τ l'ulteriore equazione del 2.° ordine:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau}{\partial u \, \partial v} &= \frac{e^\theta \cosh \tau + e^{-\theta} \operatorname{senh} \tau}{e^\theta \cosh \tau - e^{-\theta} \operatorname{senh} \tau} \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial \tau}{\partial u} + \frac{e^\theta \cosh \tau - e^{-\theta} \operatorname{senh} \tau}{e^\theta \cosh \tau + e^{-\theta} \operatorname{senh} \tau} \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \tau}{\partial v} + \\ &+ \left\{ \frac{e^\theta \operatorname{senh} \tau - e^{-\theta} \cosh \tau}{e^\theta \cosh \tau - e^{-\theta} \operatorname{senh} \tau} + \frac{e^\theta \operatorname{senh} \tau + e^{-\theta} \cosh \tau}{e^\theta \cosh \tau + e^{-\theta} \operatorname{senh} \tau} \right\} \frac{\partial \tau}{\partial u} \frac{\partial \tau}{\partial v}. \end{aligned}\right\} \text{(II*)}$$

Le (I*), (II*) così ottenute sono le equazioni fondamentali per la trasformazione delle superficie d'area minima nello spazio iperbolico. Esse formano, come ora si vedrà, un sistema illimitatamente integrabile, sicchè la loro soluzione generale τ contiene, oltre k, due costanti arbitrarie.

§ 15.

Verifiche relative alla superficie riflettente $\overline{S}$.

Cominciamo dal provare la illimitata integrabilità del sistema (I*), (II*) deducendo da queste equazioni, in modo analogo come al § 11, il seguente sistema completo di equazioni del 2.° ordine:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{e^\theta \cosh \tau - e^{-\theta} \operatorname{senh} \tau} \frac{\partial \tau}{\partial u}\right) = k \cosh 2\tau \, (e^\theta \cosh \tau - e^{-\theta} \operatorname{senh} \tau) - \\ &\quad - \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{1}{e^\theta \cosh \tau + e^{-\theta} \operatorname{senh} \tau} \frac{\partial \tau}{\partial v} - \frac{e^\theta \operatorname{senh} \tau - e^{-\theta} \cosh \tau}{(e^\theta \cosh \tau + e^{-\theta} \operatorname{senh} \tau)^2} \left(\frac{\partial \tau}{\partial v}\right)^2 \\ &\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{e^\theta \cosh \tau - e^{-\theta} \operatorname{senh} \tau} \frac{\partial \tau}{\partial u}\right) = \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{1}{e^\theta \cosh \tau + e^{-\theta} \operatorname{senh} \tau} \frac{\partial \tau}{\partial v} + \\ &\quad + \frac{e^\theta \operatorname{senh} \tau + e^{-\theta} \cosh \tau}{e^\theta \cosh \tau - e^{-\theta} \operatorname{senh} \tau} \frac{\partial \tau}{\partial u} \cdot \frac{1}{e^\theta \cosh \tau - e^{-\theta} \operatorname{senh} \tau} \frac{\partial \tau}{\partial v} \\ &\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{e^\theta \cosh \tau - e^{-\theta} \operatorname{senh} \tau} \frac{\partial \tau}{\partial v}\right) = \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{1}{e^\theta \cosh \tau - e^{-\theta} \operatorname{senh} \tau} \frac{\partial \tau}{\partial u} + \\ &\quad + \frac{e^\theta \operatorname{senh} \tau - e^{-\theta} \cosh \tau}{e^\theta \cosh \tau - e^{-\theta} \operatorname{senh} \tau} \frac{\partial \tau}{\partial u} \cdot \frac{1}{e^\theta \cosh \tau + e^{-\theta} \operatorname{senh} \tau} \frac{\partial \tau}{\partial v} \end{aligned}\right\} \text{(III*)}$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{e^\theta \cosh \tau - e^{-\theta} \operatorname{senh} \tau}\frac{\partial \tau}{\partial v}\right) = k \cosh 2\tau\,(e^\theta \cosh \tau + e^{-\theta} \operatorname{senh} \tau) - \\ &\quad - \frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{1}{e^\theta \cosh \tau - e^{-\theta} \operatorname{senh} \tau}\frac{\partial \tau}{\partial u} - \frac{e^\theta \operatorname{senh} \tau + e^{-\theta} \cosh \tau}{(e^\theta \cosh \tau + e^{-\theta} \operatorname{senh} \tau)^2}\left(\frac{\partial \tau}{\partial u}\right)^2.\end{aligned}\right\} \text{(III*)}$$

Scrivendo le condizioni d'integrabilità del sistema (I*), (III*), facilmente si vede che esse sono identicamente verificate, in forza della equazione (E) cui soddisfa θ.

Si supponga scelta ad arbitrio una soluzione τ di queste equazioni e si consideri la superficie $\overline{S}$ luogo dell'estremo $\overline{M}$ e si indichi con:

$$\overline{ds}^2 = \overline{E}\,du^2 + 2\overline{F}\,du\,dv + \overline{G}\,dv^2,$$

il suo elemento lineare. Dalle (34) deduciamo per $\overline{E}$, $\overline{F}$, $\overline{G}$ le espressioni:

$$\overline{E} = \left(\frac{\partial \tau}{\partial u}\right)^2 + (e^\theta \cosh \tau - e^{-\theta} \operatorname{senh} \tau)^2,$$

$$\overline{F} = \frac{\partial \tau}{\partial u}\frac{\partial \tau}{\partial v}, \quad \overline{G} = \left(\frac{\partial \tau}{\partial v}\right)^2 + (e^\theta \cosh \tau + e^{-\theta} \operatorname{senh} \tau)^2,$$

indi per la (I*):

$$\overline{E}\,\overline{G} - \overline{F}^2 = k \operatorname{senh} 2\tau\,(e^\theta \cosh \tau + e^{-\theta} \operatorname{senh} \tau)^2 (e^\theta \cosh \tau - e^{-\theta} \operatorname{senh} \tau)^2.$$

Indicando con $\frac{1}{\rho_\tau}$ la curvatura geodetica delle linee $\tau = \text{cost.}$ sulla $\overline{S}$, dalla formola di Bonnet, osservando l'identità:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{e^\theta \cosh \tau + e^{-\theta} \operatorname{senh} \tau}{e^\theta \cosh \tau - e^{-\theta} \operatorname{senh} \tau}\frac{\partial \tau}{\partial u}\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{e^\theta \cosh \tau - e^{-\theta} \operatorname{senh} \tau}{e^\theta \cosh \tau + e^{-\theta} \operatorname{senh} \tau}\frac{\partial \tau}{\partial v}\right] = \\ &= 2k \cosh 2\tau\,(e^\theta \cosh \tau + e^{-\theta} \operatorname{senh} \tau)(e^\theta \cosh \tau - e^{-\theta} \operatorname{senh} \tau),\end{aligned}$$

che segue dalle (I*), (III*), si trae per $\frac{1}{\rho_\tau}$ la formola:

$$\frac{1}{\rho_\tau} = \frac{-k \cosh 2\tau}{\sqrt{k \operatorname{senh} 2\tau\,(k \operatorname{senh} 2\tau - 1)}}.$$

Medesimamente si verifica che le traiettorie ortogonali delle $\tau = \text{cost.}$ sulla $\overline{S}$, che hanno per equazione differenziale:

$$(e^\theta \cosh \tau - e^{-\theta} \operatorname{senh} \tau)^2 \frac{\partial \tau}{\partial v} du - (e^\theta \cosh \tau + e^{-\theta} \operatorname{senh} \tau)^2 \frac{\partial \tau}{\partial u} dv = 0,$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

sono linee geodetiche e pel loro arco α, contato da una linea $\tau = \text{cost.}$ fissa, si trova:

$$\alpha = \int \sqrt{\frac{k \operatorname{senh} 2\tau}{k \operatorname{senh} 2\tau - 1}}\, d\tau.$$

All'elemento lineare di $\overline{S}$ possiamo dunque dare la forma:

$$d s^2 = d\alpha^2 + r^2 d v_1^2,$$

essendo r una funzione della sola α ed esprimendo α per τ abbiamo:

$$\overline{d s}^2 = \frac{k \operatorname{senh} 2\tau}{k \operatorname{senh} 2\tau - 1} d\tau^2 + r^2 d v_1^2. \tag{37}$$

La funzione r di τ sarà definita, per la (37), dalla equazione:

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\tau} = \frac{k \cosh 2\tau}{k \operatorname{senh} 2\tau - 1},$$

da cui integrando si ha:

$$r = c\sqrt{k \operatorname{senh} 2\tau - 1}.$$

Ora se si pone:

$$\beta = c\, v_1,$$

e si esprime τ per σ colla formola:

$$k \operatorname{senh} 2\tau = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \sigma},$$

si trova:

$$\overline{d s}^2 = \frac{d\sigma^2}{\operatorname{sen}^2 \sigma\,(1 + k^2 \operatorname{sen}^4 \sigma)} + \cot^2 \sigma\, d\beta^2,$$

che coincide colla (21*) § 6 ed appartiene al paraboloide di rotazione.

Abbiamo così dimostrato che la $\overline{S}$ è applicabile sul paraboloide di rotazione e ricordando il significato di σ riconosciamo anche qui (Cf. § 12) che la congruenza delle normali di S è una delle due associate alla $\overline{S}$.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

§ 16.

Le equazioni di trasformazione cangiate in un sistema lineare ed omogeneo.

È utile cangiare le equazioni (III*) di trasformazione in un sistema lineare ed omogeneo, ciò che otteniamo colle considerazioni seguenti (Cf. (M) Cap. IV).

In virtù delle (I*), (III*), l'espressione:

$$\frac{e^\theta}{\operatorname{senh}\tau\,(e^\theta\cosh\tau - e^{-\theta}\operatorname{senh}\tau)}\,d\,u + \frac{e^\theta}{\operatorname{senh}\tau\,(e^\theta\cosh\tau + e^{-\theta}\operatorname{senh}\tau)}\,d\,v,$$

è un differenziale esatto. Possiamo quindi determinare una funzione ausiliaria Φ di u, v dalle equazioni simultanee:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u} = \frac{\Phi\, e^\theta}{\operatorname{senh}\tau\,(e^\theta\cosh\tau - e^{-\theta}\operatorname{senh}\tau)}\frac{\partial\tau}{\partial u}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial v} = \frac{\Phi\, e^\theta}{\operatorname{senh}\tau\,(e^\theta\cosh\tau + e^{-\theta}\operatorname{senh}\tau)}\frac{\partial\tau}{\partial v}.$$

Formando le derivate seconde della Φ, osservando le (III*), otteniamo:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} = \frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial u} - \frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial\Phi}{\partial v} + (e^{2\theta}+k)\,\Phi + (k\,e^{2\theta}-1)\,\Phi\coth\tau$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} = -\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial\Phi}{\partial v} + (e^{2\theta}-k)\,\Phi + (k\,e^{2\theta}+1)\,\Phi\coth\tau.$$

Introduciamo ora una seconda funzione ausiliaria W col porre:

$$W = \Phi\coth\tau,$$

e ne risulterà per Φ, W il sistema di equazioni lineari ed omogenee:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} &= \frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial u} - \frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial\Phi}{\partial v} + (e^{2\theta}+k)\,\Phi + (k\,e^{2\theta}-1)\,W\\
\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v} &= \frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\\
\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} &= -\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial\Phi}{\partial v} + (e^{2\theta}-k)\,\Phi + (k\,e^{2\theta}+1)\,W.
\end{aligned}\right\}\quad (F)$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$$\frac{\partial W}{\partial u}=e^{-2\theta}\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \quad \frac{\partial W}{\partial v}=-e^{-2\theta}\frac{\partial \Phi}{\partial v}. \tag{G}$$

Inversamente se Φ, W soddisfano le (F), (G), la funzione τ individuata dalla formola:

$$\operatorname{tgh}\tau=\frac{\Phi}{W}, \tag{38}$$

soddisferà le (III*).

Ora, essendo θ una soluzione della (E), cioè:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2}=e^{2\theta}+e^{-2\theta},$$

le (F), (G), come subito si verifica, costituiscono un sistema illimitatamente integrabile, sicchè per determinare Φ, W possiamo dare ad arbitrio, per un sistema iniziale di valori $u_0\, v_0$ delle variabili, i valori:

$$W, \quad \Phi, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v}.$$

Ricordiamo però che la nostra funzione τ, oltre che alle (III*), deve soddisfare ancora alla (I*), che per le attuali funzioni incognite Φ, W, si traduce nella equazione:

$$e^{-2\theta}\left\{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)^2\right\}+W^2-\Phi^2-2\,k\,\Phi\,W=0\,; \tag{H}$$

occorre quindi esaminare se questa è compatibile colle (F), (G). Ora se per una coppia qualsiasi Φ, W di soluzioni delle (F), (G) indichiamo con Δ il primo membro della (H), si trae subito dalle (F), (G) stesse:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial u}=0, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial v}=0,$$

onde risulta:

$$e^{-2\theta}\left\{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)^2\right\}+W^2-\Phi^2-2\,k\,\Phi\,W=\text{cost.}$$

Se dunque la (H) è soddisfatta dai valori iniziali di W, Φ, $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$ essa lo sarà identicamente per tutti i valori di u, v.

Così abbiamo nuovamente dimostrata la illimitata integrabilità del sistema delle equazioni di trasformazione.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

§ 17.

Le superficie d'area minima trasformate.

Scelta per Φ, W una coppia speciale di soluzioni delle (F), (G), (H), ne viene determinata una superficie $\overline{S}$ applicabile sul paraboloide, come luogo dell'estremo $\overline{M}$ del segmento di normale $M\overline{M} = \tau$.

La superficie S' simmetrica della primitiva S rispetto alla riflettente $\overline{S}$ sarà, come sappiamo, una nuova superficie d'area minima. Così da una superficie minima nota S, integrate le equazioni di trasformazione, ne otteniamo una tripla infinità di nuove.

Per trovare le formole che danno, in termini finiti, le superficie trasformate osserviamo che il punto M' di S' corrispondente al punto M di S è simmetrico di questo punto rispetto al piano tangente in $\overline{M}$ alla $\overline{S}$, cioè al piano $(\overline{\xi}_0, \overline{\xi}_1, \overline{\xi}_2, \overline{\xi}_3)$. Indichiamo per un momento con μ il punto medio del segmento MM', cioè il piede della normale abbassata da M sul piano $(\overline{\xi})$ e poniamo $M\mu = w$. Per una nota formola di geometria iperbolica avremo:

$$\operatorname{senh} w = x_1 \overline{\xi}_1 + x_2 \overline{\xi}_2 + x_3 \overline{\xi}_3 - x_0 \overline{\xi}_0,$$

ossia per le (36),

$$\operatorname{senh} w = \frac{\operatorname{senh} \tau}{\rho} = \operatorname{senh} \tau \operatorname{sen} \sigma \text{ (*)}.$$

Se indichiamo con x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 le coordinate di M', con X_0, X_1, X_2, X_3 quelle di μ, avremo quindi:

$$x = X \cosh w \mp \overline{\xi} \operatorname{senh} w$$

$$x' = X \cosh w \pm \overline{\xi} \operatorname{senh} w,$$

onde:

$$x' = x \pm 2 \overline{\xi} \operatorname{senh} w.$$

(*) La medesima formola risulta anche subito da considerazioni di trigonometria pseudosferica, poichè w è il cateto di un triangolo rettangolo di cui l'ipotenuse è τ e l'angolo opposto al cateto σ.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

D'altronde siccome il piano $(\bar{\xi})$ passa per μ, dobbiamo avere:

$$\sum_i X_i \bar{\xi}_i - X_0 \bar{\xi}_0 = 0,$$

cioè:

$$\sum_i \frac{x_i + x'_i}{2} \bar{\xi}_i - \frac{x_0 + x'_0}{2} \bar{\xi}_0 = 0,$$

o infine:

$$\sum_i (x_i \pm \bar{\xi}_i \operatorname{senh} \tau \operatorname{sen} \sigma) \bar{\xi}_i - (x_0 \pm \bar{\xi}_0 \operatorname{senh} \tau \operatorname{sen} \sigma) \bar{\xi}_0 = 0.$$

E siccome dalle (36) risulta:

$$\sum x_i \bar{\xi}_i - x_0 \bar{\xi}_0 = - \operatorname{senh} \tau \operatorname{sen} \sigma,$$

e si ha:

$$\sum_i \bar{\xi}_i^2 - \bar{\xi}_0^2 = 1,$$

vediamo che il segno da adottarsi nelle nostre formole è il superiore. Ne deduciamo:

$$x' = x + \frac{1}{k \cosh \tau} \left\{ x \operatorname{senh} \tau + \xi \cosh \tau - \right.$$

$$\left. - \frac{\frac{\partial \tau}{\partial u}}{e^\theta \cosh \tau - e^{-\theta} \operatorname{senh} \tau} \eta - \frac{\frac{\partial \tau}{\partial v}}{e^\theta \cosh \tau + e^{-\theta} \operatorname{senh} \tau} \zeta \right\}.$$

Introducendo le nostre funzioni ausiliarie Φ, W, troviamo così le formole:

$$x' = \left(1 + \frac{\Phi}{k W}\right) x + \frac{\xi}{k} - \frac{e^{-\theta}}{k W} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \eta - \frac{e^{-\theta}}{k W} \frac{\partial \Phi}{\partial v} \zeta; \tag{39}$$

queste ci danno le superficie S' d'area minima trasformate della S.

§ 18.

Verifiche relative alle superficie S' d'area minima trasformate.

Procederemo ora sulle formole (39) alla verifica delle proprietà della trasformazione. Ma osserviamo prima che, essendo sparita nelle stesse (39) ogni traccia della primitiva funzione incognita τ, nulla ci vieta di considerare per le soluzioni Φ, W del sistema (F), (G), (H) la possibilità di valori

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

che diano, secondo la (38), un valore (puramente) immaginario per τ, rendendo $\Phi^2 > W^2$. Le nostre verifiche, che si appoggiano solo sull' ipotesi che Φ, W soddisfino le (F), (G), (H), non cesseranno per ciò di essere valide.

Ciò premesso, se deriviamo le (39), tenendo conto delle (F), (G), troviamo in primo luogo le formole seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x'}{\partial u} &= \frac{e^{-\theta}}{kW}\Big\{ \frac{-e^{-\theta}\Phi}{W}\frac{\partial \Phi}{\partial u}x - e^{-\theta}\frac{\partial \Phi}{\partial u}\xi + \\
&\quad + \left[\frac{e^{-2\theta}}{W}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)^2 - k\Phi\right]\eta + \frac{e^{-2\theta}}{W}\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial v}\zeta\Big\} \\
\frac{\partial x'}{\partial v} &= \frac{e^{-\theta}}{kW}\Big\{ \frac{e^{-\theta}\Phi}{W}\frac{\partial \Phi}{\partial v}x + e^{-\theta}\frac{\partial \Phi}{\partial v}\xi - \\
&\quad - \frac{e^{-2\theta}}{W}\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial v}\eta + \left[k\Phi - \frac{e^{-2\theta}}{W}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)^2\right]\zeta\Big\}.
\end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

Costruendo ora, mediante le precedenti, il quadrato dell'elemento lineare della S':

$$ds'^2 = dx'^2_1 + dx'^2_2 + dx'^2_3 - dx'^2_0,$$

coll'osservare le (H), troviamo:

$$ds'^2 = \frac{\Phi^2 e^{-2\theta}}{W^2}(du^2 + dv^2). \qquad (41)$$

Indicando poi con ξ'_0, ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 le coordinate del piano tangente in M' alla S', deduciamo dalle (40) stesse:

$$\xi' = -\frac{x}{k} + \left(1 - \frac{W}{k\Phi}\right)\xi + \frac{e^{-\theta}}{k\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial u}\eta + \frac{e^{-\theta}}{k\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial v}\zeta, \qquad (42)$$

e di qui derivando:

$$\frac{\partial \xi'}{\partial u} = -\frac{W^2 e^{2\theta}}{\Phi^2}\frac{\partial x'}{\partial u}, \quad \frac{\partial \xi'}{\partial v} = \frac{W^2 e^{2\theta}}{\Phi^2}\frac{\partial x'}{\partial v}. \qquad (43)$$

Ne risulta che anche sulla S' le linee u, v sono le linee di curvatura ed i raggi principali di curvatura r'_1, r'_2 di S' sono dati dalle formole:

$$r'_1 = -\frac{\Phi^2 e^{-2\theta}}{W^2}, \quad r'_2 = \frac{\Phi^2 e^{-2\theta}}{W^2}.$$

Per tal modo troviamo confermato che la S' è una nuova superficie d'area minima; di più dalla (41) vediamo che la sua rappresentazione sulla

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

superficie minima primitiva S è conforme, ciò che sta in armonia col teorema alla fine del § 9.

Ora se poniamo:

$$e^{2\theta'} = \frac{\Phi^2 e^{-2\theta}}{W^2}, \tag{44}$$

l'elemento lineare (41) della S' si scriverà:

$$d s'^2 = e^{2\theta'} (d u^2 + d v^2),$$

onde risulta che θ' è una nuova soluzione dell'equazione (E), cioè si ha:

$$\frac{\partial^2 \theta'}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta'}{\partial v^2} = e^{2\theta'} + e^{-2\theta'}.$$

Prescindendo del resto da ogni interpretazione geometrica e collocandoci dal solo punto di vista della integrazione dell'equazione:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = e^{2\theta} + e^{-2\theta}, \tag{E}$$

vediamo subito direttamente che quando Φ, W soddisfino le (F), (G), (H), la funzione θ', calcolata dalla (44), sarà essa stessa una nuova soluzione della (E). Per quanto abbiamo osservato in principio al paragrafo, le formole (39) definiscono una nuova superficie d'area minima S' ogni qualvolta Φ, W soddisfino le equazioni di trasformazione (F), (G), (H). Però quando sia $\Phi^2 > W^2$, il valore di τ dato dalla (38) sarà (puramente) immaginario e la superficie $\overline{S}$ riflettente sarà essa stessa immaginaria, quantunque tanto la primitiva S quanto la trasformata S' siano reali. Ma anche in questo caso le normali alle S, S' in punti corrispondenti M, M' giacciono in un medesimo piano e cioè nel piano di coordinate.

$$\frac{e^{-\theta} \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} \eta_i - e^{-\theta} \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} \zeta_i}{\sqrt{\Phi^2 - W^2 + 2 k \Phi W}} (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3).$$

Anzi di più esse sono normali ad uno stesso piano, al piano di coordinate:

$$\frac{W x_i + \Phi \xi_i}{\sqrt{\Phi^2 - W^2}} = \frac{W x'_i + \Phi \xi'_i}{\sqrt{\Phi^2 - W^2}} (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3),$$

dal quale i due punti corrispondenti M; M' sono equidistanti. Di qui è manifesto che il punto d'incontro delle due normali corrispondenti è ideale.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

§ 19.

Risoluzione del problema (A) per una superficie a curvatura media = 2 dello spazio iperbolico.

Conformemente a quanto abbiamo detto nella prefazione, andiamo ora a risolvere il problema fondamentale [A] pel caso dello spazio iperbolico a curvatura $K = -1$ quando si voglia che la superficie $\overline{S}$, ortogonale ai raggi della congruenza associata, abbia la curvatura media costante $= \pm 2$. Il segno essendo indifferente, prendiamo ad esempio l' inferiore ed esprimeremo che per la $\overline{S}$ si ha costantemente:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = -2,$$

scrivendo le proporzioni:

$$\overline{e} - 2\overline{D} : \overline{f} - 2\overline{D'} : \overline{g} - 2\overline{D''} = \overline{E} : \overline{F} : \overline{G} \ (*).$$

Poniamo queste sotto la forma:

$$\overline{e} - \overline{E} - 2\overline{D} : \overline{f} - \overline{F} - 2\overline{D'} : \overline{g} - \overline{G} - 2\overline{D''} = \overline{E} : \overline{F} : \overline{G},$$

e presa ad esempio la equazione:

$$(\overline{e} - \overline{E} - 2\overline{D})\overline{F} - (\overline{f} - \overline{F} - 2\overline{D'})\overline{E} = 0,$$

(*) Riferendo infatti la $\overline{S}$ alle sue linee di curvatura, avremo:

$$\overline{e} = \frac{\overline{E}}{r_2^2}, \quad \overline{g} = \frac{\overline{G}}{r_1^2}, \quad \overline{f} = \overline{F} = 0$$

$$\overline{D} = -\frac{\overline{E}}{r_2}, \quad \overline{D''} = -\frac{\overline{G}}{r_1}, \quad \overline{D'} = 0,$$

e le proporzioni scritte danno:

$$\frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_2} = \frac{1}{r_1^2} + \frac{2}{r_1},$$

cioè:

$$\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} + 2\right) = 0.$$

E siccome non può essere costantemente $r_1 = r_2$ (Cf. § 4) sarà $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = -2$.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

che ne consegue, sviluppiamola sostituendovi i valori effettivi (A*), (B*), (9*) del § 2; troveremo così l'equazione:

$$\left\{(\alpha + E\,\mathrm{sen}^2\sigma)\,\mathrm{senh}\,2\,\tau - 2\sqrt{E}\,\mathrm{sen}\,\sigma\left(\frac{D}{\sqrt{E}} + \frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)\cosh 2\,\tau +\right.$$

$$\left.+ (\alpha - E\,\mathrm{sen}^2\sigma)\right\} \cdot \left\{2\left(\cos\sigma\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} + \mathrm{sen}\,\sigma\,D'\right)\mathrm{senh}\,2\,\tau - \beta\cosh 2\,\tau + \beta\right\} +$$

$$+ \left\{(\alpha + E\,\mathrm{sen}^2\sigma)\cosh 2\,\tau - 2\sqrt{E}\,\mathrm{sen}\,\sigma\left(\frac{D}{\sqrt{E}} + \frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)\mathrm{senh}\,2\,\tau -\right.$$

$$\left.- (\alpha - E\,\mathrm{sen}^2\sigma)\right\} \cdot \left\{-2\left(\cos\sigma\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} + \mathrm{sen}\,\sigma\,D'\right)\cosh 2\,\tau + \beta\,\mathrm{senh}\,2\,\tau + \beta\right\} = 0.$$

Con un semplice calcolo, ponendo:

$$T = \cosh 2\,\tau + \mathrm{senh}\,2\,\tau = e^{2\tau}, \tag{45}$$

questa si trasforma nell'altra:

$$T\left\{\sqrt{E}\,\mathrm{sen}\,\sigma\left(\frac{D}{\sqrt{E}} + \frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)\beta - E\,\mathrm{sen}^2\sigma\,\beta -\right.$$

$$\left.- \left(\cos\sigma\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} + \mathrm{sen}\,\sigma\,D'\right)\alpha + \left(\cos\sigma\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} + \mathrm{sen}\,\sigma\,D'\right)E\,\mathrm{sen}^2\sigma\right\} +$$

$$+ \left(\cos\sigma\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} + \mathrm{sen}\,\sigma\,D'\right)\alpha - \sqrt{E}\,\mathrm{sen}\,\sigma\left(\frac{D}{\sqrt{E}} + \frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)\beta +$$

$$+ \left(\cos\sigma\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} + \mathrm{sen}\,\sigma\,D'\right)E\,\mathrm{sen}^2\sigma = 0.$$

Ora avendosi:

$$\cos\sigma\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} + \mathrm{sen}\,\sigma\,D' = \sqrt{E}\,\mathrm{sen}\,\sigma\left(\frac{D'}{\sqrt{E}} + \frac{\partial\sigma}{\partial v}\right),$$

indi:

$$\frac{\beta}{\cos\sigma\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} + \mathrm{sen}\,\sigma\,D'} = \frac{1}{\sqrt{E}\,\mathrm{sen}\,\sigma}\left(\frac{D}{\sqrt{E}} + \frac{\partial\sigma}{\partial u}\right) - \frac{1}{\sqrt{G}}\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\mathrm{sen}\,\sigma\,D''}{\sqrt{G}}\right),$$

possiamo dividere la precedente pel binomio $\cos\sigma\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} + \mathrm{sen}\,\sigma\,D'$ che (essendo supposto $\sigma \gtrless 0$) non può certamente annullarsi in tutte le flessioni di S. Moltiplicando la equazione così ottenuta per D ed al prodotto $D\,D''$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

sostituendo la quantità:

$$D'^2 + (K+1) E G,$$

ad essa equivalente per la (γ^*) § 2, ne deduciamo l'equazione:

$$T\left\{ \frac{E \operatorname{sen}^2\sigma}{\sqrt{G}}\left[\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} D - \frac{\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{G}}\left(D'^2 + (K+1) E G\right)\right] - \right.$$

$$- \frac{\sqrt{E}\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{G}}\left(\frac{D}{\sqrt{E}} + \frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)\left[\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} D - \frac{\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{G}}\left(D'^2 + (K+1) E G\right)\right] -$$

$$\left. - \left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} + \frac{\operatorname{sen}\sigma\, D'}{\sqrt{G}}\right)^2 D - \sqrt{E}\operatorname{sen}\sigma\left(\frac{D}{\sqrt{E}} + \frac{\partial\sigma}{\partial u}\right) D + E\operatorname{sen}^2\sigma\, D \right\} +$$

$$+ \left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} + \frac{\operatorname{sen}\sigma\, D'}{\sqrt{G}}\right)^2 D +$$

$$+ \frac{\sqrt{E}\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{G}}\left(\frac{D}{\sqrt{E}} + \frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)\left[\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{G}}\left(D'^2 + (K+1) E G\right)\right] +$$

$$+ E\operatorname{sen}^2\sigma\, D = 0,$$

che deve essere un'identità in D, D'. Ora eguagliando a zero il coefficiente di $D D'$, osservando che non può essere $T = 1$ perchè supponiamo $\sigma \neq 0$, $\frac{\pi}{2}$, ne deduciamo $\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = 0$. Possiamo dunque fare $E = 1$, $\sigma = \sigma(u)$, dopo di che la equazione superiore si scinde nelle tre:

$$\left.\begin{aligned}
&T(\sigma' - \operatorname{sen}\sigma) = \sigma' \\
&T\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} + 1\right) = \frac{\cos\sigma}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} \\
&T\left\{\operatorname{sen}^2\sigma(K+2) + \frac{\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}(\operatorname{sen}\sigma - \sigma') - \sigma'\operatorname{sen}\sigma\right\} + \\
&+ \frac{\sigma'\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} - \operatorname{sen}^2\sigma\, K = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (46)$$

In forza della prima di queste la seconda diventa:

$$\sigma' + \frac{\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = 0,$$

dalla quale integrando si deduce al solito che si può porre:

$$\sqrt{G} = \cot\sigma.$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Dopo di ciò la terza delle (46) diventa:

$$2\,\sigma' \operatorname{sen} \sigma - \sigma'^2 + \operatorname{sen}^2 \sigma\, K = 0,$$

ovvero:

$$\sigma'' = 3 \cot \sigma\, \sigma'^2 - 2\,\sigma' \cos \sigma. \tag{46*}$$

Questa integrata porge:

$$\sigma' = a \operatorname{sen}^3 \sigma + \operatorname{sen} \sigma, \tag{47}$$

indicando a una costante e la prima delle (46) ci dà:

$$e^{2\tau} = \frac{\sigma'}{\sigma' - \operatorname{sen} \sigma} = \frac{a \operatorname{sen}^2 \sigma + 1}{a \operatorname{sen}^2 \sigma}. \tag{48}$$

Ora la seconda delle condizioni:

$$(\bar{g} - \overline{G} - 2\,\overline{D''})\,\overline{F} - (\bar{f} - \overline{F} - 2\,\overline{D'})\,\overline{G} = 0,$$

che completa le proporzioni (45), risulta con ciò identicamente soddisfatta, sicchè resta soltanto a vedersi se determinando σ, τ dalle (47), (48) risulterà verificata l'ulteriore condizione (5*) § 2:

$$\tau' = -\cos \sigma.$$

Ma questo ha luogo in effetto poichè l'equazione ora scritta coincide appunto colla equazione differenziale (46*); ne concludiamo che il nostro problema ammette soluzioni che sono tutte incluse nelle formole (47), (48).

È necessario poi osservare che, dovendo il secondo membro della (48) risultare positivo, alla costante a, del resto arbitraria, dovremo attribuire un valore positivo ovvero negativo e maggiore in valore assoluto dell'unità.

Dunque: *La superficie S che risolve il problema* [A] *nel caso attuale ha l'elemento lineare:*

$$d\,s^2 = \frac{d\,\sigma^2}{\operatorname{sen}^2 \sigma\,(1 + a \operatorname{sen}^2 \sigma)^2} + \cot^2 \sigma\, d\,v^2, \tag{49}$$

e il valore del segmento τ da riportarsi sopra ogni raggio della congruenza è dato dalla (48).

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

§ 20.

La superficie S come paraboloide di rotazione di seconda specie.

L'elemento lineare (49) appartiene evidentemente ad una superficie di rotazione; si tratta di determinare la forma della curva meridiana.

Dimostreremo che essa è nuovamente una conica e precisamente il luogo dei punti equidistanti, in un piano, da un punto fisso F e da un oriciclo (circolo col centro all'infinito), l'asse di rotazione essendo la normale calata dal punto fisso (fuoco) sull'oriciclo.

Questa conica appartiene alla sesta specie nella classificazione di Killing (*); i suoi due fuochi sono l'uno nel punto F a distanza finita, l'altro all'infinito nel centro dell'oriciclo, sicchè i raggi emananti dal fuoco F si riflettono sulla curva in un fascio di rette parallele all'asse. Per questa proprietà essa può riguardarsi, sotto un altro punto di vista di quello adottato al § 7, come l'estensione dell'ordinaria parabola al piano non euclideo; la diremo perciò *parabola di seconda specie* per distinguerla dalla parabola già considerata al § 7 (parabola di prima specie).

Calcolando ora l'elemento lineare del paraboloide di seconda specie, troveremo che esso coincide coll'elemento lineare (49) e constateremo altre circostanze che rendono perfetta l'analogia fra i nuovi risultati e quelli che al § 8 abbiamo stabilito per le superficie d'area minima.

Riprendendo le notazioni del § 8, consideriamo le rette parallele (nel senso non-euclideo) in un determinato verso alla retta $v=0$, cioè alla retta (0, 0, 1) e le loro traiettorie ortogonali, che sono altrettanti oricicli. L'elemento lineare del piano non-euclideo, riferito alle geodetiche parallele $v'=$ cost. ed agli oricicli ortogonali $u'=$ cost. prende la nota forma parabolica:

$$d s^2 = d u'^2 + e^{2u'} d v'^2.$$

Per formole di trasformazione dalle coordinate (u', v') alle ordinarie geodetiche (u, v) col polo nel punto fisso $F \equiv (1, 0, 0)$, che danno all'elemento lineare la forma ellittica:

$$d s^2 = d u^2 + \operatorname{senh}^2 u \, d v^2,$$

(*) *Nicht euklidische Raumformen in analytischer Behandlung.* (Pag. 45.)

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

si trovano, con calcoli elementari, date da:

$$e^{u'} = \cosh u + \operatorname{senh} u \cos v$$
$$v' e^{u'} = \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v.$$

La curva luogo dei punti equidistanti dal punto fisso F e da un oriciclo ha quindi la equazione:

$$e^{u'} = c\, e^{u},$$

con c costante positiva, ovvero:

$$\cosh u + \operatorname{senh} u \cos v = c (\cosh u + \operatorname{senh} u). \tag{50}$$

Stabiliamo il significato geometrico della costante c ponendo in questa $v = \pi$, onde ricaviamo:

$$e^{2u} = \frac{1}{c}, \quad u = -\frac{1}{2} \log c.$$

Questo valore di u dà evidentemente la distanza del fuoco F dall'oriciclo fondamentale, che incontra la geodetica $v = \pi$ (ossia $v = 0$) dalla parte positiva o dalla negativa secondo che $c > 1$ ovvero $c < 1$. Il caso $c = 1$ naturalmente si esclude perchè allora l'oriciclo passerebbe pel fuoco.

Dalla (50) deduciamo:

$$\cos v = \frac{(c-1)\cosh u + c \operatorname{senh} u}{\operatorname{senh} u}$$

$$\operatorname{sen}^2 v = \frac{\operatorname{senh}^2 u - [(c-1)\cosh u + c \operatorname{senh} u]^2}{\operatorname{senh}^2 u},$$

e per differenziazione:

$$\operatorname{sen} v\, d v = \frac{(c-1)\, d u}{\operatorname{senh}^2 u}.$$

Indichiamo ora con σ l'angolo d'inclinazione del raggio focale sulla curva; avremo:

$$\operatorname{tg} \sigma = \operatorname{senh} u \frac{d v}{d u} = \frac{c-1}{\operatorname{senh} u \operatorname{sen} v}. \tag{51}$$

Per l'elemento d'arco $d\alpha$ della parabola (di seconda specie) ne risulta:

$$d \alpha^2 = d u^2 + \operatorname{senh}^2 u\, d v^2,$$

e per la (51):

$$d \alpha^2 = \frac{d u^2}{\cos^2 \sigma},$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

e poichè, indicando con r il raggio del parallelo del paraboloide, si ha:

$$\operatorname{senh} r = \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v = (c - 1) \cot \sigma,$$

per l'elemento lineare del paraboloide avremo:

$$d s^2 = \frac{d u^2}{\cos^2 \sigma} + \cot^2 \sigma \, d v_1^2 .$$

Cerchiamo di identificarlo coll'elemento lineare (49), per la qual cosa dovremo porre:

$$\frac{d \sigma^2}{\operatorname{sen}^2 \sigma (1 + a \operatorname{sen}^2 \sigma)^2} = \frac{d u^2}{\cos^2 \sigma} . \tag{52}$$

Ora si ha:

$$\cot \sigma = \frac{\sqrt{(1 - c^2) \operatorname{senh}^2 u - (c - 1)^2 \cosh^2 u - 2 c (c - 1) \operatorname{senh} u \cosh u}}{c - 1},$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \sigma} = \frac{c}{1 - c} (\cosh 2 u + \operatorname{senh} 2 u - 1), \tag{53}$$

indi:

$$\frac{d \sigma}{\operatorname{sen}^2 \sigma} = \frac{c}{(1 - c)^2} \operatorname{tg} \sigma (\cosh 2 u + \operatorname{senh} 2 u) \, d u.$$

La (52) diventa per ciò:

$$(\cosh 2 u + \operatorname{senh} 2 u)^2 = \left(\frac{1 - c}{c}\right)^2 \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \sigma} + a\right)^2 =$$

$$= \left(\cosh 2 u + \operatorname{senh} 2 u - 1 + a \frac{1 - c}{c}\right)^2,$$

e per soddisfarla basterà dunque che facciamo:

$$a = \frac{c}{1 - c},$$

cioè:

$$c = \frac{a}{1 + a} .$$

Con ciò la costante c risulterà sempre positiva e sarà > 1 quando a è positiva, invece < 1 quando sia a negativa, nel qual caso (§ 19) deve essere:

$$| a | > 1.$$

Così è dimostrato che per configurazione iniziale della nostra superficie S si può prendere il paraboloide di rotazione di seconda specie e la

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

formola (51) dimostra che i raggi della congruenza associata o concorreranno tutti nel fuoco F a distanza finita ovvero in quello all'infinito. Se in fine ricordiamo che per la (48) si ha:

$$e^{2\tau} = 1 + \frac{1}{a \operatorname{sen}^2 \sigma},$$

e per la (53):

$$\frac{1}{a \operatorname{sen}^2 \sigma} = \cosh 2u + \operatorname{senh} 2u - 1,$$

ne deduciamo:

$$e^{2\tau} = e^{2u};$$

vediamo ciò che il segmento τ eguaglia il raggio focale.

Possiamo riassumere i risultati ottenuti nel teorema:

Si consideri nello spazio iperbolico un paraboloide S di rotazione di seconda specie che si fletta comunque trasportando seco, invariabilmente legati alla superficie, i segmenti che dai suoi punti vanno al fuoco F. Il luogo dei loro estremi, riuniti nella configurazione iniziale in F sarà sempre una superficie $\overline{S}$, ortogonale ai segmenti, di curvatura media costante $= 2$ ed una seconda superficie $\overline{S}'$ della medesima specie si otterrà nella simmetrica della $\overline{S}$ rispetto alla S come superficie riflettente.

Risulta di più, dal calcolo che abbiamo eseguito al § 19, che le superficie applicabili sul paraboloide di rotazione di seconda specie, colle loro congruenze associate, ci danno le uniche soluzioni del problema [A] quando una superficie $\overline{S}$ ortogonale ai raggi debba avere costante $= \pm 2$ la curvatura media, prescindendo naturalmente anche qui dalle soluzioni del medesimo problema fornite dal teorema di Weingarten.

§ 21.

Il problema d'inversione per le superficie di curvatura media $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \pm 2$.

Come già al § 10 per le superficie d'area minima, proponiamoci anche qui per le attuali superficie di curvatura media $= 2$ il problema d'inversione.

Supponiamo data cioè una tale superficie S e domandiamo se si può riportare sopra ogni sua normale, a partire dal piede M, un tale segmento

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$M\overline{M} = \tau$ che il luogo $\overline{S}$ dell'estremo $\overline{M}$ risulti applicabile sul paraboloide di rotazione di seconda specie e la congruenza delle normali di S sia una delle due associate alla $\overline{S}$. Dimostreremo che la cosa è ancora possibile in una tripla infinità di modi.

Compiremo la nostra ricerca fondandoci sulle seguenti due proprietà che, nella ipotesi della possibilità della costruzione indicata, dovranno necessariamente aver luogo:

1.ª Indicando con σ l'angolo d'inclinazione del segmento $M\overline{M} = \tau$ sulla $\overline{S}$, si deve avere per la (48) § 19:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \sigma} = a\,(e^{2\tau} - 1), \tag{54}$$

essendo a una costante.

2.ª Alle linee di curvatura di S deve corrispondere sopra $\overline{S}$ un sistema coniugato.

Questa seconda proprietà è inclusa nel teorema più generale: *Ad ogni sistema ortogonale sopra S corrisponde un sistema coniugato sopra $\overline{S}$.* Esso discende immediatamente dalla equazione (27*) § 9:

$$(3\,\sigma'^2 - \sigma''\operatorname{tg}\sigma + \operatorname{sen}^2\sigma)\operatorname{senh}^2\tau -$$
$$- 2\,\sigma'\operatorname{sen}\sigma\operatorname{senh}\tau\cosh\tau + \operatorname{sen}^2\sigma\cosh^2\tau = 0,$$

poichè in forza delle (47), (48) questa è identicamente verificata.

Sia dunque data una superficie S a curvatura media costante $= 2$ dello spazio iperbolico, che riferita alle linee di curvatura u, v avrà l'elemento lineare:

$$d\,s^2 = e^{2\theta}(d\,u^2 + d\,v^2),$$

ove θ è una soluzione dell'equazione di Liouville:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = e^{-2\theta},$$

mentre le curvature principali sono date dalle formole:

$$\frac{1}{r_1} = 1 - e^{-2\theta}, \quad \frac{1}{r_2} = 1 + e^{-2\theta}\ (*).$$

(*) Cf. la mia Memoria nel Tomo IV, Serie 4.ª degli *Atti dei Lincei* ed anche l'altra: *Alcune ricerche di geometria non euclidea.* (Questi *Annali*, Tomo II, 1898.)

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Le formole fondamentali (1*) del § 2 assumono per l'attuale superficie S la forma seguente:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u}=e^{\theta}\eta, \quad \frac{\partial \xi}{\partial u}=2\cosh\theta\,\eta,\\
&\qquad\frac{\partial \eta}{\partial u}=e^{\theta}x-2\cosh\theta\,\xi-\frac{\partial \theta}{\partial v}\zeta, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial u}=\frac{\partial \theta}{\partial v}\eta\\
&\frac{\partial x}{\partial v}=e^{\theta}\zeta, \quad \frac{\partial \xi}{\partial v}=2\operatorname{senh}\theta\,\zeta,\\
&\qquad\frac{\partial \eta}{\partial v}=\frac{\partial \theta}{\partial u}\zeta, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial v}=e^{\theta}x-2\operatorname{senh}\theta\,\xi-\frac{\partial \theta}{\partial u}\eta.
\end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Indicando con $\overline{x}_0$, $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, $\overline{x}_3$ le coordinate di $\overline{M}$, abbiamo:

$$\overline{x}=x\cosh\tau+\xi\operatorname{senh}\tau,$$

da cui derivando deduciamo per le (55):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{x}}{\partial u}&=(e^{\theta}\cosh\tau+2\cosh\theta\operatorname{senh}\tau)\eta+(x\operatorname{senh}\tau+\xi\cosh\tau)\frac{\partial \tau}{\partial u}\\
\frac{\partial \overline{x}}{\partial v}&=(e^{\theta}\cosh\tau+2\operatorname{senh}\theta\operatorname{senh}\tau)\zeta+(x\operatorname{senh}\tau+\xi\cosh\tau)\frac{\partial \tau}{\partial v}.
\end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Le coordinate $\overline{\xi}_0$, $\overline{\xi}_1$, $\overline{\xi}_2$, $\overline{\xi}_3$ del piano tangente in M alla superficie $\overline{S}$ luogo del punto $\overline{M}$ sono quindi date dalle formole:

$$\left.\begin{aligned}
&\rho\overline{\xi}=x\operatorname{senh}\tau+\xi\cosh\tau-\\
&-\frac{\dfrac{\partial \tau}{\partial u}}{e^{\theta}\cosh\tau+2\cosh\theta\operatorname{senh}\tau}\eta-\frac{\dfrac{\partial \tau}{\partial v}}{e^{\theta}\cosh\tau+2\operatorname{senh}\theta\operatorname{senh}\tau}\zeta,
\end{aligned}\right\} \tag{57}$$

dove abbiamo posto per brevità:

$$\rho^2=\frac{\left(\dfrac{\partial \tau}{\partial u}\right)^2}{(e^{\theta}\cosh\tau+2\cosh\theta\operatorname{senh}\tau)^2}+\frac{\left(\dfrac{\partial \tau}{\partial v}\right)^2}{(e^{\theta}\cosh\tau+2\operatorname{senh}\theta\operatorname{senh}\tau)^2}+1,$$

Per l'angolo σ abbiamo conseguentemente:

$$\operatorname{sen}^2\sigma=\frac{1}{\rho^2},$$

e dalla (54) risulta dunque intanto, per la funzione incognita τ, l'equazione

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

a derivate parziali del 1.° ordine:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{(e^{\theta}\cosh\tau+2\cosh\theta\operatorname{senh}\tau)^2}\left(\frac{\partial\tau}{\partial u}\right)^2+\\&+\frac{1}{(e^{\theta}\cosh\tau+2\operatorname{senh}\theta\operatorname{senh}\tau)^2}\left(\frac{\partial\tau}{\partial v}\right)^2+1=a\,(e^{2\tau}-1).\end{aligned}\right\}\quad\text{(IV)}$$

La condizione:

$$\sum_i \bar{\xi}_i\frac{\partial^2\bar{x}_i}{\partial u\,\partial v}-\bar{\xi}_0\frac{\partial^2\bar{x}_0}{\partial u\,\partial v}=0,$$

che esprime l'altra proprietà sopra notata che il sistema $(u,\ v)$ è sopra la $\bar{S}$ un sistema coniugato, si traduce nella equazione del 2.° ordine per τ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\tau}{\partial u\,\partial v}&=\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{e^{\theta}\cosh\tau+2\operatorname{senh}\theta\operatorname{senh}\tau}{e^{\theta}\cosh\tau+2\cosh\theta\operatorname{senh}\tau}\frac{\partial\tau}{\partial u}+\\&+\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{e^{\theta}\cosh\tau+2\cosh\theta\operatorname{senh}\tau}{e^{\theta}\cosh\tau+2\operatorname{senh}\theta\operatorname{senh}\tau}\frac{\partial\tau}{\partial v}+\\&+\left\{\frac{e^{\theta}\operatorname{senh}\tau+2\cosh\theta\cosh\tau}{e^{\theta}\cosh\tau+2\cosh\theta\operatorname{senh}\tau}+\frac{e^{\theta}\operatorname{senh}\tau+2\operatorname{senh}\theta\cosh\tau}{e^{\theta}\cosh\tau+2\operatorname{senh}\theta\operatorname{senh}\tau}\right\}\frac{\partial\tau}{\partial u}\frac{\partial\tau}{\partial v}.\end{aligned}\right\}\quad\text{(V)}$$

Il sistema (IV), (V) è illimitatamente integrabile ed esprime le condizioni necessarie e sufficienti a cui deve soddisfare τ perchè ne risulti una soluzione del problema d'inversione. Con un processo affatto simile a quello più volte usato (Cf. §§ 11-15) si deduce infatti dalle (IV), (V) un sistema completo di equazioni del 2.° ordine per τ e si dimostra che, presa per τ una soluzione qualunque di queste equazioni, la superficie $\bar{S}$ luogo del punto $\bar{M}$ risulta applicabile sul paraboloide di rotazione di seconda specie e la congruenza delle normali della superficie primitiva S è una delle due associate alla $\bar{S}$.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

§ 22.

Le equazioni di trasformazione ridotte a quelle delle ordinarie superficie minime.

L'equazione fondamentale:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = e^{-2\theta},$$

dalla quale dipende la ricerca delle superficie di curvatura media costante $= 2$ dello spazio iperbolico coincide con quella che determina, nello spazio euclideo, le superficie d'area minima e l'elemento lineare per le une e per le altre superficie, riferite alle loro linee di curvatura, è il medesimo.

Ora ci proponiamo di dimostrare ulteriormente che le equazioni di trasformazione (IV), (V) si riducono alla loro volta a quelle delle ordinarie superficie minime. A tale scopo operiamo nelle (IV), (V) un cangiamento di funzione incognita ponendo:

$$T = \frac{1 - e^{-2\tau}}{2};$$

dopo ciò le equazioni (IV) (V) si mutano nelle seguenti:

$$\frac{1}{(e^\theta + T e^{-\theta})^2}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{(e^\theta - T e^{-\theta})^2}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + 1 = 2(a+1)\, T$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial u \, \partial v} = \frac{e^\theta - T e^{-\theta}}{e^\theta + T e^{-\theta}} \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial T}{\partial u} + \frac{e^\theta + T e^{-\theta}}{e^\theta - T e^{-\theta}} \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial T}{\partial v} +$$

$$+ \left(\frac{e^{-\theta}}{e^\theta + T e^{-\theta}} - \frac{e^{-\theta}}{e^\theta - T e^{-\theta}}\right) \frac{\partial T}{\partial u} \frac{\partial T}{\partial v},$$

che sono precisamente le equazioni fondamentali per la trasformazione delle ordinarie superficie minime d'elemento lineare:

$$d s^2 = e^{2\theta} (d u^2 + d v^2),$$

come le ho stabilite al § 2 di una mia recente Nota (*). Potremo quindi applicare le formole ivi stabilite ed in particolare, introducendo, in luogo di τ, due funzioni incognite ausiliarie Φ, W potremo dare alle equazioni di

(*) *Rendiconti dei Lincei.* Settembre 1899.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

trasformazione la forma lineare ed omogenea stabilita al § 3 (n. c.):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} &= \frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{\partial \theta}{\partial v}\frac{\partial \Phi}{\partial v} - (a+1)\,\Phi + [(a+1)\,e^{2\theta} + 1]\,W \\
\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u\,\partial v} &= \frac{\partial \theta}{\partial v}\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial v} \\
\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} &= -\frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v}\frac{\partial \Phi}{\partial v} + (a+1)\,\Phi + [(a+1)\,e^{2\theta} - 1]\,W.
\end{aligned}\right\} \quad (A')$$

$$\frac{\partial W}{\partial u} = -e^{-2\theta}\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \quad \frac{\partial W}{\partial v} = e^{-2\theta}\frac{\partial \Phi}{\partial v}. \quad (B')$$

A questa è da aggiungersi l'equazione:

$$e^{-2\theta}\left\{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)^2\right\} = 2\,(a+1)\,\Phi\,W - W^2, \quad (C')$$

che basta soddisfare coi valori iniziali di:

$$W, \quad \Phi, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v},$$

perchè risulti identicamente verificata per tutti i valori di u, v. Per mezzo delle nuove funzioni incognite Φ, W si esprimerà l'antica τ colla formola:

$$\coth \tau = \frac{W}{\Phi} - 1. \quad (58)$$

È da osservarsi che mentre Φ, W non sono soggette ad altre condizioni oltre quelle di soddisfare le (A′), (B′), (C′), la (58) ci darà un valore reale per τ solo quando si abbia:

$$\left|\frac{W}{\Phi} - 1\right| > 1.$$

§ 23.

Le superficie S' trasformate.

Se della primitiva superficie S prendiamo la simmetrica rispetto alla superficie riflettente $\overline{S}$, questa nuova superficie S' sarà anch'essa a curvatura media costante $= 2$. Per trovare le formole relative alle superficie trasformate S' basta procedere in modo del tutto analogo a quello tenuto nel § 17.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Indicando con x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 le coordinate del punto M' di S' corrispondente al punto $M \equiv (x_0\, x_1\, x_2\, x_3)$ di S, troviamo così le formole:

$$x' = \left(1 + \frac{\Phi}{a\,W}\right) x + \frac{1}{a}\left(1 - \frac{\Phi}{W}\right)\xi - \frac{e^{-\theta}}{a\,W}\frac{\partial \Phi}{\partial u}\eta - \frac{e^{-\theta}}{a\,W}\frac{\partial \Phi}{\partial v}\zeta. \tag{59}$$

Se deriviamo rapporto ad u, v, osservando le (56) e le (A'), (B'), (C'), troviamo:

$$\frac{\partial x'}{\partial u} = \frac{e^{-\theta}}{a\,W}\left\{\frac{e^{-\theta}\,\Phi}{W}\frac{\partial \Phi}{\partial u} x + \frac{e^{-\theta}\,(W - \Phi)}{W}\frac{\partial \Phi}{\partial u}\xi + \right.$$
$$\left. + \left[a\,\Phi - \frac{e^{-2\theta}}{W}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)^2\right]\eta - \frac{e^{-2\theta}}{W}\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial v}\zeta\right\}$$

$$\frac{\partial x'}{\partial v} = \frac{e^{-\theta}}{a\,W}\left\{-\frac{e^{-\theta}\,\Phi}{W}\frac{\partial \Phi}{\partial v} x - \frac{e^{-\theta}\,(W - \Phi)}{W}\frac{\partial \Phi}{\partial v}\xi + \right.$$
$$\left. + \frac{e^{-2\theta}}{W}\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial v}\eta + \left[\frac{e^{-2\theta}}{W}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)^2 - a\,\Phi\right]\zeta\right\},$$

dalle quali per l'elemento lineare $d\,s'$ della superficie trasformata S' si deduce:

$$d\,s'^2 = \frac{\Phi^2\,e^{-2\theta}}{W^2}(d\,u^2 + d\,v^2);$$

questa combina precisamente coll'elemento lineare della superficie d'area minima trasformata nello spazio euclideo della primitiva (*). Per le coordinate ξ'_0, ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 del piano tangente alla S' in M' troviamo poi:

$$\xi' = \frac{\Phi - W}{a\,W} x + \frac{1}{a}\left[a - \frac{(W - \Phi)^2}{\Phi\,W}\right]\xi +$$
$$+ \frac{e^{-\theta}\,(W - \Phi)}{a\,\Phi\,W}\frac{\partial \Phi}{\partial u}\eta + \frac{e^{-\theta}\,(W - \Phi)}{a\,\Phi\,W}\frac{\partial \Phi}{\partial v}\zeta,$$

da cui derivando risultano le formole:

$$\frac{\partial \xi'}{\partial u} = \left(1 + \frac{W^2\,e^{2\theta}}{\Phi^2}\right)\frac{\partial x'}{\partial u}, \quad \frac{\partial \xi'}{\partial v} = \left(1 - \frac{W^2\,e^{2\theta}}{\Phi^2}\right)\frac{\partial x'}{\partial v}.$$

Per tal modo verifichiamo che sulla S' le linee u, v sono ancora le linee di curvatura e per i raggi principali di curvatura r'_1, r'_2 abbiamo:

$$\frac{1}{r'_2} = 1 + \frac{W^2\,e^{2\theta}}{\Phi^2}, \quad \frac{1}{r'_1} = 1 - \frac{W^2\,e^{2\theta}}{\Phi^2},$$

(*) Nota citata. *Rendiconti dei Lincei.* Settembre 1899.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

onde, come conferma dei nostri risultati, si trae:

$$\frac{1}{r'_1} + \frac{1}{r'_2} = 2.$$

Come al § 18, osserveremo anche qui che le ultime verifiche hanno sempre un carattere reale sia che la primitiva funzione incognita τ risulti dalla (58) reale, ovvero (puramente) immaginaria. In quest'ultimo caso però le due normali alle superficie S, S' in punti corrispondenti, pur giacendo in un medesimo piano, non s'incontreranno in un punto reale; esse risulteranno invece normali ad un medesimo piano. Allora la superficie riflettente $\overline{S}$, applicabile sul paraboloide di rotazione di seconda specie, od almeno una sua regione, risulterà ideale.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Ricerche sugli spazi plurisecanti di una curva algebrica.

(*Di* A. Tanturri, *a Pisa.*)

Seguendo la notazione introdotta dal sig. Schubert (*), indicheremo con $[n]$ uno spazio lineare (di punti) ad n dimensioni: notazione tipograficamente preferibile alla ordinaria S_n, almeno quando la espressione di n è complicata.

I $[k]$ di $[n]$ sono $\infty^{(k+1)(n-k)}$: ed è $n-k-1$ la moltiplicità della condizione cui si assoggetta uno di essi $[k]$, se si vuole appoggiato ad una curva di $[n]$. Secondochè si ha dunque:

$$\begin{array}{lll} 1.^\circ \text{ caso)} & (k+1)(n-k) = i(n-k-1), \\ 2.^\circ \quad \text{»} & (k+1)(n-k) > i(n-k-1), \\ 3.^\circ \quad \text{»} & (k+1)(n-k) < i(n-k-1), \end{array}$$

esisterà, in generale,

un numero finito di $[k]$ i-secanti,
un numero infinito di $[k]$ i-secanti,
nessun $[k]$ i-secante,

di una curva di $[n]$.

Dei tre casi precedenti, solo i primi due sono degni di interesse. Al 1.° si riferisce il problema *fondamentale*, che ha per iscopo *la determinazione del numero* — supposto finito — *dei* $[k]$ *i-secanti di una curva data;* e di cui si hanno, ad es., due casi particolari ponendo:

$$\begin{array}{lll} i = k+2 & \text{e quindi} & n = 2(k+1), \\ \text{ovvero } i = 2(k+1) & \text{»} & n = k+2 \end{array}$$

(per k nullo, od intero e positivo ad arbitrio).

(*) Ved. *Die n-dimensionalen Verallgemeinerungen der fundamentalen Anzahlen unseres Raumes,* Mathem. Annalen 26,

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

A queste due ipotesi corrispondono le formole (3) e (4) del num. 1 di questa Memoria, formole che costituiscono i risultati più generali noti sinora sul problema enunciato. Esse furono date dal sig. Castelnuovo con ragionamenti identici, in sostanza, a quelli dei num.i 10 e 13 di questa Memoria stessa, e nella ipotesi che le espressioni alle quali si vuol giungere dipendano solo dall'ordine m e dal genere p della curva data C_p^m.

Noi ci proponiamo ora di esporre un metodo che si presta a *risolvere ogni caso del problema fondamentale, quando i, k, n, siano arbitrarî bensì* (in modo, si intende, da soddisfare alla $(k+1)(n-k)=i(n-k-1)$) *ma numericamente assegnati, e la curva data, pur essendo di ordine generale, sia razionale od ellittica.*

Le linee essenziali di questo metodo (che si sviluppa in tutto il Cap. I) sono contenute nei num.i 1 e 2, e rese più chiare da alcuni esempî, i quali si potrebbero moltiplicare a volontà. Così, al num. 12, si determina quanti sono:

in [4], i [2] 6-secanti;
» [8], i [5] 9-secanti;
» [12], gli [8] 12-secanti;
» [16], gli [11] 15-secanti;
» [20], i [14] 18-secanti; si intende sempre di una curva razionale od ellittica.

Si può dunque giungere alle formole risolutive in molti casi particolari, e salire poi *per induzione* alle formole (28) e (29) del num. 14, le quali formole non sappiamo, per ora, dimostrare (ved. per la dimostrazione di esse, in qualche caso, i num.i 7, 10, 11, 12, 13 e 16). Esse sono notevoli per la loro generalità, perchè *risolvono il problema fondamentale, in tutta la sua estensione: la* (28) *per curve razionali, e la* (29) *per curve ellittiche.*

Occorrerebbe poi procedere a ricerche più comprensive, per curve di genere qualunque. Al num. 11 *si dà* qui *modo di risolvere, per intero* (p qualunque) *il caso relativo alla ipotesi:*

$$i=k+3 \quad \textit{e quindi} \quad n=\frac{3}{2}(k+1)$$

(per k maggiore di zero e dispari); e solo difficoltà aritmetiche impediscono di scrivere una 3.ª formola, da porsi accanto alle due già dette del sig. Castelnuovo.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Relativamente poi al 2.° dei tre casi distinti in principio, si può richiedere *l'ordine del sistema* — di necessità infinito — *formato dai* $[k]$ *i-secanti di una curva;* ed in particolare, l'ordine stesso quando la varietà in parola sia una forma (così chiamiamo, col prof. SEGRE, una varietà algebrica ad $n-1$ dimensioni di $[n]$). E, nel Cap. II, *sciogliamo alcuni casi speciali di quest'ultimo quesito.*

CAPITOLO I.

Sul problema fondamentale.

GENERALITÀ.

1. Chiamammo già *fondamentale* il problema che ricerca il numero dei $[k]$ i-secanti una curva di $[n]$, numero che sappiamo essere finito, quando (per $k < n$, nullo o positivo ad arbitrio) è soddisfatta la:

$$(k+1)(n-k) = i(n-k-1). \qquad (1)$$

Ora, la ipotesi $k = n-1$ non dà, evidentemente, luogo a ricerca. Noi riterremo dunque, senz'altro, $k < n-1$, e porremo:

$$\frac{k+1}{n-k-1} = q. \qquad (2)$$

Sarà:

$$1 \leqq q \leqq k+1.$$

E poichè, dalla (2) e dalla (1), si trae:

$$n = k+1+\frac{k+1}{q} \text{ ed}$$

$$i = k+1+q;$$

il problema fondamentale può enunciarsi così:

« *Essendo k un numero intero, nullo o positivo ad arbitrio, e q intero* (perchè eguale ad $i-k-1$) $\geqq 1$ *e* $\leqq k+1$, *quanti* $[k]$ $(k+1+q)$-*secano una curva di* $\left[k+1+\frac{k+1}{q}\right]$? » *Si ammette che il numero di essi* $[k]$ *dipenda solo dall'ordine m e dal genere p della curva data* C_p^m, *e si indica esso numero con* $F_p^m(k, q)$.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

In particolare, diamo a q il massimo ed il minimo dei valori che può assumere. Avremo:

per $q=1$,

numero dei $[k]$ $(k+2)$-secanti di una

$$\left.\begin{aligned} C_p^m \text{ in } [2(k+1)] = F_p^m(k,\ 1) = \\ = \sum_0^h \left(-1\right)^h \binom{m-k-1-2h}{k+2-2h}\binom{p}{h}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

la somma essendo estesa sino ad un termine nullo; e, per $q=k+1$,

numero dei $[k]$ $2(k+1)$-secanti di una

$$\left.\begin{aligned} C_p^m \text{ in } [k+2] = F_p^m(k,\ k+1) = \\ = \sum_0^h \frac{(-1)^h}{k+2-h}\binom{m-k-1-h}{k+1-h}\binom{m-k-2-h}{k+1-h}\binom{p}{h}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

la somma essendo estesa, come prima, sino ad un termine nullo (*).

È così risoluto *completamente* il problema fondamentale, quando $k+1$ è primo, perchè, in tal caso $\left(\text{dovendo essere sempre intero il numero } \frac{k+1}{q}(=n-k-1)\right)$ si può supporre soltanto o $q=1$, o $q=k+1$.

Nell'una e nell'altra di queste due ipotesi sul valore di q è di agevole applicazione il metodo ricorrente del sig. Castelnuovo, metodo fondato sullo spezzamento di una C_p^m in una C^{m-1} con una retta r, appoggiata ad essa curva almeno una volta. Il genere di C^{m-1} ed il numero dei punti comuni ad essa e ad r non sono indipendenti, ma legati dalla formola del Nöther (**):

$$p = p_1 + p_2 + \cdots + p_t - (t-1) + i,$$

la quale assegna, in ogni caso, il genere p di un sistema connesso, costituito da C_{p_1}, $C_{p_2}, \ldots$, C_{p_t}, con i intersezioni semplici.

Se si vuole ora applicare il metodo stesso al caso, ad es., di $q=2$, si incontrano difficoltà non lievi. Si informa però ancora ad esso metodo la idea nostra di uno *spezzamento totale*, che consiste nel *sostituire alla C_p^m un si-*

(*) Per la (3) e la (4) ved. Castelnuovo: *Una applicazione della geometria enumerativa alle curve algebriche.* Rendic. Palermo. Tomo 3.° 89. Il metodo del sig. Castelnuovo è accennato nei num. 10 e 13 di questa Memoria.

(**) Ved. Nöther: *Ueber die reductiblen algebraischen Curven.* Acta Math. VIII,

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

stema connesso di m rette, in posizione generica, con $p+m-1$ intersezioni semplici (come è voluto dalla formola del Nöther). Anche qui, come nel caso del sig. Castelnuovo, i $[k]$ passanti per le intersezioni non vanno ritenuti come soddisfacenti al problema (*). È dunque subito visto che, per giungere al numero richiesto, è necessario (**):

Operazione 1.ª: *Formare tutti i possibili gruppi di $k+1+q$ rette, scelte tra le m in cui si è spezzata la curva.*

Operazione 2.ª: *Contare, gruppo per gruppo, i $[k]$ che si appoggiano, in punti distinti, a tutte le rette di esso* (o, come diremo, i $[k]$ che si appoggiano ad esso).

Operazione 3.ª: *Sommare tutti i numeri così ottenuti.*

Sin d'ora, nell'applicazione di questo metodo, ci limitiamo ai casi $p=0$, $p=1$. Diremo dunque subito, in particolare, che *è per noi una C_0^m un sistema di m rette* **consecutive**, vale a dire *rette in ordine determinato* (o contrassegnate coi numeri $1, 2, 3, \ldots, m-1, m$) *la cui posizione generica si limita solo col fatto che, a partire dalla 2.ª, inclusa, ognuna si appoggia solo alla precedente.* E, del pari, *è per noi una C_1^m il sistema ora detto, quando però la 1.ª e la m.ma retta abbiano un punto a comune.*

2. Supponiamo dunque di avere una C_0^m od una C_1^m costituite da rette, nella maniera anzidetta. Per l'applicazione del nostro metodo, occorre, anzitutto, formare tutti i possibili gruppi di $k+1+q$ rette scelte tra le m in cui si è spezzata la curva. Orbene, dico che, *di essi gruppi, sono, senz'altro, esclusi quelli che contengono più di q rette consecutive, perchè non esistono $[k]$ appoggiati ad uno di tali gruppi.*

Per maggior chiarezza divideremo in due parti la dimostrazione di questo fatto, benchè essa sia semplicissima.

I parte. *Non esistono, in $\left[k+1+\frac{k+1}{q}\right]$, $[k]$ appoggiati, in punti distinti, a $q+1$ rette consecutive e ad altre k rette generiche* (***).

(*) Non intendiamo giustificare questa affermazione, e nemmeno la possibilità degli spezzamenti adoperati in tutto questo lavoro.

(**) Nell'applicazione del metodo, che ora si espone, si escludano sempre le curve piane. Del resto è noto che una C_p^m piana ha:

$$F_p^m(0, 1) = \binom{m-1}{2} - p \text{ punti doppî, come è pur dato dalla (3) e dalla (4).}$$

(***) È subito visto, e risulta anche dal ragionamento che segue, che va escluso il caso $k=0$. Ma di ciò non ci preoccupiamo, perchè, come si è detto, le curve piane non sono comprese nella trattazione.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Ciò risulta subito da una osservazione generale da noi fatta su una formola del sig. Castelnuovo, osservazione che trovasi in una nota del num. 5. Ma, del resto, si può anche vedere così.

Quelle delle $q+1$ rette consecutive, le quali non sono estreme, individuano un $[q-1]$. Proiettiamo, da questo, in un $\left[k+1+\frac{k+1}{q}-q\right]$ generico. Un $[k]$ appoggiato ad esse $q+1$ rette consecutive e ad altre k generiche dovrebbe proiettarsi in un $[k+1-q]$ passante per due punti ed appoggiato a k rette genericamente date. Ora ciò fa in tutto:

$$2\frac{k+1}{q}+k\left(\frac{k+1}{q}-1\right)=\frac{k+1}{q}(k+2-q)+1$$

condizioni, mentre i $[k+1-q]$ di $\left[k+1+\frac{k+1}{q}-q\right]$ sono soltanto:

$$\infty^{\frac{k+1}{q}(k+2-q)}.$$

È dunque vero il fatto affermato, almeno quando sia:

$$k+1+\frac{k+1}{q}-q>2 \text{ (*)}.$$

Ma, se si esclude il caso $q=k+1$ (nella quale ipotesi il fatto affermato è evidente), tale disuguaglianza ha sempre luogo. Difatti, è $k+1>q$, $\frac{k+1}{q}\geqq 2$. Onde ecc.

II parte. *A più forte ragione non esisteranno* $[k]$ *appoggiati a* $q+1$ *rette consecutive ed a k comunque aggruppate, od appoggiate a* $q+1+h$ $(0<h\leqq k)$ *rette consecutive ed a* $k-h$ *comunque aggruppate,* le rette di ciascun gruppo essendo sempre intese in posizione generica.

Ci si convince facilmente di ciò, pensando, che, per la posizione generica delle nostre rette, *al crescere dell'aggruppamento*, il numero dei $[k]$, che si considerano, non diventa infinito: esso resterebbe dunque inalterato se si contassero anche i $[k]$ passanti per i *nuovi* punti comuni alle diverse rette, ma può però scemare, se di questi $[k]$ non si fa conto (Vedi pure la nota al num. 5 relativa alla formola del sig. Castelnuovo).

(*) Il ragionamento fatto non è valido se non si proietta almeno in un [3].

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Concludendo, può effettivamente introdursi una notevole semplificazione nel nostro lavoro, trascurando, nella formazione dei gruppi di $k+1+q$ rette, tutti quelli che contengono più di q rette consecutive.

Uno dei gruppi restanti contenga ora:

α_1 rette generiche,
α_2 coppie di rette consecutive,
α_3 terne " ,
. . . . ,
α_{q-1} gruppi di $q-1$ rette consecutive,
α_q " q " .

I numeri $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha_q$ saranno interi, positivi o nulli, e legati dalla:

$$\alpha_1 + 2\,\alpha_2 + 3\,\alpha_3 + \cdots + (q-1)\,\alpha_{q-1} + q\,\alpha_q = k+1+q = i. \tag{5}$$

E la operazione 1.ª, — se si vuole tener conto solo dei gruppi che daranno un risultato non nullo allorchè si farà la 2.ª operazione, — può dunque ridursi all'altra:

Trovare i sistemi di tutti i possibili valori interi, positivi o nulli, per le α, i quali soddisfino alla precedente equazione.

Esaminiamo ora la operazione 2.ª

Con le nostre m rette, è, in generale, possibile più di un aggruppamento corrispondente ad una determinata soluzione della (5): ed ognuno di essi importa uno stesso numero di $[k]$ nella somma finale. La 2.ª operazione si scinde dunque in due parti.

I PARTE:

Determinazione del numero degli aggruppamenti che corrispondono ad ogni soluzione della (5).

E ciò, evidentemente (poichè le rette sono contrassegnate con i numeri $1, 2, 3, \ldots, m-1, m$), equivale a calcolare *il numero delle combinazioni di classe i* (o con $i = k+1+q$ elementi) *dei numeri naturali da* 1 *ad m, le quali contengono, contemporaneamente,*

α_1 *numeri isolati,*
α_2 *coppie di numeri consecutivi,*
α_3 *terne* " ,
. . . . ,
α_{q-1} *gruppi di $q-1$ numeri consecutivi,*
α_q " q " .

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Questo numero ha un valore se 1 ed m si considerano come non consecutivi (curve razionali), ed un altro valore, se 1 ed m si considerano come consecutivi (curve ellittiche).

Noi indicheremo essi valori, rispettivamente, con:

$$V_0^m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha_q)$$
$$V_1^m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha_q).$$

II PARTE:

Per ogni soluzione della (5) *calcolare il numero dei* $[k]$ *appoggiati ad uno* (qualunque) *dei gruppi corrispondenti.*

Noi indicheremo con:

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha_q),$$

il numero da calcolarsi, ossia quello dei $[k]$, che, in $\left[k+1+\frac{k+1}{q}\right]$, si appoggiano, contemporaneamente,

ad α_1 rette generiche (od isolate),
ad α_2 coppie di rette consecutive,
ad α_3 terne " ,
. . . . ,
ad α_{q-1} gruppi di $q-1$ rette consecutive,
ad α_q " q " " .

Dopo ciò si ha, evidentemente:

$$F_0^m(k, q) = \Sigma L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha_q) V_0^m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha_q),$$

ed:

$$F_1^m(k, q) = \Sigma L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha_q) V_1^m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha_q),$$

entrambe le somme essendo estese in corrispondenza a tutte le possibili soluzioni intere, positive o nulle, della equazione (5).

Ogni nostra indagine va dunque diretta alla ricerca delle espressioni di:

$$V_0^m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha_q)$$
$$V_1^m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha_q)$$
$$L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha_q).$$

Perciò nel paragrafo che segue (num.i 3 e 4) ci occuperemo del calcolo delle prime due, riserbando quello (incompleto) della 3.a espressione ai successivi num.i 5 e 6.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

CALCOLO DI $V_0^m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha_q)$ E DI $V_1^m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha_q)$.

3. Per calcolare il numero $V_0^m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha_q)$ delle combinazioni già da noi definite, prendiamo un foglio quadrettato ed occupiamo i quadretti successivi di una orizzontale con i numeri naturali da *1* ad m, nell'ordine $1, 2, 3, \ldots, m-1, m$. Diremo che $i\ (= k + 1 + q)$ tratti di una orizzontale rappresentano una (determinata) delle nostre combinazioni, se stanno nelle verticali intestate con gli elementi (o numeri) di essa.

Osserviamo che due di questi numeri (od i tratti che ad essi corrispondono) possono essere *consecutivi nella combinazione,* senza esserlo nell'ordinamento $1, 2, 3, \ldots, m-1, m$, o, come diremo semplicemente, senza essere *consecutivi;* e si dirà allora *intervallo* tra essi elementi (o numeri) la loro differenza diminuita di *1.*

Ciò premesso, la combinazione determinata, di cui ci occupiamo, può rappresentarsi, in un secondo modo, con un sistema di tratti, ottenuto dal primitivo, tenendo fisso il 1.° tratto, e spostando, a sinistra, tutti gli altri, in guisa da ridurre di una unità ogni intervallo, e da sostituire, a t tratti *consecutivi*, un *elemento multiplo*, ossia t tratti sovrapposti. Con ciò la nostra combinazione ha un primo accorciamento di:

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{q-1} + \alpha_q - 1$ unità, tanti essendo gl'*intervalli* e riducendosi di una unità ognuno di essi: inoltre, gli α_l gruppi di l elementi *consecutivi* dànno ognuno un accorciamento di $l-1$ unità; onde l'accorciamento totale della combinazione è di:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{q-1} + \alpha_q - 1 + \sum_1^q {}_l\, \alpha_l (l-1) = i - 1,$$

unità. (Ved. in fondo a questa Memoria.)

Facendo uso del 2.° modo di rappresentazione, bastano dunque $m-(i-1)$ verticali per rappresentare tutte le combinazioni nostre. E si avrà un *quadro* godente delle seguenti proprietà:

1.ª) Degli $m - i + 1$ quadretti di ogni orizzontale ne sono sempre occupati $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{q-1} + \alpha_q$, dei quali:

α_1 contengono sempre 1 tratto,
α_2 " " 2 tratti sovrapposti,
α_3 " " 3 " ,
. . . . ,
α_{q-1} contengono sempre $q-1$ tratti sovrapposti,
α_q " " q " " .

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

2.ª) Se si considera tutto il quadro, si trova che, non solo la occupazione di $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{q-1}+\alpha_q$ quadretti in ogni orizzontale avviene in tutti i modi possibili, ma anche che ad ognuno di essi modi corrispondono sempre tutte le possibili distribuzioni degli *elementi multipli.*

Se ne deduce che il *quadro* è ottenibile, facendo le:

$$\binom{m-i+1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{q-1}+\alpha_q},$$

ordinarie combinazioni di classe $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{q-1}+\alpha_q$ degli $m-i+1$ numeri, che intestano le sue verticali, e poi rendendo, contemporaneamente, in tutti i modi possibili,

doppi ad α_2 per volta,
tripli " α_3 " ,
. . . . ,
$(q-1)$-pli ad α_{q-1} per volta,
q-pli " α_q " gli elementi di esse *ordinarie combinazioni.* Con ciò, ognuna di queste dà luogo a tante distinte del nostro *quadro* per quante sono le permutazioni distinte di $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{q-1}+\alpha_q$ numeri, tra i quali ve ne siano α_1 eguali tra loro, α_2 eguali tra loro, α_3 eguali tra loro,..., e così via. È dunque:

$$\left.\begin{aligned}
&V_0^m(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{q-1},\alpha_q)=\\
&=\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{q-1}+\alpha_q)!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_3!\ldots\alpha_{q-1}!\,\alpha_q!}\binom{m-i+1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{q-1}+\alpha_q}=\\
&=\binom{\alpha_1}{\alpha_1}\binom{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_2}\binom{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{\alpha_3}\cdots\\
&\cdots\binom{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{q-1}+\alpha_q}{\alpha_q}\binom{m-i+1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{q-1}+\alpha_q}.\ (*)
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

(*) In particolare il numero $\binom{s-qr+r}{r}\binom{m-s+1}{s-qr+r}$ risponde al quesito: « *quante sono le combinazioni di classe s dei primi m numeri naturali, le quali contengono ognuna r gruppi di numeri consecutivi?* » Tale quesito fu da me inviato all'*Intermèdiaire des Math.* (ved. num. 1479, Aprile 1899, pag. 75), ma, al posto di r, fu stampato *1.* La risposta, in tal caso, è $\binom{s-q+1}{1}\binom{m-s+1}{s-q+1}=\binom{m-s+1}{1}\binom{m-s}{s-q}$.

Del problema così semplificato mi inviarono tentativi di soluzione e soluzioni i signori Dott. Beppo Levi (Torino), Ing. Emine (Costantinopoli), Colonn. Moreau (Poitiers),

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

4. Veniamo ora al calcolo di $V_1^m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha_q)$. Delle combinazioni il cui numero complessivo è così rappresentato:

$V_0^{m-1}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha_q)$ non contengono m. Tra le rimanenti,

$V_0^{m-3}(\alpha_1 - 1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha_q)$ contengono m come elemento isolato, il che si vede astraendo i numeri 1, $m-1$, m;

$2\,V_0^{m-4}(\alpha_1, \alpha_2 - 1, \alpha_3, \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha_q)$ contengono m come elemento di una coppia, che è la $(m-1, m)$ per $V_0^{m-4}(\alpha_1, \alpha_2 - 1, \alpha_3, \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha_q)$, e la $(m, 1)$ per altrettante;

$3\,V_0^{m-5}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 - 1, \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha_q)$ contengono m come elemento di una terna; e così via.

Si giungerà sino a:

$q\,V_0^{m-q-2}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha_q - 1)$ combinazioni, le quali contengono m come elemento di una q-pla. È dunque:

$$\begin{aligned} V_1^m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{l-1}, \alpha_l, \alpha_{l+1}, \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha_q) = \\ = V_0^{m-1}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{l-1}, \alpha_l, \alpha_{l+1}, \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha_q) + \\ + \sum_1^q l\, V_0^{m-l-2}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{l-1}, \alpha_l - 1, \alpha_{l+1}, \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha_q), \end{aligned}$$

donde, con semplici riduzioni:

$$\left.\begin{aligned} V_1^m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha_q) = \binom{\alpha_1}{\alpha_1}\binom{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_2}\binom{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{\alpha_3}\cdots \\ \cdots\binom{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{q-1}+\alpha_q}{\alpha_q}\frac{m}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{q-1}+\alpha_q}\binom{m-i-1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{q-1}+\alpha_q-1}. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Sul calcolo di $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha_q)$.

5. Siano $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k$, $k+1$ numeri interi e positivi soddisfacenti alle $0 \leq a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leq n$; e pensiamo, in $[n]$, $k+1$ spazi lineari $[a_0]$, $[a_1]$, $[a_2], \ldots, [a_k]$, tali che sempre $[a_i]$ contenga $[a_{i-1}]$.

---

dopo che io ero già pervenuto alla espressione generale di V_0^m. Sento però egualmente il dovere di ringraziarli tutti.

Osservo che la dimostrazione qui sopra riportata è un po' più semplice di quella che inviai all'*Intermédiaire*: e la semplificazione mi fu suggerita dal prof. sig. Corrado Segre. Il quale — colgo ora l'occasione per dirlo — mi fu largo di valido aiuto in tutto il corso di questo lavoro.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

La condizione imposta ad un $[k]$, se si vuole che con $[a_0]$ abbia a comune un punto, con $[a_1]$ una retta, ed, in generale, con $[a_i]$, un $[i]$, dicesi *fondamentale*, e si rappresenta col *simbolo* $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k)$.

Un $[k]$ che si assoggetti, contemporaneamente, a più condizioni fondamentali, si dice assoggettato alla condizione loro *prodotto*, la quale si rappresenta, scrivendo, l'uno dopo l'altro, i simboli delle condizioni di cui si tratta, e, — nel caso che due o più di queste coincidano, — facendo uso di esponenti (*). Ad es., $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha_q)$ è il numero dei $[k]$ soddisfacenti alla:

$$\left(1, \frac{k+1}{q}+2, \frac{k+1}{q}+3, \ldots, \frac{k+1}{q}+k+1\right)^{\alpha_1}$$
$$\left(1, 2, \frac{k+1}{q}+3, \ldots, \frac{k+1}{q}+k+1\right)^{\alpha_2}$$
$$\left(1, 2, 3, \frac{k+1}{q}+4, \ldots, \frac{k+1}{1}+k+1\right)^{\alpha_3}\ldots$$
$$\ldots\left(1, 2, 3, \ldots, q, \frac{k+1}{q}+q+1, \ldots, \frac{k+1}{q}+k+1\right)^{\alpha_q}:$$

osservazione questa, che riconduce la ricerca di $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha_q)$ allo studio di un problema già risoluto dal prof. PIERI *in ogni caso numerico.* (Ved. *Sul problema degli spazi secanti.* Rendiconti Istit. Lombardo, Serie II, Vol. 26.°-27.°-28.°) In virtù dunque di quanto si disse al num. 2, e delle formole (6) e (7), si può affermare senz'altro:

sono note le espressioni di $F_0^m(k, q)$ e di $F_1^m(k, q)$, quando k e q abbiano valori numerici assegnati.

Conviene però subito avvertire come le formole del prof. PIERI conducano ai risultati richiesti con calcoli, in generale, laboriosi: onde, sarebbe indispensabile, per la speditezza del lavoro, conoscere l'espressione letterale di $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha_q)$, almeno in molti casi particolari. Noi siamo giunti però a darla in un numero molto ristretto di casi, applicando una formola del sig. CASTELNUOVO (**), la quale — *quando non sia nullo a*

(*) Queste convenzioni ed il simbolo condizionale sono dovuti al sig. H. SCHUBERT. Ved. ad es. *Anzahl-Bestimmungen für lineare Räume beliebiger Dimension.* Acta Mathem., 8.

(**) Ved. *Numero degli spazi che segano più rette* ecc. Rend. d. R. Accad. d. Lincei. Vol. 5.°, 2.° Sem., Fasc. 3.°, pag. 71. La formola finale trovasi al num. 9 della Memoria,

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

priori (*) — assegna il numero, in generale finito, dei $[k]$ di $[n]$ soddisfacenti alla $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k)$ ed appoggiati inoltre ad:

$$N = \frac{a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + a_k - \frac{k(k+1)}{2}}{n-k-1},$$

rette generiche.

Così, per $0 \leqq v \leqq q-1$, il numero dei $[k]$ di $\left[k+1+\frac{k+1}{q}\right]$ i quali incontrano $k+1+v$ rette generiche, e si appoggiano inoltre a $q-v$ rette consecutive $\left(\text{ossia soddisfano inoltre alla } \left(1, 2, 3, \ldots, q-v, \frac{k+1}{q}+q-v+1, \frac{k+1}{q}+q-v+2, \ldots, \frac{k+1}{q}+k+1\right)\right)$ è dato da:

$$\left.\begin{aligned} &L(k+1+v, 0, \ldots, 0, \overset{(q-v)^{mo}\,\text{indice}}{1}, 0, \ldots, 0) = \\ &= \frac{(k+1+v)!}{v!} \frac{\left(\frac{k+1}{q}+q-v\right)!}{(q-v)!} \frac{q!\,(q-1)!\ldots 3!\,2!\,1!}{\left(\frac{k+1}{q}+q\right)!\left(\frac{k+1}{q}+q-1\right)!\ldots\frac{k+1}{q}!}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

In particolare, per $v = q-1$, si considera il numero $L(k+1+q, 0, 0, \ldots, 0, 0)$ dei $[k]$ di $\left[k+1+\frac{k+1}{q}\right]$ i quali si appoggiano a $k+1+q$ rette generiche. La (8) va allora letta così:

$$\left.\begin{aligned} &L\Big((k+q)+1, 0, 0, \ldots, 0, 0\Big) = \\ &= \frac{(k+1+q)!\,(q-1)!\,(q-2)!\ldots 3!\,2!\,1!}{\left(\frac{k+1}{q}+q\right)!\left(\frac{k+1}{q}+q-1\right)!\ldots\left(\frac{k+1}{q}+1\right)!}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

(*) *Esso numero è nullo a priori se è:*

$$k+1-N > l,$$

ove per l si intenda l'indice della prima delle a che è diversa dal proprio indice (in modo che si abbia $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2, \ldots, a_{l-1} = l-1$, $a_l > l$).

Questo fatto può dedursi dal ragionamento stesso del sig. Castelnuovo, e crediamo utile aggiungerlo qui, per chi legge solo il risultato finale della Memoria citata.

Non esistono, ad es., $[k]$ appoggiati a k rette generiche e soddisfacenti inoltre alla $\left(1, 2, 3, \ldots, q, q+1, \frac{k+1}{q}+q+2, \frac{k+1}{q}+q+3, \ldots, \frac{k+1}{q}+k+1\right)$, perchè è $k+1-N=1$ ed $l=0$. Si ritrova così un risultato del num. 2.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Da questa (9) *si può dedurre la espressione di:*

$$L(k - q\,\alpha_q + 1 + q,\ 0,\ 0, \ldots,\ 0,\ \alpha_q),$$

quando sia $1 \leq \alpha_q \leq \frac{k+1}{q} + 1$. *E, per ottenere la nuova espressione*, dico che *basta leggere, da per tutto, nella* (9), $k - q\,\alpha_q$ *al posto di* k.

Difatti il numero:

$L(k - q\,\alpha_q + 1 + q,\ 0,\ 0, \ldots,\ 0,\ \alpha_q)$ (ossia il numero dei $[k]$ di $\left[k + 1 + \frac{k+1}{q}\right]$ appoggiati a $k - q\,\alpha_q + 1 + q$ rette generiche e ad α_q gruppi di q rette consecutive) vale quello dei $[k - q\,\alpha_q]$ (si suppone dunque $k \geq q\,\alpha_q$) di $\left[k - q\,\alpha_q + 1 + \frac{k - q\,\alpha_q + 1}{q}\right]$ appoggiati a $k - q\,\alpha_q + 1 + q$ rette isolate. E ciò si vede subito proiettando in un generico:

$$\left[k - q\,\alpha_q + 1 + \frac{k - q\,\alpha_q + 1}{q}\right],$$

dal $[q\,\alpha_q + (\alpha_q - 1)]$ che congiunge gli α_q gruppi di q rette consecutive.

Esso numero può dunque ottenersi, come si è detto, almeno per $\alpha_q \leq \frac{k+1}{q} - 1$ (senza di che è $k < q\,\alpha_q$). Col ragionamento fatto parrebbero dunque esclusi i due rimanenti casi:

$$a)\ \alpha_q = \frac{k+1}{q}, \quad b)\ \alpha_q = \frac{k+1}{q} + 1.$$

Ma, in una delle due ipotesi *a*) o *b*), si pensi il $\left[k + 1 - q + \frac{k+1}{q} - 2\right]$ congiungente $\frac{k+1}{q} - 1$ gruppi di q rette consecutive, e si proietti, da esso, in un $[q + 1]$. Poichè, in $[q + 1]$, esiste un solo $[q - 1]$ appoggiato

nell'ipotesi *a*) a q rette consecutive ed a q generiche,

nell'ipotesi *b*) a due gruppi generici di q rette consecutive, si avrà corrispondentemente:

$$L\left(q,\ 0,\ 0, \ldots,\ 0,\ \frac{k+1}{q}\right) = 1, \tag{10}$$

$$L\left(0,\ 0,\ 0, \ldots,\ 0,\ \frac{k+1}{q} + 1\right) = 1; \tag{11}$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

formole queste entrambe deducibili dalla (9) leggendo, in essa, da per tutto, al posto di k:

$$k - q\,\alpha_q = \begin{cases} -1 & \text{nella ipotesi } a) \\ -q-1 & \quad \text{»} \quad b). \end{cases}$$

Sta dunque quanto si è affermato; ossia, per $1 \leq \alpha_q \leq \frac{k+1}{q} + 1$, è:

$$\left.\begin{aligned} &L(k - q\,\alpha_q + 1 + q,\ 0,\ 0, \ldots,\ 0,\ \alpha_q) = \\ &= \frac{(k - q\,\alpha_q + 1 + q)!\,(q-1)!\,(q-2)!\ldots 3!\,2!\,1!}{\left(\frac{k - q\,\alpha_q + 1}{q} + q\right)!\left(\frac{k - q\,\alpha_q + 1}{q} + q - 1\right)!\ldots\left(\frac{k - q\,\alpha_q + 1}{q} + 1\right)!}. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Anzi, più in generale, si può dimostrare, analogamente, che *la espressione di*:

$L(k + 1 + q - \sum_2^q l\,\alpha_l,\ \alpha_2, \ldots,\ \alpha_{q-1},\ \alpha_q)$ *è ottenibile da quella di*:

$L(k + 1 + q - \sum_2^{q-1} l\,\alpha_l,\ \alpha_2, \ldots,\ \alpha_{q-1},\ 0)$ *leggendo, da per tutto,* $k - q\,\alpha_q$ *al posto di* k. Così, dalla (8), si ha:

$$\left.\begin{aligned} &L(k - q\,\alpha_q + 1 + v,\ 0, \ldots,\ 0,\ \overset{(q-v)^{mo}\ \text{indice}}{1},\ 0, \ldots,\ 0,\ \alpha_q) = \\ &= \frac{(k - q\,\alpha_q + 1 + v)!}{v!}\,\frac{\left(\frac{k - q\,\alpha_q + 1}{q} + q - v\right)!}{(q-v)!} \\ &\frac{q!\,(q-1)!\ldots 3!\,2!\,1!}{\left(\frac{k - q\,\alpha_q + 1}{q} + q\right)!\left(\frac{k - q\,\alpha_q + 1}{q} + q - 1\right)!\ldots\frac{k - q\,\alpha_q + 1}{q}!}, \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

formola che è valida per $0 \leq v \leq q - 1$ ed $1 \leq \alpha_q \leq \frac{k+1}{q} + 1$.

Siamo dunque in grado di scrivere la espressione di $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha_q)$ *quando tutti gl'indici siano nulli, eccetto il 1.º e l'ultimo ed un 3.º che valga 1.*

E si deduce da ciò che *si può*, col nostro metodo, *giungere, senz'altro, ai valori di* $F_0^m(k,\ 1)$, $F_1^m(k,\ 1)$; $F_0^m(k,\ 2)$, $F_1^m(k,\ 2)$, *anche quando sia generale k oltrechè m.*

E ciò perchè, nella espressione dei primi due valori compare solo $L(k+2) = 1$; ed, in quella dei secondi due, solo:

$$L(k - 2\,\alpha_2 + 3,\ \alpha_2) = \frac{(k - 2\,\alpha_2 + 3)!}{\left(\frac{k - 2\,\alpha_2 + 1}{2} + 2\right)!\left(\frac{k - 2\,\alpha_2 + 1}{2} + 1\right)!},$$

(ved. num.i 10 ed 11).

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

6. Alle formole del num. precedente aggiungiamo ora alcune considerazioni dirette al calcolo di:

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}) \ (^*).$$

Suppongasi k dato numericamente.

Il sistema di rette cui corrisponde una determinata $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1})$ contiene almeno due gruppi (staccati) di rette consecutive, se quella L è diversa da zero (ved. una proposizione del num. 2, oppure la nota del num. 5, relativa alla formola del sig. Castelnuovo). — È dunque sempre possibile far incidere, in un punto P, l'ultima retta di un gruppo (di una i^{pla}, ad es.) con la 1.ª di un altro (di una j^{pla}, ad es.); e, dei $[k]$ in ricerca, distinguere quelli che verranno a passare per P, da quelli che secheranno in punti distinti le nostre rette, anche nella nuova posizione. — Il numero dei primi $[k]$ si ottiene proiettando da P, ed è dato da una L con k indici: il numero dei rimanenti, o è nullo a priori, per $i+j>k+1$ (ved. ancora la proposizione del num. 2, ovvero, ecc.), o è calcolabile riapplicando il metodo stesso. In ogni caso, come è facile convincersi, si scompone la primitiva L in una somma di L con k indici.

Si ha così un agevole *metodo di riduzione*, che può, anzi, talvolta, essere reso più rapido dalle formole del num. 5, applicate al caso di $q=k+1$, e dalle formole (14), (15), (16). Della 1.ª classe di formole notiamo solo la:

$$L(k+1+v,\ 0,\ldots,\ 0,\ \overset{(k+1-v)^{mo}\ \text{indice}}{1},\ 0,\ldots,\ 0) = \frac{(k+1+v)!}{(k+2)!}\,\frac{k+2-v}{v!}, \quad (8')$$

donde, per $v=k$, si ha la:

$$L\Big(2(k+1),\ 0,\ldots,\ 0,\ 0\Big) = \frac{[2(k+1)]!}{(k+2)!\,(k+1)!}. \quad (9')$$

Le altre si ottengono poi con un metodo, che potrebbe, forse, condurre alla espressione generale di $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1})$.

(*) Tale ricerca, anche se fosse completa, potrebbe a qualcuno parere inutile, visto che, nella ipotesi $q=k+1$, il problema fondamentale è già risoluto dalla (4). Si pensi però, che la formola cui essa mira, aiuterebbe (almeno un po') a scrivere *induttivamente* la espressione di $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha_q)$: espressione di visibile importanza, anche fuori del nostro problema.

Analoga ragione di essere trovano le nostre insistenze (al num. 12) riguardo al calcolo di $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. E ci permettiamo di notare come insistenze non dissimili da queste ci dettero la (28) e la (29).

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Ed ecco in qual modo.

Si noti prima di tutto, che, dalla:

$$\alpha_1 + 2\,\alpha_2 + 3\,\alpha_3 + \cdots + k\,\alpha_k + (k+1)\,\alpha_{k+1} = 2\,(k+1), \tag{5'}$$

(cioè dalla (5), per $q = k + 1$), si trae $\alpha_{k+1} < 2$, ed $= 2$ solo in $L(0,\ 0, \ldots,\ 0,\ 2) = 1$ (ved. formola (11)). Può dunque ulteriormente supporsi:

$$\text{o} \quad \alpha_{k+1} = 1, \quad \text{o} \quad \alpha_{k+1} = 0.$$

E sia $\alpha_{k+1} = 1$. Si avrà:

$$L(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3, \ldots,\ \alpha_k,\ 1) = 1, \tag{14}$$

perchè il gruppo di $k + 1$ rette consecutive, al quale si riferisce l'ultimo indice, individua un $[k+1]$ di $[k+2]$: e, su esso $[k+1]$, le rimanenti $k+1$ rette (comunque distribuite, purchè esterne), individuano un insieme di punti, congiunti dall'unico $[k]$ che soddisfi alle condizioni volute.

Sia ora $\alpha_{k+1} = 0$, e suppongasi $\alpha_k > 0$.

Deve essere:

$$\alpha_1 + 2\,\alpha_2 + 3\,\alpha_3 + \cdots + (k-1)\,\alpha_{k-1} = (2 - \alpha_k) \geqq 0,$$

(ved. (5')), donde *la restrizione:*

$$\alpha_k \leqq 2 + \frac{2}{k} \leqq 4.$$

Tale restrizione trae di conseguenza le altre:

$$\alpha_k = 4 \text{ solo per } k = 1, \text{ in } L(4,\ 0) = 2;$$

$$\alpha_k = 3 \quad \text{»} \quad = 2, \text{ »} \ L(0,\ 3,\ 0) = L(2,\ 1) = 1;$$

ed infine $\alpha_k = 2$ solo nelle due espressioni:

$$L(2,\ 0,\ 0, \ldots,\ 0,\ 2,\ 0) = L(2,\ 2,\ 0) = L(4,\ 0) = 2$$

$$L(0,\ 1,\ 0, \ldots,\ 0,\ 2,\ 0) = L(0,\ 1,\ 2,\ 0) = L(0,\ 3,\ 0) = 1,$$

le quali si compendiano nell'unica:

$$L(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3, \ldots,\ \alpha_{k-1},\ 2,\ 0) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{k-1}. \tag{15}$$

Dico ora che sta la:

$$L(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3, \ldots,\ \alpha_{k-1},\ 1,\ 0) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{k-1} - 1. \tag{16}$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Questa eguaglianza è difatti manifestamente vera per $k \leq 3$, avendosi, per $k=2$, solo la:

$$L(4,\ 1,\ 0) = L(3,\ 0,\ 1) + L(4,\ 0) = 1 + 2 = 3,$$

e, per $k=3$, solo le:

$$L(5,\ 0,\ 1,\ 0) = L(4,\ 0,\ 0,\ 1) + L(4,\ 1,\ 0) = 1 + 3 = 4$$
$$L(3,\ 1,\ 1,\ 0) = L(4,\ 1,\ 0) = 3$$
$$L(1,\ 2,\ 1,\ 0) = L(2,\ 2,\ 0) = 2.$$

Valga ora essa (16) per un certo valore di k, maggiore di 3. Dimostreremo che essa sta per il valore successivo. Ed a tale uopo distinguiamo due casi.

1.° caso.

$\alpha_1 > 0$. Si ha immediatamente:

$$L(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3, \ldots,\ \alpha_{k-1},\ 1,\ 0) = L(\alpha_1 - 1,\ \alpha_2,\ \alpha_3, \ldots,\ \alpha_{k-1} + 1,\ 0,\ 1) +$$
$$+ L(\alpha_1 - 1,\ \alpha_2,\ \alpha_3, \ldots,\ \alpha_{k-1} + 1,\ 0);$$

e, per l'ultimo termine, sta *la restrizione* $\alpha_{k-1} + 1 \leq 4$, la quale trae di conseguenza le altre:

$$\alpha_{k-1} + 1 = 4, \text{ solo per } k - 1 = 1$$
$$\alpha_{k-1} + 1 = 3, \qquad \text{»} \qquad = 2.$$

Ma si suppone $k > 3$, onde dovremo porre soltanto $\alpha_{k-1} + 1 = 1$, ed $\alpha_{k-1} + 1 = 2$.

E sia $\alpha_{k-1} + 1 = 1$. Il 2.° membro della precedente eguaglianza vale allora $1 + (\alpha_1 - 1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{k-2} - 1)$, come è voluto dalla (14) e dalla (16), che si suppone applicabile.

Sia poi $\alpha_{k-1} + 1 = 2$. Allora la (14) e la (15) dànno, come valore del 2.° membro:

$$1 + (\alpha_1 - 1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{k-2}).$$

In entrambe le ipotesi è dunque vera la (16).

2.° caso.

$\alpha_1 = 0$. Gl'indici $\alpha_2,\ \alpha_3, \ldots,\ \alpha_{k-2}$, non saranno tutti nulli, altrimenti si

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

avrebbe:

$$(k-1)\,\alpha_{k-1} = (2-\alpha_k)\,k + 2 = \begin{cases} k+2 & \text{se } \alpha_k = 1 \ (*) \\ 2 & \text{»} \ \alpha_k = 2\,; \end{cases}$$

ed è subito visto, che, per $k > 3$, nessuna di queste due ipotesi può aver luogo, eccetto nel caso:

$$L(0,\ 0,\ 2,\ 1,\ 0) = L(0,\ 1,\ 2,\ 0) = 1.$$

Sia dunque $\alpha_i \, (1 < i < k-1)$ il 1.° degl'indici che è diverso da 0. Si ha immediatamente:

$$L(0,\ 0,\ 0, \ldots,\ 0,\ 0,\ \alpha_i,\ \alpha_{i+1}, \ldots,\ \alpha_{k-2},\ \alpha_{k-1},\ 1,\ 0) =$$

$$= L(0,\ 0, \ldots,\ 0,\ 1,\ \alpha_i - 1,\ \alpha_{i+1}, \ldots,\ \alpha_{k-2},\ \alpha_{k-1}+1,\ 0) =$$

$$= \begin{cases} 1 + (\alpha_i - 1 + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_{k-2} - 1) & \text{se } \alpha_{k-1}+1 = 1 \ \text{(ved. (14) e (16))} \\ 1 + (\alpha_i - 1 + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_{k-2}) & \text{se } \alpha_{k-1}+1 = 2 \ \text{(ved. (14) e (15)).} \end{cases}$$

E la (16) è così dimostrata in ogni caso.

Una applicazione.

7. Assegnati numericamente k e q, si può, caso per caso, procedere alla ricerca di $F_0^m(k,\ q)$ e di $F_1^m(k,\ q)$ con le sole considerazioni dei numeri precedenti.

Noi però crediamo utile premettere, in questo numero, lo studio (semplicissimo) del problema: « *quanti* $[k]$ $(k+1+q)$*-secano una* $C_0^{k+1+\frac{k+1}{q}+q}$ *od una* $C_1^{k+1+\frac{k+1}{q}+q+1}$ *di* $\left[k+1+\frac{k+1}{q}\right]$? »; e, nel successivo num. 8, *la ricerca di qualche proprietà della funzione* $F_p^m(k,\ q)$.

Dalla equazione (5) del num. 2 si trae:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{q-1} + \alpha_q \geq \frac{k+1}{q} + 1\,;$$

ed il segno $=$ sta solo per:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_{q-1} = 0, \quad \alpha_q = \frac{k+1}{q} + 1.$$

(*) Altri valori di α_k non sono possibili, avendo fatte le ipotesi $\alpha_k > 0$ e $k > 3$.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Ne segue che (ved. formola (6)):

$$V_0^{k+1+\frac{k+1}{q}+q}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3, \ldots,\ \alpha_{q-1},\ \alpha_q) = \binom{\alpha_1}{\alpha_1}\binom{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_2}\cdots$$

$$\cdots\binom{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_q}{\alpha_q}\binom{\frac{k+1}{q}+1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_q},$$

è sempre nullo, quando non sia:

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\cdots=\alpha_{q-1}=0,\quad \alpha_q=\frac{k+1}{q}+1.$$

E quindi:

$$F_0^{k+1+\frac{k+1}{q}+q}(k,\ q) = L\left(0,\ 0,\ 0,\ldots,\ 0,\ \frac{k+1}{q}+1\right)$$

$$V_0^{k+1+\frac{k+1}{q}+q}\left(0,\ 0,\ldots,\ 0,\ \frac{k+1}{q}+1\right)=1$$

(ved. formola (11) e formola (6)).

Ossia, *una* $C_0^{k+1+\frac{k+1}{q}+q}$ *di* $\left[k+1+\frac{k+1}{q}\right]$ *ammette un solo* $[k]$ $(k+1+q)$*-secante* (*).

Pensando le $k+1+\frac{k+1}{q}+q$ rette consecutive in cui noi spezziamo la curva, il $[k]$, di cui si parla, si appoggia alle rette:

1,	$2,\ldots,$	q	di un 1.° gruppo
$q+2$,	$q+3,\ldots,$	$2q+1$	» 2.° »
. . .	. . .	. . .	. . .

$$\frac{k+1}{q}q+\frac{k+1}{q}+1,\quad \frac{k+1}{q}q+\frac{k+1}{q}+2,\ldots,\quad \frac{k+1}{q}q+\frac{k+1}{q}+q$$

di un ultimo gruppo.

(*) Viceversa, è chiaro che una curva di ordine:

$$k+1+\frac{k+1}{q}+q \text{ di } \left[k+1+\frac{k+1}{q}\right],$$

la quale ammette *un* $[k]$ $(k+1+q)$-secante, è razionale.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Aggiungiamo ora una retta appoggiata alla 1.ª ed all'ultima del sistema che si considera. Avremo rappresentata una curva ellittica, d'ordine $k+1+\frac{k+1}{q}+q+1$, di cui un 1.° $[k]$ $(k+1+q)$-secante è quello appoggiato alle rette come sopra; un 2.° è quello appoggiato alle rette:

$$\begin{array}{llll} 2, & 3,\ldots, & q+1 & \text{di un 1.° grnppo} \\ q+3, & q+4,\ldots, & 2q+2 & \text{» 2.° »} \\ \ldots & & & \\ \frac{k+1}{q}q+\frac{k+1}{q}+2, & \frac{k+1}{q}q+\frac{k+1}{q}+3,\ldots, & k+1+\frac{k+1}{q}+q+1 & \end{array}$$

di un ultimo gruppo; un 3.° quello appoggiato alle rette:

$$\begin{array}{llll} 3. & 4,\ldots, & q+2 & \text{di un 1.° gruppo} \\ \ldots & & & \\ \ldots & & & \\ \ldots & & & ; \end{array}$$

e così via.

Si giungerà ad un $(q+1)^{mo}$ $[k]$ appoggiato alle rette:

$$\begin{array}{llll} q+1, & q+2,\ldots, & 2q & \text{di un 1.° gruppo} \\ 2q+2, & 2q+3,\ldots, & 3q+1 & \text{» 2.° »} \\ \ldots & & & \end{array}$$

$$k+1+\frac{k+1}{q}+q+1,\ 1,\ldots,\ q-1 \text{ di un ultimo gruppo.}$$

Nè si può procedere oltre a considerare il $[k]$ appoggiato alle rette:

$$\begin{array}{lll} q+2, & q+3,\ldots & \text{di un 1.° gruppo} \\ \ldots & & \\ \ldots & & \\ \ldots & & , \end{array}$$

perchè si ricadrebbe nel 1.° $[k]$.

Esistono quindi $q+1$ $[k]$ $(k+1+q)$-*secanti una curva ellittica d'ordine* $k+1+\frac{k+1}{q}+q+1$ *appartenente a* $\left[k+1+\frac{k+1}{q}\right]$.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Affermiamo pure, ma non sappiamo dimostrarlo, che *una curva di genere* 2 *e di ordine* $k+1+\frac{k+1}{q}+q+2$, *appartenente a* $\left[k+1+\frac{k+1}{q}\right]$ *ammette* $(q+1)^2\ [k]\ (k+1+q)$*-secanti* (*).

Da quanto si è detto si deduce facilmente (**) che *le curve normali di genere* 0, 1, 2, di $\left[k+1+\frac{k+1}{q}\right]$ *ammettono rispettivamente* 1, $q+1$, $(q+1)^2\ [k+q]\ (k+1+q)$*-secanti e passanti per un* $[q-1]$. Ciò si vede proiettando da questo $[q-1]$.

Alcune formole di riduzione.

8. Veniamo ora a dare qualche proprietà della funzione $F_p^m(k, q)$.

È noto che, se è F^m una funzione razionale intera di grado i in m, la:

$$\sum_0^l{}_\sigma (-1)^\sigma \binom{l}{\sigma} F^{m-\sigma},$$

lo è di grado $i-l$ per l da 0 ad i. E, viceversa, se F^m è una funzione razionale intera in m, e, se la espressione precedente è di grado $i-l$ in m, sarà F^m di grado i in m.

In particolare, per $l=i$, si ha che *una funzione* F^m *razionale intera della* m *è di grado* i, *solo quando* $\sum_0^i{}_\sigma (-1)^\sigma \binom{i}{\sigma} F^{m-\sigma}$ *non dipende da* m.

Noi ammetteremo che $F_p^m(k,q)$ sia razionale intera in m (***), e ci serviremo del precedente teorema per dimostrare che *il suo grado in* m *è* $i=k+1+q$.

(*) Si potrebbe calcolare: $F_p^{k+1+\frac{k+1}{q}+q+p}(k, q) = 1 + qp + q^2\binom{p}{2} + \ldots$

In particolare, per le rette quadrisecanti di una curva dello spazio ordinario si ha $F_p^{5+p}(1, 2) = 1 + 2p + 4\binom{p}{2} + 4\binom{p}{3} + 2\binom{p}{4}$. (Ved. num. 11.)

(**) Ved. Segre: *Introduzione alla geom. sopra un ente algebrico semplic. infinito.* Annali di Mat. pura ed applicata, Serie II, Tomo XXII, 1894. Si troverà (al num. 66, pag. 71 di essa Memoria) che le C_p^m normali non speciali appartengono ad $[m-p]$; e, che, per $p=0$, $p=1$ non esistono curve speciali. Per $p=2$, l'unica curva speciale è la *retta doppia* (ved. num, 74 e 75, pag. 78 della Memoria stessa).

(***) Ciò si può, almeno in parte, giustificare, pensando la curva spezzata in tutte rette, e tenendo presente quanto si disse al num. 1. Affermiamo poi, senza saperlo dimostrare, che $F_p^m(k, q)$ *è funzione razionale intera in* p, *di grado* $\frac{i}{2}$ *od* $\frac{i-1}{2}$, *secondochè* i *è pari o dispari.*

In $\left[k+1+\frac{k+1}{q}\right]$ i $[k]$ i-secanti di una C_p^m sono $F_p^m(k, q)$, anche se la curva è spezzata in una C_p^{m-1} ed in una unisecante g_1. In tale caso, $F_p^{m-1}(k, q)$ di essi $[k]$ i-secano la C_p^{m-1}. Sono dunque:

$$F_p^m(k, q) - F_p^{m-1}(k, q),$$

i $[k]$ $(i-1)$-secanti la C_p^{m-1} ed appoggiati a g_1.

Scindiamo ora la C_p^{m-1} in una C_p^{m-2} ed in un'altra unisecante generica g_2: dei $[k]$ ultimamente nominati (ossia $(i-1)$-secanti la C_p^{m-1} ed appoggiati a g_1):

$$F_p^{m-1}(k, q) - F_p^{m-2}(k, q),$$

$(i-1)$-secano la C_p^{m-2} e si appoggiano a g_1, onde:

$$\left\{F_p^m(k, q) - F_p^{m-1}(k, q)\right\} - \left\{F_p^{m-1}(k, q) - F_p^{m-2}(k, q)\right\} =$$
$$= F_p^m(k, q) - 2\,F_p^{m-1}(k, q) + F_p^{m-2}(k, q),$$

$(i-2)$-secano la C_p^{m-2} e si appoggiano a g_1 ed a g_2.

In generale, per l da 0 ad i,

$$\sum_0^l{}_\sigma (-1)^\sigma \binom{l}{\sigma} F_p^{m-\sigma}(k, q),$$

dà il numero dei $[k]$ $(i-l)$-secanti una C_p^{m-l} ed appoggiati ad l unisecanti (*).

Posto $l = k+1+q$, si ha:

$$F_p^m(k, q) - (k+1+q)\,F_p^{m-1}(k, q) + \binom{k+1+q}{2} F_p^{m-2}(k, q) - \cdots +$$
$$+ (-1)^{k+1+q}\,F_p^{m-k-1-q}(k, q) =$$

$=$ ordine della varietà a $k+\frac{k+1}{q}$ dimensioni (o forma) di $\left[k+1+\frac{k+1}{q}\right]$, la quale è luogo dei $[k]$ appoggiati a $k+q$ rette generiche $= L(k+1+q, 0, 0, \ldots, 0, 0)$, quantità questa che non dipende da m.

(*) Si dimostra allo stesso modo che $\sum_0^l{}_\sigma (-1)^\sigma \binom{l}{\sigma} F_{p-\sigma}^{m-\sigma}$ *dà il numero dei* $[k]$ $(i-l)$*-secanti una* C_{p-l}^{m-l} *ed appoggiati ad* l *corde generiche.*

Osserviamo in proposito come lo spezzamento di una C_p^m in una C_{p-l}^{m-l} con l corde fu già adoperato dal sig. Castelnuovo (Ved. *Numero delle involuzioni razionali giacenti su una curva di dato genere.* Rendic. Lincei, Sez. 4.ª, Tomo 5.°, 2.° Sem. 1889), e giustificato dal Klein (Ved. *Vorlesungen Riemann'sche Flächen*, pag. 114).

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Si conclude dunque che $F_p^m(k, q)$ *è di grado i in m.*

9. Al procedimento del num. 8 si riattacca la seguente osservazione.

Sulla forma d'ordine $L(k+1+q, 0, 0, \ldots, 0, 0)$, luogo dei $[k]$ appoggiati a $k+q$ rette generiche di $\left[k+1+\frac{k+1}{q}\right]$, ognuna delle direttrici è multipla secondo:

$$L(k+1+q, 0, 0, \ldots, 0, 0)-L(k-1+q, 1, 0, \ldots, 0, 0),$$

come si vede subito secando essa varietà con una retta appoggiata ad una delle direttrici stesse.

Si ha quindi:

numero dei $[k]$ *di* $\left[k+1+\frac{k+1}{q}\right]$ *i quali si appoggiano ad una* C_p^{m-k-q} *ed a k sue unisecanti generiche* $=$

$$\left.\begin{aligned} &= F_p^m(k, q)-(k+q)F_p^{m-1}(k, q)+\binom{k+q}{2}F_p^{m-2}(k, q)-\cdots+ \\ &\quad +(-1)^{k+q}F_p^{m-k-q}(k, q)= \\ &= (m-k-q)L(k+1+q, 0, 0, \ldots, 0, 0)- \\ &-(k+q)\{L(k+1+q, 0, 0, \ldots, 0, 0)-L(k-1+q, 1, 0, \ldots, 0, 0)\}. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

L'ultimo membro di questa eguaglianza è noto, in virtù della formola (8): può quindi ritenersi noto $F_p^m(k, q)$, noti che siano $F_p^{m-1}(k, q)$, $F_p^{m-2}(k, q), \ldots$, $F_p^{m-k-q}(k, q)$. *Si può, cioè, dati k e q, giungere alla espressione generale di* $F_p^m(k, q)$ *quando si è risolto il problema fondamentale per* $k+q$ *curve di genere p, i cui ordini siano numeri consecutivi.*

Se si ha, in particolare, $p=0$, è evidentemente:

$$F_0^{k+1}(k, q)=F_0^{k+2}(k, q)=\cdots, F_0^{k+q+\frac{k+1}{q}}(k, q)=0,$$

ed inoltre $F_0^{k+1+q+\frac{k+1}{q}}(k, q)=1$ (ved. num. 7). *È lecito,* quindi, *calcolare* $F_0^m(k, q)$, *quando è* $\left(k+1+q+\frac{k+1}{q}\right)-(k+1)+1 \geqq k+q$, *ossia* $\frac{k+1}{q}+1 \geqq k$, *o, che è lo stesso, quando la dimensione* $k+1+\frac{k+1}{q}$ *dello spazio ambiente è* $\geqq 2k$.

E perciò si può, senz'altro, calcolare $F_0^m(k, q)$ per $q=1$ e k qualunque; per $q=2$ e $k=1$, o $k=3$; per $q=3$ e $k=2$.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Però noi non faremo grande uso della (17). La quale, essendo il secondo membro indipendente da p, si presta assai bene a verificare i risultati ottenuti per altre vie (ved. ad es. al num. 11 la nota relativa ad una formola del sig. DERUYTS).

Chiuderemo questo numero accennando come alla differenza:

$$F_p^m(k, q) - F_p^{m-1}(k, q),$$

si possa dare un altro significato geometrico. E, per l'appunto, se è:

$A_p^{m-1}(k, q)$ l'ordine della forma luogo dei $[k]$ $(k+q)$-secanti una C_p^{m-1},

$B_p^{m-1}(k, q)$ la moltiplicità della curva sopra di essa,

si ha:

$$F_p^m(k, q) - F_p^{m-1}(k, q) = A_p^{m-1}(k, q) - B_p^{m-1}(k, q), \tag{18}$$

perchè entrambi i membri dànno il numero dei $[k]$ $(k+q)$-secanti di una C_p^{m-1} ed appoggiati ad una unisecante $\left(\text{sempre in } \left[k+1+\frac{k+1}{q}\right]\right)$.

Della (18) si farà frequente uso in seguito.

SI TRATTANO ALCUNI CASI DEL PROBLEMA FONDAMENTALE.

10. CASO DI $q = 1$.

Il numero $F_p^m(k, 1)$ dei $[k]$ $(k+2)$-secanti una C_p^m di $[2(k+1)]$ è dato dalla (3) (ved. num. 1). Al calcolo effettivo si giunge (*) pensando che

$$\text{gli} \left\{ \begin{array}{l} F_p^m(k, 1) - F_p^{m-1}(k, 1) \\ F_p^m(k, 1) - F_{p-1}^{m-1}(k-1) \end{array} \right\} [k] \text{ di } [2(k+1)],$$

i quali $(k+1)$-secano una:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_p^{m-1} \\ C_{p-1}^{m-1} \end{array} \right\},$$

e si appoggiano ad una:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{unisecante} \\ \text{corda} \end{array} \right\}$$

(ved. num. 8), sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_p^{m-2}(k-1, 1) \\ F_{p-1}^{m-3}(k-1, 1) \end{array} \right\},$$

(*) Ved. CASTELNUOVO. Memoria citata al num. 1.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

come si vede proiettando dalla:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{unisecante} \\ \text{corda} \end{array} \right\} (^*)$$

Del resto, può aversi immediatamente:

$$F_0^m(k,\ 1) = \binom{m-k-1}{k+2},$$

questo essendo l'unico polinomio di grado $i = k + 2$ in m, il quale si annulli per $m = k + 1$, $m = k + 2, \ldots$, $m = 2(k + 1)$, e che, per $m = 2(k + 1) + 1$ dia 1 (ved. num. 9).

Allo stesso risultato può giungersi pure considerando la varietà a $2k + 3$ dimensioni (od M_{2k+3}) luogo degli ∞^{k+2} $[k + 1]$ $(k + 2)$-secanti la C_0^m di $[m]$. La M_{k+1} sua intersezione con lo $[m - k - 2]$ individuato da $m - k - 1$ punti generici della curva, consta *solo* degli $\binom{m-k-1}{k+2}$ $[k + 1]$ congiungenti a $k + 2$ a $k + 2$ i punti scelti: difatti, se vi fosse eventualmente un ulteriore punto P di intersezione, lo $[m - k - 2]$, di cui sopra, giacerebbe in un *iperpiano* ($[m - 1]$ o forma lineare) col $[k + 1]$ uscente da P e $(k + 2)$-secante la C_0^m; e l'iperpiano così ottenuto avrebbe $m + 1$ punti a comune con una curva d'ordine m.

Ne segue che è $\binom{m-k-1}{k+2}$ l'ordine (**) della M_{2k+3} sopra detta: ossia tanti sono i $[k + 1]$ $(k + 2)$-secanti della C_0^m appoggiati ad un generico $[m - 2k - 3]$.

(*) È $F_0^{k+1}(k,\ 1) = F_0^{k+2}(k,\ 1) = \ldots = F_0^{2(k+1)}(k,\ 1) = 0$, $F_0^{2(k+1)+1}(k,\ 1) = 1$ (vedi num. 7), $F_0^{2(k+1)+2} = k + 3$, ecc. Inoltre $F_1^{k+3}(k,\ 1) = F_1^{k+4}(k,\ 1) = \ldots = F_1^{2(k+1)+1}(k,\ 1) = 0$, $F_1^{2(k+1)+2}(k,\ 1) = 2$ (ved. num. 7), ecc. Ed $F_2^{2k+4}(k,\ 1) = 0$, $F_2^{2k+5}(k,\ 1) = 4$, ecc.

Per $p = 2$, e per i valori successivi di p, si può calcolare $F_p^m(k,\ 1)$ solo se è $m \geqq p + 2(k + 1)$. Nei casi che si tratteranno in seguito avrebbero luogo restrizioni analoghe, ma di esse non ci occuperemo mai. Così, nei diversi problemi, non si terrà mai conto dei valori di m, i quali rendono negative le corrispondenti espressioni di $F_p^m(k,\ q)$.

(**) Si suppone $m \geqq 2k + 3$. Per $m = 2k + 3$, ordine della M_{2k+3} è il numero dei $[k + 1]$ generatori uscenti da un punto generico dello spazio ambiente $[m]$.

Avvertiamo che il ragionamento qui adoperato trovasi (ma per altro scopo) già nel Castelnuovo. Ved. *Studio della involuzione generale sulle curve razionali mediante la loro curva normale.* Atti Istit. Veneto (6), 4, pag. 1167-1200, 1886.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Proiettando da questo in un $[2(k+1)]$, si ha:

$$F_0^m(k, 1) = \binom{m-k-1}{k+2}.$$

Osserviamo di passaggio che dei primi due termini della (3) ci è noto il significato aritmetico. Si ha difatti (ved. num. 2; e le formole (6), (7), (11)):

$$F_0^m(k, 1) = L(k+2)\, V_0^m(k+2) = 1 \times \binom{m-k-1}{k+2}$$

$$F_1^m(k, 1) = L(k+2)\, V_1^m(k+2) = 1 \times \frac{m}{k+2}\binom{m-k-3}{k+1}.$$

11. Caso di $q=2$.

Quanti $[k]$ $(k+3)$-secano una C_p^m di $\left[\frac{3}{2}(k+1)\right]$?

Per $p=0$ si ha (ved. num. 2):

$$F_0^m(k, 2) = \Sigma\, L(\alpha_1, \alpha_2)\, V_0^m(\alpha_1, \alpha_2),$$

la somma essendo estesa a tutte le possibili soluzioni intere, positive o nulle della:

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 = k+3.$$

È dunque:

$$F_0^m(k, 2) = \sum_0^{\frac{k+3}{2}}{}_{\alpha_2} L(k-2\alpha_2+3, \alpha_2)\, V_0^m(k-2\alpha_2+3, \alpha_2) =$$

$$= \sum_0^{\frac{k+3}{2}}{}_{\alpha_2} \frac{(k-2\alpha_2+3)!}{\left(\frac{k-2\alpha_2+1}{2}+2\right)!\left(\frac{k-2\alpha_2+1}{2}+1\right)!}\binom{k-\alpha_2+3}{\alpha_2}\binom{m-k-2}{k-\alpha_2+3} =$$

$$= \sum_0^{\frac{k+3}{2}}{}_{\alpha_2} \frac{(k-\alpha_2+3)!}{\left(\frac{k-2\alpha_2+1}{2}+2\right)!\left(\frac{k-2\alpha_2+1}{2}+1\right)!\,\alpha_2!}\binom{m-k-2}{k-\alpha_2+3}$$

(ved. formole (12) e (6)).

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Ma è:

$$\binom{m-k-2}{k-\alpha_2+3} = \binom{m-k-2}{\frac{k+3}{2}} \frac{\binom{m-\frac{3}{2}(k+3)+1}{\frac{k+3}{2}-\alpha_2}}{\binom{k-\alpha_2+3}{\frac{k+3}{2}-\alpha_2}} =$$

$$= \binom{m-k-2}{\frac{k+3}{2}} \frac{\binom{m-\frac{3}{2}(k+3)+1}{\frac{k+3}{2}-\alpha_2}}{\frac{(k-\alpha_2+3)!}{\left(\frac{k+3}{2}-\alpha\right)!\,\frac{k+3}{2}!}} \; {}^{(*)};$$

onde si ha:

$$\left.\begin{aligned} F'^{m}_{0}(k,2) &= \binom{m-k-2}{\frac{k+3}{2}} \sum_{0}^{\frac{k+3}{2}}{}_{\alpha_2} \frac{\frac{k+3}{2}!}{\left(\frac{k-2\alpha_2+1}{2}+1\right)!\,\alpha_2!} \binom{m-\frac{3}{2}(k+3)+1}{\frac{k+3}{2}-\alpha_2} = \\ &= \frac{\binom{m-k-2}{\frac{k+3}{2}}}{\frac{k+5}{2}} \sum_{0}^{\frac{k+3}{2}}{}_{\alpha_2} \binom{m-\frac{3}{2}(k+3)+1}{\frac{k+3}{2}-\alpha_2} \binom{\frac{k+5}{2}}{\alpha_2} \; {}^{(**)} = \frac{\binom{m-k-1}{\frac{k+3}{2}}\binom{m-k-2}{\frac{k+3}{2}}}{\binom{\frac{k+3}{2}+1}{1}\binom{\frac{k+3}{2}}{0}}. \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

(*) Dati x ed y, per z da 0 ad y, è $\binom{x}{y} = \binom{x}{y-z} \frac{\binom{x-y+z}{z}}{\binom{y}{z}}$.

(**) Si applichi la $\sum_{0}^{z}{}_{\alpha} \binom{x}{z-\alpha}\binom{y}{\alpha} = \binom{y+x}{z}$.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Si può anche scrivere:

$$F_0^m(k,\,2)=\sum_{\sigma=0}^{\frac{k+1}{2}}\frac{\binom{\frac{k+3}{2}}{\sigma}\binom{\frac{k+1}{2}}{\sigma}}{\binom{\sigma+1}{1}\binom{\sigma}{0}}\binom{m-\frac{k+1}{2}-\sigma}{k+3}.\ (*)$$

Procedendo, per $p=1$, come per $p=0$, si ottiene:

$$\left.\begin{aligned}
F_1^m(k,\,2) &= \sum_{\alpha_2=0}^{\frac{k+3}{2}} L(k-2\alpha_2+3,\ \alpha_2)\,V_1^m(k-2\alpha_2+3,\ \alpha_2)=\\
&=\sum_{\alpha_2=0}^{\frac{k+3}{2}}\frac{(k-2\alpha_2+3)!}{\left(\frac{k-2\alpha_2+1}{2}+2\right)!\left(\frac{k-2\alpha_2+1}{2}+1\right)!}\binom{k+3-\alpha_2}{\alpha_2}\frac{m}{k+3-\alpha_2}\binom{m-k-4}{k+2-\alpha_2}=\\
&=F_0^m(k,\,2)-\sum_{\sigma=0}^{\frac{k-1}{2}}\frac{k+2\sigma+3}{k-2\sigma+3}\,\frac{\binom{\frac{k+1}{2}}{\sigma}\binom{\frac{k-1}{2}}{\sigma}}{\binom{\sigma+1}{1}\binom{\sigma}{0}}\binom{m-\frac{k+5}{2}-\sigma}{k+1}=\\
&=\frac{m\binom{m-k-2}{\frac{k+3}{2}}\binom{m-k-4}{\frac{k+1}{2}}}{\binom{\frac{k+3}{2}+1}{1}\binom{\frac{k+3}{2}}{1}}.
\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

(*) In particolare, i [3] 6-secanti una C_0^m di [6] sono $F_0^m(3,\ 2)=\binom{m-2}{6}+$ $+3\binom{m-3}{6}+\binom{m-4}{6}$. Credo dunque inesatta una proposizione *enunciata* dal sig. Deruyts (*Sur la détermination des éléments neutres* ecc. Bulletin Acad. roy. de Belgique (3) (36), 1898) la quale è *equivalente* (ved. num. 15 di questa mia Memoria) all'altra: *una* C_0^m *di* $[i\,(i+1)]$ *ammette* $\binom{m-i}{i\,(i+1)}$ $[i^2-1]$ $i\,(i+1)$*-secanti.* Si avrebbe allora $F_0^m(3,\,2)=\binom{m-2}{6}$, il che non sta, anche perchè la:

$$F_0^m(3,\ 2)-5\,F_0^{m-1}(3,\ 2)+10\,F_0^{m-2}(3,\ 2)-10\,F_0^{m-3}(3,\ 2)+$$
$$+5\,F_0^{m-4}(3,\ 2)-F_0^{m-5}(3,\ 2)-5\,(m-8)$$

(ved. formola (17)) non sarebbe soddisfatta.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Alla espressione di F_1^m può pure giungersi facendo uso della:

$$F_p^m(k,\ 2) = 2\,F_{p-1}^{m-1}(k,\ 2) - F_{p-1}^{m-2}(k,\ 2) + F_{p-1}^{m-4}(k-2,\ 2), \tag{21}$$

la quale ne abilita ad esaurire *(almeno potenzialmente)* il caso di $q = 2$.

Essa formola si dimostra spezzando la C_p^m data in una C_{p-1}^{m-2} ed in due unisecanti incidenti. Allora i $[k]$ $(k+3)$-secanti la C_p^m così spezzata:

o sono gli $F_{p-1}^{m-2}(k,\ 2)$ $[k]$ $(k+3)$-secanti la curva C'^{m-2}_{p-1};

o gli $\left\{\begin{array}{l} A_{p-1}^{m-2}(k,\ 2) - B_{p-1}^{m-2}(k,\ 2) = F_{p-1}^{m-1}(k,\ 2) - F_{p-1}^{m-2}(k,\ 2) \\ \qquad\qquad » \qquad\qquad\qquad » \end{array}\right.$

$[k]$ $(k+2)$-secanti questa curva ed inoltre appoggiati $\left\{\begin{array}{c}\text{ad una}\\ \text{all'altra}\end{array}\right\}$ delle unisecanti;

o sono i $[k]$ $(k+1)$-secanti la C_{p-1}^{m-2} ed appoggiati ad entrambe le unisecanti. E questi $[k]$ sono $F_{p-1}^{m-4}(k-2,\ 2)$, come si vede proiettando dal piano delle due unisecanti.

La (21) è così dimostrata (per $k = 1$, ved. l'osservaz. che segue). Con essa si ottiene subito:

i [3] 6-secanti di una C_p^m di [6] sono:

$$F_p^m(3,\ 2) = \left[\binom{m-2}{6} + 3\binom{m-3}{6} + \binom{m-4}{6}\right] -$$
$$-\left[\binom{m-4}{4} + 2\binom{m-5}{4}\right]\binom{p}{1} + \left[\binom{m-6}{2} + \binom{m-7}{2}\right]\binom{p}{2} - \binom{p}{3};$$

i [5] 8-secanti di una C_p^m di [9] sono:

$$F_p^m(5,\ 2) = \left[\binom{m-3}{8} + 6\binom{m-4}{8} + 6\binom{m-5}{8} + \binom{m-6}{8}\right] -$$
$$-\left[\binom{m-5}{6} + 5\binom{m-6}{6} + 3\binom{m-7}{6}\right]\binom{p}{1} +$$
$$+\left[\binom{m-7}{4} + 4\binom{m-8}{4} + \binom{m-9}{4}\right]\binom{p}{2} -$$
$$-\left[\binom{m-9}{2} + 3\binom{m-10}{2}\right]\binom{p}{3} + \binom{p}{4};$$

i [7] 10-secanti di una C_p^m di [12] sono:

$$F_p^m(7,\ 2) = \left[\binom{m-4}{10} + 10\binom{m-5}{10} + 20\binom{m-6}{10} + 10\binom{m+7}{10} + \binom{m-8}{10}\right] -$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$$-\left[\binom{m-6}{8}+9\binom{m-7}{8}+14\binom{m-8}{8}+4\binom{m-9}{8}\right]\binom{p}{1}+$$
$$+\left[\binom{m-8}{6}+8\binom{m-9}{6}+9\binom{m-10}{6}+\binom{m-11}{6}\right]\binom{p}{2}-$$
$$-\left[\binom{m-10}{4}+7\binom{m-11}{4}+5\binom{m-12}{4}\right]\binom{p}{3}+$$
$$+\left[\binom{m-12}{2}+6\binom{m-13}{2}+2\binom{m-14}{2}\right]\binom{p}{4}-\binom{p}{5};\ \text{ecc.}$$

Osservazione. Il numero delle rette quadrisecanti di una C_p^m di [3] è dato da:

$$F_p^m(1,\,2)=\left[\binom{m-1}{4}+\binom{m-2}{4}\right]-\binom{m-3}{2}\binom{p}{1}+\binom{p}{2},$$

come si ottiene con la (4) (ved. num. 3) o con la formola:

$$F_p^m(1,\,2)=2\,F_{p-1}^{m-1}(1,\,2)-F_{p-1}^{m-2}(1,\,2)+\binom{m-4}{2}.$$

Questa ultima formola è la (21); per $k=1$; e si legge $\binom{m-4}{2}$ al posto di $F_{p-1}^{m-4}(k-2,\,2)$ perchè $\binom{m-4}{2}$ sono le rette bisecanti di una C_p^{m-2} appoggiate a due unisecanti incidenti. (Ciò si vede secando la curva col piano delle due uniseccanti.)

Il Cayley (*), lo Zeuthen (**), e più recentemente il Berzolari (***), con metodi diversi, giunsero, per vie non troppo semplici, alla espressione di $F_p^m(1,\,2)$. Noi qui calcoleremo esso numero, sopratutto per osservare che una retta per un punto doppio di una curva non è quivi considerabile come bisecante (****); ed inoltre che, in ricerche analoghe alla nostra, è utile considerare *equivalenti* una C_p^m ed una C_{p-1}^m con un punto doppio (ved. la 1.ª nota del num. 13).

(*) *On skew surfaces, otherwise scrolls.* Philosophical Transaction, vol. 153.

(**) *Sur les singularités ordinaires d'une courbe gauche et d'une surface développable.* Annali di Matem. p. ed a. Serie II, Tomo III, 1869.

(***) *Sulle secanti multiple di una c. alg. in S_3 ed in S_4.* Rend. Palermo, t. 9, 1895. Ved. anche a pag. 27 del tomo 1.° (1885) di essi *Rendiconti.*

(****) Ved. Geiser, *Ueber die dreifachen Secanten*, etc. Collect. Math. in mem. D. Chelini, 1881.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Ciò posto, spezziamo la C_0^m di [3] in una conica ed in $m-2$ rette unisecanti, a due a due sghembe. Le quadrisecanti della C_0^m così spezzata o si appoggiano a 4, od a 3 unisecanti; ed è quindi:

$$F_0^m(1,\ 2)=2\binom{m-2}{4}+\binom{m-2}{3}=\frac{1}{3}\binom{m-2}{2}\binom{m-3}{2}.$$

Si pensi ora ad una C_1^m la quale si deformi sino a trasformarsi in una C_0^m con un punto doppio P. Non saranno quadrisecanti della C_0^m le $\binom{m-3}{2}$ rette uscenti da P ed ulteriormente bisecanti la curva, e quindi:

$$F_1^m(1,\ 2)=F_0^m(1,\ 2)-\binom{m-3}{2}.$$

Se si tratta poi di una C_p^m la si deformi sino ad ottenere una C_0^m con p punti doppi. Sarà:

$$F_p^m(1,\ 2)=\frac{1}{3}\binom{m-2}{2}\binom{m-3}{2}-\binom{m-3}{2}\binom{p}{1}+\binom{p}{2},$$

essendosi aggiunto $\binom{p}{2}$ perchè, altrimenti, le congiungenti due punti doppi si tolgono due volte dal numero primitivo delle quadrisecanti.

12. Caso di $q=3$.

In $\left[\frac{4}{3}(k+1)\right]$ *quanti* $[k]$ $(k+4)$*-secano una* C_p^m*?*

Si ha, rispettivamente per $p=0$ e per $p=1$:

$$F_0^m(k,\ 3)=\Sigma\, L(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)\, V_0^m(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$$

$$F_1^m(k,\ 3)=\Sigma\, L(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)\, V_1^m(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3),$$

(ved. num. 2), le somme essendo estese a tutte le possibili soluzioni intere, positive o nulle della:

$$\alpha_1+2\,\alpha_2+3\,\alpha_3=k+4.$$

Ora si osservi che l'espressione generale di $L(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$ ci è ignota: *potremo dunque giungere al valore di* $F_0^m(k,\ 3)$ *e di* $F_1^m(k,\ 3)$ *solo quando* k *è assegnato numericamente* (ved. num. 5).

Per facilitare il lavoro di chi vuol risolvere molti casi particolari daremo qui l'espressione di:

$$L(k+4-2\,\alpha_2,\ \alpha_2,\ 0),$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

per i primi valori di α_2. Leggendo, nelle formole che si otterranno, $k-3\alpha_3$ al posto di k, si avranno le corrispondenti espressioni di:

$$L(k+4-2\alpha_2-3\alpha_3,\ \alpha_2,\ \alpha_3):$$

e ciò in virtù di una osservazione generale fatta al num. 5.

Intanto, le formole (9) ed (8) dello stesso num. 5 dànno subito:

$$L(k+4,\ 0,\ 0)=\frac{(k+4)!\ 2!\ 1!}{\left(\frac{k+1}{3}+3\right)!\left(\frac{k+1}{3}+2\right)!\left(\frac{k+1}{3}+1\right)!},$$

donde:

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_2=0)\quad L(k-3\alpha_3+4,\ 0,\ \alpha_3)=\\&=\frac{(k-3\alpha_3+4)!\ 2!\ 1!}{\left(\frac{k-3\alpha_3+1}{3}+3\right)!\left(\frac{k-3\alpha_3+1}{3}+2\right)!\left(\frac{k-3\alpha_3+1}{3}+1\right)!};\end{aligned}\right\}\quad(9'')$$

ed:

$$L(k+2,\ 1,\ 0)=\frac{(k+2)!\ 3!\ 1!}{\left(\frac{k+1}{3}+3\right)!\left(\frac{k+1}{3}+1\right)!\,\frac{k+1}{3}},$$

donde:

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_2=1)\quad L(k-3\alpha_3+2,\ 1,\ \alpha_3)=\\&=\frac{(k-3\alpha_3+2)!\,3!\ 1!}{\left(\frac{k-3\alpha_3+1}{3}+3\right)!\left(\frac{k-3\alpha_3+1}{3}+1\right)!\,\frac{k-3\alpha_3+1}{3}!}.\end{aligned}\right\}\quad(8'')$$

Per $\alpha_2=2,\ 3,\ 4,\ldots$, pongasi col prof. PIERI (*):

$$\pi=(1,\ 2,\ n-k+2,\ n-k+3,\ldots,\ n-1,\ n),$$

e si eseguano i prodotti π^2, π^3, $\pi^4,\ldots$, dai quali è rispettivamente prescritto ad un $[k]$ di secare, lungo rette, due, tre, quattro,... piani dati a piacere in $[n]$.

(*) Ved. *Sul problema degli spazi secanti.* Rendiconti Istit. Lombardo. Serie II, Volume 28.°, 1895 (Nota 3.ª). Si troveranno quivi le espressioni di π^2 e di π^3.

Per quanto ha attinenza al problema degli spazi secanti il prof. sig. M. PIERI mi prestò sempre il suo aiuto.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Sarà:

$$\pi^2 = (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ n-k+4,\ n-k+5,\ldots,\ n) +$$
$$+ (0,\ 2,\ 3,\ 5,\ n-k+4,\ n-k+5,\ldots,\ n) +$$
$$+ (0,\ 1,\ 4,\ 5,\ n-k+4,\ n-k+5,\ldots,\ n);$$

$$\pi^3 = (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ n-k+6,\ n-k+7,\ldots,\ n) +$$
$$+ 2\,(0,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ n-k+6,\ n-k+7,\ldots,\ n) +$$
$$+ 3\,(0,\ 1,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ n-k+6,\ n-k+7,\ldots,\ n) +$$
$$+ (0,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 8,\ n-k+6,\ n-k+7,\ldots,\ n) +$$
$$+ 2\,(0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ n-k+6,\ n-k+7,\ldots,\ n) +$$
$$+ (0,\ 1,\ 2,\ 5,\ 6,\ 7,\ n-k+6,\ n-k+7,\ldots,\ n) +$$
$$+ (0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 7,\ 8,\ n-k+6,\ n-k+7,\ldots,\ n);$$

$$\pi^4 = (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ n-k+8,\ n-k+9,\ldots,\ n) +$$
$$+ 3\,(0,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ n-k+8,\ n-k+9,\ldots,\ n) +$$
$$+ 6\,(0,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9,\ n-k+8,\ n-k+9,\ldots,\ n) +$$
$$+ 3\,(0,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 10,\ n-k+8,\ n-k+9,\ldots,\ n) +$$
$$+ 3\,(0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ n-k+8,\ n-k+9,\ldots,\ n) +$$
$$+ 6\,(0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ n-k+8,\ n-k+9,\ldots,\ n) +$$
$$+ 8\,(0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 10,\ n-k+8,\ n-k+9,\ldots,\ n) +$$
$$+ 7\,(0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10,\ n-k+8,\ n-k+9,\ldots,\ n) +$$
$$+ 6\,(0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 9,\ 10,\ n-k+8,\ n-k+9,\ldots,\ n) +$$
$$+ (0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 11,\ n-k+8,\ n-k+9,\ldots,\ n) +$$
$$+ 3\,(0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 8,\ 11,\ n-k+8,\ n-k+9,\ldots,\ n) +$$
$$+ 3\,(0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 7,\ 9,\ 10,\ n-k+8,\ n-k+9,\ldots,\ n) +$$
$$+ 2\,(0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 7,\ 8,\ 11,\ n-k+8,\ n-k+9,\ldots,\ n) +$$
$$+ 3\,(0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 11,\ n-k+8,\ n-k+9,\ldots,\ n) +$$
$$+ (0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 10,\ 11,\ n-k+8,\ n-k+9,\ldots,\ n);\ldots,$$

le quali suppongono rispettivamente $k > 3$, $k > 5$, $k > 8$,... Per valori di k minori di questi limiti si hanno facilmente le espressioni di π^2, π^3, π^4,... facendo uso delle formole (γ_4) e (γ_5) della stessa *Nota 3.ª* del sig. Pieri. Ed

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

applicando (*) la formola del sig. Castelnuovo (citata al num. 5 di questo nostro lavoro) ai diversi termini di $\pi^2, \pi^3, \pi^4, \ldots$ si ha:

$$L(k, 2, 0) = \frac{k!\,2!\,1!\,(k+1)(k+6)}{\left(\frac{k+1}{3}+3\right)!\left(\frac{k+1}{3}+1\right)!\frac{k+1}{3}!},$$

$$L(k-2, 3, 0) = \frac{(k-2)!\,3!\,1!\,(k^2+5k-10)}{\left(\frac{k+1}{3}+3\right)!\frac{k+1}{3}!\left(\frac{k+1}{3}-1\right)!},$$

$$L(k-4, 4, 0) = \frac{(k-4)!\,3!\,1!\,(k+7)(k^2-k-10)}{\left(\frac{k+1}{3}+3\right)!\frac{k+1}{3}!\left(\frac{k+1}{3}-2\right)!}, \ldots$$

donde:

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_2 = 2)\quad L(k-3\alpha_3, 2, \alpha_3) = \\ &= \frac{(k-3\alpha_3)!\,2!\,1!\,(k-3\alpha_3+1)(k-3\alpha_3+6)}{\left(\frac{k-3\alpha_3+1}{3}+3\right)!\left(\frac{k-3\alpha_3+1}{3}+1\right)!\frac{k-3\alpha_3+1}{3}!},\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_2 = 3)\quad L(k-3\alpha_3-2, 3, \alpha_3) = \\ &= \frac{(k-3\alpha_3-2)!\,3!\,1!\,[(k-3\alpha_3)^2+5(k-3\alpha_3)-10]}{\left(\frac{k-3\alpha_3+1}{3}+3\right)!\frac{k-3\alpha_3+1}{3}!\left(\frac{k-3\alpha_3+1}{3}-1\right)!},\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_2 = 4)\quad L(k-3\alpha_3-4, 4, \alpha_3) = \\ &= \frac{(k-3\alpha_3-4)!\,3!\,1!\,(k-3\alpha_3+7)[(k-3\alpha_3)^2-(k-3\alpha_3)-10]}{\left(\frac{k-3\alpha_3+1}{3}+3\right)!\frac{k-3\alpha_3+1}{3}!\left(\frac{k-3\alpha_3+1}{3}-2\right)!},\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

. . . .

Premesse queste formole, daremo, per $q = 3$, qualche esempio del procedimento da seguirsi per il calcolo di $F_0'''(k, q)$ e di $F_1'''(k, q)$, quando k e q siano assegnati numericamente. Qualunque sia q, il nodo della questione sta nella ricerca di tutti i valori della espressione di:

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha_q),$$

valori che vanno cercati con le formole del sig. Pieri.

Esempio I.

Sia $k = 2$. *Quanti piani 6-secano una C_0''' od una C_1''' di uno spazio a 4 dimensioni?*

(*) Tenendo conto della osservazione fatta, in nota, al num. 5, il lavoro non è così lungo come sembrerebbe.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Si ha:

$L(6, 0, 0) = 5$ (ved. (9′′) in questo num.) (*)
$L(4, 1, 0) = 3$ (» (8′′) »)
$L(2, 2, 0) = 2$ (» (22) »)
$L(0, 3, 0) = 1$ (» (23) »)
$L(3, 0, 1) = 1$ (ved. (9′′))
$L(1, 1, 1) = 1$ (» (8′′))
$L(0, 0, 2) = 1$ (ved. (9′′))

e quindi, per le formole (6) e (7) (ved. num. (3) e 4):

$$F_0^m(2, 3) = 5\binom{m-5}{6} + 3\binom{5}{1}\binom{m-5}{5} + 2\binom{4}{2}\binom{m-5}{4} + \binom{m-5}{3} + \binom{4}{1}\binom{m-5}{4} + \binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{m-5}{3} + \binom{m-5}{2}\,(^{**}) =$$

$$= \frac{\binom{m-3}{2}\binom{m-4}{2}\binom{m-5}{2}}{\binom{4}{2}\binom{3}{1}\binom{2}{0}}$$ (confr. la (4), num. 1); ed

$$F_1^m(2, 3) = 5\frac{m}{6}\binom{m-7}{5} + 3\binom{5}{1}\frac{m}{5}\binom{m-7}{4} + 2\binom{4}{2}\frac{m}{4}\binom{m-7}{3} + \frac{m}{3}\binom{m-7}{2} + \binom{4}{1}\frac{m}{4}\binom{m-7}{3} + \binom{2}{1}\binom{3}{1}\frac{m}{3}\binom{m-7}{2} + \frac{m}{2}\binom{m-7}{1}\,(^{**}) =$$

(*) I numeri di tutto questo quadro si calcolano immediatamente con le considerazioni del num. 6. Così $L(6, 0, 0) = 5$ per la (9′); $L(4, 1, 0) = 3$ per la (15); $L(2, 2, 0) = 2$ per la (16); $L(0, 3, 0) = L(2, 1) = 1$, come si è visto espressamente; $L(3, 0, 1) = L(1, 1, 1) = L(0, 0, 2) = 1$, perchè, per $q = k + 1$, è $L(0, 0, 0, \ldots, 0, 2) = 1$ ed $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k, 1) = 1$.

(**) La formola (6) dà:

$$\begin{cases} V_0^m(6, 0, 0) = \binom{m-5}{6} \\ V_0^m(4, 1, 0) = \binom{5}{1}\binom{m-5}{5} \\ V_0^m(2, 2, 0) = \binom{4}{2}\binom{m-5}{4} \\ V_0^m(0, 3, 0) = \binom{m-5}{3} \\ V_0^m(3, 0, 1) = \binom{4}{1}\binom{m-5}{4} \\ V_0^m(1, 1, 1) = \binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{m-5}{3} \\ V_0^m(0, 0, 2) = \binom{m-5}{2} \end{cases}$$

e la formola (7) dà:

$$\begin{cases} V_1^m(6, 0, 0) = \frac{m}{6}\binom{m-7}{5} \\ V_1^m(4, 1, 0) = \binom{5}{1}\frac{m}{5}\binom{m-7}{4} \\ V_1^m(2, 2, 0) = \binom{4}{2}\frac{m}{4}\binom{m-7}{3} \\ V_1^m(0, 3, 0) = \frac{m}{3}\binom{m-7}{2} \\ V_1^m(3, 0, 1) = \binom{4}{1}\frac{m}{4}\binom{m-7}{3} \\ V_1^m(1, 1, 1) = \binom{2}{1}\binom{3}{1}\frac{m}{3}\binom{m-7}{2} \\ V_1^m(0, 0, 2) = \frac{m}{2}\binom{m-7}{1} \end{cases}$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$$= F_0^m(2,\,3) - \frac{1}{3}\binom{m-4}{2}\binom{m-5}{2} \text{ (confr. la (4), num. 1)}$$

$$= \frac{m\binom{m-4}{2}\binom{m-5}{2}\binom{m-7}{1}}{\binom{4}{2}\binom{3}{1}\binom{2}{1}}.$$

Esempio II.

Sia $k = 5$. *Quanti spazi a 5 dimensioni 9-secano una* C_0^m *od una* C_1^m *di uno spazio ad 8 dimensioni?*

Si ha:

$L(9,0,0) = 42$ (ved. (9″) in questo num.)	(vedi Esem. I) (*)	$L(6,0,1) = 5$	$L(3,0,2) = 1$	$L(0,0,3) = 1,$
$L(7,1,0) = 21$ (» (8″) »)		$L(4,1,1) = 3$	$L(1,1,2) = 1$	
$L(5,2,0) = 11$ (» (22) »)		$L(2,2,1) = 2$		
$L(3,3,0) = 6$ (» (23) »)		$L(0,3,1) = 1$		
$L(1,4,0) = 3$ (» (24) »)				

donde, per le solite formole (6) e (7) si ha:

$$F_0^m(5,\,3) = 42\binom{m-8}{9} + 21\binom{8}{1}\binom{m-8}{8} + 11\binom{7}{2}\binom{m-8}{7} + 6\binom{6}{3}\binom{m-8}{6} +$$

$$+ 3\binom{5}{4}\binom{m-8}{5} + 5\binom{7}{1}\binom{m-8}{7} + 3\binom{5}{1}\binom{6}{1}\binom{m-8}{6} + 2\binom{4}{2}\binom{5}{1}\binom{m-8}{5} +$$

$$+ \binom{4}{1}\binom{m-8}{4} + \binom{5}{2}\binom{m-8}{5} + \binom{2}{1}\binom{4}{2}\binom{m-8}{4} + \binom{m-8}{3} = ^{(**)} \text{ (ved. nota a pag. seg.)}$$

$$= \frac{\binom{m-6}{3}\binom{m-7}{3}\binom{m-8}{3}}{\binom{2}{5}\binom{4}{1}\binom{3}{0}}; \text{ ed}$$

$$F_1^m(5,\,3) = 42\,\frac{m}{9}\binom{m-10}{8} + 21\binom{8}{1}\frac{m}{8}\binom{m-10}{7} + 11\binom{7}{2}\frac{m}{7}\binom{m-10}{6} +$$

$$+ 6\binom{6}{3}\frac{m}{6}\binom{m-10}{5} + 3\binom{5}{4}\frac{m}{5}\binom{m-10}{4} + 5\binom{7}{1}\frac{m}{7}\binom{m-10}{6} +$$

$$+ 3\binom{5}{1}\binom{6}{1}\frac{m}{6}\binom{m-10}{5} + 2\binom{4}{2}\binom{5}{1}\frac{m}{5}\binom{m-10}{4} + \binom{4}{1}\frac{m}{4}\binom{m-10}{3} +$$

$$+ \binom{5}{2}\frac{m}{5}\binom{m-10}{4} + \binom{2}{1}\binom{4}{2}\frac{m}{4}\binom{m-10}{3} + \frac{m}{3}\binom{m-10}{2} = ^{(**)} \text{ (ved. nota a pag. seg.)}$$

(*) Ad es. $L(6,\,0,\,1) = L(6,\,0,\,0)$, come si vede proiettando dal [3] individuato dalla terna cui si riferisce l'indice 1.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$$= F_0^m(5,3) - \left[\binom{m-4}{7} + 8\binom{m-5}{7} + 10\binom{m-6}{7} + 2\binom{m-7}{7}\right] =$$

$$= \left[\binom{m-2}{9} + 16\binom{m-3}{9} + 20\binom{m-4}{9} + 10\binom{m-5}{9} + \binom{m-6}{9}\right] -$$

$$- \left[\binom{m-4}{7} + 8\binom{m-5}{7} + 10\binom{m-6}{7} + 2\binom{m-7}{7}\right] =$$

$$= \frac{m\binom{m-7}{3}\binom{m-8}{3}\binom{m-10}{2}}{\binom{5}{2}\binom{4}{1}\binom{3}{1}}.$$

Esempio III, IV e V.

Sia $k = 8$. *In uno spazio a* 12 *dimensioni quanti spazi ad* 8 *dimensioni* 12-*secano una curva razionale od ellittica di ordine m?*

(**) La formola (6) dà:

$$\begin{aligned}
V_0^m(9,0,0) &= \binom{m-8}{9}\\
V_0^m(7,1,0) &= \binom{8}{1}\binom{m-8}{8}\\
V_0^m(5,2,0) &= \binom{7}{2}\binom{m-8}{7}\\
V_0^m(3,3,0) &= \binom{6}{3}\binom{m-8}{6}\\
V_0^m(1,4,0) &= \binom{5}{4}\binom{m-8}{5}\\
V_0^m(6,0,1) &= \binom{7}{1}\binom{m-8}{7}\\
V_0^m(4,1,1) &= \binom{5}{1}\binom{6}{1}\binom{m-8}{6}\\
V_0^m(2,2,1) &= \binom{4}{2}\binom{5}{1}\binom{m-8}{5}\\
V_0^m(0,3,1) &= \binom{4}{1}\binom{m-8}{4}\\
V_0^m(3,0,2) &= \binom{5}{2}\binom{m-8}{5}\\
V_0^m(1,1,2) &= \binom{2}{1}\binom{4}{2}\binom{m-8}{4}\\
V_0^m(0,0,3) &= \binom{m-8}{3}
\end{aligned}$$

e la (7) dà:

$$\begin{aligned}
V_1^m(9,0,0) &= \frac{m}{9}\binom{m-10}{8}\\
V_1^m(7,1,0) &= \binom{8}{1}\frac{m}{8}\binom{m-10}{7}\\
V_1^m(5,2,0) &= \binom{7}{2}\frac{m}{7}\binom{m-10}{6}\\
V_1^m(3,3,0) &= \binom{6}{3}\frac{m}{6}\binom{m-10}{5}\\
V_1^m(1,4,0) &= \binom{5}{4}\frac{m}{5}\binom{m-10}{4}\\
V_1^m(6,0,1) &= \binom{7}{1}\frac{m}{7}\binom{m-10}{6}\\
V_1^m(4,1,1) &= \binom{5}{1}\binom{6}{1}\frac{m}{6}\binom{m-10}{5}\\
V_1^m(2,2,1) &= \binom{4}{2}\binom{5}{1}\frac{m}{5}\binom{m-10}{4}\\
V_1^m(0,3,1) &= \binom{4}{1}\frac{m}{4}\binom{m-10}{3}\\
V_1^m(3,0,2) &= \binom{5}{2}\frac{m}{5}\binom{m-10}{4}\\
V_1^m(1,1,2) &= \binom{2}{1}\binom{4}{2}\frac{m}{4}\binom{m-10}{3}\\
V_1^m(0,0,3) &= \frac{m}{3}\binom{m-10}{2}
\end{aligned}$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Sia $k=11$. *In uno spazio* 16 *volte esteso quanti spazi ad* 11 *dimensioni* 15-*secano una curva razionale od ellittica di ordine* m?

Sia $k=14$. *In uno spazio* 20 *volte esteso quanti spazi a* 14 *dimensioni* 18-*secano una curva razionale od ellittica di ordine* m?

Per quanto si è detto al num. 2, si ha, come risposta,

$$\Sigma L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) V_0^m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),$$

per curve razionali, e:

$$\Sigma L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) V_1^m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),$$

per curve ellittiche; le somme essendo entrambe estese a tutte le possibili soluzioni intere, positive o nulle della:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 12, \quad \text{nel caso di } k = 8,\\
\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 15, \quad \text{»} \quad k = 11,\\
\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 18, \quad \text{»} \quad k = 14.
\end{aligned}$$

Si ha dunque, per $k=8$:

$$\begin{aligned}
F_0^m(8, 3) = {} & L(12, 0, 0) V_0^m(12, 0, 0) + {} & + L(9, 0, 1) V_0^m(9, 0, 1) + {}\\
& + L(10, 1, 0) V_0^m(10, 1, 0) + {} & + L(7, 1, 1) V_0^m(7, 1, 1) + {}\\
& + L(8, 2, 0) V_0^m(8, 2, 0) + {} & + L(5, 2, 1) V_0^m(5, 2, 1) + {}\\
& + L(6, 3, 0) V_0^m(6, 3, 0) + {} & + L(3, 3, 1) V_0^m(3, 3, 1) + {}\\
& + L(4, 4, 0) V_0^m(4, 4, 0) + {} & + L(1, 4, 1) V_0^m(1, 4, 1) + {}\\
& + L(2, 5, 0) V_0^m(2, 5, 0) + {} & \\
& + L(0, 6, 0) V_0^m(0, 6, 0) + {} & \\
& + L(6, 0, 2) V_0^m(6, 0, 2) + {} & + L(3, 0, 3) V_0^m(3, 0, 3) + {}\\
& + L(4, 1, 2) V_0^m(4, 1, 2) + {} & + L(1, 1, 3) V_0^m(1, 1, 3) + {}\\
& + L(2, 2, 2) V_0^m(2, 2, 2) + {} & \\
& + L(0, 3, 2) V_0^m(0, 3, 2) + {} & \\
& + L(0, 0, 4) V_0^m(0, 0, 4), &
\end{aligned}$$

ed $F_1^m(8, 3)$ si ottiene da questa espressione leggendo, da per tutto, al posto di V_0^m, V_1^m.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

E, per $k=11$, si ha:

$$
\begin{array}{rl|l}
F^m_0(11,3) = & L(15,0,0)\,V^m_0(15,0,0) + & + L(12,0,1)\,V^m_0(12,0,1) + \\
& + L(13,1,0)\,V^m_0(13,1,0) + & + L(10,1,1)\,V^m_0(10,1,1) + \\
& + L(11,2,0)\,V^m_0(11,2,0) + & + L(8,2,1)\,V^m_0(8,2,1) + \\
& + L(9,3,0)\,V^m_0(9,3,0) + & + L(6,3,1)\,V^m_0(6,3,1) + \\
& + L(7,4,0)\,V^m_0(7,4,0) + & + L(4,4,1)\,V^m_0(4,4,1) + \\
& + L(5,5,0)\,V^m_0(5,5,0) + & + L(2,5,1)\,V^m_0(2,5,1) + \\
& + L(3,6,0)\,V^m_0(3,6,0) + & + L(0,6,1)\,V^m_0(0,6,1) + \\
& + L(1,7,0)\,V^m_0(1,7,0) + &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
+ L(9,0,2)\,V^m_0(9,0,2) + & + L(6,0,3)\,V^m_0(6,0,3) + \\
+ L(7,1,2)\,V^m_0(7,1,2) + & + L(4,1,3)\,V^m_0(4,1,3) + \\
+ L(5,2,2)\,V^m_0(5,2,2) + & + L(2,2,3)\,V^m_0(2,2,3) + \\
+ L(3,3,2)\,V^m_0(3,3,2) + & + L(0,3,3)\,V^m_0(0,3,3) + \\
+ L(1,4,2)\,V^m_0(1,4,2) + &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
+ L(3,0,4)\,V^m_0(3,0,4) + & + L(0,0,5)\,V^m_0(0,0,5), \\
+ L(1,1,4)\,V^m_0(1,1,4) + &
\end{array}
$$

ed $F^m_1(11,3)$ si ottiene, di qui, al solito modo. — Infine, per $k=14$, si ha:

$$
\begin{array}{rl|l}
F^m_0(14,3) = & L(18,0,0)\,V^m_0(18,0,0) + & + L(15,0,1)\,V^m_0(15,0,1) + \\
& + L(16,1,0)\,V^m_0(16,1,0) + & + L(13,1,1)\,V^m_0(13,1,1) + \\
& + L(14,2,0)\,V^m_0(14,2,0) + & + L(11,2,1)\,V^m_0(11,2,1) + \\
& + L(12,3,0)\,V^m_0(12,3,0) + & + L(9,3,1)\,V^m_0(9,3,1) + \\
& + L(10,4,0)\,V^m_0(10,4,0) + & + L(7,4,1)\,V^m_0(7,4,1) + \\
& + L(8,5,0)\,V^m_0(8,5,0) + & + L(5,5,1)\,V^m_0(5,5,1) + \\
& + L(6,6,0)\,V^m_0(6,6,0) + & + L(3,6,1)\,V^m_0(3,6,1) + \\
& + L(4,7,0)\,V^m_0(4,7,0) + & + L(1,7,1)\,V^m_0(1,7,1) + \\
& + L(2,8,0)\,V^m_0(2,8,0) + & \\
& + L(0,9,0)\,V^m_0(0,9,0) + &
\end{array}
$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$$
\begin{array}{l|l}
+L(12,0,2)\,V_0^m(12,0,2)+ & +L(9,0,3)\,V_0^m(9,0,3)+ \\
+L(10,1,2)\,V_0^m(10,1,2)+ & +L(7,1,3)\,V_0^m(7,1,3)+ \\
+L(\ 8,2,2)\,V_0^m(\ 8,2,2)+ & +L(5,2,3)\,V_0^m(5,2,3)+ \\
+L(\ 6,3,2)\,V_0^m(\ 6,3,2)+ & +L(3,3,3)\,V_0^m(3,3,3)+ \\
+L(\ 4,4,2)\,V_0^m(\ 4,4,2)+ & +L(1,4,3)\,V_0^m(1,4,3)+ \\
+L(\ 2,5,2)\,V_0^m(\ 2,5,2)+ & \\
+L(\ 0,6,2)\,V_0^m(\ 0,6,2)+ &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
+L(6,0,4)\,V_0^m(6,0,4)+ & +L(3,0,5)\,V_0^m(3,0,5)+ \\
+L(4,1,4)\,V_0^m(4,1,4)+ & +L(1,1,5)\,V_0^m(1,1,5)+ \\
+L(2,2,4)\,V_0^m(2,2,4)+ & \\
+L(0,3,4)\,V_0^m(0,3,4)+ &
\end{array}
$$

$$
+L(0,0,6)\,V_0^m(0,0,6),
$$

ed $F_1^m(14,3)$ si ottiene, di qui, al solito modo.

Per il calcolo effettivo delle espressioni precedenti sono necessari i seguenti valori:

$L(18,0,0) = 612612$ (ved. (9″) – in questo num.)	$L(15,0,1) = L(15,0,0) = 6006$ (ved. (9″) – in questo num.)
$L(16,1,0) = 36036$ (» (8″) – »)	$L(13,1,1) = L(13,1,0) = 2574$ (» (8″) – »)
$L(14,2,0) = 15015$ (» (22) – »)	$L(11,2,1) = L(11,2,0) = 1122$ (» (22) – »)
$L(12,3,0) = 6336$ (» (23) – »)	$L(\ 9,3,1) = L(\ 9,3,0) = 498$ (» (23) – »)
$L(10,4,0) = 2709$ (» (24) – »)	$L(\ 7,4,1) = L(\ 7,4,0) = 225$ (» (24) – »)
$L(\ 8,5,0) = 1173$ (si calcoli π^5 per $k=14$, ecc.)	$L(\ 5,5,1) = L(\ 5,5,0) = 103$ (si calcoli π^5 per $k=11$, ecc.)
$L(\ 6,6,0) = 513$ (» π^6 »)	$L(\ 3,6,1) = L(\ 3,6,0) = 47$ (» π^6 »)
$L(\ 4,7,0) = 225$ (» π^7 »)	$L(\ 1,7,1) = L(\ 1,7,0) = 21$ (» π^7 »)
$L(\ 2,8,0) = 98$ (» π^8 »)	
$L(\ 0,9,0) = 42$ (» π^9 »)	

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$$\begin{array}{l}
L(12,0,2) = L(12,0,1) = L(12,0,0) = 462 \text{ (ved. (9'') — in questo num.)} \\
L(10,1,2) = L(10,1,1) = L(10,1,0) = 210 \text{ (» (8'') — »)} \\
L(8,2,2) = L(8,2,1) = L(8,2,0) = 98 \text{ (» (22) — »)} \\
L(6,3,2) = L(6,3,1) = L(6,3,0) = 47 \text{ (» (23) — »)} \\
L(4,4,2) = L(4,4,1) = L(4,4,0) = 23 \text{ (» (24) — »)} \\
L(2,5,2) = L(2,5,1) = L(2,5,0) = 11 \text{ (si calcoli } \pi^5 \text{ per } k = 8 \text{, ecc.)} \\
L(0,6,2) = L(0,6,1) = L(0,6,0) = 5 \text{ (» } \pi^6 \text{ »)}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
L(9,0,3) = L(9,0,2) = L(9,0,1) = L(9,0,0) = 42 \\
L(7,1,3) = L(7,1,2) = L(7,1,1) = L(7,1,0) = 21 \\
L(5,2,3) = L(5,2,2) = L(5,2,1) = L(5,2,0) = 11 \\
L(3,3,3) = L(3,3,2) = L(3,3,1) = L(3,3,0) = 6 \\
L(1,4,3) = L(1,4,2) = L(1,4,1) = L(1,4,0) = 3
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
L(6,0,4) = L(6,0,3) = L(6,0,2) = L(6,0,1) = L(6,0,0) = 5 \\
L(4,1,4) = L(4,1,3) = L(4,1,2) = L(4,1,1) = L(4,1,0) = 3 \\
L(2,2,4) = L(2,2,3) = L(2,2,2) = L(2,2,1) = L(2,2,0) = 2 \\
L(0,3,4) = L(0,3,3) = L(0,3,2) = L(0,3,1) = L(0,3,0) = 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
L(3,0,5) = L(3,0,4) = L(3,0,3) = L(3,0,2) = L(3,0,1) = L(3,0,0) = 1 \\
L(1,1,5) = L(1,1,4) = L(1,1,3) = L(1,1,2) = L(1,1,1) = L(1,1,0) = 1
\end{array}$$

$$L(0,0,6) = L(0,0,5) = L(0,0,4) = L(0,0,3) = 1.$$

Ved. Esempio 2.°

Tenendo conto delle formole (6) e (7) si ha, dopo alcune riduzioni:

$$F_0^m(8,3) = \frac{\binom{m-9}{4}\binom{m-10}{4}\binom{m-11}{4}}{\binom{6}{2}\binom{5}{1}\binom{4}{0}},$$

$$F_1^m(8,3) = \frac{m\binom{m-10}{4}\binom{m-11}{4}\binom{m-13}{3}}{\binom{6}{2}\binom{5}{1}\binom{4}{1}};$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$$F_0^m(11,\ 3) = \frac{\binom{m-12}{5}\binom{m-13}{5}\binom{m-14}{5}}{\binom{7}{2}\binom{6}{1}\binom{5}{0}},$$

$$F_1^m(11,\ 3) = \frac{m\binom{m-13}{5}\binom{m-14}{5}\binom{m-16}{4}}{\binom{7}{2}\binom{6}{1}\binom{5}{1}};$$

$$F_0^m(14,\ 3) = \frac{\binom{m-15}{6}\binom{m-16}{6}\binom{m-17}{6}}{\binom{8}{2}\binom{7}{1}\binom{6}{0}},$$

$$F_1^m(14,\ 3) = \frac{m\binom{m-16}{6}\binom{m-17}{6}\binom{m-19}{5}}{\binom{8}{2}\binom{7}{1}\binom{6}{1}}.$$

Dagli esempi precedenti ricaviamo, *per induzione:*

$$F_0^m(k,\ 3) = \frac{\binom{m-k-1}{\frac{k+4}{3}}\binom{m-k-2}{\frac{k+4}{3}}\binom{m-k-3}{\frac{k+4}{3}}}{\binom{\frac{k+4}{3}+2}{2}\binom{\frac{k+4}{3}+1}{1}\binom{\frac{k+4}{3}}{0}}, \tag{25}$$

ed:

$$F_1^m(k,\ 3) = \frac{m\binom{m-k-2}{\frac{k+4}{3}}\binom{m-k-3}{\frac{k+4}{3}}\binom{m-k-5}{\frac{k+1}{3}}\ (*)}{\binom{\frac{k+4}{3}+2}{2}\binom{\frac{k+4}{3}+1}{1}\binom{\frac{k+4}{3}}{1}}. \tag{26}$$

13. Caso di $q = k + 1$.

Il problema (corrispondente a questo caso) di trovare *quanti* $[k]$ $2(k+1)$*-sechino una* C_p^m *di* $[k+2]$ è risoluto dalla (4) del num. 1. Il signor Castelnuovo, per dare la (4), ammette nota la espressione di $F_0^m(k,\ k+1)$,

(*) Vedi il num. 16. Per il caso di p qualunque ved. una parziale ricerca al num. 4 (Capitolo II).

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

e calcola poi quella di $F_p^m(k, k+1)$ con un ragionamento, che, in sostanza, è il seguente:

Il numero $F_{p-1}^m(k, k+1)$ dei $[k]$ $2(k+1)$-secanti una C_{p-1}^m spezzata in una C_{p-1}^{m-1} ed in una unisecante v può calcolarsi appoggiando ulteriormente v, alla curva, in un punto P. E gli spazi richiesti sono allora:

o gli $F_p^m(k, k+1)$ $[k]$ $2(k+1)$-secanti la C_p^m ottenuta;

o gli $F_{p-1}^{m-2}(k-1, k)$ $[k]$ $2k$-secanti la C_{p-1}^{m-1} e passanti per P. Che questi ultimi $[k]$ siano proprio $F_{p-1}^{m-2}(k-1, k)$ è subito visto, proiettando da P.

Si ha dunque:

$$F_p^m(k, k+1) = F_{p-1}^m(k, k+1) - F_{p-1}^{m-2}(k-1, k).$$

Il problema è dunque ridotto al calcolo di $F_0^m(k, k+1)$ (*).

Fissiamo perciò due punti generici 0 ed $0'$ di $[k+2]$, e stabiliamo su una C_0^{m-1} una corrispondenza nella quale siano omologhi due punti M ed M' quando è verificata la condizione che segue:

esiste un $[k]$ $(2k+1)$*-secante la* C_0^{m-1}, *e tale che i* $[k+1]$ *proiettanti da* 0 *e da* $0'$ *esso* $[k]$ *hanno rispettivamente* M *ed* M' *tra le ulteriori intersezioni con la curva.*

Cerchiamo gl'indici di una tale corrispondenza.

Se M è un punto generico della curva, alla retta $0M$ si appoggiano (ved. num. 9):

$$A_0^{m-1}(k, k+1) - B_0^{m-1}(k, k+1),$$

$[k]$ $(2k+1)$-secanti la C_0^{m-1}. Se è Σ uno qualunque di essi, l'iperpiano $0'\Sigma$ taglia la C_0^{m-1} in $m-2k-2$ punti, esterni a Σ, i quali tutti sono considerabili come punti M'.

Gl'indici della corrispondenza sono dunque eguali entrambi ad:

$$(m-2k-2)\{A_0^{m-1}(k, k+1) - B_0^{m-1}(k, k+1)\}.$$

Contiamo ora le coincidenze.

Ognuno degli $A_0^{m-1}(k, k+1)$ $[k]$ $(2k+1)$-secanti la C_0^{m-1} ed appoggiati alla retta $00'$ dà $m-2k-2$ coincidenze. E ne dà $2(k+1)$ ognuno degli $F_0^{m-1}(k, k+1)$ $[k]$ $2(k+1)$-secanti. Nè se ne hanno altre.

(*) Da me pregato, il signor Castelnuovo mi inviò gentilmente un metodo che potrebbe forse dare la espressione di $F_0^m(k, k+1)$. Mi fece inoltre pervenire un manoscritto, relativo a queste ricerche, dal quale ho tratto, ad es., la idea della *equivalenza* tra una C_p^m ed una C_{p-1}^m con un punto doppio (ved. num. 11).

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

È dunque:

$$2(m-2k-2)\{A_0^{m-1}(k,\ k+1)-B_0^{m-1}(k,\ k+1)\}=$$
$$=(m-2k-2)A_0^{m-1}(k,\ k+1)+2(k+1)F_0^{m-1}(k,\ k+1).$$

Ma, proiettando da un punto della curva, si ha subito:

$$B_0^{m-1}(k,\ k+1)=F_0^{m-2}(k-1,\ k);$$

ed inoltre la (18) del num. 9 dà:

$$A_0^{m-1}(k,\ k+1)-B_0^{m-1}(k,\ k+1)=F_0^{m}(k,\ k+1)-F_0^{m-1}(k,\ k+1).$$

Sostituendo e riducendo si ha infine:

$$F_0^m(k,\ k+1)=\frac{m}{m-2k-2}F_0^{m-1}(k,\ k+1)+F_0^{m-2}(k-1,\ k). \qquad (27)$$

Questa formola ne permette di calcolare $F_0^m(k,\ k+1)$. Aggiungiamo solo che essa, per $k=1$, fu data dal prof. SEGRE, in un suo corso sulle *Curve algebriche dei vari spazi* (Anno scolastico 98-99): fu data però sotto forma diversa, in modo che, per calcolare il numero $F_0^m(1,\ 2)$ delle rette quadrisecanti di una curva razionale d'ordine m del nostro spazio si dovette premettere il calcolo dell'ordine $A_0^m(1,\ 2)$ della rigata delle trisecanti di essa curva, e quello della moltiplicità $B_0^m(1,\ 2)$ della curva sulla rigata stessa (*).

LE ESPRESSIONI DI $F_0^m(k,\ q)$ E DI $F_1^m(k,\ q)$.

14. Le formole seguenti si sanno dimostrare solo nei pochi casi visti finora, e furono da noi scritte *per induzione*. Esse sono però verificabili quando k e q siano assegnati numericamente, e del resto qualunque $\left(k\right.$ intero, positivo o nullo; $1\leq q\leq k+1$; $\left.\frac{k+1}{q}\ \text{intero}\right)$.

(*) Chi ben osservi la Memoria del sig. CASTELNUOVO citata al num. 1, vedrà, che, in fondo, si determina in altro modo $F_p^m(k,\ k+1)$, come applicazione di una *formola che dà il numero dei gruppi comuni a due serie lineari sopra un ente algebrico.* Essa *formola* si suppone però già nota (quale l'aveva data il sig. LE PAIGE) per curve razionali (Vedi *Bulletin Acad. roy. de Belgique*, 3.ª série, t. XI).

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Si ha:

numero dei $[k]$ $(k+1+q)$-secanti di una curva razionale d'ordine m in $\left[k+1+\frac{k+1}{q}\right]=$

$$=F_0^m(k,q)=\frac{\binom{m-k-1}{n-k}\binom{m-k-2}{n-k}\cdots\binom{m-k-q+1}{n-k}\binom{m-k-q}{n-k}}{\binom{n-k+q-1}{q-1}\binom{n-k+q-2}{q-2}\cdots\binom{n-k+1}{1}\binom{n-k}{0}}, \text{(*)} \qquad (28)$$

ove n sta per $k+1+\frac{k+1}{q}$; e

numero dei $[k]$ $(k+1+q)$-secanti di una curva ellittica d'ordine m in $\left[k+1+\frac{k+1}{q}\right]=$

$$=F_1^m(k,q)=\frac{m\binom{m-k-2}{n-k}\binom{m-k-3}{n-k}\cdots\binom{m-k-q}{n-k}\binom{m-k-q-2}{n-k-1}}{\binom{n-k+q-1}{q-1}\binom{n-k+q-2}{q-2}\cdots\binom{n-k+1}{1}\binom{n-k}{1}}, \qquad (29)$$

ove n sta pure per $k+1+\frac{k+1}{q}$.

La (28) può anche scriversi così:

$$F_0^m(k,q)=\frac{\binom{m-k-1}{q}\binom{m-k-2}{q}\cdots\binom{m-n+1}{q}\binom{m-n}{q}}{\binom{n-k+q-1}{q}\binom{n-k+q-2}{q}\cdots\binom{q+1}{q}\binom{q}{q}}, \qquad (30)$$

ove, al solito, n sta per $k+1+\frac{k+1}{q}$.

Confrontando la (28) con la (30) si può dedurre:

Posto $n=k+1+\frac{k+1}{q}$, è:

$$F_0^m(k,q)=F_0^{m-n+k+q}\Big((q-1)(n-k)-1,\ n-k\Big),$$

(*) Parecchio tempo dopo che io ero, da me, pervenuto alla (28), il prof. Segre mi avvertì come nel libro di F. Meyer, *Apolarität und rationale Curven* (Tübingen, 1883, ved. pag. 363) fosse *enunciato per induzione* il seguente teorema:

In $[d=(h+1)(k-1)]$ *una* C_0^n *ammette:*

$$\frac{(\nu+k-1)(\nu+k-2)\ldots\nu}{1.2\ldots k}\ \frac{(\nu+k-2)(\nu+k-3)\ldots(\nu-1)}{2.3\ldots(k+1)}\cdots\frac{(\nu+k-h)\ldots(\nu-h+1)}{h\ldots(k+h-1)}$$

$[d-k]$ h k-*secanti*-(ν sta per $n-d$). Esso teorema equivale alla (28).

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

ossia:

i $[k]$ $(k+1+q)$*-secanti di una* C_0^m *in* $[n]$ *sono quanti i* $[(q-1)\times\times(n-k)-1]$ $(k+1+q)$*-secanti di una* $C_0^{m-n+k+q}$ *in* $[(q-1)(n-k-1)]$.

Questa affermazione è una tautologia solo per $q=n-k$.

15. Le formole (28) e (29) possono anche essere interpetrate in altro modo.

Dato un ente algebrico, semplicemente infinito di genere p, e, su esso, una serie lineare di ordine m e di dimensione n (la quale serie si suppone priva di punti fissi e non composta mediante una involuzione), è sempre possibile riferirlo birazionalmente ad una C_p^m di $[n]$, su cui la serie corrispondente alla data è secata dagli iperpiani dello spazio.

Gruppi neutri di $k+1+q$ punti e di *specie* q della data serie sono quelli che impongono ai gruppi (di m punti) della serie, che li debbono contenere, $k+1$ invece che $k+1+q$ condizioni; e si rappresentano in $[k]$ $(k+1+q)$-secanti della C_p^m di S_n.

Onde, *sopra un ente razionale od ellittico, una serie lineare d'ordine* m *e di dimensione* n $\left(n \text{ vale sempre } k+1+\frac{k+1}{q}\right)$ *esiste,* in generale, *un numero finito di gruppi neutri di* $k+1+q$ *punti e di specie* q *: ed esso numero è dato, rispettivamente, dalle* (28) e (29).

Ed inoltre si ha:

la (28) *dà anche il numero dei gruppi neutri, di* $k+1+q$ *punti e di specie* $n-k$*, appartenenti ad una serie di ordine* $m-n+k+q$ *e di dimensione* $(q-1)(n-k+1)$ *sopra un ente razionale semplicemente infinito* (*).

Anche qui n sta per $k+1+\frac{k+1}{q}$.

16. Relativamente alle formole (28) e (29) aggiungiamo quanto segue. Esse dànno:

$$F_0^{k+1+\frac{k+1}{q}+q}(k,q)=1 \quad \text{ed} \quad F_1^{k+1+\frac{k+1}{q}+q+1}(k,q)=q+1,$$

come deve essere (ved. num. 7).

(*) Ved. per le definizioni e per le proposizioni date in questo num. 15 la Memoria del prof. SEGRE citata in fondo al num. 7. In particolare si vedano il § 4 ed il num. 28 del § 7 di essa Memoria.

Per la trattazione analitica del problema dei gruppi neutri è utile vedere la Memoria del BRILL, *Ueber algebraische Correspondenzen.* Math. Ann., 36, pag. 321.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Si ha inoltre:

$$F_0^{k+1+\frac{k+1}{q}+q+1}(k,\ q)=\binom{\frac{k+1}{q}+q+1}{q},$$

ed:

$$F_1^{k+1+\frac{k+1}{q}+q+2}(k,\ q)=\frac{\left(k+1+\frac{k+1}{q}+q+2\right)\binom{\frac{k+1}{q}+q+1}{q}}{\frac{k+q}{q}+2}.$$

Queste due formole sono dimostrabili per $q=3$.

Si ha difatti, come si è visto,

$$F_0^m(k,\ 3)=\Sigma\, L(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)\, V_0^m(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3),$$

ed:

$$F_1^m(k,\ 3)=\Sigma\, L(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)\, V_1^m(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3),$$

le somme essendo estese a tutte le possibili soluzioni intere, positive o nulle della $\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3=k+1$. E poichè ad una soluzione $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$ di questa equazione risponde un termine di grado $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ di $F^m(k,\ 3)$, esisterà, nelle espressioni di esse F,

un termine, di grado minimo $\frac{k+1}{3}+1$, ottenibile ponendo $\alpha_1=\alpha_2=0$, $\alpha_3=\frac{k+1}{3}+1$,

due termini di grado $\frac{k+1}{3}+2$, ottenibili ponendo per uno di essi:

$$\alpha_1=\alpha_2=1,\quad \alpha_3=\frac{k+1}{3},$$

e per l'altro:

$$\alpha_1=0,\quad \alpha_2=3,\quad \alpha_3=\frac{k+1}{3}-1.$$

Dunque si ha:

$$F_0^m(k,\ 3)=\left\{L\left(0,\ 0,\ \frac{k+1}{3}+1\right)V_0^m\left(0,\ 0,\ \frac{k+1}{3}+1\right)\right\}+$$

$$+\left\{L\left(1,\ 1,\ \frac{k+1}{3}\right)V_0^m\left(1,\ 1,\ \frac{k+1}{3}\right)+\right.$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$$+L\left(0,\ 3,\ \frac{k+1}{3}-1\right)V_0^m\left(0,\ 3,\ \frac{k+1}{3}-1\right)\Big\}+\cdots=$$

(ved. formole (9''), (8''), (23) del num. 12 e la (6) del num. 3)

$$=\left\{1\times\binom{m-k-3}{\frac{k+1}{3}+1}\right\}+$$

$$+\left\{2\binom{\frac{k+1}{3}+2}{2}\times\binom{m-k-3}{\frac{k+1}{3}+2}+\binom{\frac{k+1}{3}+2}{3}\binom{m-k-3}{\frac{k+1}{3}+2}\right\}+\cdots;$$

ed:

$$F_1^m(k,3)=\left\{L\left(0,\ 0,\ \frac{k+1}{3}+1\right)V_1^m\left(0,\ 0,\ \frac{k+1}{3}+1\right)\right\}+$$

$$+\Big\{L\left(1,\ 1,\ \frac{k+1}{3}\right)V_1^m\left(1,\ 1,\ \frac{k+1}{3}\right)+$$

$$+L\left(0,\ 3,\ \frac{k+1}{3}-1\right)V_1^m\left(0,\ 3,\ \frac{k+1}{3}-1\right)\Big\}+\cdots=$$

(ved. formole (9''), (8''), (23) del num. 12 e la (7) del num. 4)

$$=\left\{1\times\frac{m}{\frac{k+1}{3}+1}\binom{m-k-5}{\frac{k+1}{3}}\right\}+\Big\{2\binom{\frac{k+1}{3}+2}{2}\times$$

$$\times\frac{m}{\frac{k+1}{3}+2}\binom{m-k-5}{\frac{k+1}{3}+1}+\binom{\frac{k+1}{3}+2}{3}\times\frac{m}{\frac{k+1}{3}+2}\binom{m-k-5}{\frac{k+1}{3}+1}\Big\}+\cdots$$

Ponendo $m=k+1+\frac{k+1}{3}+4$ nella espressione di $F_0^m(k,3)$ si annullano tutti i termini successivi a quelli che sono scritti; e si ha:

$$F_0^{\frac{4}{3}(k+1)+4}(k,\ 3)=\binom{\frac{k+1}{3}+4}{3}.$$

E, del pari, ponendo $m=k+1+\frac{k+1}{3}+5$, nella espressione di $F_1^m(k,3)$,

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

si ha:

$$F_1^{\frac{4}{3}(k+1)+5}(k,3)=\frac{\frac{4}{3}(k+1)+5}{\frac{k+1}{3}+2}\binom{\frac{k+1}{3}+4}{3}.$$

E sono questi i risultati che si volevano ottenere.

CAPITOLO II.

Sul problema dell'ordine.

1. Gli $\infty^{\frac{k+1}{q}}$ $[k]$ $(k+q)$-secanti di una C_p^m in $\left[k+1+\frac{k+1}{q}\right]$ costituiscono una *forma* $M_{k+\frac{k+1}{q}}$ di ordine $A_p^m(k, q)$ e su cui la curva data è multipla secondo $B_p^m(k, q)$ (Ved. num. 9 in fine).

Calcoleremo $A_p^m(k, q)$ e $B_p^m(k, q)$ in alcuni casi particolari.

2. Caso di $q=1$.

L'ordine $A_p^m(k, 1)$ *della* M_{2k+1} *luogo dei* $[k]$ $(k+1)$*-secanti di una* C_p^m *in* $[2(k+1)]$ si ottiene secando la M_{2k+1} con una retta generica g, e poi proiettando da questa retta, in un $[2k]$.

Si ha subito:

$$\left.\begin{aligned}&A_p^m(k,1)=\text{numero dei }[k-1]\\ &(k+1)\text{-secanti di una } C_p^m \text{ in } [2k]=F_p^m(k-1,1)=\\ &=\sum_0 h\,(-1)^h\binom{m-k-2h}{k+1-2h}\binom{p}{h}\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

(ved. (4), num. 1; Cap. I), la somma essendo estesa sino ad un termine nullo.

Mediante la (18) (ved num. 9, Cap. I) potrebbe ora subito aversi $B_p^m(k, 1)$; ma è più semplice appoggiare la g, ulteriormente, in P, alla curva data, e notare che degli $A_p^m(k, 1)$ spazi $(k+1)$-secanti la C_p^m ed appoggiati a g, solo $F_p^{m-1}(k-1, 1)$ incontrano essa g in punti diversi da P: il che si vede proiettando, anche ora, da g.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Quindi:

$$\left.\begin{aligned} B_p^m(k,\ 1) &= F_p^m(k-1,\ 1) - F_p^{m-1}(k-1,\ 1) = \\ &= \sum_0^h (-1)^h \binom{m-k-2h}{k-2h}\binom{p}{h}, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

la somma essendo estesa come sempre.

3. Caso di $q = 2$.

Quale è l'ordine della $M_{\frac{3k+1}{2}}$ *luogo dei* $[k]$ $(k+2)$*-secanti di una* C_p^m *in* $\left[\frac{3}{2}(k+1)\right]$? *E quale è la moltiplicità della curva sulla varietà?*

Si spezzi una C_p^{m+2} di $\left[\frac{3}{2}(k+1)\right]$ in una C_p^m con una unisecante h e con una retta generica g, appoggiata ad h.

Gli $F_p^{m+2}(k,\ 2)$ $[k]$ $(k+3)$-secanti della C_p^{m+2} così spezzata o sono tra gli $F_p^m(k,\ 2)$ $[k]$ $(k+3)$-secanti della C_p^m, o tra gli $\left\{\begin{matrix} A_p^m(k,\ 2) - B_p^m(k,\ 2) \\ A_p^m(k,\ 2) \end{matrix}\right\}$ $[k]$ $(k+2)$-secanti della C_p^m ed appoggiati $\left\{\begin{matrix} \text{ad } h \\ \text{a } g \end{matrix}\right\}$, o tra i $[k]$ $(k+1)$-secanti della C_p^m ed appoggiati alle due rette. Questi ultimi $[k]$ sono $F_p^{m-1}(k-2,\ 2)$, come si vede proiettando dal piano hg (*). Si ha dunque:

$$F_p^{m+2}(k,\ 2) = F_p^m(k,\ 2) + 2\,A_p^m(k,\ 2) - B_p^m(k,\ 2) + F_p^{m-1}(k-2,\ 2).$$

A questa si associi la (18) del num. 9, così scritta:

$$F_p^{m+1}(k,\ 2) - F_p^m(k,\ 2) = A_p^m(k,\ 2) - B_p^m(k,\ 2).$$

Si avranno due equazioni, le quali permettono di ricavare $A_p^m(k,\ 2)$ e $B_p^m(k,\ 2)$.

Ad es., si ha, per $p = 0$,

$$A_0^m(k,\ 2) = \frac{4}{k+5}\binom{m-k}{\frac{k+1}{2}}\binom{m-k-1}{\frac{k+3}{2}}, \qquad (3)$$

e:

$$B_0^m(k,\ 2) = \frac{1}{\frac{k+5}{2}}\binom{m-k-1}{\frac{k+3}{2}}\left\{2\binom{m-k-1}{\frac{k-1}{2}} + \binom{m-k-2}{\frac{k-1}{2}}\right\}, \qquad (4)$$

le quali valgono anche per $k = 1$.

(*) Se $k = 1$, sono $\binom{m-1}{2}$, come si vede secando col piano hg.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

4. Caso di $q = 3$.

Qui si considera la $M_{k+\frac{k+1}{3}}$ *luogo dei* $[k]$ $(k+3)$*-secanti di una* C_p^m *di* $\left[\frac{4}{3}(k+1)\right]$. *Si vuole l'ordine di essa varietà e la moltiplicità della curva su essa.*

Suppongasi perciò spezzata una C_p^{m+3} di $\left[\frac{4}{3}(k+1)\right]$ in una C_{p-1}^m con due unisecanti h_1 ed h_2 traversate da una generica retta g.

Gli $F_p^{m+3}(k, 3)$ $[k]$ $(k+4)$-secanti della C_p^{m+3}, così spezzata, o sono tra gli $F_{p-1}^m(k, 3)$ $[k]$ $(k+4)$-secanti della C_{p-1}^m,

$$\text{o tra gli} \left\{ \begin{array}{c} F_{p-1}^{m+1}(k, 3) - F_{p-1}^m(k, 3) \\ F_{p-1}^{m+1}(k, 3) - F_{p-1}^m(k, 3) \\ A_{p-1}^m(k, 3) \end{array} \right\} [k]\ (k+3)\text{-secanti della } C_{p-1}^m \text{ ed}$$

$$\text{appoggiati} \left\{ \begin{array}{c} \text{ad } h_1 \\ \text{ad } h_2 \\ \text{a } g \end{array} \right\},$$

$$\text{o tra gli} \left\{ \begin{array}{c} F_{p-1}^{m+2}(k,3) - F_{p-1}^m(k,3) - \{F_{p-1}^{m+1}(k,3) - F_{p-1}^m(k,3)\} - A_{p-1}^m(k,3) \\ F_{p-1}^{m+2}(k-3) - F_{p-1}^m(k,3) - \{F_{p-1}^{m+1}(k,3) - F_{p-1}^m(k,3)\} - A_{p-1}^m(k,3) \\ F_{p-1}^{m+2}(k, 3) - 2\,F_{p-1}^{m+1}(k, 3) + F_{p-1}^m(k, 3) \end{array} \right\}$$

$$[k]\ (k+2)\text{-secanti della } C_{p-1}^m \text{ ed appoggiati ad} \left\{ \begin{array}{c} h_1 \text{ ed a } g \\ h_2 \text{ ed a } g \\ h_1 \text{ e ad } h_2 \end{array} \right\} (*), \text{ o sono infine}$$

tra i $[k]$ $(k+1)$-secanti della C_{p-1}^m ed appoggiati alle tre rette. Ora, questi ultimi $[k]$ sono $F_{p\ 1}^{m\ 2}(k-3, 3)$, come si vede proiettando dal $[3]$ $g\,h_1\,h_2$ (**). Quindi si ha:

$$F_p^{m+3}(k, 3) = 3\,F_{p-1}^{m+2}(k, 3) - 2\,F_{p-1}^{m+1}(k, 3) - $$
$$- A_{p-1}^m(k, 3) + F_{p-1}^{m-2}(k-3, 3) \text{ (***)}.$$

(*) Per queste asserzioni, ved. il num. 8 ed il num. 9 (Cap. I.).

(**) Per $k = 2$, essi sono $\binom{m-2}{3}$, come si vede secando col $[3]$ $g\,h_1\,h_2$.

(***) In questa formola di riduzione appare una incognita $A_{p-1}^m(k, 3)$ la quale ne impedisce di sciogliere completamente il caso di $q = 3$ del problema fondamentale (ved. numero 12, Cap. I). Nè si può eliminare essa incognita, cercando una formola di riduzione

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Ma è pure:

$$F_{p-1}^{m+1}(k,\ 3) - F_{p-1}^{m}(k,\ 3) = A_{p-1}^{m}(k,\ 3) - B_{p-1}^{m}(k,\ 3)$$

(ved. formola (18), num. 9, Cap. I), onde *il problema di questo numero è subito risoluto per* $q = 0$. Difatti sono note le espressioni generali di $F_0^m(k,\ 3)$ e di $F_1^m(k,\ 3)$ (ved. num. 12, Cap. I).

5. Caso di $q = k + 1$.

La moltiplicità $B_p^m(k,\ k+1)$ di una C_p^m in $[k+2]$ sulla M_{k+1} luogo dei $[k]$ $(2k+1)$-secanti vale il numero dei $[k]$ $(2k+1)$-secanti la curva e passanti per un punto generico P di essa. Proiettando da esso punto si ha immediatamente:

$$\left.\begin{aligned} &B_p^m(k,\ k+1) = F_p^{m-1}(k-1,\ k) = \\ &= \sum_0^h \frac{(-1)^h}{k+1-h}\binom{m-k-1-h}{k-h}\binom{m-k-2-h}{k-h}\binom{p}{h} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

(ved. formola (4), num. 1, Cap. I), la somma essendo estesa sino ad un termine nullo.

Con la:

$$(F_p^{m+1}(k,\ k+1) - F_p^m(k,\ k+1) = A_p^m(k,\ k+1) - B_p^m(k,\ k+1)$$

(ved. formola (18), num. 9, Cap. I) si ottiene poi facilmente:

$$A_p^m(k,\ k+1) = \sum_0^h (-1)^h \frac{\binom{m-k-1-h}{k-h}\binom{m-k-2-h}{k-h}}{\binom{k+2-h}{2}}(m-k-h), \quad (6)$$

anche qui la somma essendo estesa come sopra.

In particolare:

ordine della rigata delle trisecanti di una C_p^m nello spazio ordinario =

$$= A_p^m(1,\ 2) = 2\binom{m-1}{3} - \binom{m-1}{2}p;\ \text{e}$$

moltiplicità di C_p^m su essa rigata =

$$= B_p^m(1,\ 2) = \binom{m-2}{2} - p.$$

---

analoga alla precedente, dopo avere spezzata una C_p^{m+2} in una C_{p-1}^m con due unisecanti incidenti, di cui una appoggiata ad una 3.ª retta generica. Difatti, è bensì soddisfatta la formola del Nöther (ved. num. 1, Cap. I), ma la C_p^{m+2} così composta è *specializzata* dal fatto che ammette una trisecante.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

NOTA I.

La necessità di attendere ad altri studi mi obbliga a sospendere queste ricerche, benchè esse sieno troppo lungi dall'essere complete.

Sarebbe interessante, oltrechè ricercare la espressione generale di $F_p^m(k, q)$, anche il tentare semplici dimostrazioni per la (28) e per la (29) (ved num. 14, Cap. I). Forse la (29), supposta nota la (28), può trarsi facilmente, tenendo d'occhio la relazione:

$$F_0^m(k, q) = \frac{\binom{m-k-1}{n-k}(n-k)}{\binom{m-k-q-2}{n-k-1}} F_1^m(k, q), \quad \text{ove} \quad n = k + 1 + \frac{k+1}{q}.$$

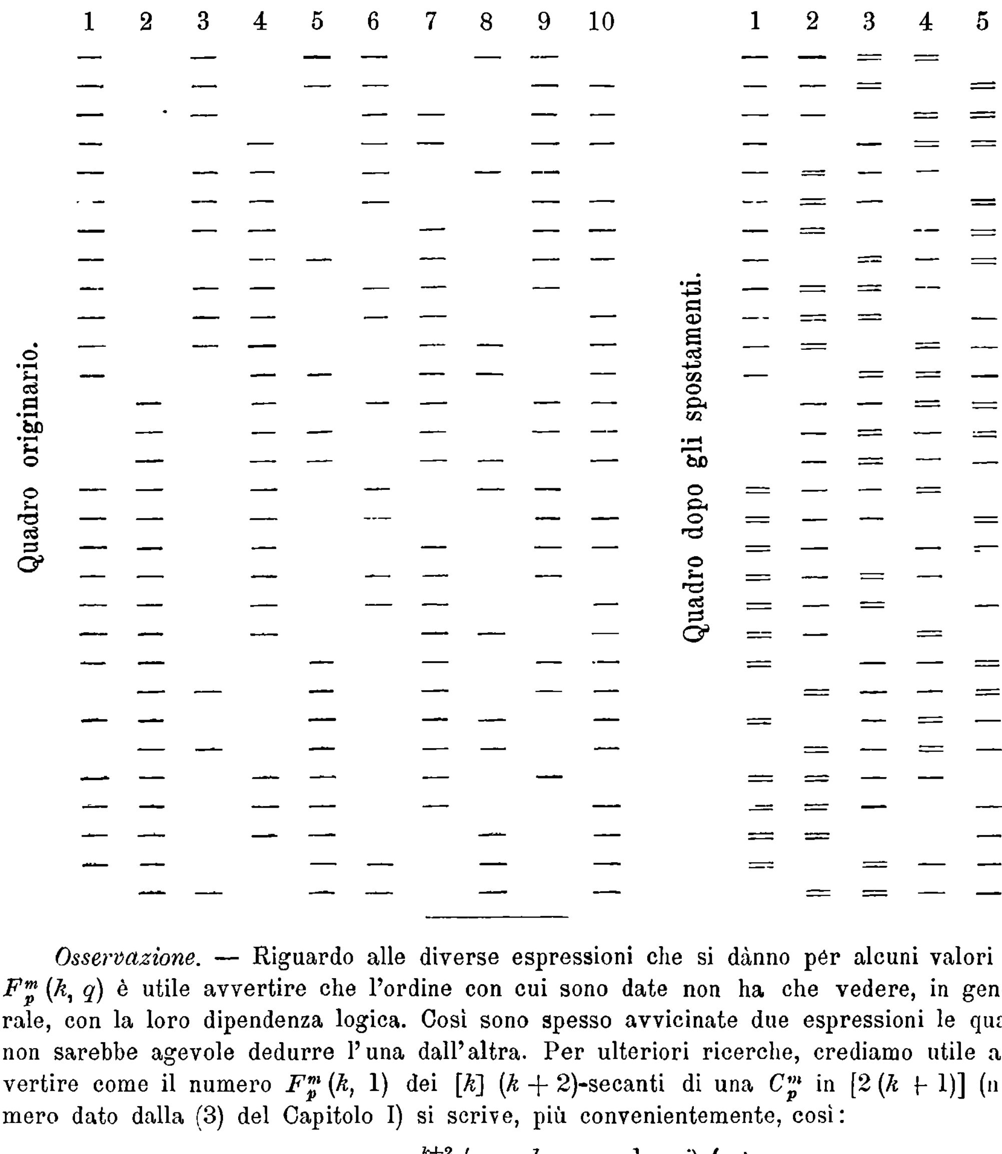
Un problema che ha analogia col *fondamentale* è quello di cercare il numero delle quadriche (M^2) plurisecanti una C_p^m. Così esiste in [3] un numero finito di coniche (M_1^2) 8-secanti una C_p^m, numero che crediamo non sia stato ancora calcolato. È molto probabile che esso dipenda solo da m e da p, nel qual caso, per la sua ricerca, è utile ancora il metodo dello *spezzamento totale* (Ved. num. 1, Cap. I). Avvertiamo in proposito che, dei numeri corrispondenti ai nostri L è (nel caso particolare antecedente) noto quello (= 92) delle coniche appoggiate ad 8 rette generiche. (Ved., ad es., il lavoro di I. Lüroth, *Ueber die Anzahl der Kegelschnitte, welche acht Gerade in Raume schneiden.* Crelle, 68 (1867), pag. 165; e, per la soluzione di un problema assai più generale, il lavoro di H. Schubert, *Allgemeine Anzahlfunctionen für Kegelschnitte, Flächen und Räume zweiten Grades in n Dimensionen.* Math. Ann., 45 Bd., pag. 153.)

NOTA II.

Per maggior chiarezza di quanto si è detto al num. 3 (Cap. I) calcoleremo qui il numero $V_0^{10}(2, 2)$ delle combinazioni di 6.ª classe dei primi 10 numeri naturali, fatte in modo che ogni combinazione contenga sempre 2 numeri isolati e 2 coppie di numeri consecutivi.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Si ha $V_0^{10}(2,\ 2) = 30$.



Osservazione. — Riguardo alle diverse espressioni che si dànno per alcuni valori di $F_p^m(k,\ q)$ è utile avvertire che l'ordine con cui sono date non ha che vedere, in generale, con la loro dipendenza logica. Così sono spesso avvicinate due espressioni le quali non sarebbe agevole dedurre l'una dall'altra. Per ulteriori ricerche, crediamo utile avvertire come il numero $F_p^m(k,\ 1)$ dei $[k]$ $(k+2)$-secanti di una C_p^m in $[2(k+1)]$ (numero dato dalla (3) del Capitolo I) si scrive, più convenientemente, così:

$$F_p^m(k,\ 1) = \sum_0^{k+2}{}_i \binom{m-k-p-1-i}{k+2-i}\binom{p}{i}.$$

(Ved. la Nota: *Un problema di geometria numerativa*, ecc., che vedrà tra poco la luce negli Atti dell'Accademia Reale delle Scienze di Torino.)

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Risoluzione di alcuni problemi sull'applicabilità delle superficie.

(Di B. Calò, *a Teramo.)*

Ci proponiamo di determinare tutte le possibili coppie di superficie fra loro applicabili per cui è soddisfatta una delle condizioni seguenti:

1.º che siano eguali le distanze di un punto qualunque della prima da un piano fisso e del punto corrispondente della seconda da un punto fisso;

2.º che la somma delle distanze di due punti corrispondenti delle due superficie da un punto fisso dello spazio sia costante;

3.º che la differenza delle distanze di due punti corrispondenti delle due superficie da un punto fisso dello spazio sia costante.

Troveremo che a ciascuna di queste tre condizioni corrisponde una classe d'infinite coppie di superficie fra loro applicabili per cui è soddisfatta la condizione imposta; e ciascuna delle tre classi resta perfettamente definita risultando nota la forma che devono avere le espressioni che rappresentano le coordinate dei punti corrispondenti di una coppia qualunque di superficie appartenente alla classe stessa.

Ognuna delle tre classi dipende da una funzione arbitraria di variabile complessa e contiene infinite coppie di superficie algebriche, che si ottengono scegliendo per la funzione arbitraria una funzione algebrica qualunque; a ciascuna classe appartengono infinite superficie di rotazione intorno ad un asse passante pel punto fisso, che si ottengono prendendo la funzione arbitraria eguale ad una potenza della variabile complessa; in particolare, prendendo la prima potenza, si ottiene, corrispondentemente a ciascuna classe, la soluzione già nota:

1.º di due paraboloidi di rotazione uguali aventi l'uno per piano direttore il piano fisso e l'altro per fuoco il punto fisso;

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

2.° di due ellissoidi uguali di rotazione intorno all'asse focale e con un fuoco nel punto fisso;

3.° di due iperboloidi uguali di rotazione a due falde con un fuoco nel punto fisso.

I.

Considerando la prima delle questioni che ci siamo proposte, indichiamo con S_1, S_2 due superficie fra loro applicabili tali che siano eguali le distanze di un punto qualunque di S_1 da un piano fisso ω e del punto corrispondente di S_2 da un punto fisso O, che, senza alterare la generalità, potremo supporre situato nel piano ω. Se indichiamo con $d s_1$, $d s_2$, respettivamente, gli elementi lineari corrispondenti di S_1, S_2, scriveremo, come prima condizione alla quale soddisfano le superficie S_1, S_2, la seguente relazione:

$$d s_1^2 = d s_2^2. \tag{1}$$

Riferiamo i punti di S_1, S_2 ad un sistema di assi coordinati ortogonali (x, y, z), scegliendo come origine il punto fisso O e come piano $x y$ il piano fisso ω, e siano $M_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$, $M_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$ una coppia qualunque di punti corrispondenti su S_1, S_2; potremo scrivere intanto:

$$d s_1^2 = d x_1^2 + d y_1^2 + d z_1^2; \tag{2}$$

se poi indichiamo con ρ il raggio vettore del punto M_2 rispetto al punto O e consideriamo il punto $P \equiv (X_2, Y_2, Z_2)$, in cui esso incontra la superficie sferica col centro in O e di raggio 1, otterremo della superficie S_2 un'immagine sferica Σ_2 ed avremo:

$$x_2 = \rho X_2, \quad y_2 = \rho Y_2, \quad z_2 = \rho Z_2; \tag{3}$$

e se $d\sigma$ rappresenta l'elemento lineare della sfera Σ_2, corrispondente all'elemento $d s_2$ della superficie S_2, avremo:

$$d s_2^2 = d \rho^2 + \rho^2 d \sigma^2; \tag{4}$$

tenendo dunque presenti le formole (2), (4), la relazione (1) assumerà la forma:

$$d \rho^2 + \rho^2 d \sigma^2 = d x_1^2 + d y_1^2 + d z_1^2; \tag{5}$$

inoltre, se la distanza del punto M_1 dal piano ω è eguale alla distanza del

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

punto M_2 dal punto O, si dovrà avere:

$$z_1 = \rho, \tag{6}$$

e quindi la relazione (5) assumerà la forma:

$$\rho^2 \, d\sigma^2 = d\,x_1^2 + d\,y_1^2; \tag{7}$$

cioè, la relazione di applicabilità fra le superficie S_1, S_2 stabilisce tra la sfera Σ_2 ed il piano ω una rappresentazione conforme.

Scegliamo ora su S_1 a linee coordinate u, v le linee piane parallele ai piani coordinati $y\,z$, $x\,z$, e sopra S_2, ω, Σ_2 le linee corrispondenti; ciò equivale a porre:

$$x_1 = u, \quad y_1 = v, \tag{8}$$

essendo u, v due parametri variabili indipendenti; dalla (7) ricaveremo:

$$d\,\sigma^2 = \frac{1}{\rho^2}(d\,u^2 + d\,v^2);$$

vale a dire, le linee u, v formano sulla sfera Σ_2 un sistema isotermo; quindi, se indichiamo con $F(\tau)$ una funzione della variabile complessa $\tau = u + i\,v$, e con $F_0(\tau_0)$ la funzione coniugata della variabile complessa coniugata $\tau_0 = u - i\,v$, avremo (*):

$$X_2 = \frac{F + F_0}{F\,F_0 + 1}, \quad Y_2 = \frac{1}{i}\,\frac{F - F_0}{F\,F_0 + 1}, \quad Z_2 = \frac{F\,F_0 - 1}{F F_0 + 1},$$

$$\rho^2 = \frac{(F\,F_0 + 1)^2}{4} \, \frac{1}{\dfrac{d\,F}{d\tau} \cdot \dfrac{d\,F_0}{d\tau_0}}.$$

Queste formole, confrontate colle (3), (6), (8), ci permettono di scrivere le coordinate dei punti M_1, M_2 nel modo seguente:

$$x_1 = \frac{\tau + \tau_0}{2}, \quad y_1 = \frac{1}{i}\,\frac{\tau - \tau_0}{2}, \quad z_1 = \frac{F F_0 + 1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{F' \cdot F'_0}}, \tag{9}$$

$$x_2 = \frac{F + F_0}{2}\,\frac{1}{\sqrt{F' \cdot F'_0}}, \quad y_2 = \frac{F - F_0}{2\,i}\,\frac{1}{\sqrt{F' \cdot F'_0}}, \quad z_2 = \frac{F\,F_0 - 1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{F' \cdot F'_0}}. \tag{10}$$

ove, per semplicità, abbiamo adoperato degli apici, come segno di deriva-

(*) Cfr. Bianchi L., *Lezioni di geometria differenziale.* Pisa, 1894, pagg. 339, 340.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

zione, ed il radicale $\sqrt{F' \cdot F'_0}$ dev'esser preso sempre collo stesso segno, del resto arbitrario.

Abbiamo dunque il seguente resultato:

Se $F(\tau)$ *indica una funzione arbitraria della variabile complessa* $\tau = u + iv$ *ed* $F_0(\tau_0)$ *è la sua coniugata funzione di* $\tau_0 = u - iv$, *le formole* (9), (10) *rappresentano le coordinate dei punti corrispondenti di due superficie* S_1, S_2 *applicabili l'una sull'altra e tali che la distanza di ciascun punto di* S_1 *dal piano* xy *è uguale alla distanza del punto corrispondente di* S_2 *dall'origine* O *delle coordinate.*

Alla classe di superficie trovata e definita dalle formole (9), (10) appartengono infinite coppie di superficie algebriche, che si otterranno prendendo per $F(\tau)$ una funzione algebrica arbitraria.

Vogliamo ora ricercare se si può scegliere la funzione $F(\tau)$ in modo che entrambe le superficie S_1, S_2 risultino di rotazione e l'asse di rotazione di S_2 passi pel punto fisso O.

Poichè sono uguali le distanze di un punto di S_1 dal piano ω e del punto corrispondente di S_2 dal punto O, ad un parallelo di S_2 dovrà corrispondere in S_1 una linea piana parallela al piano ω, ma questa dev'essere al tempo stesso un parallelo per S_1, perciò l'asse di rotazione di S_1 dovrà esser perpendicolare al piano ω; senza dunque alterare la generalità, potremo assumere come asse comune di rotazione delle due superficie l'asse z; ciò posto, una rotazione di S_1 intorno all'asse z equivale a cambiare τ in $e^{i\alpha} \cdot \tau$, essendo α l'ampiezza della rotazione; e per questo cambiamento intanto

$$z_1 = \frac{FF_0 + 1}{2} \frac{1}{\sqrt{F' \cdot F'_0}},$$

non dovrà variare; inoltre, siccome ad una rotazione di S_1 intorno all'asse z deve corrispondere una rotazione di S_2 intorno allo stesso asse, neppure

$$z_2 = \frac{FF_0 - 1}{2} \frac{1}{\sqrt{F' \cdot F'_0}},$$

deve variare; ne segue che la funzione $F(\tau)$ dev'esser scelta in modo che per il cambiamento di τ in $e^{i\alpha} \cdot \tau$ l'espressione $F(\tau) \cdot F_0(\tau_0)$ rimanga immutata; e perciò $F(\tau)$ *dovrà avere la forma seguente:*

$$F(\tau) = G\tau^k,$$

essendo k *una costante reale e* G *una costante qualunque* (*).

(*) Cfr. Bianchi L., *Lezioni di geom. diff.*; pagg. 351, 352.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Se indichiamo con G_0 la quantità coniugata di G e poniamo $G\,G_0 = a^2$, sarà a una costante reale e l'equazione della curva meridiana di S_1 sarà:

$$z_1 = \frac{1}{2\,k}\left\{ a\,r_1^{1+k} + \frac{1}{a}\,r_1^{1-k} \right\},$$

essendo r_1 il raggio variabile del parallelo di S_1; e l'equazione della curva meridiana di S_2 sarà:

$$z_2 = \frac{1}{2\,k}\left\{ a\,(k\,r_2)^{1+k} - \frac{1}{a}\,(k\,r_2)^{1-k} \right\},$$

essendo r_2 il raggio variabile del parallelo di S_2.

Ponendo per k un numero razionale qualunque, le due curve risulteranno razionali; in particolare ponendo $k = 1$, avremo le due curve meridiane rappresentate dalle equazioni:

$$r_1^2 = \frac{2}{a}\left(z_1 - \frac{1}{2\,a}\right), \quad r_2^2 = \frac{2}{a}\left(z_2 + \frac{1}{2\,a}\right),$$

cioè S_1, S_2 saranno due paraboloidi uguali di rotazione, dei quali il primo avente come piano direttore il piano $x\,y$ ed il secondo avente il fuoco nell'origine O.

II.

Passiamo agli altri due problemi che ci siamo proposti e che considereremo contemporaneamente; indichiamo, cioè, con S_1, S_2 due superficie fra loro applicabili tali che sia costante la somma o la differenza delle distanze di due punti corrispondenti delle due superficie da un punto O fisso nello spazio.

Se indichiamo con $d\,s_1$, $d\,s_2$ respettivamente gli elementi lineari corrispondenti di S_1, S_2, scriveremo, come prima condizione alla quale soddisfano le superficie S_1, S_2, la seguente relazione:

$$d\,s_1^2 = d\,s_2^2. \tag{1}$$

Riferiamo i punti di S_1, S_2 ad un sistema di assi coordinati ortogonali (x, y, z) coll'origine nel punto fisso O e siano $M_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$, $M_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$ una coppia qualunque di punti corrispondenti su S_1, S_2; se poi indichiamo con ρ_1, ρ_2 i raggi vettori dei punti M_1, M_2 rispetto al punto O e consideriamo i punti $P_1 \equiv (X_1, Y_1, Z_1)$, $P_2 \equiv (X_2, Y_2, Z_2)$ in cui essi raggi re-

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

spettivamente incontrano la superficie sferica col centro in O e di raggio 1, otterremo delle due superficie S_1, S_2, respettivamente, delle immagini sferiche che indicheremo con Σ_1, Σ_2; ed avremo:

$$\left.\begin{array}{lll} x_1=\rho_1 X_1, & y_1=\rho_1 Y_1, & z_1=\rho_1 Z_1, \\ x_2=\rho_2 X_2, & y_2=\rho_2 Y_2, & z_2=\rho_2 Z_2; \end{array}\right\} \tag{2}$$

inoltre, se $d\sigma_1$ rappresenta l'elemento lineare della sfera Σ_1, corrispondente all'elemento $d s_1$ della superficie S_1, e se $d\sigma_2$ rappresenta l'elemento lineare della sfera Σ_2, corrispondente all'elemento $d s_2$ della superficie S_2, avremo:

$$d s_1^2 = d\rho_1^2 + \rho_1^2 d\sigma_1^2, \quad d s_2^2 = d\rho_2^2 + \rho_2^2 d\sigma_2^2, \tag{3}$$

per le quali formole la relazione (1) assumerà la forma:

$$d\rho_1^2 + \rho_1^2 d\sigma_1^2 = d\rho_2^2 + \rho_2^2 d\sigma_2^2; \tag{4}$$

inoltre, se è costante la somma o la differenza delle distanze dei punti M_1, M_2 dal punto O, dovrà essere corrispondentemente:

$$\rho_1 = \mp \rho_2 + c, \tag{5}$$

essendo c una quantità costante; ne segue che $d\rho_1^2 = d\rho_2^2$ e perciò la relazione (4) diviene:

$$\rho_1^2 d\sigma_1^2 = \rho_2^2 d\sigma_2^2; \tag{6}$$

cioè, la relazione di applicabilità fra le superficie S_1, S_2 stabilisce tra le due sfere Σ_1, Σ_2 una rappresentazione conforme.

Scegliamo ora su S_1 a linee coordinate u, v un sistema di linee a cui corrisponda sulla sfera Σ_1 un sistema isotermo qualunque, p. es., il sistema che si ottiene ponendo:

$$X_1 = \frac{\tau+\tau_0}{\tau\tau_0+1}, \quad Y_1 = \frac{1}{i}\,\frac{\tau-\tau_0}{\tau\tau_0+1}, \quad Z_1 = \frac{\tau\tau_0-1}{\tau\tau_0+1}, \tag{7}$$

ove $\tau = u + iv$, $\tau_0 = u - iv$; e scegliamo sulla superficie S_2 e sulla sfera Σ_2 a linee coordinate le linee corrispondenti; avremo allora:

$$d\sigma_1^2 = \frac{4}{(\tau\tau_0+1)^2}\, d\tau \cdot d\tau_0,$$

e dalla (6) ricaveremo:

$$d\sigma_2^2 = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2 \frac{4}{(\tau\tau_0+1)^2}\, d\tau \cdot d\tau_0,$$

vale a dire, le linee u, v formano anche sulla sfera Σ_2 un sistema isotermo;

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

quindi se indichiamo con $F(\tau)$ una funzione della variabile complessa τ e con $F_0(\tau_0)$ la funzione coniugata della variabile complessa coniugata τ_0, avremo:

$$\left.\begin{array}{l} X_2 = \dfrac{F + F_0}{F F_0 + 1}, \quad Y_2 = \dfrac{1}{i}\,\dfrac{F - F_0}{F F_0 + 1}, \quad Z_2 = \dfrac{F F_0 - 1}{F F_0 + 1} \\ \left(\dfrac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2 \dfrac{4}{(\tau\tau_0 + 1)^2} = \dfrac{4}{(F F_0 + 1)^2}\,\dfrac{d F}{d \tau}\cdot\dfrac{d F_0}{d \tau_0}. \end{array}\right\} \quad (8)$$

Da quest'ultima equazione ricaviamo:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\tau\tau_0 + 1}{F F_0 + 1}\cdot\sqrt{F'\cdot F'_0}, \quad (9)$$

ove F', F'_0 rappresentano le derivate di F, F_0 rispetto a τ, τ_0, e pel radicale $\sqrt{F'\cdot F'_0}$ possiamo limitarci a considerare una delle sue determinazioni.

L'equazione (9) combinata colla (5) ci dà:

$$\left.\begin{array}{l} \rho_1 = \dfrac{c(\tau\tau_0 + 1)\sqrt{F'\cdot F'_0}}{(\tau\tau_0 + 1)\sqrt{F'\cdot F'_0} \pm (F F_0 + 1)}, \\ \rho_2 = \dfrac{c(F F_0 + 1)}{(\tau\tau_0 + 1)\sqrt{F'\cdot F'_0} \pm (F F_0 + 1)}; \end{array}\right\} \quad (10)$$

ove il doppio segno che precede la quantità $(F F_0 + 1)$ si riferisce al doppio problema di cui ci occupiamo e precisamente il segno $+$ corrisponde al caso in cui sia costante la somma $\rho_1 + \rho_2$, il segno $-$ al caso in cui sia costante la differenza $\rho_1 - \rho_2$.

Infine dalle formole (2), (7), (8), (10) possiamo dedurre per le coordinate dei punti M_1, M_2 le espressioni seguenti:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{c\sqrt{F' F'_0}}{(\tau\tau_0 + 1)\sqrt{F'\cdot F'_0} \pm (F\cdot F_0 + 1)}\cdot(\tau + \tau_0), \\ y_1 = \dfrac{c\sqrt{F'\cdot F'_0}}{(\tau\tau_0 + 1)\sqrt{F'\cdot F'_0} \pm (F F_0 + 1)}\cdot\dfrac{\tau - \tau_0}{i}, \\ z_1 = \dfrac{c\sqrt{F' F'_0}}{(\tau\tau_0 + 1)\sqrt{F'\cdot F'_0} \pm (F F_0 + 1)}\cdot(\tau\tau_0 - 1), \end{array}\right\} \quad (11)$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \frac{c}{(\tau\tau_0+1)\sqrt{F'F'_0} \pm (FF_0+1)} \cdot (F+F_0), \\ y_2 &= \frac{c}{(\tau\tau_0+1)\sqrt{F'F'_0} \pm (FF_0+1)} \cdot \frac{F-F_0}{i}, \\ z_2 &= \frac{c}{(\tau\tau_0+1)\sqrt{F'F'_0} \pm (FF_0+1)} \cdot (FF_0-1). \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Abbiamo dunque il seguente resultato:

Se $F(\tau)$ indica una funzione arbitraria della variabile complessa $\tau = u + iv$ ed $F_0(\tau_0)$ è la sua coniugata funzione di $\tau = u - iv$, le formole (11), (12) *rappresentano le coordinate dei punti di due superficie S_1, S_2 applicabili l'una sull'altra e tali che è costante la somma o la differenza delle distanze di due punti corrispondenti dall'origine delle coordinate, secondochè davanti alla quantità (FF_0+1), nelle formole stesse, si prende il segno $+$ o il segno $-$.*

Alle due classi di superficie trovate e definite dalle formole (11), (12) appartengono infinite coppie di superficie algebriche, che si otterranno prendendo per $F(\tau)$ una funzione algebrica arbitraria.

Per ricercare ora se la funzione $F(\tau)$ può esser scelta in modo che le due superficie S_1, S_2 risultino ambedue di rotazione intorno ad un asse passante pel punto fisso O, supporremo, senza alterare la generalità, che S_1, S_2 abbiano per asse di rotazione comune l'asse z; ciò posto, una rotazione di S_1 intorno all'asse z equivale a cambiare τ in $e^{i\alpha}\cdot\tau$, essendo α l'ampiezza della rotazione; e per questo cambiamento z_1 e z_2 non dovranno variare; ciò porta che $F(\tau)\cdot F_0(\tau_0)$ deve pure rimanere immutato, quindi, come già abbiamo trovato nel § I,

$$F(\tau) = G\tau^k,$$

essendo k una costante reale e G una costante qualunque.

Ponendo per k un numero razionale qualunque, le due curve meridiane risulteranno razionali; in particolare ponendo $k = 1$, le due superficie S_1, S_2 risulteranno due elissoidi uguali di rotazione intorno all'asse focale e con un fuoco nel punto fisso, oppure due iperboloidi uguali di rotazione a due falde e con un fuoco nel punto fisso, secondochè nelle formole (11), (12) davanti alla quantità (FF_0+1) prendiamo il segno $+$ o il segno $-$.

Teramo, 22 Ottobre 1899.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Sulla superficie di minima resistenza.

(*Di* Egidio Armanini, *a Pavia.*)

Una rigorosa trattazione del problema di trovare la forma più adatta che deve avere la superficie di un solido per incontrare la minima resistenza nel muoversi in un mezzo omogeneo con determinata velocità e direzione, non è ancora stata fatta: peraltro Newton, sotto certe semplici supposizioni molto approssimate, ha data (*), senza dimostrazione, l'equazione differenziale della curva meridiana del solido. Dopo Newton altri si occuparono di tale problema, specialmente quando si conobbe il *Calcolo delle Variazioni;* ma molte sono le lacune e le imperfezioni di tale *Calcolo*, dimodochè le soluzioni date da esso non presentano quella generalità che le matematiche esigono.

Nel risolvere un problema col *Calcolo delle Variazioni*, bisogna supporre nelle funzioni incognite la loro continuità e quella delle loro derivate fino ad un certo ordine: ne viene che le soluzioni trovate restano limitate ad un certo campo, fuori del quale potranno esistere altre soluzioni del problema che sfuggono all'analisi, e queste vennero dette *soluzioni discontinue.* Così, nel problema più sopra enunciato, la soluzione è data da una superficie di rotazione la cui curva meridiana è a tangente continua, mentre si può dimostrare che certe curve a tangente discontinua (spezzate, curve a scala) dànno origine ad un solido cui corrisponde una resistenza che teoricamente si può ridurre piccola quanto si vuole.

Inoltre, da Newton in poi, tutti gli autori hanno sempre supposto che l'asse del solido coincida colla direzione del movimento, e che la resistenza incontrata nel mezzo sia proporzionale al quadrato della velocità: ora, praticamente ciò non avviene che in casi particolari; in generale l'asse è incli-

---

(*) Newton, *Principia math.*, 1686.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

nato alla trajettoria, e la resistenza, fra certi limiti, diventa proporzionale a potenze della velocità.

Ed in questo lavoro, dopo aver accennato a quanto fu scritto, a mia conoscenza, sull'argomento, ho cercato di colmare, per quanto mi fu possibile le lacune del problema relativamente alle soluzioni discontinue, ed ai suddetti casi più generali.

Riguardo alle soluzioni discontinue ho potuto eliminarle ammettendo alcune semplici ipotesi fisiche, e in quanto al caso in cui l'asse del solido non coincide colla direzione del movimento ho dimostrato come, fra certi limiti di spostamento, al solido Newtoniano corrisponda ancora la resistenza minima, tenendo conto però della sola forza direttamente opposta alla velocità.

1. Il problema come Newton l'ha enunciato è:

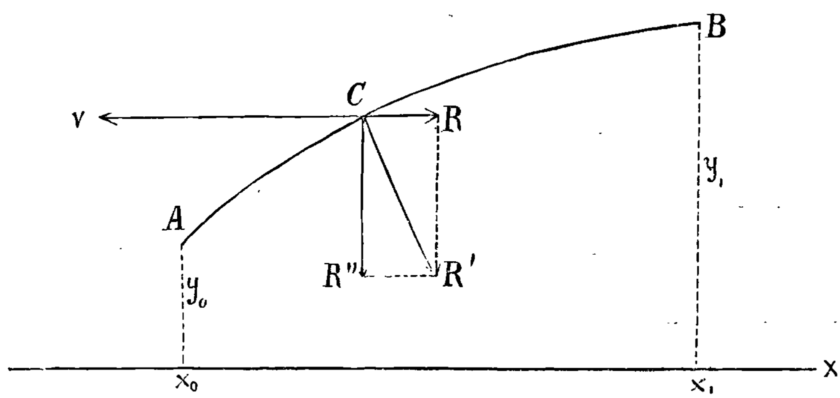


Fig. 1.

« Cercare la curva passante per due punti dati, e che rotando intorno ad un asse dato genera un solido tale che muovendosi in un mezzo omogeneo, secondo il suo asse, incontri una resistenza minima, supposto che detta resistenza sia proporzionale al quadrato della velocità del solido projettata sulla normale alla superficie di questo, e diretta secondo la normale stessa. »

Nel piano xy sia x l'asse del solido, $y=f(x)$ la curva meridiana (Figura 1): sia dR la resistenza incontrata dalla zona d'ampiezza ds; ν la velocità del solido, h un fattore di proporzionalità. Siccome il solido è disposto simmetricamente rispetto alla direzione della velocità, la componente della resistenza secondo l'asse della y sarà nulla, quindi terremo conto solo della componente secondo l'asse delle x, che rappresenterà effettivamente la resistenza R.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Per l'ipotesi del problema avremo quindi:

$$d\,R = 2\,\pi\,h\,\nu^2\,y\left(\frac{d\,y}{d\,s}\right)^3 d\,s = 2\,\pi\,h\,\nu^2\,\frac{y\,y'^3}{1+y'^2}\,d\,x.$$

Se $(x_0,\ y_0)$, $(x_1,\ y_1)$ sono i punti dati, e osserviamo che la velocità ν, nel medesimo istante, è costante per tutti i punti, perchè il solido si suppone inestensibile, sarà:

$$R = 2\,\pi\,h\,\nu^2 \int_{x_0}^{x_1} \frac{y\,y'^3}{1+y'^2}\,d\,x. \tag{1}$$

Per risolvere il problema bisognerà render minima la R, ossia l'integrale del 2.° membro della (1).

Indicando con F la funzione sotto il segno d'integrale, per aversi massimo o minimo dovrà essere:

$$F - y'\,\frac{\partial F}{\partial y'} = \text{cost.},$$

per cui, indicando con a una costante,

$$y = a\,\frac{(1+y'^2)^2}{y'^3}. \tag{2}$$

Questa è l'equazione differenziale della curva meridiana, data anche da Newton. Si ricava facilmente:

$$x = a\left(\frac{3}{4\,y'^4} + \frac{1}{y'^2} + \log y'\right) + b. \tag{3}$$

Così restano espresse le coordinate della curva in funzione del parametro y'. Questa curva ha una cuspide nel punto:

$$y' = \sqrt{3}.$$

Calcolando la $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ si vede che è positiva per $y' < \sqrt{3}$ e negativa per $y' > \sqrt{3}$: ciò significa che a partire dalla cuspide uno dei rami corrisponde ad un minimo, l'altro ad un massimo per la resistenza.

Legendre ha dato l'equazioni di due curve assintotiche ai due rami della curva newtoniana (*) e sono pel ramo di minimo la parabola:

$$y^4 = \frac{64}{27}\,a\,x^3,$$

(*) Cfr. *Memoires de l'Ac. Roy. de Paris*, 1786, § VI.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

e pel ramo di massimo la logaritmica:

$$x - b = a \log \frac{y}{a}.$$

Nella Fig. 2 è rappresentata la curva di NEWTON colle due curve assintotiche.

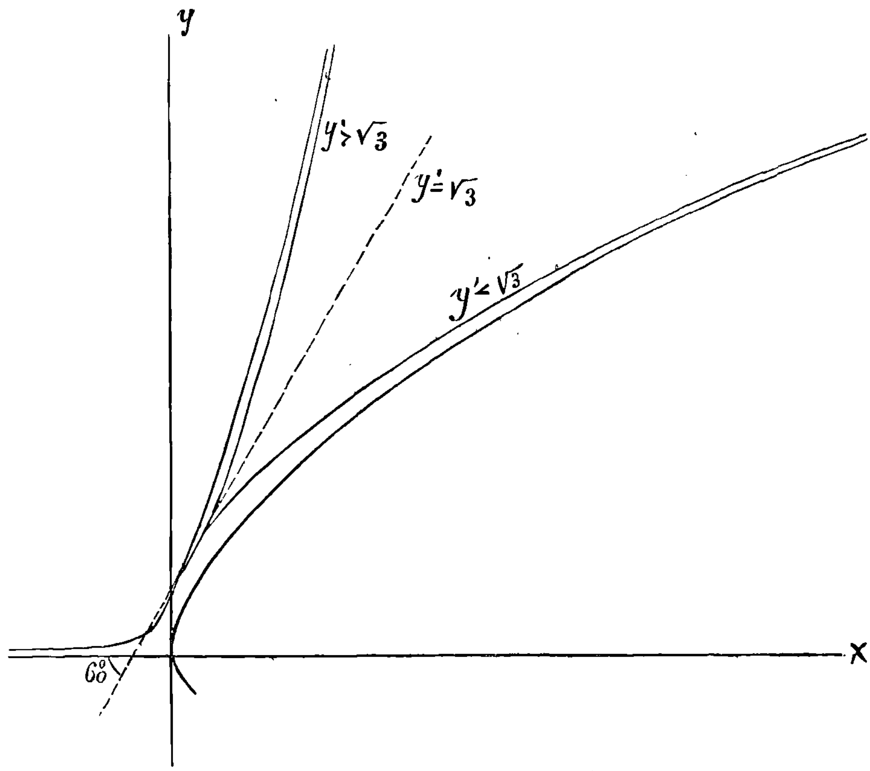


Fig. 2.

2. Nel precedente paragrafo non s'è tenuto conto della superficie frontale del solido: così chiamasi la superficie piana che il solido presenta nella direzione della velocità. È evidente che la base (superficie posteriore) non incontra nessuna resistenza perchè del tutto coperta dalle superficie laterale e frontale. Supponiamo ora che sia incognito il raggio della superficie frontale, ossia l'ordinata y_0; il problema potrebbe enunciarsi in questo modo: « ammesse le ipotesi del problema di NEWTON, trovare il solido cui corri-

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

sponde resistenza minima, di data lunghezza $(x_1 - x_0)$ e di data base y_1. »
(Fig. 3.)

Come si è visto, la resistenza incontrata dalla superficie laterale è:

$$2\pi h \nu^2 \int_{x_0}^{x_1} \frac{y y'^3}{1 + y'^2} d x,$$

e per la superficie frontale, essendo $y' = \infty$, la resistenza sarà:

$$2\pi h \nu^2 \int_0^{y_0} y\, d y = \pi h \nu^2 \left(y_1^2 - \int_{x_0}^{x_1} y\, y'\, d x\right).$$

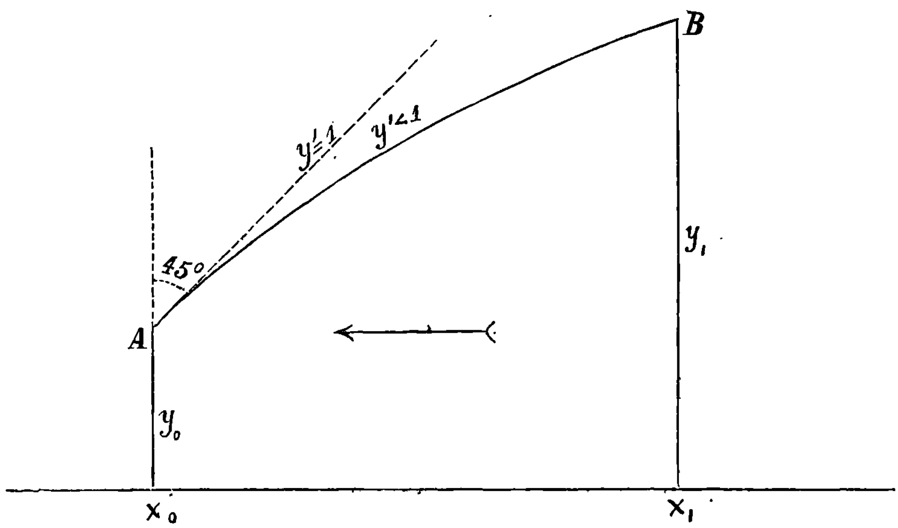


Fig. 3.

La resistenza totale R incontrata dal solido sarà quindi la somma di queste due, cioè:

$$R = \pi h \nu^2 \left\{ y_1^2 - 2\int_{x_0}^{x_1} \frac{y y'}{1 + y'^2} d x \right\}.$$

Essendo y_1 dato, per rendere minima la R basterà rendere massimo l'integrale: coi noti principi del *Calcolo di variazioni* si ritrova la curva di Newton.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Inoltre, la seconda variazione dell'integrale è data da:

$$\frac{2\,y\,y'\,(y'^2 - 3)}{(1 + y'^2)^3},$$

la quale espressione è negativa per $y' < \sqrt{3}$, cioè pel ramo di curva corrispondente ad $y' < \sqrt{3}$ l'integrale considerato è massimo, e quindi la R minima.

Ma la y_0 è indeterminata, quindi perchè si annulli la variazione 1.ª dell'integrale, dovrà essere soddisfatta la condizione ai limiti che nel punto $(x_0\, y_0)$:

$$\left| \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{y\,y'}{1 + y'^2} \right) \right|_0 = 0.$$

Indicando con y'_0 il valore della y' in tal punto, avremo:

$$\frac{y'_0\,(1 - y'^2_0)}{1 + y'^2_0} = 0,$$

equazione soddisfatta da $y'_0 = 1$, sola radice da accettarsi nel nostro caso. Quindi la curva meridiana taglia la superficie frontale con un angolo di 45.°

Nell'equazione (1) del precedente paragrafo ponendo $y' = 1$ si ricaverà il raggio della superficie frontale:

$$y_0 = 4\,a.$$

Di qui si vede che non potendo essere nullo a per l'esistenza della curva, la superficie frontale non sarà mai nulla, e quindi *il solido di minima resistenza non può avere punta acuta.*

A tutta prima ciò sembra un paradosso, perchè si può diminuire la resistenza ponendo sulla superficie frontale un cono: certo la resistenza diminuisce, ma si allunga il solido, e se si ammette questa maggior lunghezza, allora la forma scelta non presenta la minima resistenza, perchè la curva meridiana di minimo dev'essere costruita come si è dimostrato precedentemente.

Da questo risulta che di due solidi newtoniani aventi egual superficie posteriore, quello di minor resistenza è il più lungo; ma aumentando la lunghezza aumenta pure la massa, e quindi si presenta il problema di calcolare la lunghezza più conveniente da darsi al solido perchè con data forza iniziale acquisti la massima velocità. La risoluzione dipenderà dalla densità del corpo e del mezzo.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Devo far notare un'inesattezza in cui incorse il signor AUGUST nel suo lavoro (*): *Ueber die Rotations-fläche kleinsten Widerstandes, und über die günstigste Form der Geschoss-spitzen nach der Newton-schen Theorie:* egli suppone che del solido sia data la lunghezza $(x_1 - x_0)$ ed il calibro $2y_1$, mentre sia indeterminato il raggio y_0 della superficie frontale, e trova che $y'_0 = \sqrt{3}$, cioè la curva meridiana deve tagliare la superficie frontale a 30.° Ma ciò è erroneo, perchè si è dimostrato che in tal caso la curva incontra la superficie frontale a 45.°, cioè $y'_0 = 1$.

E questo fatto è importante, perchè in tal caso, come vedremo, possiamo ritener eliminate le soluzioni discontinue, ciò che non avviene nel solido considerato dall'AUGUST.

3. La risoluzione del problema di NEWTON si è ottenuta applicando i metodi del *Calcolo delle Variazioni*, e per questo va soggetta ad alcuni appunti.

L'equazione differenziale da integrarsi è del 2.° ordine, dunque bisogna ammettere la continuità della $y' = \frac{dy}{dx}$.

In tal modo noi veniamo implicitamente ad escludere dalle soluzioni tutte quelle che corrispondono a curve a *tangente discontinua* (spezzate, ecc.) e che perciò si chiamano *soluzioni discontinue.* È questo uno dei principali appunti che la critica fa al *Calcolo delle Variazioni*, ma finora gli studi e le ricerche in proposito hanno fatto pochi passi (**). Già fin dal 1871 l'*Università di Cambridge* decretava un premio a chi risolvesse la questione, ed il TODHUNTER presentava il libro (***): *Researches in the calculus of variations principally on the theory discontinuos solutions*, senza però venire a nessuna conclusione soddisfacente.

LEGENDRE (****) pel primo ha studiata la questione delle soluzioni discontinue del problema di NEWTON, e fece vedere come si potessero eliminare ammettendo che fosse data la lunghezza dell'arco di curva meridiana. Trova un'altra forma di curva, ma si tratta allora di *minimo relativo* e non più di *minimo assoluto.*

La resistenza incontrata dalla superficie generata dalla rotazione dell'arco di curva $y = f(x)$ compreso fra i punti $(x_0\, y_0)$, $(x_1\, y_1)$ intorno all'asse

(*) CRELLE (*Journal für die Reine und Andg. Math.*), 1888, Vol. 103.

(**) Cfr. PASCAL, *Calc. Variaz.*, pag. 15.

(***) Londra, Ottobre, 1871.

(****) *Mem. de l'Ac. Roy. de Paris*, 1786, § VI.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

delle x è, come si è visto:

$$R = 2\,\pi\,h\,\nu^2 \int_{x_0}^{x_1} \frac{y\,y'^3}{1+y'^2}\,d\,x,$$

e indicando con ω l'angolo che la tangente fa coll'asse:

$$R = 2\,\pi\,h\,\nu^2 \int_{y_0}^{y_1} y \operatorname{sen}^2 \omega\,d\,y. \tag{1}$$

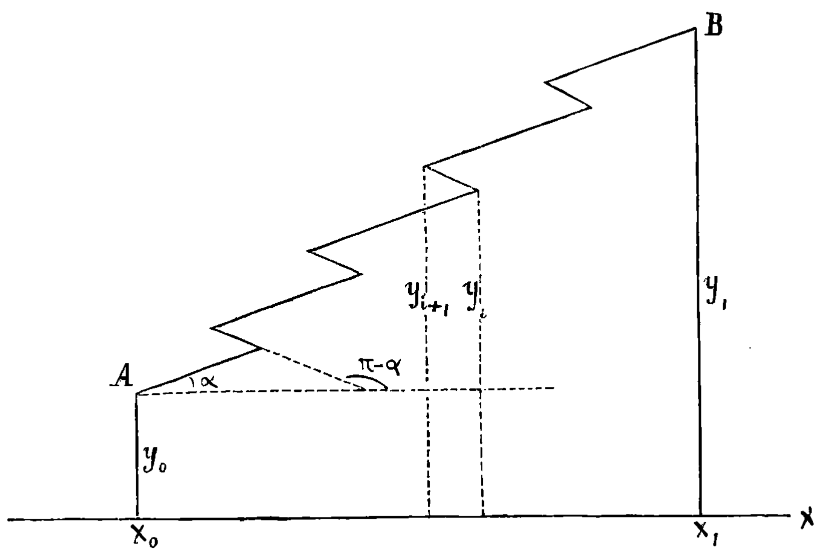


Fig. 4.

Se la curva meridiana è un segmento di retta, l'angolo ω sarà costante per tutti i punti di essa, quindi:

$$R = \pi\,h\,\nu^2 \operatorname{sen}^2 \omega\,(y_1^2 - y_0^2). \tag{2}$$

Se per i punti $(x_0\,y_0)$, $(x_1\,y_1)$ conduciamo una spezzata a zig-zag (Fig. 4) tale che i suoi rami abbiano alternativamente l'inclinazione α e $(\pi - \alpha)$ coll'asse, la resistenza r per la formola (2) sarà:

$$\nu = \pi\,h\,\nu^2 \operatorname{sen}^2 \alpha\,\Sigma\,(y_{i+1}^2 - y_i^2) = \pi\,h\,\nu^2 \operatorname{sen}^2 \alpha\,(y_1^2 - y_0^2),$$

cioè dipende dall'inclinazione dei rami e dalle solo ordinate estreme. Essendo in nostro arbitrio di prendere l'angolo α piccolo a piacere, così potremo far

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

diventare la resistenza piccola quanto si vuole, perchè:

$$\lim_{\alpha=0} r = 0.$$

Perciò la soluzione di NEWTON non corrisponderebbe ad un minimo assoluto. Come vedremo, questo ragionamento è una pura finzione matematica, perchè sperimentalmente si deve tener conto d'altre circostanze che permettono in alcuni casi d'eliminare le soluzioni discontinue.

Consideriamo che il solido generato dalla rotazione di una spezzata i cui rami formano alternativamente angoli maggiori e minori di un retto coll'asse, presenterà delle incavature anulari chiuse posteriormente: esse saranno piene della materia di cui è costituito il mezzo resistente in cui il solido si muove, e questa materia non trovando nessuna via nè posteriore, nè laterale d'uscita, sarà compressa contro le pareti di tali incavature, e spinta dal solido come se facesse parte di esso. Ne viene che la resistenza incontrata da questo sarà considerevolmente aumentata, sia per la reazione elastica della materia compressa in tali incavature, sia per la resistenza opposta dalla materia libera del mezzo al movimento di detta materia compressa spinta dal solido. Senza inoltrarci in tale studio che porterebbe in complicate quistioni idrodinamiche, possiamo a priori escludere dalle soluzioni tale specie di spezzate, e considerare solo quelle i cui rami formano angoli non maggiori di un retto coll'asse.

Abbiasi una di tali spezzate (Fig. 5) .... $A\,C\,B$ .... in cui i rami $A\,C$, $B\,C$ sieno inclinati sull'asse rispettivamente di angoli:

$$\alpha < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

In tali due rami prendiamo ad arbitrio i punti $M(x_m\, y_m)$ ed $N(x_n\, y_n)$, e costruiamo il parallelogrammo $M\,P\,N\,C$: per la formola (2) sarà:

$$\text{resist.}^{\text{a}}\ M\,C\,N = \pi\, h\, \nu^2 \left[(y_c^2 - y_m^2) \operatorname{sen}^2 \alpha + (y_n^2 - y_c^2) \operatorname{sen}^2 \beta\right]$$

$$\text{resist.}^{\text{a}}\ M\,P\,N = \pi\, h\, \nu^2 \left[(y_p^2 - y_m^2) \operatorname{sen}^2 \beta + (y_n^2 - y_p^2) \operatorname{sen}^2 \alpha\right].$$

Facendo la differenza, ed osservando che:

$$y_p - y_m = y_n - y_c,$$

avremo:

$$\text{res. } M\,C\,N - \text{res. } M\,P\,N =$$
$$= \pi\, h\, \nu^2 (y_n - y_c) (\operatorname{sen}^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \alpha) \left[y_n + y_c - y_p - y_m\right].$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Per le condizioni ammesse tale espressione è positiva, perciò:

$$\text{res. } M P N < \text{res. } M C N,$$

e quindi:

$$\text{res. } A M P N B < \text{res. } A C B.$$

Ma:

$$A M + M P + P N + N B = A C + C B,$$

quindi: di due spezzate aventi gli stessi estremi, la stessa lunghezza e la stessa inclinazione dei rami, a quella avente un numero maggiore di rami

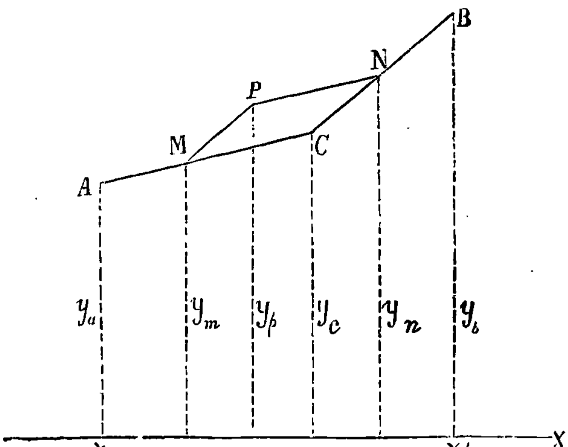


Fig. 5.

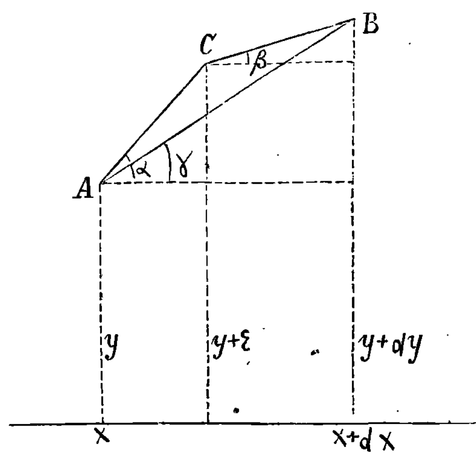


Fig. 6.

corrisponde una resistenza minore. Nasce quindi l'idea di considerare le spezzate aventi un numero infinito di rami o tratti infinitesimi, che si dicono *curve a scala* (dal tedesco *treppen-curven*) ed alle quali necessariamente corrisponderà una resistenza minore che non alle spezzate a tratti finiti.

Sieno $A C$, $C B$ (Fig. 6) due rami infinitesimi appartenenti ad una curva a scala, inclinati sull'asse rispettivamente dell'angolo α e dell'angolo β: sia $A B = d s$ l'elemento d'arco d'una curva continua, e γ la sua inclinazione sull'asse, dimodochè:

$$\beta < \gamma < \alpha \leq 90.^\circ$$

Sia y l'ordinata di A, $y + \varepsilon$ quella di C, $y + d y$ quella di B: la resistenza corrispondente alla spezzata $A C B$ sarà:

$$\pi h \nu^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \left[(y + \varepsilon)^2 - y^2\right] + \pi h \nu^2 \operatorname{sen}^2 \beta \left[(y + d y)^2 - (y + \varepsilon)^2\right],$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

e trascurando gli infinitesimi d'ordine superiore al 1.°:

$$= 2\pi h v^2 y\,[\varepsilon \operatorname{sen}^2 \alpha + (d\,y - \varepsilon) \operatorname{sen}^2 \beta].$$

Si trova facilmente:

$$\varepsilon = \frac{\operatorname{sen} \alpha\,(d\,y \cos \beta - d\,x \operatorname{sen} \beta)}{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)},$$

ed essendo:

$$d\,x = d\,s \cos \gamma, \quad d\,y = d\,s \operatorname{sen} \gamma,$$

avremo infine che la resistenza corrispondente alla spezzata è:

$$2\pi h v^2 y\,d\,s\,\frac{\operatorname{sen}^3 \alpha \operatorname{sen}(\gamma - \beta) - \operatorname{sen}^3 \beta \operatorname{sen}(\alpha - \gamma)}{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}.$$

Quella corrispondente all'arco $d\,s$ è:

$$2\pi h v^2 y\,d\,s \operatorname{sen}^3 y.$$

Detta D la differenza fra quella e questa, con successive trasformazioni goniometriche avremo:

$$D = 2\pi h v^2 y\,d\,s \cdot \operatorname{sen}(\alpha - \gamma) \operatorname{sen}(\gamma - \beta) \operatorname{sen}(\alpha + \beta + \gamma).$$

Dovendo essere:

$$\beta < \gamma < \alpha \leqq \frac{\pi}{2},$$

si vede subito che D sarà positivo o negativo a seconda che $(\alpha + \beta + \gamma)$ è minore o maggiore di π: consideriamo due casi:

1.° $\gamma \leqq \frac{\pi}{4}$. Allora dovendo essere $\beta < \frac{\pi}{4}$, $\alpha \leqq \frac{\pi}{2}$ sarà sempre $(\alpha + \beta + \gamma) < \pi$ e quindi D è positivo sempre.

2.° $\gamma > \frac{\pi}{4}$. In questo caso possiamo porre $\beta = \frac{\pi}{4}$ ed $\alpha = \frac{\pi}{2}$, ed allora $(\alpha + \beta + \gamma) > \pi$: quindi D può diventar negativo.

Concludendo: *quando γ non è maggiore di 45.° esiste sempre una curva continua cui corrisponde una resistenza inferiore a quella di una qualunque curva a scala soddisfacente alle nostre ipotesi: quando γ è maggiore di 45.° invece esiste una certa curva a scala cui corrisponde una resistenza inferiore a quella di una qualunque curva continua.* Ora γ è l'angolo della tangente alla curva coll'asse, cioè $\operatorname{tg} \gamma = y'$; quindi potremo ritenere eliminate le soluzioni discontinue per il tratto di curva newtoniana corrispondente ad:

$$y' < 1.$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Dunque il solido trovato al § 2 corrisponde effettivamente ad un minimo assoluto per la resistenza.

§ 4. Veniamo ora al caso d'un solido di rotazione animato da un moto obbliquo alla direzione del suo asse.

Riferiamo il solido (Fig. 7) a tre assi ortogonali di cui l'asse delle x coincida coll'asse di rotazione, e il piano della velocità v col piano $x\,y$. Sia $d\,\sigma$

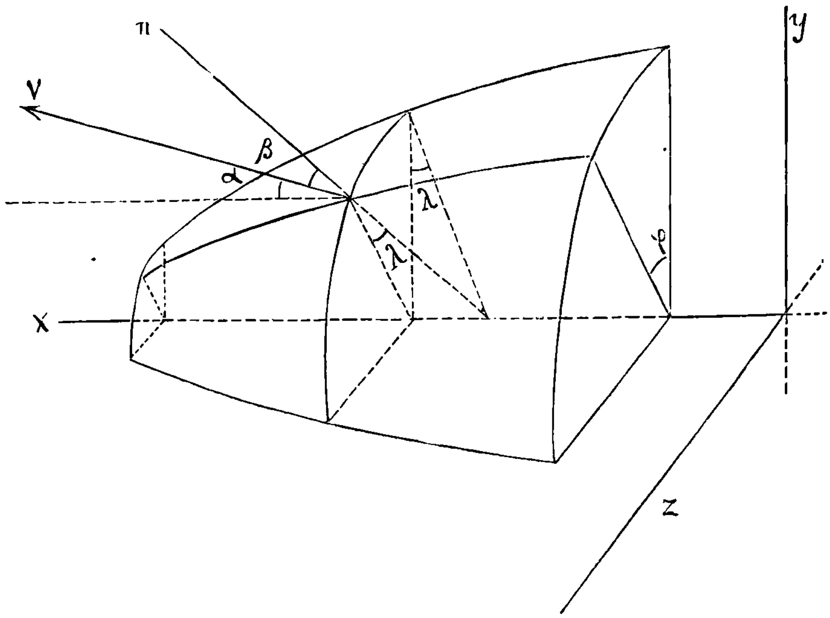


Fig. 7.

l'elemento superficiale del solido riferito ai paralleli ed ai meridiani: $d\,s$ l'arco di curva meridiana, φ l'angolo del piano meridiano col piano $x\,y$: avremo:

$$d\,\sigma = \sqrt{y^2 + z^2}\,d\,\varphi\,d\,s.$$

Sia λ l'angolo che la normale all'elemento $d\,\sigma$ fa col piano $z\,y$: tale angolo è costante lungo uno stesso parallelo. Indicando con α e β gli angoli che la direzione della velocità forma rispettivamente coll'asse delle x e colla normale a $d\,\sigma$, avremo:

$$\cos\beta = \operatorname{sen}\lambda\cos\alpha + \cos\lambda\operatorname{sen}\alpha\cos\varphi. \tag{1}$$

Ammettendo sempre l'ipotesi di Newton, che la resistenza sia proporzionale al quadrato della velocità projettata sulla normale all'elemento, e di

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

retta secondo questa normale, la spinta risentita dall'elemento $d\sigma$ sarà proporzionale a:

$$(\nu \cos\beta)^2 d\sigma = \nu^2 \cos^2\beta \sqrt{y^2 + z^2}\, d\varphi\, ds.$$

Indicando con h un fattore di proporzionalità, e con $d^2 R_x$, $d^2 R_y$, $d^2 R_z$ le componenti secondo i tre assi della spinta agente su dx, avremo:

$$d^2 R_x = h\nu^2 \cos^2\beta \sqrt{y^2 + z^2} \operatorname{sen}\lambda\, d\varphi\, ds,$$

$$d^2 R_y = h\nu^2 \cos^2\beta \sqrt{y^2 + z^2} \cos\lambda \cos\varphi\, d\varphi\, ds,$$

$$d^2 R_z = h\nu^2 \cos^2\beta \sqrt{y^2 + z^2} \cos\lambda \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\, ds.$$

Se dR_x, dR_y, dR_z sono le componenti secondo gli assi della resistenza corrispondente alla zona generata dalla rotazione dell'arco ds di curva meridiana, integrando le formole precedenti fra i limiti 0 e 2π di φ otterremo:

$$dR_x = h\nu^2 \sqrt{y^2 + z^2} \operatorname{sen}\lambda\, ds \int_0^{2\pi} \cos^2\beta\, d\varphi,$$

$$dR_y = h\nu^2 \sqrt{y^2 + z^2} \cos\lambda\, ds \int_0^{2\pi} \cos^2\beta \cos\varphi\, d\varphi,$$

$$dR_z = h\nu^2 \sqrt{y^2 + z^2} \cos\lambda\, ds \int_0^{2\pi} \cos^2\beta \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi.$$

Sostituendo a $\cos\beta$ il suo valore dato dalla (1), ed osservando che α e λ sono indipendenti da φ, sarà:

$$dR_x = 2\pi h\nu^2 \sqrt{y^2 + z^2} \operatorname{sen}\lambda \left(\operatorname{sen}^2\lambda \cos^2\alpha + \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2\alpha \cos^2\lambda\right) ds,$$

$$dR_y = 2\pi h\nu^2 \sqrt{y^2 + z^2} \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \operatorname{sen}\lambda \cos^2\lambda\, ds,$$

$$dR_z = 0.$$

Dunque la resistenza si trova nel piano xy, cioè nel piano della velocità e dell'asse: riferendo a questo piano la curva meridiana, sarà:

$$z = 0, \quad \operatorname{sen}\lambda = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\lambda = \frac{dx}{ds}, \quad \operatorname{tg}\lambda = y' = \frac{dy}{dx},$$

e indicando con R_x, R_y le componenti della resistenza secondo gli assi coor-

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

dinati, avremo:

$$\left.\begin{aligned} R_x &= \pi h v^2 \int_{x_0}^{x_1} \frac{y y'}{1+y'^2} (2 y'^2 \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha)\, d x \\ R_y &= 2 \pi h v^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \int_{x_0}^{x_1} \frac{y y'}{1+y'^2}\, d x. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Perchè sia valido questo calcolo (*) bisogna che:

$$\cos \beta > 0,$$

cioè che tutta la considerata superficie sia esposta alla resistenza del mezzo.

Resta ancora a considerarsi la superficie frontale: ammettiamo che il suo raggio y_0 sia indeterminato, e si conosca solo il raggio y_1 della superficie posteriore nonchè la lunghezza $(x_1 - x_0)$ del solido.

La resistenza della superficie frontale si otterrà dalle (2) facendo tendere y' all'infinito: quindi, indicando le sue componenti con r_x, r_y:

$$r_x = 2 \pi h v^2 \cos^2 \alpha \int_0^{y_0} y\, d y = 2 \pi h v^2 \cos^2 \alpha \left\{ \frac{1}{2} y_1^2 - \int_{x_0}^{x_1} y\, y'\, d x \right\}$$

$$r_y = 0.$$

Allora le componenti della resistenza incontrata da tutta la superficie del solido saranno:

$$\left.\begin{aligned} R'_x &= R_x + r_x = \pi h v^2 y_1^2 \cos^2 \alpha - \pi h v^2 (2 \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) \int_{x_0}^{x_1} \frac{y y'}{1+y'^2}\, d x \\ R'_y &= R_y + r_y = 2 \pi h v^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \int_{x_0}^{x_1} \frac{y y'}{1+y'^2}\, d x. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Come si è visto la resistenza R' giace nel piano meridiano del solido parallelo alla direzione della velocità (che perciò si dice *piano di resistenza*); ma il suo punto d'applicazione C (v. fig. 8) detto *centro di resistenza* non coincide col centro di gravità (**).

Applicando al centro di gravità G due forze contrarie, eguali e parallele alla R', la coppia $(R'_1 - R')$ detta *coppia perturbatrice* tenderà a far

(*) Cfr. Mathieu, *Dinamica*.

(**) Cfr. Siacci, *Balistica*, Cap. XI.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

rotare il solido intorno ad un asse normale al piano di resistenza, e la rimanente forza R' modificherà il moto progressivo di quello. La direzione di questa non coincide in generale colla direzione del moto; decomponiamola in due: una R direttamente opposta alla velocità, l'altra D ad essa perpendicolare. La prima si dice *ritardatrice* perchè ritarda il moto, la seconda *deviatrice* perchè ne cambia la direzione. Ora a noi importa di rendere minima la forza ritardatrice: si ha evidentemente:

$$R = R'_x \cos\alpha + R'_y \operatorname{sen}\alpha,$$

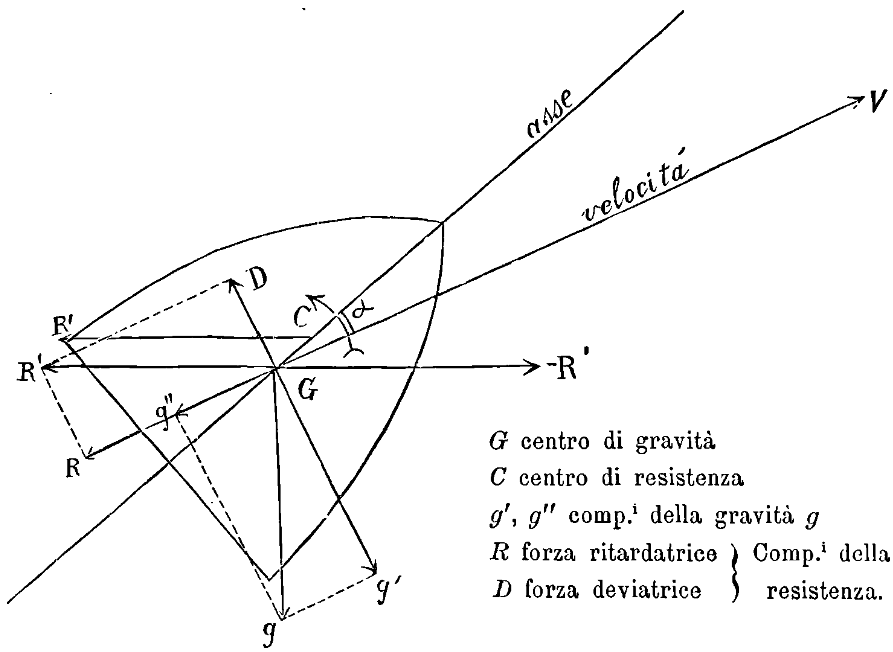


Fig. 8.

per cui mediante le (3) avremo:

$$R = \pi h v^2 \cos\alpha \left\{ y_1^2 \cos^2\alpha - (1 - 4 \operatorname{sen}^2\alpha) \int_{x_0}^{x_1} \frac{y y'}{1 + y'^2} d x \right\} \tag{4}$$

Supponiamo che l'angolo α della velocità coll'asse non superi mai in valore assoluto i 30.° Allora:

$$1 - 4 \operatorname{sen}^2\alpha > 0,$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

e la forza ritardatrice R sarà minima quando sarà massimo:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{y\,y'}{1+y'^2}\,d\,x\,;$$

ora si è visto al § 2 che tale integrale è massimo pel ramo di curva Newtoniana corrispondente ad:

$$y' < \sqrt{3},$$

e l'equazione ai limiti dà:

$$y'_0 = 1.$$

Dunque:

Il solido di rotazione cui corrisponde la minima forza ritardatrice nel muoversi in direzione inclinata al suo asse, quando tale inclinazione non superi i 30.° e lasci esposta tutta la superficie laterale di quello, è il solido che ha per curva meridiana la curva di Newton:

$$y = a\,\frac{(1+y'^2)^2}{y'^3},$$

e questa incontra a 45.° la superficie frontale.

5. Finora si è ammesso che la resistenza fosse proporzionale al quadrato della velocità projettata sulla normale alla superficie del mobile: ciò non è vero che fra limiti ristretti. Col crescere della velocità la resistenza diventa proporzionale al cubo ed anche alla quarta potenza di quella: ammesso in generale che tale potenza sia la n^{ma} cerchiamo il solido di minima resistenza in questo caso, ammettendo, per non complicare inutilmente i calcoli, che la direzione della velocità coincida coll'asse del solido.

Come si è detto nel § 1, essendo il solido simmetrico rispetto alla direzione della velocità, basterà tener conto solo della componente della resistenza secondo tale direzione che assumiamo come asse delle x, e quella sarà rappresentata da:

$$R_1 = 2\pi h v^n \int_{x_0}^{x_1} y\,\frac{y'^{n+1}}{(1+y'^2)^{\frac{n}{2}}}\,d\,x.$$

La resistenza della superficie frontale sarà quindi:

$$R_2 = 2\pi h v^n \int_0^{y_0} y\,d\,y = \pi h v^n \left[y_1^2 - 2\int_{x_0}^{x_1} y\,y'\,d\,x\right],$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

e indicando con R la resistenza totale del solido:

$$R = \pi h \nu^n \left[y_1^2 - \int_{x_0}^{x_1} \frac{y y' \left((1+y'^2)^{\frac{n}{2}} - y'^n \right)}{(1+y'^2)^{\frac{n}{2}}} dx \right]. \tag{1}$$

Perche la R sia minima dovrà essere massimo l'integrale del 2.° membro: annullandone la variazione prima si ottiene:

$$y = a \frac{(1+y'^2)^{\frac{n+2}{2}}}{y'^{(n+1)}}, \tag{2}$$

e questa è l'equazione differenziale della curva meridiana. Si ha dalla (2):

$$\frac{dy}{dy'} = a \frac{(1+y'^2)^{\frac{n}{2}}}{y'^{n+2}} (y'^2 - n - 1),$$

la quale espressione si annulla per:

$$y' = \pm \sqrt{n+1},$$

e quindi in tal punto la curva ha una cuspide.

Calcolando la seconda variazione del predetto integrale si trova che è data da:

$$n \nu^n \frac{y y'^{n-1}}{(1+y'^2)^{\frac{n+4}{2}}} (y'^2 - n - 1),$$

la quale espressione è positiva per $y' > \sqrt{n+1}$ e negativa per $y' < \sqrt{n+1}$. Dunque al ramo di curva per cui $y' < \sqrt{n+1}$ corrisponde un minimo per la resistenza; all'altro un massimo.

L'equazione ai limiti cui deve soddisfare la y'_0 diventa in tal caso:

$$y'^n_0 (1 + y'^2_0) + n y'^n_0 - (1 + y'^2_0)^{\frac{n+2}{2}} = 0.$$

Detto α l'angolo che la tangente alla curva in y_0 fa coll'asse, ossia posto $y' = \operatorname{tg} \alpha$ avremo:

$$n \operatorname{sen}^{(n+2)} \alpha - (n+1) \operatorname{sen}^n \alpha + 1 = 0.$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Eliminando la radice sen $\alpha = 1$ che non soddisfa alle condizioni del problema, resta:

$$n \operatorname{sen}^{(n+1)} \alpha + n \operatorname{sen}^{n} \alpha - \operatorname{sen}^{n-1} \alpha - \operatorname{sen}^{n-2} \alpha - \cdots - \operatorname{sen} \alpha - 1 = 0.$$

di cui la radice che per noi interessa ha per limiti:

$$90^\circ > \alpha > 45^\circ.$$

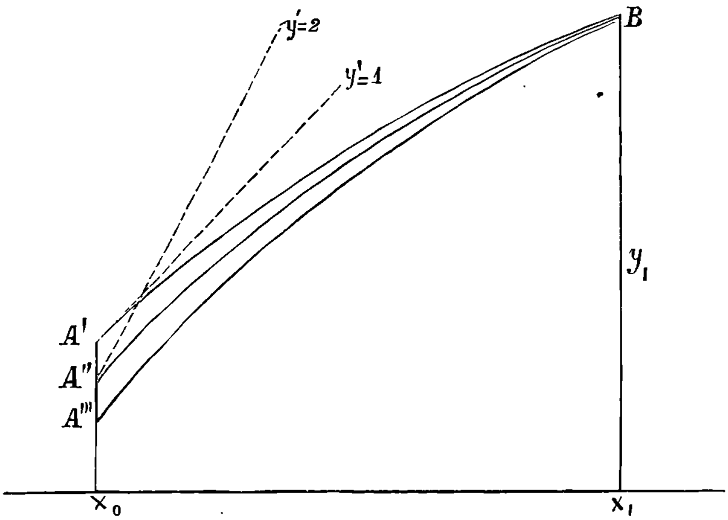


Fig. 9.

Riesce quindi evidente che al crescere della potenza n della velocità, cui è proporzionale la resistenza, cresce l'angolo α e quindi diminuisce il raggio della superficie frontale. Nella fig. 9 è rappresentata la deformazione che subisce la curva meridiana al crescere di n. Si noti come la superficie frontale esista sempre e quindi *il solido non ha mai punta acuta.*

Pavia, Gennaio 1900.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

BIBLIOGRAFIA.

NEWTON, *Principia Math.* (1686).

DE L'HÔPITAL, *Acta Erudita* (Agosto 1699).

JOH. BERNOUILLI, *Acta Erudita* (Novembre 1699).

BOUGUER, *Memoires de l'Ac. Roy.*, ecc. Paris (1733).

L. EULERO, *Methodus inveniendi* (1744).

LEGENDRE, *Mem. de l'Ac. Roy.*, ecc. Paris (1786).

TODHUNTER, *Researches in the calculus of variations*, ecc. London (1871).

STARKOFF, *Bull. Société Mathém. de France* (1884-85).

AUGUST, *Ueber Rotations-fläche kleinsten Widerstandes*, ecc. CRELLE (*Journal für die reine und andgew. mathem.*) (1888).

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

EUGENIO BELTRAMI.

È col più sentito dolore che io annunzio ai lettori di questi *Annali* la morte immatura di **Eugenio Beltrami** avvenuta il 18 corrente in Roma, dove nel giorno 20 successivo gli furono rese solenni onoranze.

Era nato in Cremona nel 16 Novembre 1835; e sebbene colpito da qualche tempo da una grave malattia di stomaco, tutto negli ultimi giorni della sua vita ne faceva sperare che sarebbe stato ancora per lunghi anni conservato all'affetto della consorte e della madre che idolatrava, e dei tanti che lo amavano; e alla Scienza alla quale aveva dedicato quasi 40 anni della sua vita operosa. Invece non fu così, ed *Egli* ora non è più!

Lo conobbi a Pisa nel 1866 quando, successo al Mossotti sulla fine del 1863, insegnava Geodesia in quella Università; e già allora *Egli* era venuto in gran fama, specialmente pei suoi lavori di Geometria differenziale, per la chiarezza ed eleganza che portava nelle sue lezioni, per l'amore che nei giovani sapeva ispirare per la Scienza. Fino d'allora io presi ad apprezzarlo ed amarlo. Dopo quel tempo la sua attività scientifica si svolse con lavori meravigliosi su pressochè tutti i rami più alti della matematica; e per essi la sua fama si accrebbe ogni giorno più, tantochè ben presto tutte le principali Accademie e Istituti scientifici d'Italia e di fuori lo vollero nel loro seno; e alla morte del Brioschi, fu chiamato con unanimità di suffragio a succedergli nella Presidenza dell'Accademia dei Lincei.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Amato da tutti pel suo alto sapere, per la versatilità del suo ingegno, per la bontà dell'animo suo, per la sua modestia, la sua perdita è sentita con dolore da tutti, e in particolare dagli scienziati Italiani che con lui vedono sparire un altro di quella gloriosa falange che, fino dai primi anni della seconda metà di questo secolo, tanto contribuirono al risveglio degli studî matematici fra noi, e portarono a tale altezza la Scienza matematica in Italia da farla degnamente gareggiare con quella delle altre Nazioni più colte.

Condirettore col Brioschi, col Betti e con altri di questi *Annali* fino dal 1877, lascia nella Direzione di essi un vuoto profondo, in tutti i cultori della Scienza il rimpianto.

I suoi lavori pubblicati, oltrechè in questi *Annali*, in numerosi periodici scientifici italiani e stranieri, e per la maggior parte di una capitale importanza, formano una lunga serie il cui elenco pubblico qui sotto, non senza esprimere il voto che siano questi raccolti e pubblicati tutti insieme, per costituire, accanto alle opere di altri sommi, il più bel monumento che possa dedicarsi alla memoria di lui, alla sua tanta operosità, al suo alto valore. Valga questo a spronare i cultori della Scienza matematica, e segnatamente i giovani a seguire il suo nobile esempio.

ULISSE DINI.

Milano, 24 Febbraio 1900.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

ELENCO

dei lavori del Prof. EUGENIO BELTRAMI.

Lavori pubblicati in periodici scientifici italiani e stranieri.

Annali di Matematica pura ed applicata, pubblicati da B. Tortolini.

(Roma 1858-1866.)

1. Intorno ad alcuni sistemi di curve piane. Tom. IV (1861), 17 pagine.
2. Sulla teoria delle sviluppoidi e delle sviluppanti. Idem, 26 pagine.
3. Di alcune formole relative alla curvatura delle superficie. (Lettera al compilatore.) Idem, 4 pagine.
4. Intorno ad alcune proprietà delle superficie di rivoluzione. Tom. VI (1864) 9 pagine.
5. Sulla flessione delle superficie rigate. Tom. VII (1865), 34 pagine.
6. Risoluzione di un problema relativo alla teoria delle superficie gobbe. Idem, 12 pagine.
7. Risoluzione del problema: « Riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette. » Idem, 20 pagine.

Annali di Matematica pura ed applicata diretti da F. Brioschi e L. Cremona in continuazione degli Annali già pubblicati in Roma da Tortolini.

(Milano 1867...)

8. Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque. Serie II, Tom. I (1867), 38 pagine.
9. Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante. Tom. II (1868), 24 pagine.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

10. Osservazione sulla precedente Memoria del sig. prof. Schlaefli (*). Tom. V (1871), 5 pagine.
11. Sul potenziale mutuo di due sistemi rigidi ed in particolare sul potenziale elementare elettrodinamico. Tom. VI (1873), 13 pagine.
12. Intorno ad àlcuni nuovi teoremi del sig. Neumann sulle funzioni potenziali. Tom. X (1880), 18 pagine.
13. Sulle equazioni generali della elasticità. Idem (1881), 24 pagine.
14. Sul potenziale magnetico. Idem (1882), 20 pagine.
15. Francesco Brioschi. (Cenno necrologico.) Tom. XXVI (1897), 5 pagine.

Giornale di Matematiche
ad uso degli Studenti delle Università italiane, di Battaglini.
(Napoli 1863...)

16. Soluzione di un problema relativo alle superficie di 2.° ordine. Vol. I (1863), 6 pagine.
17. Sulle coniche di nove punti. Idem, 10 pagine.
18. Sulle equazioni algebriche. Idem, 2 pagine.
19. Estensione allo spazio di tre dimensioni dei teoremi relativi alle coniche di nove punti. Idem, 16 pagine.
20. Ricerche di analisi applicata alla Geometria. Vol. II e III (1864, 1865), 96 pagine.
21. Di alcune proprietà generali delle curve algebriche. Vol. IV (1866), 17 pagine.
22. Dimostrazione di due formole del sig. Bonnet. Idem, 5 pagine.
23. Di una proprietà delle linee a doppia curvatura. Vol. V (1867), 3 pagine.
24. Intorno ad una trasformazione di variabili. Idem, 4 pagine.
25. Sulla minima distanza di due rette. Idem, 4 pagine.
26. Saggio di interpretazione della Geometria non euclidea. Vol. VI (1868), 29 pagine.
27. Articolo bibliografico. Teorica generale delle funzioni di variabili complesse del prof. F. Casorati. Vol. VII (1869), 13 pagine.

(*) La Memoria del prof. Schlaefli qui richiamata trovasi alla pag. 178 dello stesso volume degli *Annali* (il quinto) e ha per titolo: « Nota alla Memoria del signor Beltrami. — Sugli spazi di curvatura costante. »

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

28. Alcune formole per la teoria elementare delle coniche. Vol. IX (1871), 4 pagine.
29. Intorno ad una trasformazione di Dirichlet. Vol. X (1872), 4 pagine.
30. Teorema di geometria pseudosferica. Idem, 1 pagina.
31. Del moto geometrico di un solido che ruzzola sopra un altro solido. Idem, 13 pagine.
32. Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superficie pseudosferiche. Idem, 13 pagine.
33. Necrologia di Alfredo Clebsch. Idem, 2 pagine.
34. Sulle funzioni bilineari. Vol. XI (1873), 9 pagine.

Nuovo Cimento.

(Pisa.)

35. Sulla teoria matematica dei solenoidi elettrodinamici. Vol. VII e VIII (1872), 17 pagine.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.

(Palermo 1886...)

36. Note fisico-matematiche (lettera ad Ernesto Cesàro). Vol. III (1889), 13 pagine.
37. Sulla funzione potenziale della circonferenza. Idem, 17 pagine.
38. Sulla teoria generale delle onde piane. Vol. V (1891), 8 pagine.
39. Enrico Betti. (Cenno necrologico.) Vol. VI (1892), 2 pagine.

Nouvelles Annales de Mathématiques, fondées (1842) par Gerono et Terquem.

(Paris.)

40. Sur la courbure de quelques lignes singulières tracées sur une surface. Vol. IV, (Serie II) (*) (1865), 9 pagine.

(*) Nei volumi II e III della Serie II dei *Nouvelles Annales* (anni 1863-64) si trovano anche soluzioni ragionate date dal prof. Beltrami per varie quistioni proposte da altri; e a pag. 336 del Vol. II vi si trova pure una questione proposta da lui, relativa a un teorema geometrico.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Bulletin des sciences Mathématiques par MM. Darboux et Houel.

(Paris 1877...)

41. Formules fondamentales de Cinématique dans les espaces de courbure constante. Vol. XI (1876), 8 pagine.

Mathematische Annalen.

(Leipzig 1869...)

42. Zur theorie des Krümmungsmaasses. Vol. I (1869), 8 pagine.

Acta Mathematica.

(Stoccolma 1882...)

43. Sur les couches de niveau électromagnétiques. Vol. IX (1883), 12 pagine.

Lavori pubblicati negli Atti o Rendiconti di Accademie o Istituti scientifici italiani e stranieri.

Memorie della R. Accademia dei Lincei.

(Roma.)

44. Sulla determinazione sperimentale della densità elettrica alla superficie dei corpi conduttori. Vol. I (Serie 3.ª) (1877), 12 pagine.
45. Sull'attrazione di un anello circolare od ellittico. Vol. V (Serie 3.ª) (1880), 12 pagine.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Rendiconti della R. Accademia dei Lincei.

(Roma.)

46. Un precursore italiano di Legendre e Lobatschewsky. Vol. V (Serie 4.a) (1889), 5 pagine.
47. Sull'estensione del principio di D'Alembert all'elettrodinamica. Idem, 4 pagine.
48. Sulla espressione analitica del principio di Huygens. Vol. I (Serie 5.a) (1892), 10 pagine.
49. Osservazioni su di una nota del prof. Morera. Idem, 2 pagine.
50. Sui potenziali termodinamici. Vol. IV (1895), 8 pagine.
51. Sulla espressione data da Kirckhoff al principio di Huygens. Idem, 3 pagine.
52. Sul teorema di Kirckhoff. Idem, 2 pagine.
53. A proposito di una nuova ricerca del prof. C. Neumann. Idem, 4 pagine.
54. Cenno necrologico del prof. Padova. Vol. V (1896), 1 pagina.
55. Rendiconti dei lavori dell'Accademia dei Lincei e commemorazione di F. Brioschi. Adunanza solenne del 12 giugno 1898, 15 pagine.

Rendiconti dell'Istituto Lombardo.

(Milano 1860 ...)

56. Annotazioni sulla teoria delle cubiche gobbe (Nota I). Vol. I (1868), 9 pagine.
57. Annotazioni sulla teoria delle curve gobbe (Nota II). Idem, 13 pagine.
58. Sulla teoria delle linee geodetiche. Idem, 11 pagine.
59. Intorno ad un nuovo elemento introdotto dal sig. Christoffel nella teoria delle superficie. Vol. II (1869), 11 pagine.
60. Sulla teoria analitica della distanza. Vol. V (1872), 2 pagine.
61. Di un sistema di formole per lo studio delle linee e delle superficie ortogonali. Idem, 11 pagine.
62. Considerazioni sopra una legge potenziale. Vol. IX (1876), 9 pagine.
63. Intorno ad alcune questioni di elettrostatica. Vol. X (1877), 15 pagine.
64. Intorno ad alcune proposizioni di Clausius sulla teoria del potenziale. Vol. XI (1878), 15 pagine.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

65. Intorno ad un caso di moto a due coordinate. Vol. XI (1878), 11 pagine.
66. Sulle funzioni potenziali di sistemi simmetrici intorno ad un asse. Idem, 13 pagine.
67. Sull'equazione pentaedrale delle superficie di 3.° ordine. Vol. XII (1879), 12 pagine.
68. Intorno ad una formola integrale. Idem, 6 pagine.
69. Intorno ad un teorema di Abel e ad alcune sue applicazioni. Vol. XIII (1880), 11 pagine.
70. Intorno ad alcune serie trigonometriche. Idem, 12 pagine.
71. Sulla teoria della scala diatonica. Vol. XV (1882), 6 pagine.
72. Sulla teoria dei sistemi di conduttori elettrizzati. Idem, 8 pagine.
73. Sulla teoria degli strati magnetici. Vol. XVI (1883), 15 pagine.
74. Sulla equivalenza delle distribuzioni magnetiche e galvaniche. Idem, 16 pagine.
75. Sulla teoria del potenziale. Idem, 12 pagine.
76. Intorno ad un problema relativo alla teoria delle correnti stazionarie. Vol. XVII (1884), 8 $^1/_2$ pagine.
77. Sulla rappresentazione delle forze newtoniane per mezzo di forze elastiche. Idem, 9 pagine.
78. Sulle condizioni di resistenza dei corpi elastici. Vol. XVIII (1885), 11 pagine.
79. Sulla teoria delle onde. Vol. XIX (1886), 12 pagine.
80. Sulle funzioni sferiche di una variabile. Vol. XX (1887), 9 pagine.
81. Sulle funzioni complesse (Nota I). Idem, 12 pagine.
82. Considerazioni idrodinamiche. Vol. XXII (1889), 9 pagine.
83. Sul principio di Huygens. Idem, 11 pagine.
84. Intorno al mezzo elastico di Green (Nota I). Vol. XXIV (1891), 10 pagine.
85. Intorno al mezzo elastico di Green (Nota II). Idem, 11 pagine.
86. Sulle funzioni complesse (Nota II). Idem, 14 pagine.
87. Sulle funzioni complesse (Nota III). Vol. XXVII (1894), 8 pagine.
88. Sulle equazioni dinamiche di Lagrange. Vol. XXVIII (1895), 9 pagine.
89. Sulla teoria delle funzioni sferiche. Vol. XXIX (1896), 7 pagine.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Memorie della R. Accademia di Scienze di Bologna.

90. Nota intorno alle coniche di nove punti e ad alcune questioni che ne dipendono. Vol. II (Serie II) (1863), 37 pagine.
91. Memoria sulle proprietà generali delle superficie di area minima. Vol. VII (Serie II) (1868), 73 pagine.
92. Memoria sulla teorica generale dei parametri differenziali. Vol. VIII (Serie II) (1869), 44 pagine.
93. Ricerche sulla geometria delle forme binarie cubiche. Vol. IX (Serie II) (1870), 53 pagine.
94. Ricerche sulla cinematica dei fluidi (*). Vol. I, II, III e V (Serie III) (1871-74), 201 pagine.
95. Esercitazione analitica intorno ad alcuni teoremi di Feuerbach e di Steiner. Vol. V (Serie III) (1875), 24 pagine.
96. Considerazioni analitiche sopra una proposizione di Steiner. Vol. VII (Serie III) (1877), 24 pagine.
97. Nota intorno ad alcuni punti della teoria del potenziale. Vol. IX (Serie III) (1878), 27 pagine.
98. Ricerche di geometria analitica. Vol. X (Serie III) (1879), 82 pagine.
99. Memoria sulla teoria dell'attrazione degli ellissoidi. Vol. I (Serie IV) (1880), 46 pagine.
100. Memoria sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche. Vol. II (Serie IV) (1881), 47 pagine.
101. Memoria sull'equilibrio delle superficie flessibili e inestendibili. Vol. III (Serie IV) (1882), 51 pagine.
102. Memoria sulle funzioni associate e specialmente su quelle della calotta sferica. Vol. IV (Serie IV) (1883), 36 pagine.
103. Memoria sulla teoria dell'induzione magnetica secondo Poisson. Vol. V (Serie IV) (1884), 34 pagine.
104. Memoria sull'uso delle coordinate curvilinee nelle teorie del potenziale e dell'elasticità. Vol. VI (Serie IV) (1885), 48 pagine.

(*) Così nelle copie a parte (estratti) della Memoria, e sulla copertina (nel verso) dei lavori n.[i] 102 e 108 del presente Elenco. Nei Volumi Accademici qui indicati, invece, la Memoria stessa porta altro titolo e cioè il seguente: *Sui principii fondamentali dell'idrodinamica razionale.*

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

105. Memoria sulla interpretazione meccanica delle formole di Maxwell. Volume VII (Serie IV) (1886), 36 pagine.
106. Memoria intorno ad alcuni problemi di propagazione del calore. Volume VIII (Serie IV) (1887), 36 pagine.
107. Considerazioni sulla teoria matematica del magnetismo. Vol. I (Serie V) (1891), 45 pagine.
108. Considerazioni sulla teoria matematica dell'elettromagnetismo. Vol. II (Serie V) (1892), 68 pagine.

Atti dell'Accademia di Torino.

109. Sulle funzioni cilindriche. Vol. XVI (1881), 5 pagine.

Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Paris).

110. Sur la théorie de la deformation infiniment petite d'un milieu continu. (1889), 1.er semestre, 4 pagine.
111. Quelques remarques au sujet des fonctions sphériques. (1890), 4 pagine.

Nel Volume « *In Memoriam Dominici Chelini—Collectanea Mathematica*, ecc. » pubblicato nel 1881 (Milano, Hoepli) per cura dei professori L. Cremona ed E. Beltrami si trovano del prof. Beltrami i due lavori seguenti:

112. Della vita e delle opere di Domenico Chelini, pagine 28.
113. Sulla teoria degli assi di rotazione, pagine 23.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Alcuni nuovi teoremi sulle funzioni armoniche a tre variabili.

(*Di* Lorenzo de Sanctis, *a Pisa.*)

§ 1. L'Appell in una sua elegante Memoria, inserita nel Tomo IV degli *Acta Mathematica*, ha trattato delle funzioni $F(x, y, z)$ a tre variabili reali soddisfacenti all'equazione:

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0,$$

svolgendo una teoria analoga a quella delle funzioni di una variabile complessa; orbene, in questo lavoro è mio scopo di presentare un nuovo teorema, che può considerarsi come l'estensione di un teorema dato da Cauchy per le funzioni di una variabile complessa, e di estendere completamente le ricerche fatte dal Mittag-Leffler pure per le funzioni di una variabile complessa.

L'estensione del teorema di Mittag-Leffler è poi applicata nel seguito a dedurre in modo diverso dall'Appell, e molto più generale, l'esistenza di una funzione armonica uniforme sempre regolare nello spazio eccettuato nei vertici di una rete di parallelepipedi nei quali ha poli di 1.° ordine con residuo $+1$ e a costruirla effettivamente.

L'Appell, nella citata Memoria, indica tale funzione con $Z(x, y, z)$ e notiamo che essa ha, in questo genere di studî, una grandissima importanza perchè occupa il posto che la ζz di Weierstrass ha nella *teorica delle funzioni ellittiche.* Per chiarezza dell'esposizione credo bene di premettere alcune nozioni che faciliteranno di molto la lettura dei teoremi in discorso.

§ 2. Nel seguito noi indicheremo con $V_m(x, y, z)$ un polinomio razionale, intero, omogeneo, di grado m in x, y, z soddisfacente all'equazione:

$$\Delta V_m = 0.$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

La considerazione di questi polinomî $V_m(x, y, z)$ è strettamente legata alla considerazione delle *funzioni sferiche*, giacchè se x, y, z s'interpretano come coordinate Cartesiane di un punto dello spazio le cui coordinate polari siano ρ, θ, φ onde si abbiano le formole:

$$x = \rho \cos\theta$$
$$y = \rho \operatorname{sen}\theta \cos\varphi$$
$$z = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi,$$

allora si avrà che:

$$V_m(x, y, z) = \rho^m Y_m(\theta, \varphi),$$

$Y_m(\theta, \varphi)$ essendo una *funzione sferica.* Oltre ai polinomî V con indice positivo noi introdurremo anche polinomî V con indice negativo secondo i concetti che seguono. Il Thomson dimostra, e la cosa si può verificare facilmente, che se $F(x, y, z)$ è una funzione armonica tale è anche:

$$\frac{1}{r} F\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right) \quad \text{dove} \quad r = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

segue di qui che se $V_m(x, y, z)$ è un polinomio armonico lo è anche:

$$\frac{1}{r} V_m\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right) = \frac{1}{r^{2m+1}} V_m(x, y, z).$$

Tale espressione è un polinomio omogeneo in x, y, z di grado: $-(m+1)$, noi l'indicheremo con: $V_{-(m+1)}(x, y, z)$, onde sarà per ipotesi:

$$V_{-(m+1)}(x, y, z) = \frac{V_m(x, y, z)}{r^{2m+1}} = \frac{r^m Y_m(\theta, \varphi)}{r^{2m+1}} = \frac{Y_m(\theta, \varphi)}{r^{m+1}},$$

in particolare per $m = 0$ risulta:

$$V_{-1} = \frac{A}{r} \text{ con } A \text{ costante.}$$

Ciò posto ricordiamo i seguenti teoremi che si trovano dimostrati nel libro dell'Heine (*):

1.°) *Una funzione armonica $F(x, y, z)$ sempre finita continua e soddisfacente all'equazione $\Delta F = 0$ nei punti di una sfera col centro in:*

(*) Heine, *Handbuch der Kugelfunctionen.*

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

(x', y', z') (tutto al più il contorno eccettuato) *si sviluppa in una serie:*

$$\sum_0^\infty {}_m V_m(x-x', y-y', z-z'),$$

convergente in ugual grado in ogni campo interno alla sfera.

2.°) *Una funzione armonica $F(x, y, z)$ sempre finita continua e soddisfacente all'equazione $\Delta F = 0$ in un anello sferico col centro in (x', y', z)* (tutto al più il contorno eccettuato) *si sviluppa in una doppia serie:*

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} V_m(x-x', y-y', z-z') + \sum_{m=0}^{m=\infty} V_{-(m+1)}(x-x', y-y', z-z'),$$

convergente in ugual grado in ogni campo interno all'anello.

3.°) *Una funzione armonica $F(x, y, z)$ sempre regolare all'esterno di una sfera col centro in (x', y', z') e quindi avente un valore finito e determinato (che diremo $F(\infty)$) anche per valori infinitamente grandi delle variabili: x, y, z, si sviluppa in una serie:*

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} V_{-m}(x-x', y-y', z-z') \text{ con } V_0 = F(\infty),$$

convergente in ugual grado in ogni campo del tutto esterno alla superficie sferica.

Sarà utile ricordare anche il teorema di Harnack:

Se $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n \ldots$ sono funzioni armoniche in un campo finito C che sul contorno S del campo assumono i valori:

$$F_1, F_2, F_3, \ldots F_n \ldots$$

e si verifica che la serie: $\sum_0^\infty F_n$ converge in ugual grado allora si può asserire che $\sum_0^\infty f_n$ converge in ugual grado in C e che ci rappresenta una funzione armonica la quale su S prende il valore $\sum_0^\infty F_n$.

La dimostrazione del teorema enunciato è intieramente fondata sulla proprietà notissima che:

Il massimo valore assoluto di una funzione armonica, considerata in un campo finito, è sul contorno del campo,

e poichè questa proprietà vale manifestamente anche quando si considera una funzione armonica sempre regolare nel campo infinito situato

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

al di fuori di una superficie S e *annullantesi all' infinito* così ne segue anche che:

Se f_1, f_2,... f_n... sono funzioni armoniche sempre regolari nel campo C esterno ad una superficie S, che all'infinito si annullano e che sul contorno S del campo prendono i valori:

$$F_1,\ F_2,\dots\ F_n\dots$$

e si verifica che $\sum\limits_0^\infty F_n$ converge in ugual grado allora si può concludere che $\sum\limits_0^\infty f_n$ converge in ugual grado in C e che ci rappresenta una funzione armonica la quale su S prende il valore: $\sum\limits_0^\infty F_n$ e che si annulla evidentemente all'infinito.

Avremo bisogno nel § 4 d'invocare questa proprietà perchè capiterà ivi appunto di considerare una serie di polinomî: $V_{-(m+1)}(x-x',\ y-y',\ z-z')$, i quali sono funzioni armoniche annullantesi all'infinito, convergente in ugual grado in un anello sferico col centro in $(x',\ y',\ z')$ onde ne concluderemo che detta serie ci fornisce una funzione armonica all'esterno della sfera più piccola annullantesi all'infinito.

L'osservazione precedente ci permetterà di dedurre rigorosamente un risultato che nel modo con cui è presentato nella Memoria dell'Appell non appare molto preciso. Il teorema di Harnack, sopra ricordato, ci permetterà poi di seguire nella dimostrazione del teorema di Mittag-Leffler una traccia analoga a quella seguita, nella dimostrazione dello stesso teorema, nella teoria delle funzioni di una variabile complessa.

§ 3. Andiamo ora a definire quando è che una funzione armonica $F(x,\ y,\ z)$ in un punto $(a,\ b,\ c)$ dello spazio si dice regolare e quando singolare.

Diremo che una funzione $F(x,\ y,\ z)$ in un punto $(a,\ b,\ c)$ dello spazio è regolare, allorchè si può determinare un intorno sufficientemente piccolo di questo punto (e volendo potremo supporre, senza restrizione, che l'intorno sia sferico) tale che in esso la $F(x,\ y,\ z)$ sia finita continua e soddisfacente all'equazione $\Delta F=0$ cioè sia sviluppabile (§ 2) in una serie di polinomî $V_m\,(m>0)$ della forma:

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} V_m(x-a,\ y-b,\ z-c),$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

E diciamo subito che una funzione $F(x, y, z)$ si dice regolare all'infinito quando nei punti esterni ad una sfera col centro, p. e., nell'origine e con raggio sufficientemente grande la funzione F è sempre finita continua e soddisfacente all'equazione $\Delta F = 0$ e quindi è sviluppabile in una serie di polinomî $V_{-(m+1)}(x, y, z)$:

$$V_0 + V_{-1} + V_{-2} + \cdots (V_0 = F(\infty)).$$

Si noti che non riconduciamo lo studio di una funzione armonica nei punti a distanza grandissima dall'origine allo studio di una funzione armonica nei punti a distanza piccolissima col metodo della trasformazione per raggi vettori reciproci. Pel caso di funzioni armoniche a due variabili la cosa può farsi ancora utilmente. Se infatti è data una funzione $V(x, y)$ armonica, all'esterno di un cerchio Γ col centro nell'origine, finita e continua per tutti i valori finiti di x e y, e consideriamo la trasformazione definita dalle relazioni:

$$x = \frac{X}{X^2 + Y^2}; \quad y = \frac{Y}{X^2 + Y^2},$$

la quale non è altro che un'inversione per raggi vettori reciproci rispetto al cerchio di raggio *1* la funzione $V(x, y)$ si muta di nuovo in una funzione armonica di X, Y:

$$W(X, Y) = V\left(\frac{X}{X^2 + Y^2}, \frac{Y}{X^2 + Y^2}\right),$$

la quale è regolare per tutti i punti (X, Y) interni al cerchio Γ' trasformato di Γ, l'origine al più eccettuato, ebbene noi diremo allora che la $V(x, y)$ è regolare all'infinito se lo è la $W(X, Y)$ nell'origine e se ciò non avviene diremo che la $V(x, y)$ ha all'infinito la singolarità presentata da $W(X, Y)$ nell'origine. Se invece si tratta di una funzione $V(x, y, z)$ armonica all'esterno di una sfera Γ e consideriamo ancora la trasformazione per raggi vettori reciproci:

$$x = \frac{X}{R^2}, \quad y = \frac{Y}{R^2}, \quad z = \frac{Z}{R^2},$$

dove:

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

allora la funzione:

$$W(X, Y, Z) = V\left(\frac{X}{R^2}, \frac{Y}{R^2}, \frac{Z}{R^2}\right),$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

non sarà più armonica, ma lo sarà:

$$W_1(X, Y, Z) = \frac{1}{R} V\left(\frac{X}{R^2}, \frac{Y}{R^2}, \frac{Z}{R^2}\right),$$

sicchè parrebbe che potesse sostituirsi alla considerazione di $V(x, y, z)$ all'esterno della sfera Γ la considerazione della $W_1(X, Y, Z)$ all'interno della sfera Γ' trasformata di Γ e dire che $V(x, y, z)$ è regolare all'infinito o no secondo che lo è oppur no la $W_1(X, Y, Z)$ nell'origine. Ma vediamo subito che possono costruirsi funzioni armoniche $V(x, y, z)$ regolari all'infinito mentre le corrispondenti funzioni $W_1(X, Y, Z)$ hanno nell'origine singolarità.

Così se prendiamo:

$$A + \frac{B}{r} (A \,.\, B \text{ cost. ed } r = + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}),$$

la funzione corrispondente dopo la trasformazione è:

$$B + \frac{A}{R} R = + \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

la prima è regolare all'infinito, mentre non lo è la seconda nell'origine. Per questo abbiamo trattato separatamente il caso del punto all'infinito.

§ 4. Diamo ora la definizione dei punti singolari di una funzione $F(x, y, z)$. Considerando un punto (a, b, c) il quale non sia regolare per la nostra funzione noi lo diremo un punto singolare, e, per semplicità, ci limiteremo allo studio di funzioni $F(x, y, z)$ che non hanno che *punti singolari isolati.*

Come si svilupperà la $F(x, y, z)$ nell'intorno di un suo punto singolare (a, b, c)? Per l'ipotesi che il punto che si considera è un punto singolare isolato potremo descrivere, col centro nel punto e raggio sufficientemente piccolo, una sfera S in modo che nel suo interno e sul suo contorno non capitino altri punti singolari, e se allora descriviamo con centro nel punto e raggio minore una seconda sfera S_1 tra le due sfere la $F(x, y, z)$ sarà una funzione armonica sempre regolare e quindi (§ 2) sviluppabile in una doppia serie convergente in ugual grado:

$$F(x, y, z) = \sum_{m=0}^{m=\infty} V_m(x-a, y-b, z-c) + \sum_{m=0}^{m} V_{-(m+1)}(x-a, y-b, z-c). \quad (\alpha)$$

Ora può avvenire che la seconda parte sia una vera serie o un polinomio, nel secondo caso se p è il massimo grado delle funzioni $V_{-(m+1)}(x-a,$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$y-b,\ z-c)$ che compaiono in detto polinomio diremo che nel punto (a, b, c) la funzione $F(x, y, z)$ ha *un polo dell'ordine* p, nel primo caso diremo invece che in tale punto si ha *una singolarità essenziale* della $F(x, y, z)$.

In ambedue i casi il coefficiente costante A che figura in V_{-1} (*) si dirà il *residuo nel punto singolare.*

Notiamo che lo sviluppo (α) dovrà manifestamente valere qualunque sia la piccolezza del raggio della sfera S_1 quindi potremo dire che la $F(x, y, z)$ deve svilupparsi così in tutti i punti di una sfera col centro in (a, b, c) (nel cui interno e sul cui contorno non capitino altri punti singolari) eccettuato (a, b, c).

Se si considera la serie $\sum\limits_{m=0}^{m=\infty} V_m(x-a,\ y-b,\ z-c)$ essa convergendo in ugual grado in (S, S_1) convergerà in ugual grado in tutto S (§ 2) quindi indicando la sua somma con $T(x, y, z)$ sarà $T(x, y, z)$ una funzione armonica regolare da per tutto in S in particolare nel punto (a, b, c).

In quanto poi all'altra parte dello sviluppo (α), se esso è un polinomio rappresenterà certamente una funzione armonica regolare in tutti i punti dello spazio eccettuato in (a, b, c), perchè tale è ciascun suo termine che è un polinomio $V_{-(m+1)}(x-a,\ y-b,\ z-c)$; ma anche se è una serie giacchè questa serie convergendo in ugual grado nell'anello (S, S_1) cioè in S, eccettuato (a, b, c), in forza dell'osservazione fatta alla fine del § 2, convergerà anche all'esterno e ci rappresenterà una funzione armonica regolare in tutto lo spazio, eccettuato (a, b, c), la quale si annulla all'infinito.

L'indicheremo con $G(x, y, z \mid a, b, c)$ onde si avrà:

$$G(x, y, z \mid a, b, c) = \sum_{m=0}^{m=\infty} V_{-(m+1)}(x-a,\ y-b,\ z-c).$$

La G (o la somma $\sum\limits_{m=0}^{m=p-1} V_{-(m+1)}(x-a,\ y-b,\ z-c)$ nel caso delle singolarità polari) si dice *la parte principale* della $F(x, y, z)$ relativa al punto singolare che si considera.

Da quanto abbiamo detto e dalla (α) segue che la distinzione delle due specie di singolarità può farsi anche in questi termini:

(*) $$V_{-1} = \frac{A}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

« Se un punto (a, b, c) è singolare per una funzione $F(x, y, z)$ noi po-
« tremo sempre trovare una funzione *armonica* regolare in tutto lo spazio
« eccettuato quel punto (data dalla somma di un numero finito di polinomî
« $V_{-(n+1)}(x-a, y-b, z-c)$ o da una serie di questi polinomî convergente
« in ugual grado) in modo che la differenza tra la primitiva funzione e la
« nuova sia una funzione armonica regolare nel punto. Se per raggiungere
« lo scopo abbiamo avuto bisogno di ricorrere alla somma di un numero finito
« di polinomî $V_{-(m+1)}(x-a, y-b, z-c)$ la singolarità dicesi polare altri-
« menti essenziale. »

Diremo analogamente che il punto all'infinito è singolare per una funzione $F(x, y, z)$ quando non è regolare, cioè quando non si può trovare una sfera col centro nell'origine e di raggio tanto grande che al suo esterno la $F(x, y, z)$ sia sempre finita continua e soddisfacente all'equazione $\Delta F = 0$.

Potremo allora considerare anche qui una sfera S col centro nell'origine e di raggio tanto grande che al suo esterno non vi capiti nessun punto singolare della funzione $F(x, y, z)$, il punto all'infinito eccettuato; e se descriviamo con centro nell'origine una seconda sfera S_1 comprendente S in (S, S_1) la F sarà sempre finita continua e soddisfacente all'equazione $\Delta F = 0$ quindi sviluppabile così:

$$F(x, y, z) = \sum_0 {}_m V_m(x, y, z) + \sum_0^\infty {}_m V_{-(m+1)}(x, y, z). \qquad (\beta)$$

Se $\sum_m V_m(x, y, z)$ è una vera serie il *punto all'infinito si dirà un punto singolare essenziale*, se è una somma di un numero finito di polinomî V_m si dirà che il *punto all'infinito è un polo e dell'ordine p* se p è il massimo grado dei polinomî V_m.

Questo sviluppo naturalmente deve valere comunque s'ingrandisca il raggio della sfera S_1 quindi possiamo dire che vale all'esterno di una sfera S di raggio sufficientemente grande eccettuato il punto all'infinito.

Notiamo che $\sum_0^p V_m(x, y, z)$ è certo una funzione armonica da per tutto regolare fuorchè all'infinito, ma anche se consideriamo $\sum_0^\infty V_m(x, y, z)$ questa convergendo in ugual grado in (S, S_1) convergerà in ugual grado in S_1 e sarà in S_1 una funzione armonica comunque sia grande S_1 cioè ponendo:

$$G(x, y, z) = \sum_0^\infty V_m(x, y, z),$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

sarà $G(x, y, z)$ una funzione da per tutto regolare nello spazio eccettuato il punto all'infinito.

D'altra parte $\sum_0^\infty V_{-(m+1)}(x-a, y-b, z-c)$ ci rappresenta una funzione armonica regolare all'esterno di S annullantesi all'infinito, onde considerando la (β) risulta anche pel punto all'infinito che, se esso è singolare per la $F(x, y, z)$, potremo togliere dalla F una funzione armonica χ da per tutto regolare eccettuato all'infinito in modo che $F-\chi$ sia regolare all'infinito.

Se abbiamo avuto per ciò bisogno di adoperare la somma di un numero finito di polinomî V_m, di cui p è il grado massimo, il punto all'infinito è un polo dell'ordine p altrimenti un punto singolare essenziale.

Sia il punto all'infinito regolare o meno, diremo *residuo di una funzione armonica* $F(x, y, z)$ nel punto all'infinito il coefficiente del polinomio V_{-1} che compare nel suo sviluppo (all'esterno di una sfera tanto grande che nel suo interno capitino tutti i punti singolari eccettuato il punto all'infinito) cambiato di segno.

È ovvio quanto sia grande l'analogia tra le definizioni qui date e quelle che si dànno per i punti singolari delle funzioni di una variabile complessa; le funzioni $G(x, y, z)$ e $G(x, y, z \mid a, b, c)$ che ora abbiamo introdotte si presentano come naturale estensione delle trascendenti intere $G(z)$, $G\left(\frac{1}{z-a}\right)$.

§ 5. Terminiamo queste nozioni preliminari col ricordare alcuni teoremi già trovati dall'APPELL, nella Memoria citata, ed analoghi a ben noti teoremi della Teorica delle funzioni di una variabile complessa.

1.°) *Una funzione armonica $F(x, y, z)$ da per tutto regolare nello spazio non può essere che una costante.*

2.°) *Una funzione armonica $F(x, y, z)$ da per tutto regolare nello spazio eccettuato nel punto all'infinito nel quale ha un polo dell'ordine m è la somma di $m+1$ polinomi V_m $(m \geqq 0)$.*

3.°) *Una funzione armonica avente un numero finito di singolarità nello spazio è la somma di un numero finito di funzioni G.*

4.°) *Se una funzione $F(x, y, z)$ armonica è sempre regolare nel campo C limitato da una superficie S eccettuato in certi punti (in numero finito m) posti nell'interno nei quali diventa singolare ed ha i rispettivi residui $R_1, R_2, \ldots R_m$, allora si ha che:*

$$\iint_S \frac{\partial F}{\partial n}\, d\sigma = -4\pi \sum_{k=1}^{k=m} R_k,$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$\frac{\partial}{\partial n}$ *indicando le derivate della F prese secondo le normali ad S esterne al campo C.*

Il teorema è valido anche quando tra i punti singolari considerati vi è il punto all'infinito, purchè per residuo di una funzione armonica nel punto all'infinito si adotti la definizione del § 4.

5.°) *Se una funzione armonica ha un numero finito di punti singolari la somma dei suoi residui è nulla.*

§ 6. Perveniamo ora all'accennata estensione del teorema di Cauchy.

Cauchy si propose il problema di dare uno sviluppo di una funzione di variabile complessa uniforme, avente un numero infinito di punti singolari, in serie che ne mettesse in evidenza le singolarità ed è noto che egli pervenne elegantissimamente allo scopo servendosi del teorema, che porta il suo nome, per mezzo del quale si possono conoscere i valori di una funzione di variabile complessa nell'interno di un'area (in cui è sempre finita continua e monodroma) quando si conoscono i suoi valori sul contorno (*). Orbene in questo paragrafo io mi propongo di fare una ricerca analoga nel caso di una funzione $F(x, y, z)$ armonica uniforme.

Supponiamo dunque di avere una funzione $F(x, y, z)$ uniforme e regolare da per tutto, eccettuato in un gruppo di punti nei quali abbia singolarità (se polari o essenziali non importa), soltanto però ammettiamo che all'ingrandire indefinito del raggio di una sfera, col centro p. e. nell'origine, il numero dei punti singolari contenuti nel suo interno, pur mantenendosi finito, cresca indefinitamente, in altri termini supponiamo che la $F(x, y, z)$ sia unicamente singolare in un gruppo infinito di punti (**) avente un unico punto limite all'infinito

Consideriamo un campo racchiuso da una sola superficie S che non passi *per alcun punto singolare* della $F(x, y, z)$, il che è possibile, indichiamo con:

$$M_r \equiv (a_r, b_r, c_r) \quad [r = 1, 2, .. m], \tag{1}$$

gli m punti singolari (m intero finito) contenuti nell'interno della S e domandiamoci come si svilupperà la $F(x, y, z)$ nel campo limitato dalla S.

(*) $$w(z') = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{w(z)}{z - z'}\, dz.$$

(**) Il caso che la $F(x, y, z)$ divenisse singolare in un numero finito di punti, non presenta oramai per noi più interesse poichè è stato indicato nel § 5 (n.° 3) il risultato cui si perviene.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

In un intorno sufficientemente piccolo del punto $M_1 \equiv (a_1, b_1, c_1)$ (tale cioè che non includa altri punti singolari della F, M_1 eccettuato) avrò (§ 4):

$$F(x, y, z) = G_1(x, y, z \mid a_1, b_1, c_1) + F_1(x, y, z),$$

dove $G_1(x, y, z \mid a_1, b_1, c_1)$ è un polinomio o una serie formata con polinomî:

$V_{-(m+1)}(x - a_1, y - b_1, z - c_1)$ (secondo che in M_1 la singolarità è polare o essenziale) e $F_1(x, y, z)$ è una funzione regolare nell'intorno di (a_1, b_1, c_1).

Dall'ultima relazione ricavandosi:

$$F_1(x, y, z) = F(x, y, z) - G_1(x, y, z \mid a_1, b_1, c_1),$$

e $G_1(x, y, z \mid a_1, b_1, c_1)$ essendo regolare in tutti i punti dello spazio, eccettuato in (a_1, b_1, c_1), segue che la F_1 nel campo limitato da S non può avere altre singolarità che in: (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3),... (a_m, b_m, c_m) cioè la F_1 si trova nelle stesse condizioni della F coll'unica differenza che ha una singolarità di meno e perciò potremo applicare alla F_1 gli stessi ragionamenti applicati alla F e così seguitando perverremo infine ad uno sviluppo della forma:

$$F(x, y, z) = \sum_{r=1}^{r=m} G_r(x, y, z \mid a_r, b_r, c_r) + F^{(*)}(x, y, z), \tag{2}$$

dove $F^{(*)}(x, y, z)$ è una funzione armonica sempre regolare nell'interno e sul contorno di S. Potremo allora alla $F^{(*)}$ applicare una qualunque delle formule che valgono per una funzione armonica sempre regolare in un certo campo e sul contorno, in particolare la *formula di* Green che ci dà il valore della funzione in un punto interno del campo allorchè conosciamo i valori della funzione e quelli della sua derivata sul contorno, cioè se $M' \equiv (x', y', z')$ è un punto interno ad S si avrà:

$$F^{(*)}(x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(R \frac{\partial F^{(*)}}{\partial n} - F^{(*)} \frac{\partial R}{\partial n} \right) d\sigma, \tag{3}$$

dove ho posto per brevità di scrittura:

$$R = \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}},$$

(x, y, z) essendo un punto variabile su S.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

La relazione (3) vale qualunque sia il punto (x', y', z') interno ad S, varrà in particolare se per (x', y', z') prendiamo un punto (a_r, b_r, c_r), ma siccome vogliamo adoperare lo sviluppo (3) per sostituire nella (2) e la $F(x, y, z)$ in (a_r, b_r, c_r) ha delle singolarità, così supporremo che (x', y', z') sia un qualsivoglia punto interno ad S esclusi i punti (1).

La (2) ci dà, ponendo per (x, y, z); (x', y', z') e sostituendo a $F^{(*)}(x', y', z')$ il valore fornito dalla (3):

$$\left.\begin{aligned} F(x', y', z') = \sum_{r=1}^{r=m} G_r(x', y', z' \mid a_r, b_r, c_r) + \\ + \frac{1}{4\pi}\iint_S \left(R\frac{\partial F^{(*)}}{\partial n} - F^{(*)}\frac{\partial R}{\partial n}\right) d\sigma, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

e se per $F^{(*)}$ e $\frac{\partial F^{(*)}}{\partial n}$ poniamo i valori che si ricavano dalla (2), raccogliendo opportunamente, otteniamo:

$$\left.\begin{aligned} F(x', y', z') = \sum_{r=1}^{r=m} G_r(x', y', z' \mid a_r, b_r, c_r) + \\ + \frac{1}{4\pi}\iint_S \left(R\frac{\partial F}{\partial n} - F\frac{\partial R}{\partial n}\right) d\sigma - \\ - \frac{1}{4\pi}\sum_{r=1}^{r=m}\iint_S \Big\{ R\frac{\partial G_r(x, y, z \mid a_r, b_r, c_r)}{\partial n} - \\ - G_r(x, y, z \mid a_r, b_r, c_r)\frac{\partial R}{\partial n}\Big\} d\sigma. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Ora io dico che il terzo termine del secondo membro della (5) è nullo; basterà perciò mostrare che considerando una qualunque G_r si ha:

$$\iint_S \left(R\frac{\partial G_r}{\partial n} - G_r\frac{\partial R}{\partial n}\right) d\sigma = 0.$$

Per questo descriviamo una sfera S_1 (vedi figura a pagina seguente) con centro nell'origine e con raggio talmente grande che comprenda la S nel suo interno; allora nel campo (S, S_1) la R (cioè l'inversa della distanza del punto fisso (x', y', z') da un punto variabile (x, y, z)) e la G_r saranno certamente funzioni armoniche sempre regolari quindi, per un noto teorema, avremo:

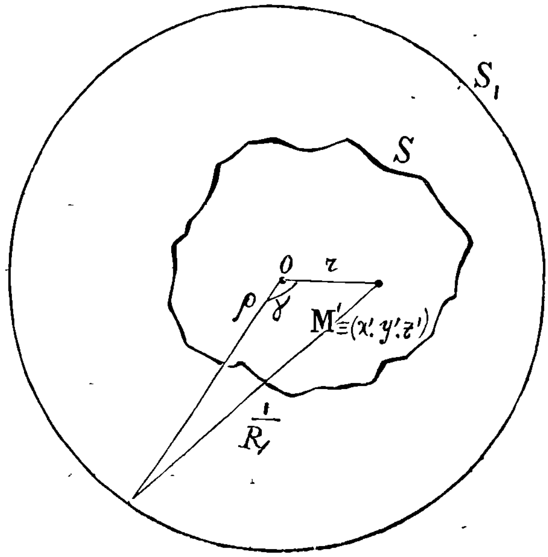
$$\iint_{S, S_1} \left(R\frac{\partial G_r}{\partial n} - G_r\frac{\partial R}{\partial n}\right) d\sigma = 0,$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

cioè:

$$\iint_S \left(R \frac{\partial G_r}{\partial n} - G_r \frac{\partial R}{\partial n}\right) d\sigma = \iint_{S_1} \left(R \frac{\partial G_r}{\partial n} - G_r \frac{\partial R}{\partial n}\right) d\sigma,$$

dove, pel modo con cui l'ultima relazione è stata scritta, le $\frac{\partial}{\partial n}$ sono prese rispettivamente secondo le orientazioni delle normali ad S, e ad S_1 esterne ai campi racchiusi da queste due superficie.



Il tutto è ridotto quindi a mostrare che:

$$\iint_{S_1} \left(R \frac{\partial G_r}{\partial n} - G_r \frac{\partial R}{\partial n}\right) d\sigma = 0.$$

Osserviamo perciò che la funzione G_r essendo regolare certamente al di fuori di una sfera S'_1 col centro nell'origine di raggio minore di quello della S_1 ma ad esso sufficientemente vicino, in ogni campo esterno ad S'_1 e quindi in particolare su S_1, si svilupperà (§ 2) in una serie, convergente in ugual grado, di polinomî $V_{-(m+1)}(x, y, z)$:

$$G_r = \sum_{m=0}^{m=\infty} V_{-(m+1)}(x, y, z),$$

dove notiamo che manca il termine costante perchè la G_r si annulla all'infinito. Ma d'altra parte se con ρ indichiamo il raggio della sfera S_1 su S_1 si ha manifestamente:

$$x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta \cos\varphi, \quad z = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi,$$

quindi sostituendo si ottiene subito:

$$G_r = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{Y_m(\theta, \varphi)}{\rho^{m+1}},$$

e se allora calcolo $\frac{\partial G_r}{\partial n}$, n essendo l'orientazione della normale esterna ad

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

S_1, ho:

$$\frac{\partial G_r}{\partial n} = -\sum_{m=0}^{m=\infty} (m+1) \frac{Y_m(\theta, \varphi)}{\rho^{m+2}}.$$

Osserviamo poi che se r è la distanza del punto (x', y', z') dall'origine, dalla figura ho subito:

$$R = \frac{1}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2 r \rho \cos\gamma}},$$

dove:

$$\cos\gamma = \frac{x x' + y y' + z z'}{r \rho} = \frac{x' \cos\theta + y' \operatorname{sen}\theta \cos\varphi + z' \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi}{r},$$

e poichè il punto (x', y', z') è interno ad S_1 si ha $r < \rho$ e per le definizioni delle funzioni sferiche si ha anche in serie convergente in ugual grado:

$$R = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{r^m P_m(\cos\gamma)}{\rho^{m+1}} = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{Y_m^{(*)}(\theta, \varphi)}{\rho^{m+1}},$$

giacchè $r^m P_m(\cos\gamma)$, considerata come funzione di θ, φ, è manifestamente una funzione sferica ed ho messo l'asterisco per porre in evidenza che le Y_m ora considerate non sono, in generale, quelle dello sviluppo precedente.

Ottenuto lo sviluppo di R si ottiene pure subito quello di $\frac{\partial R}{\partial n}$ si ha infatti:

$$\frac{\partial R}{\partial n} = -\sum_{m=0}^{m=\infty} (m+1) \frac{Y_m^{(*)}(\theta, \varphi)}{\rho^{m+2}},$$

quindi:

$$R \frac{\partial G_r}{\partial n} - G_r \frac{\partial R}{\partial n} = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{Y_m(\theta, \varphi)}{\rho^{m+1}} \cdot \sum_{m=0}^{m=\infty} (m+1) \frac{Y_m^{(*)}(\theta, \varphi)}{\rho^{m+2}} -$$
$$- \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{Y_m^{(*)}(\theta, \varphi)}{\rho^{m+1}} \cdot \sum_{m=0}^{m=\infty} (m+1) \frac{Y_m(\theta, \varphi)}{\rho^{m+2}}.$$

E se allora noi eseguiamo i prodotti delle serie del secondo membro e poi integriamo (nei secondi membri *integrando per serie,* il che è lecito trattandosi di serie convergenti uniformemente) si vede subito che otteniamo per risultato lo zero. Infatti osserviamo che nell'eseguire i prodotti i coefficienti di $Y_m(\theta, \varphi) \cdot Y_m^{(*)}(\theta, \varphi)$ risultano manifestamente uguali e di segno contrario, onde i corrispondenti termini si elidono, considerando poi i termini della forma:

$$Y_m(\theta, \varphi)\, Y_{m'}^{(*)}(\theta, \varphi) \quad (m \neq m'),$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

si vede che per le note proprietà delle funzioni sferiche si ha per questi:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_m(\theta, \varphi)\, Y_{m'}(\theta, \varphi)\, d\sigma = 0 \quad (m \neq m').$$

Risulta quindi che:

$$\iint_{S_1}\left(R\frac{\partial G_r}{\partial n} - G_r\frac{\partial R}{\partial n}\right) d\sigma = 0,$$

e allora la (5) ci fornisce immediatamente:

$$\left.\begin{aligned} F(x', y', z') = \sum_{r=1}^{r=m} G_r(x', y', z' \mid a_r, b_r, c_r) + \\ + \frac{1}{4\pi}\iint_S\left(R\frac{\partial F}{\partial n} - F\frac{\partial R}{\partial n}\right) d\sigma. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Insomma se $F(x, y, z)$ fosse nell'interno di S e sul contorno, sempre regolare, si avrebbe:

$$F(x', y', z') = \frac{1}{4\pi}\iint_S\left(R\frac{\partial F}{\partial n} - F\frac{\partial R}{\partial n}\right) d\sigma,$$

se invece la F ha nell'interno di S dei punti singolari nel secondo membro compaiono dei termini relativi a detti punti.

Applichiamo ora questi concetti allo sviluppo in serie della $F(x, y, z)$. La (6) è stata trovata vera indipendentemente da qualunque ipotesi sulla grandezza della superficie S, se quindi facciamo spostare la S in *modo discreto*, facendo sì che essa non passi mai per alcun punto singolare, man mano capiteranno nel suo interno altri punti singolari e, fissato il punto (x', y', z'), la (6) sarà sempre applicabile solo crescerà il numero dei termini della somma delle G_r. Se ora supponiamo di far tendere il contorno S all'infinito con una tale legge (*se è possibile*) che esista il limite dell'

$$\iint_S\left(R\frac{\partial F}{\partial n} - F\frac{\partial R}{\partial n}\right) d\sigma,$$

al crescere indefinito del contorno e che sia:

$$\lim \iint_S\left(R\frac{\partial F}{\partial n} - F\frac{\partial R}{\partial n}\right) d\sigma = 0, \tag{7}$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

allora:

$$F(x', y', z') - \sum_{r=1}^{r=m} G_r(x', y', z' \mid a_r, b_r, c_r),$$

tende a zero, ma $F(x', y', z')$ è fisso quindi:

$$F(x', y', z') = \lim \sum_{r=1}^{r=m} G_r(x', y', z' \mid a_r, b_r, c_r),$$

limite che va preso al crescere indefinito di m ossia, per definizione di somma di una serie:

$$F(x', y', z') = \sum_{r=1}^{r=\infty} G_r(x', y', z' \mid a_r, b_r, c_r). \qquad (8)$$

Notando bene che nella serie del secondo membro i termini non sono aggruppati in modo arbitrario, giacchè il tendere ad un limite dell'integrale doppio sopra accennato e l'essere questo limite uguale allo zero dipende dalla particolare legge con cui varia il contorno e può benissimo avvenire che con un'altra legge di variazione del contorno detto integrale doppio non abbia più un limite o, avendolo, questo limite, non sia più uguale allo zero; quindi bisogna che i termini della serie (8) siano aggruppati all'istesso modo come via via si trovano introdotti i punti singolari nell'interno del contorno crescente.

Osserviamo poi che noi abbiamo supposto che (x', y', z') sia fisso ma la cosa vale anche se (x', y', z') varia in un certo campo Γ, quando la legge d'ingrandimento del contorno è *quella dell'ingrandimento in tutti i sensi;* basta, per vederlo, prendere per prima posizione di S un contorno che include il campo Γ. In tal caso è manifesto che se la (7) si verifica in ugual grado, (x', y', z') variando in Γ, anche la (8) converge in Γ in ugual grado.

§ 7. Notiamo un caso particolare in cui la (7) è verificata e quindi si può ottenere $F(x, y, z)$ sviluppata in serie di funzioni G.

Supponiamo che il contorno S sia una sfera col centro nell'origine il cui raggio varî in modo discreto con una tale legge che considerando la funzione F sul contorno crescente: $|F|$ e $\left|\frac{\partial F}{\partial n}\right|$ al crescere indefinito del raggio della sfera diminuiscano indefinitamente e tendano a zero (*), suppo-

(*) Notiamo che queste condizioni possono essere verificate perchè supponiamo che il raggio della sfera aumenta in modo discreto, non lo potrebbero certo essere se il raggio della sfera aumentasse in modo continuo, giacchè in vicinanza del punto all'infinito abbiamo infiniti punti in cui la F assume il valore infinito.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

niamo inoltre che esista il limite dell'espressione:

$$\rho \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial F}{\partial n} \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\varphi,$$

al crescere indefinito del raggio della sfera e sia:

$$\lim \rho \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial F}{\partial n} \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\varphi = 0,$$

allora io dico che la (7) è verificata e quindi la F è svolgibile in serie (8).

Osserviamo infatti che avendosi in serie convergente in ugual grado:

$$R = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{r^m P_m(\cos\gamma)}{\rho^{m+1}}; \quad \frac{\partial R}{\partial n} = -\sum_{m=0}^{m=\infty} (m+1) \frac{r^m P_m(\cos\gamma)}{\rho^{m+2}},$$

sostituendo nell'espressione:

$$\iint_S \left\{ R \frac{\partial F}{\partial n} - F \frac{\partial R}{\partial n} \right\} d\sigma,$$

ed integrando per serie, si otterrà una nuova serie convergente in ugual grado e siccome nel nostro caso $d\sigma = \rho^2 \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\varphi$ con ρ costante così:

$$\iint_S \left\{ R \frac{\partial F}{\partial n} - F \frac{\partial R}{\partial n} \right\} d\sigma =$$

$$= \sum_{m=0}^{m=\infty} \left\{ \frac{r^m}{\rho^{m-1}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} P_m(\cos\gamma) \frac{\partial F}{\partial n} \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\varphi + \right.$$

$$\left. + (m+1) \frac{r^m}{\rho^m} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} P_m(\cos\gamma) F \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\varphi \right\}.$$

E alla nuova serie, essendo convergente in ugual grado, è applicabile il teorema:

Il limite di una serie è la serie dei limiti.

Considerando il primo termine di detta serie ottenuto cioè per $m = 0$, il quale è dato da:

$$\rho \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial F}{\partial n} \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\varphi,$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

la prima parte ha per ipotesi per limite lo zero, ma anche la seconda parte ha per limite lo zero, al crescere indefinito del raggio della sfera, per l'ipotesi che $\lim |F| = 0$.

Gli altri termini della serie poi tendono a *fortiori* a zero perchè contengono ρ al denominatore e i loro numeratori tendono a zero, eccettuato la prima parte del termine che viene per $m = 1$:

$$r \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} P_1(\cos\gamma) \frac{\partial F}{\partial n} \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi,$$

la quale tende per sè stessa a zero per l'ipotesi che $\lim \left| \frac{\partial F}{\partial n} \right| = 0$ e perchè sappiamo che $|P_1(\cos\gamma)| \leq 1$. La serie dei limiti è composta di termini nulli quindi è nulla la sua somma cioè la (7) è verificata.

§ 8. Nei paragrafi precedenti noi avevamo una funzione $F(x, y, z)$ armonica uniforme con certi punti singolari e ci occupavamo di darne uno sviluppo che ne mettesse in evidenza le singolarità.

Viceversa domandiamoci ora:

Dato un gruppo infinito di punti tali che a distanza finita ne capiti sempre un numero finito, cioè un gruppo di punti avente un punto limite all'infinito, e fissate certe singolarità nei punti del gruppo, esiste una funzione armonica sempre regolare nello spazio eccettuato nei punti di quel gruppo dove ha le singolarità volute?

Risponde a questa domanda un teorema importantissimo che nella teoria nostra ci rappresenta la naturale estensione del teorema di Mittag-Leffler, per le funzioni di una variabile complessa:

Consideriamo un gruppo infinito di punti con un unico punto limite all'infinito, che è un gruppo numerabile e che possiamo quindi rappresentare con:

$$(a_k, b_k, c_k) \quad [k = 1, 2, \ldots \infty],$$

una volta concepito di aver disposti i punti in ordine di raggio vettore crescente, onde ponendo:

$$r_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2 + c_k^2},$$

sia:

$$\lim_{k=\infty} r_k = \infty.$$

Assegniamo per ciascuno dei nostri punti una funzione $G_k(x, y, z \mid a_k, b_k, c_k)$ *che dia la singolarità in* (a_k, b_k, c_k), *inteso che la* G_k *possa*

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

anche ridursi alla somma di un numero finito di polinomî $V_{-(m+1)}(x - a_k, y - b_k, z - c_k)$, *allora diciamo che si può sempre costruire una funzione armonica* $F(x, y, z)$ *da per tutto regolare, eccettuato nei punti del gruppo in discorso dove ha le volute singolarità.*

Come corollario seguirà che:

Potremo costruire una funzione armonica uniforme da per tutto regolare, eccettuato in un gruppo infinito di punti con un unico punto limite all'infinito, nei quali ha delle singolarità polari prefissate ad arbitrio (*).

Notiamo intanto che se $F(x, y, z)$ è una funzione armonica che soddisfa alle condizioni richieste vi soddisfa anche:

$$F(x, y, z) + G(x, y, z),$$

dove $G(x, y, z)$ è una funzione armonica (§ 4) regolare in tutto lo spazio eccettuato all'infinito; ma viceversa questa è la funzione più generale, giacchè se F e F_1 sono due funzioni che soddisfano, la differenza $F - F_1$ è sempre regolare a distanza finita, non può essere quindi che una funzione $G(x, y, z)$.

Possiamo sbarazzarci subito dal caso in cui l'origine sia un punto singolare, perchè se questo avvenisse basterebbe (una volta costruita la funzione F relativa agli altri punti) aggiungere ad essa la G che ci dà la singolarità nell'origine.

Allora presa una G_k qualunque siccome essa è da per tutto nello spazio una funzione finita, continua e soddisfacente all'equazione $\Delta = 0$, fuorchè in (a_k, b_k, c_k), sarà tale in tutta una sfera S_k col centro nell'origine e raggio uguale alla distanza r_k dell'origine dal punto (a_k, b_k, c_k); in una tale sfera sarà quindi sviluppabile in una serie di polinomî $V_m^{(k)}(x, y, z)$ con indice positivo (§ 2), si avrà cioè:

$$G_k = \sum_{m=0}^{m=\infty} V_m^{(k)}(x, y, z). \qquad (\gamma)$$

E purchè ci limitiamo a considerare campi interni a detta sfera la serie del secondo membro sarà convergente in ugual grado; in particolare dunque sarà tale in una sfera S'_k col centro nell'origine e raggio uguale a $r_k - \delta$, dove δ è un numero positivo piccolo a piacere ma che una volta scelto intendiamo poi di fissare. Cioè presa una quantità positiva ε_k, piccola a pia-

(*) Fino a questo punto il teorema era stato già esteso dall'Appell nella Memoria citata.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

cere si può sempre trovare un numero m_k tanto grande che sia:

$$\left| G_k - \sum_0^{m_k} {}_m V_m^{(k)}(x, y, z) \right| < \varepsilon_k,$$

qualunque sia la posizione del punto (x, y, z) nella sfera S'_k.

Noi sceglieremo la ε_k facente parte di una successione di quantità positive:

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_k, \ldots,$$

che assoggetteremo all'unica condizione che la serie $\sum_{k=1}^{k=\infty} \varepsilon_k$ sia convergente.

Ciò posto consideriamo la serie:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \left\{ G_k - \sum_0^{m_k} {}_m V_m^{(k)}(x, y, z) \right\}, \tag{σ}$$

io dico che in qualsivoglia campo a distanza finita, da cui siano esclusi i punti (a_k, b_k, c_k), questa serie è convergente in ugual grado; ed allora, i suoi termini essendo in tali campi funzioni armoniche sempre regolari, pel teorema di Harnack (§ 2) ne seguirà che in qualsivoglia campo a distanza finita dello spazio da cui siano esclusi i punti (a_k, b_k, c_k) essa ci rappresenta una funzione armonica sempre regolare.

Rimarrà poi a vedere come si comporta detta funzione nei punti (a_k, b_k, c_k); sarà facile assicurarsi che in tali punti diventa singolare ed ha precisamente le singolarità volute.

Sia Γ un qualsivoglia campo a distanza finita nello spazio, potremo descrivere una sfera S' col centro nell'origine e di raggio R tanto grande che includa Γ nel suo interno, ed allora basterà provare l'asserto per la sfera S'.

Descriviamo perciò con centro nell'origine e con raggio $R + \delta$ una seconda sfera S, nell'interno e sul contorno di questa seconda sfera capiteranno dei punti (a_k, b_k, c_k) in numero finito, p. e. siano:

$$(a_1, b_1, c_1) \quad (a_2, b_2, c_2) \ldots \quad (a_n, b_n, c_n),$$

onde i punti:

$$(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}) \quad (a_{n+2}, b_{n+2}, c_{n+2}) \ldots,$$

saranno tutti esterni ad S (*).

(*) Si rammenti che io suppongo ordinati i punti (a_k, b_k, c_k) in ordine di raggio vettore crescente.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Allora siccome dai campi che consideriamo sono esclusi i punti singolari, e in punti non singolari i termini della serie (σ) hanno *valori finiti*, invece di provare la convergenza in ugual grado della (σ) nella sfera S' (esclusi i punti eccezionali) basterà provare la convergenza in ugual grado in S' di:

$$\sum_{k=n+1}^{k=\infty} \left\{ G_k - \sum_0^{m_k} {}_m V_m^{(k)}(x, y, z) \right\},$$

o meglio ancora di:

$$\sum_{k=n+1}^{k=\infty} \left| G_k - \sum_0^{m_k} {}_m V_m^{(k)}(x, y, z) \right|. \tag{σ'}$$

Ma la sfera S' è manifestamente interna alle sfere S_k corrispondenti ai valori di k: $n+1$, $n+2$,... quindi per questi valori di k, qualsiasi la posizione di (x, y, z) in S', avremo:

$$\left| G_k - \sum_0^{m_k} {}_m V_m^{(k)}(x, y, z) \right| < \varepsilon_k .$$

Se ne conclude che i termini della serie (σ') sono rispettivamente minori di quelli della serie (pure a termini positivi) $\sum\limits_{k=n+1}^{k=\infty} \varepsilon_k$ e quindi, questa serie essendo convergente per ipotesi, ne risulterà che la (σ') converge, anzi in ugual grado in S'.

Come si comporta la funzione $F(x, y, z)$ ora costruita, per esempio nel punto (a_1, b_1, c_1)?

Si ha:

$$F(x, y, z) = G_1 - \sum_0^{m_1} {}_m V_m^{(1)}(x, y, z) +$$
$$+ \sum_{k=2}^{k=\infty} \left\{ G_k - \sum_0^{m_k} {}_m V_m^{(k)}(x, y, z) \right\}.$$

L'espressione:

$$\sum_{k=2}^{k=\infty} \left\{ G_k - \sum_0^{m_k} {}_m V_m^{(k)}(x, y, z) \right\},$$

si trova nelle stesse condizioni della serie in discorso, con l'unica differenza che difetta del primo termine che è stato posto in evidenza, quindi è regolare da per tutto fuorchè al più in (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3)... in particolare nel punto (a_1, b_1, c_1); l'espressione:

$$\sum_0^{m_1} {}_m V_m^{(1)}(x, y, z),$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

è regolare in tutto lo spazio fuorchè all'infinito, in particolare è regolare nel punto (a_1, b_1, c_1); quindi avremo:

$$F = G_1 + \Psi,$$

dove Ψ è una funzione armonica regolare in (a_1, b_1, c_1).

E questo ci dimostra appunto che la F diventa singolare in detto punto ed ha per *parte principale* la G_1.

Analogamente si ragioni per gli altri punti.

§ 9. Il teorema di Mittag-Leffler, dimostrato nel precedente paragrafo, ci fornisce non solo la certezza dell'esistenza di una funzione armonica uniforme e regolare da per tutto, eccettuato in un gruppo infinito di punti con un unico punto limite all'infinito nei quali ha singolarità prefissate ad arbitrio, ma ci dà anche il modo di costruire questa funzione per mezzo di una serie convergente in ugual grado. Abbiamo visto infatti che se i punti sono di coordinate:

$$(a_k, b_k, c_k) \quad [k = 1, 2, \ldots \infty],$$

e le singolarità relative sono:

$$G_k(x, y, z \mid a_k, b_k, c_k) \quad [k = 1, 2, \ldots \infty],$$

la funzione $F(x, y, z)$ più generale, soddisfacente alle condizioni sopra poste, è data da:

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \Big\{ G_k(x, y, z \mid a_k, b_k, c_k) - \\ - \sum_{m=0}^{m=m_k} V_m^{(k)}(x, y, z) \Big\} + G(x, y, z), \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

dove $G(x, y, z)$ è una qualunque funzione armonica sempre regolare a distanza finita, $\sum\limits_{m=0}^{m=m_k} V_m^{(k)}(x, y, z)$ è la somma dei primi $m_k + 1$ termini dello sviluppo di $G_k(x, y, z \mid a_k, b_k, c_k)$ in serie di polinomî $V_m(x, y, z)$ pei punti interni ad una sfera S_k col centro nell'origine e raggio uguale alla distanza dell'origine da (a_k, b_k, c_k) e gli m_k sono dei numeri *sufficientemente elevati*, da assicurare la convergenza in ugual grado della serie in discorso in ogni campo a distanza finita da cui siano esclusi i punti singolari. Tutto ciò nell'ipotesi che tra i punti (a_k, b_k, c_k) non vi sia l'origine, al quale caso è sempre possibile ridursi.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Potremo in particolare costruire una funzione armonica $F(x, y, z)$ uniforme e regolare da per tutto, eccettuato nei punti (a_k, b_k, c_k) nei quali abbia poli del prim'ordine con residuo A_k, bastando per questo fare nella teoria generale:

$$G_k(x, y, z \mid a_k, b_k, c_k) = \frac{A_k}{\sqrt{(x-a_k)^2+(y-b_k)^2+(z-c_k)^2}}.$$

Cominciamo perciò collo sviluppare $\dfrac{A_k}{\sqrt{(x-a_k)^2+(y-b_k)^2+(z-c_k)^2}}$ in serie di polinomî $V_m(x, y, z)$ nei punti interni alla sfera S_k considerata; se indichiamo con r e con ρ le distanze dall'origine di un punto $M \equiv (x, y, z)$ interno a S_k e del punto $L \equiv (a_k, b_k, c_k)$ cioè poniamo:

$$r = +\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \rho = +\sqrt{a_k^2+b_k^2+c_k^2},$$

e con γ l'angolo che le due orientazioni OM, OL formano tra loro, allora posto $R = ML$ cioè:

$$R = \sqrt{(x-a_k)^2+(y-b_k)^2+(z-c_k)^2},$$

si avrà anche:

$$R = \sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos\gamma},$$

e siccome $\rho \neq 0$, per l'ipotesi che tra i punti (a_k, b_k, c_k) non vi è l'origine, e di più $r < \rho$ giacchè vogliamo considerare punti (x, y, z) interni ad S_k, così potremo sviluppare $\dfrac{1}{R}$ in serie di Legendre convergente in ugual grado pei punti interni alla sfera e si avrà:

$$\frac{1}{R} = \sum_0^\infty{}_m \frac{r^m}{\rho^{m+1}} P_m(\cos\gamma), \tag{10}$$

dove $P_m(\cos\gamma)$ è, al solito, un polinomio di Legendre, onde $r^m P_m(\cos\gamma)$, considerato come funzione di x, y, z, è un polinomio $V_m(x, y, z)$.

La (10) ci fornisce dunque lo sviluppo cercato di $\dfrac{A_k}{R}$; entrando allora nella (9), colle particolarizzazioni inerenti al caso speciale che trattiamo, si avrà:

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z) = \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \Bigg\{ & \frac{1}{\sqrt{(x-a_k)^2+(y-b_k)^2+(z-c_k)^2}} - \\ & - \sum_0^{m_k} \frac{r^m}{\rho^{m+1}} P_m(\cos\gamma) \Bigg\} + G(x, y, z), \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

e rimarrà unicamente a vedere come bisognerà prendere i numeri:

$$m_k \, [k = 1, \, 2, \ldots \, \infty].$$

Secondo il teorema ricordato di Mittag-Leffler basterà che i numeri m_k siano scelti così grandi da assicurare la convergenza in ugual grado della serie (11) in ogni campo a distanza finita da cui siano esclusi i punti singolari, ora considerando un qualsivoglia campo a distanza finita Γ potremo sostituirgli la considerazione di un campo sferico Γ' col centro nell'origine e comprendente Γ nel suo interno e basterà allora prendere i numeri m_k talmente grandi da assicurare la convergenza in ugual grado della serie (11) in Γ' esclusi i punti eccezionali.

In Γ' non capiteranno che un numero finito di punti singolari e potremo fare astrazione dai termini della serie (11) che ad essi corrispondono, limitandoci a provare la convergenza della serie residua, sicchè la quistione è ridotta a prendere gli m_k talmente grandi da assicurare la convergenza in ugual grado in Γ' della:

$$\Sigma_1 A_k \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x-a_k)^2 + (y-b_k)^2 + (z-c_k)^2}} - \sum_0^{m_k} {}_m \, r^m \frac{P_m(\cos\gamma)}{\rho^{m+1}} \right\}, \tag{11'}$$

dove Σ_1 è la somma dei termini della (11) estesa ai valori di k corrispondentemente ai quali otteniamo punti $(a_k, \, b_k, \, c_k)$ situati fuori di Γ', cioè corrispondentemente ai quali si ha $\rho > r$ qualunque sia (x, y, z) nell'interno di Γ'.

Ma per i valori di $r < \rho$ vale la (10) e quindi l'altra:

$$\frac{1}{R} - \sum_0^{m_k} {}_m \frac{r^m P_m(\cos\gamma)}{\rho^{m+1}} = \sum_{m_k+1}^{\infty} {}_m \frac{r^m P_m(\cos\gamma)}{\rho^{m+1}},$$

onde sostituendo in (11') essa diviene:

$$\Sigma_1 \, A_k \sum_{m_k+1}^{\infty} {}_m \frac{r^m P_m(\cos\gamma)}{\rho^{m+1}}, \tag{12}$$

e poichè $| P_m(\cos\gamma) | \leq 1$ basterà che gli m_k siano presi talmente grandi da assicurare la convergenza in ugual grado della:

$$\Sigma_1 | A_k | \sum_{m_k+1}^{\infty} {}_m \frac{r^m}{\rho^{m+1}} = \Sigma_1 | A_k | \frac{r^{m_k+1}}{1 - \dfrac{r}{\rho}} \cdot \frac{1}{\rho^{m_k+2}}, \tag{13}$$

il che è perfettamente rigoroso in quanto $r < \rho$. Concludendo si ottiene dunque che gli m_k debbono essere presi talmente grandi da assicurare la convergenza in ugual grado in Γ' di:

$$\Sigma_1 \,|\, A_k \,|\, \frac{r^{m_k+1}}{1-\frac{r}{\rho}} \cdot \frac{1}{\rho^{m_k+2}}, \tag{14}$$

qualunque sia la grandezza di Γ'.

E finchè non si fissino condizioni ulteriori sui residui nei punti d'infinito e sulla disposizione dei punti singolari non si può aggiungere altro, ma vi è un caso notevole in cui si può assicurare la convergenza in ugual grado della (14).

Supponiamo che i residui nei punti d'infinito non vadano indefinitamente crescendo in valore assoluto, onde sia per tutti i valori di k:

$$|A_k| < N, \tag{15}$$

con N numero finito, osserviamo poi che siccome $\lim_{k=\infty} \rho = \infty$ così ove si consideri la serie:

$$\Sigma \frac{1}{\rho},$$

estesa a tutti i valori di k da 1 a ∞ sarà verificata la prima condizione di convergenza cioè: $\lim_{k=\infty} \frac{1}{\rho} = 0$ ma tale condizione non basta per essere sicuri della convergenza di detta serie, supponiamo ora che sia possibile trovare un numero intiero λ (invariabile col k) tale che:

$$\Sigma \frac{1}{\rho^{\lambda+2}}, \tag{16}$$

converga, allora io dico che tutti i numeri m_k si possono prendere uguali tra loro e precisamente uguali a λ; basterà far vedere che cogli m_k così determinati è assicurata la convergenza in ugual grado della (14) in ogni campo sferico Γ' a distanza finita col centro nell'origine.

Invero se la (16) è convergente lo è anche:

$$\Sigma_1 \frac{1}{\rho^{\lambda+2}}, \tag{16'}$$

d'altra parte per ipotesi $|A_k| < N$; r^{m_k+1} (siccome il campo che consideriamo è a distanza finita) si mantiene inferiore ad una quantità finita, in quanto a $1-\frac{r}{\rho}$, siccome per i valori di k cui è estesa Σ_1 è $\frac{r}{\rho} < 1$ cioè $1-\frac{r}{\rho} > 0$,

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

si mantiene superiore a una quantità non nulla, anzi al crescere indefinito di ρ tende ad *1*; in conclusione dunque la serie (14) si ottiene dalla serie convergente (16') moltiplicandone i termini per quantità che non superano una quantità finita e allora, trattandosi di serie a termini positivi, segue che se la (16') è convergente lo è anche la (14), di più in ugual grado in Γ', onde è lecito prendere:

$$m_k = \lambda \quad [k = 1, 2, \ldots \infty].$$

La (11) ci dà in tal caso:

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z) = \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \Bigg\{ & \frac{1}{\sqrt{(x - a_k)^2 + (y - b_k)^2 + (z - c_k)^2}} - \\ & - \sum_{m=0}^{m=\lambda} \frac{r^m P_m(\cos\gamma)}{\rho^{m+1}} \Bigg\} + G(x, y, z). \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Se supponiamo che i residui nei punti singolari siano tutti uguali, allora la condizione (15) è certo verificata e basterà quindi assicurarsi solo della convergenza della serie:

$$\Sigma \frac{1}{\rho^{\lambda+2}}.$$

§ 10. Un caso notevolissimo in cui possiamo determinare un λ tale che:

$$\Sigma \frac{1}{\rho^{\lambda+2}},$$

converga, è quello in cui la distanza tra i punti del nostro gruppo non va indefinitamente diminuendo, dico allora infatti che basta prendere $\lambda = 2$ cioè che:

$$\Sigma \frac{1}{\rho^4} = \Sigma \frac{1}{(a_k^2 + b_k^2 + c_k^2)^2},$$

è una serie convergente.

Supponiamo dunque che esista un numero positivo d tale che:

$$\sqrt{(a_k - a_{k_1})^2 + (b_k - b_{k_1})^2 + (c_k - c_{k_1})^2} > d,$$

(k e k_1 prendendo tutti i valori interi distinti da 1 a ∞) se allora noi decomponiamo lo spazio in una rete di cubi di diagonale d, ossia scelta una terna di assi cartesiani ortogonali conduciamo i piani di equazione:

$$x = m \frac{d}{\sqrt{3}}, \quad y = n \frac{d}{\sqrt{3}}, \quad z = p \frac{d}{\sqrt{3}}, \tag{18}$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

dove m, n, p sono numeri intieri arbitrarî, è evidente che dentro uno stesso cubo non possono trovarsi due punti (a_k, b_k, c_k) al massimo dunque ne capiterà uno e potrà capitarne anche nessuno.

Escludiamo i *4* cubi che hanno un vertice nell'origine, in essi è ben vero che possono capitare punti (a_k, b_k, c_k) ma in tal caso nella serie $\Sigma \frac{1}{\rho^4}$ possiamo ben prescindere dai primi *4* termini e provare la convergenza della serie residua; una volta fatta quest'esclusione, siccome al più dentro ogni cubo c'è un solo punto (a_k, b_k, c_k), noi ingrandiamo la serie a termini positivi che consideriamo sostituendo alla distanza di questo punto dall'origine, la distanza dall'origine del più prossimo vertice del cubo stesso; basterà quindi provare la convergenza di:

$$\Sigma \frac{1}{\rho_1^4},$$

dove ρ_1 è la distanza di un vertice (x, y, z) della nostra rete dall'origine (l'origine esclusa) e siccome in forza delle (18):

$$\rho_1^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \frac{d^2}{3}(m^2 + n^2 + p^2),$$

basterà provare la convergenza di:

$$\sum_{m,n,p}' \frac{1}{(m^2 + n^2 + p^2)^2} \text{ (*)}, \tag{19}$$

(*) Si noti che la convergenza di:

$$\sum_{m,n,p}' \frac{1}{(m^2 + n^2 + p^2)^2},$$

può derivare come caso particolare del criterio generale di convergenza di una serie multipla dato da Einsestein nel Tomo 35.° del *Journal de Crelle.*

Il teorema di Einsestein è il seguente:

Siano $x_1, x_2, \ldots x_n$ *n variabili percorrenti ciascuna tutti i valori intieri da* $-\infty$ *a* $+\infty$, *la combinazione* $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ *esclusa, e siano* $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ *n funzioni lineari ed omogenee di queste variabili:*

$$\xi_i = a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 + \ldots + a_{i,n} x_n \quad [i = 1, 2, \ldots n],$$

tali che il determinante:

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

indicando con Σ' la somma estesa a tutti i valori intieri di m, n, p la combinazione (0, 0, 0) esclusa.

Notiamo intanto che siccome la (19) è una serie a termini positivi, se la spezzo (in un modo qualunque) in più serie e provo la convergenza di ciascuna di esse sarà anche provata la convergenza della serie primitiva.

Le direzioni degli assi delle x, delle y, delle z dividono lo spazio in 8 triedri potremo quindi ripartire corrispondentemente i vertici della rete in 8 classi, ciascuna comprendente i vertici situati in un triedro, e alle 8 classi corrisponderanno 8 serie manifestamente identiche, il valore di $m^2 + n^2 + p^2$ non dipendendo dal segno di m, n, p; limitiamoci quindi a provare la convergenza di:

$$\Sigma'_1 \frac{1}{(m^2 + n^2 + p^2)^2}, \tag{19'}$$

indicando con Σ'_1 la somma estesa ai valori positivi di m, n, p, corrispondente cioè ai vertici della rete situati nel triedro formato dalle orientazioni positive degli assi delle x, delle y, delle z, l'origine esclusa.

Osserviamo di più che la retta OE, intersezione dei piani bisettori dei diedri, del triedro trirettangolo $O(x, y, z)$, dà origine a tre triedri:

$$O(x, y, \varepsilon) \quad O(y, z, \varepsilon) \quad O(z, x, \varepsilon),$$

e la (19') si spezza in tre serie: una relativa ai vertici situati nel primo triedro, l'altra relativa ai vertici situati nel secondo, la terza relativa ai vertici situati nel terzo, manifestamente identiche giacchè l'una si ottiene dall'altra con lo scambio di due dei tre numeri m, n, p.

---

sia differente da zero; consideriamo allora la serie:

$$\sideset{'}{}\sum_{x_1=-\infty}^{x_1=\infty} \sum_{x_2=-\infty}^{x_2=\infty} \cdots \sum_{x_n=-\infty}^{x_n=\infty} \frac{1}{(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2)^\mu};$$

dove μ *è un numero positivo (intiero o no) e dove l'accento posto innanzi indica che si deve escludere la combinazione* $(0, 0, \ldots 0)$, *essa converge se* $2\mu > n$ *diverge se* $2\mu \leq n$.

Supponendo $a_{i,i} = 1$, $a_{i,k} = 0\ (i \neq k)$ e quindi $D = 1$ ne segue che la serie:

$$\sideset{'}{}\sum_{x_1=-\infty}^{x_1=+\infty} \sum_{x_2=-\infty}^{x_2=+\infty} \cdots \sum_{x_n=-\infty}^{x_n=+\infty} \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^\mu},$$

converge se $2\mu > n$, diverge se $2\mu \leq n$, e poichè nel caso della (19) $n = 3$, $\mu = 2$ si ha $2\mu > n$ ossia convergenza.

Io ho però preferito di dare in questa Nota una dimostrazione geometrica che mi sembra abbastanza elegante.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Basterà dunque limitarsi a provare la convergenza della serie:

$$\Sigma'_2 \frac{1}{(m^2+n^2+p^2)^2}, \tag{19''}$$

corrispondente ai vertici situati nel triedro $O(x, y, \varepsilon)$ od anche (chiamando $O\varphi$ la bisettrice dell'annolo $x\,\hat{o}\,y$) basterà provare la convergenza della serie i cui termini corrispondono ai vertici situati nel triedro $O(x, \varphi, \varepsilon)$:

$$\Sigma'_3 \frac{1}{(m^2+n^2+p^2)^2}. \tag{19'''}$$

Considerando gl' infiniti vertici situati sulla faccia $x\,\hat{o}\,\varphi$ avremo corrispondentemente infiniti termini della (19'''), ottenuti facendo $p=0$, e la serie da questi formata è certamente convergente giacchè è convergente (la somma essendo estesa a tutti i valori intieri di m, n eccettuata la combinazione 0, 0):

$$\sum_{m,n\,-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{3}{2}}}\text{ (*)},$$

risulta quindi, a fortiori, la convergenza di:

$$\sum_{m,n\,-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(m^2+n^2)^2},$$

e a maggiore ragione della serie:

$$\Sigma' \frac{1}{(m^2+n^2)^2},$$

quando m, n non percorrono che i soli valori corrispondenti a vertici situati su $x\,\hat{o}\,\varphi$.

Sicchè in fine possiamo ridurci a dimostrare la convergenza di:

$$\Sigma'_4 \frac{1}{(m^2+n^2+p^2)^2}, \tag{19$^{\text{IV}}$}$$

m, n, p assumendo valori tali da ottenere vertici del triedro $O(x, \varphi, \varepsilon)$ esclusi quelli della faccia $x\,\hat{o}\,\varphi$.

Risulta subito che sulla porzione di perpendicolare condotta da un punto $\left(m\frac{d}{\sqrt{3}}, n\frac{d}{\sqrt{3}}\right)$, situato nell' angolo $x\,\hat{o}\,\varphi$, al piano di quest'angolo e interna

(*) Veggasi il corso delle *Lezioni* sulle *Funzioni di una variabile complessa*, svolto dal prof. L. Bianchi, a Pisa.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

al triedro $O(x, \varphi, \varepsilon)$ ci sono sempre n vertici della rete, escluso quello di partenza, è chiaro quindi che la serie (19^{IV}) può scriversi:

$$\sum_{m,n}\left\{\sum_{p=1}^{p=n}\frac{1}{(m^2+n^2+p^2)^2}\right\},$$

indicando con $\Sigma_{m,n}$ la somma estesa ai valori di m, n per cui si hanno vertici della rete situati nell'angolo $x\,\hat{o}\,\varphi$ eccettuato l'origine.

Cioè la serie che dobbiamo considerare è:

$$\Sigma_{m,n}\left\{\frac{1}{(m^2+n^2+1^2)^2}+\frac{1}{(m^2+n^2+2^2)^2}+\cdots+\frac{1}{(m^2+n^2+n^2)^2}\right\}.$$

Ciascuno dei termini situati dentro parentesi è minore di $\frac{1}{(m^2+n^2)^2}$ e quindi basterà provare la convergenza di:

$$\sum_{m,n}\frac{n}{(m^2+n^2)^2},$$

(estesa ai supposti valori di m, n) od anche, essendo $n<(m^2+n^2)^{\frac{1}{2}}$, basterà provare la convergenza di:

$$\sum_{m,n}\frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{3}{2}}},$$

il che è notorio.

Risulta adunque dimostrata la convergenza di:

$$\sum_{m,n,p}{}'\frac{1}{(m^2+n^2+p^2)^2},$$

m, n, p percorrendo tutti i possibili valori intieri, la combinazione (0, 0, 0) eccettuata, e allora anche quella di $\Sigma\,\frac{1}{\rho^4}$.

§ 11. Dalle precedenti ricerche segue rigorosamente il teorema:

La funzione più generale $F(x, y, z)$ armonica uniforme e regolare da per tutto, eccettuato in un gruppo infinito di punti (a_k, b_k, c_k) tra i quali non vi sia l'origine e con un unico punto limite all'infinito, in cui abbia poli del 1.º ordine con residuo uguale ad A, nell'ipotesi che la distanza di due punti qualunque del gruppo si mantenga superiore ad una quantità finita

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

differente da zero, è data da:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} A \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x-a_k)^2+(y-b_k)^2+(z-c_k)^2}} - \frac{1}{\rho} - \frac{r\,P_1(\cos\gamma)}{\rho^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{r^2\,P_2(\cos\gamma)}{\rho^3} \right\} + G(x,\ y,\ z).$$

Questo importante risultato ci permette di pervenire subito alla costruzione della funzione che l'Appell indica con $Z(x,\ y,\ z)$.

Consideriamo tre terne di quantità:

$$\begin{matrix} a', & b', & c', \\ a'', & b'', & c'', \\ a''', & b''', & c''', \end{matrix}$$

tali che il determinante:

$$D = \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{vmatrix},$$

sia differente da zero, onde se interpretiamo $(a',\ b',\ c')$, $(a'',\ b'',\ c'')$ $(a''',\ b''',\ c''')$ come coordinate cartesiane ortogonali di tre punti A', A'', A''', questi non saranno in un piano con l'origine degli assi e $O\,A'$, $O\,A''$, $O\,A'''$ potranno pensarsi come tre costole consecutive di un parallelepipedo P.

Se consideriamo poi i punti di coordinate:

$$\left.\begin{aligned} a_k &= m'\,a' + m''\,a'' + m'''\,a''' \\ b_k &= m'\,b' + m''\,b'' + m'''\,b''' \\ c_k &= m'\,c' + m''\,c'' + m'''\,c''', \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

m', m'', m''' percorrendo tutti i possibili valori intieri, essi sono i vertici della rete di parallelepipedi costruita prendendo per parallelepipedo *fondamentale* il parallelepipedo P, cioè costituita di parallelepipedi aderenti l'uno all'altro per una faccia e identici a P.

Il gruppo dei punti (20) è dunque un gruppo di punti con un unico punto limite all'infinito, cioè soddisfa intanto alle condizioni contemplate nel teorema di Mittag-Leffler del § 8. A dire il vero in esso è compreso anche l'origine, corrispondente ai valori: $m'=0$, $m''=0$, $m'''=0$, escludiamo perciò momentaneamente la terna $m'=0$, $m''=0$, $m'''=0$.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Osserviamo di più che la distanza tra due vertici qualunque della rete si mantiene superiore ad una quantità fissa differente da zero, quindi il gruppo di punti (20) soddisfa anche alle condizioni contemplate nel § 10 e allora invocando i risultati precedenti potremo concludere che:

Esisterà certamente una funzione armonica $F(x, y, z)$ uniforme e regolare da per tutto, eccettuato nei punti (20) *[dai quali è esclusa l'origine] e che in essi ha poli del prim'ordine con residuo $+1$; la funzione più generale soddisfacente a queste proprietà è:*

$$\Sigma' \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x-a_k)^2+(y-b_k)^2+(z-c_k)^2}} - \frac{1}{\rho} - \frac{r P_1(\cos\gamma)}{\rho^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{r^2 P_2(\cos\gamma)}{\rho^3} \right\} + G(x, y, z),$$

intesa la somma estesa a tutti i valori intieri di m', m'', m''' esclusa la combinazione (0, 0, 0).

Se vogliamo di più che la funzione $F(x, y, z)$ abbia anche nell'origine un polo del 1.° ordine con residuo $+1$, se cioè vogliamo considerare la funzione F che in tutti i vertici della rete suddetta di parallelepipedi, nessuno escluso, abbia poli del prim'ordine con residuo $+1$ basterà aggiungere la singolarità relativa all'origine cioè $\frac{1}{r}$ $(r = +\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ e si avrà:

$$F(x, y, z) = \frac{1}{r} + \Sigma' \left\{ \frac{1}{R} - \frac{1}{\rho} - \frac{r P_1(\cos\gamma)}{\rho^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{r^2 P_2(\cos\gamma)}{\rho^3} \right\} + G(x, y, z).$$

Se prendiamo $G(x, y, z) = 0$ otteniamo una particolare funzione F godente delle proprietà nominate, a questa funzione noi daremo con Appell il nome di funzione $Z(x, y, z)$ onde per definizione:

$$Z(x, y, z) = \frac{1}{r} + \Sigma' \left\{ \frac{1}{R} - \frac{1}{\rho} - \frac{r P_1(\cos\gamma)}{\rho^2} - \frac{r^2 P_2(\cos\gamma)}{\rho^3} \right\}. \tag{21}$$

§ 12. Notiamo alcune proprietà della funzione $Z(x, y, z)$, *in parte già trovate dall'*Appell.

Dalla (21) segue intanto subito che:

$$Z(x, y, z) = Z(-x, -y, -z),$$

cioè la $Z(x, y, z)$ non si altera cambiando x, y, z in: $-x, -y, -z$.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Risulta poi subito che tutte le derivate seconde delle differenze:

$$Z(x+a^{(i)},\ y+b^{(i)},\ z+c^{(i)})-Z(x,\ y,\ z)\quad [i=1,\ 2,\ 3],$$

sono nulle e quindi se ne conclude che dette differenze sono funzioni lineari di x, y, z cioè che si ha:

$$\left.\begin{aligned}
&Z(x+a',\ \ y+b',\ \ z+c')-Z(x,\ y,\ z)=\\
&\qquad\qquad =A'x+B'y+C'z+E'\\
&Z(x+a'',\ \ y+b'',\ \ z+c'')-Z(x,\ y,\ z)=\\
&\qquad\qquad =A''x+B''y+C''z+E''\\
&Z(x+a''',\ y+b''',\ z+c''')-Z(x,\ y,\ z)=\\
&\qquad\qquad =A'''x+B'''y+C'''z+E'''.
\end{aligned}\right\}\qquad (22)$$

I 12 coefficienti:

$$A^{(i)},\ B^{(i)},\ C^{(i)},\ E^{(i)}\quad [i=1,\ 2,\ 3],$$

sono funzioni delle 9 quantità:

$$a^{(i)},\ b^{(i)},\ c^{(i)}\quad [i=1,\ 2,\ 3],$$

la cui forma si può trovare calcolando le differenze (22) mercè la formola (21) che ci definisce la $Z(x,\ y,\ z)$.

In conclusione la $Z(x,\ y,\ z)$ non rimane inalterata allorchè si sostituisce a:

$$x,\ y,\ z:\ x+a^{(i)},\ y+b^{(i)},\ z+c^{(i)}\quad [i=1,\ 2,\ 3];$$

ma si aumenta di $A^{(i)}x+B^{(i)}y+C^{(i)}z+E^{(i)}$, invece ove si consideri la *funzione armonica:*

$$\frac{\partial^{l+m+n}\,Z(x,\ y,\ z)}{\partial x^l\,\partial y^m\,\partial z^n},$$

nella quale l, m, n assumono tutti i possibili valori intieri (positivi o nulli) per cui $l+m+n\geqq 2$, essa è una funzione *armonica triplamente periodica coi 3 gruppi di periodi:*

$$a^{(i)},\ b^{(i)},\ c^{(i)}\quad [i=1,\ 2,\ 3].$$

Possiamo ora trovare a priori alcune relazioni tra le 12 costanti:

$$A^{(i)},\ B^{(i)},\ C^{(i)},\ E^{(i)}\quad [i=1,\ 2,\ 3].$$

La 1.ª e la 2.ª delle (22) ci dànno, cambiando rispettivamente x, y, z in in $x+a''$, $y+b''$, $z+c''$ e x, y, z, in $x+a'$, $y+b'$, $z+c'$, le due rela-

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

zioni:

$$\begin{aligned}
&Z(x+a''+a',\ y+b''+b',\ z+c''+c')-\\
&\quad -Z(x+a'',\ y+b'',\ z+c'')=\\
&\qquad =A'(x+a'')+B'(y+b'')+C'(z+c'')+E'\\
&Z(x+a''+a',\ y+b''+b',\ z+c''+c')-\\
&\quad -Z(x+a',\ y+b',\ z+c')=\\
&\qquad =A''(x+a')+B''(y+b')+C''(z+c')+E''.
\end{aligned}$$

Sommando membro a membro la prima di queste relazioni con la seconda delle (22) e la seconda con la prima e paragonando le due relazioni ottenute risulta l'altra:

$$A'a''+B'b''+C'c''=A''a'+B''b'+C''c',$$

similmente si ottengono le analoghe, onde si ha il gruppo:

$$\left.\begin{aligned}
A'\ a''+B'\ b''+C'\ c''&=A''\ a'+B''\ b'+C''\ c'\\
A''\ a'''+B''\ b'''+C''\ c'''&=A'''\ a''+B'''\ b''+C'''\ c''\\
A'''\ a'+B'''\ b'+C'''\ c'&=A'\ a'''+B'\ b'''+C'\ c'''.
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Un'altra relazione tra le costanti $A^{(i)}$, $B^{(i)}$, $C^{(i)}$ si può ottenere nel modo seguente.

Considerando la funzione armonica:

$$Z_1(x,\ y,\ z)=Z\left(x-\frac{a'}{2},\ y-\frac{b'}{2},\ z-\frac{c'}{2}\right),$$

la quale è sempre regolare nell'interno e sul contorno del parallelepipedo P, se si eccettua il punto $\left(\frac{a'}{2},\ \frac{b'}{2},\ \frac{c'}{2}\right)$, posto nell'interno, in cui ha un polo del prim'ordine con residuo $+1$; se ad essa si applica il teorema del n.° 4 del *§ 5* si ha:

$$\iint\limits_P \frac{\partial Z_1(x,\ y,\ z)}{\partial n}\, d\sigma=-4\pi, \tag{24}$$

intendendo al solito che la derivata sia presa secondo la normale esterna al parallelepipedo. D'altra parte noi possiamo calcolare direttamente l'integrale doppio del primo membro spezzandolo in altri *6* estesi alle *6* facce del parallelepipedo P e riunendo gl'integrali estesi a due facce opposte. Se si ese-

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

guisce questo calcolo si trova facilmente per risultato:

$$(\lambda' A' + \mu' B' + \nu' C') l'' l''' \operatorname{sen} \theta' + (\lambda'' A'' + \mu'' B'' + \nu'' C'') l' l'' \operatorname{sen} \theta'' +$$
$$+ (\lambda''' A''' + \mu''' B''' + \nu''' C''') l' l'' \operatorname{sen} \theta''',$$

dove $l'\, l''\, l'''$ sono le misure delle lunghezze di $O\,A'$, $O\,A''$, $O\,A'''$, θ', θ'', θ''' sono le misure degli angoli $A''\, \hat{O}\, A'''$, $A'\, \hat{O}\, A''$, $A'\, \hat{O}\, A''$; (λ', μ', ν') sono i coseni di direzione della normale alla faccia $A''\, O\, A'''$ diretta dalla banda di $O\,A'$ e analogamente si dica per $(\lambda'', \mu'', \nu'')$, $(\lambda''', \mu''', \nu''')$.

Si conclude, in ultima analisi, che:

$$\left.\begin{aligned} &(\lambda' A' + \mu' B' + \nu' C') l'' l''' \operatorname{sen} \theta' + \\ &+ (\lambda'' A'' + \mu'' B'' + \nu'' C'') l' l''' \operatorname{sen} \theta'' + \\ &+ (\lambda''' A''' + \mu''' B''' + \nu''' C''') l' l'' \operatorname{sen} \theta''' = -4\pi, \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

che è la relazione richiesta.

Possiamo infine trovare un'espressione per ciascuna delle *12* costanti:

$$A^{(i)},\ B^{(i)},\ C^{(i)},\ E^{(i)} \quad [i = 1,\ 2,\ 3].$$

Cominciamo coll'osservare che le costanti $E^{(i)}$ si esprimono per le $A^{(i)}$, $B^{(i)}$, $C^{(i)}$, $a^{(i)}$, $b^{(i)}$, $c^{(i)}$ nel modo che segue.

Se nella 1.ª delle relazioni (22) poniamo:

$$x = -\frac{a'}{2}, \quad y = -\frac{b'}{2}, \quad z = -\frac{c'}{2}.$$

si ha:

$$Z\left(\frac{a'}{2}, \frac{b'}{2}, \frac{c'}{2}\right) - Z\left(-\frac{a'}{2}, -\frac{b'}{2}, -\frac{c'}{2}\right) =$$
$$= -\frac{1}{2}(A' a' + B' b' + C' c') + E',$$

e poichè:

$$Z(x, y, z) = Z(-x, -y, -z),$$
$$E' = \frac{1}{2}(A' a' + B' b' + C' c'),$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

similmente si ricavano E'', E''' onde si ottiene il gruppo di formole:

$$\left.\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}(A' a' + B' b' + C' c') \\ E'' &= \frac{1}{2}(A'' a'' + B'' b'' + C'' c'') \\ E''' &= \frac{1}{2}(A''' a''' + B''' b''' + C''' c'''). \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Ci resta a dare l'espressione delle 9 costanti:

$$A^{(i)},\ B^{(i)},\ C^{(i)}.$$

Indichiamo per brevità con:

$$Z'_x(x, y, z), \quad Z'_y(x, y, z), \quad Z'_z(x, y, z),$$

le derivate parziali della $Z(x, y, z)$, le quali saranno manifestamente funzioni *armoniche impari* nel senso che si ha per es.:

$$Z'_x(x, y, z) = -Z'_x(-x, -y, -z),$$

allora la prima delle (22) ci dà mediante derivazione:

$$Z'_x(x + a', y + b', z + c') - Z'_x(x, y, z) = A',$$

e cambiando x, y, z in: $-\frac{a'}{2}$, $-\frac{b'}{2}$, $-\frac{c'}{2}$, si ricava:

$$Z'_x\left(\frac{a'}{2}, \frac{b'}{2}, \frac{c'}{2}\right) - Z'_x\left(-\frac{a'}{2}, -\frac{b'}{2}, -\frac{c'}{2}\right) = A',$$

cioè:

$$A' = 2\,Z'_x\left(\frac{a'}{2}, \frac{b'}{2}, \frac{c'}{2}\right) \quad \text{così:} \quad B' = 2\,Z'_y\left(\frac{a'}{2}, \frac{b'}{2}, \frac{c'}{2}\right),$$

$$C' = 2\,Z'_z\left(\frac{a'}{2}, \frac{b'}{2}, \frac{c'}{2}\right),$$

analogamente si hanno A'', B'', C''; A''', B''', C''' onde si può scrivere il

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

seguente quadro :

$$\left.\begin{aligned}
A' &= 2\,Z'_x\left(\frac{a'}{2},\ \frac{b'}{2},\ \frac{c'}{2}\right); \quad B' = 2\,Z'_y\left(\frac{a'}{2},\ \frac{b'}{2},\ \frac{c'}{2}\right);\\
&\qquad C' = 2\,Z'_z\left(\frac{a'}{2},\ \frac{b'}{2},\ \frac{c'}{2}\right);\\
A'' &= 2\,Z'_x\left(\frac{a''}{2},\ \frac{b''}{2},\ \frac{c''}{2}\right); \quad B'' = 2\,Z'_y\left(\frac{a''}{2},\ \frac{b''}{2},\ \frac{c''}{2}\right);\\
&\qquad C'' = 2\,Z'_z\left(\frac{a''}{2},\ \frac{b''}{2},\ \frac{c''}{2}\right);\\
A''' &= 2\,Z'_x\left(\frac{a'''}{2},\ \frac{b'''}{2},\ \frac{c'''}{2}\right); \quad B''' = 2\,Z'_y\left(\frac{a'''}{2},\ \frac{b'''}{2},\ \frac{c'''}{2}\right);\\
&\qquad C''' = 2\,Z'_z\left(\frac{a'''}{2},\ \frac{b'''}{2},\ \frac{c'''}{2}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Della funzione $Z(x,\ y,\ z)$ e delle sue proprietà l'Appell fa tesoro, in un'altra *sua Memoria* (*), per giungere in modo semplice ed elegante alla soluzione di alcune quistioni di *Fisica-Matematica.*

(*) *Acta Mathematica.* Tomo VIII.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

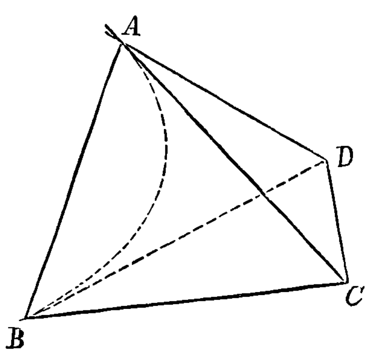
IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Sur les lignes osculatrices d'une cubique gauche.

(Par H. E. Timerding, *à Strasbourg.)*

1.

Si l'on construit dans deux points A, B d'une cubique gauche les tangentes et les plans osculateurs, et si C, D sont les points où la tangente dans l'un des points A, B rencontre le plan osculateur dans l'autre point, alors les quatre points A, B, C, D forment ce qu'on appelle un tétraèdre osculateur de la cubique gauche. Comme nous voyons, il est complètement déterminé par deux points de la courbe. Ces points sont deux de ses angles, et de même il contient parmi ses plans deux plans osculateurs de la courbe. Son arête AB est corde, et l'arête opposée CD est « axe » de la cubique gauche, c'est-à-dire l'intersection de deux plans osculateurs. Deux arêtes opposées, disons AC et BD, sont tangentes de la courbe. Mais quelle enfin est la signification des deux dernières arêtes, AD et BC?



On ne leur reconnaît d'abord que la propriété d'être situées dans un plan osculateur et de passer, en même temps, par le point de contact de ce plan. Toutes ces lignes peuvent être désignées comme *lignes osculatrices* de la cubique gauche (*). C'est M. Cremona qui les a étudiées le premier (**).

(*) C'est la traduction du mot allemand Schmiegungsstrahlen employé par Schroeter.

(**) Voir surtout le tome III de la seconde série des *Nouvelles Annales* (de Terquem). Comparez du reste les Mémoires du célèbre auteur dans les tomes I et II de la première série de ces *Annales* et dans les volumes 58 et 60 du *Journal de Crelle*.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Puisque dans chaque plan osculateur on en trouve un faisceau ordinaire, leur totalité forme une « congruence », une variété doublement infinie de lignes droites. Cette congruence est du troisième ordre, parceque par chaque point on peut mener trois plans osculateurs à la cubique gauche et, en joignant leurs points de contact au point proposé, on trouve trois lignes osculatrices qui passent par ce point. Mais ces trois lignes sont toujours dans un plan, et vice-versâ l'on trouve dans chaque plan trois lignes osculatrices qui ont toutes trois un point commun. (C'est le foyer du plan d'après l'expression de M. Cremona.) La congruence est aussi de la troisième classe, puisque chaque plan en contient trois lignes. Elle est comprise dans un complexe linéaire qui renferme dans chaque plan toutes les lignes passant par son foyer. C'est le complexe linéaire de la cubique gauche, et *chaque ligne de ce complexe qui rencontre la cubique gauche est une ligne osculatrice.*

Les tangentes de la cubique gauche coupent un plan quelconque dans une courbe rationnelle du quatrième ordre qui possède trois pointes. Les tangentes stationnaires dans ces pointes sont les trois lignes osculatrices situées dans le plan. Chacune d'elles rencontre la courbe plane encore dans un dernier point, et ce n'est que dans ce point qu'elle est rencontrée par une tangente de la cubique gauche touchant dans un autre point que celui qu'elle a de commun avec la courbe.

Je nommerai *lignes jumelles* deux osculatrices qui rencontrent les mêmes deux tangentes (respectivement l'une dans son point de contact), et je dirai leur matrice la corde qui joint leurs points d'intersection avec la courbe ou, ce qui est la même chose, les points de contact des deux tangentes. *Deux lignes jumelles sont toujours deux arêtes opposées d'un tétraèdre osculateur de la cubique gauche.* En prenant le tetraèdre $ABCD$, on voit en effet que la ligne osculatrice AD est rencontrée par les tangentes AC et BD et de même par l'arête opposée BC qui est aussi une osculatrice.

Il existe un seul et unique hyperboloïde qui contient la cubique gauche et qui passe en même temps par deux lignes jumelles AD et BC et leurs tangentes associées AC et BD. La corde AB et l'axe CD sont deux polaires réciproques de cet hyperboloïde. Menons maintenant par la ligne CD deux plans μ et ν qui séparent harmoniquement les plans osculateurs ACD et BCD. De leur part les deux points M et N où les plans μ et ν coupent la corde AB diviseront celle-ci harmoniquement. Deux points tels que M et N seront d'après M. Cremona deux *points conjoints* par rapport à la cubique gauche, et de même les plans μ et ν seront deux *points conjoints.* Nous

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

considérons les deux triples de lignes osculatrices qui sont situées dans ces deux plans. Alors on trouve que chacune de ces lignes est rencontrée par la tangente dans un des points, dans lesquels respectivement l'autre plan coupe la cubique gauche. Ainsi l'on peut *former des deux triples d'osculatrices trois couples de lignes jumelles,* et chaque fois les points où les lignes d'un couple rencontrent la courbe sont séparés harmoniquement par les points A et B. Mais il y a plus que cela. Les points où les cordes joignant à deux les points d'intersection M_1, M_2, M_3 ou N_1, N_2, N_3 d'un des plans μ, ν rencontrent l'axe CD sont les mêmes que ceux, dans lesquels cet axe est coupé par les osculatrices de respectivement l'autre plan.

Les cordes $M_1 N_1$, $M_2 N_2$, $M_3 N_3$ qui joignent les points conjugués parmi les triples $M_1 M_2 M_3$ et $N_1 N_2 N_3$, et les deux tangentes AC et BD sont sur le même hyperboloïde, et cet hyperboloïde coupera chacun des plans μ et ν dans une conique $\mathfrak{M}$ ou $\mathfrak{N}$ qui passe par les trois points M_1, M_2, M_3, ou N_1, N_2, N_3, et les deux points C et D. D'autre part les trois lignes d'intersection des plans osculateurs dans deux points conjugués M_i et N_i et les tangentes AC et BD sont sur le même hyperboloïde, et aussi cet hyperboloïde coupera les deux plans μ et ν dans deux coniques $\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{N}'$. Pour voir quelle est la nature de ces coniques, revenons aux courbes, dans lesquelles la développable de la cubique gauche coupe les deux plans. Ces courbes ont chacune trois pointes M_1, M_2, M_3, ou N_1, N_2, N_3, et une tangente double qui touche en C et D. Alors toutes les tangentes stationnaires de ces courbes ont encore de commun avec elles hors un point M_i ou N_i un point M'_i ou N'_i, et chacune des deux courbes est touchée dans ces trois points M'_1, M'_2, M'_3 ou N'_1, N'_2, N'_3 par une conique qui de plus contient les deux points C et D, et ce sont là les coniques $\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{N}'$ que nous venons de mentionner. Ces coniques sont remplies chaque fois par les pôles du plan conjoint, par rapport aux coniques inscrites dans la développable de la cubique gauche, si nous regardons comme pôle d'un plan par rapport à une conique le pôle de la droite, dans laquelle ce plan coupe le plan de la conique. De leur part les coniques $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont trouvées, si nous cherchons les plans polaires du foyer d'un des plans μ et ν, par rapport aux cônes du second degré qui passent par la cubique gauche. Ces plans polaires couperont le plan en question, par exemple μ, dans les tangentes de la conique $\mathfrak{M}$.

Chaque corde de la cubique gauche qui rencontre l'une de deux lignes jumelles rencontre aussi l'autre, et les deux points d'intersection divisent harmoniquement la corde, c'est-à-dire ils sont deux points conjoints. De la même

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

manière, chaque axe de la cubique gauche rencontrera deux lignes jumelles, et ces lignes seront telles que les plans qui les joignent à l'axe séparent harmoniquement les plans osculateurs passant par cet axe, et qu'ils sont aussi conjoints. Ainsi *deux lignes jumelles sont conjointes l'une à l'autre dans un sens double: d'abord les points de l'une sont conjoints aux points de l'autre, et ensuite les plans passant par l'une sont conjoints aux plans passant par l'autre.*

2.

Tâchons maintenant de représenter analytiquement les lignes osculatrices d'une cubique gauche.

Nous allons nous servir dans ce qui suit de coordonnées non homogènes, mais liées non plus à des relations métriques. Nous les rapportons à un tétraèdre osculateur $A\,B\,C\,D$, comme nous l'avons considéré au commencement. Nous fixons d'abord que les trois coordonnées x, y, z deviennent toutes infinies pour chaque point du plan osculateur $B\,C\,D$, et puis que séparément x s'évanouit pour le plan $A\,C\,D$, y pour $A\,B\,C$, z pour $A\,B\,D$. Si les coordonnées deviennent de plus égales entre elles pour un point de la cubique gauche, alors cette dernière peut être représentée, à l'aide d'un paramètre ω, de la manière suivante:

$$x = \omega^3, \quad y = \omega^2, \quad z = \omega. \tag{α}$$

Un plan osculateur de la courbe aura l'équation:

$$\mathfrak{x} - 3\,\omega\,\mathfrak{y} + 3\,\omega^2\,\mathfrak{z} - \omega^3 = 0, \tag{β}$$

si ω désigne le paramètre du point de contact. (En réservant les lettres x, y, z à la cubique elle-même, nous avons mis à leur place $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$.) La corde qui joint deux points aux paramètres ω et ω' sera donnée par les équations:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x} - (\omega + \omega')\,\mathfrak{y} + \omega\,\omega'\,\mathfrak{z} &= 0, \\ \mathfrak{y} - (\omega + \omega')\,\mathfrak{z} + \omega\,\omega' \quad &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{γ}$$

Elle sera tangente, si $\omega = \omega'$.

Pour fixer maintenant une ligne osculatrice de la cubique gauche, nous employons d'abord le paramètre ω du point P aux coordonnées x, y, z qu'elle a de commun avec la courbe, et nous y ajoutons un autre paramètre η qui détermine la ligne dans le faisceau des lignes osculatrices qui passent par

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

ce point de la courbe. Alors si $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ sont les coordonnées d'un point quelconque de la ligne, nous pouvons poser :

$$\frac{\mathfrak{x} - x}{\mathfrak{z} - z} = 3\,\eta\,\omega, \quad \frac{\mathfrak{y} - y}{\mathfrak{z} - z} = \eta + \omega. \tag{a}$$

En effet, on tire de là :

$$(\mathfrak{x} - x) - 3\,\omega\,(\mathfrak{y} - \eta) + 3\,\omega^2\,(\mathfrak{z} - z) = 0,$$

ou en substituant les valeurs (α) de (x, y, z) :

$$\mathfrak{x} - 3\,\omega\,\mathfrak{y} + 3\,\omega^2\,\mathfrak{z} - \omega^3 = 0.$$

Ce qui exprime que la droite passant par le point P qui est représentée par les deux équations appartient en même temps au plan osculateur dans ce point, donc elle est osculatrice. Si

$$\eta = \omega,$$

on aura de la dernière des deux équations, en y substituant les valeurs pour y et z :

$$\mathfrak{y} - 2\,\omega\,\mathfrak{z} + \omega^2 = 0,$$

et la ligne touchera la courbe dans le point P.

Il est nécessaire encore de former les expressions :

$$p_{23} = z\,\mathfrak{y} - y\,\mathfrak{z}, \quad p_{31} = x\,\mathfrak{z} - z\,\mathfrak{x}, \quad p_{12} = y\,\mathfrak{x} - x\,\mathfrak{y},$$

et l'on trouve, à un facteur près :

$$\left.\begin{aligned} \rho\,p_{23} &= -\,\eta\,\omega, \\ \rho\,p_{31} &= \omega^2\,(3\,\eta - \omega), \\ \rho\,p_{12} &= \omega^3\,(\omega - 2\,\eta). \end{aligned}\right\} \tag{A}$$

Si nous y joignons :

$$\left.\begin{aligned} \rho\,p_{14} &= 3\,\eta\,\omega, \\ \rho\,p_{24} &= \eta + \omega, \\ \rho\,p_{34} &= 1, \end{aligned}\right\}. \tag{A}$$

les six grandeurs p_{ik} sont liées ensemble par l'identité :

$$p_{23}\,p_{14} + p_{31}\,p_{24} + p_{12}\,p_{34} = 0,$$

et représentent les coordonnées *plueckériennes* de la ligne osculatrice. Ces coordonnées sont exprimées, comme il le faut, par deux paramètres ω et η.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Deux entre elles, p_{23} et p_{14}, satisfont à la relation:

$$p_{14}+3\,p_{23}=0,$$

et c'est là l'équation du complexe linéaire de la cubique gauche.

Chaque corde est matrice de deux lignes jumelles qui passent par ses extrémités. Si ω et ω' sont les paramètres de ces dernières, nous pourrons demander, quels sont les paramètres η et η' qui, ajoutés à ω et ω', définissent ces lignes jumelles. Naturellement ces paramètres seront exprimables en fonction de ω et ω'. Pour trouver ces expressions, remarquons d'abord que des équations (A) nous tirons, en posant:

$$\eta=\omega=\omega',$$

les coordonnées suivantes pour la tangente au point de la courbe qui a le paramètre ω':

$$\rho\,p'_{23}=-\omega'^2,\quad \rho\,p'_{31}=2\,\omega'^3,\quad \rho\,p'_{12}=-\omega'^4,$$
$$\rho\,p'_{14}=3\,\omega'^2,\quad \rho\,p'_{24}=2\,\omega',\quad \rho\,p'_{34}=1.$$

Exprimons maintenant la condition pour qu'une osculatrice rencontre cette tangente. Cette condition est:

$$\begin{aligned}&p_{23}\,p'_{14}+p_{31}\,p'_{24}+p_{12}\,p'_{34}\\+\,&p_{14}\,p'_{23}+p_{24}\,p'_{31}+p_{34}\,p'_{12}=0,\end{aligned}$$

et en y substituant les valeurs des coordonnées, nous trouvons d'abord:

$$\begin{aligned}&-3\,\eta\,\omega\,\omega'^2+2\,\omega^2(3\,\eta-\omega)\,\omega'+\omega^3(\omega-2\,\eta)\\&-3\,\eta\,\omega\,\omega'^2+2\,(\eta+\omega)\,\omega'^3\qquad-\omega'^4=0.\end{aligned}$$

Mais cette équation peut être mise sous la forme simple:

$$(\omega-\omega')^3\,.\,(\omega+\omega'-2\,\eta)=0.$$

En effet l'équation doit être satisfaite pour $\omega=\omega'$, puisque chaque ligne osculatrice dont l'un paramètre est ω' passe par ce point de contact de la tangente: Mais si ω est different de ω', nous trouvons que par chaque point de la courbe il y a une seule osculatrice qui rencontre la tangente et son deuxième paramètre sera:

$$\eta=\frac{\omega+\omega'}{2}\,. \tag{B}$$

Mais cette ligne est nécessairement l'une des deux lignes jumelles dont la matrice joint les points de la courbe aux paramètres ω et ω', et puisque la

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

valeur de η ne subit aucun changement, si nous échangeons entre eux ω et ω', la deuxième ligne aura le même paramètre η. Nous trouvons donc ce résultat simple et important:

Deux lignes jumelles ont toujours le même deuxième paramètre η, et ce paramètre est le moyen arithmétique entre les premiers paramètres ω et ω' des deux lignes.

3.

On peut représenter les cordes de notre cubique gauche par les points d'un plan, et cette représentation nous rendra de bons services.

Si ω et ω' sont les paramètres de deux points de la courbe, posons :

$$\xi = \omega\omega', \quad \eta = \frac{\omega + \omega'}{2},$$

alors la corde qui joint ces deux points sera définie par les équations:

$$\mathfrak{x} - 2\eta\mathfrak{y} + \xi\mathfrak{z} = 0,$$
$$\mathfrak{y} - 2\eta\mathfrak{z} + \xi \quad = 0.$$

La corde est ainsi fixée par les valeurs de ξ et η, et si nous interprétons ces dernières comme coordonnées rectangulaires d'un point dans un plan arbitraire, une seule et unique corde correspondra à chaque point de ce plan.

Nous aurons une tangente, si

$$\xi = \eta^2,$$

la corde aura deux extrémités réelles, si

$$\xi < \eta^2,$$

elle joindra deux points imaginaires de la courbe, si

$$\xi > \eta^2.$$

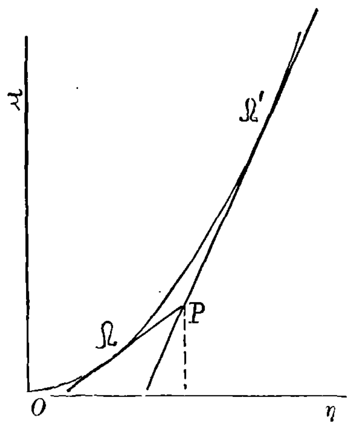
L'équation

$$\xi = \eta^2$$

représente une parabole. Les points au dehors de cette parabole correspondent à des cordes propres de la cubique gauche, les points au dedans à des cordes impropres. Pour trouver les extrémités d'une corde, menez du point P qui la représente les tangentes à la parabole, alors les points de contact Ω

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

et Ω' nous donneront les tangentes de la cubique qui la touchent aux extrémités de la corde. On aura immédiatement ses paramètres ω et ω', si l'on pose pour les points de la parabole :



$$\xi = \omega^2, \quad \eta = \omega,$$

de sorte que l'abscisse mesure le paramètre, car alors les points de contact Ω et Ω' auront les paramètres ω et ω'. Ces grandeurs ω et ω' peuvent être regardées comme coordonnées paraboliques du point P. Alors ses coordonnées ordinaires seront :

$$\xi = \omega\,\omega', \quad \eta = \frac{\omega + \omega'}{2}.$$

Or chaque corde est matrice de deux lignes jumelles, et ces lignes sont réelles, si les extrémités de la corde le sont. Donc nous trouvons deux lignes osculatrices *réelles* pour chaque point extérieur à la parabole, puisqu'il nous fournit une corde propre. Le plan original ne suffira donc pas pour représenter les lignes osculatrices. Mais si nous ôtons d'abord l'intérieur de la parabole et que nous doublons ensuite la partie du plan qui nous reste, nous pourrons représenter sans ambiguité sur ces deux feuilles toutes les lignes osculatrices. Cependant pour deux points correspondants des bords nous ne trouvons qu'une seule ligne osculatrice, c'est-à-dire une tangente. Donc nous joindrons les deux feuilles le long de la parabole qui forme leurs bords, et nous obtiendrons une seule surface plane à deux feuilles qui peut nous servir pour une représentation parfaite des lignes osculatrices. La parabole sera sa courbe de passage (*).

Un point de cette surface est complètement fixé par les coordonnées paraboliques ω et ω', si l'on donne, en même temps, l'ordre dans lequel il faut les prendre, ou bien par les grandeurs :

$$\eta = \frac{\omega + \omega'}{2}, \quad \zeta = \frac{\omega - \omega'}{2}.$$

La dernière est, exprimée en ξ et η :

$$\zeta = \sqrt{\eta^2 - \xi}.$$

(*) Cette expression est due, je crois, à CLEBSCH qui a considéré le premier des cas plus compliqués de ces surfaces.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Deux points qui se couvrent dans la surface et qui correspondent à deux lignes jumelles auront des coordonnées

$$\eta, \quad \zeta \quad \text{et} \quad \eta, \quad -\zeta.$$

Au lieu de ζ nous pouvons introduire:

$$\omega = \eta + \zeta,$$

pour revenir ainsi aux paramètres que nous avons employés au commencement.

La surface plane est, pour ainsi dire, une surface du second degré infiniment aplatie. Nous pourrons la remplacer, si nous aimons, par la surface dont l'équation est:

$$\zeta^2 = \eta^2 - \xi,$$

en regardant ζ comme une troisième coordonnée rectangulaire à ξ et η, et la surface plane sera la projection orthographique de ce paraboloïde sur le plan des ξ et η.

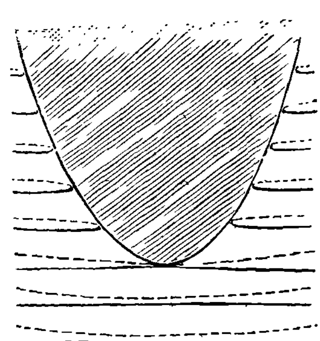
D'autre part la projection orthographique du paraboloïde sur le plan des η, ζ en donnera une représentation exempte de toute ambiguité. On rapportera ainsi, en même temps, la surface plane à ce plan simple, et cette transformation sera donnée par les équations:

$$\eta = \eta \quad \text{et}$$

$$\zeta = \sqrt{\eta^2 - \xi}.$$

4.

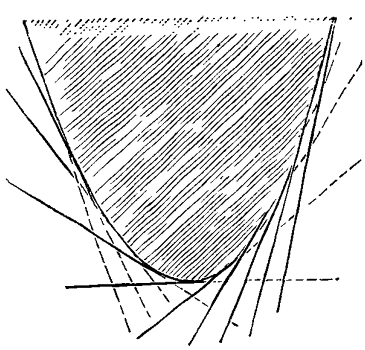
Pour étudier un peu de plus près la surface plane, remarquons d'abord que, si nous parlons d'une ligne droite sur cette surface, il ne s'agit pas d'une droite proprement dite, mais d'une ligne qui seulement coïncide partout avec une ligne droite. Cependant elle doit être regardée comme une conique infiniment aplatie, ce qui est évident, si nous partons du paraboloïde. On aura à distinguer deux espèces differentes de ces lignes. L'une sera obtenue d'une hyperbole en approchant ses deux branches l'une à l'autre jusqu'à ce qu'elles seront infiniment voisines, et la ligne ressemblera à deux droites mise l'une sur l'autre. Une ligne de la deuxième

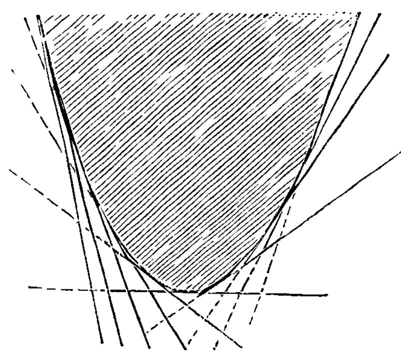


IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

espèce sera trouvée, si nous aplatissons chaque branche de l'hyperbole. On pourra se former une idée très nette de ces procès, si l'on fait tourner le plan de l'hyperbole, une fois autour de son axe réel et l'autre fois autour de son axe imaginaire. Nous devons compter parmi la deuxième espèce les lignes qui sont parallèles à l'axe des ξ et qui correspondent à des paraboles sur le paraboloïde. Ces lignes n'ont qu'une seule branche.

Mais faisons attention maintenant aux tangentes de la parabole qui est la courbe de passage. Au lieu d'une seule tangente dans le plan ordinaire nous en aurons deux qui s'entrecoupent au point de contact, et ce sont là les vraies droites sur la surface plane, puisqu'elles correspondent à des lignes droites sur le paraboloïde. On verra qu'on a bien, sur la surface plane, deux


Premier système.


Deuxième système.

droites différentes qui touchent dans le même point la courbe de passage, si l'on demande à quelles lignes osculatrices leurs points correspondent. Les points de l'une représenteront toujours des lignes osculatrices qui sont situées dans le même plan osculateur de la cubique gauche. Au contraire les points de l'autre nous donneront les lignes osculatrices qui rencontrent une tangente de la cubique gauche sans passer par son point de contact. Cela va sans dire que le point de contact est commun au plan osculateur et à la tangente et qu'il correspond au point de contact commun des deux droites sur la surface plane. Les droites de la dernière sont divisées ainsi en deux systèmes. Les droites de l'un coupent toutes celles de l'autre, mais deux droites du même système ne s'entrecoupent jamais, elles ne font que passer une fois l'une sous l'autre. Les coordonnées paraboliques ω et ω' d'un point de la surface plane peuvent être interprétées comme fixant dans les deux systèmes les deux droites qui passent par ce point.

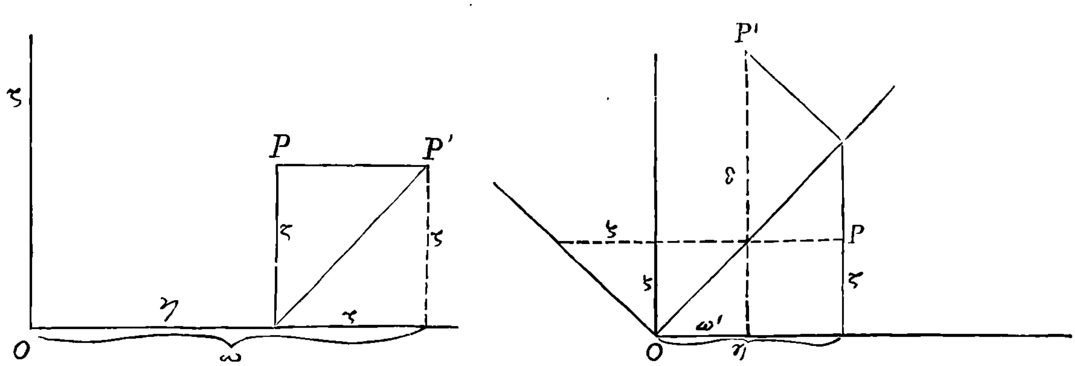
IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Nous prouverons plus tard qu'en général les points d'une ligne (apparemment) droite de la surface plane correspondent aux lignes osculatrices qui rencontrent une corde de la cubique gauche, et cette corde sera représentée, dans le plan simple, par le pôle de la ligne droite par rapport à la parabole. Deux lignes droites sur la surface plane s'entrecoupent en deux points qui se couvrent. Donc nous trouverons deux lignes jumelles qui rencontrent en même temps deux cordes et ces lignes rencontreront toutes les cordes qui sont contenues dans une surface réglée de second degré. Parmi ces cordes il y a deux tangentes, et les deux lignes jumelles passent par les points de contact de ces tangentes.

5.

Revenons maintenant au plan qui nous fournit une représentation simple des lignes osculatrices.

Si nous y interprétons η, ζ et η, ω comme coordonnées rectangulaires, nous passerons de l'un système à l'autre par une transformation linéaire qui fait avancer ou reculer chaque point parallèlement à l'axe des η d'une longueur égale à la distance du point de cet axe. Pour passer du système

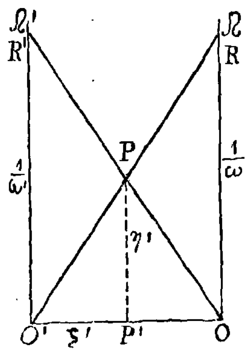


des η, ζ aux coordonnées ω et ω' il faut faire tourner le plan autour de l'origine par un angle de 45 degrés et multiplier ensuite les mesures par $\sqrt{2}$.

Nous pourrons employer aussi les grandeurs ω et ω' comme coordonnées parallèles de la manière suivante. Que $O\,\Omega$ et $O'\,\Omega'$ soient deux lignes pa-

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

rallèles dont la distance soit mesurée par $O\,O' = 1$. Alors si P est un point quelconque, joignons-le à O et O', et que R et R' soient les points où les lignes $O\,P$ et $O'\,P$ rencontrent respectivement les deux parallèles. Puis nous faisons:



$$\omega = \frac{1}{O\,R}, \quad \omega' = \frac{1}{O'\,R'},$$

et nous trouverons pour les coordonnés rectangulaires ξ', η' du point P rapportées aux axes $O'\,O$ et $O'\,\Omega'$:

$$\xi' = \omega\,\eta', \quad 1 - \xi' = \omega'\,\eta',$$

et par suite:

$$(\omega + \omega')\,\eta' = 1,$$

d'où:

$$2\,\xi' = \frac{\omega}{\eta}, \quad 2\,\eta' = \frac{1}{\eta}.$$

Pour voir, de quelle manière les lignes osculatrices sont représentées par les points du plan en question, cherchons les points-images de celles entre ces lignes qui rencontrent une droite arbitrairement donnée dans l'espace. Puisque toutes les lignes osculatrices sont contenues dans le complexe de la cubique gauche, celles qui appartiennent encore à un autre complexe linéaire, se trouveront aussi dans la congruence commune à ces deux complexes et rencontreront deux droites fixes. Ainsi chaque ligne osculatrice qui rencontre une droite donnée rencontre encore une autre droite qui est la polaire réciproque de la première par rapport au complexe de la cubique gauche.

Ces deux droites sont coupées par quatre tangentes de la cubique gauche, et nous pourrons les fixer réciproquement par ces quatre tangentes. Que pour les points de contact de ces dernières les paramètres soient définis par l'équation:

$$\alpha + 4\,\beta\,\omega + 6\,\gamma\,\omega^2 + 4\,\delta\,\omega^3 + \varepsilon\,\omega^4 = 0, \tag{a}$$

alors les paramètres η et ω des lignes osculatrices qui rencontrent les deux droites sont liés ensemble par l'équation:

$$2\,\eta = \frac{\alpha\,\omega^4 + 2\,\beta\,\omega^3 - 2\,\delta\,\omega - \varepsilon}{\alpha\,\omega^3 + 3\,\beta\,\omega^2 + 3\,\gamma\,\omega + \delta}, \tag{b}$$

qui donne η en fonction de ω. En effet, si nous y posons $\omega = \eta$, nous revenons à l'équation (a), et d'autre part, l'équation (b) fait disparaître généralement une fonction linéaire des expressions (A) du n.° 2.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Si nous introduisons les valeurs ξ', η' et posons de suite :

$$\xi' = R\mu, \quad \eta' = R\nu, \quad \mu^2 + \nu^2 = 1,$$

nous aurons :

$$R = \frac{\alpha\mu^3 + 3\beta\mu^2\nu + 3\gamma\mu\nu^2 + \delta\nu^3}{\alpha\mu^4 + 2\beta\mu^3\nu - 2\delta\mu\nu^3 - \varepsilon\nu^4}.$$

C'est l'équation d'une courbe du quatrième ordre qui passe trois fois par l'origine. Toutes ces courbes possèdent encore un point commun, car si $\eta' = 0$ ou $\nu = 0$, on a $\mu = 1$ et

$$R = 1.$$

Donc deux quelconques de ces courbes s'entrecoupent en *six* points variables, et en général *deux droites arbitraires sont coupées par six lignes osculatrices d'une cubique gauche.*

6.

Les lignes osculatrices qui rencontrent une ligne droite d de l'espace, et par suite aussi sa polaire réciproque d' forment une surface réglée du sixième degré, puisque deux droites données sont coupées par six lignes osculatrices. Cette surface contient trois fois les deux droites d et d' et simplement la cubique gauche. Elle a, de plus, quatre arêtes de rebroussement, et ce sont les tangentes de la courbe qui coupent les deux droites d et d'.

Examinons encore les *cas spéciaux* qui peuvent se présenter.

1.° Si la droite d est située elle-même dans un plan osculateur δ, toutes les lignes osculatrices appartenant à ce plan couperont la droite donnée, donc ce plan fait partie de la surface réglée. En l'ôtant nous garderons une surface réglée du cinquième degré. Les lignes de cette surface rencontrent toutes une deuxième droite d' qui coupe la cubique gauche dans le point de contact du plan osculateur δ. Cette droite d' sera une ligne triple de la surface, et l'autre d y sera contenue deux fois. On trouve encore deux tangentes de la cubique qui sont arêtes de rebroussement de la surface.

2.° Si la droite donnée d est elle-même une ligne osculatrice, il nous restera une surface réglée du quatrième degré, et au lieu des deux droites, l'une double et l'autre triple, de la surface du cinquième degré nous n'aurons qu'une seule ligne double, et c'est la ligne osculatrice donnée.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

3.° Si la droite donnée est corde de la cubique gauche, la surface réglée est aussi du quatrième degré, elle contient la corde comme ligne triple et passe une seule fois par l'axe correspondant. Les deux tangentes aux extrémités de la corde sont aussi droites simples de la surface.

4.° Si la droite donnée touche la cubique gauche, la surface réglée n'est que du troisième degré, et de plus elle est d'un caractère spécial, puisque par chaque point de la tangente il passe une seule génératrice de la surface réglée, et aussi dans chaque plan qui contient la tangente une seule de ces droites est située.

7.

Si nous substituons :

$$\omega' = 2\eta - \omega,$$

nous trouvons de l'équation (b):

$$\omega' = -\frac{\beta\,\omega^3 + 3\,\gamma\,\omega^2 + 3\,\delta\,\omega + \varepsilon}{\alpha\,\omega^3 + 3\,\beta\,\omega^2 + 3\,\gamma\,\omega + \delta}, \qquad (c)$$

ou, en faisant $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$, nous aurons :

$$\omega' = -\frac{\varphi_2(\omega)}{\varphi_1(\omega)}, \qquad (c')$$

si :

$$\varphi(\omega) = \alpha\,\omega_1^4 + 4\,\beta\,\omega_1^3\,\omega_2 + 6\,\gamma\,\omega_1^2\,\omega_2^2 + 4\,\delta\,\omega_1\,\omega_2^3 + \varepsilon\,\omega_2^4,$$

et :

$$\varphi_1(\omega) = \frac{1}{4}\,\frac{\partial\,\varphi(\omega)}{\partial\,\omega_1}, \quad \varphi_2(\omega) = \frac{1}{4}\,\frac{\partial\,\varphi(\omega)}{\partial\,\omega_2}.$$

Ce résultat est très remarquable, parcequ'il lie intimement les courbes en question aux formes binaires du quatrième degré.

Nous pouvons interpréter ω et ω' comme deux paramètres fixant chacun une ligne droite dans les deux systèmes sur une surface réglée du second degré. Nous revenons ainsi à notre paraboloïde, en faisant :

$$\omega = \eta + \zeta, \quad \omega' = \eta - \zeta,$$
$$\omega\,\omega' = \xi,$$

et en regardant ξ, η, ζ comme coordonnées rectangulaires. Alors la surface

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

réglée aura l'équation :

$$\xi = \eta^2 - \zeta^2,$$

et les deux systèmes de droites sur cette surface seront définis par les couples d'équations :

1.° $\qquad \omega(\eta - \zeta) = \xi, \quad \eta + \zeta = \omega;$

2.° $\qquad \omega'(\eta + \zeta) = \xi, \quad \eta - \zeta = \omega'.$

L'équation (*c*) représente sur le paraboloïde des courbes gauches du quatrième ordre et de la deuxième espèce. Elles rencontrent trois fois chaque génératrice de l'un système et une seule fois celles de l'autre. Donc elles seront projetées sur un plan d'un point quelconque du paraboloïde comme des courbes du quatrième ordre qui passent trois fois par un point fixe et une seule fois par un autre point fondamental.

Si la droite donnée rencontre la cubique gauche ou si elle est située dans un plan osculateur, l'équation (*a*) aura une racine double, et la fonction $\varphi(\omega)$ aura un facteur double. Alors ses deux dérivées par rapport à ω_1 et ω_2 auront un facteur commun, et dans :

$$\omega' = -\frac{\varphi_2(\omega)}{\varphi_1(\omega)}$$

on pourra diviser le numérateur et le dénominateur par ce facteur. Nous garderons ainsi une équation qui représente, sur notre paraboloïde, une cubique gauche. Celle-ci rencontrera deux fois chaque génératrice de l'un système et une seule fois celles de l'autre. Donc elle sera projetée sur le plan comme une courbe plane du troisième ordre qui passe deux fois par l'un des points fondamentaux et une seule fois par l'autre.

Si les extrémités d'une corde de la cubique gauche ont les paramètres ω_0 et ω'_0, et si nous posons de nouveau :

$$\xi_0 = \omega_0 \omega'_0, \quad \eta_0 = \frac{\omega_0 + \omega'_0}{2},$$

nous trouvons la relation suivante entre les paramètres η, ω des lignes osculatrices qui rencontrent cette corde :

$$2\eta = \frac{\omega^2 - \xi_0}{\omega - \eta_0}. \tag{d}$$

En effet, si $\eta = \omega$, on en tire pour les tangentes parmi ces lignes :

$$\omega^2 - 2\eta_0\omega + \xi_0 = 0,$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

et point d'autre solution, et, en multipliant dans la fraction le numérateur et le dénominateur par l'expression $\omega^2 - 2\eta_0\omega + \xi_0$, nous aurons:

$$2\eta = \frac{\omega^4 - 2\eta_0\omega^3 + 2\eta_0\xi_0\omega - \xi_0^2}{\omega^3 - 3\eta_0\omega^2 + (2\eta_0^2 + \xi_0)\omega - \eta_0\xi_0},$$

ce qui convient avec l'équation (b), si nous remplaçons l'équation (a) par celle-ci:

$$(\omega^2 - 2\eta_0\omega + \xi_0)^2 = 0.$$

En introduisant:

$$\omega' = 2\eta - \omega,$$

nous aurons de l'équation (d):

$$\omega' = \frac{\eta_0\omega - \xi_0}{\omega - \eta_0}, \qquad (e)$$

ou si nous faisons: $\omega = \dfrac{\omega_1}{\omega_2}$,

$$\varphi(\omega) = \omega_1^2 - 2\eta_0\omega_1\omega_2 + \xi_0\omega_2^2,$$

$$\varphi_1(\omega) = \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi(\omega)}{\partial\omega_1}, \quad \varphi_2(\omega) = \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi(\omega)}{\partial\omega_2},$$

nous pourrons poser:

$$\omega' = -\frac{\varphi_2(\omega)}{\varphi_1(\omega)}.$$

L'équation (e) peut être mise sous la forme:

$$\omega\omega' - \eta_0(\omega + \omega') + \xi_0 = 0,$$

et, en y substituant:

$$\xi = \omega\omega', \quad \eta = \frac{\omega + \omega'}{2},$$

nous aurons:

$$\xi - 2\eta_0\eta + \xi_0 = 0,$$

ceci démontre ce que nous avons dit plus haut: que les osculatrices qui rencontrent une corde donnée de la cubique gauche sont représentées par les points d'une ligne (apparemment) droite sur notre surface plane.

Si:

$$\xi_0 = \eta_0^2,$$

on trouve de l'équation (e):

$$\omega' = \eta_0,$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

et ainsi les osculatrices qui rencontrent une tangente de la cubique gauche seront représentées par une génératrice de l'un système sur le paraboloïde, et puisqu'alors :

$$\xi - 2\eta_0\eta + \eta_0^2 = 0,$$

elles seront représentées en même temps par une tangente de la courbe de passage dans notre surface plane.

Si nous cherchons enfin les images de toutes les osculatrices qui coupent une osculatrice donnée, l'équation fondamentale (a) aura trois racines égales, et si elle est :

$$(\omega - \omega_0)^3 (\omega - \omega'_0) = 0,$$

le numérateur et le dénominateur de la fraction dans (c) auront le facteur commun $(\omega - \omega_0)^2$. Si nous l'ôtons, il nous restera l'équation :

$$\omega' = \frac{(3\omega_0 + \omega'_0)\omega - 4\omega_0\omega'_0}{4\omega - (3\omega'_0 + \omega_0)}$$

ou bien :

$$\frac{\omega' - \omega'_0}{\omega' - \omega_0} = -3\frac{\omega - \omega'_0}{\omega - \omega_0}.$$

Cette équation représente la section d'un plan avec notre paraboloïde. Pour trouver l'équation de ce plan, introduisons dans l'équation précédente les valeurs pour les coordonnées :

$$\xi = \omega\omega', \quad \eta = \frac{\omega + \omega'}{2}, \quad \zeta = \frac{\omega - \omega'}{2},$$

et nous aurons :

$$\xi - (\omega_0 + \omega'_0)\eta + \omega_0\omega'_0 = \frac{1}{2}2(\omega_0 - \omega'_0)\zeta.$$

Mais si nous faisons :

$$\xi_0 = \omega_0\omega'_0, \quad \eta_0 = \frac{\omega_0 + \omega'_0}{2}, \quad \zeta_0 = \frac{\omega_0 - \omega'_0}{2},$$

ξ_0, η_0, ζ_0 seront les coordonnées du point P qui représente sur le paraboloïde la ligne osculatrice donnée, et l'équation du plan deviendra :

$$\xi - 2\eta_0\eta + \xi_0 = \zeta_0\zeta. \tag{f}$$

Ce sera le plan polaire, par rapport au paraboloïde, du point aux coordonnées

$$\xi_0, \quad \eta_0, \quad -\frac{1}{2}\zeta_0,$$

c'est-à-dire, du point P' qui appartient à la même perpendiculaire du plan

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

des ξ, η que le point P, mais qui est situé à l'autre côté de ce plan, ainsi que sa distance est la moitié de celle de P.

La courbe qui correspond dans la surface plane à la conique du paraboloïde sera une hyperbole ayant un double contact avec la courbe de passage. Nous trouvons son équation en posant dans (f):

$$\zeta = \sqrt{\eta^2 - \xi}, \quad \zeta_0 = \sqrt{\eta_0^2 - \xi_0},$$

donc elle sera:

$$(\xi - 2\eta_0\eta + \xi_0)^2 = (\eta_0^2 - \xi_0)(\eta^2 - \xi), \tag{g}$$

et la corde de contact aura l'équation:

$$\xi - 2\eta_0\eta + \xi_0 = 0.$$

Son pôle a les coordonnées ξ_0, η_0 et sera dit en même temps pôle de l'hyperbole (g).

Si nous remplaçons l'osculatrice donnée par sa ligne jumelle, cette dernière sera rencontrée par la ligne jumelle de chaque osculatrice qui rencontre la ligne donnée. Dans la surface plane deux courbes correspondant à deux pôles qui se couvrent se couvriront aussi selon toute leur étendue.

8.

Deux mots enfin sur les images des trois osculatrices qui passent par un point donné P ou, ce qui revient au même, qui sont situées dans un plan donné π. Nous avons vu plus haut que les lignes jumelles de ces trois osculatrices sont situées dans un deuxième plan π' et passent par un deuxième point P'. Les deux points P et P' sont sur une corde de la cubique gauche qu'elles divisent harmoniquement. Il suit de là que les points de la surface plane qui représentent les six lignes osculatrices appartiennent à une seule ligne (apparemment) droite, et si nous menons des trois points qu'ils donnent dans le plan simple (puisqu'ils se couvrent par paires) les tangentes à la parabole, les six points de contact de ces trois couples de tangentes correspondront aux intersections des deux plans π et π' avec la cubique gauche.

Si x_0, x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées homogènes du point donné P, liées aux coordonnées du n.° 2 par les relations:

$$\mathfrak{x} = \frac{x_0}{x_3}, \quad \mathfrak{y} = \frac{x_1}{x_3}, \quad \mathfrak{z} = \frac{x_2}{x_3},$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

les points d'intersection du premier plan π seront définis par l'équation:

$$x_0 - 3\,x_1\,\omega + 3\,x_2\,\omega^2 - x_3\,\omega^3 = 0, \tag{1}$$

et si y_0, y_1, y_2, y_3 sont les coordonnées du point conjoint P', les points d'intersection du deuxième plan π' seront déterminés par l'équation:

$$y_0 - 3\,y_1\,\omega + 3\,y_2\,\omega^2 - y_3\,\omega^3 = 0, \tag{2}$$

où:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= x_0^2\,x_3 - 3\,x_0\,x_1\,x_2 + 2\,x_1^3, \\ y_1 &= x_0\,x_1\,x_3 - 2\,x_0\,x_2^2 + x_1^2\,x_2, \\ y_2 &= x_0\,x_2\,x_3 - 2\,x_1^2\,x_3 + x_1\,x_2^2, \\ y_3 &= x_0\,x_3^2 - 3\,x_1\,x_2\,x_3 + 2\,x_2^3. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

La ligne droite qui contient les points-images des trois paires de lignes jumelles aura l'équation:

$$(x_2^2 - x_1\,x_3)\,\xi - (x_1\,x_2 - x_0\,x_3)\,\eta + (x_1^2 - x_0\,x_2) = 0. \tag{4}$$

En multipliant par le facteur

$$4\,(x_1^2 - x_0\,x_2)\,(x_2^2 - x_1\,x_3) - (x_1\,x_2 - x_0\,x_3)^2,$$

nous pourrons donner à cette équation la forme suivante:

$$(y_2^2 - y_1\,y_3)\,\xi - (y_1\,y_2 - y_0\,y_3)\,\eta + (y_1^2 - y_0\,y_2) = 0. \tag{4'}$$

Si nous faisons, dans (4) ou (4'):

$$\xi = \omega^2, \quad \eta = \omega,$$

nous aurons les paramètres pour les deux points d'intersection de la droite avec la parabole. Or si nous posons dans les équations (1), (2) et celle que nous aurons de (4):

$$\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2},$$

nous verrons que les expressions à gauche nous donnent deux formes cubiques dont l'une est l'évectant de l'autre, et leur Hessien commun. C'est ainsi que nous revenons à la théorie des formes binaires du troisième degré.

Il serait inutile de pousser plus loin ces recherches qui pourraient paraître un peu étranges, mais qui ne me semblent pas absolument privées d'intérêt.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Di alcune operazioni atte ad aggiungere o togliere singolarità in una funzione analitica.

(*Di* S. PINCHERLE, *a Bologna.*)

Una serie ordinata per le potenze intere positive di una variabile x,

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \tag{1}$$

definisce, come è noto, una funzione analitica che il metodo detto della continuazione analitica permette di calcolare in tutto il campo della sua validità. Tutte le proprietà della funzione sono dunque contenute nella legge di successione dei coefficienti a_n della serie; è però cosa assai difficile, in generale, di mettere in evidenza la dipendenza fra le proprietà della funzione e quelle della successione a_n. Per quanto gli analisti si siano occupati da oltre ad un secolo della questione, pure si è lungi dal potere rispondere alla seguente domanda:

« Si può, ed in quale modo, da proprietà verificabili sulla successione « dei numeri a_n, rilevare il numero, la posizione e la natura delle singola- « rità della funzione definita dalla serie (1)? »

La prima idea che si presenta alla mente in una simile ricerca, è di considerare i coefficienti a_n come i valori di una funzione $a(t)$ di una variabile t, per i valori 0, 1, 2,... della variabile stessa. Bene inteso, la funzione $a(t)$ non è definita completamente da queste condizioni, e non lo è nemmeno se si astringe ad essere analitica; si possono però aggiungere condizioni opportune, atte a completare convenientemente la determinazione della $a(t)$. Fra questa, e la funzione $f(x)$ definita dalla serie (1), passa allora una relazione, o *corrispondenza funzionale*, che è stata considerata già

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

da lungo tempo; essa è stata notata per primo dal LAPLACE (*), che ha chiamato $f(x)$ funzione *generatrice* di $a(t)$, e questa, funzione *determinante* di $f(x)$. Questo autore, e poco dopo di lui, l'ABEL (**), hanno sviluppato buon numero di relazioni formali che intercedono fra una generatrice e la sua determinante. Tali ricerche, riprese da varî autori con indirizzo più moderno e coi sussidî più potenti che col CAUCHY, col RIEMANN e col WEIERSTRASS si sono acquistati nella teoria delle funzioni, hanno dato risultati interessanti, fra i quali mi preme di ricordare i seguenti:

a) La funzione generatrice si esprime mediante un integrale definito sotto cui comparisce la determinante, e reciprocamente. In molti casi, l'integrale definito va esteso ad una curva nel piano della variabile d'integrazione, riguardata come complessa. La determinazione di una delle due funzioni, data l'altra, conduce in generale ad un problema d'inversione d'integrale definito.

b) Quando la funzione generatrice soddisfa ad una equazione differenziale lineare a coefficienti razionali in x, la determinante soddisfa ad una equazione lineare alle differenze finite, a coefficienti parimente razionali in t, e viceversa. Questa osservazione ha permesso di stabilire tipi di equazioni lineari, differenziali o alle differenze (***), integrabili per mezzo di integrali definiti.

Ma risultati non meno notevoli si sono avuti quando la dipendenza fra la successione a_n dei coefficienti e la funzione $f(x)$ si è considerata sotto ad un altro punto di vista; quando si è trattato cioè di collegare fra di loro i due seguenti elementi: *singolarità* della funzione generatrice da una parte, *comportamento* assintotico della successione dei coefficienti dall'altra. Questo punto di vista interviene per la prima volta in una Memoria del sig. DARBOUX (****), dove sono ottenuti risultati per alcuni dei casi più semplici; abbandonato per varî anni, esso si presenta di nuovo in lavori recenti dei sigg. HADA-

(*) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1779; *Théorie analytique des probabilités* (Paris, 1812). Cfr. LACROIX, *Traité du calcul différentiel et intégral*, T. III, pag. 322 (Paris, 1819).

(**) Œuvres, 2ème éd., T. II, Mém. XI.

(***) V. p. es. le mie Note: *Sulle funzioni ipergeometriche generalizzate*. Rendic. della R. Accad. dei Lincei, 1888, e varie Memorie del sig. Hj. MELLIN negli *Acta Math.*, T. VIII e segg.

(****) *Sur l'approximation des fonctions de grands nombres*. J. de Math., 1878.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

MARD (*), BOREL (**), FABRY (***), LEAU (****) ed altri. Da questi lavori si può, in casi determinati, dedurre il posto e talvolta la natura delle singolarità della funzione analitica definita dalla serie $\Sigma\, a_n\, x^n$, dal comportamento assintotico della successione a_n. In tali ricerche non si fa uso ordinariamente della determinante $a\,(t)$ come funzione analitica di t, sebbene il BOREL, nelle osservazioni suggestive della sua Nota citata, abbia consigliato di ricorrervi (*****).

Il presente lavoro si propone di recare una contribuzione alla teoria della dipendenza fra la funzione generatrice e la determinante, studiando alcune operazioni distributive che mentre d'una parte aggiungono, o tolgono, singolarità di specie determinata alla funzione generatrice, recano d'altra parte alla funzione determinante modificazioni corrispondenti, in guisa che da queste si può dedurre la natura delle singolarità introdotte od eliminate, e reciprocamente. Però, questo studio va preceduto da alcuni paragrafi, nei quali si completa in qualche punto la teoria delle operazioni distributive, teoria di cui ho fatto conoscere gli elementi in pubblicazioni anteriori (******). La presente Memoria verrà pertanto divisa in tre capitoli. Nel primo si tratterà della trasformazione di un'operazione mediante un'altra; si considereranno più specialmente quelle operazioni che trasformano una data operazione nell'operazione di moltiplicazione, e si verrà in tal modo ad ottenere (nel modo più elementare ed indipendente da considerazioni d'integrali definiti) l'operazione (che verrà detta *operazione C*) che ha la proprietà di mutare ogni generatrice

(*) *J. de Mathém.*, 1892.

(**) V. *Mémoire sur les séries divergentes* (Ann. de l'Ec. Norm., 1899) e *Leçons sur la théorie des fonctions* (Paris, 1898), passim; e specialmente la Nota dei *Comptes rendus de l'Acad. des Sciences*, 12 déc. 1898.

(***) *Ann. de l'Ec. Norm.*, 1896; *Acta Math.*, T. XXII, 1898; *Journal de Mathém.*, 1898.

(****) *Comptes rendus*, 5 décembre.

(*****) Circa alla dipendenza fra il carattere analitico della funzione generatrice ed il comportamento della sua determinante esistono altri risultati, di natura più speciale, che non hanno attinenza col presente lavoro, ma che non è inutile di ricordare. Questi risultati, ottenuti mediante ricerche che si fondano sulla natura aritmetica della determinante e che presentano difficoltà di altra specie, ma non minori di quelli relativi al comportamento assintotico, si trovano in lavori di EISENSTEIN, HEINE, TCHEBITCHEFF, GOMES-TEIXEIRA, PINCHERLE ed altri.

(******) Riassunte in gran parte nel *Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif*. Math. Ann., T. XLIX, 1897.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

nella sua determinante. Altre operazioni speciali importanti si presentano come semplici modificazioni di questa; tale è la trasformazione ben nota di Laplace, e quella di cui il sig. Borel ha recentemente (*) fatto uso nello studio delle trascendenti intere. Il secondo capitolo è dedicato allo studio di operazioni distributive che, per la loro semplicità e simmetria sono sembrate meritevoli del nome di *normali*; esse si presentano come generalizzazione spontanea di quelle forme differenziali lineari che, uguagliate a zero, dànno le equazioni della classe del Fuchs. Di queste operazioni si studiano poi le composizioni fra di loro e con operazioni di moltiplicazione. Infine nel terzo capitolo si tratta dell'argomento principale di questo lavoro: sono definite le singolarità che si dicono semplici per una funzione analitica; si trova che ad ognuna di esse corrisponde un'operazione A, suscettibile di togliere la singolarità; inversamente, l'operazione inversa A^{-1} introduce, nella funzione cui essa si applica, quella singolarità medesima, a meno che la funzione non soddisfi ad una speciale condizione. Ciò accade nel modo stesso che l'operazione di moltiplicazione per $x - z$ toglie un polo di prim'ordine nel punto $x = z$, mentre l'operazione di divisione per $x - z$ eseguita su una funzione regolare per $x = z$, vi introduce un polo di prim'ordine in quel punto, a meno che la funzione non soddisfi alla condizione di annullarsi per $x = z$. Le trasformate $C A C^{-1}$ di queste operazioni A mediante l'operazione C definita nella prima parte sono operazioni che portano sulla funzione determinante della funzione $f(x)$ soggetta ad A; esse indicano quali modificazioni arrecano ai coefficienti della serie di potenze che rappresenta $f(x)$ la presenza o l'eliminazione della singolarità corrispondente. Infine colla composizione di più operazioni A o delle loro inverse si tolgono o si introducono nelle funzioni analitiche singolarità più complesse; e si termina coll'applicazione delle cose dette alle singolarità che vengono tolte da forme differenziali lineari della classe del Fuchs, o vengono introdotte dalla risoluzione delle equazioni corrispondenti.

(*) *Acta Mathematica*, T. XXI, p. 243

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

CAPITOLO I.

Operazioni trasformatrici.

I. Richiamo di alcune proposizioni dalla teoria delle operazioni distributive.

1. Nelle ricerche che seguono, come in molte altre, è opportuno di considerare le totalità delle serie di potenze di una variabile x come un insieme, o *spazio*, di cui ogni singola serie costituisce un elemento. Un tale insieme ha evidentemente un numero infinito di dimensioni; esso verrà indicata colla lettera S. Ogni serie di potenze si può riguardare come un punto dello spazio S, ed i coefficienti della serie si possono riguardare come le coordinate del punto (*).

Ogni serie di potenze ha un cerchio di convergenza di raggio determinato (nullo, finito od infinito). Ci accadrà spesso di dovere considerare l'insieme delle serie di potenze il cui raggio è maggiore del modulo di un numero x. Questo insieme verrà denotato con S_x. È chiaro che se è $|z| > |z'|$, l'insieme S_z è contenuto in $S_{z'}$. L'insieme delle serie di potenze il cui raggio di convergenza non è nullo, è S_0.

2. Poichè una funzione analitica, che supporremo ammettere un ramo regolare nell'intorno del punto $x = 0$, è completamente determinata dal suo sviluppo in serie di potenze nell'intorno di quel punto, così ogni elemento $\alpha(x)$ di S, il cui raggio di convergenza non è nullo, definisce una funzione analitica di cui un ramo è regolare nell'intorno di $x = 0$. Per schivare le discussioni relative a funzioni non uniformi, sarà opportuno ricorrere al concetto di *stella* quale è stato recentemente introdotto dal Mittag-Leffler. Rimandando, per la definizione di questo concetto, alla sua Memoria (**), con-

(*) V. la mia Nota: *Cenno sulla geometria dello spazio funzionale.* Rendic. della R. Accademia delle Scienze di Bologna, 14 febbraio 1897. Cfr. T. Cazzaniga: *Intorno ai reciproci dei determinanti normali*, pag. 21. Rendic. della R. Accad. delle Scienze in Torino, 16 aprile 1899.

(**) Mittag-Leffler, *Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène.* Acta Math., T. XXIII, pag. 43, 1899.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

verremo di indicare ad un tempo con $\alpha(x)$ e la serie di potenze di S che si considera, ed il ramo della funzione analitica definita da questa serie esistente ed univocamente determinata nella stella appartenente alla successione $\alpha(0)$, $\alpha'(0)$ (*), $\alpha''(0), \ldots$

3. È noto che agli elementi di S sono applicabili operazioni che riproducono enti dell'insieme stesso o di un insieme analogo. Fra queste operazioni hanno speciale importanza quelle che ammettono la proprietà distributiva (operazioni distributive) e che vanno riguardate, come ho fatto osservare altre volte, come le omografie dello spazio S.

Un'operazione distributiva A è determinata in S, quando si conoscono le funzioni che essa fa corrispondere agli elementi $1, x, x^2, \ldots x^n, \ldots$ di S. Porremo:

$$A(x^n) = \xi_n(x), \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Si sa allora come ne consegua, per le funzioni $\varphi(x)$ di un insieme convenientemente definito in S, lo sviluppo:

$$A(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n(x)}{n!} D^n \varphi, \tag{2}$$

in cui D è l'operazione di derivazione, e le $\alpha_n(x)$ sono funzioni dipendenti dalle ξ_n mediante le relazioni:

$$\alpha_n = \xi_n - n x \xi_{n-1} + \binom{n}{2} x^2 \xi_{n-2} - \cdots + (-1)^n x^n \xi_0. \tag{3}$$

Da queste relazioni si ricavano, inversamente, le ξ_n in funzione delle α_n:

$$\xi_n = \alpha_n + n x \alpha_{n-1} + \binom{n}{2} x^2 \alpha_{n-2} + \cdots + x^n \alpha_0 \text{ (**)}. \tag{4}$$

4. Le operazioni distributive più semplici sono la moltiplicazione, la derivazione e la sostituzione.

a) Facendo il prodotto di un elemento *arbitrario* $\varphi(x)$ di S per una funzione analitica *data* $\mu(x)$ si ha l'operazione di moltiplicazione, che si rappresenta con M_μ. La funzione $\mu(x)$ si può dire moltiplicatore. Consi-

(*) Con $\alpha'(x)$ si indica $\dfrac{d\alpha}{dx}$.

(**) V. il mio lavoro: *Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif*, Cap. II. Math. Annal., Bd. XLIX. Questo lavoro verrà d'ora innanzi citato colla lettera M, seguita dal numero del paragrafo.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

derando moltiplicatori appartenenti ad S, le varie operazioni di moltiplicazione formano un gruppo, sono fra loro commutabili e sono formate colla moltiplicazione M_x di moltiplicatore x; se cioè:

$$\mu(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots,$$

si avrà:

$$M_\mu = c_0 + c_1 M_x + c_2 M_x^2 + \cdots$$

b) Per la derivazione si userà il solito simbolo D. La formola (2) dimostra che ogni operazione distributiva si può esprimere come somma di un numero finito od infinito di prodotti di moltiplicazioni per derivazioni.

c) La sostituzione è l'operazione che consiste nel sostituire alla variabile x, in un elemento *arbitrario* $\varphi(x)$ di S, la funzione analitica data $\mu(x)$. Questa operazione si rappresenta con S_μ. Per essa, lo sviluppo (2) diviene:

$$S_\mu(\varphi) = \sum_{n=0}^{\sigma} \frac{(\mu(x) - x)^n}{n!} D^n(\varphi).$$

Le operazioni di sostituzione formano un gruppo, non però commutabile.

5. Quando un'operazione è stata definita per gli elementi di uno spazio S, è spesso possibile di estenderla anche agli elementi di un nuovo spazio S' che comprenda S; ciò, anche quando la primitiva definizione non sia immediatamente applicabile in S'. Questa estensione si fa col mezzo del noto principio di *permanenza*, che l'Hankel (*) ha enunciato per le operazioni fondamentali dell'Aritmetica, ma che conserva il suo valore in tutte le parti della scienza dei numeri (**). Per applicare questo principio, si procederà in generale nel seguente modo.

Supposto di avere un'operazione A definita per gli elementi di un insieme S, sia indicato con a l'insieme di proprietà fra loro indipendenti, di cui gode la A nell'insieme S. La definizione data per A in S non sia applicabile ad un nuovo insieme S' che comprenda S e sia più esteso. Si possa

(*) *Theorie der komplexen Zahlensystemen*, § 3 (Leipzig, 1867).

(**) È così, per esempio, che la derivata si può definire mediante la regola $D x^n = n x^{n-1}$ per tutto l'insieme S_0. Osservato poi che in questo insieme essa ha la proprietà di essere limite del rapporto incrementale, si viene ad assumere questa proprietà come definizione della derivata in ogni insieme più esteso.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

ora, in qualunque modo, definire in S' un'operazione A_1 soggetta alle condizioni:

a) di coincidere con A quando dagli elementi di S' si considerano quelli soli che appartengono ad S,

b) di godere delle proprietà a, che valgono a determinarla in S'.

Sotto queste condizioni, si riterrà applicabile il sopra citato principio di permanenza e si dirà che la A_1 è la stessa operazione A estesa al nuovo insieme S'.

6. L'osservazione precedente permette di estendere a tutto l'insieme delle funzioni analitiche alcune operazioni originariamente definite per il solo spazio S_0. Questo è manifestamente il caso per le operazioni di moltiplicazione, derivazione e sostituzione; con ciò, in M_μ ed S_μ, μ potrà rappresentare una funzione analitica qualunque, anche non appartenente ad S_0.

Quando parleremo genericamente di operazioni applicabili all'insieme delle funzioni analitiche, ammetteremo solo che ad una funzione dell'insieme esse facciano corrispondere funzioni dell'insieme stesso. Con *spazio funzionale* intenderemo poi, sia tutto l'insieme delle funzioni analitiche, sia una parte di esso, colla condizione però che se α e β appartengono a questa parte, vi appartenga anche $\alpha + \beta$.

7. Prima di chiudere queste osservazioni preliminari, conviene di notare un altro aspetto che si può dare alle operazioni distributive applicate agli elementi di S. Si abbia un'operazione A per la quale sia:

$$A(x^n) = \xi_n(x) = a_{n0} + a_{n1}x + a_{n2}x^2 + \cdots + a_{n\nu}x^\nu + \cdots$$

Applicando questa operazione all'elemento di S:

$$\varphi(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots,$$

ed ammesso che questa serie sia stata presa in modo che risulti uniformemente convergente la $\Sigma k_n \xi_n$ in un intorno di $x=0$, si avrà:

$$A(\varphi) = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \cdots = \psi(x), \tag{5}$$

dove i coefficienti g_n dipendono dai coefficienti k_n per mezzo delle relazioni:

$$g_n = a_{0n} k_0 + a_{1n} k_1 + \cdots a_{\nu n} k_n + \cdots \tag{6}$$

Sotto questa forma, si vede che all'operazione A che trasforma $\varphi(x)$ in $\psi(x)$, corrisponde un'operazione rappresentata dalla (6), la quale applicata a k_n, lo trasforma in g_n; si ha cioè, in altra forma, una trasformazione lineare in uno spazio ad infinite dimensioni. È sotto questa forma che esse sono

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

considerate dal sig. Cazzaniga (*) per il caso del determinante normale (d'ordine infinito) non nullo; e a questo proposito notiamo che non sarebbe nè difficile, nè inopportuno, di ricondurre lo studio dei determinanti d'ordine infinito a considerazioni sulle operazioni distributive.

II. Trasformazioni nelle operazioni.

8. Siano A, B due operazioni distributive a determinazione unica, definite nell'insieme delle funzioni analitiche. Si dirà che B è *trasformata* di A mediante una terza operazione distributiva X, quando si abbia:

$$X A X^{-1} = B. \tag{7}$$

Si dirà ancora che X trasforma A in B.

In uno spazio funzionale in cui X sia a determinazione unica, la (7) equivale ancora ad:

$$X A = B X,$$

e a:

$$X^{-1} B X = A.$$

9. Per vedere quale grado di indeterminazione presenti la X quando siano date A e B, si ammetta che X ed Y siano due operazioni che trasformano A in B, e si ponga $X = K Y$, onde $X^{-1} = Y^{-1} K^{-1}$ Dalle:

$$X A X^{-1} = B, \qquad Y A Y^{-1} = B,$$

verrà:

$$B = K Y A Y^{-1} K^{-1}, \quad \text{onde} \quad B = K B K^{-1}.$$

Quest'ultima relazione esprime che K è commutabile con B; reciprocamente, se K è un'operazione qualunque commutabile con B e B è trasformata di A mediante X, lo è anche mediante $K X$.

Analogamente, se in uno spazio in cui Y è a determinazione unica, B è trasformata di A mediante Y, lo è anche mediante $Y H$, essendo H un'operazione arbitraria commutabile con A; reciprocamente, se X ed Y trasformano A in B e si pone $X = Y H$, H è commutabile con A.

10. Essendo a_0, a_1, a_2,... una successione, finita o no, di costanti, è noto che l'operazione:

$$a_0 A^0 + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots, \tag{8}$$

(*) Nota citata, § 2.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

è, nel suo campo di validità, commutabile con A. Ponendo:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots,$$

la (8) si può rappresentare simbolicamente con $f(A)$. Ora:

$$X A = B X,$$

onde:

$$X A^2 = B X A = B^2 X,$$

ed in generale, per ogni valore di n intero e positivo:

$$X A^n = B^n X.$$

Da ciò (*), sostituendo A^0 coll'unità:

$$X (a_0 + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots) = (a_0 + a_1 B + a_2 B^2 + \cdots) X,$$

o infine:

$$X f(A) X^{-1} = f(B); \tag{9}$$

e questa relazione si estende senza difficoltà al caso che $f(A)$ contenga potenze negative di A.

La formula (9) ci mostra che non solo, mediante una trasformazione X, ad operazioni commutabili corrispondono operazioni commutabili (il che è affatto ovvio), ma anche che una data funzione di A (**) si trasforma nella stessa funzione di B.

11. Se X trasforma A in B, ed Y trasforma B in C, YX trasformerà A in B. Infatti, da:

$$X A X^{-1} = B, \qquad Y B Y^{-1} = C,$$

risulta immediatamente:

$$Y X A X^{-1} Y^{-1} = C.$$

Da questo teorema segue che se si ha una classe di operazioni A, B, C,... e si conoscono le operazioni che trasformano un'operazione fissa P nelle operazioni della classe, si conosceranno anche quelle che trasformano le opera-

(*) Nell'applicare l'operazione distributiva ad una serie, conviene tenere presenti le osservazioni fatte nel *M.*, § 48.

(**) Circa il concetto di *funzione* di un'operazione, v. LEVI-CIVITA: *Sui gruppi di operazioni funzionali*, pag. 4 (Rendic. dell'Ist. Lombardo, T. XXVIII, 1895).

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

zioni della classe l'una nell'altra. Infatti, si avrà:

$$X P X^{-1} = A, \qquad Y P Y^{-1} = B, \ldots$$
$$P = X^{-1} A X = Y^{-1} B Y = \cdots,$$

onde, per il teorema precedente, $Y X^{-1}$ trasformerà A in B.

12. Sempre nell'ipotesi di limitarci ad un campo funzionale in cui X è univoca, o, come si può anche dire, considerando un *ramo univoco* della X, avremo per il § 10:

$$X A = B X, \quad X A^2 = B^2 X, \ldots \quad X A^n = B^n X, \ldots$$

Se ora, nello spazio funzionale considerato, A non ha radici ed ω è una radice di B,

$$A X^{-1}(\omega), \quad A^2 X^{-1}(\omega), \ldots \quad A^n X^{-1}(\omega), \ldots$$

saranno radici di X. Reciprocamente, se $A(\alpha)$ è radice di X senza che lo sia α, $X(\alpha)$ sarà radice di B ed $A^2(\alpha)$, $A^3(\alpha), \ldots$ $A^n(\alpha)$, saranno radici di X.

III. Le operazioni trasformatrici.

13. Essendo M_x l'operazione di moltiplicazione per x (§ 4), chiameremo *operazione trasformatrice* di un'operazione data A un'operazione X che trasformi M_x in A. La trasformatrice è dunque definita dall'equazione:

$$X M_x X^{-1} = A. \tag{10}$$

In altri termini, se φ è un elemento del campo funzionale che si considera, sarà:

$$X(x\varphi) = A X(\varphi), \tag{11}$$

e ricordando (*) che con *derivata funzionale* di un'operazione X s'intende l'operazione $X'(\varphi) = X(x\varphi) - x X(\varphi)$, ne viene che la trasformatrice di A soddisfa all'equazione differenziale simbolica (**):

$$X' = (A - x) X. \tag{12}$$

(*) *M.*, § 56.

(**) Su queste equazioni differenziali simboliche v.: *Di un'equazione funzionale simbolica*, ecc. Rendic. della R. Accad. dei Lincei, 19 febbraio 1899.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

14. Ogni operazione H commutabile con M_x è una moltiplicazione, poichè la $H M_x = M_x H$ equivale ad $H' = 0$, e si è dimostrato che l'operazione, la cui derivata funzionale sia nulla, è una moltiplicazione (*). Reciprocamente, ogni moltiplicazione è commutabile con M_x. Se dunque si è trovata la trasformatrice X di una data operazione A, questa trasformatrice, applicata al gruppo delle moltiplicazioni, lo trasformerà nel gruppo delle operazioni commutabili con A.

In particolare, se è:

$$\mu(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

si avrà per il § 10:

$$X M_\mu X^{-1} = \mu(A). \qquad (13)$$

15. La formula precedente, che rappresenta l'enunciato di un teorema per il caso che il moltiplicatore μ sia una serie di potenze di x, si può assumere come definizione di $\mu(A)$ nel caso che μ sia una funzione analitica qualunque; potremo dire cioè che con $\mu(A)$ intenderemo una delle determinazioni di $X M_\mu X^{-1}$, essendo X la trasformatrice di A.

In particolare,

$$X(x^m \varphi) = A^m X(\varphi), \qquad (14)$$

si potrà prendere come definizione di A^m per ogni valore di m, scegliendo opportunamente la determinazione di X (**).

16. Dalle cose dette nel § 9, e dall'osservazione del § 14 che le operazioni commutabili con M_x sono le moltiplicazioni, risulta che se X è un ramo univoco della trasformatrice di A, gli altri suoi rami saranno rappresentati da $X M_\mu$, essendo $\mu(x)$ una funzione arbitraria. L'arbitrarietà del fattore M_μ fa sì che, avendosi un ramo X_1 della trasformatrice di A tale che sia $X_1(\lambda) = \alpha$, basterà prendere $X_2 = X_1 M_\lambda$ per avere con X_2 un ramo della trasformatrice tale che dia $X_2(1) = \alpha$. Basterà dunque che α sia nel campo di validità di uno dei rami di X^{-1} per avere un ramo di X che, applicato ad 1, produce la funzione α.

(*) *M.*, § 60.

(**) È in questo modo che nel *M.*, §§ 105 e seg., si è definita la derivata d'indice qualunque mediante un'equazione funzionale simbolica che si deduce, in sostanza, dalla formula (14). V. più avanti, al § 26.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

17. Passiamo ora alla determinazione effettiva di X, supposta data la A. Applicando all'equazione (12) la derivazione funzionale (*), si ottiene senza difficoltà:

$$X'' = (A^2 - 2\,x\,A + x^2)\,X,$$

quindi:

$$X''' = (A^3 - 3\,x\,A^2 + 3\,x^2\,A - x^3)\,X,$$

e così via. Ponendo:

$$(A - x)_m = A^m - m\,x\,A^{m-1} + \binom{m}{2} x^2\,A^{m-2} - \cdots + (-1)^m\,x^m,$$

il che, bene inteso, non è a confondersi colla m^{sima} potenza dell'operazione $A - x$, si ha per la derivata funzionale m^{sima} della X:

$$X^{(m)} = (A - x)_m\,X. \tag{15}$$

Fatto $X(1) = \alpha$, donde

$$X^{(m)}(1) = A^m(\alpha) - m\,x\,A^{m-1}(\alpha) + \cdots + (-1)^m\,x^m\,\alpha,$$

viene, per la formula (**) che dà lo sviluppo di un'operazione distributiva in serie procedente secondo le potenze intere positive della derivata:

$$X(\varphi) = X(1)\,\varphi + X'(1)\,\varphi' + \frac{1}{1\,.\,2} X''(1)\,\varphi'' + \cdots,$$

ossia:

$$X(\varphi) = \alpha\,\varphi + (A - x)\,\alpha \cdot \varphi' + \frac{1}{1\,.\,2}(A - x)_2\,\alpha \cdot \varphi'' + \cdots \tag{16}$$

Siccome poi per ogni serie di tale forma esiste un campo funzionale di validità, costituito per lo meno dalle funzioni razionali intere, così rimane dimostrata l'esistenza di trasformatrici per ogni operazione A. La moltiplicità di determinazioni della X è poi rivelata dall'arbitrarietà della funzione α nella posizione $X(1) = \alpha$; il che è d'accordo con quanto è stato osservato al § 16.

18. Essendo α una funzione qualunque, le α, $\alpha\,x^2$, $\alpha\,x^2, \ldots$ definiscono uno spazio funzionale che si può chiamare *intorno* di α. Quando un'operazione K ammette come radici le $\alpha\,x^i$ per $i = 0,\ 1,\ 2, \ldots\ m - 1$, ne consegue:

$$K(\alpha) = K'(\alpha) = \cdots = K^{(m-1)}(\alpha) = 0,$$

(*) *M.*, § 58.
(**) *M.*, § 63.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

e lo sviluppo di K in serie ordinata per le potenze di D comincia col termine in D^m. Quando poi K ammette come radici le αx^i per tutti i valori interi positivi di i, quello sviluppo cessa di avere significato: in tale caso si potrà dire che α è *elemento singolare* per K, od anche che K è singolare per l'elemento α.

19. Ora, le operazioni trasformatrici ammettono, in generale, elementi singolari. A dimostrarlo, consideriamo la trasformatrice X di un'operazione A, e sia ω una radice di A; inoltre, ω appartenga al campo di validità di uno dei rami di X^{-1} (il che accadrà in generale) per modo che $X^{-1}(\omega) = \alpha$. Si avrà allora (cfr. § 12):

$$X(x\alpha) = A(X(\alpha)) = 0, \quad X(x^2\alpha) = A\,X(x\alpha) = 0, \ldots$$
$$X(x^m\alpha) = A\,X(x^{m-1}\alpha) = 0,$$

per ogni m intero. L'elemento $x\alpha$ è dunque singolare per X. In quanto ad α stessa, esso dà:

$$X(\alpha) = \omega, \quad X'(\alpha) = -x\omega, \ldots \quad X^{(m)}(\alpha) = (-1)^m x^m \omega,$$

da cui, essendo φ un elemento dell'insieme S_0:

$$X(\alpha\varphi) = \omega\left(\varphi - x\varphi' + \frac{x^2}{1\,.\,2}\varphi'' - \cdots\right);$$

cioè, siccome la serie tra parentesi non è altro che la costante $\varphi(0)$, l'operazione X fa corrispondere all'intero spazio $\alpha\varphi$, lo spazio ad una dimensione $c\omega$, dove c è una costante arbitraria.

La presenza di elementi singolari nelle operazioni trasformatrici dà, per così dire, un carattere di trascendenza a queste operazioni. Infatti le operazioni di natura più elementare fra le distributive (come le forme differenziali lineari, le forme lineari alle differenze, le sostituzioni, ecc.) non ammettono elementi singolari.

20. Se X è trasformatrice di A, ed α non annulla X mentre l'annulla αx, αx sarà elemento singolare di X. Infatti, dall'equazione di definizione della trasformatrice:

$$X(x\varphi) = A\,X(\varphi),$$

segue, facendo $\varphi = \alpha$, che $X(\alpha)$ è radice di A; si ricade quindi nell'ipotesi del paragrafo precedente, ed X è singolare per l'elemento αx.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

IV. Alcune trasformatrici speciali.

21. Ci proponiamo ora di dare alcuni esempî di operazioni trasformatrici particolari. Cerchiamo anzitutto la trasformatrice dell'operazione di moltiplicazione M_μ. Dovendo essere:

$$X M_x X^{-1} = M_\mu,$$

ossia:

$$X(x\varphi) = \mu(x) X(\varphi),$$

ne verrà, indicando al solito con X' la derivata funzionale di X:

$$X' = (\mu(x) - x) X. \tag{17}$$

Ora questa è un'equazione differenziale simbolica appartenente ad una classe di equazioni ch'io ho studiate e risolute in altri lavori (*), dai quali risulta che la soluzione generale dell'equazione (17) è data da λS_μ, dove λ è una funzione arbitraria ed S_μ è l'operazione di sostituzione di $\mu(x)$ ad x (§ 4, *c*). Ne viene che la trasformatrice di una moltiplicazione M_μ, all'infuori di una moltiplicazione (la cui arbitrarietà risulta dal § 16), è la sostituzione corrispondente S_μ. Reciprocamente, ogni sostituzione è trasformatrice della moltiplicazione corrispondente.

22. Cerchiamo la trasformatrice della derivazione. Essa sarà definita da:

$$X M_x X^{-1} = D, \quad \text{od} \quad X(x\varphi) = D X(\varphi). \tag{18}$$

Ne viene che posto $X(\varphi) = \psi$, ed indicate le derivate con accenti, si avrà:

$$X(\varphi) = \psi, \quad X(x\varphi) = \psi', \quad X(x^2\varphi) = \psi'', \dots \tag{19}$$

In particolare, possiamo giovarci dell'arbitrarietà che rimane in X secondo il § 16, e porre $X(1) = \alpha$, dove α è una funzione arbitraria; viene allora:

$$X(1) = \alpha, \quad X(x) = \alpha', \quad X(x^2) = \alpha'', \dots \tag{20}$$

onde:

$$X(e^{ax}) = \alpha(x + a). \tag{21}$$

23. La formula richiamata al § 17 serve a darci lo sviluppo della trasformatrice di D in serie ordinate per le derivate successive dell'elemento φ;

(*) *Sopra alcune equazioni simboliche.* Mem. della R. Accad. delle Scienze di Bologna, S. V, T. V, 1895. Cfr. anche *M.*, § 65 e seg.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

posto $X(\mu) = \alpha$, questa formula diviene:

$$X(\mu\varphi) = \alpha\varphi + (\alpha' - x\alpha)\varphi' + \frac{1}{1.2}(\alpha'' - 2x\alpha' + x^2\alpha)\varphi'' + \cdots; \qquad (22)$$

ogni diversa determinazione di μ ed α ci darà un ramo diverso della trasformatrice di D. Esaminiamo alcuni speciali fra questi rami.

24. *a*) Ponendo dapprima $\mu = 1$, $\alpha = e^{ax}$, viene dalla (22):

$$X(\varphi) = e^{ax}\left(\varphi + (a-x)\varphi' + \frac{(a-x)^2}{1.2}\varphi'' + \cdots\right),$$

e quindi per lo spazio funzionale S_a, sarà:

$$X(\varphi) = e^{ax}\varphi(a).$$

Esiste dunque un ramo della trasformatrice di D che fa corrispondere a tutte le funzioni dello spazio S_a una medesima funzione moltiplicata per una costante, cioè uno spazio ad una sola dimensione (*). Questo ramo ammette uno spazio di radici ad infinite dimensioni, cioè tutte le funzioni di S_a per le quali è $\varphi(a) = 0$.

b) Essendo μ una funzione arbitraria, poniamo $\alpha = 1$. Dalla (19) viene:

$$X(\mu) = 1, \quad X(x\mu) = X(x^2\mu) = \cdots = 0.$$

La $x\mu$ sarà dunque un elemento singolare per la X; ciò proviene dal fatto (§ 19) che questo ramo della X fa corrispondere a μ la radice 1 dell'operazione D. Applicando nuovamente a questo ramo l'equazione di definizione (18), si ottiene, essendo $a_0, a_1, a_2, \ldots$ costanti arbitrarie introdotte colle successive quadrature:

$$X\left(\frac{\mu}{x}\right) = x + a_0, \quad X\left(\frac{\mu}{x^2}\right) = \frac{x^2}{1.2} + a_0 x + a_1, \ldots$$

$$X\left(\frac{\mu}{x^n}\right) = \frac{x^n}{n!} + a_0\frac{x^{n-1}}{\overline{n-1}!} + a_1\frac{x^{n-2}}{\overline{n-2}!} + \cdots + a_{n-2}x + a_{n-1}.$$

Facendo $\mu = \frac{1}{x}$, e prendendo uguali a zero le costanti d'integrazione, si ottiene una determinazione della X per la quale è:

$$X\left(\frac{1}{x^n}\right) = \frac{x^{n-1}}{\overline{n-1}!}. \qquad (23)$$

(*) È questa una delle operazioni aventi il massimo grado di degenerescenza, e che sono indicate colle lettere C nei §§ 79 e seguenti del M.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

c) Ponendo invece $\mu = 1$, $\alpha = \frac{1}{x}$, le (19) dànno:

$$X(x^n) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}, \tag{24}$$

altro ramo della trasformatrice di D, pure degno di osservazione.

25. La nota operazione funzionale che va sotto il nome di trasformazione di Laplace è una delle trasformatrici della derivazione. Infatti, essa si può definire (*) mediante due equazioni simboliche, una delle quali è precisamente la (18). Essa può anche definirsi come una trasformatrice di D, la cui *aggiunta* (**) è pure trasformatrice di D (***). Fra i rami di X enumerati al paragrafo precedente, quelli che soddisfano alle equazioni (23) e (24) sono appunto rami della trasformazione di Laplace.

26. Nel § 15 abbiamo definito la funzione $\mu(A)$ di una operazione come risultato della trasformazione M_μ per mezzo della trasformatrice di A. Se X è trasformatrice della derivazione, la funzione $\mu(D)$ di D si potrà dunque definire da:

$$X M_\mu X^{-1} = \mu(D). \tag{25}$$

In particolare, essendo r un numero qualunque, la $X x^r X^{-1}$ si potrà indicare con D^r. Vi è però in questa posizione l'arbitrarietà dipendente dalla scelta del ramo di X che figura nella (25). Prendendo in particolare per X la trasformazione di Laplace, cioè quella che oltre alla (18) soddisfa anche alla:

$$X D \varphi = -x X(\varphi),$$

si trova con un calcolo facile che, posto $X x^r X^{-1} = A$, la A soddisferà all'equazione differenziale simbolica $D A' = r A$, che è quella presa al § 105

(*) Amaldi, *Sulla trasformazione di* Laplace. Rendic. della R. Accad. dei Lincei, S. V, T. VII, 1898.

(**) V. la mia Nota: *Sull'operazione aggiunta di una data,* nei Rendic. dell'Accad. di Bologna, 17 Aprile 1878.

(***) Amaldi (loc. cit.) dimostra che l'aggiunta della trasformazione di Laplace coincide colla trasformazione stessa. Reciprocamente, se si pone che una trasformatrice X della derivazione debba ammettere come aggiunta $\overline{X}$ una trasformatrice della derivazione, la $\overline{X}$ dovrà verificare l'equazione $\overline{X}(x\varphi) = D\overline{X}(\varphi)$, insieme a quella che si ottiene prendendo l'aggiunta dei due membri della (18), che è (secondo la citata Nota sull'operazione aggiunta) $\overline{X}D\varphi = -x\overline{X}(\varphi)$: ora queste due equazioni sono appunto quelle che caratterizzano la trasformazione di Laplace.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

del più volte citato *Mémoire* come equazione di definizione delle derivate d'indice qualunque.

27. Ottenuta la trasformatrice di D, è facile ottenere le trasformatrici di operazioni commutabili con D, mediante la seguente osservazione generale. Sia X la trasformatrice di un'operazione A; si ha:

$$X M_\mu X^{-1} = \mu A.$$

Ma al § 21 si è visto che:

$$S_\mu M_x S_\mu^{-1} = M_\mu,$$

onde:

$$X S_\mu M_x S_\mu^{-1} X^{-1} = \mu (A).$$

La trasformatrice di $\mu(A)$ è dunque $X S_\mu$. Se dunque X è trasformatrice di D, e $\mu(D)$ è un'operazione commutabile con D, la regola precedente permette subito di trovarne la trasformatrice.

28. In particolare, assumiamo la trasformazione di Laplace come trasformazione della derivazione ed indichiamola con L; essa soddisfa alle due equazioni (§ 26) che la determinano:

$$L(x\varphi) = D\, L(\varphi), \quad L\, D \varphi = - x\, L(\varphi),$$

che possiamo anche scrivere:

$$L M_x L^{-1} = D, \quad L^{-1} M_x L = - D, \tag{26}$$

le quali esprimono che L è trasformatrice di D ed L^{-1} di $-D$. Consideriamo ora un'operazione della forma:

$$K = L\, S_\mu.$$

Essa soddisfarà a due equazioni che si deducono dalle (26); la prima sarà:

$$K M_x K^{-1} = \mu (D), \tag{27}$$

ed esprimerà che K è la trasformatrice dell'operazione $\mu(D)$. In quanto alla seconda, osservo dapprima che la trasformata di D mediante S_μ^{-1} non è altro che il prodotto dell'operazione D per il moltiplicatore $\nu(x) = \mu'(\mu_{-1}(x))$ (*), cioè:

$$S_\mu^{-1} D\, S_\mu = M_\nu D,$$

(*) Con $\mu_{-1}(x)$ indico, secondo una notazione usuale, la funzione inversa di $\mu(x)$.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

come si verifica subito. Ciò posto, la seconda delle (26) dà:

$$S_\mu^{-1} D S_\mu = - S_\mu^{-1} L^{-1} M_x L S_\mu = - K^{-1} M_x K,$$

e quindi:

$$K^{-1} M_x K = - M_\nu D. \tag{28}$$

Se ne conclude che K^{-1} è la trasformatrice del prodotto della D per il moltiplicatore fisso ν.

29. Di quanto precede si può fare l'applicazione a due casi particolarmente interessanti, il secondo dei quali ci darà quell'operazione di cui si è fatto cenno nell'introduzione al presente lavoro e che permette (impiegando la terminologia del Laplace) il passaggio dalla funzione generatrice alla sua determinante. Di queste operazioni darò qui quel tanto che è necessario per le applicazioni che se ne devono fare, proponendomi di riprenderle in un altro lavoro per uno studio più approfondito.

Il primo caso si ottiene facendo nell'operazione $K = L S_\mu$ del paragrafo precedente, $\mu = \frac{1}{x}$. Indicando con B l'operazione così ottenuta, si trova che per essa le equazioni (27) e (28) divengono:

$$B M_x B^{-1} = D^{-1}, \quad B^{-1} M_x B = x^2 D; \tag{29}$$

l'operazione B è dunque la trasformatrice di D^{-1}, e la sua inversa è quella di $x^2 D$. A questa operazione si potrebbe dare il nome di trasformazione di Borel, per l'uso sistematico che ne ha fatto questo autore (*) per trasformare serie di potenze sempre divergenti in serie aventi un raggio di convergenza non nullo, o serie convergenti in un cerchio di raggio finito in serie convergenti in tutto il piano. Un ramo dell'operazione di Borel si ha dal ramo di L (**) definito dalle equazioni (23) e vale per uno spazio di serie di potenze positive di x; esso è definito dalle eguaglianze:

$$B(x^n) = \frac{x^{n-1}}{\overline{n-1}\,!}; \tag{30}$$

(*) *Sur les séries de Taylor*. Journ. de Math., 1896, Comptes rendus, 14 décembre 1896; *Sur les séries de Taylor*. Acta Math., T. XXI, 1897, etc.

(**) I varî rami dell'operazione di Laplace sono controdistinti dai diversi spazî funzionali su cui porta l'operazione (v. Amaldi, nota citata). A questi corrispondono pure varî rami per l'operazione B studiata in questo paragrafo e per l'operazione C considerata nel paragrafo successivo, l'una e l'altra dedotte da L. Sulla questione del come avvenga il passaggio da un ramo all'altro (passaggio possibile poichè basta uno dei rami a determinare l'operazione) non è qui il luogo di trattenersi.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

un secondo ramo si ha invece dal ramo della L definito dalla (24), e vale per serie di potenze negative di x; per esso si ha:

$$B\left(\frac{1}{x^n}\right)=(-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}. \tag{31}$$

Le equazioni di definizione (29) sono evidentemente soddisfatte tanto colle prime formule che colle seconde, mentre esse permettono di definire l'operazione di Borel anche in spazi funzionali in cui le (30) o le (31) non sono applicabili.

30. Il secondo caso particolare cui vogliamo accennare si ottiene facendo nell'operazione $K = L\,S_\mu$ del § 28, la funzione μ uguale ad e^{-x}. Indicando con C l'operazione così definita, le equazioni (26) dànno:

$$C\,M_x\,C^{-1} = e^{-D}, \quad C^{-1}\,M_x\,C = x\,D. \tag{32}$$

L'operazione e^D essendo quella che muta x in $x+1$ in una funzione di x, cioè quella che viene ordinariamente indicata nel calcolo delle differenze col simbolo θ, introdotto dal Casorati, si avrà per la prima delle (32):

$$C\,M_x\,C^{-1} = \theta^{-1}.$$

Ora, l'operazione che applicata ad una serie di potenze ne dà il coefficiente di x^n considerato come funzione dell'indice (*), (o, in altre parole, l'operazione che fa passare dalla funzione generatrice alla sua determinante) gode appunto delle proprietà espresse dalle equazioni (32); e poichè queste equazioni determinano la C come le (26) determinano la L, così l'operazione in discorso è un ramo dell'operazione C ora definita.

L'operazione C è la trasformatrice di θ^{-1}, mentre la sua inversa è la trasformatrice di $x\,D$. Da ciò la sua proprietà, di trasformare le equazioni differenziali lineari a coefficienti razionali in equazioni lineari alle differenze pure a coefficienti razionali. Tralasciando per ora di insistere sulle proprietà di questa operazione, mi limiterò ad indicare un ramo di essa, valido per l'intorno della funzione esponenziale. Se si pone:

$$C\,(e^{ax}) = a^x\,F(x),$$

dove $F(x)$ rappresenta il fattoriale, cioè è uguale ad $\frac{1}{\Gamma(x+1)}$, si ha per ogni n

(*) Considerata p. es. dal Borel nella nota dei *Comptes rendus* del 12 dicembre 1898.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

intero e positivo, mediante applicazione della prima della (32):

$$C(x^n e^{ax}) = a^{x-n} F(x)\, x\,(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1),$$

e si verifica senz'alcuna difficoltà che in questo modo è soddisfatta anche la seconda delle (32).

CAPITOLO II.

Operazioni normali.

I. Operazioni normali d'ordine nullo.

31. Definiremo un'operazione distributiva applicabile all'insieme S delle serie di potenze, mediante le equazioni:

$$U(x^n) = a_n x^n, \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ldots), \tag{1}$$

dove a_0, a_1,... a_n,... è una successione di numeri dati. Una tale operazione verrà detta *normale di ordine nullo;* un'operazione normale d'ordine nullo è individuata dalla successione dei numeri a_n, e le varie operazioni che si possono fare corrispondere alle diverse successioni verranno rappresentate colla lettera U, affetta o no da indici. Per brevità, chiameremo operazioni U le operazioni normali di primo ordine.

32. Dalla definizione delle operazioni U risultano immediatamente le seguenti proposizioni:

a) la somma di due o più operazioni U è un'operazione U;

b) il prodotto di due operazioni U è un'operazione U, e perciò le operazioni U formano un gruppo;

c) il prodotto di due operazioni U è commutativo;

d) una funzione razionale intera a coefficienti costanti di più operazioni U è pure un'operazione U; e se indichiamo con $F(u_1,\ u_2,\ldots\ u_r)$ una funzione razionale intera delle indeterminate u_1, u_2,... u_r, e poniamo:

$$U_i(x^n) = a_{in} x_n, \quad (i = 1,\ 2,\ldots\ r;\ n = 0,\ 1,\ 2,\ldots),$$

si avrà:

$$F(U_1,\ U_2,\ldots\ U_r)(x^n) = F(a_{1n},\ a_{2n},\ldots\ a_{rn})\, x^n.$$

33. Suppongansi tutti i numeri a_n che figurano nelle (1) differenti da zero. L'operazione U non ha allora radici nello spazio S; la U^{-1} è a deter-

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

minazione unica in questo spazio, ed essendo:

$$U^{-1}(x^n) = \frac{x^n}{a^n}, \tag{2}$$

è essa stessa un'operazione U. Quando uno dei coefficienti, per esempio a_r, è nullo, l'operazione U ha la radice x^r; l'operazione U^{-1} è allora a determinazione multipla, poichè si può aggiungere ad una sua determinazione la $c\,x^r$, dove c è una costante arbitraria. Se sono nulli i p coefficienti:

$$a_{r_1},\ a_{r_2}, \ldots\ a_{r_p},$$

l'operazione U ammetterà lo spazio di radici ad r dimensioni:

$$c_1\,x^{r_1} + c_2\,x^{r_2} + \cdots + c_p\,x^{r_p}, \tag{3}$$

colle p costanti arbitrarie $c_1,\ c_2, \ldots,\ c_p$; e ad una determinazione di U^{-1} si potrà aggiungere la funzione arbitraria (3).

34. Abbiamo visto al § 32 che le operazioni U formano un gruppo commutabile. Fra queste operazioni vi è la $x\,D$, definita da:

$$U(1) = 0,\ \ U(x) = x, \ldots\ U(x^n) = n\,x^n, \ldots$$

L'operazione $x\,D$ ammette come sola radice in S la costante. Ogni operazione U è commutabile con $x\,D$; reciprocamente, se obblighiamo un'operazione A, definita nello spazio S dalle equazioni:

$$A(x^n) = a_{n0} + a_{n1}\,x + a_{n2}\,x^2 + \cdots + a_{n\nu}\,x^\nu + \cdots,$$

alla condizione di essere commutabile con $x\,D$, si vede facilmente che questa condizione porta alla conseguenza che tutti i coefficienti $a_{n\nu}$ devono essere nulli ad eccezione di a_{nn}, e quindi che la A è un'operazione U.

35. Fra le operazioni del gruppo delle U si trova la sostituzione S_{zx}, definita da:

$$S_{zx}(x^n) = z^n\,x^n.$$

Considerando, in queste uguaglianze, le z come un parametro arbitrario, queste sostituzioni formano un sottogruppo ∞^1 del gruppo delle operazioni U; si vede subito, posto $z = e^t$, che questo sottogruppo si riduce a quello delle traslazioni. Il sottogruppo S_{zx} contiene l'identità per $z = 1$; si verifica poi facilmente che la sua trasformazione infinitesima è l'operazione $x\,D$.

L'operazione $S_{zx}\,U$ si indicherà con U_z, e si ha dalle (1) che:

$$U_z(x^n) = a_n\,z^n\,x^n. \tag{4}$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

36. Formando le derivate funzionali successive di U, si trova:

$$U'(x^n) = U(x^{n+1}) - x\,U(x^n) = (a_{n+1} - a_n)\,x^{n+1},$$
$$U''(x^n) = U'(x^{n+1}) - x\,U'(x^n) = (a_{n+2} - 2\,a_{n+1} + a_n)\,x^{n+2},$$

e così via. Analogamente:

$$U'_z(x^n) = (a_{n+1}\,z - a_n)\,x^{n+1},\quad U''_z(x^n) = (a_{n+2}\,z^2 - 2\,a_{n+1}\,z + a_n)\,x^{n+2},\ldots$$
$$\ldots U_z^{(m)}(x^n) = \Big(a_{n+m}\,z^m - m\,a_{n+m-1}\,z^{m-1} +$$
$$+ \binom{m}{2} a_{n+m-2}\,z^{m2} - \cdots + (-1)^n\,a_n\Big)\,x^{n+m}.$$

37. Qui sarà conveniente di usare delle notazioni del calcolo delle differenze finite, e di indicare con Δ la differenza di una funzione della variabile (o indice) n. Così Δ^2, $\Delta^3,\ldots$ saranno le differenze seconde, terze, ecc., per modo che:

$$\Delta\,a_n = a_{n+1} - a_n,\quad \Delta^2\,a_n = a_{n+2} - 2\,a_{n+1} + a_n,\ldots$$

Con notazione analoga, si indicherà con $\Delta_z\,a_n$ il binomio $a_{n+1}\,z - a_n$, ed in generale si porrà:

$$\Delta_z^m\,a_n = a_{n+m}\,z^m - m\,a_{n+m-1}\,z^{m-1} + \binom{m}{2} a_{n+m-2}\,z^{m-2} - \cdots + (-1)^n\,a_n.$$

Potremo pertanto scrivere:

$$U'_z(x^n) = x^{n+1}\,\Delta_z\,a_n,\ldots\quad U_z^{(m)}(x^n) = x^{n+m}\,\Delta_z^m\,a_n,$$

ed in particolare:

$$U'_z(1) = x\,\Delta_z\,a_0,\ldots\quad U_z^{(m)}(1) = x^m\,\Delta_z^m\,a_0.$$

Richiamando ora la formola che dà lo sviluppo d'una operazione distributiva in serie ordinata per le potenze di D (§ 3), avremo per la U_z lo sviluppo:

$$U_z(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,\Delta_z^n\,a_0\,.\,\varphi^{(n)}, \tag{5}$$

e in particolare, per $z = 1$:

$$U(\varphi) = a_0\,\varphi + x\,\Delta\,a_0\,.\,\varphi' + \frac{x^2}{1\,.\,2}\,\Delta^2\,a_0\,.\,\varphi'' + \cdots \tag{6}$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Mutando qui $\varphi(x)$ in $\varphi\left(\frac{x}{z}\right)$, si ha per $U(\varphi)$ l'altra espressione:

$$U(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_z^n a_0 \frac{x^n}{n!} \frac{d^n \varphi\left(\frac{x}{z}\right)}{d x^n}. \tag{7}$$

(*)

38. L'operazione U è data, nello spazio S delle serie di potenze, dalle equazioni di definizione (1); da queste risulta formalmente lo sviluppo (6). Limitandosi al punto di vista formale, si può dire che tanto le (1) quanto la (6) definiscono la U per ogni serie di potenze. Si tratta ora di esaminare fino a che punto questo risultato formale abbia un significato effettivo: si è perciò condotti a distinguere due casi, secondo che il sistema dei numeri a_n introdotti nelle (1) è tale che la serie $\Sigma a_n x^n$ abbia, oppure no, un raggio (non nullo) di convergenza.

Nel primo caso, ogni serie $\varphi = \Sigma c_n x^n$ che abbia un raggio non nullo di convergenza appartiene al *campo di validità* della operazione U. Intendiamo con ciò che tanto le (1) quanto la (6), applicate alla serie φ, dànno risultato avente significato, ed i risultati ottenuti per queste due vie coincidono. Infatti, per le ipotesi fatte, essendo m, m', g, g', numeri positivi finiti, si avrà:

$$|a_n| < m g^n, \quad |c_n| < m' g'^n,$$

onde:

$$|a_n c_n| < m m' g^n g'^n,$$

(*) Considerando due operazioni U, U_1, date nella forma:

$$U(x^n) = a_n x^n, \qquad U_1(x^n) = a'_n x^n,$$

se ne ricavano le serie:

$$U(\varphi) = \Sigma b_n \frac{x^n}{n!} \varphi^{(n)}, \qquad U_1(\varphi) = \Sigma b'_n \frac{x^n}{n!} \varphi^{(n)},$$

dove:

$$b_n = \Delta^n a_0, \qquad b'_n = \Delta^n a'_0.$$

Formando il prodotto $U U_1$, si avrà d'una parte:

$$U U_1(x^n) = a_n a'_n x^n,$$

dall'altra:

$$U U_1(\varphi) = \Sigma b''_n \frac{x^n}{n!} \varphi^{(n)}, \quad \text{con} \quad b''_n = \Delta^n (a_0 a'_0);$$

sviluppando il calcolo, si otterrà facilmente per questa via l'espressione di $\Delta^n(a_0 a'_0)$ in funzione delle $\Delta^m a_0$, $\Delta^m a'_0$ con $m \leq n$.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

e la serie $\Sigma\, c_n\, a_n\, x^n$, ottenuta applicando la U alla serie φ, ha un raggio non nullo di convergenza. Inoltre, è:

$$|\Delta^n a_0| \leq |a_n| + n\,|a_{n-1}| + \binom{n}{2} |a_{n-2}| + \cdots + |a_0|,$$

cioè:

$$|\Delta^n a_0| < m\,(1+g)^n:$$

di più, se r è il raggio di convergenza della serie φ, per tutti i valori di x il cui modulo è minore di $\frac{1}{2}\,r$, si ha:

$$\left| \frac{\varphi^{n)}(x)}{n!} \right| < \frac{2^n\, m'}{r^n};$$

il termine generale della serie (6) è dunque inferiore a:

$$\frac{2^n\, m\, m'\, (1+g)^n\, |x|^n}{r^n},$$

e qui basta prendere:

$$|x| < \frac{r}{2\,(1+g)},$$

per rendere la serie (6) convergente assolutamente ed uniformemente. È lecito allora, per un noto teorema di Weierstrass, ordinare il secondo membro della (6) per le potenze di x, e si ritrova la $\Sigma\, c_n\, a_n\, x^n$. Ogni elemento φ di S_0 appartiene dunque al campo di validità di U.

39. Anche nel secondo caso, in cui $\Sigma\, a_n\, x^n$ ha raggio nullo di convergenza, si può assegnare uno spazio S' contenuto in S e costituente un campo di validità per l'operazione U. Prendiamo, a tale uopo, una successione di numeri $k_0,\ k_1, \ldots\ k_n, \ldots$ positivi, decrescenti e soddisfacenti alle disuguaglianze:

$$k_n < \frac{m\, t^n}{|a_n|}, \tag{8}$$

essendo m e t numeri positivi arbitrariamente scelti. Dico che lo spazio S' è costituito da tutte le serie:

$$\varphi = \Sigma\, c_n\, x^n,$$

per le quali è $|c_n| < k_n$.

Intanto, è manifesto che applicando le (1) ad una tale serie, si ottiene una serie di potenze a raggio di convergenza non nullo. Considerando poi

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

la serie (6), si nota che il suo termine generale è, per $|x| < r$, inferiore a:

$$\frac{r^n}{n!}\left(|a_n| + n|a_{n-1}| + \binom{n}{2}|a_{n-2}| + \cdots + |a_0|\right)\eta^{(n)}(r), \tag{9}$$

dove $\eta(r)$ è la serie a termini positivi $\Sigma k_n r^n$. Essendo la derivata n^{sima} di questa:

$$\frac{\eta^{(n)}(r)}{n!} = k_n + (n+1)k_{n+1} r + \frac{(n+1)(n+2)}{1.2} k_{n+2} r^2 + \cdots.$$

si avrà, per essere le k_n decrescenti e per $r < 1$:

$$\frac{\eta^{(n)}(r)}{n!} < \frac{k_n}{(1-r)^{n+1}};$$

inoltre risulta dalla (8):

$$|a_n| < m\frac{t^n}{k_n}, \quad \text{onde} \quad |a_{n-1}| < m\frac{t^{n-1}}{k_{n-1}} < m\frac{t^{n-1}}{k_n},$$

e quindi:

$$|a_n| + n|a_{n-1}| + \binom{n}{2}|a_{n-2}| + \cdots + |a_0| < m\frac{(t+1)^n}{k_n}.$$

L'espressione (9) risulta dunque inferiore ad:

$$\frac{m(t+1)^n r^n}{(1-r)^n},$$

e quindi, per $r < \frac{1}{t+2}$, al termine generale di una progressione convergente. Sostituendo ora l'elemento φ nella (6), questa serie risulterà uniformemente convergente per $|x| < r$, e perciò sarà trasformabile in una serie di potenze che non potrà differire dalla $\Sigma c_n a_n x^n$.

40. Dalle considerazioni dei due paragrafi precedenti risulta stabilito in ogni caso un campo S', contenuto entro S, per il quale è valida l'operazione U definita dalle (1). Ma se si considera una funzione non appartenente ad S, ad esempio la x^ρ per ρ non intero positivo, le formule (1) non saranno applicabili, e l'operazione U, in quanto è definita da quella formula, non avrà alcun significato per una tale funzione. Però l'espressione (6), che in S' coincide colle (1), può conservare significato anche fuori di S. Siamo dunque condotti a considerare la (6) come definizione dell'operazione U in un campo più esteso di quello in cui valeva la definizione originaria (1) (v. § 5), e a dire campo di validità S'' della U così estesa, l'insieme delle funzioni analitiche che, sostituite in (6), la rendono uniformemente convergente

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

in tutta un'area connessa nel piano della variabile x, quest'area potendo o no contenere il punto $x=0$. Evidentemente S' fa parte di S''.

41. Per dare subito un'applicazione di questa estensione dell'operazione U, supponiamo il sistema dei coefficienti a_n tale che la serie $\Sigma \Delta^n a_0 . x^n$ sia convergente in un cerchio di raggio $|z|>1$. Fatta allora $\varphi(x)=x^\rho$, la serie (6) diviene:

$$U(x^\rho)=x^\rho \sum_{r=0}^{\infty} \Delta^n a_0 \frac{\rho(\rho-1)\dots(\rho-n+1)}{1.2.3\dots n}, \tag{10}$$

e per l'ipotesi fatta sulle a_n, la serie che qui figura nel secondo membro è una funzione intera di ρ, tale da assumere i valori $a_0, a_1, \dots a_n, \dots$ per $\rho=0, 1, 2, \dots n, \dots$ (*). Sotto le medesime ipotesi per le a_n, si ha:

$$U(\log x)=a_0 \log x+b,$$

dove:

$$b=\Sigma(-1)^n \frac{\Delta^n a_0}{n}.$$

42. La proprietà delle operazioni U di essere commutabili con xD (§ 34) e che si conferma sulla serie (6), permette pure di ottenere il risultato dell'operazione stessa in uno spazio più esteso di S. Questa osservazione può servire a determinare la forma, ad esempio, di $U(x^\rho)$; si ha infatti:

$$U(x D x^\rho)=x D\, U(x^\rho),$$

ossia, posto $U(x^\rho)=\lambda(x, \rho)$, viene:

$$U(\rho x^\rho)=x \frac{\partial}{\partial x} \lambda(x, \rho), \quad \rho \lambda=x \frac{\partial \lambda}{\partial x},$$

da cui:

$$\lambda(\rho, x)=a(\rho) x^\rho,$$

dove $a(\rho)$ è una funzione di ρ che, per i valori interi $\rho=n$, prende i valori a_n dati nelle (1).

43. La trasformata di un'operazione U mediante l'operazione C definita al § 30 (operazione il cui effetto è di fornire la funzione generatrice di una data determinante) è un'operazione di moltiplicazione. Infatti, l'opera-

(*) Essa coincide precisamente, come è facile verificare, collo sviluppo che si ottiene formando col mezzo della formola d'interpolazione di Newton estesa all'infinito dal signor Bendixson (*Acta*, T. IX, 1886) la funzione di ρ che per $\rho=0, 1, 2, \dots$ assume i valori $a_0, a_1, a_2, \dots$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

zione C trasforma $x D$ nella moltiplicazione M_x (§ 30) ed U è commutabile con $x D$. Inoltre, mediante una trasformazione, un gruppo commutabile si muta in un gruppo commutabile (§ 10): onde il gruppo delle operazioni U, commutabile con $x D$, viene trasformato da C nel gruppo delle operazioni commutabili con M_x, le quali (§ 14) non sono altro che le moltiplicazioni.

44. Diamo per ultima un'altra espressione delle operazioni U pure fondata sull'osservazione che esse sono commutabili con $x D$. Ricordiamo perciò (*) che se A e B sono due operazioni distributive commutabili ed A ha una sola radice nel campo di validità di B, si ha per B uno sviluppo a coefficienti costanti ordinato per le potenze intere e positive di A:

$$B = k_0 + k_1 A + k_2 A^2 + \cdots$$

Ne viene che un'operazione U, poichè è commutabile con $x D$ che ha per sola radice la costante, ammetterà uno sviluppo della forma:

$$U(\varphi) = k_0 \varphi + k_1 x D \varphi + k_2 \overline{x D}^2 \varphi + \cdots + k_n \overline{x D}^n \varphi + \cdots, \tag{11}$$

che non è difficile di ricondurre alla serie (6), ed il cui campo di validità sarà costituito dalle funzioni φ che ne rendono uniformemente convergente il secondo membro.

II. Risoluzione di un notevole sistema di infinite equazioni lineari ad infinite incognite.

45. Lo sviluppo trovato nel paragrafo precedente per le operazioni U permette di risolvere in modo assai semplice un notevole sistema di infinite equazioni lineari ad infinite incognite, e precisamente il sistema:

$$\left.\begin{array}{c} k_0 + k_1 n + k_2 n^2 + \cdots + k_\nu n^\nu + \cdots = a_n, \\ (n = 0, 1, 2, 3, \ldots), \end{array}\right\} \tag{12}$$

dove $a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots$ sono numeri dati, e $k_0, k_1, \ldots k_n, \ldots$ incognite da determinarsi.

Allo scopo, definiamo un'operazione U mediante le formole (1), dove per le a_n si prendano i secondi membri del sistema (12). Avremo per questa U uno

(*) *Sulle operazioni distributive commutabili con una operazione data.* Atti della R. Accad. di Torino, 23 giugno 1895.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

sviluppo della forma (11), in cui, facendo $\varphi = x^n$, e poichè $\overline{x\,D}^m \cdot x^n = n^m x^n$, viene immediatamente:

$$U(x^n) = (k_0 + k_1 n + k_2 n^2 + \cdots + k_\nu n^\nu + \cdots) x^n,$$

onde:

$$k_0 + k_1 n + k_2 n^2 + \cdots = a_n.$$

Il sistema (12) sarà dunque risoluto quando si sia trovato lo sviluppo sotto la forma (11) dell'operazione U definita da $U(x^n) = a_n x^n$.

46. A determinare questo sviluppo, osserviamo che si ha:

$$x\,D \log^m x = m \log^{m-1} x, \ldots \ \overline{x\,D}^m \log^m x = m!\,,$$

$$\overline{x\,D}^{m+1} \log^m x = 0,$$

dove con $\log^m x$ s'intende la m^{sima} potenza del logaritmo. Sostituendo, pertanto, nello sviluppo (11), a φ la funzione $\log^m x$, si ottiene:

$$\left.\begin{aligned} U(\log^m x) = k_0 \log^m x + m\, k_1 \log^{m-1} x + \\ + m\,(m-1)\, k_2 \log^{m-2} x + \cdots + m!\, k_m. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Ma dallo sviluppo di U sotto alla forma (6), cioè:

$$U(\varphi) = b_0 + b_1 x \varphi' + b_2 \frac{x^2}{1.2} \varphi'' + \cdots, \tag{6}$$

in cui:

$$b_0 = a_0, \quad b_n = \Delta^n a_0 = a_n - n\, a_{n-1} + \binom{n}{2} a_{n-2} - \cdots + (-1)^n a_0,$$

dal quale segue immediatamente:

$$a_n = b_0 + n\, b_1 + \binom{n}{2} b_2 + \cdots + b_n,$$

viene, sostituendo $\log^m x$ al posto di φ:

$$U(\log^m x) = b_0 \log^m x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n x^n}{n!} \frac{d^n \log^m x}{d x^n}. \tag{14}$$

Si formino ora le derivate successive di $\log^m x$, le quali hanno la forma:

$$\frac{d^n \log^m x}{d x^n} = \frac{1}{x^n} (m\, p_{n1} \log^{m-1} x + m\,(m-1)\, p_{n2} \log^{m-2} x + \cdots + m!\, p_{nm}),$$

dove $p_{n1}, p_{n2}, \ldots p_{nm}$ sono coefficienti numerici fra cui sono nulli quelli pei quali è $n < m$. Sostituendo in (14) ed ordinando secondo le potenze del lo-

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

garitmo, viene:

$$U(\log^m x) = b_0 \log^m x +$$

$$+ \sum_{h=1}^{m-1} m(m-1)\ldots(m-h+1)\left(p_{h.h}\frac{b_h}{h!} + p_{h.h+1}\frac{b_{h+1}}{h+1!} + \cdots\right)\log^{m-h} x.$$

Il confronto di questo sviluppo con (13) dà:

$$\left.\begin{aligned}
k_0 &= b_0,\\
k_1 &= p_{11} b_1 + p_{21}\frac{b_2}{2!} + p_{31}\frac{b_3}{3!} + \cdots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
k_m &= p_{mm}\frac{b_m}{m!} + p_{m+1.m}\frac{b_{m+1}}{m+1!} + p_{m+2.m}\frac{b_{m+2}}{m+2!} + \cdots,
\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

e queste formule risolvono il sistema. La validità degli sviluppi (15) è subordinata alla condizione che $\log^m x$ si trovi nel campo di validità dello sviluppo di U sotto alla forma (16).

47. Le formule (15) ci dànno le k_0, k_1, k_2,... in funzione delle b_0, b_1, b_2,..., di cui è nota l'espressione in funzione delle a_0, a_1, a_2,..., e viceversa. Si possono quindi prendere come arbitrarie le b_n al posto delle a_n. Si faccia in particolare $b_n = z^n$, onde $a_n = (1+z)^n$, e lo sviluppo (6) diverrà:

$$U(\varphi) = \varphi + z x \varphi' + \frac{z^2 x^2}{1.2}\varphi'' + \cdots,$$

ossia, supposto x non singolare per φ e z abbastanza piccolo,

$$U(\varphi) = \varphi(x + x z).$$

Preso x diverso da zero, $\log^m x$ si trova dunque nel campo di validità di questa U, e la (14) non è altro che lo sviluppo di $\log^m(x + x z)$ in serie di potenze di z. Ma si ha:

$$\log^m(x + x z) = \log^m x + \sum_{h=1}^{m-1}\binom{m}{h}\log^h(1+z)\log^{m-h} x.$$

Paragonando colla (13), viene:

$$k_h = \frac{1}{h!}\log^h(1+z),$$

e poichè i coefficienti numerici p_{hh}, p_{h+h},... sono indipendenti dalla scelta delle b_n, risulta che essi non sono altro che i coefficienti dello sviluppo di $\frac{1}{h!}\log^h(1+z)$ in serie di potenze di z. Da quanto precede si conclude an-

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

cora che le serie dei secondi membri delle (15) sono convergenti e risolvono il problema se le b_n sono tali che $\Sigma\, b_n t^n$ converga in un cerchio di raggio maggior d'uno. La soluzione del problema proposto al § 45 si ha dunque nei seguenti termini:

« Abbiasi il sistema di equazioni lineari nelle infinite incognite k_0, k_1, $k_2,\ldots$

$$k_0 + k_1 n + k_2 n^2 + \ldots = a_n, \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ldots),$$

e le a_n siano tali che, fatto $b_n = \Delta^n a_0$, la serie $\Sigma\, b_n t^n$ risulti convergente in un cerchio di raggio maggiore dell'unità. I valori delle incognite sono dati da:

$$k_m = p_{m\,m} \frac{b_m}{m!} + p_{m+1,m} \frac{b_{m+1}}{m+1!} + \cdots,$$

dove $p_{m,\nu}$ è il coefficiente di z^ν nello sviluppo di $\frac{1}{m!} \log^m (1+z)$ in serie di potenze di z. »

48. La risoluzione del sistema (12) mediante le (15) dà anche la soluzione di un'altra questione. Riprendiamo i due sviluppi (6) e (11) dell'operazione U. Ammettendo ancora che $\Sigma\, b_n t^n$ abbia un raggio di convergenza maggiore dell'unità, si avrà dalla (6):

$$U(x^\rho) = \left(b_0 + b_1 \rho + b_2 \binom{\rho}{2} + \cdots\right) x^\rho,$$

e la serie:

$$a(\rho) = b_0 + b_1 \rho + b_2 \binom{\rho}{2} + \cdots,$$

è convergente assolutamente ed uniformemente in tutto il piano ρ, e quindi sviluppabile in serie di potenze di ρ. Ma questa serie si ha immediatamente facendo $\varphi = x^\rho$ nella (11), che diviene:

$$U(x^\rho) = (k_0 + k_1 \rho + k_2 \rho^2 + \cdots)\, x^\rho.$$

Si trova dunque che fra le b_n ed i coefficienti dello sviluppo di $a(\rho)$ in serie di potenze di ρ passano le relazioni (15).

Talchè « fra i coefficienti k_n dello sviluppo di una funzione trascendente intera in serie di potenze di ρ ed i coefficienti b_n del suo sviluppo in serie di fattoriali $\binom{\rho}{n}$ passano le relazioni (15), equivalenti alle:

$$k_0 + k_1 n + k_2 n^2 + \cdots = b_n + n\, b_{n-1} + \binom{n}{2} b_{n-2} + \cdots + b_0 . \text{»}$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

III. Operazioni normali d'ordine superiore.

49. Diremo *operazione normale d'ordine m* l'operazione distributiva A definita, nello spazio S delle serie di potenze, mediante le equazioni:

$$\left.\begin{array}{c} A(x^n) = (a_{n0} + a_{n1}x + a_{n2}x^2 + \cdots + a_{nm}x^m)\,x^n, \\ (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots). \end{array}\right\} \quad (16)$$

Questa operazione si esprime mediante una serie ordinata secondo le potenze del simbolo di derivazione, nel modo ricordato al § 3. Indicando con $\Delta^m a_{0r}$ la differenza finita m^{sima}:

$$\Delta^m a_{0r} = a_{mr} - m\,a_{m-1,r} + \binom{m}{2} a_{m-2,r} - \cdots + (-1)^m a_{0,r},$$

lo sviluppo in serie di A si ottiene immediatamente sotto la forma:

$$A(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Delta^n (a_{00} + a_{01}x + \cdots a_{0m}x^m)\,\varphi^{(n)}. \quad (17)$$

50. L'applicazione termine a termine dell'operazione A ad una serie di potenze $\varphi(x) = \Sigma\, k_n x^n$, astraendo per ora dalla questione della convergenza, dà, ordinando il risultato per le potenze di x:

$$A(\varphi) = \Sigma\, g_n x^n = \psi(x),$$

dove i coefficienti g_n sono legati a k_n dalle relazioni:

$$\left.\begin{array}{l} g_0 = a_{00}k_0 \\ g_1 = a_{10}k_1 + a_{01}k_0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ g_n = a_{n0}k_n + a_{n-1,1}k_{n-1} + a_{n-2,2}k_{n-2} + \cdots + a_{n-m\,m}k_{n-m}. \end{array}\right\} \quad (18)$$

Ora, la dipendenza espressa da queste formole fra i due sistemi di coefficienti k_n e g_n, è un'operazione distributiva che indicheremo con Φ, e precisamente una forma lineare alle differenze d'ordine m applicata alla funzione k_n dell'indice n. Questa operazione Φ non è altro se non la trasformata di A mediante l'operazione C definita al § 30, cioè $\Phi = C A C^{-1}$. Usando il simbolo θ di Casorati, la forma Φ si scrive:

$$\Phi = a_{n0} + a_{n-1,1}\,\theta^{-1} + a_{n-2,2}\,\theta^{-2} + \cdots + a_{n-m\,m}\,\theta^{-m}.$$

51. La somma di due operazioni normali del medesimo ordine è una operazione normale dello stesso ordine. La somma di due operazioni normali d'ordine diverso ha l'ordine di quella di ordine maggiore.

52. Il prodotto di due operazioni normali degli ordini m ed m' è una operazione normale dell'ordine $m + m'$. L'insieme delle operazioni normali forma dunque un gruppo; non forma invece un gruppo, eccettuato per il caso di $m = 0$, l'insieme delle operazioni normali di un dato ordine.

53. Cerchiamo se un'operazione normale può ammettere radici nello spazio S. Si dovranno perciò determinare valori di $k_0, k_1, \dots k_n, \dots$ tali che sia:

$$\left.\begin{aligned} & a_{00} k_0 = 0, \\ & a_{10} k_1 + a_{01} k_0 = 0, \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & a_{n0} k_n + a_{n-1,0} k_{n-1} + \cdots a_{n-m,m} k_{n-m} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

il che richiede che sia nullo almeno uno dei coefficienti a_{n0}. Supponendo tutti i coefficienti a_{n0} differenti da zero, come faremo d'ora in avanti, l'operazione A è una operazione *non degenere* nello spazio S, e quindi in questo spazio la sua inversa A^{-1} è a determinazione unica.

L'equazione generale del sistema (19) è la $\Phi = 0$. Si può soddisfare a questa equazione, dal valore $n = m$ in avanti, dando valori arbitrari a k_0, $k_1, \dots k_{m-1}$, e si ottiene così una serie di potenze ω per la quale $A(\omega)$ si riduce ad un polinomio razionale intero arbitrario di grado $m - 1$ in x.

54. Consideriamo in particolare un'operazione normale di prim'ordine, definita da:

$$A(x^n) = (a_n - b_n x) x^n. \tag{20}$$

Per essa, le formule (18) divengono:

$$\left.\begin{aligned} & g_0 = a_0 k_0, \\ & g_1 = a_1 k_1 - b_0 k_0, \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & g_n = a_n k_n - b_{n-1} k_{n-1}, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

ed il sistema dei coefficienti k_n pei quali $A(\varphi)$ si riduce ad una costante (che si può senz'altro prendere uguale all'unità) è, ferma sempre l'ipotesi (§ 53)

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

delle a_n diverse da zero:

$$k_n = \frac{b_0\, b_1 \ldots b_{n-1}}{a_0\, a_1 \ldots a_{n-1}\, a_n}; \tag{22}$$

in altri termini, la serie di potenze (della cui convergenza ci si occuperà più avanti):

$$\omega(x) = \frac{1}{a_0} + \frac{b_0}{a_0\, a_1}\, x + \frac{b_0\, b_1}{a_0\, a_1\, a_2}\, x^2 + \cdots, \tag{23}$$

è la soluzione, nello spazio S, dell'equazione $A(\varphi) = 1$.

55. È possibile di dare una scomposizione delle operazioni normali sotto forma di un prodotto, i cui fattori sono in parte operazioni normali d'ordine nullo, in parte moltiplicazioni per binomî della forma $z - x$. Cominciando dalle operazioni del prim'ordine, dico che se A è una tale operazione definita dalle (20), si può scomporla nel prodotto:

$$A = U_1\, M_{z-x}\, U, \tag{24}$$

dove U, U_1 sono due operazioni normali d'ordine nullo, ed M_{z-x}, secondo la notazione stabilita al § 4, è la moltiplicazione per il binomio $z - x$, essendo z un numero arbitrario.

All'uopo, scriviamo le equazioni di definizione (1) delle U, U_1, nella seguente forma:

$$U(x^n) = p_n\, x^n, \quad U_1(x^n) = q_n\, x^n;$$

ne viene, dalla (24):

$$A(x^n) = p_n(z\, q_n - q_{n+1}\, x)\, x^n;$$

ora, scrivendo che queste relazioni coincidono colle (20), avremo:

$$z\, p_n\, q_n = a_n, \quad p_n\, q_{n+1} = b_n,$$

che servono a determinare le successioni p_n, q_n. Si ottiene:

$$q_n = q_0\, z^n\, \frac{b_0\, b_1 \ldots b_{n-1}}{a_0\, a_1 \ldots a_{n-1}}, \tag{25}$$

e da questa:

$$p_n = \frac{1}{q_0} \cdot \frac{a_0\, a_1 \ldots a_{n-1}\, a_n}{z^{n+1}\, b_0\, b_1 \ldots b_{n-1}}. \tag{26}$$

In tal modo è operata la scomposizione dell'operazione di prim'ordine A nella forma (24). I sistemi di numeri p_n, q_n sono determinati all'infuori della costante arbitraria q_0. Si noti infine che la serie $\omega(x)$ che soddisfa alla

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$A(\varphi) = 1$, dipende dai soli coefficienti della U, poichè la (23) si può scrivere, facendo $q_0 = \frac{1}{z}$:

$$\omega(x) = \frac{1}{p_0} + \frac{x}{p_1 z} + \frac{x^2}{p_2 z^2} + \cdots \tag{27}$$

56. Una decomposizione analoga alle (24) è possibile per ogni operazione normale d'ordine qualunque m. Dimostriamo dapprima che essendo A un'operazione normale d'ordine m, si può determinare un'operazione normale Y d'ordine $m-1$ ed un'operazione U d'ordine nullo, in modo tale che sia:

$$A = Y\, M_{z-x}\, U,$$

dove z è un numero dato. Sia infatti A definito dalle (16); Y sia definita dalle:

$$Y(x^n) = (y_{n0} + y_{n1} + \cdots y_{n.m-1}\, x^{m-1})\, x^n,$$

ed U dalle:

$$U(x^n) = \frac{x^n}{q_n},$$

dove $y_{n.\nu}$ e q_n sono da determinarsi. Verrà:

$$Y\, M_{z-x}\, U(x^n) = \frac{x^n}{q_n}\Big[z\, y_{n0} + (x\, y_{n1} - y_{n+1.0})\, x + $$
$$+ (z\, y_{n.2} - y_{n+1.1})\, x^2 + \cdots - y_{n+1.m-1})\, x^m\Big];$$

scrivendo ora che queste coincidono colle equazioni (16) che definiscono le A, si dovrà porre:

$$\left.\begin{aligned} z\, y_{n0} &= q_n\, a_{n0}\,, \\ z\, y_{n.1} - y_{n+1.0} &= q_n\, a_{n1}\,, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z\, y_{n.m-1} - y_{n+1.m-2} &= q_n\, a_{n\,m-1}\,, \\ - y_{n+1.m-1} &= q_n\, a_{n.m}\,. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Dalle m prime fra queste relazioni, si deduce subito:

$$\left.\begin{aligned} y_{n0} &= \frac{q_n\, a_{n0}}{z}\,, \\ y_{n.1} &= \frac{q_n\, a_{n1}}{z} + \frac{q_{n+1}\, a_{n+1.0}}{z^2}\,, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{n.m-1} &= \frac{q_n\, a_{n.m-1}}{z} + \frac{q_{n+1}\, a_{n+1.m-2}}{z^2} + \cdots + \frac{q_{n+m-1}\, a_{n+m-1.0}}{z^m}\,, \end{aligned}\right\} \tag{28'}$$

e quindi dall'ultima:

$$a_{n+m.0}\,q_{n+m}+z\,a_{n+m-1.1}\,q_{n+m-1}+\cdots+z^{m-1}\,a_{n+1.m-1}\,q_{n+1}+z^m\,a_{n\,m}\,q_n=0. \qquad (29)$$

Ora questa è un'equazione lineare alle differenze (*), dell'ordine m, che determina q_n; ottenute queste, si hanno dalle (28') le y_{n0}, $y_{n1}, \ldots\, y_{n.m-1}$ in funzione delle a_{ni}, ed è quindi operata la scomposizione cercata.

In questa scomposizione intervengono m costanti arbitrarie, introdotte dall'integrazione dell'equazione (29): come tali si possono prendere, ad esempio, i valori iniziali q_0, $q_1, \ldots\, q_{m-1}$ del sistema delle q_n.

57. È facile ora di dimostrare che l'operazione normale A di ordine m è decomponibile in un prodotto della forma:

$$A = U_m\, M_{z_m - x}\, U_{m-1}\, M_{z_{m-1}-x} \ldots U_1\, M_{z_1-x}\, U_0, \qquad (30)$$

dove U_0, $U_1, \ldots\, U_m$ sono operazioni normali d'ordine nullo, e z_1, $z_2, \ldots\, z_m$ sono numeri dati. Infatti, per il caso di $m=1$ il teorema è già stato dimostrato al § 55. Supposta vera per l'ordine $m-1$, la proposizione si estende immediatamente al caso dell'ordine m; infatti, se A è dell'ordine m, essa si scompone, per il paragrafo precedente, nella forma:

$$A = Y\, M_{z_1-x}\, U_0;$$

ma per Y vale la scomposizione:

$$Y = U_m\, M_{z_m-x} \ldots U_1,$$

onde, sostituendo, si ottiene A sotto la forma del prodotto (30). Le arbitrarie che si introducono in questo modo sono $\dfrac{m(m+1)}{2}$.

Inoltre, dalle formole (30) si ha immediatamente la decomposizione in prodotto dell'inversa di A, cioè:

$$A^{-1} = U_0^{-1}\, M_{\frac{1}{z_1-x}}\, U_1^{-1} \ldots U_m^{-1}\, M_{\frac{1}{z_m-x}}\, U_m^{-1}. \qquad (31)$$

58. Preso U_0 in modo che:

$$U(x^n) = \frac{x^n}{q_n},$$

(*) Si noti che questa equazione (29) coincide colla $\Phi = 0$ del § 50; basta cambiare q_n in $k_n z^n$; l'equazione che determina il sistema q_n non è dunque altro che quella che si ottiene uguagliando a zero la trasformata $C A C^{-1}$ di A mediante l'operazione C del § 30.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

dove q_n è un integrale della (29), cioè della equazione $\Phi = 0$, il metodo del § 56 permette di determinare la Y. Come applicazione, se abbiamo ad esempio l'operazione normale di second'ordine definita da:

$$A(x^n) = (a_n + b_n x + c_n x^2) x^n,$$

e poniamo $M_{z_1 - x} U_0 = A_1$, $U_2 M_{z_2 - x} U_1 = A_2$, fissato l'integrale dell'equazione:

$$\Phi = a_{n+2} q_{n+2} + z_1 b_{n+1} q_{n+1} + z_1^2 c_n q_n = 0,$$

che comparisce nelle equazioni di definizione di U_0, resta determinato A_1, ed allora le equazioni (28) del § 56 determinano A_2 senza ambiguità. Essendo $A = A_2 A_1$, si può dire che si è così ottenuto il quoziente (a sinistra) di A per A_1.

CAPITOLO III.

Uso delle operazioni normali nel togliere singolarità alle funzioni.

I. Il teorema di Hadamard. Operazioni semplici.

59. Stabiliamo dapprima due notazioni che, per ragione di brevità, useremo in ciò che segue:

a) Con $[a]$ indicheremo il cerchio del piano della variabile x, il cui centro è nel punto $x = 0$ ed il cui raggio è $|a|$.

b) Quando ciò non possa dare luogo ad equivoci, colla stessa scrittura $\alpha(x)$ si rappresenterà tanto una serie di potenze di x, quanto il ramo di funzione che nasce dalla continuazione analitica di questa serie in tutta la *stella* di centro (*) che le compete.

60. Ricordiamo ora un importante teorema recentemente dato dal signor Hadamard (**). Esso si può enunciare come segue:

« Date le serie di potenze:

$$\alpha(x) = \Sigma a_n x^n, \quad \varphi(x) = \Sigma k_n x^n,$$

la serie:

$$\psi(x) = \Sigma a_n k_n x^n,$$

(*) Secondo la definizione del Mittag-Leffler. Acta, T. XXIII, p. 47.
(**) *Comptes rendus*, T. CXXIV, p. 492 (1897). *Acta Math.*, T. XXII, p. 55 (1898).

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

rappresenta una funzione analitica che ha per punti singolari quelli soli della forma $x = u_p v_q$, essendo u_p i punti singolari della funzione analitica definita da $\alpha(x)$ e v_q quelli della funzione definita da $\varphi(x)$. »

La dimostrazione di questo teorema, fondata sulla considerazione di un integrale definito curvilineo, è stata poi ripresa, semplificata ed in qualche punto completata dal sig. Borel (*) il quale fa anche rilevare che se si riguarda la funzione $\alpha(x)$ come fissa, la $\varphi(x)$ come presa arbitrariamente nell'insieme S_0, la $\psi(x)$ si può riguardare come risultato di un'operazione distributiva determinata, individuata da $\alpha(x)$ ed applicata a $\varphi(x)$. Poco dopo, io ho notato (**) che questa operazione è di quelle che nel presente lavoro si sono dette normali d'ordine nullo, ed ho anche indicato come alla dimostrazione del teorema di Hadamard si potesse giungere senza fare uso della considerazione di integrali curvilinei.

61. Data la serie di S_0:

$$\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{1}$$

si può, mediante i suoi coefficienti a_n, definire un'operazione U dalle:

$$U(x^n) = a_n x^n. \tag{2}$$

Applicando quest'operazione alla serie $\varphi = \Sigma k_n x^n$, si ottiene come risultato la serie:

$$U(\varphi) = \psi(x) = \Sigma a_n k_n x^n, \tag{3}$$

pure appartenente ad S_0 e le cui singolarità in tutto il piano sono nei soli punti indicati dal teorema di Hadamard ora citato (non essendo però escluso che, in casi particolari, qualcuno di questi punti possa anche non essere singolare).

62. Ciò posto, ci occorrerà di considerare operazioni U per le quali la funzione $\alpha(x)$ che serve a definirle — si noti che è:

$$\alpha(x) = U\left(\frac{1}{1-x}\right) —$$

è particolarmente semplice. Supporremo cioè che la funzione $\alpha(x)$ non abbia a distanza finita che il solo punto singolare $x = 1$, per modo che togliendo dal piano il prolungamento del raggio $0 \ldots 1$, da 1 fino all'infinito,

(*) *Bulletin de la Soc. Math. de France*, T. XXVI, p. 238, 1898.

(**) *Rendiconti dell'Accad. di Bologna*, 19 febbraio 1899.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

nel piano così tagliato la $\alpha(x)$ rimane priva di singolarità. Quando è tale la funzione $\alpha(x)$, dirò *semplice* l'operazione U corrispondente.

63. Un'operazione semplice ha le seguenti proprietà:

a) Applicata alla funzione $\varphi(x)$, essa genera, per il teorema di HADAMARD, una funzione che è singolare *al più* nei punti stessi dove lo è $\varphi(x)$.

b) Il prodotto di due operazioni semplici è un'operazione semplice, cosicchè queste operazioni formano un gruppo.

Dimostreremo, nel paragrafo seguente, come esistano operazioni U che sono semplici, esse e le loro inverse. Per tali operazioni si hanno le proprietà seguenti:

a) Applicandole ad una funzione $\varphi(x)$, si genera una funzione singolare in *tutti* e *soli* i punti in cui è singolare $\varphi(x)$: tali operazioni, nelle funzioni cui si applicano, non possono dunque nè aggiungere, nè togliere singolarità.

b) Le operazioni semplici insieme alle loro inverse, formano un gruppo.

64. Per mostrare l'esistenza di operazioni le quali sono semplici unitamente alle loro inverse, consideriamo la forma differenziale lineare d'ordine arbitrario m:

$$F(\varphi) = b_0 \varphi + b_1 x \varphi' + b_2 \frac{x^2}{1 \cdot 2} \varphi'' + \cdots + b_m \frac{x^m}{m!} \varphi^{(m)}. \tag{4}$$

Questa forma ci dà un'operazione U per la quale è:

$$U(x^n) = a_n x^n,$$

con:

$$a_n = b_0 + n b_1 + \binom{n}{2} b_2 + \cdots + \binom{n}{m} b_m ;$$

le a_n sono cioè polinomî razionali interi di grado m rispetto all'indice n. Reciprocamente, ogni U le cui a_n sono tali polinomi si riduce, come risulta dalla formula (6) del § 37, ad una forma differenziale lineare del tipo (4). Supponiamo ora che le a_n sieno diverse da zero per ogni valore intero positivo o nullo dell'indice. Siccome la $F\left(\frac{1}{1-x}\right)$ è una funzione razionale col solo polo $x = 1$, la F è intanto un'operazione semplice. Inoltre, poichè le a_n sono diverse da zero, risulta dai principî generali della teoria delle equazioni differenziali lineari che l'equazione:

$$F(\varphi) = \frac{1}{1-x},$$

ammette una soluzione regolare nell'intorno di $x = 0$, e che non ha singo-

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

larità a distanza finita altro che nel punto $x = 1$. Ciò equivale a dire che è tale la funzione $U^{-1}\left(\frac{1}{1-x}\right)$, cioè che U^{-1} è un'operazione semplice. La (4) definisce dunque un'operazione semplice, insieme alla propria inversa.

65. Dimostrato nel paragrafo precedente che sono semplici insieme alla propria inversa quelle operazioni U in cui a_n è funzione razionale intera dell'indice, ne viene che sono tali anche le operazioni in cui $\frac{1}{a_n}$ è funzione razionale intera dell'indice. E poichè le operazioni che ammettono la proprietà indicata formano un gruppo, concluderemo che:

« Ogni operazione U, definita da $U(x^n) = a_n x^n$, dove a_n è una funzione razionale intera o fratta dell'indice n, non nulla nè infinita per valori interi positivi dell'indice stesso, è un'operazione semplice ed è tale la sua inversa. »

66. Ho chiamato (*) *funzione analitica semplice* una funzione che a distanza finita è singolare in un solo punto, ad esempio $x = z$ (z differente da zero) per modo che togliendo dal piano il prolungamento da z all'infinito del raggio $0z$, la funzione si riduce regolare ed uniforme nel piano così tagliato. Ogni tale funzione dà luogo ad una operazione semplice: se infatti $\Sigma a_n x^n$ è lo sviluppo della funzione nell'intorno di $x = 0$, l'operazione semplice in discorso è definita da:

$$U(x^n) = a_n z^n x^n.$$

II. Uso delle operazioni normali di prim'ordine per togliere singolarità.

67. Un'operazione normale di prim'ordine è definita nello spazio S dalle relazioni, dove le a_n sono tutte diverse da zero:

$$A(x^n) = a_n x^n - b_n x^{n+1}; \tag{5}$$

abbiamo poi dimostrato (§ 55) che ogni tale operazione si può porre sotto la forma:

$$A = U_1 M_{z-x} U, \tag{6}$$

dove U, U_1 sono operazioni normali d'ordine zero, definite da:

$$U(x^n) = p_n x^n, \quad U_1(x^n) = q_n x^n.$$

(*) *Rendiconti della R. Accad. dei Lincei*, 16 marzo 1890.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Nel presente articolo, daremo le proprietà di quelle operazioni A per le quali è possibile una scomposizione nella forma (6) tale che U ed U_1 siano operazioni semplici (§ 62), esse e le loro inverse: proprietà che conducono a risultati non indegni di nota circa alle singolarità isolate delle funzioni analitiche.

68. L'operazione A applicata ad una funzione analitica regolare nell'intorno $[r]$ di $x = 0$, genera una funzione analitica regolare *almeno* in quello stesso intorno. Ciò consegue immediatamente dalla forma (6) dell'operazione A e dall'essere U, U_1 operazioni semplici. Ci proponiamo ora la seguente questione:

« Posto $A(\varphi) = \psi$, se φ è una serie di potenze il cui cerchio di convergenza è $[r]$, può ψ appartenere ad S_r (*), e sotto quali condizioni? »

La risposta a questa questione forma l'oggetto dei seguenti paragrafi.

69. Poichè ogni costante appartiene ad S_r, cominciamo dal considerare l'equazione funzionale:

$$A(\varphi) = 1, \tag{7}$$

dove φ è la funzione incognita. Una soluzione della (7) è data al § 55: essa è rappresentata dalla serie:

$$\omega(x) = \frac{1}{p_0} + \frac{x}{p_1 z} + \frac{x^2}{p_2 z^2} + \cdots = z\, U^{-1}\left(\frac{1}{z - x}\right), \tag{8}$$

e poichè le a_n si sono supposte tutte diverse da zero, questa soluzione è unica nello spazio S. Ora, poichè U soddisfa alla condizione d'essere semplice insieme alla sua inversa, ne viene che la serie:

$$\Sigma \frac{x^n}{p_n},$$

converge entro il cerchio $[1]$ ed ha sulla circonferenza il solo punto singolare $x = 1$; onde $\omega(x)$ è regolare entro $[z]$ ed ha sulla circonferenza il solo punto singolare $x = z$. Questa serie $\omega(x)$, che rappresenta una funzione analitica semplice, serve a rispondere affermativamente alla domanda posta in fine del § 68, poichè la serie stessa ω converge entro $[z]$, mentre $A(\omega)$ appartiene ad S_z.

(*) Ricordiamo che si è convenuto, al § 1, di indicare con S_z l'insieme delle serie di potenze il cui cerchio di convergenza è superiore a $|z|$.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

70. Si osservi che il fattore simbolico U_1 della A non ha alcuna importanza per la risoluzione dell'equazione funzionale (7): risoluta cioè per l'operazione $M_{z-x} U$, essa è risoluta per ogni operazione $U_i M_{z-x} U$, essendo U_i un'operazione qualunque d'ordine nullo.

Si osservi ancora che per avere la soluzione generale dell'equazione (7), basta aggiungere ad ω una radice qualunque di A; queste soluzioni non verranno però considerate per ora, poichè ci limitiamo qui alla considerazione di funzioni appartenenti ad S, ed A, come si è già notato, non ha radici in S.

71. Poniamo ora la seguente definizione. Due serie di potenze $\varphi = \Sigma k_n x_n$, $\varphi_1 = \Sigma k'_n x^n$, aventi lo stesso cerchio di convergenza $[r]$, si diranno *ugualmente singolari* sulla circonferenza (*) di quel cerchio, quando esista una costante c tale che la serie $\varphi - c\,\varphi_1$ abbia un cerchio di convergenza maggiore di $[r]$, cioè appartenga ad S_r.

La condizione affinchè φ, φ_1 siano ugualmente singolari è che esistano due numeri positivi m ed r', con $r' > | r |$ e tali che sia da un valore n_1 di n in poi:

$$| k_n - c\, k'_n | < \frac{m}{r'^n}.$$

È chiaro che ogni operazione U semplice insieme alla sua inversa, trasforma due serie ugualmente singolari in due serie ugualmente singolari.

Si ha immediatamente che due serie ugualmente singolari con una terza sono ugualmente singolari fra loro.

72. Se $\varphi(x)$ è una serie di potenze convergente entro $[z]$ ed ugualmente singolare sulla circonferenza colla soluzione ω dell'equazione (7), $A(\varphi)$ appartiene ad S_z. Infatti, esiste per ipotesi una costante c tale che:

$$\varphi = k\,\omega + \rho,$$

dove ρ è una serie di S_z; ne viene:

$$A(\varphi) = k + A(\rho),$$

e siccome $A(\rho)$ appartiene ad S_z, la proposizione è dimostrata. Questa funzione $\varphi(x)$ risponde dunque alla questione posta al § 68.

Reciprocamente, tutte le funzioni che rispondono a quella questione sono ugualmente singolari con ω, e quindi fra di loro. Sia infatti φ una serie di

(*) Quando ciò non possa generare equivoco, si ommetteranno le parole: *sulla circonferenza.* La definizione di serie di potenze ugualmente singolari è stata introdotta in una Nota che ho pubblicata nei *Rendic. dell'Accad. di Bologna*, 30 gennaio 1898.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

potenze avente $[r]$ per cerchio di convergenza, ed $A(\varphi)=\rho$ appartenga ad S_r; vi apparterrà anche $U_1^{-1}(\rho)=\rho_1$, e si avrà:

$$\varphi = A^{-1}(\rho) = U^{-1} M_{\frac{1}{z-x}} U_1^{-1}(\rho) = U^{-1}\left(\frac{\rho_1}{z-x}\right),$$

Per l'ipotesi che U^{-1} è operazione semplice, risulta da questa ultima eguaglianza che φ e $\frac{\rho_1}{z-x}$ sono singolari negli stessi punti; ma φ non converge oltre il cerchio $[r]$, mentre ρ_1 converge entro un cerchio maggiore, perciò deve necessariamente essere $|r|=|z|$ e ρ, ρ_1 appartengono ad S_z. Ciò posto, ρ_1 convergendo in un cerchio maggiore di $[z]$, viene:

$$\rho_1(x) = \rho_1(z) + (z-x)\rho_2(x),$$

dove anche ρ_2 appartiene ad S_z. Ne viene:

$$\varphi = U^{-1}(\rho_2(x)) + \rho_1(z)\, U^{-1}\left(\frac{1}{z-x}\right);$$

ma $U^{-1}(\rho_2(x)) = \rho_3(x)$, dove ρ_3 appartiene ad S_z; inoltre:

$$\omega(x) = z\, U^{-1}\left(\frac{1}{z-x}\right),$$

onde, indicando con c la costante $z\rho_1(z)$, viene:

$$\varphi = \rho_3 + c\,\omega,$$

cioè φ è singolare come ω, c. d. d.

73. Dai paragrafi precedenti risulta che, data un'operazione normale di prim'ordine i cui fattori U, U_1 siano semplici insieme alle loro inverse, resta stabilita una speciale singolarità nel punto z, singolarità definita dalla serie:

$$\omega(x) = U^{-1}\left(\frac{1}{z-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{p_n z^{n+1}},$$

la quale serie definisce una funzione regolare in tutto il piano tagliato sul prolungamento del raggio $0z$, fra z ed ∞. L'operazione *A ha la proprietà di fare sparire la singolarità così definita;* cioè, se φ è regolare in $[z]$ e singolare sulla circonferenza come la ω, $A(\varphi)$ è regolare oltre $[z]$; e reciprocamente, ogni funzione la cui singolarità è tolta da A, è singolare in z come lo è come la ω.

Inversamente, data una funzione *semplice*:

$$\omega(x) = \Sigma \frac{x^n}{p_n z^n},$$

col solo punto singolare z a distanza finita, la funzione $\Sigma \frac{x^n}{p_n}$ sarà semplice col solo punto singolare $x = 1$, e per il teorema di HADAMARD sarà tale, in generale (*), anche la $\Sigma p_n x^n$. In tale caso la U definita da:

$$U(x^n) = p_n x^n,$$

sarà un'operazione semplice insieme alla sua inversa, e le singolarità della $\omega(x)$ sarà tolta dall'operazione di primo ordine $A = M_{z-x} U$.

74. Ricordando le relazioni date al § 55 fra le a_n, b_n, coefficienti delle $A(x^n)$, e le p_n, q_n coefficienti rispettivi in $U(x^n)$, $U_1(x^n)$, le quali relazioni sono:

$$z p_n q_n = a_n, \quad p_n q_{n+1} = b_n, \tag{9}$$

si trova che la serie $\omega(x)$, che dà il tipo delle singolarità che l'operazione A è suscettibile di togliere, si scrive:

$$\omega(x) = z q_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_0 b_1 \dots b_{n-1}}{a_0 a_1 \dots a_n} x^n. \tag{10}$$

75. Applicando l'operazione A ad una serie di potenze $\varphi(x) = \Sigma k_n x^n$, si ottiene una serie di potenze $\psi(x) = \Sigma g_n x^n$, i cui coefficienti g_n sono legati a k_n dalle relazioni:

$$g_0 = k_0 a_0, \quad g_n = a_n k_n - b_{n-1} k_{n-1}.$$

La g_n è dunque data dall'applicazione di una forma lineare alle differenze del primo ordine sulla funzione di n, k_n; indicando questa forma con:

$$\Pi(k_n) = a_n k_n - b_{-1} k_{n-1}, \tag{11}$$

essa è (§ 50) la trasformata di A mediante l'operazione C definita al § 30, cioè $\Pi = C A C^{-1}$. Sostituendo alle a_n, b_n, le loro espressioni (9) nelle p_n, q_n, la Π si scrive ancora:

$$\Pi(k_n) = q_n (p_n z k_n - p_{n-1} k_{n-1}). \tag{12}$$

76. Condizione necessaria e sufficiente affinchè una serie di potenze $\varphi(x) = \Sigma k_n x^n$ di cui $[z]$ è il cerchio di convergenza, sia singolare come $\omega(x)$

(*) BOREL, Nota citata del *Bulletin de la Soc. Mathém.*, introduzione.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

sulla circonferenza, è che per i valori dell'indice n superiori ad un numero dato n, sia:

$$\left| \frac{p_n}{p_{n+1} z} k_n - k_{n+1} \right| < \frac{m \eta^n}{|z|^n}, \tag{13}$$

essendo m ed η due numeri positivi ed $\eta < 1$; oppure, ciò che torna lo stesso, che sia per $n > n_1$:

$$\left| \sqrt[n]{\frac{p_n}{p_{n+1}} z k_n - k_{n+1}} \right| < a < \frac{1}{|z|}; \tag{13'}$$

la condizione (13) equivale ancora alla disuguaglianza:

$$\left| \frac{b_n}{a_{n+1}} k_n - k_{n+1} \right| < \frac{m \eta^n}{|z|^n}. \tag{13''}$$

La condizione enunciata è necessaria. Infatti, sia $\varphi(x)$ singolare come $\omega(x)$ sulla circonferenza del cerchio $[z]$: esisterà un numero c tale che:

$$\varphi(x) - c\,\omega(x)$$

sia una serie $\rho(x)$ di S_z; il coefficiente di x^n in $\rho(x)$, cioè:

$$k_n - c \frac{b_0 b_1 \ldots b_{n-1}}{a_0 a_1 \ldots a_n},$$

sarà, in valore assoluto, inferiore ad un'espressione della forma $\frac{m_1 \eta^n}{|z|^n}$, $\eta < 1$; perciò sarà anche:

$$\left| k_{n+1} - c \frac{b_0 b_1 \ldots b_n}{a_0 a_1 \ldots a_{n+1}} \right| < \frac{m_2 \eta^n}{|z|^n},$$

e quindi:

$$\left| \frac{b_n}{a_{n+1}} k_n - k_{n+1} \right| < \frac{(m_1 + m_2)\eta^n}{|z|^n},$$

che equivale alla condizione (13''), cioè alla (13).

La condizione è sufficiente. Se infatti i coefficienti k_n della serie $\varphi(x) = \Sigma k_n x^n$ soddisfano alla (13), ne verrà:

$$|p_n k_n - z p_{n+1} k_{n+1}| < \frac{m\,|p_{n+1}|\,\eta^n}{|z|^{n-1}},$$

e poichè la serie $\Sigma \frac{p_n}{z^n} x^n$ converge entro il cerchio $[z]$, la serie:

$$\psi(x) = \Sigma (p_n k_n - z p_{n+1} k_{n+1}) x^n,$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

convergerà in un cerchio maggiore, cioè apparterrà ad S_z. E siccome la serie $\psi(x)$ non differisce sostanzialmente da $U_1^{-1} A(\varphi)$, la quale ha le singolarità negli stessi punti in cui le ha $A(\varphi)$, concludiamo che $A(\varphi)$ appartiene ad S_z, c. d. d.

77. Il noto teorema del sig. DARBOUX (*), che dà la condizione necessaria e sufficiente affinchè una serie di potenze convergente entro $[z]$ abbia sulla circonferenza, come sola singolarità, un polo semplice, si deduce immediatamente dal teorema del paragrafo precedente facendovi $p_n = 1$. La condizione (13) si riduce a:

$$\left|\sqrt[n]{\frac{k_n}{z} - k_{n+1}}\right| < a < \frac{1}{|z|};$$

per $n > n_1$. Inoltre, da:

$$\left| k_n - c\,\frac{b_0\, b_1 \ldots b_{n-1}}{a_0\, a_1 \ldots a_n} \right| < \frac{m_1 \eta^n}{|z|^n},$$

si deduce nel caso attuale:

$$|k_n z^n - c| < m_1 \eta^n, \quad \eta < 1,$$

onde:

$$\lim_{n=\infty} k_n z^n = c,$$

e queste sono appunto le condizioni date dal DARBOUX.

78. L'operazione A applicata ad una serie di potenze $\varphi = \Sigma k_n x^n$, riproduce dunque una serie di potenze avente in generale lo stesso cerchio di convergenza della serie φ, ed un cerchio maggiore solo quando $\varphi(x)$ converge in $[z]$ ed ha in z la singolarità definita da $\omega(x)$. Applicata dunque ad una serie ρ di S_z, la A produce una serie ρ_1 pure di S_z. Ma i coefficienti di ρ_1 non sono totalmente arbitrarî; essi verificano una relazione necessaria. Si ha infatti (75):

$$A(\varphi) = \Sigma g_n x^n,$$

con:

$$g_n = \Pi(k_n) = q_n (p_n z k_n - p_{n-1} k_{n-1}).$$

Ne viene:

$$\frac{g_n}{q_n} = k_n p_n z - k_{n-1} p_{n-1}, \quad \frac{g_0}{q_0} = k_0 p_0,$$

(*) *Journal de Mathématiques*, S. III, T. IV, 1878. V. a questo proposito il notevole riassunto del sig. OSGOOD, *Bulletin of the Americ. Math. Society*, S. II, Tom. V, pag. 59.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

da cui:

$$\frac{g_0}{q_0} + \frac{g_1}{q_1} z + \cdots + \frac{g_n}{q_n} z^n = k_n p_n z^{n+1}.$$

Ma $\Sigma k_n x^n$ è per ipotesi un elemento di S_z, e perciò z^n appartiene all'interno del suo cerchio di convergenza; lo stesso accade anche per $\Sigma k_n p_n x^n$, e perciò:

$$\lim_{n=\infty} k_n p_n z^{n+1} = 0.$$

Ne viene che i coefficienti g_n della serie $\rho_1 = A(\varphi)$ soddisfano alla condizione:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n z^n}{q_n} = 0, \quad \text{ossia} \quad g_0 + \frac{a_0}{b_0} g_1 + \frac{a_0 a_1}{b_0 b_1} g_2 + \frac{a_0 a_1 a_2}{b_0 b_1 b_2} g_3 + \cdots = 0. \tag{14}$$

Si noti che la funzione $\frac{z^n}{q_n}$, che figura nel termine generale della serie ρ_1, è l'integrale dell'equazione $\overline{\Pi}(k_n) = 0$, dove $\overline{\Pi}$ è la forma alle differenze *aggiunta* (*) di Π.

79. Passiamo ora a cercare l'effetto prodotto dall'inversa A^{-1} dell'operazione A applicata ad un elemento di S_0. In questo insieme, come sappiamo, la A^{-1} è a determinazione unica. Sia $\rho(x)$ una serie di S_z, e $\rho = \Sigma g_n x^n$.

Dalla (6) segue:

$$A^{-1} = U^{-1} M_{\frac{1}{z-x}} U_1^{-1},$$

e perciò:

$$A^{-1}(\rho) = U^{-1} \left\{ \frac{1}{z-x} \left(\frac{g_0}{q_0} + \frac{g_1}{q_1} x + \frac{g_2}{q_2} x^2 + \cdots \right) \right\}. \tag{15}$$

La $U_1^{-1}(\rho)$ è pure una serie di S_z; invece $\frac{1}{z-x}$ ammettendo uno sviluppo in serie convergente entro $[z]$, lo stesso sarà della funzione soggetta all'operazione U^{-1} nel secondo membro della (15), e lo stesso ancora sarà di $A^{-1}(\rho)$, il cui sviluppo è:

$$A^{-1}(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{g_0}{q_0} + \frac{g_1 z}{q_1} + \frac{g_2 z^2}{q_2} + \cdots + \frac{g_n z^n}{q_n} \right) \frac{x^n}{p_n z^{n+1}}. \tag{16}$$

(*) V. la mia Nota: *Sull'operazione aggiunta.* Rendiconti dell'Accademia di Bologna, 17 aprile 1898 (§ 11).

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Vi sarà eccezione nel solo caso che la serie

$$U_1^{-1}(\rho) = \Sigma \frac{g_n x^n}{q_n},$$

ammetta uno zero per $x = z$, cioè sotto la condizione:

$$\frac{g_0}{q_0} + \frac{g_1 z}{q_1} + \frac{g_2 z^2}{q_2} + \cdots = 0; \tag{14}$$

in questo solo caso $A^{-1}(\rho)$ apparterrà ad S_z.

80. Dal paragrafo precedente risulta che l'operazione A^{-1}, applicata ad una serie di S_z, dà una serie che, in generale, non converge oltre al cerchio $[z]$. L'operazione A^{-1} *introduce* dunque una singolarità sulla circonferenza $[z]$, e siccome questa singolarità è *tolta* da A, così essa è quella singolarità isolata nel punto $x = z$ il cui tipo è dato dalla serie:

$$\omega(x) = \frac{1}{a_0} + \frac{b_0 x}{a_0 a_1} + \frac{b_0 b_1 x^2}{a_0 a_1 a_2} + \cdots$$

Fra le operazioni A^{-1}, la più semplice è la divisione per $x - z$, che *introduce* nella serie di S_z, un polo di prim'ordine. In questo caso:

$$A(x^n) = z x^n - x^{n+1};$$

$a_n = z$, $b_n = 1$, e la $\Sigma \frac{x^n}{z^{n+1}}$ dà il tipo della singolarità introdotta.

Risulta ancora dal paragrafo precedente che in quelle serie di S_z i cui coefficienti soddisfano alla relazione (14), la A^{-1} non introduce singolarità. Questa condizione (14), dimostrata sufficiente, è anche necessaria, poichè si è visto al § 78 che se ρ è una serie di S_z, $A(\rho)$ soddisfa, coi suoi coefficienti, alla relazione (14): onde inversamente se $A(\rho)$ non soddisfa a tale condizione, ρ non può appartenere ad S_z.

La condizione (14) va dunque riguardata come una estensione della condizione di divisibilità di una serie di potenze per il binomio $x - z$, cui essa si riduce nel caso semplice di $A = M_{x-z}$. Concludendo:

« L'operazione A^{-1}, applicata ad una serie di S_z, vi introduce in generale una singolarità rappresentata dalla $\omega(x)$. Condizione necessaria e sufficiente perchè questa singolarità non si introduca, è che i coefficienti g_n della serie soddisfino alla condizione (14). »

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

81. Per dare un'applicazione di quanto precede, consideriamo la forma differenziale lineare dell'ordine m:

$$F(\varphi) = (h_0 - k_0 x)\varphi + (h_1 - k_1 x) x \varphi' + \cdots + \frac{1}{m!}(h_m - k_m x) x^m \varphi^{(m)}. \quad (17)$$

L'equazione $F(\varphi) = 0$ appartiene ad un tipo che è stato studiato dal sig. GOURSAT (*). Applicando la F ad x^n, si ottiene:

$$F(x^n) = \left(h_0 + n h_1 + \cdots \binom{n}{m} h_m\right) x^n - \left(k_0 + n k_1 + \cdots + \binom{n}{m} k_m\right) x^{n+1},$$

ed F è quindi un'operazione normale del primo ordine, del tipo (5), in cui:

$$a_n = h_0 + n h_1 + \cdots \binom{n}{m} h_m, \quad b_n = k_0 + n k_1 + \cdots \binom{n}{m} k_m;$$

gli a_n, b_n sono dunque polinomî razionali interi in n, del grado m, che noi supporremo diversi da zero pei valori interi positivi di n. Reciprocamente, ogni operazione del tipo (5) in cui a_n, b_n sono razionali interi di grado m in n è una forma differenziale lineare del tipo (17).

Ciò posto, indicando con z il rapporto $h_m : k_m$, risulta dai principî sull'integrazione delle equazioni differenziali lineari che l'equazione:

$$F(\varphi) = \rho,$$

dove ρ è una serie di S_z, ammette una sola soluzione regolare nell'intorno di $x = 0$ e precisamente entro $[z]$, colla sola singolarità $x = z$ sulla circonferenza. L'operazione F^{-1} introduce, l'operazione F toglie cotesta singolarità.

Poniamo ora:

$$F = U_1 M U,$$

con:

$$U(x^n) = p_n x^n, \quad U_1(x^n) = q_n x^n;$$

ne risulterà (§ 55):

$$q_n = \frac{b_0 b_1 \dots b_{n-1}}{a_0 a_1 \dots a_{n-1}} z^n, \quad p_n = \frac{a_0 a_1 \dots a_{n-1} a_n}{b_0 b_1 \dots b_{n-1}} \frac{1}{z^{n+1}}.$$

Dico che queste operazioni U, U_1 ammettono la proprietà di essere semplici, esse e le loro inverse. Considerando infatti la:

$$U^{-1}\left(\frac{1}{z - x}\right) = \frac{1}{a_0} + \frac{b_0 x}{a_0 a_1} + \frac{b_0 b_1 x^2}{a_0 a_1 a_2} + \cdots = \omega(x),$$

(*) *Ann. de l'École Normale*, S. II, T. XII, 1883.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

ed applicandole l'operazione F, viene:

$$F(\omega(x)) = U_1 M_{z-x} U U^{-1}\left(\frac{1}{z-x}\right) = 1,$$

quindi, per il ricordato teorema sulle equazioni differenziali lineari, $\omega(x)$ ha un'unica singolarità a distanza finita, per $x = z$. Ne viene che $U^{-1}\left(\frac{1}{1-x}\right)$ avrà un'unica singolarità per $x = 1$ a distanza finita, ed U^{-1} è quindi un'operazione semplice. Ma l'operazione U dà ancora:

$$U\left(\frac{1}{1-x}\right) = \Sigma \frac{a_0 a_1 \ldots a_n}{b_0 b_1 \ldots b_{n-1}} \frac{x^n}{z^{n+1}} = \varpi(x).$$

Applicandole l'operazione F_1 definita da:

$$F_1(1) = z - a_1 x, \quad F_1(x^n) = b_{n-1} z x^n - a_{n+1} x^{n+1}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

che è pure una forma differenziale lineare del tipo (17) col punto singolare $x = 1$, troveremo $F_1(\varpi(x)) = z a_0$; ne viene che $\varpi(x)$ ammette il solo punto singolare $x = 1$ a distanza finita, e quindi anche U è un'operazione semplice.

Analogamente risulta dalla forma dei coefficienti q_n ed $\frac{1}{q_n}$ che U_1 e la sua inversa sono operazioni semplici, talchè la F è un caso particolare dell'operazione A studiata nei §§ 67 e seguenti.

82. Dal paragrafo precedente risulta che se a_n, b_n sono polinomî razionali interi di grado m in n, la serie:

$$\omega(x) = \Sigma \frac{b_0 b_1 \ldots b_{n-1}}{a_0 a_1 \ldots a_n} x^n, \quad \left(\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{b_n} = z\right),$$

definisce una funzione analitica avente nel piano x la sola singolarità $x = z$ a distanza finita. Se una serie $\varphi(x) = \Sigma k_n x^n$, avente $[z]$ come cerchio di convergenza, sarà singolare come $\omega(x)$ sulla circonferenza $[z]$, la F corrispondente toglierà la singolarità alla $\varphi(x)$; in altri termini, dovranno i coefficienti k_n verificare la condizione necessaria e sufficiente:

$$|a_n k_n - b_{n-1} k_{n-1}| < \frac{m \eta^n}{|z|^n},$$

dove m ed η sono numeri positivi ed è $\eta < 1$. L'operazione F toglie quindi, e la F^{-1} introduce, in generale, la singolarità rappresentata da $\omega(x)$; però, F^{-1} non introduce questa singolarità in una serie di S_z, quando i coeffi-

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

cienti g_n della serie soddisfano alla condizione (14):

$$g_0 + g_1 \frac{a_0}{b_0} + g_2 \frac{a_0 a_1}{b_0 b_1} + \cdots = 0,$$

in cui il primo membro è una serie di funzioni razionali di n.

III. Uso delle operazioni normali d'ordine superiore nel togliere singolarità.

83. Consideriamo un'operazione normale P di ordine m, definita nell'insieme S dalle relazioni:

$$P(x^n) = a_{n0} x^n + a_{n1} x^{n+1} + \cdots + a_{n.m} x^{n+m}. \qquad (18)$$

Abbiamo dimostrato al § 57 che una simile operazione si può presentare sotto forma del prodotto:

$$P = U_m M_{z_m - x} U_{m-1} \ldots U_1 M_{z_1 - x} U_0, \qquad (19)$$

dove U_0, $U_1, \ldots U_m$ sono operazioni normali d'ordine nullo, definite in S da:

$$U_i(x^n) = p_{in} x^n, \quad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \ldots m, \\ n = 0, 1, 2, \ldots \infty \end{pmatrix}.$$

Faremo ora le seguenti ipotesi:

a) che si siano trovati numeri opportuni z_1, z_2, .. z_m pei quali le operazioni U che figurano nella scomposizione (19) siano semplici insieme alle loro inverse;

b) che sia $|z_1| < |z_2| < \cdots < |z_m|$. La z_m, che ha il modulo massimo verrà indicata semplicemente con z; S_z rappresenterà ancora l'insieme delle serie di potenze di z il cui raggio di convergenza è superiore a $|z|$; infine si userà la lettera ρ, affetta o no da indici, per indicare le serie di S_z.

84. Sotto le ipotesi del paragrafo precedente, l'operazione P applicata ad una serie di potenze φ di cui $[r]$ è il cerchio di convergenza, dà una serie di potenze ψ il cui cerchio di convergenza non può essere inferiore ad $[r]$, ma può, in alcuni casi, essere maggiore. Quando ciò accada, l'operazione P avrà, per effetto « di togliere le singolarità della $\varphi(x)$ sulla circonferenza r. » Ci proponiamo di vedere quali singolarità possono effettivamente venire tolte dalla P.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

A quest'uopo, sia posto:

$$A_1 = M_{z_1-x}\, U_0, \quad A_2 = M_{z_2-x}\, U_1, \ldots \quad A_m = U_m\, M_{z_m-x}\, U_{m-1},$$

onde:

$$P = A_m\, A_{m-1} \ldots A_2\, A_1. \tag{20}$$

La formula (20) ci dà così una scomposizione di P in un prodotto di m operazioni normali del prim'ordine, della forma di quelle precedentemente studiate (§§ 67 e seg.). Sappiamo pertanto che ad ogni operazione A_i corrisponde una serie di potenze ω_i, la quale soddisfa all'equazione:

$$A_i(\omega_i) = 1;$$

posto:

$$U_i(x^n) = p_{i.n}\, x^n,$$

la serie ω_i è data da:

$$\omega_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{p_{i-1.n}\, z_i^n}. \tag{21}$$

e rappresenta una funzione analitica che a distanza finita, ha per solo punto singolare $x = z_i$; l'operazione A_i^{-1} introduce e la A_i fa sparire questa singolarità (§ 80). Consideriamo ora le funzioni:

$$\left.\begin{aligned} \pi_1 = \omega_1, \quad \pi_2 &= A_1^{-1}(\omega_2), \\ \pi_3 = A_1^{-1} A_2^{-1}(\omega_3), \ldots \quad \pi_m &= A_1^{-1} A_2^{-1} \ldots A_{m-1}^{-1}(\omega_m). \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Dico che la funzione π_i ammette a distanza finita al più i singolarità isolate nei punti $z_1, z_2, \ldots z_i$. Infatti, la π_1 non differisce da ω_1 ed ammette la sola singolarità z_1 a distanza finita. La ω_2 ammette la sola z_2 ed è quindi una serie di S_{z_1}; applicandovi la $A_0^{-1} = U_0^{-1} M_{\frac{1}{z_1-x}}$, non s'introduce altra singolarità che quella in z_1, e quindi π_2 ha (al più) sole singolarità isolate in z_1 e z_2 a distanza finita. Analogamente per $\pi_3, \ldots \pi_i$.

85. Applicando ora la operazione P ad una serie di potenze della forma:

$$\varphi(x) = c\, \pi_i(x) + \rho,$$

dove ρ, come è stabilito, è una serie di S_z, avremo per la (20):

$$P(\varphi) = c\, A_m\, A_{m-1} \ldots A_2\, A_1(\pi_i) + P(\rho);$$

ora $P(\rho)$ è una serie ρ_1, e, poichè:

$$\pi_i = A_1^{-1} A_2^{-1} \ldots A_{i-1}^{-1}(\omega_i) \quad \text{ed} \quad A_i(\omega_i) = 1,$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

viene:

$$P(\varphi) = c\, A_m\, A_{m-1} \ldots A_{i+1}(1) + \rho_1 .$$

In questo secondo membro, il primo termine è un polinomio razionale intero in x, al più del grado $m - i$; il secondo termine è una serie di S_z, onde $P(\varphi)$ è una serie di S_z: cioè P toglie le singolarità che π_i ammette entro il cerchio $[z]$. Se ne conclude che « l'operazione P toglie le singolarità rappresentate dalle funzioni $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_m$: cioè, essendo $c_1, c_2, \ldots c_m$ costanti arbitrarie, la P, applicata a:

$$c_1 \pi_1 + c_2 \pi_2 + \cdots + c_m \pi_m + \rho, \tag{23}$$

dà una serie ρ. »

Si avverta che $P(\pi_m) = 1$, e che $P(\pi_{m-i})$ è un polinomio di grado i in k, a coefficienti facilmente calcolabili.

86. Reciprocamente a quanto è dimostrato nel paragrafo precedente, sia φ una serie di potenze cui P tolga la singolarità in $[z]$; vale a dire la φ non sia una serie ρ, ma sia tale la $P(\varphi)$. Dico che φ deve essere della forma (23). Se infatti è $P(\varphi) = \rho$, ne viene:

$$P^{-1}(\rho) = A_1^{-1} A_2^{-1} \ldots A_m^{-1}(\rho) = \varphi ;$$

ora $A_m^{-1}(\rho)$ non può avere singolarità in $[z]$ se non nel punto z_m, e sarà (§ 80):

$$A_m^{-1}(\rho) = c\, \omega_m + \rho_1 ;$$

da questa:

$$A_{m-1}^{-1} A_m^{-1}(\rho) = c\, A_{m-1}^{-1}(\omega_m) + c_1\, \omega_{m-1} + \rho_2 ,$$

$$A_{m-2}^{-1} A_{m-1}^{-1} A_m^{-1}(\rho) = c\, A_{m-2}^{-1} A_{m-1}^{-1}(\omega_m) + c_1\, A_{m-1}^{-1}(\omega_{m-1}) + c_2\, \omega_{m-2} + \rho_3 ,$$

e così via. Tenuto conto delle (22), si ottiene:

$$P^{-1}(\rho) = c\, \pi_m + c_1\, \pi_{m-1} + \cdots + c_{m-1}\, \pi_1 + \rho_{m+1} ,$$

c. d. d.

87. Si avrà un esempio delle singolarità introdotte da P^{-1} risolvendo l'equazione funzionale:

$$P(\omega) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_{m-1} x^{m-1}, \tag{24}$$

rispetto alla funzione ω. Posto $\omega = \Sigma\, k_n x^n$ e $P(\omega) = \Sigma\, g_n x^n$, sappiamo dal § 50 che le relazioni fra le g_n e le k_n sono espresse da:

$$g_0 = a_{00}\, k_0 , \quad g_n = \Phi(k_n) = a_{n0}\, k_n + a_{n-1,1}\, k_{n-1} + \cdots + a_{n-m,m}\, k_{n-m} . \tag{25}$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Per la determinazione dei coefficienti k_n, cioè per la risoluzione dell'equazione proposta, si tratterà dunque semplicemente di risolvere l'equazione lineare alle differenze:

$$\Phi(k_n) = 0, \tag{26}$$

colle condizioni iniziali:

$$\left.\begin{array}{c} a_{00}\,k_0 = b_0, \quad a_{10}\,k_1 + a_{01}\,k_0 = b_1, \ldots \\ a_{m-1\cdot 0}\,k_{m-1} + a_{m-2\cdot 1}\,k_{m-2} + \cdots + a_{0\cdot m-1}\,k_0 = b_{m-1}. \end{array}\right\} \tag{27}$$

L'arbitrarietà dei coefficienti del secondo membro della (24) equivale a quella delle costanti nell'integrale della (26), e la determinazione delle une porta, linearmente, a quella degli altri.

88. Abbiamo così ottenuto il seguente risultato:

« Una serie $\Sigma\, k_n\, x^n$ i cui coefficienti soddisfano all'equazione lineare alle differenze, d'ordine m, $\Phi(k_n) = 0$, il cui primo membro è la trasformata $C\,P\,C^{-1}$ di P mediante l'operazione C definita al § 30, rappresenta una funzione che ha entro il cerchio $[z]$ i soli punti singolari z_1, $z_2, \ldots\, z_m$, e le singolarità in questi punti sono tolte mediante l'applicazione della P. »

Si ha ancora che per la serie $\Sigma k_n x^n$ in discorso, il limite superiore dell'insieme derivato di $|\sqrt[n]{k_n}|$ è, in generale, $\dfrac{1}{|z_1|}$ e non è in nessun caso maggiore: potendosi ridurre, per una scelta opportuna delle b_0, $b_1, \ldots\, b_{m-1}$, ad essere $\dfrac{1}{|z_i|}$, $i > 1$ (*).

89. Dalla scomposizione di P in fattori nella forma (20) segue che anche la sua trasformata $C\,P\,C^{-1} = \Phi$ si scompone nella forma:

$$\Phi = \Pi_m\,\Pi_{m-1} \ldots \Pi_2\,\Pi_1, \tag{28}$$

dove Π_i è la forma lineare alle differenze del prim'ordine,

$$\Pi_i = z_i\,p_{i-1.n}\,k_n - p_{i-1.n-1}\,k_{n-1}, \quad (i = 1,\ 2, \ldots\ m-1),$$

mentre è:

$$\Pi_m = p_{m.n}\,(z_m\,p_{m-1\,n}\,k_n - p_{m-1.n-1}\,k_{n-1}).$$

I coefficienti della soluzione ω dell'equazione (24) si ottengono dall'integrazione della equazione $\Phi = 0$; ora questa integrazione è ricondotta a quella delle forme Π_i di prim'ordine, poichè indicando con

$$h'_n, \quad h''_n, \ldots\ h_n^{(m)},$$

(*) Cfr. Poincaré, *Americ. Journal of Math.*, T. VII, 1885 (§ 2).

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

gl'integrali di $\Pi_1 = 0$, $\Pi_2 = 0, \ldots \Pi_m = 0$ rispettivamente, si vede immediatamente che un sistema fondamentale di integrali di $\Phi = 0$ sarà dato da:

$$k'_n = h'_n, \quad k''_n = \Pi_1^{-1}(h''_n), \quad k'''_n = \Pi_1^{-1}\Pi_2^{-1}(h'''_n), \ldots$$

90. Se si applica l'operazione P ad una serie ρ, si ritrova una serie ρ_1. Ma quest'ultima ha coefficienti che soddisfano ad un certo numero di relazioni necessarie. Sia infatti k_n il coefficiente di x^n in ρ, e g_n quello di x^n in ρ_1; si avrà:

$$g_n = \Pi_m \Pi_{m-1} \ldots \Pi_2 \Pi_1 (k_n).$$

Si ponga:

$$\Pi_{m-1} \Pi_{m-2} \ldots \Pi_1 (k_n) = g'_n;$$

anche $\Sigma g'_n x^n$ sarà una serie ρ, e si avrà:

$$g_n = \Pi_m (g'_n);$$

onde, in forza del § 78, se $t_n^{(m)}$ è l'integrale dell'equazione alle differenze $\overline{\Pi}_m = 0$, aggiunta di Π_m, si avrà:

$$\Sigma g_n t_n^{(m)} = 0. \tag{29}$$

Si ponga poi:

$$\Pi_{m-2} \Pi_{m-3} \ldots \Pi_1 (k_n) = g''_n,$$

e si indichi con $\overline{\Pi}_i$ l'aggiunta di Π_i; considerando l'equazione $\overline{\Pi}_{m-1} \overline{\Pi}_m = 0$ (*), aggiunta di $\Pi_m \Pi_{m-1}$, un sistema fondamentale dei suoi integrali risulti costituito da $t_n^{(m)}$, integrale di $\overline{\Pi}_m = 0$, e da un altro $t_n^{(m-1)}$: per quest'ultimo sarà:

$$\overline{\Pi}_{m-1} \overline{\Pi}_m (t_n^{(m-1)}) = 0,$$

e siccome $t_n^{(m-1)}$ non annulla $\overline{\Pi}_m$, $\overline{\Pi}_m (t_n^{(m-1)})$ è integrale di $\overline{\Pi}_{m-1} = 0$. Ora si ha:

$$g'_n = \Pi_{m-1} (g''_n),$$

onde per il citato § 78, sarà:

$$\Sigma g'_n \overline{\Pi}_m (t_n^{(m-1)}) = 0. \tag{30}$$

Ma per le proprietà dell'operazione aggiunta $\overline{K}$ di una forma lineare alle differenze K, si ha (**):

$$\Sigma K(a_n) b_n = \Sigma a_n \overline{K}(b_n),$$

(*) Nota citata: *Sull'operazione aggiunta*, § 6.
(**) Ibid., § 3.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

onde la (30) potrà scriversi:

$$\Sigma\, \Pi_m (g'_n)\, t_n^{(m-1)} = 0,$$

ossia:

$$\Sigma\, g_n\, t_n^{(m-1)} = 0.$$

Così continuando, si vede che le g_n soddisfano alla relazione:

$$\Sigma\, g_n\, t_n = 0, \tag{31}$$

essendo t_n un integrale qualunque dell'equazione:

$$\overline{\Phi} = \overline{\Pi}_1\, \overline{\Pi}_2 \dots \overline{\Pi}_m = 0, \tag{32}$$

aggiunta di $\Phi = 0$. Siccome tale integrale contiene m costanti arbitrarie, così la (31) equivale ad m relazioni indipendenti della stessa forma.

91. Rimane ora da vedere che le serie $\Sigma\, g_n\, t_n$ che figurano nel paragrafo precedente sono assolutamente convergenti, essendo t_n un integrale qualunque dell'equazione (32). Ciò si dimostrerà provando che è assolutamente convergente la serie $\Sigma\, g_n\, u_n$, dove g_n sono i coefficienti di una serie ρ ed u_n l'integrale di una qualunque delle equazioni $\overline{\Pi}_i = 0$. Ora se si ha in generale:

$$\Pi (k_n) = (p_{n+1}\, k_{n+1}\, z_i - p_n\, k_n)\, q_n,$$

ne viene (*):

$$\overline{\Pi} (k_n) = p_n\, (q_{n-1}\, k_{n-1}\, z - q_n\, k_n).$$

L'integrale di quest'ultima forma è $u_n = \dfrac{z_i^n}{q_n}$: ora, per le proprietà di q_n, poichè $\Sigma\, g_n\, x^n$ converge in un cerchio maggiore di $[z_m]$, e $|z_i| \leqq |z_m|$, segue che $\Sigma\, g_n\, u_n$ è assolutamente convergente.

92. Dalle cose dette, si conclude:

a) che l'applicazione dell'operazione P ad una serie ρ di S_z produce una serie ρ_1 di S_z; non però qualunque, poichè i coefficienti della ρ_1 soddisfano ad m relazioni indipendenti della forma (31).

b) Che l'applicazione di P ad una serie φ non appartenente ad S_z produce una serie di S_z se, e soltanto se la funzione φ ammette entro $[z]$ i soli punti $z_1, z_2, \dots z_m$ come punti singolari, con singolarità della forma (23).

(*) *Sull'operazione aggiunta*, § 11.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Di conseguenza:

c) L'applicazione dell'operazione P^{-1} ad una serie ρ di S_z produrrà in generale una serie non appartenente ad S_z; affinchè φ appartenga ad S_z devono *necessariamente* essere soddisfatte le condizioni (31) dai coefficienti di ρ.

d) Queste condizioni sono anche sufficienti affinchè $P^{-1}(\rho)$ sia una serie ρ_1. Infatti, sia $\rho = \Sigma g_n x^n$ una serie i cui coefficienti soddisfino alla condizione (31) per ogni integrale t_n dell'equazione $\overline{\Phi} = 0$. Applicando dapprima a ρ l'operazione A_m^{-1}, si abbia:

$$A_m^{-1}(\rho) = \Sigma g'_n x^n = \lambda_1.$$

Ne viene $A_m(\lambda_1) = \rho$, ossia $\Pi_m(g'_n) = g_n$; ma poichè le g_n soddisfano alla (31) per ogni integrale di $\overline{\Phi} = 0$, sarà anche $\Sigma g_n t_n^{(1)} = 0$ per quell'integrale $t_n^{(1)}$ che annulla $\overline{\Pi}_m$. Perciò, per il teorema del § 80, A_m^{-1} applicata a ρ non introduce singolarità, cioè λ_1 è una serie di S_z.

Considero ora $A_{m-1}^{-1}(\lambda_1) = \Sigma g''_n x^n = \lambda_2$: dico che anche λ_2 è una serie di S_z. Infatti, per l'ipotesi fatta sulle g_n, sarà anche $\Sigma g_n t_n^{(2)} = 0$ per quell'integrale $t_n^{(2)}$ della (32) per il quale è nullo $\overline{\Pi}_{m-1}\overline{\Pi}_m$. Si ha cioè che

$$\overline{\Pi}_m(t_n^{(2)}) = s_n,$$

è integrale di $\overline{\Pi}_{m-1} = 0$. Ma si può scrivere, per le proprietà delle operazioni aggiunte:

$$0 = \Sigma g_n t_n^{(2)} = \Sigma \Pi_m(g'_n) t_n^{(2)} = \Sigma g'_n \overline{\Pi}_m(t_n^{(2)}),$$

ossia:

$$\Sigma g'_n s_n = 0;$$

onde è soddisfatta la condizione del teorema del § 80 perchè $A_{m-1}^{-1}\lambda_1 = \lambda_2$ sia una serie di S_z. Così continuando, si giunge alla conclusione che:

$$A_{m-2}^{-1} A_{m-1}^{-1} A_m^{-1}(\rho), \ldots \; A_2^{-1} A_3^{-1} \ldots A_m^{-1}(\rho),$$

ed infine $P^{-1}(\rho) = A_1^{-1} A_2^{-1} \ldots A_m^{-1}(\rho)$, sono serie di S_z, c. d. d.

93. L'operazione P definita dalle (18) ha dunque la proprietà di togliere da una funzione analitica un certo complesso di singolarità; la P^{-1} introduce invece queste singolarità quando essa si applichi ad una serie di S_z. Le condizioni (31), cui soddisfano i coefficienti di quelle serie di S_z nelle quali, per eccezione, la P^{-1} non introduce singolarità, sono analoghe alle condizioni di divisibilità di una serie per un polinomio, e si riducono a quelle

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

condizioni quando tutte le operazioni U che figurano nella (19) si riducono all'operazione identica.

94. Siano ancora $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_m$ le funzioni che definiscono le singolarità che P è suscettibile di togliere. Se si pone l'equazione funzionale, dove ρ è una serie data:

$$P(\varphi) = \rho, \quad \text{o} \quad \varphi = P^{-1}(\rho),$$

si avrà, per il § 86:

$$\varphi = c_1 \pi_1 + c_2 \pi_2 + \cdots + c_m \pi_m + \rho_1.$$

L'applicazione di P ai due membri di questa eguaglianza darà un polinomio razionale intero di grado $m-1$, più la funzione $P(\rho_1) = \rho_2$. Talchè:

$$P(\varphi) = \rho_2 + d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \cdots + d_{m-1} x^{m-1} = \rho.$$

La serie ρ_2, essendo il risultato di $P(\rho_1)$, sarà una serie i cui coefficienti soddisfano alle condizioni (31); tale è dunque anche la:

$$\rho - (d_0 + d_1 x + \cdots + d_{m-1} x^{m-1}).$$

Se dunque la serie data ρ è, ad esempio, la $\Sigma h_n x^n$, si avrà:

$$\rho - (d_0 + d_1 x \cdots + d_{m-1} x^{m-1}) =$$

$$= h_0 - d_0 + (h_1 - d_1) x + \cdots (h_{m-1} - d_{m-1}) x^{m-1} + \sum_{n=m}^{\infty} h_n x^n,$$

e dovrà essere, indicando con:

$$t'_n, \quad t''_n, \ldots \quad t_n^{(m)},$$

un sistema fondamentale d'integrali della $\overline{\Phi} = 0$:

$$(h_0 - d_0)\, t_0^{(i)} + (h_1 - d_1)\, t_1^{(i)} + \cdots + (h_{m-1} - d_{m-1})\, t_{m-1}^{(i)} + h_m t_m^{(i)} + \cdots = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots m).$$

Queste equazioni servono a determinare i coefficienti $d_0, d_1, \ldots d_{m-1}$, e mediante questi (§ 85) le costanti $c_1, c_2, \ldots c_m$, cioè la parte singolare entro $[z]$ della $P^{-1}(\rho)$.

IV. Applicazione alle equazioni differenziali lineari.

95. Come applicazione di quanto precede, consideriamo l'operazione rappresentata dal primo membro di un'equazione differenziale lineare del tipo di Fuchs, e che dicesi forma differenziale lineare normale. Per ottenere una

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

semplificazione di scrittura che non altera la sostanza della questione, ci limiteremo al caso di una forma differenziale lineare, d'ordine qualunque q, a coefficienti trinomî, e sia:

$$F(\varphi) = \sum_{i=0}^{q} (h_i + h'_i x + h''_i x^2) \frac{x^i}{i!} \varphi^{(i)}. \tag{33}$$

Formando $F(x^n)$, si ha:

$$F(x^n) = (a_n + a'_n x + a''_n x^2) x^n, \tag{34}$$

dove:

$$a_n = h_0 + h_1 n + h_2 \binom{n}{2} + \cdots + h_q \binom{n}{q},$$

ed analoghe espressioni si hanno per a'_n ed a''_n. Si supporranno diversi da zero a_n ed a''_n per $n = 0, 1, 2, \ldots$; si supporranno ancora di modulo diverso le radici z e z' dell'equazione:

$$h_q + h'_q x + h''_q x^2 = 0,$$

e precisamente:

$$|z'| < |z|.$$

I punti singolari dell'equazione differenziale lineare omogenea:

$$F(\varphi) = 0, \tag{35}$$

saranno $x = 0$, z', z. L'equazione differenziale lineare non omogenea:

$$F(\varphi) = c + c'x, \tag{36}$$

avrà nell'intorno del punto $x = 0$ un integrale (ed uno solo) sviluppabile in serie di potenze intere positive di x; sia $\omega(x;\, c,\, c')$ questo sviluppo, che convergerà in generale entro il cerchio $[z']$, ed eccezionalmente entro il cerchio $[z]$.

96. Dico ora che è possibile di determinare le costanti c, c' per modo che $\omega(x;\, c,\, c')$ ci rappresenti una funzione analitica semplice (§ 66) col solo punto singolare z' a distanza finita. Si ha intanto:

$$\omega(x;\, c,\, c') = c\,\omega(x;\, 1,\, 0) + c'\,\omega(x;\, 0,\, 1).$$

Ora, nel piano della variabile x conduciamo un taglio lungo una linea l che vada da z' all'infinito senza passare per z nè penetrare entro il cerchio $[z']$; nel piano così tagliato, $\omega(x;\, 1,\, 0)$ ed $\omega(x;\, 0,\, 1)$ sono funzioni analitiche singolari nel punto z, in cui la loro singolarità è rappresentata da:

$$(x - z)^{\varepsilon}\, \eta(x), \tag{37}$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

essendo ε la radice non nulla dell'equazione determinante della (35) rispetto al punto z, e l'espressione (37) essendo l'integrale canonico relativo. Si avranno dunque nell'intorno del punto z, i seguenti sviluppi per le funzioni $\omega(x;\ 1,\ 0)$ ed $\omega(x;\ 0,\ 1)$:

$$\omega(x;\ 1,\ 0) = e\,(x-z)^{\varepsilon}\,\eta(x) + \mathfrak{P}(x-z),$$
$$\omega(x;\ 0,\ 1) = e_1(x-z)^{\varepsilon}\,\eta(x) + \mathfrak{P}_1(x-z),$$

essendo e ed e_1 due costanti e $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$ sviluppi in serie di potenze. Prese dunque $\bar{c}$ e $\bar{c}'$ per modo che sia:

$$\bar{c}\,e + \bar{c}'\,e_1 = 0,$$

viene:

$$\omega(x;\ \bar{c},\ \bar{c}') = \bar{c}\,\mathfrak{P}(x-z) + \bar{c}'\,\mathfrak{P}_1(x-z);$$

abbiamo cioè un'equazione (36) che ammette un integrale il quale non ha più singolarità per $x = z$.

Rappresenteremo quest'integrale $\omega(x;\ \bar{c},\ \bar{c}')$ semplicemente con $\omega(x)$; la $\omega(x)$ è un ramo di funzione analitica che nel piano tagliato nel modo indicato non ha singolarità fuori di l, ed è quindi una funzione semplice. Come tale, essa caratterizza in generale (§ 73) una operazione normale di primo ordine $A_1 = M_{z'-x}\,U_0$, il cui effetto è di togliere la singolarità definita da $\omega(x)$ nel punto z'.

Ottenuta la A_1, riprendiamo la forma F e col metodo indicato al § 58 determiniamo l'operazione normale di prim'ordine A_2 tale che sia:

$$F = A_2\,A_1.$$

Intanto A_1 toglie la singolarità rappresentata da $\omega(x)$. Ma ogni altro integrale della (36) ha quella stessa singolarità in z': ne viene che se ω_1 è un altro integrale della (36) per valori arbitrarî delle c, c', la $A_1(\omega_1) = \pi$ non sarà singolare se non nel punto z. Sarà dunque π una funzione semplice: ma

$$F(\omega_1) = A_2(\pi) = c + c'\,x,$$

non avendo singolarità a distanza finita, la singolarità di π in z è tolta da A_2. La forma differenziale lineare F è dunque scomposta, nel modo indicato dalla formula (20), in un prodotto di due fattori di cui il primo A_1 toglie la singolarità ω, il secondo la singolarità π; tale forma F appartiene cioè alla specie delle operazioni P studiate nei §§ 84 e seguenti.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

97. L'operazione C definita al § 30 trasforma l'operazione F nella $C F C^{-1} = \Phi$ data da:

$$\Phi(k_n) = a_n k_n + a'_{n-1} k_{n-1} + a''_{n-2} k_{n-2},$$

forma lineare alle differenze di second'ordine, i cui coefficienti sono polinomî in n del grado q. La sua forma aggiunta è:

$$\overline{\Phi}(k_n) = a_n k_n + a'_n k_{n+1} + a''_n k_{n+2}.$$

Alla scomposizione di F in fattori A_1, A_2, corrisponde la scomposizione di Φ e di $\overline{\Phi}$ in prodotto di due forme lineare alle differenze del prim'ordine. Sia r_n, r'_n un sistema fondamentale d'integrali di $\overline{\Phi} = 0$: l'operazione F applicata ad una serie ρ di S_z, darà una serie di ρ_1 pure di S_z i cui coefficienti g_n soddisfaranno alle condizioni:

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n r_n = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} g_n r'_n = 0. \tag{38}$$

Queste sono anche le condizioni sufficienti affinchè l'equazione differenziale lineare non omogenea $F(\varphi) = \rho_1$ ammetta come soluzione una serie ρ di S_z.

98. Risulta da quanto precede che ogni funzione φ, singolare come un integrale dell'equazione (36), è tale che le sue singolarità sono tolte mediante l'applicazione dell'operazione F. Dico ora che, reciprocamente, se φ è una funzione cui la forma F tolga le singolarità che essa ammette entro $[z]$, queste singolarità sono quelle stesse dell'integrale $\omega(x;\ c,\ c')$ della (36). Infatti, essendo φ una serie di S_z, si abbia:

$$F(\varphi) = \rho = \Sigma g_n x^n.$$

O i coefficienti g_n soddisfano alle condizioni (38), e allora φ è una serie ρ_1 di S_z, cioè non ha singolarità entro $[z]$. O esse non sono verificate; allora si possono determinare le costanti d e d' (v. § 94) in modo che sia:

$$d r_0 + d' r_1 = \sum_0^{\infty} g_n r_n,$$

$$d r'_0 + d' r'_1 = \sum_0^{\infty} g_n r'_n,$$

e alle (38) soddisfaranno i coefficienti della serie $\rho - d - d' x$. L'equazione:

$$F(\varphi) = \rho - d - d' x,$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

avrà dunque come integrale una serie ρ_1; ma l'equazione:

$$F(\varphi) = d + d' x,$$

ha per integrale la $\omega(x;\ d,\ d')$; onde l'integrale della equazione proposta $F(\varphi) = \rho$ sarà la funzione:

$$\varphi = \rho_1 + \omega(x;\ d,\ d'),$$

la quale ammette entro il cerchio $[z]$ la singolarità caratterizzata da $\omega(x;\ d,\ d)$.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Su di una classe di equazioni alle derivate parziali del secondo ordine.

(Di GIUSEPPE LAURICELLA, *a Catania.)*

INTRODUZIONE.

Il PICARD, in una Memoria che porta lo stesso titolo del presente lavoro (*), studia le equazioni del tipo:

$$a \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2 b \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + d \frac{\partial V}{\partial x} + e \frac{\partial V}{\partial y} + f V = 0, \tag{1}$$

tali che l'equazione:

$$a \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2 b \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + d \frac{\partial V}{\partial x} + e \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

che si ha uguagliando allo *zero* la somma dei termini che contengono le derivate della funzione incognita, può ottenersi esprimendo che è nulla la variazione di un certo integrale doppio della forma:

$$\int\int \left[A' \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + 2 B \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} + A'' \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 \right] d x \, d y. \tag{3}$$

In primo luogo Egli dimostra che l'equazione (1) può ridursi, con un conveniente cambiamento di variabili, ad una equazione della forma:

$$\Delta^2 V + f(x, y) \, . \, V = 0, \quad \left(\Delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) \cdot \tag{1'}$$

Ciò premesso, passa all'integrazione di questa equazione in un campo piano σ nell'ipotesi di $f(x, y)$ funzione sempre finita e positiva, e, richia-

(*) *Acta Mathematica;* T. XII.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

mando i noti risultati dello Schwarz, dimostra che *per campi σ abbastanza piccoli* si ha sempre un integrale regolare V dell'equazione $(1)'$ ed uno solo, corrispondente a dati valori di V al contorno s di σ. In seguito, supposta la funzione $f(x, y)$ sempre negativa, dimostra l'esistenza e l'unicità dell'integrale regolare V della $(1)'$ per dati valori di V nei punti del contorno s di un campo piano qualsiasi σ (*).

Si abbia ora un'equazione del tipo:

$$a\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}+c\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+d\frac{\partial V}{\partial x}+e\frac{\partial V}{\partial y}+fV+h=0, \tag{4}$$

tale che la corrispondente equazione (2) si possa pure considerare come ottenuta uguagliando allo *zero* la variazione dell'integrale doppio (3). Ammesso che le funzioni a, b,... siano regolari in tutto il campo piano che si considera, avremo che i medesimi ragionamenti del Picard (l. c.; Cap. I, § 4) bastano per dimostrare anche qui che l'equazione (4) si può ridurre ad un'equazione della forma:

$$\Delta^2 V+f(x, y).V+h(x, y)=0. \tag{4$'$}$$

Per trattare dell'integrazione di questa equazione qualunque sia il campo σ, che suppongo sempre finito e tale che si sappia risolvere il *problema di* Dirichlet col *metodo di* Neumann, e qualunque sia la natura delle funzioni $f(x, y)$, $h(x, y)$, che suppongo sempre finite e continue insieme alle loro derivate prime, i punti di s al più esclusi per queste derivate, consideriamo dapprima l'equazione:

$$\Delta^2 V+k.f(x, y).V+h(x, y)=0, \tag{5}$$

in cui k è un parametro arbitrario ed $f(x, y)$ è supposta sempre positiva. Riguardo a questa equazione dimostreremo che *esiste una funzione V dei punti di σ (i punti di s inclusi) e della variabile complessa k, la quale, considerata in tutta l'estensione del piano k, gode delle seguenti proprietà:*

1.° *Ha per singolarità una serie finita o infinita di poli semplici corrispondenti ad un gruppo C di valori reali, positivi e crescenti:*

$$k_1,\ k_2,\ k_3,\ldots$$

della variabile k; e questo gruppo C ha per valore limite il valore $k=\infty$ nel caso che sia infinito.

(*) Il Le Roy nella sua tesi (anno 1898) fa uno studio analogo, estendendo il noto mètodo del *balayage* del Poincaré.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

2.° *Ha per residui in questi poli una serie di funzioni:*

$$p_1, p_2, p_3, \ldots$$

finite e continue in tutto σ insieme alle loro derivate prime e seconde, i punti di s al più esclusi per queste derivate, ognuna delle quali soddisfa alle equazioni:

$$(\text{nei punti di } \sigma)\ \Delta^2 p_i + k_i f p_i = 0, \quad (\text{nei punti di } s)\ p_i = 0. \qquad (5)'$$

3.° *Per qualunque valore di k, che non fa parte del gruppo C, è finita e continua in tutto σ insieme alle derivate dei due primi ordini, i punti di s al più esclusi per queste derivate, e rappresenta l'integrale dell'equazione* (5), *corrispondente ad una data successione di valori finiti e continui su s.*

Questo integrale sarà unico per tutti i valori di k che non fanno parte di un certo gruppo infinito G di valori reali e positivi aventi il solo valore limite $k = \infty$ e contenente C o coincidente con esso. Per ognuno dei valori k di G si ha invece un integrale regolare delle equazioni (5)'.

Il gruppo G dipende dalla natura del campo σ e dalla funzione $f(x, y)$: il gruppo C dipende inoltre dalla funzione $h(x, y)$ e dai valori di V al contorno.

Da questo teorema risulta intanto che, *supposta la funzione $f(x, y)$ dell'equazione* (4)' *sempre positiva, se il valore $k = 1$ non fa parte del gruppo C, esiste un integrale della* (4)' *regolare in tutto il campo σ, il quale nei punti di s prende valori finiti e continui dati ad arbitrio; se inoltre il valore $k = 1$ non fa parte del gruppo G, quest'integrale sarà unico; se invece esso fa parte del gruppo G, appartenga o no al gruppo C, si ha un integrale regolare dell'equazione:*

$$\Delta^2 V + f . V = 0,$$

il quale prende valori nulli nei punti del contorno s.

Risulta ancora che, *supposta la funzione $f(x, y)$ della equazione* (4)' *sempre negativa, esiste sempre un solo integrale delle* (4)' *regolare in tutto il campo σ, il quale nei punti di s prende valori finiti e continui dati ad arbitrio.*

Per studiare l'equazione (4)' anche nel caso in cui la funzione $f(x, y)$ nel campo σ *non ha costantemente lo stesso segno,* prendiamo a considerare l'equazione:

$$\Delta^2 V + \{ k F(x, y) - I \} V + h(x, y) = 0, \qquad (6)$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

dove I è una costante positiva, k il solito parametro arbitrario, $F(x, y)$ una funzione sempre finita e positiva, che è anche continua insieme alle sue derivate prime, i punti di s al più esclusi per queste derivate. Anche per questa equazione dimostreremo che *esiste una funzione V dei punti di σ (i punti di s inclusi) e della variabile complessa k, la quale, considerata in tutta l'estensione del piano k, gode delle seguenti proprietà:*

1.° *Ha per singolarità una serie finita o infinita di poli semplici corrispondenti ad un gruppo C' di valori reali positivi e crescenti:*

$$k'_1,\ k'_2,\ k'_3, \dots$$

della variabile k; e questo gruppo C' ha per valore limite il valore $k = \infty$ nel caso che sia infinito.

2.° *Ha per residui in questi poli una serie di funzioni:*

$$p'_1,\ p'_2,\ p'_3, \dots$$

regolari in tutto σ insieme alle loro derivate prime e seconde, i punti di s al più esclusi per queste derivate, ognuna delle quali soddisfa alle equazioni:

$$\text{(nei punti di } \sigma) \ \Delta^2 p'_i + (k'_i F(x, y) - I)\, p'_i = 0, \quad \text{(nei punti di } s) \ p'_i = 0. \qquad (6)'$$

3.° *Per qualunque valore di k, che non fa parte del gruppo C' è finita e continua in tutto σ insieme alle derivate dei due primi ordini, i punti di s al più esclusi per queste derivate, e rappresenta l'integrale dell'equazione* (6), *corrispondente ad una data successione di valori finiti e continui su s.*

Questo integrale sarà unico per tutti i valori di k che non fanno parte di un certo gruppo infinito G' di valori reali e positivi aventi il solo valore limite $k = \infty$ e contenente C' o coincidente con esso. Per ognuno dei valori k di G' si ha invece un integrale regolare delle equazioni (6)$'$.

Il gruppo G' dipende dalla natura del campo σ, dalla costante I e dalla funzione $F(x, y)$: il gruppo C' dipende inoltre dalla funzione $h(x, y)$ e dai valori di V al contorno.

Ciò premesso, si indichi con I il massimo valore assoluto della funzione $f(x, y)$ nel campo σ e si ponga:

$$F(x, y) = I + f(x, y).$$

Allora l'equazione (4)$'$ si può scrivere:

$$\Delta^2 V + \{ F(x, y) - I \} V + h(x, y) = 0; \qquad (4)''$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

e per conseguenza si avrà dal teorema precedente che *se il valore* $k = 1$ *non fa parte del gruppo* C', *esiste un integrale della* $(4)''$, *e quindi della* $(4)'$, *regolare in tutto il campo* σ, *che nei punti di* s *prende valori finiti e continui dati ad arbitrio; se inoltre il valore* $k = 1$ *non fa parte del gruppo* G', *quest'integrale sarà unico; se invece esso fa parte del gruppo* G', *appartenga o no al gruppo* C', *si ha un'integrale regolare dell'equazione:*

$$\Delta^2 V + \{ F(x, y) - I \} V = 0,$$

ossia dell'altra:

$$\Delta^2 V + f(x, y) \, . \, V = 0,$$

il quale prende valori nulli nei punti del contorno s.

Poichè la I e la $F(x, y)$, che entrano nell'equazione $(4)''$, dipendono esclusivamente da $f(x, y)$, avremo che *il gruppo* G' *dipende questa volta dalla natura del campo* σ *e dalla funzione* $f(x, y)$: *il gruppo* C', come sopra, *dipende inoltre dalla funzione* $h\ (x, y)$ *e dai valori di* V *al contorno.*

Come si è detto, i valori del gruppo G, oltre che dalla funzione $f\,(x, y)$, dipendono dal campo σ; così i valori del gruppo G', oltre che dalla costante I e dalla funzione $F(x, y)$, dipendono anch'essi da σ; e noi dimostreremo ancora che *basterà impiccolire convenientemente il campo* σ, *perchè il primo valore di ciascuno dei gruppi* G *e* G' *divenga grande quanto si vuole.*

Di qui risulta ovviamente, nel caso in cui la funzione $f(x, y)$ è sempre positiva o non conserva costantemente lo stesso segno, che *per campi* σ *convenientemente piccoli esiste sempre un integrale regolare unico dell'equazione* $(4)'$, *il quale nei punti di* s *prende valori arbitrariamente dati.*

In questo modo, mi pare, vengono completati ed anche estesi ad una classe più generale di equazioni i risultati del Picard.

In ciò che segue mi limiterò naturalmente a dimostrare le proposizioni relative alle equazioni (5) e (6) ed alla natura dei gruppi G e G', proposizioni delle quali abbiamo fatto uso per enunciare i teoremi relativi all'equazione $(4)'$.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

CAPITOLO I.

1. Sarà utile premettere anzitutto alcuni risultati preliminari.

Consideriamo le equazioni:

$$\text{(nei punti di } \sigma) \ \Delta^2 v + \varphi(x, y) = 0, \quad \text{(nei punti di } s) \ v = \psi, \tag{1}$$

con $\varphi(x, y)$ funzione finita e continua insieme alle sue derivate prime in tutto il campo σ, i punti di s al più esclusi per queste derivate, e con ψ funzione finita e continua dei punti di s.

Indichiamo rispettivamente con r e con r' i raggi vettori che vanno da un punto $p \equiv (x_1, y_1)$ interno a σ e da un punto p' di s ad un altro punto qualsiasi; e poniamo:

$$v_1 = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \varphi(x, y) . \log r \, d\sigma. \tag{2}$$

Il punto p, comunque sia vicino ad s, è sempre discosto da s; per cui possiamo sempre isolarlo con un cerchietto σ', di raggio anche comunque piccolo, col centro in p, tutto interno a σ e la cui circonferenza s' sia discosta da s. In questo modo la funzione $\varphi(x, y)$ ha le derivate prime finite e continue oltre che in σ' anche sul contorno s'; per cui avremo dal *teorema del* Poisson:

$$\Delta^2 \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma'} \varphi(x, y) \log r \, d\sigma \right) = \varphi(p);$$

ed osservando che si ha:

$$\Delta^2 \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma - \sigma'} \varphi(x, y) \log r \, d\sigma \right) = 0,$$

risulterà:

$$\Delta^2 v_1 = \varphi(x, y), \tag{3}$$

tornando a chiamare con (x, y) i punti variabili dell'interno di σ.

Ora si consideri l'integrale regolare delle equazioni:

$$\text{(nei punti di } \sigma) \ \Delta^2 v_2 = 0, \quad \text{(nei punti di } s) \ v_2 = v_1 + \psi; \tag{4}$$

e si ponga:

$$v = v_2 - v_1. \tag{5}$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Dalle (3), (4) risulta:

$$\text{(nei punti di } \sigma) \ \Delta^2 v = \Delta^2 v_2 - \Delta^2 v_1 = -\varphi(x, y),$$

$$\text{(nei punti di } s) \ v = v_2 - v_1 = \psi.$$

Adunque la funzione v, determinata dalla formola (5), rappresenta l'integrale regolare delle equazioni (1), che, come si sa, è unico.

2. Richiamiamo ora il *metodo di* Neumann per la determinazione dell'integrale regolare delle equazioni (4).

Indichiamo con n la normale nei punti di s diretta verso l'interno di σ, e poniamo:

$$u_0 = v_1 + \psi,$$

$$U_1(p) = -\frac{1}{\pi}\int_s u_0 \frac{\partial \log r}{\partial n} d s, \quad u_1(p') = -\frac{1}{\pi}\int_s u_0 \frac{\partial \log r'}{\partial n} d s. \tag{6}$$

Poichè la u_0 è continua lungo s (*), si ha:

$$\lim_{pp'=0} U_1(p) = u_1(p') + u_0(p'), \tag{7}$$

e la $u_1(p')$ viene ad essere anch'essa una funzione finita e continua dei punti di s.

Similmente, posto:

$$U_2(p) = -\frac{1}{\pi}\int_s u_1 \frac{\partial \log r}{\partial n} d s, \quad u_2(p') = -\frac{1}{\pi}\int_s u_1 \frac{\partial \log r'}{\partial n} d s, \tag{6$'$}$$

risulta:

$$\lim_{pp'=0} U_2(p) = u_2(p') + u_1(p'). \tag{7$'$}$$

Così seguitando indefinitamente, otteniamo due serie di funzioni, di cui due qualsiasi U_i, u_i sono date dalle formole:

$$U_i(p) = -\frac{1}{\pi}\int_s u_{i-1} \frac{\partial \log r}{\partial n} d s, \quad u_i(p') = -\frac{1}{\pi}\int_s u_{i-1} \frac{\partial \log r'}{\partial n} d s, \tag{6$''$}$$

e soddisfano alla relazione:

$$\lim_{pp'=0} U_i(p) = u_i(p') + u_{i-1}(p'). \tag{7$''$}$$

(*) Cfr. per il caso di tre dimensioni la mia Nota: *Intorno alle derivate normali della funzione potenziale di superficie.* Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino; 11 Febbraio 1900.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Indichiamo con M_0, M_1, ...; m_0, m_1, ... rispettivamente i massimi e i minimi delle funzioni u_0, u_1, ... dei punti di s. Si ha, come è noto,

$$M_{i+1} \leqq M_i, \quad m_{i+1} \geqq m_i, \quad M_i - m_i \leqq \rho^i (M_0 - m_0), \tag{8}$$

con ρ quantità positiva minore dell'unità.

Si ha poi:

$$\lim_{i=\infty} u_i = \lim_{i=\infty} M_i = \lim_{i=\infty} m_i = C, \tag{9}$$

con C quantità costante e finita.

Ora si ponga:

$$Q = (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + \cdots$$

Dalle (8) abbiamo:

$$| u_i - u_{i+1} | \leqq M_i - m_{i+1} \leqq M_i - m_i \leqq \rho^i (M_0 - m_0); \tag{8'}$$

sicchè la serie Q è convergente in ugual grado lungo s; e quindi, posto:

$$v_2(p) = -\frac{1}{\pi}\int_s \left(Q + \frac{C}{2}\right)\frac{\partial \log r}{\partial n} d s, \quad v_2(p') = -\frac{1}{\pi}\int_s \left(Q + \frac{C}{2}\right)\frac{\partial \log r'}{\partial n} d s, \tag{10}$$

avremo, analogamente alla (7),

$$\lim_{p'p=0} v_2(p) = v_2(p') + \left\{ Q(p') + \frac{C}{2} \right\},$$

donde, integrando per serie (*) e facendo uso delle (6), (6)', (6)'' e della (9),

$$\begin{aligned}\lim_{p'p=0} v_2(p) &= \{ (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots \} + \{ (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + \cdots \} + C \\ &= (u_0 - u_2) + (u_2 - u_4) + \cdots + C = u_0 = v_1 + \psi.\end{aligned}$$

3. Se si sostituisce nella formola (5) l'espressione (2) di v_1 e l'espressione (10) di v_2, avremo per l'integrale regolare delle equazioni (1):

$$v = -\frac{1}{\pi}\int_s \left(Q + \frac{C}{2}\right)\frac{\partial \log r}{\partial n} d s - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi(x, y) \log r \, d\sigma. \tag{11}$$

Nulla è da mutare nei calcoli precedenti nell'ipotesi di $\psi = 0$ lungo tutto s. Però è da notare che allora si ha lungo il contorno s:

$$v_2 = v_1;$$

(*) Qui, quantunque la funzione $\frac{\partial \log r'}{\partial n}$ divenga infinita nel punto p' di s, il teorema dell'integrazione per serie è ancora valevole.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

per cui, essendo la v_2 funzione armonica, il suo valore assoluto sarà sempre inferiore, tutt'al più uguale, al massimo valore assoluto di v_1.

Supponiamo ancora in particolare che la funzione φ sia composta del prodotto di due funzioni φ_1, φ_2, di cui la prima φ_1 sia in tutto il campo σ sempre finita, continua e positiva. Allora, indicando con α e β due costanti qualsiasi, si avrà:

$$0 \leqq \int_\sigma \varphi_1 \left(\alpha \varphi_2 + \beta \frac{\log r}{2\pi}\right)^2 d\sigma =$$

$$= \alpha^2 \int_\sigma \varphi_1 \varphi_2^2 \, d\sigma + 2\alpha\beta \int_\sigma \frac{\log r}{2\pi} \varphi_1 \varphi_2 \, d\sigma + \beta^2 \int_\sigma \left(\frac{\log r}{2\pi}\right)^2 \varphi_1 \, d\sigma;$$

e quindi, osservando che il segno uguale non può sussistere, risulterà:

$$v_1^2 = \left(\int_\sigma \frac{\log r}{2\pi} \varphi \, d\sigma\right)^2 = \left(\int_\sigma \frac{\log r}{2\pi} \varphi_1 \varphi_2 \, d\sigma\right)^2 < \int_\sigma \left(\frac{\log r}{2\pi}\right)^2 \varphi_1 \, d\sigma \, . \int_\sigma \varphi_1 \varphi_2^2 \, d\sigma.$$

L'integrale:

$$\int_\sigma \left(\frac{\log r}{2\pi}\right)^2 \varphi_1 \, d\sigma,$$

è determinato e finito dovunque si trovi il punto p; per cui esisterà il limite superiore K dei suoi valori, che sarà certamente finito; e così si potrà scrivere:

$$v_1^2 < K . \int_\sigma \varphi_1 \varphi_2^2 \, d\sigma. \tag{12}$$

Da questa formola ne seguono le altre:

$$|v_1| < \sqrt{K . \int_\sigma \varphi_1 \varphi_2^2 d\sigma}, \quad |v_2| < \sqrt{K . \int_\sigma \varphi_1 \varphi_2^2 d\sigma}, \quad |v| < 2\sqrt{K . \int_\sigma \varphi_1 \varphi_2^2 d\sigma}. \tag{12'}$$

4. Circa alle derivate di v, finchè il punto p è nell'interno di σ e non mai su s, potendo pure essere comunque vicino ad s, si può scrivere:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial v}{\partial x_1} = -\dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_s \left(Q + \frac{C}{2}\right) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \log r}{\partial n}\right) ds - \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \varphi(x, y) \frac{\partial \log r}{\partial x_1} d\sigma, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{13}$$

donde risulta che esse sono funzioni finite e continue dei punti dell'interno di σ, i punti del contorno s cioè al più esclusi.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Dalle (8), (9), (8)' risulta, indicando con M il massimo valore assoluto di u_0,

$$|Q| \leq (M_0 - m_0)\left(\frac{1}{1-\rho^2}\right) \leq 2\,M\left(\frac{1}{1-\rho^2}\right), \quad |C| \leq M.$$

Ora si ha nel caso di $\psi = 0$:

$$|u_0| = |v_1| \leq \int_\sigma \left|\frac{\log r}{2\,\pi}\right| . |\varphi|\, d\,\sigma;$$

per cui indicando con φ_{11} il massimo valore assoluto di φ e con H il limite superiore, certamente finito, dell'integrale:

$$\int_\sigma \left|\frac{\log r}{2\,\pi}\right| d\,\sigma,$$

risulterà:

$$M \leq H\varphi_{11}, \quad |Q| < \frac{2\,H}{1-\rho^2}\varphi_{11}, \quad |C| \leq H\varphi_{11};$$

e quindi ancora:

$$\left|\,Q + \frac{C}{2}\right| \leq \left(\frac{2\,H}{1-\rho^2} + \frac{H}{2}\right)\varphi_{11} = \frac{5-\rho^2}{2\,(1-\rho^2)}\,H\varphi_{11}. \tag{14}$$

Di qui, facendo uso delle (13), otterremo, nel caso particolare di $\psi = 0$, per le derivate prime di v in un punto qualsiasi dell'interno di σ:

$$\left.\begin{aligned}
\left|\frac{\partial\,v}{\partial\,x_1}\right| &\leq \left\{\frac{H\,(5-\rho^2)}{2\,\pi\,(1-\rho^2)}\int_s \left|\frac{\partial}{\partial\,x_1}\left(\frac{\partial \log r}{\partial\,n}\right)\right| d\,s + \frac{1}{2\,\pi}\int_\sigma \left|\frac{\partial \log r}{\partial\,x_1}\right| d\,\sigma\right\}\varphi_{11}, \\
\left|\frac{\partial\,v}{\partial\,y_1}\right| &\leq \left\{\frac{H\,(5-\rho^2)}{2\,\pi\,(1-\rho^2)}\int_s \left|\frac{\partial}{\partial\,y_1}\left(\frac{\partial \log r}{\partial\,n}\right)\right| d\,s + \frac{1}{2\,\pi}\int_\sigma \left|\frac{\partial \log r}{\partial\,y_1}\right| d\,\sigma\right\}\varphi_{11}.
\end{aligned}\right\} \tag{13)'}$$

Osserviamo che la funzione v_1 è finita e continua in tutto il campo σ (i punti di s inclusi) insieme a $\dfrac{\partial\,v_1}{\partial\,n}$ e $\Delta^2\,v_1 = \varphi\,(x,\,y)$; per cui le derivate normali di

$$\int_s v_1\,\frac{\partial \log r}{\partial\,n}\,d\,s$$

si mantengono finite e continue anche nei punti di s. Allora se si ammette che la funzione ψ sia tale che le derivate normali della corrispondente funzione:

$$\int_s \psi \frac{\partial \log r}{\partial n} d s$$

si mantengono finite e continue anche nei punti di s, risulterà che le derivate normali di

$$\int_s u_0 \frac{\partial \log r}{\partial n} d s = \int_s (v_1 + \psi) \frac{\partial \log r}{\partial n} d s,$$

e quindi quelli di v_2 (*), ossia del primo termine al secondo membro della (11), coll'avvicinarsi indefinitamente del punto p ai punti di s, tenderanno verso limiti determinati e finiti, che si succederanno su s con continuità; e poichè il secondo termine al secondo membro della medesima formola (11) ha le derivate prime finite e continue da per tutto, risulterà che *la funzione v è tale che le sue derivate normali tendono verso limiti determinati e finiti col tendere del punto p ai punti di s, e questi limiti si succedono con continuità lungo s.*

Osserviamo ancora che, finchè il punto p è nell'interno di σ e non mai su s, si può scrivere:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \int_s \left(Q + \frac{C}{2}\right) \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \log r}{\partial n}\right) d s = \int_s \left(Q + \frac{C}{2}\right) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial \log r}{\partial n}\right) d s,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

e queste derivate saranno finite e continue nei punti dell'interno di σ. Inoltre, essendo per ipotesi finite e continue le derivate prime di $\varphi(x, y)$, avremo che le derivate:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \int_\sigma \varphi(x, y) \frac{\partial \log r}{\partial x_1} d \sigma, \ldots$$

esistono e sono anch'esse finite e continue nei punti dell'interno di σ. In questo modo risulterà dalle (13) che *l'integrale v delle equazioni* (1) *è una funzione finita e continua in tutto σ insieme alle sue derivate dei primi due ordini, i punti di s al più esclusi per queste derivate.*

(*) Cfr. l'App. in fine alla presente Memoria.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

CAPITOLO II.

5. Premessi questi risultati, passiamo allo studio dell'equazione (5) dell'introduzione, nella quale, rammentiamolo, la funzione f è supposta sempre positiva, oltre ad essere finita e continua insieme alle sue derivate prime, i punti di s al più esclusi per queste derivate.

La funzione h, come la funzione f, soddisfa alle medesime condizioni poste per la φ al § 1; per cui, indicata anche qui con ψ una funzione analoga a quella del Cap. prec., e considerate le equazioni:

$$\left.\begin{array}{lll}(\text{nei punti di } \sigma) & \Delta^2 u_0 + h(x, y) = 0, & \Delta^2 u_1 + f u_0 = 0, \ldots \\ (\quad \text{»} \quad s) & u_0 = \psi, & u_1 = 0, \quad \ldots,\end{array}\right\} \quad (15)$$

che sono della medesima natura delle equazioni (1) del § 1, risulterà l'esistenza degli integrali u_0, $u_1, \ldots$ di queste equazioni, con u_0, $u_1, \ldots$ funzioni finite e continue in tutto σ insieme alle loro derivate prime e seconde, i punti di s al più esclusi per queste derivate, e tali che le loro derivate normali tendono verso limiti determinati e finiti, avvicinandosi indefinitamente dai punti dell'interno di σ ai punti di s, in modo da formare ogni volta una successione continua di valori lungo s.

Similmente, indicando con h_1, $h_2, \ldots$ una serie di funzioni analoghe alla precedente funzione h e con ψ_1, $\psi_2, \ldots$ una serie di funzioni analoghe alla ψ e considerando le equazioni:

$$\left.\begin{array}{lll}(\text{nei punti di } \sigma) & \Delta u_0^{(i)} + h_i(x, y) = 0, & \Delta^2 u_1^{(i)} + f u_0^{(i)} = 0, \ldots \\ (\quad \text{»} \quad s) & u_0^{(i)} = \psi_i, & u_1^{(i)} = 0, \quad \ldots,\end{array}\right. \quad (i = 1, 2, \ldots) \left.\right\} \quad (15)'$$

risulterà l'esistenza degli integrali di queste equazioni, che saranno tutti delle funzioni finite e continue in tutto σ insieme, ecc.

Ed ancora, se α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_p$ sono delle costanti da determinarsi convenientemente in numero ed in valore, e se si pone:

$$\begin{aligned} h' &= \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \cdots + \alpha_p h_p \\ \psi' &= \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 + \cdots + \alpha_p \psi_p \\ u'_r &= \alpha_1 u_r^{(1)} + \alpha_2 u_r^{(2)} + \cdots + \alpha_p u_r^{(p)}, \end{aligned}$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

avremo dalle (15)':

$$\left.\begin{array}{lll}(\text{nei punti di } \sigma) & \Delta^2 u'_0 + h' = 0\,, & \Delta^2 u'_1 + f u'_0 = 0\,, \dots \\ (\quad \text{»} \quad s) & u'_0 = \psi'\,, & u'_1 = 0\,, \qquad \dots\,,\end{array}\right\} \quad (15)''$$

con u'_0, $u'_1, \dots$ funzioni finite e continue in tutto σ insieme, ecc.

6. Si consideri un campo σ' interno a σ, il cui contorno s' sia vicinissimo ad s senza avere alcun punto a comune con esso. Per $r > 0$ si ha dalle (15)'', applicando la nota formola di Green,

$$\int_{\sigma'} f u'_r u'_t \, d\sigma' = -\int_{\sigma'} u'_r \Delta^2 u'_{t+1} \, d\sigma' =$$

$$= \int_{\sigma'} \left(\frac{\partial u'_r}{\partial x} \frac{\partial u'_{t+1}}{\partial x} + \frac{\partial u'_r}{\partial y} \frac{\partial u'_{t+1}}{\partial y} \right) d\sigma' + \int_{s'} u'_r \frac{\partial u'_{t+1}}{\partial n} \, ds',$$

donde:

$$\int_{\sigma'} \left(\frac{\partial u'_r}{\partial x} \frac{\partial u'_{t+1}}{\partial x} + \frac{\partial u'_r}{\partial y} \frac{\partial u'_{t+1}}{\partial y} \right) d\sigma' = \int_{\sigma'} f u'_r u'_t \, d\sigma' - \int_{s'} u'_r \frac{\partial u'_{t+1}}{\partial n} \, ds';$$

e quindi, facendo avvicinare indefinitamente s' ad s e avendo riguardo al fatto che allora la $\frac{\partial u'_{t+1}}{\partial n}$ tende verso limiti determinati e finiti, che si succedono con continuità lungo s, risulterà al limite:

$$\int_{\sigma} \left(\frac{\partial u'_r}{\partial x} \frac{\partial u'_{t+1}}{\partial x} + \frac{\partial u'_r}{\partial y} \frac{\partial u'_{t+1}}{\partial y} \right) d\sigma = \int_{\sigma} f u'_r u'_t \, d\sigma - \int_{s} u'_r \frac{\partial u'_{t+1}}{\partial n} \, ds.$$

Adunque, per quanto non si sappia nulla delle derivate $\frac{\partial u'_r}{\partial x}$, $\frac{\partial u'_{t+1}}{\partial x}, \dots$ quando ci si avvicina indefinitamente ai punti di s, pure l'integrale al primo membro della formola precedente ha certamente un significato. Se poi si fa uso delle (15)'', la formola precedente ci darà ancora:

$$\int_{\sigma} f u'_r u'_t \, d\sigma = \int_{\sigma} \left(\frac{\partial u'_r}{\partial x} \frac{\partial u'_{t+1}}{\partial x} + \frac{\partial u'_r}{\partial y} \frac{\partial u'_{t+1}}{\partial y} \right) d\sigma.$$

Similmente si ha dalle (15)'':

$$\int_{\sigma} f u'_{r-1} u'_{t+1} \, d\sigma = \int_{\sigma} \left(\frac{\partial u'_r}{\partial x} \frac{\partial u'_{t+1}}{\partial x} + \frac{\partial u'_r}{\partial y} \frac{\partial u'_{t+1}}{\partial y} \right) d\sigma;$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

per cui, posto:

$$W'_{r,t} = \int_\sigma f\, u'_r\, u'_t\, d\sigma, \quad V'_{r,t} = \int_\sigma \left(\frac{\partial u'_r}{\partial x} \frac{\partial u'_t}{\partial x} + \frac{\partial u'_r}{\partial y} \frac{\partial u'_t}{\partial y} \right) d\sigma,$$

risulterà:

$$W'_{r,t} = V'_{r,t+1} = W'_{r-1,t+1}.$$

Di qui segue che le espressioni $W'_{r,t}$, $V'_{r,t}$ dipendono soltanto dalla somma $r+t$ dei loro indici; sicchè possiamo scrivere:

$$W'_{r,t} = W'_{r+t} = V'_{r,t+1} = V'_{r+t+1};$$

e siccome la funzione f è supposta sempre positiva, avremo che le W' ad indice pari, e quindi tutte le V' ad indice dispari, sono tutte positive; e siccome le V' ad indice pari, e quindi le W' ad indice dispari, sono tutte positive, così avremo che *tutte le V' e tutte le W' sono positive.*

7. Indichiamo con α e β due costanti arbitrarie. Si ha:

$$0 \leqq \int_\sigma f(\alpha\, u'_r + \beta\, u'_{r+1})^2\, d\sigma = \alpha^2 W'_{2r} + 2\,\alpha\,\beta W'_{2r+1} + \beta^2 W'_{2r+2}.$$

Nel caso del segno inferiore si deve avere in tutti i punti di σ:

$$u'_r = -\frac{\beta}{\alpha}\, u'_{r+1};$$

e quindi:

$$W'_{2r} = -\frac{\beta}{\alpha}\, W'_{2r+1}, \quad W'_{2r+1} = -\frac{\beta}{\alpha}\, W'_{2r+2},$$

donde:

$$\frac{W'_{2r+1}}{W'_{2r}} = \frac{W'_{2r+2}}{W'_{2r+1}}.$$

Nel caso del segno inferiore si ha invece:

$$\frac{W'_{2r+1}}{W'_{2r}} < \frac{W'_{2r+2}}{W'_{2r+1}}.$$

Similmente dalla formola:

$$0 \leqq \int_\sigma \left\{ \left(\alpha \frac{\partial u'_r}{\partial x} + \beta \frac{\partial u'_{r+1}}{\partial x} \right)^2 + \left(\alpha \frac{\partial u'_r}{\partial y} + \beta \frac{\partial u'_{r+1}}{\partial y} \right)^2 \right\} d\sigma =$$

$$= \alpha^2\, W'_{2r-1} + 2\,\alpha\,\beta\, W'_{2r} + \beta^2\, W'_{2r+1},$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

nel caso del segno inferiore risulta:

$$\frac{\partial u'_r}{\partial x} = -\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial u'_{r+1}}{\partial x}, \quad \frac{\partial u'_r}{\partial y} = -\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial u'_{r+1}}{\partial y},$$

e per conseguenza:

$$\frac{W'_{2r}}{W'_{2r-1}} = \frac{W'_{2r+1}}{W'_{2r}}.$$

Nel caso del segno superiore invece:

$$\frac{W'_{2r}}{W'_{2r-1}} < \frac{W'_{2r+1}}{W'_{2r}}.$$

Le precedenti formole ci dànno in ogni caso:

$$\frac{W'_1}{W'_0} \leqq \frac{W'_2}{W'_1} \leqq \cdots \leqq \frac{W'_r}{W'_{r-1}} \leqq \cdots$$

8. Ora il Poincaré dimostrò (*) che, *data una quantità positiva* λ *comunque grande, si può sempre determinare un numero intero finito* p *e* p *costanti* α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_p$ *non tutte nulle in modo che si abbia qualunque sia l'indice* r:

$$\frac{V'_{2r}}{W'_{2r}} > \lambda.$$

In questo modo si avrà:

$$\frac{W'_1}{W'_0} \leqq \frac{W'_2}{W'_1} \leqq \cdots \leqq \frac{W'_r}{W'_{r-1}} \leqq \cdots < \frac{1}{\lambda};$$

e quindi:

$$\lim_{r=\infty} \frac{W'_r}{W'_{r-1}} = c' \leqq \frac{1}{\lambda}\cdot$$

Ora si consideri la serie:

$$\sqrt{W'_0} + k\sqrt{W'_2} + k^2\sqrt{W'_4} + \cdots \tag{16}$$

ordinata per le potenze del parametro k. Il raggio ρ' del cerchio di convergenza di questa serie è dato dalla formola:

$$\rho' = \lim_{r=\infty} \frac{\sqrt{W'_{2r-2}}}{\sqrt{W'_{2r}}} = \lim_{r=\infty} \sqrt{\frac{W'_{2r-2}}{W'_{2r-1}} \cdot \frac{W'_{2r-1}}{W'_{2r}}} = \frac{1}{c'} \geqq \lambda;$$

(*) *Sur les équations de la physique mathématique* (§§ III e IV). — Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, anno 1894.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

sicchè possiamo enunciare il seguente risultato: *Data una quantità positiva* λ *comunque grande, si può determinare un numero intero* p *e* p *costanti* α_1, $\alpha_2, \dots \alpha_p$ *non tutte nulle in modo che la corrispondente serie* (16) *abbia il raggio del cerchio di convergenza maggiore od uguale a* λ.

9. Indichiamo con:

$$Q'_0, \; Q'_1, \; Q'_2, \dots$$

le funzioni analoghe alla funzione Q, introdotta al § 2, e relative agli integrali u'_0, u'_1, $u'_2, \dots$ delle equazioni (15)''; e con:

$$C'_0, \; C'_1, \; C'_2, \dots$$

le costanti analoghe alla costante C, introdotta pure al § 2, e relative ai medesimi integrali. Applicando la (11), avremo dalle (15)'':

$$u'_i = -\frac{1}{\pi}\int_s \left(Q'_i + \frac{C'_i}{2}\right)\frac{\partial \log r}{\partial n}\, d\, s - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma f\, u'_{i-1} \log r\, d\sigma. \tag{11'}$$

Applicando la terza delle (12)' si ha ancora:

$$|\, u'_{i+1} \,| < 2\sqrt{K\int_\sigma f u'^2_i\, d\sigma} = 2\sqrt{K\, W'_{2i}}. \tag{12''}$$

Se si indica con f_1 il massimo valore della funzione f in tutto il campo σ, e se si applica la (14) e la precedente (12)', avremo:

$$\left| Q'_{i+2} + \frac{C'_{i+2}}{2} \right| \leq \frac{5-\rho^2}{2(1-\rho^2)} H.f_1.2\sqrt{KW'_{2i}} = \frac{5-\rho^2}{1-\rho^2} H.f_1.\sqrt{KW'_{2i}}. \tag{14'}$$

Dalle (13)' risulta poi analogamente:

$$\left.\begin{aligned}
\left|\frac{\partial u'_{i+2}}{\partial x_1}\right| &\leq \left\{ \frac{H(5-\rho^2)}{2\pi(1-\rho^2)}\int_s \left|\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \log r}{\partial n}\right)\right| d\,s \,+ \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \left|\frac{\partial \log r}{\partial x_1}\right| d\sigma \right\} 2 f_1 \sqrt{KW'_{2i}}, \\
\left|\frac{\partial u'_{i+2}}{\partial y_1}\right| &\leq \left\{ \frac{H(5-\rho^2)}{2\pi(1-\rho^2)}\int_s \left|\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\partial \log r}{\partial n}\right)\right| d\,s \,+ \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \left|\frac{\partial \log r}{\partial y_1}\right| d\sigma \right\} 2 f_1 \sqrt{KW'_{2i}}.
\end{aligned}\right\} \tag{13''}$$

Si consideri una regione σ' di σ il cui contorno s', discosto sempre da s, sia comunque vicino ad s; allora le espressioni che compariscono tra paren-

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

tesi nelle precedenti formole $(13)''$ ammetteranno un limite superiore H_1 dei loro valori in tutto σ' (i punti di s' inclusi), che sarà certamente finito, e per conseguenza in ogni punto (x_1, y_1) di σ' (i punti di s' inclusi) si avrà:

$$\left|\frac{\partial u'_{i+2}}{\partial x_1}\right| \leqq 2\, H_1 f_1 \sqrt{KW'_{2i}}, \quad \left|\frac{\partial u'_{i+2}}{\partial y_1}\right| \leqq 2\, H_1 f_1 \sqrt{KW'_{2i}}. \qquad (13)'$$

10. Consideriamo le seguenti serie:

$$\left.\begin{aligned} & u' = u'_0 + u'_1 k + u'_2 k^2 + \cdots, \\ & Q' = \left(Q'_0 + \frac{C'_0}{2}\right) + \left(Q_1' + \frac{C'_1}{2}\right) k + \left(Q'_2 + \frac{C'_2}{2}\right) k^2 + \cdots, \\ & \frac{\partial u'_0}{\partial x_1} + \frac{\partial u'_1}{\partial x_1} k + \frac{\partial u'_2}{\partial x_1} k^2 + \cdots, \\ & \frac{\partial u'_0}{\partial y_1} + \frac{\partial u'_1}{\partial y_1} k + \frac{\partial u'_2}{\partial y_1} k^2 + \cdots \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Dalla $(12)''$ risulta che la prima di queste serie è certamente convergente in ugual grado in tutto σ (i punti di s inclusi) per $|k| < \rho'$ come la serie (16); quindi la u', determinata dalla prima delle serie precedenti, rappresenta una funzione finita e continua in tutto σ (i punti di s inclusi) per $|k| < \rho'$.

Similmente si avrà, facendo uso della $(14)'$, che la Q', determinata dalla seconda delle serie precedenti, rappresenta per $|k| < \rho'$ una funzione finita e continua lungo tutto il contorno s. E così dalle $(13)'''$ risulta che le ultime due delle serie precedenti rappresentano due funzioni finite e continue dei punti di σ' (i punti di s' inclusi) per $|k| < \rho'$; sicchè per questi stessi valori di k rappresentano rispettivamente $\frac{\partial u'}{\partial x_1}$, $\frac{\partial u'}{\partial y_1}$.

In conclusione abbiamo che *per $|k| < \rho'$, con $\rho' \geqq \lambda$, la Q' è una funzione finita e continua dei punti di s e la u' è una funzione finita e continua dei punti di σ insieme alle sue derivate prime, i punti di s al più esclusi per queste derivate.*

Dalla continuità della funzione Q' risulta intanto che l'integrale:

$$-\frac{1}{\pi}\int_s Q' \frac{\partial \log r}{\partial n}\, d\, s,$$

rappresenta una funzione finita e continua dei punti p di σ insieme alle sue derivate dei diversi ordini, i punti di s al più esclusi per queste derivate.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Si ha poi nei punti di σ:

$$\Delta^2\left(-\frac{1}{\pi}\int_s Q'\frac{\partial \log r}{\partial n}\,ds\right)=0. \tag{18}$$

L'espressione:

$$h'+k\,f\,u',$$

come le funzioni h', f, u' da cui dipende, rappresenta una funzione finita e continua insieme alle sue derivate prime in tutto il campo σ, i punti di s al più esclusi per queste derivate; per cui l'integrale:

$$-\frac{1}{2\pi}\int_\sigma (h'+k\,f\,u')\log r\,d\sigma,$$

sarà una funzione finita e continua in tutto σ insieme alle sue derivate prime e seconde, i punti di s in generale esclusi per le derivate seconde; e, applicando il *teorema del* Poisson, si avrà in un punto p qualsiasi dell'interno di σ:

$$\Delta^2\left(-\frac{1}{2\pi}\int_\sigma (h'+k\,f\,u')\log r\,d\sigma\right)=-(h'+k\,f\,u')_p. \tag{19}$$

Integrando per serie risulta dalle (17) e dalla (11)':

$$-\frac{1}{\pi}\int_s Q'\frac{\partial \log r}{\partial n}\,ds-\frac{1}{2\pi}\int_\sigma (h'+k\,f\,u')\log r\,d\sigma=$$

$$=\left\{-\frac{1}{\pi}\int_s\left(Q'_0+\frac{C'_0}{2}\right)\frac{\partial \log r}{\partial n}\,ds-\frac{1}{2\pi}\int_\sigma h'\log r\,d\sigma\right\}+$$

$$+\left\{-\frac{1}{\pi}\int_s\left(Q'_1+\frac{C'_1}{2}\right)\frac{\partial \log r}{\partial n}\,ds-\frac{1}{2\pi}\int_\sigma f\,u'_0\log r\,d\sigma\right\}k+$$

$$+\left\{-\frac{1}{\pi}\int_s\left(Q'_2+\frac{C'_2}{2}\right)\frac{\partial \log r}{\partial n}\,ds-\frac{1}{2\pi}\int_\sigma f\,u'_1\log r\,d\sigma\right\}k^2+\cdots$$

$$=u'_0+u'_1\,k+u'_2\,k^2+\cdots=u';$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

e quindi in virtù delle (18), (19) e delle seconde delle (15)'':

$$(\text{nei punti di } \sigma)\ \Delta^2 u' + k f u' + h' = 0, \quad (\text{nei punti di } s)\ u' = \psi'. \tag{20}$$

Evidentemente la funzione Q' è l'espressione relativa alle funzioni $k f u' + h'$, ψ', analoga all'espressione $Q + \frac{C}{2}$ introdotta al § 2 del Cap. I e relativa alle funzioni φ, ψ; per cui avremo anche qui, come fu osservato alla fine del § 4 (Cap. I), che le derivate normali dell'integrale:

$$\int_s Q' \frac{\partial \log r}{\partial n} d s,$$

e quindi ancora le derivate normali di u' tendono, coll'avvicinarsi indefinitamente del punto p ai punti di s, verso limiti determinati e finiti, che si succedono su s con continuità.

In conclusione abbiamo il seguente risultato: *la funzione u', determinata dalla prima della serie* (17), *è finita e continua in tutto σ insieme alle sue derivate prime e seconde, i punti di s al più esclusi per queste derivate; le sue derivate normali tendono verso limiti determinati e finiti avvicinandosi indefinitamente dai punti dell'interno di σ ai punti di s, e questi limiti formano su s una funzione continua*; *essa poi soddisfa alle equazioni* (20).

11. In particolare si faccia:

$$\left.\begin{array}{ll} h_1 = h, & h_i = f u_{i-2}, \\ \psi_1 = \psi, & \psi_i = 0, \end{array}\right\} \quad (i = 2, 3, \ldots p)$$

dove h, ψ sono le funzioni che entrano nelle equazioni (15); e dove u_0, $u_1, \ldots$ sono i corrispondenti integrali.

Avremo:

$$\begin{aligned} h' &= \alpha_1 h + \alpha_2 f u_0 + \alpha_3 f u_1 + \cdots + \alpha_p f u_{p-2}, \\ \psi &= \alpha_1 \psi, \\ u'_r &= \alpha_1 u_r + \alpha_2 u_{r+1} + \cdots + \alpha_p u_{r+p-1}; \end{aligned}$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

e le equazioni (20) diverranno:

$$\left.\begin{array}{r} (\text{nei punti di } \sigma)\ \Delta^2 u' + k f u' + \alpha_1 h + \alpha_2 f u_0 + \cdots + \alpha_p f u_{p-2}, \\ (\text{nei punti di } s)\ u' = \alpha_1 \psi. \end{array}\right\} \qquad (20)'$$

Se si indicano con Q_0, Q_1, Q_2,... le funzioni dei punti di s analoghe alla funzione Q del § 2 e relative agli integrali u_0, u_1, u_2,... delle equazioni (15); con C_0, C_1, C_2,... le costanti analoghe alla costante C dello stesso § 2 e relative agli stessi integrali, avremo dalle (15), applicando la (11),

$$u_i = -\frac{1}{\pi}\int_s \left(Q_i + \frac{C_i}{2}\right)\frac{\partial \log r}{\partial n}\, d s - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma f u_{i-1} \log r \, d\sigma. \qquad (11)''$$

Finalmente, se si pone:

$$\left.\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ 1 & -k & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -k & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -k \end{vmatrix} = \alpha_1(-k)^{p-1} + \alpha_2(-k)^{p-2} + \cdots + \alpha_p, \\
P &= \begin{vmatrix} u' & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ u_0 & -k & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ u_1 & 1 & -k & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{p-2} & 0 & 0 & \ldots & 1 & -k \end{vmatrix}, \\
\Phi &= \begin{vmatrix} Q' & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ Q_0 + \frac{C_0}{2} & -k & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ Q_1 + \frac{C_1}{2} & 1 & -k & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Q_{p-2} + \frac{C_{p-2}}{2} & 0 & 0 & \ldots & 1 & -k \end{vmatrix};
\end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

e se si osserva che u' e Q' sono derivabili rispetto a k per serie e fino ad un ordine qualsiasi, risulterà che, *per* $|k| < \rho'$, P *è una funzione finita e* *continua in tutto σ (i punti di s inclusi) insieme alle sue derivate rispetto a k fino ad un ordine qualsiasi,* e Φ una funzione finita e continua dei punti di s insieme alle sue derivate rispetto a k fino ad un ordine qualsiasi.

12. Evidentemente la P si può ancora porre sotto la seguente forma:

$$
\begin{aligned}
P = &\begin{vmatrix}
-\frac{1}{\pi}\int_s Q' \frac{\partial \log r}{\partial n} d s - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma (h' + k f u') \log r \, d\sigma & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\
-\frac{1}{\pi}\int_s \left(Q_0 + \frac{C_0}{2}\right) \frac{\partial \log r}{\partial n} d s - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma h \log r \, d\sigma & -k & 0 & \dots & 0 & 0 \\
-\frac{1}{\pi}\int_s \left(Q_1 + \frac{C_1}{2}\right) \frac{\partial \log r}{\partial n} d s - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma f u_0 \log r \, d\sigma & 1 & -k & \dots & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-\frac{1}{\pi}\int_s \left(Q_{p-2} + \frac{C_{p-2}}{2}\right) \frac{\partial \log r}{\partial n} d s - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma f u_{p-3} \log r \, d\sigma & 0 & 0 & \dots & 1 & -k
\end{vmatrix} \\
= &-\frac{1}{\pi}\int_s \Phi \frac{\partial \log r}{\partial n} d s - \\
&-\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \begin{vmatrix}
k f u' + \alpha_1 h + \alpha_2 f u_0 + \alpha_3 f u_1 + \dots + \alpha_{p-1} f u_{p-3} + \alpha_p f u_{p-2} & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\
k f u_0 + h - k f u_0 & -k & 0 & \dots & 0 & 0 \\
k f u_1 + f u_0 - k f u_1 & 1 & -k & \dots & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
k f u_{p-2} + f u_{p-3} - k f u_{p-2} & 0 & 0 & \dots & 1 & -k
\end{vmatrix} \log r \, d\sigma \\
= &-\frac{1}{\pi}\int_s \Phi \frac{\partial \log r}{\partial n} d s - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma (k f P + h D) \log r \, d\sigma .
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Di qui si ha intanto che *la funzione P ammette le derivate prime rispetto ad x e y, che saranno certamente finite e continue nei punti dell'interno di σ, i punti di s cioè al più esclusi.* Ed allora, poichè l'espressione $k f P + h D$ ha le derivate prime rispetto ad x e y finite e continue nei punti dell'interno di σ, avremo che *la funzione P ammette inoltre le derivate seconde rispetto ad x e y, che saranno finite e continue in tutto σ, i punti di s al più esclusi.*

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Dal *teorema del* Poisson e dalle seconde delle (15), (20)' risulta poi che *la P soddisfa alle equazioni:*

$$\left.\begin{array}{l} \text{(nei punti di } \sigma) \quad \Delta^2 P + k f P + h D = 0, \\ \text{(nei punti di } s) \quad P = \begin{vmatrix} \alpha_1 \psi & \alpha_2 & \alpha_3 \ldots \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ \psi & -k & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 1 & -k \ldots 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 & -k \end{vmatrix} = \psi \,.\, D. \end{array}\right\} \quad (23)$$

Dalla (22) si ha derivando sotto il segno d'integrale:

$$\frac{\partial^i P}{\partial k^i} = -\frac{1}{\pi}\int_s \frac{\partial^i \Phi}{\partial k^i}\frac{\partial \log r}{\partial n}\, d s - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma\left(k f\frac{\partial^i P}{\partial k^i} + i f \frac{\partial^{i-1} P}{\partial k^{i-1}} + h\frac{\partial^i D}{\partial k^i}\right)\log r \, d\sigma; \quad (22)'$$

e siccome la $\frac{\partial^i \Phi}{\partial k^i}$ è finita e continua su s e le funzioni $\frac{\partial^i P}{\partial k^i}$, $\frac{\partial^{i-1} P}{\partial k^{i-1}}$ sono finite e continue in tutto σ, i punti di s inclusi, così avremo che *le derivate di P, di un ordine qualsiasi rispetto a k, hanno le derivate prime rispetto ad x e y finite e continue in tutto σ, i punti di s al più esclusi.* Ed allora, poichè l'espressione:

$$k f \frac{\partial^i P}{\partial k^i} + i f \frac{\partial^{i-1} P}{\partial k^{i-1}} + h \frac{\partial^i D}{\partial k^i},$$

ha le derivate prime rispetto ad x e y finite e continue nei punti dell'interno di σ, avremo che *le derivate di P, di un ordine qualsiasi rispetto a k, hanno le derivate seconde rispetto ad x e y finite e continue nei punti dell'interno di σ.*

Dal *teorema di* Poisson e dalla seconda delle (23) risulta poi che *la $\frac{\partial^i P}{\partial k^i}$ soddisfa alle equazioni:*

$$\left.\begin{array}{l} \text{(nei punti di } \sigma) \quad \Delta^2 \frac{\partial^i P}{\partial k^i} + k f \frac{\partial^i P}{\partial k^i} + i f \frac{\partial^{i-1} P}{\partial k^{i-1}} + h \frac{\partial^i D}{\partial k^i} = 0, \\ \text{(nei punti di } s) \quad \frac{\partial^i P}{\partial k^i} = \psi \cdot \frac{\partial^i D}{\partial k^i}. \end{array}\right\} \quad (23)'$$

Finalmente è facile vedere che l'espressione Φ corrisponde alle funzioni $k f P + h D$, ψD, così come l'espressione $Q + \frac{C}{2}$, introdotta al § 2 del

Cap. I, corrisponde alle funzioni φ, ψ. Conseguentemente l'espressione $\frac{\partial^i \Phi}{\partial k^i}$ sarà l'espressione corrispondente alle funzioni $k f \frac{\partial^i P}{\partial k^i} + i f \frac{\partial^{i-1} P}{\partial k^{i-1}} + h \frac{\partial^i D}{\partial k^i}$, $\psi \frac{\partial^i D}{\partial k^i}$; e così avremo al solito, come alla fine del § 4 (Cap. I), che le derivate normali degli integrali:

$$\int_s \Phi \frac{\partial \log r}{\partial n} d s, \quad \int_s \frac{\partial^i \Phi}{\partial k^i} \frac{\partial \log r}{\partial n} d s,$$

e quindi ancora *le derivate normali di P e delle sue derivate rispetto a k sono finite e continue anche nei punti di s.* Bene inteso che pei valori di queste derivate normali nei punti di s vanno presi i limiti verso cui tendono queste derivate stesse, avvicinandosi indefinitamente dai punti dell'interno di σ ai punti di s.

13. Il polinomio D è di grado $p-1$, per cui l'equazione:

$$D = 0, \tag{24}$$

ammetterà $p-1$ radici.

Indicando con k' una radice di questa equazione multipla dell'ordine $t+1$ $(t \geqq 0)$, avremo per $k = k'$:

$$0 = D = \frac{\partial D}{\partial k} = \cdots = \frac{\partial^t D}{\partial k^t};$$

e, supposto $|k'| < \rho'$, sostituendo nelle (23), (23)', risulterà:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(nei punti di } \sigma) & \text{(nei punti di } s) \\ \Delta^2 P + k' f P = 0, & P = 0, \\ \Delta^2 \frac{\partial P}{\partial k} + k' f \frac{\partial P}{\partial k} + f P = 0, & \frac{\partial P}{\partial k} = 0, \\ \Delta^2 \frac{\partial^2 P}{\partial k^2} + k' f \frac{\partial^2 P}{\partial k^2} + 2 f \frac{\partial P}{\partial k} = 0, & \frac{\partial^2 P}{\partial k^2} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \Delta^2 \frac{\partial^t P}{\partial k^t} + k' f \frac{\partial^t P}{\partial k^t} + t f \frac{\partial^{t-1} P}{\partial k^{t-1}} = 0, & \frac{\partial^t P}{\partial k^t} = 0. \end{array}\right\} \tag{25}$$

Ora alle funzioni P, $\frac{\partial P}{\partial k}$, $\frac{\partial^2 P}{\partial k^2}$, $\cdots$ è applicabile il *teorema di* GREEN (*), che

(*) Infatti le loro derivate normali sono finite e continue anche nei punti di s.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

ci dà:

$$0=\int_\sigma\left(\frac{\partial^i P}{\partial k^i}\cdot\Delta^2\frac{\partial^{i-1} P}{\partial k^{i-1}}-\frac{\partial^{i-1} P}{\partial k^{i-1}}\cdot\Delta^2\frac{\partial^i P}{\partial k^i}\right)d\sigma+$$

$$+\int_s\left(\frac{\partial^i P}{\partial k^i}\cdot\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^{i-1} P}{\partial k^{i-1}}-\frac{\partial^{i-1} P}{\partial k^{i-1}}\cdot\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^i P}{\partial k^i}\right)d\sigma.$$

Di qui, facendo successivamente uso delle (25), si otterrà:

$$\int_\sigma f P^2 d\sigma=0,\quad \int_\sigma f\left\{P\frac{\partial^2 P}{\partial k^2}-2\left(\frac{\partial P}{\partial k}\right)^2\right\}d\sigma=0,\ldots,$$

$$\int_\sigma f\left\{(t-1)\frac{\partial^{t-2} P}{\partial k^{t-2}}\frac{\partial^t P}{\partial k^t}-t\left(\frac{\partial^{t-1} P}{\partial k^{t-1}}\right)^2\right\}d\sigma=0;$$

e quindi, essendo $f>0$ in tutto σ, risulterà:

$$P=\frac{\partial P}{\partial k}=\cdots=\frac{\partial^{t-1} P}{\partial k^{t-1}}=0,$$

in ogni punto di σ.

In conclusione abbiamo che se k' è radice multipla dell'ordine $t+1$ dell'equazione (24) e k' è di modulo inferiore a ρ', si può scrivere:

$$D=(k'-k)^{t+1}.D_1,\quad P=(k'-k)^t.P_1, \tag{26}$$

con D_1 polinomio di grado $p-t-2$ in k, che non si annulla per $k=k'$; e con P_1 funzione finita e continua insieme alle derivate prime e seconde rispetto ad x e y in tutto σ, i punti di s al più esclusi per queste derivate, e tale che le sue derivate normali sono finite e continue anche nei punti di s.

14. Se $\frac{\partial^t P}{\partial k^t}$ per $k=k'$ non è identicamente nulla in tutto il campo σ, si avrà dalle (25) per $k=k'$:

$$\left.\begin{aligned}&(\text{nei punti di }\sigma)\quad \Delta^2\frac{\partial^t P}{\partial k^t}+k'f\frac{\partial^t P}{\partial k^t}=0,\\ &(\text{nei punti di }s)\quad \frac{\partial^t P}{\partial k^t}=0;\end{aligned}\right\} \tag{25$'$}$$

e dalla seconda delle (26):

$$\left(\frac{\partial^t P}{\partial k^t}\right)_{k=k'}=\pi(t).(P_1)_{k=k'}. \tag{27}$$

Dimostriamo ora che *la radice k' dell'equazione* (24), *nel caso in cui $\frac{\partial^t P}{\partial k^t}$ non è identicamente nulla in tutto il campo σ, è reale e positiva.*

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Supposto infatti dapprima k' reale e negativa, risulta dalle (25)' integrando per parti:

$$0 = \int_\sigma \frac{\partial^t P}{\partial k^t}\left(\Delta^2 \frac{\partial^t P}{\partial k^t} + k' f \frac{\partial^t P}{\partial k^t}\right) d\sigma = \int_\sigma k' f \left(\frac{\partial^t P}{\partial k^t}\right)^2 d\sigma -$$

$$-\int_\sigma \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^t P}{\partial k^t}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^t P}{\partial k^t}\right)^2 \right\} d\sigma \text{ (*)};$$

e questa ci dà ovviamente in tutto σ:

$$\left(\frac{\partial^t P}{\partial k^t}\right)_{k=k'} = 0,$$

contrariamente all'ipotesi fatta.

Supposto k' complessa, e posto:

$$k' = k'_1 + i k'_2, \quad \left(\frac{\partial^t P}{\partial k^t}\right)_{k=k'} = v_1 + i v_2,$$

con k'_2 diversa dallo zero, si ha dalle (25)':

$$\begin{array}{ll} \text{(nei punti di } \sigma) \ \Delta^2 v_1 + k'_1 f v_1 - k'_2 f v_2 = 0, & \text{(nei punti di } s) \ v_1 = 0, \\ (\quad \text{»} \quad) \ \Delta^2 v_2 + k'_1 f v_2 + k'_2 f v_1 = 0, & (\quad \text{»} \quad) \ v_2 = 0; \end{array}$$

e quindi integrando per parti:

$$0 = \int_\sigma \left\{ (v_1 . \Delta^2 v_2 - v_2 \Delta^2 v_1) + k'_2 f (v_1^2 + v_2^2) \right\} d\sigma = k'_2 \int_\sigma f (v_1^2 + v_2^2) d\sigma;$$

donde risulta in tutto σ:

$$v_1 = v_2 = 0,$$

contrariamente all'ipotesi fatta.

Questo risultato si può ancora interpretare dicendo che *per k' costante negativa o complessa non possono esistere integrali regolari delle equazioni:*

$$\text{(nei punti di } \sigma) \ \Delta^2 p' + k' f p' = 0, \quad \text{(nei punti di } s) \ p' = 0. \qquad (25)''$$

(*) Quantunque non si sappia nulla delle derivate di $\frac{\partial^t P}{\partial k^t}$ rispetto ad x e y nei punti di s, il fatto che le derivate normali di $\frac{\partial^t P}{\partial k^t}$ si mantengono finite e continue anche andando nei punti di s, basta per essere sicuri della validità di questa formola.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

15. Ciò premesso, si ponga:

$$v = \frac{P}{D}. \tag{21)'}$$

Da tutto ciò che precede risulta che *la funzione v per* $|k| < \rho'$ *è finita e continua in tutto* σ *insieme alle sue derivate prime e seconde rispetto ad x e y, i punti di s al più esclusi per queste derivate, e le sue derivate normali sono finite e continue anche avvicinandosi indefinitamente ai punti di s. Essa può solamente avere dei poli semplici per quei valori reali e positivi di k, in numero finito, che sono radici dell'equazione* (24).

Dalle (23) risulta poi che *la funzione v, per i valori di k per cui non diviene infinita, soddisfa alle equazioni:*

$$\text{(nei punti di } \sigma) \ \Delta^2 v + k f v + h = 0, \quad \text{(nei punti di } s) \ v = \psi. \tag{28}$$

Per i valori k' poli di v si há dalle (26), (27):

$$\lim_{k=k'} (k' - k)\, v = \left(\frac{P_1}{D_1}\right)_{k=k'} = \frac{1}{\pi(t)\,.\,(D_1)_{k=k'}} \left(\frac{\partial^t P}{\partial k^t}\right)_{k=k'} = p'\,;$$

e dalle (25)':

$$\text{(nei punti di } \sigma) \ \Delta^2 p' + k' f p' = 0, \quad \text{(nei punti di } s) \ p' = 0. \tag{25)''}$$

Avremo dunque: *il residuo p' della funzione v in un polo è rappresentato da una funzione finita e continua*, ecc., *come la v stessa, la quale soddisfa alle equazioni* (25)''.

Finalmente se si osserva che la quantità ρ' è superiore o almeno uguale alla quantità λ, che λ si può prendere comunque grande, che il corrispondente p è sempre finito e che per conseguenza i poli della corrispondente funzione v non possono essere che in numero finito, risulterà che *esiste sempre una funzione v dei punti di* σ *(i punti di s inclusi) e della variabile complessa k la quale, considerata in tutta l'estensione del piano k, è finita e continua insieme alle sue derivate prime e seconde rispetto ad x e y, i punti di s al più esclusi per queste derivate, ed ha finite e continue, anche avvicinandosi indefinitamente ai punti di s, le derivate normali. Essa può avere solamente una serie finita o infinita di poli semplici, corrispondenti ad una serie finita o infinita di valori reali e positivi di k, che, nel caso in cui è infinita, ha per valore limite il valore* $k = \infty$. *Questa funzione v, per i valori di k per i quali è finita, soddisfa alle equazioni* (28); *per i valori di k per i quali diviene infinita, i corrispondenti residui sono integrali regolari, della stessa natura della funzione v, delle equazioni* (25)''.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

16. Riprendiamo le equazioni (15), i cui integrali si possono esprimere mediante la formola (11)'', e introduciamo le espressioni:

$$W_{r,t} = \int_\sigma f\, u_r\, u_t\, d\sigma, \quad V_{r,t} = \int_\sigma \left(\frac{\partial u_r}{\partial x}\frac{\partial u_t}{\partial x} + \frac{\partial u_r}{\partial y}\frac{\partial u_t}{\partial y}\right) d\sigma.$$

Ragionando come ai §§ 6, 7, 9, risulta:

$$W_{r,t} = W_{r+t} = V_{r,t+1} = V_{r+t+1},$$

$$\frac{W_1}{W_0} \leqq \frac{W_2}{W_1} \leqq \cdots \leqq \frac{W_r}{W_{r-1}} \leqq \cdots, \tag{29}$$

$$|u_{i+1}| < 2\sqrt{KW_{2i}}, \quad \left| Q_{i+2} + \frac{C_{i+2}}{2} \right| \leqq \frac{5-\rho^2}{1-\rho^2} H f_1 \sqrt{KW_{2i}}, \tag{30}$$

$$\left|\frac{\partial u_{i+2}}{\partial x_1}\right| \leqq 2\, H_1 f_1 \sqrt{KW_{2i}}, \quad \left|\frac{\partial u_{i+2}}{\partial y_1}\right| \leqq 2\, H_1 f_1 \sqrt{KW_{2i}}. \tag{31}$$

Ora la prima delle (30) ci dà:

$$u_r^2 < 4\, K\, W_{2r-2};$$

e quindi:

$$W_{2r} < 4\, K\, W_{2r-2} \int_\sigma f\, d\sigma.$$

D'altra parte si ha dalle (29):

$$W_{2r-1}^2 \leqq W_{2r-2} \,.\, W_{2r};$$

per cui, posto:

$$4\, K \int_\sigma f\, d\sigma = K_1^2,$$

con K_1 quantità certamente finita, risulterà:

$$\frac{W_{2r-1}}{W_{2r-2}} < K_1,$$

qualunque sia l'indice r. Onde avremo:

$$\lim_{r=\infty} \frac{W_r}{W_{r-1}} = c_1, \tag{29'}$$

con c_1 quantità finita, positiva e discosta dallo zero.

17. Si consideri la serie:

$$u = u_0 + u_1 k + u_2 k^2 + \cdots \tag{32}$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Ragionando come al § 10 e servendosi delle disuguaglianze (29), (30), (31) e della (29)′, risulta che *la funzione u, determinata dalla serie* (32) *per* $|k| < \frac{1}{c_1}$, *è finita e continua in tutto σ insieme alle sue derivate prime e seconde rispetto ad x e y, i punti di s al più esclusi per queste derivate; le sue derivate normali tendono verso limiti determinati e finiti, quando dai punti dell'interno di σ si va ai punti di s, e questi limiti si succedono con continuità lungo s.*

Ora dimostreremo che *la serie* (32) *per* $k = \frac{1}{c'_1} > \frac{1}{c_1}$, *in un punto almeno del campo σ, è divergente.*

Per questo incominciamo dall'osservare che la serie:

$$W_0 + W_1 k + W_2 k^2 + \cdots$$

per $k = \frac{1}{c'_1}$ è divergente. Infatti si ha:

$$\lim_{r=\infty} \frac{W_r}{W_{r-1}} \cdot \frac{1}{c'_1} = \frac{c_1}{c'_1} > 1.$$

Allora, data una quantità positiva A comunque grande e indicato con B il prodotto dell'area della superficie σ per il massimo valore assoluto della funzione $f u_0$, si potrà determinare un numero intero i tale che si abbia per $k = \frac{1}{c'_1}$:

$$W_0 + W_1 k + W_2 k^2 + \cdots + W_i k^i > A \,.\, B,$$

ossia:

$$\int_\sigma f u_0^2 \, d\sigma + k \int_\sigma f u_0 \, u_1 \, d\sigma + \cdots + k^i \int_\sigma f u_0 \, u_i \, d\sigma =$$

$$= \int_\sigma f u_0 (u_0 + u_1 k + \cdots + u_i k^i) \, d\sigma > A \,.\, B.$$

In questo modo si dovrà avere in un punto almeno di σ:

$$|u_0 + u_1 k + \cdots + u_i k^i| > A,$$

con A grande ad arbitrio. Questo risultato ci dice appunto che la serie (32) è divergente in un punto almeno del campo σ per $k = \frac{1}{c'_1}$. Adunque *la serie u per $|k| > \frac{1}{c_1}$ non può rappresentare sempre una funzione finita e continua in tutto il campo σ.*

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

18. Ora supponiamo che la quantità arbitraria λ, introdotta al § 8, sia superiore ad $\frac{1}{c_1}\cdot$ Determinato il corrispondente numero intero p, si considerino le p serie:

$$\begin{aligned}
u = u^{(1)} &= u_0 + u_1 k + u_2 k^2 + \cdots \\
u^{(2)} &= u_1 + u_2 k + u_3 k^2 + \cdots \\
u^{(3)} &= u_2 + u_3 k + u_4 k^2 + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
u^{(p)} &= u_{p-1} + u_p k + u_{p+1} k^2 + \cdots
\end{aligned}$$

Queste serie sono convergenti in ugual grado in tutto σ (i punti di s inclusi) per $|k| < \frac{1}{c_1}$, appunto come la serie (32); per cui si può scrivere, in conformità del risultato ottenuto in principio del § 11,

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 u^{(1)} + \alpha_2 u^{(2)} + \cdots + \alpha_p u^{(p)} = \\
&= \alpha_1 (u_0 + u_1 k + u_2 k^2 + \cdots) + \alpha_2 (u_1 + u_2 k + u_3 k^2 + \cdots) + \cdots + \\
&\qquad + \alpha_p (u_{p-1} + u_p k + u_{p+1} k^2 + \cdots) = \\
&= (\alpha_1 u_0 + \alpha_2 u_1 + \cdots + \alpha_p u_{p-1}) + (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_p u_p) k + \\
&\qquad + (\alpha_1 u_2 + \alpha_2 u_3 + \cdots + \alpha_p u_{p+1}) k^2 + \cdots = \\
&= u'_0 + u'_1 k + u'_2 k^2 + \cdots = u'.
\end{aligned}$$

Si ha poi:

$$u_0 = u^{(1)} - k u^{(2)}, \quad u_1 = u^{(2)} - k u^{(3)}, \ldots \quad u_{p-2} = u^{(p-1)} - k u^{(p)}.$$

In conclusione si può scrivere per $|k| < \frac{1}{c_1}$:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 u^{(1)} + \alpha_2 u^{(2)} + \alpha_3 u^{(3)} + \cdots + \alpha_{p-1} u^{(p-1)} + \alpha_p u^{(p)} &= u', \\
u^{(1)} - k u^{(2)} &= u_0, \\
u^{(2)} - k u^{(3)} &= u_1, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
u^{(p-1)} - k u^{(p)} &= u_{p-2};
\end{aligned}$$

e di qui, servendosi delle prime due delle (21), avremo:

$$u = u^{(1)} = \frac{P}{D}\cdot \tag{21$''$}$$

Adunque per $|k| < \frac{1}{c_1}$ la funzione v, determinata dalla formola $(21)'$, coincide con la u determinata dalla serie (32).

Risulta intanto di qui che la funzione v per $|k| < \frac{1}{c_1}$ non ha poli; per cui *il valore k_1 di k, corrispondente al primo polo di v, se pure c'è, deve essere maggiore od uguale ad* $\frac{1}{c_1}$.

19. Se l'equazione (24) ha delle radici di modulo inferiore a k_1 (nel caso che esiste un primo polo k_1 inferiore a λ della funzione v) o a λ (nel caso contrario), l'espressione $(21)'$ di v si deve potere semplificare, ed in ogni modo la v si deve poter mettere sotto la forma:

$$v = \frac{P_0}{D_0},$$

dove D_0 è un polinomio in k, che non si annulla per valori di k di modulo inferiore a k_1 o a λ, secondo che esiste o no il polo k_1; e dove P_0 è, come P, una funzione finita e continua in tutto σ (i punti di s inclusi) insieme alle sue derivate rispetto a k per $|k| < \lambda$. Allora la v si può sviluppare in *serie di* MACLAURIN per $|k| < k_1$ o per $|k| < \lambda$, secondo che esiste o no il polo k_1; di modo che potremo scrivere:

$$v = v_0 + v_1 k + v_2 k^2 + \cdots;$$

e poichè per $|k| < \frac{1}{c_1}$ la v coincide con la u, così dovremo avere:

$$v_0 = u_0, \quad v_1 = u_1, \quad v_2 = u_2, \ldots;$$

e per conseguenza lo sviluppo precedente di v, che è valevole, ricordiamolo pure, per $|k| < k_1$ o per $|k| < \lambda$, secondo che esiste o no il polo k_1, si può scrivere ancora nel seguente modo:

$$v = u_0 + u_1 k + u_2 k^2 + \cdots \tag{32'}$$

Ora questa serie non è che la serie (32), la quale, come si è visto, non può rappresentare una funzione finita e continua in tutto σ per $|k| > \frac{1}{c_1}$; di modo che, essendo $\lambda > \frac{1}{c_1}$, dovremo necessariamente avere:

$$k_1 = \frac{1}{c_1}.$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Adunque *la funzione v deve avere un primo polo per $k = k_1 = \frac{1}{c_1}$.*

20. Chiamiamo p_1 il residuo della funzione v per $k = k_1$. Si può scrivere:

$$v = \frac{p_1}{k_1 - k} + l; \tag{32''}$$

e, se v ha un secondo polo k_2 inferiore a λ, la funzione l sarà regolare e sviluppabile in *serie di* Maclaurin per $|k| < k_2$, nel caso contrario la funzione l sarà regolare e sviluppabile in *serie di* Maclaurin per $|k| < \lambda$; per cui avremo per $|k| < k_2$ o per $|k| < \lambda$, secondo che esiste o no il polo k_2,

$$l = l_0 + l_1 k + l_2 k^2 + \cdots \tag{33}$$

Questa ci dà insieme alle (32)′, (32)″:

$$u_i = l_i + \frac{p_1}{k_1^{i+1}}; \tag{34}$$

e poichè si ha per la p_1 (§ 15):

$$\text{(nei punti di } \sigma) \ \Delta^2 p_1 + k_1 f p_1 = 0, \quad \text{(nei punti di } s) \ p_1 = 0, \tag{25'}$$

tenuto conto delle equazioni (15), di cui le u_i sono integrali, avremo per i coefficienti dello sviluppo (33) le seguenti equazioni:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(nei punti di } \sigma) \ \Delta^2 l_0 + h - f p_1 = 0, & \Delta^2 l_i + f l_{i-1} = 0 \\ \text{(nei punti di } s) \ l_0 = \psi_1, & l_i = 0. \end{array}\right\} \tag{15'''}$$

Queste equazioni sono perfettamente analoghe alle (15); sicchè partendo da esse e ripetendo i ragionamenti dei §§ 16, 17 si dimostra che *la serie* (33) *per* $|k| < \frac{1}{c_2}$, dove c_2 è una quantità finita, positiva e discosta dallo zero, *rappresenta una funzione finita e continua in tutto σ (i punti di s compresi); mentre non può rappresentare una funzione finita e continua in tutto il campo σ per tutti i valori di k tali che $|k| > \frac{1}{c_2}$.*

Ora noi possiamo supporre di avere presa la quantità arbitraria λ superiore alla quantità determinata e finita $\frac{1}{c_2}$; e allora, poichè lo sviluppo (33) è valevole solo per $|k| < \frac{1}{c_2}$ e non sempre per $|k| > \frac{1}{c_2}$, sarà:

$$k_2 = \frac{1}{c_2}.$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Quindi *la funzione v deve avere un secondo polo per $k = k_2 = \frac{1}{c_2}$*.

Chiamando p_2 il residuo della funzione v nel polo $k = k_2$, si avrà:

$$v = \frac{p_1}{k_1 - k} + \frac{p_2}{k_2 - k} + m;$$

e se v ha un terzo polo k_3 inferiore a λ la funzione m sarà regolare solo per $|k| < k_3$, nel caso contrario sarà certamente regolare per $|k| < \lambda$.

Arrivati a questo punto è facile capire che, seguitando a ragionare sempre nella stessa guisa, si dimostra che *la funzione v ha effettivamente una serie finita o infinita di poli semplici corrispondenti ad un gruppo C di valori reali, positivi e crescenti:*

$$k_1, k_2, k_3, \ldots \tag{35}$$

della variabile k. È evidente poi che *questo gruppo C, nel caso che è infinito, ha per valore limite il valore $k = \infty$. I residui:*

$$p_1, p_2, p_3, \ldots$$

della funzione v nei poli k_1, k_2, k_3,... sono integrali regolari delle equazioni:

$$\text{(nei punti di } \sigma) \ \Delta^2 p_i + k_i f p_i = 0, \quad \text{(nei punti di } s) \ p_i = 0. \tag{25)$^{\text{IV}}$}$$

21. Può darsi che nei punti di s si abbia:

$$\psi = 0, \quad h = 0.$$

In questo caso può accadere che la funzione data h sia di tal natura che, dopo di avere ripetuta r volte l'operazione del paragrafo precedente, risulti identicamente nel campo σ:

$$h - f.(p_1 + p_2 + \cdots + p_r) = 0;$$

allora si avrà:

$$v = \frac{p_1}{k_1 - k} + \frac{p_2}{k_2 - k} + \cdots + \frac{p_r}{k_r - k},$$

e il gruppo C dei valori (35) sarà finito. In qualunque altro caso l'operazione del paragrafo precedente si può seguitare indefinitamente e il gruppo C sarà infinito.

Un valore k', per il quale esiste un integrale regolare p' delle equazioni $(25)''$, lo diremo *valore eccezionale*, la corrispondente funzione p' la diremo *soluzione eccezionale.*

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

22. I valori eccezionali del gruppo C e le corrispondenti soluzioni eccezionali si possono definire ancora nel seguente modo.

Incominciamo dall'osservare che per $k < k_1$ si ha:

$$\lim_{i=\infty} (u_i k^i) = 0,$$

mentre, come fu dimostrato al § 17, per $k > k_1$ si ha in un punto almeno del campo σ:

$$\lim_{i=\infty} (u_i k^i) = \infty.$$

Similmente si ha per $k < k_2$:

$$\lim_{i=\infty} (l_i k^i) = 0,$$

e in particolare:

$$\lim_{i=\infty} (l_i k_1^i) = 0.$$

In questo modo si avrà dalla (34):

$$\lim_{i=\infty} (u_i k_1^i) = \frac{p_1}{k_1}. \tag{36}$$

Adunque il primo valore eccezionale k_1 del gruppo C può definirsi come quel valore reale e positivo di k, per cui il limite di $u_i k^i$ per $i = \infty$ è determinato, finito e generalmente diverso da zero in σ. La corrispondente soluzione eccezionale viene determinata dalla (36).

Similmente il secondo valore eccezionale k_2 del gruppo C può definirsi come quel valore reale e positivo di k, per cui il limite di $l_i k^i$ per $i = \infty$ è determinato, finito e generalmente diverso da zero in σ. La corrispondente soluzione eccezionale viene determinata dalla formola:

$$\lim_{i=\infty} (l_i k_2^i) = \frac{p_2}{k_2}. \tag{36$'$}$$

Lo stesso si può ripetere per gli altri valori eccezionali di C e per le corrispondenti soluzioni eccezionali.

23. Osserviamo che i valori eccezionali (35) non sono in generale i soli valori eccezionali che possono esistere relativamente alla funzione f e al campo dato σ. Dal fatto che, per ψ diverso dallo zero o per h diverso dallo zero nei punti di s, i valori eccezionali del gruppo C sono infiniti, risulta intanto che *esistono certamente infiniti valori eccezionali.* È evidente che *il*

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

gruppo G di questi infiniti valori eccezionali è indipendente dalle funzioni h, ψ; mentre che *il gruppo C*, come si è visto al § 21, *dipende dalle funzioni h, ψ.*

Ora vogliamo dimostrare che *il gruppo G ha il solo valore limite $k=\infty$.* Per questo basterà provare che in un intervallo qualsiasi dell'asse reale e positivo della variabile k, di cui un estremo sia sempre l'origine, non vi può essere che un numero finito di punti corrispondenti a valori eccezionali: e più precisamente noi dimostreremo che data una quantità λ positiva e comunque grande, e trovato il corrispondente numero intero p (§ 8), fra o e λ non ci possono esser più di $p-1$ valori eccezionali.

Supposto infatti che fra o e λ ci siano più di $p-1$ valori eccezionali, consideriamone p disposti per ordine crescente:

$$k_1,\ k_2, \dots\ k_p,$$

e indichiamo con:

$$p_1,\ p_2, \dots\ p_p,$$

le corrispondenti soluzioni eccezionali.

Facciamo nelle equazioni (15):

$$\left.\begin{array}{l} h=f.(p_1+p_2+\cdots+p_p), \\ \psi=0. \end{array}\right\} \tag{37}$$

Si avrà:

$$u_i=\frac{p_1}{k_1^{i+1}}+\frac{p_2}{k_2^{i+1}}+\cdots+\frac{p_p}{k_p^{i+1}}.$$

Ora si ha:

$$\lim_{i=\infty}(u_i k_1^i)=\lim_{i=\infty}\left\{\left(\frac{p_1}{k_1^{i+1}}+\frac{p_2}{k_2^{i+1}}+\cdots+\frac{p_p}{k_p^{i+1}}\right)k_1^i\right\}=\frac{p_1}{k_1};$$

quindi, in conformità del risultato del § 22, il valore k_1 di k sarà il primo valore eccezionale del gruppo C corrispondente alle funzioni (37) e p_1 sarà la corrispondente soluzione eccezionale. In questo modo le funzioni $h-fp_1$ e ψ, che compariscono nelle equazioni (15)''', diverranno rispettivamente $f(p_2+p_3+\cdots+p_p)$ e 0; di guisa che avremo:

$$l_i=\frac{p_2}{k_2^{i+1}}+\frac{p_3}{k_3^{i+1}}+\cdots+\frac{p_p}{k_p^{i+1}},$$

$$\lim_{i=\infty}(l_i k_2^i)=\frac{p_2}{k_2};$$

e cioè il valore k_2 di k sarà il secondo valore eccezionale del gruppo C cor-

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

rispondente alle funzioni (37) e p_2 sarà la corrispondente soluzione eccezionale.

Seguitando nella medesima maniera, risulta che il gruppo C, corrispondente alle funzioni (37), ha fra 0 e λ i p valori eccezionali $k_1, k_2, \ldots k_p$.

Ora i valori $k_1, k_2, \ldots k_p$ sono anche i poli della funzione v corrispondente alle funzioni (37); per cui abbiamo che la funzione v corrispondente alle funzioni (37), della quale si è dimostrata l'esistenza al § 15, ammette p poli fra 0 e λ.

Intanto la funzione v può anche esprimersi mediante la formola (21)', nella quale P è funzione regolare in tutto σ per $|k| < \lambda$ e D è un polinomio di grado $p-1$; di modo che v non può avere più di $p-1$ poli fra 0 e λ, contrariamente al risultato testè ottenuto. Questa discordanza di risultati dipende appunto dall'avere ammessa l'esistenza di più di $p-1$ valori eccezionali del gruppo G fra 0 e λ.

24. Dimostriamo ora, a compimento dei risultati precedenti, che *l'integrale regolare v delle equazioni* (28) *è unico per qualunque valore di k, che non fa parte del gruppo G.*

Infatti supponiamo che pel valore k' di k, che non fa parte del gruppo G, ci siano due integrali regolari e distinti w_1, w_2 delle equazioni (28).

Posto:

$$w = w_1 - w_2,$$

risulterà da queste equazioni:

$$(\text{nei punti di } \sigma)\ \Delta^2 w + k' f w = 0, \quad (\text{nei punti di } s)\ w = 0,$$

con w funzione regolare; e poichè k' non fa parte del gruppo G, ossia non è valore eccezionale, deve essere identicamente:

$$w = 0$$

in tutto σ, contrariamente all'ipotesi fatta.

25. Dai calcoli del § 16 risulta:

$$c_1 \leqq K_1,$$

dove K_1 dipende esclusivamente dalla funzione f e dalla natura del campo σ; ed è chiaro che si può rendere K_1 minore di qualunque grandezza assegnabile, impiccolendo convenientemente questo campo.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Ora si ha per il primo polo k_1 della funzione v corrispondente alle funzioni h e ψ:

$$k_1 = \frac{1}{c_1} \geqq \frac{1}{K_1};$$

di modo che, *impiccolendo convenientemente il campo σ, si può rendere il primo polo della funzione v, corrispondente alle date funzioni h e ψ, maggiore di qualunque quantità arbitraria.*

Ciò posto, indichiamo con d una quantità positiva *arbitrariamente grande* e prendiamo il campo σ talmente piccolo che risulti:

$$K_1 \leqq \frac{1}{d}.$$

A questo campo σ e alla data funzione f corrisponderà un certo gruppo G. Indichiamo con k' il primo valore di questo gruppo e con p' la corrispondente soluzione eccezionale. Posto nelle equazioni (15):

$$h = p', \quad \psi = 0,$$

risulterà:

$$v = \frac{p'}{k' - k};$$

e quindi:

$$k' = k_1 = \frac{1}{c_1} \geqq \frac{1}{K_1} \geqq d.$$

Di qui risulta, conformemente al teorema enunciato nell'introduzione, che *basterà impiccolire convenientemente il campo σ, perchè il primo valore del gruppo G divenga grande quanto si vuole.*

CAPITOLO III.

26. Prima di passare allo studio delle equazioni (6) dell'introduzione, dovremo premettere alcuni risultati preliminari, analoghi a quelli del Cap. I.

Consideriamo le equazioni:

$$\text{(nei punti di } \sigma) \ \Delta^2 v - I v + \varphi(x, y) = 0, \quad \text{(nei punti di } s) \ v = \psi, \qquad (1)_1$$

con $\varphi(x, y)$ funzione finita e continua insieme alle sue derivate prime in

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

tutto il campo σ, i punti di s al più esclusi per queste derivate; con ψ funzione finita e continua dei punti di s, analoga a quella del Cap. I, e con I costante reale e positiva.

Si consideri ancora l'espressione:

$$J(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{I(r^2+z^2)}}}{4\pi\sqrt{r^2+z^2}}\, dz.$$

Essa si comporta nel campo σ come la funzione $\log r$ e nei punti discosti dal punto $p \equiv (x_1, y_1)$, dal quale partono i vettori r, soddisfa all'equazione:

$$\Delta^2 J - I J = 0. \tag{38}$$

Ciò premesso, si ponga:

$$v_1 = \int_\sigma \varphi(x, y) \,.\, J\, d\sigma. \qquad (2)_1$$

Ponendo mente al fatto che le derivate prime di φ sono finite e continue nei punti dell'interno di σ, e avuto riguardo alla (38), risulta, ragionando come nella dimostrazione del *teorema del* POISSON,

$$\Delta^2 v_1 - I v_1 = \varphi(x, y). \qquad (3)_1$$

Ora si considerino le equazioni:

$$(\text{nei punti di } \sigma)\ \Delta^2 v_2 - I v_2 = 0, \quad (\text{nei punti di } s)\ v_2 = v_1 + \psi. \qquad (4)_1$$

Queste equazioni, come le $(1)_1$ stesse, sono un caso particolare delle equazioni (28), il caso cioè in cui si ha:

$$h = 0, \quad f = 1, \quad k = -I;$$

per cui ammettono un integrale regolare, che sarà anche unico.

Finalmente, posto:

$$v = v_2 - v_1, \qquad (5)_1$$

si avrà dalle $(3)_1$, $(4)_1$:

$$(\text{nei punti di } \sigma)\ \Delta^2 v - I v = \Delta^2 v_2 - I v_2 - (\Delta^2 v_1 - I v_1) = -\varphi(x, y),$$

$$(\text{nei punti di } s)\ v = v_2 - v_1 = \psi.$$

Adunque la funzione v, determinata dalla formola (5), rappresenta l'integrale regolare delle equazioni $(1)_1$.

27. L'integrale regolare delle equazioni $(1)_1$, si può ancora mettere sotto un'altra forma, che ci sarà utile in seguito.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Si consideri l'integrale:

$$v'_1 = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma (\varphi - I v) \log r \, d\sigma, \tag{2)'_1}$$

dove v è l'integrale regolare delle $(1)_1$ stesse. Poichè l'espressione $\varphi - I v$ ha le derivate prime, che sono finite e continue nei punti dell'interno di σ, risulterà nel solito modo dal *teorema del* Poisson:

$$\Delta^2 v'_1 = (\varphi - I v). \tag{3)'_1}$$

Si consideri ancora l'integrale regolare delle equazioni:

$$\text{(nei punti di } \sigma) \ \Delta^2 v'_2 = 0, \quad \text{(nei punti di } s) \ v'_2 = v'_1 + \psi, \tag{4)'_1}$$

e si ponga:

$$v = v'_2 - v'_1. \tag{5)'_1}$$

Dalle $(3)'_1$, $(4)'_1$ risulta:

$$\text{(nei punti di } \sigma) \ \Delta^2 v = \Delta^2 v'_2 - \Delta^2 v'_1 = -(\varphi - I v),$$
$$\text{(nei punti di } s) \ v = v'_2 - v'_1 = \psi;$$

e quindi la funzione v, determinata dalla formola $(5)'_1$, rappresenta ancora l'integrale regolare delle equazioni $(1)_1$.

Se per la determinazione dell'integrale v'_2 delle equazioni $(4)'_1$ si adopera il *metodo di* Neumann; e se si indica con Q la corrispondente funzione dei punti di s e con C la corrispondente costante, avremo, come al § 2,

$$v'_2 = -\frac{1}{\pi}\int_s \left(Q + \frac{C}{2}\right)\frac{\partial \log r}{\partial n} \, ds,$$

e quindi:

$$v = -\frac{1}{\pi}\int_s \left(Q + \frac{C}{2}\right)\frac{\partial \log r}{\partial n} \, ds - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma (\varphi - I v) \log r \, d\sigma. \tag{11)_1}$$

28. L'integrale regolare v_2 delle equazioni $(4)_1$ non ha nei punti dell'interno di σ nè alcun massimo positivo, nè alcun minimo negativo.

Infatti se v_2 in un punto p dell'interno di σ avesse un massimo positivo, sarebbe in p:

$$I v_2 > 0;$$

e dalla prima delle $(4)_1$:

$$\Delta^2 v_2 > 0;$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

mentre si dovrebbe avere:

$$\Delta^2 v_2 \leqq 0.$$

Similmente avverrebbe nel caso di un minimo negativo.

Adunque il massimo valore assoluto dei valori che la funzione v_2 prende nel campo σ, corrisponderà al massimo valore assoluto dei valori che prende nei punti di s.

Ora nel caso di $\psi = 0$ lungo s, si ha:

$$(\text{nei punti di } s) \; v_2 = v_1;$$

quindi il massimo valore assoluto di v_2, nel caso $\psi = 0$, è minore od uguale al massimo valore assoluto di v_1.

Supponiamo in particolare che la funzione φ, che comparisce nell'espressione $(2)_1$ di v_1, sia composta del prodotto di due funzioni φ_1, φ_2, di cui la prima φ_1 sia nel campo σ sempre finita, continua e positiva. Allora si avrà, come al § 3,

$$v_1^2 < K \int_\sigma \varphi_1 \cdot \varphi_2^2 \, d\sigma; \tag{12)$_1$}$$

e quindi:

$$|v_1| < \sqrt{K \int_\sigma \varphi_1 \varphi_2^2 \, d\sigma}, \quad |v_2| < \sqrt{K \int_\sigma \varphi_1 \varphi_2^2 \, d\sigma}, \quad |v| < 2 \sqrt{K \int_\sigma \varphi_1 \varphi_2^2 \, d\sigma}, \tag{12')$_1$}$$

dove K è il limite superiore, che sarà certamente finito, dei valori dell'integrale:

$$\int_\sigma J^2 \varphi_1 \, d\sigma.$$

Circa alle derivate di v, finchè il punto p è nell'interno di σ e non mai su s, potendo anche essere comunque vicino ad s, avremo dalla $(11)_1$:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial v}{\partial x_1} = -\dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_s \left(Q + \dfrac{C}{2}\right) \dfrac{\partial}{\partial x_1} \left(\dfrac{\partial \log r}{\partial n}\right) ds - \dfrac{1}{2\pi} \int_\sigma (\varphi - I v) \dfrac{\partial \log r}{\partial x_1} \, d\sigma, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \end{array}\right\} \tag{13)$_1$}$$

Si avrà poi, come al § 4, indicando con φ_{11} il massimo valore assoluto di $\varphi - I v$,

$$Q + \frac{C}{2} \leqq \frac{5 - \rho^2}{2(1 - \rho^2)} \, H \varphi_{11}, \tag{11)$_1$}$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$$\left.\begin{aligned}\left|\frac{\partial v}{\partial x_1}\right| &\leqq \left\{\frac{H(5-\rho^2)}{2\pi(1-\rho^2)}\int_s\left|\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \log r}{\partial n}\right)\right| d s+\frac{1}{2\pi}\int_\sigma\left|\frac{\partial \log r}{\partial x_1}\right| d\sigma\right\}\varphi_{11},\\ \left|\frac{\partial v}{\partial y_1}\right| &\leqq \left\{\frac{H(5-\rho^2)}{2\pi(1-\rho^2)}\int_s\left|\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\partial \log r}{\partial n}\right)\right| d s+\frac{1}{2\pi}\int_\sigma\left|\frac{\partial \log r}{\partial y_1}\right| d\sigma\right\}\varphi_{11}.\end{aligned}\right\} \quad (13)'_1$$

CAPITOLO IV.

29. Premessi questi risultati, passiamo allo studio dell'equazione (6) dell'introduzione, nella quale la funzione F è supposta sempre positiva e inoltre finita e continua insieme alle sue derivate prime in tutto il campo σ, i punti di s al più esclusi per queste derivate.

Si considerino le equazioni:

$$\left.\begin{array}{lll}(\text{nei punti di } \sigma)\ \Delta^2 u_0 - I u_0 + h = 0, & \Delta^2 u_1 - I u_1 + F u_0 = 0, & \ldots\\ (\quad\text{»}\quad s)\ u_0 = \psi, & u_1 = 0, & \ldots,\end{array}\right\} \quad (15)_1$$

nelle quali h è funzione finita e continua dei punti di σ insieme alle sue derivate prime (i punti di s al più esclusi per queste derivate); ψ è funzione dei punti di s analoga a quella dei paragrafi precedenti; I una data costante reale e positiva.

Queste equazioni, come le $(1)_1$, sono del tipo delle equazioni (28); per cui esisteranno i loro integrali u_0, $u_1, \ldots$, con u_0, $u_1, \ldots$ funzioni finite e continue in tutto σ insieme alle loro derivate prime e seconde, i punti di s al più esclusi per queste derivate, e tali che le loro derivate normali sono finite e continue anche nei punti di s.

Similmente, indicando con h_1, $h_2, \ldots$ una serie di funzioni analoghe alla precedente funzione h e con ψ_1, $\psi_2, \ldots$ una serie di funzioni analoghe alla ψ, e considerando le equazioni:

$$\left.\begin{array}{lll}(\text{nei punti di } \sigma)\ \Delta^2 u_0^{(i)} - I u_0^{(i)} + h_i = 0, & \Delta^2 u_1^{(i)} - I u_1^{(i)} + F u_0^{(i)} = 0, & \ldots\\ & & (i = 1, 2, \ldots)\\ (\quad\text{»}\quad s)\ u_0^{(i)} = \psi_i, & u_1^{(i)} = 0, & \ldots,\end{array}\right\} \quad (15)'_1$$

risulterà l'esistenza degli integrali di queste equazioni, che saranno tutti delle funzioni finite e continue in tutto σ insieme, ecc.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Ed ancora, se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ sono delle costanti, da determinarsi convenientemente in numero ed in valore, e se si pone:

$$h' = \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \cdots + \alpha_p h_p,$$
$$\psi' = \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 + \cdots + \alpha_p \psi_p,$$
$$u'_r = \alpha_1 u_r^{(1)} + \alpha_2 u_r^{(2)} + \cdots + \alpha_p u_r^{(p)},$$

avremo dalle $(15)'_1$:

$$\left.\begin{array}{lll} (\text{nei punti di } \sigma) & \Delta^2 u'_0 - I u'_0 + h' = 0, & \Delta^2 u'_1 - I u'_1 + F u'_0 = 0, \ldots \\ (\quad \text{»} \qquad s) & u'_0 = \psi', & u'_1 = 0, \qquad \ldots \end{array}\right\} (15)'_1$$

con $u'_0, u'_1, \ldots$ funzioni finite e continue in tutto σ insieme, ecc.

30. Arrivati a questo punto, se si pone:

$$W'_{r,t} = \int_\sigma F u'_r u'_t \, d\sigma,$$

$$V'_{r,t} = \int_\sigma \left(\frac{\partial u'_r}{\partial x} \frac{\partial u'_t}{\partial x} + \frac{\partial u'_r}{\partial y} \frac{\partial u'_t}{\partial y} \right) d\sigma + I \int_\sigma u'_r u'_t \, d\sigma,$$

e se si ripetono i ragionamenti dei §§ 6 e 7, avremo:

$$W'_{r,t} = W'_{r+t} = V'_{r,t+1} = V'_{r+t+1};$$

$$\frac{W'_1}{W'_0} \leq \frac{W'_2}{W'_1} \leq \cdots \leq \frac{W'_r}{W'_{r-1}} \leq \cdots$$

Ora, essendo $I > 0$, si avrà:

$$\frac{V'_{2r}}{W'_{2r}} > \frac{\int_\sigma \left\{ \left(\frac{\partial u'_r}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u'_r}{\partial y} \right)^2 \right\} d\sigma}{W'_{2r}};$$

e quindi risulterà, come al § 8, che, *data una quantità positiva λ comunque grande, si può sempre determinare un numero intero finito p e p costanti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ non tutte nulle in modo che si abbia qualunque sia l'indice r:*

$$\frac{V'_{2r}}{W'_{2r}} > \lambda;$$

allora *la corrispondente serie:*

$$\sqrt{W'_0} + k \sqrt{W'_2} + k^2 \sqrt{W'_4} + \cdots \tag{16$_1$}$$

avrà il raggio ρ' del cerchio di convergenza maggiore od uguale a λ.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Indicate poi con:

$$Q'_0,\ Q'_1,\ Q'_2, \ldots$$

le funzioni analoghe alla Q del § 27 e relative agli integrali u'_0, u'_1, $u'_2, \ldots$ delle equazioni $(15)''_1$; e con:

$$C'_0,\ C'_1,\ C'_2, \ldots$$

le costanti analoghe alla C del § 27 e relative agli stessi integrali u'_0, u'_1, $u'_2, \ldots$, avremo dalle $(11)_1$, $(12)'_1$, $(14)_1$, $(13)'_1$, come al § 9,

$$u'_i = -\frac{1}{\pi}\int_s \left(Q'_i + \frac{C'_i}{2}\right)\frac{\partial \log r}{\partial n}\, d s - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma (F u'_{i-1} - I u'_i) \log r\, d\sigma, \qquad (11)'_1$$

$$|u'_{i+1}| < 2\sqrt{K\int_\sigma F u'^2_i\, d\sigma} = 2\sqrt{KW'_{2i}}, \qquad (12)''_1$$

$$\left| Q'_{i+2} + \frac{C'_{i+2}}{2}\right| \leqq \frac{5-\rho^2}{2(1-\rho^2)} H \,.\, 2\sqrt{K}\,(I\sqrt{W'_{2i+2}} + F_1\sqrt{W'_{2i}}), \qquad (14)'_1$$

$$\left.\begin{aligned}
\left|\frac{\partial u'_{i+2}}{\partial x_1}\right| &\leqq \left\{\frac{H(5-\rho^2)}{2\pi(1-\rho^2)}\int_s \left|\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \log r}{\partial n}\right)\right| d s + \right.\\
&\quad \left. + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \left|\frac{\partial \log r}{\partial x_1}\right| d\sigma\right\} 2\sqrt{K}(I\sqrt{W'_{2i+2}} + F_1\sqrt{W'_{2i}}),\\
\left|\frac{\partial u'_{i+2}}{\partial y_1}\right| &\leqq \left\{\frac{H(5-\rho^2)}{2\pi(1-\rho^2)}\int_s \left|\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\partial \log r}{\partial n}\right)\right| d s + \right.\\
&\quad \left. + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \left|\frac{\partial \log r}{\partial y_1}\right| d\sigma\right\} 2\sqrt{K}(I\sqrt{W'_{2i+2}} + F_1\sqrt{W'_{2i}}),
\end{aligned}\right\} \qquad (13)''_1$$

dove F_1 è il massimo valore che la funzione F assume nel campo σ.

31. Premessi questi risultati, segue, ripetendo i ragionamenti della fine del § 9 e del § 10, che *la funzione u', determinata dalla serie:*

$$u' = u'_0 + u'_1 k + u'_2 k^2 + \cdots,$$

per $|k| < \rho'$ è finita e continua in tutto σ insieme alle sue derivate parziali prime e seconde, i punti di s al più esclusi per queste derivate; le sue derivate normali sono finite e continue anche nei punti di s; ed essa soddisfa alle equazioni:

(nei punti di σ) $\Delta^2 u' + (kF - I) u' + h' = 0$, (nei punti di s) $u' = \psi'$. $(20)_1$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Di qui poi, se si fa:

$$\begin{array}{ll} h_1 = h\,, & h_i = F\,u_{i-2}\,, \\ \psi_1 = \psi\,, & \psi_i = 0\,, \end{array} \qquad (i = 2,\ 3, \ldots\ p)$$

dove h, ψ sono le funzioni che entrano nelle equazioni $(15)_1$, e dove u_0, u_1 sono i corrispondenti integrali; e se si pone:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ 1 & -k & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -k & \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -k \end{vmatrix},$$

$$P = \begin{vmatrix} u' & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ u_0 & -k & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ u_1 & 1 & -k & \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{p-2} & 0 & 0 & \ldots & 1 & -k \end{vmatrix},$$

risulterà per $|k| < \rho'$, ragionando come ai §§ 11, 12,

$$\left.\begin{array}{r} \text{(nei punti di } \sigma) \ \Delta^2 P + (k\,F - I)\,P + h\,D = 0, \\ \text{(nei punti di } s) \ P = \psi\,.\,D; \end{array}\right\} \qquad (23)_1$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{(nei punti di } \sigma) \ \Delta^2 \dfrac{\partial^i P}{\partial k^i} + (k\,F - I)\dfrac{\partial^i P}{\partial k^i} + i\,F\dfrac{\partial^{i-1} P}{\partial k^{i-1}} + h\dfrac{\partial^i D}{\partial k^i} = 0, \\ \text{(nei punti di } s) \ \dfrac{\partial^i P}{\partial k^i} = \psi\,\dfrac{\partial^i D}{\partial k^i}, \end{array}\right\} \qquad (23)'_1$$

con P *e* $\dfrac{\partial^i P}{\partial k^i} (i = 1,\ 2, \ldots)$ *funzioni finite e continue dei punti di* σ *insieme alle loro derivate normali e alle loro derivate parziali del primo e del secondo ordine rispetto ad* x *e* y, *i punti di* s *al più esclusi per queste derivate parziali.*

32. Ora, posto:

$$v = \frac{P}{D}, \qquad (21)'_1$$

non c'è che da ripetere letteralmente i ragionamenti dei §§ 13, ..., 21 per

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

dimostrare che *la funzione v, determinata dalla* $(21)'_1$, *per qualunque valore di k che non fa parte di un gruppo C' di valori reali, positivi e crescenti:*

$$k'_1,\ k'_2,\ k'_3,\ldots \tag{35$_1$}$$

è finita e continua in tutto il campo σ insieme alle sue derivate prime e seconde rispetto ad x e y, i punti di s al più esclusi per queste derivate; le sue derivate normali sono finite e continue in tutto σ (i punti di s inclusi); e soddisfa alle equazioni:

$$\text{(nei punti di } \sigma) \ \Delta^2 v + (kF - I)v + h = 0, \quad \text{(nei punti di } s) \ v = \psi. \tag{28$_1$}$$

Per ognuno dei valori di k del gruppo C' la funzione v ha un polo semplice, e i residui corrispondenti:

$$p'_1,\ p'_2,\ p'_3,\ldots$$

sono integrali regolari delle equazioni:

$$\text{(nei punti di } \sigma) \ \Delta^2 p'_i + (k'_i F - I)p'_i = 0, \ \text{(nei punti di } s) \ p'_i = 0. \tag{25$_1^{IV}$}$$

Nel caso in cui, essendo nei punti di s:

$$\psi = 0, \quad h = 0,$$

la funzione h è di tal natura che dopo r operazioni, delle quali è parola al § 20, risulta nel campo σ:

$$h - F.(p'_1 + p'_2 + \cdots + p'_r) = 0,$$

allora il gruppo C' sarà finito e si ridurrà agli r valori:

$$k'_1,\ k'_2,\ldots\ k'_r;$$

in qualunque altro caso il gruppo C' sarà infinito.

Chiamando anche qui *valore eccezionale* un valore di k per il quale esiste un integrale regolare delle $(25)_1^{IV}$, e *soluzione eccezionale* questo integrale, avremo ancora, come ai §§ 23, 24, 25, che *esiste un gruppo infinito G' di valori eccezionali, aventi il solo valore limite* $k = \infty$; che *il gruppo G' dipende dal campo σ, dalla costante I e dalla funzione F*, mentre *il gruppo C', contenuto nel gruppo G' o coincidente con esso, dipende ancora dalle funzioni h e ψ*; che *per tutti i valori di k, i quali non fanno parte del gruppo G', l'integrale v delle equazioni* $(28)_1$ *è unico*, e finalmente che *basterà impiccolire convenientemente il campo σ, perchè il primo valore del gruppo G' divenga grande quanto si vuole.*

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

APPENDICE.

Al § 4 ed in altri paragrafi successivi si è fatto uso delle seguenti proposizioni:

1.° *Quando una funzione h dei punti di s è tale che esiste una funzione u, la quale sia finita e continua in tutto il campo σ insieme alle sue derivate parziali dei due primi ordini, i punti di s al più esclusi per queste derivate; abbia le corrispondenti espressioni:*

$$\frac{\partial u}{\partial n}, \quad \Delta^2 u,$$

finite e continue anche nei punti di s; e in questi punti coincida con la funzione h; le derivate normali dell'integrale:

$$\int_s h \frac{\partial \log r}{\partial n} d s,$$

saranno finite e continue anche quando dai punti dell'interno di σ ci si avvicina indefinitamente ai punti di s.

2.° *Quando la funzione u_0 dei punti di s, dalla quale si parte nell'adoperare il metodo di* Neumann, *è tale che le derivate normali dell'integrale:*

$$\int_s u_0 \frac{\partial \log r}{\partial n} d s,$$

si mantengono finite e continue anche quando ci si avvicina indefinitamente ai punti di s; allora le derivate normali della corrispondente soluzione di Neumann *si manterranno finite e continue anche quando dai punti dell'interno di σ ci avviciniamo indefinitamente ai punti di s.*

Nella mia citata Nota: *Intorno alle derivate normali della funzione potenziale di superficie,* riferendomi al caso di tre dimensioni, mi proponevo di dimostrare che la sola continuità della funzione h è sufficiente perchè le derivate normali dell'integrale (funzione potenziale di doppio strato):

$$\int_\sigma h \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d \sigma,$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

esteso alla superficie σ, si mantengano finite e continue anche avvicinandosi indefinitamente ai punti di σ; e conseguentemente ne deducevo (Cfr. Introd., Nota cit.) che la sola continuità della funzione arbitraria u_0 nei punti di σ è sufficiente perchè le derivate normali della corrispondente *soluzione di* NEUMANN si mantengano finite e continue anche quando ci si avvicina indefinitamente ai punti di σ.

Ora il primo di questi risultati, e conseguentemente il secondo, non sono sempre veri, come ci si potrebbe convincere con qualche esempio. Del resto i ragionamenti dell'Appendice della mia cit. Nota richiedono che la funzione u, la quale coincide nei punti di σ con la funzione h, abbia anche l'espressione $\Delta^2 u$ finita e continua nei punti di σ. Infatti, se l'espressione $\Delta^2 u$ non è finita e continua anche nei punti di σ, non si può asserire che (v. § 2 dell'App.):

$$\lim_{P_1 P_0=0} \int_S \Delta^2 u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_1} d S = \lim_{P_2 P_0=0} \int_S \Delta^2 u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_2} d S = \int_S \Delta^2 u \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial n_0} d S (*).$$

Ora mentre si può sempre costruire una funzione u dei punti di uno spazio finito S, limitato da un insieme $\sigma + \sigma'$ di superficie chiuse, la quale sia finita e continua insieme alle sue derivate parziali dei due primi ordini, i punti di $\sigma + \sigma'$ al più esclusi per le derivate seconde; non è sempre vero che la u si può costruire in modo che anche il corrispondente $\Delta^2 u$ sia finito e continuo nei punti di σ; ed allora, volendo lasciare inalterati i ragionamenti del § 2 dell'Appendice della mia cit. Nota, bisognerà enunciare il risultato nel seguente modo:

Se la funzione h dei punti di σ è tale che esiste una funzione u, la quale sia finita e continua in tutto il campo S insieme alle sue derivate parziali dei due primi ordini, i punti di $\sigma + \sigma'$ al più esclusi per queste derivate; abbia le corrispondenti espressioni:

$$\frac{\partial u}{\partial n}, \quad \Delta^2 u$$

finite e continue anche nei punti di $\sigma + \sigma'$; e nei punti di σ coincida con la

(*) Il punto P_0 è sulla superficie σ; il punto P_1 nello spazio finito S, limitato dall'insieme $\sigma + \sigma'$ di superficie chiuse; il punto P_2 nello spazio infinito S' esterno all'insieme $\sigma + \sigma'$. Avvertiamo ancora che n_0 è la normale a σ che passa per il punto P_0; n_1 quella che passa per P_1; n_2 quella che passa per P_2.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

funzione h; allora le derivate normali dell'integrale:

$$\int_{\sigma} h \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma$$

avranno un limite determinato e finito, quando ci si avvicina ai punti di σ in una direzione qualsiasi, e i limiti che si trovano avvicinandosi dalle due parti di σ saranno uguali.

Circa al secondo risultato, che si riferisce alle derivate normali della *soluzione di* NEUMANN, dimostreremo che *se la funzione data u_0 dei punti di σ, dalla quale si parte per applicare il metodo di* NEUMANN, *è tale che le derivate normali dell'integrale:*

$$\int_{\sigma} u_0 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma,$$

si mantengono finite e continue anche quando ci si avvicina ai punti di σ in una direzione qualsiasi; le derivate normali della soluzione di NEUMANN, *che sono certamente finite e continue finchè il punto che si considera non è sulla superficie limite, si mantengono tali anche quando questo punto si avvicina indefinitamente ai punti della superficie stessa.*

Per vederlo richiamiamo brevemente il *metodo di* NEUMANN.

Posto:

$$U_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} u_0 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma, \qquad u_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} u_0 \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial n} d\sigma;$$

$$U_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} u_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma, \qquad u_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} u_1 \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial n} d\sigma;$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots,$$

la *soluzione di* NEUMANN per il campo finito S, limitato da σ, si può scrivere, come è noto,

$$W = (U_1 - U_2) + (U_3 - U_4) + \cdots \tag{1}$$

Indicando poi con P_1 un punto qualsiasi del campo finito S, con P_2 un punto qualsiasi del campo indefinito S' limitato da σ, e con P_0 un punto

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

di σ; e posto:

$$\lim_{P_1P_0=0} U_i(P_1) = \overline{U}_i, \qquad \lim_{P_2P_0=0} U_i(P_2) = \overline{\overline{U}}_i,$$

si ha:

$$\overline{U}_1 = u_1 + u_0, \qquad \overline{\overline{U}}_1 = u_1 - u_0,$$
$$\overline{U}_2 = u_2 + u_1, \qquad \overline{\overline{U}}_2 = u_2 - u_1,$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

Ora, poichè per ipotesi la $\frac{\partial U_1}{\partial n}$ è finita e continua anche nei punti di σ (*), e poichè allora si ha:

$$\lim_{P_1P_0=0} \frac{\partial U_1}{\partial n} = \lim_{P_2P_0=0} \frac{\partial U_1}{\partial n},$$

potremo scrivere per i punti del campo S:

$$U_1 = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \overline{U}_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{\partial U_1}{\partial n}\frac{d\sigma}{r} =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int_\sigma (u_1 + u_0)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{\partial U_1}{\partial n}\frac{d\sigma}{r},$$

per i punti del campo S':

$$-U_1 = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \overline{\overline{U}}_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{\partial U_1}{\partial n}\frac{d\sigma}{r} =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int_\sigma (u_1 - u_0)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{\partial U_1}{\partial n}\frac{d\sigma}{r},$$

donde:

$$\text{(nei punti di } S) \qquad U_2 - U_1 = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\partial U_1}{\partial n}\frac{d\sigma}{r},$$
$$(\quad \text{»} \qquad S') \qquad U_2 + U_1 = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\partial U_1}{\partial n}\frac{d\sigma}{r}.$$

(*) Con questa denominazione intendiamo di parlare dei limiti, quando ci si avvicina indefinitamente a σ da una parte o dall'altra.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Da queste formole risulta intanto che la espressione $\frac{\partial U_2}{\partial n}$ è finita e continua anche quando si va nei punti di σ; e così avremo come sopra:

$$\text{(nei punti di } S) \qquad U_3 - U_2 = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\partial U_2}{\partial n}\frac{d\sigma}{r},$$

$$(\quad \text{»} \quad S') \qquad U_3 + U_2 = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\partial U_2}{\partial n}\frac{d\sigma}{r}.$$

Seguitando a ragionare sempre nella stessa guisa risulta che tutte le $\frac{\partial U_i}{\partial n}$ sono finite e continue anche nei punti di σ; e così in generale si potrà scrivere:

$$\text{(nei punti di } S) \qquad U_{i+1} - U_i = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\partial U_i}{\partial n}\frac{d\sigma}{r},$$

$$(\quad \text{»} \quad S') \qquad U_{i+1} + U_i = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\partial U_i}{\partial n}\frac{d\sigma}{r}.$$

Posto:

$$W_i = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\partial U_i}{\partial n}\frac{d\sigma}{r}, \qquad \frac{\partial W_i}{\partial n}\ (\text{nel punto } P_0) = \left(\frac{\partial W_i}{\partial n}\right)',$$

$$\lim_{P_1P_0=0} \frac{\partial W_i}{\partial n} = \frac{\overline{\partial W_i}}{\partial n}, \qquad \lim_{P_2P_0=0} \frac{\partial W_i}{\partial n} = \frac{\partial W_i}{\partial n},$$

risulta:

$$\frac{\overline{\partial W_i}}{\partial n} + \frac{\partial W_i}{\partial n} = 2\frac{\partial U_{i+1}}{\partial n};$$

e dalla teoria delle funzioni potenziali di superficie si avrà:

$$2\left(\frac{\partial W_i}{\partial n}\right)' = \frac{\partial W_i}{\partial n} + \frac{\partial W_i}{\partial n} = 2\frac{\partial U_{i+1}}{\partial n};$$

risulterà quindi:

$$W_i = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \left(\frac{\partial W_{i-1}}{\partial n}\right)'\frac{d\sigma}{r};$$

ed inoltre:

$$\int_\sigma \left(\frac{\partial W_{i-1}}{\partial n}\right)' d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial U_i}{\partial n}\, d\sigma = 0. \tag{2}$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Le funzioni $\left(\frac{\partial W_i}{\partial n}\right)'$ sono le funzioni di Robin corrispondenti alla funzione iniziale $\frac{\partial U_1}{\partial n}$ (*); e queste funzioni, come è noto, per $i=\infty$ tendono verso una funzione limite che, a meno di un fattore costante C, è uguale alla densità ρ di una distribuzione fatta su σ e senza azione nei punti di S. Osserviamo poi che la funzione ρ dei punti di σ è sempre positiva e diversa da zero, e che, se si indicano con A_i, B_i rispettivamente i massimi e i minimi di $\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial W_i}{\partial n}\right)'$, si ha:

$$(A_i - B_i) < M\mu^i, \qquad A_i \leqq A_{i-1},$$
$$B_i \geqq B_{i-1}, \qquad \lim_{i=\infty} A_i = \lim_{i=\infty} B_i = C$$

con M costante finita e μ costante positiva e inferiore all'unità.

Ora dalla (2) segue:

$$\int_\sigma C\rho\, d\sigma = C\int_\sigma \rho\, d\sigma = 0;$$

e poichè ρ è sempre maggiore di zero, deve essere necessariamente:

$$C = 0.$$

Avremo adunque:

$$A_i \leqq A_i - B_i \leqq M\mu^i;$$

e così la serie:

$$\frac{\frac{\partial U_1}{\partial n}}{\rho} + \frac{\left(\frac{\partial W_2}{\partial n}\right)'}{\rho} + \frac{\left(\frac{\partial W_4}{\partial n}\right)'}{\rho} + \cdots,$$

e conseguentemente l'altra (**):

$$\varphi = \frac{\partial U_1}{\partial n} + \left(\frac{\partial W_2}{\partial n}\right)' + \left(\frac{\partial W_4}{\partial n}\right)' + \cdots,$$

saranno convergenti in ugual grado su σ.

(*) Cfr. Picard, *Traité d'Analyse*; T. I, pag. 121 e seg. — Duhem, *Leçons sur l'électricité et le magnétisme*. T. I, pag. 245 e seg.

(**) Rammentiamo che si ha su tutta la superficie σ: $\rho > 0$.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

In questo modo avremo dalla (1), integrando per serie (*),

$$-\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi\,\frac{d\sigma}{r}=\frac{-1}{2\pi}\int_\sigma\left\{\frac{\partial U_1}{\partial n}+\left(\frac{\partial W_2}{\partial n}\right)'+\left(\frac{\partial W_4}{\partial n}\right)'+\cdots\right\}\frac{d\sigma}{r}-$$

$$=-\left\{W_1+W_3+W_5+\cdots\right\}=W.$$

Questa è una funzione potenziale di superficie a densità finita e continua (**); sicchè avrà le derivate normali finite e continue anche nei punti

(*) Questa formola trasforma il doppio strato, che dà la *soluzione di* NEUMANN, in una funzione potenziale di superficie.

Osserviamo ancora che si ha nei punti di S:

$$W=\frac{-1}{2\pi}\int_\sigma \varphi\,\frac{d\sigma}{r}=\frac{1}{4\pi}\int_\sigma u_0\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma-\frac{1}{4\pi}\int_\sigma\frac{\partial\overline{W}}{\partial n}\,\frac{d\sigma}{r},$$

nei punti di S':

$$0-\frac{1}{4\pi}\int_\sigma u_0\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma-\frac{1}{4\pi}\int_\sigma\frac{\partial\overline{W}}{\partial n}\,\frac{d\sigma}{r},$$

donde:

$$\text{(nei punti di } S) \qquad \int_\sigma u_0\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma=\int_\sigma\left(\frac{\partial\overline{W}}{\partial n}-2\varphi\right)\frac{d\sigma}{r},$$

$$\text{(nei punti di } S') \qquad \int_\sigma u_0\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma=\int_\sigma\frac{\partial\overline{W}}{\partial n}\,\frac{d\sigma}{r}.$$

Queste formole ci dicono che *una funzione potenziale di doppio strato di densità arbitraria,* la quale però soddisfi alla condizione posta in principio per la u_0, *si può sempre trasformare in una funzione potenziale di superficie.*

(**) A questo stesso risultato si poteva giungere ammettendo che la $\frac{\partial U_1}{\partial n}$ si mantiene finita e continua quando si va nei punti di σ muovendosi soltanto nel campo S, cioè non facendo alcuna ipotesi sulla $\frac{\partial U_1}{\partial n}$ quando si va ai punti di σ muovendosi nel campo S'. Infatti dalla formola.

$$\text{(nei punti di } S) \qquad U_2-U_1=\frac{1}{2\pi}\int_\sigma\frac{\partial U_1}{\partial n}\,\frac{d\sigma}{r},$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

di σ [Cfr. mia cit. Nota, Art. II.], appunto come si voleva dimostrare. In modo perfettamente analogo si può procedere per la *soluzione di* NEUMANN relativa allo spazio indefinito S'.

---

risulta che la funzione $\frac{\partial U_2}{\partial n}$ e conseguentemente le altre: $\frac{\partial U_3}{\partial n}$, $\frac{\partial U_4}{\partial n}, \ldots$ si mantengono finite e continue quando si va dai punti del campo S ai punti di σ. Si ha inoltre:

$$\text{(nei punti di } S) \qquad U_{i+1} - U_i = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\partial U_i}{\partial n}\frac{d\sigma}{r};$$

e quindi:

$$\frac{\overline{\partial W_i}}{\partial n} = \frac{\partial U_{i+1}}{\partial n} - \frac{\partial U_i}{\partial n}.$$

Si ha poi dalla teoria delle funzioni potenziali di superficie:

$$\frac{\overline{\partial W_i}}{\partial n} = \left(\frac{\partial W_i}{\partial n}\right)' - \frac{\partial U_i}{\partial n};$$

avremo quindi, come a pag. 329,

$$W_i = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \left(\frac{\partial W_{i-1}}{\partial n}\right)' \frac{d\sigma}{r},$$

$$\int_\sigma \left(\frac{\partial W_{i-1}}{\partial n}\right)' d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial U_i}{\partial n} d\sigma = 0,$$

formole dalle quali dipende esclusivamente il risultato ottenuto.

Osserviamo poi che si ha nei punti di S':

$$0 = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma W \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{\partial \overline{W}}{\partial n}\frac{d\sigma}{r},$$

ossia:

$$\int_\sigma u_0 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial \overline{W}}{\partial n}\frac{\partial \sigma}{r},$$

con $\frac{\partial \overline{W}}{\partial n}$ funzione finita e continua dei punti di σ. Ne segue che la $\frac{\partial}{\partial n}\int_\sigma u_0 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma$ esiste ed è finita e continua anche quando si va nei punti di σ muovendosi nel campo S'. Similmente si può ragionare nel caso inverso. Abbiamo dunque il seguente risultato: *se*

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

È chiaro poi che i ragionamenti precedenti possono ripetersi per dimostrare le due proposizioni analoghe, relative ai campi piani, che sono state enunciate in principio di questa Appendice.

Catania, Marzo 1900.

---

si sa che esistono e sono finiti e continui i limiti verso cui tendono le derivate normali della funzione potenziale di doppio strato quando ci si avvicina indefinitamente alla superficie da una parte della superficie stessa, esisteranno e saranno ancora finiti e continui i limiti verso cui tendono queste stesse derivate quando ci si avvicina indefinitamente alla superficie dall'altra sua parte.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1