ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

FRANCESCO BRIOSCHI

e continuati dai professori:

Luigi Bianchi in Pisa | **Giuseppe Jung** in Milano
Ulisse Dini in Pisa | **Corrado Segre** in Torino

SERIE III. * TOMO XV.

MILANO
TIPO-LITOGRAFIA REBESCHINI DI TURATI E C.
OFFICINA CARTE VALORI

1908.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO XV.° (SERIE III.ª)

Le matematiche pure e miste nei primi dodici Congressi della Società Italiana per il progresso delle scienze (*).

(*Di* VALENTINO CERRUTI, *a Roma*.)

ONOREVOLI COLLEGHI,

Prima di dar principio a' nostri lavori consentitemi uno sguardo retrospettivo all'opera, che la Società Italiana per il progresso delle scienze, risorgente ora a vita novella, ha saputo compiere, in pochi ed omai lontani anni di esistenza, nel campo speciale degli studi matematici. Restringerò il mio discorso quasi esclusivamente alle sessioni tenute dalla Società dal 1839 al 1847, durante il quale periodo essa ha spiegato un'azione davvero feconda e che per molti capi si potrebbe, senza esagerazione, qualificare come eroica. Nelle tre sessioni posteriori al 1847, sessioni rinnovate dopo non breve sosta e seguite ad intervalli saltuari, relativamente esigue furono le manifestazioni in ogni ramo dell'umano sapere, ed anche le matematiche non somministrarono materia a comunicazioni o a discussioni che valgano a richiamare sopra di sè particolare attenzione. Ad esumare, in forma sia pure sommaria, la storia del passato, mi muove un sentimento di gratitudine, sempre doverosa e più oggi, che ci proponiamo di rinverdire una istituzione tanto benemerita del pensiero nazionale: un sentimento di gratitudine verso la memoria di uomini preclari, che onorarono il paese colla forza dell'ingegno, e non esitarono di sacrificare, quando fu necessario, la quiete e gli ideali dello scienziato per correre i rischi di creare una patria e sobbarcarsi alle oscure e rudi fatiche di ordinare lo Stato. De' quali è bello a noi, venuti per

(*) Discorso pronunciato in Parma il dì 24 settembre 1907 inaugurandosi i lavori della Sezione I della Società Italiana per il progresso delle Scienze. (Prima riunione della Società, Parma, settembre 1907).

virtù loro in tempi favorevoli al culto pacifico degli studi, salvare dall'oblio i pensamenti e custodire con venerazione il patrimonio scientifico, che ci han legato, senza guardare se sia modesto e non quale l'avrebbe desiderato la nostra ambizione patriottica.

***

PIETRO PAOLI, dotto professore di Analisi nell'Ateneo pisano, descriveva a foschi colori, nella prefazione al suo trattato di algebra (1), pubblicato nei primi anni del secolo scorso, le sorti miserande dell'insegnamento delle matematiche nel nostro paese. Le parole del PAOLI, concesso che rispondessero al vero in senso assoluto, sarebbe stato ingiusto applicarle in quel momento all'Italia sola, imperocchè dappertutto, anche fuori d'Italia, ove si eccettui Parigi, le scuole di matematica non erano molte diverse o migliori di quel che fossero presso di noi. Certamente un insegnamento fiacco ed angusto non era fatto per promuovere il progresso degli alti studi: ma l'industria individuale sopperiva alle manchevolezze delle pubbliche istituzioni. Onde in quel tempo l'Italia poteva giustamente gloriarsi de' nomi di LAGRANGE, MALFATTI, RUFFINI, BRUNACCI, ORIANI, NICOLA FERGOLA, e dello stesso PAOLI, per non citare che i nomi maggiori e più noti, mentre si era appena chiusa la tomba del MASCHERONI, rapito immaturamente in ancor fresca età alle scienze ed alle lettere.

Le censure del PAOLI, ripetute più tardi e in diverse occasioni con frasi troppo recise e senza le opportune riserve da uomini di grande autorità (2), generarono il pregiudizio che la produzione italiana nelle matematiche pure e miste della prima metà del secolo XIX abbia così tenue importanza da non meritare di essere considerata nella storia del movimento generale delle scienze dopo le grandi commozioni politiche e militari dell'epoca napoleonica. Parmi invece che ove la si esamini con diligenza e senza passione o prevenzioni, lasciando pure in disparte ogni velleità di confronto, il quale riuscirebbe troppo sproporzionato, colle immortali creazioni contemporanee de' grandi matematici della Francia e della Germania, da nessun equo estimatore si vorrà negare un posto onorevole ai geometri italiani, ai quali più che il valore è mancata la fortuna. A suffragio di questa opinione sarebbe facile ricavare argomenti decisivi dallo spoglio di atti accademici e di raccolte scientifiche, che si venivano stampando in varie città d'Italia, raccolte scientifiche in gran parte oggidì pressochè ignorate dall'universale, dagli eruditi in fuori. Ma io non intendo di uscire dal compito che mi sono imposto, di considerare unicamente i lavori prodotti ne' Congressi della nostra Società, o che direttamente vi si collegano, tanto più che mi paiono bastevoli da sè a convincere chicchessia della verità della mia affermazione.

* * *

E vengo senza più al proposito mio cominciando dalle matematiche pure: nelle quali ci si presenta in prima linea il nome altamente stimabile del professore Felice Chiò. Il Chiò esordiva nella carriera scientifica comunicando al Congresso di Torino (1840) un notevole teorema sulla convergenza delle serie trigonometriche, teorema che fece molto onore al Malmsten (3), il quale lo ridiscoverse qualche anno dopo, e che ora suole essere riprodotto ne' trattati di analisi colla dimostrazione datane da H. Holmogren (4).

Nuovo e più apprezzato saggio del suo ingegno forniva il Chiò nel Congresso di Genova (1846) proponendo due formule relative alla trasformazione di una funzione arbitraria in un integrale definito doppio dello stesso genere di quella di Fourier, formule che egli poi utilizzava nella determinazione di qualche integrale definito conosciuto e di qualche altro nuovo. In quel medesimo Congresso poneva il suggello alla fama di abile analista rendendo conto delle sue classiche ricerche intorno alla serie di Lagrange, iniziate allo scopo di rettificare una conclusione fallace contenuta nella Nota XI del *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés* del sommo geometra torinese. Le quali ricerche poi egli ridusse in tre Memorie: le prime due inserite, con relazioni lusinghiere del Cauchy, tra quelle dell'Accademia delle Scienze di Parigi e la terza pubblicata, dopo la morte ed in compendio, negli Atti dell'Accademia delle scienze di Torino (5).

Antagonista del Chiò sorse a Genova il Menabrea (6), propugnatore convinto, ma non egualmente felice, della teoria lagrangiana, alla cui illustrazione dedicò in quel torno di tempo, due estesi lavori e poi, trascorsi trent'anni, sparito già il Chiò, vari articoli di polemica col Genocchi (7).

Uno dei teoremi fondamentali scoverti dal Chiò intorno a una condizione, la quale, quando è verificata, assicura la convergenza della serie, fu in seguito ridimostrata con procedimento più semplice e più intuitivo da altri, ma le disquisizioni minute nelle quali egli si è addentrato circa la ricognizione dell'effettivo campo di convergenza e l'applicazione della serie alla risoluzione delle equazioni, nonchè le dispute vivaci che ne conseguirono, potrebbero oggi ancora essere studiate con frutto e provocare nuove e interessanti indagini.

Tra i collaboratori più attivi e costanti de' vari Congressi va collocato SERAFINO MINICH, professore di calcolo infinitesimale nell'Università di Padova. Le sue comunicazioni si aggirano su multiformi soggetti: la geometria cinematica, l'eliminazione delle funzioni arbitrarie, l'integrazione delle equazioni alle derivate parziali, le condizioni d'integrabilità delle forme differenziali ed alle differenze finite, dove sono ampliati alcuni teoremi di LAGRANGE e di LIBRI, ed altre intorno ai trascendenti ellittici ed abeliani. Delle quali ultime, esposte al Congresso di Venezia (1847), non si hanno che i titoli desunti dal diario del Congresso, mancando gli Atti che non furono pubblicati, ma se ne può arguire il contenuto dalle Memorie sullo stesso soggetto, che il MINICH presentò in quel medesimo anno all'Istituto veneto. Tra esse piacemi segnalare la Memoria sulla integrazione algebrica di un sistema di equazioni differenziali iperellittiche (8). La integrazione algebrica di tal sistema di equazioni, così per via indiretta come per via diretta, fu oggetto di iterate ricerche da parte di JACOBI, RICHELOT, HAEDENKAMP, LIOUVILLE e più tardi anche del GENOCCHI e del BRIOSCHI (9). Il lavoro del MINICH contiene un nuovo procedimento di integrazione diretta e tra i vari lavori ora ricordati, che lo hanno preceduto o seguìto, tiene sempre un posto ragguardevole.

Rilevo ancora dal diario testè ricordato, che il MINICH prestò viva attenzione ad uno studio sulla moltiplicazione e la divisione de' trascendenti abeliani di prima specie, svolto avanti al Congresso dal dott. GUIDO SUSANI. Non sono riuscito a scoprire se e dove il SUSANI abbia pubblicato il suo lavoro; malgrado ciò parvemi conveniente non dimenticarlo in questa rassegna, come dimostrazione che in quei tempi non mancava tra noi chi si occupasse delle teorie più astruse dell'analisi matematica. Fatto tanto più notabile nel caso particolare, ove si pensi che le celebri ricerche dell'HERMITE sul medesimo soggetto risalivano a soli tre o quattro anni innanzi, e nel 1847 non avevano ricevuto che una diffusione assai limitata.

In un dominio affine, cioè nel dominio delle trascendenti ellittiche e più propriamente delle loro applicazioni alla geometria, rientra la parte meglio conosciuta del contributo recato dal prof. NICOLA TRUDI al Congresso di Napoli (1845). JACOBI, invocando il soccorso delle funzioni ellittiche, aveva dedicato una elegante Memoria allo studio delle proprietà dei poligoni di PONCELET, cioè de' poligoni simultaneamente inscritti in una sezione conica e circoscritti ad una seconda, nel caso speciale in cui le due coniche si riducono a due cerchi interni l'uno all'altro, donde in particolare scaturiva una costruzione delle formule per la moltiplicazione. Il TRUDI completò lo studio di JACOBI, estendendolo al caso di due coniche qualunque ed in una giacitura rispettiva assolutamente generale, mediante un singolar processo di eliminazione, che, a quanto è asserito negli Atti del Congresso, sembra aver condotto l'autore ad altri pregevoli risultati nella dottrina delle equazioni binomie e nell'assegnazione delle condizioni per la risolubilità algebrica di equazioni di grado superiore al quarto. Checchè sia di queste ultime indicazioni sulle quali non seppi mettere insieme notizie concrete, riguardo alla prima parte dell'opera del TRUDI si hanno elementi sicuri di giudizio in una serie di Memorie, che egli più tardi e a varie riprese consegnò negli Atti dell'Accademia delle scienze di Napoli; Memorie che per profondità e generalità di ricerca in nulla cedono ai lavori quasi contemporanei del CAYLEY, del SALMON e del BRIOSCHI e forse li superano in perspicuità e genialità di esposizione (10).

In una direzione totalmente diversa si distinsero PAOLO FRISIANI, astronomo nella Specola di Brera, e GIOVANNI MARIA LAVAGNA, professore nell'Università di Pisa. Del primo è negli Atti del Congresso di Milano (1844) registrata un'utile monografia sulle equazioni trascendenti e nel Congresso di Venezia (1847) un lavoro di maggior polso sul problema di PFAFF, pubblicati poi entrambi per disteso nelle Effemeridi astronomiche di Milano (11). Questa cicostanza salvò le due produzioni del FRISIANI da un completo oblìo: invece sorte più disgraziata attendeva la Memoria letta dal LAVAGNA nel Congresso di Napoli (1845) sull'integrazione delle equazioni non lineari alle derivate parziali del prim'ordine con un numero qualunque di variabili. Sebbene sia negli Atti del Congresso un'analisi abbastanza larga della Memoria, che permette di ricomporla nelle sue linee essenziali, e nei volumi dell'Accademia Gioenia di Catania per l'anno 1850 il lavoro completo quale fu esibito al Congresso (12), essa passò inosservata, ed a torto. Perchè si tratta di uno studio eccellente, nel quale con procedimento alquanto diverso da quello proposto da JACOBI, è ampliato al caso di un numero qualunque di variabili il metodo d'integrazione escogitato dal LAGRANGE pel caso di due variabili indipendenti. Ed anche oggi può riuscire non senza vantaggio conoscere gli espedienti a cui ricorre l'autore per costruire l'integrale generale e per risolvere il problema di CAUCHY.

Giunto a questo punto il mio pensiero si volge spontaneo verso il decano de' nostri matematici, uno de' pochissimi superstiti fra quanti parteciparono operosamente ai Congressi anteriori alle guerre per l'indipendenza nazionale, al prof. TARDY, che dopo lunghi anni consacrati all'insegnamento, passa ora quasi nonagenario l'estrema vecchiezza in onorato riposo. Presentò il TARDY al Congresso di Milano (1844) una Memoria sui differenziali a indice fratto; essa fu sottoposta all'esame di una Commissione formata del PIOLA e del PLANA ed ebbe favorevole il voto de' due illustri personaggi. Non mi risulta che la Memoria sia stata divulgata per le stampe; ciò non di meno se ne può ricavare la sostanza dal rapporto del PIOLA e del PLANA che figura negli Atti del Congresso e dal testo di un'altra Memoria col medesimo titolo venuta alla luce quattordici anni dopo, nel primo tomo degli *Annali di Matematica pura ed applicata* (13); dove è da notare la definizione di derivata secondo un indice qualunque dedotta come ovvia e naturale estensione da quella che dette il LAPLACE per le derivate ordinarie col mezzo di un integrale definito. Il quale integrale a sua volta non differisce dall'integrale ben noto del CAUCHY che esprime il valore di una funzione uniforme di variabile complessa o di una sua qualsivoglia derivata ordinaria nel centro di un cerchio, quando sia conosciuta la successione de' valori della funzione al contorno. Tale definizione non collima colla definizione a cui si era fermato il LIOUVILLE in numerose pubblicazioni sul medesimo argomento e le è di gran lunga preferibile. Dei procedimenti spiegati nel suo lavoro fece il TARDY uso sistematico in una Memoria di squisita fattura sul moto dell'acqua in vasi di varia forma, stampata separatamente in Firenze nel 1847 (14), che fu poi oggetto di varie acute osservazioni da parte del GENOCCHI (15).

Coronamento della prima parte di questa mia cursoria enumerazione sarà il ricordo, per noi incancellabile, dell'intervento di BORCHARDT e di JACOBI al Congresso di Lucca (1843). BORCHARDT vi lesse una Memoria sopra certi sistemi di equazioni differenziali non lineari, che ammettono un numero limitato di integrali algebrici, conducenti ad alcune note formule per la trasformazione delle funzioni ellittiche (16). JACOBI vi enunciò un teorema relativo alla teoria dell'ultimo moltiplicatore il quale offre una regola semplice e certa per costruire, conosciuto che sia il moltiplicatore di un sistema di equazioni differenziali del prim'ordine, il moltiplicatore corrispondente per il sistema ridotto, che si trae dal dato, quando se ne possegga un integrale contenente una costante arbitraria.

La presenza di BORCHARDT e di JACOBI al Congresso di Lucca è memorabile altresì, perchè coincide con un momento importante nel rinnovamento degli studi matematici presso di noi. JACOBI aveva nel 1843 intrapreso per ragioni di salute, in compagnia di STEINER e di BORCHARDT, un viaggio in

Italia e si era soffermato a lungo in Roma ed in Napoli. Dimorando a Roma vi arricchì il *Giornale Arcadico* di varie comunicazioni in lingua italiana sopra soggetti di analisi e di meccanica ([17]), coadiuvato nella loro composizione in una lingua che non gli era troppo famigliare, dal CHELINI, il quale ad alcune aggiunse di suo dei notevoli commenti. Contemporaneamente lo STEINER scopriva la celebre superficie speciale di quart'ordine della proprietà caratteristica di essere incontrata secondo due sezioni coniche da ogni suo piano tangente e pubblicava nella medesima rivista una interessante Memoria sulle coniche inscritte in un triangolo o in un quadrilatero e sulle coniche circoscritte ad un triangolo o ad un quadrigono ([18]).

Anche la stanza in Napoli non passò vana per la scienza, imperocchè dalle conversazioni ivi avute con JACOBI e con STEINER trasse il PADULA materia e incitamento a'suoi lavori più belli versanti intorno alle singolarità delle curve algebriche piane ([19]).

* * *

Nelle matematiche applicate emerge sopra tutte le altre la veneranda figura di OTTAVIANO FABRIZIO MOSSOTTI, professore di meccanica celeste e di fisica matematica nell'Università di Pisa. La massima parte delle sue comunicazioni nei vari Congressi, traggono origine e trovano ragione in una Memoria, oggi assai rara, che egli aveva fatto stampare nel 1836 in Torino, sulle forze regolatrici dell'intima struttura dei corpi ([20]). Da pochi anni era sorta, per opera principalmente di NAVIER, CAUCHY e POISSON, la teoria generale della elasticità riposante sulla ipotesi della composizione corpuscolare della materia e delle azioni a distanza. Ammessa l'azione a distanza, da un punto di vista astratto e meramente matematico non fa certo difficoltà immaginare che essa proceda secondo una funzione a piacere della distanza medesima, e possa anche, come suppose il BOSCOVICH, col variare di essa mutare natura più volte di seguito, diventando ora attrattiva, ora repulsiva. Ma quel che può rimanere indifferente al matematico, altrettanto non avviene al fisico, il quale ama ricostruire i fatti multiformi e complessi della natura con elementi semplici e parlanti alla fantasia. Appunto per soddisfare ad un simile bisogno il MOSSOTTI compose come una specie di modello, dal quale i fatti che nel suo tempo più tormentavano la mente dei fisici, ricevono, qualitativamente almeno, una spiegazione, o meglio una interpretazione semplice e rigorosa. Esclusa ogni azione elementare che non fosse un'attrazione od una repulsione newtoniana, immaginò tutto lo spazio riempito di un fluido od etere, le cui particelle si respingano tra loro colla legge suddetta, ma per tutto il resto goda delle proprietà dei fluidi ordinari. In questo fluido pensò disseminate le molecole ponderabili repulsive tra loro, ma attraenti le particelle dell'etere sempre colla legge newtoniana. In forza di considerazioni analoghe a quelle di cui fa uso LAPLACE nel libro XII della Meccanica celeste, la pressione del fluido etereo dovrebbe risultare in ogni luogo proporzionale al quadrato della densità; posto questo il MOSSOTTI con sottile analisi pervenne a dimostrare, che l'etere in equilibrio si aggruppa intorno ad ogni molecola formando un'atmosfera di una densità grandissima nella contiguità della molecola, ma decrescente con tanta rapidità, che ad una distanza sensibile la condensazione può considerarsi come nulla e la densità confondersi con quella generale dell'etere nello spazio. Pertanto nel modello del MOSSOTTI i corpi ponderabili vanno concepiti come un aggregato di nuclei solidi armati di atmosfere eteree. Un calcolo elegante e condotto con singolare maestria lo condusse a riconoscere che l'azione reciproca di così fatti elementi segue tal legge da riuscire repulsiva e rapidamente decrescente nelle distanze minime, attrattiva nelle maggiori e conforme alla newtoniana nelle sensibili. Le idee del MOSSOTTI sulla costituzione della materia furono nel decennio dal 1840 al 1850 vivamente discusse anche fuori d'Italia, massime in Inghilterra, e fornirono argomento a replicate dispute nei Congressi della nostra Società. Alle medesime idee sono informate le sue auree Lezioni di Fisica matematica ([21]).

Una delle applicazioni più notevoli di tali vedute fu certamente quella che egli fece nel Congresso di Firenze (1841) alla teoria della dispersione della luce. Osservando che nell'etere libero la dispersione non esiste o è inapprezzabile, il MOSSOTTI suppone che la presenza delle molecole ponderabili generi, nello spazio da esso occupato, un'alterazione periodica nella densità e nella forza elastica dell'etere medesimo; e giunge così per la velocità di propagazione di un'onda di data lunghezza ad una formula la quale coincide colla formula dedotta dal CAUCHY in ben diversa ipotesi. Un modo di vedere non dissimile fu accolto, ma altrimenti sviluppato, dal BRIOT ventitre anni appresso nei suoi saggi sulla teoria matematica della luce.

Un'altra applicazione descrisse il MOSSOTTI nel Congresso di Torino (1840), destinata a spiegare la generazione della forza contrattile superficiale introdotta dal YOUNG nella sua teoria dei fenomeni capillari, della qual teoria propose inoltre una semplice e chiara esposizione. Ad essa aggiunse poi nuove e più ampie dilucidazioni nel Congresso di Genova (1846).

Di una terza ingegnosa applicazione è traccia negli Atti del Congresso di Siena (1862), diretta a chiarire il meccanismo delle scariche elettriche fra le nubi temporalesche e dell'azione protettrice dei parafulmini.

Ma oltre le comunicazioni, che in maniera diretta o indiretta si riconnettono colla sua dottrina intorno alla genesi delle forze molecolari, gli Atti dei Congressi ne contengono altre ancora di non minore importanza, le quali hanno resistito meglio al tempo e ai progressi della scienza.

Ad esempio negli Atti del Congresso di Lucca (1843) è parola di una Memoria del MOSSOTTI, riportata poi nel primo tomo degli *Annali delle Università toscane*, sulle proprietà degli spettri formati dai reticoli in cui, fondandosi sulle osservazioni di FRAUNHOFER, stabilisce una espressione per la lunghezza d'onda corrispondente ad una data linea dello spettro in funzione della sua distanza della linea centrale. Negli Atti del Congresso di Genova (1846) sono riassunti i risultati delle sue ricerche originali, e sempre in onore, intorno alla teoria matematica dei dielettrici conforme alle vedute di FARADAY, ricerche pubblicate quasi subito per disteso nelle Memorie della Società Italiana dei XL: e negli Atti del Congresso di Napoli (1845) è riferita una sua breve Nota sopra una espressione del termine generale dell'equazione del centro. Ma di qualche altra comunicazione, come ad esempio sulla deduzione delle formule di FRESNEL per la doppia rifrazione dalle equazioni del moto dei corpi elastici (Milano, 1844), sull'analisi dello spettro solare e riflessioni sulle teorie dell'ottica (Napoli, 1845), non mi fu dato di rintracciare che poco più dei semplici titoli.

Gran parte dei lavori del MOSSOTTI [22], ammirabili per eleganza e sobrietà di dettato e per originalità di vedute, si trovano dispersi in collezioni di difficile accesso o poco conosciute: ben si provvederebbe alla sua fama e più ancora al progresso degli studi ripubblicandole in un corpo unico.

Accanto al MOSSOTTI deve porsi il PLANA. Questi nel Congresso di Milano (1844) espose la sostanza della sua grossa Memoria: *Sulla distribuzione permanente dell'elettricità alla superficie di due sfere isolate*, stampata poi tra quelle dell'Accademia delle scienze di Torino [23]. La Memoria del PLANA, sebbene ristretta ad uno speciale e celeberrimo problema, può per certi lati riguardarsi come un trattato di elettrostatica. Essa è un commento ad una Memoria classica di POISSON, in cui il problema dell'induzione mutua di due sfere era stato ridotto alla risoluzione di una equazione funzionale. Ma le formule, che il POISSON ne aveva ricavate per il calcolo della densità elettrica, offrivano il fianco a varie obiezioni e parevano condurre a risultati illusori. Oltre a vari miglioramenti di minor conto, il PLANA perfezionò la teoria del POISSON per guisa da piegarla alle valutazioni numeriche e la corredò di tabelle diligentemente calcolate, tuttora in uso presso i fisici, che permettono un immediato riscontro fra i risultati della teoria e le misure sperimentali. Si posseggono al certo oggidì delle risoluzioni del problema più elaborate e più intuitive; ed è stato dimostrato recentemente dal DARBOUX l'attinenza della risoluzione del POISSON con quella che si trae col metodo delle immagini ([24]); ma non saprei dire se rispetto alle calcolazioni numeriche le nuove soluzioni somministrino delle formole più comode di quelle del PLANA o almeno ignoro se per questo riguardo sia mai stato eseguito un confronto accurato e decisivo.

Di fronte ai lavori del MOSSOTTI e del PLANA tutti gli altri paionmi assumere figura secondaria, sebbene tra essi non manchino di quelli non indegni che se ne conservi memoria. In via di esempio sarebbe ingiusto dimenticare che il BELLI, distinto professore di fisica nell'Università di Pavia, svolgeva nel Congresso di Padova (1842) delle considerazioni matematiche sopra alcuni fenomeni geologici e vi esponeva il progetto di una serie di osservazioni sistematiche al fine di risolvere la controversa questione sulla fluidità interna della terra.

E non si saprebbe nemmeno passare sotto silenzio il nome di GABRIO PIOLA, il quale nel Congresso di Milano (1844) proponeva una nuova analisi del problema del moto dell'acqua ne' canali, quantunque incerte ed imperfette ne siano le conclusioni. Fu il PIOLA zelante propagatore de' metodi della meccanica analitica di LAGRANGE e della nuova meccanica molecolare di CAUCHY e POISSON; e si conciliò la gratitudine degli studiosi con un esteso trattato sugli integrali definiti, con un'esposizione ordinata del calcolo dei residui del CAUCHY e colla traduzione italiana, in comune col FRISIANI, corredata di estesi commenti di una Memoria dello stesso CAUCHY sul calcolo de' limiti ([25]). Egli si occupò con singolare pertinacia, cui piacerebbe fosse toccato migliore successo, di problemi idrodinamici ed in ispecie del moto dell'acqua nei fiumi e nei canali regolati. Il BRIOSCHI nel curare la stampa di una Memoria postuma del PIOLA intorno al moto dell'acqua negli alvei scoperti ([26]), premise di suo una minuta recensione delle ricerche anteriori del PIOLA stesso e degli altri matematici italiani della prima metà del secolo XIX sull'idraulica razionale. Dalla recensione del BRIOSCHI risulta chiaramente che esse son tutte inquinate da due vizi fondamentali: uno analitico ed uno fisico. Il vizio analitico, oltre la introduzione quasi costante di un'ipotesi restrittiva, che esclude la possibilità di moti vorticosi, consiste in una non esatta nè completa posizione del problema rispetto alle condizioni ai limiti. Le soluzioni faticosamente combinate sono sempre più o meno particolari e non hanno mai tutta la voluta generalità per adattarsi ad una forma arbitraria delle pareti: o per lo meno le condizioni alle pareti non sono prese subito in considerazione ne' calcoli per subordinarvi la soluzione che si vuol costruire. Ed anche quando la soluzione ha generalità sufficiente, essa è presentata in forma tale che la determinazione degli elementi arbitrarí mediante le condizioni ai limiti riesce pressochè impraticabile. Il vizio fisico riguarda gli effetti dell'attrito interno e dell'attrito alle pareti sempre trascurati: cosa concedibile finchè si tratta dell'esito dell'acqua da fori praticati in un vaso di limitate dimensioni, ma non più nel moto per lunghi tubi, per canali o fiumi, dove essi hanno influenza preponderante. Le ricerche del Piola e de' suoi contemporanei hanno radice comune nelle soluzioni trovate dal Venturoli per il moto dell'acqua in un vaso conico rotondo ad asse verticale ([27]) e dal Giulio ([28]) in un vaso generato dalla rotazione di una iperbole cubica intorno ad un suo asintoto: soluzioni particolarissime e starei per dire fortuite, cioè non dedotte con metodo certo e razionale. Primo invece a risolvere correttamente un problema di simil genere fu il Betti ([29]), che riuscì a determinare in modo rigoroso l'efflusso dell'acqua da un vaso parallelepipedo con una fessura rettangolare scavata, parallelamente a due pareti opposte, nel fondo supposto orizzontale. Per debito di giustizia non si può tuttavia dissimulare che malgrado la imperfezione dei lavori del Venturoli e suoi seguaci, aveva pur saputo il Bidone, con ragionamento ingegnosissimo, trarne il valore del coefficiente di contrazione per una vena sgorgante da una luce circolare scolpita in parete sottile ([30]).

Insieme col Piola giova mentovare per indagini di idraulica teorica il prof. Vincenzo Amici dell'Università di Pisa, autore di un trattato di meccanica, che ebbe a' suoi dì buona riputazione come contenente alcune utili e, per quel tempo, nuove osservazioni sull'applicazione del principio delle velocità virtuali a' corpi continui o quando si tenga ragione della resistenza d'attrito e per qualche elegante deduzione relativa al moto dei liquidi. Dei quali perfezionamenti, di carattere sostanzialmente didattico, nella trattazione della meccanica l'Amici ebbe per consuetudine d'intrattenere i vari Congressi ai quali intervenne di persona.

Per bontà di esposizione più che per novità di risultati meritano lode alcuni lavori del Padula (Napoli, 1845) sulle equazioni per il moto de' liquidi, sui solidi di egual resistenza, sulla flessione delle travi incastrate ai due estremi, e sull'equilibrio dei muri che sostengono la spinta delle terre; ed al medesimo titolo va segnalata una monografia del professore OBICI (Torino, 1840), pubblicata poi in appendice al trattato di fisica generale del MOZZONI [31], sulla determinazione grafica delle leggi del moto cagionato nei corpi dalle percosse.

Ma di maggior momento apparirono senza dubbio alcuni tentativi del CODAZZA (Milano, 1844; Genova, 1846) per una teoria del calore fondata sulla dottrina delle ondulazioni, che potrebbero servire di propedeutica ad un modo di analisi degli effetti termo-meccanici [32].

Degne pure che se ne faccia menzione sono varie notizie riguardanti argomenti di astronomia e di meccanica celeste, tra le quali mi contenterò di ricordare quelle del CARLINI relative alla determinazione delle costanti dell'orbita lunare ed agli elementi parabolici della cometa scoperta a Roma il 23 agosto 1844 (Milano, 1844), del SANTINI intorno alle perturbazioni prodotte da Giove e da Saturno sul moto della cometa di Biela (Padova, 1842), e finalmente di BIELA sulla relazione fra i movimenti progressivi de' corpi celesti secondari col moto rotatorio del rispettivo corpo primario (Padova, 1842).

* * *

Mi parrebbe di venir meno al debito mio se terminassi questa rapida corsa senza accennare alla presentazione fatta da CARLO BARBAGE al Congresso di Torino (1840) della sua ingegnosa e celebre macchina calcolatrice, sulla quale il MENABREA compì uno studio particolareggiato [33]; studio che ebbe al suo tempo molto grido e, stampato dapprima nella *Bibliothèque universelle* di Ginevra, fu quasi subito riprodotto, voltato in inglese, e commentato, in una collezione di Memorie scientifiche pubblicate a Londra per cura di R. TAYLOR.

Per il medesimo motivo non posso tacere dei vari apparecchi sottoposti da TITO GONNELLA al giudizio del Congresso di Firenze (1841) tra i quali per il matematico ha particolare interesse un planimetro per la quadratura delle aree piane, che fu come l'origine dei vari strumenti integratori ideati in seguito. L'apparecchio del GONNELLA, al quale l'autore dedicò una Memoria illustratrice pregevolissima per sè [34], forniva l'area racchiusa tra una curva, una retta e due perpendicolari a quest'ultima e corrispondeva alla ordinaria scomposizione di un'area piana in trapezi infinitesimi con rette perpendicolari all'asse delle ascisse.

*
* *

Ho già detto che nelle tre sessioni di Siena (1862), Roma (1873) e Palermo (1875) le matematiche furono poco o nulle rappresentate se non forse per studi, che vi hanno un nesso molto indiretto. Tali, per esempio, dovranno dirsi le lunghe e minuziose determinazioni (Roma, 1873) sperimentali del colonnello Pietro Conti intorno alla resistenza d'attrito nei corpi solidi, allo scopo principale di riconoscere l'influenza della velocità su tale resistenza, determinazioni che furono poi riunite in una voluminosa Memoria dell'Accademia dei Lincei ([35]); e così pure gli studi sperimentali del medesimo colonnello sulla resistenza dei materiali, di cui l'Accademia dei Lincei accolse nei suoi Atti la parte relativa alla flessione della pietra *serena* ([36]).

Lo stesso carattere hanno ancora gli accuratissimi e svariati lavori del Pisati (Palermo, 1875) sull'elasticità dei metalli a diverse temperature ([37]). Nell'esecuzione dei quali lavori il Pisati acquistò un'abilità sperimentale veramente rara, che lo mise in grado di condurre poi a splendido termine l'impresa, assunta insieme col Pucci, della determinazione del valore assoluto della gravità in Roma e dell'attrito interno di varie specie di gas ([38]).

Per certi lati confina similmente colla matematica applicata la Memoria letta dal Cerboni nel Congresso di Roma (1873) dove per la prima volta con plastica evidenza e somma precisione sono posti i fondamenti razionali della contabilità e data forma e contenuto scientifico a una dottrina che era sempre rimasta nel dominio dell'empirismo ([39]).

*
* *

Onorevoli colleghi — Sebbene io mi sia ingegnato di riassumere imparzialmente e con ogni migliore diligenza l'opera matematica dei passati Congressi, non ho la pretesa di essere stato completo: può essere che qualche lavoro di pregio mi sia inavvertentemente sfuggito e che di qualche altro abbia taciuto per non averlo apprezzato al suo giusto valore. È un difetto del quale non mi voglio scusare; ma lo schivarlo sarebbe tornato difficile, perchè è sempre malagevole sottrarci all'influenza delle inclinazioni e delle opinioni che si radicano in ognuno di noi come conseguenza degli studi personali. Sarei contento per altro se colla mia stringata rassegna fossi almeno riuscito a mostrare infondato il troppo sfavorevole giudizio che suol portarsi dello stato delle scienze matematiche nel nostro paese nei primi 50 anni del secolo passato.

Fu deplorato che in Italia non si fosse mai potuta costituire una tradizione matematica, o che fosse mancata la continuità anche là dove momentaneamente qualche ingegno eletto aveva saputo suscitare l'amore all'investigazione geometrica. Il fatto, vero in certa misura, ebbe varie cause, che furono dette e ripetute tante volte: ma tra esse ve n'ha una molto umile, che forse ha esercitato e può esercitare un influsso più grande di quello che ordinariamente gli si suole attribuire. In un paese povero, dove il movimento e la trasformazione della ricchezza si riducono a proporzioni minime, dove i grandi problemi dai quali dipendono la floridezza e la potenza dello Stato, non sono affrontati, l'utilità pratica della matematica non va al di là degli elementi indispensabili per la vita comune: e l'interesse per le quistioni più elevate e riposte non può essere che retaggio casuale di qualche mente privilegiata. Tale era la condizione dell'Italia nella prima metà del secolo XIX. Ma oggi non è più così. Il meraviglioso risveglio industriale; le opere colossali per la sistemazione e l'esercizio delle comunicazioni aeree, terrestri e marittime; il generale rinnovamento edilizio; lo sfruttamento dell'energie naturali in tutte le loro forme; l'assetto dei grandi servizi di Stato; la costituzione di nuovi istituti economici imposti dall'incessante trasformazione sociale, hanno richiesto già e richiedono senza tregua la risoluzione di problemi complessi, pei quali l'ausilio della matematica nelle sue parti più delicate è così necessario e prezioso, che sono costretti ad acquistarvi famigliarità moltissimi, a cui la scienza non è un fine ma un mezzo. Queste necessità di ordine tecnico esercitano per converso un benefico influsso sui cultori della scienza per sè, tanto rispetto all'indirizzo delle loro speculazioni, quanto rispetto al perfezionamento dei metodi di ricerca. Poichè la matematica astratta nella nuova vita italiana rappresenta non più una dottrina di lusso e decorativa, ma un valutabile fattore economico, è lecito sperare che il cammino ascendente, il quale dura con tanta fortuna da oltre mezzo secolo, non abbia ad allentarsi, ma continui con vigore moltiplicato. A raggiungere tale intento riuscirà efficacissima l'azione della nostra Società accomunando ed organizzando studi e studiosi. Essa nei primordi si valse della scienza per cooperare alla formazione di una coscienza politica nazionale. Ora ha avanti a sè un ideale non meno nobile e più proprio alla sua indole; quella di creare una coscienza scientifica nazionale.

NOTE

De' vari autori sono citate, oltre le pubblicazioni alle quali si fa allusione espressa nel testo, anche alcune altre che hanno con esse una stretta connessione.

(1) Paoli (Pietro). *Elementi di Algebra.* Pisa, Tip. della Soc. letteraria, MDCCCIII-MDCCCIV, I, pref., pp. V-VII.

(2) V. *ex. g* Beltrami (Eugenio) in *Collectanea mathematica nunc primum edita.* Milano, Ulrico Hoepli, 1881, pp. I-III.

(3) Malmsten (Carlo Giovanni). *Note sur la convergence des séries.* Upsala, Nova Acta Soc. Sc., XII, 1844, pp. 255-270.

— *Ueber einen Satz von der Convergenz der Reihen.* Grunert, Archiv, VI, 1845, pp. 38-41.

Si tratta del teorema: « Se è $\sum_0^\infty u_n$ una serie a termini positivi divergente con $\lim_{n=\infty} u_n = 0$, sono convergenti le due serie $\sum_0^\infty u_n \cos(\omega + n\theta)$, $\sum_0^\infty u_n \operatorname{sen}(\omega + n\theta)$, tranne che per θ multiplo della circonferenza ».

(4) Holmgren (Hjalmar). *Sur la convergence des séries trigonométriques procédant suivant les multiples d'un même arc.* Liouville, Journ. d. math. pures et appliquées, XVI, 1851, pp. 186-190.

(5) Per notizie minute sui lavori scientifici del Chiò e sulle controversie derivate dalle sue ricerche intorno alla serie di Lagrange vedi:

Genocchi (Angelo). *Notizie intorno alla vita ed agli scritti di* Felice Chiò. Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Boncompagni, 1871, IV, pp. 363-380.

Boncompagni (Baldassarre). *Catalogo dei lavori di* Felice Chiò. Id., id., pp. 381-400.

Ferraris (Galileo) in *Discorsi per l'inaugurazione del busto di* Felice Chiò *nella r. Università di Torino il 28 novembre 1872.* Torino, Stabilimento dell'Unione tipografico-editrice, 1872, pp. 5-28. Il discorso del Ferraris fu riprodotto nella raccolta delle sue Opere pubblicate per cura dell'Associazione elettrotecnica italiana. Milano, Ulrico Hoepli, 1902-904, III, pp. 331-351.

Marie (Massimiliano). *Théorie des fonctions de variables imaginaires.* Paris, Gauthier-Villars, 1874-76, III, pp. 280-313.

(6) I due lavori principali del Menabrea sulla serie di Lagrange hanno per titolo:

Mémoire sur la série de Lagrange. [1843]. Torino, Acc. Sc., Memorie, 2.a serie, VIII, 1846, pp. 91-128;

Observations sur la véritable interprétation de la série de Lagrange. [1846]. Torino, id., id., X, 1849, pp. 111-162.

Insieme con essi giova altresì ricordare la relazione del medesimo Menabrea sopra una Memoria del Chiò intorno alla convergenza e le proprietà della serie di Lagrange, letta nella seduta del 2 luglio 1843 della R. Accademia delle Scienze di Torino, e stampata, coll'aggiunta di tre Note, nell'« Antologia italiana, Giornale di Scienze, Lettere ed Arti ». Torino, an. I, t. II, 1847, pp. 65-88.

(7) Gli articoli di polemica cui si accenna nel testo sono:

Genocchi (Angelo). *Intorno ad una lettera del sig. conte* L. F. Menabrea. Bullettino di Bibliografia ecc., ecc., V, 1872, pp. 535-542.

— *Richiamo a favore di* Felice Chiò. Bullettino di Bibliografia ecc., ecc. VI, 1873, pp. 153-158.

— *Su d'una controversia intorno alla serie di Lagrange.* Torino, Acc. Sc., Atti, VIII, 1872-73, pp. 18-31.

— *Breve risposta al signor conte* L. F. Menabrea. Bullettino di Bibliografia ecc., ecc., VI, 1873, pp. 530-532.

— *Observations relatives à une Note de* M. Ménabréa *concernant la série de Lagrange.* Paris, Ac. des Sc., Comptes-rendus, LXXVII, 1873, pp. 1541-1544.

Menabrea (Luigi Federico). *Intorno ad uno scritto del sig. prof.* Angelo Genocchi. Bullettino di Bibliografia ecc., ecc., V, 1872, pp. 301-305.

— *Un'ultima lettera sulle peripezie della serie di Lagrange in risposta al prof.* Angelo Genocchi. Bullettino di Bibliografia ecc., ecc., VI, 1873, pp. 435-457.

— *Note sur l'identité des formules données par Cauchy pour déterminer les conditions de convergence de la série de Lagrange avec celles qui ont été établies par Lagrange lui-même.* Paris, Acad. des Sc., Comptes-rendus, LXXVII, 1873, pp. 1358-1361. — Les Mondes, XXXII, 1878, pp. 673-675.

(8) Minich (Serafino Raffaele). *Sugli integrali algebrici d'un sistema di equazioni differenziali i cui termini sono integrabili per mezzo di trascendenti abeliane e sulla proprietà fondamentale di simili trascendenti.* Venezia, Memorie dell'i. r. Istituto Veneto di Sc., Lett. ed Arti, III, 1847, pp. 269-328.

(9) Genocchi (Angelo). *Sopra una costruzione del teorema di Abel.* Annali di Matematica pura ed applicata, I, 1858, pp. 33-40.

Brioschi (Francesco). *Sur l'intégration des équations ultra-elliptiques.* Crelle, Journ. f. die reine u. angew. Math., LV, pp. 55-60; — od anche t. V delle sue Opere matematiche, attualmente in corso di stampa, pp. 287-291.

(10) Trudi (Nicola). *Delle relazioni tra i determinanti di due sezioni coniche, l'una iscritta, l'altra circoscritta ad un poligono irregolare.* Napoli, Acc. Sc., Rendiconto, II, 1843, pp. 89-93.

— *Rappresentazione geometrica immediata dell'equazione fondamentale nella teoria delle funzioni ellittiche con diverse applicazioni.* Napoli, Acc. Sc., Memorie, I, 1852-54, pp. 63-100.

— *Ricerche risguardanti la moltiplicazione ed addizione geometrica delle funzioni ellittiche.* Napoli, Acc. Sc., Rendiconto, II, 1853, pp. 66-69.

— *Studii intorno ad una singolare eliminazione, con applicazione alla ricerca della relazione tra gli elementi di due coniche, l'una iscritta, l'altra circoscritta ad un poligono, ed ai corrispondenti teoremi del Poncelet.* Napoli, Acc. Sc., Rendiconto, I, 1862, pp. 198-210: — id., id. Atti, I, 1863, n.° 6.

— *Sui teoremi del Poncelet relativi ai poligoni iscritti e circoscritti alle coniche.* Giornale di Mat. ad uso degli studenti delle Univ. italiane, I, 1863, pp. 81-90, 125-126.

(11) FRISIANI (Paolo). *Analisi di alcune equazioni trascendenti.* Effemeridi astronomiche di Milano per l'anno 1845, Milano, 1844, Appendice, pp. 3-127.

— *Sull'integrazione delle equazioni differenziali ordinarie di 1.º ordine e lineari per un numero qualunque di variabili.* Effemeridi astronomiche di Milano per l'anno 1848, Milano, 1847, Appendice, pp. 3-146.

(12) LAVAGNA (Giovanni Maria). *Sulla integrazione dell'equazioni non lineari di natura qualunque alle derivate parziali del prim'ordine fra qualsivoglia numero di variabili.* Catania, Acc. Gioenia, Atti, VII, 1850, pp. 17-81.

(13) TARDY (Placido). *Sui differenziali a indice qualunque.* Annali di matematica pura ed applicata, I, 1858, pp. 135-148.

(14) — *Sopra alcuni punti della teoria del moto dei liquidi.* Firenze, Gio. Mazzoni, 1847, pp. 1-29.

(15) GENOCCHI (Angelo). *Di una Nota del barone* PLANA. *Casi particolari del moto dei liquidi.* Annali di matematica pura ed applicata, I, 1858, pp. 383-396. Delle medesime quistioni, senza per altro riferirsi agli studî del TARDY, s'era occupato il GENOCCHI in altro lavoro precedente dal titolo: *Sopra una formula di Lagrange spettante al moto de' liquidi ne' vasi* in: Annali di Scienze matematiche e fisiche, VIII, 1857, pp. 396-422.

(16) La comunicazione del BORCHARDT fu riprodotta integralmente nella collezione delle sue Opere, Berlin, G. Reimer, 1888, pp. 465-466. Essa si aggira sul medesimo soggetto della dissertazione presentata nel 1843 dal Borchardt per il dottorato alla Facoltà filosofica di Königsberg, della qual dissertazione non si potè trovare l'originale e si conosce il solo titolo: *De integratione quarundam aequationum differentialium una cum variis ad theoriam integralium ellipticorum applicationibus.*

(17) JACOBI (Carlo Gustavo Jacob). *Sopra le funzioni di Laplace, che risultano dallo sviluppo dell'espressione*

$$(a^2 - 2\,a\,a'\,[\cos\omega\cos\varphi + \operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\varphi\cos(\vartheta - \vartheta')] + a'^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Giornale Arcadico, XCVIII, 1844, pp. 59-66.

— *Sulla condizione di uguaglianza di due radici dell'equazione cubica, dalla quale dipendono gli assi principali di una superficie del second'ordine.* Id., XCIX, 1844, pp. 3-11.

— *Sul principio dell'ultimo moltiplicatore, e suo uso come nuovo principio generale di meccanica.* Id., XCIX, 1844, pp. 129-146.

Oltre le comunicazioni qui ricordate, il *Giornale Arcadico* contiene ancora, tradotti in lingua italiana, altri articoli del JACOBI, che nel testo originale erano già stati pubblicati in riviste scientifiche straniere. La notizia degli aiuti, che nella composizione de' suoi lavori in lingua italiana, ebbe il JACOBI dal CHELINI, la appresi dalla viva voce di quest'ultimo.

(18) STEINER (Jacopo). *Teoremi relativi alle coniche iscritte e circoscritte.* Giornale Arcadico, XCIX, 1844, pp. 147-161.

— *Del baricentro di curvatura delle curve piane.* Id., CI, 1844, pp. 1-31, 121-160. È una traduzione, eseguita per cura del Dr. Luigi Schlaefli, dall'originale tedesco di una Memoria letta il 15 aprile 1838 all'Accademia delle Scienze di Berlino e poi stampata nel Giornale di Crelle, XXI, 1840, pp. 33-63, 101-133.

([19]) PADULA (Fortunato). *Ricerche di analisi applicata alla geometria.* Napoli, Acc. Sc., Rendiconti, III, 1844, pp. 241-256, 321-328, 401-408; IV, pp. 15-22.

— *Delle curve di quarto grado che hanno tre punti di regresso di prima specie.* Napoli, Acc. Sc., Rendiconti, I, 1852, pp. 29-34; id., id., Memorie, I, 1852-54, pp. 31-48; — Roma, Annali di Scienze matematiche e fisiche, III, 1852, pp. 383-387.

— *De' punti multipli delle curve algebriche,* Annali di Scienze matematiche e fisiche, III, 1852, pp. 211-231.

([20]) MOSSOTTI (Ottaviano Fabrizio). *Sur les forces qui régissent la constitution intérieure des corps. Aperçu pour servir à la détermination de la cause et des loix de l'action moléculaire.* Turin, Imprimérie royale, MDCCCXXXVI, pp. 1-34: — voltata nell'idioma inglese in Taylor, Scient. Mem., I, 1837, pp. 448-469: — riprodotta nell'originale francese in

ZÖLLNER (Federico). *Erklärung der universellen Gravitation aus den statischen Wirkungen der Elektricität und die allgemeine Bedeutung des Weber'schen Gesetzes.* Leipzig, L. Staackmann, 1882, pp. 83-112.

([21]) — *Lezioni elementari di Fisica matematica.* Firenze, G. Piatti, 1843-45; 2 voll. Il primo volume comincia con un discorso, dove è riprodotta la sostanza della Memoria di cui alla nota precedente.

([22]) — *Sul principio che la riflessione e la rifrazione su di una superficie unirifrangente polarizzano nelle due porzioni in cui vien diviso il raggio incidente due quantità di luce uguali, rispettivamente in due piani ortogonali fra loro.* Giornale toscano di Sc. med., fis. e nat., I, 1840, pp. 330-337.

— *Sulla causa della dispersione della luce nel sistema delle ondulazioni.* Id., I, 1840, pp. 337-341.

— *Dell'azione delle forze molecolari nella produzione de' fenomeni di capillarità.* Bibl. it., XCIII, 1840, pp. 63-80; — Nuovi Ann. Sc. nat., IV, 1840, pp. 390-419; — Taylor, Scient. Mem., III, 1843, pp. 564-577.

— *Nota sopra un fenomeno capillare osservato dal Dr.* YOUNG. Bibl. it., XCVIII, 1840, pp. 365-375; — Taylor, Scient. Mem., III, 1843, pp. 578-586.

— 1) *Riflessioni intorno alla forza epipolica.* 2) *Deduzione delle formole della doppia rifrazione di* FRESNEL *dalle equazioni generali del movimento dell'etere disseminato nei corpi cristallizzati.* Pisa, Il Cimento, II, 1844, pp. 429-437.

— *Sulle proprietà degli spettri di* FRAUNHOFER *formati dai reticoli, ed analisi della luce che somministrano.* Pisa, Ann. Univ. Toscane, Sc. cosmologiche, I, 1846, pp. 181-204: — Taylor, Scient. Mem., V, 1852, pp. 435-452.

— *Comunicazioni sopra alcuni argomenti di acustica e di ottica fisica.* Pisa, Il Cimento, IV, 1846, pp. 97-106.

— *Considerazioni sulle forze di capillarità e coesione dei liquidi relative alle recenti esperienze dei sigg.* HENRY, DONNY *ed* HAGER. Pisa, Il Cimento, IV, 1846, pp. 439-456.

— *Discussione analitica sull'influenza che l'azione di un mezzo dielettrico ha sulla distribuzione dell'elettricità alla superficie di più corpi elettrici disseminati in esso.* [1846]. Modena, Soc. it. delle Sc. (detta de' XL), Memorie, XXIV, 1850, pp. 49-74.

— *Azione de' parafulmini.* Il Nuovo Cimento, XVI, 1862, pp. 74-79.

(23) PLANA (Giovanni). *Sur la distribution de l'électricité à la surface de deux sphères conductrices complètement isolées.* Torino, Acc. Sc., Memorie, 2.a serie, VII, 1845, pp. 71-401.

— *Sur la distribution de l'électricité à la surface intérieure et sphérique d'une sphère creuse de métal et à la surface d'une autre sphère conductrice électrisée que l'on tient isolée dans sa cavité.* [1854]. Torino, Acc. Sc., Memorie, 2.a serie, XVI, 1857, pp. 57-96.

(24) DARBOUX (Gastone). *Sur deux Mémoires de* POISSON *relatifs à la distribution de l'électricité.* Bulletin des Sciences mathématiques, 2.ème série, XXXI, 1907, pp. 17-28.

(25) PIOLA (Gabrio). *Sull'applicazione de' principî della Meccanica Analitica del Lagrange ai principali problemi.* Milano, Regia Stamperia, 1825, pp. I-XXIII, 1-252.

— *Trattato sul calcolo degli integrali definiti.* Milano, Opusc. mat. e fis., I, 1832, pp. 73-96, 169-200, 273-296, 345-375; — II, 1834, pp. 105-132, 345-372.

— *La Meccanica de' corpi naturalmente estesi trattata col Calcolo delle variazioni.* Opusc. mat. e fis., I, 1832, pp. 201-236.

— *Sui principî e sugli usi del Calcolo de' residui* (da varie Memorie del sig. A. L. CAUCHY). Milano, Opusc. mat. e fis., II, 1834, pp. 237-260.

— *Nuova analisi per tutte le questioni della meccanica molecolare.* Modena, Soc. it. delle Sc. (detta de' XL), XXI, 1836, pp. 155-322.

— *Intorno alle equazioni fondamentali del movimento dei corpi quali si vogliono, considerati secondo la naturale loro forma e costituzione.* [1845]. Modena, Soc. it. delle Sc. (detta de' XL), XXIV, 1848, pp. 1-186.

PIOLA (Gabrio) e FRISIANI (Paolo). *Sulla meccanica celeste e sopra un nuovo calcolo chiamato « Calcolo dei limiti ».* (Memoria di A. L. CAUCHY tradotta ed annotata). Milano, Opusc. mat. e fis., II, 1834, pp. 1-84, 133-202, 261-316.

(26) BRIOSCHI (Francesco). *Prefazione ad una Memoria postuma di* G. PIOLA *dal titolo: « Ulteriori considerazioni sul moto dell'acqua in vasi, canali e fiumi ».* Milano, Memorie dell'i. r. Istituto Lombardo di Sc., Lett. ed Arti, 1.a Serie, III, 1852, pp. 283-298; – od anche t. III delle sue Opere matematiche, pp. 119-135.

(27) VENTUROLI (Giuseppe). *Sull'efflusso dell'acqua dai vasi conici* in: *Ricerche geometriche ed idrometriche fatte nella Scuola degli ingegneri pontifici d'acque e strade l'anno 1821.* Milano, P. E. Giusti, MDCCCXXII, pp. 1-11. — Il Venturoli fin dall'anno 1810 in un'appendice alla seconda edizione degli *Elementi di Meccanica ed Idraulica* aveva trattato in generale il problema del moto di un velo fluido piano, nelle solite condizioni restrittive ricordate nel discorso, ed applicata la teoria generale al caso delle pareti rettilinee.

(28) GIULIO (Carlo Ignazio). *Di un caso particolare della dottrina dell'efflusso dell'acqua da' vasi.* Torino, Stamperia reale, 1839, pp. 1-38.

(29) BETTI (Enrico). *Sopra la determinazione analitica dell'efflusso dei liquidi per una piccolissima apertura.* Annali di Sc. mat. e fis., I, 1850, pp. 425-443; — od anche t. I delle sue Opere matematiche, pubblicate per cura della R. Accademia de' Lincei, Roma, 1903, pp. 3-16.

(30) BIDONE (Giorgio). *Sur la détermination théorique de la section contractée des veines liquides.* [1829]. Torino, Acc. Sc., Memorie, XXXIV, 1830, pp. 363-387.

(31) OBICI (Pietro). *Le leggi del moto cagionato ne' corpi dalla percossa graficamente determinate* in: MOZZONI (Andrea), *Elementi di Fisica generale,* 7.a edizione, 1.a fiorentina, Firenze, G. e S. Jouhaud, 1841, Appendice, pp. 267-324.

(32) CODAZZA (Giovanni). *Sulla teoria della propagazione della luce omogenea nei mezzi omogenei.* Milano, Soc. tip. dei Classici italiani, 1840, pp. I-XII, 1-104.

— *Esposizione dei principii generali sull'equilibrio e sul moto dell'etere nell'interno dei corpi pesanti.* Majocchi, Annali di Fis., Chim. e Mat., Milano, 1844, XVI, pp. 252-257.

— *Sulle induzioni molecolari prodotte dalle ondulazioni dell'etere.* Milano, Giornale dell'i. r. Istituto Lombardo di Sc., Lett. ed Arti, nuova serie, IV, 1852, pp. 199-230.

— *Sulla polarizzazione rotatoria della luce sotto l'influenza delle azioni elettromagnetiche.* Milano, Giornale dell'i. r. Istituto Lombardo di Sc., Lett. ed Arti, nuova serie, IV, 1852, pp. 491-538; V, 1853, pp. 299-342.

— *Considerazioni sulla possibilità dell'esistenza di un mezzo magnetico negli spazi vuoti di materia ponderabile.* Milano, Giornale dell'i. r. Istituto Lombardo di Sc., Lettere ed Arti, nuova serie, VIII, 1856, pp. 247-261.

([83]) Menabrea (Luigi Federico). *Notions sur la machine analytique de M. Charles* Babbage. Bibl. universelle, XLI, Genève, 1842, pp. 353-377; — Taylor, Scient. Mem. III, 1843, pp. 666-731.

([84]) Gonnella (Tito). *Opuscoli matematici. Descrizione di una macchina per quadrare le figure piane.* Firenze, Gio. Mazzoni, 1841, pp. 135-194, con due tavole.

([85]) Conti (Pietro). *Sulla resistenza di attrito.* Roma, R. Acc. de' Lincei, Atti, 2.ª Serie, II, 1875, pp. 16-200, con 25 tavole.

([86]) — *Sulla resistenza alla flessione della pietra «serena».* Roma, R. Acc. de'Lincei, Atti, 2.ª Serie, II, 1875, pp. 408-416, con una tavola.

([87]) Pisati (Giuseppe). *Sulla tenacità del ferro a diverse temperature.* Firenze, Soc. it. delle Sc. (detta de' XL), Memorie, 3.ª serie, II, 1869-76, pp. 321-342, con una tavola.

— *Sull'elasticità de' metalli a diverse temperature.* Palermo, Gazzetta chimica italiana, VI, 1876, pp. 23-32, 57-88, 176-196; VII, 1877, pp. 61-89, 173-188, con tre tavole.

— *Ricerche sperimentali sulla tenacità de' metalli a diverse temperature.* Roma, R. Acc. de' Lincei, Memorie, 3.ª serie, I, 1877, pp. 179-194, con una tavola.

([88]) Pisati (Giuseppe) e Pucci (Enrico). *Sulla lunghezza del pendolo a secondi.* Roma, R. Acc. de' Lincei, Memorie, 3.ª serie, XV, 1885, pp. 57-231, con quattro tavole.

— *Sulla lunghezza del pendolo semplice a secondi in Roma.* Esperienze eseguite dai professori G. Pisati ed E. Pucci, pubblicate per cura di Vincenzo Reina. Roma, R. Acc. dei Lincei, Memorie, 5.ª serie, I, 1894, pp. 3-162, con una tavola.

([89]) Cerboni (Giuseppe). *Sull'ordinamento della contabilità dello Stato.* Firenze, Giuliani, 1866, pp. 1-60, con una tavola.

— *Primi saggi di logismografia presentati all' XI Congresso degli Scienziati italiani.* Firenze, Tip. La Minerva, 1873, pp. 1-84.

— *Sur l'importance d'unifier les études de la comptabilité.* Roma, Eredi Botta, 1887, pp. 1-222.

Sulle equazioni integrali.

(*Di* Giuseppe Lauricella, *a Catania.*)

Or son dieci anni il prof. Volterra nella sua Memoria: *Sopra alcune quistioni di inversione di integrali definiti* (*) scriveva: « Il seguire le vicende del problema delle inversioni degli integrali definiti potrebbe dar luogo ad una pagina istruttiva ed interessante di storia dell'analisi, giacchè una tale ricerca intimamente legata alla integrazione delle equazioni differenziali, agli sviluppi in serie e ad una classe estesa di quistioni fisico-matematiche si è imposta di frequente all'attenzione dei geometri ». Da allora il detto problema di inversione ha fatto progressi immensi per opera principalmente dello stesso Volterra e del Fredholm; ed il campo delle applicazioni di esso problema alla fisica-matematica ed all'analisi è ora divenuto così vasto ed importante, che la pagina di storia di cui parla il Volterra sarebbe oggi di grande interesse, al fine sopra tutto di coordinare con i risultati generali, che si hanno sulla teoria delle equazioni integrali, i varii ed interessanti problemi, che si possono fare dipendere da questa teoria e che furono già trattati con criterii disparati. Un brillante capitolo di tale storia dell'analisi è stato scritto appunto dal prof. Volterra nell'Art. I (§§ 1, 2,... 9) della sua citata Memoria.

Il compito assai modesto che io qui mi propongo è di esporre i più notevoli tra i risultati generali fin ora ottenuti (**) sul problema delle inversioni degli integrali definiti e sulle sue applicazioni, fermandomi un po' di più sulle applicazioni ai problemi di fisica-matematica. La considerazione di un importante problema di fisica-matematica mi darà inoltre occasione di proporre lo studio di una nuova equazione integrale.

I problemi di inversione di integrali definiti, dei quali parleremo, pos-

(*) *Annali di Matematica*, Serie 2.ª, Vol. XXV, 1897.

(**) Il presente articolo fu scritto nell'Agosto dello scorso anno e fu letto nel I Congresso (di Parma) della *Società Italiana per il progresso delle scienze.*

sono così enunciarsi: *date ad arbitrio una funzione $\psi(x)$ del campo reale qualsiasi $\overline{a\,b}$ ed una funzione $G(x, y)$ dei punti del quadrato, determinato dalle rette $x=a$, $x=b$, $y=a$, $y=b$, trovare una funzione $\varphi(y)$ del campo $a\,b$, tale che si abbia*

$$\int_a^x G(x, y)\,\varphi(y)\,d\,y = \psi(x), \tag{1)$_V$}$$

oppure:

$$\varphi(x) + \int_a^x G(x, y)\,\varphi(y)\,d\,y = \psi(x), \tag{2)$_V$}$$

oppure:

$$\int_a^b G(x, y)\,\varphi(y)\,d\,y = \psi(x), \tag{1)$_F$}$$

oppure:

$$\varphi(x) + \int_a^b G(x, y)\,\varphi(y)\,d\,y = \psi(x). \tag{2)$_F$}$$

Le equazioni $(1)_V$, $(2)_V$ si chiamano *equazioni integrali del tipo Volterra*, le equazioni $(1)_F$, $(2)_F$ *equazioni integrali del tipo Fredholm.* L'Hilbert poi chiama *equazioni integrali di 1.ª specie* le $(1)_V$, $(1)_F$, *equazioni integrali di 2.ª specie* le $(2)_V$, $(2)_F$. Alla $G(x, y)$ è stata data dal prof. Pincherle la denominazione di *funzione caratteristica*, dall'Hilbert la denominazione di *Kern* (*perno*). In ciò che segue noi adotteremo quella del Pincherle.

Abel nello studio di un certo problema meccanico, che comprende come caso particolare quello del tautocronismo, si imbattè in una equazione integrale, che si può ottenere dalla $(1)_V$, ponendo:

$$G(x, y) = (x-y)^{-n} \qquad (0 < n < 1).$$

Questa equazione, come è noto, fu risoluta dallo stesso Abel e poi, con metodi diversi, da altri autori, che ne fecero le più svariate ed eleganti applicazioni.

Per circa 60 anni la formola di risoluzione di Abel costituì l'unico esempio di inversione di integrali definiti con limiti variabili. Nel 1884 il Sonine (*)

(*) *Sur la généralisation d'une formule d'Abel* (Acta math., 4, 1884).

generalizzò il risultato di ABEL al caso in cui nella equazione $(1)_V$ si abbia:

$$G(x, y) = (x-y)^{-n} F(x-y) \qquad (0 < n < 1)$$

con $F(t)$ funzione sviluppabile in serie di MACLAURIN. Questa generalizzazione « segnò un vero e proprio passo nella quistione dell'inversione ».

Pure nel 1884 il prof. VOLTERRA (*) dette un metodo per risolvere l'equazione $(1)_F$. Tale metodo, indipendente dalla natura della funzione $\psi(x)$, consiste nel ricondurre la risoluzione della $(1)_F$ alla ricerca di una funzione $\lambda(z, \alpha)$ tale che l'integrale

$$\int_a^\alpha \lambda(y, \alpha) \,.\, G(x, y)\, d\, y$$

risulti indipendente da α.

Il prof. LEVI-CIVITA verso la fine del 1895 negli *Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino* (**) dette un metodo, che può condurre all'inversione degli integrali $(1)_V$, $(1)_F$, quando la funzione $G(x, y)$ soddisfa ad un'equazione alle derivate parziali a variabili separate.

Tale metodo Egli applicò allo studio delle equazioni $(1)_V$, $(1)_F$ nel caso di

$$G(x, y) = f(x-y).$$

Le cose stavano a questo punto, quando nel Gennaio del 1896 il professore VOLTERRA (***) pubblicò la Sua formola generale di risoluzione dell'equazione $(1)_V$, estendendola al caso in cui la $G(x, y)$ per $x = y$ diviene infinita di ordine inferiore ad 1. In due successive Note dei *Rendiconti dei Lincei* (****) Egli dette la formola generale di risoluzione dell'equazione $(2)_V$, dimostrò che la risoluzione dell'equazione $(1)_V$ si può in generale ricondurre a quella della $(2)_V$, ed estese i Suoi risultati ai sistemi di equazioni dei due tipi $(1)_V$, $(2)_V$ ed al caso di campi a più dimensioni.

I risultati generali del VOLTERRA sull'equazione $(1)_V$ dànno come caso eccezionale quello in cui il limite inferiore della funzione $G(x, x)$ nel campo

(*) *Sopra un problema di elettrostatica* (Acc. dei Lincei, Transunti, Serie 3.ª, Vol. VIII).

(**) *Sull'inversione degli integrali definiti nel campo reale* (Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino; Vol. XXXI, 1895-96).

(***) *Sull'inversione degli integrali definiti* (ibid.).

(****) Serie 5.ª, Vol. V; 1896.

$\overline{a\,b}$ è lo *zero*; ed il VOLTERRA stesso in due Note, pubblicate negli *Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino* nei mesi di Marzo ed Aprile dello stesso anno, esaminò questo caso discutendolo in tutti i suoi dettagli.

Riassumo qui i risultati del VOLTERRA sulle equazioni $(1)_V$, $(2)_V$ con le Sue medesime parole (*).

« Il metodo che ho seguito è fondato sopra tre principii fondamentali.

PRINCIPIO DI CONVERGENZA. *Se $S_0(x, y)$, $a < x < y$, $a < y < b$ è una funzione finita integrabile e a partire da essa si calcolano successivamente le:*

$$S_i(x, y) = \int_x^y S_{i-j}(x, \xi)\, S_{j-1}(\xi, y)\, d\xi,$$

S_i sarà indipendente da j e la serie

$$s_0(x, y) = -\sum_0^\infty{}_i\, S_i(x, y),$$

sarà uniformemente convergente e rappresenterà una funzione integrabile.

PRINCIPIO DI RECIPROCITÀ. *Se si opera sulla $s_0(x, y)$ come si è operato sulla $S_0(x, y)$, cioè se si forma:*

$$s_i(x, y) = \int_x^y s_{i-j}(x, \xi)\, s_{j-1}(\xi, y)\, d\xi,$$

si ritrova la funzione primitiva, vale a dire si ha:

$$S_0(x, y) = -\sum_0^\infty{}_i\, s_i(x, y),$$

e le due funzioni $S_0(x, y)$ e $s_0(x, y)$ sono legate dalla relazione:

$$S_0(x, y) + s_0(x, y) = \int_x^y S_0(x, \xi)\, s_0(\xi, y)\, d\xi = \int_x^y s_0(x, \xi)\, S_0(\xi, y)\, d\xi.$$

PRINCIPIO DELLA INVERSIONE. *L'equazione funzionale:*

$$f(y) = \varphi(y) - \int_a^y \varphi(x)\, S_0(x, y)\, dx,$$

(*) Memoria citata degli *Annali di Matematica.*

si inverte in una maniera unica mediante la formola:

$$\varphi(y) = f(y) - \int_a^y f(x)\, s_0(x, y)\, dx.$$

Questi tre principii sono estensibili al caso di un sistema di funzioni,...

Una ulteriore estensione può poi ottenersi considerando, invece che una funzione o un sistema di funzioni di una coppia di variabili, una funzione o un sistema di funzioni di m coppie di variabili:...

Con questi principii si riconduce la risoluzione dei varii problemi di inversione, qualunque sia il numero delle funzioni incognite e qualunque sia il numero delle variabili da cui esse dipendono ad operazioni successive di quadratura.

Nel caso più semplice che possa presentarsi si ottiene il teorema:

Se si ha la equazione funzionale:

$$f(y) - f(\alpha) = \int_a^y \varphi(x)\, H(x, y)\, dx,$$

in cui $f(y)$ e $f'(y)$ si mantengono finite e continue per y compreso fra α e $\alpha + A$ e $H(x, y)$ e $\frac{\partial H}{\partial y} = H_2(x, y)$ sono pure finite per $y > x > \alpha$, $\alpha + A > y > \alpha$, e quest'ultima è integrabile, mentre è maggiore di zero il limite inferiore dei valori assoluti di $h(y) = H(y, y)$, esisterà una ed una sola funzione finita e continua φ che soddisfa l'equazione funzionale per y compreso fra α e $\alpha + A$, la quale sarà data da:

$$\varphi(y) = \frac{f'(y)}{h(y)} - \frac{1}{h(y)} \int_a^y f'(x) \sum_0^\infty S_i(x, y)\, dx.$$

in cui:

$$S_i(x, y) = \int_y^x S_{i-j}(x, \xi)\, S_{j-1}(\xi, y)\, d\xi$$

$$S_0(x, y) = \frac{H_2(x, y)}{h(x)}.$$

Nel caso particolare in cui $H(x, y)$ assume la forma $F[\lambda(x) - \lambda(y)]$ questo teorema si specializza...

Il caso in cui $H(x, y)$ diviene infinito per $x = y$, in modo che si possa porre $H(x, y) = \frac{G(x, y)}{(x-y)^\lambda}$ con $G(x, y)$ finita e $\lambda < 1$, e che comprende in sè evidentemente il caso di Sonine e quindi quello di Abel, si può ricondurre, con uno speciale artifizio all'analisi precedente, ed in tal modo si ottiene il teorema:

Se si ha l'equazione funzionale:

$$f(y) - f(\alpha) = \int_\alpha^y \varphi(x) \frac{G(x, y)}{(y-x)^\lambda} dx, \qquad (\lambda < 1),$$

in cui $f(y)$ e $f'(y)$ si mantengono finite e continue per y compreso fra α e $\alpha + A$ $(A > 0)$; e $G(x, y)$ e $\frac{\partial G}{\partial y} = G_2(x, y)$ sono pure finite e continue per tutti i valori di x, y, compresi entro i limiti α e $\alpha + A$, mentre è maggiore di zero il limite inferiore dei valori assoluti di $g(y) = G(y, y)$ per y compreso nello stesso intervallo, esisterà una ed una sola funzione finita e continua φ che soddisfa l'equazione funzionale per y compreso fra α e $\alpha + A$, la quale sarà data da:

$$\varphi(x) = \frac{\operatorname{sen} \lambda \pi}{\pi} \frac{1}{g(z)} \int_\alpha^z f'(x) \sum_0^\infty {}_i\, T_i(x, z)\, dx,$$

in cui:

$$S_0(y, z) = \frac{\operatorname{sen} \lambda \pi}{\pi} \frac{1}{g(z)} \int_y^z G_2(y, \xi) \left(\frac{\xi - y}{z - \xi}\right)^{1-\lambda} \frac{d\xi}{z - y}$$

$$T_0(x, z) = \frac{1}{(z-x)^{1-\lambda}} \cdot$$

$$T_i(x, z) = \int_z^x S_0(\xi, z)\, T_{i-1}(x, \xi)\, d\xi.$$

Questa proposizione, allorchè $G(x, y)$ ha la forma $F(x - y)$, si specializza...

Finalmente se $H(x, y)$ si annulla per $x = y$, il problema dell'inversione può in taluni casi riescire determinato, in altri no, e la discriminazione di essi può ricondursi ad operazioni algebriche. Il teorema fondamentale che si ha a questo proposito è il seguente.

Abbiasi la equazione funzionale:

$$f(y)=\int_0^y \varphi(x)\, H(x,\, y)\, d\, x, \qquad a > y > 0, \tag{25}$$

in cui:

$$f(y)=y^{n+1}\, f_1(y)$$

$$H(x,\, y)=\sum_0^n {}_i\, a_i\, x^i\, y^{n-i}+\sum_0^{n+1} {}_i\, x^i\, y^{n+1-i}\, L_i(x,\, y),$$

essendo le a_i quantità costanti.

Se $f_1(y)$ e $L_i(x,\, y)$ e le loro derivate rapporto ad y sono finite e continue per x compreso fra 0 e y e y compreso fra 0 ed a, mentre in questo intervallo $h(y)=H(y,\, y)$ non si annulla che per $y=0$, esisterà una ed una sola funzione finita e continua che soddisfa la (25) quando tutte le radici dell'equazione algebrica di grado n:

$$\frac{a_0}{\lambda-1}+\frac{a_1}{\lambda-2}+\cdots+\frac{a_n}{\lambda-n-1}=0,$$

essendo finite e differenti fra loro, avranno le parti reali positive. Invece, se le radici della equazione precedente saranno finite e diverse fra loro, ma una o più di esse avranno la parte reale negativa, allora il problema di dedurre $\varphi(x)$ dalla (25) sarà indeterminato.

L'effettiva risoluzione dell'equazione funzionale (25) quando le condizioni stabilite dal precedente teorema affinchè il problema sia determinato, sono soddisfatte può eseguirsi riconducendo la quistione ad un'altra analoga per la quale sia verificata la condizione $H(y,\, y) \gtrless 0$. »

Osserveremo, ancora col Volterra, che « la quistione di riconoscere se le parti reali di un'equazione algebrica a coefficienti reali hanno tutte lo stesso segno è stata trattata e risoluta in maniera completa ed elegante dal prof. Hurwitz (*). Applicando il criterio di Hurwitz si può giudicare a *priori* che la quistione d'inversione è determinata, eseguendo solo operazioni razionali nei coefficienti $a_0,\, a_1, \ldots,\, a_n$. »

Nella medesima Memoria degli *Annali di Matematica* il prof. Volterra

(*) *Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitz* von A. Hurwitz (Math. Annalen; Bd. 46, S. 273).

estende il Suo metodo alla risoluzione di equazioni integrali con ambedue i limiti variabili, ed applica i Suoi risultati generali ad alcuni casi nei quali le operazioni di quadratura, che compariscono nelle formole di risoluzione, si eseguiscono con facilità. Noi qui tralasceremo l'esposizione, anche riassuntiva, di tali nuovi importanti risultati del VOLTERRA, e passeremo a dare un cenno di alcune tra le più interessanti quistioni analitiche, che si possono ricondurre alla risoluzione di equazioni integrali del tipo VOLTERRA.

Il prof. DINI (*) guidato dal concetto che mosse il BELTRAMI nell'estendere le ricerche dello SCHLÖMILCH sugli sviluppi in serie di funzioni di BESSEL (**), « dopo aver ottenuto sotto una forma generale lo sviluppo in serie di funzioni reali passa ad integrare termine a termine le dette serie, dopo averle moltiplicate per una funzione arbitraria. Ottiene in tal modo nuovi sviluppi. Se quello primitivo è

$$f(x) = \sum_0^\infty A_n H_n(x),$$

i cui coefficienti A_n possono determinarsi dipendentemente dalla $f(x)$, e se $\psi(x, \xi)$ è la funzione moltiplicatrice, si ottiene in tal modo lo sviluppo in serie della funzione:

$$\int_c^\xi f(x)\, \psi(x, \xi)\, d\, x = F(\xi), \tag{11}$$

il quale sarà della forma:

$$\sum_0^\infty A_n K_n(\xi), \tag{12}$$

avendo posto:

$$K_n(\xi) = \int_c^\xi H_n(x)\, \psi(x, \xi)\, d\, x.$$

Se si potrà ricavare la $f(x)$, quando sia scelta la $F(\xi)$, avremo il modo di calcolare i coefficienti dello sviluppo in serie (12) mediante la funzione da svilupparsi $F(\xi)$.

(*) *Annali delle Università Toscane.*

(**) Cfr. cit. Memoria del VOLTERRA negli *Annali di Mat.*, pag. 146.

La possibilità dunque della inversione di una equazione funzionale della forma (11) rende in generale possibile il passaggio da certi sviluppi i cui coefficienti sanno ricavarsi dalla funzione da svolgersi in serie, a nuovi sviluppi i cui coefficienti godono della stessa proprietà. »

Il LE ROUX nella sua Memoria: *Sur les intégrales des equations linéaires*... (*) si propone la seguente quistione: dato un integrale (della specie che Egli chiama *principale*) $z(x, y, \alpha)$ dell'equazione

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + c z, \qquad \text{(A)}$$

dipendente da una costante arbitraria α, determinare una funzione $f(\alpha)$ in modo che l'integrale

$$\int_{x_0}^{x} f(\alpha)\, z(x, y, \alpha)\, d\alpha,$$

che allora soddisfa alla medesima equazione (A), per $y = y_0$ si riduca ad una funzione data $\psi(x)$. Il LE ROUX, dopo di aver osservato che la quistione proposta equivale, come è evidente, alla risoluzione dell'equazione $(1)_V$, dimostra che la risoluzione di questa equazione integrale si può fare dipendere dalla risoluzione dell'equazione $(2)_V$, supposto che il limite inferiore di $G(x, x)$ sia diverso da zero; e poi passa alla risoluzione dell'equazione $(2)_V$ col metodo delle approssimazioni successive. In tal modo Egli dimostra l'esistenza di una soluzione dell'equazione integrale $(2)_V$ per $x - x_0$ minore di una determinata costante.

La Memoria di LE ROUX precede di alcuni mesi la pubblicazione dei risultati del VOLTERRA, il quale non conosceva allora tale Memoria.

I risultati del LE ROUX, considerati come anteriori a quelli del VOLTERRA segnano un notevole progresso nel problema generale della risoluzione delle equazioni $(1)_V$, $(2)_V$; però sono i risultati generali del VOLTERRA che completano esaurientemente lo studio di tale problema. Infatti il LE ROUX si è limitato a considerare solo il caso in cui il limite inferiore di $G(x, x)$ è diverso da *zero*, ed ha trovato che i Suoi risultati valgono solo per $x - x_0$ inferiore ad un certo limite. Quest'ultima limitazione dipende dal fatto che il LE ROUX paragona la serie, che risolve l'equazione integrale $(2)_V$, ad una

(*) *Annales de l'École Normale Supérieure*, S. 3.ª, T. XII, 1895.

serie geometrica; mentre il Volterra riesce a dimostrare che la Sua serie converge come una serie esponenziale.

Per ultimo indicherò brevemente col Bateman (*), come l'integrazione dell'equazione differenziale lineare generale di ordine n

$$P_x(y) \equiv \frac{d^n y}{d x^n} + C_1(x) \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \cdots + C_n(x)\, y = 0, \tag{B}$$

si può ricondurre alla risoluzione di un'equazione del tipo $(2)_V$.

Se si moltiplicano ambo i membri della (B) per $x^r\,(r < n)$, e si integra lungo il cammino che va da α ad x, si trova:

$$\left\{ R_x \Big[y(x),\, x^r \Big]_\alpha^x + \int_\alpha^x y(x)\, p_x \{ x^r \} \, dx = 0, \right. \tag{C}$$

dove $p_x(u) = 0$ è l'equazione aggiunta della (B), e dove

$$\frac{d}{dx} \{ R_x(y,\, u) \} = u\, P_x(y) - y\, p_x(u).$$

Facendo nella (C) $r = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ ed eliminando dalle n equazioni, che così si ottengono, le $\frac{d^n y}{dx^n}, \ldots, \frac{dy}{dx}$, risulta la particolare equazione integrale del tipo $(2)_V$:

$$Q_{n-1}(x) = y(x) + \frac{1}{(n-1)!} \int_\alpha^x p_t \{ (t + x)^{n-1} \} \, y(t)\, dt,$$

con $Q_{n-1}(x)$ polinomio di grado $n-1$.

Passando ora alla considerazione delle equazioni del tipo Fredholm, rammenterò dapprima il metodo del Volterra per la risoluzione dell'equazione $(1)_F$, precedentemente menzionato, il quale stabilisce, in certo qual modo, un legame tra le equazioni $(1)_V$, $(1)_F$, e può condurre in certi casi alla risoluzione dell'equazione $(1)_F$; e rammenterò ancora lo studio sulla equazione $(1)_F$ del prof. Levi-Civita, del quale pure facemmo menzione.

(*) *The theory of integral equations* (Proceedings of the London Mathematical Society; S. 2.ª, Vol. 4.º, Par. 2.ª).

Il FREDHOLM in una brevissima Nota del Gennaio 1900 (*) risolve l'equazione integrale del tipo $(2)_F$ in modo veramente semplice e sorprendente. Per potere seguire il FREDHOLM nelle sue splendide ricerche, importa notare anzitutto che il *problema di Neumann* quale fu enunciato dal POINCARÉ nella Sua celebre Memoria degli *Acta mathematica* (t. 20), si può considerare come un problema di inversione di integrali definiti del tipo:

$$\varphi(x) + \lambda \int_a^b G(x, y)\, \varphi(y)\, dy = \psi(x), \tag{D}$$

con λ parametro arbitrario. Il FREDHOLM nella Sua Nota rammenta che il doppio strato, il quale risolve il problema di NEUMANN, come dimostrò il POINCARÉ, è una funzione meromorfa di λ; per conseguenza la densità di esso doppio strato deve anch'essa essere una funzione meromorfa di λ, e deve quindi potersi esprimere mediante il quoziente di due funzioni olomorfe di λ. Ciò premesso, Egli scrive le funzioni olomorfe di λ, che sono rispettivamente numeratore e denominatore della frazione, che rappresenta la soluzione dell'equazione integrale generale (D).

Nel metodo di FREDHOLM l'equazione (D) è considerata come limite di un sistema di equazioni lineari:

$$\varphi_t + \lambda \sum_1^n{}_i K_{ti}\, \varphi_i = \psi_t \text{ (**)}, \qquad (t = 1, 2, \ldots, n). \tag{D$'$}$$

Difatti il numeratore ed il denominatore della formola di risoluzione del FREDHOLM sono espressi per mezzo di due serie, che si possono ottenere dalla formola generale di risoluzione del sistema (D)$'$ con passaggio al limite.

Il FREDHOLM, scritte queste due serie, ne dimostra la convergenza uniforme in tutto il piano della variabile complessa λ con l'aiuto di un importante teorema di HADAMARD sul limite superiore del modulo di un determinante; e poi verifica che la frazione scritta soddisfa effettivamente all'equa-

(*) *Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet* (Oefversigt of Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1900; N.° 1; Stockholm).

(**) Il prof. VOLTERRA, nei suoi citati lavori del 1896, considera pure l'equazione integrale $(1)_V$ come limite di un sistema di equazioni lineari, al fine di giustificare, in certo modo, la singolarità che presenta la $(1)_V$, quando il limite inferiore di $G(x, x)$ è lo *zero*.

zione (D) per tutti i valori di λ, per i quali il denominatore, che Egli chiama *determinante* dell'equazione (D), è diverso da *zero*.

Dimostra in seguito che per i valori di λ, per i quali il determinante dell'equazione (D) si annulla, l'equazione integrale omogenea:

$$\varphi(x) + \lambda \int_a^b G(x, y)\, \varphi(y)\, d y = 0 \tag{E}$$

ammette sempre qualche soluzione $\varphi(x)$ non identicamente nulla.

Ciò premesso, prova che nel caso del *problema interno di Dirichlet* la corrispondente equazione integrale omogenea (E) non ammette soluzione alcuna diversa da *zero*, e ne conclude quindi che l'equazione (D) nel caso del *problema interno di Dirichlet* ammette una soluzione.

Il noto metodo di Neumann, applicato dal Poincaré alla risoluzione del problema di Neumann, dà la risoluzione dell'equazione (D) per i valori di λ di modulo inferiore al modulo del valore di λ, più vicino allo *zero*, che annulla il corrispondente determinante. Il Kellogg (*) dimostra la coincidenza della serie che dà il metodo di Neumann nella risoluzione dell'equazione integrale (D), con quella data da Fredholm.

Nel 1903 il Fredholm in una bellissima Memoria degli *Acta mathematica* (t. 27) riprende lo studio dell'equazione (D) nella forma $(2)_F$. Introdotto il solito determinante D_G nell'ipotesi di $\lambda = 1$ e introdotte alcune serie, analoghe al determinante D_G, che chiama *minori* (dei varii ordini) del determinante, Egli stabilisce alcune relazioni fondamentali tra questi minori ed il determinante, suggerite dagli sviluppi della Sua prima Nota.

Allora, interpretando il primo membro dell'equazione $(2)_F$ come una operazione S_G eseguita sulla funzione $\varphi(x)$, deduce dalle dette relazioni, con tutta semplicità, i seguenti risultati generali:

1.° *se il determinante dell'equazione* $(2)_F$ *è diverso da zero, questa equazione ammette una soluzione ed una solamente, che si ottiene eseguendo sulla funzione data* $\psi(x)$ *una determinante operazione, analoga alla* S_G;

2.° *la condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una soluzione*

(*) *Zur Theorie der Integralgleichung* $A(s, t) - \mathbf{A}(s, t) = \mu \int_0^1 A(s, r)\, \mathbf{A}(r, t)\, d r$ (Göttinger Nachrichten, 1902).

non identicamente nulla dell'equazione omogenea:

$$S_G\, \varphi(x) = 0, \tag{E$'$}$$

è che sia $D_G = 0$; *se* n *è l'ordine del primo minore di* D_G, *che sia diverso da zero, l'equazione omogenea* (E)$'$ *ammette* n *soluzioni* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ *linearmente indipendenti ed* n *solamente.*

Premessi questi risultati, torna ad occuparsi della risoluzione dell'equazione $(2)_F$ nel caso di $D_G = 0$. In tale ricerca è condotto a considerare l'equazione integrale omogenea (*coniugata*)

$$T_G\, \varphi(x) = 0, \tag{E$''$}$$

che si ottiene dalla (E)$'$ scambiando nella funzione caratteristica $G(x, y)$ la x con la y, e trova:

3.° *l'equazione* (E)$''$ *ammette anche essa* n *soluzioni* $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ *non identicamente nulle, linearmente indipendenti ed* n *solamente;*

4.° *condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione* $(2)_F$ *ammetta una soluzione è che la data funzione* $\psi(x)$ *soddisfi alle* n *condizioni:*

$$\int_a^b \psi_i(x) \,.\, \psi(x)\, d\,x = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{F}$$

Nella stessa Memoria il Fredholm riconduce, con artifizio altrettanto semplice ed elegante, il caso di un sistema di equazioni del tipo $(2)_F$ al caso di una sola equazione dello stesso tipo; ed in fine estende i Suoi risultati al caso, assai frequente nelle applicazioni, in cui la funzione caratteristica diviene infinita di ordine inferiore al primo per $x = y$. L'analisi relativa a questa estensione Egli completa nel solo caso in cui il determinante dell'equazione integrale è diverso da zero.

Il Plemelj (*), guidato dai risultati di Fredholm, riprende lo studio dell'equazione (D). Precisamente Egli considera l'equazione, che chiameremo $(D)_1$, analoga alla (D), la quale lega la funzione caratteristica $G(x, y)$ con la funzione caratteristica della formola di risoluzione della (D). Deduce dapprima la soluzione di tale equazione col metodo di Neumann, ed ese-

(*) *Zur theorie der Fredholmschen Funktionalgleichung* Monatshefte für Mathematik und Physik; XV, Jahrg.).

guisce poi il prolungamento analitico di questa soluzione. I nuovi risultati, che in questo modo ottiene, si possono così riassumere: *se il valore* $\lambda = \lambda_0$ *è radice di ordine* p *dell'equazione* $D_{\lambda G} = 0$ *ed* n *è l'ordine del primo minore di* $D_{\lambda G}$ *che non sia identicamente nullo, la funzione caratteristica della formola, che risolve l'equazione* (D), *cioè la soluzione dell'equazione* $(\mathrm{D})_1$, *avrà la forma:*

$$\frac{\varphi_1(x)\psi_1(y)}{(\lambda-\lambda_0)^{i_1}} + \frac{\varphi_2(x)\psi_2(y)}{(\lambda-\lambda_0)^{i_2}} + \cdots + \frac{\varphi_n(x)\psi_n(y)}{(\lambda-\lambda_0)^{i_n}} + F(x,y), \quad [i_1+i_2+\cdots+i_n = p]$$

con $F(x, y)$ *funzione finita per* $\lambda = \lambda_0$, *e dove le soluzioni* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ *dell'equazione omogenea* (E)' *e le soluzioni* $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ *dell'equazione omogenea coniugata* (E)'' *sono determinate in modo che, come può sempre farsi, soddisfacciano alla proprietà (detta di ortogonalità)*:

$$\int_a^b \varphi_r(x)\psi_r(x)\,dx = \begin{cases} 1 & \text{per } r = s, \\ 0 & \text{» } r = -s. \end{cases}$$

Estende poi, con tutta facilità, i Suoi risultati al caso in cui la funzione caratteristica diviene infinita, discutendo in particolare anche il caso in cui il determinante $D_{\lambda G}$ si annulla.

Come si vede, i nuovi risultati del Plemelj sono un notevole complemento di quelli del Fredholm.

Il contributo portato da Hilbert e dai Suoi scolari allo studio dell'equazione integrale (D), principalmente per le splendide applicazioni all'analisi, è talmente vasto ed importante, da meritare una lunga e dettagliata esposizione. Però io debbo qui restringere molto i limiti di tale esposizione per non dare troppo lunghe proporzioni alla presente comunicazione e per non trascurare d'altra parte alcune quistioni delle quali voglio parlare.

Nella Sua prima comunicazione dei *Nachrichten* di Gottinga (1904) l'Hilbert, guidato dai criterii che condussero il Fredholm alla risoluzione dell'equazione (D), parte dal problema della trasformazione ortogonale di una forma quadratica di n variabili in una somma di quadrati, e, col passaggio al limite, arriva al seguente teorema fondamentale: *siano* $x(s)$, $y(s)$ *due funzioni arbitrarie tali che i due integrali:*

$$\int_a^b \{x(s)\}^2\,ds, \qquad \int_a^b \{y(s)\}^2\,ds$$

si mantengono inferiori ad una quantità positiva, che si può fissare, e sia $G(s, t)$ una funzione simmetrica di s e di t; allora si ha:

$$\int_a^b \int_a^b G(s, t)\, x(s)\, y(t)\, d s\, d t = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} \int_a^b \varphi_n(s)\, x(s)\, d s \int_a^b \varphi_n(s)\, y(s)\, d s,$$

dove le λ_n sono i valori di λ che annullano il determinante $D_{\lambda G}$, le φ_n sono le soluzioni dell'equazione:

$$0 = \varphi_n(s) + \lambda_n \int_a^b G(s, t)\, \varphi_n(t)\, d t$$

determinate con la condizione:

$$\int_a^b \{\varphi_n(s)\}^2\, d s = 1,$$

e dove ancora la serie del secondo membro è assolutamente convergente.

Da questo teorema deduce importanti criterii di sviluppibilità di una funzione in serie di funzioni φ_n, tra i quali citerò il seguente:

Se $G(s, t)$ è un allgemeiner Kern, ossia tale che, data una quantità positiva arbitrariamente piccola ε ed una qualsiasi funzione continua $g(s)$, esista sempre una funzione continua $h(s)$ tale che si abbia:

$$\int_a^b \left\{ g(s) - \int_a^b G(s, t)\, h(t)\, d t \right\}^2 d s < \varepsilon;$$

e se $f(s)$ è una funzione che si può mettere sotto la forma:

$$f(s) = \int_a^b G(s, t)\, k(t)\, d t$$

con $k(t)$ funzione continua, allora si avrà:

$$f(s) = c_1 \varphi_1(s) + c_2 \varphi_2(s) +$$

$$c_i = \int_a^b f(s)\, \varphi_i(s)\, d s,$$

e la serie al secondo membro sarà convergente assolutamente e uniformemente.

In questa medesima comunicazione considera, in modo estremamente elegante, il caso in cui la funzione caratteristica $G(s, t)$ per $x = y$ diviene infinita di ordine inferiore ad $^1/_2$.

Nella seconda comunicazione introduce l'espressione differenziale:

$$L(u) \equiv \frac{d\left(p\frac{du}{dx}\right)}{dx} + qu$$

e la funzione di Green relativa all'equazione $L(u) = 0$ con dati condizioni ai limiti a, b del campo di variabilità; e stabilisce i seguenti risultati: *se la funzione di* Green *relativa all'equazione* $L(u) = 0$ *viene considerata come funzione caratteristica dell'equazione* $(1)_F$ *e la funzione* $\psi(x)$ *è finita e continua e derivabile due volte, esisterà una soluzione di questa equazione ed una solamente, che sarà data dalla formola:*

$$\varphi(x) = -L\left(\psi(x)\right);$$

se la medesima funzione di Green *viene considerata come funzione caratteristica dell'equazione integrale* (D), *la funzione caratteristica della formola di risoluzione di questa equazione è uguale alla funzione di* Green *relativa all'equazione:*

$$L(u) - \lambda u = 0.$$

In seguito osserva che le funzioni φ_n, introdotte nella comunicazione precedente, rappresentano qui le soluzioni delle equazioni:

$$L(\varphi_n) - \lambda_n \varphi_n = 0;$$

e quindi, applicando i Suoi teoremi sugli sviluppi in serie ed estendendo ancora i Suoi risultati sull'espressione $L(u)$ al caso delle due dimensioni, ottiene come casi particolari i noti sviluppi di una funzione arbitraria in serie di funzioni trigonometriche, di Bessel, sferiche, di Lamé, quelli in serie di funzioni armoniche di Poincaré, ecc.

Nella terza comunicazione applica la teoria delle equazioni integrali alla risoluzione del problema di Riemann, limitandosi alla trattazione del problema di determinare una funzione di variabile complessa in un'area piana, con la condizione che al contorno la parte reale u e la parte immaginaria v soddisfacciano alla condizione lineare:

$$a(s) \,.\, u(s) + b(s) \,.\, v(s) + c(s) = 0,$$

essendo $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ date funzioni, sottoposte a certe restrizioni.

Prima di parlare, per quanto assai brevemente, delle due ultime e recenti comunicazioni di HILBERT (*), è opportuno che io qui faccia menzione di un interessante lavoro di ERHARD SCHMIDT (**), il quale si riconnette con i risultati delle due prime comunicazioni di HILBERT.

Lo SCHMIDT servendosi di disuguaglianze analoghe a quelle ben note di SCHWARZ, ritrova i risultati di HILBERT sugli sviluppi in serie, togliendo in particolare la condizione che la funzione $G(s, t)$ sia un *allgemeiner Kern*, e dà, per il caso di $G(s, t)$ funzione simmetrica la seguente elegante formola di risoluzione dell'equazione (D):

$$\varphi(x) = \psi(x) + \lambda \sum_{\nu} \frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu - \lambda} \int_a^b \psi(t)\, \varphi_\nu(t)\, d\,t.$$

In seguito estende alcuni dei Suoi risultati al caso di $G(s, t)$ funzione non simmetrica, introducendo le due funzioni caratteristiche date dagli integrali:

$$\overline{G}(s, t) = \int_a^b G(s, r)\, G(t, r)\, d\,r, \qquad \underline{G}(s, t) = \int_a^b G(r, s)\, G(r, t)\, d\,r$$

e sostituendo alle funzioni φ_n di HILBERT una serie di coppie di funzioni φ_n, ψ_n tali che

$$\varphi_n(s) = \lambda_n \int_a^b G(s, t)\, \psi_n(t)\, d\,t, \qquad \psi_n(s) = \lambda_n \int_a^b G(t, s)\, \varphi_n(t)\, d\,t.$$

Tornando ora ai lavori di HILBERT, diremo brevemente che nella quarta comunicazione fa una trattazione sistematica delle forme quadratiche con infinite variabili; e che nella quinta comunicazione Egli applica, gli ottenuti

(*) *Nachrichten* di Gottinga, 1905.

(**) *Zur theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen*, I Theil (Math. Annalen, Bd. LXIII).

risultati su queste forme, alla teoria dell'equazione integrale (D). Precisamente ritrova con rapidità ed eleganza i risultati di FREDHOLM, quelli Suoi e quelli di SCHMIDT. Inoltre deduce i Suoi risultati sulle equazioni differenziali del 2.° ordine, precedentemente menzionati, che estende ancora ai sistemi di equazioni, mediante l'introduzione di una certa equazione integrale del tipo (D), che chiama *equazione integrale polare.*

I risultati di HILBERT e di SCHMIDT, che abbiamo rapidamente passato in rivista, ed altri importanti ancora dovuti all'applicazione all'analisi della teoria dell'equazione (D), come ad esempio quelli di MAX MASON (*) sulle equazioni del tipo ellittico, di FUBINI sulle funzioni automorfe (**), ecc., mostrano qual valido strumento analitico sia la teoria creata da FREDHOLM sull'equazione $(2)_F$.

Ma ben altri e, se possibile, più meravigliosi frutti ha dati la teoria di FREDHOLM nel campo delle applicazioni alla fisica matematica.

L'artificio tanto semplice, ideato da FREDHOLM per risolvere il problema interno di DIRICHLET, si applica quasi tal quale alla maggior parte dei problemi al contorno, come ad esempio, quello dell'equilibrio dei solidi elastici, quello dell'equazione doppia di LAPLACE, quello delle temperature stazionarie, ecc. Esso si può riassumere nelle seguenti tre operazioni: 1.° costruire una opportuna equazione integrale $(2)_F$, od un opportuno sistema di equazioni integrali della specie $(2)_F$; 2.° dedurre sistematicamente la funzione caratteristica dell'equazione integrale costruita, da soluzioni particolari del problema al contorno che si studia, simili all'integrale $\frac{1}{r}$ dell'equazione di LAPLACE nello spazio ordinario; 3.° dimostrare che l'equazione integrale omogenea, corrispondente all'equazione integrale da risolvere, o la sua coniugata non ammettono soluzione alcuna diversa da zero.

Eseguite le dette operazioni, gli enunciati teoremi di FREDHOLM sull'equazione $(2)_F$ ci assicurano dell'esistenza della soluzione dell'equazione integrale (o del sistema) che si considera; ed allora il doppio strato, o il doppio strato generalizzato, il quale abbia per densità questa soluzione, risolve completamente il proposto problema al contorno.

Ma può darsi che l'equazione integrale omogenea, corrispondente all'equazione integrale che si studia, ammetta una o più soluzioni non identica-

(*) *Journal de math.*, Tomo 18, anno 1904.
(**) *Annali di Matematica*, T. XIV, 1907.

mente nulle. Allora la detta equazione integrale non omogenea, in generale, non ammette soluzioni; infatti gli enunciati teoremi di Fredholm ci dicono che in tal caso la funzione arbitrariamente data deve soddisfare a delle condizioni integrali [le (F)]. Qualche volta, come ad es. nell'integrazione dell'equazione doppia di Laplace per le aree piane, queste condizioni sono dovute al problema stesso che si studia; qualche altra invece, come ad es. nei problemi al contorno per i campi infiniti, sono dovuti al fatto che la soluzione del problema non è rappresentabile mediante un doppio strato o un doppio strato generalizzato. In quest'ultimo caso però il problema al contorno si può sempre risolvere, valendosi del seguente artifizio (*).

Si considerino alcuni integrali particolari del problema proposto, i quali non siano rappresentabili mediante doppii strati o doppii strati generalizzati; si aggiungano questi integrali, considerati nei punti del contorno del campo e moltiplicati per coefficienti indeterminati, alla funzione data ad arbitrio; si determinino questi coefficienti in modo che la somma ottenuta soddisfaccia alle condizioni (F). Allora la corrispondente equazione $(2)_F$ ammetterà una soluzione; e quindi il proposto problema al contorno sarà risoluto, nell'ipotesi che i valori al contorno siano quelli rappresentati dalla somma suddetta. Dopo ciò, è superfluo dire come si può arrivare immediatamente alla risoluzione del problema generale proposto.

La generalità dei metodi ora esposti è tale, che non sarà difficile immaginare *due* problemi al contorno, l'uno interno, l'altro esterno, i quali comprendano come casi particolari quello di Dirichlet, quello dell'equilibrio di elasticità, quello delle temperature stazionarie, ecc. Infatti basterà costruire un sistema di strati generalizzati e un sistema di doppii strati generalizzati, che comprendano come casi particolari gli strati e doppi strati relativi agli enumerati problemi al contorno; scrivere poi le equazioni integrali che ne risultano, ed applicare a queste equazioni gli enunciati procedimenti generali. In questo modo verranno ad essere considerati sotto un unico punto di vista i più disparati problemi al contorno della fisica-matematica.

Tornando ora alle considerazioni sui singoli problemi al contorno, debbo osservare che non è sempre facile superare le difficoltà che presentano le tre operazioni, nelle quali si riassume l'artifizio di Fredholm. Così ad esempio, il Fredholm stesso nella risoluzione del problema dell'equilibrio dei

(*) Lauricella, *Alcune applicazioni della teoria delle equazioni funzionali*... (Il Nuovo Cimento, Serie 5.ª, Vol. XIII, 1907).

corpi elastici per dati spostamenti in superficie (*), dopo di avere scritto un conveniente sistema di equazioni integrali, a dir vero, poco trasparente; cioè dopo di avere eseguita la prima delle tre indicate operazioni, abbandona il Suo primitivo metodo, forse in causa delle difficoltà incontrate nella seconda operazione. Tuttavia Egli ne riesce vittorioso mediante un procedimento, il quale, oltre a risolvere la quistione che si era proposta, può applicarsi ad altre importanti quistioni di fisica-matematica. Tale procedimento si fonda sulla seguente osservazione. Dalla dimostrazione di FREDHOLM sulla convergenza delle serie numeratore e denominatore (il determinante) della frazione, mediante cui può esprimersi la soluzione dell'equazione integrale $(2)_F$, risulta evidente che, se la funzione caratteristica di questa equazione è funzione olomorfa di un parametro k, anche le due dette serie saranno olomorfe in k, e per conseguenza la soluzione dell'equazione $(2)_F$ sarà funzione meromorfa di k. Ora le equazioni integrali di FREDHOLM per l'elasticità contengono linearmente il parametro k di elasticità; e poichè per $k=0$ il corrispondente determinante è diverso da zero, ne segue che esso non è identicamente nullo; e quindi che la soluzione delle dette equazioni integrali è data da un sistema di funzioni meromorfe di k. Il FREDHOLM costruisce allora un sistema di funzioni U, V, W dei punti del corpo elastico, analoghe ai doppii strati, e aventi per densità le suddette funzioni meromorfe. Le U, V, W saranno anch'esse funzioni meromorfe di k, e per i valori di k, per i quali il determinante è diverso da zero, soddisfano alle equazioni indefinite dell'equilibrio e nei punti della superficie prendono i valori dati. Per i casi di isotropia il FREDHOLM dimostra che le funzioni U, V, W sono certamente finite. Questo però non sarebbe sufficiente per dedurre allora, che le U, V, W nei punti della superficie contorno coincidono con le funzioni date; infatti si può dubitare che per qualche valore di k le funzioni densità abbiano un polo, pure essendo finite le funzioni U, V, W (come effettivamente succede in altri casi); e che per conseguenza non si possa applicare il teorema di discontinuità dei doppi strati. Un tal fatto non si verifica nei casi di isotropia; perchè, come si dimostra con la introduzione del concetto di pseudotensioni (**), in questi casi il determinante delle equazioni integrali è diverso da zero. Tuttavia l'analisi del FREDHOLM può rendersi esente dal cennato

(*) *Solution d'un problème fondamental de la théorie de l'élasticité* (Arkiv för matematik, astr. och fysik, Bd. 2, N. 28).

(**) Vedi mia cit. Memoria, Cap. IV.

dubbio, indipendentemente dalla considerazione delle pseudo-tensioni con l'aggiunta di qualche dettaglio, come ho mostrato in una Nota (*) in corso di stampa, nella quale applico i risultati di FREDHOLM sull'elasticità (**) ad una nuova dimostrazione di esistenza relativa al problema dell'integrazione della equazione doppia di LAPLACE.

Avevo detto sopra che la nuova idea di FREDHOLM può essere utilmente applicata ad altre importanti quistioni di fisica-matematica. Per potere dare un'idea di queste nuove applicazioni, è necessario che io qui faccia menzione dei bellissimi risultati ottenuti dal PICARD, come applicazione della teoria di FREDHOLM. Senza parlare delle eleganti soluzioni che dà del problema delle temperature stazionarie e del problema dell'induzione magnetica, mi limiterò a rammentare che Egli riconduce l'integrazione dell'equazione differenziale lineare del 2.° ordine di tipo ellittico alla risoluzione di una equazione integrale della forma:

$$\varphi(x) + \int_a^b G(x, y) \left\{ \alpha(y) \cdot \frac{d\varphi}{dy} + \beta(y) \cdot \varphi(y) \right\} dy = \psi(x), \tag{G}$$

dove $G(x, y)$ è la nota funzione di GREEN e dove $\alpha(y)$, $\beta(y)$ sono funzioni note, finite e continue insieme alle derivate del 1.° ordine. Questa equazione trasforma poi in un'equazione integrale della forma $(2)_F$ mediante una integrazione per parti. Studia infine in modo particolare l'equazione delle vibrazioni delle membrane, introducendo la funzione di GREEN, a simiglianza di quanto fanno l'HILBERT e MAX MASON. Ritrova così i noti risultati su questa equazione, dovuti principalmente al POINCARÉ.

La critica mossa alcuni anni or sono dal prof. DINI (***) al classico metodo delle approssimazioni successive del PICARD per le equazioni alle derivate parziali del 2.° ordine, prova che, se da un canto l'uso della funzione di GREEN (o delle sue generalizzazioni) rende molto intuitivi i risultati che da essa si possono fare dipendere, d'altro canto la discussione completa di questi risultati richiede uno studio approfondito, di sua natura poco semplice, delle proprietà di essa funzione, e qualche volta richiede ancora delle limitazioni tali sulla natura del campo che si considera o sulla natura delle

(*) *Rendiconti della R. Acc. dei Lincei*; vol. XVI, serie 5.ª; 1907.

(**) Il prof. MARCOLONGO estende tali risultati di FREDHOLM ai campi infiniti.

(***) *Acta mathematica*, tomo 25.

funzioni date, da scemare di molto la generalità dei risultati. Ora nel caso delle equazioni delle vibrazioni delle membrane, come in casi analoghi della fisica-matematica, si può fare a meno di introdurre la funzione di Green (o le sue generalizzazioni). Basterà ricordare infatti che si posseggono integrali delle dette equazioni differenziali, perfettamente analoghi ai doppii strati: esse si possono ottenere dai potenziali ritardati e contengono un parametro variabile. Alle equazioni integrali, suggerite dalla considerazione di tali doppii strati generalizzati e contenenti un parametro variabile, si possono applicare appunto i ragionamenti che il Fredholm fa sulle equazioni integrali dell'elasticità. In questo modo, come ho mostrato per il caso del raffreddamento dei corpi in una Memoria, che sarà pubblicata negli *Annali di Matematica* (*), si ritrovano con semplicità, ed evitando quistioni di rigore, quei risultati che, iniziati dal Poincaré nella Sua celebre Memoria: *Sur les équations de la physique-mathématique* (**), furono poi maggiormente sviluppati in una serie di lavori dello Stekloff, del Liapaunoff, dello Zaremba, del Korn, ecc.

Fatta pure astrazione della incomparabile semplicità che si raggiunge con l'applicazione dei ragionamenti di Fredholm, non è certo trascurabile la generalità nei risultati. Infatti i ragionamenti dei detti autori si fondano essenzialmente su un noto lemma del Poincaré, dimostrato da questi solo per i campi convessi ed esteso ultimamente dal Korn e dal dott. E. Levi a campi non convessi, ma di limitata generalità; mentre i ragionamenti di Fredholm si applicano a campi non convessi, generali quanto quelli per i quali si dimostra il principio di Dirichlet.

Ma è assai probabile che ancora un nuovo importante ufficio debba compire il nuovo artifizio di Fredholm: intendo qui parlare della quistione delle *soluzioni eccezionali* nei campi infiniti, intorno alla quale si hanno tutt'ora idee incomplete.

Chiudo il mio dire sull'equazione (D), rammentando una bellissima Memoria del prof. Pincherle (***), scritta principalmente con l'intento di dedurre da un'unica fonte i risultati del Volterra e del Fredholm sulle equazioni integrali $(2)_V$, $(2)_F$.

In questa Memoria il prof. Pincherle, facendo tesoro di un Suo fecondo

(*) Vedi il Vol. XIV, pag. 143 e seguenti.

(**) *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. VIII, 1894.

(***) *Sulle equazioni funzionali lineari* (Mem. della R. Acc. delle Sc. dell'Ist. di Bologna, S. 6.ª, Vol. III).

concetto, introduce una serie di potenze di un certo parametro k, i cui coefficienti sono potenze di una data operazione: questa serie nel caso dell'equazione $(2)_V$ corrisponde al valore $k = -1$ ed è convergente uniformemente ed assolutamente, mentre nel caso dell'equazione $(2)_F$ è funzione meromorfa di k.

Introduce inoltre il concetto di *elemento invariante*, che corrisponde alle soluzioni dell'equazione integrale omogenea (E); ed inizia la decomposizione di una funzione arbitraria f nella somma dei corrispondenti elementi invarianti.

I procedimenti e i risultati del prof. PINCHERLE fanno intravedere la possibilità di estendere al caso delle funzioni caratteristiche non simmetriche i risultati di HILBERT sugli sviluppi in serie, da un punto di vista diverso da quello di SCHMIDT, del quale abbiamo tenuto parola, e più prossimo ai criterii del POINCARÉ sui noti sviluppi in serie di soluzioni eccezionali.

Prima di passare a trattare dell'equazione $(1)_F$, credo opportuno dire qualche cosa del problema dell'integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi per date tensioni in superficie. Le equazioni integrali che si è condotti a scrivere, per analogia col problema derivato di DIRICHLET, non hanno alcun significato; difatti in generale le note formole del SOMIGLIANA non hanno alcun significato, quando il punto variabile si suppone sulla superficie. Per semplificare le mie considerazioni, dirò, limitandomi ad un campo piano σ chiuso da una linea s, che i doppi strati elastici sono della seguente forma:

$$u(x, y) = \int_s \left(a \frac{d \lg r}{d n} + b \frac{d \lg r}{d s} \right) u(s)\, d s$$

con a, b coefficienti costanti. Se si suppone che il punto (x, y) sia discosto da s si può, mediante un'integrazione per parti, trasformare la precedente formola nell'altra:

$$u(x, y) = \int_s \left(a \frac{d \lg r}{d n} u(s) + c \log r \frac{du}{ds} \right) d s.$$

L'equazione integrale alla quale così si perviene è della forma:

$$\varphi(x) + \int_a^b \left\{ H(x, y)\, \varphi(y) + K(x, y) \frac{d\varphi}{dy} \right\} d y = \psi(x) \tag{H}$$

con $\psi(x)$ funzione nota e $\varphi(x)$ funzione da determinare.

Questa equazione è della medesima natura della equazione (G) del PICARD; però mentre nel caso del PICARD con una integrazione per parti, si è ricondotti, come è stato detto, ad un'equazione del tipo $(2)_F$; nel caso del problema delle tensioni invece tale integrazione per parte non può più eseguirsi.

L'importanza del problema di fisica-matematica che, come abbiamo visto, si riconnette alla risoluzione dell'equazione integrale (H) è tale, da richiedere lo studio di questa equazione.

Passando ora alla considerazione dell'equazione integrale di 1.ª specie del tipo FREDHOLM, cioè alla $(1)_F$, debbo dire anzitutto che su di essa non si hanno risultati completi come quelli relativi alle equazioni integrali degli altri tre tipi. Difatti, a tacere di casi assai particolari, oltre agli studii già menzionati del VOLTERRA e del LEVI-CIVITA, si hanno sull'equazione $(1)_F$ i risultati, diciamo così, incidentali di HILBERT, già menzionati, per il caso in cui la funzione caratteristica sia la funzione di GREEN; ed alcuni casi particolari, di molta importanza, del KELLOGG (*) e del BATEMANN (**), nei quali la risoluzione dell'equazione $(1)_F$ è fatta dipendere dall'equazione $(2)_F$.

L'importanza della equazione $(1)_F$ nel campo delle applicazioni non è inferiore a quella relativa alle altre equazioni già considerate. Abbiamo visto che il teorema di HILBERT-SCHMIDT fa dipendere la quistione della sviluppabilità in serie, dalla risoluzione di un'equazione del tipo $(1)_F$: il noto problema della teoria della funzione potenziale, di costruire uno strato semplice di cui sono noti i valori in superficie, dipende anche esso dalla risoluzione di un'equazione del tipo $(1)_F$.

Il KELLOGG riconduce l'equazione integrale:

$$f(s)=\int_0^1 \varphi(t) \left\{ a \cot \pi (s-t) + S(s,\ t) \right\} d t \tag{I}$$

con $S(s,\ t)$ funzione finita anche per $s=t$, alla risoluzione del tipo $(2)_F$; ed applica i Suoi risultati alla risoluzione del problema della teoria del potenziale, ora enunciato, nel caso di campi a due dimensioni, dei quali si conosca una rappresentazione conforme nel cerchio.

(*) *Unstetigkeiten in dem linearen Integralgleichungen* (Math. Ann., Bd. 58).

(**) L. c.

Tralascio di enumerare qui i varii ed interessanti risultati del Bateman, che rappresentano un notevole contributo alla teoria dell'equazione $(1)_F$, e mi limito a far vedere che il problema generale sopra enunciato della teoria del potenziale, cioè la risoluzione della equazione integrale del tipo $(1)_F$ a cui esso dà luogo, può risolversi mediante due equazioni coniugate del tipo $(2)_F$, di già risolute. Infatti, data una funzione arbitraria ψ dei punti della superficie σ, si costruisca, mediante un'equazione della specie $(2)_F$, il doppio strato, il quale, considerato nel campo finito limitato da σ, prenda in superficie i valori ψ, e si trasformi, pure mediante un'equazione della specie $(2)_F$ (la coniugata della precedente) il doppio strato, così ottenuto, in strato semplice (*). Questo strato semplice risolve il proposto problema di fisica-matematica, ossia la densità, così determinata, di questo strato semplice risolve la corrispondente equazione integrale $(1)_F$.

(*) Cfr. mia cit. Memoria, Cap. III, § 15.

I polinomi d'approssimazione di Tchebychev.

(*Di* LEONIDA TONELLI, *a Bologna.*)

Prima ancora che WEIERSTRASS desse il noto teorema sulla rappresentazione delle funzioni continue di variabile reale, TCHEBYCHEV (*Sur les questions de minima qui se rattachent à la rappresentation approximative des fonctions.* Mémoires de l'Academie impériale des Sciences de S. Petersbourg, t. IX, 1859) studiò la rappresentazione approssimata di tali funzioni mediante polinomi di grado dato. Il metodo di TCHEBYCHEV fu per lungo tempo dimenticato, e solo nel 1902 fu ripreso e reso perfettamente rigoroso da P. KIRCHBERGER (*Inaugural-Dissertation: Ueber Tchebychefsche Annäherungsmethoden.* Göttingen 1902 (*)) il quale mise, per primo, in luce le importanti proprietà di cui godono i polinomi d'approssimazione (che sono quelli che il metodo di TCHEBYCHEV indica per la rappresentazione delle funzioni continue). Più recentemente, nel 1905, il metodo di TCHEBYCHEV è stato esposto, seguendo le traccie del lavoro del KIRCHBERGER, nelle *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes* di E. BOREL. Ultimamente, poi, M. FRÉCHET (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1907) ha enunciato, relativamente alla rappresentazione delle funzioni di una variabile reale, continue ed a periodo 2π, mediante polinomi trigonometrici, risultati analoghi a quelli ottenuti nei lavori sopraddetti (**).

In questo lavoro, esposto brevemente il metodo di TCHEBYCHEV per le funzioni di una variabile reale, passo a farne l'estensione al caso di due

(*) Un estratto di questa Tesi trovasi nei *Mathematische Annalen* del 1903, 57 Band.

(**) Le dimostrazioni dei risultati ottenuti dal FRÉCHET sono state pubblicate nei fascicoli di Gennaio e Febbraio 1908 degli *Annales de l'École Norm. Sup.*, cioè quando il presente lavoro era già depositato alla redazione degli *Annali di Matematica.* Durante la correzione delle bozze del presente lavoro sono venuto a conoscenza di un altro lavoro relativo alla rappresentazione approssimata delle funzioni di una variabile reale: *General theory of approximation by functions, ecc.*, di J. W. YOUNG (Transaction of the American Math. Soc., Luglio 1907).

variabili (*). Qui, tra l'altro, stabilisco, per primo, che, a differenza di quanto avviene nel caso di una sola variabile, in quello di due non sussiste, in generale, l'unicità dei polinomi d'approssimazione. Degna di nota è anche la proposizione che dò al n. 18, § II, P. P., proposizione che è una generalizzazione di quella che, nel caso di una sola variabile, stabilisce la continuità della corrispondenza tra la funzione continua ed il suo polinomio di approssimazione di grado dato. La dimostrazione di tale continuità, così come trovasi nei lavori del KIRCHBERGER e del BOREL e quella mia della generalizzazione detta sono essenzialmente diverse, poichè la prima non si presta ad essere trasportata nel campo delle funzioni di due variabili.

Nella seconda parte del lavoro tratto, sempre secondo il metodo di TCHEBYCHEV, della rappresentazione delle funzioni continue (tanto di una come di due variabili), a periodo 2π, mediante polinomi trigonometrici.

Vengo, infine, nella terza parte, ad applicare (e credo per il primo) il metodo di TCHEBYCHEV alla rappresentazione delle funzioni di variabile complessa. Qui osserverò che le dimostrazioni fino ad ora note per le funzioni di variabile reale delle principali proprietà dei polinomi d'approssimazione — vale a dire, dell'unicità di tali polinomi e della continuità della corrispondenza tra la funzione continua $f(x)$ ed il suo polinomio d'approssimazione di grado n, $\Pi_n(x)$ — fondandosi essenzialmente sulla considerazione del segno della differenza $f(x) - \Pi_n(x)$ nei punti in cui $|f(x) - \Pi_n(x)|$ raggiunge il suo massimo valore, non sono suscettibili di estensione al caso delle funzioni di variabile complessa. Si presta, invece, a tale estensione la dimostrazione dell'unicità (nel caso di una sola variabile reale) da me data in questo lavoro fondandomi solo sopra una proposizione di TCHEBYCHEV. La dimostrazione della continuità sopraddetta l'ho poi ottenuta dall'immediata estensione della dimostrazione, già ricordata, del n. 18, § II, P. P.

Stabilite le più importanti proprietà dei polinomi d'approssimazione, ho introdotto la condizione dell'analicità per la funzione considerata, e ne ho ottenuto per quest'ultima uno sviluppo in serie di polinomi.

Si sa (con HILBERT, PAINLEVÉ, MITTAG-LEFFLER) che una funzione analitica, in un campo in cui (contorno compreso) è regolare, è rappresentabile, a meno di ε, mediante un polinomio; e, conseguentemente, che è sviluppabile in serie di polinomi uniformemente convergente in tutto il campo con-

(*) Questo caso fu studiato anche dal KIRCHBERGER, nel lavoro citato, ma sotto un punto di vista diverso dal mio.

siderato. Ciò che qui si aggiunge a tale risultato è che, *fra tutti i polinomi di dato grado, ve n'è sempre uno ed uno solo che dà della funzione considerata la massima approssimazione; e, di conseguenza, che, fra tutte le serie di polinomi di grado successivamente crescente uniformemente convergenti verso la funzione detta ve n'è sempre una ed una sola che dà la massima convergenza.*

Il presente lavoro è, in sostanza, la tesi da me presentata, nel giugno 1907, all'Università di Bologna per la laurea in Matematiche Pure. Tale lavoro è stato fatto sotto l'ispirazione del prof. ARZELÀ: a Lui, pertanto, la mia vivissima riconoscenza.

Ringraziamenti debbo pure al prof. HILBERT, che gentilmente mi favorì il lavoro del KIRCHBERGER di cui ho parlato più sopra, ed al prof. FRÉCHET per le utilissime indicazioni datemi.

PARTE PRIMA

I.

1. Sia la funzione $f(x)$, reale della variabile reale, data in un intervallo (a, b), ed ivi finita, continua e ad un valore.

Sia poi $P_n(x)$ un polinomio di grado n:

$$P_n(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_n,$$

e si consideri la differenza

$$f(x) - P_n(x) = Y(x),$$

la quale sarà finita e continua in tutto (a, b). Risulterà, perciò, finita e continua in tutto (a, b) anche la funzione $|Y(x)|$. Ne segue che $|Y(x)|$ raggiungerà almeno una volta in (a, b) il suo massimo valore m. Questo massimo m varierà al variare del polinomio $P_n(x)$ (nel quale però rimane fisso il grado n), cioè al variare dei coefficienti $p_0, p_1, \ldots, p_n$; esso perciò potrà considerarsi come una funzione di tali coefficienti: $m(p_0, p_1, \ldots, p_n)$.

Per la sua natura di massimo della funzione $|Y(x)|$, m sarà sempre positivo o nullo. Ne segue che m, come funzione dei parametri p, avrà certamente un limite inferiore $\mu \geq 0$. Se esiste per i parametri p un sistema di valori $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n$, tale che sia, in tutto (a, b),

$$|f(x) - \Pi_n(x)| \leq \mu,$$

dove è $\Pi_n(x) = \pi_0 x^n + \pi_1 x^{n-1} + \cdots + \pi_n$, diremo che $\Pi_n(x)$ è *un polinomio d'approssimazione di grado n della $f(x)$* (*).

2. Si può ora dimostrare che *esiste sempre almeno un polinomio d'approssimazione di grado n.* Non daremo qui, per brevità, la dimostrazione di questa proposizione; essa verrà data, al paragrafo II, addirittura per il caso di due variabili.

3. Consideriamo la differenza

$$Y(x) = f(x) - \Pi_n(x),$$

dove $\Pi_n(x)$ è un polinomio d'approssimazione di grado n della $f(x)$, e, osservato che $|Y(x)|$ raggiunge in (a, b) almeno una volta il suo massimo μ, dimostriamo, con TCHEBYCHEV, che *il numero dei punti di (a, b) in cui $|Y(x)|$ raggiunge il suo massimo μ è certamente maggiore di $n + 1$.*

Siano $x_1, x_2, \dots, x_\nu$ i punti di (a, b) in cui $|Y(x)|$ raggiunge il suo massimo valore μ, e supponiamo che sia $\nu \leq n + 1$. Faremo vedere che in tale ipotesi si può costruire un polinomio di grado n: $\overline{\Pi}_n(x)$, tale che sia, in tutto (a, b),

$$|f(x) - \overline{\Pi}_n(x)| \leq \mu'$$

con $\mu' < \mu$: cosa assurda perchè $\Pi_n(x)$ è un polinomio d'approssimazione di grado n.

Consideriamo il sistema di ν equazioni lineari non omogenee nelle p (qui è ε_r uguale ad 1, o a -1, a seconda che è $f(x_r) - \Pi_n(x_r) = \mu$, o $f(x_r) - \Pi_n(x_r) = -\mu$)

$$\left.\begin{array}{l} p_0 x_1^n + p_1 x_1^{n-1} + \cdots + p_n = \varepsilon_1 \mu \\ p_0 x_2^n + p_1 x_2^{n-1} + \cdots + p_n = \varepsilon_2 \mu \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_0 x_\nu^n + p_1 x_\nu^{n-1} + \cdots + p_n = \varepsilon_\nu \mu. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

(*) Naturalmente non è escluso che i primi coefficienti di $\Pi_n(x)$ siano nulli, vale a dire che $\Pi_n(x)$ sia effettivamente di grado minore di n.

Se, come si è supposto, è $\nu \leq n+1$, il sistema (1) è possibile, perchè almeno uno dei determinanti di ordine ν che si possono estrarre dalla matrice dei coefficienti è diverso da zero: infatti il determinante

$$\begin{vmatrix} x_1^{\nu-1}, & x_1^{\nu-2}, \ldots, & 1 \\ x_2^{\nu-1}, & x_2^{\nu-2}, \ldots, & 1 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ x_\nu^{\nu-1}, & x_\nu^{\nu-2}, \ldots, & 1 \end{vmatrix}$$

è certamente diverso da zero essendo un determinante di VANDERMOND.

Essendo il sistema (1) possibile, si potrà determinare un sistema di valori $p_0, p_1, \ldots, p_n$ tali che soddisfi ad esso. Tali valori $p_0, p_1, \ldots, p_n$, non possono essere tutti nulli perchè i termini noti di (1) sono diversi da zero. Scelto dunque un sistema di valori p che soddisfi al sistema (1), consideriamo il polinomio di grado n

$$P_n(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_n$$

e formiamo l'espressione

$$Y_1(x) = f(x) - \Pi_n(x) - \omega P_n(x) = Y(x) - \omega P_n(x),$$

dove ω è un numero positivo.

Essendo $Y(x)$ e $P_n(x)$ continue in tutto (a, b), preso un numero positivo $\varepsilon < \mu$, potremo determinare un numero positivo δ tale che in tutto (a, b), soddisfatta che sia la disuguaglianza $|x' - x''| \leq \delta$, sia

$$|Y(x') - Y(x'')| < \varepsilon, \qquad |P_n(x') - P_n(x'')| < \varepsilon.$$

In ogni intervallo di lunghezza δ ed avente come punto di mezzo uno dei punti x_r in cui è $Y(x_r) = f(x_r) - \Pi_n(x_r) = \mu$, si ha allora

$$\mu - \varepsilon < Y(x) \leq \mu$$
$$\omega(\mu - \varepsilon) < \omega P_n(x) < \omega(\mu + \varepsilon),$$

perchè, per il sistema (1), è $P_n(x_r) = \mu$. Ne segue

$$\mu - \varepsilon - \omega(\mu + \varepsilon) < Y(x) - \omega P_n(x) < \mu - \omega(\mu - \varepsilon),$$

e, se l'ω è stato scelto minore di $\dfrac{\mu - \varepsilon}{\mu + \varepsilon}$,

$$0 < Y(x) - \omega P_n(x) < \mu - \omega(\mu - \varepsilon),$$

e ciò vale in ogni intervallo δ detto.

Analogamente si trova che, in ogni intervallo δ avente come punto di mezzo uno dei punti $x_{r'}$ in cui è $Y(x_{r'}) = f(x_{r'}) - \Pi_n(x_{r'}) = -\mu$, si ha

$$-\mu + \omega(\mu - \varepsilon) < Y(x) - \omega P_n(x) < 0.$$

Dunque, in ogni intervallo d'ampiezza δ ed avente come punto di mezzo uno dei punti x_r ove è $|Y(x_r)| = \mu$, si ha

$$|Y_1(x)| < \mu - \omega(\mu - \varepsilon). \tag{2}$$

Dall'intervallo (a, b) togliamo gli intervalli δ detti, nei quali è verificata la (2), e indichiamo con A l'insieme degli intervalli che rimangono su (a, b). In A la $|Y(x)|$ avrà un massimo $\mu'' < \mu$, onde in tutto A si avrà

$$|Y(x)| \leqq \mu''. \tag{3}$$

In tutto (a, b), poi, il polinomio $P_n(x)$ avrà un massimo valore assoluto M, onde, se prendiamo ω in modo che sia

$$\omega < \frac{\mu - \varepsilon}{\mu + \varepsilon}, \qquad \omega < \frac{\mu - \mu''}{2M},$$

avremo in tutto (a, b)

$$|\omega P_n(x)| < \frac{\mu - \mu''}{2}. \tag{4}$$

Per la (3) e la (4) è perciò, in A,

$$|Y_1(x)| = |Y(x) - \omega P_n(x)| \leqq |Y(x)| + |\omega P_n(x)|$$

$$Y_1(x) \ < \mu'' + \frac{\mu - \mu''}{2} = \frac{\mu + \mu''}{2}. \tag{5}$$

Dalle (2) e (5) risulta che in tutto (a, b) $|Y_1(x)|$ è minore del maggiore dei due numeri $\mu - \omega(\mu - \varepsilon)$, $\frac{\mu + \mu'}{2}$, cioè è minore di un numero $\mu' < \mu$. Avendosi in tutto (a, b)

$$Y_1(x) \ = |f(x) - (\Pi_n(x) + \omega P_n(x))| < \mu' < \mu,$$

il polinomio di grado n

$$\Pi_n(x) + \omega P_n(x) = (\pi_0 + \omega p_0)x^n + (\pi_1 + \omega p_1)x^{n-1} + \cdots + (\pi_n + \omega p_n)$$

dà della $f(x)$ un'approssimazione maggiore del polinomio $\Pi_n(x)$, il che contraddice all'ipotesi che $\Pi_n(x)$ sia d'approssimazione.

Resta così dimostrato che il numero dei punti di (a, b) in cui $|f(x) - \Pi_n(x)|$ raggiunge il suo massimo valore μ è certamente maggiore di $n+1$.

4. Veduto questo, dimostriamo che

esiste per la funzione $f(x)$ un solo polinomio d'approssimazione di grado n.

Supponiamo, infatti, che di tali polinomi ne esistano due: $\Pi_n(x)$ e $\overline{\Pi}_n(x)$, e consideriamo il polinomio, pure di grado n, $\frac{\Pi_n(x) + \overline{\Pi}_n(x)}{2}$. Avremo

$$\left| f(x) - \frac{\Pi_n(x) + \overline{\Pi}_n(x)}{2} \right| \leqq \frac{|f(x) - \Pi_n(x)| + |f(x) - \overline{\Pi}_n(x)|}{2}$$

ed anche, in tutto (a, b), poichè è

$$|f(x) - \Pi_n(x)| \leqq \mu, \qquad |f(x) - \overline{\Pi}_n(x)| \leqq \mu,$$

$$\left| f(x) - \frac{\Pi_n(x) - \Pi_n(x)}{2} \right| \leqq \mu.$$

Dunque anche $\frac{\Pi_n(x) + \overline{\Pi}_n(x)}{2}$ è polinomio d'approssimazione di grado n.

Ne segue, per il teorema di Tchebychev, che

$$\left| f(x) - \frac{\Pi_n(x) + \overline{\Pi}_n(x)}{2} \right|$$

raggiunge il suo massimo valore μ in almeno $n+2$ punti di (a, b).

Ma se in un punto $\bar{x}$ è

$$f(\bar{x}) - \frac{\Pi_n(\bar{x}) + \overline{\Pi}_n(\bar{x})}{2} = \mu$$

deve anche essere

$$f(\bar{x}) - \Pi_n(\bar{x}) = \mu, \qquad f(\bar{x}) - \overline{\Pi}_n(\bar{x}) = \mu;$$

ed, analogamente, se in $\bar{\bar{x}}$ è

$$f(\bar{\bar{x}}) - \frac{\Pi_n(\bar{\bar{x}}) + \overline{\Pi}_n(\bar{\bar{x}})}{2} = -\mu$$

deve anche essere

$$f(\bar{\bar{x}}) - \Pi_n(\bar{\bar{x}}) = -\mu, \qquad f(\bar{\bar{x}}) - \overline{\Pi}_n(\bar{\bar{x}}) = -\mu;$$

Ne segue che nei punti $\bar{x}$ e $\bar{\bar{x}}$ è

$$\Pi_n(x) = \bar{\Pi}_n(x);$$

ma questi punti sono in numero maggiore di $n+1$, dunque è, trattandosi di polinomi di grado n,

$$\Pi_n(x) \equiv \bar{\Pi}_n(x).$$

L'unicità dei polinomi d'approssimazione di grado dato è così completamente dimostrata.

5. Essendo $P_n(x)$ un polinomio qualunque di grado n, consideriamo la funzione

$$Y(x) = f(x) - P_n(x).$$

$|Y(x)|$ raggiunge, come sappiamo, in (a, b) almeno una volta il suo massimo valore m. Chiamiamo allora A' l'insieme dei punti di (a, b) nei quali è $Y(x) = m$, e A'' quello dei punti, pure di (a, b), ove è $Y(x) = -m$. Sia poi δ' un numero positivo tale che, in ogni intervallo di ampiezza minore od uguale a δ', l'oscillazione della $Y(x)$ sia inferiore ad un numero positivo $\varepsilon < \frac{m}{2}$. Dividiamo l'intervallo (a, b) in un numero finito r di parti eguali in modo che l'ampiezza comune δ di queste parti sia minore di δ'. Allora in ognuno degli r intervalli, che chiameremo

$$\delta_1,\ \delta_2, \ldots,\ \delta_r, \tag{1}$$

la $Y(x)$ farà un'oscillazione certamente minore di $\varepsilon < \frac{m}{2}$. Da ciò segue che se all'intervallo δ_s appartiene (*) un punto α' di A' (o un punto α'' di A'') ed all'intervallo δ_t un punto α'' di A'' (o un α' di A'), tra gli intervalli δ_s e δ_t devono essercene almeno altri tre: infatti, altrimenti, nell'intervallo (α', α'') non potrebbe aversi per la $Y(x)$ un'oscillazione uguale a $2m$.

Ciò posto, sia δ_{s_1} il primo intervallo di (1) a cui appartiene un punto dell'insieme $A' + A''$; sia poi δ_{s_2} il primo intervallo, che segue δ_{s_1}, e che contiene un punto di quello tra gli insiemi A' e A'' che non ha punti in δ_{s_1}. In-

(*) Diremo che un punto appartiene ad un intervallo tanto se il punto è interno quanto se coincide con un estremo dell'intervallo.

dichiamo con ξ_1 il punto di mezzo dell'intervallo δ_{s_2-2}; allora, per l'osservazione precedente, avremo che ξ_1 disterà dai punti dell'insieme $A'+A'$ di almeno $\frac{3}{2}\delta$. Detto poi δ_{s_3} il primo intervallo che segue δ_{s_2} e che contiene un punto di quello tra gli insiemi A', A'' che non ha punti in δ_{s_2}, si indichi con ξ_2 il punto di mezzo di δ_{s_3-2}: anche ξ_2 disterà dai punti di $A'+A''$ di almeno $\frac{3}{2}\delta$.

E così si prosegua. Siccome gli intervalli (1) sono in numero finito, così gl'intervalli δ_{s_1}, δ_{s_2}, δ_{s_3},... e per conseguenza anche i punti ξ_1, ξ_2,... saranno in numero finito. Sia $p'-1$ il numero degli ξ: allora questi punti dividono (a, b) in p intervalli

$$L_1, L_2, \ldots, L_p.$$

In ogni L sono contenuti, dell'insieme $A'+A''$, solo punti di A' o solo punti di A''; inoltre, se L_s contiene punti di A' (o di A''), L_{s-1} e L_{s+1} contengono punti di A'' (o di A'). Si ha poi, come già abbiamo osservato, che i punti ξ distano da quelli dell'insieme $A'+A''$ di almeno $\frac{3}{2}\delta$. Il numero p sarà poi al minimo uguale ad 1.

6. La considerazione degli intervalli L relativi ad un polinomio $P_n(x)$ serve per dare un'altra dimostrazione dell'unicità dei polinomi d'approssimazione di grado n. Per tale dimostrazione rimanderemo il lettore alle *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les developpements en séries de polynomes* di E. Borel. Qui diremo solo che da questa dimostrazione risulta anche la proposizione seguente:

condizione necessaria e sufficiente affinchè un polinomio sia d'approssimazione di grado n, è che il numero degli intervalli L relativi ad esso sia superiore ad $n+1$.

Da ciò segue che se il numero p degli intervalli L è superiore anche ad $n+2$, il polinomio considerato non solo è d'approssimazione di grado n, ma anche d'approssimazione dei gradi $n+1$, $n+2$,..., $p-2$.

7. In ciò che precede abbiamo veduto che ad ogni funzione ad un valore, finita e continua in (a, b) corrisponde sempre *uno ed un solo* polinomio d'approssimazione di grado n. Si può ora far vedere che questa corrispondenza è *continua*; vale a dire si può dimostrare che

se $\Pi_n(x)$, $\overline{\Pi}_n(x)$ sono i polinomi d'approssimazione di grado n di due *funzioni ad un valore, finite e continue $f(x)$ e $g(x)$, date in un intervallo (a, b), preso un numero η, positivo e piccolo a piacere, si può poi sempre trovare un altro numero positivo ε tale che, per ogni funzione $g(x)$ soddisfacente, in tutto (a, b), alla condizione*

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon,$$

sia, in tutto l'intervallo detto,

$$|\Pi_n(x) - \overline{\Pi}_n(x)| < \eta.$$

Non daremo qui, per brevità, la dimostrazione di questa proposizione. Daremo in seguito, nel paragrafo secondo, la dimostrazione di una proposizione più generale della presente.

8. Veniamo, ora, a dire qualche cosa sul modo di calcolare il polinomio d'approssimazione di dato grado di una funzione continua in un determinato intervallo.

Consideriamo, dapprima, il caso delle funzioni razionali intere. Si abbia, adunque, da calcolare il polinomio d'approssimazione di grado n, nell'intervallo (a, b), del polinomio $P(x)$. Sia $\Pi_n(x)$ il polinomio da trovarsi. Detto, come al solito, μ il massimo di $|P(x) - \Pi_n(x)|$ in (a, b), esisteranno, per il n. 6, in tale intervallo $n+2$ punti distinti

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}, \tag{1}$$

(tra i quali possono essere anche a e b) soddisfacenti alle relazioni

$$P(x_i) - \Pi_n(x_i) = (-1)^i \mu' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+2), \tag{2}$$

dove μ' è un numero tale che sia $|\mu'| = \mu$. Ora, poichè nei punti (1) $|P(x) - \Pi_n(x)|$ raggiunge il suo valore massimo μ, tali punti saranno tutti, ad eccezione al più di quei due che eventualmente coincidessero con a e b, radici dell'equazione

$$P'(x) - \Pi'_n(x) = 0;$$

avremo, perciò,

$$(x_i - a)(x_i - b)(P'(x_i) - \Pi'_n(x_i)) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+2). \tag{3}$$

Le equazioni (2) e (3) sono in numero di $2(n+2)$. Riguardando in esse come incognite le coordinate (1), il numero μ' e gli $n+1$ coefficienti di

$$\Pi_n(x) = \pi_0 x^n + \pi_1 x^{n-1} + \cdots + \pi_n,$$

si ha un sistema di $2(n+2)$ equazioni a $2(n+2)$ incognite. I numeri 2 e 6 dicendoci che esiste sempre una soluzione di tal sistema, ci dicono che esso è possibile. Potremo, perciò, risolverlo: tra le sue soluzioui vi è quella del nostro problema. Per riconoscere se una soluzione:

$$\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{n+2}, \overline{\mu}', \overline{\pi}_0, \ldots, \overline{\pi}_n,$$

del sistema considerato è quella che noi cerchiamo, basterà verificare se in tutto (a, b) è

$$| P(x) - \overline{\Pi}_n(x) \leq \mu' ,$$

essendo $\overline{\Pi}_n(x) = \overline{\pi}_0 x^n + \cdots + \overline{\pi}_n$. Infatti, se ciò è, la proposizione del n. 6 ci dice che, essendo per le (2) verificate le relazioni

$$P(x_i) - \overline{\Pi}_n(x_i) = (-1)^i \mu' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+2),$$

il polinomio $\overline{\Pi}_n(x)$ è certamente quello d'approssimazione di grado n della funzione $P(x)$.

Si può osservare che il metodo precedente si applica perfettamente anche al caso delle funzioni razionali fratte. Si può dire perciò che, *nel caso delle funzioni razionali, il problema della determinazione del polinomio d'approssimazione di grado dato è algebrico.*

Veniamo ora al caso di una funzione continua qualunque.

Possiamo dire che il *metodo precedente ci permette di calcolare, con quell'approssimazione che si vuole, il polinomio d'approssimazione di dato grado di una qualunque funzione continua.*

Sia $f(x)$ la funzione continua. Preso un numero positivo η, piccolo a piacere, possiamo, per quanto si è detto al n. 7, trovare un numero positivo ε tale che, per ogni funzione continua $g(x)$ soddisfacente alla condizione

$$| f(x) - g(x) | < \varepsilon$$

in tutto l'intervallo che si considera, sia, in tutto lo stesso intervallo,

$$| \Pi_n(x) - \overline{\Pi}_n(x) < \eta ,$$

dove $\Pi_n(x)$ e $\overline{\Pi}_n(x)$ indicano, rispettivamente, i polinomi d'approssimazione, del grado dato n, di $f(x)$ e $g(x)$. Ricordiamo qui il seguente noto teorema di Weierstrass: *Data, in tutto l'intervallo (a, b), una funzione continua $f(x)$, e preso un numero positivo ε piccolo a piacere, si può sempre trovare un po-*

linomio $P(x)$ tale che, in tutto (a, b), sia

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

Se, in forza di questo teorema, prendiamo per funzione $g(x)$ il polinomio $P(x)$ detto, avremo che sarà verificata la relazione

$$|\Pi_n(x) - \overline{\Pi}_n(x)| < \eta,$$

dove $\overline{\Pi}_n(x)$ è il polinomio d'approssimazione, del grado dato n, di $P(x)$; polinomio che, mediante il metodo sopra dato per le funzioni razionali, può essere algebricamente calcolato.

9. Sia, come al solito, $\Pi_n(x)$ il polinomio d'approssimazione di grado n della funzione continua $f(x)$ data in (a, b), e indichiamo con μ_n il massimo di $|f(x) - \Pi_n(x)|$ in tutto l'intervallo detto. Questo μ_n viene ad essere una funzione di n univoca e sempre positiva o nulla (sempre positiva se $f(x)$ non coincide in (a, b) con un polinomio). Inoltre, la funzione μ_n è sempre non crescente, giacchè se fosse $\mu_{n+1} > \mu_n$, $\Pi_{n+1}(x)$ non potrebbe essere il polinomio d'approssimazione di grado $n+1$ di $f(x)$. Ne segue che μ_n tende, al crescere di n, ad un limite λ positivo o nullo. Il teorema di Weierstrass, ricordato al numero precedente, ci dice poi che è $\lambda = 0$. Infatti, se fosse $\lambda > 0$, potendosi, in forza di tal teorema, trovare un polinomio $P(x)$ tale che in tutto (a, b) sia

$$|f(x) - P(x)| < \lambda,$$

detto r il grado di $P(x)$, si avrebbe $\mu_r < \lambda$, onde λ non potrebbe essere il limite di m_n.

Anche il grado m_n di $\Pi_n(x)$ (grado che è $\leq n$) è una funzione univoca di n. Tale funzione è anche sempre non decrescente. Se $f(x)$ non coincide in (a, b) con nessun polinomio, il limite zero, a cui tende μ_n al crescere indefinito di n, non è minimo per μ_n, sicchè, al tendere all'infinito di n, μ_n assumerà certamente infiniti valori distinti; ed infiniti valori distinti dovrà, di conseguenza, assumere anche m_n, giacchè se è $\mu_r \neq \mu_s$ è anche $m_r \neq m_s$. Ne segue, poichè è $m_r \neq m_s$ $(r < s)$ è certamente $m_s - m_r \geq 1$, che m_n, al tendere di n all'infinito, tende esso pure all'infinito.

Si può anche osservare che il fatto del tendere m_n all'infinito con n è indipendente dal teorema di Weierstrass sopra ricordato. Infatti, quand'anche fosse $\lambda > 0$, λ non potrebbe, sempre nell'ipotesi che $f(x)$ non coincida in

(a, b) con alcun polinomio, essere minimo per μ_n. Questo si vede osservando che, se esistesse un $\bar{n}$ tale da rendere $\mu_{\bar{n}} = \lambda$, si potrebbero costruire relativamente al polinomio $\Pi_{\bar{n}}(x)$ gli intervalli L, di cui si è parlato al n. 5, i quali sono sempre in numero finito. Detto p $(p > n + 1)$ il numero di questi intervalli, $\Pi_{\bar{n}}(x)$ non potrebbe, per la proposizione del n. 6, essere polinomio d'approssimazione di grado p; si avrebbe perciò $\mu_p < \mu_{\bar{n}}$, contro l'ipotesi che $\mu_{\bar{n}}$ sia il minimo di μ_n. Non potendo così λ essere minimo per μ_n, ripetendo il ragionamento fatto sopra, si giunge alla conclusione che m_n tende con n all'infinito.

10. Consideriamo ora la serie di polinomi

$$\pi_0(x) + (\pi_1(x) - \pi_0(x)) + \cdots + (\pi_n(x) - \pi_{n-1}(x)) + \cdots \tag{1}$$

Questa serie, che, per quanto si è detto al numero precedente, converge uniformemente in tutto (a, b) verso $f(x)$, può essere chiamata: ***serie di Tchebychev*** o ***sviluppo di Tchebychev*** di $f(x)$. La (1) gode di questa proprietà caratteristica: *fra tutte le serie di polinomi di grado successivamente crescente, uniformemente convergenti in tutto (a, b) verso la $f(x)$, essa dà la più rapida convergenza* (*).

11. *Osservazione.* — A noi sembra che dalle cose dette sopra i polinomi d'approssimazione dovrebbe potersi dedurre una nuova dimostrazione del teorema di Weierstrass, che noi abbiamo già ricordato. Possiamo osservare, a tale scopo, che basterebbe poter mostrare che la

$$\pi_0(x),\ \pi_1(x), \ldots,\ \pi_n(x), \ldots \tag{1}$$

è una successione di funzioni egualmente continue. Infatti, posto ciò, si deduce subito (**) che la (1) ammette una funzione limite continua $F(x)$, la quale, se λ è il limite a cui tende μ_n al tendere all'infinito di n, deve soddisfare, in tutto l'intervallo (a, b) che si considera, alla disuguaglianza

$$|f(x) - F(x)| \leqq \lambda.$$

Ed allora si vede subito che deve essere $\lambda = 0$, cioè, in tutto l'intervallo detto, $f(x) = F(x)$. Infatti, se fosse $\lambda > 0$, poichè $f(x) - F(x)$ è una fun-

---

(*) Il primo a considerare la serie (1) fu il Borel (vedi loc. cit.).

(**) Vedi C. Arzelà, *Sulle funzioni di linee* (Memoria della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, 1895), n. 3.

zione continua, si potrebbe trovare un numero positivo δ tale che, in ogni intervallo di ampiezza δ, compreso in (a, b), la $f(x) - F(x)$ facesse un'oscillazione minore di λ. Ma, essendo $F(x)$ funzione limite di (1), preso un numero positivo $\varepsilon < \frac{\lambda}{2}$, si può sempre trovare un numero positivo e intero $\bar{n} > \frac{b-a}{\delta}$ tale che, in tutto (a, b), sia

$$| F(x) - \Pi_{\bar{n}}(x) | < \varepsilon. \tag{2}$$

E poichè (n. 6) vi sono in (a, b) certamente più di $\bar{n}$ punti

$$x_1, x_2, .., x_{\bar{n}}, x_{\bar{n}+1}, ...$$

tali che sia

$$f(x_i) - \Pi_{\bar{n}}(x_i) = (-1)^i \mu_{\bar{n}} \qquad (i = 1, 2, ..., \bar{n}, \bar{n}+1, ...),$$

si ha che in (a, b) vi sono certamente due punti x' e x'' tali che sia

$$| x' - x'' | < \delta$$

$$f(x') - \Pi_{\bar{n}}(x') = \mu_{\bar{n}}, \qquad f(x'') - \Pi_{\bar{n}}(x'') = -\mu_{\bar{n}}.$$

In questi punti x' e x'' è, per la (2),

$$f(x') - F(x') > \mu_{\bar{n}} - \varepsilon > \lambda - \varepsilon > \frac{\lambda}{2}$$

$$f(x'') - F(x'') < -\mu_{\bar{n}} + \varepsilon < -\lambda + \varepsilon < -\frac{\lambda}{2},$$

il che dice che, nell'intervallo di ampiezza δ al quale appartengono entrambi i punti x' e x'', la $f(x) - F(x)$ compie un'oscillazione maggiore di λ: ciò è contrario al supposto.

È dunque $\lambda = 0$, onde $f(x)$ è l'unica funzione limite di (1).

II.

1. Prima di entrare nella trattazione dei polinomi d'approssimazione per le funzioni reali di due variabili reali daremo tre proposizioni che ci saranno utili in seguito.

Se in un campo A (finito) si ha un polinomio di grado n

$$P_n(xy) = p_1 x^n + p_2 y^n + \cdots + p_N \qquad \left(N = \binom{n+2}{2}\right),$$

i coefficienti p non possono, in modulo, superare un certo numero finito dipendente solo dal grado e dal massimo modulo di $P_n(xy)$ (*).

Si prendano, infatti, $N = \binom{n+2}{2}$ punti (xy) in A in modo che la conoscenza dei valori di un qualunque polinomio di grado n in essi sia sufficiente a determinare completamente il polinomio stesso; prendiamo cioè gli N punti in modo che il determinante

$$D = \begin{vmatrix} x_1^n, & y_1^n, & x_1^{n-1} y_1, \ldots, & x_1, & y_1, & 1 \\ x_2^n, & y_2^n, & x_2^{n-2} y_2, \ldots, & x_2, & y_2, & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_N^n, & y_N^n, & x_N^n \; y_N, \ldots, & x_N, & y_N, & 1 \end{vmatrix}$$

sia diverso da zero. Allora dal sistema

$$\begin{aligned} p_1 x_1^n + p_2 y_1^n + \cdots + p_N &= P_n(x_1, y_1) \\ p_1 x_2^n + p_2 y_2^n + \cdots + p_N &= P_n(x_2, y_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ p_1 x_N^n + p_2 y_N^n + \cdots + p_N &= P_n(x_N, y_N) \end{aligned}$$

ricaviamo, per la regola di Cramer,

$$p_r = \frac{D_r}{D} \qquad (r = 1, 2, \ldots, N),$$

dove D_r si ottiene da D sostituendo in questo alla colonna r^{esima} $P_n(x_1, y_1), \ldots, P_n(x_N, y_N)$. Abbiamo, perciò,

$$|p_r| = \frac{|D_r|}{|D|} \qquad (r = 1, 2, \ldots, N).$$

Sviluppando ora D_r secondo i termini della colonna r^{esima}, otteniamo, se

(*) Questa proposizione trovasi dimostrata, con altro metodo e per il caso di una sola variabile, nel già citato libro di Borel.

M è uguale o maggiore del massimo di $|P_n(xy)|$ in A,

$$|D_r| \leq M \,.\, N \,.\, Q \qquad (r = 1, 2, \ldots, N),$$

dove Q è il massimo valore assoluto dei determinanti di ordine $N-1$ contenuti in D. Abbiamo perciò, per ogni r da 1 ad N,

$$|p_r| \leq \frac{M \,.\, N \,.\, Q}{|D|} \,.$$

Il fattore $\frac{N \,.\, Q}{|D|}$ è finito e (una volta fissati i punti $(x_N y_N)$) dipende solo dal grado di $P_n(xy)$; la proposizione è perciò dimostrata.

2. Passiamo a dimostrare che *una varietà*

$$G \equiv \{ P_n(xy) \}$$

di polinomi di grado n e tutti contenuti, in un dato campo, tra due limiti finiti, è una varietà di funzioni egualmente continue nel detto campo.

Sia

$$P_n(xy) = p_1 x^n + p_2 y^n + \cdots + p_N \,.$$

Poichè tutti i polinomi della varietà sono compresi tra due limiti finiti, la relazione

$$|P_n(xy)| < M,$$

dove M è un numero finito convenientemente scelto, sarà soddisfatta da un qualunque $P_n(xy)$ di G. Per il numero precedente avremo perciò

$$|p_r| \leq P \,.\, M \qquad (r = 1, 2, \ldots, N),$$

dove P è un numero fisso per tutti i polinomi di G. Ne segue che i coefficienti di $\frac{d}{dx} P_n(xy)$ e di $\frac{d}{dy} P_n(xy)$ sono tutti, in valore assoluto, minori ed uguali a $n P M$, numero anch'esso finito; $\left| \frac{d}{dx} P_n(xy) \right|$ e $\left| \frac{d}{dy} P_n(xy) \right|$ sono perciò, in tutto il campo che si considera, e qualunque sia il polinomio $P_n(xy)$ di G, minori di un numero finito M'. Se ne deduce (*) che i

(*) Vedi C. Arzelà, *Sulle funzioni di linee* (Memoria della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, 1895), n. 6.

polinomi di

$$G \equiv \{ P_n(x\,y) \}$$

sono funzioni egualmente continue.

3. Dimostriamo ora che *se si ha, in un determinato campo, una varietà*

$$G \equiv \{ P(x\,y) \}$$

di polinomi di grado n tutti contenuti tra due limiti finiti l e L, ogni funzione limite di tale varietà è un polinomio di grado n (*).

Sia $v(x\,y)$ una funzione limite di G (l'esistenza di questa $v(x\,y)$ è provata dal numero precedente e dal n. 3 della Memoria già citata del professore ARZELÀ) e

$$P_1(x\,y), \quad P_2(x\,y), \ldots \tag{1}$$

una successione di polinomi di G, la quale tenda uniformemente alla $v(x, y)$ detta. Sia poi

$$P_r(x, y) = p_1^{(r)} x^n + p_2^{(r)} y^n + \cdots + p_N^{(r)} \qquad \left(N = \binom{n+2}{2}\right).$$

Se p_1 è un punto limite della successione

$$p_1^{(1)}, \quad p_1^{(2)}, \ldots,$$

potremo da questa estrarne un'altra

$$p_1^{(\nu_1)}, \quad p_2^{(\nu_2)}, \ldots$$

la quale tenda al limite p_1.

Sia poi p_2 un punto limite di

$$p_2^{(\nu_1)}, \quad p_2^{(\nu_2)}, \ldots,$$

potremo da questa successione estrarne un'altra

$$p_2^{(\mu_1)}, \quad p_2^{(\mu_2)}, \ldots$$

la quale tenda al limite p_2.

Così seguitando si giungerà ad una successione

$$p_N^{(\alpha_1)}, \quad p_N^{(\alpha_2)}, \ldots$$

(*) Ciò non esclude che vi possano essere dei polinomi di grado inferiore ad n che siano funzioni limiti di G, poichè un polinomio di grado $r < n$ lo considereremo ancora come di grado n con i primi coefficienti nulli.

la quale tenderà al limite p_N. Poichè le successioni

$$\begin{array}{l} \nu_1,\quad \nu_2,\dots \\ \mu_1,\quad \mu_2,\dots \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_1,\quad \alpha_2,\dots \end{array}$$

sono estratte ciascuna dalla precedente, le successioni

$$\left.\begin{array}{l} p_1^{(\alpha_1)},\quad p_1^{(\alpha_2)},\dots \\ p_2^{(\alpha_1)},\quad p_2^{(\alpha_2)},\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ p_N^{(\alpha_1)},\quad p_N^{(\alpha_2)},\dots \end{array}\right\} \tag{2}$$

tendono, rispettivamente, ai limiti $p_1, p_2, \dots, p_N$, ed ogni polinomio

$$p_{\alpha_s}(x\,y) = p_1^{(\alpha_s)}\,x^n + p_2^{(\alpha_s)}\,y^n + \dots + p_N^{(\alpha_s)}$$

appartiene alla successione (1). I numeri $p_1, p_2, \dots, p_N$ sono poi tutti finiti, perchè tutti i numeri del quadro (2), come tutti i coefficienti dei polinomi di G, sono minori in valore assoluto di

$$\frac{M.NQ}{|D|},$$

essendo M maggiore del massimo dei numeri $|L|$ e $|l|$.

Preso allora un numero positivo η, piccolo a piacere, potrà poi sempre trovarsi un numero $\overline{m}$ tale che per ogni $m > \overline{m}$ sia, contemporaneamente,

$$|p_1 - p_1^{(\alpha_m)}| < \eta,\quad |p_2 - p_2^{(\alpha_m)}| < \eta, \dots,\quad |p_N - p_N^{(\alpha_m)}| < \eta.$$

Posto

$$P(x\,y) = p_1\,x^n + p_2\,y^n + \dots + p_N,$$

avremo perciò, per ogni $m > \overline{m}$,

$$P(x\,y) - P_{\alpha_m}(x\,y) = (p_1 - p_1^{(\alpha_m)})\,x^n + (p_2 - p_2^{(\alpha_m)})\,y^n + \dots + (p_N - p_N^{(\alpha_m)})$$

donde

$$|P(x\,y) - P_{\alpha_m}(x\,y)| < \eta\,(|x^n| + |y^n| + \dots + 1) < \eta\,P,$$

essendo P un numero finito.

Preso dunque un numero positivo ε, piccolo a piacere, prendendo η tale che sia $\eta < \frac{\varepsilon}{P}$, si ha, in tutto il campo considerato,

$$| P(xy) - P_{\alpha_m}(xy) | < \varepsilon.$$

Da ciò segue, poichè i polinomi $P_{\sigma_m}(xy)$ appartengono alla successione (1), che $P(xy)$ è una funzione limite della (1). Ma questa successione, tendendo uniformemente alla funzione $v(xy)$, ha una sola funzione limite: si conclude che è

$$v(xy) = P(xy).$$

È così dimostrato che ogni funzione limite di G è un polinomio di grado n.

4. Premesso ciò, sia $f(xy)$ una funzione reale delle due variabili reali x ed y data in un campo A ed ivi finita, continua e ad un valore (*).

Sia poi $P_n(xy)$ un polinomio di grado n

$$P_n(xy) = p_1 x^n + p_2 y^n + \cdots + p_N \qquad \left(N = \binom{n+2}{2}\right),$$

e si consideri la differenza

$$f(xy) - P_n(xy).$$

Analogamente a quanto si è detto al n. 1 del paragrafo primo, si può dire che il massimo m del valore assoluto di questa differenza in tutto A è una funzione dei parametri $p_1, p_2, \ldots, p_N$. Detto μ ($\geqq 0$) il limite inferiore di $m(p_1, p_2, \ldots, p_N)$, se esiste per i parametri $p_1, p_2, \ldots, p_N$, un sistema di valori $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N$, tale che sia, in tutto A,

$$| f(xy) - \Pi_n(xy) | \leqq \mu,$$

dove è $\Pi_n(xy) = \pi_1 x^n + \pi_2 y^n + \cdots + \pi_N$, diremo che $\Pi_n(xy)$ *è un polinomio d'approssimazione di grado n della $f(xy)$.*

5. Si tratta ora di stabilire l'esistenza di un tale polinomio.

A tal fine mostriamo dapprima che si può determinare un campo *limitato e chiuso* per la variazione dei parametri p, tale che in esso la funzione $m(p_1, p_2, \ldots, p_N)$ ammetta come limite inferiore il numero μ.

(*) In ciò che segue considereremo sempre funzioni ad un valore assolutamente continue.

Poichè è

$$\mu \leq m(0,\ 0,\dots,\ 0) = \text{massimo di } |f(xy) - 0| \text{ in } A = M,$$

(essendo M il massimo di $|f(xy)|$ in A) l'insieme B costituito da tutti i punti $(p_1,\ p_2,\dots,\ p_N)$ in cui è sempre

$$m(p_1,\ p_2,\dots,\ p_N) \leq M,$$

è tale che in esso $m(p_1,\ p_2,\dots,\ p_N)$ ammette come limite inferiore μ.

Infatti, supposto che il limite inferiore di m in B fosse $\mu' > \mu$, vi sarebbe, per definizione di μ, un punto $(\bar{p}_1,\ \bar{p}_2,\dots,\ \bar{p}_N)$ tale da rendere verificate le disuguaglianze

$$\mu < m(\bar{p}_1,\dots,\ \bar{p}_N) < \mu'.$$

Ed allora, poichè è $\mu' \leq M$, si avrebbe

$$m(\bar{p}_1,\ \bar{p}_2,\dots,\ \bar{p}_N) < M;$$

quindi $(\bar{p}_1,\dots,\ \bar{p}_N)$ apparterrebbe a B. La disuguaglianza $m(\bar{p}_1,\dots,\ \bar{p}_N) < \mu'$ è perciò assurda, e tale è pure l'altra $\mu' > \mu$.

Facciamo ora vedere che l'insieme B è limitato. Sia $P_n(xy)$ un polinomio appartenente all'insieme B (vale a dire tale che $(p_1,\dots,\ p_N)$ appartenga a B). In tutto A si ha

$$|P_n(xy)| \leq |f(xy)| + |P_n(xy) - f(xy)| \leq M + m$$

$$|P_n(xy)| \leq 2M;$$

è perciò (n. 1)

$$|p_r| \leq \frac{2M \,.\, N \,.\, Q}{|D|} \qquad (r = 1,\ 2,\dots,\ N). \tag{1}$$

Il secondo membro di questa disuguaglianza è fisso (fissati che siano i punti (xy) del determinante D) ed è finito. Tale disuguaglianza vale per tutti i polinomi che appartengono all'insieme B. Segue che B è limitato.

Il campo B' definito dalle disuguaglianze (1) è limitato e chiuso e comprende in sè B; in B' perciò $m(p_1,\ p_2,\dots,\ p_N)$ ammette μ come limite inferiore.

Veduto questo, osserviamo che essendo la $f(xy) - P_n(xy)$ funzione razionale, e quindi continua, dei parametri p, la $|f(xy) - P_n(xy)|$ sarà essa pure funzione continua di tali parametri. Ne segue che anche $m(p_1, p_2, \ldots, p_N)$ sarà funzione continua dei parametri p: infatti per la continuità di $|f(x\,y) - P(x\,y)|$, potrà definirsi intorno a ciascun punto $(p_1, p_2, \ldots, p_N)$ un campo ad N dimensioni nel quale la $|f(x\,y) - P_n(x\,y)|$ faccia un'oscillazione minore di ε; in tale campo la $m(p_1, p_2, \ldots, p_N)$ farà certamente un'oscillazione minore di ε: dunque la $m(p_1, \ldots, p_N)$ è continua. Se ne deduce che il limite inferiore μ di $m(p_1, \ldots, p_N)$ in B' è un minimo.

Ciò significa che esiste per i parametri p, un sistema di valori $\pi_1, \ldots, \pi_N$, tale che sia, posto $\Pi_n(x\,y) = \pi_1 x^n + \pi_2 y^n + \cdots + \pi_N$,

$$|f(x\,y) - \Pi_n(x\,y)| \leq \mu$$

in tutto A.

Risulta così dimostrata l'*esistenza di almeno un polinomio d'approssimazione di grado n:* $\Pi_n(x\,y)$ (*).

Risulta anche che, se si suppone che in A, $f(x\,y)$ non coincida con un polinomio di grado n, μ è certamente maggiore di zero, perchè, nel caso opposto, dovendo sempre essere $\mu \geq 0$, sarebbe $f(x\,y) = \Pi_n(x\,y)$ in tutto A, contro il supposto.

6. Veniamo ora a dimostrare alcune proprietà dei polinomi d'approssimazione.

Dimostriamo dapprima che

se $\Pi_n(x\,y)$ è un polinomio d'approssimazione di grado n di $f(x\,y)$ (in un dato campo A), $c\,\Pi_n(x\,y)$, dove c è una costante, è un polinomio d'approssimazione, dello stesso grado n, di $c\,f(x\,y)$.

Sia, infatti, μ il massimo di $|f(x\,y) - \Pi_n(x\,y)|$ nel campo A: avremo, in tutto il detto campo,

$$|f(x\,y) - \Pi_n(x\,y)| \leq \mu \quad \text{e quindi} \quad |c\,f(x\,y) - c\,\Pi_n(x\,y)| \leq |c|\,\mu.$$

Basterà provare che non può esistere un polinomio di grado n, $P_n(x\,y)$, tale che, in tutto A, sia

$$|c\,f(x\,y) - P_n(x\,y)| \leq \mu'$$

con $\mu' < |c|\,\mu$. Supponiamo, perciò, che un tal polinomio esista: avremo

(*) Questa dimostrazione è uguale a quella che il Borel dà, nel suo libro citato, per le funzioni di una variabile.

allora

$$\left| c\, f(x\, y) - c\, \frac{P_n(x\, y)}{c} \right| \leqq \mu'$$

$$\left| f(x\, y) - \frac{P_n(x\, y)}{c} \right| \leqq \frac{\mu'}{|c|} < \mu,$$

il che contraddice all'ipotesi che $\Pi_n(x\, y)$ sia polinomio d'approssimazione di $f(x\, y)$.

7. *Se $\Pi_n(x\, y)$ è un polinomio d'approssimazione di grado n di $f(x\, y)$ nel campo che si considera, e $P_n(x\, y)$ è un polinomio qualunque di grado n, $\Pi_n(x\, y) + P_n(x\, y)$ è un polinomio d'approssimazione, dello stesso grado n, di $f(x\, y) + P_n(x\, y)$.*

Essendo, infatti, μ il massimo di $|f(x\, y) - \Pi_n(x\, y)|$ nel campo detto, avremo, in tutto questo campo,

$$|f(x\, y) - \Pi_n(x\, y)| \leqq \mu \text{ e quindi } |(f(x\, y) + P_n(x\, y)) - (\Pi_n(x\, y) + P_n(x\, y))| \leqq \mu.$$

Basterà ora provare che non può esistere un polinomio di grado n, $\overline{P}_n(x\, y)$, tale che in tutto il campo considerato sia

$$|(f(x\, y) + P_n(x\, y)) - \overline{P}_n(x\, y)| \leqq \mu'$$

con $\mu' < \mu$. Supponiamo perciò che il polinomio $\overline{P}_n(x\, y)$ esista: avremo allora

$$|f(x\, y) - (\overline{P}_n(x\, y) - P_n(x\, y))| \leqq \mu'.$$

$\overline{P}_n(x\, y) - P_n(x\, y)$ è un polinomio di grado n, dunque tale disuguaglianza contraddice all'ipotesi che $\Pi_n(x\, y)$ sia polinomio d'approssimazione di grado n di $f(x\, y)$.

Osservazione. Non devesi però credere che, in generale, la somma di due polinomi d'approssimazione di grado n di due funzioni continue sia sempre un polinomio d'approssimazione della somma di queste due funzioni.

8. Detto μ il massimo di $|f(x\, y) - \Pi_n(x\, y)|$ in tutto A, è in tal campo

$$|f(x\, y) - \Pi_n(x\, y)| \leqq \mu;$$

in A poi esisterà almeno un punto $(\bar{x}, \bar{y})$ in cui è $|f(\bar{x}\, \bar{y}) - \Pi_n(\bar{x}\, \bar{y})| = \mu$.

Ma si può dire di più: esistono certamente, in A, due punti, (x', y') e (x'', y''), nei quali è

$$f(x', y') - \Pi_n(x', y') = \mu, \qquad f(x'', y'') - \Pi_n(x'', y'') = -\mu.$$

Supponiamo, infatti, che ciò non sia. Esistendo certamente un punto $(\bar{x}\,\bar{y})$ in cui è $|f(\bar{x}\,\bar{y}) - \Pi_n(\bar{x}\,\bar{y})| = \mu$, avremo in tal punto

$$f(\bar{x}\,\bar{y}) - \Pi_n(\bar{x}\,\bar{y}) = \mu \quad \text{oppure} \quad f(\bar{x}\,\bar{y}) - \Pi_n(\bar{x}\,\bar{y}) = -\mu.$$

Consideriamo il primo caso. Sia μ' il minimo di $f(x\,y) - \Pi_n(x\,y)$ in A; sarà

$$-\mu < \mu' < \mu$$

(naturalmente si suppone che in A $f(x\,y)$ non coincida con alcun polinomio di grado n). Consideriamo, allora, il polinomio di grado n

$$\Pi_n(x\,y) + \frac{\mu + \mu'}{2}.$$

In tutto A, il massimo di

$$f(x\,y) - \left(\Pi_n(x\,y) + \frac{\mu + \mu'}{2}\right)$$

è uguale a $\mu - \frac{\mu + \mu'}{2} < \mu$, ed il minimo a $\mu' - \frac{\mu + \mu'}{2} > -\mu$. E, poichè è $\mu - \frac{\mu + \mu'}{2} = -\left(\mu' - \frac{\mu + \mu'}{2}\right)$, è in tutto A

$$\left| f(x\,y) - \left(\Pi_n(x\,y) + \frac{\mu + \mu'}{2}\right) \right| \leq \mu - \frac{\mu + \mu'}{2} < \mu$$

il che contraddice all'ipotesi che $\Pi_n(x\,y)$ sia polinomio d'approssimazione di grado n di $f(x\,y)$.

Analogamente se in $(\bar{x}, \bar{y})$ fosse $f(\bar{x}\,\bar{y}) - \Pi_n(\bar{x}\,y) = -\mu$. Si conclude perciò che ***il massimo μ di $|f(x\,y) - \Pi_n(x\,y)|$ è uguale tanto al massimo quanto al valore assoluto del minimo di $f(x\,y) - \Pi_n(x\,y)$.***

9. Sia E l'insieme dei punti $(\bar{x}\,\bar{y})$ di A soddisfacenti alla condizione

$$|f(\bar{x}\,\bar{y}) - \Pi_n(x\,\bar{y})| = \mu,$$

ed $\bar{s}$ un numero $\neq 0$ ed avente segno contrario a quello della differenza $f(\bar{x}, y) - \Pi_n(\bar{x}, \bar{y})$. Dimostriamo allora che

condizione necessaria e sufficiente affinchè $\Pi_n(x\,y)$ sia un polinomio d'approssimazione di grado n di $f(x\,y)$ in A, è che non si possano trovare

contemporaneamente un sistema di $N = \binom{n+2}{2}$ *numeri*

$$p_1, p_2, \ldots, p_N,$$

e un sistema di valori $\bar{s}$, *soddisfacenti tutti alla condizione* $S > |\bar{s}| > s > 0$, *tali che sia su tutto E,*

$$p_1 \bar{x}^n + p_2 \bar{y}^n + \cdots + p_N = \bar{s} \text{ (*)}. \tag{1}$$

La condizione è sufficiente. Supponiamo, infatti, che $\Pi_n(xy)$ non sia polinomio d'approssimazione. Se $\overline{\Pi}'_n(xy)$ è d'approssimazione e μ' è il massimo di $|f(xy) - \overline{\Pi}_n(xy)|$ in A, è $\mu' < \mu$, onde la differenza

$$\Pi_n(\bar{x}\bar{y}) - \overline{\Pi}_n(x\bar{y})$$

risulta diversa da zero e di segno contrario a quello della differenza $f(\bar{x}\bar{y}) - \Pi_n(x\bar{y})$.

Ne segue che, per

$$p_r = \pi_r - \bar{\pi}_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, N)$$

e

$$\bar{s} = \Pi_n(\bar{x}\bar{y}) - \overline{\Pi}_n(\bar{x}\bar{y}) \qquad (\text{onde } \mu - \mu' \leq |\bar{s}| < 2\mu)$$

la (1) è verificata su tutto E. E ciò contro il supposto.

La condizione è necessaria. Supponiamo, infatti, che esistano un sistema di valori $\bar{s}$, soddisfacenti alla condizione $S > |\bar{s}| > s > 0$, ed un sistema di valori p soddisfacenti su tutto E alla relazione

$$p_1 \bar{x}^n + p_2 \bar{y}^n + \cdots + p_N = \bar{s}; \tag{1}$$

e consideriamo il polinomio di n^{mo} grado

$$P_n(xy) = p_1 x^n + p_2 y^n + \cdots + p_N.$$

Detto ω un numero positivo, piccolo a piacere, consideriamo l'espressione

$$f(xy) - \left\{ \Pi_n(xy) - \omega P_n(xy) \right\}.$$

(*) Questa proposizione trovasi anche nel citato lavoro del Kerchberger, ma solo per il caso in cui la funzione, che si vuol rappresentare approssimativamente, venga considerata solo in un numero finito di punti e non in tutto un campo.

Poichè, in tutto A, $f(xy) - \Pi_n(xy)$ e $P_n(xy)$ sono funzioni continue, preso un numero positivo ε minore tanto di μ quanto di s, potremo sempre trovare un numero positivo δ tale che, in ogni cerchio di raggio δ (o parte di esso) contenuto in A, le due funzioni continue dette oscillino per meno di ε. Allora, in ogni cerchio (o parte di esso) di raggio δ ed avente per centro un punto $(\bar{x}, \bar{y})$ in cui è

$$f(\bar{x}, \bar{y}) - \Pi_n(\bar{x}, \bar{y}) = \mu$$

avremo

$$\mu - \varepsilon < f(xy) - \Pi_n(xy) \leq \mu$$

e, per la (1),

$$\omega(\bar{s} - \varepsilon) < \omega P_n(xy) < \omega(\bar{s} + \varepsilon),$$

ossia

$$\omega(-S - \varepsilon) < \omega P_n(xy) < \omega(-s + \varepsilon),$$

onde

$$\mu - \varepsilon - \varepsilon(S + \varepsilon) < f(xy) - \left\{ \Pi_n(xy) - \omega P_n(xy) \right\} < \mu - \omega(s - \varepsilon);$$

e, se ω è stato preso minore di $\dfrac{\mu - \varepsilon}{S + \varepsilon}$,

$$0 < f(xy) - \left\{ \Pi_n(xy) - \omega P_n(xy) \right\} < \mu - \omega(s - \varepsilon).$$

Analogamente in ogni cerchio (o parte di esso) di raggio δ ed avente per centro un punto $(\bar{x}, \bar{y})$ in cui è

$$f(\bar{x}\bar{y}) - \Pi_n(\bar{x}\bar{y}) = -\mu,$$

avremo

$$-\mu + \omega(s - \varepsilon) < f(xy) - \left\{ \Pi_n(xy) - \omega P_n(xy) \right\} < 0.$$

Talchè in ogni cerchio (o parte di esso) di raggio δ e centro $(\bar{x}, \bar{y})$ tale che sia

$$| f(\bar{x}\bar{y}) - \Pi_n(\bar{x}\bar{y}) | = \mu,$$

è

$$\left| f(xy) - \left\{ \Pi_n(xy) - \omega P_n(xy) \right\} \right| < \mu - \omega(s - \varepsilon).$$

Ragionando ora in modo analogo a quanto si è fatto alla fine del n. 3

del § I, si vede che, in tutto A, è

$$\left| f(xy) - \left\{ \Pi_n(xy) - \omega P_n(xy) \right\} \right| < \mu' < \mu,$$

il che è assurdo essendo $\Pi_n(xy)$ un polinomio d'approssimazione. La proposizione è così completamente dimostrata.

10. Dimostriamo ora che

il numero ν *dei punti di* A *in cui*

$$| f(xy) - \Pi_n(xy) |$$

raggiunge il suo valore massimo μ, *è maggiore di* $n+1$.

Supponiamo, infatti, che sia

$$\nu \leq n+1.$$

Siano

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \ldots, \quad (x_\nu, y_\nu)$$

i punti in quistione. Possiamo sempre supporre che le coordinate $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ siano tutte distinte tra loro, giacchè, se ciò non fosse, si potrebbe, con una conveniente rotazione degli assi x, y, ridursi a tal caso. Ed è evidente che, se $\Pi_n(xy)$ è polinomio d'approssimazione di grado n di $f(xy)$, anche il trasformato di $\Pi_n(xy)$, mediante la trasformazione di coordinate dette, è polinomio d'approssimazione di grado n della trasformata di $f(xy)$.

Possiamo, adunque, supporre che sia

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_\nu.$$

In ogni intervallo $x_r \ldots x_{r+1}$ $(r = 1, 2, \ldots, \nu - 1)$ tale che $f(x_r y_r) - \Pi_n(x_r y_r)$ e $f(x_{r+1}, y_{r+1}) - \Pi_n(x_{r+1}, y_{r+1})$ abbiamo segni contrari, scegliamo un punto ξ_r distinto tanto da x_r quanto da x_{r+1}. Siano

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\nu'}$$

tali punti: avremo certamente $\nu' \leq n$. Consideriamo, allora, in tutto A, il polinomio di grado minore od eguale ad n

$$P_n(xy) = \omega (x - \xi_1)(x - \xi_2) \ldots (x - \xi_{\nu'}).$$

Con un ragionamento analogo a quello usato da Borel nel libro già citato (pag. 86) si giunge facilmente a far vedere che, per un conveniente valore di ω è, in tutto A,

$$\left| f(x\,y) - \left\{ \Pi_n(x\,y) + P_n(x\,y) \right\} \right| < \mu' < \mu,$$

il che contraddice all'ipotesi che $\Pi_n(x\,y)$ sia polinomio d'approssimazione.

11. Rileviamo, ora, una notevole differenza esistente tra il caso di una sola variabile e quello di due. La differenza sta in ciò che, *mentre nel primo caso vi è un solo polinomio d'approssimazione di grado dato per una funzione continua, nel secondo, invece, in generale ve ne sono più e quindi infiniti.* È chiaro che se ve ne sono due ve ne sono infiniti.

Se Π_n e Π_n sono, infatti, due polinomi d'approssimazione dello stesso grado n, anche i polinomi

$$\frac{\Pi_n + \Pi_n}{2}, \quad \frac{3\,\Pi_n + \overline{\Pi}_n}{4}, \quad \frac{7\,\Pi_n + \overline{\Pi}_n}{8}, \ldots, \quad \frac{(2^m - 1)\,\Pi_n + \Pi_n}{2^m}, \ldots$$

sono tali, poichè, se in tutto A sono soddisfatte le disuguaglianze

$$| f(x\,y) - \Pi_n(x\,y) | \leq \mu, \quad | f(x\,y) - \overline{\Pi}_n(x\,y) | \leq \mu,$$

è anche soddisfatta l'altra

$$\left| f(x\,y) - \frac{(2^m - 1)\,\Pi_n(x\,y) + \overline{\Pi}_n(x\,y)}{2^m} \right| = \left| \frac{(2^m - 1)(f - \Pi_n) + (f - \Pi_n)}{2^m} \right|$$

$$\leq \frac{1}{2^m} \left\{ (2^m - 1)\, | f - \Pi_n | + | f - \Pi_n | \right\}$$

$$\leq \frac{1}{2^m} \left\{ (2^m - 1)\,\mu + \mu \right\} = \mu.$$

A prova di quanto è detto sopra daremo, in ciò che segue, esempio di funzione $f(x\,y)$ continua in un dato campo, e quivi ammettente più polinomi d'approssimazione dello stesso grado.

12. Prima, però, di venire all'esempio annunciato faremo un'osservazione.

Sia $f(x\,y)$ una funzione finita e continua in un campo A; $\Pi_n(x\,y)$ sia poi un suo polinomio d'approssimazione di grado n. Detto $\overline{y}$ uno speciale valore di y appartenente ad A, consideriamo la funzione della sola variabile x: $f(x, \overline{y})$. Essa, nel campo A, ammetterà un polinomio d'approssimazione di grado n: $\Pi_n(x)$; detto μ' il massimo di $|f(x, \bar{y}) - \Pi_n(x)|$ in A, dico che è

$$\mu' \leqq \mu,$$

dove μ indica il massimo in A di $|f(xy) - \Pi_n(xy)|$. Infatti, se fosse $\mu' > \mu$, si avrebbe in tutto A

$$|f(x, \bar{y}) - \Pi_n(x, \bar{y})| \leqq \mu < \mu'$$

ed allora $\Pi_n(x)$ non sarebbe più il polinomio d'approssimazione di grado n di $f(x, \bar{y})$.

Dunque, *se $P_n(xy)$ è un polinomio di grado n, il sapere che in tutto A è*

$$|f(xy) - P_n(xy)| \leqq \mu',$$

essendo μ' il massimo di $|f(x\bar{y}) - \Pi_n(x)|$ in A (dove $\bar{y}$ appartiene ad A, e $\Pi_n(x)$ è il polinomio d'approssimazione di grado n di $f(x, \bar{y})$), basta per concludere che $P_n(xy)$ è un polinomio d'approssimazione di grado n di $f(xy)$.

13. Premesso ciò, veniamo al nostro esempio.

Sia $f(x)$ una funzione finita e continua data in un intervallo (a, b). $\Pi_n(x)$ sia il suo polinomio d'approssimazione di grado n, e μ il massimo di $|Y(x)| = |f(x) - \Pi_n(x)|$ in (a, b). Essendo $Y(x) = f(x) - \Pi_n(x)$ una funzione finita e continua in (a, b) potremo, prefissato un numero positivo $\varepsilon < \frac{\mu}{5}$, trovare un numero positivo δ tale che, in ogni intervallo di ampiezza δ di (a, b), la Y compia un'oscillazione minore di ε. Se, perciò, consideriamo tutti i possibili intervalli di ampiezza δ ed aventi come punto di mezzo un punto di (a, b) in cui è $Y(x) = 0$ (se accadrà che uno di tali punti disti da a per meno di $\frac{\delta}{2}$, si considererà come estremo anteriore del relativo intervallo il punto a, sicchè, in tal caso, l'intervallo avrà un'ampiezza minore di δ; analogamente per b), avremo, in ciascuno di essi, $|Y(x)| < \varepsilon$.

Dopo aver riunito in uno solo quegli intervalli che hanno almeno un punto in comune, ci troveremo ad avere, nell'intervallo (a, b), degli intervalli

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r \text{ (*)} \tag{1}$$

(*) È chiaro che in un estremo di uno di questi intervalli può essere $Y(x) = 0$ solo se si tratta del punto a o del punto b.

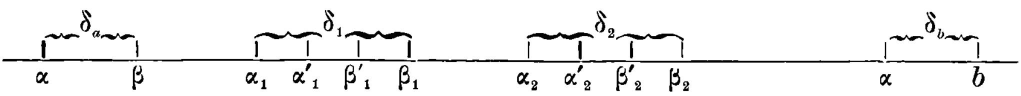
in ciascuno dei quali è sempre $|Y(x)| < \varepsilon$. Siano $\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2; \ldots; \alpha_r, \beta_r$, gli estremi degli intervalli detti.

In ciascuno degli intervalli rimanenti di (a, b) avremo, sempre $|Y(x)| > 0$, ossia sempre

$$f(x) < \Pi_n(x) \quad \text{oppure} \quad f(x) > \Pi_n(x).$$

Essendo la $f(x)$ continua, potremo certamente trovare un δ' tale che, in ogni intervallo d'ampiezza δ' di (a, b), la $f(x)$ compia un'oscillazione minore di ε. Preso allora un δ'' minore tanto di δ' quanto di $\frac{\delta}{2}$, potremo da ogni intervallo δ_r di (1) staccare, a partire dai suoi estremi, due intervalli di ampiezza δ'', (α_r, α'_r), (β'_r, β_r). Da questa operazione escluderemo quei due intervalli di (1) che eventualmente avessero un estremo in a o in b. Per maggior chiarezza, questi due intervalli, qualora esistano, li chiameremo δ_a, δ_b; tutti gli altri di (1) li chiameremo

$$\delta_1, \quad \delta_2, \ldots, \quad \delta_s. \tag{2}$$



Allora ogni intervallo (2) rimarrà diviso in tre: (α_s, α'_s), (α'_s, β'_s), (β'_s, β_s); nel primo e nel terzo sarà

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon, \tag{3}$$

mentre poi, in tutto (α_s, β_s), sarà

$$|Y(x)| = |f(x) - \Pi_n(x)| < \varepsilon. \tag{4}$$

Detto ciò, consideriamo, nel campo delle due variabili x ed y definito dalle disuguaglianze

$$a \leq x \leq b, \qquad 0 \leq y \leq c, \tag{5}$$

il polinomio di grado n, $\Pi_n(x)$, vale a dire il polinomio che per ogni valore di y è uguale a $\Pi_n(x)$. Costruito un polinomio di grado $n-1$, $P_{n-1}(x, y)$, tale che in tutto il campo definito dalle (5) sia

$$|y\, P_{n-1}(x\, y)| < \varepsilon,$$

consideriamo il polinomio di grado n (nel complesso delle variabili)

$$P_n(x\,y) = \Pi_n(x) + y\,P_{n-1}(x,\,y).$$

Questo polinomio coincide, per $y=0$, con $\Pi_n(x)$, ed è tale da rendere, in tutto il campo (5), soddisfatta la disuguaglianza

$$|\,P_n(x\,y) - \Pi_n(x)\,| < \varepsilon. \tag{6}$$

Ci proponiamo, ora, di costruire una funzione $F(x,\,y)$ continua in tutto il campo (5) e tale da ammettere, nello stesso campo, i polinomi $\Pi_r(x)$, $P_n(x,\,y)$ come polinomi d'approssimazione di grado n.

A tale scopo definiamo la $F(x\,y)$ nel modo seguente:

nel campo

$$a \leq x \leq \beta, \qquad 0 \leq y \leq c$$

(ove β è l'estremo posteriore di δ_a) poniamo, se è $f(\beta) < \Pi_n(\beta)$,

$$F(x\,y) = \Pi_n(x) - \left\{\Pi_n(x) - f(x)\right\} \text{ oppure } F(x\,y) = P_n(x\,y) - \left\{\Pi_n(x) - f(x)\right\}$$

a seconda che è

$$\Pi_n(x) \geq P_n(x\,y) \quad \text{oppure} \quad \Pi_n(x) < P_n(x\,y);$$

poniamo invece, se è $f(\beta) > \Pi_n(\beta)$,

$$F(x\,y) = \Pi_n(x) + \left\{f(x) - \Pi_n(x)\right\} \text{ oppure } F(x\,y) = P_n(x\,y) + \left\{f(x) - \Pi_n(x)\right\}$$

a seconda che è

$$\Pi_n(x) \leq P_n(x\,y) \quad \text{oppure} \quad \Pi_n(x) > P_n(x\,y).$$

Analogamente nel campo

$$\alpha \leq x \leq b, \qquad 0 \leq y \leq c,$$

dove α è l'estremo anteriore di δ_b.

Nel campo

$$\beta \leq x \leq \alpha_1, \qquad 0 \leq y \leq c$$

poniamo, se è $f(x) < \Pi_n(x)$,

$$F(x\,y) = \Pi_n(x) - \left\{\Pi_n(x) - f(x)\right\} \text{ oppure } F(x\,y) = P_n(x\,y) - \left\{\Pi_n(x) - f(x)\right\}$$

a seconda che è

$$\Pi_n(x) \geq P_n(x\,y) \quad \text{oppure} \quad \Pi_n(x) < P_n(x\,y);$$

poniamo invece, se è $f(x) > \Pi_n(x)$

$$F(x\,y) = \Pi_n(x) + \left\{ f(x) - \Pi_n(x) \right\} \text{ oppure } F(x\,y) = P_n(x\,y) + \left\{ f(x) - \Pi_n(x) \right\}$$

a seconda che è

$$\Pi_n(x) \leq P_n(x\,y) \quad \text{oppure} \quad \Pi_n(x) > P_n(x\,y).$$

Analogamente nei campi

$$\left.\begin{array}{ll} \beta_1 \leq x \leq \alpha_2, & 0 \leq y \leq c \\ \beta_2 \leq x \leq \alpha_3, & 0 \leq y \leq c \\ \cdots\cdots & \\ \beta_s \leq x \leq \alpha, & 0 \leq y \leq c. \end{array}\right\} \qquad (a)$$

Nei campi

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha'_1 \leq x \leq \beta'_1, & 0 \leq y \leq c \\ \alpha'_2 \leq x \leq \beta'_2, & 0 \leq y \leq c \\ \cdots\cdots & \\ \alpha'_s \leq x \leq \beta'_s, & 0 \leq y \leq c \end{array}\right\} \qquad (b)$$

poniamo

$$F(x\,y) = f(x).$$

Nel campo

$$\alpha_1 \leq x \leq \alpha'_1, \qquad 0 \leq y \leq c$$

poniamo

$$F(x\,y) = \frac{F(\alpha_1,\ y) - F(\alpha'_1,\ y)}{\alpha_1 - \alpha'_1}(x - \alpha_1) + F(\alpha_1,\ y).$$

Analogamente per i campi

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha_s \leq x \leq \alpha'_s, & 0 \leq y \leq c \\ \beta'_s \leq x \leq \beta_s, & 0 \leq y \leq c. \end{array}\right\} \qquad (c)$$

La $F(x\,y)$ resta così definita in tutto il campo (5).

Facciamo ora vedere che la $F(x\,y)$ così definita è, in tutto (5), continua e tale da render soddisfatte le due disuguaglianze

$$|F(x\,y) - \Pi_n(x)| \leq \mu, \qquad |F(x\,y) - P_n(x\,y)| \leq \mu. \qquad (7)$$

Consideriamo dapprima il campo

$$\beta \leqq x \leqq \alpha_1, \qquad 0 \leqq y \leqq c,$$

e supponiamo che quivi sia:

$$f(x) < \Pi_n(x)$$

(è chiaro che se tale disuguaglianza è verificata in un punto del campo detto lo è anche in tutto il campo: infatti come già abbiamo osservato è, in (β, α_1), sempre $|Y(x)| > 0$). Allora considerando un punto $(\bar{x}, \bar{y})$ del detto campo, potranno darsi tre casi.

1.° Sia $\Pi_n(\bar{x}) > P_n(\bar{x}\,\bar{y})$: per definizione abbiamo

$$F(\bar{x}, \bar{y}) = \Pi_n(x) - \left\{ \Pi_n(\bar{x}) - f(\bar{x}) \right\} = f(\bar{x}),$$

e, poichè vi è tutto un intorno del punto $(\bar{x}, \bar{y})$ in cui è $\Pi_n(x) > P_n(x\,y)$ (essendo queste funzioni continue), vi è tutto un intorno di $(\bar{x}, \bar{y})$ in cui è

$$F(x\,y) = f(x):$$

in tale intorno la $F(x\,y)$ è perciò continua (tale essendo la $f(x)$).

Si ha poi

$$|F(\bar{x}\,\bar{y}) - \Pi_n(\bar{x})| = |f(\bar{x}) - \Pi_n(\bar{x})| \leqq \mu,$$

poichè in tutto (a, b) è $|f(x) - \Pi_n(x)| \leqq \mu$ per dato. È poi anche

$$|F(\bar{x}, \bar{y}) - P_n(\bar{x}, \bar{y})| = |f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}\,\bar{y})| =$$

$$= \left| \left\{ \Pi_n(\bar{x}) - f(\bar{x}) \right\} - \left\{ \Pi_n(\bar{x}) - P_n(\bar{x}\,\bar{y}) \right\} \right| < \mu,$$

poichè le due differenze $\Pi_n(\bar{x}) - f(\bar{x})$, $\Pi_n(\bar{x}) - P_n(\bar{x}\,\bar{y})$ sono ambedue positive e minori rispettivamente di μ e ε $\left(\varepsilon < \frac{\mu}{5}\right)$.

2.° Sia $\Pi_n(\bar{x}) < P_n(\bar{x}\,\bar{y})$: abbiamo per definizione,

$$F(\bar{x}\,\bar{y}) = P_n(\bar{x}\,\bar{y}) - (\Pi_n(\bar{x}) - f(\bar{x}));$$

e poichè vi è tutto un intorno di $(\bar{x}, \bar{y})$ in cui è $\Pi_n(x) < P_n(x\,y)$, in tale intorno sarà

$$F(x\,y) = P_n(x\,y) - \left\{ \Pi_n(x) - f(x) \right\};$$

ivi, perciò la $F(x\,y)$ sarà continua. Avremo poi

$$F(\bar{x}, \bar{y}) - \Pi_n(\bar{x}) = \left\{ P_n(\bar{x}\,\bar{y}) - \Pi_n(\bar{x}) \right\} - \left\{ \Pi_n(x) - f(\bar{x}) \right\},$$

e, poichè le differenze tra parentesi sono ambedue positive e minori rispettivamente di ε e μ,

$$| F(\bar{x}, \bar{y}) - \Pi_n(\bar{x}) | < \mu.$$

Avremo anche

$$| F(\bar{x}, \bar{y}) - P_n(\bar{x}, \bar{y}) | = | \Pi_n(\bar{x}) - f(\bar{x}) | \leq \mu.$$

3.° Sia $\Pi_n(\bar{x}) = P_n(\bar{x}, \bar{y})$. Preso un intorno di $(\bar{x}, \bar{y})$ abbastanza piccolo, potrà darsi che in tutti i punti di tale intorno sia sempre $F(x\,y) = f(x)$ o sempre $F(x\,y) = P_n(x\,y) - \left\{ \Pi_n(x) - f(x) \right\}$: in tali casi la $F(x\,y)$ sarà evidentemente continua in $(\bar{x}\,\bar{y})$; oppure potrà darsi che sia $F(x\,y) = f(x)$ in tutti punti dell'intorno detto che stanno da una parte della curva algebrica $\Pi_n(x) - P_n(x\,y) = 0$, la quale passa per $(\bar{x}, \bar{y})$, e $F(x\,y) = P_n(x\,y) - \left\{ \Pi_n(x) - f(x) \right\}$ in tutti quelli che stanno dall'altra parte. Anche in quest'ultimo caso la $F(x\,y)$ sarà evidentemente continua. È poi, poichè per definizione è $F(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{x})$,

$$| F(\bar{x}, \bar{y}) - \Pi_n(\bar{x}) \quad | = | f(\bar{x}) - \Pi_n(\bar{x}) | \leq \mu.$$

$$| F(\bar{x}, \bar{y}) - P_n(\bar{x}\,\bar{y}) | = | f(\bar{x}) - \Pi_n(\bar{x}) | \leq \mu.$$

In tutti i casi esaminati abbiamo supposto $f(x) < \Pi_n(x)$; se fosse $f(x) > \Pi_n(x)$ non ci sarebbe che da ripetere gli stessi ragionamenti.

Abbiamo così, in tutto il campo $\beta \leq x \leq \alpha_1$, $0 \leq y \leq c$, dimostrate le disuguaglianze (7) e la continuità della $F(x\,y)$.

Analogamente per i campi (a) e per

$$a \leq x \leq \beta, \qquad 0 \leq y \leq c$$

e

$$\alpha \leq x \leq b, \qquad 0 \leq y \leq c.$$

Nei campi (*b*), essendo $F(xy) = f(x)$ per definizione, la $F(xy)$ è sempre continua. Ivi è anche (per le (4) e le (6))

$$|F(xy) - \Pi_n(x)| = |f(x) - \Pi_n(x)| < \varepsilon < \mu.$$

$$|F(xy) - P_n(xy)| \leq |f(x) - \Pi_n(x)| + |\Pi_n(x) - P_n(x)| < 2\varepsilon < \mu.$$

Rimangono da esaminarsi i campi (*c*). In essi è, per definizione,

$$F(xy) = \frac{F(\alpha_s, y) - F(\alpha'_s, y)}{\alpha_s - \alpha'_s}(x - \alpha_s) + F(\alpha_s, y). \tag{8}$$

Ora, per quanto abbiamo detto precedentemente, $F(\alpha_s, y)$ e $F(\alpha'_s, y)$ sono funzioni continue di y; ne segue che $F(xy)$ è continua rispetto all'insieme delle due variabili.

Facciamo vedere che anche nei campi (*c*) sono verificate le (7). Sia $(\bar{x}, \bar{y})$ un punto del campo $\alpha_s \leq x \leq \alpha'_s$, $0 \leq y \leq c$. Il valore di $F(\bar{x}, \bar{y})$ è, per la (8), compreso tra $F(\alpha_s, \bar{y})$ e $F(\alpha'_s, \bar{y}) = f(\alpha'_s)$. Appartenendo α_s al campo $\beta_{s-1} \leq x \leq \alpha_s$, $0 \leq y \leq c$, è (per definizione), a seconda dei casi,

$$F(\alpha_s, \bar{y}) = f(\alpha_s), \quad \text{oppure} \quad F(\alpha_s, \bar{y}) = P_n(\alpha_s, \bar{y}) - \left\{ \Pi_n(\alpha_s) - f(\alpha_s) \right\};$$

è, perciò, sempre (per la (6))

$$|F(\alpha_s, \bar{y}) - f(\alpha_s)| < \varepsilon.$$

Segue anche (per la (3))

$$\left.\begin{aligned} |F(\alpha_s, \bar{y}) - F(\alpha'_s, \bar{y})| &= |F(\alpha_s, \bar{y}) - f(\alpha'_s)| \leq \\ &\leq |F(\alpha_s, \bar{y}) - f(\alpha_s)| + |f(\alpha_s) - f(\alpha'_s)| < 2\varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Si ha poi, per la (3) e la (4),

$$|F(\alpha'_s, \bar{y}) - \Pi_n(\bar{x})| = |f(\alpha'_s) - \Pi_n(\bar{x})| \leq |f(\alpha'_s) - f(\bar{x})| + |f(\bar{x}) - \Pi_n(\bar{x})| < 2\varepsilon.$$

Da questa e dalla (9) si ha, poichè, come abbiamo osservato, $F(\bar{x}, \bar{y})$ è compreso tra $F(\alpha_s, \bar{y})$ e $F(\alpha'_s, \bar{y})$,

$$|F(\bar{x}, \bar{y}) - \Pi_n(\bar{x})| \leq |F(\bar{x}, \bar{y}) - F(\alpha'_s, \bar{y})| + |F(\alpha'_s, \bar{y}) - \Pi_n(\bar{x})| < 4\varepsilon < \mu.$$

È poi, per la (6),

$$|F(\bar{x}, \bar{y}) - P_n(\bar{x}, \bar{y})| < 5\varepsilon < \mu.$$

Avendo così dimostrato che la $F(x\,y)$ è continua nei vari campi (compresi i contorni) in cui abbiamo diviso il campo totale (5), risulta che detta funzione è continua in tutto il campo (5).

Resta, dunque, completamente provato che, in tutto il campo (5), la $F(x, y)$ è continua e soddisfa alle disuguaglianze (7).

Per $y = 0$ avremo perciò, in tutto (a, b),

$$|F(x, 0) - \Pi_n(x)| \leq \mu,$$

con $F(x, 0)$ funzione continua di x. Ora, dalla definizione di $F(x, y)$, ricaviamo che $F(x, 0)$ è uguale a $f(x)$ in tutto (a, b) eccettuati i tratti (α_s, α'_s), (β'_s, β_s), nei quali invece è, rispettivamente,

$$F(x, 0) = \frac{f(\alpha_s) - f(\alpha'_s)}{\alpha_s - \alpha'_s}(x - \alpha_s) + f(\alpha_s), \quad F(x, 0) = \frac{f(\beta'_s) - f(\beta_s)}{\beta'_s - \beta_s}(x - \beta'_s) + f(\beta'_s)$$

(ciò perchè è $P_n(x, 0) = \Pi_n(x)$). Ne segue che $F(x, 0)$ e $f(x)$ differiscano tra loro solo in tratti in cui è verificata la (4)

$$|f(x) - \Pi_n(x)| < \varepsilon,$$

e, perciò, che, dove è

$$f(x) - \Pi_n(x) = \pm \mu,$$

è anche

$$F(x, 0) - \Pi_n(x) = \pm \mu$$

con perfetta corrispondenza di segni.

Ora, essendo, per dato, $\Pi_n(x)$ il polinomio d'approssimazione di grado n di $f(x)$ in (a, b), per il n. 6 del § I esisteranno almeno $n + 2$ punti x_r

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+2}$$

$(x_1 \geq a,\ x_{n+2} \leq b)$ tali che sia

$$f(x_r) - \Pi_n(x_r) = (-1)^r \bar{\mu} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n + 2),$$

dove è $|\bar{\mu}| = \mu$. Ne segue, per quanto è detto sopra,

$$F(x_r, 0) - \Pi_n(x_r) = (-1)^r \bar{\mu} \qquad (r - 1, 2, \ldots, n + 2).$$

E poichè, in tutto (a, b), è

$$|F(x, 0) - \Pi_n(x)| \leq \mu,$$

per lo stesso n. 6 sopra ricordato, avremo che $\Pi_n(x)$ è il polinomio d'approssimazione di grado n di $F(x, 0)$ in (a, b). Essendo poi, in tutto il campo

$$a \leq x \leq b, \qquad 0 \leq y \leq c,$$

$$| F(x y) - \Pi_n(x) | \leq \mu,$$

si conclude, per l'osservazione del n. 12 di questo paragrafo, che $\Pi_n(x)$, in tutto il campo detto, è un polinomio d'approssimazione di grado n di $F(x y)$.

Parimenti, essendo, in tutto il campo $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq c$,

$$| F(x y) - P_n(x y) | \leq \mu,$$

e $P_n(x, 0) = \Pi_n(x)$, è pure $P_n(x y)$ un polinomio d'approssimazione di grado n di $F(x y)$.

Abbiamo così dato esempio di una funzione $F(x y)$, finita e continua in tutto un campo, la quale ammette due (e quindi infiniti) polinomi d'approssimazione di grado n.

14. Per gli infiniti polinomi d'approssimazione di grado n di una funzione continua $f(x y)$ possiamo dimostrare la seguente proposizione:

esistono, nel campo considerato A, almeno $n + 2$ punti

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{n+2}, y_{n+2})$$

tali che in essi tutti i polinomi d'approssimazione di grado n della $f(x y)$ assumono i valori

$$f(x_1, y_1) + \mu_1, f(x_2, y_2) + \mu_2, \ldots, f(x_{n+2}, y_{n+2}) + \mu_{n+2},$$

dove è

$$| \mu_1 | = | \mu_2 | = \cdots = | \mu_{n+2} | = \mu.$$

Dimostriamo, dapprima, la cosa per un numero finito m di polinomi di approssimazione di grado n. Detti

$$\Pi_n^{(1)}, \Pi_n^{(2)}, \ldots, \Pi_n^{(m)}$$

tali polinomi, si ha subito che anche il polinomio

$$\frac{\Pi_n^{(1)} + \Pi_n^{(2)} + \cdots + \Pi_n^{(m)}}{m}$$

è d'approssimazione: è, infatti,

$$\left| f(x\,y) - \frac{\Pi_n^{(1)} + \Pi_n^{(2)} + \cdots + \Pi_n^{(m)}}{m} \right| \leq$$

$$\leq \frac{|f(x\,y) - \Pi_n^{(1)}| + |f(x\,y) - \Pi_n^{(2)}| + \cdots + |f(x\,y) - \Pi_n^{(m)}|}{m},$$

e, perciò,

$$\left| f(x\,y) - \frac{\Pi_n^{(1)} + \Pi_n^{(2)} + \cdots + \Pi_n^{(m)}}{m} \right| \leq \frac{m\mu}{m} = \mu.$$

Ne segue, per la proposizione del n. 10, che

$$\left| f(x\,y) - \frac{\Pi_n^{(1)} + \Pi_n^{(2)} + \cdots + \Pi_n^{(m)}}{m} \right|$$

raggiunge il suo massimo valore in almeno $n+2$ punti. Ma, se in un punto $(\bar{x}, \bar{y})$ è

$$f(\bar{x}, \bar{y}) - \frac{\Pi_n^{(1)}(\bar{x}, y) + \cdots + \Pi_n^{(m)}(\bar{x}, \bar{y})}{m} = \mu,$$

è anche

$$f(\bar{x}, \bar{y}) - \Pi_n^{(r)}(\bar{x}, \bar{y}) = \mu \qquad (r = 1, 2, \ldots, m);$$

ed, analogamente, se in $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$ è

$$f(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}) - \frac{\Pi_n^{(1)}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}) + \cdots + \Pi_n^{(m)}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})}{m} = -\mu,$$

è anche

$$f(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}) - \Pi_n^{(r)}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}) = -\mu \qquad (r = 1, 2, \ldots, m).$$

Ne segue che nei punti $(\bar{x}, \bar{y})$ è

$$\Pi_n^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}) = \Pi_n^{(2)}(x, \bar{y}) = \cdots = \Pi_n^{(m)}(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{x}, \bar{y}) - \mu,$$

ed in quelli $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$

$$\Pi_n^{(1)}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}) = \Pi_n^{(2)}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}) = \cdots = \Pi_n^{(m)}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}) = f(\bar{x}, \bar{\bar{y}}) + \mu.$$

Essendo i numeri $(\bar{x}, \bar{y})$, $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$ in numero, almeno, di $n+2$, la proposizione è dimostrata per gli m polinomi considerati.

Veniamo, ora, a dimostrarla per tutti i polinomi d'approssimazione di uno stesso grado. Consideriamo, dapprima, il caso che fra tali polinomi ne esista almeno uno $\Pi_n(xy)$ tale che l'eguaglianza

$$|f(xy) - \Pi_n(xy)| = \mu$$

sia soddisfatta solo in un numero finito di punti di A. Detti

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_m, y_m) \qquad (m \geqq n+2)$$

tali punti, sia

$$f(x_r, y_r) - \Pi_n(x_r, y_r) = \mu_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, m)$$

dove è $|\mu_r| = \mu$. Supponendo, allora, che la proposizione enunciata non sia vera, sarà possibile scegliere un polinomio d'approssimazione di grado n: $\Pi_n^{(r)}$, tale che sia

$$f(x_r, y_r) - \Pi_n^{(r)}(x_r, y_r) - = \mu_r,$$

e ciò per almeno $m - (n+1)$ valori di r. Ne segue che questi polinomi $\Pi_n^{(r)}$, il cui numero è minore ed eguale ad m, ed il polinomio Π_n ammettono, al massimo, $n+1$ punti (x_s, y_s) tali che sia

$$f(x_s, y_s) - \Pi_n(x_s, y_s) = \mu_s, \qquad f(x_s, y_s) - \Pi_n^{(r)}(x_s, y_s) = \mu_s$$

$$|\mu_s| = \mu,$$

e ciò contraddice a quanto si è dimostrato più sopra.

Consideriamo, in ultimo, il caso che tutti i polinomi d'approssimazione siano tali da rendere la

$$|f(xy) - \Pi_n(xy)| = \mu, \tag{1}$$

per qualsiasi polinomio d'approssimazione di grado n: $\Pi_n(xy)$, soddisfatta sempre in infiniti punti.

Diciamo E l'insieme dei punti di A in cui, per un dato polinomio d'approssimazione $\Pi_n(xy)$, è soddisfatta la (1)

Essendo $\Pi_n^{(1)}$ e $\Pi_n^{(2)}$ due polinomi d'approssimazione, anche $\dfrac{\Pi_n^{(1)} + \Pi_n^{(2)}}{2}$ è tale; i punti dell'insieme E relativo a quest'ultimo polinomio (punti che per ipotesi sono in numero infinito) cadono sulla curva algebrica di ordine n:

$$\Pi_n^{(1)}(xy) - \Pi_n^{(2)}(xy) = 0.$$

Indichiamo con

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \ldots, \quad C_r = 0, \tag{2}$$

le curve algebriche irriducibili che fanno parte della $\Pi_n^{(1)} - \Pi_n^{(2)} = 0$, e che contengono ciascuna infiniti punti dell'insieme E relativo a $\frac{\Pi_n^{(1)} + \Pi_n^{(2)}}{2}$; è, evidentemente, $r \leq n$. Per brevità diremo che il sistema (2) è relativo a $\Pi_n^{(2)}$. Dico, allora, che vi è almeno una curva

$$C_s = 0$$

di (2) che appartiene a tutti i sistemi (2) relativi ai polinomi d'approssimazione di grado n di $f(xy)$. Supponiamo, infatti, che ciò non sia; per ogni curva C_s di (2) scegliamo un polinomio d'approssimazione tale che al sistema (2) relativo ad esso non appartenga la C_s. I polinomi così scelti sono in numero di r_1, con $r_1 \leq r \leq n$; la loro somma, aumentata di $\Pi_n^{(1)} + \Pi_n^{(2)}$ e divisa poi per $r_1 + 2$, è pure un polinomio d'approssimazione Π_n, il quale, per l'ipotesi ammessa, dovrà ammettere un insieme E composto di infiniti punti. Tale insieme deve, evidentemente, appartenere a tutti gli insiemi E relativi ai polinomi componenti Π_n, e quindi a tutti gli insiemi E relativi a $\frac{\Pi_n^{(1)} + \Pi_n^{(2)}}{2}$, $\frac{\Pi_n^{(1)} + \Pi_n^{(3)}}{2}, \ldots$ Ne segue che il sistema (2) relativo a Π_n deve appartenere a tutti i sistemi (2) relativi ai polinomi componenti Π_n: ciò è impossibile per il modo con cui tali polinomi furono scelti.

Resta dunque provato che esiste almeno una curva $C_s = 0$ che appartiene a tutti i sistemi (2) relativi ai polinomi d'approssimazione. Lungo la curva C_s tutti i polinomi d'approssimazione coincidono con $\Pi_n^{(1)}$; e poichè tale curva contiene infiniti punti $(x_r\, y_r)$ in cui è

$$\Pi_n^{(1)}(x_r\, y_r) = f(x_r\, y_r) + \mu_r \qquad |\mu_r| = \mu,$$

esistono infiniti punti $(x_r\, y_r)$ in cui la

$$\Pi_n(x_r\, y_r) = f(x_r\, y_r) + \mu_r$$

è soddisfatta per qualsiasi polinomio d'approssimazione di grado n di $f(xy)$.

La proposizione è così pienamente dimostrata.

15. *L'insieme di tutti i polinomi d'approssimazione di uno stesso grado di una funzione continua $f(xy)$ (data in un certo campo A) costituisce una varietà di funzioni egualmente continue.*

Infatti, poichè tutti i polinomi d'approssimazione di uno stesso grado n devono soddisfare, in tutto A, alla condizione

$$|f(xy) - \Pi_n(xy)| \leq \mu,$$

ne viene che tali polinomi sono, in tutto A, compresi tra i limiti finiti $M + \mu$ e $-(M + \mu)$, dove M indica il massimo valore di $|f(xy)|$ in A. Ne segue, per il n. 2, che i polinomi detti costituiscono una varietà di funzioni egualmente continue.

Risulta allora (*) che esistono, per la varietà dei polinomi d'approssimazione di grado n della $f(xy)$, *una funzione limite superiore* $U(xy)$ *ed una limite inferiore* $V(xy)$, *ambedue continue.* Tutti i polinomi d'approssimazione detti saranno, in A, compresi tra queste due funzioni, e sarà, evidentemente, in tutto il campo considerato,

$$|f(xy) - U(xy)| \leq \mu, \qquad |f(xy) - V(xy)| \leq \mu,$$

donde

$$|U(xy) - V(xy)| \leq 2\mu.$$

Di più (n. 14) le funzioni $U(xy)$ e $V(xy)$ in almeno $n+2$ punti di A coincideranno assumendo i valori

$$f(x_1, y_1) + \mu_1, \quad f(x_2, y_2) + \mu_2, \ldots, \quad f(x_{n+2}, y_{n+2}) + \mu_{n+2},$$

$$|\mu_1| = |\mu_2| = \cdots = |\mu_{n+2}| = \mu.$$

Si può anche osservare che i polinomi d'approssimazione di grado n di $f(xy)$ riempiono completamente, in A, tutto lo spazio compreso tra $U(xy)$ e $V(xy)$, poichè per un punto qualunque interno a tale spazio passa sempre un polinomio d'approssimazione. Per vedere ciò, indichiamo con $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ un punto interno allo spazio considerato: sarà

$$V(\bar{x}, \bar{y}) < z < U(\bar{x}, \bar{y}).$$

Per la definizione stessa delle funzioni $U(xy)$ e $V(xy)$, esisteranno certamente due numeri z_1 e z_2, soddisfacenti alle disuguaglianze

$$V(\bar{x}, \bar{y}) \leq z_1 < \bar{z} < z_2 \leq U(\bar{x}, \bar{y}),$$

(*) C. Arzelà, luogo citato. n. 5.

e tali che esistano due polinomi d'approssimazione di grado n che soddisfino alle uguaglianze

$$\Pi_n^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}) = z_1, \qquad \Pi_n^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}) = z_2 .$$

Consideriamo allora il polinomio di grado n

$$\frac{(\bar{z} - z_1)\,\Pi_n^{(2)}(x\,y) + (z_2 - \bar{z})\,\Pi_n^{(1)}(x\,y)}{z_2 - z_1}, \tag{1}$$

il quale nel punto $(\bar{x}\,\bar{y})$ ammette il valore $\bar{z}$. È

$$\left| f(x\,y) - \frac{(\bar{z} - z_1)\,\Pi_n^{(2)}(x, y) + (z_2 - \bar{z})\,\Pi_n^{(1)}(x\,y)}{z_2 - z_1} \right| \leq$$

$$\leq \frac{|\,(\bar{z} - z_1)\,\{f(x\,y) - \Pi_n^{(2)}(x\,y)\}\,| + |\,(z_2 - \bar{z})\,\{f(x\,y) - \Pi_n^{(1)}(x\,y)\}\,|}{|\,z_2 - z_1\,|} \leq \rho;$$

dunque anche (1) è polinomio d'approssimazione. Resta così provata l'esistenza di un polinomio d'approssimazione di grado n, il quale in $(\bar{x}, \bar{y})$ assume il valore $\bar{z}$.

16. È evidente che nel caso in cui v'è un solo polinomio d'approssimazione di grado n di $f(x\,y)$: $\Pi_n(x\,y)$, è

$$U(x\,y) \equiv \Pi_n(x\,y) \equiv V(x\,y).$$

Viceversa, se in tutto A è

$$U(x\,y) \equiv V(x\,y), \tag{1}$$

esiste un sol polinomio d'approssimazione $\Pi_n(x\,y)$, ed è

$$\Pi_n(x\,y) \equiv U(x\,y) \equiv V(x\,y).$$

Anzi, per questo non è necessario che la (1) sia verificata in tutto A: basta che lo sia in una parte, comunque piccola, di A; o meglio, basta che lo sia in $\binom{n+2}{2}$ punti che non giacciano tutti sopra una medesima curva algebrica di ordine n: infatti, in tale ipotesi, tutti i polinomi d'approssimazione, assumendo in tali punti gli stessi valori, risulterebbero identici.

17. Possiamo osservare che, se, per ogni polinomio d'approssimazione di grado n, si ha che i punti di A in cui è

$$|f(xy) - \Pi_n(xy)| = \bar{\mu} \tag{1}$$

sono tali da poter trovare, nel caso in cui il numero di essi sia $\nu < \binom{n+2}{2}$, nella matrice

$$\left\{\begin{array}{lllllll} x_1^n, & y_1^n, & x_1^{n-1}y_1, \ldots, & x_1, & y_1, & 1 \\ x_2^n, & y_2^n, & x_2^{n-1}y_2, \ldots, & x_2, & y_2, & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_\nu^n, & y_\nu^n, & x_\nu^{n-1}y_\nu, \ldots, & x_\nu, & y_\nu, & 1 \end{array}\right.$$

(che è la matrice del sistema $P_n(x_r y_r) = 0$, $(r = 1, 2, \ldots, \nu)$ dove, come al solito, $P_n(xy)$ indica un polinomio di grado n e (x_r, y_r) $(r = 1, 2, \ldots, \nu)$ sono i punti di A nei quali è verificata la (1)) almeno un determinante di ordine ν diverso da zero, e, nel caso in cui sia $\nu \geq \binom{n+2}{2}$, nella stessa matrice, almeno un determinante di ordine $\binom{n+2}{2}$ pure diverso da zero, allora *esiste, in A, un solo polinomio d'approssimazione di grado n della funzione considerata.*

Per vedere ciò, mostriamo che, nelle ipotesi poste, il numero ν non può essere minore di $\binom{n+2}{2}$. Considerando nel sistema

$$\begin{array}{l} p_1 x_1^n + p_2 y_1^n + \cdots + p_{N-2} x_1 + p_{N-1} y_1 + p_N = \mu_1 \\ p_1 x_2^n + p_2 y_2^n + \cdots + p_{N-2} x_2 + p_{N-1} y_2 + p_N = \mu_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_1 x_\nu^n + p_2 y_\nu^n + \cdots + p_{N-2} x_\nu + p_{N-1} y_\nu + p_N = \mu_\nu, \end{array}$$

dove è $N = \binom{n+2}{2}$ e

$$\mu_\nu = f(x_\nu y_\nu) - \Pi_n(x_\nu y_\nu),$$

le p come incognite, il sistema scritto è, per le ipotesi fatte, certamente possibile. È dunque possibile costruire un polinomio di grado n tale che sia

$$P_n(x_r y_r) = \mu_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Ripetendo allora il ragionamento fatto al n. 2 del § 1, si vede che, per un valore conveniente di ω, è, in tutto A,

$$\left| f(x\,y) - \left\{ \Pi_n(x\,y) + \omega\, P_n(x\,y) \right\} \right| < \mu'$$

con $\mu' < \mu$, il che contraddice all'ipotesi che $\Pi_n(x\,y)$ sia polinomio d'approssimazione.

Stabilito questo, supponiamo che esistano per la $f(x\,y)$ due polinomi d'approssimazione di grado n: $\Pi_n(x\,y)$ e $\overline{\Pi}_n(x\,y)$. Siccome anche $\frac{\Pi_n + \overline{\Pi}_n}{2}$ risulta polinomio d'approssimazione, la

$$\left| f(x\,y) - \frac{\Pi_n(x\,y) + \overline{\Pi}_n(x\,y)}{2} \right| \doteq \mu$$

deve essere soddisfatta in almeno $N = \binom{n+2}{2}$ punti tali che sia

$$D = \begin{vmatrix} x_1^n, & y_1^n, \dots, & x_1, & y_1, & 1 \\ x_2^n, & y_2^n, \dots, & x_2, & y_2, & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_N^n, & y_N^n, \dots, & x_N, & y_N, & 1 \end{vmatrix} \quad 0.$$

E, poichè in tali punti deve essere

$$f(x\,y) - \frac{\Pi_n(x\,y) + \overline{\Pi}_n(x\,y)}{2} = f(x\,y) - \Pi_n(x\,y) = f(x\,y) - \overline{\Pi}_n(x\,y),$$

si ha che $\Pi_n(x\,y)$ e $\overline{\Pi}_n(x\,y)$ assumono lo stesso valore in almeno n punti a determinante D diverso da zero. Ciò porta

$$\Pi_n(x\,y) \equiv \overline{\Pi}_n(x\,y).$$

18. Dimostriamo ora la seguente proposizione:

data, in un campo A, una funzione $f(x\,y)$ continua, e preso un numero positivo η, piccolo a piacere, si può sempre trovare un numero positivo ε tale che, per ogni polinomio d'approssimazione $\Pi'_n(x\,y)$ di grado n di una qualsiasi funzione continua $g(x\,y)$, soddisfacente, in tutto A, alla condizione

$$f(x\,y) - g(x\,y) \,| < \varepsilon,$$

esista sempre un polinomio d'approssimazione (dello stesso grado n), $\Pi_n(xy)$, di $f(xy)$, che soddisfi, in tutto A, alla disuguaglianza

$$|\Pi_n(xy) - \Pi'_n(xy)| < \eta \text{ (*)}.$$

Supponiamo che la proposizione enunciata non sia vera. Allora, presa una successione di numeri positivi, decrescenti e tendenti a zero,

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \ldots, \quad \varepsilon_m, \ldots, \tag{1}$$

per ogni ε_m di tale successione si potrà sempre trovare una funzione continua $g_m(xy)$, soddisfacente, in tutto A, alla condizione

$$|f(xy) - g_m(xy)| < \varepsilon_m,$$

e tale che, per almeno uno dei suoi polinomi di approssimazione di grado n: $\overline{\Pi}_n^{(m)}(xy)$, non esista corrispondentemente un polinomio d'approssimazione dello stesso grado, $\Pi_n(xy)$, di $f(xy)$ tale che sia, in tutto A,

$$|\Pi_n(xy) - \overline{\Pi}_n^{(m)}(xy)| < \eta.$$

Detto μ il massimo di

$$|f(xy) - \Pi_n(xy)|$$

in A, dalla

$$|g_m(xy) - \Pi_n(xy)| \leq |g_m(xy) - f(xy)| + |f(xy) - \Pi_n(xy)| < \mu + \varepsilon_m$$

si trae

$$|g_m(xy) - \overline{\Pi}_n^{(m)}(xy)| < \mu + \varepsilon_m,$$

e perciò

$$|f(xy) - \overline{\Pi}_n^{(m)}(xy)| \leq |f(xy) - g_m(xy)| + |g_m(xy) - \overline{\Pi}_n^{(m)}(xy)|$$

$$|f(xy) - \overline{\Pi}_n^{(m)}(xy)| < \mu + 2\varepsilon_m, \tag{2}$$

la quale sarà soddisfatta in tutto A.

Considerando allora la successione

$$\overline{\Pi}_n^{(1)}(xy), \quad \overline{\Pi}_n^{(2)}(xy), \ldots, \quad \overline{\Pi}_n^{(m)}(xy), \ldots, \tag{3}$$

(*) Questa proposizione, nel caso delle funzioni di una sola variabile, coincide con quella data al n. 7 del primo paragrafo.

si ha, per la (2), che per ogni valore di m è, in tutto A,

$$f(x\,y) - \overline{\Pi}_n^{(m)}(x\,y) < \mu + 2\,\varepsilon_1,$$

vale a dire, in tutto A,

$$|\overline{\Pi}_n^{(m)}(x\,y)| < M + \mu + 2\,\varepsilon_1,$$

essendo M il massimo di $|f(x\,y)|$ in A. I polinomi (3), essendo così tutti compresi tra due limiti finiti, costituiscono (n. 2) una successione di funzioni egualmente continue, ed ammettono perciò (*) almeno una funzione limite, la quale, per il n. 3, non è altro che un polinomio di grado n. Sia $P_n(x\,y)$ un polinomio di grado n funzione limite di (3): dimostriamo che, in tutto A, è

$$|f(x\,y) - P_n(x\,y)| \leqq \mu.$$

Supponiamo che ciò non sia; allora, detto μ' il massimo di

$$|f(x\,y) - P_n(x\,y)|$$

in A, avremo $\mu' > \mu$ e, per essere la (1) composta di numeri positivi tendenti a zero, potremo sempre trovare un $\overline{m}$ tale che, per ogni $m > \overline{m}$, sia

$$\varepsilon_m < \frac{\mu' - \mu}{4}.$$

Ne segue che, per ogni $m > \overline{m}$, è in forza della (2), in tutto A,

$$|f(x\,y) - \overline{\Pi}_n^{(m)}(x\,y)| < \mu + \frac{\mu' - \mu}{2} = \frac{\mu + \mu'}{2},$$

onde, per essere $P_n(x\,y)$ funzione limite di (3),

$$|f(x\,y) - P_n(x\,y)| \leqq \frac{\mu + \mu'}{2},$$

il che contraddice all'ipotesi che μ' $\left(\mu' > \frac{\mu + \mu'}{2}\right)$ sia il massimo di

$$|f(x\,y) - P_n(x\,y)|.$$

(*) Arzelà, luogo citato, n. 3.

Si conclude, perciò, che $P_n(xy)$ è un polinomio d'approssimazione di grado n di $f(xy)$:

$$P_n(xy) = \overline{\Pi}_n(xy).$$

Dalla definizione di funzione limite di una varietà di funzioni egualmente continue segue, allora, che in (3) vi sono infiniti polinomi i quali, in tutto A, appartengono all'intorno

$$\overline{\Pi}_n(xy) - \eta, \qquad \overline{\Pi}_n(xy) + \eta,$$

vale a dire, che in (3) vi sono infiniti polinomi che in tutto A soddisfano alla condizione

$$|\,\overline{\Pi}_n(xy) - \overline{\Pi}_n^{(m)}(xy)\,| < \eta:$$

e ciò contraddice all'ipotesi fatta.

La proposizione è così dimostrata.

19. Anche qui, nel caso di due variabili, il problema della determinazione di un polinomio d'approssimazione di una data funzione continua $f(xy)$ si riconduce (mediante la proposizione dimostrata al numero precedente) al caso particolare in cui la $f(xy)$ detta sia una funzione razionale intera. E ciò nel senso che *il saper calcolare un polinomio d'approssimazione di dato grado n di una qualunque funzione razionale intera porta che si sappia calcolare, con quell'approssimazione che si vuole, un polinomio d'approssimazione dello stesso grado n di una qualsiasi funzione continua.*

Infatti, detta $f(xy)$ la funzione continua e preso un numero positivo η, piccolo a piacere, si può sempre prendere (per il numero precedente) un numero ε, positivo, in modo che, essendo $\Pi'_n(xy)$ un polinomio d'approssimazione di grado n della funzione continua $g(xy)$, soddisfacente, in tutto il campo che si considera, alla condizione

$$|\,f(xy) - g(xy)\,| < \varepsilon,$$

si possa poi sempre trovare un polinomio d'approssimazione di grado n della $f(xy)$ tale che sia, in tutto il campo detto,

$$|\,\Pi_n(xy) - \Pi'_n(xy)\,| < \eta.$$

Si conclude che se, in forza dell'estensione a due variabili del teorema di Weierstrass ricordato al n. 8 del primo paragrafo, si prende per funzione

$g(xy)$ un polinomio $P_n(xy)$, e per questo si calcola un polinomio d'approssimazione di grado n, $\Pi'_n(xy)$, questo polinomio rappresenta a meno di n un polinomio d'approssimazione di grado n di $f(xy)$.

In quanto poi alla determinazione di un polinomio d'approssimazione di una funzione razionale intera, non possiamo qui dare un metodo algebrico analogo a quello dato, per il caso di una sola variabile, al n. 8 del § I; e ciò perchè il teorema del n. 14 non riesce a darci un numero di equazioni algebriche uguale alla differenza tra il numero delle incognite e quello delle dimensioni dello spazio dei polinomi d'approssimazione (del grado che si considera) della funzione data. Dovremo perciò, in generale, determinare i punti di massimo e di minimo della funzione razionale intera $f(xy) - P_n(xy)$ (dove $P_n(xy)$ è il polinomio generale di grado n), e ciò si farà algebricamente; poi trovare il massimo dei moduli dei valori che la $f(xy) - P_n(xy)$ assume in tali punti, ed, infine, determinare i valori dei coeficienti di $P_n(xy)$ per i quali tal massimo raggiunge il suo minimo valore.

20. Analogamente a quanto si è detto al n. 9 del § I, possiamo dire che il numero μ_n, che dà il massimo di $|f(xy) - \Pi_n(xy)|$ in A, è una funzione di n univoca, sempre positiva o nulla (sempre positiva se $f(xy)$ non coincide in A con un polinomio), e sempre non crescente (per la definizione stessa di polinomio d'approssimazione di grado dato). Ne segue che μ_n tende ad un limite λ, che il noto teorema di Weierstrass sulla rappresentazione delle funzioni continue mostra essere uguale allo zero.

Anche il grado m_n di $\Pi_n(xy)$ è una funzione univoca di n; ed è anche una funzione sempre non decrescente. Se $f(xy)$ non coincide in A con un polinomio, il limite zero, a cui tende μ_n al crescere indefinito di n, non può essere un minimo per μ_n, talchè, al crescere indefinito di n, μ_n assume certamente infiniti valori distinti. E poichè dalla disuguaglianza $\mu_r \neq \mu_s$ segue l'altra $m_r \neq m_s$, si conclude che m_n, al crescere indefinito di n, assume infiniti valori, vale a dire (poichè tali valori differiscono tra loro almeno di un'unità) che m_n tende all'infinito.

Consideriamo, ora, la serie di polinomi

$$\Pi_0(xy) + (\Pi_1(xy) - \Pi_0(xy)) + \cdots + (\Pi_n(xy) - \Pi_{n-1}(xy)) + \cdots \qquad (1)$$

dove $\Pi_n(xy)$ è un polinomio d'approssimazione di grado n di $f(xy)$. Si ha subito, per quanto è detto sopra, che la serie scritta converge uniformemente, in tutto A, verso $f(xy)$. Di serie come la (1) (ossia di sviluppi di Tcheby-

CHEV) (*) per una data funzione continua $f(x\,y)$ (data in un determinato campo A) ne esiste sempre almeno una; in generale, però, ne esistono infinite. Tutte queste serie di TCHEBYCHEV godono della proprietà di *dare, fra tutte le serie di polinomi di grado successivamente crescente, uniformemente convergenti, in tutto A, verso la $f(x\,y)$, la più rapida convergenza.*

Nel passaggio dal caso di una sola variabile a quello di due, la rappresentazione delle funzioni continue mediante *serie di Tchebychev* perde una proprietà importante: *quella della univocità.*

(*) Li chiameremo così.

I polinomi d'approssimazione di Tchebychev.

(*Di* Leonida Tonelli, *a Bologna.*)

PARTE SECONDA

I.

1. Chiameremo *polinomio trigonometrico* (*di due variabili*) *di ordine* n la funzione

$$\sum_n (x\,y) = \sum_{s=0}^{n-r} \sum_{r=0}^{n} (a_{rs} \cos r\,x \cos s\,y + b_{rs} \sin r\,x \cos s\,y + \\ + a'_{rs} \cos r\,x \sin s\,y + b'_{rs} \sin r\,x \sin s\,y)$$

ove è sempre $s + r \leq n$. Con facile computo si vede che il numero dei termini di tale polinomio è uguale a $2\,n^2 + 2\,n + 1$ (naturalmente non si contano quei termini che contengono un seno con l'indice r od s nullo). Nel caso di una sola variabile si ha

$$\sum_n (x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos n\,x + b_n \sin n\,x,$$

ed il numero dei termini è $2\,n + 1$.

Evidentemente, un polinomio trigonometrico è una funzione ad un valore, finita, continua e derivabile in tutto il piano $x\,y$, eccettuato l'elemento all'infinito di tal piano. Un polinomio trigonometrico ammette poi, rispetto ad x e ad y, il periodo $2\,\pi$.

2. Siccome in questa seconda parte noi consideriamo sempre funzioni ammettenti, rispetto ad ambedue le variabili x ed y, il periodo $2\,\pi$, sarà sufficiente considerare tali funzioni nel quadrato che ha i lati passanti per i punti $(x = -\pi,\ y = 0)$, $(\pi,\ 0)$, $(0,\ -\pi)$, $(0,\ \pi)$. Il campo determinato da questo quadrato lo chiameremo A; i lati del quadrato che passano per i

punti $(-\pi, 0)$, $(0, -\pi)$ li consideriamo appartenenti ad A; non così invece gli altri due. Dei vertici del quadrato solo $(-\pi, -\pi)$ si considererà appartenenti al campo A.

3. Con metodo perfettamente analogo a quello usato ai numeri 1, 2, 3 del § II della prima parte, si dimostrano le proposizioni seguenti:

I. *I coefficienti di un polinomio trigonometrico non possono, in modulo, superare un certo numero finito dipendente solo dall'ordine e dal massimo modulo del polinomio stesso.*

II. *Una varietà*

$$G \equiv \left\{ \sum\nolimits_n (x\, y) \right\}$$

di polinomi trigonometrici di ordine n, tutti contenuti tra due limiti finiti, è una varietà di funzioni egualmente continue.

III. *Se si ha una varietà*

$$G \equiv \left\{ \sum\nolimits_n (x\, y) \right\}$$

di polinomi trigonometrici di ordine n, tutti contenuti tra due limiti finiti, ogni funzione limite di tale varietà è un polinomio trigonometrico di ordine n.

4. Dimostriamo per i polinomi trigonometrici di una sola variabile la seguente proposizione:

Un polinomio trigonometrico di una variabile di ordine n ha, nel campo della variabile complessa, $2n$ zeri non congrui tra loro rispetto al modulo 2π.

Vale a dire l'equazione

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos n\, x + b_n \sin n\, x = 0 \tag{1}$$

ha $2n$ radici nel campo della variabile complessa compreso tra le parallele all'asse immaginario passanti per i punti $(0, -\pi)$ e $(0, \pi)$; la prima delle quali si considera appartenente al campo, la seconda no.

Per dimostrare la propòsizione ricordiamo le due formole di Moivre

$$\cos n x = \cos^n x - \binom{n}{2} \cos^{n-2} x \sin^2 x + \binom{n}{4} \cos^{n-4} x \sin^4 x - \cdots$$

$$\sin n\, x = \binom{n}{1} \cos^{n-1} x \sin x - \binom{n}{3} \cos^{n-3} x \sin^3 x + \binom{n}{5} \cos^{n-5} x \sin^5 x - \cdots$$

Se, mediante queste formole, esprimiamo tutti i seni e coseni che figurano in (1) in funzione di $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, e sostituiamo poi alle potenze pari di $\cos x$ l'espressione relativa in funzione di $\sin x$, otteniamo un'equazione della forma

$$\left.\begin{aligned} & A_0 + A_1 \sin x + A_2 \sin^2 x + \cdots + A_n \sin^n x + \\ & \qquad + \cos x \, (B_0 + B_1 \sin x + \cdots + B_{n-1} \sin^{n-1} x) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

(le due formole precedentemente ricordate mostrano che in ogni termine dello sviluppo di $\cos n x$, o $\sin n x$, la somma degli esponenti di $\sin x$ e $\cos x$ è uguale ad n). Ponendo qui

$$y = \sin x,$$

si ha che la (2) è equivalente al prodotto delle due equazioni

$$A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + \cdots + A_n y^n \pm \sqrt{1-y^2}\,(B_0 + B_1 y + \cdots + B_{n-1} y^{n-1}) = 0\,,$$

cioè a

$$(A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + \cdots + A_n y^n)^2 - (1-y^2)(B_0 + B_1 y + \cdots + B_{n-1} y^{n-1})^2 = 0.$$

Quest'equazione ammette $2n$ radici, dunque la (2), ossia la (1), ammette, nel campo detto, $2n$ radici.

Osservazione. — Da quanto precede risulta che

il problema della determinazione degli zeri di un polinomio trigonometrico è, a meno della risoluzione dell'equazione in x

$$y = \sin x,$$

un problema algebrico.

II.

1. Sia $f(x\,y)$ una funzione reale delle variabili reali x ed y ed ammettente, rispetto ad ambedue le variabili, il periodo 2π; essa poi sia finita, continua e ad un valore.

La differenza

$$Y(x\,y) = f(x\,y) - \sum_n (x\,y),$$

dove $\sum_n (x\,y)$ è un polinomio trigonometrico d'ordine n, risulta, perciò, finita e continua; tale sarà anche $Y(x\,y)$. Ne segue che Y raggiungerà, nel campo A di cui si è parlato al § 1, almeno una volta il suo massimo $m \geq 0$, il quale, al variare dei coefficienti di $\sum_n (x\,y)$, varierà ed ammetterà un limite inferiore $\mu \geq 0$. Se per i coefficienti di $\sum_n$ esiste un sistema di valori

$(\alpha_{rs}, \beta_{rs}, \alpha'_{rs}, \beta'_{rs})$ tale che sia sempre

$$| f(x y) - T_n (x y) | \leq \quad ,$$

dove è

$$T_n (x y) = \sum_{s=0}^{n} \sum_{r=0}^{n} (\alpha_{rs} \cos r x \cos s y + \beta_{rs} . \sin r x \cos s y + \\ + \alpha'_{rs} \cos r x \sin s y + \beta'_{rs} \sin r x \sin s y),$$

diremo che $T_n (x y)$ è *un polinomio trigonometrico d'approssimazione di ordine n della* $f(x y)$.

2. Con ragionamento identico a quello usato al n. 5 del § II, P. P., si dimostra che

esiste sempre almeno un polinomio trigonometrico d'approssimazione di ordine n per la $f(x y)$.

Si vede anche qui che, se $f(x y)$ non coincide con un polinomio trigonometrico di ordine n, μ è certamente maggiore di zero.

3. Si dimostrano anche qui le proposizioni (vedi n.[i] 6 e 7, § II, P. P.).

I. *Se* $T_n (x y)$ *è un polinomio trigonometrico d'approssimazione di ordine n di* $f(x y)$, $c\, T_n (x y)$ (*dove c è una costante*) *è un polinomio trigonometrico d'approssimazione, dello stesso ordine n, di* $c f(x y)$.

II. *Se* $T_n (x y)$ *è un polinomio trigonometrico d'approssimazione di ordine n di* $f(x y)$ *e* $\Sigma_n (x y)$ *è un polinomio trigonometrico di ordine n,* $T_n (x y) + \Sigma_n (x y)$ *è un polinomio trigonometrico d'approssimazione dello stesso ordine n, di* $f(x y) + \Sigma_n (x y)$.

III.

1. Limitandoci, in questo paragrafo, alle funzioni di una sola variabile, dimostriamo che

per una funzione $f(x)$, *finita, continua* (*reale e ad un valore*) *ed ammettente il periodo* 2π, *esiste un solo polinomio trigonometrico d'approssimazione di ordine n.*

Detto $T_n (x)$ un polinomio trigonometrico d'approssimazione di ordine n di $f(x)$, consideriamo la differenza

$$f(x) - T_n (x)$$

in tutto l'intervallo $(-\pi, +\pi)$, estremi compresi. Per questa differenza potremo costruire gli intervalli L di cui si è parlato al n. 5 del § I (P. P.).

Siano essi in numero di p. Ricordiamo che, detti A' e A'' gli insiemi dei punti di $(-\pi, \pi)$ tali che sia in essi, rispettivamente, $f(x) - T_n(x) = \mu$, $f(x) - T_n(x) = -\mu$ (μ essendo il massimo di $|f(x) - T_n(x)|$), in ogni intervallo L cadono sempre punti dell'insieme $A' + A''$. In un intervallo L cadono poi solamente punti di A' o di A''; e, se in L_s cadono punti di A' (o di A''), in L_{s-1} e L_{s+1} cadono punti di A'' (o di A'). Ricordiamo anche che i punti ξ (che sono quelli che dividono $(-\pi, \pi)$ negli intervalli L) distano dai punti di $A' + A''$ di almeno $\frac{3}{2}\delta$, dove δ è un numero positivo tale che, in ogni intervallo di ampiezza δ di $(-\pi, \pi)$, la funzione $f(x) - T_n(x)$ compie un'oscillazione minore di $\varepsilon < \frac{\mu}{2}$.

Vogliamo ora dimostrare la disuguaglianza

$$p > 2n + 1.$$

Supponiamo, infatti, che sia $p \leq 2n + 1$, e distinguiamo due casi.

1.°) sia p dispari. Indichiamo, allora, con $\sum_{\frac{p-1}{2}}(x)$ il polinomio trigonometrico di ordine $\frac{p-1}{2} \leq n$ che si annulla nei punti $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p-1}$ (*). $\sum_{\frac{p-1}{2}}(x)$ in $(-\pi, \pi)$ si annulla solo nei punti ξ detti (ciò per il n. 4 del § I (P. S.) e perchè, non annullandosi in $-\pi$, non può annullarsi neppure in π, causa la periodicità): ciò porta che $\sum_{\frac{p-1}{2}}(x)$ cambia segno solo quando passa da un intervallo L al successivo. Ne segue che, prendendo convenientemente il segno del moltiplicatore ω, potremo far sì che $\omega \sum_{\frac{p-1}{2}}(x)$ sia positivo negli intervalli L che contengono punti di A' e negativo negli altri. Negli intervalli

$$(-\pi, \xi_1 - \delta), (\xi_1 + \delta, \xi_2 - \delta), \ldots, (\xi_{p-2} + \delta, \xi_{p-1} - \delta), (\xi_{p-1} + \delta, \pi), \qquad (1)$$

(*) Questo polinomio si determinerà risolvendo il sistema

$$a_0 + a_1 \cos \xi_\nu + b_1 \sin \xi_\nu + \ldots + a_{\frac{p-1}{2}} \cos \frac{p-1}{2} \xi_\nu + b_{\frac{p-1}{2}} \sin \frac{p-1}{2} \xi_\nu = 0$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, p-1)$$

rispetto ad $a_0, a_1, b_1, \ldots, a_{\frac{p-1}{2}}, b_{\frac{p-1}{2}}$. I punti $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p-1}$, potranno sempre prendersi in modo che il sistema scritto ammetta per soluzione un sistema di valori non tutti nulli.

$\sum_{\frac{p-1}{2}}(x)$, non potendo essere nullo, avrà (essendo funzione continua) un minimo valore assoluto σ certamente diverso da zero.

Poichè i punti ξ distano da quelli di $A' + A''$ di almeno $\frac{3}{2}\delta$, ne segue che tutti gli intervalli di ampiezza δ ed aventi per punto di mezzo uno dei punti di $A' + A''$, sono interamente contenuti negli intervalli (1). Si ha, perciò, che, in ogni intervallo di ampiezza δ ed avente come punto di mezzo un punto di A', è

$$\mu - \varepsilon < f(x) - T_n(x) \leq \mu$$

$$|\omega|\,\sigma < \omega \sum_{\frac{p-1}{2}}(x) < |\omega|\,M,$$

dove M indica il massimo modulo di $\sum_{\frac{p-1}{2}}(x)$. Ne segue che, se si prende $|\omega| < \frac{\mu - \varepsilon}{M}$, è, in tutto l'intervallo detto,

$$0 < f(x) - T_n(x) - \omega \sum_{\frac{p-1}{2}}(x) < \mu - |\omega|\,\sigma$$

$$\left| f(x) - \left\{ T_n(x) + \omega \sum_{\frac{p-1}{2}}(x) \right\} \right| < \mu - |\omega|\,\sigma.$$

Analogamente si vede che questa disuguaglianza è verificata anche in ogni intervallo di ampiezza δ avente come punto di mezzo un punto di A''. Ragionando ora in modo analogo a quanto si è fatto alla fine del n. 3 del § I (P. P.) si vede che in tutto $(-\pi, \pi)$ è

$$\left| f(x) - \left\{ T_n(x) + \omega \sum_{\frac{p-1}{2}}(x) \right\} \right| < \mu',$$

con $\mu' < \mu$; il che è assurdo perchè $T_n(x)$ è polinomio trigonometrico d'approssimazione di ordine n, e $T_n(x) + \omega \sum_{\frac{p-1}{2}}(x)$ è un polinomio trigonometrico pure di ordine n.

2.°) sia p pari. Gli intervalli L_1 e L_p (che contengono, rispettivamente, i punti $-\pi$, π) non possono, allora, contenere punti di uno stesso insieme A' o A''. Ne segue, per la periodicità, che π e $-\pi$ non appartengono all'insieme $A' + A''$. Sia c il valore di $f(\pi) - T_n(\pi)$; sarà, naturalmente, $|c| < \mu$.

Sia poi $(\pi - \delta', \pi)$ un tratto tale che in esso la $f(x) - T_n(x)$ faccia una oscillazione minore di $\frac{\mu - |c|}{2}$. Detto δ un numero positivo soddisfacente alla condizione

$$\delta < \begin{cases} \delta \\ \delta', \end{cases}$$

è evidente che nell'intervallo $(\pi - \overline{\delta}, \pi)$ non può cadere alcun punto di $A' + A''$. Consideriamo, allora, il polinomio trigonometrico di ordine $\frac{p}{2}$ che si annulla nei punti $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p-1}, \pi - \frac{\overline{\delta}}{4}$ (*). Questo polinomio $\sum_{\frac{p}{2}}(x)$ è di ordine minore od uguale ad n, perchè, essendosi supposto $p < 2n + 1$ con p pari, deve essere $p \leq 2n$.

$\sum_{\frac{p}{2}}(x)$ annullandosi solo nei punti $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p-1}, \pi - \frac{\overline{\delta}}{4}$ di $(-\pi, \pi)$, cambia segno solo quando passa da un intervallo L al successivo e quando passa per il punto $\pi - \frac{\overline{\delta}}{4}$. Considerando l'intervallo L_p limitato al punto $\pi - \frac{\overline{\delta}}{4}$, possiamo, prendendo convenientemente il segno di ω, far sì che $\omega \sum_{\frac{p}{2}}(x)$ sia positivo negli intervalli L che contengono punti di A' e negativo negli altri.

Negli intervalli

$$(-\pi, \xi_1 - \delta), (\xi_1 + \delta, \xi_2 - \delta), \ldots, (\xi_{p-2} + \overline{\delta}, \xi_{p-1} - \delta), \left(\xi_{p-1} + \delta, \pi - \frac{\overline{\delta}}{4}\right) \qquad (2)$$

$\sum_{\frac{p}{2}}(x)$, non potendo essere mai nullo, avrà un minimo valore assoluto $\sigma > 0$.

Negli intervalli (2) saranno poi anche completamente contenuti tutti gli intervalli di ampiezza δ aventi come punto di mezzo un punto di $A' + A''$: ciò perchè ogni punto ξ dista da quelli di $A' + A''$ almeno di $\frac{3}{2}\delta > \frac{3}{2}\delta$, e perchè in $(\pi - \overline{\delta}, \pi)$ non cade nessun punto di $A' + A''$. Segue che, in ogni intervallo di ampiezza $\overline{\delta}$ ed avente come punto di mezzo un punto A', è

$$\mu - \varepsilon < f(x) - T_n(x) \leq \mu$$
$$|\omega| \sigma < \omega \sum_{\frac{p}{2}}(x) < |\omega| M$$

(*) Vedi nota pag. 99.

(dove M indica il massimo modulo di $\sum_{\frac{p}{2}}(x)$); ossia, se si prende $|\omega| < \frac{\mu - \varepsilon}{M}$,

$$\left| f(x) - \left\{ T_n(x) + \omega \sum_{\frac{p}{2}}(x) \right\} \right| < \mu - |\omega| \sigma,$$

la quale disuguaglianza si mostra subito esser valida anche in ogni intervallo di ampiezza $\bar{\delta}$ avente per punto di mezzo un punto di A''. Ciò porta, come nel caso precedente, all'assurdo.

È così dimostrata in tutti i casi la disuguaglianza $p > 2n + 1$.

Facciamo, ora, vedere che esiste un sol polinomio trigonometrico d'ordine n tale che per esso sia $p > 2n + 1$.

Esista, se è possibile, oltre $T_n(x)$, un altro polinomio trigonometrico di ordine n, $\sum_n(x)$, tale che per esso sia $p > 2n + 1$. Detto m il massimo di $|f(x) - \sum_n(x)|$ in $(-\pi, \pi)$, deve aversi $m \geq \mu$ (essendo $T_n(x)$ polinomio di approssimazione).

Consideriamo, allora, gli intervalli L relativi alla differenza $f(x) - \sum_n(x)$. In ognuno di essi $f(x) - \sum_n(x)$ raggiunge una volta almeno il suo massimo

Scegliamo perciò in ogni L un punto in cui $|f(x) - \sum_n(x)|$ raggiunge il valore m.

Siano, tali punti,

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_p \quad (p > 2n + 1);$$

in essi la differenza $f(x) - \sum_n(x)$ assumerà i valori, qualora sia, per esempio, $f(\alpha_1) - \sum_n(\alpha_1) = m$,

$$m, \quad -m, \quad m, \quad -m, \ldots$$

Considerando, allora, il polinomio trigonometrico d'ordine n

$$\bar{\sum}_n(x) = \left\{ f(x) - \sum_n(x) \right\} - \left\{ f(x) - T_n(x) \right\},$$

avremo, essendo $\mu \leq m$,

$$\bar{\sum}_n(\alpha_1) \geq 0, \quad \bar{\sum}_n(\alpha_2) \leq 0, \quad \bar{\sum}_n(\alpha_3) \geq 0, \ldots$$

Dico che queste disuguaglianze portano all'identità

$$\bar{\sum}_n(x) \equiv 0.$$

Infatti, se ciò non fosse, il polinomio $\overline{\sum}_n (x)$ avrebbe nell'intervallo (α_1, α_3) almeno un minimo, in (α_2, α_4) almeno un massimo, in (α_3, α_5) almeno un minimo, e così via; avrebbe cioè, nell'interno dell'intervallo $(-\pi, \pi)$, più di $p-2 > 2n-1$ punti di massimo o di minimo. Ora osserviamo che il numero $p-2$ è maggiore di $2n$ nel caso di $p > 2n+2$, ed uguale a $2n$ nel caso di $p = 2n+2$. Ma, in quest'ultimo caso, osserveremo che, per essere pari il numero p, è

$$\overline{\sum}_n (\alpha_{p-1}) \geq 0, \quad \overline{\sum}_n (\alpha_p) < 0,$$

e, per la periodicità,

$$\overline{\sum}_n (\alpha_1 + 2\pi) \geq 0,$$

con $\alpha_{p-1} < \alpha_p < \alpha_1 + 2\pi$. Ne segue che in $(\alpha_{p-1}, \alpha_1 + 2\pi)$ il polinomio $\overline{\sum}_n (x)$ deve avere un altro minimo, il quale è certo distinto da tutti quelli già contati, perchè l'ultimo di questi si trova nell'intervallo $(\alpha_{p-3}, \alpha_{p-1})$. Questo nuovo minimo cadrà o su (α_{p-1}, π) (π escluso), ed allora sarà interno a $(-\pi, \pi)$; oppure su $(\pi, \alpha_1 + 2\pi)$ ed allora, per la periodicità, ci dovrà essere in (π, α_1) un altro punto di minimo. Ne segue che, se è $p = 2n+2$, oltre i $p-2$ punti di minimo e massimo già contati, ve n'è in $(\pi, -\pi)$ (primo estremo incluso, secondo escluso) certamente un altro. Si conclude, perciò, che $\overline{\sum}_n (x)$ ha sempre in $(-\pi, \pi)$ (secondo estremo escluso) un numero di massimi e minimi maggiore di $2n$. E ciò è assurdo perchè la derivata di $\overline{\sum}_n (x)$, essendo un polinomio trigonometrico di ordine n, non può avere che $2n$ radici nell'intervallo detto (§ I, n. 4).

È dunque $\overline{\sum}_n (x) \equiv 0$, e, perciò,

$$\sum_n (x) \equiv T_n (x).$$

Risulta così completamente dimostrata l'unicità dei polinomi trigonometrici d'approssimazione (*).

2. Dalla dimostrazione precedente segue anche la proposizione:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un polinomio trigonometrico sia polinomio d'approssimazione di ordine n è che il numero degli intervalli L relativi ad esso sia superiore a $2n+1$.

(*) Questa dimostrazione è modellata su quella del Borel relativa ai polinomi algebrici (vedi loc. cit.).

Segue da ciò che nell'intervallo $(-\pi, \pi)$, π escluso, vi sono sempre $2n+2$ punti

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{2n+2}$$

tali che in essi la differenza $f(x) - T_n(x)$ assuma, alternativamente, i valori μ e $-\mu$. Ciò è evidente nel caso che il numero degli L sia maggiore di $2n+2$. Se tal numero è uguale a $2n+2$, basta osservare che il punto π non può essere tale da rendere soddisfatta l'eguaglianza $|f(\pi) - T_n(\pi)| = \mu$, perchè, allora, dovrebbe essere (per la periodicità)

$$f(-\pi) - T_n(-\pi) = f(\pi) - T_n(\pi),$$

il che è assurdo per essere il numero degli intervalli L pari.

3. Con metodo identico a quello usato al n. 18 del § II (P. P.), si dimostra anche qui la *continuità* della corrispondenza tra una funzione continua a periodo 2π ed il suo polinomio trigonometrico d'approssimazione di ordine dato. Si dimostra cioè che

se $T_n(x)$ e $T'_n(x)$ sono i polinomi trigonometrici d'approssimazione di ordine n di due funzioni finite e continue, a periodo 2π: $f(x)$ e $g(x)$; preso un numero η positivo e piccolo a piacere, si può sempre trovare un numero positivo ε tale che, per ogni funzione $g(x)$ soddisfacente alla condizione

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon,$$

sia

$$|T_n(x) - T'_n(x)| < \eta.$$

Ciò porta anche che, per un ε conveniente, i coefficienti corrispondenti di $T_n(x)$ e $T'_n(x)$ differiscono tra loro per meno di η.

4. Nel caso in cui la funzione $f(x)$ sia un polinomio trigonometrico, la determinazione del suo polinomio trigonometrico d'approssimazione di ordine dato si riconduce, analogamente a quanto si è detto al n. 8 del § I (P. P.), alla risoluzione di un sistema di $2(2n+2)$ equazioni algebriche a $2(2n+2)$ incognite, ed alla risoluzione dell'equazione in x: $y = \sin x$. Si può dire perciò che

se la funzione $f(x)$ è un polinomio trigonometrico, il problema della determinazione del polinomio trigonometrico d'approssimazione di ordine dato è, a meno della risoluzione dell'equazione in x: $y = \sin x$, un problema algebrico.

Ricordando che una funzione continua è sempre rappresentabile, a meno di ε, mediante un polinomio trigonometrico, si ha che *il saper calcolare il polinomio trigonometrico d'approssimazione di dato ordine di un qualunque* *polinomio trigonometrico porta che si sappia calcolare quello di una qualsiasi funzione continua a periodo 2π, con quell'approssimazione che si vuole.*

5. *Il polinomio trigonometrico d'approssimazione di ordine n di una funzione continua, a periodo 2π, e pari, è una funzione pari.*

Infatti, detto $T_n(x)$ il polinomio trigonometrico d'approssimazione di ordine n di $f(x)$, essendo sempre

$$|f(x) - T_n(x)| \leq \mu,$$

è anche

$$|f(x) - T_n(-x)| = |f(-x) - T_n(-x)| \leq \mu,$$

il che porta che $T_n(-x)$ è anch'esso polinomio d'approssimazione di ordine n, e quindi che è $T_n(-x) \equiv T_n(x)$. $T_n(x)$ è perciò funzione pari.

6. Analogamente a quanto si è detto al n. 9 del § I (P. P.), può dirsi che, al crescere all'infinito di n, μ_n tende a zero, ed m_n (dove m_n indica l'ordine di $T_n(x)$) all'infinito. Ne segue che $T_n(x)$ tende uniformemente, per $n = \infty$ a $f(x)$. $f(x)$ può, perciò, svilupparsi nella serie uniformemente convergente

$$f(x) = T_0(x) + (T_1(x) - T_0(x)) + \cdots + (T_n(x) - T_{n-1}(x)) + \cdots$$

Questa serie gode della seguente proprietà caratteristica:

fra tutte le serie di polinomi trigonometrici di ordine successivamente crescente, uniformemente convergenti verso la $f(x)$, essa dà la più rapida convergenza.

IV.

1. Venendo al caso di due variabili, si può dimostrare, analogamente a quanto si è fatto al n. 8 del § II (P. P.) che il *massimo μ di*

$$|f(xy) - T_n(xy)|$$

è uguale tanto al massimo quanto al valore assoluto del minimo di $f(xy)$ $T(xy)$.

Detto, poi, E l'insieme dei punti (x, y) del campo A, di cui si è parlato al n. 2 del § I (P. S.), soddisfacenti alla condizione

$$|f(x, y) \quad T_n(x, y)| = \mu,$$

si ha, indicando con $\bar{s}$ un numero 0 ed avente segno contrario a quello della differenza $f(\bar{x}, \bar{y}) - T_n(x, \bar{y})$, che *condizione necessaria e sufficiente affinchè $T_n(xy)$ sia un polinomio trigonometrico d'approssimazione di ordine n di $f(xy)$, è che non si possano trovare dei numeri*

$$a_{rs},\ b_{rs},\ a'_{rs},\ b'_{rs} \qquad (r=0,\ 1,\ 2,\dots,\ n;\ s=0,\ 1,\ 2,\dots,\ n-r)$$

e contemporaneamente un sistema di valori $\bar{s}$, soddisfacenti tutti alla condizione $S > \bar{s} > s > 0$, in modo che sia, su tutto E,

$$\sum_{s=0}^{n-r}\sum_{r=0}^{n}(a_{rs}\cos r\bar{x}\cos s\bar{y}+b_{rs}\sin r\bar{x}\cos s\bar{y}+$$
$$+a'_{rs}\cos r\bar{x}\sin s\bar{y}+b'_{rs}\sin r\bar{x}\sin s\bar{y})=\bar{s}.$$

La dimostrazione di questa proposizione è perfettamente analoga a quella del n. 9 § II (P. P.).

2. Si dimostra anche la proposizione (vedi n. 12 § II, P. P.).

Se $T_n(xy)$ è un polinomio trigonometrico d'ordine n, il sapere che è sempre

$$|f(xy)-T_n(xy)|\leq\mu,$$

essendo μ il massimo di $|f(x\bar{y})-T_n(x)|$ (dove $\bar{y}$ è un valore fisso di y, e $T_n(x)$ è il polinomio trigonometrico d'approssimazione di ordine n di $f(x\bar{y})$), basta per concludere che $T_n(xy)$ è un polinomio trigonometrico d'approssimazione di ordine n di $f(xy)$.

3. Anche qui vi è una notevole differenza tra il caso di una variabile e quello di due.

Mentre nel primo vi è un sol polinomio trigonometrico d'approssimazione di ordine dato, nel secondo, invece, in generale ve ne sono infiniti. Questa proposizione si dimostra anche qui costruendo, analogamente a quanto si è fatto al n. 13 del § II (P. P.), una funzione finita, continua, ammettente il periodo 2π rispetto ad ambedue le variabili x ed y, e tale che per essa esistano più polinomi trigonometrici d'approssimazione di uno stesso ordine.

4. Analogamente a quanto si è detto al § II della P. P. si può dire anche qui che *l'insieme di tutti i polinomi trigonometrici d'approssimazione di uno stesso ordine della stessa funzione costituisce una varietà di funzioni egualmente continue. Esiste poi per tale varietà una funzione limite superiore $U(xy)$ ed una limite inferiore $V(xy)$ ambedue continue ed a periodo 2π sia rispetto ad x come ad y.* Tutti i polinomi trigonometrici d'approssimazione detti sono compresi tra queste due funzioni $U(xy)$, $V(xy)$; ed è sempre

$$|f(xy)-U(xy)|\leq\mu,\qquad |f(xy)-V(xy)|\leq\mu$$
$$|U(xy)-V(xy)|\leq 2\mu.$$

Di più i polinomi d'approssimazione detti riempiono completamente tutto lo spazio compreso tra $U(xy)$ e $V(xy)$.

In quanto, poi, all'unicità dei polinomi d'approssimazione si ha una proposizione perfettamente analoga a quella del n. 17 del già citato § II (P. P.).

5. Con metodo identico a quello usato al n. 18 del § II (P. P.) si dimostra che

data una funzione $f(xy)$ finita, continua ed a periodo 2π rispetto ad ambedue le variabili, e preso un numero positivo η, piccolo a piacere, si può poi sempre trovare un numero positivo ε tale che, per ogni polinomio trigonometrico d'approssimazione $T'_n(xy)$ di ordine n di una qualsiasi funzione $g(xy)$, avente i caratteri della $f(xy)$ e soddisfacente ovunque alla condizione

$$|f(xy) - g(xy)| < \varepsilon,$$

esista sempre un polinomio trigonometrico d'approssimazione (dello stesso ordine n), $T_n(xy)$, di $f(xy)$, che soddisfi ovunque alla disuguaglianza

$$|T_n(xy) - T'_n(xy)| < \eta.$$

6. Analogamente a quanto si è detto nel caso di una sola variabile, può dirsi che:

il saper calcolare il polinomio trigonometrico d'approssimazione d'ordine n di un qualsiasi polinomio trigonometrico, porta che si sappia calcolare quello di una qualunque funzione continua a periodo 2π (rispetto ad ambedue le variabili) con quell'approssimazione che si vuole.

Per giustificare questa proposizione ricorderemo che *una funzione continua $f(xy)$ è sempre rappresentabile, a meno di ε, mediante un polinomio trigonometrico* (*).

(*) Diamo qui, di tale proposizione, una dimostrazione diversa da quella che il Picard dà nel suo *Traité d'Analyse* facendo uso dell'integrale di Poisson. Ammetta, dapprima, $f(xy)$ il periodo 2π rispetto ad ambedue le variabili. Dividiamo il quadrato A, di cui si è parlato al n. 2 del § I (P. S.), mediante parallele agli assi x ed y, in tanti rettangoli tali che in ciascuno di essi la $f(xy)$ faccia un'oscillazione minore di $\frac{\varepsilon}{2}$. Se A, B, C, D, sono i vertici di uno di questi rettangoli, consideriamo il triangolo che ha per vertici i punti della superficie $f(xy)$ i quali hanno per proiezione sul piano xy i punti A, B, C. Parimenti consideriamo il triangolo analogo che ha per proiezione dei suoi vertici i punti C, D, A. L'insieme di tutti i triangoli analoghi ai due precedenti e relativi a tutti i rettangoli in cui è stato diviso A costituisce una superficie poliedrica. La funzione $\varphi(xy)$ rappresentata da

7. Termineremo osservando che, al crescere all'infinito di n, μ_n tende a zero e m_n (ordine di $T_n(xy)$) all'infinito. $T_n(xy)$ tende perciò, al crescere di n all'infinito, uniformemente verso $f(xy)$. Questa funzione può, così, svilupparsi nella seguente serie uniformemente convergente

$$f(xy) = T_0(xy) + (T_1(xy) - T_0(xy)) + \cdots + (T_n(xy) - T_{n-1}(xy)) + \cdots$$

Di tali serie che rappresentano $f(xy)$, ve ne sono, in generale, infinite. Esse però godono tutte della proprietà di *dare, fra tutte quelle costituite di polinomi trigonometrici di ordine successivamente crescente, e uniformemente convergenti verso la $f(xy)$, la più rapida convergenza.*

PARTE TERZA

1. Sia la funzione $f(x)$ della variabile complessa x data in un campo limitato A, ed ivi, contorno compreso, ad un valore, finita e continua.

Analogamente a quanto abbiamo fatto nel caso delle funzioni di variabili reali, potremo anche qui, per la $f(x)$, nel campo A, definire i *polinomi d'approssimazione* di dato grado, ed anche dimostrare (con metodo identico a quello usato nella Parte Prima) che *esiste sempre almeno un polinomio di approssimazione di grado n per la $f(x)$.*

2. Detto ciò e indicando con $\Pi_n(x)$ un polinomio d'approssimazione

---

tale superficie è, evidentemente, continua, oscillante riducibile, a periodo 2π rispetto ad ambedue le variabili e tale da rappresentare $f(xy)$ a meno di $\frac{\varepsilon}{2}$. La funzione $\varphi(xy)$ è perciò (vedi Cerni, *Sulla rappresentabilità di una funzione a due variabili per serie doppia trigonometrica.* Rend. dell'Istituto Lombardo, 1901) sviluppabile in serie doppia di Fourier, uniformemente convergente: ciò prova la nostra proposizione. Se poi $f(xy)$ non ammettesse rispetto ad x e ad y il periodo 2π, basterebbe con un cambiamento di variabili ridurre il campo in cui è data la $f(xy)$ ad essere interno al quadrato A, continuare poi la $f(xy)$ in tutto A, in modo da renderla periodica, e ripetere il ragionamento precedente.

di grado n della $f(x)$, consideriamo la differenza

$$f(x) - \Pi_n(x) = Y(x),$$

la quale sarà una funzione finita e continua in tutto il campo A (contorno compreso). Risulterà, perciò, finita e continua, in tutto A (contorno compreso) anche la funzione $|Y(x)|$. Ne segue che $|Y(x)|$ raggiungerà, almeno una volta, nel campo detto, il suo massimo valore μ.

Dimostriamo, ora, la seguente proposizione, analoga a quella del n. 3, I, P. P.: *il numero dei punti del campo A in cui $Y(x)$ raggiunge il suo massimo μ è certamente maggiore di $n+1$.*

Siano $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, i punti di A in cui $|Y(x)|$ raggiunge il suo massimo valore μ, e supponiamo che sia $\nu \leq n+1$. Faremo vedere che, in tale ipotesi, è possibile costruire un polinomio di grado n, $\overline{\Pi}_n(x)$, tale che sia, in tutto A,

$$|f(x) - \overline{\Pi}_n(x)| \leq \mu',$$

con $\mu' < \mu$: il che è assurdo, perchè $\Pi_n(x)$ è un polinomio d'approssimazione di grado n.

Consideriamo, perciò, il polinomio di grado n

$$P_n(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_n,$$

essendo $p_0, p_1, \ldots, p_n$, un sistema di valori non tutti nulli soddisfacenti al sistema

$$\begin{aligned} p_0 x_1^n + p_1 x_1^{n-1} + \cdots + p_n &= \mu\, e^{i\alpha_1} \\ p_0 x_2^n + p_1 x_2^{n-1} + \cdots + p_n &= \mu\, e^{i\alpha_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_0 x_\nu^n + p_1 x_\nu^{n-1} + \cdots + p_n &= \mu\, e^{i\alpha_\nu}, \end{aligned}$$

dove è

$$f(x_r) - \Pi_n(x_r) = \mu\, e^{i\alpha_r}.$$

Col polinomio $P_n(x)$ detto formiamo l'espressione

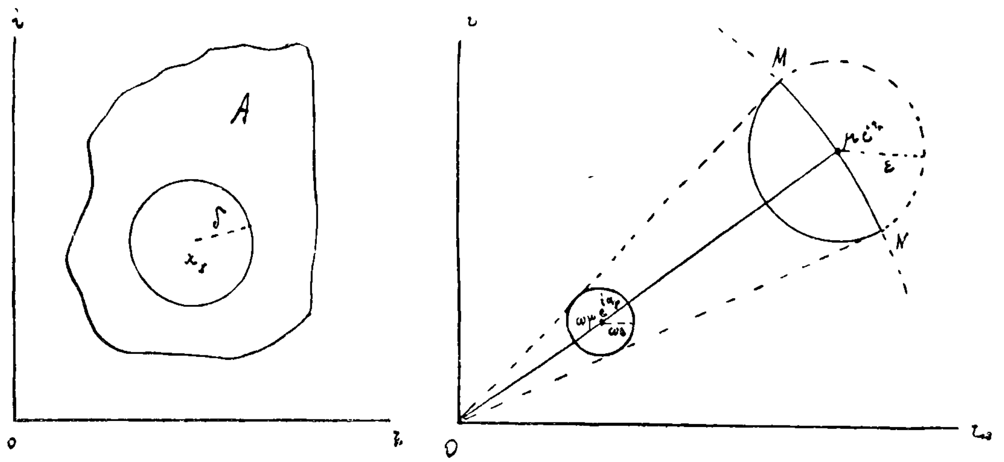
$$Y_1(x) = f(x) - \Pi_n(x) - \omega P_n(x) = Y(x) - \omega P_n(x),$$

dove ω è un numero positivo. Essendo $Y(x)$ e $P_n(x)$ continue in tutto A, preso un numero positivo $\varepsilon < \frac{\mu}{2}$, potremo determinare un numero positivo δ

tale che, in tutto A, soddisfatta che sia la disuguaglianza $|x' - x''| \leq \delta$, sia

$$|Y(x') - Y(x'')| < \varepsilon, \qquad |P_n(x') - P_n(x'')| < \varepsilon.$$

Consideriamo, allora, nel piano della variabile complessa, il cerchio di raggio δ e centro x_r, dove x_r è uno qualunque dei punti $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$. Al variare di x nell'interno di questo cerchio, la $Y(x)$, per quanto precede e perchè non può superare in modulo il numero μ, varierà, nel piano rappresentativo della funzione, nella parte comune al cerchio di centro $\mu\, e^{i\alpha_r}$ (che corrisponde a x_r) e raggio ε, ed al cerchio avente per centro l'origine del piano e per raggio μ. $\omega P_n(x)$, invece, al variare di x nel cerchio (x_r, δ), va-



rierà nel cerchio di centro $\omega\, \mu^{\alpha_r}$ (che corrisponde a x_r) e raggio $\omega\,\varepsilon$. Se indichiamo con M ed N i punti d'intersezione delle due tangenti condotte per O al cerchio $(\mu\, e^{i\alpha_r}, \varepsilon)$ con la circonferenza $(0, \mu)$, potremo, prendendo ω convenientemente piccolo, far sì che il cerchio $(\omega\, \mu\, e^{\alpha_r}, \omega\,\varepsilon)$ sia tutto contenuto nel settore circolare MON. Ora, poichè è $\varepsilon < \frac{\mu}{2}$, l'angolo $M\widehat{O}N$ è minore di 60°, e, di conseguenza, la distanza tra due punti qualunque del settore circolare MON è sempre minore ed uguale a μ; anzi, sempre minore di μ quando nessuno dei due punti coincide con O. Dunque, per un ω convenientemente piccolo, la distanza tra un punto qualunque del cerchio $(\omega\, \mu\, e^{i\alpha_r}, \omega\,\varepsilon)$ ed uno qualunque di qualla parte del cerchio $(\mu\, e^{i\alpha_r}, \varepsilon)$ che è comune anche al cerchio $(0, \mu)$, è sempre minore di μ. Ne segue che, per un tale ω, la differenza

$$Y(x) - \omega P_n(x) = Y_1(x)$$

è, in ogni punto del cerchio (x_r, δ), minore, in modulo, di μ:

$$|Y_1(x)| < \mu. \tag{2}$$

Dal campo A togliamo ora i cerchi (x_r, δ) detti, nei quali è verificata la (2). Rimarrà un campo A' nel quale la $|Y(x)|$ avrà un massimo valore $\mu'' < \mu$: in tutto A' sarà, perciò,

$$|Y(x)| \leq \mu''. \tag{3}$$

In tutto A, poi, il polinomio $P_n(x)$ avrà un massimo modulo M; quindi, se l'ω che abbiamo scelto lo rendiamo minore di $\frac{\mu - \mu''}{2M}$, avremo, in tutto A,

$$|\omega P_n(x)| < \frac{\mu - \mu''}{2}. \tag{4}$$

Per la (3) e la (4) è, perciò, in A',

$$|Y_1(x)| = |Y(x) - \omega P_n(x)| \leq |Y(x)| + |\omega P_n(x)|$$

$$|Y_1(x)| < \mu'' + \frac{\mu - \mu''}{2} = \frac{\mu + \mu''}{2} < \mu. \tag{5}$$

Dalle (2) e (5) risulta, perciò, che, in tutto A, $|Y_1(x)|$ è sempre minore di μ. Ma, essendo $Y_1(x)$ continua in tutto A, la $|Y_1(x)|$ è anch'essa continua: segue che, nel campo detto, è

$$|Y_1(x)| \leq \mu'$$

con $\mu' < \mu$; cioè

$$\left| f(x) - \left\{ \Pi_n(x) + \omega P_n(x) \right\} \right| \leq \mu' < \mu.$$

Questo dimostra la nostra proposizione.

3. Stabilito questo, dimostrano che

esiste per la funzione $f(x)$ un solo polinomio d'approssimazione di grado n.

Supponiamo, infatti, che di tali polinomi ne esistano due: $\Pi_n(x)$ e $\overline{\Pi}_n(x)$, e consideriamo il polinomio, pure di grado n, $\frac{\Pi_n(x) + \overline{\Pi}_n(x)}{2}$. Avremo

$$\left| f(x) - \frac{\Pi_n(x) + \overline{\Pi}_n(x)}{2} \right| \leq \frac{|f(x) - \Pi_n(x)| + |f(x) - \overline{\Pi}_n(x)|}{2},$$

ed anche, in tutto A, poichè è

$$|f(x) - \Pi_n(x)| \leq \mu, \quad |f(x) - \overline{\Pi}_n(x)| \leq \mu, \tag{1}$$

$$\left| f(x) - \frac{\Pi_n(x) + \overline{\Pi}_n(x)}{2} \right| \leq \mu.$$

Dunque anche $\frac{\Pi_n(x) + \overline{\Pi}_n(x)}{2}$ è polinomio d'approssimazione di grado n. Ne segue, per la proposizione del numero precedente, che

$$\left| f(x) - \frac{\Pi_n(x) + \overline{\Pi}_n(x)}{2} \right|$$

raggiunge il suo massimo μ in almeno $n+2$ punti di A. Ma se in un punto $\bar{x}$ è

$$f(\bar{x}) - \frac{\Pi_n(\bar{x}) + \overline{\Pi}_n(\bar{x})}{2} = \mu\, e^{i\alpha}, \tag{2}$$

deve anche essere

$$f(\bar{x}) - \Pi_n(\bar{x}) = \mu\, e^{i\alpha}, \quad f(\bar{x}) - \overline{\Pi}_n(\bar{x}) = \mu\, e^{i\alpha}. \tag{3}$$

Infatti, le (1) portano che sia

$$\left| f(\bar{x}) - \frac{\Pi_n(\bar{x}) + \overline{\Pi}_n(\bar{x})}{2} \right| = \frac{|f(\bar{x}) - \Pi_n(\bar{x})| + |f(\bar{x}) - \overline{\Pi}_n(\bar{x})|}{2}, \tag{4}$$

altrimenti il primo membro di questa eguaglianza sarebbe minore di μ, contro la (2). Ma se il modulo di una somma è uguale alla somma dei moduli degli addendi, gli addendi devono avere tutti lo stesso argomento (che è poi quello della somma). Dunque la (4) porta che $f(\bar{x}) - \Pi_n(\bar{x})$ e $f(\bar{x}) - \overline{\Pi}_n(\bar{x})$ abbiano l'argomento uguale ad α.

La (4) e la (1) portano, poi, che sia $|f(\bar{x}) - \Pi_n(\bar{x})| = |f(\bar{x}) - \overline{\Pi}_n(\bar{x})| = \mu$, altrimenti il primo membro di (4) sarebbe inferiore a μ.

Dunque, in ogni punto $\bar{x}$ in cui è

$$\left| f(\bar{x}) - \frac{\Pi_n(\bar{x}) + \overline{\Pi}_n(\bar{x})}{2} \right| = \mu,$$

è

$$\Pi_n(\bar{x}) = \overline{\Pi}_n(\bar{x}).$$

Ne segue, poichè i punti $\bar{x}$ sono in numero maggiore di $n+1$, e poichè $\Pi_n(x)$ e $\bar{\Pi}_n(x)$ sono polinomi di grado n, che è

$$\Pi_n(x) \equiv \bar{\Pi}_n(x).$$

L'unicità dei polinomi d'approssimazione di dato grado è così completamente dimostrata.

4. Sia E l'insieme dei punti $\bar{x}$ di A soddisfacenti alla condizione

$$|f(\bar{x}) - \Pi_n(\bar{x})| = \mu;$$

sia, poi, $\bar{s}$ un numero non nullo tale che la differenza $\bar{\alpha}$ tra il suo argomento e quello di $f(\bar{x}) - \Pi_n(\bar{x})$ sia, in valore assoluto, minore di $\frac{\pi}{2}\cdot$

Dimostriamo allora che

condizione necessaria e sufficiente affinchè $\Pi_n(x)$ sia il polinomio d'approssimazione di grado n di $f(x)$, è che non si possono trovare $n+1$ numeri

$$p_0, p_1, \dots, p_n,$$

e contemporaneamente un sistema di valori $\bar{s}$, soddisfacenti tutti alle condizioni $S > |\bar{s}| > s > 0$, $|\bar{\alpha}| < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (dove S, s, α, sono numeri reali), in modo che sia, su tutto E,

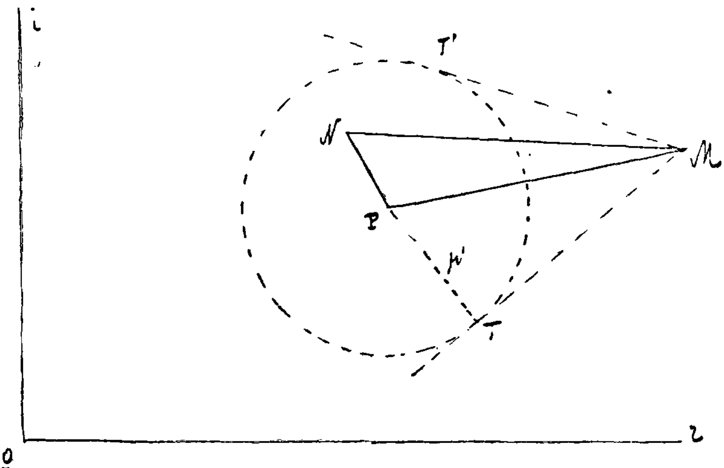
$$p_0 \bar{x}^n + p_1 \bar{x}^{n-1} + \dots + p_n = \bar{s}. \tag{1}$$

La condizione è sufficiente. Supponiamo, infatti, che $\Pi_n(x)$ non sia polinomio d'approssimazione di grado n di $f(x)$. Se indichiamo con $\bar{\Pi}_n(x)$ il polinomio d'approssimazione detto, e con μ' il massimo di $|f(x) - \bar{\Pi}_n(x)|$ in A, avremo allora $\mu' < \mu$. Siano, ora, nel piano rappresentativo della funzione, M, N, P, i punti che rappresentano $\Pi_n(\bar{x})$, $\bar{\Pi}_n(\bar{x})$, $f(\bar{x})$, dove $\bar{x}$ è un punto qualunque di E. I vettori MP, NP, MN, rappresentano, perciò, le differenze $f(\bar{x}) - \Pi_n(\bar{x})$, $f(\bar{x}) - \bar{\Pi}_n(\bar{x})$, $\bar{\Pi}_n(\bar{x}) - \Pi_n(\bar{x})$. E poichè è

$$|f(\bar{x}) - \bar{\Pi}_n(\bar{x})| \leqq \mu', \qquad |f(\bar{x}) - \Pi_n(\bar{x})| = \mu$$

con $\mu' < \mu$, il punto N apparterrà al cerchio (P, μ'), mentre il punto M sarà esterno a tal cerchio. Ne segue che l'angolo $N\widehat{M}P$ sarà minore od eguale a $T\widehat{M}P = \operatorname{arc\,sin} \frac{\mu'}{\mu}$, dove MT è la tangente condotta per M a (P, μ'). Ciò vuol dire che la differenza tra l'argomento di $\overline{\Pi}_n(\bar{x}) - \Pi_n(\bar{x})$ e quello di $f(\bar{x}) - \Pi_n(\bar{x})$ è in valore assoluto, minore od uguale ed $\operatorname{arc\,sin} \frac{\mu'}{\mu} < \frac{\pi}{2}$. È poi

$$\overline{\Pi}_n(\bar{x}) - \Pi_n(\bar{x}) = \left\{ f(\bar{x}) - \Pi_n(\bar{x}) \right\} - \left\{ f(\bar{x}) - \overline{\Pi}_n(\bar{x}) \right\},$$



e perciò

$$\mu - \mu' \leq | f(\bar{x}) - \Pi_n(\bar{x}) | - | f(\bar{x}) - \overline{\Pi}_n(\bar{x}) | \leq | \overline{\Pi}_n(\bar{x}) - \Pi_n(\bar{x}) | \leq$$
$$\leq | f(\bar{x}) - \Pi_n(\bar{x}) | + | f(\bar{x}) - \overline{\Pi}_n(\bar{x}) | \leq \mu + \mu' < 2\mu.$$

Ne segue che, per

$$p_r = \bar{\pi}_r - \pi_r \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

$$(\overline{\Pi}_n(x) = \bar{\pi}_0 x^n + \cdots + \bar{\pi}_n, \qquad \Pi_n(x) = \pi_0 x^n + \cdots + \pi_n)$$

e

$$\bar{s} = \overline{\Pi}_n(\bar{x}) - \Pi_n(\bar{x}),$$

la (1) è verificata su tutto E. E ciò contro il supposto.

La condizione è anche necessaria. Supponiamo, infatti, che esistano un sistema di valori $\bar{s}$, soddisfacenti alle condizioni dette nell'enunciato della proposizione da dimostrarsi, ed un sistema di valori p, soddisfacenti su tutto E alla (1), e consideriamo il polinomio di grado n,

$$P_n(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_n .$$

Detto ω un numero positivo, piccolo a piacere, consideriamo l'espressione

$$f(x) - \Pi_n(x) - \omega P_n(x).$$

Poichè, in tutto A, $f(x) - \Pi_n(x)$ e $P_n(x)$ sono funzioni continue, preso un numero positivo ε, che soddisfi alle disuguaglianze

$$\varepsilon < \mu \sin 15^0, \quad \varepsilon < \mu \sin \frac{90^0 - \alpha}{2}, \quad \varepsilon < s \sin \frac{90^0 - \alpha}{2}, \tag{2}$$

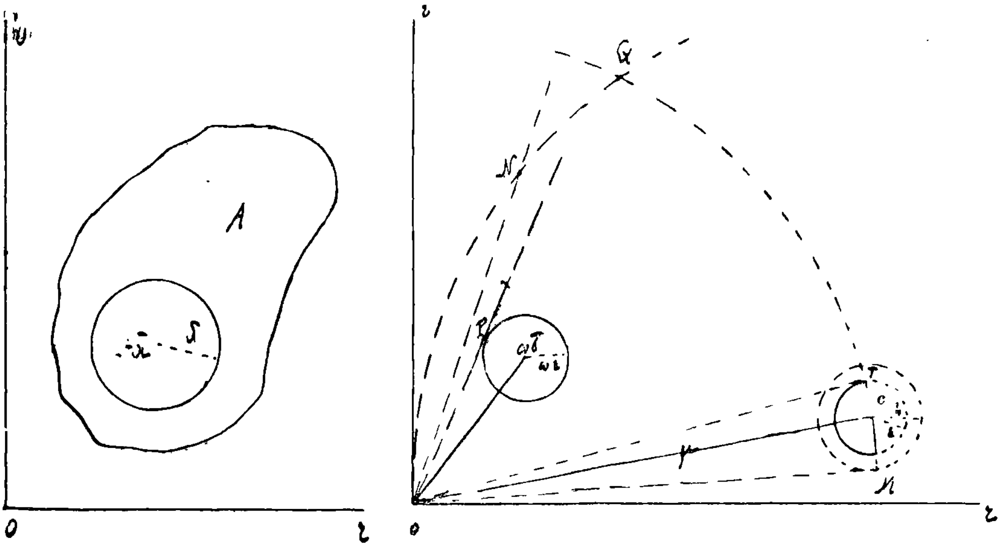
potremo trovare un numero δ tale che, in tutto A, soddisfatta che sia la disuguaglianza $|x' - x''| \leq \delta$, sia

$$\left| \left| f(x') - \Pi_n(x') \right| - \left| f(x'') - \Pi_n(x'') \right| \right| < \varepsilon, \quad \left| P_n(x') - P_n(x'') \right| < \varepsilon.$$

Consideriamo allora, nel piano della variabile complessa, il cerchio di raggio δ e centro $\bar{x}$, dove $\bar{x}$ è uno qualunque dei punti di E. Al variare di x nell'interno di questo cerchio (se non tutto il cerchio è contenuto in A, x varierà solo nella parte del cerchio che appartiene ad A) la differenza $f(x) - \Pi_n(x)$, per quanto precede e perchè non può superare, in modulo, il numero μ, varierà, nel piano rappresentativo della funzione, nella parte comune al cerchio di centro C (dove C rappresenta $f(\bar{x}) - \Pi_n(\bar{x})$) e raggio ε, ed al cerchio avente per centro l'origine e per raggio μ. $\omega P_n(x)$, invece, varierà nel cerchio di centro $\omega \bar{s}$ (poichè, per la (1), è $\omega P_n(\bar{x}) = \omega \bar{s}$) e raggio $\omega\,\varepsilon$.

Sia ε_1 un numero positivo uguale al maggiore dei due ε, $\frac{\mu}{s}\varepsilon$, e indichiamo con M il punto d'intersezione della circonferenza $(0, \mu)$ con la tangente condotta per 0 al cerchio (C, ε_1) dalla parte opposta al vettore s rispetto alla OC. L'angolo $\widehat{COM}$ è, allora, uguale ad $\operatorname{arc\,sin} \frac{\varepsilon_1}{\mu}$, cioè al maggiore dei due $\operatorname{arc\,sin} \frac{\varepsilon}{\mu}$, $\operatorname{arc\,sin} \frac{\varepsilon}{s}$. Sia, poi, OP la tangente al cerchio

$(\omega\,\bar{s},\ \omega\,\varepsilon)$ condotta dalla parte opposta ad $O\,C$ rispetto al vettore s. L'angolo che il vettore $\bar{s}$ fa colla $O\,P$ è, allora, uguale ad $\arcsin \frac{\omega\,\varepsilon}{\omega\,s}$, cioè è minore di $\arcsin \frac{\varepsilon}{s}$. E poichè l'angolo che il vettore $\bar{s}$ fa col vettore $O\,C$, che rap-



presenta $f(\bar{x}) - \Pi_n(\bar{x})$, è, per ipotesi, minore di α, l'angolo $\widehat{P\,O\,M}$ è minore di $\arcsin \frac{\varepsilon_1}{\mu} + \alpha + \arcsin \frac{\varepsilon}{s}$. Sia, ora,

$$\widehat{N\,O\,M} = \arcsin \frac{\varepsilon_1}{\mu} + \alpha + \arcsin \frac{\varepsilon}{s}$$

con $O\,N$ dalla stessa parte di $\bar{s}$ rispetto ad $O\,M$. È, per le (2),

$$\widehat{P\,O\,M} < \widehat{N\,O\,M} < \frac{90^\circ - \alpha}{2} + \alpha + \frac{90^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ.$$

Descriviamo il cerchio $(M,\ \mu)$, e sia Q quello dei punti d'intersezione di questo cerchio con $(0,\ \mu)$ che è situato dalla stessa parte di C rispetto ad $O\,M$. Sia, poi, N la seconda intersezione di $(M,\ \mu)$ con $O\,N$; N esiste certamente distinto da O perchè l'angolo $\widehat{N\,O\,M}$ non è retto.

Il cerchio $(\omega \bar{s}, \omega \varepsilon)$, essendo interno all'angolo $P\widehat{O}M$ (perchè è $P\widehat{O}M \geq P\widehat{O}\bar{s} + C\widehat{O}M > 2P\widehat{O}\bar{s}$), è sempre interno a $N\widehat{O}M$. Prendendo ω sufficientemente piccolo, potremo far sì che $(\omega \bar{s}, \omega \varepsilon)$ sia tutto contenuto nel minore dei due cerchi $(0, \mu)$, $(0, ON)$. Il cerchio $(\omega \bar{s}, \omega \varepsilon)$ appartenendo, allora, al settore circolare di raggio ON ed angolo al centro $N\widehat{O}M$, apparterrà al cerchio (M, μ), e, perciò, apparterrà al triangolo mistilineo OMQ, che ha per lati il segmento OM, l'arco MQ del cerchio $(0, \mu)$, e l'arco QO del cerchio (M, μ).

Nel triangolo mistilineo OMQ è anche contenuta la parte comune ai due cerchi (C, ε), $(0, \mu)$: infatti, detta OT la tangente condotta per O a (C, ε) dalla parte opposta di OM rispetto ad OC, si ha che la parte detta è contenuta nel settore circolare MOT il quale è, a sua volta, contenuto nel settore circolare MOQ, perchè è

$$M\widehat{O}T = M\widehat{O}C + C\widehat{O}T = \operatorname{arc\,sin} \frac{\varepsilon_1}{\mu} + \operatorname{arc\,sin} \frac{\varepsilon}{\mu},$$

e, per le (2),

$$M\widehat{O}T < \frac{90^\circ - \alpha}{2} + 15^\circ < 60^\circ.$$

Ora, la distanza tra due punti qualunque del triangolo mistilineo OMQ è sempre minore od eguale a μ; anzi, sempre minore di μ quando nessuno dei due punti coincide con O, o con M. Dunque, per un ω sufficientemente piccolo, la distanza tra un punto qualsiasi del cerchio $(\omega \bar{s}, \omega \varepsilon)$ ed uno qualunque della parte comune ai due cerchi $(0, \mu)$, (C, ε), è sempre minore di μ. Ne segue che, per un tale ω, la differenza

$$\left| f(x) - \Pi_n(x) \right| - \omega P_n(x) = Y_1(x)$$

è, in ogni punto del cerchio $(\bar{x}, \delta)$, minore, in modulo, di μ:

$$| Y_1(x) | < \mu.$$

Ragionando, ora, in modo analogo a quanto si è fatto alla fine del n. 2, si vede che, in tutto A, è

$$| Y_1(x) | \leq \mu'$$

con $\mu' < \mu$; cioè

$$\left| f(x) - \left\{ \Pi_n(x) + \omega P_n(x) \right\} \right| \leq \mu' < \mu.$$

E questo è assurdo, perchè $\Pi_n(x)$ è, per ipotesi, il polinomio d'approssimazione di grado n di $f(x)$, e μ è il massimo di $|f(x) - \Pi_n(x)|$ in A.

La proposizione è così completamente dimostrata.

5. In ciò che precede abbiamo veduto che, data una funzione di variabile complessa $f(x)$ soddisfacente alle condizioni poste nel n. 1, ad essa corrisponde sempre nel campo A uno ed un solo polinomio d'approssimazione di grado n. Possiamo, ora, dimostrare analogamente a quanto si è fatto per le funzioni di una variabile reale, che la corrispondenza tra la funzione $f(x)$ ed il suo polinomio d'approssimazione di grado n è *continua;* possiamo cioè dimostrare che

se $\Pi_n(x)$ e $\Pi'_n(x)$ sono i polinomi d'approssimazione di grado n di due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, soddisfacenti alle condizioni poste al n. 1 di questo paragrafo, preso un numero η positivo e piccolo a piacere, si può poi sempre trovare un altro numero positivo ε tale che, per ogni funzione $g(x)$ soddisfacente, in tutto A, alla condizione

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon,$$

sia, in tutto il campo detto,

$$|\Pi_n(x) - \Pi'_n(x)| < \eta.$$

Poichè anche nel caso della variabile complessa valgono le proposizioni dei n.[i] 1, 2, 3 del § II, P. P., la dimostrazione della proposizione ora enunciata si conduce in modo perfettamente analogo a quella del n. 18, § II, P. P.

6. Supponiamo, ora, che la $f(x)$ sia un ramo monodromo di funzione analitica, regolare in tutti i punti del campo A (contorno compreso).

Questa nuova condizione porta, come è noto, la sviluppabilità di $f(x)$ in serie di polinomi uniformemente convergente in tutti i punti del campo A. Da ciò segue che, al tendere all'infinito di n, μ_n tende a zero, e, quindi, che la serie

$$\Pi_0(x) - \left\{ \Pi_1(x) - \Pi_0(x) \right\} + \cdots + \left\{ \Pi_n(x) - \Pi_{n-1}(x) \right\} + \cdots$$

converge uniformemente, in tutto A, verso $f(x)$. Per le proprietà che derivano a questa serie da quelle dei polinomi di approssimazione, possiamo dire che

un ramo monodromo di funzione analitica, in un'area in cui (contorno compreso) è regolare, è sempre rappresentabile, e in modo unico, mediante una serie di polinomi che dà, fra tutte quelle di grado successivamente crescente, uniformemente convergenti, in tutto A, verso la funzione considerata, la più rapida convergenza.

Sul principio di minimo di Dirichlet.

(*Di* Guido Fubini, *a Genova.*)

Scopo di questa lettura è il dar conto dei recenti risultati ottenuti nello studio del principio di minimo di Dirichlet, e ancora più di dare un cenno delle molte e interessanti questioni, che tali studii mettono in luce, e che sono, secondo me, degne della massima attenzione. Tanto più questi problemi meritano di essere approfonditi, in quanto che il metodo di minimo è, insieme alla teoria delle equazioni integrali, il più potente strumento, che l'analisi odierna fornisca per stabilire i teoremi di minimo relativi ai cosidetti problemi al contorno. D'altra parte ha un grande interesse teorico l'approfondire per sè stesso il principio di minimo, pur senza pensare ad applicazione alcuna. Il dedurre poi i teoremi di esistenza sopra citati dal principio di minimo rende assai più armonico e completo il calcolo delle variazioni, che così resta accresciuto di uno dei suoi più brillanti capitoli.

Tra i metodi che servono a giustificare il principio di minimo, e le sue applicazioni ai problemi al contorno, due hanno specialmente attratto finora l'attenzione degli analisti. Ambedue cominciano naturalmente col sostituire a un problema al contorno un problema di variazione. Il primo di questi metodi considera poi il problema di variazione come limite di un ordinario problema di minimo, risolve prima questo problema di minimo, e fa (*) poi il passaggio al limite. Questo metodo basta p. es. per risolvere il problema di Dirichlet, e dimostra nel modo più intuitivo il relativo teorema di esistenza.

Prima di esporre i tratti salienti del secondo metodo debbo ricordare una Memoria di Weber (**), pubblicata or sono più di trent'anni: essa, pur essendo ben lontana dal necessario rigore, contiene qualche idea bella e fe-

(*) Cfr. la Nota dell'A., *Rend. della R. Acc. dei Lincei,* 1.° Sem., 1907.

(**) *Journal de Crelle,* 1871.

conda; un ventennio più tardi il Prof. Arzelà in una sua Nota (*) espose alcune nuove ed eleganti considerazioni sul principio di minimo. Il merito di avere per primo giustificato in un caso particolare il principio di Dirichlet spetta però al sig. Hilbert (*Math. Ann.*, tomo 59), la cui mirabile Memoria fu incitamento a molte e importanti pubblicazioni: pregevolissima fra tutte quella di un altro italiano, il Prof. B. Levi, che in un recente lavoro portò un buon contributo di idee nuove e geniali al problema che ci occupa (**).

Non ci fermeremo per brevità sul principio di Dirichlet relativo agli integrali semplici, e passeremo senz'altro a parlare del principio di Dirichlet per gli integrali doppii. I problemi più semplici, a cui questo principio si può applicare sono l'ordinario problema di Dirichlet, e il problema derivato di Dirichlet: essi furono, tra gli altri, specialmente oggetto di ricerca con metodi suscettibili delle più svariate generalizzazioni (***).

Questi problemi si propongono di trovare tra le funzioni, esistenti in un certo campo Γ, e soddisfacenti sul contorno b di questo campo a particolari condizioni, una funzione, per cui l'integrale del primo parametro differenziale, esteso a Γ, abbia il valore minimo possibile. *A priori* l'esistenza di questo minimo non è cosa evidente; si può parlare infatti soltanto di un *limite inferiore* L, e si può in infiniti modi pensare a una successione di funzioni, che soddisfano su b alle condizioni imposte, e il cui integrale corrispondente ha per limite proprio L.

Una tale successione di funzioni, i cui integrali tendano con *una sufficiente rapidità* a L, si dirà *una successione minimizzante.*

Le domande a cui si deve rispondere sono le seguenti:

1.°) Ha sempre una successione minimizzante una funzione limite?

2.°) Questa funzione limite soddisfa essa alle condizioni imposte sul contorno del campo?

3.°) Il valore dell'integrale corrispondente è proprio L?

4.°) È detta funzione limite armonica in Γ?

Per poter rispondere a queste domande si devono (come esaurientemente osservò B. Levi) imporre alle funzioni, con cui si forma la successione, delle

(*) *Rend. della R. Acc. di Bologna*, 1897.

(**) *Rend. del Circ. Matem. di Palermo.* Tomo 22 (II Sem., 1906).

(***) Cfr. inoltre i lavori dell'A. nei *Rend. del Circ. Matem. di Palermo* (tomi 22 e 23) e negli *Annali di Matematica* (1907).

condizioni pochissimo restrittive, e che sono p. es. soddisfatte se queste funzioni hanno derivate prime finite e continue.

Alla prima domanda, se la nostra successione ha una funzione limite, si può, almeno sotto certi riguardi, rispondere affermativamente, dimostrando cioè che una successione minimizzante ha sempre una funzione *quasi-limite* nel senso, che ora definiremo. In ciò sta appunto la parte più importante di simile studio; qui sono le difficoltà, che hanno presentato ostacoli così gravi ai primi, che hanno tentato di approfondire il principio di minimo. Se noi consideriamo i valori, che le funzioni di una successione minimizzante assumono in un punto del campo che si considera, potrà avvenire che questi valori tendano a un limite, il quale sia proprio il valore che la funzione cercata assumerà nel punto stesso. Ma può benissimo avvenire che esistano punti *eccezionali*, in cui questo fatto non avviene. E non si può escludere che questi punti *eccezionali* formino un insieme di punti *denso in tutto* Γ. Questo insieme di punti gode però di una proprietà notevolissima, della proprietà cioè di potersi racchiudere in un numero finito, o infinito (ma numerabile), di aree, la cui somma è piccola a piacere: la quale proprietà è goduta anche dagli insiemi *numerabili*, p. es. dall'insieme *dei punti di coordinate razionali*, ed è goduta pure dall'insieme *dei punti di discontinuità di una funzione integrabile secondo* Riemann.

Per risolvere la nostra questione si tratta dunque di ristabilire la continuità, di dare cioè *nei punti eccezionali* alla funzione, che si ricerca, valori tali che essa apparisca in tutto il campo come una funzione continua. Come potremo procedere? Per vedere questo punto, riferiamoci a un esempio. Supponiamo di avere una funzione di una variabile x, che sia nulla nei punti irrazionali, e nei punti irrazionali o non sia definita, o sia p. es. uguale all'unità. Cerchiamo di cambiare i valori di questa funzione in un insieme di punti, in guisa da ristabilire la continuità. Si capisce che ciò è possibile in infiniti modi. Eppure una vaga intuizione ci dice, che l'insieme dei punti razionali si deve trascurare di fronte all'insieme dei punti irrazionali, e che il modo più naturale di procedere è di considerare quindi una funzione nulla tanto nei punti irrazionali, che nei razionali. Un procedimento logico e preciso che ci conduca a questi risultati è dato dagli integrali del Lebesgue. La nostra funzione di partenza non è integrabile secondo Riemann, ma è invece integrabile secondo Lebesgue. Se noi integriamo secondo Lebesgue, e poi deriviamo rispetto alla x, la nuova funzione così ottenuta è dappertutto nulla, e quindi dappertutto continua. In un modo analogo possiamo procedere nel nostro caso. Si costruisca la funzione limite della nostra successione minimizzante: essa, come abbiamo detto, potrà anche non esistere in un certo insieme di punti eccezionali. Noi la possiamo ciononostante integrare al modo di LEBESGUE rispetto alla x, o alla y. Derivando poi l'integrale così ottenuto rispetto alla x, o alla y, noi otteniamo una nuova funzione, dappertutto continua, che coincide nei punti *non eccezionali* con la funzione limite di partenza, e che si dirà la funzione *quasi-limite* della nostra successione.

Ma si possono rendere in altro modo intuitive le proprietà di questa *funzione quasi-limite.* Se noi supponiamo, com'è lecito, che le funzioni della nostra successione minimizzante sieno sviluppabili su un qualsiasi cerchio Γ' interno a Γ in serie di FOURIER, allora la nostra funzione quasi-limite è ancora sviluppabile in serie di FOURIER su questi cerchi Γ'; e i coefficienti del suo sviluppo in serie si ottengono appunto come *limite* dei coefficienti omologhi nello sviluppo in serie delle funzioni della successione minimizzante considerata.

E ciò non soltanto vale per gli sviluppi in serie di FOURIER, ma per ogni sviluppo in serie, i cui coefficienti si ottengono, come quelli della serie di FOURIER, mediante quadrature applicate alla funzione da sviluppare (moltiplicata per un qualche fattore, dipendente dallo sviluppo particolare considerato).

Di più, se noi consideriamo gli integrali della nostra funzione estesi a un arco, o a una superficie qualunque del campo Γ, essi tendono a un limite, il quale è proprio l'integrale della nostra funzione quasi-limite esteso allo stesso arco, o alla stessa superficie.

Ciò, che spiega la ragione intima del successo dei metodi di HILBERT e di B. LEVI: i quali allo studio di una successione minimizzante sostituiscono lo studio di una nuova successione, che da quella si deduce mediante quadrature, così da far sparire per la nuova successione ogni punto eccezionale (*).

(*) Dopo il Congresso di Parma, è uscita una nuova Memoria del LEBESGUE, sullo stesso argomento nei *Rend. del Circ. Matem. di Palermo*, (tomo 24; II Sem., 1907). Egli pure evita gli aggregati eccezionali con un artificio, sostituendo cioè a una successione minimizzante una successione di funzioni *monotone*, di funzioni cioè che ammettono in un campo qualsiasi Γ' interno a Γ gli stessi limiti inferiore e superiore, che esse ammettono sulla frontiera di Γ'. Questo artificio elegante non è però forse senz'altro estendibile a equazioni di ordine superiore al secondo.

Per completare il nostro studio la parte essenziale è quella di dimostrare che la nostra funzione quasi-limite possiede derivate ed è armonica, e che essa sul contorno soddisfa alle condizioni imposte. Prescinderemo qui per brevità dall'esame del contorno, e ci volgeremo alla prima parte della nostra questione, che è, secondo me, la parte fondamentale.

Per un tale studio i metodi finora applicati sono veramente deficienti, in quanto che ricorrono a vie indirette, girando, piuttosto che superando la difficoltà. Esse si basano in sostanza su certe proprietà *integrali* delle funzioni armoniche, da cui scenda come conseguenza la proprietà *differenziale* che la somma delle loro due derivate seconde non miste è uguale a zero. Tra le proprietà integrali che hanno servito a tale scopo noi ricorderemo p. es. la formola di GREEN, il teorema della media di GAUSS o più generalmente la formola di POISSON per campi circolari, o infine il teorema che, se l'integrale di una funzione è armonico, la funzione stessa è armonica.

Ma questi metodi, pure essendo sufficienti per i problemi di minimo che conducono a funzioni armoniche, e pure potendosi facilmente generalizzare a molte equazioni differenziali lineari, questi metodi, dico, sono insufficienti per casi più generali, p. es. per il problema di PLATEAU. Per i problemi generali, anche quando si sappia dimostrare l'esistenza della funzione quasi-limite di una successione minimizzante, non si sa dimostrare che tale funzione possiede derivate. La importanza di tale ricerca sarebbe, secondo me, non inferiore alla sua difficoltà. E che le difficoltà siano assai gravi, si riconosce p. es. in un caso particolare, quando ci si proponga di dimostrare *direttamente*, e senza usare la *formola integrale* di CAUCHY, che una funzione monogena di variabile complessa, una funzione cioè, che soddisfi alle condizioni di monogeneità, possiede derivate prime e seconde finite e continue. Un simile studio sarebbe tanto più fecondo all'analisi che lo stesso metodo delle equazioni integrali non appare finora applicabile a equazioni non lineari, cosicchè il metodo di minimo resta ancora il più promettente, tra i metodi odierni, per stabilire i teoremi di esistenza per quelle tra queste equazioni che provengono da un problema di variazione.

Sui metodi della fisica-matematica (*).

(*Di* Orazio Tedone, *a Genova.*)

Nessuno, leggendo il titolo di questa conferenza, penserà che a me possa esser venuto in mente di esporre partitamente la storia e la comparazione dei varii metodi d'integrazione che sono stati, o sono, in uso nella fisica-matematica, tanto più se, dando alle parole *fisica-matematica* il significato più ampio ch'esse possono comportare, si vogliano comprendere fra le equazioni della fisica-matematica anche quelle della meccanica. Pur facendo astrazione del breve tempo che m'è concesso, è noto anche a me che chi a tale lavoro si accingesse dovrebbe avere polso poderoso ed una preparazione che io, francamente, non oso riconoscermi.

Il mio compito sarà meno arduo. Io mi propongo solo di esporre, e nel modo più breve che mi sarà possibile, l'influenza che hanno avuto le idee più generali, predominanti nei metodi d'integrazione della fisica-matematica, nei vari tempi, sui metodi d'integrazione delle equazioni dell'equilibrio elastico per un corpo isotropo.

Come modesto cultore di questi ultimi studii, penso che l'intento di queste riunioni sia pienamente raggiunto se si riesce ad indicare chiaramente la serie delle idee che guidano ciascuno dei ricercatori ed il posto che queste idee si presume che abbiano nello svolgimento storico di quel ramo speciale della scienza ch'egli coltiva. Così si può sperare di essere meglio intesi, o almeno più tollerati, dai cultori di discipline affini, o anche della stessa disciplina.

La fisica-matematica, com'è ordinariamente intesa, comincia con la scoperta delle equazioni differenziali che reggono i fenomeni fisici. Appena trovate queste equazioni differenziali, una quantità di problemi particolari si è presentata spontaneamente all'attenzione degli studiosi, e moltissimi di essi,

(*) Conferenza letta nella sezione I del Congresso della Società per il progresso delle Scienze, in Parma, 1907.

appartenenti ai diversi campi del potenziale, dell'idrostatica e dell'idrodinamica, dell'elasticità, del calore, dell'elettricità, del magnetismo, ecc., sono stati anche risoluti con soluzioni basate spesso su felici intuizioni dei fenomeni naturali stessi come nell'esempio, sopra tutti mirabile, di quella data da DANIELE BERNOULLI per la corda vibrante. Spessissimo queste soluzioni sono anche il risultato di un'abilità che ci sorprende, a noi, ora, che siamo abituati alle regole generali. Chi volesse orientarsi sulla massa ingente di materiale così raccolto, può consultare l'opera del BURKHARDT, non ancora terminata: *Entwicklungen nach oscillirenden Functionen*, pubblicata nel *Jahresbericht der deutschen mathematiker-Vereinigung* (X^er Band, 2^er Heft). Scorrendo quelle pagine non è raro d'incontrare tracce di idee generali. Ma quella che, più di tutte, ha l'aria di assurgere all'altezza di metodo è quella di cercare soluzioni particolari delle equazioni di cui si tratta, sotto forma di prodotti ciascuno dei fattori dipendente da una sola variabile e di accomodare poi queste soluzioni particolari, formando con esse serie, ovvero integrali definiti, in modo da ricavare così la richiesta soluzione del problema. Ciò che assicura una semplificazione del problema è, sopratutto, la riduzione di equazioni a derivate parziali ad equazioni ordinarie. Questi procedimenti, del resto, vengono suggeriti subito dalla soluzione della corda vibrante di DANIELE BERNOULLI, e di essi LAPLACE e FOURIER fecero ampia applicazione. G. LAMÉ, alle idee precedenti, aggiunse, sistematicamente, quella di un determinato sistema di coordinate curvilinee, proprio per ogni corpo di forma determinata, in cui dovevano, prima di tutto, trasformarsi le equazioni differenziali del problema. E, come dice il BURKHARDT (*), LAMÉ deve considerarsi certamente come il fondatore di questo indirizzo di ricerca. È opinione del BURKHARDT che LAMÉ deve aver creduto dapprincipio di poter trattare con questo metodo corpi di qualunque forma basandosi sulla ipotesi erronea che ogni serie semplicemente infinita di superficie potesse essere riguardata come facente parte di un sistema triplo ortogonale e che, quindi, per trovare la base più naturale per risolvere un problema di fisica-matematica bisognava cominciare a trovare un sistema di coordinate opportune. Dice ancora il BURKHARDT che, quando LAMÉ, più tardi, riconobbe il suo errore, si era posto troppo solidamente in un determinato indirizzo di ricerche perchè potesse abbandonarlo, anche perchè, malgrado tutto, questo indirizzo fece sorgere una quantità di problemi matematici interessanti. Noi possiamo aggiun-

(*) Opera cit., 4. Lieferung, p. 989.

gere che a questi problemi convengono anche caratteri geometrici ben determinati che servono a dar loro maggiore risalto e che tutto ciò che, di fisica-matematica, sarà largamente utilizzabile nella pratica non potrà uscire che difficilmente dalla cerchia di essi. In un certo senso questi problemi della fisica-matematica corrispondono ai problemi della dinamica che s'integrano per quadrature. E, per finire con quest'argomento, aggiungerò le parole seguenti con le quali il BURKHARDT (*) termina le sue considerazioni generali sui lavori di LAMÉ: « Anche dalla posizione assunta da LAMÉ rispetto a quistioni generali della teoria della conoscenza e della filosofia naturale, si può sostenere che LAMÉ è stato certamente l'ultimo fisico eminente che abbia partecipato al sogno di tempi anteriori ai suoi, dovesse essere possibile ottenere deduttivamente i fenomeni fisici, come anche quelli della meccanica celeste da poche e semplici leggi fondamentali. »

Le idee di cui abbiamo parlato hanno fruttificato bene. Esse hanno condotto alla introduzione di un gran numero di funzioni speciali che hanno arricchito l'analisi matematica considerevolmente e sono state la base delle teorie generali che, a scopo di generalizzazione, e per i bisogni della dimostrazione dei teoremi d'esistenza, portano il nome di metodi d'integrazione per mezzo di soluzioni elementari.

Molti dei problemi particolari risoluti in questo primo periodo di tempo hanno, incontestabilmente, un valore pratico, ma molti di essi ne hanno soltanto uno analitico. Ciascuno di questi ultimi problemi, preso a sè, poteva anche essere trascurato, ma tutti insieme hanno preparato il terreno alle brillanti ricerche moderne.

Il passaggio dai metodi particolari antichi ai metodi più generali, moderni è soprattutto indicato dalla scoperta dei teoremi di reciprocità, da GREEN a BETTI. Per una grandissima parte delle equazioni, o sistemi di equazioni, della fisica-matematica vale un teorema di reciprocità; e ciò ha il suo fondamento nel fatto che queste equazioni possono tutte considerarsi come provenienti dall'annullamento della variazione prima di certi integrali le cui funzioni sotto il segno sono di secondo grado ed omogenee rispetto alle funzioni incognite ed alle loro derivate. È in questo fatto che è riposta la ragione analitica delle grandi analogie che sussistono fra le equazioni della fisica-matematica e delle relazioni che quest'ultima disciplina, nella quale può ora intendersi compresa anche la meccanica, ha col calcolo delle variazioni.

(*) Luogo citato.

Con l'introduzione dei teoremi di reciprocità le ricerche sulle equazioni della fisica-matematica hanno cambiato alquanto di natura, o, almeno, hanno allargato considerevolmente i loro punti di vista; giacchè esse sono allora diventate, in gran parte, studii delle proprietà analitiche degli integrali delle equazioni stesse; meno ricerche di fisica-matematica e più di analisi pura. Certo, con l'introduzione di quelle funzioni ausiliarie che vanno sotto il nome generale di funzioni di Green, i teoremi di reciprocità hanno dato un fondo generale alla impostazione ed alla trattazione dei problemi della fisica-matematica propriamente detta; ma in ciò, salvo i pochi casi in cui queste funzioni ausiliarie sieno facilmente raggiungibili con l'aiuto della intuizione, non c'è che una trasformazione formale del problema, una riduzione del problema generale ad uno particolare che si addimostra perfettamente equivalente al primo. Ciò non ostante, i teoremi di reciprocità, il concetto di funzione ausiliaria e quello di caratteristiche di una equazione, o di un sistema di equazioni, formano oramai la base più solida per lo studio e la penetrazione delle proprietà delle equazioni della fisica-matematica e di una trattazione generale dei suoi problemi. Anzi, dippiù, questi concetti, introdotti sistematicamente nell'analisi hanno dato i mezzi per approfondire ben più vaste categorie di equazioni differenziali. I risultati di Green, di Betti e dei numerosi continuatori sulle equazioni a caratteristiche immaginarie, quelli di Riemann-Volterra sulle equazioni a caratteristiche reali, quelli del Volterra sulle equazioni a caratteristiche coincidenti sono troppo noti perch'io voglia ancora indugiarmi su di essi fingendo di dire cose nuove.

Una grande spinta all'approfondimento dello studio delle equazioni della fisica-matematica e origine di scoperte della massima importanza nel campo dell'analisi, è stato certo lo sforzo fatto per dimostrare i teoremi d'esistenza, specialmente per l'equazione di Laplace e per quella delle vibrazioni trasversali di una membrana elastica. Io non posso certo fermarmi a narrare la storia di queste ricerche a cominciare dai primi tentativi di Dirichlet-Riemann a finire alla costituzione di quella superba teoria delle equazioni integrali ed all'analisi approfondita dei limiti di validità dei primitivi metodi di Dirichlet-Riemann dovuta primieramente all'Hilbert ed a cui hanno così bene contribuito i nostri B. Levi e Fubini. Ciò solo richiederebbe volumi.

Ma poichè s'è presentata l'occasione di parlare di teorie generali, non voglio arrestarmi dall'esporre anche una mia opinione. E questa è che, per quanto interessanti e fruttuosi possano essere gli studii d'indole generale dapprincipio, se essi sono proseguiti troppo unilateralmente, finiscono quasi sempre in un formalismo arido che ha poco valore pratico ed analitico. Gli esempii abbondano in ogni ramo delle matematiche. È soprattutto, credo io, lo studio di problemi particolari, specialmente se questi sono da lungo tempo nettamente indicati per le loro difficoltà tecniche, che può far nascere idee nuove, o gettare nuova luce e dare importanza ad idee vecchie che prima pareva non ne avessero, o ne avessero poco.

* * *

Uno degli esempii più cospicui di equazioni della fisica-matematica è, senza dubbio, quello delle equazioni di un solido elastico, isotropo. Ed io mi fermo volentieri su di esse anche perchè la storia delle ricerche relative, mi è parsa qualche volta, non sia da noi italiani che pure tanto abbiamo contribuito al loro progresso, sufficientemente nota.

Le equazioni dell'equilibrio e del movimento dei corpi elastici furono date la prima volta da Navier nel 1821 fondandosi sulle ipotesi della costituzione molecolare dei corpi e della dipendenza delle azioni elastiche dalle azioni a distanza delle molecole. Alle ricerche sulle ipotesi che possono servire di fondamento alla costituzione di queste equazioni hanno poi contribuito potentemente Poisson, Cauchy, Green, Thomson ed altri; ma all'analisi di queste ricerche, come alle molte discussioni che ne sono derivate, non ci fermeremo anche perchè l'argomento sconfina dai limiti della nostra conferenza. Appena trovate queste equazioni cominciò lo studio dei problemi particolari. Dico subito che di questi problemi particolari io considero soltanto quelli in cui la forma del corpo è speciale, mentre le condizioni al contorno sono assolutamente generali. Lo studio di questi problemi è stato iniziato da Lamé e Clapeyron per i quali, come per tutti i vecchi autori, le condizioni al contorno consistevano nel dare le tensioni. Ad essi si devono soluzioni più, o meno, complete dei problemi dell'equilibrio elastico di un corpo limitato: 1.° da un piano, o da due piani paralleli; 2.° da un cilindro di rotazione, o da due cilindri di rotazione aventi uno stesso asse (*); 3.° da una sfera, o da due sfere concentriche (**). Veramente solo gli ultimi di questi problemi sono stati condotti a fondo da Lamé, mentre degli altri

(*) *Journal für Math.*, Bd. 7, pag. 400.

(**) *Journal de Math.*, vol. 19, pag. 51; *Leçons sur les coord. curv.*, pag. 299.

può dirsi che i due autori non abbiano dato che abbozzi di soluzioni (*). Si può anzi aggiungere che LAMÉ, anche per il problema di un corpo limitato da due sfere concentriche, ha evitato di fare un esame approfondito dei singoli termini e di ricavar tutte le deduzioni ch'egli aveva in mente, per quanto a ciò sia stato indotto, più che altro, da ragioni di opportunità. Nel suo libro: *Leçons sur les coordonnées curvilignes,* dopo aver esposto la soluzione del suo problema, dice: « Une digression trop étendue, sur une question particulière de la théorie mathématique de l'élasticité, pourrait donner quelque apparence de raison, à ceux qui ne veulent voir, dans la grande généralité de cette théorie, qu'une complication inextricable, et qui préfèrent et prônent des procédés hybrides, mi-analytiques et mi-empiriques, ne servant qu'à masquer les abords de la véritable science ». Queste parole di LAMÉ possono utilmente ripetersi anche adesso.

Per dare al nostro discorso una base più precisa, ricordiamo le equazioni dell'equilibrio di un corpo isotropo, di cui ci occupiamo. Se indichiamo, come di solito, con u, v, w le componenti degli spostamenti, con θ la dilatazione elementare, con ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 le componenti della rotazione, con λ e μ le due costanti di LAMÉ e col simbolo Δ^2 l'operazione $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$, si ha

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\varpi_1=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right),\quad \varpi_2=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right),\quad \varpi_3=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

e le equazioni in discorso possono acquistare una qualunque delle due forme seguenti:

$$\mu\,\Delta^2(u,\ v,\ w)+(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)\theta=0, \tag{1}$$

$$(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)\theta-2\mu\ \mathrm{rot.}\,(\varpi_1,\ \varpi_2,\ \varpi_3)=0, \tag{2}$$

supponendo che le forze di massa siano nulle. Si sa che le condizioni al contorno si possono dare in varii modi e noi, quando non lo diremo espressamente, le lascieremo indeterminate.

(*) Nel libro: *Leçons sur la théorie math. de l'élast. des corps solides,* alla fine della pag. 164, LAMÉ stesso fa degli apprezzamenti su queste soluzioni nel senso da noi indicato.

Le idee che sono servite di base ai varii autori per risolvere i problemi di cui discorriamo, le raggrupperemo così:

1.° idee di Lamé e Clapeyron,
2.° idee proprie di Lamé,
3.° idee di Thomson,
4.° idee di Borchardt e di Boussinesq,
5.° idee di Betti-Cerruti ed affini,
6.° idee di Cesaro e di Almansi,
7.° idee dell'autore.

Gli autori che hanno lavorato sulle idee dei primi tre gruppi si servono sempre di rappresentazioni analitiche per sviluppi in serie. Quelli invece che hanno lavorato sui tre gruppi di idee successive hanno avuto di mira rappresentazioni analitiche per quadrature. Nei lavori dell'autore la quistione della speciale rappresentazione analitica non è una quistione principale.

Le idee di Lamé e Clapeyron sono esposte nel 7.° vol. del *Jour. für Math.* Ciò che c'è di fondamentale in queste idee sono le osservazioni che θ soddisfa all'equazione $\Delta^2 \theta = 0$ ed u, v, w all'equazione $\Delta^2 \Delta^2 \varphi - 0$, in modo che determinati gli integrali generali di queste equazioni riesce agevole trovare i tre integrali particolari dell'ultima dell'equazioni citate che danno l'integrale generale delle (1). Il problema è allora ridotto a soddisfare alle condizioni al contorno. Però i detti autori non hanno indicato nessun mezzo generale per trovare, sotto forma conveniente, adatta per ogni corpo di forma determinata, l'integrale generale dell'equazione $\Delta^2 \Delta^2 \varphi - 0$ e si sono contentati di applicare questi principii ai problemi di un corpo limitato da un piano, o da due piani paralleli (*). Questi metodi hanno avuto una più grande applicazione nelle ricerche del Mathieu sul problema del parallelopipedo rettangolo (**), ricerche che Lamé stesso aveva iniziate indicandone le difficoltà (***). Le idee di Lamé-Clapeyron hanno un valore indiscutibile, però sono state sopraffatte dalle idee successive e, presso di noi almeno, quasi del tutto dimenticate. Tanto che il Cesaro nel suo libro, del resto, come tutti i libri del Cesaro, bellissimo, dopo aver esposta la soluzione del problema del corpo limitato da un solo piano, data dal Cerruti, e prima di darne un'altra sua personale dello stesso problema, nella quale c'è pure

(*) *Journal für Math.*, Bd. 7, pag. 400.
(**) *Théorie de l'élast. des corps solides,* 2e partie, pag. 140.
(***) *Leçons sur la théorie math. de l'élast.*, pag. 151.

tanto delle idee di LAMÉ-CLAPEYRON, asserisce: *Il prof.* CERRUTI *ha trattato il problema precedente «per dare un'illustrazione abbastanza facile del metodo generale» proposto da* BETTI. *Quando non si ha in vista questo scopo, ma si vuole soltanto raggiungere la soluzione del problema dei suoli elastici, è ben facile pervenire con procedimento più rapido e diretto alle formole generali ottenute dal prof.* CERRUTI, *e ciò senza rinunciare a «condurre la soluzione in modo che possa somministrare qualche lume per la trattazione di problemi analoghi per corpi di forma più complicata»* (*). *Basta infatti riguardare provvisoriamente come nota la dilatazione cubica* θ, *calcolar poi gli spostamenti* (u, v, w), *e dedurne l'espressione di* θ: *questa funzione si trova così isolata in una relazione che serve a determinarla* (**). Ora LAMÉ e CLAPEYRON, nella Memoria citata, si esprimono, precisamente, così: *Pour intégrer généralement les équations du § 8* (equazioni (1)); *il convient de chercher d'abord l'intégrale génerale* θ, *et de la substituer dans ces équations, mises sous la forme:...* (la forma di cui si parla è la forma (1)); *on intégrera ensuite généralement ces équations différentielles, et il ne restera plus qu'à exprimer que les valeurs générales de* u, v, w, θ, *satisfont à l'équation*

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} .$$

Ces intégrations n'offrent par elles mêmes aucune difficulté nouvelle; mais les fonctions arbitraires qui entreront dans les intégrales générales obtenues, doivent être déterminées d'après les conditions données du nouvel état d'équilibre, et cette determination exige des recherches particulières (***). Dunque, col CESARO siamo allo stesso punto che con LAMÉ e CLAPEYRON, forse anche più indietro. Dal modo di esprimersi del CESARO si deve arguire che egli non conoscesse la soluzione del problema di cui si occupa, data da LAMÉ e CLAPEYRON. In quanto a me, devo dichiarare francamente che la lettura del libro del CESARÒ mi ha tratto in inganno ed ho attribuito completamente a lui ciò che era dovuto ai menzionati autori (****). Più tardi anche il BOGGIO

(*) Le parole virgolate sono del prof. CERRUTI, *Mem. dell'Acc. dei Lincei*, 1882, pag. 81.

(**) *Introd. alla teoria mat. dell'elast.*, pag. 120.

(***) *Journal für Math.*, Bd. 7, pag. 155.

(****) *Ann. di Mat.*, s. III, t. VIII, 1902; fine della Mem.

dev'essere caduto nello stesso inganno (*) e pare, non si sia accorto che il merito di essersi ingannati pel primo toccava a me.

Il gruppo d'idee a cui diamo il nome di LAMÉ è quello di cui quest'autore s'è servito per ottenere la soluzione del problema pel corpo limitato da due sfere concentriche (**). LAMÉ, seguendo la serie delle idee che erano così fortemente radicate in lui, ha creduto di rendere più agevole la soluzione dei problemi di equilibrio elastico, trasformando le equazioni fondamentali del problema in un sistema di coordinate curvilinee, scelto opportunamente per ogni corpo di forma determinata. Questa convinzione di LAMÉ trovò anche il terreno preparato per essere generalmente assorbita e le primitive idee di LAMÉ-CLAPEYRON parvero piuttosto soltanto adatte per le coordinate cartesiane. Dopo aver trasformate le equazioni in coordinate curvilinee, LAMÉ determina: 1.° l'espressione più generale di θ, in queste coordinate, 2.° ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 dalle equazioni trasformate delle (2) che, com'è noto, conservano la stessa forma qualunque sia il sistema di coordinate curvilinee, ortogonali che si adopera, 3.° le espressioni di u, v, w dalle relazioni che legano queste quantità con ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3. Dopo ciò resta da determinare le costanti che entrano nelle espressioni di u, v, w in modo da soddisfare alle condizioni in superficie. Ma regole generali per fare tutti questi passi non sono state indicate nè da LAMÉ, nè da quelli che dopo di lui hanno voluto seguire le sue orme. Di questi noi citeremo soltanto WANGERIN (***) e JAERISCH (****) che hanno cercato di estendere il metodo di LAMÉ sistematicamente a tutte le superficie di rotazione. Però per pochi casi soltanto sono andati in fondo e, soltanto per il toro circolare, WANGERIN ha determinato le costanti con i metodi usuali. Notiamo infatti che il problema della determinazione delle costanti, per soddisfare alle condizioni in superficie, può offrire le più gravi difficoltà se le soluzioni elementari con cui è composta la soluzione generale che si trova seguendo le idee di LAMÉ-CLAPEYRON, ovvero quelle di LAMÉ, non soddisfano alle condizioni di ortogonalità.

(*) Vedi l'intr. alla Nota: *Sulla deform. di una sfera elast. isotr.*, Atti della R. Acc. di Torino, vol. XLI, 1906.

(**) Vedi la cit. (**) a pag. 131. — Il metodo che LAMÉ e CLAPEYRON hanno indicato per risolvere il problema del corpo limitato da due cilindri di rotazione aventi lo stesso asse, partecipa del 1.° e del 2.° gruppo d'idee.

(***) *Arch. Math. Phys.*, 1873, pag. 113.

(****) *Jour. für Math.*, Bd. 104, 1889, pag. 177.

Il THOMSON non si occupa che di una quistione particolare: del problema dell'equilibrio elastico di un corpo limitato da una sfera, o da due sfere concentriche (*), problema già risoluto da LAMÉ. Malgrado ciò si possono rilevare nella soluzione del THOMSON due idee che hanno una importanza che supera certamente l'applicazione al caso particolare ch'egli ne ha fatto. In primo luogo l'autore mostra che la trasformazione delle equazioni dell'elasticità in coordinate curvilinee può non essere utile e, tanto meno, necessaria per risolvere problemi di equilibrio elastico; in secondo luogo THOMSON mostra che nella risoluzione di questi problemi si possono impiegare utilmente serie di polinomii. In quanto al resto i suoi procedimenti non differiscono sostanzialmente da quelli di LAMÉ-CLAPEYRON che così vengono ad acquistare una molto maggiore estensione di applicabilità. Le idee di THOMSON sono state sfruttate ampiamente ed, in Inghilterra, varii autori le hanno applicate a numerosi problemi particolari su corpi limitati da una sfera, da una superficie quasi sferica e da una superficie ellissoidica (**). Esse hanno avuto la maggior estensione nelle mani del SOMIGLIANA (***) e dei COSSERAT (****) i quali autori ne hanno fatto il punto di partenza per la costituzione di un metodo generale d'integrazione per mezzo di soluzioni elementari. Ai COSSERAT si deve anche un tentativo per la effettiva determinazione di queste soluzioni elementari, sotto forma di polinomii, per il caso di un ellissoide qualunque. Su quest'ultimo argomento vi sono anche alcune note del BOGGIO, sulle quali avremo da ritornare in seguito.

Il metodo di cui si serve il BORCHARDT (*****) per ottenere la soluzione del problema della sfera è ancora quello di LAMÉ, ma in esso si sente fortemente anche l'influenza della soluzione di THOMSON. Il metodo di BORCHARDT per la sfera e di BOUSSINESQ (******) pel semispazio non contengono idee ge-

(*) *Phyl. Trans. Roy. Soc.*, vol. 153 (1863). KELVIN and TAIT, *Nat. Phil.*, parte II.

(**) Per tutte queste ricerche si può consultare utilmente: LOVE, *Lehrbuch der Elasticität*, (trad. di A. TIMPE), Cap. XI.

(***) *Rend. Ist. Lomb.*, vol. 24 (1891), pag. 1005; idem. vol. 29 (1896), pag. 423.

(****) *Comptes rendus*, vol. 126 (1898), pag. 1089; idem. vol. 127 (1898), pag. 415; idem, vol. 133 (1901), pag. 145, 271, 326, 361, 382.

(*****) *Berlin Monatsber.*, 1873, pag. 9. *Ges. Werke*, pag. 247, 307.

(******) *Comptes rendus*, vol. 86 (1878), pag. 1260; vol. 87 (1878), pag. 402; vol. 88 (1879), pag. 331, 375, 701, 741. — *Applic. des potentiels*, pag. 21. — Vedi anche CLEBSCH-ST. VENANT, *Élasticité*, pag. 374.

nerali proprie, ma ad essi si devono le prime soluzioni per integrali definiti e, si può dire, con essi comincia, per queste ricerche, una nuova êra.

La Memoria, veramente mirabile, del BETTI (*) sulle equazioni della elasticità gettò su queste un fascio di luce nuova, inattesa, e preparò, specialmente in Italia, una fioritura di lavori quale poche altre Memorie possono vantarsi di aver prodotto. Il suo teorema di reciprocità dovette sembrare una rivelazione. Con mezzi semplicissimi dava già una folla di risultati e permetteva di penetrare addentro nelle proprietà analitiche delle equazioni di cui si tratta. Le analogie che già metteva in vista con la teoria del potenziale, la possibilità di adoperare funzioni ausiliarie, analoghe a quelle di GREEN, per risolvere i problemi di equilibrio elastico allargavano grandemente le idee anche nel campo dell'analisi pura. Le soluzioni già citate di BORCHARDT e di BOUSSINESQ, per mezzo di quadrature, la speranza di riuscire a soluzioni analoghe col metodo di GREEN generalizzato, la riuscita del metodo di GREEN, in numerosi casi, per l'equazione di LAPLACE hanno dato alle idee del BETTI, anche in quanto erano metodi d'integrazione, un valore grandissimo; il che era poi molto naturale. Gli antichi metodi furono per conseguenza messi da parte e dimenticati, mentre la fiducia nei nuovi metodi andava crescendo, grazie soprattutto al lavoro perseverante del prof. CERRUTI (**). Le idee del BETTI furono coltivate sotto tutti gli aspetti e fra i più fedeli interprèti ed i migliori continuatori dell'opera del BETTI dobbiamo citare il SOMIGLIANA nella memoria: *Sulle equazioni dell'elasticità* (***). Per scopi scolastici i metodi d'integrazione delle equazioni dell'elasticità, basati sull'uso del teorema di reciprocità e sull'impiego di funzioni ausiliarie analoghe a quelle di GREEN, hanno avuto più simmetrica applicazione dal professore VOLTERRA i cui risultati sono stati pubblicati dal LAURICELLA (****).

I lavori del CESARO (*****) e dell'ALMANSI (******) rappresentano un completo ritorno all'antico. Forse senza neanche immaginarlo, hanno richiamato in onore le antiche idee di LAMÉ-CLAPEYRON. In ordine di tempo è discretamente prima il CESARO. Senza alcun dubbio, nelle idee di questo autore c'è qualche cosa

(*) *Teoria dell'elasticità.* Nuovo Cim., vol. 7, 8, 9, 10, s. 2.ª, (1872-73).

(**) *Mem. dell'Acc. dei Lincei*, vol. 13, s. 3.ª (1882), pag. 81 (principalmente).

(***) *Ann. di Mat.*, vol. 17, s. 2.ª (1889), pag. 41.

(****) *Ann. della scuola norm. di Pisa*, vol. 7 (1894).

(*****) *Introduz.*, ecc., pag. 120.

(******) *Mem. della R. Acc. di Torino*, s. 2.ª, vol. 47 (1897).

di più che in quelle di Lamé-Clapeyron; e questo qualche cosa di più s'è introdotto, si può dire, da sè suggerito dalla rappresentazione per quadrature che il Cesaro aveva in mente di ottenere. Lamé e Clapeyron cercavano dapprima soltanto soluzioni elementari delle equazioni della elasticità, con queste formavano le soluzioni generali e passavano poi a soddisfare alle condizioni al contorno. Nella loro mente era ben fisso che l'ultima parte del problema doveva essere quella di soddisfare alle condizioni al contorno. Invece il Cesaro determina dapprima gli integrali dell'equazione dell'elasticità quando sia supposto nota θ in modo che sieno soddisfatte le condizioni al contorno; quindi passa alla determinazione di θ. Se si pensa alle difficoltà che si possono incontrare quando si passa a soddisfare alle condizioni in superficie seguendo il metodo di Lamé-Clapeyron, o quello di Lamé, si troverà che questo del Cesaro non è un passo privo di importanza. Ma nel Cesaro non c'è nessuna idea generale, oltre a delle vaghe indicazioni, che possa guidare alla determinazione delle funzioni u, v, w, quando θ è nota, soddisfacenti alle condizioni al contorno. Anzi si esprime in modo come se la soluzione del problema speciale al quale s'è applicato, sia dovuta a circostanze speciali che si riscontrano nel caso suo. A queste idee del Cesaro, l'Almansi aggiunse il risultato, chiaramente espresso da lui per la prima volta, contenuto nel teorema che ogni funzione biarmonica si può esprimere per mezzo della somma di una funzione armonica e del prodotto di un'altra funzione armonica pel quadrato del raggio rettore contato da un punto fisso. Questo teorema, insieme alle idee che già si trovano nel Cesaro, hanno condotto ad una soluzione molto semplice del problema della sfera, oltre che alle soluzioni di altre quistioni congeneri relative alla sfera. Al Boggio (*) si deve l'estensione di questi metodi ad una rilevante categoria di aree piane la cui idea prima è anche dell'Almansi (**).

Riassumendo il fin qui detto, troviamo che l'esperienza è venuta dimostrando che, di tutti i metodi immaginati per ottenere la soluzione di problemi di equilibrio elastico per un corpo isotropo, quello più antico di Lamé e Clapeyron si è dimostrato il più adatto; e, di passaggio, osserviamo come spesso è difficile rintracciare la via giusta nella scienza. Ma le soluzioni, fin qui date, si fondano tutte su particolarità inerenti al problema speciale da

(*) *Atti della R. Acc. di Torino*, vol. XXXV (1900). — *Nuovo Cim.*, s. 1.ª, vol. XII (1900); idem, s. 5.ª, vol. 1 (1901), *Atti del R. Istituto veneto*, t. LXI, (1901-1902).

(**) *Sulla ricerca delle funz. poli-arm.*, Rend. del Circ. mat. di Palermo, t. XIII (1899).

risolvere. Per avere un indirizzo generale, restava da indicare la via da seguire per determinare i tre integrali particolari dell'equazione $\Delta^2\Delta^2\varphi=0$ che, nello stesso tempo, soddisfino alle equazioni dell'elasticità quando θ è nota ed alle condizioni al contorno. Raccogliendo il meglio dai predecessori, come l'esperienza m'insegnava, ho potuto superare felicemente questa difficoltà con l'aiuto delle funzioni ausiliarie che s'incontrano nella teoria del potenziale e questa parte del problema è ricondotta completamente nel campo delle funzioni armoniche (*). Il metodo resta valido anche nel caso in cui agiscono forze di massa (**). Resta poi da determinare θ dalla solita equazione funzionale nella quale quistione si raccolgono principalmente le difficoltà per risolvere i nostri problemi. E così la serie dei problemi d'equilibrio elastico risoluti s'è venuta, di molto, accrescendo (***).

* * *

Fra i problemi d'equilibrio elastico più tentati si deve annoverare certamente quello dell'ellissoide generale, o di rotazione. E la risoluzione di quest'ultimo problema sta, per me, a dimostrare la bontà delle idee da me introdotte. Non credo cosa inutile, per concludere, di riunire qui alcuni cenni sulla storia degli sforzi fatti per risolvere il problema dell'ellissoide come può risultare da documenti sicuri; pensando anche che il problema dell'ellissoide di rotazione può avere una importanza eguale, se non superiore, al problema della sfera elastica e dell'ellissoide fluido rotante nella teoria della figura dei pianeti.

Seguendo la serie delle idee di Lamé relativamente ai problemi di elasticità e, più in generale, relativamente ai problemi di fisica-matematica, si acquista subito la convinzione che egli deve aver tentato, a più riprese, di ottenere la soluzione del problema dell'equilibrio elastico di un ellissoide generale ed anche, più particolarmente, di un ellissoide di rotazione. Nel suo libro: *Leçons sur les coordonnées curvilignes, ecc.*... (§ CLXXIX, pag. 337) dopo aver esposta la soluzione del problema del corpo limitato da due sfere concentriche, egli nota che con ciò è dato il primo esempio di risoluzione di problemi

(*) *Ann. di mat.*, s. 3.ª, vol. 8 (1902).

(**) *Rend. del Circ. mat. di Palermo*, vol. 17 (1903).

(***) *Ann. di mat.*, s. 2.ª, vol. 10 (1904); *Rend. dell'Acc. dei Lincei*, s. 5.ª, vol. 13 (1904); idem, s. 5.ª, vol. 14 (1905).

di equilibrio elastico di corpi limitati in tutti i sensi ed aggiunge: ***Il y a tout lieu de penser, qu'on ne réussira, dans la même voie, avec un autre système orthogonal, qu'en lui découvrant, d'abord, la faculté analogue, de développer simultanément deux ou trois fonctions, de une ou de deux de ses coordonnées.*** Non dico già che queste parole suonino per noi completamente chiare. Da esse si può però trarre sicuramente la convinzione che LAMÉ, al quale devesi l'introduzione nella fisica-matematica dell'ellissoide e delle coordinate curvilinee corrispondenti, deve avere sperimentato se le condizioni ch'egli aveva in mente erano verificate nel caso dell'ellissoide che, dopo la sfera, è il corpo più semplice che sia limitato in tutti i sensi. Però su questi tentativi non si sa che LAMÉ abbia nulla pubblicato. Eguali tentativi devono essere stati fatti, in primo luogo, dal MATHIEU che era così nutrito delle idee di LAMÉ e che pure ha lavorato abbondantemente sugli argomenti vicini delle vibrazioni trasversali di una membrana ellittica e della propagazione del calore in un corpo ellissoidale. In secondo luogo, dal WANGERIN (*) i cui lavori abbiamo avuto già occasione di citare e, forse anche, dal JAERISCH (*) che ha continuato i lavori del WANGERIN. Altri tentativi, infine, condotti da altri punti di vista devonsi al SOMIGLIANA (*), al CREE (**), ad E. ed F. COSSERAT (***) ed al BOGGIO (****) ai quali si devono dei tentativi per la ricerca delle soluzioni elementari sotto forma di polinomii. Però le difficoltà materiali che restano sempre da superare in queste ricerche fanno sì che esse restino sempre molto lontano da una effettiva soluzione del problema. Quanto la importanza del problema fosse nella coscienza di molti risulta anche dai numerosi casi particolari che diversi autori si sono proposti di risolvere e fra i quali citiamo: C. CREE (*****), D. EDWARDES (******), L. LECORNU (*******), A. VITERBI (********).

(*) *Rend. dell'Ist. lomb.*, s. 2.ª, vol. 24 (1891).
(**) *Quart. Journ. of Math.*, vol. 27 (1895).
(***) *Comptes rendus*, vol. 127 (1898); vol. 133 (1901).
(****) *Rend. dell'Acc. dei Lincei*, s. 5.ª, vol. 15 (1906).
(*****) *Quart. Journ. of math.*, vol. 23 (1888).
(******) *Quart. Journal of Mat.* vol. 26 e 27 (1893, 1894).
(*******) *Comptes rendus*, vol. 123 (1896).
(********) *Atti dell'Acc. dei Lincei*, s. 5.ª, vol. 12 (1903).

* * *

Domando scusa se qualche volta ho dovuto parlare di me. Io non desidero altro che le ricerche di cui abbiamo discorso, per loro stesse soltanto, sieno, possibilmente, apprezzate anche dagli altri cultori della scienza. Per indurli a ciò, non parlerò dell'entusiasmo il più vivo col quale LAMÉ circondava queste quistioni. Poniamo pure che LAMÉ sia eccessivo quando paragona il problema dell' equilibrio elastico di un parallelepipedo rettangolo al problema dei tre corpi (*), lo addita, per le sue difficoltà, agli sforzi dei futuri studiosi e si adopera perchè sia messo a concorso ripetutamente dall'Accademia. Ma è, per lo meno, indubbitabile che questi problemi sono stati sul tappeto per diverse generazioni e fra i più ribelli della fisica-matematica. E ciò dovrebbe bastare perchè sia tenuto buon conto di ogni sforzo fatto per raggiungerne la soluzione. Io, d'altra parte, sono convinto che, all'infuori di qualunque dibattito sulla loro importanza pratica, quando queste ricerche saranno chiuse, esse formeranno uno dei più splendidi capitoli di applicazione della teoria delle funzioni armoniche.

(*) *Leçons sur la théorie math. de l'élast.*..., pag. 156.

Nuova esposizione della geometria infinitesimale delle congruenze rettilinee.

(*Di* Gustavo Sannia, *a Torino.*)

Le forme fondamentali della congruenza.

1. La via generalmente seguita per lo studio delle congruenze rettilinee (o sistemi ∞^2 di raggi) dal punto di vista della Geometria Infinitesimale, è quella aperta dal Kummer con la sua classica Memoria (*).

Secata la congruenza con una *superficie di partenza* S, su ogni raggio g si prenda come punto di partenza (origine) il punto (o uno dei punti) M ove g incontra S e si scelga un verso positivo. Riferita la superficie S ad un sistema qualunque di coordinate curvilinee (u, v), la congruenza è analiticamente definita quando si conoscono in funzione di u e v le coordinate x, y, z del punto M e i coseni direttori X, Y, Z del raggio g.

Il punto $M'(X, Y, Z)$ della sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

è l'immagine sferica di g e, variando u e v, descrive *l'immagine sferica della congruenza.*

Posto

$$E = \sum \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2, \quad F = \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v}, \quad G = \sum \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2, \tag{1}$$

$$e = \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u}, \quad f = \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}, \quad f' = \sum \frac{\partial X}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial u}, \quad g = \sum \frac{\partial X}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}, \tag{2}$$

(*) *Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme* (Crelle's Journal, vol. 57, 1859).

il Kummer introduce come *forme fondamentali* della congruenza le due forme differenziali quadratiche

$$d s'^2 = \sum d X^2 = E\, d u^2 + 2 F\, d u\, d v + G\, d v^2, \tag{3}$$

$$\sum d x\, d X = e\, d u^2 + (f + f')\, d u\, d v + g\, d v^2. \tag{4}$$

In questo lavoro mi propongo di esporre i fondamenti della teoria delle congruenze rettilinee, seguendo altra via: sostituendo cioè alla (4) un'altra forma quadratica che stimo più conveniente.

L'utilità di questa sostituzione apparirà in seguito: si vedrà che le nuove formole esprimono meglio le proprietà *intrinseche* della congruenza (ossia le proprietà della congruenza in sè) e che la superficie di partenza prende nettamente il posto che le compete, cioè di ente utile, ma non indispensabile; si noterà infine la completa analogia dell'esposizione con quella della teoria delle superficie.

Ma ci si può convincere *a priori* dell'utilità della sostituzione, osservando che delle due forme del Kummer solo la prima ha un significato intrinseco (*); invece la seconda è intimamente legata alla superficie di partenza, cioè ad un ente sussidiario ed estraneo alla congruenza e muta con essa. Di più nella esposizione del Kummer una proprietà intrinseca della congruenza non sempre è espressa da una relazione tra *i soli* coefficienti delle due forme, bensì questa contiene anche elementi della superficie di partenza; quindi per lo studio della congruenza non basta la conoscenza delle due forme. Per esempio, la proprietà di una congruenza di essere normale o di avere le due superficie focali coincidenti (proprietà intrinseche) sono rispettivamente espresse dalle relazioni

$$f = f',$$

$$[g E - (f + f') F + e G]^2 - 4 (E G - F^2)(e g - f f') = 0;$$

ora, *note solo le due forme fondamentali*, è noto $f + f'$, ma non sono note f ed f' separatamente, quindi non è possibile verificare se queste relazioni sieno o pur no soddisfatte.

È quasi superfluo avvertire che le proprietà geometriche delle congruenze contenute in questo lavoro non sono nuove, almeno in generale: esse si tro-

(*) Essa infatti rappresenta il quadrato dell'elemento lineare sferico ed il quadrato dell'angolo di due raggi infinitamente vicini $g(u, v)$ $g'(u + d u, v + d v)$.

vano o nella Memoria del KUMMER o in lavori posteriori (*). Nuovo è il concetto di *indicatrice* (§ 6).

2. Manterrò la *prima forma fondamentale* (3) e supporrò che sia definita, cioè che sia

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} & X \\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} & Y \\ \frac{\partial Z}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial v} & Z \end{vmatrix}^2 = EG - F^2 > 0.$$

Sia $d\sigma$ la minima distanza fra i due raggi infinitamente vicini

$$g(u, v), \quad g'(u + du, v + dv).$$

Il punto G ove essa incontra g ed il piano $g\,d\sigma$ sono il *punto centrale* ed il *piano centrale di g relativi a g'*. Q è un punto della linea di stringimento per ogni rigata della congruenza contenente g e g'. Tali rigate si toccano in ogni punto di g, perchè in ciascuno di essi hanno a comune il piano tangente: questo piano nel punto Q è il piano centrale e in ogni altro punto di g si può determinare con la nota *legge di Chasles sulla distribuzione dei piani tangenti*

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{t}{p},$$

ove t è l'ascissa del punto rispetto al punto centrale, θ l'angolo del piano tangente corrispondente col piano centrale e p il *parametro distributore*

$$p = \frac{d\sigma}{ds'}.$$

L'angolo θ è compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ ed il suo segno dipende dal senso secondo cui rota il piano tangente quando il punto di contatto si muove su g a partire dal punto centrale Q. Per un osservatore situato lungo il senso positivo di g coi piedi in Q, la rotazione avverrà nel senso positivo (da de-

(*) Cfr. per es., *Zindler Liniengeometrie*, 2er Bd., *Hensel* (Crelle 102), ecc.

stra a sinistra) se p è positivo e nel senso negativo se p è negativo. Nel primo caso la rigata può dirsi *sinistrorsa* e nel secondo *destrorsa.*

Se $p=0$, g e g' si incontrano ed il piano tangente $g\,g'$ è stazionario lungo g; allora la rigata si comporta in g come una sviluppabile.

3. Or consideriamo due rigate della congruenza passanti per g e rispettivamente per i due raggi infinitamente vicini

$$g'\,(u+d\,u,\ v+d\,v),\quad g''\,(u+\delta\,u,\ v+\delta\,v).$$

Dirò *angolo delle due rigate* in g l'angolo dei corrispondenti piani centrali di g, ossia l'angolo delle minime distanze $d\,\sigma$ e $\delta\,\sigma$ di g da g' e g''.

È facile stabilire delle formole per il calcolo degli angoli.

Si osservi infatti che $d\,\sigma$ e la sua immagine sferica $d\,s'$ sono ortogonali, come pure $\delta\,\sigma$ e $\delta\,s'$, e che tutti e quattro sono parallele ad un piano, perchè ortogonali a g, quindi: *l'angolo di due rigate è eguale all' angolo delle loro immagini sferiche.*

Questa semplice osservazione permette di applicare alle congruenze le relazioni angolari note sulla sfera o, più generalmente, su di una superficie qualunque (*).

Quindi l'angolo di due rigate è dato dalla formola

$$\cos(d\sigma,\,\delta\sigma)=\frac{E\,du\,\delta u+F(du\,\delta v+dv\,\delta u)+G\,dv\,\delta v}{\sqrt{(E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2)(E\,\delta u^2+2F\,\delta u\,\delta v+G\,\delta v^2)}}\,, \tag{5}$$

da cui segue la *condizione di ortogonalità di due rigate:*

$$E\,d\,u\,\delta\,u+F\,(d\,u\,\delta\,v+d\,v\,\delta\,u)+G\,d\,v\,\delta\,v=0. \tag{6}$$

In particolare, l'angolo ω delle rigate coordinate u, v è dato da

$$\cos\omega=\frac{F}{\sqrt{E\,G}}\,;$$

quindi $F=0$ è la condizione necessaria e sufficiente affinchè le rigate coordinate sieno ortogonali.

Ancora: l'angolo θ che una rigata passante per g e g' fa con la rigata v ($v=$ costante) è dato da

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{E}}\left(E\frac{d\,u}{d\,s'}+F\frac{d\,v}{d\,s'}\right),\quad \operatorname{sen}\theta=\frac{\sqrt{E\,G-F^2}}{\sqrt{F}}\frac{d\,v}{d\,s'}\,,$$

(*) Cfr. Bianchi, *Lezioni di Geometria Differerenziale*, 2.ª ed., vol. I, § 42.

o, se le rigate u, v sono ortogonali, da

$$\cos\theta = \sqrt{E}\,\frac{du}{ds'}, \quad \operatorname{sen}\theta = \sqrt{G}\,\frac{dv}{ds'}, \quad \operatorname{tg}\theta = \sqrt{\frac{G}{E}}\,\frac{dv}{du}. \tag{7}$$

Del resto le formole precedenti si possono dimostrare direttamente, mediante le altre facili a stabilire (*)

$$\left.\begin{aligned}
\cos(d\sigma, x) &= \frac{\left(E\frac{\partial X}{\partial v} - F\frac{\partial X}{\partial u}\right)du + \left(F\frac{\partial X}{\partial v} - G\frac{\partial X}{\partial u}\right)dv}{\Delta\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}},\\
\cos(d\sigma, y) &= \frac{\left(E\frac{\partial Y}{\partial v} - F\frac{\partial Y}{\partial u}\right)du + \left(F\frac{\partial Y}{\partial v} - G\frac{\partial Y}{\partial u}\right)dv}{\Delta\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}},\\
\cos(d\sigma, z) &= \frac{\left(E\frac{\partial Z}{\partial v} - F\frac{\partial Z}{\partial u}\right)du + \left(F\frac{\partial Z}{\partial v} - G\frac{\partial Z}{\partial u}\right)dv}{\Delta\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}},
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

ove Δ è il valor positivo del radicale $\sqrt{EG - F^2}$.

4. Si ha

$$d\sigma = \sum \cos(d\sigma, x)\,dx,$$

quindi, per le (8),

$$d\sigma = -\frac{D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}},$$

ove D, D', D'' (e λ) sono funzioni di u, v definite dalle formole

$$\left.\begin{aligned}
D &= \frac{1}{\Delta}\left(F\sum\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} - E\sum\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)\\
D' + \lambda &= \frac{1}{\Delta}\left(F\sum\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - E\sum\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\\
D' - \lambda &= \frac{1}{\Delta}\left(G\sum\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} - F\sum\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)\\
D'' &= \frac{1}{\Delta}\left(G\sum\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - F\sum\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

(*) Bianchi, l. c., I, pag. 299.

Dirò *seconda forma fondamentale* della congruenza la forma differenziale quadratica

$$-\mu = -d\sigma\, d s' = D\, d u^2 + 2 D'\, d u\, d v + D''\, d v^2. \tag{10}$$

Essa ha un significato intrinseco, perchè μ è il *momento* (CAYLEY) dei due raggi infinitamente vicini g e g'.

Le formole (9) e le loro inverse

$$\left.\begin{aligned} &\sum \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{E(D'-\lambda) - F D}{\Delta}, \qquad \sum \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{E D'' - F(D'+\lambda)}{\Delta}, \\ &\sum \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{F(D'-\lambda) - G D}{\Delta}, \qquad \sum \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{F D'' - G(D'+\lambda)}{\Delta}, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

permettono di passare dalla forma (10) a quella di KUMMER (4), e viceversa.

VARIAZIONE DEL PARAMETRO p. SUPERFICIE DISTRIBUTRICI.

5. Il parametro distributore p è misurato dal rapporto delle due forme fondamentali (§ 2)

$$p = -\frac{D\, d u^2 + 2 D'\, d u\, d v + D''\, d v^2}{E\, d u^2 + 2 F\, d u\, d v + G\, d v^2}. \tag{12}$$

Vediamo come esso varia, variando il rapporto $d u : d v$ (da cui solo dipende) ossia variando il piano centrale.

La (3) è una forma definita, quindi con una trasformazione reale delle variabili u, v possiamo ridurre simultaneamente a forma *ortogonale* le due forme fondamentali (3) e (10). Le nuove variabili da introdurre sono quelle che, eguagliate a costanti, dànno gli integrali dell'equazione quadratica

$$\Theta = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} E\, d u + F\, d v & F\, d u + G\, d v \\ D\, d u + D'\, d v & D'\, d u + D''\, d v \end{vmatrix} = 0, \tag{13}$$

ove Θ è il *covariante simultaneo* delle due forme (*).

(*) BIANCHI, l. c., I, § 39.

Si ha indeterminazione solo quando sia

$$\frac{D}{E}=\frac{D'}{F}=\frac{D''}{G},$$

ed in tal caso la congruenza si dice *isotropa*.

Chiamerò *superficie distributrici* della congruenza le superficie rigate integrali della (13).

Assunte a linee coordinate u, v, rendono

$$F=0, \quad D'=0,$$

e però sono ortogonali; dunque: *in ogni congruenza esiste un doppio sistema ortogonale, sempre reale, di superficie distributrici, la cui equazione differenziale è la* (13); *si ha indeterminazione solo nelle congruenze isotrope.*

Dirò *piani distributori* i piani centrali di un raggio relativi alle superficie distributrici, e *parametri distributori principali* i valori p_1 e p_2 del parametro distributore p relativi alle superficie distributrici u, v.

Avremo dunque

$$p=-\frac{D\,d u^2+D''\,d v^2}{E\,d u^2+G\,d v^2}$$

e in particolare

$$p_2=-\frac{D}{E}, \quad p_1=-\frac{D''}{G}; \tag{14}$$

quindi

$$p=p_2\,E\left(\frac{d\,u}{d\,s'}\right)^2+p_1\,G\left(\frac{d\,v}{d\,s'}\right)^2,$$

ossia, per le (7),

$$p=p_2\cos^2\theta+p_1\operatorname{sen}^2\theta, \tag{15}$$

ove θ è l'angolo che il piano centrale di g corrispondente al rapporto $d\,u:d\,v$ fa col piano distributore v.

La (15) dà *la legge di variazione del parametro* p.

In particolare, essa mostra che *le superficie distributrici sono quelle rigate della congruenza lungo le quali il parametro distributore assume i valori massimo e minimo* p_1 *e* p_2.

Indicatrice, parametro totale e parametro medio.

6. Il parametro p varia come la curvatura normale delle linee di una superficie passanti per un punto: la (15) infatti non differisce dalla nota formola di Eulero. Lasciandoci guidare da questa perfetta analogia, possiamo dare una rappresentazione geometrica espressiva della variazione del parametro p.

Le minime distanze $d\sigma$ del raggio g dai raggi infinitamente vicini sono tutte perpendicolari a g. In un punto qualunque C di g conduciamo il piano perpendicolare a g ed in esso assumiamo come essi cartesiani ortogonali ξ, η le tracce dei piani distributori v ed u.

Sulla traccia di un piano centrale qualunque per g, di inclinazione θ sul piano distributore v, portiamo a partire da C il segmento CP eguale alla radice quadrata del valore assoluto dell'inverso del corrispondente valore del parametro p. Diremo *indicatrice* il luogo dei punti P reali.

Le coordinate di P saranno

$$\xi = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{|p|}}, \quad \eta = \frac{\cos\theta}{\sqrt{|p|}},$$

quindi, per la (15), si avrà

$$p_1\xi^2 + p_2\eta^2 = \pm 1 \tag{16}$$

come luogo dei punti P reali o immaginarii.

In un raggio g in cui p_1 e p_2 hanno lo stesso segno, e che diremo *raggio ellittico*, l'equazione (16) rappresenta due ellissi, di cui una sola è reale e rappresenta quindi l'indicatrice. In un raggio in cui p_1 e p_2 hanno segni differenti, e che diremo *raggio iperbolico*, la (16) rappresenta due iperboli (reali) coniugate che costituiscono l'indicatrice.

Le superficie distributrici si possono dunque anche definire come quelle rigate della congruenza lungo le quali i piani centrali dei singoli raggi contengono un asse dell'indicatrice.

In un raggio ellittico p ha un segno costante (il segno comune di p_1 e p_2), quindi (§ 2) le rigate della congruenza uscenti da esso sono ivi tutte destrorse o tutte sinistrorse. Invece in un raggio iperbolico le rigate corrispondenti a piani centrali che incontrano una delle due iperboli sono tutte destrorse, mentre quelle corrispondenti a piani centrali che incontrano l'altra iperbole sono tutte sinistrorse; il passaggio dall'una all'altra specie di rigate avviene negli asintoti comuni alle due iperboli, e per le corrispondenti rigate si ha $p=0$.

In generale, in ogni congruenza esiste una regione di raggi ellittici ed una di raggi iperbolici, confinanti con una rigata di *raggi parabolici*, lungo la quale uno dei parametri principali è nullo.

7. Il modo di comportarsi delle rigate uscenti da un raggio dipende dunque dai valori dei parametri distributori principali p_1 e p_2.

Sono principalmente importanti le due seguenti funzioni di essi

$$K=p_1 p_2 \quad \text{e} \quad H=p_1+p_2,$$

che diremo *parametro totale* (o *assoluto*) e *parametro medio* della congruenza in g.

Dalle (15) risulta che i parametri p e p' corrispondenti a due rigate ortogonali qualunque per g $\left(\text{cioè corrispondenti ai valori } \theta \text{ e } \theta+\frac{\pi}{2}\right)$ hanno una somma costante, cioè che

$$p+p'=p_1+p_2=H;$$

dunque, immaginando distribuite a coppie a due a due perpendicolari le rigate passanti per g, si può ben dire che $\frac{1}{2}H$ è la media dei valori dei parametri distributori di tutte le rigate contenenti g.

I valori dei parametri distributori principali p_1 e p_2 sono dati dalle (14), quando però le rigate u, v sono le superficie distributrici; ma possiamo facilmente ottenere la loro espressione in funzione dei coefficienti delle due forme fondamentali anche quando le coordinate interne u, v sono qualunque.

Infatti la (12) può scriversi

$$p=-\frac{(D\,d\,u+D'\,d\,v)\,d\,u+(D'\,d\,u+D''\,d\,v)\,d\,v}{(E\,d\,u+F\,d\,v)\,d\,u+(F\,d\,u+G\,d\,v)\,d\,v},$$

quindi, per la (13), lungo le superficie distributrici

$$p=-\frac{D\,d\,u+D'\,d\,v}{E\,d\,u+F\,d\,v}=-\frac{D'\,d\,u+D''\,d\,v}{F\,d\,u+G\,d\,v}$$

ossia

$$(D+Ep)\,du+(D'+Fp)\,dv=0,$$

$$(D'+Fp)\,du+(D''+Gp)\,dv=0,$$

da cui, eliminando du e dv, si ha l'equazione del secondo grado in p:

$$(EG-F^2)\,p^2-(2FD'-ED''-GD)\,p+(DD''-D'^2)=0, \tag{17}$$

le cui radici sono i parametri distributori principali p_1 e p_2.

Ne segue che in coordinate u, v qualunque

$$\left.\begin{aligned} K&=\frac{DD''-D'^2}{EG-F^2}, \\ H&=\frac{2FD'-ED''-GD}{EG-F^2}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Dunque: *K ed H sono invarianti (algebrici) simultanei assoluti delle due forme fondamentali* (*).

Ciò era da prevedersi, perchè essi hanno un significato geometrico intrinseco e quindi affatto indipendente dalla scelta delle coordinate interne u, v.

Doppi sistemi notevoli di rigate.

8. Per ogni raggio g di una congruenza passano due superficie distributrici; esse quindi formano un doppio sistema ortogonale di rigate sempre reali.

Ma vi sono altri doppi sistemi notevoli di rigate.

Diremo *piani focali* o *asintotici* di un raggio g quei due piani di g che contengono gli asintoti dell'indicatrice.

Diremo poi *superficie asintotica* ogni rigata della congruenza lungo la quale il piano centrale di ogni raggio coincide con un piano asintotico.

Tali superficie sono le *sviluppabili* della congruenza, perchè lungo esse è nullo il parametro distributore p, quindi *la loro equazione differenziale è*

$$D\,du^2+2D'\,du\,dv+D''\,dv^2=0. \tag{19}$$

(*) Bianchi, l. c., I, § 39.

Esse formano un doppio sistema, in generale non ortogonale, e naturalmente sono reali solo se

$$D D'' - D'^2 < 0 \quad \text{o} \quad K < 0,$$

cioè solo nelle regioni dei raggi iperbolici; sono immaginarie nelle regioni dei raggi ellittici.

In particolare, segue dalla (19) che *la condizione necessaria e sufficiente affinchè le rigate coordinate u, v sieno le sviluppabili è che si abbia*

$$D = 0, \; D'' = 0.$$

9. Due piani per g si diranno *coniugati* se contengono due diametri coniugati dell'indicatrice, cioè se coi piani asintotici formano un gruppo armonico.

Indicando coi simboli d e δ gli spostamenti relativi a due piani coniugati, *la condizione di coniugio è*

$$D\, d u\, \delta u + D' (d u\, \delta v + d v\, \delta u) + D''\, d v\, \delta v = 0. \tag{20}$$

Infatti l'equazione che ha per radici $du : dv$ e $\delta u : \delta v$ è

$$z^2\, d u\, \delta u - z (d u\, \delta v + d v\, \delta u) + d v\, \delta v = 0$$

e quella che dà i piani asintotici è

$$D z^2 + 2 D' z + D'' = 0;$$

la condizione di armonia delle due coppie di valori determinati da queste due equazioni è appunto la (20).

Si noti che la (20) è formata con i coefficienti della seconda forma fondamentale, come la condizione di ortogonalità (6) è formata con quelli della prima.

Si dirà che due sistemi di rigate della congruenza formano *un* (*doppio*) *sistema coniugato,* se in ogni raggio della congruenza i due piani centrali relativi alle due rigate che vi passano sono coniugati.

La condizione necessaria e sufficiente affinchè le rigate coordinate u, v formino un sistema coniugato è che sia

$$D' = 0.$$

Le sviluppabili di ciascun sistema sono autoconiugate. Il solo doppio sistema che è nel contempo coniugato ed ortogonale è quello delle superficie distributrici.

Applicando all'indicatrice due noti teoremi di Apollonio relativi ai semidiametri coniugati di una ellisse o di una iperbole si ha che *se p e p' sono i parametri distributori relativi a due rigate coniugate e φ è l'angolo delle due rigate, si ha*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}, \quad \frac{\operatorname{sen}\varphi}{p\,p'}=\frac{1}{p_1 p_2} \tag{21}$$

ossia

$$p+p'=H\operatorname{sen}\varphi, \quad p\,p'=K\operatorname{sen}\varphi. \tag{22}$$

10. Due piani per un raggio g li diremo *isoclini,* se fanno angoli eguali con uno (e quindi anche con l'altro) dei due piani distributori. I parametri distributori corrispondenti sono eguali.

Gli spostamenti d e δ relativi a due piani isoclini sono legati dalla relazione

$$(FD-ED')du\,\delta u+(CD-ED'')(du\,\delta v+dv\,\delta u)+(GD'-FD'')dv\,\delta v=0, \tag{23}$$

che si ottiene eguagliando i valori dei corrispondenti parametri.

In particolare: *la condizione necessaria e sufficiente affinchè le rigate coordinate u, v sieno isocline è che si abbia*

$$\frac{D}{E}=\frac{D''}{G}.$$

Il valor comune dei due membri è il parametro distributore delle rigate u, v cambiato di segno.

Le sviluppabili formano due sistemi isoclini. Ponendo $d=\delta$ nella (23), si ritrova l'equazione differenziale (13) delle superficie distributrici.

11. I due piani per un raggio g isoclini ed ortogonali si dicono *principali;* essi bisecano gli angoli dei piani distributori.

Superficie principali della congruenza sono le rigate dei due sistemi che sono nel contempo isoclini ed ortogonali. Essi sono sempre reali.

L'equazione differenziale delle superficie principali è

$$\begin{vmatrix} E\,du+F\,dv & (FD-ED')\,du+(GD-ED'')\,dv \\ F\,du+G\,dv & (GD-ED'')\,du+(GD'-FD'')\,dv \end{vmatrix}=0$$

e si deduce eliminando $\delta u:\delta v$ dalle (6) e (23).

Dalla (15), per $\theta = \frac{\pi}{4}$, si ha che il parametro distributore comune è $\frac{1}{2}H$.

Assunte a rigate coordinate u, v rendono

$$\frac{D}{E} = \frac{D''}{G}, \quad F = 0.$$

12. Nelle congruenze (o regioni di congruenze) di raggi ellittici, cioè a parametro totale K positivo, la seconda forma fondamentale è definita, quindi esisteranno infiniti doppi sistemi (coniugati) che assunti a sistemi coordinati u, v le daranno la forma isoterma, cioè renderanno

$$D = D'', \quad D' = 0.$$

Li diremo sistemi *isotermo-coniugati.*

Superficie luoghi di punti centrali.

13. Sieno r ed r' le ascisse sui raggi successivi g e g' dei punti ove la comune perpendicolare $d\sigma$ a g e g' incontra i raggi stessi.

Proiettando ortogonalmente sugli assi, si ha

$$x + r X + d\sigma \cos(d\sigma, x) = x + dx + r'(X + dX),$$

con le analoghe in y e z; queste, moltiplicate per X, Y, Z o per dX, dY, dZ e sommate, danno rispettivamente

$$r = \sum X\, dx + r', \quad 0 = \sum dx\, dX + r' \sum dX^2;$$

eliminando r' e trascurando infinitesimi di ordine superiore, si ha

$$r = -\frac{\sum dx\, dX}{\sum dX^2}$$

ossia, per le (3) ed (11),

$$r = \frac{[FD - E(D' - \lambda)]du^2 + (GD - ED'' + 2F\lambda)du\,dv + [G(D' + \lambda) - FD'']dv^2}{\Delta(E du^2 + 2F du\,dv + G dv^2)}. \qquad (24)$$

Questa formola dà l'ascissa r del punto centrale del raggio $g(u, v)$ relativo a $g'(u + du, v + dv)$.

14. Si può anche scrivere

$$r = -\frac{\begin{vmatrix} E\,d\,u + F\,d\,v & F\,d\,u + G\,d\,v \\ D\,d\,u + D'\,d\,v + \lambda\,d\,v & D'\,d\,u + D''\,d\,v - \lambda\,d\,u \end{vmatrix}}{\Delta\,(E\,d\,u^2 + 2\,F\,d\,u\,d\,v + G\,d\,v^2)};$$

in particolare per le superficie distributrici di equazione (13) si ha

$$r_0 = -\frac{\begin{vmatrix} E\,d\,u + F\,d\,v & F\,d\,u + G\,d\,v \\ \lambda\,d\,v & -\lambda\,d\,u \end{vmatrix}}{\Delta(E\,d\,u^2 + 2\,F\,d\,u\,d\,v + G\,d\,v^2)},$$

ossia

$$r_0 = \frac{\lambda}{\Delta}\,. \tag{25}$$

Dunque: *i punti centrali di g relativi alle superficie distributrici coincidono in un unico punto Q_0 di ascissa* (25).

Questo punto si chiama il *punto medio* del raggio.

Superficie media della congruenza è il luogo dei punti medii di tutti i suoi raggi. Essa è il luogo delle linee di stringimento di tutte le superficie distributrici della congruenza.

In particolare: la condizione necessaria e sufficiente affinchè la superficie di partenza sia la superficie media è $\lambda = 0$.

15. Assunti come coordinate interne i parametri u, v delle superficie distributrici e come superficie di partenza la superficie media, risulta

$$F = 0, \quad D' = 0, \quad \lambda = 0$$

e la (24) diventa

$$r = \frac{(G\,D - E\,D'')\,d\,u\,d\,v}{\sqrt{E\,G}\,(E\,d\,u^2 + G\,d\,v^2)}$$

ossia, per le (7) e (14),

$$r = (p_1 - p_2)\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,;$$

supponendo ora che la superficie di partenza sia qualunque, si ha la formola

$$r = r_0 + \frac{1}{2}\,(p_1 - p_2)\,\mathrm{sen}\,2\,\theta, \tag{26}$$

che dà l'ascissa r del punto centrale di un raggio g relativo ad una rigata di inclinazione θ sulla rigata distributrice di parametro p_2.

Cambiando θ in $-\theta$ o in $\theta + \frac{\pi}{2}$, $r - r_0$ cambia solo di segno, dunque: *sono simmetrici rispetto al punto medio Q_0 i punti centrali relativi a due rigate isocline o a due rigate ortogonali.*

I valori estremi di r

$$r_1 = r_0 + \frac{1}{2}(p_1 - p_2), \qquad r_2 = r_0 - \frac{1}{2}(p_1 - p_2)$$

si hanno per $\theta = \pm \frac{\pi}{4}$, dunque: *i punti centrali corrispondenti alle superficie principali hanno per ascisse i valori estremi di r; tutti gli altri punti centrali cadono nell'interno del segmento da essi determinato.*

Perciò si chiamano i *punti limiti* del raggio.

La distanza $2l$ dei punti limiti è misurata dalla differenza dei parametri distributori principali

$$2l = p_1 - p_2 \; ; \tag{27}$$

essa può anche esprimersi in funzione di H e K con la formola

$$2l = \sqrt{H^2 - 4K} \; (*). \tag{28}$$

Il luogo dei punti limiti è una superficie a due falde (in generale) ciascuna delle quali si chiama una *superficie limite* della congruenza, ed è il luogo delle linee di stringimento di uno dei due sistemi di superficie principali.

16. La (15) è una relazione fra θ e p, la (26) è una relazione fra $r - r_0$ e θ; eliminando θ, si ha la relazione

$$(r - r_0)^2 + p^2 - Hp + K = 0 \tag{29}$$

che lega il parametro p di una rigata per g e la distanza $r - r_0$ del corrispondente punto centrale di g dal punto medio.

Ponendovi $r = r_0$ si ritrova la (17).

Ponendo invece $p = 0$, si ha che *i punti centrali relativi alle sviluppabili della congruenza sono simmetrici rispetto al punto medio Q_0 ed hanno per ascisse*

$$r = r_0 \pm \sqrt{-K}. \tag{30}$$

(*) Ne segue che è sempre

$$H^2 \geqq 4K.$$

Si dicono i *fuochi* del raggio. La loro distanza è

$$2f = 2\sqrt{-K}. \tag{31}$$

Il luogo dei fuochi di tutti i raggi è una superficie a due falde S_1 e S_2 (in generale) ciascuna delle quali si chiama una *superficie focale* della congruenza.

Naturalmente i fuochi e le superficie focali sono reali solo nelle regioni di raggi iperbolici ($K < 0$).

I raggi della congruenza inviluppano sopra una delle due falde un sistema ∞' di curve, che sono gli spigoli di regresso delle sviluppabili di uno dei due sistemi; analogamente per l'altra falda.

I fuochi F_1 e F_2 sono dunque i punti di contatto del raggio g con le due superficie focali S_1 ed S_2 ed i due piani tangenti ivi sono i due piani focali o asintotici per g. Precisamente: il piano focale osculatore dello spigolo di regresso luogo del punto F_1 è il piano tangente in F_2 ad S_2 e il piano focale osculatore dello spigolo di regresso luogo del punto F_2 è il piano tangente in F_1 a S_1.

Ne segue che: *su ciascuna superficie focale le curve corrispondenti ai due sistemi di sviluppabili formano un doppio sistema coniugato: le une sono gli spigoli di regresso di uno dei due sistemi, le altre sono le curve di contatto delle sviluppabili dell'altro sistema.*

Eliminando r_0 fra le (21) e (30) e tenendo presente la (28), si ha per l'angolo φ dei piani focali

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{2\sqrt{-K}}{\sqrt{H^2 - 4K}}, \quad \cos\varphi = \frac{H}{\sqrt{H^2 - 4K}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sqrt{-K}}{H}. \tag{32}$$

Notiamo anche la formola

$$l^2 - f^2 = \frac{1}{4} H^2. \tag{33}$$

Congruenze paraboliche, isotrope, normali, ecc.

17. Esistono congruenze di raggi tutti parabolici, ossia (§ 6) di parametro totale K identicamente nullo?

In tali congruenze, essendo

$$D D'' - D'^2 = 0$$

i due sistemi di sviluppabili (19) dovranno coincidere in un unico sistema, sempre reale, col quale coinciderà pure uno dei due sistemi di superficie distributrici, l'altro essendo costituito dalle rigate ortogonali. I fuochi coincideranno col punto medio su ogni raggio e le due superficie focali coincideranno con la superficie media, sulla quale l'unico sistema di sviluppabili inviluppera un sistema ∞' di linee autoconiugate, cioè le asintotiche di un sistema (Cfr. la fine del paragrafo prec.).

Viceversa è evidente che le tangenti di un sistema di asintotiche di una superficie formano una congruenza di raggi tutti parabolici e che diremo perciò *parabolica*.

Dunque: *le congruenze paraboliche sono quelle costituite dalle tangenti ad un sistema di asintotiche di una superficie; in esse il parametro totale K è nullo ed il parametro medio H è eguale alla distanza fra i punti limiti su ogni raggio.*

Dalle cose precedenti risulta che *le congruenze paraboliche occupano fra le congruenze il posto che le superficie sviluppabili occupano fra le superficie.*

Infatti l'analogia è completa: alla curvatura totale nulla, corrisponde il parametro totale nullo; all'unico sistema di linee asintotiche (rette), l'unico sistema di superficie asintotiche; allo spigolo di regresso (inviluppo delle linee asintotiche), l'unica superficie focale (inviluppo delle superficie asintotiche); alle linee di curvatura (linee asintotiche e traiettorie ortogonali), le superficie distributrici (superficie asintotiche e rigate ortogonali).

18. Diremo *raggi circolari* di una congruenza quelli nei quali l'indicatrice è un cerchio. Tutte le rigate uscenti da un raggio circolare hanno ivi egual parametro distributore.

Vedremo che esistono congruenze di raggi tutti circolari.

In esse p, definito dalla (12), deve risultare indipendente da $du:dv$, quindi dev'essere

$$\frac{D}{E}=\frac{D'}{F}=\frac{D''}{G};$$

dunque: affinchè tutti i raggi di una congruenza sieno circolari occorre e basta che la seconda forma fondamentale non differisca dalla prima che per un fattore, che è il parametro distributore p comune a tutte le rigate uscenti da uno stesso raggio, cambiato di segno.

In tali congruenze, dette *isotrope* dal RIBAUCOUR, il parametro totale $K=p^2$ è positivo, le rigate sono tutte distributrici, tutte principali, ecc.; i punti limiti, ed in generale tutti i punti centrali, coincidono col punto medio su ogni raggio.

Per evidenti analogie, *le congruenze isotrope occupano fra le congruenze quel posto che la sfera occupa fra le superficie.*

19. Una congruenza è *normale* se è costituita dalle normali di una superficie.

Affinchè una congruenza sia normale occorre e basta che si possa determinare una funzione t di u, v, tale che il punto

$$\xi = x + tX, \quad \eta = y + tY, \quad \zeta = z + tZ$$

descriva, variando u e v, una superficie normale ai raggi, cioè tale che risulti

$$\sum X\, d\xi = \sum X(dx + t\, dX + X\, dt) = \sum X\, dx + dt = 0;$$

dunque occorre e basta che sia

$$\frac{\partial}{\partial v}\sum X\frac{\partial x}{du} = \frac{\partial}{\partial u}\sum X\frac{\partial x}{\partial v} \quad \text{o} \quad \sum\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} = \sum\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}.$$

Soddisfatta questa condizione, t è determinata solo a meno di una costante additiva C,

$$t = C - \int\sum X\, dx,$$

quindi: *se esiste una superficie normale ai raggi, ne esisteranno* ∞', *tutte parallele tra loro.*

In virtù delle (11), la condizione trovata diventa

$$2FD' - ED'' - GD = 0$$

ossia $H = 0$; dunque: *affinchè una congruenza sia normale è necessario e sufficiente che sia nullo il suo parametro medio H.*

Nelle congruenze normali *sono dunque opposti i parametri distributori principali, cioè le indicatrici sono coppie di iperboli equilatere coniugate; le superficie asintotiche sono reali ed ortogonali e coincidono con le superficie principali; i fuochi coincidono con i punti limiti.*

Tutte queste proprietà sono caratteristiche per le congruenze normali e mostrano, per evidenti analogie, che *esse occupano per le congruenze quel posto che le superficie ad area minima occupano fra le superficie.*

È noto che su di una superficie normale ai raggi le sviluppabili tracciano le linee di curvatura e che le due superficie focali sono le due falde dell'evoluta della superficie.

Risulta poi dalla (31) che, detti r_1 e r_2 i raggi principali di curvatura della superficie, si ha

$$(r_1 - r_2)^2 = -4K. \tag{34}$$

20. Generalizzando, si possono considerare le congruenze *di parametro medio H costante*. Per la (33), *in tali congruenze è costante la differenza fra i quadrati delle distanze dei punti limiti e dei fuochi.*

Possiamo considerare le congruenze *a parametro totale K costante.*

Appartengono a questa classe le *congruenze pseudosferiche* del BIANCHI (K costante negativa ed H costante) ed in particolare le *congruenze pseudosferiche normali* ($H = 0$); in queste, per la (34), le superficie ortogonali ai raggi sono le superficie considerate dal RIBAUCOUR, nelle quali è costante la differenza dei raggi principali di curvatura.

CONGRUENZE CON IMMAGINE SFERICA ASSEGNATA. EQUAZIONI INTRINSECHE.

21. È possibile determinare ed in un sol modo tre funzioni α, β, γ di u, v tali che sia

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \alpha \frac{\partial X}{\partial u} + \beta \frac{\partial X}{d v} + \gamma X$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \alpha \frac{\partial Y}{\partial u} + \beta \frac{\partial Y}{\partial v} + \gamma Y$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \alpha \frac{\partial Z}{\partial u} + \beta \frac{\partial Z}{\partial v} + \gamma Z$$

se si tien ferma l'ipotesi fatta in principio del § 2.

Ne segue

$$\sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} = \alpha E + \beta F,$$

onde, paragonando con la prima delle (11), si ha

$$\alpha = \frac{D' - \lambda}{\Delta}, \quad \beta = -\frac{D}{\Delta}.$$

Operando analogamente per $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$ si hanno infine le formole

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{D' - \lambda}{\Delta} \frac{\partial X}{\partial u} - \frac{D}{\Delta} \frac{\partial X}{\partial v} + \gamma X \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= \frac{D''}{\Delta} \frac{\partial X}{\partial u} - \frac{D' + \lambda}{\Delta} \frac{\partial X}{\partial v} + \gamma' X \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

con le analoghe in y e z.

Le condizioni di integrabilità

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u}, \dots$$

dànno

$$\frac{D''}{\Delta} \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} - 2 \frac{D'}{\Delta} \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} + \frac{D}{\Delta} \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} +$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{D''}{\Delta} - \frac{\partial}{\partial v} \frac{D' - \lambda}{\Delta} + \gamma' \right) \frac{\partial X}{\partial u} + \left(\frac{\partial}{\partial v} \frac{D}{\Delta} - \frac{\partial}{\partial u} \frac{D' + \lambda}{\Delta} - \gamma \right) \frac{\partial X}{\partial v} +$$

$$+ \left(\frac{\partial \gamma'}{\partial u} - \frac{\partial \gamma}{\partial v} \right) X = 0,$$

con le analoghe in Y e Z.

Eliminando le derivate seconde mediante le formole (*).

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} &= \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial X}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial X}{\partial v} - E X \\ \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} &= \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial X}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial X}{\partial v} - F X \\ \frac{\partial^3 X}{\partial v^2} &= \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial X}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial X}{\partial v} - G X \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

ove i simboli di Christoffel $\left\{ \begin{matrix} r\,s \\ t \end{matrix} \right\}$ si intendono formati con i coefficienti

(*) Bianchi, l. c., I, § 72.

E, F, G della prima forma fondamentale, si ha la relazione

$$\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{D''}{\Delta}-\frac{\partial}{\partial v}\frac{D'-\lambda}{\Delta}+\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\frac{D''}{\Delta}-2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{D'}{\Delta}+\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{D}{\Delta}+\gamma'\right]\frac{\partial X}{\partial u}+$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial v}\frac{D}{\Delta}-\frac{\partial}{\partial u}\frac{D'+\lambda}{D}+\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\frac{D}{\Delta}-2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{D'}{\Delta}+\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{D''}{\Delta}-\gamma\right]\frac{\partial X}{\partial v}+$$

$$+\left(\frac{\partial\gamma'}{\partial u}-\frac{\partial\gamma}{\partial v}+\frac{2FD'-ED''-GD}{\Delta}\right)=0$$

con le analoghe in Y e Z.

Queste tre equazioni lineari ed omogenee nelle quantità in parentesi non possono coesistere che per valori tutti nulli di queste, quindi si ha

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}\frac{D''}{\Delta}-\frac{\partial}{\partial v}\frac{D'-\lambda}{\Delta}+\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{D}{\Delta}-2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{D'}{\Delta}+\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\frac{D''}{\Delta}+\gamma'=0\\
&\frac{\partial}{\partial v}\frac{D}{\Delta}-\frac{\partial}{\partial u}\frac{D'+\lambda}{\Delta}+\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\frac{D}{\Delta}-2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{D'}{\Delta}+\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{D''}{\Delta}-\gamma-0\\
&\frac{\partial\gamma}{\partial v}-\frac{\partial\gamma'}{\partial u}=\frac{2FD'-ED''-CD}{\Delta}.
\end{aligned}\right\}\quad(37)$$

Or non resta che ad eliminare γ e γ' fra le (35) e (37).

Possiamo dunque enunciare il seguente

TEOREMA FONDAMENTALE. *a). Date le due forme differenziali quadratiche*

$$\left.\begin{aligned}
&E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2\\
&D\,du^2+2D'\,du\,dv+D''\,dv^2
\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{I})$$

la prima delle quali definita ed a curvatura $+1$ (*), *affinchè esse sieno rispettivamente la prima e la seconda forma fondamentale di una congruenza di raggi è necessario e sufficiente che tra i loro coefficienti passi l'unica re-*

(*) Cioè tale che sia

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F}{E\Delta}\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{1}{\Delta}\frac{\partial G}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{2}{\Delta}\frac{\partial F}{\partial u}\quad\frac{1}{\Delta}\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{F}{E\Delta}\cdot\frac{\partial E}{\partial u}\right)\quad 2\Delta.$$

Cfr. BIANCHI, l. c., I, § 43, formola (17).

lazione

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{D''}{\Delta}-\frac{\partial}{\partial v}\frac{D'}{\Delta}+\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{D}{\Delta}-2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{D'}{\Delta}+\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\frac{D''}{\Delta}\right]+\\
&\frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\partial}{\partial v}\frac{D}{\Delta}-\frac{\partial}{\partial u}\frac{D'}{\Delta}+\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\frac{D}{\Delta}-2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{D'}{\Delta}+\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{D''}{\Delta}\right]=\\
&\qquad\qquad=\frac{2FD'-ED''-GD}{EG-F^2}.
\end{aligned}\right\}\quad \text{(II)}$$

La corrispondente congruenza è individuata.

b) Ad ogni funzione r_0 di u, v, assegnata ad arbitrio, corrisponde una superficie di partenza per la congruenza e, note $X\,Y\,Z$ in funzione di u, v (*), *essa si ottiene con quadrature dalle formole*

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u}=\left(\frac{D'}{\Delta}-r_0\right)\frac{\partial X}{\partial u}-\frac{D}{\Delta}\frac{\partial X}{\partial v}+\\
&+\left[\frac{\partial}{\partial v}\frac{D}{\Delta}-\frac{\partial}{\partial u}\frac{D'}{\Delta}+\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\frac{D}{\Delta}\quad 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{D'}{\Delta}+\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{D''}{\Delta}-\frac{\partial r_0}{\partial u}\right]X\\
&\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{D''}{\Delta}\frac{\partial X}{\partial u}-\left(\frac{D'}{\Delta}+r_0\right)\frac{\partial X}{\partial v}-\\
&-\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{D''}{\Delta}-\frac{\partial}{\partial v}\frac{D'}{\Delta}+\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{D}{\Delta}-2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{D'}{\Delta}+\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\frac{D''}{\Delta}+\frac{\partial r_0}{\partial v}\right]X
\end{aligned}\right\}\quad \text{(III)}$$

e dalle analoghe in y e z.

Ricordiamo che r_0 è l'ascissa del punto medio Q_0 del raggio (u, v) rispetto al punto $M(u, v)$ della superficie di partenza (§ 14).

Date le due forme (I) e soddisfatta la (II) la congruenza è individuata, e però si può ben dire che

$$ds'^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

$$-\mu = D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2$$

sono le *equazioni intrinseche* della congruenza.

22. In virtù delle formole (**)

$$\frac{\partial \log\Delta}{\partial u}=\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix},\qquad \frac{\partial \log\Delta}{\partial v}=\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix},$$

(*) È noto che la ricerca di X, Y, Z quando sono note solo E, F, G dipenda da un'equazione di Riccati.

(**) Cfr. Bianchi, l. c., I, § 56.

si può dare alle (II) e (III) la forma sovente più utile:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial D''}{\partial u}-\frac{\partial D'}{\partial v}+\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}D+\left(\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right)D'-\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}D''\right]\right\}+\\
&+\frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial D}{\partial v}-\frac{\partial D'}{\partial u}-\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}D+\left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\right)D'+\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}D''\right]\right\}-\\
&\qquad=\frac{2FD'-ED''-GD}{EG-F^2},
\end{aligned}\right\}\quad\text{(II')}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u}=\left(\frac{D'}{\Delta}-r_0\right)\frac{\partial X}{\partial u}-\frac{D}{\Delta}\frac{\partial X}{\partial v}+\\
&+\frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial D}{\partial v}-\frac{\partial D'}{\partial u}-\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}D+\left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\right)D'+\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}D''-\Delta\frac{\partial r_0}{\partial u}\right]X,\\
&\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{D''}{\Delta}\frac{\partial X}{\partial v}-\left(\frac{D'}{\Delta}+r_0\right)\frac{\partial X}{\partial v}-\\
&-\frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial D''}{\partial u}-\frac{\partial D'}{\partial v}+\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}D+\left(\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right)D'\;\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}D''+\Delta\frac{\partial r_0}{\partial v}\right]X.
\end{aligned}\right\}\quad\text{(III')}$$

23. Allo scopo di scrivere queste formole in modo più conciso, ricordiamo quanto segue (*).

Sieno

$$f=\sum a_{rs}\,dx_r\,dx_s,\qquad \varphi=\sum b_{rs}\,dx_r\,dx_s$$
$$(r,\ s=1,\ 2,\ldots,\ n;\quad a_{sr}=a_{sr},\ b_{rs}=b_{sr})$$

due forme differenziali quadratiche con n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la prima delle quali abbia il discriminante non nullo, e con i loro coefficienti si formino le espressioni a tre indici

$$b_{ikl}=\frac{\partial b_{ik}}{\partial x_l}-\frac{\partial b_{il}}{\partial x_k}+\sum_\mu\begin{Bmatrix}i\,k\\\mu\end{Bmatrix}b_{l\mu}-\sum_\mu\begin{Bmatrix}i\,l\\\mu\end{Bmatrix}b_{k\mu}\quad(\mu,\ i,\ k,\ l=1,2,\ldots,\ n)$$

ove i simboli di Christoffel sono calcolati rispetto alla forma f.

Indicando con d, δ, D tre diversi sistemi differenziali delle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la forma trilineare

$$(f,\ \varphi)=\sum b_{ikl}\,dx_i\,\delta x_k\,Dx_l$$

(*) Cfr. Bianchi, l. c., I, § 38.

è una forma *covariante* ad f e φ che si chiama *la forma trilineare costruita per la forma φ rapporto alla f.*

Nel caso di $n=2$, si hanno 8 simboli b_{ikl}; di questi però 4, cioè

$$b_{111},\ b_{122},\ b_{211},\ b_{222}$$

sono identicamente nulli, e dei rimanenti

$$b_{112},\ b_{121},\ b_{212},\ b_{221}$$

i primi due sono opposti, come pure gli ultimi due: si hanno dunque due simboli distinti e non nulli, per esempio b_{112}, b_{221}.

Se si pone

$$x_1=u,\ x_2=v,\ a_{11}=E,\ a_{12}=F,\ a_{22}=G,\ b_{11}=D,\ b_{12}=D',\ b_{22}=D'',$$

si trova che

$$\left.\begin{aligned} b_{112}&=\frac{\partial D}{\partial v}-\frac{\partial D'}{\partial u}+\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}D+\left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\right)D'+\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}D''\\ b_{221}&=\frac{\partial D''}{\partial u}-\frac{\partial D'}{\partial v}+\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}D+\left(\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right)D'-\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}D''\end{aligned}\right\}\tag{38}$$

sono i coefficienti distinti e non nulli della forma trilineare $(ds'^2,\ -\mu)$ costruita per la forma $-\mu$ rapporto alla ds'^2, la quale è covariante al sistema delle due forme.

Introducendo questi simboli a tre indici e ricordando che il secondo membro delle (II) e (II') non è che l'invariante simultaneo H delle due forme (I), possiamo scrivere le (II') e (III') sotto la forma

$$\frac{1}{\Delta}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{b_{221}}{\Delta}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{b_{112}}{\Delta}\right)\right\}=H,\tag{II''}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial u}&=\left(\frac{D'}{\Delta}-r_0\right)\frac{\partial X}{\partial u}-\frac{D}{\Delta}\frac{\partial X}{\partial v}+\left(\frac{b_{112}}{\Delta}-\frac{\partial r_0}{\partial u}\right)X,\\ \frac{\partial x}{\partial v}&=\frac{D''}{\Delta}\frac{\partial X}{\partial u}-\left(\frac{D'}{\Delta}+r_0\right)\frac{\partial X}{\partial v}-\left(\frac{b_{221}}{\Delta}+\frac{\partial r_0}{\partial v}\right)X.\end{aligned}\right\}\tag{III''}$$

Abbiamo già osservato che il secondo membro delle (II), (II'), (II'') è l'invariante simultaneo algebrico assoluto H delle due forme (I). Dalla (II'') apparisce che *anche il primo membro è un invariante simultaneo* (*differenziale*) *delle due forme.*

24. Della funzione r_0 possiamo disporre ad arbitrio; ciò equivale a poter scegliere convenientemente una superficie di partenza per la congruenza individuata dalle (I).

In particolare, possiamo scrivere immediatamente le formole che definiscono la superficie media, o le superficie focali, o le superficie limiti. Basta porre nelle (III) o (III') o (III'')

$$r_0 = 0, \quad \text{o} \quad r_0 = \pm\sqrt{-K}, \quad \text{o} \quad r_0 = \pm\sqrt{H^2 - 4K},$$

come risulta dai §§ 14, 15, 16.

Per la superficie media otteniamo

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x_0}{\partial u} &= \frac{D'}{\Delta}\frac{\partial X}{\partial u} - \frac{D}{\Delta}\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{b_{112}}{\Delta} X \\ \frac{\partial x_0}{\partial v} &= \frac{D''}{\Delta}\frac{\partial X}{\partial u} - \frac{D'}{\Delta}\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{b_{221}}{\Delta} X. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Ne risulta

$$\begin{aligned} E_0 = \sum\left(\frac{\partial x_0}{\partial u}\right)^2 &= \frac{D'^2}{\Delta^2} E + \frac{D^2}{\Delta^2} G + \frac{b_{112}^2}{\Delta^2} - 2\frac{D D'}{\Delta^2} F \\ &= -E\frac{D D'' - D'^2}{\Delta^2} - D\frac{2 F D' - E D'' - G D}{\Delta^2} + \frac{b_{112}^2}{\Delta^2} \\ &= -E K - D H + \frac{b_{112}^2}{\Delta^2}, \end{aligned}$$

ed analogamente

$$F_0 = \sum\frac{\partial x_0}{\partial u}\frac{\partial x_0}{\partial v} = -F K - D' H - \frac{b_{112}\, b_{221}}{\Delta^2},$$

$$G_0 = \sum\left(\frac{\partial x_0}{\partial v}\right)^2 = -G K - D'' H + \frac{b_{221}^2}{\Delta^2};$$

quindi *pel quadrato dell'elemento lineare*

$$d s_0^2 = d x_0^2 + d y_0^2 + d z_0^2 = E_0\, d u^2 + 2 F_0\, d u\, d v + G_0\, d v^2$$

della superficie media si ha l'espressione

$$d s_0^2 = -K\, d s'^2 + H\mu + \frac{1}{\Delta^2}(b_{112}\, d u - b_{221}\, d v)^2. \tag{40}$$

Applicazione alle congruenze paraboliche, isotrope e normali.

25. In una congruenza parabolica $K=0$ e μ, a prescindere da un fattore, è il quadrato di una forma lineare che eguagliata a O dà l'unico sistema di sviluppabili della congruenza, le quali inviluppano sulla superficie media un sistema di asintotiche (§ 17). Dunque $d s_0^2$ risulta ridotto a forma ortogonale, cioè: *sulla superficie media-focale di una congruenza parabolica le linee integrali dell'equazione differenziale*

$$b_{112}\, d u - b_{221}\, d v = 0$$

sono le traiettorie ortogonali alle asintotiche $\mu = 0$ *inviluppate dai raggi della congruenza.*

26. Nelle congruenze isotrope (§ 18)

$$\frac{D}{E} = \frac{D}{F} = \frac{D''}{G} = -p,$$

ove p è il parametro distributore costante in ciascun raggio.

Eliminando D, D' e D'' dalla (II') e tenendo presente che si ha identicamente (*)

$$\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial u} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} E + \left(\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right) F + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} G = 0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v} + \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} E + \left(\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \right) - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} G = 0,$$

otteniamo un'equazione differenziale del secondo ordine in p.

Dunque, pel teorema a): *data una forma quadratica definita a curvatura* $+1$

$$E\, d u^2 + 2 F\, d u\, d v + G\, d v^2, \tag{41}$$

ad ogni soluzione p *dell'equazione*

$$\frac{1}{\Delta} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G \frac{\partial p}{\partial u} - F \frac{\partial p}{\partial v}}{\Delta} \right) + \frac{1}{\Delta} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E \frac{\partial p}{\partial v} - F \frac{\partial p}{\partial u}}{\Delta} \right) + 2 p = 0$$

(*) Bianchi, l. c., I, nota alla pag. 121.

corrisponde una congruenza isotropa che ha la prima forma fondamentale (41) *ed il parametro* p.

Si noti che i primi due termini costituiscono il parametro differenziale secondo di p calcolato rispetto alla (41) (*), quindi l'equazione precedente si può scrivere

$$\Delta_2 p + 2p = 0. \tag{42}$$

Appena nota una soluzione p' di questa equazione, e quindi una particolare congruenza isotropa con l'assegnata immagine sferica (41), ponendo

$$p = p' + P,$$

la ricerca delle altre sarà ricondotta all'integrazione dell'equazione

$$\Delta_2 P = 0.$$

Le (III') dànno una superficie di partenza; per $r_0 = 0$ dànno la superficie media.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x_0}{\partial u} &= -\frac{Fp}{\Delta}\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{Ep}{\Delta}\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{1}{\Delta}\left(F\frac{\partial p}{\partial u} - E\frac{\partial p}{\partial v}\right)X \\ \frac{\partial x_0}{\partial v} &= -\frac{Gp}{\Delta}\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{Fp}{\Delta}\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{1}{\Delta}\left(G\frac{\partial p}{\partial u} - F\frac{\partial p}{\partial v}\right)X = 0. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Ne risulta facilmente l'identità

$$dx_0\, dX + dy_0\, dY + dz_0\, dZ = 0,$$

la quale, interpretata geometricamente, dà un noto teorema di Ribaucour (**).

Basta assumere come rigate coordinate u, v un sistema a cui corrisponda sulla sfera un sistema isotermo,

$$E = G = \lambda, \quad F = 0,$$

per dare alle (42) e (43) le forme più semplici

$$\frac{\partial^2 p}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} + 2\lambda p = 0,$$

$$\frac{\partial x_0}{\partial u} = p\frac{\partial X}{\partial v} - X\frac{\partial p}{\partial v}, \quad \frac{\partial x_0}{\partial v} = X\frac{\partial p}{\partial u} - p\frac{\partial X}{\partial u}.$$

(*) Bianchi, l. c., I, pag. 93.

(**) Bianchi, l. c., I, § 139.

27. Una congruenza è normale se $H=0$, quindi, pel teorema a), *affinchè le* (I) *sieno le due forme fondamentali di una congruenza normale è necessario e sufficiente che sieno nulli i due invarianti simultanei delle due forme espressi dai due membri della* (II) *o* (II') *o* (II''):

$$\frac{1}{\Delta}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{b_{221}}{\Delta}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{b_{112}}{\Delta}\right)\right\}=0, \quad H=0. \tag{44}$$

Le (III') dànno una qualunque superficie di partenza. Volendo in particolare una superficie S ortogonale ai raggi, basta rendere

$$\sum X\frac{\partial x}{\partial u}=0, \quad \sum X\frac{\partial x}{\partial v}=0$$

ossia

$$\frac{\partial r_0}{\partial u}=\frac{b_{112}}{\Delta}, \quad \frac{\partial r_0}{\partial v}=-\frac{b_{221}}{\Delta}, \tag{45}$$

quindi basta porre

$$r_0=\int\left(\frac{b_{112}}{\Delta}\,du-\frac{b_{221}}{\Delta}\,dv\right), \tag{46}$$

ciò che è possibile per la prima delle (44). La superficie S è allora definita dalle formole

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial u}&=\left(\frac{D'}{\Delta}-r_0\right)\frac{\partial X}{\partial u}-\frac{D}{\Delta}\frac{\partial X}{\partial v},\\ \frac{\partial x}{\partial v}&=\frac{D''}{\Delta}\frac{\partial X}{\partial u}-\left(\frac{D'}{\Delta}+r_0\right)\frac{\partial X}{\partial v}.\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Da queste formole si possono dedurre facilmente le ordinarie formole di rappresentazione sferica per una superficie S.

Infatti la forma

$$E\,du^2+2\,F\,du\,dv+G\,dv^2 \tag{48}$$

è per la superficie S la *terza forma fondamentale* e la *seconda* è (*)

$$-\sum dx\,dX=D_0\,du^2+2\,D'_0\,du\,dv+D''_0\,dx^2, \tag{49}$$

i cui coefficienti sono legati ai coefficienti della seconda forma fondamen-

(*) Bianchi, l. c., I, § 54.

tale $-\mu$ della congruenza dalle formole

$$D = \frac{E\,D'_0 - F\,D_0}{\Delta}, \quad D' - r_0\,\Delta = \frac{F\,D'_0 - G\,D_0}{\Delta},$$

$$D' + r_0\,\Delta = \frac{E\,D''_0 - F\,D'_0}{\Delta}, \quad D'' = \frac{F\,D''_0 - G\,D'_0}{\Delta},$$

come risulta dalle (9).

In virtù di queste formole, le (45) si riducono poi alle ordinarie formole di Codazzi.

Le forme (48) e (49), legate dalle relazioni di Codazzi, individuano la superficie S e quindi la congruenza delle sue normali (*). Ma le (I) hanno su di esse il vantaggio che i primi membri delle relazioni che legano i loro coefficienti sono invarianti simultanei delle forme stesse; mentre che i primi membri delle relazioni di Codazzi non sono invarianti delle (48) e (49).

28. È facile caratterizzare le *congruenze W normali* ossia le congruenze costituite dalle normali ad una superficie i cui raggi principali di curvatura sono legati da una relazione (*superficie W*).

Infatti la r_0, definita dalla (46), è l'ascissa del punto medio Q_0 del raggio $g(u, v)$ della congruenza rispetto al punto $M(u, v)$ ove g incontra la superficie S normale ai raggi, quindi è la semisomma dei raggi principali r_1, r_2 di S in M.

$$2\,r_0 = r_1 + r_2;$$

invece $2\sqrt{-K}$ è la differenza dei medesimi raggi (§ 19),

$$2\sqrt{-K} = r_1 - r_2\,.$$

Le congruenze W normali sono dunque quelle nelle quali r_0 e K sono legate da una relazione, cioè quelle per cui risulta

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial r_0}{\partial u} & \dfrac{\partial r_0}{\partial v} \\[2mm] \dfrac{\partial K}{\partial u} & \dfrac{\partial K}{\partial v} \end{vmatrix} = 0$$

ossia, per le (45),

$$b_{221}\frac{\partial K}{\partial u} + b_{112}\frac{\partial K}{\partial v} = 0. \tag{50}$$

(*) Bianchi, l. c., I, § 72.

Dunque: *le* (44) *e* (50) *sono le condizioni necessarie e sufficienti affinchè le* (I) *individuino una congruenza W normale.*

In particolare:

$$b_{112} = 0, \quad b_{221} = 0, \quad H = 0$$

sono le condizioni necessarie e sufficienti affinchè le (I) *individuino una congruenza di normali ad una superficie ad area minima.*

Allora infatti le (44) e (50) sono soddisfatte e per la (46) risulta $2\,r_0 = r_1 + r_2 = c$ (costante); sicchè le (47) definiscono ∞' superficie parallele ortogonali ai raggi, fra cui una superficie ad area minima ($c = 0$).

Così pure: *le* (44) *e* $K =$ *costante negativa sono le condizioni necessarie e sufficienti affinchè le* (I) *individuino una congruenza pseudosferica normale* (§ 20).

I TEOREMI DI MALUS-DUPIN E DI BELTRAMI.

29. Alludiamo ai notissimi e celebri teoremi:

Se una congruenza normale di raggi luminosi subisce un numero qualunque di riflessioni o di rifrazioni, rimane sempre una congruenza normale

Se i raggi di una congruenza normale, uscenti dai punti di una superficie S, si immaginano terminati ad una superficie ortogonale ai raggi, in ogni deformazione per flessione della S, che trascini seco i raggi della congruenza invariabilmente connessi, il luogo dei medesimi estremi sarà sempre una superficie ortogonale ai raggi.

Vogliamo dimostrare che la relazione fondamentale (II) è la vera fonte di essi e permette di enunciare risultati più generali.

Per le (III''), si ha

$$\frac{b_{112}}{\Delta} - \frac{\partial r_0}{\partial u} = -\sum X \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{b_{221}}{\Delta} + \frac{\partial r_0}{\partial v} = -\sum X \frac{\partial x}{\partial v}$$

quindi la (II'') può scriversi

$$\frac{\partial}{\partial u} \sum X \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial v} \sum X \frac{\partial x}{\partial u} = H\,\Delta; \tag{51}$$

si ha inoltre

$$d\,r_0 - \left(\frac{b_{112}}{\Delta}\,d\,u - \frac{b_{221}}{\Delta}\,d\,v\right) = -\,d\,u \sum X \frac{\partial x}{\partial u} \quad d\,v \sum X \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \tag{52}$$

Se

$$d s^2 = E' d u^2 + 2 F' d u d v + G' d v^2$$

è il quadrato dell'elemento lineare della superficie di partenza S della congruenza, i coseni degli angoli α e β che il raggio $g(u, v)$ della congruenza fa con le linee u, v di S nel punto di incidenza $M(u, v)$, saranno espressi da

$$\cos\alpha = \sum X \frac{1}{\sqrt{G'}} \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \cos\beta = \sum X \frac{1}{\sqrt{E'}} \frac{\partial x}{\partial v};$$

quindi le (51) e (52) diventano

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{G'} \cos\alpha\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{E'} \cos\beta\right) = H \Delta, \tag{53}$$

$$-\left(\sqrt{G'} \cos\alpha \, d u + \sqrt{E'} \cos\beta \, d v\right) = d r_0 - \left(\frac{b_{112}}{\Delta} d u - \frac{b_{221}}{\Delta} d v\right).$$

Se immaginiamo che la superficie S, supposta flessibile ed inestendibile, si deformi, trascinando seco i raggi della congruenza rigidamente connessi agli elementi del suo piano tangente, in tali deformazioni non mutano u, v, E', G', α, β; non mutano dunque i primi membri, e quindi i secondi, delle due precedenti eguaglianze.

Dunque: *se i raggi di una congruenza escono dai punti di una superficie S e questa, supposta flessibile ed inestendibile, si deforma trascinando seco i raggi della congruenza rigidamente connessi agli elementi del suo piano tangente, non si altera il prodotto del parametro medio H per la radice quadrata Δ del discriminante della prima forma fondamentale della congruenza, nè si altera il valore dell'espressione*

$$d r_0 \quad \left(\frac{b_{112}}{\Delta} d u - \frac{b_{221}}{\Delta} d v\right). \tag{54}$$

In particolare, se la congruenza è normale per una configurazione di S, $H\Delta$ e (54) hanno il valore 0 (§ 27); al flettersi di S essi conservano il valore 0, ciò che dimostra il teorema di Beltrami.

30. Una congruenza di raggi luminosi si rifletta o si rifranga attraverso ad una superficie S che separi due mezzi. Sui raggi incidenti assumiamo come verso positivo quello che va dal punto M di incidenza al primo mezzo e sui raggi rifratti quello che va da M al secondo mezzo. Se chia-

miamo γ e γ_1 gli angoli acuti che questi sensi positivi fanno con la normale alla superficie S in M ed n l'indice di rifrazione, abbiamo, per la nota legge di Descartes

$$\operatorname{sen}\gamma = n \operatorname{sen}\gamma_1 . \tag{55}$$

n in generale è positivo, ma per la riflessione $n = -1$.

Per la congruenza rifrangente prendiamo come superficie di partenza la superficie dirimente S e su questa assumiamo come linee u quelle inviluppate dalle proiezioni ortogonali dei raggi della congruenza sui piani tangenti di S e a linee v le traiettorie ortogonali. Mantenendo le notazioni del paragrafo precedente, avremo

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \gamma, \quad \beta = \frac{\pi}{2},$$

quindi per la (53)

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{G'} \operatorname{sen}\gamma\right) = H \Delta.$$

Operando analogamente per la congruenza rifratta e dando l'indice 1 alle quantità che ad essa si riferiscono, avremo pure

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{G'} \operatorname{sen}\gamma_1\right) = H_1 \Delta_1 .$$

Dunque per la (55)

$$H \Delta = n H_1 \cdot \Delta_1 . \tag{56}$$

Eseguendo un cambiamento qualsiasi di variabili

$$u_1 = u_1(u, v), \quad v_1 = v_1(u, v),$$

H e H_1 non mutano, per il loro carattere invariantivo, e Δ e Δ_1 si moltiplicano per uno stesso fattore

$$\left| \frac{\partial (u_1, v_1)}{\partial (u, v)} \right|,$$

e però la (56) seguita a sussistere.

Dunque la (56), dimostrata per il particolare sistema di linee u, v scelto su S, *vale qualunque sia il sistema* u, v.

La relazione (56) *può ben ritenersi come una generalizzazione* (*di natura analitica*), *del teorema di Malus-Dupin.* Per essa infatti H e H_1 si annullano insieme, e solo insieme.

Si può anche dedurre dalla (56) un risultato più ristretto, ma che in un certo senso è di natura geometrica.

Osserviamo che il parametro distributore di una rigata, definito al § 2, ha un segno ben determinato, quando sieno fissati i sensi positivi sui raggi della rigata; avranno dunque segni determinati i parametri distributori principali p_1 e p_2 di una congruenza e quindi il suo parametro medio $H = p_1 + p_2$, quando sui raggi della congruenza sieno fissati i sensi positivi.

Se dunque sui raggi delle due congruenze, rifrangente e rifratta, i sensi positivi son quelli dianzi fissati, la (56) mostra che H e H_1 hanno lo stesso segno nel caso della rifrazione e segno opposto nel caso della riflessione. Se cambiamo il senso positivo sui raggi rifratti, possiamo enunciare il seguente risultato:

Se su ciascun raggio di una congruenza di raggi luminosi si assume come senso positivo quello percorso dalla luce (o l'opposto), il segno del parametro medio della congruenza cambia per ogni rifrazione e non cambia per una riflessione.

Da ciò si può dedurre come caso limite il teorema di Malus-Dupin, perchè il parametro medio di una congruenza normale, essendo nullo, comporta due segni.

Congruenze riferite alle superficie sviluppabili.

31. Ora ritorniamo al teorema fondamentale per applicarlo ad alcuni casi particolari interessanti.

In primo luogo prendiamo a linee coordinate (u, v) sulla sfera *le immagini delle sviluppabili della congruenza*, che supporremo quindi costituita di raggi iperbolici, almeno nella regione che consideriamo.

Avremo in tal caso (§ 8)

$$D = 0, \quad D'' = 0.$$

Porremo inoltre

$$\frac{D'}{\Delta} = -\rho;$$

allora, per la prima delle (18), sarà

$$K = -\rho^2$$

il parametro totale della congruenza e, per la (31), sarà 2ρ la distanza dei due fuochi del raggio (u, v).

Naturalmente escludiamo che sia $\rho = 0$, cioè escludiamo le congruenze paraboliche che pure hanno sviluppabili reali.

In tal caso la (II) diventa

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial \rho}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial \rho}{\partial v} + \left[\frac{\partial}{\partial u} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} + F \right] \rho = 0, \tag{57}$$

quindi, pel teorema fondamentale, si ha che:

Ad ogni soluzione ρ *di questa equazione di* Laplace (*del tipo iperbolico*) *corrisponde una congruenza di raggi iperbolici riferita alle sviluppabili* (*e di parametro totale* $-\rho^2$).

Fissata ad arbitrio una funzione r_0 *di* u, v, *le formole*

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= -(\rho + r_0) \frac{\partial X}{\partial u} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial u} + 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \rho \right) X \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= (\rho - r_0) \frac{\partial X}{\partial v} - \left(\frac{\partial \rho}{\partial v} + 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \rho \right) X \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

e le analoghe in y *e* z *danno una superficie di partenza per la congruenza.*

In particolare, per $r_0 = 0$, si ha *la superficie media*

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= -\rho \frac{\partial X}{\partial u} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial u} + 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \rho \right) X \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= \rho \frac{\partial X}{\partial v} - \left(\frac{\partial \rho}{\partial v} + 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \rho \right) X. \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Troviamo così le importanti formole (57) e (59) date dal Guichard per la risoluzione del problema (*).

Per $r_0 = -\rho$ e per $r_0 = \rho$ si annulla l'ascissa (30) di uno dei due fuochi $F_1\,(x_1\, y_1\, z_1)$, $F_2\,(x_2\, y_2\, z_2)$, quindi *per le superficie focali si hanno le formole*

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = 2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \rho \right) X, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial v} = 2\rho \frac{\partial X}{\partial v} - 2\rho \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} X$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial u} = -2\rho \frac{\partial X}{\partial u} + 2\rho \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} X, \qquad \frac{\partial x_2}{\partial v} = -2 \left[\frac{\partial \rho}{\partial v} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \rho \right] X.$$

(*) *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, t. VI, 3.e serie.

Per la seconda delle (18), il *parametro medio della congruenza* è

$$H = -\frac{2F\rho}{\Delta}.$$

Per ulteriori sviluppi e applicazioni rimandiamo al cap. X delle citate *Lezioni* del prof. Bianchi.

Congruenze riferite ad un doppio sistema coniugato.

32. Or supponiamo che le linee sferiche (u, v) sieno *le immagini di un doppio sistema coniugato di una congruenza.* Risulta (§ 9)

$$D' = 0$$

e le (III) e III') diventano

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{D''}{\Delta}+\left\{ {22 \atop 1} \right\}\frac{D}{\Delta}+\left\{ {11 \atop 1} \right\}\frac{D''}{\Delta}\right]+\\ &+\frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\partial}{\partial v}\frac{D}{\Delta}+\left\{ {22 \atop 2} \right\}\frac{D}{\Delta}+\left\{ {11 \atop 2} \right\}\frac{D''}{\Delta}\right]+\frac{ED''+GD}{EG-F^2}=0,\end{aligned}\right\} \qquad (60)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial D''}{\partial u}+\left\{ {22 \atop 1} \right\}D-\left\{ {12 \atop 2} \right\}D''\right]\right\}+\\ &+\frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial D}{\partial v}-\left\{ {12 \atop 1} \right\}D+\left\{ {11 \atop 2} \right\}D''\right]\right\}+\frac{ED''+GD}{EG-F^2}=0.\end{aligned}\right\} \qquad (60')$$

Quindi pel teorema fondamentale.

Preso ad arbitrio un sistema sferico (u, v), esistono infinite congruenze che lo ammettono come immagine sferica di un doppio sistema coniugato di rigate: se ne ottiene una per ogni coppia di funzioni D e D'' di u, v soddisfacenti la (60) *o la* (60′).

Assegnata poi ad arbitrio una funzione r_0 di u, v, le formole

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial u}&=-r_0\frac{\partial X}{\partial u}+\frac{D}{\Delta}\frac{\partial X}{\partial v}+\left[\frac{\partial}{\partial v}\frac{D}{\Delta}+\left\{ {22 \atop 2} \right\}\frac{D}{\Delta}+\left\{ {11 \atop 2} \right\}\frac{D''}{\Delta}-\frac{\partial r_0}{\partial u}\right]X\\ \frac{\partial x}{\partial v}&=\frac{D''}{\Delta}\frac{\partial X}{\partial u}-r_0\frac{\partial X}{\partial v}-\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{D''}{\Delta}+\left\{ {22 \atop 1} \right\}\frac{D}{\Delta}+\left\{ {11 \atop 1} \right\}\frac{D''}{\Delta}+\frac{\partial r_0}{\partial v}\right]X\end{aligned}\right\} \qquad (61)$$

o le equivalenti

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial u}&=-r_0\frac{\partial X}{\partial u}+\frac{D}{\Delta}\frac{\partial X}{\partial v}+\frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial D}{\partial v}-\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}D+\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}D''-\Delta\frac{\partial r_0}{\partial u}\right]X\\ \frac{\partial x}{\partial v}&=\frac{D''}{\Delta}\frac{\partial X}{\partial u}-r_0\frac{\partial X}{\partial v}-\frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial D''}{\partial u}+\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}D-\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}D''+\Delta\frac{\partial r_0}{\partial v}\right]X\end{aligned}\right\}\quad(61')$$

danno con quadrature una superficie di partenza, appena note X, Y, Z in funzione di u, v.

33. Supponiamo in particolare che il sistema sferico (u, v) sia ortogonale, e quindi $F=0$, cioè che le linee sferiche (u, v) sieno *le immagini delle superficie distributrici di una congruenza.*

In tal caso valgono le (14)

$$D=-E\,p_2,\qquad D''=-G\,p_1,$$

sicchè, sostituendo anche ai simboli di Christoffel i valori che assumono per $F=0$ (*)

$$\left.\begin{aligned}&\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}=\frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial u},\quad \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}=-\frac{1}{2G}\frac{\partial E}{\partial v},\quad \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}=\frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial v},\\ &\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}=\frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u},\quad \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}=-\frac{1}{2E}\frac{\partial G}{\partial u},\quad \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}=\frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial v},\end{aligned}\right\}\quad(62)$$

la (60') si riduce facilmente a

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{EG}}\,\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{\sqrt{EG}}\left(G\frac{\partial p_1}{\partial u}+\frac{p_1-p_2}{2}\,\frac{\partial G}{\partial u}\right)\right]+\\ &+\frac{1}{\sqrt{EG}}\,\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{\sqrt{EG}}\left(E\frac{\partial p_2}{\partial v}+\frac{p_2-p_1}{2}\,\frac{\partial E}{\partial v}\right)\right]+(p_1+p_2)=0.\end{aligned}\right\}\quad(63)$$

Ad ogni coppia di funzioni p_1 e p_2 di u, v soddisfacenti a questa equazione corrisponde una congruenza riferita alle superficie distributrici; p_1 e p_2 ne sono i parametri distributori principali.

Inoltre, presa ad arbitrio una funzione r_0 di u, v e note X, Y, Z in fun-

(*) Bianchi, l. c., I, § 43.

zione di u, v, le formole

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial u}&=-r_0\frac{\partial X}{\partial u}+p_2\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial X}{\partial v}-\left[\frac{\partial r_0}{\partial u}+\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial p_2}{\partial v}+\frac{p_2-p_1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right]X,\\ \frac{\partial x}{\partial v}&=-p_1\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial X}{\partial u}+r_0\frac{\partial X}{\partial v}-\left[\frac{\partial r_0}{\partial v}-\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial p_1}{\partial u}-\frac{p_1-p_2}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right]X\end{aligned}\right\}\tag{64}$$

dànno una superficie di partenza, mediante quadrature.

In particolare, per $r_0=0$ dànno la superficie media, luogo delle linee di stringimento sia delle rigate u che delle rigate v (§ 14).

34. Abbiamo osservato al § 24 che le formole di Guichard non sono applicabili alle congruenze paraboliche. A quelle formole si sostituiscono nel modo più naturale le formole precedenti, perchè in tali congruenze i due sistemi di sviluppabili coincidono con uno dei due sistemi di superficie distributrici (§ 17).

Sieno le v le linee sferiche immagini di tali superficie; il parametro distributore corrispondente p_2 sarà nullo e la (63) si ridurrà ad un'equazione differenziale del secondo ordine in p_1:

$$G\frac{\partial^2 p_1}{\partial u^2}+\sqrt{E}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G}{E}\right)\frac{\partial p_1}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial p_1}{\partial v}+$$
$$+\sqrt{EG}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)+\sqrt{EG}\right]p_1=0.$$

Ad ogni soluzione p_1 di questa equazione, del tipo parabolico, corrisponde una congruenza parabolica riferita alle superficie distributrici, ossia alle sviluppabili ed alle rigate ortogonali; p_1 ne è il parametro distributore principale non nullo.

Le (61), per $p_2=0$, $r_0=0$, dànno *la superficie media-focale della congruenza:*

$$\frac{\partial x_0}{\partial u}=\frac{p_1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}X,\quad \frac{\partial x_0}{\partial v}=-p_1\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial X}{\partial u}+\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial(p_1\sqrt{G})}{\partial u}X.$$

Saranno quindi

$$E_0=\sum\left(\frac{\partial x_0}{\partial u}\right)^2,\quad F_0=\sum\frac{\partial x_0}{\partial u}\frac{\partial x_0}{\partial v},\quad G=\sum\left(\frac{\partial x_0}{\partial v}\right)^2$$

ossia

$$E_0 = \frac{p_1^2}{G}\left(\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right)^2, \quad F_0 = \frac{p_1}{\sqrt{EG}} \cdot \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \cdot \frac{\partial (p_1 \sqrt{G})}{\partial u}, \quad G_0 = p_1^2 G + \frac{1}{E}\left[\frac{\partial (p_1 \sqrt{G})}{\partial u}\right]^2$$

i coefficienti del quadrato del suo elemento lineare, col discriminante

$$E_0 G_0 - F_0^2 = p_1^4 \left(\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right)^2.$$

I coseni direttori della normale alla superficie nel punto $(x_0\, y_0\, z_0)$ saranno

$$X_0 = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial X}{\partial v}, \quad Y_0 = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial Y}{\partial v}, \quad Z_0 = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial Z}{\partial v},$$

perchè il piano tangente ivi, essendo l'unico piano focale ed uno dei piani distributori, è normale alla tangente alla linea sferica u.

Derivando queste formole e tenendo presenti le (36) ed i valori (62) dei simboli di Christoffel, si trova

$$\frac{\partial X_0}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{EG}} \cdot \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial v} \cdot \frac{\partial X}{\partial u}, \quad \frac{\partial X_0}{\partial v} = -\frac{1}{E} \cdot \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial u} - X \sqrt{G},$$

con le analoghe in Y_0 e Z_0.

Quindi per i coefficienti

$$D_0 = -\sum \frac{\partial x_0}{\partial u} \frac{\partial X_0}{\partial u}, \quad D'_0 = -\sum \frac{\partial x_0}{\partial u} \frac{\partial X_0}{\partial v}, \quad D''_0 = -\sum \frac{\partial x_0}{\partial v} \cdot \frac{\partial X_0}{\partial v}$$

della seconda forma fondamentale della superficie risultano i valori

$$D_0 = 0, \quad D'_0 = p_1 \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}, \quad D''_0 = \sqrt{\frac{G}{E}} \cdot \frac{\partial (p_1 \sqrt{G})}{\partial u} - \frac{1}{2} p_1 \frac{\partial G}{\partial u}.$$

Essendo $D_0 = 0$, resta confermato per via analitica che le linee v della superficie media sono le asintotiche di un sistema (§ 17).

Inoltre per la curvatura totale della superficie

$$K_0 = \frac{D_0 D''_0 - D'^2_0}{E_0 G_0 - F_0^2}$$

troviamo

$$K_0 = -\frac{1}{p_1^2} = -\frac{1}{4l^2},$$

come risulta dalla (28).

Dunque: *in una congruenza parabolica la distanza fra i punti limiti di un raggio è eguale all'inversa della radice quadrata del modulo della curvatura totale della superficie media nel punto medio.*

35. Alle soluzioni della (63) tali che $p_1 = p_2$ corrispondono congruenze isotrope.

Se invece $p_2 = -p_1$, la congruenza è normale. Una superficie ortogonale ai raggi si deduce dalle (64) ponendovi per r_0 una funzione che annulli i coefficienti di X,

$$\frac{\partial r_0}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial (p_1 E)}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial r_0}{\partial v} - \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial (p_1 G)}{\partial u} = 0,$$

cioè si deduce dalle formole

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -r_0 \frac{\partial X}{\partial u} - p_1 \sqrt{\frac{E}{G}} \frac{\partial X}{\partial v}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -p_1 \sqrt{\frac{G}{E}} \cdot \frac{\partial X}{\partial u} + r_0 \frac{\partial X}{\partial v}.$$

$r_0 + p_1$ e $r_0 - p_1$ sono i raggi principali di curvatura della superficie.

Congruenze riferite ad un sistema isotermo-coniugato.

36. Per una congruenza di raggi ellittici possiamo ottenere formole analoghe a quelle di Guichard, riferendola ad un doppio sistema isotermo-coniugato.

Nell'ipotesi che le linee sferiche (u, v) sieno *l'immagine di un doppio sistema isotermo-coniugato della congruenza,* risulta (§ 12)

$$D = D'', \qquad D' = 0.$$

Allora l'equazione differenziale delle sviluppabili (19) diventa

$$du^2 + dv^2 = 0,$$

sicchè le sviluppabili sono le

$$u + i\,v = \text{cost.}, \qquad u - i\,v = \text{cost.}$$

Possiamo dunque effettuare il passaggio analitico dalle formole di GUICHARD a quelle che ci proponiamo di ottenere, eseguendo il cambiamento di variabili

$$u + i\,v = u', \qquad u - i\,v = v'.$$

Ma possiamo procedere per via diretta ed evitare l'immaginario, applicando le formole generali del § 32.

Se poniamo

$$\frac{D}{\Delta} = \frac{D''}{\Delta} = \rho,$$

risulta

$$K = \frac{D\,D''}{\Delta^2} = \rho^2$$

e la (60) diventa

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial v^2} + \left[\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}\right]\frac{\partial \rho}{\partial u} + \left[\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}\right]\frac{\partial \rho}{\partial v} + \\ &+ \left\{\frac{\partial}{\partial u}\left[\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}\right] + E + G\right\}\rho = 0. \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Ad ogni soluzione ρ di questa equazione, del tipo ellittico, corrisponde una congruenza di raggi ellittici, di parametro totale ρ^2, riferita ad un doppio sistema isotermo-coniugato.

Le formole (61) poi diventano

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= -r_0 \frac{\partial X}{\partial u} + \rho \frac{\partial X}{\partial v} + \left[\frac{\partial \rho}{\partial v} - \frac{\partial r_0}{\partial u} + \rho \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} + \rho \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix}\right] X \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= \rho \frac{\partial X}{\partial u} - r_0 \frac{\partial X}{\partial v} - \left[\frac{\partial \rho}{\partial u} + \frac{\partial r_0}{\partial v} + \rho \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} + \rho \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}\right] X \end{aligned}$$

e danno una superficie di partenza per ogni arbitraria funzione r_0 di u, v.

In particolare, per $r_0 = 0$ danno la superficie media della congruenza.

Son queste le formole analoghe a quelle del GUICHARD (§ 31).

Congruenze riferite alle superficie principali.

37. Supponiamo che un doppio sistema ortogonale di linee sferiche u, v sia l'*immagine del doppio sistema di superficie principali di una congruenza.*

Allora risulta (§ 11).

$$F = 0, \quad \frac{D}{E} = \frac{D''}{G},$$

quindi, per la seconda delle (18),

$$D = -\frac{1}{2} H E, \qquad D'' = -\frac{1}{2} H G. \tag{66}$$

Si ponga inoltre

$$\frac{D'}{\sqrt{EG}} = -l; \tag{67}$$

allora, per la prima delle (18), si ha

$$K = \frac{H^2}{4} - l^2, \tag{68}$$

quindi, per la (28), $|2l|$ è la distanza dei punti limiti.

Per le (66) e (67) e per i valori (62) dei simboli di Christoffel, la (II) diventa

$$2\frac{\partial^2 l}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \log E}{\partial v}\frac{\partial l}{\partial u} + \frac{\partial \log G}{\partial u}\frac{\partial l}{\partial v} + \frac{\partial^2 \log (EG)}{\partial u \partial v} l = \frac{\sqrt{EG}}{2}(\Delta_2 H + 2H) \tag{69}$$

ove

$$\Delta_2 H = \frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{G}{E}} \cdot \frac{\partial H}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial H}{\partial v}\right)\right]$$

è il parametro differenziale secondo di H rispetto alla prima forma fondamentale assegnata. Dunque, pel teorema fondamentale:

Ad ogni coppia di funzioni H ed l di u, v soddisfacenti a questa equazione alle derivate parziali seconde corrisponde una congruenza riferita alle *superfice principali; H ne è il parametro medio, $2\,l$ la distanza fra i punti limiti, e K, definito dalla* (68), *il parametro totale.*

Secondo che $H^2 > < = 4\,l^2$, il raggio $(u,\ v)$ sarà ellittico, iperbolico o parabolico.

Per le (III'), *ad ogni arbitraria funzione r_0 di u, v corrisponde una superficie di partenza per la congruenza, definita dalle formole:*

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= -(l+r_0)\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{1}{2}H\sqrt{\frac{E}{G}}\cdot\frac{\partial X}{\partial v} + \left[\frac{1}{G}\frac{\partial (l\,G)}{\partial u} - \frac{\partial r_0}{\partial u} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial H}{\partial v}\right]X \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= \frac{1}{2}H\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial X}{\partial u} + (l-r_0)\frac{\partial X}{\partial v} - \left[\frac{1}{E}\frac{\partial (l\,E)}{\partial v} + \frac{\partial r_0}{\partial v} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial H}{\partial u}\right]X. \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

Per $r_0 = 0$ si ha la superficie media, per $r_0 = \pm\, l$ si hanno le superficie limiti.

38. Applichiamo queste formole alle congruenze nelle quali sono costanti i parametri distributori principali p_1 e p_2, ossia nelle quali sono costanti H e K (ed l).

In tale caso le (70) danno per la superficie media

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= -\,l\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{1}{2}H\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{l}{G}\frac{\partial G}{\partial u}\,X \\ \frac{\partial x}{d\, v} &= \frac{1}{2}H\sqrt{\frac{G}{E}}\cdot\frac{\partial X}{\partial u} + l\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{l}{E}\frac{\partial E}{\partial v}X \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

e, posto

$$\frac{H}{2\,l} = A, \tag{72}$$

la (69) diventa

$$\frac{\partial^2 \log\sqrt{EG}}{\partial u\,\partial v} = A\sqrt{EG}. \tag{73}$$

Dunque: *l'elemento lineare sferico riferito alle immagini $(u,\ v)$ delle superficie principali di una congruenza coi parametri totale e medio costanti, assume la forma*

$$d\,s'^2 = E\,d\,u^2 + G\,d\,v^2, \tag{74}$$

ove $\sqrt{EG}$ è una soluzione dell'equazione (73) *di* Liouville.

Viceversa: *quando l'elemento lineare sferico è ridotto alla forma* (74) *ed è soddisfatta la* (73), *con A costante, esistono infinite congruenze coi para-*

metri totale e medio costanti che ammettono le linee sferiche u, v come immagini delle superficie principali.

Secondo che la costante A è maggiore, minore o eguale ad 1, in valore assoluto, esse saranno costituite da raggi ellittici, iperbolici (congruenze pseudosferiche), o parabolici.

Se ne ottiene una per ogni arbitraria scelta di due costanti H e $2l$ di rapporto A. Le (71) definiscono la corrispondente superficie media.

Se $A = 0$, si hanno congruenze normali.

Torino, 10 maggio 1908.

Antinomie logiche?

(*Di* Beppo Levi, *a Cagliari.*)

Possono le leggi logiche condurre a contraddizioni? Non è agevole l'ammetterlo, ma è pure impossibile il *dimostrarne* l'impossibilità, perchè una tal *dimostrazione* dovrebbe poggiare sulle regole della logica, ed ammetterebbe quindi ch'esse siano compatibili: se con una certa combinazione di queste regole si potesse concludere per l'impossibilità della contraddizione, non rimarrebbe esclusa la possibilità che con un'altra combinazione si potesse in avvenire incontrare la contraddizione, perchè non si avrebbe in ciò che una nuova contraddizione, e la conclusione finale sarebbe per la incompatibilità dei postulati della logica.

Cionondimeno io credo che dalla contraddizione ci salvino i procedimenti psicologici con cui le leggi logiche vanno continuamente formandosi e completandosi per progressivo perfezionamento dei concetti intorno al nucleo dei concetti acquisiti.

* * *

Io vorrei, nelle pagine seguenti, mostrare come possano risolversi le principali antinomie logiche (o antinomie della teoria degli aggregati) che sono state discusse negli ultimi anni.

Troppo spesso, a parer mio, si è cercato la spiegazione delle antinomie nella sostanza delle cose significate dalle parole che in esse ricorrevano — numero, aggregato, classe, ecc., — senza tener conto che, se contraddizione v'era, essa era nei termini verbali in cui il raziocinio si esprimeva, ed indipendentemente dal significato assoluto di questi termini. Quando giudichiamo di un'offesa alla logica, non ci preoccupiamo del significato delle parole mediante cui si esprime la contraddizione: noi constatiamo soltanto che si viene simultaneamente ad affermare e a negare un certo fatto, qualunque esso sia. Queste osservazioni informeranno l'analisi che segue.

Debbo avvertire fin d'ora che se, per raggiungere una espressione esatta e concisa, ho fatto uso qua e là dei simboli della logica matematica, il lettore potrà però in generale cogliere interamente il concetto dalla lettura soltanto del testo, sorvolando sopra tali formole. Per le formole più importanti ho posto nel testo o in nota una traduzione verbale.

§ 1.

1. È oramai affermazione triviale l'impossibilità di *definire* ogni cosa. Distinguiamo dunque gli oggetti del nostro discorso in *idee primitive* e *idee derivate* o *definite mediante quelle*. Ogni idea si rappresenta nel discorso mediante un *simbolo*. Un simbolo rappresenta un'idea primitiva sempre e solo quando è indeterminato il significato che gli compete (*): rappresenta un'idea derivata quando il suo significato risulta individuato tosto che siano fissati i significati delle idee assunte come primitive. Nella scelta dei simboli da considerarsi come idee primitive v'ha una notevole arbitrarietà.

Le idee primitive possono essere obbligate a soddisfare a talune mutue dipendenze: queste dipendenze sono espresse dai postulati.

Ora è da notare che la nostra definizione di «idee primitive» è più ampia di quella che ordinariamente si accetta nella logica simbolica. La logica simbolica chiama infatti idee primitive quei soli simboli il cui significato è legato a soddisfare date proposizioni condizionali (postulati): ma non importa per essa di porre in evidenza quelle idee che, pur non essendo definite, non sono condizionate dai postulati e restano quindi di significato arbitrario; il quale si può spesso identificare col simbolo medesimo.

(*) Non è forse fuor di luogo una lieve insistenza sopra questa indeterminazione del significato delle idee primitive. L'HESSENBERG, p. es. (*Ueber die kritische Mathematik*, Sitzber. d. Berliner math., Gesell., 1904, pag. 22), osserva che gli assiomi della matematica non contengono tutti i contrassegni essenziali delle idee primitive che vi compaiono. È da notare che è ben vero che un sistema dato di postulati può dare di una idea primitiva una determinazione, in rapporto ad altre idee, minore di quella che effettivamente si attribuisce a quel nome nel discorso comune: ma la vera e completa determinazione di una idea primitiva non è possibile, comunque complesso sia il sistema dei *contrassegni* che per essa si vogliano enunciare; noi non potremo mai identificare le idee, ma potremo solo affermare che fra esse sussistono certe relazioni.

Per chiarire la distinzione si consideri per es. la definizione di « funzione » quale si trova nel *Formulario mathematico* del prof. PEANO (*).

Il prof. PEANO distingue le funzioni in « prae-functio » e « post-functio » secondochè il segno funzionale precede o segue la variabile: le indica rispettivamente con f e ɟ e pone le definizioni:

$$a,\ b \,\varepsilon\, \mathrm{Cls} \,.\supset\therefore\, u \,\varepsilon\, a \,\text{ɟ}\, b \,.=:\, x \,\varepsilon\, a \,.\supset_x.\, x\,u \,\varepsilon\, b$$

$$\text{————} \,.\supset\therefore\, u \,\varepsilon\, a \,\mathsf{f}\, b \,.=:\, \text{————} \quad u\,x \,\varepsilon\, b.$$

Ma in queste definizioni i segni $x\,u$ e $u\,x$ che cosa significano? O si vuol leggere in essi il semplice aggruppamento grafico, si vuole intendere che « sono elementi di b gli elementi di a dopo che vi si è applicato u come suffisso o come prefisso », ovvero si vuole intendere che in b esistono elementi da simboleggiarsi con $u\,x$ o con $x\,u$, ma non identici coi simboli medesimi. La prima interpretazione, se basta ai fini della logica simbolica in quanto basta ad esprimere le proprietà generali della relazione funzionale, non corrisponde certo alla vera nozione di funzione. Basti osservare che in questa nulla ha di essenziale il segno funzionale, il quale può bene indifferentemente scriversi innanzi o dietro alla variabile o — come più spesso avviene — comporsi di più parti che si frammischiano, nella scrittura, alle parti onde si compone il simbolo rappresentativo della variabile: per cui, dove le necessità della scrittura simbolica hanno condotto a vedere cose diverse, vede una cosa sola il nostro concetto della funzione. — Ma nella seconda interpretazione, l'idea generale di quella corrispondenza fra i simboli $x\,u$, $u\,x$ e gli individui di b (quindi l'idea u medesima) è realmente primitiva. Per esprimere le teorie particolari la logica simbolica si trova appunto condotta a riconoscere la primitività o a sviluppare la definizione di talune relazioni funzionali. Così il PEANO medesimo assume $+$ come idea primitiva, e pone $+ \,\varepsilon\, N_0 \,\mathsf{f}\, N_0$ (**).

Un esempio di diversa natura è fornito dagli enti che si definiscono per astrazione: il PADOA ha osservato (***) che la definizione per astrazione non soddisfa alle esigenze della logica formale ed ha rilevato come a queste esigenze si viene a soddisfare quando, invece di considerare l'idea astratta, si voglia considerare la classe degli enti cui l'idea astratta appartiene; si consideri cioè in luogo della « direzione » la « stella di rette parallele », in luogo

(*) *Formulario mathematico*, edito per G. PEANO. Editio V, 1905, pag. 73.

(**) L. c., pag. 74 e 27.

(***) Congresso filosofico di Parma, settembre 1907.

della «frazione» l'«aggregato delle coppie di numeri equimultiple d'una stessa» e così via. È forse più conforme alla concezione comune il considerare l'idea astratta come primitiva, attribuendole la proprietà di appartenere in ugual modo a tutti gli enti di quella classe. Ed invero il significato dell'idea astratta resta indeterminato: per *direzione* si può intendere ugualmente la stella di rette parallele, come una terna di rapporti direttivi, ecc.; il scegliere una di queste imagini è una limitazione al concetto, senza influenza sulla esposizione logica della teoria, ma pur sempre arbitraria.

Condizione necessaria per la validità di un ragionamento è che il significato delle idee primitive sia mantenuto fisso, mentre è d'altronde indifferente — ed impossibile a constatarsi — che esso sia lo stesso ogni volta che quel ragionamento si ripete. Un ragionamento è logicamente corretto solo quando esso sia applicabile a tutte le interpretazioni di cui sono capaci le idee primitive, compatibilmente colle condizioni imposte dai postulati.

2. Si disse or ora che nella scelta delle idee da considerarsi come primitive v'ha una notevole arbitrarietà. Non pare però che la logica possa fare a meno di assumere come primitive le idee di «classe» e di alcune relazioni fra classi: $\supset$ («è contenuto»), $\frown$ («e», «classe comune a»), $\smile$... Correlativa all'idea di «classe» è l'idea di «individuo»; ma mentre la logica simbolica è costretta a considerare esplicitamente l'idea di «classe» (secondo il *Formulario mathematico* «Cls»), non le occorre di usare un simbolo per l'idea «individuo». Questa idea infatti compare nel *Formulario* soltanto nelle prime linee: «a, b, ..., x, y, z indica objecto arbitrario»: in seguito essa compare solo implicitamente nella relazione ε («è un») la quale esprime l'appartenenza di un individuo (soggetto) ad una classe (predicato).

3. Tutti gli individui appartengono ad una classe, il «tutto». Negli ultimi tempi, come espediente per sfuggire alle antinomie, si è cercato da vari autori di negare al «tutto» il titolo di «classe». Non si può rifiutare a nessuno il diritto di tale esclusione, perchè «classe» è idea primitiva, e si possono quindi enunciare per essa quei postulati che si vogliano, purchè non contradittori. Però mi pare che ragion sufficiente per attribuire il nome di classe al «tutto» sia il fatto che esso è la *negazione del «nulla»*: la considerazione della classe «nulla» è generalmente accolta, ed è accolto che la negazione d'una classe sia una classe (*). Chi vuol negare al «tutto» il titolo di

(*) Basta esaminare il *Formulario mathematico* del Peano per riconoscere come il «nulla» vi compia una funzione essenziale. Il Schoenflies nega il valore logico così al «tutto» come

« classe » è costretto a sostituire all'operazione logica consistente nella « negazione d'una classe » la considerazione della « classe complementare di quella rispetto ad una classe data »; e quando debba considerare quella idea che io preferisco chiamare « classe » (comprendendovi il « tutto ») dovrà dire « classe o il tutto ».

4. Fra le idee primitive delle teorie matematiche v' ha, in generale, qualche idea di classe: così nell'aritmetica si assume, in generale, come idea primitiva quella di « numero intero », nella geometria quella di « punto » ecc. E qui *numero intero* e *punto* stanno a significare: *la classe dei numeri interi, la classe dei punti*, perchè quel che si considera è il numero o il punto *qualunque* della classe, non *un* determinato numero o *un* determinato punto.

Quando una classe non è idea primitiva, può essere definita sia mediante una legge di formazione dei suoi elementi, i quali per tal modo, individualmente o a gruppi si possono generare e riconoscere l'un dopo l'altro; ovvero, nel caso più comune, mediante l'enunciato di una proprietà dei suoi elementi, la quale permette, dato un ente, di riconoscere se esso appartenga o non alla classe, ma non consente una generazione successiva degli elementi della classe. Diremo, nel primo caso, che la classe ha definizione generativa: maggiori particolari su questo modo di definizione si diranno in seguito.

5. Ogni proposizione di una teoria si esprime, necessariamente, mediante le idee primitive di quella teoria; e se il campo di queste idee non è limitato a priori, sono idee primitive di una teoria tutte quelle che compaiono nelle proposizioni — in particolare, nelle definizioni — di essa. Qual valore avranno quindi le espressioni « aggregato ben definito » o « non ben definito » cui si è voluto ricorrere recentemente per giustificare le antinomie logiche?

Il Cantor, cui si deve l'espressione, risponde (*) « Dico che un aggregato di elementi appartenenti a una sfera astratta qualunque è *ben definito* quando, mediante il principio logico del terzo escluso si può considerarlo determinato in modo che:

1.° un oggetto qualunque di quella sfera astratta essendo scelto, si

---

al « nulla » (*Ueber die logischen Paradoxien der Mengenlehre.* Jahresber. d. d. math., Vereinigung, 15, 1906, pag. 23), ma la ragione ch'egli adduce che sul « nulla » e sul « tutto » non si possono effettuare operazioni logiche non pare soddisfacente: il Schoenflies è indotto a ciò dal desiderio di trovare una qualche via d'uscita dalle antinomie della teoria degli aggregati.

(*) *Sur les ensembles infinis et linéaires de points.* Acta Mathematica, vol. 1, pag. 361.

possa riguardare come intrinsecamente determinato se esso appartiene o non all'aggregato; e che

2.° due oggetti appartenenti all'aggregato essendo dati, si possa riguardare come intrinsecamente determinato se essi sono uguali o non...».

Intervengono a complicare questa definizione due espressioni di cui non è chiaro il significato: « sfera astratta » ed « intrinsecamente determinato »; è chiaro che il CANTOR aveva dinnanzi alla mente un caso particolare, quello degli aggregati di numeri; la « sfera astratta » era per lui la classe dei numeri, il continuo; e quando egli diceva « intrinsecamente determinato » aveva innanzi alla mente che noi possiamo immaginare teoricamente risolta la questione se un numero soddisfa ad una data condizione e se due numeri sono eguali o non, con convenienti trasformazioni delle loro definizioni, senza che spesso si possa assegnare un numero limitato di operazioni mediante le quali si raggiunga lo scopo. La nozione cui il CANTOR si riferisce dunque, piuttosto che una nozione assoluta di « aggregato ben definito », è quella di « *aggregato definito mediante determinate idee primitive* » (nel caso speciale, mediante le idee dell'aritmetica); e non v'ha caso di parlare di aggregato bene o non ben definito; un aggregato è definito mediante determinate idee primitive quando la definizione di esso è costituita da un gruppo di segni logici e di segni rappresentanti le idee primitive ammesse (*).

Ma se il campo delle idee primitive non è determinato a priori, non v'ha luogo a parlare di aggregato bene o non ben definito; eventualmente potrà essere idea primitiva esso stesso; in ogni caso esso partecipa della indeterminazione delle idee primitive che entrano nella sua definizione; ma tale indeterminazione sarà senza conseguenze logiche, perchè non potremo affermare dell'aggregato altro che quello che permetteranno i postulati, indipendentemente dalla interpretazione che siano per avere le idee primitive. Al più si potrà distinguere aggregati dipendenti da un numero limitato o da una infinità di idee primitive; e nel caso d'infinite si potranno classificare a seconda del tipo (numerabilità o meno, ordinabilità, ecc.) dell'aggregato delle idee primitive medesime. Siamo troppo avvezzi ormai a trattare gli infiniti

(*) Il sig. ZERMELO (*Untersuchungen ü. die Grundlagen der Mengenlehre*, I, Math. Ann., 65, n. 4, pag. 263) accetta questa definizione del « definito » e più sotto (n. 6) parla più esplicitamente di « definito rispetto ad un determinato aggregato ». Ma pare ch'egli dimentichi che questa restrizione è, di sua natura, provvisoria; e che, allargando convenientemente l'aggregato rispetto al quale si definisce, ogni proposizione definirà un aggregato.

per poter escludere a priori che anche di questi ultimi aggregati si possa parlare con qualche frutto: ma al più in questa classificazione si potrà trovare la base di una limitazione provvisoria nella teoria degli aggregati; non mai in una vaga distinzione di bene e non ben definito.

§ 2. L'ANTINOMIA DEL RICHARD.

6. Premesse queste generalità veniamo a trattare successivamente delle varie antinomie maggiormente discusse e incominciamo da quella del RICHARD.

Il paradosso del RICHARD può enunciarsi come segue: (*).

« Consideriamo l'insieme di tutti i numeri compresi fra 0 e 1 e che possono definirsi con un numero finito di parole; essi formano un aggregato E numerabile e quindi ordinabile. Supponiamo che ciascuno di questi numeri sia espresso in decimali e consideriamo il numero N che ha 0 come parte intera e di cui l'n^{ma} cifra si ottiene dall'n^{ma} cifra decimale dell'n^{mo} numero di E mediante la sostituzione

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il numero N non potrà essere nessuno dei numeri che si erano supposti in E, e ciononondimeno è definito mediante un numero finito di parole, e deve perciò appartenere ad E ».

7. Perchè la parola *definito* abbia senso occorre che si sappia precisamente quali sono le idee primitive che si suppongono: mediante combinazioni di queste dovranno supporsi sostituibili tutte le altre parole. Ora evidentemente il RICHARD suppone che le idee primitive da cui dipende la sua costruzione siano anzitutto le idee primitive del linguaggio comune — che qui è impossibile enumerare — e le idee primitive dell'aritmetica. Ma forse non fu abbastanza osservato che l'affermazione che « il numero N appartiene ad E, per il fatto solo che si esprime con un numero finito di parole » impone che *l'aggregato E debba considerarsi come idea primitiva.* Se infatti

(*) Cfr. RICHARD, *Lettre à MM. les directeurs de la revue générale des sciences.* Revue gén. d. sc., 1905, Acta Mathematica, vol. 30 pagg. 295-296.

l'idea E deve considerarsi come *idea definita,* essa non può aver parte nel secondo membro della proposizione definiente E medesimo:

$E =$ aggregato dei numeri compresi fra 0 e 1, ciascun dei quali si definisce (con un numero finito di parole) mediante le idee primitive del linguaggio comune, quelle dell'aritmetica,...

Nella definizione di nessun individuo di E dovrebbe quindi intervenire l'idea E, mentre da essa dipende la definizione di N.

Il paradosso del RICHARD *non si incontra se l'aggregato E si vuol considerare come idea definita e non come idea primitiva.*

8. Consideriamo dunque E come idea primitiva. Come si prova ora che E è numerabile? Come se ne determina **una** numerazione? Si deve qui notare che la definizione di N non dipende solo da E, ma ancora da una numerazione di E che si suppone fissata.

Per giustificare questo punto del ragionamento del RICHARD si dice generalmente (*): Poichè per ipotesi i numeri dell'aggregato E si esprimono con un numero finito di parole, a ciascuno di essi corrisponderà una o più frasi che lo rappresentano. Sia allora F l'aggregato di tutte le frasi; esso è numerabile e può essere numerato in modo determinato, p. es., così: Si dispongano in un ordine determinato le lettere dell'alfabeto, i segni d'interpunzione (uno di questi che non si scrive, ma qui non può essere trascurato, è lo *spazio* che separa le parole) ed eventualmente gli altri segni che si ammettono nelle nostre frasi (cifre, segni aritmetici, segni rappresentanti idee primitive che non si vogliono rappresentare con parole, per es., E). Noi ammettiamo che questi segni siano in numero finito; sia B questo numero: consideriamoli, nell'ordine assegnato ad essi, come le B cifre di un sistema di numerazione di base B; ogni frase rappresenta allora, in questo sistema di numerazione, un numero intero, e ad ogni numero intero corrisponderà una frase ben determinata (significativa o non).

Per numerare l'aggregato E basterà ora scegliere fra le frasi di F tutte quelle che rappresentano elementi di E; quindi sopprimere tutte quelle frasi che rappresentano numeri già rappresentati da una frase precedente nell'ordine assegnato: le frasi residue rappresenteranno tutti gli individui di E e ciascuno una volta sola. Attribuendo ad esse i successivi numeri naturali nell'ordine della loro numerazione come elementi di F, risulta determinata una numerazione di E.

(*) Cfr. RICHARD, l. c.; PEANO, *Revista de Mathematica,* t. 8, 1906, pag. 149 e seg.

Affinchè la precedente descrizione costituisca realmente una *definizione* di un ordinamento di E occorre però ancora una volta che essa sia indipendente da una precedente conoscenza di questo ordinamento, occorre quindi che non sia necessario conoscere tale ordinamento per giudicare se una frase rappresenti o non rappresenti un numero, per distinguere questo numero da ogni altro, per giudicare se due frasi differenti rappresentano lo stesso numero. Occorre dunque che l'ordinamento di E che si considera non abbia alcuna parte nella definizione dei numeri di E. *Se si fa questa ipotesi il numero N del* RICHARD *non può essere individuo di E. Il numero N può divenire individuo di E solo se si ammette che fra le idee primitive mediante le quali, con un numero finito di segni, possono esprimersi i singoli numeri di E vi sia pure una idea primitiva R, ordinamento dell'aggregato E.*

9. Se i postulati che si ammettono legare le idee primitive E, R (*) e le idee primitive dell'aritmetica e del linguaggio comune sono compatibili, il numero N esiste ed appartiene ad E; ma ciò è assurdo, dunque *quei postulati non sono compatibili.* La conclusione non può troppo stupire se si ricorda che in altri campi della matematica già si è posto il quesito della compatibilità o meno dei postulati, e pei postulati medesimi della logica fu posto dallo HILBERT.

Ciononondimeno noi ci chiediamo: dove esiste la contraddizione? Perchè nulla vieta, a quanto pare, di concepire l'aggregato E, e quanto all'esistenza dell'ordinamento R pare che essa sia stata dimostrata nel n. 8. — Ma questa dimostrazione è illusoria: perchè il procedimento indicato al n. 8 non definisce un ordinamento se prima non si è deciso se determinate frasi rappresentano o non rappresentano numeri, e quindi se non si sa se le idee E ed R sono compatibili. D'altronde, quand'anche, senza prima decidere circa questa compatibilità, quel ragionamento potesse definire *una* numerazione di E, nel supposto che E esista, noi non saremmo in nessun modo autorizzati a far coincidere tale numerazione con quella indicata con R, per indurne la reale esistenza di R e quindi di E. La numerazione R è idea primitiva, quindi non identificabile con una numerazione descritta, ma da considerarsi come idea determinata (**) e invariabile per tutta la durata dei nostri ragio-

(*) I postulati che limitano le idee primitive E, R si possono enunciare: 1.° E è un aggregato di numeri compresi fra 0 e 1; 2.° R è un ordinamento dei numeri di E; 3.° Tutti e soli i numeri di E possono esprimersi con un numero finito di segni, fra cui E ed R.

(**) Idea determinata significa solo che il valore del simbolo, pur non essendo espresso nè esprimibile, deve restare invariato in virtù del principio di contraddizione e non può namenti. L'identificarla ad un certo punto del ragionamento con un'altra numerazione che con essa non risulti identica a priori sarebbe mutarla.

10. Possiamo illuminare ancora questa impossibilità di far coincidere la numerazione R postulata come idea primitiva con quella definita al n. 8, mediante un esempio che non ricorre a processi infiniti come avviene per quello del RICHARD.

Si chiami B, come pocanzi, il numero dei segni che servono a comporre le nostre frasi: fra questi segni supporremo compreso, per comodità, il segno $\wedge$ (elevato a). Si vede facilmente che $B > 40$: lo supporremo scritto in cifre nel sistema decimale, e chiameremo β il numero di queste cifre (presumibilmente $\beta = 2$). Si consideri allora la proposizione

«Il numero di posto $B \wedge B$ in R»;

essa consta di $25 + 2\beta$ segni; il suo posto nell'ordinamento di F è quindi $< B^{25+2\beta} < B \wedge B$; se dunque i numeri di E si numerano come si disse nel n. 8, il numero considerato dovrà avere posto $< B \wedge B$. *Quella numerazione non può dunque essere R.*

È chiaro che simili contraddizioni si possono costruire per molte altre definizioni di numerazioni che si vogliano immaginar sostituite a quella del n. 8. La contraddizione del RICHARD si presenta comunque R si voglia immaginar determinato.

11. Le osservazioni precedenti hanno mostrato che solo ad un errore si deve l'opinione che l'esistenza di E e della sua numerazione R sia dimostrata: determinare con maggior precisione ove stia la contraddizione non è possibile perchè quando un sistema di postulati è contradittorio, la contraddizione sta nel loro insieme, non precisamente in alcuno di essi.

12. Farò ancora un'osservazione sulla spiegazione proposta dal PEANO.

Il prof. PEANO ritiene di poter *definire* le nozioni E ed R: si tratta in sostanza di definire indipendentemente da E e da R l'elemento di posto n in R. E è allora definito come l'aggregato di questi elementi. Ma il PEANO medesimo osserva che nella sua definizione la parte:

«Valore n = numero decimale che è definito dal numero n scritto in sistema alfabetico, interpretato secondo le regole della lingua comune» (1)

---

quindi farsi coincidere col valore di un altro simbolo o gruppo di simboli che non risulti ad esso identico in virtù dei postulati ammessi. Così nella geometria projettiva piana *punto* può assumersi come idea primitiva; *retta* può derivarne per definizione: si constata che *retta* soddisfa ai postulati di *punto* convenientemente interpretati (legge di dualità): non sarà perciò permesso di identificare le nozioni di punto e retta!

essendo espressa in lingua comune, non garantisce un'analisi completa (*). Il PEANO si vale di questa definizione per passar poi a quella dell'elemento di posto n in R; egli chiama fn questo elemento e pone

$$fn = \text{Valore}\ \min_n [N_1 \frown x \varepsilon (\text{Valore}\ x \varepsilon \Theta)] \qquad (2)$$

(in parole: fn è il valore del primo numero alfabetico che segue quello di valore $f(n-1)$ e che ha per valore un numero dell'intervallo $0 \ldots 1$). Orbene, fra i numeri alfabetici ve ne saranno di quelli che per essere interpretati secondo le regole della lingua comune, chiedono che si sappia che cosa sia la totalità degli fn, od anche soltanto quale sia l'fn che essi definirebbero, qualora un fn corrispondesse ad essi; in sostanza può darsi che nel secondo membro della (1) entri il simbolo fn (o il suo equivalente R) in tal forma che esso non risulti definito da (2), se non si conosce il valore del primo membro della (1) medesima. Il sistema (1) (2) non costituisce dunque una definizione; è invece un sistema di postulati che legano il segno non definito fn ad altri segni.

Il numero N del RICHARD si definisce mediante la classe totale degli fn (il simbolo R); se questa classe si potesse ritener definita, la contraddizione condurrebbe ad affermare col PEANO che è il numero N medesimo contraddittorio e quindi non esistente: ma se di fn è ancora dubbio il significato la contraddizione mostra anzitutto che non esiste la classe degli fn; la non esistenza di N è di ciò una conseguenza necessaria.

§ 3. L'ANTINOMIA DI BURALI-FORTI.

È nota sotto il nome di BURALI-FORTI l'antinomia che consisterebbe in questo che per una parte si afferma esistere un numero ordinale transfinito w superiore a tutti i numeri ordinali transfiniti, mentre per altra parte si afferma esistere un numero transfinito $w+1$ successivo a questo.

Per chiarire l'origine del paradosso occorre analizzare la definizione dei numeri ordinali transfiniti.

(*) L. c., pag. 157.

Gli aggregati ben ordinati.

13. Un aggregato si dice *ben ordinato* se esso è ordinato in modo che: 1.° esiste un elemento precedente tutti gli altri nell'ordinamento dato; 2.° ogni parte dell'aggregato possiede un elemento che, in detto ordinamento, precede tutti gli altri elementi di essa.

L'aggregato degli elementi d'un aggregato ben ordinato, che precedono un elemento dato è ben ordinato e si dice un *segmento* dell'aggregato dato.

Due aggregati ben ordinati si dicono dello stesso *tipo* o *numero ordinale* se fra i loro elementi si può stabilire una corrispondenza biunivoca ed ordinata. Quando la corrispondenza esiste è individuata. Il *numero ordinale* di un aggregato ben ordinato risulta così definito per astrazione.

Dalla definizione segue facilmente che: dati due aggregati ben ordinati F e G può avverarsi uno ed uno solo dei tre fatti seguenti:

a) F è dello stesso tipo di G.

b) Esiste in G un segmento dello stesso tipo di F.

c) Esiste in F un segmento dello stesso tipo di G.

Dalla definizione di numero ordinale di un aggregato data poc'anzi risulta che nell'ipotesi *a*) F e G hanno numero ordinale; nelle ipotesi *b*) e *c*) uno almeno dei due aggregati (e precisamente F nell'ipotesi *b*), G nell'ipotesi *c*)) ha numero ordinale.

Possiamo noi asserire che un aggregato ben ordinato abbia sempre numero ordinale?

Manteniamo impregiudicata la risposta e poniamo la definizione:

Se F e G hanno tipo, nell'ipotesi *b*) si dice che il numero ordinale di F precede od è minore di quello di G; nell'ipotesi *c*) naturalmente il numero ordinale di G precederà (o sarà minore di) quello di F.

È evidente che se un aggregato ben ordinato G ha tipo, ogni suo segmento ha pure tipo, perchè se esiste un aggregato in corrispondenza ordinata con G, i segmenti di esso saranno in corrispondenza ordinata con quelli di G. Può esistere al più un aggregato ben ordinato che (eventualmente insieme con suoi segmenti) non abbia tipo: Se infatti G è un aggregato non avente tipo, qualunque aggregato ben ordinato che non sia un suo segmento dovrà trovarsi rispetto a G nel caso *b*), e quindi, come si osservò, avrà tipo.

14. Dato un aggregato ben ordinato G, si faccia corrispondere a ciascun segmento dell'aggregato il primo elemento della parte residua: risulta

da tal corrispondenza che l'aggregato di quei segmenti è esso medesimo ben ordinato quando ad essi si attribuisca l'ordine degli elementi corrispondenti. Un qualunque aggregato parziale che abbia per elementi questi segmenti ha un primo elemento.

Segue da questa osservazione che se si ordinano i numeri ordinali secondo la relazione di precedere e seguire definita poc' anzi, l'aggregato di essi numeri ordinali risulta ben ordinato. Occorre perciò dimostrare che qualunque aggregato t di numeri ordinali ha un primo elemento: si fissi invero un elemento g di t: esso è il tipo di un aggregato ben ordinato G; i numeri di t, minori di g, sono i tipi di segmenti di G. Fra questi segmenti v'è un primo (caratterizzato dal fatto che l'aggregato complementare rispetto a G ha per primo elemento il primo elemento di G che non appartenga a tutti quei segmenti): il tipo di esso, elemento di t, precederà ogni altro elemento di t.

L'aggregato ben ordinato costituito dalla totalità dei numeri ordinali si chiamerà W.

Ogni segmento di W ha tipo; e se il segmento è infinito, il suo tipo è il primo numero ordinale che non gli appartiene.

Infatti l'aggregato dei numeri ordinali finiti ha numero ordinale, e precisamente il primo numero ordinale transfinito. Se ora esistessero segmenti infiniti di W non aventi tipo od aventi tipo diverso dal primo numero ordinale non appartenente ad essi, per l'osservazione del principio del n.°, esisterebbe un primo fra questi. Sia Γ e sia g il primo numero ordinale non appartenente ad esso e G un aggregato di tipo g. I segmenti di Γ hanno tutti, per ipotesi, tipo precedente g; quindi nessuno di essi ha il tipo di G. Allora (n. 13) o Γ ha il tipo di G, ed è questa la tesi da provarsi; ovvero Γ ha il tipo d'un segmento di G, cioè un tipo $< g$: ma per ipotesi tutti i numeri ordinali transfiniti $< g$ corrispondono ai tipi dei segmenti di Γ: dunque questa seconda ipotesi è assurda.

L'aggregato totale W dei numeri transfiniti non ha tipo. Se infatti esso avesse tipo, corrisponderebbe ad esso un numero ordinale w: i numeri ordinali precedenti w costituirebbero un segmento di W avente lo stesso numero ordinale w di W: il che è assurdo.

Si possono dunque completare le osservazioni finali del n. 13 enunciando:

Fra gli aggregati ben ordinati ve n'ha uno — l'aggregato W dei numeri ordinali — il quale non ha tipo: tutti gli altri aggregati ben ordinati, compresi i segmenti di W, hanno tipo.

15. Qui appare la prima forma dell'antinomia di Burali-Forti. È pos-

sibile che un aggregato non abbia tipo? Per attenerci strettamente alla definizione, un aggregato ha tipo tosto che esiste *un altro* aggregato ben ordinato ordinatamente riferibile ad esso. Ora è evidente che, appena noi avremo concepito un aggregato, un altro ne concepiremo riferito ordinatamente ad esso modificando i suoi elementi con un'operazione mentale qualunque, sostituendo, p. es., a ciascuno di essi il *pensiero di esso.*

È questa una nuova operazione logica di cui finora non s'era parlato: soltanto da questo silenzio proviene il malinteso. Quando noi dicevamo d'aver considerato l'aggregato di *tutti* i numeri ordinali, noi avevamo invece considerato l'aggregato dei numeri ordinali di aggregati ben ordinati nella definizione dei cui elementi *non abbia parte* l'operazione « *il pensiero di* ». È naturale che, aggiungendo la nuova operazione, l'aggregato possa accrescersi. Ed infatti, se l'aggregato prima considerato si chiama W, verremo a concepirne un tipo ed un numero ordinale w che a W non appartiene. L'aggregato (W, w) è ben ordinato e coll'operazione « *il pensiero di* » si può costruire un aggregato dello stesso tipo: così si definisce un nuovo numero ordinale $w+1$ e così via. È tutta una serie di nuovi numeri ordinali che si viene a costruire. Ma allora un dilemma si pone: O si ammette che abbia senso parlare dell'aggregato di *tutti* i numeri ordinali degli aggregati che si possono definire mediante date operazioni e idee logiche, compreso fra quelle « *il pensiero di* », ovvero si ammette che parlare di tale aggregato non abbia senso. Nella prima ipotesi, quando considereremo quell'aggregato non potremo più applicare ai suoi elementi l'operazione « *il pensiero di* », perchè tale operazione avrà già operato quanto poteva; nella seconda ipotesi l'aggregato non esiste ed è fuor di luogo parlare del suo tipo.

Si illuminerà anche meglio questa veduta esaminando la definizione generativa dei numeri transfiniti.

La definizione generativa.

16. Supponiamo di conoscere un oggetto 1 ed un'operazione S che trasformi 1 in un nuovo oggetto $S1=2$ su cui si possa ancora operare con S. $S2=3$ sia un oggetto diverso da 1 e da 2 e su cui si possa operare con S e così via. Ogni nuova applicazione dell'operazione S generi un oggetto diverso dai precedenti su cui essa sia applicabile. Operando così successivamente con S noi generiamo la serie dei numeri interi che indicheremo con N_1.

In simboli

$$\text{(Def)}\quad \mathfrak{v} = \mathrm{Cls} \frown v \ni [1 \,\varepsilon\, v : x \,\varepsilon\, v \,.\supset_x \therefore Sx \,\varepsilon\, (v - \iota 1) : y \,\varepsilon\, (v - \iota x) \,.\supset_y .\, Sx \quad Sy] \quad (0)$$

$$\text{(Post)}\quad \exists\, \mathfrak{v} \quad (1)\,(*) \quad , \qquad \text{(Def)}\quad N_1 - \cap\, \mathfrak{v} \quad (2)\,(*)$$

(Fra le classi $\mathfrak{v}$ ve n' ha di quelle tali che, scelto un individuo z qualunque della classe, esistono rispetto ad esso classi $\mathfrak{v}_z$ per cui si soddisfa la def. (0) ove si scriva z al posto di 1 e $\mathfrak{v}_z$ al posto di $\mathfrak{v}$. Tali sono le classi $\mathfrak{v}$ per cui si verifica che, per un individuo qualunque z di esse, $S^n z \quad z$ qualunque sia l'intero n; e di tali classi esistono certamente, perchè una classe $\mathfrak{v}$ soddisfacente a (0) non perde questo suo carattere se se ne sopprimono tutti gli individui ζ tali che per un n conveniente $S^n \zeta = \zeta$. Questa osservazione mostra che in particolare la proprietà $Sz \;-z$ si verifica per tutti gli N_1.)

Fra gli individui d'una qualunque delle classi $\mathfrak{v}$ definite da (0) ve ne sono di quelli (almeno l'1) che non sono successivi di nessun individuo delle classi $\mathfrak{v}$ soddisfacenti a (0) cui appartengono. Chiameremo v ogni aggregato costituito di tali individui.

Precisando la definizione nella sua rappresentazione simbolica, porremo:

$$\text{(Def)}\qquad \bar{v} = \mathrm{Cls} \frown u \ni \{\exists\, \mathfrak{v} \frown v \ni (u \supset v) \therefore v \,\varepsilon\, \mathfrak{v} \,.\supset_v : x \,\varepsilon\, v \,.\supset_x .\, Sx - \varepsilon\, u\} \qquad (3)$$

Una classe $\bar{v}$ è quella che si riduce al solo elemento 1: in simboli

$$\iota 1 \,\varepsilon\, \bar{v}; \qquad a \,\varepsilon\, \bar{v} \,.\, b \supset a \,.\supset.\, b \,\varepsilon\, v.$$

Imitando la def (2) potremo allora porre

$$\text{(Def)}\qquad \left.\begin{aligned} & u \,\varepsilon\, v \,.\supset.\, Z(u) = \cap\, \mathfrak{v} \frown v \ni (u \supset v) \\ & N_1 = Z(\iota 1). \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

17. Ciò posto, supponiamo che si abbia una nuova operazione I, e fra le classi v una u, che contenga l'individuo 1 e tale che esistono classi z, contenute in u, sulla cui corrispondente classe $Z(z)$ si possa operare con I, ottenendo così un individuo $IZ(z)$, e supponiamo che sempre $IZ(z)$ sia un

---

(*) In parole: (Post) esistono classi che contengono l'1 e tali che se contengono un elemento x, contengono pure l'Sx, il quale non sarà mai l'1, e che se x ed y sono loro individui distinti, $Sx =|= Sy$. — (Def): N_1 è il prodotto logico di tutte queste classi (la classe comune a tutte).

individuo di u, diverso da 1, e variabile con z:

$$\left.\begin{array}{ll}(\text{Post}) & u \,\varepsilon\, \bar{v};\ 1 \,\varepsilon\, u;\ \exists\, z \ni [z \supset u \,.\, \exists\, IZ(z)]; \\ & z \supset u \,.\, \exists\, IZ(z) \,.\, \supset_z .\, IZ(z) \,\varepsilon\, (u - \iota 1); \\ & z \supset u \,.\, t \supset u \,.\, IZ(z) = IZ(t) \,.\, \supset_{z,t} .\, z = t. \end{array}\right\} \quad (5)\ (^*)$$

Porremo inoltre

$$(\text{Post}) \quad \exists\, I N_1 \qquad\qquad (\text{Def}) \quad I N_1 = \omega.$$

Il post (5) ci dice che ω è un individuo di u; quindi, per le def (3) e (0), sopra ω si può operare con S una, due,… volte generando l'aggregato $Z(\iota\,\omega)$: l'insieme degli individui di N_1 e di $Z(\iota\,\omega)$ costituisce l'aggregato $Z(1, \omega)$. Ammettiamo che esista $IZ(1, \omega)$; per (5) sarà individuo di u diverso da 1 e da ω.

Porremo

$$IZ(1, \omega) = \omega \,.\, 2.$$

Risulta subito analogamente che esiste $Z(1, \omega, \omega.2)$; noi ammetteremo che esista pure $IZ(1, \omega, \omega.2)$ — $\omega.3$ — e così via. Così, mediante le operazioni S ed I noi possiamo, a partire dall'individuo 1, costruire una serie illimitata di individui nuovi, comprendente N_1 (e contenuta in $Z(u)$). La chiameremo, per avvicinarci ai simboli in uso, $N(\aleph_1)$, ponendo pure $N_1 = N(\aleph_0)$. Per raccogliere in simboli questa definizione, porremo

$$\left.\begin{array}{ll}(\text{Post}) & \exists\, \mathfrak{v}_1 \ni [\mathfrak{v}_1 = \text{Cls} \frown w \ni \big\{ 1, I N_1 \,\varepsilon\, w : v \supset w\, u \,.\, \supset_v .\, Z(v) \supset w :: \\ & \quad v \supset w\, u \,.\, 1 \varepsilon v . z \supset v . z -= v : IZ(z) \,\varepsilon\, w . \supset_z . IZ(z) \,\varepsilon\, v .\therefore \\ & \quad \supset_v .\, \exists\, IZ(v) \,.\, IZ(v) \,\varepsilon\, w \big\}]. \\ (\text{Def}) & N(\aleph_1) = \cap\, \mathfrak{v}_1 \end{array}\right\} \quad (6)\ (^{**})$$

Da questa definizione risulta facilmente una semplice legge per ordinare gli elementi di $N(\aleph_1)$ (ordinamento che dalla precedente esposizione della definizione in parole già risultava). Consideriamo invero gli elementi della

---

(*) u e I sono così qui idee primitive.

(**) $N(\aleph_1)$ è l'aggregato minimo che contiene 1 e $I N_1$; che contiene inoltre l'aggregato $Z(v)$, tosto che v è un aggregato contenuto in u e in $N(\aleph_1)$ medesimo; che contiene infine l'individuo $IZ(v)$ tosto che l'aggregato v, contenuto in u e in $N(\aleph_1)$, contiene tutti gli individui $IZ(z)$ che appartengono a $N(\aleph_1)$, ove z sia un aggregato contenuto in v, ma non identico a v medesimo. — Il postulare l'esistenza delle $\mathfrak{v}_1$ è postulare una proprietà delle operazioni I; precisamente si definisce così un campo di classi $Z(z)$ su cui l'operazione I agisce.

forma $IZ(v)$: siano $IZ(v)$ e $IZ(v')$ due di essi; osservo che dei due aggregati v e v' uno è certamente contenuto nell'altro: si ha infatti dalla definizione che v e v' contengono l'individuo 1; esiste quindi una classe λ comune a v e v':

$$\lambda = v\, v'$$

e poichè v e v' sono contenuti in u, sarà $\lambda \supset u$.

Dall'ipotesi che $IZ(v)$ e $IZ(v')$ siano individui di $N(\aleph_1)$ segue che

$$z \supset v \,.\, z - = v \,.\, IZ(z) \varepsilon N(\aleph_1) \,.\, \supset_z .\, IZ(z) \varepsilon v. \tag{7}$$

Infatti se $IZ(z)$ non fosse un individuo di v esisterebbero classi $\mathfrak{v}_1$ le quali non contengono $IZ(v)$; dunque $IZ(v)$ non sarebbe un $N(\aleph_1)$, contro l'ipotesi. Analogamente

$$z \supset v' \,.\, z - = v' \,.\, IZ(z) \varepsilon N(\aleph_1) \,.\, \supset_z .\, IZ(z) \varepsilon v'. \tag{7'}$$

Si consideri allora una classe z contenuta in λ e quindi in v e in v'; si avrà

$$z \supset \lambda \,.\, z - = v \,.\, z - = v' \,.\, IZ(z) \varepsilon N(\aleph_1) \,.\, \supset_z .\, IZ(z) \varepsilon \lambda.$$

Applicando la def (6) si ha allora

$$IZ(\lambda) \varepsilon N(\aleph_1).$$

Allora, o λ non è nessuno degli aggregati v, v', ma è contenuto propriamente in ciascuno di essi, e, applicando ancora le (7), (7') si ottiene (ponendo λ al luogo di z)

$$IZ(\lambda) \varepsilon v, \qquad IZ(\lambda) \varepsilon v'$$

onde $IZ(\lambda) \varepsilon v\, v'$, contro l'ipotesi che $\lambda = v\, v'$ (*); oppure λ è uno degli aggregati v, v' che è la tesi che si voleva provare.

Basterà convenire che se $v \supset v'$ si dirà $IZ(v)$ precedere $IZ(v')$ e che si dirà 1 precedere ogni elemento di $N(\aleph_1)$, perchè ne risulti definito un ordinamento degli elementi di $N(\aleph_1) \frown u$ (classe comune a $N(\aleph_1)$ e a u). E l'aggregato risulta in tal modo ben ordinato. Sia infatti A una sua parte: occorre mostrare ch'essa ha un primo elemento. Questo è senz'altro 1 se A lo contiene: nella contraria ipotesi, si osservi che ogni individuo a di A (come ogni individuo di $N(\aleph_1) \frown u$ diverso da 1) è della forma $IZ(\alpha)$ dove α è un conveniente aggregato di u; e, per quanto si disse or ora, due diversi di questi aggregati α sono contenuti l'uno nell'altro. Il prodotto logico di tutti

(*) Si vede facilmente che se $IZ(z) \varepsilon N(\aleph_1)$, $IZ(z) - \varepsilon z$.

gli aggregati α che generano degli $IZ(\alpha)$ elementi di A è dunque il minimo fra essi, e ad esso corrisponde un individuo di A precedente tutti gli altri.

Si considerino ora anche individui di $N(\aleph_1)$ che non appartengano ad u: se x è uno di essi esiste un x' in u tale che x si ottiene da esso con una successione di operazioni S: $x \,\varepsilon\, Z(\iota x')$: d'altronde se x appartenesse ad u basterebbe per x' prendere x medesimo perchè questa relazione fosse ancora verificata. Siano allora x ed y due individui qualunque di $N(\aleph_1)$, e x' e y' siano tali che $x \,\varepsilon\, Z(\iota x')$, $y \,\varepsilon\, Z(\iota y')$; converremo che x precede y se x' precede y', oppure se $x' = y'$ e nell'unica successione $Z(\iota x') = Z(\iota y')$ x precede y. Risulta così definito un ordinamento di tutto $N(\aleph_1)$. E l'aggregato risulta ben ordinato perchè, se X è una sua parte, sia A l'aggregato minimo tale che $Z(A) \subset X$ (cioè l'aggregato degli elementi x' alle cui $Z(\iota x')$ appartengono gli elementi x di X). Si è già osservato che A avrà un primo elemento: sia questo a: o $a \,\varepsilon\, X$ e sarà il primo elemento di X, ovvero $a \,-\varepsilon\, X$, ma esiste in X qualche elemento di $Z(\iota a)$; il primo di questi sarà il primo elemento di X.

18. La definizione di $N(\aleph_1)$ si può generalizzare in modo analogo alla definizione di N_1.

Esiste cioè in u un aggregato u', cui appartiene 1, tale che

$$z \supset u \,.\supset_z.\, IZ(z) \,-\varepsilon\, u'.$$

Se allora $u'_1 \supset u' \,.\, 1 \,\varepsilon\, u'_1$, si ammetterà che

(Post) $$\exists\, \mathfrak{v}_1 \frown w \ni (u'_1 \supset w) \quad (*)$$

e si porrà

$$Z'(u'_1) = \cap\, \mathfrak{v}_1 \frown w \ni (u'_1 \supset w) \quad (**)$$
$$N(\aleph_1) = Z'(\iota 1).$$

(*) Questo post. comprende come caso particolare il post (6), cui esso si riduce ponendovi $u'_1 = \iota 1$; anch'esso ha per ufficio di assegnare un campo (ora più vasto del precedente) di classi cui si applica l'operazione I.

(**) A questa definizione si può dare anche altra forma, più simile a quella che dovranno prendere le definizioni analoghe che seguono:

$$Z'(u'_1) = \cap\, \mathrm{Cls} \frown w \ni \Big\{ Z(u'_1) \supset w \,.\, IN(\aleph_0) \,\varepsilon\, w :: v \supset w u \,.\, 1 \,\varepsilon\, v \,.\, z \supset v \,.\, z -= v :$$
$$IZ(z) \,\varepsilon\, w \,.\supset_z.\, IZ(z) \,\varepsilon\, v \,.\!\cdot\!.\supset_v.\, Z(v) \supset w \,.\, \exists\, IZ(v) \,.\, IZ(v) \,\varepsilon\, w \Big\}.$$

Infatti si vede subito che ogni w che soddisfi alle condizioni della prima definizione soddisferà a fortiori a quelle di questa seconda. Si tratta quindi solo di mostrare che anche questa seconda impone ad ogni w di contenere $Z(v)$ tosto che contiene la v. Orbene, essendo fissata una w ed una $v \supset w u$, si considerino tutte le classi $z \supset v \smile \iota 1$ diverse da $v \smile \iota 1$ e tali

Se u' non si riduce al solo individuo 1, possiamo allora immaginare una nuova operazione I' che sia capace di operare sopra taluno degli aggregati $Z'(u'_1)$, e li trasformi in individui, e precisamente in individui di u':

(Post) $$\left.\begin{array}{l}\exists\, I' N(\aleph_1);\ z \supset u' . \exists\, I' Z'(z) . \supset_z . I' Z'(z) \,\varepsilon\, (u' - \iota 1); \\ z \supset u' . t \supset u' . I' Z'(z) = I' Z'(t) . \supset_{z,t} . z = t;\end{array}\right\}$$

e possiamo, mediante le operazioni S, I, I', definire un nuovo aggregato

$$N(\aleph_2) = \bigcap \mathrm{Cls} \frown w \ni \Big\{ N(\aleph_1) \supset w . I' N(\aleph_1) \,\varepsilon\, w :: v \supset w\, u' . 1 \,\varepsilon\, v . z \supset v . z -= v :$$
$$I' Z'(z) \,\varepsilon\, w . \supset_z . I' Z'(z) \,\varepsilon\, v \therefore \supset_v . Z'(v) \supset w . \exists\, I' Z'(v) . I' Z'(v) \,\varepsilon\, w \Big\}.$$

Anche qui si deve notare che l'affermazione dell'esistenza di $N(\aleph_2)$ implica un postulato, analogo a quello posto in evidenza in (6). Osservazioni analoghe non starò a ripetere d'ora innanzi.

Sopra l'aggregato $N(\aleph_2)$ potremo ripetere le considerazioni fatte sopra $N(\aleph_1)$ e concludere ch'esso è ben ordinato. E l'operazione I' ci condurrà a distinguere in u' una parte u'', cui appartiene 1, tale che

$$z \supset u' . \supset_z . I' Z'(z) - \varepsilon\, u'';$$

e se u'' non si riduce all'individuo 1, si potrà porre, qualunque sia $u''_1 \supset u''$ e contenente 1:

$$Z''(u''_1) = \bigcap \mathrm{Cls} \frown w \ni \Big\{ Z'(u''_1) \supset w . I' N(\aleph_1) \,\varepsilon\, w :: v \supset w\, u' . 1 \,\varepsilon\, v . z \supset v . z -= v :$$
$$I' Z'(z) \,\varepsilon\, w . \supset_z . I' Z'(z) \,\varepsilon\, v \therefore \supset_v . Z'(v) \supset w . \exists\, I' Z'(v) . I' Z'(v) \,\varepsilon\, w \Big\}$$

e chiamando I'' una nuova operazione tale che

(Post) $$\left.\begin{array}{l}\exists\, I'' N(\aleph_2);\ z \supset u'' . \exists\, I'' Z''(z) . \supset_z . I'' Z''(z) \,\varepsilon\, (u'' - \iota 1); \\ z \supset u'' . t \supset u'' . I'' Z''(z) = I'' Z''(t) . \supset_{z,t} . z = t,\end{array}\right\}$$

---

che $I Z(z) \,\varepsilon\, w$; si chiami v' la classe di queste $I Z(z)$; si chiami analogamente v'' l'aggregato degli $I Z(z')$ tali che $z' \supset v \smile v' \smile \iota 1$, $z' -= v \smile v' \smile \iota 1$, $I Z(z') \,\varepsilon\, w$; e così via. Si ponga infine

$$V = \iota 1 \smile v \smile v' \smile v'' \smile \ldots$$

Sarà

$$V \supset w\, u . 1 \,\varepsilon\, V : z \supset V . z -= V . I Z(z) \,\varepsilon\, w . \supset_z . I Z(z) \,\varepsilon\, V$$

onde si potrà affermare che

$$Z(V) \supset w.$$

Ma $v \supset V$ e quindi $Z(v) \supset Z(V)$; quindi anche

$$Z(v) \supset w.$$

si porrà ancora

$$u''' \supset u'' \,.\, 1 \,\varepsilon\, u''' : z \supset u'' \,.\, \supset_z .\, I''\, Z''\,(z) \,-\varepsilon\, u''' : u'''_1 \supset u''' .\, 1 \,\varepsilon\, u'''_1 \therefore \supset_{u'''_1} .$$

$$Z'''\,(u'''_1) = \cap\, \mathrm{Cls} \frown w \ni \Big\{ Z''\,(u'''_1) \supset w \,.\, I''\, N\,(\aleph_2) \,\varepsilon\, w ::$$

$$v \supset w\, u'' \,.\, 1 \varepsilon v \,.\, z \supset v \,.\, z -\!= v : I''\, Z''\,(z) \,\varepsilon\, w \,.\, \supset_z .\, I''\, Z''\,(z) \,\varepsilon\, v \therefore$$

$$\supset_v .\, Z''\,(v) \supset w \,.\, \exists\, I''\, Z''(v) \,.\, I''\, Z''\,(v) \,\varepsilon\, w \Big\}$$

$$Z'''\,(\iota\, 1) = N\,(\aleph_3).$$

19. È evidente come si possa continuare nella definizione di sempre nuove classi $N(\aleph_4)$, $N(\aleph_5)$, ecc. Ad ogni nuovo passo occorrerà ammettere l'esistenza di un nuovo aggregato $u^{(n)}$ contenuto in $u^{(n-1)}$, contenente 1, ma non ridotto a questo solo individuo, e di un'operazione $I^{(n-1)}$ tale che

$$\exists\, I^{(n-1)} N(\aleph_{n-1}) ;\, u^{(n)} \supset z \supset u^{(n-1)} \,.\, \exists\, I^{(n-1)}\, Z^{(n-1)}\,(z) \,.\, \supset_z .\, I^{(n-1)}\, Z^{(n-1)}\,(z) \,\varepsilon\, (u^{(n-1)} - u^{(n)}).$$

Si definirà così una serie indefinita di aggregati ben ordinati, contenenti ciascuno il precedente (e di potenze successivamente crescenti). Un' operazione nuova ci conduce allora ad un nuovo aggregato analogo che li comprende tutti: noi poniamo

$$u^{(\omega)} = \cap\, u^{(n)}$$

$$(n = 1,\ 2, \ldots)$$

$$u_1^{(\omega)} \supset u^{(\omega)} \,.\, 1 \,\varepsilon\, u_1^{(\omega)} \,.\, \supset_{u_1}^{(\omega)} .\, Z^{(\omega)}(u_1^{(\omega)}) = \cup\, Z^{(n)}(u_1^{(\omega)}) \ (*).$$

Debbo insistere sopra l'affermazione: *un'operazione nuova.* Non si tratta invero qui di prodotto o di somma di aggregati singolarmente conosciuti; sotto la scrittura $\cap$ e $\cup$ si cela un concetto di limite; gli $u^{(n)}$ son tutti contenuti l'uno nell'altro, i $Z^{(n)}(u_1^{(\omega)})$ contengono ciascuno il precedente; noi, astraendo, immaginiamo in $u^{(\omega)}$ il limite verso cui tendono gli $u^{(n)}$ restringendosi, in $Z^{(\omega)}(u_1^{(\omega)})$ l'aggregato che comprende *tutti* gli individui che si formano partendo da $u_1^{(\omega)}$ e applicando *quanto è possibile* le operazioni $S, I, I', \ldots$

Poniamo

$$Z^{(\omega)}(\iota\, 1) = N\,(\aleph_\omega).$$

(*) Vale a dire $Z^{(\omega)}(u_1^{(\omega)})$ è la somma di tutti gli aggregati $Z^{(n)}(u_1^{(\omega)})$.

Noi possiamo immaginare una nuova operazione $I^{(\omega)}$ che trasformi taluno degli $Z^{(\omega)}(u_1^{(\omega)})$ in individuo. Precisamente supponiamo che $u^{(\omega)}$ contenga un aggregato $u^{(\omega+1)}$ contenente 1 e tale che, se $z \supset u^{(\omega)}$, e se esiste $I^{(\omega)} Z^{(\omega)}(z), I^{(\omega)} Z^{(\omega)}(z) \varepsilon (u^{(\omega)} - u^{(\omega+1)})$, gl' individui $I^{(\omega)} Z^{(\omega)}(z)$ essendo diversi per z diversi. Ammetteremo che esista $I^{(\omega)} Z^{(\omega)}(\iota\, 1)$. Se $u_1^{(\omega+1)} \supset u^{(\omega+1)}$, porremo

$$Z^{(\omega+1)}(u_1^{(\omega+1)}) = \cap \operatorname{Cls} \frown w \ni \Big\{ Z^{(\omega)}(u_1^{(\omega+1)}) \supset w.$$

$$I^{(\omega)} Z^{(\omega)}(\iota\, 1) \,\varepsilon\, w :: v \supset w\, u^{(\omega)} \,.\, 1 \,\varepsilon\, v \,.\, z \supset v \,.\, z -= v :$$

$$I^{(\omega)} Z^{(\omega)}(z) \,\varepsilon\, w . \supset_z . I^{(\omega)} Z^{(\omega)}(z) \,\varepsilon\, v \therefore \supset_v . Z^{(\omega)}(v) \supset w \,.\, \exists I^{(\omega)} Z^{(\omega)}(v) . I^{(\omega)} Z^{(\omega)}(v) \,\varepsilon\, w \Big\}$$

$$Z^{(\omega+1)}(\iota\, 1) = N(\aleph_{\omega+1}).$$

20. È inutile proseguire in questa descrizione di sempre nuove operazioni che ci permettono di costruire sempre più vasti aggregati ben ordinati, il cui primo elemento è 1. Noi diamo a tutti gli individui di tutti questi aggregati il nome di *numeri ordinali.* Noi ci chiediamo anzitutto: ha senso parlare della *totalità* di questi numeri, nell'ordine della loro generazione? È nella definizione di essi che, per l'atto medesimo in cui noi completiamo la definizione di un aggregato di numeri ordinali, noi concepiamo una apposita operazione I che da tale aggregato fa derivare un numero seguente ad esso. E una definizione generativa che comprenda il massimo aggregato di numeri ordinali non è possibile. Infatti ciascuna delle operazioni S, I, I',... è una nuova idea primitiva, com'è un'idea primitiva l'aggregato fondamentale (u, u', u'',...) su cui si può operare con esse operazioni (o colle operazioni $I^{(n)} Z^{(n)}$ definite mediante esse). Che siano idee primitive è provato dalla forma stessa delle proposizioni in cui compaiono: ma deve notarsi che esse non potrebbero sostituirsi con un'unica interpretazione. S'interpreti p. es. $S\,1$ come l'« idea dell'aggregato che ha il solo elemento 1 »; $S\,2$ come l'« idea dell'aggregato formato dagli individui 1, $S\,1$ », ecc.: in generale dunque S significhi la totalità degli elementi *prima generati;* $IZ(\iota\, 1)$ si potrà ben ancora interpretare come la totalità degli individui della serie dei numeri naturali; ma questa volta non saranno più gli individui *prima generati,* bensì tutti quelli che *si possono generare.* E se anche I' si vuole interpretare come l'idea d'una totalità d'elementi, passerà però fra essa e I la stessa differenza che fra I e S. Nel formare una $Z'(z)$ noi dovremo operare infinite volte con I e considerar quindi delle *totalità di elementi che si possono generare* coll'operazione S; per assurgere alla concezione di Z' e quindi di $I'\, Z'$ noi dob-

biamo concepire una *possibilità* d'un futuro d'ordine più elevato — ci sia concessa l'espressione.

Ed è chiaro, ed è noto, che non è nemmeno possibile concepire una idea primitiva operazione funzione d'un parametro, che pei diversi valori del parametro divenga le operazioni S, I, I',... perchè queste operazioni costituiscono un aggregato identico all'aggregato totale dei numeri ordinali: se $I^{(n)}$ si concepisse funzione del parametro n, occorrerebbe far variare n in tutto l'aggregato che si tratta di definire.

Una definizione generativa della *totalità* dei numeri ordinali è dunque impossibile: noi possiamo solo assumere questo aggregato come idea primitiva, e come tale noi postuliamo che non esista una operazione I che faccia corrispondere ad esso un individuo nuovo, da chiamarsi successivo ad esso. Nella contraddizione cadremo naturalmente se faremo un'ipotesi contraria a questo postulato.

Ancora alcune osservazioni sull'aggregato dei numeri ordinali.

21. All'antinomia dell'aggregato dei numeri ordinali si è tentato di dare anche altre basi.

Si è detto anzitutto: concepiamo l'aggregato W dei numeri ordinali, concepiamo un oggetto m che a W non appartenga e chiamiamolo seguente a tutti gli individui di W: otterremo un aggregato $\{ W, m \}$ ben ordinato e più vasto di W, ed m si potrà chiamare il numero ordinale successivo a W.

Questo ragionamento è insostenibile. Invero per una parte si parla di un aggregato W di cui nulla si sa intorno al modo di identificare gli individui; dall'altra si parla di un m che si vuol concretare in un oggetto determinato. Gli elementi di W non sono idee distinte, identificabili in altri elementi del *tutto* delle cose pensate: per queste idee noi pensiamo un concetto ordinatore indefinito ma che, per sua natura, non si può applicare a quegli altri oggetti: esso W è *l'aggregato di tutti gli individui che risultano ordinati* SECONDO QUEL CONCETTO, e fra questi individui non vi sono gli altri oggetti del nostro pensiero: in particolare non vi è m.

Riferiamoci ancora allo sviluppo dato precedentemente alla generazione dell'aggregato. Le idee primitive 1, S, I,... non hanno in quella definizione alcuna interpretazione concreta: la generazione descritta produce via via nuovi individui, diversi da tutte le idee che noi riceviamo per altra via; è naturale che queste altre idee non verranno a ordinarsi nel nostro aggregato, saranno anzi rispetto ad esso essenzialmente non ordinabili. Si può bensì ricondurle nel campo del nostro aggregato mediante una ***interpretazione*** delle idee 1, S, I,... Ma allora, poichè queste idee primitive sono infinite, come si potrà accertare se m era o non elemento di W? Si può *postulare* che quella interpretazione non debba far cadere fra tali elementi l'oggetto m; ma allora si sarà postulato che m non appartenga all'aggregato dei numeri ordinali, e non si potrà attribuirvelo senza contraddizione.

22. Si ragiona pure così: dato un aggregato ben ordinato, l'aggregato di tutti i tipi di aggregati ben ordinati in cui possono comporsi i suoi elementi è un aggregato ben ordinato di potenza maggiore. Applicando la proposizione all'aggregato W di tutti i numeri ordinali si mostra esistere un aggregato ben ordinato di potenza maggiore. Non si bada in tal ragionamento che nell'ipotesi della proposizione che si vuole applicare è che si tratti di un aggregato ben ordinato i cui elementi si possano disporre in un aggregato ben ordinato di tipo differente: ipotesi contradittoria con quella che si tratti dell'aggregato di tutti i numeri ordinali.

§ 4. I PROCEDIMENTI DI ELEMENTAZIONE.

23. Chiamo *procedimento di elementazione* ogni operazione che faccia corrispondere ad un aggregato un individuo. Le idee primitive I, I', I'',... (n. 17 e seg.) possono interpretarsi ciascuna in un qualunque procedimento univoco di elementazione che possa applicarsi rispettivamente agli aggregati $Z(z)$, $Z'(z)$,... (ad aggregati diversi facendo corrispondere individui diversi). A vero dire fra i postulati ammessi rispetto a queste operazioni v'erano quelli che escludevano che gli individui generati appartenessero a certi aggregati u', u'',...; ma si vede agevolmente che questa condizione non è restrittiva: infatti, se si segue la generazione successiva degli aggregati $N(\aleph)$, si vede che questa condizione ha solo importanza perciò che si chiede che ogni nuovo individuo generato sia diverso da quelli precedenti e che sopra di esso e sugli aggregati da esso derivanti possa operarsi con S e con I, I', ecc., rispettivamente. Ora la prima condizione che l'individuo generato sia diverso dai precedenti si suppone verificata; la condizione relativa alla applicabilità delle operazioni S, I, I',... si soddisfa con una scelta conveniente di esse, la quale d'altronde si è già supposta.

Si è già osservato (n. 20) che anche S può interpretarsi come una *elementazione*, la differenza essenziale fra S e le operazioni I essendo che la prima si applica ad un aggregato completamente generato, le seconde ad aggregati in potenza di generazione (agli aggregati di tutti gli individui che possono ottenersi con convenienti ripetizioni delle operazioni S, I,...).

Si noti ancora che può considerarsi un procedimento di elementazione funzione di un numero ordinale (se si vuole, anche variabile in un qualunque aggregato di numeri ordinali transfiniti) in modo che in un solo procedimento si riassuma una serie di operazioni S, I,...

Le conclusioni del n. 20 possono allora tradursi nella seguente proposizione di importanza logica generale: *qualunque procedimento univoco di elementazione non può applicarsi a tutti gli aggregati.* Poichè, se un tal procedimento di elementazione Θ si potesse applicare ad ogni aggregato, si potrebbe interpretare in esso tutte le idee primitive S, I, I',...: si genererebbe così un aggregato di numeri ordinali; ma all'aggregato totale che si ottiene dopo aver applicata indefinitamente questa operazione — *quanto possibile* —, l'operazione medesima non sarebbe più applicabile.

Fra i procedimenti di elementazione v'ha «il concetto di»: la considerazione dei numeri ordinali come tipi degli aggregati ben ordinati ci aveva già condotto per altra via ad ammettere che vi sono oggetti cui non è applicabile «il concetto di».

§ 5. L'antinomia di Russell.

24. L'antinomia di Russell trova la propria giustificazione nelle osservazioni precedenti. Ricordiamo anzitutto in che cosa essa consista: Consideriamo l'aggregato E degli individui che si ottengono elementando aggregati che non contengono se stessi elementati: si chiede: elementando E si ottiene un individuo di E o un individuo non appartenente ad E? Comunque si risponda si cade in contraddizione.

L'origine della contraddizione sta in questo che s'immagina fissato un procedimento di elementazione e si ammette che tale procedimento si applichi ad ogni aggregato, in particolare ad E: ma la contraddizione cade se E non può elementarsi con quel procedimento.

La conclusione d'altronde può essere approfondita. Senza far capo alla contraddizione in misura maggiore di quanto occorra in una qualsiasi dimostrazione per assurdo, noi possiamo mostrare che il nostro aggregato E contiene parti non elementabili col procedimento di elementazione che si sarà fissato; anzi *ogni parte elementabile di E è contenuta in una parte di E non elementabile.*

Osserviamo anzitutto che, se E_1 è una parte elementabile di E, e l'individuo ottenuto dalla sua elementazione è $\{E_1\} = e_1$, *e_1 è un individuo di E che non appartiene ad E_1*. Che e_1 sia individuo di E è chiaro: invero o esso appartiene ad E_1, e perciò a E, ovvero non appartiene ad E_1, ed allora è individuo di E per definizione. Ma poichè esso appartiene ad E non può per la definizione stessa di E, essere elemento di E_1, onde risulta la tesi

Ciò posto, sia E_1 una parte elementabile di E; l'elemento generato elementandola sia $e_1 = \{E_1\}$: sarà allora anche parte di E l'aggregato $(E_1, e_1) = E_2$; e se questo è elementabile, e l'individuo generato elementandola è $e_2 = \{E_2\}$, anche $(E_2, e_2) = E_3$ sarà parte di E. Se si ammette che l'operazione di elementazione considerata si applichi indefinitamente agli aggregati $E_1, E_2, E_3, \ldots$, si potrà interpretare in e_1 l'individuo 1 del n. 16 e seg., e nell'operazione che porta da e_1 a e_2, da e_2 a $e_3, \ldots$ l'operazione S. Si consideri allora l'aggregato $(E_1, e_1, e_2, \ldots) = E_\omega$ che è certo parte di E, e si ammetta che esso sia elementabile: in questa elementazione si potrà interpretare l'operazione I. Così proseguendo si interpreteranno successivamente tutte le operazioni $I^{(\omega)}$, finchè l'elementazione considerata è applicabile, e negli individui successivamente generati $e_1, e_2, \ldots$ si avranno dei rappresentanti dei numeri ordinali (*). L'aggregato costituito da E_1 e da tutti questi individui non potrà mai essere elementato.

§ 6. L'antinomia della potenza dell'aggregato totale.

25. Meno discussa è l'antinomia sulla quale ha richiamato l'attenzione il Russell medesimo (**) e poi il Borel (***) che risulta quando si applichi al « tutto » la proposizione che: *dato un aggregato qualsiasi esiste sempre un*

(*) Se $e_1, e_2, \ldots$ non saranno essi medesimi numeri ordinali, l'operazione di elementazione dovrà arrestarsi prima di aver generato un aggregato riferibile alla totalità dei numeri ordinali.

(**) *Principles of Mathematics*, pag. 102.

(***) *Bulletin de la Société mathématique de France*, 33, 1905, pag. 273.

aggregato di maggior potenza, l'aggregato che ha per elementi le parti del primo (*convenientemente elementate*). Esisterebbe dunque un aggregato di potenza maggiore del « tutto ».

L'antinomia proviene esclusivamente dal fatto che non sono completamente enunciate le ipotesi della proposizione che si applica. Per dimostrare questa proposizione si dice infatti: sia E l'aggregato dato, H l'aggregato delle sue parti convenientemente elementate; fra le parti di E vi sono le parti elementari, costituite da un solo individuo di E; quindi E è contenuto in H. Allora o la potenza di H è maggiore di quella di E, ovvero E ed H hanno la stessa potenza. La 2.ª ipotesi è assurda: supponiamo infatti che fra E ed H esista una corrispondenza biunivoca; vi saranno certo elementi di E che non appartengono all'aggregato che, elementato, costituisce l'elemento corrispondente di H. Infatti, nella contraria ipotesi a ciascun individuo di E dovrebbe corrispondere in H l'individuo medesimo (l'aggregato costituito da esso solo, elementato), e quindi nessun elemento di E potrebbe corrispondere a quegli individui di H che si ottengono elementando parti non elementari di E. Sia allora A l'aggregato degli elementi di E tali che, nella supposta corrispondenza, hanno per corrispondenti in H i risultati della elementazione di aggregati che rispettivamente non li contengono. Se l'aggregato A è elementabile, all'elemento di H da esso generato corrisponderà in E un individuo a: ora questo individuo non può appartenere ad A perchè nessun individuo di A corrisponde ad una parte di E che lo contenga; d'altronde se esso non appartenesse all'aggregato corrispondente A, sarebbe, per definizione, individuo di A, il che è contradittorio. Si elimina la contraddizione solo supponendo che non esista la corrispondenza biunivoca fra E ed H.

In questo ragionamento si suppone: 1.° che il procedimento di elementazione adottato sia applicabile a tutte le parti di E, in particolare ad A; 2.° che l'individuo ottenuto elementando A non possa ottenersi elementando anche altri aggregati parziali di E.

Riguardo a questo secondo punto è necessaria qualche dilucidazione: voglio mostrare come l'ipotesi cui si accenna non si verifica quando E sia il *tutto* e quindi contenga le proprie parti, elementate. Supponiamo dunque che M sia una parte di E che, elementata, dia l'individuo m di E medesimo. Quando noi passeremo a formare H, troveremo anzitutto l'elemento m come risultato dell'elementazione di M: ma una parte elementare di E sarà m stesso: elementandolo si avrà m o un altro individuo di H? Ciò dipende dall'operazione elementante considerata, ed è ugualmente plausibile ammettere che si ottenga m medesimo o che si ottenga un altro individuo di H. Si ammetta la prima ipotesi e come aggregato M si prenda l'aggregato A di pur ora: individui di A siano -- per precisare — quelli il cui corrispondente in H non si può ottenere elementando nessun aggregato parziale di E cui essi medesimi appartengano; basterà supporre che l'individuo a corrispondente ad A elementato sia il risultato medesimo dell'elementazione di A; esso non dovrà appartenere ad A perchè avrà per corrispondente in H il risultato dell'elementazione dell'aggregato formato dal solo individuo a; senza che perciò si cada nella contraddizione. Se poi A si costituisse con quegli individui di E il cui corrispondente in H si può ottenere elementando qualche aggregato parziale di E cui essi non appartengono, basterà supporre che l'individuo a, corrispondente ad A elementato, non sia l'individuo medesimo generato dall'elementazione di A, perchè allo stesso modo si eviti ogni contraddizione (*).

Se invece si ammette la seconda ipotesi e precisamente si ammette che ogni volta che si elementa un aggregato formato d'un solo individuo, l'individuo che si ottiene è diverso da questo, e che elementando aggregati diversi si ottengono individui diversi, l'applicazione di una successione di elementazioni analoga a quella del n. 24 e l'ipotesi che E sia il « tutto » riconduce a riconoscere che non è soddisfatta la 1.ª ipotesi del ragionamento (l'applicabilità illimitata del procedimento di elementazione).

La proposizione che *l'aggregato delle parti di un aggregato ha potenza maggiore dell'aggregato medesimo non è vera per ogni aggregato; in particolare non è vera per il « tutto »*.

§ 7. Conclusione.

26. La precedente discussione ci ha condotto a precisare alcuni concetti logici non sufficientemente riconosciuti e talune cautele che il ragionamento deduttivo richiede.

Abbiamo visto che è inutile rifarsi, come hanno voluto taluni autori, ad una nozione di aggregati ben definiti e non ben definiti, nozione che d'al-

(*) Si noti che la corrispondenza fra E e H può essere *la medesima* nelle due ipotesi, perchè gli aggregati A corrispondenti ad esse sono diversi.

tronde abbiamo mostrata insussistente. Ma la sola condizione perchè le deduzioni possano compiersi con esattezza è che accuratamente si distingua fra ciò che è idea primitiva e ciò che è idea definita. L'enunciato del Richard ci ha palesato due idee (E ed R) che fungono in esso da idee primitive pur avendo l'apparenza di esservi completamente definite. Ora non può certo essere argomento di meraviglia che risultino contradittorie idee primitive cui si imponga di soddisfare a postulati scelti senza opportune cautele. Quel che rendeva ripugnante la contraddizione era l'apparenza che le sole idee cui si aveva ricorso per costruirla fossero quelle della logica comune insieme con le idee primitive dell'aritmetica; e troppe teorie matematiche erano state costruite con esse perchè la conclusione della incompatibilità potesse facilmente accogliersi.

27. Le altre antinomie ci hanno condotti a precisare un concetto logico: noi conosciamo procedimenti mentali per cui dall'idea di un aggregato passiamo all'idea di un individuo il quale, insieme alla conoscenza di detto procedimento, determina in modo univoco l'aggregato da cui proviene: noi li abbiamo chiamati ***procedimenti univoci di elementazione***, e siamo stati condotti ad affermare che:

Assegnato un qualsiasi procedimento univoco di elementazione, esistono aggregati cui il procedimento medesimo non si applica; possiamo quindi dire che *il campo di applicabilità del procedimento assegnato non abbraccia mai la totalità degli aggregati.*

Il linguaggio comune potrebbe indurci a disconoscere tale proposizione: infatti ci pare di riconoscere un procedimento di elementazione nell'operazione che si rappresenta con «l'idea di»: non è difficile vedere però che con queste parole non si rappresenta un'operazione logica determinata, come ci hanno mostrato, p. es., le considerazioni del n. 20 e del § 4; qui vogliamo aggiungere al riguardo alcune altre osservazioni.

Un'operazione è logicamente determinata quando sono note le proprietà del risultato di essa: il contenuto intuitivo di essa è indifferente. Possiamo noi dire che siano determinate le proprietà del risultato dell'operazione «l'idea di» *applicata a un aggregato qualsiasi?* Se per es. a è un aggregato costituito d'un sol elemento, «l'idea di a» è la stessa cosa che l'individuo a o è cosa diversa? È questo il principio d'una serie di indeterminazioni che si dovrebbero risolvere caso per caso: si può tentare una risoluzione generale: l'antinomia del Russell mostra che il tentativo deve necessariamente riuscire vano, perchè v'ha contraddizione fra l'essere l'operazione definita o l'essere applicabile ad ogni aggregato.

D'altronde noi non ragioniamo mai sopra « l'idea di un aggregato » bensì sopra « l'astrazione di un aggregato fatta rapporto ad una sua proprietà », perchè gli oggetti di ogni nostro ragionamento non sono immagini identificabili per sè, ma imagini indeterminate legate soltanto da mutue dipendenze. Così nella « classe dei numeri interi » noi non vediamo certo la successione dei segni 1, 2,...; ma indifferentemente qualunque complesso di imagini legate dai postulati fondamentali dell'aritmetica. E di questa « classe dei numeri interi » noi ci facciamo due idee assolutamente distinte secondochè noi consideriamo « l'astrazione della successione dei numeri interi fatta rapporto all'ordinamento » o « l'astrazione della classe dei numeri interi fatta rapporto al riferimento biunivoco ». Per vederlo basti osservare che « l'idea » corrispondente alla seconda astrazione deve ammettere come un rappresentante « l'aggregato delle frazioni ». È evidente allora che una determinata astrazione non si applica a tutti gli aggregati. — Ogni aggregato ben ordinato che non sia l'aggregato totale dei numeri ordinali si può astrarre rispetto all'*ordine*, come ogni segmento della successione dei numeri interi si può astrarre rispetto al ***numero degli individui***, generandosi così l'idea di *tipo*. — L'aggregato degli aggregati ben ordinati che non contengono il proprio tipo (astrazione rispetto all'ordine o al numero) è l'aggregato di tutti gli aggregati ben ordinati fatta eccezione per i segmenti della successione dei numeri naturali e per l'aggregato totale dei numeri ordinali: fra questi aggregati eccezionali i primi contengono il proprio tipo (numero ordinale), l'ultimo non ha tipo, e non ha quindi tipo l'aggregato considerato (n. 14). — L'aggregato degli aggregati che non contengono se stessi elementati non ha senso preciso finchè non è definito il procedimento di elementazione: comunque però si fissi questo procedimento, esso non si applica all'aggregato medesimo.

28. Malgrado queste osservazioni, io non posso nascondermi che la conclusione enunciata debba trovare qualche ostacolo in ciò che si chiama senso comune: nell'abitudine, per esser precisi, a passare sulla questione senza analisi e senza attribuire alle parole un senso ben determinato. Mi si permetta però un raffronto: appena noi concepiamo una serie ordinata, in cui si possa parlare di precedente e di successivo, la mente corre subito all'idea di un immediatamente precedente e un immediatamente successivo. — In quanti abbozzi grossolani di ragionamenti noi ci facciamo ancora questa illusione perchè è comoda all'immaginazione! — La nozione di aggregati ordinati in cui queste espressioni non hanno senso (siano del tipo η dei numeri razionali, siano del tipo θ del continuo,...) si è formata solo sotto la pressione

di necessità logiche e ha dato luogo a lunghe dispute. Ancora oggi, se non la rafforziamo continuamente col tener presente alla mente tali necessità, essa tende a sfuggirci, e forse la pretesa cui molti aderiscono che ogni aggregato sia ben ordinabile non è che il riflesso della vigoria che nel nostro pensiero l'« immediatamente prima » e l'« immediatamente dopo » conservano malgrado che la forza stessa del pensiero abbia loro strappato un certo dominio.

Mi pare che il rapporto fra il principio che ho enunciato e le antinomie che tende a risolvere sia bene assimilabile al rapporto fra il concetto della successione continua e l'ipotesi dell'ordinamento discreto.

29. L'idea che, per allontanare le antinomie dalla teoria degli aggregati, occorra precisare i postulati relativi alla nozione di aggregato si è già presentata a vari autori (Russell, Zermelo, König, Schoenflies, Poincaré, Richard, Borel,...). Però i procedimenti escogitati tenderebbero presso alcuni — la scuola francese, direi — ad escludere dalla matematica i ragionamenti sopra l'infinito: è una strada che non si può seguire senza demolire troppe conquiste del pensiero matematico; presso gli altri si è tentato in generale di negare il nome di aggregato a certi gruppi, sistemi, classi — che dir si voglia — di individui, di negare che ogni proposizione abbia forza di distinguere il tutto in due parti: degli individui per cui la proposizione è vera e di quelli per cui la proposizione non è vera — e che ciascuna di queste parti sia una classe. Ma se sono pensabili oggetti che godono e oggetti che non godono di queste proprietà (nè occorre precisamente che esistano gli uni e gli altri), tali esclusioni non possono essere che provvisorie. Ai gruppi, sistemi, classi che non si son voluti chiamare *aggregati* bisognerà pur trovare un altro nome: la teoria di quel che si chiamerà allora aggregato non sarà che la teoria di quegli « aggregati secondo l'antico vocabolario » i quali godono di particolari proprietà, ma la difficoltà resterà tutta intera. E quanto al dichiarare una proposizione incapace di definire una classe, pare questa una lesione troppo forte alla logica comune.

Le varietà a curve sezioni ellittiche.

(*Di* GAETANO SCORZA, *a Palermo.*)

Le ricerche dei professori CASTELNUOVO ed ENRIQUES sulle superficie e sulle varietà tridimensionali a curve sezioni ellittiche facevano prevedere che aumentando la dimensione il numero dei casi possibili di varietà a curve sezioni ellittiche dovesse andare diminuendo.

Questo lavoro conferma appunto una tale previsione, in quanto dimostra che, eccettuate le forme cubiche, le quartiche intersezioni di due quadriche e le varietà costituite da una ∞^1 ellittica di spazi lineari, non si hanno, all'infuori dei coni, altre varietà a curve sezioni ellittiche la cui dimensione superi 6.

Più precisamente, riunendo in un enunciato unico i risultati di questa Memoria con quelli già ottenuti dai professori CASTELNUOVO ed ENRIQUES, si ha il seguente teorema:

Ogni V_k^n irriducibile non conica di S_r a curve sezioni ellittiche è:

a) una ∞^1 ellittica di S_{k-1}, oppure

b) una forma cubica di S_{k+1}, oppure

c) è razionale ed è proiezione di una W_k^n normale non conica di uno spazio a $n+k-2$ dimensioni, con k qualunque se $n=4$ e con $k<6$ se $n<9$.

Le W_k^n normali non coniche di S_{n+k-2} si riducono poi:

c′) per $n=4$ e k qualunque alle W_k^4 basi dei fasci di quadriche di S_{k+2};

c″) per $k=2$ [compreso il caso di $n=3$ che rientra in b) e di $n=4$ che rientra in c′)] alle W_2^n di S_n $(n \leq 9)$ studiate dal prof. DEL PEZZO *e rappresentabili sul piano o mediante il sistema di tutte le cubiche piane per $9-n$ punti base, o anche, se $n=8$, mediante il sistema di tutte le quartiche piane con due punti doppi assegnati;*

c‴) per $k=3$ ed $n>4$ alle W_3 determinate dal prof. ENRIQUES, *le quali danno luogo a sei tipi (generali) diversi, cioè a un tipo pel quale $n=5$, tre tipi pei quali $n=6$ e infine due tipi pei quali si ha rispettivamente $n=7, 8$;*

c$^{\text{IV}}$) per $k=4, 5, 6$ ed $n=5$, alla W_6^5 di S_9 che rappresenta nel solito *modo la varietà delle rette di un S_4 e alle W_5^5 e W_4^5 che se ne ottengono tagliandola mediante spazi a 8 e 7 dimensioni;*

c^v) *per $k=4$ ed $n=6$ alla W_4^6 (di S_8) del prof.* SEGRE, *che rappresenta, senza eccezione, le coppie di punti di due piani, e alla W_4^6 (di S_8) intersezione residua di un cono W_5^4 projettante da un piano una superficie di Veronese e di una quadrica che passa pel vertice di W_5^4 ed ha comune con esso uno dei suoi ∞^2 coni quadrici a quattro dimensioni.*

Particolari più minuti sui vari tipi possibili, come anche le necessarie citazioni bibliografiche, si troveranno a suo luogo più innanzi; qui basti aver presentato, per comodità del lettore, in rapido quadro riassuntivo, le varie ricerche che esauriscono ormai la questione della determinazione delle varietà a curve sezioni ellittiche.

Aggiungeremo soltanto che mediante i risultati di questo lavoro si può passare facilmente alla determinazione dei tipi, irriducibili per trasformazioni cremoniane, di sistemi lineari (semplici e di grado $n>3$) di forme di un S_r a curve sezioni variabili ellittiche, e che lo studio delle W_k^5 $(k \leq 6)$ mentre dà luogo a nuove proprietà, che pajono interessanti, dello spazio rigato a quattro dimensioni, conduce, per $k=3$, a una costruzione *diretta* di un notevolissimo gruppo ∞^3 di trasformazioni cremoniane incontrato per la prima volta dai professori ENRIQUES e FANO.

§ I.

GENERALITÀ.

1.° Consideriamo una varietà qualsiasi irriducibile V_k^n, d'ordine n e dimensione k, appartenente a uno spazio S_r, che dagli S_{r-k+1} dello spazio ambiente sia tagliata in curve ellittiche.

Se $r>k+1$, proiettando la V_k^n da un S_{r-k-2} generico sopra un S_{k+1} si ottiene in quest'ultimo spazio una $V^*{}_k^n$, in corrispondenza birazionale con V_k^n, che dai piani dello spazio stesso è tagliata in curve ellittiche d'ordine n, quindi:

Ogni V_k^n (irriducibile) di S_r $(r>k+1)$ a curve sezioni ellittiche si può trasformare birazionalmente in una ipersuperficie $V^*{}_k^n$ di un S_{k+1} a sezioni piane ellittiche.

2.° Ciò posto, sia V_k^n una forma (o ipersuperficie) irriducibile di S_{k+1} a sezioni piane ellittiche e supponiamo di tagliarla con un piano generico. La sezione sarà una curva ellittica d'ordine n e quindi, se $n > 3$, ammetterà *una* curva aggiunta d'ordine $n-3$, φ_{n-3}, che non la incontrerà in alcun punto fuori dei punti multipli.

Ora dico che, se V_k^n non è una ∞^1 ellittica di S_{k+1}, al variare del piano secante la curva φ_{n-3} descrive una Φ_k^{n-3} *sub-aggiunta* a V_k^n, ossia una forma d'ordine $n-3$ che nelle varietà multiple di V_k^n di dimensione $k-1$ (e non, eventualmente, in quelle di dimensione minore) si comporta come le forme aggiunte a V_k^n; inoltre tale Φ_k^{n-3} non taglia V_k^n fuori delle varietà multiple.

Supponiamo che il teorema sia vero per le V_{k-1}^n di S_k e dimostriamolo vero anche per le V_k^n di S_{k+1}; dopo ciò, essendo vero per $k=2$, per una nota dimostrazione del prof. Castelnuovo (*), sarà vero in generale.

Per questo si considerino nello spazio ambiente S_{k+1} un S_{k-1} generico e il fascio di iperpiani che lo ha per asse. In ognuno degli iperpiani del fascio la V_k^n avrà per traccia una V_{k-1}^n che non potrà essere una ∞^1 ellittica di S_{k-2} e quindi tale V_{k-1}^n ammetterà (per ipotesi) una forma sub-aggiunta Φ_{k-1}^{n-3} che non la taglierà fuori delle varietà multiple. Di più le ∞^1 Φ_{k-1}^{n-3} relative agli ∞^1 iperpiani del fascio taglieranno tutte l'S_{k-1} asse del fascio nella *stessa* Φ_{k-2}^{n-3} sub-aggiunta alla V_{k-2}^n ove l'asse in discorso taglia la data V_k^n; quindi il luogo di quelle ∞^1 Φ_{k-1}^{n-3} sarà una Φ_k^{n-3}, purchè nessuna di esse si spezzi nel considerato S_{k-1} e in una residua Φ_{k-1} d'ordine $n-4$.

Ma si vede subito che nelle ipotesi fatte un tal caso non può presentarsi. Se infatti per un S_{k-1} generico dell'S_{k+1} passasse qualche iperpiano secante V_k^n in una V_{k-1}^n con una Φ_{k-1}^{n-3} sub-aggiunta spezzata nell'S_{k-1} e in una residua Φ_{k-1}^{n-4}, la V_{k-1}^n sarebbe tagliata dalla Φ_{k-1}^{n-3} in tutti i punti della sua intersezione con l'S_{k-1}, e quindi anche in punti esterni alle sue varietà multiple di dimensione $k-2$, cioè essa non sarebbe irriducibile. Allora tagliando V_k^n con un S_3 generico si otterrebbe una superficie V_2^n tale che per ogni retta del suo spazio passerebbe qualche piano secante la V_2^n in una curva spezzata, cioè V_2^n sarebbe una rigata oppure la superficie romana di Steiner (**).

(*) *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve ellittiche* (Rendic. R. Accad. dei Lincei, 1.° semestre, 1894).

(**) Castelnuovo, *Sulle superficie algebriche che ammettono un sistema doppiamente infinito di sezioni piane riduttibili* (Atti della R. Accad. dei Lincei, 1894, 1.° semestre).

Di queste due alternative, la prima contrasta con l'ipotesi che V_k^n non sia una ∞^1 ellittica di S_{k-1}, la seconda (che porterebbe a $n=4$ e più precisamente a coni ottenuti per proiezione da un cono che proietta da un S_{k-3} una superficie di Veronese (*)) con l'ipotesi che V_k^n sia a curve sezioni ellittiche, dunque è dimostrato che il luogo di quelle ∞^1 Φ_{k-1}^{n-3} è una Φ_k^{n-3}.

Tale Φ_k^{n-3} non taglia V_k^n fuori delle sue varietà multiple, dunque ogni piano dell' S_{k+1} taglia V_k^n e Φ_k^{n-3} in una curva d'ordine n ellittica e *nella* corrispondente curva aggiunta φ_{n-3} d'ordine $n-3$; e questo basta per dimostrare il teorema enunciato.

3.° Consideriamo ora una V_k^n di S_{k+1} a curve sezioni ellittiche che non sia una ∞^1 ellittica di S_{k-1} e dimostriamo che, se $n>3$, si può sempre costruire un sistema lineare ∞^{n+k-2} di V_k^{n-2} sub-aggiunte a V_k^n che tagliano su V_k^n, fuori delle varietà multiple di dimensione $k-1$ (eventualmente esistenti), un sistema lineare ∞^{n+k-2} di V_k^{n-1}.

Poichè il teorema è vero per $k=2$ (nel qual caso, anzi, si riconosce (**) che per ognuna delle φ_{n-2}, sezioni di V_2^n coi piani dello spazio ambiente, passano ∞^1 superficie Φ_2^{n-2} sub-aggiunte a V_2^n), per dimostrarlo in generale basterà far vedere che esso è vero per una V_k^n di S_{k+1} quando sia vero per una V_{k-1}^n di S_k, e riguardo a questa sarà inoltre lecito supporre che per ogni V_{k-2}^{n-2} sub-aggiunta a una sezione iperpiana passino ∞^1 V_{k-1}^{n-2} sub-aggiunte a V_{k-1}^n.

Consideriamo dunque un S_{k-1} generico di S_{k+1}, la varietà V_{k-2}^n secondo cui esso taglia V_k^n e una Φ_{k-2}^{n-2} sub-aggiunta a questa. Un iperpiano α che passi per l' S_{k-1} taglia V_k^n in una V_{k-1}^n che contiene la V_{k-2}^n; quindi per la Φ_{k-2}^{n-2} passano ∞^1 Φ_{k-1}^{n-2} sub-aggiunte alla V_{k-1}^n e di queste ∞^1 Φ_{k-1}^{n-2} una potrà essere fissata imponendo che essa tocchi in un punto A di Φ_{k-2}^{n-2}, esterno alla Φ_k^{n-3} sub-aggiunta a V_k^n un iperpiano τ condotto comunque per l' S_{k-2} tangente in A a Φ_{k-2}^{n-2}, ma che però non contenga l' S_{k-1} considerato. Variando α intorno all' S_{k-1}, la Φ_{k-1}^{n-2} così fissata descriverà una Φ_k^x, il cui ordine x non potrà differire da $n-2$, perchè (non potendo essere evidentemente inferiore a $n-2$) se fosse maggiore di $n-2$, per qualche posizione di α la corrispondente Φ_{k-1}^{n-2} dovrebbe spezzarsi in un S_{k-1} e in una residua Φ_{k-1}^{n-3} passante per A; e questo non può accadere, se, come appunto si è sup-

(*) Enriques, *Sui sistemi lineari di superficie algebriche ad intersezioni variabili iperellittiche* (Math. Annalen, Bd. 46), n.° 9.

(**) Castelnuovo, loc. cit. n.° 2.

posto, A non si trova sulla Φ_k^{n-3} sub-aggiunta alla V_k^n. La Φ_k^x che così si ottiene è dunque una Φ_k^{n-2} che lungo le varietà multiple di dimensione $k-1$ di V_k^n si comporta come le forme aggiunte; e di tali Φ_k^{n-2} per ogni Φ_{k-1}^{n-2} sub-aggiunta a una sezione iperpiana di V_k^n ne passano ∞, perchè la costruzione precedente ne fornisce appunto ∞^1 quando si prenda per S_{k-1} un S_{k-1} dell'iperpiano considerato, per Φ_{k-2}^{n-2} la Φ_{k-2}^{n-2} secondo cui tale S_{k-1} taglia la Φ_{k-1}^{n-2} in discorso e per iperpiano τ uno degli ∞^1 iperpiani passanti per l'S_{k-1} tangente a Φ_{k-1}^{n-2} in un punto generico A della Φ_{k-2}^{n-2}. Più di ∞^1 Φ_k^{n-2} per una Φ_{k-1}^{n-2} sub-aggiunta a una sezione iperpiana non possono passare, perchè di esse una sola si spezza nell'iperpiano della sezione e in una residua Φ_k^{n-3} sub-aggiunta, dunque le Φ_k^{n-2} sub-aggiunte a V_k^n saranno $\infty^{\delta+1}$ se ∞^δ sono le Φ_{k-1}^{n-2} sub-aggiunte a una V_{k-1}^n. Ma per ipòtesi queste sono ∞^{n+k-3}, dunque le Φ_k^{n-2} formano un sistema lineare ∞^{n+k-2} ed è chiaro che esse tagliano sulla V_k^n un sistema lineare ∞^{n+k-2} di V_{k-1}^n, poichè n è il numero dei punti in cui si tagliano fuori dei punti multipli una curva piana ellittica d'ordine n e una sua curva aggiunta d'ordine $n-2$.

4.° Il sistema lineare di V_{k-1}^n tagliato sulla V_k^n $(n > 3)$ dalle forme sub-aggiunte di ordine $n-2$ è un sistema che contiene le sezioni iperpiane di V_k^n, dunque è semplice e di grado n e può servire a trasformare birazionalmente la V_k^n in una W_k^n *normale* di uno spazio a $n+k-2$ dimensioni, di cui la V_k^n può pensarsi (a meno di una trasformazione omografica) come proiezione.

Ora si osservi in primo luogo che se W_k^n è la varietà normale di S_{n+k-2} da cui può dedursi per proiezione la V_k^n di S_{k+1} ottenuta proiettando sopra l'S_{k+1} da punti esterni una V_k^{*n} di S_r, il sistema lineare completo che contiene le sezioni iperpiane di V_k^{*n} si muta nel sistema lineare completo che contiene le sezioni iperpiane di V_k^n, cioè in quello delle sezioni iperpiane di W_k^n; quindi V_k^{*n} può pensarsi anch'essa come proiezione della W_k^n da punti esterni. In secondo luogo è chiaro che la W_k^n normale di S_{n+k-2}, essendo tagliata da un S_n in una V_2^n, per una osservazione del prof. Enriques (*), conterrà sempre una curva razionale normale irriducibile d'ordine $n-3$ o, se $n=8$, d'ordine $n-4$; ed è pur chiaro che dallo spazio di una tal curva la W_k^n si proietta biunivocamente sopra un S_k o sopra una quadrica di S_{k+1}. Infatti se la W_k^n contiene una curva razionale normale d'ordine $n-3$, un S_r che passi per l'S_{n-3} di questa curva taglia W_k^n in una V_2^n che può proiet-

(*) Enriques, loc. cit. al n.° 2 di questo lavoro.

tarsi dall' S_{n-3} biunivocamente sopra un piano e se la W_k^n contiene una curva razionale normale d'ordine $n-4$ un S_n che passi per lo spazio S_{n-4} di questa taglia W_k^n in una V_2^n che dall' S_{n-4} stesso viene proiettata biunivocamente sopra una quadrica.

Possiamo pertanto enunciare il teorema:

Una V_k^n di S_r a curve sezioni ellittiche o è una ∞^1 ellittica di S_{k-1} o, se non è una forma cubica (*), *è razionale. In quest'ultimo caso può pensarsi come proiezione da punti esterni di una V_k^n normale di S_{n+k-2} a curve sezioni ellittiche normali.*

5.° Col prof. Enriques distinguiamo in *specie* le V_k^n $(n > 3)$ normali di S_{n+k-2} chiamando della *1.ª specie* quelle che contengono delle curve razionali normali d'ordine $n-3$ e della *2.ª specie* quelle che contengono soltanto delle curve razionali normali d'ordine $n-4$ e che quindi sono dell'ordine $n=8$.

Dimostreremo più innanzi che quelle di 2.ª specie per $k > 3$ sono tutte dei coni, quindi per il momento rivolgeremo la nostra attenzione alle V_k^n di 1.ª specie.

6.° Sia V_k^n una varietà di 1.ª specie e sia C^{n-3} una sua curva razionale normale d'ordine $n-3$. Se dall' S_{n-3}, α, che contiene la C^{n-3} si proietta la V_k^n sopra un S_k, la proiezione risulta, come già si è detto, biunivoca, le V_2^n sezioni della V_k^n con gli S_n passanti per α si proiettano nei piani di S_k e le sezioni di V_k^n con gli iperpiani per α si proiettano negli iperpiani di S_k.

Invece un iperpiano generico taglia V_k^n in una V_{k-1}^n che ha soltanto $n-3$ punti comuni con la C^{n-3} di α, quindi tale V_{k-1}^n si proietta in una forma cubica di S_k, e si ha il teorema:

Ogni V_k^n normale di 1.ª specie si può rappresentare punto per punto sopra un S_k per modo che le sezioni iperpiane abbiano per immagini le forme cubiche di un sistema lineare completo. Fra queste forme ve ne sono ∞^k spezzate in un iperpiano qualunque dell' S_k e in una quadrica fissa V_{k-1}^2.

Alla quadrica V_{k-1}^2 che compare in questo enunciato si può pervenire anche in altra maniera.

Essa è infatti la varietà dei punti dell' S_k rappresentativo che corrispondono ai punti di V_k^n infinitamente vicini ai punti della C^{n-3} contenuta in α; quindi può riguardarsi come il luogo degli ∞^1 spazi lineari di S_k i cui punti corrispondono alle direzioni delle tangenti a V_k^n uscenti dai punti della C^{n-3}.

(*) Notisi che se una V_k^3 è a curve sezioni ellittiche essa *appartiene* necessariamente a un S_{k+1}, cioè è una *forma* cubica.

Ora le tangenti di V_k^n uscenti da un punto di C^{n-3} riempiono un S_k che ha in comune una retta (cioè la tangente a C^{n-3} in quel punto) con α, dunque esse sono proiettate da α secondo spazi a $n-2$ dimensioni situati in un S_{n+k-4} e che pertanto tagliano lo spazio rappresentativo S_k nei punti di un S_{k-2}. Segue da ciò che la quadrica V_{k-1}^2 contiene ∞^1 S_{k-2} e quindi essa è specializzata almeno $k-3$ volte e ammetterà almeno un S_{k-4} doppio.

Se supponiamo che V_{k-1}^2 sia irriducibile (e, in generale, questo appunto accade) e che essa ammetta un S_{k-4} doppio ma non uno spazio doppio di dimensione superiore, essa conterrà una seconda serie ∞^1 di S_{k-2} e questi S_{k-2}, come vedremo, avranno nella rappresentazione della V_k^n ufficio ben diverso dai precedenti. Risulterà anche dal seguito che mentre per $n=4$, 5 lo spazio doppio della V_{k-1}^2 è realmente un S_{k-4}, in altri casi la dimensione dello spazio doppio aumenta.

7.° Due forme cubiche del sistema rappresentativo di una V_k^n di 1.^{a} specie si tagliano in una V_{k-2} immagine della V_{k-2}^n, sezione di V_k^n con un S_{n+k-4}; ma tale immagine si ottiene mediante una proiezione da α, dunque quelle due forme cubiche debbono tagliarsi fuori della varietà base del sistema, in una varietà d'ordine n, e la varietà base è una V_{k-2}^{9-n} dell'ordine $9-n$ (donde segue che deve essere $n \leq 9$). Questa V_{k-2}^{9-n} è naturalmente situata sulla quadrica V_{k-1}^2 che insieme con gli iperpiani di S_k dà ∞^k forme cubiche del sistema rappresentativo, e, come risulterà dall'esame dei singoli casi particolari, passa per lo spazio doppio di V_{k-1}^2.

Riassumendo possiamo dire:

Proiettando un V_k^n di 1.^{a} specie dall' S_{n-3} di una sua C^{n-3} razionale normale sopra un S_k si ottiene una rappresentazione biunivoca di V_k^n sopra questo S_k. Le sezioni iperpiane di V_k^n si proiettano nelle forme cubiche di un sistema lineare completo avente per varietà base una V_{k-2}^{9-n}, situata sopra una V_{k-1}^2 con un S_δ ($\delta \geq k-4$) doppio, e la V_{k-2}^{9-n} passa per questo S_δ.

8.° Nei numeri successivi enumereremo i vari tipi possibili di V_k^n corrispondenti alle varie ipotesi che possono farsi sui valori di k ed n, ma è bene osservare fin d'ora che per $n=4$ si hanno delle V_k^4 di dimensione k elevata quanto si vuole.

Infatti, per un teorema del prof. Enriques (*), esse si trovano, come la loro curva sezione (spaziale) generica, sopra ∞^1 quadriche e quindi sono le

(*) Enriques, *Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve ellittiche* (Rendic. della R. Accad. dei Lincei, 1894, 1.° sem.), n.° 3 in nota.

quartiche base di fasci di quadriche. Allora la rappresentazione che se ne può ottenere sopra una S_k proiettandole da una loro retta è quella che è stata già studiata dal prof. Rosati in un suo lavoro di qualche anno fa (*). Essa comprende come caso particolare una notissima rappresentazione delle rette di un complesso quadratico sui punti dello spazio ordinario.

§ II.

Le V_3^n normali a curve sezioni ellittiche.

9.° Le V_3 normali a curve sezioni ellittiche sono state già enumerate dal prof. Enriques in un lavoro citato; qui non si riprendono che per assegnarne delle costruzioni e dimostrarne alcune nuove proprietà proiettive.

Il prof. Enriques distingue, come già si è detto, le V_3 a curve sezioni ellittiche in due specie; se immaginiamo di considerare soltanto le V_3 normali che non sono coni, le V_3 di 1.ª specie sono:

a) la V_3^5 di S_6 rappresentata nello spazio ordinario dal sistema ∞^6 delle superficie cubiche che passano per una quartica di 2.ª specie (che può degenerare, sotto la condizione di mantenersi di 2.ª specie);

b) la V_3^6 di S_7 rappresentata nello spazio ordinario dal sistema ∞^7 delle superficie cubiche che passano per tre rette a due a due sghembe;

c) la V_3^6 di S_7 rappresentata nello spazio ordinario dal sistema ∞^7 delle superficie cubiche che passano per una cubica gobba (che può degenerare) e hanno in un suo punto fisso un punto doppio;

d) la V_3^6 di S_7 rappresentata nello spazio ordinario dal sistema ∞^7 delle superficie cubiche che passano per una cubica piana con un punto doppio ed hanno in questo punto un punto doppio biplanare con un piano osculatore fisso;

e) la V_3^7 di S_8 rappresentata nello spazio ordinario dal sistema ∞^8 delle quadriche che passano per un punto.

La varietà *e*) si ottiene, per proiezione da un suo punto, dalla V_3^8 di S_9 rappresentata nello spazio ordinario dal sistema di tutte le quadriche e questa V_3^8 è l'unica V_3 di 2.ª specie che non sia un cono.

(*) *Rappresentazione della quartica*, etc. (Annali di Mat., 1 (3) 1899).

Questa V_3^8 di S_9 è caso particolare della $V_r^{2^r}$ di $S_{\frac{r(r+3)}{2}}$ rappresentata punto per punto sull'S_r così che le sezioni iperpiane abbiano per immagini le quadriche di S_r, varietà che, per una ragione ovvia, proporrei di chiamare *varietà di Veronese.* Per alcune questioni lo studio delle varietà di VERONESE non presenta alcuna difficoltà e basta tener presenti i notissimi lavori dei proff. VERONESE e SEGRE sulla superficie di VERONESE e la Nota del prof. SEGRE su « *gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice* » (*) per risolverle immediatamente. Perciò credo inutile trattenermi qui sulla V_3^8 di S_9, una cui proprietà notevole e non immediata estensione di proprietà analoga per la superficie di VERONESE si trova in una mia Nota recente (**).

10.° Volendo considerare un po' da vicino le proprietà della V_3^5 di S_6 del caso *a*), chiamiamo (in questo n.° e nei successivi) K la quartica di 2.ª specie base del sistema rappresentativo di superficie cubiche L e Q la quadrica che la contiene.

Le corde di K sono tagliate dalle superficie L in un sol punto variabile, quindi rappresentano rette della varietà obbiettiva. Poichè questa osservazione può senz'altro invertirsi e poichè 3 è il numero dei punti doppi apparenti di una quartica di 2.ª specie, abbiamo:

La V_3^5 *contiene* ∞^2 *rette; per ogni suo punto ne passano, in generale, tre.*

Un iperpiano qualunque taglia V_3^5 in un V_2^5 razionale normale, rappresentata su un piano mediante il sistema lineare ∞^5 delle cubiche passanti per quattro punti, dunque, rammentando una nota proprietà di questa superficie:

Ogni iperpiano contiene 10 rette del sistema costituito dalle rette di V_3^5 *o ne contiene infinite.*

Per brevità chiameremo Λ il sistema d'ordine 3 e classe 10 costituito da queste rette.

11.° Le rette delle due schiere rigate della quadrica Q secano K, quelle di una schiera in tre punti, quelle dell'altra in un punto solo.

Ora la rappresentazione della V_3^5 sullo spazio ordinario si ottiene per proiezione dal piano di una sua conica C^2, da ogni punto della quale escono tre rette di Λ contenute nello S_3 ivi tangente alla V_3^5, dunque:

Le rette di Q, ciascuna delle quali rappresenta i punti di V_3^5 *infinitamente*

(*) *Rendic. della R. Accad. dei Lincei,* 1900, 2.° sem.

(**) SCORZA, *Determinazione delle varietà a tre dimensioni di* S_r $(r \geqq 7)$ *i cui* S_3 *tangenti si tagliano a due a due* (Rendic. Circ. Mat. di Palermo, XXV, 1908).

vicini a uno dei punti della conica C^2, sono date dalle trisecanti di K e ogni punto di K rappresenta tutti i punti di una retta di V_3^5.

12.° Per precisare ancora meglio questi teoremi, osserviamo che la V_3^5 contiene un sistema ∞^4 di coniche tale che per una coppia di punti generici della V_3^5 passa una conica ed una sola.

Questa osservazione può giustificarsi in varia maniera. Può dirsi, per es., che se O è un punto generico dello spazio ambiente, ogni iperpiano per O taglia la V_3^5 in una V_2^5 dotata di un sol punto doppio apparente (*), quindi le ∞^1 corde di V_3^5 che passano per O stanno in un piano ω, e la V_3^5 contiene ∞^4 curve disposte in piani di cui ne passa uno ed uno solo per ogni punto dello spazio ambiente. Ma allora queste ∞^4 curve sono necessariamente coniche (in caso contrario ogni corda di V_3^5 sarebbe almeno una trisecante) e per una coppia di punti generici della V_3^5 non ne passerà che una sola.

Si deduce incidentalmente di qui un teorema noto, del quale del resto avremmo potuto servirci per dimostrare l'esistenza su V_3^5 di un sistema ∞^4 di coniche. Si vede subito infatti che le ∞^4 coniche in discorso sono rappresentate nello spazio ordinario dalle ∞^4 coniche quadrisecanti K e quindi:

Per due punti generici dello spazio di una quartica di 2.ª specie passa una ed una sola conica quadrisecante la quartica (**).

13.° Ciò posto si può supporre che la conica C^2 sia una qualunque delle ∞^4 coniche della V_3^5; d'altra parte gli S_4 che proiettano dal piano di C^2 gli S_3 tangenti alla V_3^5 nei punti di C^2 costituiscono un cono quadrico che ha per traccia sullo spazio ordinario rappresentativo la quadrica Q, dunque:

Gli S_3 tangenti alla V_3^5 nei punti di una sua conica sono proiettati dal piano di questa secondo gli S_4 di una schiera di un cono quadrico avente per vertice quel piano.

Le tracce sullo spazio rappresentativo degli S_4 di cui si parla in questo enunciato, quando ci si riferisca alla conica C^2, sono le trisecanti di K; le tracce degli S_4 dell'altra schiera appartenente al cono quadrico sono le ge-

(*) Severi, *Intorno ai punti doppi impropri di una superficie generale dello spazio a quattro dimensioni, e a' suoi punti tripli apparenti* (Rendic. del Circolo Mat. di Palermo, t. XV), n.° 9.

(**) Teorema del prof. Montesano, cfr. *Su i vari tipi di congruenze lineari di coniche dello spazio* (Rendic. della R. Accad. di Scienze fis. e mat. di Napoli, 1895; Nota II). Vedi anche per l'inversione di questo teorema: Berzolari, *Sulle coniche appoggiate in più punti a date curve algebriche* (Rendic. del R. Ist. Lombardo, vol. XXXIII, 1900), nota I, n.° 11.

neratrici di Q unisecanti K, quindi tali S_4 tagliano la V_3^5 in una curva del 5.° ordine che si spezza in una conica contata due volte e in una retta residua.

Il cono quadrico in discorso contiene poi la rigata delle rette di Λ uscenti dai punti della conica; d'altra parte esso taglia la V_3^5 in una V_2^{10}, dunque:

La rigata costituita dalle rette di Λ uscenti dai punti di una conica della V_3 è una rigata (razionale, perchè in corrispondenza biunivoca con K) del 10.° ordine avente nella conica una direttrice tripla.

È utile osservare che l'ordine di questa rigata poteva esser calcolato diversamente: bastava considerare perciò o che un iperpiano per una conica della V_3^5 taglia la V_3^5 in una V_2^5 per la conica con quattro rette appoggiate ad essa, oppure che una S_4 generico taglia la V_3^5 in una curva del 5.° ordine rappresentata dalla ulteriore intersezione di due superficie cubiche passanti per K, e che tale intersezione è del 5.° ordine e del genere 1, per modo da avere 10 punti a comune con K (*).

14.° Se chiamiamo *rigate* θ le rigate costituite dalle rette di Λ uscenti dai punti delle ∞^4 coniche della V_3^5, si ha subito che:

Le rigate θ costituiscono nella varietà ∞^2 delle rette di Λ (varietà razionale perchè in corrispondenza biunivoca colle coppie di punti di K) un sistema lineare ∞^4.

Infatti siano a, b, c, d quattro rette generiche di V_3^5. Le prime tre a, b, c sono congiunte da un S_5 che taglia la V_3^5 in una V_2^5 razionale normale contenente le tre rette a, b, c e secante la retta d in un punto D.

Questa V_2^5 contiene un solo fascio di coniche che siano appoggiate ad a, b, c e di questo fascio *una* conica passa per D, dunque la sola rigata θ che ha questa conica per direttrice tripla passa per le quattro rette a, b, c, d.

Guardando allo spazio rappresentativo si ricava incidentalmente il teorema:

Data una quartica di 2.ª specie e quattro sue corde generiche esiste una ed una sola conica che si appoggi alle quattro corde e tagli la quartica in quattro punti.

Il grado del sistema lineare costituito dalle rigate θ entro la varietà delle rette di Λ si calcola con tutta facilità.

(*) Per la notissima formula (di Noether) che dà il genere (virtuale) di una curva spezzata.

Si osservi per questo che, se k_1 e k_2 sono due coniche generiche di V_3^5, l'iperpiano che le contiene sega la V_3^5 in una V_2^5 su cui k_1 e k_2 (non avendo alcun punto comune) appartengono a uno stesso dei cinque fasci di coniche in essa contenuti (*). Dunque vi sono quattro rette di Λ appoggiate a k_1 e k_2, cioè le due rigate θ aventi k_1 e k_2 per direttrici triple hanno quattro generatrici in comune e il grado richiesto è 4.

15.° Insieme con le rigate θ giova considerare entro la varietà Λ le rigate θ_1, ciascuna delle quali è costituita dalle ∞^1 coppie di rette di Λ che escono dai punti di una retta della V_3^5. Una rigata θ_1 è rappresentata dalle corde di K appoggiate a una sua corda fissa e queste costituiscono una rigata cubica passante per K, dunque la rigata obbiettiva costituisce una sezione iperpiana della V_3^5 ed è una V_2^5 razionale (normale in un S_6) dotata di una retta direttrice doppia.

Si ricava di qui che:

Per ogni retta della V_3^5 passa un iperpiano che la tocca in tutti i punti della retta stessa.

Una rigata razionale V_2^5 di S_5 che abbia una retta direttrice doppia è proiezione di una V_2^5 di S_6 da un punto del piano di una sua conica direttrice, dunque sulla direttrice doppia vi sono due punti uniplanari.

A due corde generiche di K si appoggia sempre una ed una sola corda della curva stessa (due g_2^1 in un ente razionale hanno sempre una coppia comune), dunque:

Entro Λ le rigate θ_1 costituiscono una rete omaloidica.

Infine poichè una conica e una retta generiche della V_3^5 sono congiunte da un S_4 che taglia la V_3^5 in due rette ulteriori appoggiate ad esse, od anche, poichè due rigate θ_1 corrispondenti a rette incidenti della V_3^5 possono considerarsi come costituenti insieme una rigata θ, si conclude che:

Una rigata θ e una rigata θ_1 hanno in generale due rette in comune.

16.° I teoremi precedenti dànno luogo a una importante deduzione relativamente alla V_3^5.

Infatti si immagini di riferire proiettivamente le rigate θ agli iperpiani di un S_4: le rette del sistema Λ verranno mutate nei punti di una superficie del 4.° ordine di S_4, la quale conterrà ∞^2 coniche, corrispondentemente alle rigate θ_1 di Λ, dunque questa superficie, che chiameremo F_2^4, sarà proiezione da un punto esterno di una superficie di VERONESE.

(*) Cfr. CAPORALI, *Sulla superficie del quinto ordine dotata di una curva doppia del quinto ordine* (Memorie di Geometria, Napoli, Pellerano, 1888).

Ora si osservi che le tre rette di Λ uscenti da un punto della V_3^5 impongono *due* sole condizioni a una rigata θ che debba contenerle, quindi i tre punti di F_2^4 che le rappresentano impongono due sole condizioni agli iperpiani che debbono contenerli, ossia sono allineati. Ne segue che, come le rette di Λ vengono riferite biunivocamente ai punti di F_2^4, così i punti della V_3^5 vengono riferiti biunivocamente alle sue trisecanti. Ma le trisecanti della F_2^4 costituiscono il sistema ∞^3 di rette comuni a tre (e quindi a una rete di) complessi lineari in S_4 (*), dunque:

I punti della V_3^5 possono rappresentarsi biunivocamente sul sistema ∞^3 delle rette comuni a tre complessi lineari di uno spazio a quattro dimensioni.

17.° Per approfondire ancora lo studio delle proprietà della V_3^5, rammentiamo che in una F_2^4 di S_4 con ∞^2 coniche (come del resto si verifica subito o direttamente o ricorrendo alla rappresentazione della F_2^4 mediante un sistema lineare ∞^4 di coniche), il piano di una conica taglia ulteriormente la F_2^4 in un punto, centro del fascio delle ∞^1 trisecanti della superficie situate in quel piano, e che il luogo dei punti di contatto delle tangenti condotte ad una conica dal punto in cui il suo piano taglia ulteriormente la F_2^4 è una curva del quart'ordine C^4 razionale normale. Questa C^4 è anche il luogo dei punti della F_2^4 per i quali le ∞^1 trisecanti riduconsi a ∞^1 tangenti-secanti e infine il piano tangente alla F_2^4 in un punto della C^4 è osculatore a questa ultima (**).

Le trisecanti di F_2^4 che sono delle tangenti-secanti corrispondono, nel modo che si è detto precedentemente, ai punti della V_3^5 da cui escono due, anzi che tre rette di Λ, e poichè tali trisecanti si distribuiscono in ∞^1 fasci coi centri nei punti di C^4, così questi punti della V_3^5 si distribuiranno sopra ∞^1 rette costituenti una rigata (***), la rigata Φ di Λ che corrisponde ai punti della linea C^4 di F_2^4.

Se h è una generatrice di Φ, da ogni punto di h esce una sola ulteriore

(*) Castelnuovo, *Ricerche di Geometria della retta nello spazio a quattro dimensioni* (Atti del R. Ist. Veneto di scienze, lettere ed arti, serie VII, t. II), n.i 7, 8.

(**) Cfr. Segre, *Sulle varietà cubiche*, etc. (Memorie della R. Accad. delle Scienze di Torino, 1888) n.i 43 e 44; od anche: Bertini, *Introduzione alla geom. proiettiva degli iperspazi* (Pisa, Spoerri, 1907), pp. 347-8.

(***) In generale i punti di una retta di Λ corrispondono alle trisecanti di F_2^4 del fascio avente il centro in un suo punto. I punti di appoggio di queste trisecanti sulla F_2^4 fuori del centro del fascio stanno poi sulla conica che rappresenta la rigata θ_1 avente quella retta per direttrice doppia.

retta di Λ, come dal corrispondente punto H di F_2^4 (e C^4) escono soltanto delle tangenti-secanti di F_2^4: e come da H esce *una* retta (la tangente alla conica situata nel piano ivi tangente alla F_2^4, ossia la tangente a C^4) che ha un contatto tripunto in H con F_2^4, così vi è su h *un* punto dal quale *non* escono ulteriori rette di Λ.

Se diciamo φ la curva di Φ luogo dei punti di V_3^5 da cui esce una sola retta di Λ, per cercare l'ordine di φ converrà osservare che le sezioni iperpiane di V_3^5 corrispondono, nella rappresentazione dei punti di questa varietà sulle trisecanti di F_2^4, alle congruenze staccate sulla varietà delle trisecanti di F_2^4 dai complessi lineari dell'S_4 cui appartiene la F_2^4.

Infatti una tale congruenza è ad es. quella delle trisecanti uscenti dai punti di una conica di F_2^4 che sono (si vede subito) tutte e sole le trisecanti della F_2^4 appoggiate al piano della conica, e quindi appartenenti al complesso lineare speciale che ha un tal piano per asse, e, per quanto è stato detto, alle rette di questa congruenza corrispondono i punti di V_3^5 situati sulle rette di una rigata θ_1, ossia di una certa sezione iperpiana di V_3^5.

E allora poichè i punti di φ corrispondono alle tangenti di C^4, l'ordine di φ uguaglierà il numero delle tangenti di C^4 appartenenti a un complesso lineare, o, in particolare, al numero delle tangenti di C^4 appoggiate a un S_2 generico dell'S_4 che la contiene. Tale numero è 6, dunque φ è una sestica razionale normale, perchè come le tangenti di C^4 non appartengono ad uno stesso complesso lineare, così φ non è contenuta in un S_5.

Si osservi che per trovare i punti di contatto delle 6 tangenti di C^4 appartenenti a un dato complesso lineare basta, per es., costruire le coincidenze della corrispondenza simmetrica (3, 3) che si ottiene sulla C^4 chiamando omologhi due punti X ed X' quando X' sta nell'S_3 che contiene le rette del complesso uscenti da X. Ne segue che se si considera un complesso lineare il quale contenga tutte le rette del fascio avente il centro nel punto H e situato nel piano ivi tangente ad F_2^4, essendo questo piano osculatore a C^4, due coincidenze della corrispondenza (3, 3) in discorso cadono in H, poichè H coincide con due dei punti ad esso omologhi (*). Ma alla congruenza che un tal complesso lineare stacca dalla varietà delle trisecanti di F_2^4 corrisponde sulla V_3^5 una sezione iperpiana passante per h, dunque un iperpiano che passi per h ha un contatto bipunto con φ nel punto che questa curva ha a comune con h, ossia h è tangente a φ e Φ è la rigata (sviluppabile) delle rette tangenti a φ.

(*) Vedi Bertini, *Introduzione*, etc., pag. 205.

Di qui segue che Φ è del 10.° ordine e costituisce la completa intersezione della V_3^5 con la quadrica Ψ rispetto alla quale ogni punto di φ ha per iperpiano polare l'iperpiano in esso osculatore a φ.

18.° Fra le trisecanti di F_2^4 appoggiate a una sua conica generica due sole sono tangenti a C^4, poichè se una tangente a di C^4 si appoggia alla conica considerata, tale tangente dovendo avere un contatto tripunto con F_2^4 in un punto appartenente alla conica sarà una delle due rette tangenti a C^4 nei punti ove essa taglia il piano della conica.

Che se poi la conica in discorso è, per es., quella che sta nel piano tangente a F_2^4 nel punto H, allora l'unica tangente di C^4 appoggiata ad essa è quella che tocca C^4 nel punto H.

Si conclude che gli iperpiani contenenti le rigate θ_1 che hanno per direttrici doppie le rette di Λ appoggiate ad h hanno tutte un contatto tripunto con la curva φ nel punto che essa ha a comune con h, mentre la rigata θ_1 costituita dalle rette di Λ che escono dai punti di h è la sezione di V_3^5 con l'iperpiano osculatore a φ in quel punto stesso.

Ciò posto, sia d una retta qualunque della V_3^5 e siano h ed i le due generatrici di Φ appoggiate a d. Se H' ed I' sono i punti ove h ed i toccano φ, gli iperpiani osculatori a φ in H' ed I' passano per d, quindi gli iperpiani polari dei punti dh e di rispetto a φ passano per H' ed I' e, precisamente, il primo passerà semplicemente per I' mentre avrà con φ un contatto 5-punto in H' (*) e il secondo passerà semplicemente per H' mentre avrà con φ un contatto 5-punto in I'.

Ne segue che l'involuzione I_1^6 del 6.° ordine e di 1.ª specie tagliata su φ dagli iperpiani polari dei punti di d avrà per equazione sull'ente razionale φ

$$x_1\, x_2\, (k_1\, x_1^4 + k_2\, x_2^4) = 0$$

se i punti fondamentali $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ sono H' ed I' e quindi ogni gruppo della I_1^6 sarà una sestica ottaedrica, cioè una sestica binaria costituita da tre coppie separantisi a due a due armonicamente.

Deduciamo di qui che:

La V_3^5 di S_6 a curve sezioni ellittiche è il luogo dei punti i cui iperpiani polari rispetto a una curva del 6° ordine razionale normale φ tagliano la curva stessa in una sestica binaria ottaedrica.

(*) Si ricordi che nella polarità individuata dalla curva φ nello S_6 una retta tangente a φ ha per S_4 polare l'S_4 osculatore a φ nel suo punto di contatto.

Le ∞^3 collineazioni che mutano in sè la curva φ mutano pure in sè la V_3^5 e viceversa; quindi:

La V_3^5 ammette un gruppo ∞^3 di trasformazioni omografiche in sè.

Questo gruppo si riflette nello S_3 rappresentativo in un gruppo ∞^3 di trasformazioni cremoniane che in una ricerca dei proff. Enriques e Fano si è presentato come uno dei pochi tipi di gruppi imprimitivi irriducibili (per trasformazioni cremoniane) a gruppi di Jonquières generalizzati (*).

19. Abbiamo osservato che una rigata θ_1 ha per immagine nell'S_3 rappresentativo della V_3^5 la rigata di 3.° grado costituita dalle corde di K appoggiate a una sua corda fissa. Finchè questa corda è generica la rigata di 3.° grado ad essa relativa ha in essa soltanto la direttrice doppia, ma se la corda considerata b è immagine di una retta di Λ appartenente a Φ, da ogni punto della corda deve partire soltanto una corda ulteriore di K e deve esistere su b un punto pel quale b sia l'unica corda di K passante per esso; quindi b deve essere la retta congiungente i punti di contatto di un piano bitangente a K e la rigata relativa a b deve risultare una rigata di Cayley.

Ora Φ essendo situata sulla quadrica Ψ ha in comune quattro punti con (ogni conica e quindi con) la conica di cui si fa la proiezione, dunque l'immagine di Φ è una rigata sviluppabile razionale del 6.° grado.

Questo, poichè è chiaro che l'immagine di Φ è la sviluppabile bitangente a K, collima col fatto noto che la sviluppabile bitangente di K è del 6.° ordine e della 4.ª classe. Il suo spigolo di regresso è poi una sestica gobba razionale C^6, proiezione della sestica normale φ.

Come il gruppo delle trasformazioni proiettive della V_3^5 in sè è determinato dalla curva φ, così il gruppo delle trasformazioni cremoniane ad esso corrispondente nello spazio rappresentativo si può costruire partendo dalla sestica C^6.

Si osservi dapprima che i punti in cui una retta d di Λ incontra la rigata Φ hanno per immagini i due punti uniplanari della rigata gobba di 3.° grado contenente K e avente per direttrice doppia l'immagine d' di d, ossia le intersezioni di d' con la sviluppabile bitangente di K non situate sulla

(*) F. Enriques e G. Fano, *Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane dello spazio* (Annali di Matematica, 1897), n.° 26. In questo lavoro le equazioni della V_3^5 vengono scritte utilizzando la teoria delle forme binarie, ma alle stesse equazioni si arriva anche tenendo conto del teorema da noi dimostrato che la V_3^5 può rappresentarsi sulla varietà delle rette comuni a tre complessi lineari di S_4.

curva K. Le due tangenti di C^6 passanti poi per questi punti vanno a toccare C^6 nei punti immagini di quelli che φ ha sulle rette di Φ tagliate da d.

La definizione di V_3^5 assegnata nel numero precedente dà allora il teorema:

Se per un punto qualunque dello spazio (ordinario) contenente K si conducono le tre corde che vi passano, e poi si costruiscono sullo spigolo di regresso C^6 della sviluppabile bitangente i punti di contatto delle tangenti di C^6 che si appoggiano a quelle corde fuori di K, si ottengono sopra C^6 tre coppie di punti che si separano armonicamente due a due.

Allora le ∞^3 trasformazioni cremoniane in discorso si ottengono stabilendo che per ogni trasformazione proiettiva della C^6 in sè stessa si dicano omologhi i due punti X ed X' dello spazio che dànno luogo su C^6 a due sestiche binarie ottaedriche corrispondenti nella data proiettività.

20.º Passiamo ora alla considerazione della V_3^6 di S_7 a curve sezioni ellittiche rappresentata dalle superficie cubiche L passanti per tre rette a_1, a_2, a_3 sghembe fra di loro a due a due. La quadrica Q che passa per a_1, a_2, a_3 è la quadrica fondamentale dello spazio rappresentativo che corrisponde ai punti di V_3^6 infinitamente vicini alla cubica gobba C^3 di V_3^6 da cui si fa la proiezione.

Si riconosce subito che la V_3^6 contiene tre sistemi di rette ∞^2 tali che per ogni punto della V_3^6 passa una retta per ogni sistema; tali rette hanno per immagini quelle delle tre congruenze lineari aventi per direttrici (a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_1). Poi, siccome ogni superficie cubica L passante per a_1, a_2, a_3 contiene due rette appoggiate a due di queste tre e non alla terza, così quei tre sistemi ∞^2 di rette sono ciascuno della 2.ª classe.

Un piano dello spazio rappresentativo che passi, per es., per a_1, taglia le superficie cubiche L fuori di a_1 in coniche residue passanti per i punti ove esso incontra le rette a_2, a_3: quindi è immagine di una quadrica V_2^2 di V_3^6. Risulta così che la V_3^6 contiene tre fasci di quadriche corrispondentemente ai tre fasci di piani a_1, a_2, a_3.

Le quadriche passanti, per es., per a_1, a_2, poichè con ogni piano passante per a_3 costituiscono una superficie L, rappresenteranno le sezioni residue della V_3^6 con gli iperpiani passanti per le quadriche del fascio corrispondente a quello dei piani per a_3; quindi si avranno sopra V_3^6 tre sistemi ∞^3 di V_2^4 razionali normali (rigate). Ognuno di questi sistemi è residuo di uno dei tre precedenti fasci di quadriche rispetto a quello delle sezioni iperpiane.

Le rette dei tre sistemi di V_3^6 uscenti dai punti della C^3 da cui si fa la proiezione costituiscono tre rigate distinte razionali normali appartenenti ai tre sistemi ora considerati; ma ai punti di una generatrice di una di esse non corrisponde nello spazio rappresentativo che un unico punto di una delle tre rette a_1, a_2, a_3.

Per fissare le idee chiamiamo Λ_1, Λ_2, Λ_3 i tre sistemi di rette di V_3^6 rappresentati dalle congruenze lineari (a_2, a_3), (a_3, a_1), (a_1, a_2); Φ_1, Φ_2, Φ_3 i tre fasci di quadriche rappresentate dai piani per a_1, a_2, a_3 e infine Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 i tre sistemi lineari ∞^3 di V_2^4 corrispondente alle rigate quadriche contenute nelle congruenze (a_2, a_3), (a_3, a_1), (a_1, a_2) rispettivamente.

Allora si vede subito che le rigate Ψ_i sono formate con le rette del sistema Λ_i, mentre le due schiere di rette di una quadrica Φ_i appartengono l'uno al sistema Λ_h, l'altra al sistema Λ_k, se i, h, k costituiscono una permutazione qualsiasi dei numeri 1, 2, 3.

Una quadrica Φ_i e una rigata Ψ_i prese insieme costituiscono una sezione iperpiana di V_3^6 e si tagliano lungo una conica (le ∞^1 coniche direttrici di una Ψ_i sono appunto tagliate su questa dalle quadriche del fascio Φ_i).

Due quadriche dello stesso fascio non hanno punti comuni; invece due quadriche di fasci differenti si tagliano secondo una retta e tre quadriche appartenenti ai tre fasci hanno un sol punto comune. Due quadriche Φ_i sono punteggiate proiettivamente dalle rette del sistema Λ_i; etc., etc.

21.° Dalle osservazioni fatte si deduce una facile costruzione proiettiva della V_3^6 che stiamo studiando.

Prendiamo infatti in un S_7 due S_3 indipendenti α', α'' e riferiamoli collinearmente. È chiaro che le rette congiungenti i punti omologhi formano una V_4^4 razionale normale contenente ∞^1 S_3 (di cui due sono appunto α' e α'') e ∞^3 rette: gli S_3 tagliano sulle ∞^3 rette ∞^3 punteggiate proiettive e le rette punteggiano collinearmente gli ∞^1 S_3. Allora segue subito che, se entro α' e α'' si considerano due quadriche omologhe Φ'_1 e Φ''_1, le rette che ne congiungono i punti omologhi si appoggiano ad ∞^1 altre quadriche $\Phi'''_1 \dots$ e formano un sistema Λ_1 di una V_3^6.

Gli altri sistemi di rette della V_3^6 sono costituiti dalle rette dei due sistemi di schiere delle Φ'_1, Φ''_1, $\Phi'''_1 \dots$ etc.

I tre fasci di quadriche appartenenti alle V_3^6 permettono di determinare facilmente le trasformazioni proiettive in sè della V_3^6. È chiaro, infatti, che una omografia la quale muti in sè la V_3^6 muta in sè o scambia fra di loro, proiettivamente, i tre fasci di quadriche; e d'altra parte se si stabiliscono, per es., delle proiettività nei singoli fasci di quadriche Φ_1, Φ_2, Φ_3 verrà stabilita fra i punti della V_3^6 una corrispondenza biunivoca, quando si supponga che siano omologhi due punti che si trovino su quadriche omologhe dei fasci. Tale corrispondenza biunivoca è poi una proiettività perchè muta la sezione iperpiana formata da tre quadriche prese una per fascio in una analoga sezione iperpiana, quindi:

La V_3^6 di S_7 che stiamo esaminando ammette ∞^9 omografie (costituenti gruppo) che mutano in sè ciascuno dei tre fasci di quadriche; tre sistemi ∞^6 di omografie che mutano in sè le quadriche di un fascio ma scambiano fra di loro quelle degli altri due, e infine un altro sistema ∞^6 di omografie che scambiano fra di loro i tre fasci di quadriche.

22.° Non ci fermiamo più minutamente sullo studio di questa V_3^6 poichè come è chiaro esso è estremamente semplice. Osserveremo soltanto che essa può assumersi come la varietà di S_7 rappresentante, nel modo che fu indicato dal prof. SEGRE (*), la varietà delle terne di punti di tre rette; quindi una sua sezione iperpiana, cioè una F_2^6 di S_6 razionale normale può riguardarsi come rappresentante la varietà delle terne di punti omologhi in tre punteggiate in corrispondenza trilineare; allora lo studio della F_2^6 diventa quello della varietà di queste terne e viceversa.

In particolare si osservi come il fatto che un iperpiano il quale passi per cinque punti della V_3^6 la taglia in un sesto individuato dai precedenti diventa il teorema noto (**):

Date su tre rette a, b, c cinque terne di punti omologhi vi sono ∞^2 corrispondenze trilineari che le contengono e le corrispondenze stesse hanno in comune una sesta terna individuata da quelle.

23.° Più interessanti risultano le V_3^6 di S_7 rappresentate nello spazio ordinario dalle superficie cubiche per una cubica gobba e con un punto doppio in un punto di questa o dalle superficie cubiche per una cubica piana nodale con un punto biplanare nel nodo della cubica e in esso un piano osculatore fisso.

Così ho dimostrato in una Nota già citata che esse sono insieme con la V_3^8 di 2.ª specie e le sue proiezioni sopra un S_8 o un S_7 alcune delle poche V_3 di $S_r\,(r \geq 7)$ a S_3 tangenti mutuamente secantisi. Qui piuttosto che riprodurre quel ragionamento preferisco notarne qualche altra proprietà.

(*) SEGRE, *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, V, 1891).

(**) CASTELNUOVO, *Studio sulla omografia di seconda specie* (Atti del R. Ist. Veneto di scienze, lettere ed arti, t. V, serie VI), n.° 28.

24.° Consideriamo in primo luogo la V_3^6 rappresentata dalle superficie cubiche L che passano per una cubica gobba K e hanno in un suo punto O un punto doppio.

Tale V_3^6 contiene due sistemi ∞^2 di rette: l'uno, che diremo Λ, è rappresentato dalle rette della stella O, l'altro che diremo M, dalle corde della cubica K. Per ogni punto di V_3^6 passa una retta di Λ e una retta di M, invece in ogni iperpiano vi sono tre rette di Λ e tre rette di M.

I piani dello spazio rappresentativo che passano per O e le quadriche che contengono K rappresentano due reti di rigate cubiche normali di V_3^6, mutuamente residue rispetto al sistema lineare delle sezioni iperpiane. Le direttrici delle rigate cubiche corrispondenti ai piani per O, cioè delle rigate formate con rette di Λ appartengono al sistema M e così le direttrici delle rigate riempite da rette di M appartengono a Λ(*).

Due rigate appartenenti a una medesima rete si tagliano in una retta che è una loro generatrice comune; invece due rigate appartenenti a reti diverse si tagliano in una conica rappresentata dalla conica intersezione di una quadrica per K con un piano per O.

Può dirsi pertanto:

Date due rette della V_3^6 appartenenti a uno stesso sistema esiste sempre una ed una sola retta dell'altro che si appoggia ad entrambe.

25.° Alla V_3^6 appartengono anche ∞^4 coniche e per due suoi punti generici ne passa una ed una sola. Esse sono rappresentate dalle ∞^4 coniche dello spazio rappresentativo che passano per O e si appoggiano in due punti ulteriori a K, e come ognuna di queste sta sopra una quadrica per K e un piano per O, così ognuna delle coniche di V_3^6 sta sopra due rigate cubiche normali, formate l'una dalle rette di Λ che escono dai suoi punti e l'altra dalle rette di M che escono dai punti medesimi.

26.° Un iperpiano che contenga una rigata di una rete taglia V_3^6 in una rigata dell'altra rete e quindi tocca V_3^6 in tutti i punti della conica secondo cui le due rigate si tagliano. Viceversa, un iperpiano che sia costretto a toccare V_3^6 in due punti taglia la V_3^6 in una superficie rappresentata da

(*) La cosa si vede subito nell'S_3 rappresentativo. Così un piano per O taglia K in due punti ulteriori A e B e le superficie L in un sistema lineare ∞^4 di cubiche per O, A, B con un punto doppio in O. Queste rappresentano adunque le sezioni iperpiane di una V_2^3 razionale normale, la cui direttrice ha per immagine AB e AB è appunto una corda di K. Se si considera una quadrica per K, la direttrice della V_2^3 corrispondente è l'unisecante di K che appartiene alla quadrica ed esce dal punto O.

una superficie cubica per K, con un punto doppio in O e due altri punti doppi A e B, cioè da una superficie spezzata nel piano OAB e nella quadrica che passa per K ed A, B; dunque:

Se un iperpiano tocca V_3^6 in più di un punto la tocca in ∞^1 e precisamente in tutti i punti di una conica. Viceversa la V_3^6 è toccata lungo ogni sua conica da un iperpiano.

27.° Siano a_1, a_2, a_3 tre rette qualunque di A e Φ_1, Φ_2, Φ_3 le tre rigate cubiche normali che contengono (come generatrici) a_2, a_3; a_3, a_1; a_1, a_2 rispettivamente. Se diciamo Σ_1, Σ_2, Σ_3 gli S_4 che le contengono, si può fissare nell'S_7 una corrispondenza fra gli S_5 passanti per Σ_1, Σ_2, Σ_3 chiamando omologhi tre S_5 che congiungono questi tre spazi con una stessa retta di M (*).

Se si conduce per Σ_1 un iperpiano α_1, esso taglia V_3^6 in una rigata residua Ψ_1 di rette di M che insieme con Φ_2 e Φ_3 dà l'intersezione completa di V_3^6 con altri due iperpiani α_2 e α_3, dunque agli S_5 per Σ_1 che proiettano le rette di Ψ_1 e formano un fascio nell'iperpiano α_1 corrispondono nelle stelle Σ_2 e Σ_3 gli S_5 che proiettano le rette di Ψ_1 e formano dei fasci negli iperpiani α_2 e α_3; ossia le tre stelle Σ_1, Σ_2, e Σ_3 sono riferite omograficamente.

Ne deduciamo, dopo una facile inversione del ragionamento ora fatto:

Se in un S_7 si riferiscono proiettivamente gli S_5 passanti per tre S_4 generici, le ∞^2 rette secondo cui si intersecano le terne di S_5 omologhi riempiono una V_3^6 a curve sezioni ellittiche. Essa contiene un secondo sistema di ∞^2 rette che è generabile nello stesso modo, e anzi i tre S_4, centri di tre stelle proiettive generanti la V_3^6, sono gli spazi che contengono tre rigate cubiche normali qualunque di una delle due reti di tali rigate che possono formarsi con le rette dei due detti sistemi.

Poichè una F_2^6 razionale normale di S_6, rappresentata su un piano dal sistema ∞^6 di cubiche che passano per tre punti, può sempre pensarsi come una sezione iperpiana della V_3^6, così segue senz'altro da questo teorema la generazione proiettiva della F_2^6 che fu indicata dal prof. Bordiga (**).

28.° Una cubica gobba incontra complessivamente in tre punti due rigate cubiche (di reti diverse) costituenti insieme una sezione iperpiana: quindi, per un noto ragionamento, incontra in un punto ciascuna rigata di una rete e in due punti ciascuna rigata dall'altra rete.

(*) Notisi che ogni retta di **M** si appoggia in un punto a una rigata cubica costituita da rette di **A**.

(**) Bordiga, *Di alcune superficie*, etc. (Atti Ist. Veneto, t. IV, serie 6.ª, 1886).

Segue che, se si prendono due punti della cubica e si conduce per essi la rigata della 1.ª rete che li contiene, tale rigata contiene la cubica per intero.

Adunque:

Sulla V_3^6 si hanno due sistemi ∞^6 di cubiche gobbe. Essi sono costituiti dalle cubiche gobbe situate rispettivamente sulle rigate cubiche normali formate con le rette di Λ e M. Le cubiche situate sulle rigate di Λ sono rappresentate dalle cubiche piane che hanno in O un nodo e bisecano altrove la cubica K; quelle dell'altro sono rappresentate dalle cubiche gobbe che passano per O e quadrisecano altrove la cubica K. Tra le prime si trovano pertanto le cubiche gobbe che hanno per immagini le rette dello spazio rappresentativo.

29.° Dai punti di una cubica gobba situata sopra la V_3^6 escono due serie ∞^1 di rette: una è la serie delle generatrici di una V_2^3 normale, ma l'altra non può essere che la serie delle generatrici di una rigata d'ordine più elevato.

Per trovare quest'ordine supponiamo che la cubica di cui si tratta si trovi sopra una rigata cubica della rete costruita con rette di Λ e, per facilitare ancora più la ricerca, supponiamo, come è possibile, che essa abbia per immagine una retta r dello spazio rappresentativo. Allora la rigata delle rette di M uscenti dai punti della cubica ha per immagine la rigata delle corde di K uscenti dai punti di r, e questa è dell'ordine 4, ha in K una direttrice doppia e in r una direttrice semplice.

D'altra parte, due superficie cubiche L si tagliano oltre che in K in una sestica residua con un punto triplo in O e appoggiata in altri sei punti a K, quindi questa sestica taglia la rigata quartica precedente in $4\times 6-3\times 2-6\times 2=6$ punti fuori di K e la rigata di cui questa è immagine è dell'ordine 6.

In particolare delle due rigate formate dalle rette di Λ e M uscenti dai punti della cubica da cui si fa la proiezione della V_3^6 sullo spazio rappresentativo, la seconda, che è una V_2^3, ha per immagine il solo punto O, la prima, che è una V_2^6, ha per immagine la curva K, ogni sua generatrice proiettandosi in un punto di K. Questo dimostra che la V_2^6 appartiene all'S_7 (altrimenti K sarebbe una cubica piana) ed è una V_2^6 razionale normale con ∞^1 direttrici minime d'ordine 3.

Riassumendo abbiamo:

Le rette di V_3^6 uscenti dai punti di una sua cubica gobba costituiscono due rigate razionali normali. Una è una V_2^3 e l'altra è una V_2^6 con ∞^1 direttrici minime d'ordine 3; quest'ultima è incontrata in due punti da ogni retta del sistema Λ se è costituita da rette di M, e viceversa.

Tenendo presente ancora la cubica gobba da cui si fa la proiezione si ricava inoltre che:

La V_2^3, contata due volte, e la V_2^6 formate dalle rette di V_3^6 uscenti dai punti di una sua cubica costituiscono la completa intersezione della V_3^6 col cono quadrico (cinque volte specializzato) proiettante dallo spazio della cubica gli spazi tangenti alla V_3^6 nei punti della cubica stessa.

30.° Una rappresentazione della V_3^6, di cui stiamo occupandoci, sopra un S_3 può ottenersi anche in un altro modo, utilizzando la proprietà che essa contiene ∞^4 coniche di cui ne passa una per ogni coppia di punti generici della V_3^6; proprietà che, sotto certe restrizioni, è conseguenza dell'altra, di cui pure essa è dotata, che gli S_3 ad essa tangenti in due punti generici A e B si incontrano in un punto.

Consideriamo infatti un punto A della V_3^6 e l'S_3, α, che la tocca in questo punto: allora la V_3^6 è rappresentata biunivocamente su α quando si faccia corrispondere al punto X di V_3^6, il punto X' di α ove la tangente in X alla conica di V_3^6 che passa per A e per X taglia la retta tangente alla conica stessa nel punto A. Infatti per ogni coppia di punti di V_3^6 passa una sola sua conica e quindi in particolare per ogni retta di α uscente da A vi è una sola conica di V_3^6 che le risulti tangente in A.

31.° Per esaminare brevemente le proprietà della rappresentazione così ottenuta (*) chiamiamo l_a ed m_a le rette di Λ e M, rispettivamente, uscenti dal punto A, e cerchiamo l'immagine di una retta generica l (o m) di Λ (o M).

Per le due rette l_a ed l di Λ passa una rigata cubica V_2^3 di rette dello stesso sistema avente per direttrice una retta m di M appoggiata ad l_a nel punto D, per conseguenza i punti di α corrispondenti ai punti di V_3^6 situati su tale V_2^3 si potranno considerare come ottenuti tagliando il piano $m\, l_a$ coi piani tangenti alla V_2^3 nei suoi singoli punti.

Ma con tale costruzione (**) le generatrici di V_2^3 vengono ad avere come

(*) Una considerazione analoga a quella del testo dà subito una *costruzione* della nota rappresentazione della superficie di VERONESE mediante il sistema di tutte le coniche di un piano (e più in generale, di *ogni varietà di Veronese* mediante il sistema delle quadriche di un S_r). Se infatti, preso un punto A della superficie di VERONESE e il piano α ad essa tangente in A, si fa corrispondere ad ogni altro punto X della superficie il punto X' di α che è il polo della retta AX rispetto alla conica della superficie che passa per A e per X, si vede che la corrispondenza fra X e X' è biunivoca *senza eccezioni* e che le sezioni iperpiane della superficie sono rappresentate dalle coniche di α.

(**) Se la costruzione indicata nella nota precedente si applica a una V_2^3 di S_4 la conclusione a cui si perviene è del tutto analoga. Se infatti (tenute le notazioni precedenti), D è immagini le rette del piano $m\, l_a$ uscenti da D e le sezioni iperpiane della V_2^3 vengono ad avere per immagini le coniche di $m\, l_a$ passanti per D, dunque:

Nella indicata rappresentazione della V_3^6 sullo spazio α, le rette di Λ vengono rappresentate da rette appoggiate ad l_a, le rette di M *da rette appoggiate ad m_a. Le rette di Λ (di* M*) costituenti una V_2^3 passante per l_a hanno per immagini le rette di un fascio avente il centro su l_a (su m_a) e situato in un piano per l_a (per m_a) e allorchè la V_2^3 descrive il fascio delle rigate di Λ (di* M*) contenenti $l_a (m_a)$ il centro e il piano del fascio di rette ora nominato descrivono su $l_a (m_a)$ e intorno ad $l_a (m_a)$ due forme proiettive. Per conseguenza le rette di Λ e* M *hanno per immagini in α le rette di due congruenze lineari speciali aventi per assi l_a e m_a.*

Per brevità indicheremo nel seguito queste due congruenze coi simboli $[l_a]$ ed $[m_a]$.

32.° Consideriamo ora una V_2^3 di Λ che non contenga la retta l_a e che abbia per direttrice la retta m_1 di M. Le immagini delle sue generatrici saranno le rette della congruenza $[l_a]$ appoggiate alla retta m'_1 di $[m_a]$ che corrisponde ad m_1, cioè le rette d'una rigata quadrica passante per m_a, dunque:

Le due reti di V_2^3 della V_3^6 sono rappresentate in α dalle due reti di quadriche contenute nelle congruenze lineari speciali $[l_a]$ ed $[m_a]$ e passanti per m_a

---

la traccia della direttrice d sul piano α (per modo che AD è la generatrice contenuta in α) i piani tangenti alla V_2^3 nei punti di una generatrice l, formando un fascio di asse l in un S_3 passante per d, hanno per tracce su α i punti di una retta l' passante per D, ed l' sarà l'immagine di l nella rappresentazione eseguita. Allora una sezione iperpiana qualunque incontrando ogni generatrice in un punto e ogni conica della V_2^3 passante per A in due punti, avrà per immagine la curva generata dai fasci A e D di α riferiti in corrispondenza $(1, 2)$ col raggio unito AD; ma questa è una conica per il punto D, dunque le immagini delle sezioni iperpiane sono le ∞^4 coniche α per il punto D.

È utile scriver le formule della corrispondenza biunivoca così stabilita fra i punti della V_2^3 e quelli del piano α ad essa tangente in A.

Fissando opportunamente i vertici 01234 della piramide fondamentale si può fare in modo che le coordinate del punto generico della V_2^3 siano date, al variare dei parametri λ e μ, dalle formule:

$$x_0 = 1, \quad x_1 = \lambda, \quad x_2 = \lambda^2, \quad x_3 = \mu, \quad x_4 = \mu\lambda;$$

allora il piano 124 risulta tangente alle V_2^3 nel punto 2, e la retta 34 è la direttrice, cosicchè possiamo supporre $A \equiv 2$, $\alpha \equiv 124$ e $D \equiv 4$. Le quadriche:

$$x_0\, x_2 - x_1^2 = 0 \quad (1) \qquad \text{e} \qquad x_0\, x_4 - x_1\, x_3 = 0 \quad (2)$$

contengono la V_2^3, quindi il piano ξ tangente alla V_2^3 nel punto $Y \equiv y_i$ sarà rappresentato *od l_α rispettivamente, quindi le ∞^4 coniche della V_3^6 sono rappresentate dalle ∞^4 coniche appoggiate ad l_α ed m_α secondo cui si tagliano a due a due le quadriche di queste due reti.*

Due V_2^3 qualsiansi della V_3^6 appartenenti a reti diverse dànno, prese insieme, una sezione iperpiana e le loro immagini costituiscono complessivamente una superficie del quart'ordine, quindi:

Le sezioni iperpiane della V_3^6 hanno per immagini in α un sistema lineare ∞^7 di superficie N del quart' ordine.

Una qualunque superficie N, essendo immagine di una sezione iperpiana, seca un piano π che passi per l_α (od m_α), oltre che nella retta l_α (o m_α), in una conica residua immagine della linea comune al considerato iperpiano e alla V_2^3 rappresentata da π; e d'altra parte le rette della congruenza $[l_\alpha]$ (od $[m_\alpha]$) non incontrano la superficie N fuori di l_α (od m_α) che in un sol punto ulteriore, dunque:

Le superficie N hanno tutte in l_α ed m_α due rette doppie ed in A un punto doppio uniplanare col piano osculatore fisso $l_\alpha m_\alpha$. Inoltre in ogni punto di l_α

---

dalle equazioni degli iperpiani tangenti in Y alle quadriche (1) e (2), ossia dalle:

$$y_2 x_0 - 2 y_1 x_1 + y_0 x_2 = 0, \quad y_4 x_0 - y_3 x_1 + y_0 x_4 = 0.$$

Le coordinate del punto ove ξ taglia α sono allora:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = y_0, \quad x_2 = 2 y_1, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = y_3,$$

e di qui, tenendo anche conto delle (1) e (2), si ricavano le formule della rappresentazione:

$$\nu y_0 = 4 x_1^2; \quad \nu y_1 = 2 x_1 x_2; \quad \nu y_2 = x_2^2; \quad \nu y_3 = 4 x_1 x_4; \quad \nu y_4 = x_2 x_4 .$$

Queste dimostrano che alla sezione di V_2^3 ottenuta coll'iperpiano:

$$\alpha_0 y_0 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 + \alpha_4 y_4 = 0$$

corrisponde nel piano α la conica:

$$4 \alpha_0 x_1^2 + 2 \alpha_1 x_1 x_2 + \alpha_2 x_2^2 + 4 \alpha_3 x_1 x_4 + 2 \alpha_4 x_2 x_4 = 0$$

conica che taglia la retta $24 \equiv A D$ nel punto $4 \equiv D$ e nel punto C la cui coordinata $\frac{x_2}{x_4}$ sopra la retta AD è data da $-\frac{2\alpha_4}{\alpha_2}$. La coordinata invece del punto I in cui la retta AD è tagliata dall'iperpiano ξ è data da $-\frac{\alpha_4}{\alpha_2}$, quindi le coppie AI e CD si separano armonicamente; cioè si ha il teorema:

L'ulteriore punto d'intersezione della retta AD colla conica passante per D e rappresentante nel modo che si è detto la sezione della V_2^3 con un iperpiano ξ è il coniugato armonico di D rispetto ad A e al punto d'incontro di ξ con la retta AD.

(od m_α) uno dei piani osculatori è costituito dal piano che contiene le rette di $[l_\alpha]$ (od $[m_\alpha]$) uscenti dal punto.

Una sezione iperpiana della V_3^6 si può considerare come il luogo delle ∞^1 cubiche gobbe segnate su di essa dalle ∞^1 V_2^3 formate con le rette di Λ (di M) che passano per l_α (m_α), quindi la corrispondente immagine N è il luogo di ∞^1 coniche situate in piani passanti per l_α (od m_α) e secanti l_α (od m_α) nelle coppie di una involuzione quadratica avente per punti doppi il punto A e l'intersezione di l_α (m_α) col considerato iperpiano.

33.° Se diciamo β lo spazio su cui la V_3^6 è rappresentata mediante il sistema delle superficie cubiche L passanti per la cubica gobba K e aventi un punto doppio in un suo punto O, tra lo spazio β e lo spazio α dei n.[i] 30, 31 e 32 viene stabilita mediante la V_3^6 una corrispondenza cremoniana, quando si dicano omologhi due punti di β ed α che rappresentano uno stesso punto della V_3^6.

Poichè i piani di β insieme col cono quadrico projettante K da O costituiscono delle superficie cubiche L, anzi le superficie cubiche L che rappresentano le sezioni della V_3^6 con gli iperpiani passanti per una sua certa cubica gobba C^3, così ad essi corrisponderanno in α le superficie N di un sistema lineare ∞^3 passanti per l'immagine di C^3 in α. Tale immagine poi essendo l'ulteriore intersezione, fuori di l_α ed m_α, di una superficie N con una quadrica della congruenza $[m_\alpha]$ passante per m_α, è ancora una cubica gobba.

D'altra parte anche in α un piano variabile insieme col piano $l_\alpha m_\alpha$ contato tre volte costituisce una superficie N, dunque ai piani di α corrisponde in β un sistema lineare ∞^3 di superficie cubiche L e si conclude che la trasformazione cremoniana di β in α è in un senso del 4.° ordine e nell'altro del 3.°.

Ora è interessante cercare le formule di una corrispondenza cremoniana atta a trasformare il sistema di superficie quartiche N in un sistema di superficie cubiche del tipo L, perchè così troveremo incidentalmente una nuova proprietà delle superficie N.

34.° Per questo, cominciamo dallo stabilire in α un sistema di coordinate prendendo il punto $l_\alpha m_\alpha$ come vertice 1 della piramide fondamentale, un punto qualunque di l_α come vertice 2, un punto qualunque di m_α come vertice 3, il piano che contiene le rette di $[l_\alpha]$ uscenti da 2 come piano 124, il piano che contiene le rette di $[m_\alpha]$ uscenti da 3 come piano 134, e infine scegliamo il punto 4 (sulla retta intersezione di questi due piani) e il punto unità U, in modo che il piano $12\,U$ sia quello che contiene le rette di $[l_\alpha]$ uscenti dal punto ove 12 taglia il piano $34\,U$.

Allora, se indichiamo con φ_3 e φ_4 delle forme di 3.° e 4.° ordine nelle tre variabili x_2, x_3, x_4, l'equazione di una superficie N sarà intanto del tipo:

$$a\, x_4^2\, x_1^2 + \varphi_3\, x_1 + \varphi_4 = 0$$

poichè il punto 1 è per essa un punto doppio uniplanare col piano osculatore in 123; e poichè essa deve anche avere in 12 e 13 delle rette doppie mancheranno in φ_3 i termini in x_2^3, $x_2^2 x_3$, $x_2^2 x_4$, x_3^3, $x_3^2 x_2$, $x_3^2 x_4$ e in φ_4 i termini in x_2^4, $x_2^3 x_3$, $x_4^3 x_4$, x_3^4, $x_3^3 x_2$, $x_3^3 x_1$, cioè l'equazione sarà del tipo:

$$\left.\begin{aligned} &a\, x_4^2\, x_1^2 + (b\, x_4^3 + c\, x_4^2\, x_2 + d\, x_4^2\, x_3 + e\, x_2\, x_3\, x_4)\, x_1 + f\, x_4^4 + g\, x_4^3 x_2 + \\ &+ h\, x_4^3 x_3 + i\, x_2^2\, x_3^2 + j\, x_2^2\, x_4^2 + k\, x_3^2 x_4^2 + l\, x_2^2\, x_3\, x_4 + m\, x_2\, x_3^2\, x_4 + n\, x_2\, x_3\, x_4^2 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Ora si osservi che la proiettività stabilita dalla congruenza $[l_\alpha]$ fra i punti e i piani di l_α per le ipotesi fatte sulla piramide fondamentale, è rappresentata analiticamente scrivendo che al punto rappresentato *sopra* 12 dall'equazione

$$x_1 - \lambda\, x_2 = 0$$

corrisponde nel fascio 12 il piano di equazione:

$$x_3 - \lambda\, x_4 = 0$$

quindi se si cerca la conica, residua intersezione di N con questo piano e poi si cercano le coordinate dei due punti ove essa taglia la retta 12, le coordinate di uno di questi debbono essere $\frac{x_1}{x_2} = \lambda$, $x_3 = x_4 = 0$.

Ponendo nella (1) $x_3 = \lambda\, x_4$, dividendo per x_4^2 e poi facendo $x_4 = 0$, resta:

$$a\, x_1^2 + (c + e\, \lambda)\, x_1\, x_2 + (i\, \lambda^2 + l\, \lambda + j)\, x_2^2 = 0 \qquad (2)$$

pertanto la (2) deve rimanere soddisfatta, qualunque sia λ, ponendo $\frac{x_1}{x_2} = \lambda$; cioè deve essere

$$a + e + i = 0; \quad c + l = 0; \quad j = 0. \qquad (3)$$

Dopo ciò la (2) si può scrivere:

$$[a\, x_1 - (i\, \lambda - c)\, x_2]\, [x_1 - \lambda\, x_2] = 0$$

e i due punti che sulla retta 12 hanno per coordinate $\frac{x_1}{x_2} = \frac{i\, \lambda - c}{a}$ e $\frac{x_1}{x_2} = \lambda$ debbono corrispondersi in una involuzione quadratica avente un punto doppio in 1, dunque:

$$a + i = 0 \tag{4}$$

e, combinando con la prima delle (3),

$$e = 0. \tag{5}$$

Infine, osserviamo che la proiettività stabilita dalla congruenza $[m_a]$ fra i punti e i piani di m_a, è rappresentata analiticamente da una relazione del tipo:

$$\mu - v\lambda = 0$$

fra il parametro μ del punto

$$x_1 - \mu x_3 = 0$$

della retta 13 e il parametro λ del piano corrispondente

$$x_2 - \lambda x_4 = 0,$$

v essendo una opportuna costante, poichè per le ipotesi fatte ai valori 0 e ∞ di μ corrispondono i valori 0 e ∞ di λ.

Allora, se nella 1) poniamo $x_2 = \lambda x_4$ e dopo aver diviso per x_4^2 facciamo $x_4 = 0$, resterà, tenuto conto delle 3), 4) e 5):

$$a x_1^2 + d x_3 x_1 - (a\lambda^2 - m\lambda - k) x_3^2 = 0$$

e questa equazione deve esser soddisfatta, qualunque sia λ, da $\frac{x_1}{x_3} = v\lambda$. Ciò porta che deve essere identicamente:

$$a(v^2 - 1)\lambda^2 + (d v + m)\lambda + k = 0$$

ossia

$$a(v^2 - 1) = 0, \quad d v + m = 0, \quad k = 0. \tag{6}$$

Ma a non può essere zero, perchè altrimenti il piano $l_a m_a$ si staccherebbe dalla superficie N, dunque deve essere:

$$v = \pm 1 \tag{7}$$

e per conseguenza:

$$d = \mp m. \tag{8}$$

35.° Facciamo vedere, prima di procedere innanzi, che non può essere $v = +1$.

Per questo osserviamo che l'equazione di una quadrica di $[l_\alpha]$ passante per m_α, cioè rappresentante una V_2^3 della V_3^6, è del tipo:

$$\alpha\,(x_4\,x_1 - x_2\,x_3) + \beta\,x_4^2 + \gamma\,x_4\,x_3 = 0 \tag{9}$$

e quindi il piano:

$$x_2 - \lambda\,x_4 = 0$$

la taglia fuori di m_α nella retta ove è tagliato dal piano:

$$\alpha\,x_1 + (\gamma - \alpha\,\lambda)\,x_3 + \beta\,x_4 = 0.$$

Ora, se si volesse trovare il valore di λ per il quale accade che questo ultimo piano passa per il punto corrispondente sulla 13 al piano

$$x_2 - \lambda\,x_4 = 0,$$

avendosi per tale punto (nell'ipotesi $v = 1$) $\dfrac{x_1}{x_3} = \lambda$, si arriverebbe per λ all'equazione:

$$\alpha\,\lambda + (\gamma - \alpha\,\lambda) = 0,$$

cioè, non potendo essere $\gamma = 0$ per la genericità della quadrica considerata, si troverebbe sempre la soluzione $\lambda = \infty$.

Tale conseguenza è per quanto è stato detto nei n.[i] precedenti assurda, poichè la quadrica generica di $[l_\alpha]$ contenente m_α deve avere una delle sue direttrici in una retta *generica* di $[m_\alpha]$, dunque non può essere, nel caso nostro,

$$v = +1$$

e si conclude che

$$v = -1,\ d = +m,$$

ossia che l'equazione d'una superficie N è del tipo:

$$a\,x_4^2\,x_1^2 + (b\,x_4^3 + c\,x_4^2\,x_2 + d\,x_4^2\,x_3)\,x_1 + f\,x_4^4 + g\,x_4^3\,x_2 + h\,x_4^3\,x_3 - a\,x_2^2\,x_3^2 -$$
$$- c\,x_2^2\,x_3\,x_4 + d\,x_2\,x_3^2\,x_4 + n\,x_2\,x_3\,x_4^2 = 0.$$

In questa equazione compaiono omogeneamente otto parametri lineari, quindi essa è appunto l'equazione del sistema lineare ∞^7 di superficie N.

36.° Nell'ipotesi $v = 1$, la quadrica

$$\alpha\,(x_4\,x_1 - x_2\,x_3) + \beta\,x_4^2 = 0,$$

qualunque siano α e β, è tale che rispetto ad essa ogni punto di l_α (od m_α)

ha per piano polare (tangente) il piano che ad esso corrisponde nel fascio l_α (od m_α), in virtù della congruenza $[l_\alpha]$ (od $[m_\alpha]$), quindi la reciprocità che resta determinata fra i punti del piano $l_\alpha m_\alpha$ e i piani della stella avente per centro il punto $l_\alpha m_\alpha$ dalle coppie di forme proiettive ora nominate è contenuta in una (anzi in ∞^1) polarità dello spazio α.

Invece, nell'ipotesi $v = -1$, la reciprocità determinata fra il piano $l_\alpha m_\alpha$ (nel quale le coordinate sono x_1, x_2, x_3) e la stella $l_\alpha m_\alpha$ (nella quale le coordinate di piano sono ξ_2, ξ_3, ξ_4) dalle punteggiate e dai fasci projettivi l_α, m_α è rappresentata dalle formule:

$$\xi_2 = x_3, \quad \xi_3 = -x_2, \quad \xi_4 = x_1$$

e quindi è contenuta in *un* sistema nullo dello spazio α.

Ora le ipotesi $v = \pm 1$ sono le sole compatibili con l'altra $a - 0$, quando debba essere:

$$a(v^2 - 1) = 0,$$

pertanto ricaviamo incidentalmente il teorema:

Date in uno spazio (ordinario) due congruenze lineari speciali con le direttrici a e b uscenti da un punto O e contenenti entrambe il fascio determinato da a e b, non esistono, in generale, superficie (irriducibili) del quart'ordine con due rette doppie in a e b, che abbiano su queste un contatto tripunto con ogni retta delle due congruenze e che siano tagliate dai piani per a e b in coniche appoggiate a queste rette nelle coppie di una involuzione quadratica con un punto doppio in O. Fanno eccezione soltanto i casi in cui le due congruenze appartengono al complesso delle rette tangenti a una quadrica, oppure a un complesso lineare, nei quali ne esistono infinite (∞^7) aventi in O un punto doppio uniplanare col piano osculatore a b.

In particolare deduciamo di qui che le due congruenze lineari speciali $[l_\alpha]$ ed $[m_\alpha]$ appartengono a uno stesso complesso lineare.

37.° La quadrica, della rete 9), rappresentata dall'equazione:

$$x_4 x_1 - x_2 x_3 = 0$$

contiene la retta

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0$$

della congruenza $[m_\alpha]$, e un piano variabile intorno a questa retta:

$$x_1 - \mu x_2 = 0$$

taglia ulteriormente la quadrica nella retta:

$$x_1 - \mu\, x_2 = 0 \quad x_3 - \mu\, x_4 = 0. \tag{10}$$

Ora consideriamo la superficie N rappresentata dall'equazione:

$$\left.\begin{array}{c} a_0 x_4^2 x_1^2 + (b_0 x_4^3 + c_0 x_4^2 x_2 + d_0 x_4^2 x_3) x_1 + g_0 x_4^3 x_2 + h_0 x_4^3 x_3 - a_0 x_2^2 x_3^2 - c_0 x_2^2 x_3 x_4 \\ + d_0 x_2 x_3^2 x_4 + n_0 x_2 x_3 x_4^2 = 0 \end{array}\right\} \tag{11}$$

e cerchiamo le coordinate del punto, comune ad essa e alla retta (10), non situato sulla retta 12.

Si trova facilmente che tali coordinate sono:

$$\left.\begin{array}{c} \sigma x_1 = - h_0 \mu^2 \quad \sigma x_2 = - h_0 \mu \quad \sigma x_3 = \mu [2 d_0 \mu^2 + (b_0 + n_0) \mu + g_0] \\ \sigma x_4 = 2 d_0 \mu^2 + (b_0 + n_0) \mu + g_0 \end{array}\right\} \tag{12}$$

e se in queste formule si fa variare il parametro μ, il punto corrispondente descrive la cubica gobba secondo cui si tagliano, fuori delle rette l_α ed m_α, la quadrica e la superficie N considerata.

Se nelle (12) si mutano h_0, d_0, $(b_0 + n_0)$, g_0 rispettivamente in ρh_0, ρd_0, $\rho (b_0 + n_0)$, ρg_0, essendo ρ un qualsiasi fattore di proporzionalità, la cubica da esse rappresentata non muta, per conseguenza l'equazione:

$$\left.\begin{array}{c} a\, x_4^2 x_1^2 + (b\, x_4^3 + c\, x_4^2 x_2 + \rho\, d_0\, x_4^2 x_3) x_1 + \rho\, g_0\, x_4^3 x_2 + \rho\, h_0\, x_4^3 x_3 - \\ - a\, x_2^2 x_3^2 - c\, x_2^2 x_3 x_4 + \rho\, d_0\, x_2 x_3^2 x_4 + [\rho (b_0 + n_0) - b] x_2 x_3 x_4^2 = 0 \end{array}\right\} \tag{13}$$

coi quattro parametri indipendenti a, b, c, ρ rappresenta il sistema lineare ∞^3 delle superficie N passanti per la cubica gobba rappresentata dalle equazioni (12).

Scritta la (13) sotto la forma:

$$a (x_1^2 x_4^2 - x_2^2 x_3^2) + b\, x_4^2 (x_1 x_4 - x_2 x_3) + c\, x_2 x_4 (x_1 x_4 - x_2 x_3) +$$

$$+ \rho\, x_4 [d_0\, x_1 x_3 x_4 + g_0\, x_4^2\, x_2 + h_0\, x_4^2 x_3 + d_0\, x_2 x_3^2 + (b_0 + n_0) x_2 x_3 x_4] = 0$$

basta porre:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma y_1 = x_1^2 x_4^2 - x_2^2 x_3^2 \\ \sigma y_2 = x_4^2 (x_1 x_4 - x_2 x_3) \\ \sigma y_3 = x_2 x_4 (x_1 x_4 - x_2 x_3) \\ \sigma y_4 = x_4 [d_0 x_1 x_3 x_4 + g_0 x_4^2 x_2 + h_0 x_4^2 x_3 + d_0 x_2 x_3^2 + (b_0 + n_0) x_2 x_3 x_4] \end{array}\right\} \tag{14}$$

per avere le formule d'una trasformazione cremoniana che muti il sistema delle superficie N in un sistema di superficie cubiche del tipo L.

Le formule inverse delle (14) sono le:

$$\left.\begin{aligned}\tau x_1 &= y_1 y_3 y_4 + d_0 y_1^2 y_2 + h_0 y_1 y_2^2 + (b_0 + n_0) y_1 y_2 y_3 + g_0 y_2 y_3^2\\ \tau x_2 &= 2 y_3^2 y_4 + d_0 y_1 y_2 y_3 + h_0 y_2^2 y_3 + (b_0 + n_0) y_2 y_3^2\\ \tau x_3 &= y_1 y_2 y_4 - g_0 y_2^2 y_3\\ \tau x_4 &= 2 y_2 y_3 y_4 + d_0 y_1 y_2^2 + h_0 y_2^3 + (b_0 + n_0) y_2^2 y_3\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

dalle quali si deduce che il sistema delle ∞^3 superficie cubiche corrispondenti nello spazio (y_1, y_2, y_3, y_4) ai piani dello spazio $\alpha \equiv (x_1, x_2, x_2, x_4)$ ha per linee basi le rette:

$$y_2 = 0,\ y_4 = 0 \quad \text{e} \quad y_2 = 0,\ y_3 = 0$$

e la cubica gobba:

$$\left.\begin{aligned}\nu y_1 = -g_0 h_0 \lambda^3;\ \nu y_2 = \lambda\,[d_0 g_0 \lambda^2 + (b_0 + n_0)\lambda + 2];\\ \nu y_3 = -h_0 \lambda^2;\ \nu y_4 = d_0 g_0 \lambda^2 + (b_0 + n^0)\lambda + 2.\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Questa cubica gobba passa pel punto (0, 0, 0, 1), come si vede facendo nelle (16) $\lambda = 0$, e questo punto è doppio per le superficie cubiche in discorso.

38.° Le cose dette fin qui permettono facilmente di risolvere un'altra questione sollevata dalla mia Nota già citata di Palermo.

Risulta da essa che uno dei gruppi più notevoli di V_3 di un S_r $(r \geqq 7)$ a S_3 tangenti mutuamente secantisi è quello costituito dalla V_3^6 di S_7, che stiamo studiando, e dalla V_3^8 di S_9 di Veronese e sue proiezioni su spazi a 7 o 8 dimensioni.

Nel caso della V_3^8 di S_9 due S_3 tangenti generici sono tagliati da tutti gli altri in coppie di punti corrispondentisi in una omografia: si presenta quindi spontanea la questione di studiare la trasformazione cremoniana stabilita fra due S_3 tangenti generici della V_3^6 dai punti di appoggio di tutti gli altri.

Per questo, osserviamo che se γ è l'S_3 tangente alla V_3^6 in un suo punto generico C ed l_c, m_c sono le rette della V_3^6 uscenti da C, la V_3^6 può riferirsi biunivocamente ai punti di γ nel modo stesso che è stato indicato per riferirla biunivocamente ai punti di α e che due punti di α e γ i quali rappresentino uno stesso punto della V_3^6 sono precisamente due punti di α e γ omologhi nella trasformazione cremoniana Σ che si tratta di caratterizzare.

La corrispondenza Σ muta evidentemente le superficie N di α nelle analoghe N' di γ; ma al sistema delle N (delle N') appartengono i piani di α (di γ), insieme col piano $l_a m_a$ ($l_c m_c$) contato tre volte, dunque la corrispondenza Σ è, in ambedue i sensi, del 4° ordine.

I piani dello spazio α, insieme col piano $l_a m_c$, costituiscono delle quadriche del sistema ∞^4:

$$b\, x_1 x_4 + f x_4^2 + g\, x_2 x_4 + h\, x_3 x_4 + n\, x_2 x_3 = 0 \tag{17}$$

la cui equazione si ottiene da quella del sistema N facendovi $a = c = d = 0$ e sopprimendo il fattore x_4^2, e queste quadriche rappresentano il sistema ∞^4 delle sezioni iperpiane della V_3^6 passanti per le rette l_a, m_a, dunque ai piani dello spazio α corrispondono in γ ∞^3 superficie N' passanti (oltre che, doppiamente, per l_c, m_c) per le due rette delle congruenze $[l_c]$ ed $[m_c]$ (*), rispettivamente, che rappresentano, in γ, le rette l_a ed m_a.

Nello stesso modo, ai piani di γ corrispondono in α le superficie N di un sistema omaloidico ∞^3 avente per rette basi (fuori di l_a ed m_a) le due rette di $[l_a]$ ed $[m_a]$ immagini di l_c ed m_c.

Supponiamo (e con questo non si vien meno in nulla alla generalità) che le immagini di l_c ed m_c sieno in α precisamente le rette 24 e 34; le superficie N che le contengono sono allora quelle del sistema ∞^4:

$$\left.\begin{aligned} a\,(x_1^2 x_4^2 - x_2^2 x_3^2) + b\, x_1 x_4^3 + c\, x_2 x_4 (x_1 x_4 - x_2 x_3) + \\ + d\, x_3 x_4 (x_1 x_4 + x_2 x_3) + n\, x_2 x_3 x_4^2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

ed entro questo sistema ∞^4 è contenuto il sistema omaloidico corrispondente ai piani di γ.

Poichè il sistema (18) è del grado 2 (**) se ne possono estrarre ∞^3 sistemi omaloidici considerando quelle delle sue superficie che passano per un punto fissato a piacere in α; ma il sistema dei piani di γ corrisponde a un sistema omaloidico di sezioni iperpiane della V_3^6 che si ottiene da quello delle ∞^4 sezioni iperpiane passanti per l_c ed m_c considerando le sezioni iperpiane che passano per un punto della V_3^6 avvicinatosi infinitamente al punto $l_c m_c$, dunque, per avere le superficie N di α corrispondenti ai piani di γ, dobbiamo considerare nel sistema (18) le superficie che passano per un punto avvicinatosi infinitamente al punto 4, immagine, in α, del punto $l_c m_c$.

Considerando che il piano $x_1 = 0$ taglia le superficie del sistema (18),

(*) Cioè dalle due congruenze che rappresentano in γ i sistemi **A** e **M** della V_3^6.

(**) Infatti il sistema omologo in γ è rappresentato da una equazione analoga alla (1).

fuori di 24 e 34, nel sistema di coniche:

$$a\,x_2\,x_3 + c\,x_2\,x_4 - d\,x_3\,x_4 - n\,x_4^2 = 0$$

si conclude che, per avere le superficie N richieste, bisogna fare nella (18) $n=0$.

Dopo ciò si vede subito che, con una conveniente scelta della piramide fondamentale in γ, chiamando y_1, y_2, y_3, y_4 le coordinate correnti di punto in γ, le formule della corrispondenza Σ sono, in un senso, le formule:

$$\left.\begin{aligned} \sigma\,y_1 &= x_1\,x_4^3 \\ \sigma\,y_2 &= x_3\,x_4\,(x_1\,x_4 + x_2\,x_3) \\ \sigma\,y_3 &= x_2\,x_4\,(x_1\,x_4 - x_2\,x_3) \\ \sigma\,y_4 &= x_1^2\,x_4^2 - x_2^2\,x_3^2 \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

e, nell'altro, quelle perfettamente analoghe:

$$\left.\begin{aligned} \tau\,x_1 &= y_1\,y_4^3 \\ \tau\,x_2 &= y_3\,y_4\,(y_1\,y_4 + y_2\,y_3) \\ \tau\,x_3 &= y_2\,y_4\,(y_1\,y_4 - y_2\,y_3) \\ \tau\,x_4 &= y_1^2\,y_4^2 - y_2^2\,y_3^2. \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

39.° Tenendo presente la rappresentazione della V_3^6 sopra uno spazio ordinario mediante le superficie cubiche per K con un punto doppio nel punto O di K, si trovano subito le omografie dell'S_7 che mutano la V_3^6 in sè.

Infatti una tale omografia o

a) scambia in sè i sistemi Λ e M, o

b) scambia fra di loro Λ e M.

Nell'ipotesi *a)* l'omografia considerata Ω subordina fra le rette di Λ una corrispondenza biunivoca che si riflette in una corrispondenza biunivoca fra le rette di O, e questa corrispondenza è una proiettività, perchè i piani per O rappresentano la V_2^3 di Λ e queste, per l'omografia Ω, si scambiano fra di loro.

Inversamente, si immagini di considerare una qualsiasi proiettività ω fra le rette della stella O. Si avrà fra le rette di Λ una corrispondenza biunivoca che muta le V_2^3 in V_2^3 e poichè le rette di M non sono altra cosa che le direttrici delle V_2^3 di Λ, così anche fra le rette di M si avrà una corrispondenza biunivoca, che si tradurrà in quella fra le corde di K che si ottiene chiamando omologhe due corde di K situate in piani per O corrispondenti in ω. Ora se una corda di K descrive una schiera rigata di una delle ∞^2 quadriche per K, essa si appoggerà costantemente a una certa retta l uscente da O; quindi la corda ad essa omologa nella corrispondenza considerata si appoggerà costantemente alla retta l' di O omologa ad l nella proiettività ω. Ciò significa che la corrispondenza costruita fra le rette di M muta le V_2^3 in V_2^3 e allora le due corrispondenze stabilite in Λ e M dànno luogo a una trasformazione in sè della V_3^6 che è evidentemente contenuta in una omografia dell'S_7, perchè una sezione iperpiana della V_3^6 spezzata in due V_2^3 si muta per essa in una analoga sezione iperpiana.

A una conclusione simile si arriva quando si faccia l'ipotesi b), purchè si tengano presenti due rappresentazioni della V_3^6 del tipo di quella considerata, per modo che nell'una siano rappresentate da raggi di una stella le rette di Λ, nell'altra da raggi di una stella le rette di M.

40.° Ed ora passiamo a considerare la V_3^6 di S_7 rappresentata sullo spazio ordinario dalle superficie cubiche che passano per una cubica piana nodale H ed hanno un punto biplanare nel nodo O di questa cubica e un piano osculatore fisso in un piano ω passante per una delle due rette tangenti ad H nel punto O.

Le rette per O dello spazio rappresentativo corrispondono a rette della V_3^6, dunque:

Sulla V_3^6 esiste un sistema ∞^2 di rette, tale che per ogni punto della V_3^6 ne passa una ed una sola.

Le ∞^5 superficie cubiche spezzate nel piano della cubica H e in un cono quadrico col vertice in O rappresentano le sezioni iperpiane della V_3^6 ottenute con gli ∞^5 S_6 passanti per una certa retta d. Poi due coni quadrici col vertice in O non si tagliano ulteriormente che in quattro rette, dunque un S_5 generico per d taglia la V_3^6 fuori di d soltanto in quattro rette, ossia:

La V_3^6 ha una retta doppia d ed è formata di ∞^2 rette appoggiate tutte a d.

Si trova allora facilmente la *classe* del sistema di rette della V_3^6, cioè il numero di esse contenute in un iperpiano.

Infatti un iperpiano generico taglia la V_3^6 in una V_2^6 dotata di un punto doppio conico e rappresentabile su un piano mediante un sistema di cubiche con tre punti-base allineati (*), quindi:

Un iperpiano generico contiene tre rette della V_3^6 concorrenti in un punto della retta d.

I piani dello spazio rappresentativo uscenti da O corrispondono a rigate

(*) Del Pezzo, *Sulle superficie dell'n^o ordine*, etc. (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, 1, 1887).

cubiche normali della V_3^6 e poichè due tali piani presi insieme dànno un cono quadrico (degenere) passante per O si conclude che:

La V_3^6 ammette una rete di rigate cubiche normali autoresidua rispetto al sistema delle sezioni iperpiane. Le rigate hanno poi tutte per direttrice la retta doppia d.

Di qui segue in particolare che gli S_3 tangenti alla V_3^6 nei punti di una sua rigata cubica stanno tutti in un S_6, e, come ho dimostrato altrove, questo fatto si riconnette con la circostanza che essa sta sopra una V_4^4 ottenuta proiettando da d una superficie di VERONESE.

Per stabilire la verità di questa asserzione si immagini di proiettare dalla retta d le ∞^2 rette della V_3^6. Si otterranno, nella stella dell'S_7 avente per centro d, ∞^2 piani e in questa varietà di piani esisteranno, corrispondentemente alla rete di rigate cubiche della V_3^6, ∞^2 coni quadrici con retta doppia. Ma allora la superficie che si ottiene tagliando con un S_5 la varietà di punti riempita da questi ∞^2 piani sarà una superficie con ∞^2 coniche e quindi una superficie di VERONESE.

41.° Cerchiamo di invertire la considerazione ora fatta e ne ricaveremo una semplice costruzione della V_3^6 di cui ci stiamo occupando.

Sia V_4^4 la varietà di S_7 che si ottiene proiettando da una retta d una superficie di VERONESE, e sia V_6^2 una quadrica (non specializzata) che passi per d, tale che dei suoi ∞^2 piani passanti per d e costituenti, nell'S_5 tangente alla V_6^2 lungo d, una V_4^2 con la retta doppia d, ∞^1 coincidano con gli ∞^1 piani della V_4^4 costituenti su questa una V_3^2 con la retta doppia d. La residua intersezione della V_4^4 e della quadrica sarà una V_3^6 con retta doppia in d e si comporrà di ∞^2 rette appoggiate a d.

Uno qualunque degli ∞^2 coni quadrici della V_4^4 diverso da quello contenuto nella V_6^2 taglia la V_6^2 in una V_2^4 dalla quale si stacca il piano che esso ha a comune con quest'ultimo, quindi taglia la V_3^6 in una V_2^3 rigata normale. E dopo ciò è facile riconoscere che la V_3^6 ottenuta è proprio quella di cui si è discorso nei numeri precedenti.

42.° Anche la ricerca delle omografie dell'S_7 che trasformano in sè quest'ultimo tipo di V_3^6 non presenta alcuna difficoltà. Si vede subito infatti che se una omografia Ω dell'S_7 trasforma in sè la V_3^6, per la Ω le rette della V_3^6 si scambieranno fra di loro per modo che ogni V_2^3 rigata normale si muterà in un'altra V_2^3; quindi nella stella O le rette immagini delle rette della V_3^6 saranno accoppiate in una corrispondenza proiettiva. D'altra parte questo ragionamento è evidentemente invertibile, quindi:

Le omografie che mutano in sè la V_3^6 formano un gruppo ∞^8.

§ III.

Le V_4^n a curve sezioni ellittiche.

43.° Supponiamo che V_4^n $(n \geqq 5)$ sia una varietà normale di 1.ª specie di S_{n+2} a curve sezioni ellittiche, e sia C^{n-3} la curva razionale normale dalla quale si suppone di proiettarla sopra un S_4.

Le sezioni iperpiane passanti per la C^{n-3} sono delle V_3^n normali di 1.ª specie che si proiettano sopra gli S_3 dello spazio rappresentativo, quindi se chiamiamo Q la quadrica che appartiene parzialmente al sistema lineare delle forme cubiche che rappresentano le sezioni iperpiane di V_4^n e K la V_2^{9-n} situata sopra Q e base del sistema lineare medesimo, basta tener presente l'enumerazione dei tipi delle V_3^n di 1.ª specie eseguita dal prof. Enriques per concludere che:

Se si prescinde dalle V_4^n che si riducono a coni, le sezioni iperpiane generiche della quadrica Q e della superficie K sono rispettivamente:

a) per $n = 5$ una quadrica ordinaria Q' e una quartica di 2.ª specie K';

b) per $n = 6$ una quadrica ordinaria Q' e una terna di rette a due a due sghembe; oppure un cono ordinario Q' e una cubica gobba K'; o infine, una quadrica Q' spezzata in una coppia di piani e una cubica piana nodale K';

c) per $n = 7$ un cono quadrico ordinario Q' e una conica K';

e in ogni caso la curva K' sarà naturalmente situata sulla quadrica Q'.

44.° Per esaminare partitamente i vari casi cominciamo dal supporre che sia $n = 5$.

Allora, poichè la sezione iperpiana generica K è una quartica di 2.ª specie, la superficie K sarà una superficie del 4.° ordine a curve sezioni razionali e quindi proiezione sopra un S_4 da un punto esterno di una superficie di Veronese o d'una rigata razionale normale del 4.° ordine. La prima ipotesi è da escludere perchè altrimenti K o non sarebbe situata sopra il cono quadrico Q, o conterrebbe una retta doppia e allora starebbe sopra infinite anzi che sopra *una* quadrica; dunque resta la seconda, cioè K è una rigata razionale del 4.° ordine di S_4, dotata di un punto doppio improprio nel vertice O dell'unico cono quadrico Q che la contiene.

Ne segue che sarà dimostrata l'esistenza di una V_4^5 a curve sezioni ellittiche di S_7 quando si sia fatto vedere che per una rigata K del quart'ordine di S_4 (e quindi razionale) passano ∞^7 forme cubiche.

Ora questo può dimostrarsi in doppia maniera; calcolando cioè la postulazione di K per le forme cubiche del suo spazio, oppure costruendo direttamente le forme cubiche che passano per K e trovando così che esse sono ∞^7.

45.° Il calcolo della postulazione di K si fa rapidamente ricorrendo ad alcuni teoremi stabiliti dal prof. Severi.

Si conducano infatti per la superficie K dotata del punto doppio improprio O due forme cubiche generiche L_1 ed L_2 (di tali forme ne esistono certo, poichè il loro sistema deve contenere gli ∞^2 coni cubici che si ottengono proiettando K dai suoi punti): la loro intersezione residua sarà una superficie del 5.° ordine K_1 con un punto doppio improprio in O avente a comune con K una curva del 10.° ordine (e della 26ª classe) con un punto quadruplo in O (*).

Poichè il punto O presenta evidentemente *una* condizione agli iperpiani che debbono contenerlo, segue, per un teorema del prof. Severi (**), che K e K_1 sono entrambe regolari e che per calcolare la postulazione di K per le forme cubiche si può far uso della formula:

$$m\binom{l+1}{2} - l(p-1) + P_a + 1 - d$$

facendovi $m=4$, $l=3$, $p=P_a=0$, $d=1$. Si trova così, come valore della postulazione in discorso, 27, e quindi, le forme cubiche dell'S_4 essendo ∞^{34}, per la superficie K passano appunto ∞^7 forme cubiche.

46.° Ma allo stesso risultato si può arrivare, come abbiamo detto, per un'altra via, meno rapida, ma assai più elementare.

Si taglino, per questo, la rigata K e il cono quadrico Q che la proietta dal suo punto doppio improprio O, con un S_3 generico α e siano K' e Q rispettivamente la quartica di 2.ª specie e la quadrica sezioni di K e Q.

(*) Severi, *Sulle intersezioni delle varietà algebriche*, etc. (Memorie dell'Accad. delle Scienze di Torino, serie II, t. LII, 1902), § 9. I caratteri di K_1 sono, adoperando le notazioni del prof. Severi, $\mu'_0=5$, $\mu'_1=10$, $\mu'_2=8$, $\nu'_2=8$, $d'=1$ essendo $\mu_0=4$, $\mu_1=6$, $\mu_2=4$, $\nu_2=4$, $d=1$ quelli di K.

(**) Severi, *Su alcune questioni di postulazione* (Rendic. del Circ. Mat. di Palermo, XVII, 1903), n.° 32.

Nello spazio α per la curva K' passano ∞^6 superficie cubiche L' e se si chiamano A, B, C, D i punti ove K' è tagliata da un piano generico π di α, queste ∞^6 superficie L' tagliano π nel sistema lineare (completo) delle ∞^5 cubiche passanti per A, B, C, D.

Ora si prenda a considerare una determinata superficie L'_1 di quelle ∞^6 e detta λ_1 la sua traccia su π, sia τ il piano ad essa tangente in un punto M di λ_1 esterno alla conica sezione di π con Q, e β un S_3 generico passante per τ. Se α'' è un altro S_3 del fascio avente per asse π e τ'' è la sua sezione con β, τ'' taglierà τ nella retta tangente a λ_1 nel punto M, e in α'' vi sarà una sola superficie cubica L''_1 che passi per la quartica K'', sezione di α'' con K, e per la cubica λ_1 e inoltre tocchi nel punto M il piano τ''. Variando α'' intorno a π, la superficie L''_1 assumerà certe ∞^1 posizioni distinte e riempirà una forma V_3^m, il cui ordine m è appunto 3.

Infatti asserire che $m = 3$ equivale ad asserire che per nessuna posizione di α'' intorno a π la relativa superficie L''_1 si spezza nel piano π e in una residua quadrica Q''_1 passante per il punto M e per la quartica K'' sezione di α'' con Q, e questo si dimostra facilmente per assurdo. Poichè se per una certa posizione di α'' avvenisse il detto spezzamento, per quella posizione di α'', K'' o sarebbe una quartica di 2.ª specie priva di punto doppio o sarebbe dotata di un punto doppio. Nella prima ipotesi, K'' essendo situata sopra *una sola* quadrica, Q''_1 sarebbe la sezione di Q con α'' e quindi M sarebbe situato su Q; nella seconda ipotesi, α'' risulterebbe tangente a K o passante pel suo punto doppio improprio O. Ora di queste due ultime alternative la prima è da escludersi per ragione analoga ad altra già detta (in quanto per essa si arriverebbe a una K'' spezzata in una cubica gobba e una sua unisecante e quindi situata sopra una sola quadrica), la seconda porterebbe alla conseguenza che Q''_1 sarebbe una quadrica generica fra le ∞^1 passanti per K'' e quindi una quadrica non avente un punto doppio in O, mentre la V_3^m costruita (e quindi Q''_1) ha necessariamente un punto doppio in O (*).

Il ragionamento compiuto mostra che per ogni superficie cubica L' di α contenente K' passa una forma cubica L dell'S_4 contenente K e tangente in un punto M di L' a un dato S_3 (passante pel piano τ tangente ad L' in M), quindi per ogni superficie L' di α passano ∞^1 forme cubiche con-

(*) Severi, *Intorno ai punti doppi impropri*, etc. (Rendic. Circ. Mat. di Palermo, XV, 1901), n.° 14.

tenenti K e K si trova in totale sopra un sistema lineare ∞^7 di forme cubiche L.

47.° Facciamo ora l'ipotesi $n = 6$ e supponiamo che le sezioni iperpiane generiche di Q e K siano una quadrica ordinaria Q' e una sua terna di rette, sghembe fra di loro a due a due.

Allora K sarà una terna di piani di Q passanti pel punto doppio O di Q (appartenenti allo stesso sistema) e un S_3 generico per O segherà Q e K in un cono quadrico e in una terna di rette situate su questo cono.

Ciò significa che ogni iperpiano dello spazio S_8 contenente la V_4^6 che si sta considerando e passante per l'S_4 che congiunge O con lo spazio della C^3 da cui si fa la proiezione, taglia la V_4^6 in una V_3^6 conica (*). Per ognuno di questi iperpiani il vertice del relativo cono V_3^6 è il vertice del cono cubico contenuto in quell'S_4, dunque anche V_4^6 è un cono col vertice in quel punto.

48.° Supponiamo adesso che, pur essendo $n = 6$, la quadrica Q e la superficie K siano tagliate da un iperpiano generico in un cono quadrico Q' e in una cubica gobba K'. Allora K è una V_2^3 rigata normale con una direttrice d e Q è una quadrica per K con retta doppia, cioè sarà il cono quadrico (doppiamente specializzato) che proietta le generatrici di K dalla direttrice d.

Segue da ciò che sarà dimostrata l'esistenza di una V_4^6 a curve sezioni ellittiche di S_8, corrispondentemente alle ipotesi ora fatte, purchè si dimostri che data in un S_4 una rigata cubica normale vi sono ∞^8 forme cubiche passanti per essa e aventi una retta doppia nella sua direttrice d.

Ora si potrebbe comporre una tale dimostrazione imitando il ragionamento diretto del n.° 46, ma preferiamo ricorrere a una via indiretta che avremmo potuto seguire anche per il caso della V_4^5.

Se, per un momento, si suppone che la V_4^6 in discorso realmente esista e sia rappresentata dal sistema delle forme cubiche passanti per una V_2^3 rigata normale e aventi una retta doppia nella sua direttrice d, è chiaro che gli ∞^2 piani passanti per d dell'S_4 rappresentativo saranno le immagini di ∞^2 piani appartenenti alla V_4^6, e lo stesso potrà dirsi degli ∞^2 piani contenenti le coniche della V_2^3; quindi sulla V_4^6 si avranno intanto due serie ∞^2 di piani tali che per ogni punto della V_4^6 passa un piano di ciascuna serie.

(*) Enriques, *Sui sistemi lineari*, etc. (Math. Ann. Bd. 46), n.° 15. Notisi che in questo caso Q è il cono quadrico tangente nel punto doppio O a tutte le forme cubiche passanti per i tre piani di K.

D'altra parte i piani di due coniche qualunque della V_2^3 sono tagliati in due sistemi prospettivi da quelli uscenti da d, per conseguenza i piani di uno almeno (questa restrizione non è che provvisoria, come vedremo) dei due sistemi di V_4^6 tagliano collinearmente i piani dell'altro sistema.

Si conclude che se la V_4^6 in discorso esiste, essa non può che coincidere con una nota varietà studiata già dal prof. SEGRE e generata dai piani che congiungono i punti omologhi di tre piani collineari generici di un S_8 o dai piani secondo cui si intersecano gli S_6 di tre stelle proiettive di un S_8 aventi per centri tre S_5 generici.

Poichè si riconosce subito che proiettando questa V_4^6 di SEGRE sopra un S_4 dall'S_3 di una sua cubica gobba si ottiene una sua rappresentazione biunivoca in cui il sistema delle immagini delle sezioni iperpiane è un sistema ∞^8 di forme cubiche del tipo considerato in questo numero, si conclude che l'ipotesi quivi fatta porta realmente a un tipo di V_4^6 *non conica* a curve sezioni ellittiche (*).

49.° Come è noto, la V_4^6 di SEGRE contiene due serie ∞^2 di piani in condizioni perfettamente identiche; quindi i piani di ognuna delle due serie punteggiano proiettivamente i piani dell'altra.

Tenendo conto della sua rappresentazione sopra un S_4, or ora indicata, si arriva incidentalmente al teorema:

Due piani passanti per la direttrice di una rigata cubica normale sono tagliati dai piani delle sue coniche in due sistemi piani collineari (**).

50.° Per esaurire la discussione del caso b) del n.° 43 vediamo direttamente se possa esistere una V_4^6 di S_8 che da ogni S_7 sia tagliata in una V_3^6 a curve sezioni ellittiche dotata di retta doppia (n.[i] 40, 41, 42).

Se esiste, poichè ogni iperpiano la taglia in una V_3^6 con retta doppia,

---

(*) Una proprietà caratteristica di questa V_4^6 è data da un teorema dimostrato nella mia già citata Nota di Palermo.

(**) Non è difficile dimostrare direttamente questo teorema.

Se r è una retta d'un piano π passante per la direttrice d di una rigata cubica normale V_2^3, da ogni punto di r (come da ogni punto generico dell'S_4 contenente la rigata) esce *un* piano che seca la rigata secondo una conica. Gli ∞^1 piani che così si ottengono corrispondentemente agli ∞^1 punti di r riempiono una V_3^x, il cui ordine x sarà quello delle superficie secondo cui è tagliata da un S_3 generico condotto per r. Ma tale superficie è la rigata delle corde appoggiate ad r della cubica gobba, sezione dell'S_3 stesso con la V_2^3, ed r è una unisecante della cubica, dunque $x=2$ e quella V_3^x è un cono quadrico passante evidentemente per d. Ma allora ogni altro piano passante per d seca i piani della V_3^x nei punti di una retta, etc.

essa ammetterà un piano doppio δ, e un S_6 generico condotto per δ la taglierà in una residua superficie del 4.° ordine F^4 che si spezza in quattro piani. Infatti se si immagina di tagliare tutta la figura con un S_7, la V_4^6 dà luogo a una V_3^6, l'S_6 a un S_5 generico passante per la retta doppia della V_3^6 e la F^4 alla residua intersezione della V_3^6 con questo S_5, e tale intersezione si compone appunto di quattro rette.

Segue che, eventualmente, la considerata V_4^6 consta di ∞^2 piani tutti appoggiati secondo rette al piano doppio δ; per modo che se si fa la proiezione della V_4^6 dal piano δ si ottengono in corrispondenza ai suoi ∞^2 piani $\infty^2 S_3$ uscenti da δ e costituenti una V_5^4 appartenente ad S_8. Ora tale V_5^4 è il risultato della proiezione di una superficie di Veronese del piano δ, e d'altra parte per un teorema già citato del prof. Enriques, se la V_4^6 in discorso esiste deve essere certo situata su qualche quadrica, dunque se la V_4^6 esiste essa deve essere intersezione parziale del cono V_5^4 ora nominato con una quadrica passante pel piano δ.

Questo ragionamento indica subito come possano esser costruite le V_4^6 del tipo che si sta considerando.

Assumiamo infatti nell'S_8 un piano δ e una quadrica generica V_7^2 passante per esso. La V_7^2 sarà una quadrica non specializzata ed ammetterà $\infty^1 S_3$ passanti per δ; anzi questi S_3 costituendo la sua intersezione con l'S_5 polare del piano δ formeranno una V_4^2 e si potranno ottenere proiettando da δ i punti di una certa conica k^2, situata in un piano indipendente da δ. Ma allora si costruisca in un S_5 indipendente da δ e passante per k^2 una superficie di Veronese che contenga questa conica: la V_5^4 proiettante da δ la superficie di Veronese taglierà la quadrica V_7^2 nella V_4^2 proiettante k^2 da δ e in una residua V_4^6 che conterrà $\infty^2 S_2$ appoggiati secondo rette al piano δ (perchè ogni S_3 per δ della V_5^4 taglia V_7^2 in δ e in un piano residuo) e che sarà evidentemente a curve sezioni ellittiche normali.

Gli ∞^2 piani della V_4^6 ora costruita si distribuiscono in una rete di V_3^3 intersezioni degli ∞^2 coni quadrici della V_5^4 con la V_7^2 fuori della V_4^2 proiettante da δ la conica k^2, e tali V_3^3 sono naturalmente dei coni coi vertici situati su δ. Infatti ciascuna di esse *appartiene* a *un* S_5 come il cono quadrico della V_5^4 che la contiene e non può essere una V_3^3 razionale normale, perchè allora non δ ma una rigata quadrica vera e propria sarebbe una sua rigata direttrice d'ordine minimo.

La rete delle coniche di una superficie di Veronese è autoresidua rispetto al sistema lineare delle sezioni iperpiane ed è pure omaloidica, dunque:

Sulla V_4^6 ora costruita la rete dei coni V_3^3 è autoresidua rispetto al sistema delle sezioni iperpiane e due V_3^3 della rete si tagliano fuori di δ in un piano.

In particolare:

Gli S_4 tangenti alla V_4^6 nei punti di una sua V_3^3 stanno tutti in un iperpiano, cioè in un S_7.

La rappresentazione della V_4^6 sopra un S_4 si ottiene, naturalmente, proiettandola dall'S_3 α di una sua cubica gobba C_3 situata sopra una delle V_3^3 che chiameremo Δ. Ora se si chiama O il punto ove la C^3 taglia il piano δ e Γ il cono V_3^3 dei piani della V_4^6 uscenti da O, l'S_5 del cono Γ e l'S_3 α della cubica C^3 stanno in uno stesso iperpiano (in quello cioè che contiene Γ e Δ) quindi gli ∞^1 S_5 che congiungono i piani di Γ con α tagliano l'S_4 rappresentativo nelle rette di una superficie cubica appartenente ad un S_3. Tale superficie K è la varietà base del sistema lineare delle forme cubiche immagini delle sezioni iperpiane della V_4^6, ed è una rigata cubica di CAYLEY.

Questa asserzione può giustificarsi in doppia maniera. Può osservarsi in primo luogo che gli S_5 di Γ e Δ hanno in comune l'S_3 determinato dal piano δ e dal piano generatore comune a Γ e Δ, quindi α e l'S_5 di Γ hanno in comune una retta di tale S_3, cioè una retta situata nel cono quadrico che proietta Γ da δ. Ma la proiezione di Γ da α sopra l'S_3 dell'S_4 rappresentativo, in cui questo è tagliato dall'iperpiano contenente Γ ed α, è in sostanza la proiezione da α della rigata cubica normale in cui Γ è tagliata da un S_4 generico del suo spazio, e allora tale proiezione, poichè il punto comune ad α e all'S_4 della rigata cubica trovasi sul cono quadrico che proietta questa rigata dalla sua direttrice, sarà appunto una rigata di CAYLEY (*).

Ma, volendo, si può anche osservare che se si chiamano, al solito, Q e K la quadrica fondamentale e la varietà base nella rappresentazione della V_4^6 sopra un S_4, le sezioni iperpiane generiche di Q e K debbono essere una coppia di piani e una cubica nodale situata in uno di essi e tangente all'altro nel nodo. Ma allora Q dovrà essere una coppia di S_3, K una rigata cubica con la direttrice doppia nel piano comune di due S_3 e di più tale piano dovrà toccare K in tutti i punti della direttrice doppia. Ciò significa precisamente che K è una rigata di CAYLEY.

51.° Esaurita la discussione per il caso $n = 6$, facciamo l'ipotesi che sia $n = 7$.

(*) Cfr. BERTINI, *Introduzione*, etc. (Pisa, Spoerri, 1907), pag. 299.

Poichè le sezioni iperpiane generiche di Q e K sono un cono ordinario Q' e una conica K' situata su di esso, Q sarà un cono quadrico a tre dimensioni con una retta doppia e K un cono quadrico ordinario situato su Q col vertice V sulla retta doppia. Allora un iperpiano generico che passi per l'S_5 congiungente V con l'S_4 da cui si fa la proiezione taglia la V_4^7 in una V_3^7 che si rappresenta sopra un S_3 mediante il sistema delle superficie cubiche L_1 passanti per due rette, con punto doppio nella loro intersezione e con un assegnato cono tangente in esso; quindi in una V_3^7 conica (*) e il vertice di questa V_3^7 conica è il vertice del cono del quart' ordine che il detto S_5 ne contiene. Ciò significa che addirittura la V_4^7 è un cono.

La cosa stessa può vedersi anche altrimenti.

Il sistema delle immagini delle sezioni iperpiane è un sistema ∞^9 di forme cubiche L con quadrica base K (che è un cono) e con retta doppia d passante pel vertice V di K. Si trasformi quadraticamente l'S_4 rappresentativo in un altro, prendendo nel primo come punto fondamentale un punto O di d e come quadrica fondamentale K. Ad una forma L corrisponderà una forma L' del 6.° ordine da cui si stacca due volte l'iperpiano ω' corrispondente al punto O e una volta la quadrica proiettante dal punto fondamentale O' del secondo S_4 la relativa quadrica fondamentale K'. Quindi il sistema delle L si muta in un sistema di quadriche passanti pel punto fondamentale O' e tangenti nel vertice di K' all'iperpiano ω', poichè se si considera un piano generico π uscente da d, ad esso corrisponde un piano π' e fra π e π' vi è una corrispondenza quadratica tale che in π' due dei punti fondamentali vengono a coincidere col vertice di K', e allora alla retta ulteriore intersezione di π con una forma L viene a corrispondere in π' una conica tangente ad ω' nel vertice di K'.

Si conclude che la V_4^7 è rappresentabile punto per punto sopra un S_4 per modo che le sezioni iperpiane abbiano per immagini le quadriche passanti per due punti fissi A e B e con un iperpiano tangente fisso in uno di essi, per es. in A. Ed allora il sistema lineare di coni quadrici col vertice in A e passanti per B, sistema lineare ∞^8, rappresenta il sistema delle sezioni della V_4^7 con gli iperpiani passanti per un punto M da cui escono ∞^3 rette della V_4^7 (le rette che hanno per immagini quelle dello spazio rappresentativo uscenti da A), cioè la V_4^7 è un cono.

52.° La dimostrazione ora compiuta conduce facilmente alla determi-

(*) Cfr. Enriques, loc. cit. al n.° 41.

nazione delle V_4^8 di 2.ª specie, di quelle V_4^8 cioè che non contengono delle C^5 razionali normali, o, ciò che fa lo stesso, di quelle V_4^8 di S_{10} che sono tagliate da un S_9 generico in una V_3^8 di 2.ª specie.

Ora risulta dalle ricerche del prof. ENRIQUES che una V_3^8 di 2.ª specie o è un cono o è la V_3^8 di VERONESE: quindi per dimostrare, come già abbiamo annunciato, che tutte le V_4^8 di 2.ª specie sono coni, basta far vedere che è un cono una V_4^8 di S_{10} avente per sezioni iperpiane delle V_3^8 di VERONESE.

Di questo teorema possono darsi varie dimostrazioni. Può dirsi in primo luogo che una V_4^8 di S_{10} a curve sezioni ellittiche è proiettata da un suo punto generico in una V_4^7 di S_9 che è pure a curve sezioni ellittiche; ma allora, come questa V_4^7 è un cono, così anche la V_4^8 è un cono.

Oppure si può imitare un ragionamento del prof. SEGRE, osservando che le collineazioni fra i due S_3 rappresentativi di due V_3^8 di VERONESE danno luogo a ∞^{15} omografie tra i loro spazi ambienti in cui esse si corrispondono. Per modo che se si hanno due V_3^8 di VERONESE e, considerate due loro sezioni iperpiane, si stabilisce fra queste la corrispondenza biunivoca in cui si riflette una proiettività stabilita fra le due quadriche che ne sono le immagini, tale corrispondenza è contenuta in una omografia tra i due S_9 delle V_3^8 in cui queste si corrispondono.

Si osservi ancora che due V_3^8 di VERONESE le quali abbiano due sezioni iperpiane comuni coincidono, poichè un S_7 generico dell'S_9 che le contiene entrambe le taglia in due curve normali ellittiche dell'8.º ordine con 16 punti comuni, cioè in due curve coincidenti.

Posto ciò, sia V_4^8 una varietà dell'S_{10} tagliata da due iperpiani generici α e β in due V_3^8 di VERONESE. Queste due V_3^8 hanno una loro sezione iperpiana (una V_2^8) comune, quindi resta individuata una omografia tra i loro spazi α e β in cui esse si corrispondono e in cui quella V_2^8 è unita punto per punto. Ma allora tale omografia è una prospettività e le due V_3^8 stanno sopra un cono W_4^8, che coincide con la data V_4^8 perchè ogni iperpiano taglierà questa e il cono in due V_3^8 di VERONESE con due loro sezioni iperpiane comuni (quelle contenute in α e β) (*).

(*) Il ragionamento di SEGRE è riportato in BERTINI, *Introduzione*, etc. (Pisa, Spoerri 1907), pag. 342, ed è evidentemente estendibile a tutte le varietà aventi per sezioni iperpiane delle varietà di VERONESE. Si arriva con ciò a un teorema che è caso particolare di un altro stabilito dal sig. TANTURRI (*Giornale di Matematiche*, Napoli, serie 2.ª vol. XIV, 1907).

53.° Riassumendo la discussione precedente, abbiamo l'enunciato:

Una V_4^n $(n > 3)$ razionale normale non conica a curve sezioni ellittiche è

a) per $n = 4$ una V_4^4 base di un fascio di quadriche di un S_6;

b) per $n = 5$ una V_4^5 di S_7;

c) per $n = 6$ la V_4^6 di SEGRE *di S_8 o la V_4^6 (pure di S_8) intersezione parziale di una quadrica e di un cono proiettante da un piano una superficie di* VERONESE (*).

54.° Le proprietà più notevoli della V_4^5 di S_7, che indirettamente risulteranno anche da un teorema che troveremo più tardi, possono dedursi subito dalla sua rappresentazione.

La rigata del quart'ordine K base del sistema di forme L rappresentanti le sezioni iperpiane della V_4^5 può essere di due specie: può avere cioè una direttrice rettilinea o ∞^1 direttrici coniche (**). In ogni caso ha però un punto doppio improprio O che è doppio anche per tutte le L.

Per semplicità consideriamo soltanto il caso generale nel quale K contiene ∞^1 coniche (irriducibili) e siano a e b le due generatrici uscenti dal punto doppio O. Le ∞^4 corde di K rappresentano un sistema ∞^4 di rette di V_4^5 tale che per ogni punto di V_4^5 ne passano ∞^1 costituenti un cono cubico appartenente ad un S_4 e perciò razionale.

Gli ∞^1 coni cubici delle rette uscenti dai vari punti della conica C^2 di V_4^5 da cui si intende fatta la proiezione, hanno per immagini le ∞^1 cubiche nodali (col nodo in O) secondo cui K è tagliata dai piani di un sistema del cono quadrico che la contiene (***). Inoltre essi costituiscono la totale inter-

---

(*) I risultati di questo lavoro furono già annunziati in brevissimo riassunto in una Nota pubblicata nei *Rendiconti della R. Accad. dei Lincei* (gennaio 1908), ma quando pubblicai quella Nota mi pareva di poter dimostrare che per $n = 6$ ogni V_4^n fosse un cono oppure la V_4^6 di SEGRE e così nel teorema ivi enunciato non compare l'altro tipo di V_4^6 che si trova nel teorema del testo.

Nel senso medesimo va rettificata l'asserzione contenuta nell'ultima nota a piè di pagina del lavoro pubblicato nei *Rend. del Circolo di Palermo*, citato più innanzi. Ma si vede subito che tale correzione non ha alcuna influenza sul teorema che da quella asserzione viene dedotto.

(**) SEGRE, *Sulle rigate razionali*, etc. (Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, 1884).

(***) L'immagine di una sezione iperpiana è una forma cubica per K. D'altra parte quella sezione taglia la conica C^2 da cui si fa la proiezione in due punti da ciascuno dei quali partono tre rette della sezione, quindi l'immagine avrà in corrispondenza due terne di punti doppi diversi da O sopra due cubiche piane di K. Il che collima con un bel teorema del prof. SEVERI (*Sulle intersezioni*, etc., n.° 22).

sezione della V_4^5 col cono quadrico proiettante dal piano di C^2, gli S_4 tangenti alla V_4^5 nei punti di C^2, dunque essi riempiono una V_3^{10} che ha in ogni punto di C^2 un punto triplo.

Una sezione iperpiana generica della V_4^5 contiene ∞^4 coniche e per ogni conica della V_4^5 passano ∞^4 iperpiani, dunque la V_4^5 contiene un sistema di coniche ∞^7 e per due suoi punti generici ne passano ∞^1. Segue per l'osservazione precedente che le rette della V_4^5 si distribuiscono in ∞^7 V_3^{10} con altrettante coniche triple nelle coniche della V_4^5.

55.° Notisi prima di procedere oltre che il luogo delle ∞^1 coniche della V_4^5 passanti per due suoi punti generici è una quadrica.

Infatti se si immagina di proiettare la V_4^5 da un punto generico A dello spazio ambiente sopra un S_6, per il punto A passano ∞^2 corde della V_4^5 e ogni S_5 condotto per A ne contiene una, dunque queste ∞^2 corde riempiono un S_3, che avrà in comune con la V_4^5 una superficie. Ma tale superficie non potrà essere che una quadrica, per conseguenza:

La V_4^5 contiene ∞^4 quadriche ordinarie. Per ogni coppia di punti generici di V_4^5 ne passa una ed una sola.

Il fatto che gli ∞^4 S_3 contenenti le quadriche di V_4^5 riempiono *semplicemente* lo spazio ambiente dà luogo al teorema:

Per ogni punto dell'S_7 passano ∞^1 S_4 tangenti della V_4^5: il luogo dei loro punti di contatto è una conica: cosicchè il sistema ∞^7 delle coniche di V_4^5 può farsi corrispondere biunivocamente ai punti di un S_7.

Adoperando una locuzione introdotta dal prof. Severi in una sua Memoria più volte citata, questo teorema può enunciarsi dicendo che l'*ultimo ceto* (ω_3) della V_4^5 è uguale a 2. Crediamo inutile a questo proposito intrattenerci sul calcolo degli altri due ceti: si trova facilmente $\omega_1 = 10$ e $\omega_2 = 8$ (*).

Nello spazio rappresentativo le ∞^4 quadriche della V_4^5 hanno per immagini le quadriche che passando per O tagliano K in una quartica gobba dotata di punto doppio e le coniche della V_4^5 hanno per immagini delle coniche quadrisecanti K, dunque:

Se si considera in un S_4 una rigata del quart'ordine vi sono ∞^4 quadriche ordinarie che la segano in quartiche gobbe nodali; di tali quadriche non

(*) Anche per la V_3^5 di S_6, studiata precedentemente, i valori dei tre ceti sono $\omega_1 = 10$; $\omega_2 = 8$; $\omega_3 = 2$. Ciò significa, per un teorema del prof. Severi (loc. cit. n.° 3), che la V_3^5 non ha punti doppi impropri.

ne passa che una per due punti generici dell'S_4. Inoltre il sistema ∞^7 delle coniche quadrisecanti la rigata è una varietà razionale.

Due quadriche secanti K in quartiche nodali hanno in totale quattro punti comuni. Ma di questi uno cade in O, altri due stanno parimenti su K, dunque non ne resta che uno esterno a K. Ciò significa che:

Due quadriche generiche della V_4^5 hanno un sol punto comune.

Se A e B sono due punti generici della V_4^5, la quadrica che passa per A e B mostra che vi sono due rette di V_4^5 per A che si appoggiano a due rette della V_4^5 passanti per B; e si potrebbe vedere che queste sono le sole rette incidenti della V_4^5 uscenti da A e B rispettivamente, dunque:

I coni cubici riempiti dalle rette che escono dai punti della V_4^5 si tagliano a due a due in due punti.

56.° I coni cubici delle rette di V_4^5 uscenti dai punti di una sua retta a riempiono una V_3 che ha per immagine nello spazio rappresentativo la V_3 delle corde di K appoggiate a una sua corda generica. Ma questa è una V_3^3 passante per K, dunque quella è una V_3^5 sezione di V_4^5 con un iperpiano ad essa tangente (si riconosce subito) in tutti i punti di a.

57.° I piani dello spazio rappresentativo che contengono le ∞^1 coniche di K sono, come è chiaro, immagini di ∞^1 piani della V_4^5, poichè ogni retta di uno qualunque di essi, essendo corda di K, è immagine di una retta di V_4^5.

Ora si consideri la rigata razionale normale V_2^4 di S_5 da cui K si può immaginare ottenuta mediante proiezione da un punto esterno P. I piani delle coniche di V_2^4 sono i piani secondo cui si intersecano gli iperpiani corrispondenti di due fasci proiettivi aventi per assi gli S_3 di due coppie di generatrici della V_2^4, quindi il loro luogo è una V_3^3 razionale normale con ∞^2 rigate quadriche direttrici i cui S_3 riempiono *semplicemente* lo spazio ambiente.

Ne segue che il luogo degli ∞^1 piani contenenti le coniche di K è una V_3^3, avente un piano direttore doppio nella proiezione della quadrica direttrice della V_3^3 razionale suddetta, che è contenuta in un S_3 passante per P. Poi siccome questo S_3 taglia la V_2^4 in una linea e perciò in una cubica gobba una cui corda passa per P, si conclude che il piano direttore doppio della V_3^3 contenente i piani di K è il piano delle due generatrici di K uscenti dal punto doppio improprio. Sopra un tal piano, infine, i piani delle coniche di K tagliano le tangenti di una conica.

Dalle cose dette segue subito che:

Gli ∞^1 piani della V_4^5 costituiscono una sezione iperpiana e quindi il loro luogo è una V_3^5 razionale (normale in un S_7) con un piano direttore *doppio δ su cui gli altri piani segnano le tangenti di una conica, cioè l'iperpiano contenente questa V_3^8 tocca la V_4^5 in tutti i punti di δ.*

58.° Sulla V_4^6 di S_8 studiata dal prof. Segre (*) crediamo inutile trattenerci minutamente. Ricorderemo soltanto che essa può rappresentarsi *senza eccezioni* sulla varietà delle coppie di punti di due piani, e allora poichè la V_3^6 di S_7 con due sistemi di rette Λ e M può sempre riguardarsi come una sezione iperpiana di una tale V_4^6, si avrà che:

La V_3^6 di S_7 (a curve sezioni ellittiche) con due sistemi di rette si può rappresentare biunivocamente senza eccezioni sulla varietà delle coppie di punti coniugati in due sistemi piani reciproci.

Così una V_2^6 di S_6 a curve sezioni ellittiche si può sempre considerare come la sezione di una V_4^6 di Segre eseguita con un certo S_6, dunque:

La V_2^6 di S_6 a curve sezioni ellittiche si può riferire biunivocamente senza eccezioni alla varietà delle coppie di punti omologhi in due piani riferiti quadraticamente.

È noto inoltre che gli S_5 contenenti le V_3^3 razionali normali delle V_4^6, oppure gli S_3 che ne contengono le quadriche, o infine gli S_4 tangenti alla V_4^6 hanno per luogo una V_7^3 di cui la V_4^6 è da considerarsi come varietà doppia, dunque:

Il luogo degli S_4 contenenti le rigate cubiche normali di una V_3^6 di S_7 (a curve sezioni ellittiche) con due sistemi di rette Λ *e* M, *oppure il luogo degli S_2 che ne contengono le ∞^4 coniche, o infine il luogo degli S_3 tangenti è una V_6^3, per la quale è doppio ogni punto della V_3^6.*

Questa V_6^3 può definirsi, volendo, come la forma riempita dalle corde della V_3^6 (al pari della V_7^3 rispetto alla V_4^6), e quindi le corde della V_3^6 *non* riempiono lo spazio ambiente, ossia *essa è priva di punti doppi apparenti.*

Alcune considerazioni che qui non riporto perchè non mi è ancora riuscito di presentarle in maniera compiuta, mi fan pensare che le V_3 di S_r $(r \geq 7)$ le cui corde non riempiono una V_7 rientrano fra le V_3 a spazi tangenti mutuamente secantisi: se ciò fosse il teorema che ho dimostrato nella Nota di Palermo già citata, darebbe una nuova proprietà caratteristica di alcune delle V_3 a curve sezioni ellittiche. Qui mi limiterò a far notare che il luogo delle corde della V_3^6 con una retta doppia è la V_6^3 proiettante dalla retta

(*) Segre, loc. cit., n.° 22.

doppia la M_4^3 contenente le corde di una superficie di VERONESE, e il luogo delle corde della V_3^8 di VERONESE è una V_6^{10} (*).

59.° Prima di lasciare questo argomento delle V_4 a curve sezioni ellittiche, osserveremo che esse dànno per proiezione da loro punti delle notevoli forme cubiche di S_5.

La V_4^5 di S_7 proiettata da due suoi punti generici A e B sopra un S_5 dà luogo a una V_4^3 con due S_3 α e β immagini dei punti della V_4^5 infinitamente vicini ad A e B, e la quadrica della V_4^5 che passa per A e B dà luogo a una retta l (intersezione di α e β) doppia per la V_4^3.

I due sistemi ∞^2 di quadriche di V_4^5 passanti per A o B, rispettivamente, dànno luogo a due sistemi ∞^2 di piani appoggiati secondo rette ad α o β rispettivamente, tali che per ogni punto della V_4^3 passa un solo piano di ognuno dei due sistemi.

Due piani dello stesso sistema non hanno in generale punti comuni, invece due piani di sistemi differenti hanno sempre *un* punto comune.

Chiameremo piani del sistema $[\alpha]$ quelli che tagliano α in rette e piani del sistema $[\beta]$ i rimanenti.

I coni cubici delle rette della V_4^5 uscenti da A e B si proiettano in due cubiche gobbe k_α^3 e k_β^3 situate in α e β rispettivamente, le quali hanno due punti comuni su l, come i coni obbiettivi hanno due punti comuni sulla quadrica passante per A e B.

Un iperpiano che passi per l'S_4 tangente in un punto A alla V_4^5 e poi passi per un altro punto X della V_4^5 contiene la quadrica della V_4^5 che passa per A ed X poichè ne contiene il punto X e due rette per A, dunque la sezione iperpiana della V_4^5 ad essa corrispondente è riempita da ∞^1 quadriche passanti tutte per A.

Ne segue che se si considerano gli iperpiani passanti per B e per l'S_4 tangente alla V_4^5 nel punto A, essi tagliano la V_4^5 in V_3^5 per B con un punto doppio in A che si proiettano in coni quadrici della V_4^3: precisamente in coni quadrici formati dai piani del sistema $[\alpha]$. Uno di questi coni quadrici sarà la residua intersezione della V_4^3 con un iperpiano (S_4) del suo spazio passante per α: quindi esso conterrà un piano di β e avrà il vertice su β.

Anzi, se si osserva che un iperpiano passante per B e per l'S_4 tangente alla V_4^5 in A contiene tre rette della V_4^5 uscenti da B, di cui due si appog-

(*) L'ordine di questa V_6 può calcolarsi mediante le formule date dal prof. SEGRE nella Nota citata al n.° 9. I piani trisecanti della V_3^8 riempiono poi una V_8^4.

giano al cono cubico delle rette uscenti da A, mentre la terza si appoggia in un punto a ciascuna delle ∞^1 quadriche costituenti la sezione della V_4^5 col considerato iperpiano, si conclude che gli ∞^1 coni quadrici ora considerati hanno i loro vertici sulla cubica k_β^3.

Nello stesso modo si dimostra che k_α^3 è il luogo dei vertici dei coni quadrici intersezioni residue della V_4^3 con gli iperpiani passanti per β, e dopo ciò è chiaro che k_α^3 e k_β^3 sono linee doppie della V_4^3.

Notisi che i piani di $[\alpha]$ tagliano α nelle corde di k_α^3 e i piani di $[\beta]$ tagliano β nelle corde di k_β^3, quindi gli S_4 che proiettano, per es., i piani di $[\alpha]$ da due piani di $[\beta]$ descrivono intorno a questi due piani due stelle proiettive.

Questo dimostra che la V_4^3 di cui qui si parla è caso particolare della V_4^3 studiata dal prof. Veneroni (*) e generabile mediante stelle di iperpiani proiettive. La sestica ellittica che nel caso generale costituisce il solo luogo di punti doppi della V_4^3 si spezza qui nelle due cubiche gobbe k_α^3 e k_β^3.

60.° Molto più notevole è la V_4^3 di S_5 che si ottiene proiettando da tre suoi punti generici A_1, A_2, A_3 la V_4^6 di Segre.

Come già si è detto, questa V_4^6 contiene due sistemi ∞^2 di piani e tenendo conto, per es., della sua rappresentazione sulla varietà delle coppie di punti di due piani, si vede subito che essa contiene ∞^4 quadriche ordinarie e ∞^8 superficie di Veronese per modo che per due suoi punti generici passa *una* quadrica e per quattro punti generici *una* superficie di Veronese.

Allora i sei piani di V_4^6 uscenti da A_1, A_2, A_3 e le tre quadriche passanti per (A_1, A_2), (A_2, A_3) e (A_3, A_1) hanno per immagini nove rette doppie della V_4^3, e inoltre, i due sistemi di piani della V_4^6, le tre reti di quadriche passanti per A_1, A_2, A_3 rispettivamente e la rete di superficie di Veronese passanti per $A_1\ A_2\ A_3$ danno luogo a sei sistemi ∞^2 di piani della V_4^3, i piani di ciascun sistema appoggiandosi in punti a tre di quelle nove rette.

La V_4^3 contiene *nove* S_3 congiungenti le nove coppie di rette sghembe che possono formarsi con le nove rette doppie, etc., etc., etc.

Questo basta per riconoscere che la V_4^3 a cui si perviene è quella stu-

(*) *Intorno ad un fascio di varietà cubiche dello spazio a cinque dimensioni* (Rendic. del R. Ist. Lombardo di scienze e lettere, serie II, t. XXXVIII, 1905).

diata già dal prof. PERAZZO (*) in una sua Nota del 1901 e della quale pertanto potrebbe rifarsi con tutta facilità la teoria partendo dalla V_4^6 di SEGRE (**).

§ IV.

LE ALTRE VARIETÀ A CURVE SEZIONI ELLITTICHE.

61.° La discussione fatta per le varietà a quattro dimensioni dimostra già che una V_k^n di S_{n+k-2} non conica per $k > 4$ non può avere che l'ordine $n = 5$, 6 (***); ma è facile vedere che anche per $n = 6$ e $k > 4$ le V_k^n si riducono a coni. Sia (poichè basta limitarsi al caso di $k = 5$) V_5^6 una varietà a curve sezioni ellittiche di S_9. La sua sezione iperpiana generica sarà:

a) una V_4^6 di SEGRE, oppure

b) una V_4^6 con piano doppio, situata sopra una V_4^4 proiettante da un piano una superficie di VERONESE;

e non saranno possibili altri casi se non si vuol supporre fin dal principio che V_5^6 sia un cono.

Nell'ipotesi *a*) la V_5^6 sarà rappresentabile punto per punto sopra un S_5 e le sezioni iperpiane avranno per immagini le forme cubiche di un sistema lineare ∞^9 passanti per una varietà K del 3.° ordine e a tre dimensioni situata sopra una quadrica Q. Di più le sezioni iperpiane generiche di K e di Q dovranno essere una rigata cubica normale e il cono quadrico a tre dimensioni con retta doppia che la proietta dalla sua direttrice. Ma allora Q dovrà avere un piano doppio ω e K dovrà essere il luogo di ∞^1 piani ap-

---

(*) *Sopra una forma cubica con nove rette doppie*, etc. (Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, 1901).

(**) Sulle forme cubiche dell'S_4 cui danno luogo per proiezioni le V_3 a curve sezioni ellittiche non giova fermarsi dopo la nota ed esauriente trattazione del prof. SEGRE. Pure non sarà fuor di luogo notare incidentalmente come lo studio della V_3^3 di S_4 con 10 punti doppi diventi rapidissimo quando si consideri la V_3^3 come proiezione da cinque suoi punti generici della V_3^8 (di S_9) di VERONESE.

(***) Infatti per $n > 6$ ogni sua sezione con un S_{n+2} è una V_4^n normale a curve sezioni ellittiche e tale V_4^n per $n > 6$ è un cono.

poggiati ad ω secondo rette. D'altra parte una V_3^3 di S_5 riempita da ∞^1 piani, che non sia la V_3^3 razionale normale (e K non sarà una tale V_3^3 perchè ha un piano direttore) non può essere che un cono proiettante da un certo punto O una rigata cubica normale, quindi K coinciderà con un tal cono e Q sarà la quadrica con piano doppio che lo proietta dal suo piano direttore.

Ciò posto si consideri in un S_9 una W_5^6 ottenuta proiettando da un punto V una V_4^6 di Segre e presa una sua qualunque cubica gobba C^3 si immagini di proiettarla dallo spazio di questa C^3 sopra un S_5.

Da un punto della C^3 escono due S_3 della W_5^6, cosicchè variando il punto su C^3, si hanno due serie ∞^1 di S_3, il luogo dell'una (*) essendo una V_4^3 conica col vertice V proiettante da V una V_3^3 razionale normale di un S_5, il luogo dell'altra essendo una V_4^6 conica proiettante da V una V_3^6 razionale normale (luogo di ∞^1 piani) di un S_8. Segue allora che l'immagine della V_4^3 nell'S_5 su cui si fa la proiezione sarà un piano passante per l'immagine V' di V, poichè la V_4^3 sta in un S_6 passante per C^3, e che l'immagine della V_4^6 è una V_3^3 conica col vertice in V', ogni S_3 della V_4^6 avendo per immagine un S_2 della V_3^3, poichè sta con la C^3 in un S_6. Ma allora il sistema delle forme cubiche rappresentante le sezioni iperpiane di W_5^6 è un sistema riducibile per trasformazione omografica al sistema di forme cubiche della V_5^6 prima considerata, dunque V_5^6 è un cono al pari di W_5^6.

Nell'ipotesi *b*) la V_5^6 dovendo esser tagliata da ogni iperpiano in una V_4^6 con un piano doppio, dovrà possedere un S_3 doppio δ; e dovendo esser tagliata (si vede subito) da ogni S_7 per δ in quattro S_3, si comporrà di ∞^2 S_3 appoggiati a δ secondo piani. Di più gli ∞^4 S_4 proiettanti da δ questi ∞^2 S_3 saranno gli S_4 proiettanti da δ i punti di una certa superficie di Veronese.

Ognuno degli ∞^2 coni quadrici proiettanti da δ le coniche di questa superficie conterrà della V_5^6 una V_4 che, dovendo esser tagliata da ogni iperpiano in una V_3^3 conica, sarà una V_4^3 ottenuta proiettando da una certa retta una rigata cubica normale, dunque avremo in δ ∞^2 piani, tracce su δ degli ∞^2 S_3 della V_5^6, e ∞^2 rette, vertici della ∞^2 V_4^3 corrispondenti alle ∞^2 coniche della superficie di Veronese. Poichè ogni S_3 della V_5^6 fa parte di ∞^1 V_4^3, cor-

(*) Da un teorema dimostrato precedentemente (n.° 29) segue che una V_4^6 di Segre contiene due sistemi ∞^{10} di cubiche gobbe e che i piani della V_4^6 uscenti dai punti di una sua cubica gobba riempiono due V_3, distinte, razionali normali, la prima dell'ordine 3, la seconda dell'ordine 6.

rispondentemente al fatto che per ogni punto di una superficie di Veronese passano ∞^1 coniche, concludiamo che quelle ∞^2 rette di δ formano una congruenza con ∞^2 piani singolari, cioè una stella ordinaria di centro V. Ma allora la V_5^6 è un cono di vertice V, c. d. d.

62.° Per dimostrare invece l'esistenza di V_5^5 (appartenenti a spazi a 8 dimensioni) e V_6^5 (appartenenti a spazi a 9 dimensioni) a curve sezioni ellittiche non coniche, ammettiamo provvisoriamente che una V_6^5 esista e studiamone le proprietà della rappresentazione sopra un S_6.

La rappresentazione sarà ottenuta mediante proiezione dal piano di una conica della V_6^5: le immagini delle sezioni iperpiane saranno forme cubiche con una V_4^4 base, luogo di ∞^1 S_3, dotata di un piano doppio δ (poichè ogni S_4 dell'S_6 deve tagliarla in una V_2^4 con un punto doppio improprio), e il *resto* degli iperpiani dell'S_6 rappresentativo rispetto al sistema di queste forme cubiche sarà il cono quadrico proiettante da δ la V_4^4.

La V_4^4, essendo costituita da ∞^1 S_3, potrà considerarsi come proiezione di una W_4^4 razionale normale di S_7 da un punto esterno O. Considerando la W_4^4 come rappresentata, nel modo indicato dal prof. Segre, sopra la varietà delle coppie di punti di una retta, r, e di un S_3, α, si vede subito che essa contiene ∞^4 quadriche ordinarie, ognuna di esse essendo rappresentata dalle coppie di punti di r e di una retta di α, e si vede anche che per ogni coppia di punti della W_4^4 di queste quadriche non ne passa che una sola. Gli S_3 di queste ∞^4 quadriche riempiono *semplicemente* l'S_7 della W_4^4, quindi la V_4^4 essendo ottenuta dalla W_4^4 per proiezione da O conterrà (come appunto si voleva) un piano doppio δ e ∞^4 quadriche ordinarie.

Ora è chiaro che gli S_3 dell'S_6 rappresentativo contenenti le quadriche di V_4^4 (in particolare, uscenti da δ) rappresentano S_3 della V_6^5 e poichè gli S_3 uscenti da δ tagliano su quattro S_3 contenenti quattro quadriche generiche della V_4^4 quattro spazi omografici, anzi prospettivi, si conclude che gli ∞^3 S_3 della V_6^5 aventi per immagini gli ∞^3 S_3 dello spazio rappresentativo uscenti da δ, formano sulla V_6^5 un sistema Σ che si può immaginare come generato congiungendo i punti omologhi di certi quattro S_3 proiettivi, aventi (come le loro immagini) due a due un punto comune e in esso un punto unito.

Arrivati a questo punto si potrebbe dimostrare l'esistenza della V_6^5 facendo vedere che si possono costruire in un S_9 quattro S_3 proiettivi così che gli S_3 congiungenti i punti omologhi generino una V_6^5, ma si può evitare ogni ulteriore ragionamento osservando che una V_6^5 del tipo di quella che andiamo cercando (e tutte queste V_6^5 sono proiettivamente identiche) è fornita senz'altro dalla V_6^5 di S_9 che rappresenta nella nota maniera la varietà delle rette di uno spazio a quattro dimensioni.

Allora non solo resta dimostrata l'esistenza delle V_5^5 di S_8 e delle V_6^5 di S_9, ma si vede anche la ragione intima di alcune proprietà proiettive già esaminate delle V_3^5 di S_6 e della V_4^5 di S_7 e si ha una via semplice per lo studio della V_5^5 di S_8 e della V_6^5 di S_9 (*).

Così per es. la V_5^5 di S_8 potrà rappresentarsi sulla varietà delle rette di un complesso lineare di S_4, quindi conterrà un S_3 e ∞^4 S_2 appoggiati a questo in punti, etc., etc.

Si osservi ancora come dalle cose dette qui intorno alla rappresentazione della V_6^5, della V_5^5 e della V_4^5 sopra un S_6, un S_5 o un S_4 e da quelle stabilite dai proff. Enriques e Del Pezzo intorno alla rappresentazione delle V_3^5 e V_2^5 sopra un S_3 o un S_2, risultino delle notevoli rappresentazioni:

a) della varietà delle rette di un S_4 sopra i punti di un S_6;

b) delle rette di un complesso lineare di un S_4 sopra i punti di un S_5;

c) delle rette comuni a due, tre o quattro complessi lineari di un S_4 sopra i punti di un S_4, di un S_3 o di un S_2.

Nel 1.° caso, le immagini dei vari complessi lineari dell'S_4, in tutti gli altri, le immagini delle intersezioni della varietà considerata con i vari complessi lineari dell'S_4 sono costituite da forme cubiche a 5, 4, 3, 2 e 1 dimensioni.

63.° Dimostriamo ora che per $k > 6$ anche le V_k^5 di S_{k+3} si riducono a coni, e per questo basta limitarsi al caso in cui $k = 7$.

Supponiamo per un momento che V_7^5 sia una varietà a curve sezioni ellittiche di S_{10} e facciamone la proiezione sopra un S_7 dal piano di una sua conica qualunque. La proiezione risulterà biunivoca e la varietà base del sistema ∞^{10} delle forme cubiche immagini delle sezioni iperpiane dovrà essere una V_5^4 riempita da ∞^1 S_4. Ora se si indicano con m', m'', m''', m^{IV} gli ordini delle V_1, V_2, V_3, V_4 direttrici minime che tagliano in S_0, S_1, S_2 o S_3 gli S_4 generatori di una W_5^4 razionale normale di cui questa V_5^4 sia (eventualmente) proiezione, deve aversi $m' \leq m'' - m' \leq m''' - m'' \leq 4 - m'''$ (**) e d'altra parte è impossibile soddisfare a queste disuguaglianze con numeri interi,

(*) In particolare si potranno scrivere le equazioni delle V_k^5 ($k = 6, 5, 4, 3, 2$) di S_{k+3}: esse si otterranno in ogni caso ponendo cinque equazioni quadratiche fra le coordinate correnti.

(**) Bellatalla, *Sulle varietà razionali normali*, etc. (Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, Vol. XXXVI, 1901).

dunque la V_5^4 è necessariamente un cono, e allora segue nel solito modo che anche la V_7^5 è un cono ottenuto proiettando da un punto una V_6^5 di S_9.

64.° Riassumendo le ricerche qui compiute possiamo dire:

Una V_k^n a curve sezioni ellittiche o è una ∞^1 ellittica di S_{k-4} o, se $n > 3$, è razionale. In quest'ultimo caso o è un cono o è proiezione di una W_k^n normale non conica di uno spazio a $n + k - 2$ dimensioni.

Le W_k^n razionali normali non coniche di S_{n+k-2} si riducono poi per $k > 3$ (ed $n > 3$):

a) alle V_k^n basi dei fasci di quadriche di un S_{k+2},

b) alla V_6^5 di S_9 che rappresenta nel solito modo la varietà delle rette di un S_4, e alle V_5^5 (di S_8) e V_4^5 (di S_7) che si ottengono da essa tagliandola mediante spazi a 8 o 7 dimensioni,

c) alla V_4^6 (di S_8) del prof. Segre *e alla V_4^6 (di S_9) intersezione residua di un cono V_5^4 proiettante da un piano una superficie di* Veronese *e di una quadrica che passa pel vertice di V_5^4 ed ha comune con esso uno dei suoi ∞^2 coni quadrici a quattro dimensioni.*

65.° Tenendo presente la rappresentazione della V_6^5 di S_9 sopra le rette di un S_4 si vede subito che essa contiene ∞^4 S_3, gli ∞^1 S_3 uscenti da un punto qualunque costituendo una V_4^3 proiettante da quel punto una V_3^3 razionale normale: tali S_3 infatti non sono altra cosa che le varietà della V_6^5 corrispondenti alle rette dell'S_4 uscenti dai vari suoi punti.

Sulla V_6^5 si hanno ancora ∞^4 quadriche a quattro dimensioni, per due punti generici della V_6^5 passandone una sola; esse corrispondono agli ∞^4 spazi (ordinari) rigati dell'S_4 e quindi si tagliano a due a due in piani.

Le due V_4^3 costituite dagli S_3 che escono da due punti A e B della V_6^5 si tagliano in una V_2^2: la quadrica V_4^2 passante per A e B contiene due sistemi ∞^1 di S_2 passanti per A e due tali sistemi per B; dei due sistemi per A (o per B) uno è formato di S_2 *situati* negli S_3 per A (o per B), l'altro di S_2 *direttori* della V_4^3 da essi costituita; inoltre tale quadrica V_4^2 contiene la V_2^2 secondo cui si tagliano le due V_4^3.

Infine si vede facilmente che un iperpiano il quale passi per l'S_6 tangente in A alla V_6^5 e poi per un punto X della varietà stessa, contiene la quadrica V_4^2 passante per A e per X perchè ne contiene una V_3^2 ed un punto: dunque una sezione della V_6^5 con un iperpiano tangente è composta di ∞^1 V_4^2. Ciò che del resto è immediato se si pon mente all'S_4 rappresentativo.

66.° Ora supponiamo di proiettare la V_6^5 di S_9 da due suoi punti A e B sopra un S_7. Si avrà una V_6^3 con due S_5, che rappresenteranno i punti della V_6^5 infinitamente vicini ad A e B e che chiameremo α e β.

La quadrica (a quattro dimensioni) della V_6^3 che passa per A e B, stando in un S_5 per A e B, si proietta nell'S_3 λ comune ad α e β, e si riconosce subito che ogni punto di λ è doppio per la V_6^3.

Le ∞^2 V_4^2 per A danno luogo a ∞^2 S_4 della V_6^3 costituenti un sistema $[\alpha]$; così si hanno altri ∞^2 S_4 costituenti un sistema $[\beta]$.

Gli S_4 di $[\alpha]$ si appoggiano ad α secondo S_3, e così quelli di $[\beta]$ a β.

Due S_4 di uno stesso sistema si tagliano secondo una retta: due S_4 di sistemi diversi si tagliano in un piano.

Le due V_4^2 di V_6^3 uscenti dai punti A e B danno luogo a due V_3^3 razionali normali situate in α e β; e come le due V_4^3 hanno comune una V_2^2 sulla V_4^2 per A e B, così le due V_3^3 in α e β, che chiameremo K_α^3 e K_β^3, hanno comune una V_2^2 sull'S_3 λ.

Una sezione iperpiana con punto doppio in A si proietta in una quadrica contenente ∞^1 S_4 residua intersezione della V_6^3 con un iperpiano (S_6) del suo spazio passante per α; tale quadrica V_5^2, contenendo ∞^1 S_4, ha un piano doppio situato in β, anzi su K_β^3. E lo stesso può ripetersi per il punto B.

Ne segue che la V_6^3, oltre lo spazio doppio λ, ha anche due V_3^3 doppie, K_α^3 e K_β^3, le quali si tagliano su λ in una quadrica ordinaria; gli S_4 di $[\alpha]$ tagliano β nei piani di K_β^3 e α negli S_3 contenenti le quadriche (ordinarie) di K_α^3, e analogamente per gli S_4 di $[\beta]$, etc., etc.

Tutto ciò dimostra che la V_6^3 in discorso è caso particolare della V_6^3 che si ottiene in un S_7 come luogo degli S_4 secondo cui si tagliano gli iperpiani omologhi di tre stelle proiettive aventi per centri tre S_4.

Tale V_6^3 contiene due sistemi ∞^2 di S_4 e ha una V_3^6 doppia a curve sezioni ellittiche con due sistemi di rette; quindi essa non è altra cosa che la varietà delle corde di questa V_3^6 (n.º 58).

Il suo studio, allora, è implicitamente contenuto in quello della V_7^3 contenente le corde di una V_4^6 del Segre, forma cubica che dà per sezione con un S_5 la forma studiata dal prof. Veneroni nel lavoro che già abbiamo avuto occasione di citare.

Notisi che se si volesse considerare la forma cubica generata da tre stelle proiettive di iperpiani di un S_9 aventi per centri tre S_6 (e lo stesso dicasi per spazi di dimensione più elevata) questa non presenterebbe più alcun interesse, perchè si ridurrebbe ad un cono; ad un cono, cioè, proiettante dal punto comune ai tre S_6 una V_7^3 di Segre.

Palermo, marzo 1908.

Sur la convergence uniforme d'une classe de séries infinies.

(*Par* Niels Nielsen, *à Copenhague.*)

La méthode que l'on applique ordinairement pour déterminer le champ de convergence d'une série de puissances m'a conduit au théorème général suivant:

I. *Désignons par*

$$f_0(x), \quad f_1(x), \quad f_2(x), \ldots, \quad f_n(x), \ldots \tag{1}$$

une suite illimitée des fonctions, telle que $f_0(x)$ est finie et déterminée, tandis que la série à termes positifs $\Sigma\; f_n(x) - f_{n+1}(x)$ est uniformément convergente, quand la variable x parcourt un ensemble infini quelconque K; supposons ensuite convergente la série $\Sigma\, a_n$, la nouvelle série infinie $\Sigma\, a_n f_n(x)$ est uniformément convergente dans l'ensemble K.

Considérons le terme de reste de la série $\Sigma\, a_n f_n(x)$, savoir

$$R_{n,p} = a_{n+1} f_{n+1}(x) + a_{n+2} f_{n+2}(x) + \cdots + a_{n+p} f_{n+p}(x),$$

où p désigne un positif entier quelconque, puis mettons

$$S_m = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m; \quad a_m = S_m - S_{m-1},$$

nous aurons immédiatement pour $R_{n,p}$ cette autre expression:

$$R_{n,p} = \Big(S_{n+p} f_{n+p}(x) - S_{n+1} f_{n+1}(x)\Big) + \sum_{r=1}^{r=p-1} S_{n+r} \Big(f_{n+r}(x) - f_{n+r+1}(x)\Big)\cdot \tag{2}$$

Or, la série $\Sigma\, a_n$ étant convergente, il est possible de déterminer une quantité positive et finie G, telle que pour toutes les valeurs de m

$$G \geqq |\, S_m \,|\,. \tag{3}$$

Cela posé, désignons par ε une quantité positive donnée auparavant et étant aussi petite qu'on le veut, il est, en vertu de la convergence uniforme de la série $\Sigma \,|\, f_n(x) - f_{n+1}(x) \,|$, possible de déterminer un positif entier N_1, de sorte que pour $n \geqq N_1$, tandis que p désigne un positif entier quelconque, nous aurons constamment quand x parcourt l'ensemble K

$$\left| \sum_{r=1}^{r=p-1} S_{n+r} \left(f_{n+r}(x) - f_{n+r+1}(x) \right) \right| \leqq G \,.\, \sum_{r=1}^{r=p-1} \left| f_{n+r}(x) - f_{n+r+1}(x) \right| < G \,.\, \varepsilon. \quad (4)$$

Posons ensuite généralement

$$F_n(x) = \sum_{r=0}^{r=n-1} \left(f_r(x) - f_{r+1}(x) \right) = f_0(x) - f_n(x),$$

la convergence uniforme de $\Sigma \,|\, f_n(x) - f_{n+1}(x) \,|$ ne montrera seulement que

$$\lim_{n=\infty} F_n(x) = f_0(x) - \lim_{n=\infty} f_n(x)$$

est une fonction finie et déterminée, quand x parcourt l'ensemble K, mais de plus que nous aurons pour $n \geqq N_2$, tandis que p est un positif entier quelconque

$$|\, F_{n+p}(x) - F_n(x) \,| = |\, f_{n+p}(x) - f_n(x) \,| < \varepsilon. \quad (5)$$

Or, nous avons identiquement

$$S_{n+p} f_{n+p}(x) - S_{n+1} f_{n+1}(x) = (S_{n+p} - S_{n+1}) f_{n+p}(x) + S_{n+1} \left(f_{n+p}(x) - f_{n+1}(x) \right);$$

soit ensuite G_1 une telle quantité positive et finie que nous aurons constamment $G_1 \geqq |\, f_m(x) \,|$ pour toutes les valeurs de m, quand x parcourt l'ensemble K, il est possible de déterminer un positif entier N_2, tel que nous aurons pour $n \geqq N_2$,

$$|\, S_{n+p} f_{n+p}(x) - S_{n+1}(x) f_{n+1}(x) \,| < (G + G_1)\, \varepsilon, \quad (6)$$

où p désigne un positif entier quelconque, tandis que x appartient à l'ensemble K.

Cela posé, désignons par N le plus grand des nombres N_1 et N_2, nous aurons finalement, en vertu de (2), (4) et (6), pour $n \geqq N$,

$$|\, R_{n,p} \,| < (2\,G + G_1)\, \varepsilon; \quad (7)$$

c'est-à-dire que la série $\Sigma\, a_n f_n(x)$ est uniformément convergente dans l'ensemble K.

Il est évident que l'inégalité (7) garde sa validité encore, si l'on suppose la série Σa_n oscillante entre des limites finies, tandis que la suite (1) satisfasse à la condition ultérieure

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) = 0. \tag{8}$$

Le théorème que nous venons de démontrer est évidemment une généralisation de celui donné par P. DU BOIS REYMOND et DEDEKIND.

Comme première application considérons la série de DIRICHLET

$$D(x) = \frac{c_1}{\lambda_1^x} + \frac{c_2}{\lambda_2^x} + \frac{c_3}{\lambda_3^x} + \cdots + \frac{c_n}{\lambda_n^x} + \cdots, \tag{9}$$

où les coefficients c_n sont des nombres quelconques indépendants de x, tandis que la suite illimitée des nombres positifs

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \ldots, \quad \lambda_n, \ldots$$

doit satisfaire aux deux conditions suivantes

$$\lambda_{n+1} > \lambda_n, \quad \lim_{n=\infty} \lambda_n = +\infty.$$

Pour étudier la série (9) désignons par ρ un nombre fini tel que la série $D(\rho)$ est convergente; posons ensuite

$$x - \rho = \alpha + i\beta, \quad \alpha > 0$$

$$a_n = \frac{c_n}{\lambda_n^\rho}, \quad f_n(x) = \frac{1}{\lambda_n^{x-\rho}} = \frac{1}{\lambda_n^{\alpha+i\beta}},$$

nous aurons évidemment

$$\frac{f_n(x) - f_{n+1}(x)}{\lambda_n^{-\alpha} - \lambda_{n+1}^{-\alpha}} = \frac{\lambda_n^{-\alpha-i\beta} - \lambda_{n+1}^{-\alpha-i\beta}}{\lambda_n^{-\alpha} - \lambda_{n+1}^{-\alpha}};$$

posons encore $\delta = \log \lambda_{n+1} - \log \lambda_n > 0$, nous aurons

$$\frac{|f_n(x) - f_{n+1}(x)|}{\lambda_n^{-\alpha} - \lambda_{n+1}^{-\alpha}} = \left| \frac{e^{\delta\alpha} - e^{-i\delta\beta}}{e^{\delta\alpha} - 1} \right| = \left| 1 + \frac{1 - e^{-i\delta\beta}}{e^{\delta\alpha} - 1} \right|,$$

ce qui donnera, sans peine

$$\frac{f_n(x) - f_{n+1}(x)}{\lambda_n^{-\alpha} - \lambda_{n+1}^{-\alpha}} \leqq 1 + \frac{1 - e^{-i\delta\beta}}{e^{\delta\alpha} - 1} = 1 + \left| \frac{\sin \frac{1}{2} \delta \beta}{\frac{1}{2} \delta \beta} \right| \cdot \left| \frac{\beta}{2\alpha} \right| \cdot \frac{\delta \alpha}{e^{\delta\alpha} - 1}.$$

Or, δ et α étant positifs et β réel, nous aurons

$$\left| \sin \frac{1}{2} \delta \beta \right| < \frac{1}{2} |\delta \beta|, \quad \alpha \delta < e^{\alpha\delta} - 1,$$

d'où finalement

$$|f_n(x) - f_{n+1}(x)| < \left(1 + \frac{\beta}{2\alpha}\right)(\lambda_n^{-\alpha} - \lambda_{n+1}^{-\alpha}); \tag{10}$$

cette inégalité et la démonstration précèdente sont dues à M. Jensen.

Considérons maintenant l'ensemble K des nombres finis complexes x telles que pour

$$x - \rho = \alpha + i\beta,$$

il doit être possible de déterminer une quantité positive finie G, telle que nous aurons constamment $|\beta| \leqq G$ et une quantité positive g, telle que $\alpha \geqq g$. Cela posé, nous aurons en vertu de (10)

$$\sum_{r=1}^{r=p} f_{n+r}(x) - f_{n+r+1}(x) < \left(1 + \frac{G}{2g}\right)(\lambda_{n+1}^{-\alpha} - \lambda_{n+p}^{-\alpha}),$$

d'où avec plus forte raison

$$\sum_{r=1}^{r=p} f_{n+r}(x) - f_{n+r+1}(x) | < \left(1 + \frac{G}{2g}\right) \lambda_{n+1}^{-\alpha}; \tag{11}$$

c'est-à-dire que la série $\Sigma \, | f_n(x) - f_{n+1}(x) |$ est uniformément convergente dans l'ensemble K.

Supposons ensuite non convergente la série $D(\rho)$, puis mettons $x - \rho = \alpha + i\beta$, $\alpha < 0$, il est évident que la série $D(x)$ ne peut jamais converger; c'est-à-dire que nous avons démontré ce théorème:

II. *Le champ de convergence d'une série de* Dirichlet *est l'ensemble des valeurs de x qui satisfont aux conditions $|x| \leqq G$ et $R(x) > \lambda$. Supposons $x| \leqq G$ et $R(x) \geqq \lambda + \delta$, δ désignant une quantité positive arbitrairement petite mais assignable, la série $D(x)$ est toujours uniformément convergente et sa somme représente par conséquent une fonction analytique de x.*

La détermination du champ de convergence de $D(x)$ appartient à M. Jensen, tandis que la démonstration de l'uniformité de la convergence semble être nouvelle.

Comme seconde application considérons la série de factorielles

$$\Omega(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n!\, c_n}{x(x+1)\dots(x+n)}, \tag{12}$$

où les coefficients c_n doivent être indépendants de x; nous définissons comme champ de convergence de $\Omega(x)$ le domaine, où cette autre série

$$\frac{\Omega(x)}{\Gamma(x)} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n!\, c_n}{\Gamma(x+n+1)}$$

est convergente.

Désignons ensuite par ρ un nombre fini, tel que la série $\Omega(\rho)$ est convergente, puis mettons

$$a_n = \frac{n!\, c_n}{\rho(\rho+1)\dots(\rho+n)}, \quad f_n(x) = \frac{\rho(\rho+1)\dots(\rho+n)}{x(x+1)\dots(x+n)},$$

nous aurons

$$f_n(x) - f_{n+1}(x) = \frac{1}{x(x-\rho)} \cdot \frac{\rho(\rho+1)\dots(\rho+n)}{(x+1)(x+2)\dots(x+n+1)},$$

où bien, en introduisant la fonction

$$\Gamma_n(x) = \frac{1.2.3\dots(n-1).n^x}{x(x+1)\dots(x+n-1)}, \quad \lim_{n=\infty} \Gamma_n(x) = \Gamma(x),$$

cette autre expression

$$f_n(x) - f_{n+1}(x) = \frac{1}{x(x-\rho)} \cdot \frac{\Gamma_{n+1}(x+1)}{\Gamma_{n+1}(\rho)} \cdot \frac{1}{(n+1)^{1+x-\rho}}. \tag{13}$$

Posons maintenant

$$x - \rho = \alpha + i\beta, \quad \alpha \geqq g > 0,$$

la formule (13) donnera

$$f_n(x) - f_{n+1}(x) \leqq \frac{A_n}{n^{1+g}}, \tag{14}$$

où $|A_n| \leqq G < \infty$ pour toutes les valeurs de n: c'est-à-dire que nous avons démontré cet autre théorème:

III. *Le champ de convergence d'une série de factorielles est l'ensemble des valeurs de x qui satisfont à la condition $R(x) > \lambda$; supposons $R(x) \geqq \lambda + \delta$, la série $\Omega(x)$ est uniformément convergente (à l'exception naturellement des points $x = 0, -1, -2, \ldots$ situés peut-être dans le champ susdit), et sa somme représente par conséquent une fonction analytique de x.*

Le champ de convergence de $\Omega(x)$ ou bien d'une série beaucoup plus générale encore a été indiqué par M. Jensen et démontré par M. Landau; la démonstration de l'uniformité de la convergence semble être nouvelle.

Par le même procédé on peut traîter la série de coefficients binomiaux

$$B(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n \cdot \binom{x-1}{n}, \tag{15}$$

où les coefficients c_n sont indépendants de x; nous trouvons ici ce théorème analogue à III:

IV. *Le champ de convergence d'une série de coefficients binomiaux est l'ensemble des valeurs de x qui satisfont aux conditions $|x| \leqq G$ et $R(x) > \lambda$. Supposons $|x| \leqq G$ et $R(x) \geqq \lambda + \delta$, la série $B(x)$ est uniformément convergente et sa somme représente par conséquent une fonction analytique de x.*

Le champ de convergence de $B(x)$ ou bien d'une série plus générale a été indiqué par M. Jensen et démontré par M. Landau; la démonstration de l'uniformité de la convergence semble être nouvelle.

Revenons maintenant à la série de Dirichlet (9), où nous supposons $\lambda_1 = 1$, savoir la série

$$D(x) = a_1 + \frac{a_2}{\lambda_2^x} + \frac{a_3}{\lambda_3^x} + \cdots + \frac{a_n}{\lambda_n^x} + \cdots \tag{16}$$

que nous supposons convergente, pourvu que la partie réelle de x soit plus grande que ρ. Introduisons ensuite la fonction discontinue $f(t)$ de la variable réelle t, définie de sorte que pour

$$\frac{1}{\lambda_n} \geqq t \geqq \frac{1}{\lambda_{n+1}}$$

nous aurons constamment

$$f(t) = A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,$$

nous trouvons immédiatement

$$\int_0^1 f(t)\, t^{x-1}\, dt = \frac{1}{x} \cdot \left(\sum_{r=1}^{r=n} \frac{a_r}{\lambda_r^x} - \frac{A_n}{\lambda_{n+1}^x} \right). \tag{17}$$

En premier lieu supposons $\rho \geqq 0$, puis choisissons la partie réelle de x plus grande que ρ, nous aurons

$$\frac{A_n}{\lambda_{n+1}^x} = \frac{1}{\lambda_{n+1}^{x-\varrho}} \cdot \sum_{r=1}^{r=n} \frac{a_r}{\lambda_r^\varrho} \cdot \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_{n+1}} \right)^\varrho,$$

d'où en vertu du théorème I

$$\lim_{n=\infty} \frac{A_n}{\lambda_{n+1}^x} = 0. \tag{18}$$

En second lieu supposons $\rho \leqq 0$, de sorte que la série Σa_n est convergente; il est évident que la formule (18) garde sa validité dans ce cas aussi, pourvu que la partie réelle de x soit positive; c'est-à-dire que nous avons démontré le théorème suivant, qui n'est certainement pas nouveau:

V. *Supposons convergente, pourvu que la partie réelle de x soit plus grande que ρ, la série de* Dirichlet (16), *nous aurons la formule intégrale*

$$\frac{D(x)}{x} = \int_0^1 f(t)\, t^{x-1}\, dt, \tag{19}$$

valable pour les valeurs finies de x, dont la partie réelle est à la fois positive et plus grande que ρ.

Posons maintenant dans (19) $x + \alpha$ au lieu de x, nous aurons

$$\frac{D(x+\alpha)}{x+\alpha} = \int_0^1 f(t)\, t^\alpha \left(1 - (1-t)\right)^{x-1} dt; \tag{20}$$

appliquons ensuite la formule binomiale, la série infinie ainsi obtenue

$$f(t)\, t^\alpha \left(1 - (1-t)\right)^{x-1} = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \binom{x-1}{n} \cdot f(t)\, t^\alpha (1-t)^n \tag{21}$$

est certainement intégrable terme à terme dans l'intervalle $\delta \leqq t \leqq 1$, où δ désigne une quantité positive aussi petite qu'on le veut, mais d'une grandeur assignable.

Remarquons maintenant que la série infinie

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \binom{x-1}{n}$$

est absolument convergente, pourvu que la partie réelle de x soit positive, tandis que l'intégrale définie

$$\int_0^1 f(t)\, t^{\alpha} (1-t)^n \, d\, t$$

est finie pour toutes les valeurs de n, pourvu que la partie réelle de α soit à la fois plus grande que ρ et positive, nous aurons le théorème suivant qui est peut-être nouveau:

VI. *Supposons plus grande que $+1$ la partie réelle de x, tandis que la partie réelle de α est à la fois positive et plus grande que ρ, nous aurons ce développement en série de coefficients binomiaux*

$$\frac{D(x+\alpha)}{x+\alpha} = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \cdot \binom{x-1}{n}, \tag{22}$$

où nous avons posé pour abréger

$$A_n = (-1)^n \int_0^1 f(t)\, t^{\alpha} (1-t)^n \, d\, t = \sum_{r=0}^{r=n} (-1)^r \binom{n}{r} \frac{D(\alpha+n-r+1)}{\alpha+n-r+1}\,; \tag{23}$$

la série qui figure au second membre de (22) *est absolument convergente.*

Ce théorème montre clairement que la fonction $D(x+\alpha):(x-\alpha)$ est développable selon la formule d'interpolation de Newton.

Sulla teoria dell'equazione a derivate parziali (*).

(*Di* PIETRO BURGATTI, *a Roma*.)

Signori, Se dal mio modesto cantuccio nel gran campo della Scienza levo oggi la voce per intrattenervi un poco su talune questioni matematiche, non è certo per far mostra di qualche sapienza, il che sarebbe ambizioso e falso; ma col solo fine di manifestare nel miglior modo che posso l'interessamento e la fiducia che m'inspira questo Congresso, in cui tanti e sì valentuomini attendono a ordinare e riunire le sparse forze per salire insieme alle luminose vette del Vero.

Nell'evoluzione presente del pensiero la teoria dell'equazioni differenziali è senza dubbio tra le più belle e importanti; come quella che assurgendo dallo studio dei fenomeni naturali, attinge alto alto, alle più audaci astrazioni della mente. Essa è filosofia e poesia, scienza ed arte, analisi e sintesi ad un tempo. Le dottrine più varie in apparenza intorno ad essa si avviluppano, s'incontrano, s'annodano. — Io non saprei, pur se avessi maggior tempo, presentarvi una pittura completa e fedele di questo grande edifizio, che l'uomo ha creato nell'ultimo secolo; a tanto mi mancherebbero le forze. — Mi stringerò dunque a considerare una sola parte della teoria in discorso, quella che riguarda l'equazioni a derivate parziali; e di questa, nell'accennare rapidamente ai progressi fatti e da fare, toccherò solo alcuni luoghi, sui quali sono andato talora meditando; se con ingegno e fortuna non so, certo con molto amore. Molte cose, del resto, furono dette già da illustri matematici in varie e recenti occasioni, perciò poco potrò dir di nuovo (**).

(*) Lettura fatta nel I Congresso della « Società Italiana per il progresso delle scienze », in Parma, settembre 1907.

(**) PICARD, *Révue générale des sciences.* — FORSYTH, *Proceedings of London Mathematical Society*, 1907 e *Theorie of differential equations.*

1. Quando una teoria, dopo una rapida elaborazione, è giunta ad un certo grado di sviluppo, è utile, e talora necessario, rifarsi un pò indietro, ed esaminare attentamente i principi e i teoremi che sono a fondamento della teoria stessa. Riguardo all'integrazione dell'equazione a derivate parziali è d'importanza fondamentale un teorema semplicissimo di LAGRANGE.

Data un'equazione del 1.° ordine lineare nelle derivate di z rispetto a $x_1, x_2, \dots, x_n$, se $u_1 = \text{cost.}$, $u_2 = \text{cost.}, \dots, u_{n-1} = \text{cost.}$ sono gl'integrali di un certo sistema ai differenziali ben facili a costruirsi, una funzione arbitraria F di $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ uguagliata a zero fornisce l'integrale generale dell'equazione proposta. Si può anche dire: ogni funzione F che unita alle $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ dà un determinante funzionale identicamente nullo, uguagliata a zero fornisce un integrale della proposta. Questa proposizione è vera senza dubbio, ma non sembra vera l'inversa. In questi ultimi tempi è stata proposta, ma non risoluta, la questione seguente: Il teorema di LAGRANGE dà o no tutti gl'integrali dell'equazione (*)? È un fatto che esistono certi integrali $F = 0$, e sovente dei più semplici e più ovvî, pei quali quel determinante funzionale non è nullo identicamente. Esaminando la cosa un po' da vicino, si vede che talvolta quel determinante s'annulla in virtù di $F = 0$, talaltra risulta uguale a una costante diversa da zero. Nel primo caso la F non è immediatamente esprimibile per le $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$; ma la si può esprimere moltiplicandola per un conveniente fattore funzione delle variabili, nel 2.° caso invece non sembra esprimibile in alcun modo per le u; talchè nasce un grave dubbio sulla generalità del teorema di LAGRANGE. La cosa può vedersi da un'altro punto di vista. Quando è data un'equazione differenziale della forma in discorso, noi supponiamo che la F sia definita implicitamente da un'equazione $F(x, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, e con tale ipotesi, per mezzo della derivazione delle funzioni implicite, rendiamo l'equazione proposta omogenea, e concludiamo abitualmente esser necessario e sufficiente che quella F, funzione di $n - 1$ variabili, soddisfi a codesta equazione. Ma si vede subito che se si uguaglia quell'espressione differenziale omogenea a λF invece che a zero, o più generalmente a una funzione che s'annulla per $F = 0$, una sua soluzione uguagliata a zero definisce (salvo eccezioni facile a vedersi) una soluzione della proposta; e questa soluzione non è sempre deducibile dal teorema di LAGRANGE.

In generale noi siamo poco cauti nell'uso delle funzioni implicite; e ciò può infirmare la generalità e la verità dei risultati.

(*) FORSYTH, l. c.

Se già per l'equazioni differenziali più semplici nascono questi dubbî, che sicurezza possiamo avere degli analoghi risultati per l'equazione non lineari e d'ordine superiore al primo? Per esempio, se $u=$ cost. e $v=$ cost. sono due integrali intermediarî del primo ordine d'una equazione del 2.° ordine con due variabili indipendenti, $f(u, v)=0$, dove f è arbitraria, si suol ritenere equivalente all'equazione proposta. Ma questo modo di considerare le cose può lasciar sfuggire infinite soluzioni; e ciò per ragioni analoghe a quelle esposte. Parmi dunque giusto di richiamare la vostra attenzione su questo punto, sul quale poggia gran parte della teoria in discorso.

Un'altra questione fondamentale, che occupò molto i matematici, specialmente negli ultimi 30 anni, riguarda i così detti teoremi d'esistenza. Nella classica dimostrazione della Kowalewski il sistema differenziale, che contiene tante funzioni incognite quant'è il numero delle equazioni, è risoluto rispetto alle derivate d'ordine più alto prese tutte rispetto alla stessa variabile indipendente. Ciò è molto particolare. Esistono infatti dei sistemi che per nessun cambiamento di variabili sono riducibili alla forma kowalewskiana. E non occorre scervellarsi tanto per costruirne; si presentano spontaneamente in problemi importanti.

Per esempio, il sistema d'equazioni della deformazione per flessione delle superficie è uno di questi (*). Ecco intanto un nuovo campo di ricerche che ora si estende innanzi alla mente dello studioso, e promette una buona raccolta di risultati utili.

Restando nel terreno classico, si è cercato in quest'ultimi anni d'estendere fino dov'era possibile il teorema d'esistenza di Cauchy ai sistemi con un numero qualunque d'equazioni e di funzioni incognite Riquier e Délassus, ai quali dobbiamo i migliori risultati su questo soggetto, seguendo vie diverse hanno decomposto il problema in due:

1) Riduzione del sistema dato, quand'è possibile e mediante procedimenti d'eliminazione e derivazione, a una certa forma chiamata passiva, o involutoria, o semplicemente canonica.

2) Studio della convergenza delle serie che soddisfano formalmente a un sistema canonico, e del loro grado d'arbitrarietà.

Il Riquier (**), classificando le derivate in principali e parametriche ri-

(*) Hadamard, *Bulletin Société Mathématique de France,* 1907.

(**) *Acta Mathematica,* T. 25; *Ann. École Normale,* 1893.

spetto al sistema dato, riesce a porlo sotto una certa forma risoluta rispetto alle derivate principali, e chiama questo sistema ortonomo-passivo, quando ogni altra derivata principale d'ordine superiore a quelle dei primi membri, si può esprimere in modo unico come funzione delle variabili e delle derivate parametriche, mediante il sistema stesso e quelli che si ottengono derivando quanto si vuole. Ciò richiede naturalmente che certe condizioni siano soddisfatte; ma tutti i sistemi completamente integrabili pei quali finora è stabilito il teorema d'esistenza di Cauchy sono di quel tipo.

I sistemi canonici del Délassus (*) sono diversi e più semplici di quelli del Riquier. Colla loro considerazione egli giunge a questo risultato sotto più rispetti notabilissimo: L'integrazione d'un sistema completamente integrabile d'equazioni a derivate parziali con n variabili, può sempre ridursi, con opportuni cambiamenti di variabili e processi d'eliminazione, all'integrazione successiva di n sistemi kowalewskiani, contenenti rispettivamente 1, 2,..., n variabili. Con questa riduzione a sistemi kowalewskiani si evita la dimostrazione diretta della convergenza delle serie, che, data la generalità dei sistemi, è estremamente laboriosa e delicata; e si riesce ad assegnare facilmente il numero delle funzioni arbitrarie da cui dipende l'integrale generale.

3. Sulla generalità delle soluzioni dell'equazioni a derivate parziali fu molto discusso e si discute ancora. Sarebbe assai importante venirne a capo. Considerando, per esempio, un'equazione d'ordine n e con un numero qualunque di variabili risoluto rispetto a una derivata dell'ordine più elevato, il teorema di Cauchy assegna alle soluzioni olomorfe un grado di generalità rappresentato da n funzioni arbitrarie. D'altro canto il Borel (**) ha trovato una formola contenente una sola funzione arbitraria e un certo numero di costanti, atta a rappresentare tutti gl'integrali d'una tale equazione che sono olomorfi in qualche regione. La soluzione di Cauchy è sotto forma di serie, quella di Borel sotto forma d'integral definito. Come si vede, quanto al numero delle funzioni arbitrarie, son questi due casi estremi; ed è ben naturale di domandarsi se tutte le soluzioni olomorfe non siano per avventura rappresentabili con formule contenenti un numero K di funzioni arbitrarie, K compreso tra 1 e n. Nelle applicazioni, a seconda del problema che si deve risolvere, può esser utile aver l'integrale sotto una forma piuttosto che

(*) *Ann. École Normale.* Supplément, 1896.
(**) *Bulletin de Darboux*, S. II, T. XIX, 1895.

sotto un'altra. Gli esempi son numerosi. Dal teorema di CAUCHY, DARBOUX ha dedotto una definizione dell'integral generale diversa da quella che fu data già da AMPÈRE. Queste due definizioni son troppo note perchè io abbia qui bisogno di ricordarle. GOURSAT (*) ha mostrato con parecchi esempi che un integrale può essere generale nel senso d'AMPÈRE, e non esserlo nel senso di DARBOUX. Ma d'altra parte l'integrale di BOREL dianzi ricordato è generale in ambedue i sensi. Io credo perciò, contrariamente ad altri, che sia possibile un pieno accordo tra le due definizioni, parendomi che la definizione d'AMPÈRE o non sia giustamente interpretata, o sia in qualche punto perfezionabile. Comunque la questione non è ancora interamente chiarita.

Il raggruppare poi, come ora si suol fare, le infinite costanti arbitrarie, che entrano negl'integrali dell'equazione in un numero finito di funzioni arbitrarie rispondenti a certe condizioni iniziali, se è utilissimo sotto molti rispetti, è però molto particolare. In certe ricerche può essere utile raggrupparle in altro modo; talchè va consolidandosi l'idea di studiare gl'integrali come funzioni della totalità dei loro parametri (**). Sarebbe perciò necessario costruire una teoria delle funzioni d'un numero infinito di variabili. Ora non siamo che ai primissimi tentativi; la sua potenza si manifesterà in avvenire.

Volgiamo ora lo sguardo per un momento al di fuori del ristretto campo analitico, in regioni ancora poco esplorate, ma dove un giorno cammineranno trionfalmente i nostri successori verso orizzonti più lontani.

Per l'equazioni lineari di tipo iperbolico con due variabili indipendenti il DARBOUX (***) ha dedotto dalle geniali concezioni di RIEMANN un teorema che afferma l'esistenza d'una soluzione continua insieme alle sue derivate prime, la quale assume sulle caratteristiche uscenti da un punto valori dati. Come si vede qui non si parla che di continuità, e i dati sono diversi da quelli di CAUCHY. Se poi si danno le condizioni di CAUCHY sopra un arco di curva preso con qualche precauzione la soluzione è definita in tutto un rettangolo che ha due vertici opposti nell'estremità dell'arco, ed è continua insieme alle derivate prime. Non basta; noi sappiamo ora qualcosa di più (****).

(*) *Leçons sur l'intégration des équations...* T. II.

(**) LE ROUX, *Recherches sur les équations aux dérivées partielles.* Journal Math., 1903.

(***) *Théorie des surfaces.* T. II.

(****) GOURSAT, *Sur un problème relatif à la théorie des équations...* Annales de Toulouse, 1903-04.

Esiste una soluzione continua in un certo rettangolo che assume valori dati a priori sopra due archi di curva uscenti da un punto e compresi in uno dei quadranti formatî dalle caratteristiche che passano per lo stesso punto.

Se le due curve sono in quadranti adiacenti, si possono assegnare i valori della soluzione sopra una di esse, e le condizioni di CAUCHY sull'altra; se trovansi in quadranti opposti si possono assegnare le condizioni di CAUCHY su ambedue (*). Avanzando in quest'ordine di idee si è giunti a qualche risultato anche per l'equazioni lineari d'ordine superiore al secondo e con due variabili indipendenti; ma qui le difficoltà sono assai gravi; anzitutto per questo, che i casi ellittico, iperbolico e parabolico sono inscindibili; ond'è probabile una maggior varietà di teoremi d'esistenza. Il loro studio, sotto molti rispetti, è d'una grande importanza. Le ricerche fatte finora si riferiscono a casi particolari: quando le caratteristiche sono tutte reali o tutte immaginarie. In quest'ultimo caso fu dimostrato che ogni soluzione determinata e continua insieme alle sue derivate fino a quelle d'ordine n è necessariamente analitica.

Nel primo caso invece esiste una soluzione non necessariamente analitica, continua insieme alle sue derivate fino a quelle dell'ordine $n-2$ entro un'area compresa tra le caratteristiche estreme uscenti da un punto, e che su queste assume insieme a quelle derivate valori dati. Le derivate d'ordine $n-1$ sono discontinue a traverso le caratteristiche intermedie (**). Se alle caratteristiche estreme sostituiamo altre due scelte a piacere, o più generalmente due curve qualunque uscenti da un punto, non sappiamo più nulla di preciso. Quando poi si passa all'equazioni lineari con tre o più variabili si vedono apparire difficoltà d'altra natura e non meno gravi.

Tuttavia, sotto l'impulso degli studî del VOLTERRA (***) si son fatti progressi ragguardevoli negli ultimi anni.

Per dirne quanto sarebbe necessario dovrei parlare e della teoria delle caratteristiche e dello sviluppo del metodo d'integrazione di RIEMANN. Ciò mi porterebbe troppo lontano dai limiti che mi sono imposto, e dalla materia che più particolarmente ho preso a trattare.

4. Torno dunque sulla via maestra, ai metodi generali d'integrazione

(*) HADAMARD, *Bulletin de la Société Math. de France.* T. 31, 1903.

(**) BURGATTI, *Sull'estensione del metodo di Riemann*... Acc. Lincei, Rend., 1908.

(***) *Acta Mathematica*, T. 18. — *Sur les vibrations des corps élastiques isotropes.*

dell'equazioni a derivate parziali; a quei metodi cioè, che si propongono per fine la determinazione dell'integrale così detto generale.

Per l'equazioni lineari del second'ordine con due variabili indipendenti abbiamo un sol metodo, molto particolare invero, ma estremamente bello e importante. Scoperto da LAPLACE, fu illustrato e perfezionato da DARBOUX nella sua grand'opera: *Théorie des Surfaces* (*). Data un'equazione lineare di tipo iperbolico, se ne possono dedurre infinite altre mediante l'applicazione successiva di certe trasformazioni dette ora di LAPLACE. Quando una di esse risulta immediatamente integrabile, l'integral generale della proposta si deduce con quadrature.

In quest'ultimi tempi si è cercato di estendere il metodo di LAPLACE all'equazioni lineari di forma più generale. Sfortunatamente la sua potenza diminuisce col crescere del numero delle variabili, o, per dir meglio, tutta si esaurisce nel caso delle due variabili. Il DINI (**) infatti ha dimostrato che se l'integrazione di una equazione lineare del second'ordine e con n variabili indipendenti si può ottenere regolarmente col procedimento di LAPLACE, essa è riducibile con un' opportuno cambiamento di variabili a un'equazione con due sole variabili della forma EULERO-LAPLACE. Ciò è scoraggiante, e mostra la necessità di raddoppiare i nostri sforzi per trovare metodi nuovi e più potenti, atti a gettare un po' di luce nel campo di queste equazioni. Al contrario, per l'equazioni d'ordine n con due variabili indipendenti, il metodo di LAPLACE è per dare risultati più soddisfacenti. In verità solo poche ricerche e incomplete sono state fatte finora; ma da quel poco già s'intravede la via da seguire e i frutti da raccogliere (***). Occorrerebbe anzitutto costruire una teoria invariantiva di quelle equazioni e di certi altri sistemi che nell'applicazione del metodo s'incontrano.

5. Nella teoria delle equazioni del second'ordine con due variabili indipendenti, ma di forma qualunque, il solo grande progresso compiuto dopo le profonde speculazioni di MONGE e AMPÈRE è dovuto al metodo di DARBOUX. Esso deriva sostanzialmente da quello di JACOBI per l'equazione del prim'ordine; ma è più largo nel concetto.

(*) Vol. II.

(**) *Memorie Acc. Lincei,* S. V, T. III; vedi anche GOURSAT, *Bull. Société Math. de France.*

(***) LE ROUX, *Extension de la méthode de Laplace.* Bull. d. Math. de France, T. 27. — L. PISATI, *Sull'estensione del metodo di Laplace*, ecc. Rend. Circ. Palermo, T. XX.

Consiste nel cercare una o più equazioni del second'ordine e d'ordine superiore compatibili, come suol dirsi, con la data; cioè, avente con essa degl'integrali comuni contenenti infinite costanti arbitrarie. Tale ricerca si compie col sussidio di certe coppie di sistemi d'equazioni ai differenziali totali. Quando per ciascun sistema d'una di queste coppie si ha una combinazione integrabile, l'integrazione dell'equazione data non richiede più che quadrature. Ma se tali combinazioni non esistono, ed è il caso più frequente, il metodo non conduce alla mèta. Sarebbe perciò molto importante allo stato presente della teoria, la determinazione di tutte l'equazioni integrabili con quel metodo (*). È un problema assai difficile, ma forse non ribelle ai mezzi che offre ora l'analisi. Se ne conoscono già alcune classi: per esempio, talune che appartengono all'equazioni con caratteristiche coincidenti, e quelle che ammettono un gruppo di trasformazioni puntuali o di contatto d'ordine infinito dipendenti da due funzioni arbitrarie. È probabile che classificando l'equazioni secondo l'ordine del gruppo che ammettono si riesca a separare le difficoltà per poi superarle ad una ad una.

Il metodo di Darboux si può facilmente estendere all'equazione d'ordine più elevato. Ciò è stato fatto nelle sue linee generali (**); ma perchè esso acquisti un valor pratico occorre studiarlo e perfezionarlo nei particolari. Per l'equazioni con più di due variabili l'estensione è più incerta, benchè a priori possibile. Se si pensa che il metodo di Darboux applicato all'equazioni lineari conduce agli stessi risultati che quello di Laplace, e che questo, come ho detto già, limitata la sua potenza al caso delle due variabili, vien fatto di credere che anche per l'equazioni non lineari le limitazioni siano assai più ristrette che non si speri.

6. Un mezzo meraviglioso per penetrare nelle più riposte proprietà dell'equazioni differenziali è offerto dalla teoria delle trasformazioni. Noi dobbiamo al genio di Lie una teoria completa della trasformazione dell'equazione del prim'ordine. E invero egli dimostrò che data un'equazione qualunque del 1.° ordine con n variabili esiste sempre una trasformazione di contatto atta a trasformarlo in un'altra equazione qualunque dello stesso ordine, e in particolare in un'altra immediatamente integrabile. Sfortunatamente non è più così per l'equazioni d'ordine superiore al primo. Un'equazione del second'ordine può bensì cambiarsi in un'altra dello stesso ordine

(*) Goursat, l. c.

(**) Vedi principalmente nel Forsyth, Vol. VI.

mediante una trasformazione di contatto, ma non in un'altra scelta a piacere. Per esempio, nessuna trasformazione di contatto può rendere una data equazione integrabile col metodo di DARBOUX, se non è essa stessa integrabile con quel metodo. Le trasformazioni dunque introdotte da LIE non bastano a darci una teoria completa della trasformazione dell'equazione del 2.° ordine; teoria, che essendo intimamente connessa con quella dell'integrazione, è giustamente considerata tra le più importanti. Oggigiorno noi conosciamo alcune classi di trasformazioni per l'equazioni del second'ordine ben più potenti di quelle di contatto, perchè riescono ad operare nell'equazioni certe utilissime riduzioni non raggiungibili con quelle. Tra esse meritano speciale menzione le trasformazioni di BÄCKLUND (*), che negli ultimi anni sono state oggetto di studi notabili, specialmente in Francia. Considerando i diversi modi di corrispondenza fra gl'integrali dell'equazione data e quelli della trasformata, scaturì un'utile classificazione di quelle trasformazioni in tre tipi, ciascun dei quali presenta proprietà speciali (**). Ma con questo la teoria delle trasformazioni di BÄCKLUND non è che al principio del suo sviluppo. Molte questioni difficili restano da risolvere, tra le quali è giustamente considerata importante allo stato presente delle nostre cognizioni questa: trovare tutte l'equazioni del 2.° ordine con due variabili riducibili a forma lineare per mezzo d'una trasformazione di BÄCKLUND. È noto infatti che l'equazioni lineari sono le più accessibili all'analisi moderna. Il problema è stato studiato, ma non interamente risoluto.

Non è a credere che colla teoria delle trasformazioni di BÄCKLUND resti compiuta la teoria generale della trasformazione dell'equazioni del 2.° ordine. Esistono altre trasformazioni più potenti di quelle di BÄCKLUND; io stesso ebbi occasione anni fa di darne qualche esempio (***). Esaminandole nel loro insieme si scopre che la loro comune origine risiede nella teoria della eliminazione dei sistemi del prim'ordine (****). Dato un sistema di m equazioni del prim'ordine con 2 variabili indipendenti e n funzioni, $n \leq m$, se l'eliminazione di $n-2$ funzioni conduce per ciascuna delle due rimanenti

(*) *Math. Ann.*, B. 19.

(**) CLAIRIN, *Sur les transformations de Bäcklund.* Ann. Ec. Normal, T. XIX.

(***) BURGATTI, *Sulla trasformazione dell'equazioni differenziali.* Rend. Acc. Lincei, S. V, T. VII, 1.° sem.

(****) GOURSAT, volume citato.

a un'equazione del second'ordine, si ottiene una corrispondenza tra gl'integrali dell'una e quelli dell'altra, e perciò una trasformazione. Da questo punto di vista si vedono assai bene le difficoltà della questione: ma non è detto ancora che sia questo il punto più elevato per dominare tutta intera la teoria della trasformazione.

Sui principali resultati ottenuti nella teoria dei gruppi continui dopo la morte di Sophus Lie (1898-1907) (*).

(*Di* Ugo Amaldi, *a Modena.*)

Sophus Lie, quando or son quasi dieci anni, scese nella tomba, del grandioso programma di lavoro, intorno a cui aveva esercitato la portentosa sua potenza di invenzione e di indagine, solo una parte aveva potuto estrinsecare in un insieme ben coordinato e connesso di teorie. Prescindiamo pur completamente dai problemi di integrazione, per considerare soltanto le teorie dei gruppi continui. Anche qui, mentre la teoria dei gruppi continui finiti, alla morte del Lie, si poteva riguardare oramai come sostanzialmente compiuta, pei gruppi infiniti (o dipendenti da più che un numero finito di parametri arbitrari) il Lie non lasciava a noi che una sommaria trattazione dei fondamenti della teoria, accanto a scarsi e frammentari accenni di quelle ulteriori vedute generali, che egli pure in questo campo, chissà per quali audaci accorciatoie, aveva saputo conquistare.

Accadde così che, in questo decennio, ben pochi si avventurassero nel campo non ancora dissodato dei gruppi infiniti; mentre alla teoria dei gruppi continui finiti, che in sè raccoglieva il fascino di una concezione eminentemente geniale e le attrattive di un assetto oramai determinato e completo, si volse una vera folla di cultori.

Ma, quasi per compenso, mentre questa coorte di ricercatori, lasciati

Nota. Dopo la presentazione di questo rapporto al Congresso di Parma è uscito in luce il bellissimo articolo di G. Fano: *Kontinuierliche geometrische Gruppen. Die Gruppentheorie als geometrisches Einteilungsprinzip* [Encykl. der math. Wiss., vol. III_1]. Ed io, prima di licenziare il manoscritto, me ne sono valso per completare in qualche punto le note bibliografiche di questo rapporto.

(*) Rapporto letto al I Congresso della « Società Italiana per il progresso delle scienze », in Parma, settembre 1907.

quasi del tutto da parte i problemi più larghi ed elevati, si adoprarono sovratutto a illustrare la teoria dei gruppi continui finiti nelle sue molteplici applicazioni geometriche ed analitiche, i pochi cultori della teoria dei gruppi continui infiniti affrontarono, con varietà di spedienti e con elevatezza di vedute, le questioni più comprensive e salienti; talchè oggi è in questo campo che noi possiamo notare i progressi più significativi della teoria dei gruppi continui.

In queste condizioni, sarà per me assai facile il compito di riferir qui riassuntivamente i nuovi resultati conseguiti nella teoria dei gruppi infiniti; ma, per quanto riguarda i gruppi continui finiti, io non posso presumere che di un così vasto insieme di indagini, nulla sia sfuggito alla mia attenzione; nè, d'altro canto, fra una materia tanto differenziata, mi è lecita la speranza di poter raggiungere quella rapidità e limpidezza di sintesi, che varrebbero a compensare le temute e probabili deficienze di notizie. Io mi studierò bensì di raggruppare le indagini secondo le affinità dei problemi considerati e risolti: ma spesso queste affinità saranno così tenui e così formali che io dovrò procedere enumerando, anzichè classificando.

Teoria generale dei gruppi continui finiti.

Prendendo le mosse dai *lavori di indole generale sulla teoria dei gruppi continui finiti*, ricordo anzitutto alcune ricerche appartenenti a quell'indirizzo simbolico formale, a cui il Lie nella sua costruzione aveva assegnato un ufficio del tutto secondario.

È ben noto che le trasformazioni di un gruppo continuo ad r parametri, in un certo intorno della trasformazione identica, si possono riguardare come ottenute per iterazione infinita di certe ∞^{r-1} trasformazioni infinitesime, le quali, rappresentate al modo del Lie mediante operatori differenziali lineari, danno luogo ad un insieme lineare che contiene con ogni coppia dei suoi operatori anche la loro parentesi del Poisson. Appar di qui che codesto insieme si può considerare come un sistema di numeri ad r unità, *chiuso* rispetto alla somma e ad una certa particolare operazione di moltiplicazione, non commutativa, ma alternante. Dallo studio di un tal sistema di numeri complessi J. E. Campbell (*), il Poin-

(*) *Proof of the third fundamental theorem in Lie's theory of continuous groups* [Proceedings of the math. Society of London, t. 33 (1901)]. Il lavoro, per cui spetta al Campbell

CARÉ (*), il PASCAL (**) e da ultimo lo HAUSDROFF (***) cercarono, per vie diverse e con singolare virtuosità algoritmica, di giungere ai teoremi fondamentali del LIE e sopratutto alla costruzione effettiva di r trasformazioni infinitesime di un gruppo, quando ne siano fissate le costanti di composizione.

Questa analisi ha chiarito e precisato nei suoi limiti e nella sua portata l'aspetto operatorio e simbolico della teoria dei gruppi continui finiti. Ma appunto perciò, dal punto di vista costruttivo della teoria, codeste ricerche hanno approdato in buona parte a conclusioni di validità esclusivamente formale; e d'altro canto hanno condotto a rifar presso a poco i procedimenti stessi del LIE e dello SCHUR, all'infuori di quelle vedute sintetiche e di quelle rappresentazioni geometriche, che sole possono rendere luminoso e piacevole il cammino. In sostanza alle indagini suaccennate sembra spettare piuttosto un interesse generico in ordine alla teoria algoritmica dei numeri complessi a più unità, anzi che un'importanza specifica rispetto alla teoria dei gruppi continui (****).

---

la priorità in quest'ordine di ricerche, è anteriore al decennio di cui qui ci occupiamo: *On a Law of Combination of Operators* [Proc. of the math. Soc. of Lond., t. 28 (1907)]. Esso è riprodotto in *Theory of Continuous Groups* (Oxford, 1903), Chapter IV.

(*) *Sur les groupes continus* [Comptes rendus, t. 128 (1899)]; *in extenso* in [Memoirs presented to the Cambridge Phil. Soc. on the occasion of the Jubilee of Sir G. G. STOKES, Cambridge, 1900]. *Quelques remarques sur les groupes continus* [Rendic. del Cir. mat. di Palermo, t. 15 (1901).

(**) *Sopra alcune identità fra i simboli operativi rappresentanti trasformazioni infinitesime* [Rendic. Ist. Lomb. (2), t. 34 (1901)]. — *Sulla formola del prodotto di due trasformazioni finite e sulla dimostrazione del cosidetto secondo teorema fondamentale di* LIE *nella teoria dei gruppi* [Ibid., ibid.]. — *Sopra i numeri Bernoulliani* [Ibid., t. 35 (1902)]. — *Del terzo teorema di* LIE *sull'esistenza di gruppi di data struttura* [Ibid., ibid.]. — *Altre ricerche sulla formola del prodotto di due trasformazioni finite, e sul gruppo parametrico di un dato* [Ibid., ibid.]. — Le precedenti ricerche sono riassunte in: *Resumé de quelques-uns de mes récents travaux sur la théorie des groupes de* LIE [Prac matematyczno fizycznych, t. 14, Warszawa, (1903)].

(***) *Die symbolische Exponentialformel in der Gruppentheorie* [Leipz. Berichte, Bd. 58 (1906)].

(****) Alle ricerche suaccennate devonsi ravvicinare quelle di H. F. BAKER, che ha applicato il calcolo simbolico delle matrici alla deduzione di risultati noti della teoria dei gruppi continui finiti: *On the exponential theorem for a simples transitive continuous group, and the calculation of the finite equations from the constants of structure* [Proc. of the math. Soc. of London, t. 34 (1902)]. — *Further applications of matrix notation to integration problems* [Ibidem., ibid.]. — *On the calculation of the finite equations of a continuous group* [Ibidem, t. 35 (1903)]. — *Alternants and continuous groups* [Ibid., (2) t. 3 (1905)]. — Il resultato del penultimo lavoro era già stato reso noto dal KLEIN.

Veramente il Poincaré, prendendo le mosse da quei suoi sviluppi simbolici, è giunto ad espressioni notevoli, sotto forma di integrali curvilinei, per le trasformazioni infinitesime del gruppo aggiunto e dei gruppi parametrici; ma è facile vedere come agli stessi resultati si giunga pressochè immediatamente, partendo dalle equazioni di definizione assegnate per quei gruppi dal Lie.

Resta tuttavia notevole l'idea da cui trasse origine la Memoria del Poincaré del Circ. Mat. (1900); egli notando come alla costruzione di un gruppo, a partire dalle costanti di composizione, si possa giungere sia traverso il gruppo aggiunto, sia traverso il gruppo parametrico, propone di studiare e interpretare le relazioni, cui dà luogo il confronto dei resultati di codesti due procedimenti; ma, come il Poincaré stesso avverte, su questa via, intralciata a dir vero da non lievi difficoltà analitiche, egli si è spinto poco innanzi; cosicchè i resultati ottenuti non differiscono sostanzialmente da conclusioni note del Killing, dell'Engel, dell'Umlauff, del Cartan.

Un secondo gruppo di lavori di indole generale, dovuti tutti a matematici americani come il Taber (*), il Newson (**), lo Slocum (***), il Rettger (****), si riattacca all'osservazione dell'Engel, relativa alla possibilità che un gruppo continuo finito contenga *trasformazioni singolari,* cioè non generabili mediante ripetizione infinita di una stessa trasformazione infinitesima. Il problema dell'esistenza di siffatte trasformazioni singolari e la loro effettiva ricerca cadono manifestamente nel dominio della teoria delle funzioni, in quanto dipendono in sostanza dalla determinazione delle singolarità da cui sono affette le soluzioni generali delle equazioni di definizione del gruppo considerato; onde appar manifesta la eccezionale difficoltà di quest'ordine di questioni, le quali anzi, allo stato attuale delle nostre conoscenze, sembrano

---

(*) *On the singular transformations of groups generated by infinitesimal transformations* [Proceed. of the Amer. Acad., vol. 35 (1900); Bull. of the Amer. math. Soc. (2) Vol. 6 (1900)].

(**) *On singular transformations in real projective groups* [Bull. of the Amer. math. Soc. (2) vol. 6 (1900)].

(***) *Note on the chief theorem of Lie's theory of continuous groups* [Proceed. the Amer. Acad., vol. 35 (1900)]. — *Supplementares note on the chief theorem of Lie's theory of finite continuous groups* [Ibid., ibid.]. — *On the continuity of groups generated by infinitesimal transformations* [Ibid., vol. 36 (1900)]. Queste due ultime note sono scarse di contenuto.

(****) *On Lie's theory of continuous groups* [Amer. Journal of math., vol. 22 (1900)]. Questa Nota contiene alcune interessanti considerazioni sulla possibilità di trasformazioni infinitesime, le cui traiettorie si spezzino.

esser poste sotto forma troppo indeterminata e generale. Certo i lavori dianzi ricordati gettano ben poca luce sul problema, da cui trassero origine, in quanto non forniscono, in sostanza, che esempi particolari, e piuttosto uniformi, di gruppi contenenti trasformazioni singolari.

Dalla ricerca di nuove *analogie fra i gruppi d'ordine finito di sostituzioni e i gruppi continui finiti,* il MAILLET è stato condotto a studiare ulteriormente la *decomponibilità* dei gruppi continui finiti, già nota in base ai teoremi fondamentali del LIE (*), e a generalizzare in vario senso il concetto di serie di composizione di un gruppo continuo finito (**).

Il BURNSIDE ha mostrato come ad ogni gruppo discontinuo d'ordine finito g si possa associare un gruppo continuo lineare G, la cui considerazione facilita la ricerca di alcune proprietà del gruppo discontinuo, in particolare la determinazione di ciò che il KLEIN chiama il *grado* del *problema normale* connesso a g, cioè il minimo numero di variabili, in cui g è rappresentabile come gruppo di sostituzioni lineari (***).

Infine dalla teoria dei gruppi d'ordine finito di sostituzioni il BIANCHI ha trasportato nella teoria dei gruppi continui finiti il concetto di *gruppo complementare* o *gruppo fattore,* mettendo in luce l'ufficio essenziale, che codesto concetto compie implicitamente nella determinazione assegnata dal LIE, pei gruppi transitivi di data composizione (****).

In particolare egli ha stabilito una nuova proprietà caratteristica del gruppo derivato di un gruppo dato G, mostrando come esso sia il più piccolo sottogruppo invariante Σ di G, pel quale il gruppo complementare $\frac{G}{\Sigma}$

(*) *Sur la décomposition des groupes finis continus de transformations de Lie* [Comptes rendus, t. 130 (1900)]. Un gruppo G si dice decomponibile se contiene due sottogruppi G_1, G_2, tali che ogni trasformazione di G sia uguale al prodotto di una di G_1 e di una di G_2. — Un esempio di gruppo singolare in ordine alla decomponibilità delle sue trasformazioni *finite* è messo in luce dal FRATTINI: *Di un gruppo continuo di trasformazioni decomponibili finitamente* [Rend. della R. Acc. dei Lincei, (5) vol. 12_1 (1903)].

(**) *Sur des suites remarquables de sous-groupes d'un groupe de substitutions ou de transformations de Lie* [Comptes rendus, t. 130 (1900)]. — *Sur de nouvelles analogies entre la théorie des groupes de substitutions et celle des groupes finis continus de transformations de Lie* [Journal de Mathématiques, (5) t. 7 (1901)].

(***) *On the continuous group that is defined by any given group of finite order* [Proceed. of the math. Soc. of London, vol. 23 (1898)].

(****) *Sulla nozione di gruppo complementare e di gruppo derivato nella teoria dei gruppi finiti di trasformazioni* [Rend. dell'Acc. dei Lincei (5), vol. 12 (1903)].

risulta abeliano. Discende di qui come per un gruppo continuo il sottogruppo *commutatore* (*) coincida col gruppo derivato (**).

Sui *gruppi transitivi di uno spazio a quante si vogliono dimensioni* ha ottenuto notevoli risultati E. E. LEVI, il quale è riuscito, in particolare, a ridurre a 4 l'ordine massimo assegnato dal LIE in $2n+1$, per le trasformazioni infinitesime di un gruppo generico) (***). Un passo ancora, e sarà assodata la nota previsione del LIE, per la quale codesto ordine massimo sarebbe uguale a 2.

In un ultimo gruppo possiamo raccogliere *alcune ricerche relative alla struttura* (****).

A. SÜSS, nella sua *Dissertazione di* GREIFSWALD, ha determinato tutti i gruppi puntuali che hanno la struttura del gruppo proiettivo piano totale, e ha studiato una classe di gruppi di trasformazioni di contatto aventi la medesima struttura, mettendo di più in luce alcune considerazioni generali che permettono di assegnare quale tipo di gruppi di trasformazioni di contatto sia rappresentato da un qualsiasi tipo di gruppi transitivi puntuali di data composizione (*****).

Il KILLING, tornando con una breve Nota sulla teoria della composizione che in sì gran parte è sua, ha classificato la struttura dei gruppi di rango 0, in base ad un nuovo carattere numerico invariante (******).

(*) Cioè il gruppo definito da tutte le trasformazioni della forma $STS^{-1}T^{-1}$.

(**) Si ha così anche una nuova dimostrazione di un noto teorema del KILLING (LIE-ENGEL: *Theorie der Transformationsgruppen*, Bd. III, pag. 770).

(***) *Sui gruppi transitivi dello spazio a n dimensioni* [Rendic. dell'Acc. dei Lincei (5) vol. 14 (1905)]. Per alcuni teoremi sui gruppi transitivi, destinati sopratutto a precisare il concetto di *classe* in analogia coi gruppi di sostituzione si veda: MAILLET, *Sur la classe des groupes finis continus primitifs de transformations de Lie* [Comptes rendus, t. 130 (1900)].

(****) E. E. LEVI ha stabilito rigorosamente il notevole teorema del KILLING sulla decomponibilità di ogni gruppo continuo finito non semisemplice nè integrabile in un gruppo invariante integrabile e in un gruppo semisemplice: *Sulla struttura dei gruppi finiti e continui* [Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino, vol. 40 (1905)]. Ricorderò qui anche la seguente *Dissertazione* di MÜNSTER, di cui non ho potuto aver visione: W. BRÜSER, *Untersuchungen über die sechsgliedrige halbeinfache Transformationsgruppe* (1904).

(*****) *Die Gruppen, die mit der allgemeinen projectiven Gruppe die Ebene gleiche Zusammensetzung haben* [Dissertation, Greifswald (1905)].

(******) *Der Bau einer besonderen Klasse von Transformationsgruppen* [Festschrift L. Boltemann gewidmet; Leipzig (1904)].

Pei gruppi di rango 0 il Loewy ha assegnato una nuova proprietà caratteristica, dimostrando che, per siffatti gruppi e solo per essi, ogni qualsiasi sottogruppo fa parte di una serie di composizione (*).

L'Ahrens ha determinato i gruppi di cui ogni sottogruppo è invariante (**). Lo Zindler infine ha studiato in generale i gruppi commutabili (caso particolare dei gruppi di rango 0) e in particolare ne ha classificato i tipi nel caso di quattro parametri (***).

Dato così un rapido sguardo alle indagini compiute, dopo la morte del Lie, sulla teoria generale dei gruppi continui finiti, possiamo notare come questa, nel decennio trascorso, non abbia subito alcuna sostanziale trasformazione. Ciò può parere senz'altro naturale, se si pensa che siffatta teoria, già dieci anni or sono, costituiva un insieme ben chiuso di resultati e di procedimenti.

Ma d'altro canto è pur vero che sussiste un profondo e singolare contrasto fra la forma sistematicamente analitica, sotto cui da ultimo il Lie e i suoi collaboratori diffusero la teoria dei gruppi continui finiti, e la concezione essenzialmente, arditamente sintetica che il Lie dapprincipio ne ebbe. Egli, subito dopo il primo fervidissimo periodo di indagine e di scoperta, si sentì turbato dall'isolamento, in cui scientificamente ancora viveva; e rimproverò ai Matematici di quel tempo la freddezza, con cui avevano accolto il suo programma di lavoro, così ardito, così nuovo e, a dir vero, così oscuro. Peccò senza dubbio di impazienza, pensò fors'anche di dover tutto sacrificare a quello che non cessò mai di considerare lo scopo ultimo dell'opera sua, cioè le teorie d'integrazione. Certo si indusse a tradurre e quasi a travestire (****) il suo pensiero in quella forma analitica, che gli parve più idonea ad agevolare la diffusione delle sue scoperte. E, prima della sua morte, potè anche pensare di avere ubbidito ad una necessità ineluttabile, poichè solo nella nuova forma le sue teorie raccolsero quel consenso e quella ammirazione, che egli sin dapprincipio aveva desiderato. Ma è certo che chi

(*) *Zur Theorie der endlichen kontinuierlichen Transformationsgruppen* [Math. Ann., t. 55 (1901)].

(**) *Ueber Transformationsgruppen, deren sämtliche Untergruppen invariant sind* [Mittheil. der math. Gesell. in Hamburg, t. 4 (1902)]. Questi gruppi si riducono ai gruppi di rango 0 a tre parametri e ai gruppi commutabili.

(***) *Ueber kontinuierliche Involutionsgruppen* [Wien. Berichte, vol. 110 (1901].

(****) Cfr. Noether, *Sophus Lie* [Math. Ann., vol. 53 (1900); pag. 18].

nella teoria dei gruppi continui finiti che oggi possediamo, ricerca le linee semplici e ardite del primo abbozzo ideato dal Lie, sente in qualche modo l'uggia e il rammarico di chi vede guasta e travisata da un restauro la primitiva bellezza di un'opera d'arte.

Io penso che se il Lie, accettando l'isolamento, cui dapprincipio lo destinavano l'originalità del suo pensiero e la dura novità dei metodi, non avesse in quel suo primo fervore di scoperte, deviato i suoi sforzi dalla via ch'egli si era dischiusa, noi possederemmo forse oramai la completa ed organica teoria sintetica dei gruppi continui finiti. Il ricostruirla oggi, risalendo, traverso agli oscuri accenni dei primi lavori del Lie, alla forma originaria delle sue concezioni, appare opera ardua quant'altra mai; pure io credo che per lo stesso impulso di quanto codeste concezioni hanno in sè di più geniale e di più vivo, siffatta teoria sintetica dovrà costituirsi sotto qualche forma un giorno.

Intanto parmi si possa con buone ragioni presumere, che in essa debba spettare un ufficio fondamentale e quasi preponderante ai gruppi proiettivi; e in questo senso un passo non trascurabile sarebbe compiuto, quando si riuscisse a stabilire (come il Lie fu sempre convinto anche dopo riconosciuta la fallacia della sua antica dimostrazione) che *per ogni gruppo continuo finito esiste un gruppo proiettivo avente la medesima struttura.*

In questo stesso ordine di idee sarebbe particolarmente desiderabile che, anche solo pei gruppi proiettivi, si potesse dischiudere una via meno indiretta ed oscura di quelle note fin qui per giungere al teorema dell'Engel, che *caratterizza i gruppi non integrabili come quelli che contengono un gruppo ∞^3 semplice,* cioè oloedricamente isomorfo al gruppo proiettivo totale della retta.

Forse sin qui non è stato ancor messo in luce l'ufficio fondamentale, che nella teoria della composizione spetta indubbiamente a questo notevolissimo teorema; il quale anzi è rimasto come isolato e mal connesso al resto della teoria.

Soli, che io sappia, il Kratzi e il Kowalewski hanno riconosciuto la opportunità di studiare, almeno, qualche tipo particolare di gruppi, in ordine ai relativi sottogruppi ∞^3 semplici o, come si potrebbero designare, *sottogruppi dell'*Engel.

Il Kratzi nella sua *Dissertazione* di Greifswald (*) ha sistematicamente

(*) *Gruppen mit einer dreigliedrige Untergruppe, die in keiner grösseren Untergruppe steckt* [Leipzig (1904)].

studiato i gruppi di uno spazio a n dimensioni, contenenti un sottogruppo di ENGEL, il quale non appartenga a nessun sottogruppo più ampio; ed ha dimostrato che un tale gruppo è in generale ad $n+3$ parametri e che il suo sottogruppo di stabilità rispetto a un punto generico, lascia fermo un cono razionale normale di direzioni; per modo che il gruppo è equivalente, mediante una trasformazione puntuale, ad un gruppo proiettivo, che contiene tutte le ∞^n traslazioni di S_n e lascia ferma sull'iperpiano improprio una curva razionale normale. Vi è un'altra composizione soddisfacente alle suindicate condizioni soltanto in quattro casi: per $n=3$ col gruppo della quadrica; per $n=5$ col gruppo ∞^8 di S_5, che sulle ∞^5 coniche del piano è indotto dal gruppo proiettivo piano totale; per $n=7$ col gruppo ∞^{10} di S_7 che dà il modo, in cui le ∞^7 cubiche gobbe di un complesso lineare (non speciale) sono permutate dal gruppo proiettivo del complesso; e infine per $n=11$ con un gruppo semplice ∞^{14} di S_{11}, avente la struttura scoperta dal KILLING nelle sue memorabili ricerche sulla composizione.

Il KOWALEWSKI invece (*) ha considerato i gruppi proiettivi di S_n, che non lasciano ferma nessuna varietà lineare, e contengono o il gruppo (∞^3 semplice) di una C^n razionale normale o un gruppo ∞^3 semplice che ammetta uno S_{n-h-1} di punti uniti e uno S_h sghembo, in cui sia invariante una C^h razionale normale (**). — Per n pari e h dispari non esiste nessun gruppo soddisfacente alle indicate condizioni. Negli altri casi invece si ha in generale un unico tipo di gruppo proiettivo, il quale per h pari è il gruppo proiettivo totale di una quadrica non speciale di S_n, e per h (ed n) dispari è il gruppo proiettivo totale di un sistema nullo di S_n. Un altro gruppo soddisfacente alle suindicate condizioni si ha soltanto in S_6, in S_7 e in S_{11}: per $n=5$ (ed $h=4$) col solito gruppo ∞^8, indotto dal gruppo proiettivo piano sulle ∞^5 coniche; per $n=6$ (e $h=6$) col gruppo proiettivo ∞^{14} che trasforma in sè una quadrica non speciale (quadrica del CLIFFORD della C^6

(*) *Ueber die projektive Gruppe der Normkurve und eine charakteristiche Eigenschaft des sechsdimensionalen Raumes* [Leipz. Ber., t. 54 (1902)]. — *Ueber projektive Transformationsgruppen* [Ibid., t. 55 (1903)]. — *Eine charakteristiche Eigenschaft der projektiven Gruppe des Nullsystems* [Ibid., t. 58 (1906)]. — *Ueber die projektive Gruppe einer Mannigfaltigkeit zweiten Grades* [Ibid., ibid.].

(**) Sono questi, in un certo senso, i tipi meno complessi di gruppi proiettivi semplici ∞^3 di S_n. Si ricordi in proposito il bel teorema dello STUDY [LIE-ENGEL, *Theorie der Transf.-gr.*, t. III, pag. 785] del quale non è stata pubblicata altra dimostrazione all'infuori di quella del FANO [Mem. della R. Acc. delle Sc. di Torino, (2) t. 46 (1896)].

razionale normale) e su di questa un complesso dell'Engel (*); infine per $n = 7$ (e $h = 6$) col gruppo proiettivo ∞^{21}, che sugli ∞^7 complessi dell'Engel, giacenti su di una quadrica non speciale di S_6, è indotto dal gruppo proiettivo totale della quadrica. — A questi resultati il Kowalewski è giunto, valendosi di una sua « Gewichtsmethode », che, nel suo principio fondamentale, si può far risalire al Lie, e ha la sua base in una classificazione delle trasformazioni proiettive infinitesime (in coordinate omogenee) a seconda del *peso*, opportunamente definito.

* * *

Abbiamo così già iniziato la rassegna delle *ricerche dirette a determinare classi particolari di gruppi continui finiti.*

Ora dobbiamo inoltrarci in questo campo; ma la moltiplicità e varietà delle questioni considerate ci condurrà a procedere piuttosto per enumerazione che per vera classificazione.

Gruppi proiettivi.

Cominciamo dai gruppi proiettivi.

In questo campo ricorderò dapprima le ricerche del Newson (**), il quale ha costruito, in base a considerazioni sintetiche elementari, tutti i tipi di gruppi

---

(*) *Ein neues, dem linearen Komplexe analoges Gebilde*, 2 Note [Leipz. Ber., t. 52 (1900)]. Il gruppo ∞^{14} or ora indicato ha la composizione semplice scoperta dal Killing.

(**) *Continuous groups of projective transformations treated synthetically* [Kans. Univ. Quart., vol. 4 (1895-96)]. — *Supplementary notes* [Ibidem]. — *Projective Transformations in One Dimension and their Continuous Groups* [The Kansas University Science Bulletin, vol. 1 (1902)]. In quest'ultima nota sono classificati i gruppi proiettivi complessi della retta complessa come gruppi reali conformi del piano. — *Types of Projective Transformations in the Plane and in Space* [Kansas Univ. Quart., vol. 6 (1897)]. — *The five Types of Projective Transformations of the Plane* [Ibid., vol. 8 (1899)]. Queste ed altre ricerche sono sistematicamente esposte in: *A New Theory of Collineations and their Lie Groups* [Amer. Journal of Mathematics, vol. 24 (1904)]. Per lo spazio cfr. *On the Group and Subgroups of real Collineations leaving a Tetrahedron invariant* [Kans. Univ. Quart. (A) vol. 10 (1901)]; *A new Theory of Collineations in Space* [Ibid., ibid.]. Cfr. infine: *Report on the Theory of Collineations* [Proc. of the Amer. Ass. for the Adv. of Sc., vol. 51 (1902)].

continui proiettivi della retta e del piano (*) e alcuni tipi di gruppi proiettivi dello spazio. Egli ha preso le mosse dai gruppi di omologie e, combinando questi in tutti i modi possibili, ha costruito gruppi mano mano più ampi, caratterizzandoli per mezzo delle rispettive configurazioni invarianti (**).

Alla classificazione dei gruppi proiettivi dello spazio, che, com'è noto, non è ancora compiuta (sebbene, in base ai metodi del LIE, non offra più difficoltà alcuna) ho recato un contributo io stesso, in quanto ho determinato *tutti i tipi di complessi di rette, che ammettono un gruppo continuo proiettivo* (***); in particolare ho dovuto premettere a tale determinazione la classificazione dei gruppi proiettivi a tre parametri.

R. LE VAVASSEUR ha classificato i sottogruppi a uno e due parametri del gruppo lineare omogeneo in quattro variabili (****).

Dei *gruppi di movimenti negli spazi lineari* si sono occupati il BEMPORAD, E. E. LEVI e il MEDICI. Il primo li ha classificati in S_3, in S_4 e, parzialmente, in S_5 (*****); il secondo ha svolto alcune considerazioni generali sui gruppi derivati dei gruppi di movimenti in S_n, dirette sovratutto alla determinazione dei gruppi a due e tre parametri (******). Il MEDICI infine ha determinato in uno spazio a quante si vogliano dimensioni tutti i possibili tipi di *gruppi di rotazioni* (*******), e ha messo in luce il profitto che dalla conoscenza di tali gruppi si può trarre nella teoria generale dei gruppi di movimenti (********).

(*) Noterò col FANO [Art. cit. della *Encyklopädie*] che le ricerche del NEWSON non conducono ad una effettiva classificazione dei gruppi proiettivi del piano in quanto egli non dimostra di avere esaurito tutti i tipi possibili di gruppi: ciò risulta soltanto da un confronto dei suoi risultati colle tabelle del LIE.

(**) Cogli stessi metodi sintetici elementari del NEWSON, H. B. BREWSTER ha costruito i gruppi proiettivi di S_3, che lasciano ferma una quadrica non speciale: *On Collineations in Space which leave invariant a Quadric Surface* [Kans. Univ. Bull. (2) v. 1 (1903)].

(***) *Sui complessi di rette, che ammettono un gruppo continuo proiettivo* [Rend. del Circ. mat. di Palermo, t. 23 (1907)].

(****) *Sur l'enumération des sous-groupes du groupe linéaire, homogène, à quatre variables: sous-groupes à un et à deux paramètres* [Bulletin des sc. math. (2) t. 29 (1905]. — *Les sous-groupes du groupe linéaire à quatre variables; sous-groupes à un et à deux paramètres* [Ann. de la Fac. des sc. de Toulouse, (2) t. 8 (1906)].

(*****) *Sui gruppi di movimenti e similitudini nello spazio a 3, 4 e 5 dimensioni* [Ann. della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa, vol. 8 (1898)].

(******) *Sui gruppi di movimenti* [Rendic. della R. Acc. dei Lincei, (5) vol. 14_1 (1905)].

(*******) *Sui gruppi di rotazioni* [Ann. della R. Sc. Norm. Sup. di Pisa, vol. 10 (1907)].

(********) *Sui gruppi di movimenti* [Rend. della R. Acc. dei Lincei, (5) vol. 16_2 (1907)].

Accanto a queste ricerche sui gruppi proiettivi, possiamo ancora ricordare la breve indagine compiuta dall'EPSTEEN sui gruppi che coincidono col rispettivo gruppo aggiunto (*).

Nulla di sostanzialmente nuovo, invece, abbiamo a registrare sul problema, che pur meriterebbe l'attenzione di qualche geometra (come già un tempo diede luogo ad alcune importanti osservazioni dello STUDY), dei gruppi proiettivi, che sono proiettivamente equivalenti ai rispettivi gruppi parametrici (**).

Alla *teoria degli invarianti dei gruppi proiettivi* (***) recarono contributi il KASNER, che ha studiato gli invarianti delle curve tracciate su di una quadrica non speciale di S_3, rispetto al gruppo proiettivo misto ∞^6 della quadrica stessa (****); e, da un punto di vista più generale, il MAURER, il quale ha esteso il teorema dello HILBERT sul numero finito degli invarianti di un sistema completo di un gruppo continuo lineare, al caso in cui le variabili siano legate da un sistema di equazioni algebriche (*****).

Prima di lasciare il campo dei gruppi proiettivi dobbiamo far cenno delle ricerche dello STUDY sugli elementi (differenziali) del 2.° ordine del piano, ciascuno dei quali si può definire come l'insieme di tutte le curve (analitiche) che hanno comune tre dati punti infinitamente vicini, non allineati (******). Lo STUDY, rendendo chiuso, in vari modi, l'insieme di codesti elementi del 2.° ordine mediante l'aggiunta di elementi *impropri*, opportunamente scelti,

---

(*) *Les groupes qui coincident avec leurs groupes adjoints* [Math. Ann. vol. 56 (1902)].

(**) Cfr. BURNSIDE, *On groups which are linear and homogeneous in both variables and parameters* [Proc. of the math. Soc. of London, vol. 35 (1903)]. — *On reciprocal linear homogeneous groups* [Quart. Journ., vol. 34 (1903)].

(***) I lavori dell'ENRIQUES e del FANO sulle varietà che ammettono un gruppo proiettivo sono anteriori al decennio, di cui ci occupiamo, all'infuori della Nota del FANO: *Un teorema sulle varietà algebriche a due dimensioni con infinite trasformazioni proiettive in sè* [Rend. della R. Accad. dei Lincei, (5) vol. 12, (1899)]. In questa Nota è dimostrato il notevole teorema che è razionale ogni varietà algebrica a tre dimensioni, la quale ammette un gruppo continuo transitivo di trasformazioni proiettive.

(****) *The invariant theory of the inversion group; Geometry upon a quadric surface* [Trans. of the Am. Math. Soc., vol. 1 (1900)].

(*****) *Ueber die Endlichkeit der Invarianten systeme* [Math. Ann., vol. 57 (1903].

(******) *Die elemente zweiter Ordnung in die ebenen projectiven Geometrie* [Leipz. Ber., vol. 53 (1901)]. Circa i sistemi di coordinati atti a determinare gli elementi d'ordine superiore al 2° vedi ENGEL: *Die höheren Differentialquotienten* [Leipz. Berichte, vol. 46 (1893) vol. 54 (1902)].

ha stabilito nella varietà ∞^4 così resultante un sistema di coordinate *proiettive* (aventi, cioè, carattere invariantivo rispetto al gruppo proiettivo piano); e, in base a queste, ha sviluppato la teoria invariantiva della varietà ∞^4 degli elementi del 2.° ordine, rispetto ad un gruppo ∞^9, che si ottiene combinando il gruppo ∞^8, indotto dal gruppo proiettivo piano, con un gruppo ∞^1 (lineare nelle coordinate degli elementi del 2.° ordine) che trasforma in sè ogni insieme di ∞^1 elementi del 2.° ordine, appartenenti ad uno stesso elemento del 1.° ordine (*).

Lo Study ha di più considerato le varietà ad una, due o tre dimensioni di elementi del 2.° ordine, alle quali spetta un evidente interesse in ordine alla teoria delle equazioni differenziali ordinarie del 2.° ordine; e ha determinato quelle varietà V_4 di uno spazio a quante si vogliono dimensioni, che sono rappresentabili razionalmente sull'insieme degli ∞^4 elementi del 2.° ordine del piano, in modo che il gruppo corrispondente su di esse al gruppo proiettivo piano vi sia indotto da un gruppo proiettivo del rispettivo spazio.

Risultò in tal guisa stabilita in particolare una notevolissima relazione fra la geometria proiettiva degli elementi del 2.° ordine del piano e la ordinaria geometria della retta.

Ma io non mi dilungherò più oltre in proposito. Dal punto di vista strettamente gruppale, a cui io debbo qui attenermi, risultano quasi menomati o, almeno, travisati l'interesse e la portata di queste ricerche dello Study; le quali non vanno separate dalle altre indagini antecedenti e posteriori dell'autore stesso, a partire dalle prime ricerche sui numeri complessi e i gruppi continui e dalle *Methoden der ternären Formen* (Leipzig, 1889) fino alla poderosa *Geometrie der Dynamen* (Leipzig, 1903) e alle molteplici ricerche di Geometria non-euclidea. A noi qui basterà ricordare come la teoria dei gruppi continui sia stata per lo Study un fecondo « principio di trasporto », di cui egli ha per così dire aumentato l'efficacia, sovrapponendo al classico metodo della costruzione dei « corpi » di enti geometrici rispetto a un gruppo dato, il procedimento del Segre della continuazione analitica dei parametri e delle variabili dal campo reale a campi complessi mano mano più ampi (**). Ebbero così origine appunto quelle varie Geometrie (Geometria proiettiva

(*) Ogni elemento del 2.° ordine ammette tre orientazioni; e secondo che si considerano gli elementi orientati o no si ottengono due diversi gruppi ∞^9, che sono fra loro in corrispondenza [3, 1].

(**) Possiamo qui ricordare anche le seguenti ricerche: E. v. Weber: *Zur Theorie der Kreisverwandtschaften* [Münch. Ber. t. 31 (1901)] *Die komplexen Bewegungen* Leipz. Ber. t. 55 (1903)].

duale e radiale, Geometria projettiva e pseudo conforme dei Somi) che lo Study ha sistematicamente esposto nella citata *Geometrie der Dynamen* (*).

Ma torniamo alla nostra rassegna per occuparci dei gruppi di trasformazioni birazionali.

Gruppi cremoniani.

Possiamo qui da principio ricordare le ricerche di H. Stender (**), mie (***) e del Newson (****) sui gruppi conformi reali dello spazio e sulle curve e superficie che ammettono infinite trasformazioni conformi.

Ma ad un più elevato ordine di ricerche appartengono in questo campo, i lavori del Fano sui gruppi continui finiti di trasformazioni cremoniane dello spazio (*****) e la classificazione da lui compiuta dei gruppi del Jonquières generalizzati, o gruppi di trasformazioni birazionali che trasformano in sè un fascio di piani o una stella di rette (******).

Questi lavori completano quella serie di ricerche che iniziata dall'Enriques con la determinazione dei gruppi cremoniani continui del piano era stata continuata dagli stessi Enriques e Fano nella magistrale Memoria in cui è dimostrato che i gruppi birazionali continui dello spazio sono bira-

(*) Un riassunto limpido e completo delle vedute e delle indagini dello Study si trova nei nn. 16-20 del citato Art. del Fano.

(**) *Invariante Flächen und Kurven bei conformen Gruppen des Raumes* [Dissertation, Leipzig (1899)]. Questa Dissertazione era sfuggita alla mia attenzione; e ne ho appreso l'esistenza soltanto ora, sul punto di licenziare il manoscritto di questo rapporto (19 gennaio 1908) dal cenno che della mia Mem., cit. nella Nota seguente, dà l'Engel nel fascicolo testè uscito in luce dello *Jahrbuch über die Fortschr. der Math.;* vol. 36 (1907).

(***) *Le superficie con infinite trasformazioni conformi in sè stesse* [Rend. della R. Accad. dei Lincei, (5) vol. 10 (1901). — *I gruppi continui reali di trasformazioni conformi dello spazio* [Mem. della R. Acc. delle Sc. di Torino, (2) t. 55 (1905)].

(****) *Types and continuous Groups of real conformal Transformations in S_3* [Giorn. di Mat., vol. 45 (1907)].

(*****) *I gruppi continui primitivi di trasformazioni cremoniane dello spazio* [Atti della R. Accad. delle Sc. di Torino, vol. 33 (1908)]. *Le trasformazioni infinitesime dei gruppi cremoniani tipici dello spazio;* due Note. Rend. della R. Accad. dei Lincei (5) vol. 7_1 (1898)].

(******) *I gruppi di Jonquières generalizzati* [Mem. della R. Acc. delle Sc. di Torino, vol. 48 (1898)].

zionalmente equivalenti o a gruppi proiettivi, o a gruppi conformi, o a gruppi del Jonquières generalizzati, o, infine, a due gruppi ben determinati ∞^3, semplici, transitivi, pei quali le trasformazioni, che lasciano fermo un punto generico, costituiscono un gruppo d'ordine finito oloedricamente isomorfo al gruppo dell'ottaedro o dell'icosaedro.

In un ordine di idee affine, più di recente l'Enriques, ha ripreso i resultati della profonda analisi, con cui il Picard, il Painlevé, il Castelnuovo e lo stesso Enriques avevano classificato le superficie con un gruppo birazionale continuo in tre famiglie: superficie riferibili a rigate, superficie ellittiche contenenti due fasci di curve di ugual modulo, superficie iperellittiche delle coppie di punti di una curva di genere due; ed è riuscito a caratterizzare codeste tre famiglie, sia separatamente sia nel loro insieme, mediante i valori dei relativi caratteri invarianti (generi e plenigeneri) (*).

I due cicli di resultati così chiusi, sui gruppi cremoniani continui da una parte e sulle superficie che ammettono un gruppo siffatto dall'altra, costituiscono indubbiamente uno dei più bei capitoli della teoria dei gruppi continui, non soltanto per l'importanza e la singolare difficoltà dei problemi risoluti, ma anche per la profondità di vedute e la ricchezza e genialità di spedienti che vi furono profuse. Talchè si può dire oramai che siano poste, almeno implicitamente, le prime basi di quella geometria algebrica dei gruppi continui finiti, che l'opera del Lie aveva lasciato completamente nell'ombra.

In questo stesso indirizzo algebrico va pur ricordata la ricerca sistematica, compiuta dal Carda, dei gruppi algebrici della retta e del piano (**). Egli ha constatato che, all'infuori di un tipo di gruppi ∞^1 della retta (***), i gruppi algebrici da lui considerati compaiono già tutti fra i rappresentanti tipici assegnati dal Lie nelle sue tabelle dei gruppi della retta e del piano.

Il Carda ha di più messo in luce un'interessante classe di equazioni differenziali integrabili algebricamente. L'equazione $X\xi^n = 1$, dove X è il sim-

(*) *Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in sè stesse* [Rend. del Circ. mat. di Palermo, t. 20 (1905)].

(**) *Zur Theorie der algebraischen Gruppen der Geraden und der Ebene* [Monatsh. für Math. u. Phys., vol. 11 (1900)]. — *Ueber eine Schar dreigliedriger algebraischer Gruppen der Ebene* [Monatsh. für Math. u. Phys., vol. 17 (1906)].

(***) Come nota il Carda stesso, i gruppi algebrici ∞^1 della retta erano già stati implicitamente determinati dal Weierstrass: cfr. Bohlmann, *Ueber eine gewisse Klasse continuierlicher Gruppen und ihren Zusammenhang mit den Additionstheoremen*. Diss. Halle a. S. 1892).

bolo di una qualsiasi trasformazione infinitesima algebrica in una sola variabile, ammette soltanto curve integrali algebriche, di genere 0. L'integrazione diretta, che il CARDA ha compiuto esplicitamente per $n = 3$, conduce per $n > 2$ alla considerazione di integrali pseudo-abeliani, che rappresentano funzioni algebriche.

SPAZI CHE AMMETTONO GRUPPI DI MOVIMENTI.

Un altro indirizzo fecondo di nuovi e importanti risultati trasse origine dalle ricerche e dalle conclusioni del BIANCHI sugli *spazi a tre dimensioni con un gruppo continuo di movimenti* (*). A tali ricerche si connette immediatamente la *Dissertazione* del RIMINI, in cui son messe in luce alcune notevoli ed eleganti proprietà di quei tre spazi del BIANCHI a curvatura variabile, che ammettono un gruppo di movimenti a quattro parametri (**).

Da un altro punto di vista, il problema stesso degli spazi a tre dimensioni con un gruppo continuo di movimenti è stato oggetto di indagini da parte del RICCI, il quale, in base ai suoi metodi di *Calcolo differenziale assoluto*, ha risolto la seguente questione: Dato in coordinate generali l'elemento lineare di una varietà qualsiasi a tre dimensioni, riconoscere se in essa siano possibili movimenti rigidi e, in caso affermativo, determinarne il gruppo mediante le equazioni di definizione (***). — Più di recente il RICCI ha esteso ad una varietà a quante si vogliono dimensioni alcuni dei risultati fondamentali, a cui era giunta per le V_3 in quella sua prima ricerca (****).

Dallo stesso indirizzo aperto dalla citata Memoria del BIANCHI è derivato ancora un ampio e complesso gruppo di ricerche del FUBINI, delle quali io qui non posso illustrare che un solo aspetto, in quanto, limitandomi alle

---

(*) *Sugli spazi a tre dimensioni, che ammettono un gruppo continuo di movimenti* [Mem. della Soc. it. delle Sc. (3), t. 11 (1897)].

(**) *Sugli spazi a tre dimensioni, che ammettono un gruppo a quattro parametri di movimenti* [Ann. della R. Sc. Norm. Sup. di Pisa, vol. 9 (1904)].

(***) *Sui gruppi continui di movimenti in una varietà qualunque a tre dimensioni* [Mem. della Soc. it. delle Sc., (3), t. 12 (1899)]. Cfr. anche RICCI-LEVI CIVITA: *Méthodes de Calcul différentiel absolu et leurs applications* [Math. Ann., t. 54 (1900)].

(****) *Sui gruppi continui di movimenti rigidi negli iperspazi* [Rend. della R. Acc. dei Lincei (5), vol. 14_2 (1905)].

conclusioni che interessano la teoria dei gruppi continui, dovrò lasciare nell'ombra i molti importanti resultati aritmetici e analitici, a cui quelle indagini hanno approdato.

Il FUBINI, attaccando senz'altro il problema generale degli spazi a n dimensioni con un gruppo continuo di movimenti, ha assegnato in forma sintetica notevolissima le condizioni necessarie e sufficienti, affinchè un gruppo possa essere ammesso come gruppo di movimenti da un qualche spazio; ed, in base a tale resultato, ha messo in luce come basti la risoluzione di equazioni algebriche per determinare, mediante le loro trasformazioni infinitesime, tutti i gruppi che si possono considerare gruppi di movimenti; e come con sole quadrature si possano poi ottenere gli elementi lineari degli spazi corrispondenti. Ha esaurito poi, in base al suo metodo generale e ad un altro procedimento speciale più rapido, la ricerca dei gruppi di movimenti che contengono non più di quattro trasformazioni infinitesime indipendenti e, quindi, degli spazi a quattro dimensioni con un gruppo di movimenti. Notevoli in queste ricerche per la loro novità e fors'anche per la loro più ampia portata, sono alcune osservazioni sui gruppi discontinui contenuti nei gruppi continui di movimenti degli spazi a tre dimensioni (*).

Come prima generalizzazione del problema del BIANCHI, il FUBINI ha studiato gli spazi che ammettono un gruppo conforme, scindendo anche qui il problema in due: 1.° determinazione dei gruppi suscettibili di essere considerati come gruppi conformi di qualche spazio; 2.° costruzione effettiva dell'elemento lineare corrispondente. Egli ha così messo in luce l'intima connessione, in cui la teoria dei gruppi conformi sta per una parte con la teoria dei gruppi di movimenti (**) e per l'altra, generalizzando in una diversa direzione, coi gruppi di trasformazioni puntuali o di contatto, che in una metrica qualsiasi conservano le ipersfere (***).

Ma il più importante contributo recato dal FUBINI in quest'ordine di ri-

(*) *Sugli spazi che ammettono un gruppo continuo di movimenti* [Rend. della R. Acc. dei Lincei (5) 11_2 (1902); Ann. di Mat. (3) vol. 8 (1902)]. — *Sugli spazi a quattro dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti* [Ann. di Mat. (3) vol. 9 (1903)]. — *Sulla teoria delle forme quadratiche Hermitiane e dei sistemi di tali forme* [Atti dell'Acc. Gioenia (4) volume 17 (1904)].

(**) *Sulla teoria degli spazi che ammettono un gruppo conforme* [Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino, vol. 38 (1903)].

(***) *Sulla teoria delle ipersfere e dei gruppi conformi in una metrica qualunque* [Rend. del R. Ist. Lomb. (2) vol. 38 (1905)].

cerche è la determinazione degli spazi, che ammettono un gruppo continuo, il quale permuti le une nelle altre le geodetiche. Per mezzo di una analisi veramente perspicacissima, egli è riuscito per così dire a decomporre la difficoltà del problema, riducendo la discussione che direttamente porterebbe ad equazioni alle derivate parziali del 2.° ordine, al successivo studio di sistemi di equazioni alle derivate parziali del 1.° ordine o di sole equazioni differenziali ordinarie. Ha potuto così mostrare come si possa rapidamente risolvere il problema nel caso delle superficie, già trattato in parte dal LIE e sostanzialmente esaurito dalle ricerche del KOENIGS e del RAFFY; ha compiuto esplicitamente la determinazione delle varietà a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni geodetiche e ha mostrato come, esclusi alcuni casi specialissimi, il suo metodo di discussione valga ad esaurire il problema anche in uno spazio a quante si vogliono dimensioni (*).

Codeste varie questioni gruppali, risolute dal FUBINI, rientrano tutte come casi particolari nella questione generale di determinare tutti i problemi dinamici, pei quali esiste un gruppo continuo che permuti le une nelle altre le traiettorie. Anche di siffatta questione dinamica il FUBINI si è occupato con successo, studiando in generale e determinando nel caso di tre coordinate libere quei problemi dinamici conservativi, che ammettono gruppi continui di trasformazioni del DARBOUX (cioè gruppi di trasformazioni che permutino gli uni negli altri gli ∞^1 fasci di traiettorie corrispondenti ai diversi valori della costante delle forze vive), e risolvendo il problema nella sua generalità per i problemi dinamici in due sole variabili (**).

ALTRI GRUPPI CONTINUI FINITI PARTICOLARI.

Oramai a completare la nostra rassegna dei resultati ottenuti in quest'ultimo decennio nella teoria dei gruppi continui finiti non resta più che far cenno di alcune determinazioni di argomento assai vario.

(*) *Sui gruppi di trasformazioni geodetiche* [Mem. della R. Acc. delle Sc. di Torino, (2) vol. 53 (1903)].

(**) *Ricerche gruppali relative alle equazioni della dinamica;* tre Note; [Rend. della R. Acc. dei Lincei (5) vol. 12_1 e 12_2 (1904)]. — *Sulle traiettorie di un problema dinamico* [Rend. de Circ. mat. di Palermo, t. 18 (1905)].

Il BIANCHI ha studiato i sottogruppi finiti dei due gruppi continui infiniti delle trasformazioni equivalenti e delle trasformazioni proporzionali, compiendone la determinazione nel caso del piano (*).

Ed io, per completare la classificazione dei gruppi continui finiti puntuali dello spazio, ho determinato, in base ad un procedimento già indicato dal LIE, i gruppi che trasformano in sè una congruenza di curve e operano su queste imprimitivamente (**).

È poi noto come il LIE, nelle sue classiche ricerche sui fondamenti della Geometria sia stato condotto a classificare quei gruppi puntuali di S_3, rispetto a cui due punti ammettono un invariante ed uno solo, e due o più punti non hanno nessun invariante essenziale (cioè indipendente dall'invariante delle coppie). Questo problema gruppale ha dato occasione a due diverse generalizzazioni; per una parte il BLICHFELDT ha determinato i gruppi di S_3, che operano transitivamente sulle coppie e possiedono uno o più invarianti essenziali per le terne di punti (***); d'altro canto il KOWALEWSKI ha risoluto il problema stesso del LIE in S_4 e, senza limitazioni relative alla realità, in S_5 (****). E di qui poi, ampliando la ricerca, ha preso le mosse per determinare tutti i gruppi primitivi dello spazio a cinque dimensioni (*****).

Dei *gruppi continui finiti di trasformazioni di contatto* erano già stati resi noti dal LIE tutti i tipi del piano e tre tipi di gruppi esistenti in ogni spazio, di cui uno soltanto è primitivo (******). L'ENGEL, cercando un rappre-

---

(*) *Sui gruppi continui finiti di trasformazioni che conservano le aree od i volumi* [Atti della R. Acc. della Sc. di Torino, vol. 38 (1903)]. — *Sui gruppi continui finiti di trasformazioni proporzionali* [Ibid., ibid.].

(**) *Contributo alla determinazione dei gruppi continui finiti dello spazio ordinario* [Giorn. di Matematiche (2) vol. 9 (1901)].

(***) *On a certain class of Groups of Transformation in Space of three Dimensions* [Amer. Journ. of Math. vol. 22 (1900)]. Possiamo ricordare qui che lo stesso autore ha anche rifatto la determinazione dei gruppi continui finiti, primitivi del piano [Trans. of the Am. Math. Soc., vol. 2 (1901)].

(****) *Ueber eine Kategorie von Transformationsgruppen einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit* [Leipz. Ber., vol. 50 (1898)].

(*****) *Die primitiven Transformationsgruppen in fünf Veranderlichen* [Leipz. Ber., vol. 51 (1899)].

(******) Cfr. p. es. LIE-ENGEL, *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. II, Cap. 23-25. Qui merita di essere ricordata la Nota dello SCHEFFERS, *Synthetische Bestimmung aller Berührungstransformationen der Kreise in die Ebene* [Leipz. Ber., vol. 51 (1899)]. — Per altre considerasentante della composizione semplice a 14 parametri scoperta dal KILLING, aveva costruito un tipo notevolissimo di gruppi ∞^{14} di trasformazioni di contatto di S_3, operanti primitivamente nello S_5 degli elementi di superficie (*); e lo SCHEFFERS, nella sua dissertazione, aveva classificato quei gruppi continui finiti di trasformazioni di contatto dello spazio, che trasformano le une nelle altre ∞^1 equazioni alle derivate parziali del 1.º ordine (**).

Ora il KOWALEWSKI, determinando i gruppi primitivi di S_5 (***), ha constatato che in S_3 non esistono altri gruppi continui finiti primitivi di trasformazioni di contatto all'infuori dei due tipi del LIE e dell'ENGEL; e l'OSEEN ha determinato alcune nuove classi di gruppi di trasformazioni di contatto di S_3 (operanti imprimitivamente nel solito S_5) (****); talchè a completare la classificazione in S_3 mancano oramai soltanto i tipi di una categoria di gruppi ben definita e non priva, a dir vero, d'interesse pei problemi di integrazione: quella dei gruppi di trasformazioni di contatto, che moltiplicano il solito pfaffiano

$$dz - p\,dx - q\,dy$$

per una costante, e trasformano fra loro imprimitivamente le variabili x, y, p, q (*****).

---

zioni geometriche in proposito si veda W. DE TANNENBERG, *Sur quelques transformations de contact* [Comptes Rendus, t. 134 (1902)]. — LUDWIG, *Ueber den Zusammenhang der Berührungstransformationen der Kreise einer Ebene mit der conformen Abbildungen des Raumes* [Rend. del Circ. mat. di Palermo, t. 23 (1907)]. Il LUDWIG ha poi anche studiato il gruppo ∞^{10} delle trasformazioni di contatto algebriche su di una sfera, che trasformano cerchi in cerchi: *Ueber die Berührungstransformationen der Kreise auf einer Kugel.* [Deutsche Math. Ver. t. 14 (1905)].

(*) Questo gruppo, noto all'ENGEL fin dal 1888, fu fatto conoscere da lui al pubblico matematico solo nel 1893 [*Sur un groupe simple à quatorze paramètres:* Comptes rendus, t. 116]: simultaneamente esso veniva scoperto dal CARTAN [Comptes rendus, ibid.]. Si riferiscono a siffatto gruppo i recenti lavori dell'ENGEL, citati a pag. 302.

(**) *Bestimmung einer Klasse von Berührungstransformationsgruppen des dreifach ausgedehnten Raumes* [Acta math., t. 14 (1891)].

(***) *Die primitiven Transformationsgruppen in fünf Veränderlichen* [Leipz. Ber., vol. 51 (1899)].

(****) *Ueber einige irreduciblen Gruppen von Berührungstransformationen im Raume* [Oefr. af k. Vetenskaps-Akad. Förhandl., 1901]. — *Ueber die endlichen, continuierlichen, irreduciblen Berührungstransformationsgruppen im Raume* [Dissertation; Lund, 1901].

(*****) A proposito della teoria delle trasformazioni di contatto possiamo ricordare le ricerche del LIEBMANN (*Zur Theorie der erweiterten Berührungstransformationen* [Leipz. Ber., vol. 51 (1899)]) il quale ha ridimostrato i teoremi fondamentali del BÄCKLUND e dell'ENGEL sulle trasformazioni osculatorie di qualsivoglia ordine delle varietà V_m di un S_n: in base a tali teoremi codeste trasformazioni si riducono a trasformazioni di contatto estese se $m = n - 1$, a trasfor-

A queste determinazioni di gruppi di trasformazioni di contatto vanno ravvicinate le ricerche del KOWALEWSKI sui sistemi pfaffiani, che ammettono un gruppo continuo finito di trasformazioni; la considerazione di siffatti sistemi si presenta naturalmente nelle indagini relative ai gruppi puntuali primitivi di uno spazio qualsivoglia. — Sono fondamentali in quest'ordine di idee i resultati dell'ENGEL sulla teoria invariantiva dei sistemi pfaffiani (*), resultati su cui forse l'attenzione dei matematici non si è fermata quanto essi meritavano. In base ad essi il KOWALEWSKI ha stabilito alcune conclusioni generali che escono dal quadro di questo rapporto, sui sistemi pfaffiani a cui sono connessi invariantivamente sistemi illimitatamente integrabili: nei riguardi della teoria dei gruppi egli ha determinato tutti i sistemi pfaffiani in cinque (**) e sei (***) variabili che ammettono un gruppo continuo finito primitivo di trasformazioni puntuali, e ha dimostrato, come corollario dei suoi teoremi generali, che in otto variabili non esiste nessun sistema pfaffiano che sia invariante rispetto ad un gruppo di trasformazioni puntuali (****).

GRUPPI CONTINUI FINITI ED EQUAZIONI DIFFERENZIALI.

Siamo così oramai entrati in quell'ordine di indagini, che furono dirette a determinare e studiare equazioni e sistemi differenziali, che ammettono un gruppo continuo finito di trasformazioni (*****).

mazioni puntuali estese se $m < n - 1$. Anche il PASCAL ha assegnato una verifica diretta del teorema del BÄCKLUND nel piano [Rend. del Circ. mat. di Palermo, vol. 18 (1904)]. — Ancora nella teoria delle trasformazioni di contatto, ma in un altro ordine di idee, possiamo qui ricordare la Dissertazione (di GREIFSWALD) di F. J. DOHMEN (*Darstellung der Berührungstransformationen in Konnexkoordinaten* [Leipzig, 1905]), il quale ha studiato sistematicamente i vari modi, in cui una trasformazione di contatto di S_n è rappresentabile come una trasformazione delle $2n+2$ coordinate omogenee di punto e di piano.

(*) *Zur Invariantentheorie der Systeme von Pfaff'schen Gleichungen* [Leipz. Ber. vol. 41 (1899) e vol. 42 1890)].

(**) *Die primitiven Transformationsgruppen in fünf Veränderlichen* [Leipz. Ber., vol. 51 (1899)].

(***) *Ueber Systeme von Pfaff'schen Gleichungen mit einer primitiven Transformationsgruppen* [Leipz. Ber., vol. 51 (1899].

(****) *Ueber Systeme von Pfaff'schen Gleichungen* [Leipz. Ber. vol. 53 (1901)].

(*****) Non sarà qui fuor di proposito il ricordare il « Vorläufiger Bericht » dello SCHEFFERS, *Ueber Integrationstheorien von Sophus Lie* [Jahresber. der deutschen Math.-Ver. vol. 12 (1903)], Lo Czuber ha rielaborato sistematicamente, per una via alquanto diversa da quella del Lie, la teoria dei gruppi a un parametro del piano e la loro applicazione alla teoria di integrazione delle equazioni differenziali ordinarie del 1.° ordine (*).

Il Boulanger ha dimostrato che le equazioni differenziali ordinarie del 3.° ordine che hanno la forma

$$y''' = R(x, y, y', y''),$$

dove R è funzionale razionale di y', y'' e analitica di x e y, e che ammettono un gruppo continuo ∞^3

$$x_1 = x, \quad y_1 = F(x, y, a, b, c),$$

sono o lineari o riducibili a lineari mediante una trasformazione della variabile, associata eventualmente, ad un cambiamento di funzione (**); cosicchè è venuta a mancare la speranza di poter giungere per questa via alla determinazione di nuove classi di trascendenti.

Sui sistemi di equazioni differenziali ordinarie, che ammettono un gruppo continuo finito di trasformazioni puntuali, ha istituito una ricerca sistematica diretta (***) lo Zindler, il quale è giunto in particolare alla determinazione di tutti i sistemi differenziali in tre funzioni incognite, che ammettono un gruppo continuo puntuale ∞^2, ∞^3, o ∞^4, limitandosi in quest'ultimo caso ai gruppi, che contengono un sottogruppo invariante abeliano e transitivo (****).

---

nel quale sono discusse nel loro graduale sviluppo le vedute e le conclusioni del Lie intorno al problema dell'integrazione di un sistema completo, che ammetta trasformazioni infinitesime note. È vivamente desiderabile che sia presto pubblicato il «Bericht» definitivo.

(*) *Zur Theorie der eingliedrigen Gruppen in der Ebene und ihrer Beziehungen zu der gewöhnlichen Differentialgleichungen I^r Ordnung* [Wien. Ber. vol. 112 (1903)]. — *Zur Geometrie der gewöhnlichen Differentialgleichungen* [Festschrift L. Boltzmann gewidmet (1904)].

(**) *Sur les équations différentielles du troisième ordre, qui admettent un groupe continu de transformations* [Comptes Rendus, t. 136 (1903); Bull. de la Soc. math. de France, t. 31 (1903)].

(***) Bastava aumentare il numero delle variabili o l'ordine massimo di derivazione per ricadere nel caso di un sistema del 1.° ordine o di un'unica equazione differenziale in due variabili. Ma è chiaro che in tal modo si giunge a sistemi differenziali che non sono completamente equivalenti ai dati.

(****) *Ueber simultane gewöhnliche Differentialgleichungen, welche continuierliche Transformationsgruppen gestatten* [Monatsh. für Math. und Phys., vol. 11 (1900)].

Il CAMPBELL (*) ha classificato i tipi di equazioni lineari alle derivate parziali del 2.° ordine in tre variabili indipendenti, che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni a non più di tre parametri (**).

Infine il WILCZINSKI, generalizzando, in un certo senso, i sistemi differenziali con soluzioni fondamentali, ha considerato (***) quei sistemi differenziali ordinari in n funzioni incognite, la cui soluzione generale $\eta_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ si ottiene da una soluzione particolare qualsiasi $y_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ mediante relazioni della forma (****)

$$\eta_i = \sum_k \varphi_{ik}(x, a_1, a_2, \ldots, a_r) y_k;$$

dove le φ_{ik} sono funzioni uniformi della x.

Queste relazioni, ove si consideri la x come una variabile non trasformata, definiscono un gruppo continuo ∞^r, che il WILCZINSKI chiama *linearoide*, designando con lo stesso nome i sistemi differenziali suindicati. Sulla natura analitica delle soluzioni di questi sistemi, i quali hanno punti critici fissi, il WILCZINSKI ha compiuto un'indagine d'indole generale, procedendo poi ad una determinazione completa dei gruppi linearoidi in due variabili e dei corrispondenti sistemi differenziali.

(*) *On the Types of linear partial differential Equations of the second order in three independent variables which are unaltered by the Transformations of a continuous Group* [Trans. of the Am. math. Soc., t. 1 (1900)].

(**) In base a concetti gruppali il BISCONCINI ha classificati i problemi dinamici relativi a quei sistemi olonomi, a legami indipendenti dal tempo, i quali, quando non agiscono forze, ammettono un gruppo di integrali fondamentali (*Di una classificazione dei problemi dinamici* [Nuovo Cimento (5) vol. 1 (1901)]). Lo stesso autore, sulle tracce delle ricerche del LEVI CIVITA sui potenziali binari, ha applicato considerazioni gruppali a determinare i tipi di soluzioni della equazione

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - 0$$

che si possono far dipendere da due soli parametri (*Sulle vibrazioni di una membrana che si possono far dipendere da due soli parametri* [Mem. della R. Acc. delle Sc. di Torino, (2) vol. 54 (1903)]). A questo stesso ordine di idee appartiene anche la mia Memoria: *Tipi di potenziali che, divisi per una funzione fissa, si possono far dipendere da due sole variabili* [Rend. del Circ. mat. di Palermo, t. 16 (1902)].

(***) *On Systems of multiform functions belonging to a group of linear Substitutions with uniform coefficients* [Amer. Journ. of Math., vol. 21 (1899)]. — *On Linearoid Differential Equations* [Ibid., ibid.]. — *On continuous Binary Linearoid Groups and the corresponding Differential Equations and* **A** *Functions* [Ibid., vol. 22 (1900)].

(****) Si tratterebbe di (particolari) sistemi differenziali con soluzioni fondamentali se le φ_{ik} fossero indipendenti da x.

Di nuovi contributi alle teorie di *classificazione* e *integrazione* delle equazioni e sistemi differenziali sulla base dei rispettivi *gruppi di razionalità* avremo a far cenno più innanzi, nel render conto delle indagini sui gruppi continui infiniti.

Qui intanto vanno menzionate le ricerche del Marotte, il quale ha messo sovratutto in luce come per lo studio analitico delle singolarità di un'equazione differenziale lineare a coefficienti razionali e per la classificazione delle trascendenti che la integrano si presenti naturale e vantaggiosa la considerazione di quei sottogruppi del gruppo di razionalità di Picard-Vessiot, che egli chiama *gruppi di meromorfia* relativi ai vari punti singolari dell'equazione e che, in sostanza, godono, ciascuno nell'intorno di un punto singolare, di proprietà caratteristiche analoghe a quelle, che definiscono il gruppo di razionalità rispetto a tutto il piano complesso (*).

In altra direzione ha tratto largo profitto dalla teoria del gruppo di razionalità il Fano nelle indagini che, sulla base di considerazioni geometriche, ha compiuto intorno alle equazioni differenziali lineari omogenee, le cui soluzioni fondamentali sono legate da relazioni algebriche (**).

Da ultimo, in quest'ordine di idee, meritano un cenno le ricerche del Loewy sulla reducibilità delle equazioni differenziali lineari in relazione col rispettivo gruppo di razionalità (***), e le sue considerazioni sui fondamenti della teoria di Picard-Vessiot (****).

(*) *Les équations différentielles linéaires et la théorie des groupes* [Ann. de la Faculté des sciences de Toulouse, t. 12 (1898)].

(**) Queste ricerche sono in parte anteriori al decennio di cui qui ci occupiamo. Noi ci limiteremo a ricordare le note sulle equazioni differenziali che appartengono alla stessa specie delle loro aggiunte [Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino, vol. 34 (1899); Rend. Lincei, (5) vol. 8, (1899)] e l'ampia Memoria, in cui sono riassunte e coordinate tutte le precedenti ricerche del Fano, *Ueber lineare homogene Differentialgleichungen mit algebraischen Relationen zwischen der Fundamentallösungen* [Math. Ann., vol. 53 (1900)]. Alle Note del Fano, dianzi citate, si riattaccano direttamente due Note del Loewy [Comptes rendus, t. 133 (1901); Münch. Berichte, vol. 32 (1902)].

(***) *Ueber die irreduciblen Factoren eines linearen homogenen Differentialausdruckes* [Leipz. Ber., vol. 54 (1902)]. — *Ueber reduzible lineare homogene Differentialgleichungen* [Gött. Nachrichten (1902); Math. Ann., vol. 56 (1903)]. Un notevole teorema sulle varie possibili decomposizioni in fattori di una forma differenziale lineare (teorema ridimostrato nella prima delle due note precedenti) si trova in Landau, *Ein Satz über die Zerlegung homogener linearer Differentialausdrücke in irreducible Factoren* [Journ. f. d. r. u. ang. Math., vol. 124 (1901)].

(****) *Sur les groupes de transformations des équations différentielles linéaires* [Bull. des Sc. math., (2) t. 26 (1902)]. — *Ueber die Adjunction von Integralen linearer homogener Differen-*

* * *

Compiuta così la nostra sommaria rassegna dei lavori sulla teoria dei gruppi continui finiti, accennerò, prima di passare ai gruppi infiniti nel senso del LIE, a due specie di gruppi, presentatesi spontaneamente all'attenzione dei matematici, e che un giorno potranno essere argomento di indagine proficua.

S. KANTOR, nell'ultimo suo lavoro, riferendosi al gruppo delle trasformazioni birazionali di uno spazio qualsiasi, ha mostrato, fra considerazioni e deduzioni, a dir vero, assai nebulose, l'opportunità di studiare i gruppi misti a infinite schiere, anche nel caso in cui le trasformazioni che appartengono al prodotto di due fra codeste schiere non siano date nè da un'unica schiera nè da un numero finito fra esse (*).

J. LE ROUX, d'altra parte, introdotte nello studio dei sistemi di equazioni alle derivate parziali le funzioni analitiche di un numero infinito di variabili, e considerate le soluzioni generali come funzioni delle variabili indipendenti, dei loro valori iniziali e dei valori iniziali dei parametri fondamentali (che, tolto il caso dei sistemi del MAYER, sono in numero infinito) mostra come allo studio delle variazioni che codeste soluzioni subiscono al variare dei valori iniziali vadano naturalmente connessi certi gruppi continui di trasformazioni ad un numero finito di parametri, ma operanti su di un numero infinito di variabili. Delle sue ricerche in proposito il LE ROUX, ch' io mi sappia, ha pubblicato soltanto la prima parte, che, in quest'ordine di idee gruppale, non va oltre le prime definizioni (**).

---

tialgleichungen [Math. Ann., vol. 59 (1904)]. Cfr. anche *Zur Gruppentheorie mit Anwendungen auf die Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen* [Trans. of the Am. Math. Soc., vol. 5 (1904)].

(*) *Ueber eine neue Klasse gemischter Gruppen und eine Frage über die birationalen Transformationen* [Wien. Berichte, vol. 112 (1903)].

(**) *Recherches sur les équations aux dérivées partielles* [Journal de mathématiques (5) t. 9 (1903)].

Gruppi continui infiniti speciali.

Passando ai gruppi continui infiniti nel senso del Lie, enumererò anzitutto rapidamente le varie classi particolari di gruppi infiniti che in questo campo furono oggetto di indagine durante l'ultimo decennio.

Il Kowalewski ha dimostrato che in cinque variabili non esistono altri gruppi continui infiniti primitivi all' infuori dei tre tipi resi noti dal Lie: gruppo puntuale totale, gruppo delle trasformazioni proporzionali e gruppo delle trasformazioni equivalenti (*).

Io trassi di qui occasione a constatare che lo stesso accade in S_4, mentre in S_3, accanto ai tre gruppi del Lie è primitivo anche il gruppo puntuale infinito che trasforma in sè l'equazione pfaffiana

$$d z - y d x = 0$$

(gruppo delle trasformazioni di contatto del piano (**).

L'Engel, riprendendo una ricerca iniziata dal Vivanti (***) e completata da E. v. Weber (****), ha determinato, analogamente a quanto egli aveva fatto per le trasformazioni infinitesime di contatto (*****), tutte le trasformazioni infinitesime che lasciano inalterata un'equazione pfaffiana qualsivoglia (******); e, sulle tracce della ricerca dell'Engel, F. Winkler, nella sua Dissertazione di Lipsia, ha determinato le trasformazioni infinitesime che trasformano in sè un pfaffiano qualsiasi, a meno di un fattore numerico e di un termine additivo, che sia un differenziale esatto (*******).

(*) *Die primitiven Transformationsgruppen in fünf Veränderlichen* [Leipz. Ber., vol. 51 (1899)].

(**) *I gruppi continui infiniti primitivi in tre e quattro variabili* [Atti della R. Accad. di Sc. L. e A. in Modena (3) vol. 7 (1906)].

(***) *Sulle trasformazioni infinitesime che lasciano invariata un'equazione pfaffiana* [Rend. del Circ. mat. di Palermo, t. 12 (1898)].

(****) *Sulle trasformazioni infinitesime che lasciano invariata un'equazione pfaffiana* (Rend. del Circ. mat. di Palermo, t. 12 (1898)].

(*****) *Kleinere Beiträge u. s. w. III Die infinitesimalen Berührungstransformationen* [Leipz. Ber., vol. 43 (1891)].

(******) *Die infinitesimalen Transformationen einer Pfaff'schen Gleichung* [Leipz. Ber., vol. 51 (1899)].

(*******) *Die infinitesimalen Transformationen, welche einen Pfaff'schen Ausdruck absolut der modulo eines vollständigen Differentials invariant lassen* [Dissertation, Leipzig (1905)].

Ad analoghi problemi per le forme ai differenziali d'ordine superiore al 1.° e in particolare del 2.° ordine ha recato il PASCAL notevoli contributi (*).

Il FORSYTH, riprendendo e modificando i procedimenti del ZORAWSKI (**) ha determinato e discusso, con uniformità di metodo e in base alle vedute del LIE, gli invarianti differenziali delle curve nel piano (***) e su di una superficie qualsiasi (****) e delle curve e delle superficie nello spazio (*****) (******).

Il WILCZINSKI, generalizzando le classiche ricerche del LAGUERRE, dello HALPHEN, del BRIOSCHI (*******), ha determinato il gruppo puntuale infinito, che lascia inalterata la forma di un qualsiasi sistema di equazioni differenziali lineari ordinarie in più funzioni incognite e ne ha studiato gli invarianti differenziali, costruendo esplicitamente il sistema completo nel caso particolare di due equazioni del 2.° ordine fra due sole funzioni.

Come ad ogni equazione differenziale lineare corrisponde un tipo proiettivo di curva integrale, così ad ogni sistema di due equazioni differenziali lineari ordinarie del 2.° ordine fra due funzioni si può associare un tipo proiettivo di superficie rigata; e perciò il WILCZINSKI ha applicato i suoi resultati allo studio delle proprietà proiettive differenziali delle superficie rigate (********).

Il MEDOLAGHI, infine, ha considerato i gruppi continui infiniti che dipendono soltanto da una funzione arbitraria ad un solo argomento e ha classi-

(*) *Le trasformazioni infinitesime applicate ad una forma differenziale di ordine r.* [Rend. Lincei (5) vol. 12_2 (1903). — *Sulle trasformazioni infinitesime che lasciano invariata una forma o una equazione ai differenziali totali* [Ibid., ibid.].

(**) *Ueber Biegungsinvarianten. Eine Anwendung der Lie'schen Gruppentheorie* (Acta math., t. 16 (1892)].

(***) *Differential Invariants of a Plane and of Curves in the Plane* [Rend. del Circ. mat. di Palermo, t. 21 (1906)].

(****) *The differential invariants of a surface, and their geometrie significance* [Phil. Trans. vol. 201 (A) (1903); Proc. of the R. Math. Soc. vol. 71].

(*****) *The differential invariants of space* [Phil. Trans. 202 (A) (1904); Proc. of the R. Math. Soc., vol. 72 (1904)].

(******) Ricerche sugli invarianti integrali anche in rapporto colla teoria dei gruppi continui furono compiute da TH. DE DONDEX, *Étude sur les invariants intégraux* [Rend. del Circ. math. di Palermo, t. 15 (1901), t. 16 (1902): *Application nouvelle des invariants intégraux* [Mém. couronnés etc. publiés par l'Acad. de Belgique: nouv. série; t. I, (1905)].

(*******) La teoria invariantiva delle equazioni differenziali lineari omogenee è stata rielaborata sistematicamente, secondo i metodi del LIE, anche dal BOUTON, *Invariants of the general linear differential equation and their relation to the theory of continuous groups* [Amer. Journal of Math. vol. 21 (1899)].

(********) Le numerose Memorie del WILCZINSKI sull'argomento sono pubblicate in massima parte nelle *Transactions of the Am. Math. Society* a partire dal 1901; i risultati furono esposti ficato le equazioni alle derivate parziali del 2.° ordine in due variabili indipendenti, che ammettono un gruppo puntuale siffatto (*).

Per quanto riguarda i *gruppi continui infiniti di trasformazioni di contatto,* risulta da ricerche già citate del KOWALEWSKI (**) che ogni gruppo siffatto di S_3, il quale non coincida col gruppo totale, opera imprimitivamente nello spazio a cinque dimensioni degli elementi di superficie. Perciò io determinai i gruppi infiniti analoghi ai gruppi finiti dello SCHEFFERS, cioè i gruppi continui infiniti irreducibili di S_3 che trasformano le une nelle altre ∞^1 equazioni alle derivate parziali del 1.° ordine (***).

Il LEBESGUE, riprendendo un problema, di cui si era già occupato il LIE, senza poi mai pubblicarne la soluzione, ha determinato le trasformazioni di contatto che ad *ogni* superficie minima fanno corrispondere una superficie minima. Sono esse trasformazioni di piani, e la più generale trasformazione di contatto di questo gruppo si ottiene, all'infuori di una similitudine, fissando ad arbitrio una superficie minima Σ_0 e facendo corrispondere ad ogni piano P il piano ad esso parallelo ed equidistante da P e dal piano tangente a Σ_0 parallelamente a P. Queste stesse trasformazioni di contatto trasformano in sè l'insieme di tutte le superficie parallele a superficie minime (****).

Da ultimo dobbiamo qui accennare al gruppo continuo infinito reducibile delle trasformazioni di contatto *equidistanti* o *equilunghe* del piano, al quale lo SCHEFFERS fu condotto dalle sue ricerche sulle *curve isogonali* ed *equitangenziali* (*****). Questo gruppo delle trasformazioni di contatto equidistanti è

---

sistematicamente dal WILCZINSKI, insieme con una rielaborazione personale della teoria dello HALPHEN degli invarianti proiettivi delle curve piane e gobbe, in: *Projective differential Geometry of Curves and ruled Surfaces* [Leipzig, 1906].

(*) *Sui gruppi isomorfi al gruppo di tutte le trasformazioni di una variabile* (Mem. I) [Rend. del Circ. Mat. di Palermo, t. 12 (1898)]. — *Classificazione delle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine, che ammettono un gruppo infinito di trasformazioni puntuali* [Ann. di Mat., (3) t. 1 (1898)].

(**) *Die primitiven Transformationsgruppen in fünf Veränderlichen* [Leipz. Ber., vol. 51 (1899)].

(***) *Sui gruppi continui infiniti di trasformazioni di contatto dello spazio* (Mem. della R. Acc. delle Sc. di Torino, (2) t. 57 (1906)].

(****) *Sur les transformations de contact des surfaces minimo* [Bull. des Sc. math., (2) t. 26 (1902)].

(*****) Dato un sistema ∞^1 di curve del piano lo SCHEFFERS dice equitangenziale rispetto ad esso ogni curva, tale che sulle tangenti comuni ad essa e alle curve del fascio sia costante il segmento intercetto fra i due punti di contatto. Così ad ogni sistema ∞^1 di curve piane corrisponde un sistema ∞^2 di curve equitangenziali.

costituito da tutte le trasformazioni di contatto che trasformano rette in rette (*), *in modo che i segmenti corrispondenti siano uguali.* — Tale gruppo continuo infinito fa perfetto riscontro al gruppo conforme piano. Contiene anch'esso come sottogruppo puntuale massimo il gruppo dei movimenti e delle similitudini, e trasforma gli uni negli altri i sistemi ∞^2 di curve equitangenziali, appunto come il gruppo conforme opera sui sistemi ∞^2 di curve isogonali. Di più, se nel piano assumiamo come coordinate della retta i coefficienti u, v che compaiono nella così forma normale della equazione della retta

$$x \cos u + y \operatorname{sen} a - v = 0,$$

e accanto all'unità reale introduciamo un'altra unità j tale che $j^2 = 0$, la più generale trasformazione di contatto equidistante è rappresentata sotto la forma

$$\bar{u} + j\,\bar{v} = f(u + j\,v),$$

dove f designa una qualsiasi funzione analitica nel campo complesso $[1, j]$ (**).

Come nel caso del gruppo conforme, le trasformazioni equidistanti che trasformano cerchi in cerchi costituiscono un gruppo misto algebrico ∞^6, che è analiticamente rappresentabile nel campo complesso $[1, j]$ mediante trasformazioni lineari e costituisce il gruppo fondamentale della « Geometria di direzione » del LAGUERRE (***).

Lo STUDY ha mostrato come su ogni superficie esista un gruppo di trasformazioni di contatto equidistanti, caratterizzate dalla proprietà di trasformare le une nelle altre le geodetiche e di lasciare inalterata la distanza geodetica fra i punti di due elementi lineari qualsiansi di una geodetica. In particolare sulle superficie a curvatura costante codeste trasformazioni di contatto equidistanti ammettono, in base ad opportuni sistemi di numeri complessi, una rappresentazione analitica, analoga a quella del gruppo conforme e del gruppo dello SCHEFFERS. Di più lo STUDY ha esteso le sue considerazioni anche agli spazi a tre dimensioni e a curvatura costante ed è

(*) Risulta di qui senz'altro la reducibilità del gruppo.

(**) *Isogonalkurven, Aequitangentialkurven und komplexe Zahlen* [Verh. des 3. intern. Math.-Kongr., Heidelberg, 1904; Math. Ann., vol. 60 (1905)].

(***) GRÜNWALD, *Ueber duale Zahlen und ihre Anwendung in der Geometrie* [Monatsh. f. Math. u. Phys., vol. 17 (1906)].

notevole che mentre negli S_3 non-euclidei le trasformazioni di contatto equidistanti costituiscono, come le trasformazioni puntuali conformi, un gruppo finito a dieci parametri, nello S_3 euclideo esse danno luogo ancora. ad un gruppo continuo infinito (*).

Teoria generale dei gruppi continui infiniti.

Ad un più largo ed elevato ordine di idee e di resultati ci conducono finalmente i pochi lavori pubblicati in questo decennio sulla *teoria generale dei gruppi continui infiniti.*

Solo il Vessiot, il Cartan e il Medolaghi hanno lavorato in questo campo.

Il Vessiot, nella prima parte del suo *Memoir couronné* del 1903, ha avuto sovratutto il merito di riprendere, chiarire e completar sotto qualche aspetto quelle ricerche dell'Engel e del Medolaghi, che non avevano ottenuto certo diffusione e seguito pari alla originalità e all'importanza.

L'Engel, nella sua *Dissertazione* che risale al 1885 (**) e in una Nota complementare del 1894 (***), aveva assegnato un metodo che permette di costruire le equazioni di definizione delle trasformazioni infinitesime di **tutti** i gruppi continui, finiti e infiniti, in n variabili, quando si conoscano le trasformazioni infinitesime di certi gruppi continui finiti di composizione particolare. Questa singolare corrispondenza fra i gruppi in n variabili finiti o infiniti e quei particolari gruppi finiti o *gruppi caratteristici* dell'Engel, era stata poi studiata e discussa nel 1897 dal Medolaghi (****), il quale era riuscito in particolare a identificare i gruppi caratteristici dell'Engel in quelle due serie di gruppi semplicemente transitivi, a due a due reciproci, le cui equazioni finite si ottengono nel seguente modo: si immaginino tre serie

(*) *Ueber mehrere Probleme der Geometrie, die dem Problem der konformen Abbildung analog sind* [Sitz.-Ber. d. Niederrhein. Ges. f. Natur.-u. Heilkunde, Bonn 1904].

(**) *Ueber die Definitionsgleichungen der continuirlichen Transformationsgruppen* [Math. Ann. vol. 27 (1886)].

(***) *Kleinere Beiträge* u. s. w.; IX: *Die Definitionsgleichungen der continuirlichen Transformationsgruppen* [Leipz. Ber., vol. 46 (1894)].

(****) *Sulla teoria dei gruppi infiniti continui* [Ann. di Mat., (2) vol. 25 (1897)].

di n variabili

$$z_i, \quad y_i, \quad x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

e, pensate le z_i come funzioni composte delle x_i per mezzo delle y_i, si esprimano le derivate, fino ad un certo ordine, delle z rispetto alle x in funzione delle derivate delle z rispetto alle y e delle y rispelto alle x. Infine nelle equazioni così ottenute si considerino le derivate delle z rispetto alle x come variabili nuove, le derivate delle z rispetto alle y [o delle y rispetto alle x] come antiche variabili e le derivate delle y rispetto alle x [o delle z rispetto alle y] come parametri. Sono questi i gruppi indicati.

L'analisi del Medolaghi aveva condotto, come a resultato saliente, ad un procedimento determinato e diretto, che permette di risalire dalle equazioni di definizione delle trasformazioni infinitesime di un gruppo qualsiasi alle equazioni di definizione delle rispettive trasformazioni finite, non appena siano note le equazioni del corrispondente gruppo caratteristico dell'Engel; e codeste equazioni di definizione sotto la forma del Medolaghi rappresentano per ora il più semplice e più maneggevole strumento di ricerca, che si possieda in questo campo.

Tutti i gruppi continui appartenenti ad un medesimo tipo del Lie, cioè simili fra loro mediante trasformazioni puntuali del relativo spazio, hanno un medesimo gruppo caratteristico dell'Engel; ma reciprocamente ad un medesimo gruppo dell'Engel corrispondono in generale più tipi di gruppi nel senso del Lie, il cui insieme si dirà, col Medolaghi, *tipo dell'*Engel.

Il Medolaghi, nel 1899, prendendo le mosse dalle sue equazioni di definizione ha abbozzato, assai sommariamente invero, un metodo diretto a separare i vari tipi del Lie contenuti in un medesimo tipo dell'Engel (*).

Ora, come già accennai, il Vessiot nella prima parte del ricordato *Memoir couronné* (**), ha rielaborato e rifuso le deduzioni analitiche dell'Engel e del Medolaghi e ha condotto a termine nei suoi particolari la suindicata discussione, relativa ai vari tipi del Lie appartenenti ad uno stesso tipo dell'Engel. In base ad una discussione analoga egli ha mostrato come, partendo dalle equazioni di definizione di un gruppo sotto la forma del Medolaghi, si possano determinarne i vari sottogruppi e in particolare i sottogruppi in-

(*) *Contributo alla determinazione dei gruppi continui in uno spazio ad N dimensioni* [Rend. della R. Acc. dei Lincei (5) vol. 8_1 (1899)].

(**) *Sur la théorie des groupes continus* [Ann. de l'Éc. N. Sup. (3) t. 20 (1903)].

varianti, e da ultimo ha precisato pei gruppi infiniti il concetto di isomorfismo, nel che per altro era stato preceduto dal CARTAN nei lavori che accennerò fra poco.

La seconda parte del *Memoir couronné* è dedicata alla integrazione dei sistemi differenziali che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni (*)

Un tal problema di integrazione, in base ai principi del LIE si può sempre decomporre in una serie di problemi, di cui uno porta su di un sistema differenziale *risolvente* la cui natura può essere qualsiasi, mentre gli altri riguardano sistemi, la cui soluzione più generale si deduce da una soluzione particolare mediante le trasformazioni di un gruppo continuo semplice. Ora il VESSIOT ha dimostrato che si può sempre fare in modo che codesti ultimi sistemi differenziali siano *automorfi*, cioè tali che la soluzione più generale si ottenga da una qualsiasi soluzione mediante un gruppo continuo di trasformazioni puntuali che operino solo sulle funzioni incognite; e questa semplificazione, per quanto di natura formale ha una importanza notevole.

Nella terza parte infine (**) il VESSIOT si è occupato dell'estensione della teoria del GALOIS alle equazioni lineari alle derivate parziali e ai loro sistemi completi, estensione già indicata prima dal DRACH (***), e che il VESSIOT qui ha compiuto abbandonando il metodo algebrico del GALOIS, generalizzato dal PICARD al caso delle equazioni differenziali ordinarie, e sostituendovi, in ragione della diversa natura del problema considerato, un metodo analitico, che vale per altro ad esaminare anche i problemi del GALOIS e del PICARD.

Il VESSIOT nel lavoro testè accennato aveva riscontrato una lacuna nella dimostrazione di un teorema del MEDOLAGHI: fu così occasionata la recente ricerca del MEDOLAGHI (****), in cui quel suo teorema vien ristabilito su solide basi, almeno in un primo caso di interesse saliente.

Il MEDOLAGHI (*****) aveva già prima notato come quei gruppi infiniti,

---

(*) *Sur l'intégration des systèmes différentiels qui admettent des groupes continues de transformations* [Acta math., t. 28 (1903)].

(**) *Sur la théorie de Galois et ses diverses généralisations* [Ann. de l'Éc. N. Sup. (3) t. 21 (1904)].

(***) Ann. de l'Éc. Norm. Sup. (3) vol. 1898)].

(****) *Sopra i gruppi definiti da equazioni differenziali del 1.° ordine* [Rend. del Circ. mat. di Palermo, t. 24 (1907)].

(*****) *Sur les groupes que se présentent dans la généralisation des fonctions analytiques* [Comptes rendus, t. 126 (1898)].

alle cui equazioni di definizione il PICARD era giunto nel 1891 generalizzando le equazioni alle derivate parziali della teoria delle funzioni di una variabile complessa o, se vogliamo, le equazioni di definizione del gruppo conforme piano (*), si possono caratterizzare, nell'insieme di tutti i gruppi infiniti, come quelli che contengono in sè il gruppo commutabile di tutte le trattazioni del relativo spazio. Detti gruppi del PICARD i gruppi siffatti, il MEDOLAGHI ha dimostrato *che ogni tipo dell'*ENGEL *del 1.° ordine* (cioè definito da equazioni del 1.° ordine) *contiene un gruppo del* PICARD. E si noti che, come ha osservato il MEDOLAGHI, quando si prescinda dal gruppo proiettivo totale o dal gruppo infinito delle trasformazioni proporzionali, definite da sole equazioni del 2.° ordine, ogni gruppo sia finito, sia infinito o è del 1.° ordine, o è contenuto in un gruppo del 1.° ordine.

Ora il MEDOLAGHI, in base al suo teorema e al fatto che i gruppi caratteristici dell'ENGEL di gruppi del 1.° ordine sono tutti contenuti nei gruppi parametrici del gruppo lineare omogeneo in *n* variabili, ha stabilito fra i gruppi infiniti del PICARD e i vari tipi di gruppi lineari omogenei una corrispondenza, di cui già le prime e più ovvie conseguenze, a cui per ora si è limitato il MEDOLAGHI, dimostrano la singolare importanza. — È in particolare notevole il nesso fra questo metodo di ricerca dei gruppi del PICARD e il classico metodo dovuto al LIE degli sviluppi in serie nell'intorno di un punto generico.

Mentre il MEDOLAGHI ed il VESSIOT, come già l'ENGEL, avevano riattaccato le loro deduzioni ai primi principi già stabiliti dal LIE per la teoria dei gruppi infiniti, le ricerche del CARTAN sulla struttura dei gruppi infiniti ne sono indipendenti (**). In particolare il CARTAN esclude affatto la considerazione delle trasformazioni infinitesime del gruppo e si vale sistematicamente della sua teoria di integrazione dei sistemi di equazioni ai differenziali totali, che egli ha notoriamente costruito elaborando e generalizzando alcune vedute che si possono far risalire al GRASSMANN (***).

(*) *Sur certains systèmes d'équations aux dérivées partielles généralisant les équations de la théorie des fonctions d'une variable complexe* [Journal de mathématiques, (4) t. 8 (1892)].

(**) *Sur la structure des groupes infinis* [Comptes rendus, t. 135 (1902)]. — *Sur la structure des groupes infinis de transformations* [Ann. sc. de l'Éc. N. Sup. (3) t. 21 (1904), t. 22 (1905)].

(***) *Sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales* [Ann. sc. l'Éc. N. Sup. (3) t. 18 (1901)]. — *Sur l'intégration des systèmes différentiels complètement intégrables* [Comptes rendus, t. 134 (1902)]. — *Sur l'equivalence des systèmes différentiels* [Ibid., t. 135 (1902)].

A base delle sue deduzioni sta il concetto di isomorfismo oloedrico o uguaglianza di composizione fra gruppi infiniti, che egli definisce nei termini seguenti: Anzitutto egli dice che, dato un gruppo G operante su n variabili $x_1 \dots x_n$, un altro gruppo G' operante sulle x_i e su altre m variabili $y_1 \dots y_m$ è ottenuto per prolungamento di G, se G' trasforma fra loro le x_i appunto come il gruppo dato G; e chiama *oloedrico* questo prolungamento quando alla trasformazione identica del gruppo G corrisponde nel gruppo prolungato la sola trasformazione identica. Ciò premesso, il Cartan dice *isomorfi oloedricamente* due gruppi, se si possono prolungare oloedricamente in modo da ottenere due gruppi che operino sullo stesso numero di variabili e siano fra loro simili.

Ora il problema più importante sta nella ricerca di criteri che permettano di riconoscere codesta uguaglianza di composizione; e il Cartan lo ha risoluto per una via analitica, che appare alquanto oscura e artificiosa, ma, giova il riconoscerlo, ha condotto l'autore ad alcuni resultati ben precisi e importanti. Egli, assunte le equazioni di definizione delle trasformazioni finite di un gruppo G sotto la forma di un sistema di equazioni ai differenziali totali, dimostra come si possa sempre prolungare oloedricamente il gruppo dato in modo da ottenere un gruppo G', il quale sia il *massimo* gruppo rispetto a cui sono invarianti certe h funzioni U_i (che mancano naturalmente nel caso di un gruppo transitivo) e certi $r+p$ pfaffiani

$$\omega_1, \dots, \omega_r; \quad \varpi_1, \dots, \varpi_p,$$

tali che sia

$$d\,U_i = V_{i1}\,\omega_1 + \cdots + V_{ir}\,\omega_r$$

e il covariante bilineare di ω_k $(k = 1, \dots, r)$ abbia la forma

$$\sum_{ij} c_{ijk}\,\omega_i\,\omega_j + \sum_{i\varrho} a_{i\rho k}\,\omega_i\,\varpi_\rho,$$

dove le V_{ik}, c_{ijk}, $a_{i\rho k}$ sono funzioni delle U (e perciò si riducono a costanti numeriche pei gruppi transitivi) e le $a_{i\rho k}$ costituiscono un sistema *involutivo* (*). Codesti coefficienti V_{ik}, c_{ijk}, $a_{i\rho k}$ caratterizzano la struttura del gruppo, in quanto due gruppi per cui siffatti coefficienti coincidano sono fra loro oloedricamente isomorfi.

(*) Ciò implica fra le $a_{i\varrho k}$ certe relazioni lineari (dipendenti in parte dalle eventuali relazioni lineari fra gli ω_i, $\bar{\omega}_i$) che qui trovo inutile specificare.

Per codesti coefficienti della struttura (generalizzazione delle costanti di composizione dei gruppi finiti) il CARTAN assegna le condizioni necessarie e sufficienti cui devono soddisfare; e fra le più notevoli conseguenze che egli ne deduce vanno ricordate alcune considerazioni sulla possibilità di ridurre in certi casi il grado di intransitività senza alterare la struttura del gruppo, e l'osservazione che, a differenza di quanto accade pei gruppi finiti, il minimo grado di intransitività di una struttura di gruppo infinito può essere diverso da zero, o, in altre parole, che *esistono gruppi infiniti intransitivi, i quali non sono oloedricamente isomorfi a nessun gruppo transitivo.*

Il CARTAN ha discusso poi minutamente il problema della determinazione di tutti i gruppi oloedricamente isomorfi ad un gruppo dato, prendendo le mosse da una nuova definizione del gruppo, il quale vien qui caratterizzato come l'insieme delle trasformazioni che inducono su certi pfaffiani un certo gruppo lineare (del quale interesserebbe certo indagare le eventuali relazioni col gruppo caratteristico dell'ENGEL). Risultò in particolare da siffatta discussione che, contrariamente a quanto accade pei gruppi finiti, *un gruppo infinito può essere isomorfo a sè stesso meriedricalmente;* il che dà luogo alla necessità di distinguere due specie di isomorfismo meriedrico: *proprio* e *improprio*, dicendosi che l'isomorfismo meriedrico fra due gruppi è proprio, se essi non si possono riguardare in alcun modo come oloedricamente isomorfi. E di qui ancora risulta che i gruppi semplici vanno distinti in propri ed impropri; i primi sono quelli che non ammettono nessun gruppo meriedricamente isomorfo, nè proprio nè improprio: gli altri sono quelli che possono ammettere degli isomorfismi meriedrici impropri, ma nessun isomorfismo meriedrico proprio.

Si rivela così la eccezionale difficoltà del problema della decomposizione di un gruppo infinito in una serie normale di sottogruppi; ed anzi, come nota il CARTAN, vi è luogo a dubitare in certi casi della possibilità di trovare una decomposizione in una serie *finita* di sottogruppi semplici. Da ultimo il CARTAN ha applicato la sua teoria generale allo studio dei gruppi dipendenti da funzioni arbitrarie di un solo argomento ciascuna; dimostrando in particolare che fra codesti gruppi quelli transitivi e semplici hanno la medesima struttura del gruppo totale in una sola variabile.

Più di recente il CARTAN, come risulta da una Nota dei *Comptes Rendus*, ha risoluto un altro problema del più alto interesse, sovratutto in ordine alle teorie di integrazione, cioè la determinazione di tutti *i gruppi continui, infiniti, semplici*, la quale, in confronto della analoga questione pei gruppi finiti, offre un nuovo ordine di difficoltà per la esistenza di gruppi intransitivi, non isomorfi oloedricamente ad alcun gruppo transitivo (*).

Ora il Cartan in primo luogo ha dimostrato che i gruppi transitivi semplici si riducono tutti a quattro tipi già indicati dal Lie: gruppo puntuale totale, gruppo delle trasformazioni proporzionali, gruppo totale delle trasformazioni di contatto e gruppo di tutte le trasformazioni di contatto nelle x_i, p_i.

In secondo luogo poi ha determinato tutti i gruppi semplici che non sono isomorfi ad alcun gruppo transitivo, dimostrando in particolare che i gruppi intransitivi semplici propriamente detti si ottengono dai gruppi semplici transitivi, facendo che in essi gli elementi arbitrari dipendano nel modo più generale possibile da un numero qualsiasi di variabili non trasformate dal gruppo.

Risultati questi veramente belli e importanti!

Nel campo dei gruppi infiniti, di cui sino a pochi anni innanzi così scarse notizie possedevamo, due vie oramai sono dischiuse: quella di Engel-Medolaghi-Vessiot e quella del Cartan; e l'una e l'altra hanno aperto l'adito a vedute nuove e a inaspettate conclusioni.

Ma reso con ciò l'omaggio dovuto ai pregi intrinseci e al durevole valore di siffatti resultati, altro possiamo chiedere all'avvenire.

I due indirizzi dianzi accennati e fra loro tanto divergenti, racchiudono per così dire un settore, in cui sopratutto importerebbe spingere ora operosamente le indagini, fino a stabilire fra le due vie un sistema di relazioni e quasi di comunicazioni.

Potrà di qui sorgere sui problemi fondamentali della teoria dei gruppi infiniti una concezione nuova, forse una concezione più sintetica, e meglio rispondente alla veduta generale del Lie, che in ogni problema tutto subordinava alla infaticata ricerca di quell'intima armonia fra metodi e resultati, che alle indagini matematiche infonde carattere e valore estetico.

(*) *Les groupes de transformations continus, infinis, simples* [Comptes rendus, t. 144 (1907)].

Sulla deformazione infinitesima delle ipersuperficie.

(*Di* Umberto Sbrana, *a Bra*).

Il problema della deformazione infinitesima si può porre per una ipersuperficie V_{n-1} dell'S_n euclideo nello stesso modo come si fa per una superficie dello spazio ordinario.

È già stato osservato (*) però che, appena è $n > 3$, una V_{n-1} generica non ammette deformazioni infinitesime. Ciò può però avvenire per le ipersuperficie di certe classi speciali. In questo lavoro io mi propongo appunto di studiare tali V_{n-1} particolari.

Trovo così, come ho già trovato per quelle deformabili in modo finito (**), che esse debbono essere inviluppi o di ∞^1, o di ∞^2 iperpiani.

Esaminato il caso semplice di una V_{n-1} inviluppo di ∞^1 iperpiani, nel quale questa ammette deformazioni infinitesime dipendenti da una funzione arbitraria, rimane quello in cui la V_{n-1} ha ∞^2 iperpiani tangenti. Facendo allora della V_{n-1} l'immagine di Gauss nell'ipersfera fondamentale di S_n, o, se vogliamo, nello spazio ellittico I_{n-1} ad $n-1$ dimensioni, ottengo una superficie $\sum_2$, sulla quale dimostro dovere esistere un sistema coniugato *ad invarianti eguali.* Invertendo questo risultato dimostro infine che: *La ricerca delle V_{n-1} di S_n deformabili in modo infinitesimo equivale alla ricerca ed alla integrazione delle equazioni di* Laplace:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_1 \partial u_2} + a \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} + b \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} + c \Phi = 0$$

che sono ad invarianti eguali, ossia per le quali si ha:

$$\frac{\partial a}{\partial u_1} = \frac{\partial b}{\partial u_2},$$

(*) Cfr. Cesàro, *Lezioni di Geometria intrinseca,* pag. 247.

(**) Cfr. la mia Memoria: *Sulle varietà ad $n-1$ dimensioni deformabili nello spazio euclideo ad n dimensioni* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXVII (1909)].

e che ammettono un gruppo di n soluzioni $X_1, X_2, \ldots, X_n$ soddisfacenti alla relazione:

$$\sum_1^n{}_i X_i^2 = 1.$$

§ 1.° *Formole relative ad una deformazione infinitesima.* Supponiamo che in una deformazione infinitesima di una V_{n-1} di S_n le coordinate x_i di un suo punto P ricevano gli incrementi δx_i dati da queste:

$$\delta x_i = \varepsilon y_i, \tag{a}$$

dove ε è una costante infinitesima della quale sono da trascurarsi le potenze superiori alla seconda, e le y_i sono, come le x_i, funzioni dei parametri u_1, $u_2, \ldots, u_{n-1}$.

Essendo:

$$d s^2 = \sum_{r,s}^{1\ldots n-1} a_{rs}\, d u_r\, d u_s$$

l'elemento lineare di V_{n-1}, e indicando col simbolo δ la variazione subìta da un elemento qualsiasi di V_{n-1} per la deformazione infinitesima suddetta, si dovranno avere queste:

$$\delta a_{rs} = 0,$$

ossia le altre:

$$\left.\begin{array}{c} \displaystyle\sum_i^{1\ldots n} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \frac{\partial y_i}{\partial u_s} + \sum_i^{1\ldots n} \frac{\partial x_i}{\partial u_s} \frac{\partial y_i}{\partial u_r} = 0 \\ (r,\ s = 1,\ 2, \ldots,\ n-1). \end{array}\right\} \tag{1}$$

Per la deformazione infinitesima i coseni direttori X_i della normale a V_{n-1} in P, e i coefficienti della seconda forma fondamentale:

$$\sum_{r,s}^{1\ldots n-1} \Omega_{rs}\, d u_r\, d u_s,$$

subiranno delle variazioni date da queste:

$$\left.\begin{array}{ll} \delta X_i = \varepsilon Y_i & (i = 1,\ 2, \ldots,\ n), \\ \delta \Omega_{rs} = \varepsilon \Gamma_{rs} & (r,\ s = 1,\ 2, \ldots,\ n-1). \end{array}\right\} \tag{b}$$

Variando le note formole:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_r\, \partial u_s} = \sum_1^{n-1}{}_k \left\{ \begin{matrix} r & s \\ & k \end{matrix} \right\} \frac{\partial x_i}{\partial u_k} + \Omega_{rs} X_i \\ \qquad\qquad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n;\ r,\ s,\ t = 1,\ 2, \ldots,\ n-1), \\ \displaystyle\frac{\partial X_i}{\partial u_t} = -\sum_{\lambda,\mu}^{1\ldots n-1} A_{\lambda\mu}\, \Omega_{\mu t} \frac{\partial x_i}{\partial u_\lambda} \end{array}\right\} \tag{2}$$

si troveranno le seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 y_i}{\partial u_r \partial u_s} &= \sum_1^{n-1}{}_k \begin{Bmatrix} r & s \\ k \end{Bmatrix} \frac{\partial y_i}{\partial u_k} + \Omega_{rs} Y_i + \Gamma_{rs} X_i \\
\frac{\partial Y_i}{\partial u_t} &= - \sum_{\lambda,\mu}^{1\ldots n-1} A_{\lambda\mu} \frac{\partial x_i}{\partial u_\lambda} \Gamma_{\mu t} - \sum_{\lambda,\mu}^{1\ldots n-1} A_{\lambda\mu} \Omega_{\mu t} \frac{\partial y_i}{\partial u_\lambda}.
\end{aligned}\right\} \qquad (2)^*$$

Le equazioni di Gauss e Codazzi per la V_{n-1} variate ci dànno poi queste:

$$\left.\begin{aligned}
&\Gamma_{\alpha\beta}\Omega_{\delta\gamma} + \Omega_{\alpha\beta}\Gamma_{\delta\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}\Omega_{\beta\delta} - \Omega_{\alpha\gamma}\Gamma_{\beta\delta} = 0 \\
&\qquad\qquad (\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \ldots, n-1). \\
&\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}}{\partial u_\gamma} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}}{\partial u_\beta} + \sum_1^{n-1}{}_t \begin{Bmatrix} \alpha & \beta \\ t \end{Bmatrix} \Gamma_{\gamma t} - \sum_1^{n-1}{}_t \begin{Bmatrix} \alpha & \gamma \\ t \end{Bmatrix} \Gamma_{\beta t} = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Infine variando le altre:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_1^n{}_i X_i \frac{\partial x_i}{\partial u_k} = 0, \\
&\sum_1^n{}_i X_i^2 = 1,
\end{aligned}\right\} \qquad (3)^*$$

si deducono le seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_1^n{}_i X_i \frac{\partial y_i}{\partial u_k} + \sum_1^n{}_i Y_i \frac{\partial x_i}{\partial u_k} = 0 \\
&\qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1). \\
&\sum_1^n{}_i X_i Y_i = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

§ 2.° *Sistema per la determinazione di una deformazione infinitesima.* Facciamo le seguenti posizioni:

$$p_i^{(r)} = \frac{\partial y_i}{\partial u_r} \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ r = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Le (2)* si scriveranno così:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial p_i^{(r)}}{\partial u_s} &= \sum_1^{n-1}{}_k \begin{Bmatrix} r & s \\ k \end{Bmatrix} p_i^{(k)} + \Omega_{rs} Y_i + \Gamma_{rs} X_i \\
\frac{\partial Y_i}{\partial u_t} &= - \sum_{\lambda,\mu}^{1\ldots n-1} A_{\lambda\mu} \frac{\partial x_i}{\partial u_\lambda} \Gamma_{\mu t} - \sum_{\lambda,\mu}^{1\ldots n-1} A_{\lambda\mu} \Omega_{\mu t} p_i^{(\lambda)}
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

e costituiranno per le funzioni:

$$p_i^{(1)},\ p_i^{(2)},\ldots,\ p_i^{(n-1)},\ Y_i \qquad (i=1,\ 2,\ldots,\ n) \tag{6}$$

un sistema di equazioni ai differenziali totali.

Le (6) poi dovranno soddisfare alle equazioni in termini finiti (1), (4) che si scrivono:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_1^n{}_i X_i p_i^{(k)} + \sum_1^n{}_i Y_i \frac{\partial x_i}{\partial u_k} = 0 \\ &\sum_1^n{}_i \frac{\partial x_i}{\partial u_r} p_i^{(s)} + \sum_1^n{}_i \frac{\partial x_i}{\partial u_s} p_i^{(r)} = 0 \\ &\sum_1^n{}_i X_i Y_i = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Facciamo le seguenti posizioni:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_1^n{}_i X_i p_i^{(k)} + \sum_1^n{}_i Y_i \frac{\partial x_i}{\partial u_k} = \theta_k \\ &\qquad\qquad (r,\ s,\ k=1,\ 2,\ldots,\ n-1). \\ &\sum_1^n{}_i \frac{\partial x_i}{\partial u_r} p_i^{(s)} + \sum_1^n{}_i \frac{\partial x_i}{\partial u_s} p_i^{(r)} = \mu_{rs} \\ &\sum_1^n{}_i X_i Y_i = T \end{aligned}\right\} \tag{7}^*$$

Da queste, usando le (2), le (3)* e le (5), si deduce che le funzioni θ, μ, T debbono soddisfare al seguente sistema di equazioni ai differenziali totali, omogenee:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \theta_k}{\partial u_s} = -\sum_{\lambda,\mu}^{1\ldots n-1} A_{\lambda\mu}\, \Omega_{\mu s}\, \mu_{\lambda k} + \sum_l^{1\ldots n-1} \left\{ {k\ s \atop l} \right\} \theta_l + 2\, \Omega_{ks}\, T \\ &\frac{\partial \mu_{rs}}{\partial u_t} = \sum_1^{n-1}{}_k \left\{ {r\ t \atop k} \right\} \mu_{ks} + \sum_1^{n-1}{}_k \left\{ {s\ t \atop k} \right\} \mu_{rk} + \Omega_{rt}\, \theta_s + \Omega_{st}\, \theta_r \\ &\qquad \frac{\partial T}{\partial u_s} = -\sum_{\lambda,\mu}^{1\ldots n-1} A_{\lambda\mu}\, \Omega_{\mu s}\, \theta_\lambda . \end{aligned}\right\} \tag{5}^*$$

Ora formando per il sistema (5) le condizioni di integrabilità, tenendo conto delle (2) e delle (5) stesse, si trova che esse sono identicamente soddisfatte in virtù delle (3), e delle equazioni di Gauss e Codazzi per la V_{n-1}. Tenendo conto di quest'ultime è facile verificare anche l'illimitata integrabilità del sistema (5)*. Di qui e dalla omogeneità del sistema (5)* risulta che basterà scegliere le funzioni (6) integrali del sistema (5) in modo da soddisfare alle (7) in un punto iniziale $P \equiv (u_i^{(0)})$ di V_{n-1}, per essere certi che esse lo saranno identicamente.

Determinate in tal modo le (6), il che è sempre possibile (*), le formole:

$$d\,y_k = \sum_1^{n-1}{}_i\, p_k^{(i)}\, d\,u_i \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

ci definiranno n funzioni y alle quali corrisponderà una deformazione infinitesima della V_{n-1}, poichè esse verificheranno le (1). Per tale deformazione sussisteranno le (a), e, come ora dimostreremo, anche le (b). Infatti supponiamo che si abbia:

$$\delta\, X_i = \varepsilon\, Y'_i\,.$$

Le (4) che si possono considerare come costituenti un sistema di n equazioni lineari nelle n quantità Y_i, il cui determinante è diverso da zero, dovranno essere soddisfatte oltre che dalle Y_i anche dalle Y'_i; si avrà perciò:

$$Y'_i = Y_i\,,$$

ossia sussisteranno le prime (b).

Moltiplicando poi le prime (2) per Y_i, e sommando rispetto ad i da 1 ad n, e aggiungendo a questa relazione quella che si ottiene moltiplicando le prime (2)* per X_i, e sommando pure rispetto ad i da 1 ad n, si trova, col tener conto delle (4), che:

$$\sum_1^n{}_i\, Y_i\, \frac{\partial^2 x_i}{\partial\, u_r\, \partial\, u_s} + \sum_1^n{}_i\, X_i\, \frac{\partial^2 y_i}{\partial\, u_r\, \partial\, u_s} = \Gamma_{rs}\,,$$

le quali provano che sussistono le seconde (b).

Se ora indichiamo con:

$$y_i^{(1)}, \quad Y_i^{(1)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(*) Posto infatti nelle (7) $u_i = u_i^{(0)}$, esse si riducono ad $\frac{n\,(n-1)}{2} + n$ equazioni lineari, omogenee nelle n^2 incognite $(p_i^{(s)})_0$, $(Y_i)_0$ valori iniziali delle (6); essendo: $n^2 > \frac{n\,(n-1)}{2} + n$, ad esse si potrà dunque soddisfare sempre, e in infiniti modi.

un altro sistema di integrali delle (2)* corrispondente ad altre condizioni iniziali, e poniamo:

$$\left.\begin{aligned} y_k^{(1)} - y_k &= y_k^{(0)} \\ Y_k^{(1)} - Y_k &= Y_k^{(0)} \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \right\} \tag{8}$$

vediamo che le $y_k^{(0)}$, $Y_k^{(0)}$ debbono soddisfare alle (2)* stesse nelle quali si suppongano tutte le Γ nulle.

Ora è facile persuadersi che la deformazione infinitesima di V_{n-1} corrispondente alle funzioni $y_k^{(0)}$, $Y_k^{(0)}$ si riduce ad un movimento infinitesimo, poichè per essa le variazioni corrispondenti dei coefficienti Ω_{rs} della seconda forma fondamentale di V_{n-1} sono tutte nulle.

Dalle prime (8) segue che la deformazione infinitesima corrispondente alle funzioni $y_k^{(1)}$ si ottiene sommando, nel senso cinematico, la deformazione infinitesima fissa corrispondente alle funzioni y_k, col movimento infinitesimo corrispondente alle funzioni $y_k^{(0)}$.

Si ha perciò che:

Noto un sistema di funzioni Γ non tutte nulle soddisfacenti alle (3), *ne rimane individuata, a meno di un movimento infinitesimo, una corrispondente deformazione infinitesima della V_{n-1}.*

§ 3.° *Condizioni necessarie per la deformabilità.* — Faremo ora vedere che per $n > 3$ una V_{n-1} generale di S_n non ammette deformazioni infinitesime, e perciò dimostreremo che:

Condizione necessaria affinchè una V_{n-1} di S_n ammetta deformazioni infinitesime, ossia affinchè le (3) *si possano soddisfare con valori non tutti nulli delle Γ, è che tutti i minori di terz'ordine del determinante $|\Omega|$ delle Ω_{rs} sieno nulli.*

Infatti, nell'ipotesi contraria, non saranno nemmeno tutti nulli i minori di secondo ordine di Ω, e noi potremo sempre supporre che sia:

$$\begin{vmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{9}$$

Per un noto teorema di Kronecker, potremo poi fare in modo, cambiando ove occorra gli indici, che fra i minori di terzo ordine non nulli di $|\Omega$ vi sia quello principale, avendosi quindi:

$$A = \begin{vmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & \Omega_{32} & \Omega_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Indichiamo con ω_{rs} il complemento algebrico di Ω_{rs} nel determinante A.

Consideriamo una deformazione infinitesima della V_{n-1}, indicando al solito con δ le variazioni corrispondenti dei vari elementi della V_{n-1} stessa. In causa delle equazioni di Gauss avremo:

$$\delta\,\omega_{rs} = 0 \qquad (r,\ s = 1,\ 2,\ 3).$$

Essendo poi il determinante delle ω_{rs} eguale ad A^2, così queste ultime ci dicono che sarà:

$$\delta\,A = 0.$$

Ciò posto, variando le tre relazioni:

$$\begin{aligned} \Omega_{11}\,\omega_{11} + \Omega_{12}\,\omega_{12} + \Omega_{13}\,\omega_{13} &= A \\ \Omega_{11}\,\omega_{21} + \Omega_{12}\,\omega_{22} + \Omega_{13}\,\omega_{23} &= 0 \\ \Omega_{11}\,\omega_{31} + \Omega_{12}\,\omega_{32} + \Omega_{13}\,\omega_{33} &= 0, \end{aligned}$$

troveremo che:

$$\omega_{r1}\,\Gamma_{11} + \omega_{r2}\,\Gamma_{12} + \omega_{r3}\,\Gamma_{13} = 0 \qquad (r = 1,\ 2,\ 3),$$

dalle quali si deduce, essendo il determinante delle ω diverso da zero, che:

$$\Gamma_{11} = \Gamma_{12} = \Gamma_{13} = 0. \tag{10}$$

Variando le equazioni di Gauss, dedurremo in particolare queste:

$$\left.\begin{aligned} \delta\,(\Omega_{11}\,\Omega_{r2} - \Omega_{r1}\,\Omega_{12}) &= 0 \\ \delta\,(\Omega_{21}\,\Omega_{r2} - \Omega_{22}\,\Omega_{r1}) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (r = 3,\ 4, \ldots,\ n-1)$$

le quali, a causa delle (10), ci dànno:

$$\begin{aligned} \Omega_{11}\,\Gamma_{r2} - \Omega_{12}\,\Gamma_{r1} &= 0 \\ \Omega_{21}\,\Gamma_{r2} - \Omega_{22}\,\Gamma_{r1} &= 0. \end{aligned}$$

Quest'ultime ci dicono, osservando la (9), che:

$$\Gamma_{r1} = \Gamma_{r2} = 0 \qquad (r = 3,\ 4, \ldots,\ n - 1). \tag{10}^*$$

Infine le equazioni di Gauss ci dànno pure le altre:

$$\left.\begin{aligned} \delta\,(\Omega_{11}\,\Omega_{rs} - \Omega_{1s}\,\Omega_{r1}) &= 0 \\ \delta\,(\Omega_{12}\,\Omega_{rs} - \Omega_{1s}\,\Omega_{r2}) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (r,\ s = 3,\ 4, \ldots,\ n - 1),$$

che, usando le (10), (10)*, si riducono alle seguenti:

$$\Omega_{11}\,\Gamma_{rs} = 0, \quad \Omega_{12}\,\Gamma_{rs} = 0;$$

dalle quali si trae, non potendo essere nulli insieme Ω_{11}, Ω_{12}, a causa della (9), che:

$$\Gamma_{rs} = 0 \qquad (r,\ s = 3,\ 4, \ldots,\ n - 1).$$

Da queste e dalle (10), (10)* segue che, nell'ipotesi fatta, le Γ relative alla supposta deformazione infinitesima sono tutte nulle, e che quindi essa si riduce ad un movimento infinitesimo.

§ 4.° *Altra condizione necessaria per la deformabilità.* — La condizione per la deformabilità di una V_{n-1}, stabilita nel § 3.°, ci dice ((M) § 4.°) (*) che gli iperpiani tangenti alla V_{n-1} stessa debbono costituire o un sistema ∞^1, o un sistema ∞^2.

Nel primo caso la V_{n-1} è il luogo di ∞^1 S_{n-2} nei punti di ciascuno dei quali è toccata dallo stesso S_{n-1}. Supponendo che gli S_{n-2} detti sieno le varietà $u_1 =$ costante, le coordinate x_i di un punto P di V_{n-1} potranno così esprimersi in funzione delle u:

$$x_i = x_i^{(0)} + \sum_{1}^{n-2}{}_k\, u_{k+1}\, \xi_i^{(k)},$$

nelle quali le $x^{(0)}$, ξ sono funzioni della sola u_1.

Le X_i risulteranno poi funzioni della sola u_1, e quindi tutte le Ω saranno nulle, all'infuori di Ω_{11}.

Ciò posto, dalle prime (2) scritte per la nostra V_{n-1} dedurremo le se-

(*) Le citazioni come questa sono relative alla mia Memoria richiamata in principio.

guenti:

$$\sum_1^{n-1}{}_l \left\{ \begin{matrix} r\ s \\ l \end{matrix} \right\} \frac{\partial x_i}{\partial u_l} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ r, s = 2, 3, \ldots, n-1).$$

Queste, fissati r ed s, costituiscono un sistema di n equazioni nelle $n-1$ quantità $\left\{ \begin{matrix} r\ s \\ l \end{matrix} \right\}$, la matrice dei cui coefficienti ha per caratteristica $n-1$; ci dànno quindi:

$$\left\{ \begin{matrix} r\ s \\ l \end{matrix} \right\} = 0 \qquad (r, s = 2, 3, \ldots, n-1;\ l = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{c}$$

Le equazioni di GAUSS si ridurranno a queste:

$$(r s, k t) = 0 \qquad (r, s, k, t = 1, 2, \ldots, n-1)$$

dalle quali seguiranno le altre:

$$\{ r s, k t \} = 0. \tag{d}$$

Se ora si considera una deformazione infinitesima della V_{n-1}, e si scrivono le prime (3), si vede che tutte le Γ debbono essere nulle, all'infuori di Γ_{11} che deve, in causa delle seconde (3), soddisfare alle seguenti:

$$\frac{\partial \log \Gamma_{11}}{\partial u_\gamma} = \left\{ \begin{matrix} 1\ \gamma \\ 1 \end{matrix} \right\} \qquad (\gamma = 2, 3, \ldots, n-1). \tag{e}$$

Dalle (d) si deducono, usando le (c), queste:

$$\{ 1\,1, i h \} = \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} 1\ i \\ 1 \end{matrix} \right\}}{\partial u_h} - \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} 1\ h \\ 1 \end{matrix} \right\}}{\partial u_i} = 0 \qquad (i, h = 2, 3, \ldots, n-1)$$

le quali ci dicono che le (e) sono integrabili. — Integrando le (e), si trova:

$$\Gamma_{11} = \Phi(u_1) \,.\, e^{\int \sum_2^{n-1}{}_k \left\{ \begin{matrix} 1\ k \\ 1 \end{matrix} \right\} d u_k}$$

nella quale $\Phi(u_1)$ indica una funzione arbitraria di u_1.

A causa del § 2.° possiamo dunque dire che: *Una V_{n-1} di S_n inviluppo di ∞^1 iperpiani ammette deformazioni infinitesime dipendenti da una funzione arbitraria.*

Nel secondo caso la V_{n-1} è il luogo di ∞^2 S_{n-3} nei punti di ciascuno dei quali è toccata dallo stesso S_{n-1}. Scegliendo su V_{n-1} le linee coordinate in modo che le varietà $u_1 =$ costante, $u_2 =$ costante sieno questi S_{n-3}, si avrà che le X_i risulteranno funzioni delle sole u_1, u_2, e che quindi tutte le Ω saranno nulle, all'infuori di Ω_{11}, Ω_{12}, Ω_{22}. Alcune delle equazioni di Codazzi scritte per la nostra V_{n-1} si riducono a queste:

$$\left(\begin{Bmatrix} \alpha\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix}\right)\Omega_{12} + \begin{Bmatrix} \alpha\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix}\Omega_{22} - \begin{Bmatrix} \alpha\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}\Omega_{11} = 0 \quad (\alpha = 3, 4, \ldots, n-1), \qquad (f)$$

e quelle di Gauss alle altre:

$$\left.\begin{aligned} &(\alpha\,\delta,\ \beta\,\gamma) = 0 \\ &(12,\ 12) = \Omega_{11}\,\Omega_{22} - \Omega_{12}^2 \end{aligned}\right\} \qquad (f)^*$$

le quali ci dicono che tutti i simboli a quattro indici sono nulli, all'infuori di (12, 12).

Consideriamo ora una deformazione infinitesima della nostra V_{n-1}. Scrivendo le prime (3), si vede che tutte le Γ debbono essere nulle all'infuori di Γ_{11}, Γ_{12}, Γ_{22}. Infatti fra le (3) vi sono queste:

$$\Gamma_{\alpha\beta}\,\Omega_{11} = 0, \quad \Gamma_{\alpha\beta}\,\Omega_{12} = 0 \qquad (\alpha,\ \beta = 3, 4, \ldots, n-1),$$

dalle quali, non potendo essere contemporaneamente nulli Ω_{11}, Ω_{12}, perchè altrimenti ((M) § 4.°) la V_{n-1} sarebbe inviluppo non di ∞^2, ma di ∞^1 iperpiani, il che noi escludiamo, seguono le altre:

$$\Gamma_{\alpha\beta} = 0 \qquad (\alpha,\ \beta = 3, 4, \ldots, n-1).$$

Le (3) stesse ci dànno poi le seguenti:

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma_{1\beta}\,\Omega_{21} - \Gamma_{2\beta}\,\Omega_{11} = 0 \\ &\Gamma_{1\beta}\,\Omega_{22} - \Gamma_{2\beta}\,\Omega_{21} = 0 \end{aligned}\right. \qquad (\beta = 3, 4, \ldots, n-1),$$

che ci dicono dover essere:

$$\Gamma_{1\beta} = \Gamma_{2\beta} = 0 \qquad (\beta = 3, 4, \ldots, n-1),$$

poichè il determinante $\Omega_{11}\,\Omega_{22} - \Omega_{12}^2$ non può essere nullo, altrimenti, come sopra, la V_{n-1} avrebbe ∞^1 iperpiani tangenti.

Vogliamo ora far vedere che affinchè V_{n-1} ammetta deformazioni infinitesime è necessario che la matrice:

$$\left\| \begin{Bmatrix} \alpha\, 1 \\ 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha\, 2 \\ 2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \alpha\, 1 \\ 2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \alpha\, 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \right\| \qquad (\alpha = 3, 4, \ldots, n-1) \tag{g}$$

abbia per caratteristica 1.

Infatti le seconde (3) ci forniscono, fra le altre, le seguenti:

$$\left(\begin{Bmatrix} \alpha\, 1 \\ 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha\, 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \right) \Gamma_{12} + \begin{Bmatrix} \alpha\, 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \Gamma_{22} - \begin{Bmatrix} \alpha\, 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \Gamma_{11} = 0 \quad (\alpha = 3, 4, \ldots, n-1), \tag{$g*$

le quali ci dicono che la caratteristica della (g) non può intanto essere, per $n > 4$, tre; nell'ipotesi contraria da esse risulterebbe infatti essere nulle Γ_{11}, Γ_{12}, Γ_{22}; e quindi sarebbero nulle tutte le Γ relative alla supposta deformazione infinitesima, che si ridurrebbe perciò ad un movimento infinitesimo.

La caratteristica della (g) non può poi in nessun caso essere due, poichè altrimenti delle (g)* ve ne sarebbero due indipendenti che scriviamo così:

$$\left. \begin{aligned} \left(\begin{Bmatrix} \alpha_1\, 1 \\ 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha_1\, 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \right) \Gamma_{12} + \begin{Bmatrix} \alpha_1\, 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \Gamma_{22} - \begin{Bmatrix} \alpha_1\, 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \Gamma_{11} = 0 \\ \left(\begin{Bmatrix} \alpha_2\, 1 \\ 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha_2\, 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \right) \Gamma_{12} + \begin{Bmatrix} \alpha_2\, 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \Gamma_{22} - \begin{Bmatrix} \alpha_2\, 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \Gamma_{11} = 0. \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

Considerando allora insieme a queste l'equazione:

$$2\, \Omega_{12} \Gamma_{12} - \Omega_{11} \Gamma_{22} - \Omega_{22} \Gamma_{11} = 0, \tag{12}$$

che è una delle prime (3), se ne dedurrebbe dovere essere nulle le Γ, e quindi V_{n-1} indeformabile, poichè le tre equazioni lineari (11), (12) hanno un determinante diverso da zero.

Di quest'ultima cosa ci si convince osservando che, in causa delle (f), le (11) sono soddisfatte anche quando in luogo di Γ_{11}, Γ_{12}, Γ_{22} si pone Ω_{11}, Ω_{12}, Ω_{22}; da ciò segue infatti che il determinante detto è proporzionale ad $\Omega_{11} \Omega_{22} - \Omega_{12}^2$, ed è quindi diverso da zero.

Come abbiamo dunque asserito, la (g) deve avere per caratteristica 1.

§ 5.° *Superficie immagine della* V_{n-1}. — L'immagine di Gauss della V_{n-1} è nell'ipersfera fondamentale, ossia nello spazio ellittico ad $n-1$ dimensioni I_{n-1}, una superficie $\sum_2$. Le coordinate di Weierstrass di un punto P di $\sum_2$ sono $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Indicheremo i coseni direttori di $n-3$ rette normali a $\sum_2$ in P, e fra di loro a due, a due rispettivamente con:

$$\xi_i^{(1)},\quad \xi_i^{(2)},\ldots,\quad \xi_i^{(n-3)} \qquad (i=1,\,2,\ldots,\,n),$$

onde sussisteranno le relazioni:

$$\left.\begin{array}{ll} & \sum_1^n{}_i\, \xi_i^{(l)}\,\xi_i^{(m)} = \varepsilon_{lm} \\ \sum_1^n{}_i\, X_i\,\xi_i^{(l)} = 0 & \\ & (l,\,m=1,\,2,\ldots,\,n-3), \\ \sum_1^n{}_i\, \xi_i^{(l)}\dfrac{\partial X_i}{\partial u_1} = \sum_1^n{}_i\, \xi_i^{(l)}\dfrac{\partial X_i}{\partial u_2} = 0 & \end{array}\right\} \tag{13}$$

avendo indicato con ε_{lm} l'unità se $l=m$, lo zero se $l \neq m$.

Facciamo le posizioni:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_1^n{}_i\, \dfrac{\partial X_i}{\partial u_r}\,\dfrac{\partial X_i}{\partial u_s} = E_{rs} \\ \sum_1^n{}_i\, \xi_i^{(\mu)}\,\dfrac{\partial^2 X_i}{\partial u_r\,\partial u_s} = \Omega_{rs}^{(\mu)} \end{array}\right. \qquad (r,\,s=1,\,2;\ \mu=1,\,2,\ldots,\,n-3).$$

Si sa allora ((M) § 6.°) che sussistono le seguenti:

$$\frac{\partial^2 X_i}{\partial u_r\,\partial u_s} = \left\{ {r\,s \atop 1} \right\}' \frac{\partial X_i}{\partial u_1} + \left\{ {r\,s \atop 2} \right\}' \frac{\partial X_i}{\partial u_2} + \sum_1^{n-3}{}_\mu\, \xi_i^{(\mu)}\,\Omega_{rs}^{(\mu)} - E_{rs}\,X_i \quad (r,\,s=1,\,2) \tag{14}$$

nelle quali gli apici stanno a indicare che i simboli a tre indici sono calcolati rispetto all'elemento lineare di $\sum_2$ che è:

$$E_{11}\,d\,u_1^2 + 2\,E_{12}\,d\,u_1\,d\,u_2 + E_{22}\,d\,u_2^2\,.$$

Le coordinate x_i di un punto $N \equiv (u_i)$ di V_{n-1} si sa ((M) § 5.°) poi che sono date da queste:

$$x_i = x_i^{(0)} + \sum_1^{n-3}{}_h\, u_{h+2}\,\xi_i^{(h)}, \tag{14)*$$

e i coefficienti Ω dalle altre:

$$\Omega_{rs} = k_{rs} + \sum_1^{n-3}{}_h\, u_{h+2}\,\Omega_{rs}^{(h)} \qquad (r,\,s=1,\,2),$$

nelle quali le $x_i^{(0)}$ e le k_{rs} sono funzioni delle sole u_1, u_2. Da quanto abbiamo nel § 4.° dimostrato a proposito della matrice (g) segue ((M) § 11.°) che $\sum_2$ è una superficie di quelle sulle quali esistono sistemi coniugati. Si sa di più ((M) § 12.°) che si può sempre riferire ad uno di essi in modo che corrispondentemente risulti:

$$\Omega_{12}^{(s)} = \Omega_{12} = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n-3).$$

Allora le equazioni di Codazzi ci dànno queste:

$$\left\{ \begin{matrix} 1\,\alpha \\ 2 \end{matrix} \right\} \Omega_{22} = \left\{ \begin{matrix} 2\,\alpha \\ 1 \end{matrix} \right\} \Omega_{11} = 0 \qquad (\alpha = 3, 4, \ldots, n-1),$$

dalle quali segue, essendo Ω_{11}, Ω_{22} diversi da zero, che:

$$\left\{ \begin{matrix} 1\,\alpha \\ 2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2\,\alpha \\ 1 \end{matrix} \right\} = 0 \qquad (\alpha = 3, 4, \ldots, n-1). \tag{15}$$

Le $(g)^*$ si riducono alle seguenti:

$$\left(\left\{ \begin{matrix} 1\,\alpha \\ 1 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 2\,\alpha \\ 2 \end{matrix} \right\} \right) \Gamma_{12} = 0 \qquad (\alpha = 3, 4, \ldots, n-1);$$

dalle quali segue, se non si hanno contemporaneamente le relazioni:

$$\left\{ \begin{matrix} 1\,\alpha \\ 1 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 2\,\alpha \\ 2 \end{matrix} \right\} = 0 \qquad (\alpha = 3, 4, \ldots, n-1), \tag{16}$$

che:

$$\Gamma_{12} = 0.$$

Se poi sussistono le (16), allora si dimostra ((M) § 11.°) che si hanno le proporzioni:

$$k_{11} : \Omega_{11}^{(s)} = k_{12} : \Omega_{12}^{(s)} = k_{22} : \Omega_{22}^{(s)} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n-3); \tag{17}$$

$\sum_2$ in tal caso appartiene ad una varietà geodetica I_3 a tre dimensioni di I_{n-1} ((M) § 8.°).

Facciamo ora un'osservazione relativa al caso generale.

Dalle prime $(2)^*$ risulta che, essendo (*):

$$\Omega_{rs} = \Gamma_{rs} = \left\{ \begin{matrix} r\,s \\ k \end{matrix} \right\} = 0 \qquad (r, s = 3, 4, \ldots, n-1;\ k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

(*) Per le formole $\left\{ \begin{matrix} r\,s \\ k \end{matrix} \right\} = 0$ cfr. ((M) § 9.°).

si avrà:

$$\frac{\partial^2 y_i}{\partial u_r \, \partial u_s} = 0.$$

Le y_i saranno perciò delle funzioni lineari di $u_3, u_4, \ldots, u_{n-1}$.

Dalle seconde (2)* risulta poi che:

$$\frac{\partial Y_i}{\partial u_t} = 0 \qquad (t = 3, 4, \ldots, n-1),$$

ossia che le Y_i sono funzioni delle sole u_1, u_2.

Ciò posto è chiaro che avendosi:

$$\Gamma_{rs} = \sum_1^n {}_i \frac{\partial y_i}{\partial u_r} \frac{\partial X_i}{\partial u_s} + \sum_1^n {}_i \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \frac{\partial Y_i}{\partial u_s} \qquad (r, s = 1, 2),$$

e avendosi le (14)*, ne dedurremo che le Γ_{rs} dovranno essere funzioni lineari di $u_3, u_4, \ldots, u_{n-1}$, ossia che si dovranno avere formule del tipo:

$$\Gamma_{rs} = K_{rs} + u_3 \Gamma^{(1)}_{rs} + \cdots + u_{n-1} \Gamma^{(n-3)}_{rs} \qquad (r, s = 1, 2) \tag{h}$$

nelle quali le K, $\Gamma^{(t)}$ sono funzioni delle sole u_1, u_2.

Ritornando ora al caso particolare in cui sono soddisfatte le (16), ed esaminando le seconde (3), si vede che fra di esse vi sono le seguenti:

$$\frac{\partial \Gamma_{11}}{\partial u_\gamma} = \left\{ \begin{matrix} 1\ \gamma \\ 1 \end{matrix} \right\} \Gamma_{11}, \qquad \frac{\partial \Gamma_{22}}{\partial u_\gamma} = \left\{ \begin{matrix} 2\ \gamma \\ 2 \end{matrix} \right\} \Gamma_{22}$$

$$\frac{\partial \Gamma_{12}}{\partial u_\gamma} = \left\{ \begin{matrix} 1\ \gamma \\ 1 \end{matrix} \right\} \Gamma_{21} = \left\{ \begin{matrix} 2\ \gamma \\ 2 \end{matrix} \right\} \Gamma_{12} \qquad (\gamma = 3, 4, \ldots, n-1).$$

Da queste si deduce che, posto:

$$\frac{\Gamma_{11}}{\Gamma_{12}} = L, \quad \frac{\Gamma_{12}}{\Gamma_{22}} = M, \quad \frac{\Gamma_{11}}{\Gamma_{22}} = N, \tag{$h*$

L, M, N sono funzioni delle sole u_1, u_2, poichè sono nulle le loro derivate rispetto ad $u_3, u_4, \ldots, u_{n-1}$.

Ponendo nelle (h)* i valori (h) delle Γ, si trovano queste:

$$K_{11} : \Gamma^{(r)}_{11} = K_{12} : \Gamma^{(r)}_{12} = K_{22} : \Gamma^{(r)}_{22} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-3) \tag{17}^*$$

analoghe alle (17).

Dalle (17), (17)* si deduce che, prendendo per coordinate u_1, u_2 su V_{n-1} quelle che riducono a forma ortogonale le due forme differenziali simultanee:

$$\Omega^{(1)}_{11}\, d\, u_1^2 + 2\, \Omega^{(1)}_{12}\, d\, u_1\, d\, u_2 + \Omega^{(1)}_{22}\, d\, u_2^2$$
$$\Gamma^{(1)}_{11}\, d\, u_1^2 + 2\, \Gamma^{(1)}_{12}\, d\, u_1\, d\, u_2 + \Gamma^{(1)}_{22}\, d\, u_2^2,$$

si avrà ancora, come nel caso generale:

$$\Omega_{12} = \Gamma_{12} = 0. \tag{18}$$

§ 6.° *Condizione sufficiente per la deformabilità.* — Riferitici a quelle linee $u_1\, u_2$ della $\sum_2$ per le quali risultano soddisfatte le (18), avremo che le prime (3) si ridurranno all'unica:

$$\Omega_{11}\, \Gamma_{22} + \Omega_{22}\, \Gamma_{11} = 0; \tag{19}$$

mentre le seconde (3) daranno luogo a quelle dei seguenti due gruppi:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\, \Gamma_{11}}{\partial\, u_2} + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix} \Gamma_{22} - \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} \Gamma_{11} = 0 \\ &\frac{\partial\, \Gamma_{22}}{\partial\, u_1} + \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} \Gamma_{11} - \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} \Gamma_{22} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

$$\frac{\partial\, \Gamma_{11}}{\partial\, u_\gamma} = \begin{Bmatrix} 1\,\gamma \\ 1 \end{Bmatrix} \Gamma_{11}, \quad \frac{\partial\, \Gamma_{22}}{\partial\, u_\gamma} = \begin{Bmatrix} 2\,\gamma \\ 2 \end{Bmatrix} \Gamma_{22} \qquad (\gamma = 3, 4, \ldots, n-1), \tag{21}$$

le rimanenti (3) risultando identicamente soddisfatte quando, per alcune di esse, si osservino anche le (15) e le altre:

$$\begin{Bmatrix} r\; s \\ h \end{Bmatrix} = 0 \qquad (r, s = 3, 4, \ldots, n-1;\; h = 1, 2, \ldots, n-1)$$

già notate.

Ormai la questione di trovare la condizione affinchè la nostra V_{n-1} ammetta deformazioni infinitesime è ridotta a quella di trovare le condizioni di integrabilità per il sistema misto ai differenziali totali, per le funzioni incognite Γ_{11}, Γ_{22}, costituito dalle (19), (20), (21).

Dalla (19) si deduce che, posto:

$$\Gamma_{11} = \lambda\, \Omega_{11}, \tag{22}$$

con λ funzione ausiliaria delle u, si deve avere:

$$\Gamma_{22} = -\lambda\, \Omega_{22}. \tag{22)*}$$

Si tratta di determinare λ in modo da soddisfare alle (20), (21).

Intanto, sostituendo nelle (21) i valori (22), (22)* di Γ_{11}, Γ_{22}, col tener conto delle equazioni di Codazzi, si trova:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u_\gamma} = 0 \qquad (\gamma = 3, 4, \ldots, n-1),$$

le quali ci dicono che λ deve essere funzione delle sole u_1, u_2.

Facendo poi la stessa sostituzione nelle (20), col tener conto delle seguenti:

$$\frac{\partial \Omega_{11}}{\partial u_2} + \left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 2 \end{matrix} \right\} \Omega_{22} - \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \Omega_{11} = 0$$

$$\frac{\partial \Omega_{22}}{\partial u_1} + \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \Omega_{11} - \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} \Omega_{22} = 0$$

che non sono altro che due delle equazioni di Codazzi per V_{n-1}, si deducono le altre:

$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial u_1} = 2 \frac{\left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \Omega_{11}}{\Omega_{22}}$$

$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial u_2} = 2 \frac{\left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 2 \end{matrix} \right\} \Omega_{22}}{\Omega_{11}}.$$

Quest'ultime, tenendo conto delle relazioni:

$$\frac{\left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \Omega_{11}}{\Omega_{22}} = - \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\}', \qquad \frac{\left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 2 \end{matrix} \right\} \Omega_{22}}{\Omega_{11}} = - \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\}',$$

nelle quali gli apici ai simboli dei secondi membri indicano, come si è già stabilito, che essi sono calcolati rispetto all'elemento lineare di $\sum_2$, si riducono alle seguenti:

$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial u_1} = -2 \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\}', \qquad \frac{\partial \log \lambda}{\partial u_2} = -2 \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\}'. \tag{23}$$

La condizione di integrabilità per le (23) è:

$$\frac{\partial \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\}'}{\partial u_2} = \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\}'}{\partial u_1}. \tag{24}$$

Inversamente, supposta soddisfatta quest'ultima, le (23) ci dànno:

$$\lambda = c \, . \, e^{-\int 2\left(\left\{ {12 \atop 2} \right\}' d u_1 + \left\{ {12 \atop 1} \right\}' d u_2\right)}, \tag{24)*}$$

con c costante arbitraria.

Prendendo poi per Γ_{11}, Γ_{22} i valori (22), (22)* nei quali si ponga per λ valore (24)*, e prendendo tutte le altre Γ eguali a zero, si ottiene un sistema di soluzioni delle (3), determinato a meno della costante moltiplicativa c, al quale corrisponde, secondo il § 2.°, una deformazione infinitesima della V_{n-1}. La (24) ci dà dunque la cercata condizione definitiva per la deformabilità della nostra V_{n-1}.

§ 7.° *L'equazione di* Laplace *per la* Σ_2 *immagine.* — Poichè per la Σ_2 immagine di V_{n-1} si ha:

$$\Omega_{12}^{(k)} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-3),$$

così le (14) ci dicono che le coordinate X_i di un suo punto debbono essere integrali dell'equazione di Laplace:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_1 \, \partial u_2} - \left\{ {1 \; 2 \atop 1} \right\}' \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} - \left\{ {1 \; 2 \atop 2} \right\}' \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} + E_{12} \, \Phi = 0 \tag{25}$$

la quale, a causa della (24), è ad invarianti eguali.

Inversamente, se si ha un'equazione di Laplace:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_1 \, \partial u_2} + a \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} + b \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} + c \, \Phi = 0 \tag{26}$$

ad invarianti eguali, ossia per la quale si ha:

$$\frac{\partial a}{\partial u_1} = \frac{\partial b}{\partial u_2},$$

che ammette n integrali $X_1, X_2, \ldots, X_n$ legati dalla relazione:

$$\sum_1^n {}_i X_i^2 = 1, \tag{26)*}$$

e si interpretano le X_i come coordinate di un punto P dell'I_{n-1} ellittico, P, al variare di u_1, u_2, descrive una superficie $\sum_2$ che vogliamo far vedere essere immagine di V_{n-1} con deformazioni infinitesime.

Infatti scriviamo le n relazioni:

$$\frac{\partial^2 X_i}{\partial u_1 \, \partial u_2} + a \frac{\partial X_i}{\partial u_1} + b \frac{\partial X_i}{\partial u_2} + c X_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

e paragoniamole con le altre:

$$\frac{\partial^2 X_i}{\partial u_1 \, \partial u_2} = \left\{ \begin{matrix} 1 \; 2 \\ 1 \end{matrix} \right\}' \frac{\partial X_i}{\partial u_1} + \left\{ \begin{matrix} 1 \; 2 \\ 2 \end{matrix} \right\}' \frac{\partial X_i}{\partial u_2} + \sum_{1}^{n-3}{}_{\mu} \, \xi_i^{(\mu)} \, \Omega_{12}^{(\mu)} - E_{12} X_i$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

scelte fra le (14) scritte per la $\sum_2$ ora detta. Si ottengono così le seguenti:

$$\left(\left\{ \begin{matrix} 1 \; 2 \\ 1 \end{matrix} \right\}' + a \right) \frac{\partial X_i}{\partial u_1} + \left(\left\{ \begin{matrix} 1 \; 2 \\ 2 \end{matrix} \right\}' + b \right) \frac{\partial X_i}{\partial u_2} + \sum_{1}^{n-3}{}_{\mu} \, \xi_i^{(\mu)} \, \Omega_{12}^{(\mu)} - (E_{12} - c) X_i = 0$$

che, per essere il determinante:

$$\left| \frac{\partial X_i}{\partial u_1}, \; \frac{\partial X_i}{\partial u_2}, \; \xi_i^{(1)}, \; \xi_i^{(2)}, \ldots, \; \xi_i^{(n-3)}, \; X_i \right| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

diverso da zero, ci dànno:

$$a = - \left\{ \begin{matrix} 1 \; 2 \\ 1 \end{matrix} \right\}', \; b = - \left\{ \begin{matrix} 1 \; 2 \\ 2 \end{matrix} \right\}', \; E_{12} = c, \; \Omega_{12}^{(\mu)} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n-3).$$

Queste provano che le linee u_1, u_2 formano su $\sum_2$ un sistema coniugato, e che l'equazione (25) relativa ad esso è identica alla (26), quindi è ad invarianti eguali, essendo soddisfatta la (24).

Ora le coordinate x_ν di un punto P della più generale V_{n-1} inviluppo di ∞^2 iperpiani, di cui la $\sum_2$ considerata è l'immagine nell'I_{n-1} ellittico, sono date ((M) § 16.°), in funzione delle u_i, dalle seguenti:

$$x_\nu = W X_\nu + \nabla' (W, X_\nu) + \sum_{1}^{n-3}{}_{i} \, u_{i+2} \, \xi_\nu^{(i)} \tag{27}$$

nelle quali W è una funzione arbitraria di u_1, u_2, e il parametro differenziale misto deve essere calcolato rispetto all'elemento lineare di $\sum_2$.

Affinchè poi una di tali V_{n-1} sia deformabile basterà che per essa si abbia:

$$\Omega_{12} = 0,$$

come risulta dai §§ 5.°, 6.°. Quest'ultima relazione si scrive ((M) § 16.°) così:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u_1 \partial u_2} - \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\}' \frac{\partial W}{\partial u_1} - \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\}' \frac{\partial W}{\partial u_2} + E_{12} W - 0;$$

perciò, ponendo nelle (27), in luogo di W, un integrale della (25), si otterrà una V_{n-1} deformabile di cui $\sum_2$ è l'immagine.

Riepilogando vediamo che:

La ricerca delle V_{n-1} di S_n che ammettono deformazioni infinitesime equivale a quella delle equazioni di Laplace (26), *ad invarianti eguali, che ammettono n integrali X_1, X_2,..., X_n legati dalla* (26)*, *e a quella dei loro integrali.*

Nota una di tali equazioni, il gruppo delle sue soluzioni X_i ci dà le coordinate di un punto mobile sur una superficie $\sum_2$ di I_{n-1}, sulla quale il sistema (u_1, u_2) è coniugato. Preso un integrale W della (26) *stessa, e sostituito nelle* (27), *queste ci dànno una V_{n-1}, avente $\sum_2$ per immagine, che ammette la deformazione infinitesima corrispondente al prendere tutte le Γ nulle, all'infuori di Γ_{11}, Γ_{22}, per le quali si devono prendere i valori* (22), (22)*, *λ essendo dato dalla* (24)*.

Osserviamo che in particolare se per la (26) si ha:

$$\frac{\partial a}{\partial u_1} = \frac{\partial b}{\partial u_2} = 2 v b,$$

allora una qualsiasi V_{n-1} corrispondente, oltre ad essere deformabile in modo infinitesimo, lo è in modo finito, appartenendo alla classe di quelle ((M) § 14.°) che ammettono una serie continua ∞^1 di deformate.

Notiamo infine che le proprietà geometriche trovate ((M) §§ 17.°, 18.°, 21.°) per una V_{n-1} di S_n deformabile in modo finito sono possedute anche da una V_{n-1} di S_n deformabile in modo infinitesimo. Pensando infatti alle dimostrazioni che di quelle proprietà si son date, si vede che esse poggiano tutte sopra questi due soli fatti:

1.° che una V_{n-1} di S_n deformabile in modo finito è inviluppo di ∞^2 iperpiani;

2.° che per tale V_{n-1} la matrice (g) ha la caratteristica eguale ad 1; ora, poichè questi due fatti si verificano anche per una V_{n-1} di S_n con deformazioni infinitesime, così risulta chiaro quanto si è sopra asserito.

Si avrà così che una V_3 di S_4 con deformazioni infinitesime sarà il luogo delle ∞^2 rette di una congruenza; che una V_4 di S_5 della specie detta sarà, in generale, il luogo degli ∞^2 piani tangenti ad una superficie, ecc.

Bra, 26 agosto 1908.