

ANNALI  
DI  
MATEMATICA  
PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

FRANCESCO BRIOSCHI

e continuati dai professori:

Luigi Bianchi in Pisa

Salvatore Pincherle in Bologna

Tullio Levi-Civita in Roma

Francesco Severi in Roma

SERIE QUARTA - TOMO II

(LIX DELLA RACCOLTA)

Fascicolo I - Novembre 1924



BOLOGNA

NICOLA ZANICHELLI

MCMXXIV

S O M M A R I O

G. LORIA: L'opera geometrica di Corrado Segre. . . . .	pag. 1
R. CALAPSO: Sulle congruenze cicliche . . . . .	» 23
A. KORN: Ueber die Lösung der zweiten Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie . . . . .	» 43
A. COMMESSATTI: Sulle varietà abeliane reali . . . . .	» 67

---

ANNALI DI MATEMATICA  
PURA ED APPLICATA

---

Avendo la ditta Turati Lombardi e C. di Milano rinunciato alla antica e benemerita collaborazione quale editrice del periodico, la pubblicazione è stata assunta dalla nostra Casa e si è iniziata col primo volume della IV Serie (LVIII della Raccolta).

---

Prezzo del volume I (Serie IV) di 320 pagine, diviso in quattro fascicoli  
ITALIA L. 50 - ESTERO Lire 80

---

Le memorie, tutte originali, sono opera di collaboratori italiani e stranieri; esse vengono stampate in lingua italiana, inglese, francese o tedesca.

La pubblicazione a tutt'oggi consta di tre serie:

I SERIE - pubblicata a Roma dal 1850 al 1866, constava di 15 volumi, completamente esauriti:

II SERIE - pubblicata a Milano dal 1867 al 1897, consta di 26 volumi. Della I. e II. Serie venne pubblicato nel 1904 l'Indice Generale. (Sono esauriti i volumi I, II, III, IV, XXII, XXIV, XXV, XXVI).

III SERIE - pubblicata a Milano dal 1898 al 1922 di 31 volumi, due dei quali (XX e XXI) dedicati alla memoria del matematico Lagrange, in occasione del centenario della sua morte nel 1913. (Sono esauriti i volumi I a XII).

Ogni volume si vende separatamente al prezzo di L. 40 - Estero Frs. 40.

Esiste qualche copia di fascicoli separati. A richiesta, l'Editore darà gli schiarimenti necessari.

Per la Redazione e per la parte scientifica, dirigersi ad uno dei componenti il Comitato di Direzione.

Per ogni fatto pertinente all'Amministrazione e per l'invio dei Cambi dirigersi esclusivamente a

NICOLA ZANICHELLI, EDITORE IN BOLOGNA

*(Vedi le Norme per gli Autori, nella terza pagina della copertina)*

# L'opera geometrica di Corrado Segre <sup>(1)</sup>

di GINO LORIA a Genova

---

Egli era, benchè di poco, più giovane di me: se, quindi, il corso degli eventi umani non fosse soggetto ed inatteso (e spesso dolorosissime!) perturbazioni, non a me sarebbe spettato il penoso compito di redigere il bilancio dei contributi da Lui dati alla scienza che per un quarantennio ci affratellò: era per me, anzi, un consolante pensiero quello che sino alla morte avrei trovato al mio fianco l'amico fedele con cui mi ero legato sui banchi dell'Università.

Ma in questo momento in cui, in seguito ad un onorevole invito rivoltomi dalla Direzione di questi gloriosi *Annali*, io debbo esaminare, sia pur brevemente, l'opera scientifica dell'indimenticabile geometra, sento l'imprescindibile dovere di trattenere le lacrime, comprimendo qualunque impulso del cuore, affinché in quanto sto per dire il lettore non sia trascinato a ravvisare elogi dettati dall'affetto, in luogo di semplici constatazioni di fatti ormai acquisiti dalla storia della scienza.

1. Nell'anno accademico 1881-82, quando il SEGRE era iscritto nel terzo anno di corso per la laurea in matematica, il professore ENRICO D'OVIDIO scelse come argomento delle sue lezioni di geometria superiore nell'Università

---

<sup>(1)</sup> Nato a Saluzzo ai 20 di agosto del 1863; laureato in matematica dalla Università di Torino il 1° luglio 1883. Durante l'anno 1883-84 fu in questo Ateneo assistente alla cattedra di algebra complementare e geometria analitica (prof. E. D'OVIDIO) e nel seguente prestò il prescritto servizio militare; nel triennio 1885-88 occupò il posto di assistente alla cattedra di geometria proiettiva e descrittiva (prof. G. BRUNO) facendo le lezioni della prima di tali materie. Morto F. FAÀ DI BRUNO, il D'OVIDIO passò dall'incarico della Geometria superiore a quello dell'Analisi superiore ed il SEGRE fu nominato (15 novembre 1888) per concorso professore straordinario di quella disciplina; quattro anni appresso venne promosso ordinario. Durante tre trienni, cioè dal 1909 al 1918 fu preside della Facoltà di Scienze della Università di Torino; nel biennio 1895-97 ebbe anche l'incarico dell'insegnamento della fisica matematica e dal 1918 al 1922 quello delle conferenze di magistero in matematica. Un morbo repentino ed inesorabile lo spense addì 18 maggio 1924.

di Torino, la geometria della retta. Ciò servì di occasione e stimolo pei suoi ascoltatori di prendere conoscenza dei fondamentali lavori sull'argomento del PLÜCKER e del KUMMER; proseguendo in tale via si passò a quelli di F. KLEIN e G. BATTAGLINI; e poichè gli scritti del primo di questi matematici sono tutti informati al concetto dell'essere la geometria dello spazio rigato identica allo studio di una varietà quadratica a quattro dimensioni immersa in uno spazio lineare a cinque, mentre d'altronde vi è fatto largo uso della riduzione a forma canonica di una coppia di forme quadratiche, così, da un lato, si fu indotti a studiare la grande memoria del VERONESE sulla geometria proiettiva degli iperspazi e dall'altra a prendere notizia di quella, non meno importante, del WEIERSTRASS sulle forme bilineari e quadratiche.

Ora, appunto gli scritti del KLEIN, del BATTAGLINI, del VERONESE e del WEIERSTRASS costituiscono la piattaforma su cui riposano le pubblicazioni con cui il SEGRE esordì, applauditissimo, sulla scena del mondo matematico.

Delle due memorie ([2] e [3] <sup>(1)</sup>) costituenti in origine la dissertazione di laurea dell'autore, la prima contiene uno studio metodico delle quadriche situate in spazi comunque estesi, delle loro scambievoli intersezioni e dei risultanti sistemi lineari (fasci e schiere di quadriche); il teorema di WEIERSTRASS, che assegna la condizione necessaria e sufficiente affinchè una coppia di forme bilineari o quadratiche si possa trasformare in altra, viene presentato sotto forma geometrica per dedurne criteri atti a caratterizzare una di dette coppie senza ricorrere alle equazioni canoniche scoperte dal grande matematico tedesco. Applicando i risultati ottenuti al caso in cui lo spazio ambiente sia a cinque dimensioni <sup>(2)</sup>, il SEGRE [3] ritrova e completa tutte le proprietà allora note dei complessi quadratici e ne stabilisce una completa classificazione, esente dagli errori in cui cadde un discepolo del KLEIN, che per primo affrontò questa importante questione <sup>(3)</sup>.

<sup>(1)</sup> I numeri di questo tipo servono di richiamo ai lavori registrati nell'*Elenco* posto in calce al presente articolo e che venne redatto in buona parte dal prof. E. G. TOGLIATTI; si trovano ivi notati anche alcuni scritti minori (recensioni, necrologie, relazioni accademiche e simili) di cui, per brevità, non tenemmo conto nel presente articolo.

<sup>(2)</sup> È interessante notare che alla rappresentazione delle rette dello spazio ordinario sui punti di una quadrica di  $S_5$  il nostro autore ricorse in parecchie occasioni posteriori; p. es. investigando — in un lavoro [94] ispiratogli dal WILCZYNSKI — le congruenze rettilinee aventi per superficie focali due rigate sghembe.

<sup>(3)</sup> Le inesattezze rilevate dal SEGRE si riferiscono principalmente al caso in cui la superficie singolare del complesso è una quadrica doppia; esse sono rilevate anche in un articolo [4] il quale, nella sostanza, se non nella forma, è un'estratto della tesi di laurea dell'autore.

2. Prima di occuparci di alcuni lavori che si collegano ai due testè discorsi è opportuno ricordare che (lo rilevò per primo il KLEIN) i complessi di rette studiati dal BATTAGLINI non sono del tutto generali, dal momento che sono rappresentabili, mediante le ordinarie coordinate di rette, con equazioni della forma  $\Sigma c_{ik} p_{ik}^2 = 0$ ; tale osservazione fa nascere la questione: quali sono i complessi quadratici che entrano nella categoria investigata dal BATTAGLINI? Ora per risolverla un mezzo era offerto dal teorema (scoperto dall'ASCHIERI) che ogni complesso del BATTAGLINI può generarsi mediante le rette che tagliano armonicamente due date superficie di 2° ordine: di esso appunto è tratto profitto in un lavoro [1] ove l'anzidetta questione è risolta dal SEGRE con la collaborazione di un suo condiscipolo.

Lo stesso complesso venne poi investigato dal nostro in altri due lavori; nell'uno [5] egli si servì della trasformazione doppia di spazio rappresentabile in coordinate proiettive mediante equazioni della forma  $\rho x'_i = x_i^2 (i = 1, 2, 3, 4)$ , giungendo a nuove proprietà tanto di quel complesso quanto della superficie (tetraedroide) che ne è superficie singolare (<sup>4</sup>); nell'altro [109] sfruttò questa nuova definizione da lui scoperta pochi anni prima di morire: Date due schiere rigate non appartenenti alla stessa quadrica, ogni retta  $r$  dello spazio incontra due generatrici  $a_1, a_2$  della prima e due  $b_1, b_2$  della seconda; ora se s'impone la condizione che la punteggiata  $r(a_1, a_2, b_1, b_2)$  risulti proiettiva dal fascio di piani  $r(a_1, a_2, b_1, b_2)$ , tutte le rette  $r$  che la soddisfano costituiscono un complesso del BATTAGLINI.

3. Tra i fasci di quadriche considerati nelle prime memorie da noi analizzate (<sup>4</sup>) non si trovano quelli costituiti tutti da quadriche singolari (coni di varie specie): di essi il nostro autore si è occupato in uno scritto [13] nel quale le considerazioni geometriche si alternano con le applicazioni di equazioni canoniche scoperte dal KRONECKER.

Al pari di questo è una derivazione della più volte citata memoria del WEIERSTRASS, e precisamente di quanto è ivi detto sulle forme bilineari, una memoria ([10] completata dalla nota [24]) nella quale (prendendo le mosse dalla classificazione delle omografie dello spazio ordinario, eseguita poco prima da un fratello d'armi del SEGRE, che egli ricorda) è mostrato come la classificazione

---

(<sup>4</sup>) A questo periodo della sua vita scientifica, in cui l'attenzione del SEGRE era di preferenza rivolta alla geometria della retta, appartengono due sue brevi note ([8] e [19]) sui complessi lineari e un suo originale lavoro [6] ove le sfere ed i complessi lineari di rette vengono avvicinati per essere studiati dal punto di vista delle metriche relative.

delle corrispondenze proiettive in  $S_n$ , si possa ottenere senza ricorrere alle equazioni canoniche scoperte dal sommo analista di Berlino. Nel corso di tale ricerca è esposta una completa teoria di dette corrispondenze, con l'aggiunta di nuovi risultati; limitiamoci a riferire il seguente teorema, il quale completa un risultato dovuto al SIACCI e che il nostro autore espose anche isolatamente [7]: « Se  $|a_{ik}|$ ,  $|b_{ik}|$  sono due determinanti dello stesso grado e  $|\alpha_{ik}|$ ,  $|\beta_{ik}|$  i loro reciproci, i due determinanti  $|pa_{ik} + qb_{ik}|$ ,  $|p\alpha_{ik} + q\beta_{ik}|$  non differiscono al più che per un fattore e possiedono gli stessi divisori elementari ».

Proseguendo le sue meditazioni sopra le trasformazioni lineari in  $S_n$ , [18] e giovandosi di alcune classiche ricerche del CAYLEY e dell'HERMITE sopra le sostituzioni ortogonali, il nostro ha studiate a fondo le omografie che mutano in sè stessa una quadrica ed è poi passato a congeneri investigazioni sulle correlazioni <sup>(1)</sup> negli iperspazi; importanti lavori del FROBENIUS e del VOSS si arricchirono in conseguenza di notevoli complementi <sup>(2)</sup>.

Molteplici punti di contatto tanto con le più volte ricordate ricerche del WEIERSTRASS quanto con le memorie del SEGRE sulla geometria della retta possiede la notevolissima memoria [15] sull'astatica, la quale porge nuovi punti di vista e nuove proposizioni in un campo in cui eransi già illustrati matematici di alta rinomanza, fra cui basti citare il MINDING ed il SIACCI.

Un ultimo lavoro [12] del SEGRE che si collega, nel modo che diremo, alla memoria del WEIERSTRASS sulle forme quadratiche, ha per iscopo lo studio e la classificazione delle superficie di quarto ordine con conica doppia. Chi scrive le presenti linee erasi già occupato di tali figure per il caso in cui la linea doppia coincida col cerchio immaginario all'infinito e giovandosi della circostanza che, mediante coordinate pentasferiche, esse possono rappresentarsi con due equazioni quadratiche omogenee, ne aveva dedotta la classificazione dalle equazioni canoniche del WEIERSTRASS. Con una considerazione più geometrica il SEGRE, contemporaneamente al VERONESE, ha notato che, qualunque sia la specie della conica singolare, una superficie dell'anzidetta specie può ottenersi proiettando sullo spazio ordinario l'intersezione di due quadriche

<sup>(1)</sup> Di essi è parola anche nella nota [11], la quale però si connette a scritti, non del WEIERSTRASS, ma del PASCH e del LÜROTH.

<sup>(2)</sup> Non è fuor di proposito segnalare quì una ricerca compiuta recentemente dal SEGRE ([120]; cfr. [118]) la quale, da un certo punto di vista si connette ai suoi studi sulle corrispondenze rappresentabile mediante equazioni lineari; alludiamo alle corrispondenze quadrilineari tra forme di 1<sup>a</sup> specie, che egli ha insegnato a studiare ricorrendo ad una ingegnosa rappresentazione sopra le generatrici di due quadriche, distinte o coincidenti, traendone, in particolare gli elementi per una classificazione delle anzidette corrispondenze.

di  $S_4$ : applicando tale concetto egli ne stabilì una completa teoria e ne fece un'esaustiva classificazione, che, oltre a ricondurre a superficie già note, ne rivelò altre nuove e interessanti.

Non è fuor di luogo rilevare esplicitamente che fra tali superficie di quarto ordine non si trova quella di KUMMER, con sedici punti ed altrettanti piani singolari, che s'incontra come superficie singolare di un complesso quadratico di rette: due brevi ma importanti note ([14], [16]) mostrano che esse pure attrassero l'attenzione del Nostro.

4. Prima di proseguire nella descrizione delle messe raccolte dal nostro matematico nelle sue peregrinazioni iperspaziali, è necessario (in omaggio alla cronologia, i cui diritti non possono né debbono venire misconosciuti) far cenno di un gruppo di suoi scritti la cui prima radice è da ricercarsi nel suo insegnamento della geometria proiettiva, il quale corrisponde alla prima fase della sua carriera didattica. Uniformandosi alle idee del suo tempo, egli diede a questo insegnamento un indirizzo di assoluta purezza e per agevolare il compito dei suoi ascoltatori provocò la versione italiana della *Geometria di posizione* di STAUDT, che venne condotta felicemente a termine da M. PIERI, e vi promise un ottimo studio bio-bibliografico [39] relativo a colui a cui fu con ragione dato l'onorevole epiteto di « Euclide nel Secolo XIX ». Avendo poi notata l'imperfezione causata nelle odierne esposizioni della geometria proiettiva per effetto dell'esclusione o dell'imperfetta trattazione degli elementi immaginari, escogitò [22] un procedimento elementare per stabilire la teoria delle « coppie » formate da tali elementi; a base di esso sta il concetto di trasformazione di una proiettività binaria in altra mediante una proiettività ausiliare; quanto esso sia utile è luminosamente dimostrato dalle nuove dimostrazioni di teoremi sulle coniche a cui esso condusse il SEGRE. Proseguendo in quest'ordine di idee egli compose altro lavoro [23], ove il calcolo simbolico con trasformazioni geometriche è sfruttato per lo studio delle omografie binarie e, fra l'altro, conduce, per una via del tutto nuova, al teorema di PASCAL.

Quest'ordine di ricerche venne allora *solo apparentemente* abbandonato dal nostro; ne è prova un gruppo originale di lavori [44] che egli diede alle stampe tre anni più tardi, i quali costituiscono un ulteriore sviluppo di idee di STAUDT. Invero tutti sanno che questo grande geometra definì una proiettività binaria come una corrispondenza univoca e continua fra due forme di prima specie, la quale goda della proprietà di mutare gruppi armonici in gruppi armonici e ne dedusse l'eguaglianza dei birapporti di due quaterne di punti corrispondenti; ora il SEGRE notò che, quando si considerano anche elementi com-

plici, si possono immaginare delle corrispondenze analoghe, ma in cui i birapporti di due quaterne corrispondenti siano numeri complessi, non eguali ma coniugati <sup>(1)</sup>. Correttezza storica impone si rilevi come un giovane danese — C. JUEL — era stato condotto alla stessa conclusione poco prima del SEGRE, offrendo così un nuovo esempio di scoperte contemporanee, quasi fossero un inevitabile portato dei tempi. Ma è anche giustizia osservare che mentre il JUEL si arrestò alle prime conseguenze del suo trovato, il SEGRE ha completamente svolte le proprietà delle nuove corrispondenze e, collegando queste alle più elevate teorie dell'analisi matematica, creò un nuovo capitolo della nostra scienza, quello cioè che ha per tema gli enti iperalgebrici <sup>(2)</sup>.

5. Riprendendo l'analisi delle pubblicazioni che il SEGRE dedicò alla geometria degli iperspazi dopo di avere tratte mirabili conseguenze geometriche del teorema di WEIERSTRASS sulle forme bilineari e quadratiche, ci si presenta un'estesa memoria ([34] di cui la nota [31] rappresenta una comunicazione preliminare) relativa alle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni, delle quali egli intraprese lo studio, non soltanto grazie alla loro importanza intrinseca, ma anche perchè, proiettandole sullo spazio ordinario, i loro contorni conducono ad una categoria di notevoli superficie. Fra quelle varietà se ne trovano molte generabili con tre reti proiettive di spazi ordinari (chiamando « rete » la totalità degli  $S_3$  passanti per una retta); queste sono dotate di 6, 7, ... o 10 punti doppi ordinari; ma vi sono altre delle varietà considerate che possiedono punti singolari di specie superiore o anche infiniti punti doppi: di tutte l'autore fece uno studio accurato. Va rilevato che da siffatte indagini egli fu indotto ad avvertire alcune insospettate prerogative dello spazio a quattro dimensioni, alla cui esposizione egli dedicò un lavoro speciale [36], l'importanza del quale è documentata da ulteriori ricerche che ne furono corollario <sup>(3)</sup>.

6. Ma, prima di occuparsi di queste particolari figure, il SEGRE aveva iniziate ricerche sulle superficie rigate algebriche, che lo occuparono parecchi anni e lo condussero a risultati della più alta importanza. Allo studio di tali

<sup>(1)</sup> A corrispondenza di tale specie si riferisce anche la nota [26].

<sup>(2)</sup> V. specialmente la seconda esposizione [50] dei suoi risultati da un punto di vista algebrico: la memoria [105] può considerarsi come un ulteriore svolgimento delle idee ivi esposte.

<sup>(3)</sup> P. H. SCHOUTE, *Considerations in reference to a configuration of Segre.* (Proc. of the K. Akad. von Wetensch. te Amsterdam, 1901, pp 203 214 e 251-264).



figure egli fu indotto da un passo della citata memoria del VERONESE, ove questo egregio geometra considera la figura dello spazio  $S_{n+1}$  che è generata da  $n$  fasci proiettivi di  $S_n$ : è una rigata razionale; se non che, mentre egli asserì che tutte le figure così risultanti sono fra loro proiettivamente identiche, il SEGRE trovò [9] che esse si ripartiscono in  $\frac{n}{2}$  o  $\frac{n-1}{2}$  specie, secondo che  $n$  è pari o dispari, cosicchè due rigate razionali si possono trasformare per proiettività una in altra soltanto quando appartengano alla medesima specie: tale conclusione è in perfetto accordo con altra a cui giunse molto prima il CLEBSCH, ed il SEGRE ritrova, mediante opportune proiezioni e sezioni, la rappresentazione di tutte le rigate razionali dello spazio ordinario assegnate per la prima volta da quell'eminente scienziato.

Da siffatto studio il nostro fu condotto a due distinti ordini d'investigazioni.

Considerando che una rigata è una serie di  $\infty^1 S_i$  egli fu indotto a considerare gli analoghi sistemi di  $S_i$ , arrestandosi in particolare [20] al caso di  $i=2$ .

Considerando d'altra parte che il genere delle rigate di cui sopra è  $p=0$ , egli volse il pensiero al caso di  $p=1$  [25] e poi all'ipotesi di  $p$  qualunque ([28] e [32]), slanciandosi poi a considerare [33] i fenomeni analoghi che avvengono nelle varietà costituite da una serie semplicemente infinita di spazi lineari [33].

I nuovi risultati ottenuti dal SEGRE sulle rigate algebriche si trovano organicamente coordinati in un'estesa memoria ([27] e [41]) a cui deve ricorrere chiunque voglia oggi occuparsi dell'importante argomento; si leggono poi anche in altro lavoro [58], frutto di lezioni svolte durante l'anno 1890-91, nel quale, con ragionamenti iperspaziali, sono gettate le basi della geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito; lo studio di essa va utilmente accompagnato da quello dell'analogo lavoro (pubblicato nello stesso vol. di questi *Annali*) in cui il prof. BERTINI giunge agli stessi risultati con procedimenti algebrici.

7. Fra le figure investigate in questa fondamentale scrittura [58], s'incontrano figure che erano state assai prima considerate dai matematici, cioè le curve ed anche queste figure furono scopo delle meditazioni del Nostro. Così in una nota [37] che reca la sua firma è stabilito in modo nuovo e sono tratte nuove conseguenze, dall'importante teorema di CLIFFORD, affermate che una curva di genere  $p$  e ordine  $n > 2p - r$  non può appartenere ad un  $S_r$ , per  $r < n - p$ . Con altra [30] il SEGRE ha partecipato alla fioritura di lavori, verificatasi intorno al 1889, sui sistemi lineari di curve piane algebriche; in una terza ([21], cfr. [42]) egli ha presentati in forma organica un gruppo di teoremi relativi alle curve

dei generi 0 e 1. Sorvolando su un articolo [53] dal modesto scopo di far conoscere alcune idee di E. CAPORALI, ricorderemo due note ([67] e 74) relative ad alcuni speciali punti che si trovano nelle curve algebriche: e va esplicitamente rilevato che alla seconda di esse serve di complemento un ottimo lavoro postumo [127] del compianto geometra.

Finalmente alla teoria delle curve algebriche piane appartiene il riassunto [68] di alcune lezioni universitarie ove è trattata a fondo una questione che incontra chiunque intenda esporre rigorosamente quella teoria sino alle formule di PLÜCKER inclusivamente; cioè la questione di calcolare quante intersezioni di due linee dell'anzidetta specie sieno assorbite da un punto comune, di assegnata singolarità per ciascuna. È un lavoro modesto, ma che ha tutte le doti per essere giudicato definitivo sull'argomento.

8. Proseguendo nello svolgimento del vasto programma di lavoro che egli si era proposto, lo studio cioè di tutte le figure che si possono concepire in  $S_n$ , il SEGRE trovò [38] che i sistemi di  $\infty^{n-1}$  rette (figure analoghe alle congruenze dello spazio ordinario) sono costituiti ciascuno dalle rette tangenti  $n - 1$  volte ad una varietà ad  $n - 1$  dimensioni, la quale è la naturale estensione della notissima superficie focale. — Prima [17] egli aveva approfondita la rappresentazione delle  $\infty^5$  coniche di un piano sugli elementi di un  $S_5$ , arrestandosi in particolare sulle varietà che corrispondono all'insieme delle coniche specializzate una o più volte e determinando qual valore e quale portata possessa la già proposta rappresentazione dei complessi lineari di rette sulle coniche di un piano. — A lui devesi anche un'accurata indagine [61] del contegno della varietà Hessiana di una data in un punto di data singolarità per questa, la quale indagine, fra l'altro, guidò alla scoperta del bizzarro comportamento di alcune curve degli ordini 25, 26, 28, 33, 50 dotate di certe singolarità. — Al nostro autore spetta pure la scoperta ed il primo studio [48] di una categoria importante di varietà, le quali con pieno diritto portano oggi il suo nome (<sup>1</sup>); giova ricordarne la definizione: Dati  $n$  spazi delle dimensioni  $p_1, p_2, \dots, p_r$  si chiamino  $x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, \dots, x_{p_i}^{(i)}$  le coordinate omogenee di un punto qualunque dell' $i^{\text{mo}}$  fra essi; se si pone

$$X_{i_1 i_2 \dots i_r} = x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \dots x_{i_r}^{(r)}$$

e si riguardano le  $X$  come coordinate omogenee di un punto di uno spazio a  $(p_1 + 1)(p_2 + 1) \dots (p_r + 1) - 1$  dimensioni, le formule precedenti rappresen-

(<sup>1</sup>) G. SCORZA, *Sulle varietà di Segre*. (Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, T. XI.V, 1909-10).

teranno una varietà a  $p_1 + p_2 + \dots + p_r$  dimensioni che appartiene appunto alla classe di cui è parola. — Applicando poi una formula ottenuta servendosi del calcolo ideato da H. SCHUBERT per trattare le questioni di geometria numerativa, egli ha risolto [75] un notevole gruppo di questioni pertinenti a questo ramo della geometria; di più, con l'insegnamento e con l'esempio, diede la spinta a buon numero di ricerche congeneri, fra cui spiccano quelle dovute al prof. G. GIAMBELLI.

9. Verso il tramonto della sua troppo breve carriera il SEGRE ha studiati i complessi lineari di  $S_2$  in  $S_5$  con metodi in gran parte modellati sopra quelli in uso per investigare la geometria della retta nello spazio ordinario. Inoltre in un manipolo di notevolissimi lavori ([110], [113], [115]) ha iniziata e spinta notevolmente avanti la ricerca delle proprietà delle schiere rigate (o « regoli », secondo la nomenclatura da lui proposta), alternando le considerazioni sintetiche con opportuni sviluppi analitici, i quali, con la loro lucida semplicità destano meraviglia ed ammirazione, avendo l'intento di porre allo scoperto le più riposte qualità di enti geometrici complicatissimi: che tali ricerche non meritino di venire considerate oggetti di semplice curiosità è dimostrato dalle nuove proposizioni relative a figure dello spazio ordinario, a cui esse condussero e che trovansi registrate in uno scritto [109] che abbiamo già avuto occasione di citare.

A tali indagini si connette (quantunque siano ivi evitate le considerazioni iperspaziali) un lavoro [117] avente per soggetto le corrispondenze rappresentabili mediante equazioni della forma  $\Sigma c_{ik} p_i q_k = 0$  ( $i, k = 1, 2, \dots, 6$ ) con la condizione  $c_{ik} + c_{ki} = 0$ , ove  $p_i$  e  $q_k$  sono coordinate omogenee di due rette poste in relazione una con l'altra.

Emerge da tutto ciò (e verrà confermato da altre cose che diremo) che alla fine dello scorso secolo il SEGRE aveva il primato fra i conoscitori ed i contributori della geometria pluridimensionale; in conseguenza, non appena formulato il piano di una grande enciclopedia matematica, senza discussione fu lui designato a redigere il riassunto relativo a quella materia; il non facile compito venne adempiuto con tanto scrupolo e tale profondità che l'articolo da lui scritto [114] è ben meritevole di servire quale modello pei futuri congeneri lavori.

10. Nel corso delle sue ricerche iperspaziali il SEGRE s'imbattè più volte in questioni concernenti le superficie algebriche, sulle quali le conoscenze, quando egli esordì, erano per molti riguardi monche e frammentarie: special-

mente oscurità profonda avvolgeva la struttura dei punti singolari e quanto concerne l'estensione allo spazio della nozione di genere di una curva.

Riguardo alla prima categoria di problemi, come naturale estensione di una procedura che fecondissima erasi manifestata nel piano, si presentava la questione di ridurre le singolarità di una superficie a certi tipi fissi applicando opportune trasformazioni birazionali; a tale importante indagine si riferisce un'elaborata memoria del nostro [64], la quale ebbe la triste prerogativa di trascinarlo in una breve ma poco piacevole polemica ([63], [66]).

Invece agli studi sui generi di una superficie il SEGRE arrecò un notevole contributo [62] estendendo allo spazio una considerazione che erasi dimostrata assai giovevole nel piano; in tal modo giunse a provare che « su una qualunque superficie algebrica il numero  $\delta$  dei punti doppi staccati di curve di un fascio, diminuito del numero  $\sigma$  dei punti base di questo fascio e del quadruplo del genere di questo è indipendente dal fascio considerato », epperò costituisce un carattere  $P$  della superficie considerata: tale numero può anche esprimersi sotto la forma  $12p - p^{(4)} + 9$ , ove  $p$  è il genere superficiale e  $p^{(4)}$  il genere lineare della data superficie. Esso era stato incontrato prima, sotto altro punto di vista, dallo ZEUTHEN, ond'è pienamente giustificato il nome di « invariante di ZEUTHEN-SEGRE », con cui viene designato. Giova poi osservare, col nostro autore, che il ragionamento da lui usato nel piano e nello spazio ordinario, è applicabile anche agli spazi superiori; in particolare guida ad un carattere delle varietà a tre dimensioni, dianzi ignoto.

È necessario osservare qui che, come da giovane, il SEGRE, con parecchi lavori sopra le superficie di quart'ordine aveva manifestato il proprio interesse per le superficie di ordine determinato, diede prova della persistenza di tale sentimento con un'elegante nota [89] sopra quelle del terzo, la quale porge un notevole complemento alla famosa memoria del CREMONA sopra tali figure.

**11.** Questa nostra rapida rassegna deve anche contenere almeno un cenno di una acuta osservazione fatta dal SEGRE [79] la quale cagionò nel campo dei geometri una ben giustificata emozione (dovrei forse dire fu causa di un momentaneo scandalo!); essa consiste nel rilievo che non è conclusivo il noto ragionamento congegnato dal NOETHER per dimostrare che ogni trasformazione piana birazionale può ottenersi quale prodotto di trasformazioni quadratiche, rilievo tanto più importante giacchè la stessa argomentazione era stata più volte applicata nello studio dei sistemi lineari di curve piane. Il timore di dovere in conseguenza abbattere edifici di notevole importanza fu, fortunatamente, di breve

durata, perchè il CASTELNUOVO suggerì subito un'altra argomentazione conducente allo scopo ed al riparo da ogni critica. Tuttavia la sensata obiezione del SEGRE conserva intatto il proprio valore, come il NOETHER stesso ebbe onestamente a riconoscere.

12. L'ultima categoria di lavori del nostro autore che ci rimane da considerare è dovuta all'influenza esercitata su di lui dal DARBOUX per mezzo delle sue notissime *Leçons sur le théorie générale des surfaces*, sfruttate ampiamente dal SEGRE in alcuni corsi universitari. Le ricerche a cui alludiamo appartengono a quel capitolo della geometria infinitesimale che designasi oggi con l'epiteto di « differenziale-proiettiva » e la cui prima pagina venne scritta da M. CHASLES quando scoperse la relazione omografica che intercede fra la punteggiata avente per sede una generatrice di una superficie rigata ed il fascio costituito dai corrispondenti piani tangenti.

Siffatta dipendenza dal DARBOUX è riconosciuta dal nostro in un'estesa memoria [95] ove l'autore, giovandosi dell'ammirabile disinvoltura con cui egli sapeva percorrere tutti gli spazi, generalizza una considerazione utilizzata dal citato geometra francese per le equazioni a derivate parziali di secondo ordine. Per raggiungere lo scopo che erasi prefisso egli premette una succinta ma luminosa esposizione delle principali proprietà infinitesimali di una superficie in  $S_4$  nell'intorno di un suo punto, la quale possiede un valore indipendente dal fine a cui mirava l'autore. Le applicazioni da lui fattene hanno segnalata a geometri ed analisti una miniera ricca di nobile metallo, che sarebbe imprudente spensieratezza non approfondire ulteriormente. Egli stesso ha ulteriormente svolto l'argomento, almeno secondo una direzione, in una memoria ([102] e [103]) intesa a porre le basi della teoria di figure analoghe alle rigate, cioè alle varietà costituite da spazi lineari in  $S_4$ . A tale considerazione simultanea di considerazioni infinitesimali e di considerazioni iperspaziali deve la vita un recente manipolo di bellissimi lavori del nostro ([121]-[124]) che siamo costretti a nominare di sfuggita, troppo spazio essendo necessario per esporne il vario pinto contenuto.

Ad altro passo delle succitate *Leçons* debbono la vita alcune ricerche del SEGRE [98] sulle superficie di traslazione, considerate in quanto contengono due sistemi coniugati di curve tali che le corrispondenti sviluppabili circoscritte sono coni. Ed è estremamente notevole che a superficie algebriche di detta specie egli fu ricondotto in un lavoro [128] (l'ultimo che recchi la sua firma!), ove esse si incontrano come caratterizzate dall'essere le loro sezioni piane rappresentabili univocamente su un piano, per modo che alle loro sezioni piane

corrispondano curve d'ordine  $n$  circoscritte ad un  $(n+1)$  — latero completo, a sua volta, circoscritto ad una conica.

13. In una memoria [100] che è pure di pertinenza della geometria infinitesimale egli ha osservato che, come la considerazione dei punti di una superficie che sono, rispetto ad un punto  $O$ , infinitamente vicini di primo ordine, condusse alla teoria delle tangenti coniugate, così a nuove configurazioni geometriche conduce la considerazione dei punti che stanno, rispetto a  $O$ , a distanze infinitesime di ordini superiori. Sviluppando tale concetto, egli stabilì una corrispondenza cremoniana di terzo grado fra i piani per  $O$  ed i punti del corrispondente piano tangente, la quale lo indusse a introdurre un nuovo sistema di linee sopra una superficie qualunque, analoghe a quelle che portano il nome di DARBOUX; l'importanza delle « linee di Segre » fu ben presto posta in meridiana luce da G. FUBINI, il quale ne stabilì l'equazione differenziale sotto varie forme.

Alla stessa grande branca della geometria appartengono alcune memorie del SEGRE concernenti le superficie rigate; una [94] venne da noi già ricordata; un'altra [106] (che è l'ultima di cui parleremo) ha per fondamento il seguente notevole teorema: « Se una curva gobba gode della proprietà che per ogni suo punto si possa condurre una retta situata nel corrispondente piano osculatore ed appartenente ad una congruenza lineare, tutte le sue tangenti saranno in un complesso di primo grado »; a stabilirne l'importanza bastano le applicazioni fattene dall'autore allo studio dei sistemi di rette tali che almeno una delle falde della corrispondente superficie focale sia rigata.

14. Il numero e la varietà dei risultati ottenuti dal SEGRE ci ha vietato, non solo di enumerarli per intero, ma anche di entrare in particolari intorno alla forma in cui sono scritte le sue memorie. Ma, prima di chiudere questa troppo rapida rivista, ci corre l'obbligo di segnalare ai giovani geometri l'esemplare accuratezza da lui sempre usata nello scrivere e l'eleganza perfetta dei calcoli da lui eseguiti. Egli usò di preferenza il ragionamento puramente sintetico, anche nelle circostanze in cui l'intuizione geometrica non poteva venire utilmente invocata; ma, quasi sempre, confermava le proprie conclusioni mediante opportune formule, la semplicità delle quali cela la profondità del pensiero. La sua tendenza e la sua propensione verso la geometria non gli impedì di apprezzare a dovere la somma importanza e la irresistibile energia dell'analisi; ed invero, come nei primordi della sua carriera ne raccomandava caldamente lo studio ai propri discepoli (v. [46], [87]),

così, in un'occasione solenne si compiacque (v. [86], [90]) di porre in luce i legami cordiali e strettissimi delle due discipline sorelle. E chi ne legge i lavori ben si avvede come di quel paterno consiglio egli abbia fatto norma costante dei propri studi, giacchè si trovano ivi utilizzati i più importanti elementi della moderna letteratura analitica. Fu appunto tale vasta e profonda cultura che, alleandosi alla alata fantasia geometrica di cui natura avevalo dotato, gli permise, specialmente nei suoi ultimi anni di vita, di arricchire il patrimonio geometrico di ricerche sopra figure del tutto nuove e che, per la loro complicazione, avrebbero spaventato chi non fosse stato come lui animato da quel sereno coraggio in cui rispecchiasi la coscienza della propria forza.

15. Benchè parecchi lavori del compianto geometra, per esplicita dichiarazione sua, siano frutto del suo insegnamento universitario <sup>(1)</sup>, pure non possono in alcun modo servire da soli a porgere un'idea della cura da lui posta nel preparare le proprie lezioni, cura la cui efficacia è documentata dalla splendida collezione di lavori dei suoi discepoli <sup>(2)</sup>. Fortunatamente di tanto lavoro è rimasto un residuo tangibile; chè, essendo stata sua costante abitudine lo scriverne riassunti lucidissimi, corredati da ampie indicazioni bibliografiche, egli ha lasciata una collezione preziosa e che, fortunatamente, si trova in mani sicure <sup>(3)</sup>. È voto generale che, almeno i più cospicui elementi di tale raccolta <sup>(4)</sup> possa vedere la luce; così la voce, troppo presto spenta, dell'illustre maestro potrà essere ascoltata dalle generazioni future e si avrà una nuova manifestazione del consolante fenomeno generale, che il WEIERSTRASS espresse con concisione scultorea, scrivendo ad una sua alunna prediletta: *Die Menschen sterben, die Gedanken bleiben.*

*Genova, Ottobre 1924.*

<sup>(1)</sup> Anche alcuni suoi scritti storici (p. es. [82]) ripetono origine congenere.

<sup>(2)</sup> Ove, ripubblicando i lavori del SEGRE, venisse adottato il sistema seguito dagli editori delle *Opere* di GIACOMO BERNOULLI, i quali vi inserirono anche le Dissertazioni di laurea composte sotto la sua direzione, parecchi volumi non sarebbero a ciò sufficienti.

<sup>(3)</sup> Questi fascicoli avrebbero fornito buona parte dei materiali per quelle *Vorlesungen über algebraische Geometrie* il cui annuncio si trovò per parecchi anni nei Cataloghi della Casa Teubner.

<sup>(4)</sup> Può interessare di conoscere i temi svolti dal SEGRE; perciò indichiamo i principali: Teoria delle curve e delle superficie algebriche - Geometria degli enti geometrici semplicemente infiniti. Trasformazioni birazionali nel piano - Singolarità delle curve e delle superficie - Gruppi continui di trasformazioni - Curve algebriche dei vari spazi - Geometria numerativa - Sistemi lineari di curve piane e superficie razionali - Geometria su una super-

### Elenco cronologico delle Pubblicazioni di Corrado Segre.

- 
- 1883 - 1. *Sur les différentes espèces de complexes du 2<sup>o</sup> degré des droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du 2<sup>o</sup> ordre*; (luglio 1883, Math. Ann., XXIII, pag. 213-234, in collaborazione con G. LORIA).
2. *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*; 27 aprile 1883, Mem. Acc. Torino, (2), XXXVI, pag. 3-86.
3. *Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche*; 27 aprile 1883, Mem. Acc. Torino, (2), XXXVI, pag. 87-157.
4. *Note sur les complexes quadratiques dont la surface singulière est une surface du 2<sup>o</sup> degré double*; 22 settembre 1883, Math. Ann., XXIII, pag. 235-243.
5. *Su una trasformazione irrazionale dello spazio e sua applicazione allo studio del complesso quadratico di Battaglini e di un complesso lineare di coniche inscritte in un tetraedro*; ottobre 1883, Giorn. di Mat., XXI, pag. 355-378.
6. *Sulle geometrie metriche dei complessi lineari e delle sfere e sulle loro mutue analogie*; 18 dicembre 1883, Atti Acc. Torino, XIX, pag. 159-186.
7. *Teorema sulle relazioni tra una coppia di forme bilineari e la coppia delle loro forme reciproche*; 17 ottobre 1883, Giorn. di Matem., XXII, pag. 29-32.
- 1884 - 8. *Sur les droites qui ont des moments donnés par rapport à des droites fixes*; 6 gennaio 1884, Journ. für Math., 97, pag. 95-110.
9. *Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque*; 31 gennaio 1884, Atti Acc. Torino, XIX, pag. 355-372.
10. *Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*; aprile 1884, Mem. Acc. Lincei, (3), XIX, (1884), pag. 127-148.
11. *Sur les invariants simultanés de deux formes quadratiques*; 11 aprile 1884, Math. Ann., XXIV, pag. 152-156.
12. *Etude des différentes surfaces du quatrième ordre à conique double ou cuspidale (générale ou décomposée) considérées comme des projections de l'intersection de deux variétés quadratiques de l'espace à quatre dimensions*; 8 aprile 1884, Math. Ann., XXIV, pag. 313-444.

---

ficie algebrica - Geometria non euclidea - Applicazione degli integrali abeliani alla geometria - Forme delle curve algebriche - Classificazione delle curve algebriche - I gruppi in geometria - Geometria della retta - Concetti e metodi della geometria della retta - Superficie di terzo e curve di quarto ordine - Curve e superficie algebriche dal punto di vista delle trasformazioni birazionali - Gruppi continui di trasformazioni - Sistemi lineari di coniche e quadriche - Geometria degli iperspazi - Teoria degli invarianti applicati alla geometria - Geometria differenziale - Vedute superiori sulla geometria elementare - Complessi di rette di 1<sup>o</sup> e 2<sup>o</sup> grado - Gruppi d'ordine finito - Geometria delle equazioni differenziali - Capitoli di geometria algebrica - Circoli e sfere.



13. *Ricerche sui fasci di coni quadrici in uno spazio lineare qualunque*; 18 maggio 1884, Atti Acc. Torino, XIX, pag. 878-896.
14. *Sur un cas particulier de la surface de Kummer*. Lettre à M. K. Rohn; 9 agosto 1884, Leipziger Ber., XXXVI, pag. 132-135.
15. *Sull'equilibrio di un corpo rigido soggetto a forze costanti in direzione ed intensità e su alcune questioni geometriche affini*; 20 agosto 1884, Mem. Soc. Ital. delle Sc. (dei XL), (3) VI, n. 3, pag. 1-35.
16. *Sur les courbes de tangentes principales des surfaces de Kummer* (extrait d'une lettre adressée à M. Th. Reye); 24 ottobre 1884, Journ. für Math., 98, pag. 301-303.
  
1885. - 17. *Considerazioni intorno alla geometria delle coniche di un piano e alla sua rappresentazione sulla geometria dei complessi lineari di rette*; gennaio 1885, Atti Acc. Torino, XX, pag. 487-504.
18. *Ricerche sulle omografie e sulle correlazioni in generale e particolarmente su quelle dello spazio ordinario considerate nella geometria della retta*; marzo 1885, Mem. Acc. Torino, (2), XXXVII, pag. 395-425.
19. *Sur une expression nouvelle du moment mutuel de deux complexes linéaires*; 15 maggio 1885, Journ. für Math., 99, pag. 169-172.
20. *Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani*; novembre 1885, Atti Acc. Torino, XXI, pag. 95-115.
  
1886. - 21. *Remarques sur les transformations uniformes des courbes elliptiques en elle mêmes*; gennaio 1886, Math. Ann., XXVIII, pag. 296-314.
22. *Le coppie di elementi imaginari nella geometria proiettiva sintetica*; febbraio 1886, Mem. Acc. Torino, (2), XXXVIII, pag. 3-24.
23. *Note sur les homographies binaires et leurs faisceaux*; 27 marzo 1886, Journ. für Math., 100, pag. 317-330.
24. *Sugli spazi fondamentali di una omografia*; maggio 1886, Rend. Acc. Lincei, (4), II, pag. 325-327.
25. *Ricerche sulle rigate ellittiche di qualunque ordine*; maggio 1886, Atti Acc. Torino, XXI, pag. 868-891.
26. *Su alcune proprietà metriche delle correlazioni*; 16 luglio 1886, Giorn. di Mat., XXV, pag. 20-24.
  
1887. - 27. *Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques* (1<sup>o</sup> partie, courbes algébriques); gennaio 1887, Math. Ann., XXX, pag. 203-226.
28. *Nuovi risultati sulle rigate algebriche di genere qualunque*; gennaio 1887, Atti Acc. Torino, XXII, pag. 362-363.
29. *Sur un théorème de la géométrie à n dimensions*; 17 marzo 1887, (extrait d'une lettre adressée à Mr. F. Klein), Math. Ann., XXX, pag. 308.
30. *Sui sistemi lineari di curve piane algebriche di genere p*; (estratto di lettera al dott. G. B. Guccia); 9 aprile 1887, Rend. Palermo, I, pag. 217-221.
31. *Sulla varietà cubica con dieci punti doppi dello spazio a quattro dimensioni*; 14 maggio 1887, Atti Acc. Torino, XXII, pag. 791-801.
32. *Intorno alla geometria su una rigata algebrica*; luglio 1887, Rend. Acc. Lincei, (4), III<sub>2</sub>, pag. 3-6.
33. *Sulle varietà algebriche composte di una serie semplicemente infinita di spazi*; ottobre 1887, Rend. Acc. Lincei, (4), III<sub>2</sub>, pag. 149-153.

34. *Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni e su certi sistemi di rette e certe superficie dello spazio ordinario*; dicembre 1887, Mem. Acc. Torino, (2), XXXIX, pag. 3-18.
35. Recensioni in *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, T. XVI, 1884.
- 1888 - 36. *Alcune considerazioni elementari sull'incidenza di rette e piani nello spazio a quattro dimensioni*; febbraio 1888, Rend. Palermo II, pag. 45-52
37. *Sulle curve normali di genere  $p$  dei vari spazi*; aprile 1888, Rend. Ist. Lom., (2), XXI, pag. 523-528.
38. *Un'osservazione sui sistemi di rette degli spazi superiori*; luglio 1888, Rend. Palermo, II, pag. 148-149.
39. *C. G. C. von Staudt e i suoi lavori*; luglio 1888, (prefazione alla trad. ital. della « Geometrie der Lage » di STAUDT), pag. V-XXI.
40. Recensioni in *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, T. XVII, 1885.
- 1889 - 41. *Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques* (II partie, *Surfaces réglées algébriques*); gennaio 1889, Math. Ann., XXXIV, pag. 1-25.
42. *Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche*; giugno 1889, Atti Acc. Torino, XXIV, pag. 734-756.
43. Relazione sul saggio storico di GIN. LORIA: *Il periodo aureo della Geometria greca*; relatori E. D'OVIDIO e C. SEGRE, 29 dicembre 1889, Atti Acc. Torino, XXV, pag. 208-209.
44. *Un nuovo campo di ricerche geometriche*; 4 note, autunno 1889; I, Atti Acc. Torino, XXV, pag. 276-301; II, id., XXV, pag. 430-457; III, id., XXV, pag. 592-612; IV, id., XXVI, pag. 35-71.
- 1890 - 45. Nota alla Memoria di GUIDO CASTELNUOVO: *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche*; Rend. Palermo, IV, pag. 86-88.
- 1891 - 46. *Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche*; febbraio 1891, Riv. di Mat., I, pag. 42-66.
47. *Una dichiarazione* (risposta a G. Peano); aprile 1891, Riv. di Mat., I, pag. 154-156.
48. *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi*; aprile 1891, Rend. Palermo, V, pag. 192-204.
49. Relazione intorno alla memoria di GUIDO CASTELNUOVO: *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane*; relatori E. D'OVIDIO e C. SEGRE, 12 aprile 1891, Atti Acc. Torino, XXVI, pag. 595-602.
50. *Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici*; settembre 1891, Math. Ann., XL, pag. 413-467.
- 1892 - 51. Relazione sulla Memoria del prof. RICCARDO DE PAOLIS, intitolata: *Le corrispondenze proiettive nelle forme geometriche fondamentali di 1ª specie*; relatori E. D'OVIDIO e C. SEGRE, 31 gennaio 1892, Atti Acc. Torino, XXVII, pag. 366-375.
52. *Intorno alla storia del principio di corrispondenza e dei sistemi di curve*; Bibl. Math., (2), VI, pag. 33-47.
53. *Alcune idee di Ettore Caporali intorno alle quartiche piane*; agosto 1892, Annali di Matem., (2), 20, pag. 237-242.
54. *Riccardo De Paolis*; cenni biografici, settembre 1892, Rend. Palermo, VI, pag. 208-224.

- 1893 - 55. Relazione intorno alla Memoria intitolata: *Sopra le curve di dato ordine e dei massimi generi in uno spazio qualunque* del dott. GINO FANO; 25 giugno 1893, relatori E. D'OVIDIO e C. SEGRE, Atti Acc. Torino, XXVIII, pag. 865-866.
56. Relazione intorno alla Memoria intitolata: *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche* del dott. F. ENRIQUES; 25 giugno 1893, relatori E. D'OVIDIO e C. SEGRE, Atti Acc. Torino, XXVIII, pag. 867-868.
57. *Giuseppe Bruno*; cenni biografici, settembre 1893, Annuario della R. Università di Torino, 1893-1894, pag. 155-166.
58. *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito*; autunno 1893, Annali di Mat., (2), XXII, pag. 41-42.
- 1894 - 59. Nota sul lavoro di RICCARDO DE PAOLIS: *Teoria generale delle corrispondenze proiettive e degli aggruppamenti proiettivi sulle forme fondamentali a due dimensioni*; ottobre 1894, Rend. Acc. Lincei, (5), III<sub>2</sub>, pag. 227-229.
60. *Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit*; von A. BRILL und N. NOETHER; Cenni, 2 dicembre 1894, Atti Acc. Torino, XXX, pag. 109-111.
- 1895 - 61. *Sulla forma Hessiana*; ottobre 1895, Rend. Acc. Lincei, (5), IV<sub>2</sub>, pag. 143-148.
- 1896 - 62. *Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche*; febbraio 1896, Atti Acc. Torino, XXXI, pag. 485-501.
63. Relazione sulla Memoria del dott. GINO FANO intitolata: *Sulle varietà algebriche con un gruppo continuo non integrabile di trasformazioni proiettive in sé*; 12 aprile 1896, relatori E. D'OVIDIO, V. VOLTERRA, C. SEGRE, Atti Acc. Torino, XXXI, pag. 623-624.
64. *Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche*; ottobre 1896, Annali di Mat., (2), XXV, pag. 2-54.
- 1897 - 65. Intorno ad una mia Memoria: *Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche*; maggio 1897, Atti Acc. Torino, XXXII, pag. 781-789.
66. *Su un problema relativo alle intersezioni di curve e superficie*; 27 giugno 1897, Atti Acc. Torino, XXXIII, pag. 19-23.
67. *Su alcuni punti singolari delle curve algebriche e sulla linea parabolica di una superficie*; settembre 1897, Rend. Acc. Lincei, (5), VI<sub>2</sub>, pag. 168-175.
68. *Le molteplicità nelle intersezioni delle curve piane algebriche con alcune applicazioni ai principii della teoria di tali curve*; settembre 1897, Giorn. di Mat., XXXVI, pag. 1-50.
- 1898 - 69. Relazione sulla Memoria del dott. BEPPO LEVI intitolata: *Sulla varietà delle corde di una curva algebrica*; 27 febbraio 1898, relatori E. D'OVIDIO e C. SEGRE, Atti Acc. Torino, XXXIII, pag. 504-505.
70. Relazione sulla Memoria del dott. GINO FANO intitolata: *I gruppi di Jonquières generalizzati*; 15 maggio 1898, relatori E. D'OVIDIO e C. SEGRE, Atti Acc. Torino, XXXIII, pag. 796-797.
71. Recensione delle *Lezioni di geometria proiettiva* di F. ENRIQUES. Bollettino di bibl. e storia delle scienze matematiche, T. I, 1898, pag. 11-15.
- 1899 - 72. *Sophus Lie*: Cenni, 26 febbraio 1899, Atti Acc. Torino, XXXIV, pag. 363-366; e Bollettino di bibl. e storia delle scienze matematiche, II, pag. 68-75.

73. Relazione sulla Memoria del prof. M. PIERI intitolata: *Della geometria elementare come sistema ipotetico-deduttivo*; 14 maggio 1899, relatori E. D'OVIDIO e C. SEGRE, Atti Acc. Torino, XXXIV, pag. 760-762.
74. *Intorno ai punti di Weierstrass di una curva algebrica*; agosto 1899, Rend. Acc. Lincei, (5), VIII<sub>2</sub>, pag. 89-91.
- 1900 - 75. *Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice*; ottobre 1900, Rend. Acc. Lincei, (5), IX<sub>2</sub>, pag. 253-260.
76. Relazione sulla Memoria del prof. GINO FANO intitolata: *Nuove ricerche sulle congruenze di rette del 3° ordine prive di linea singolare*; 30 dicembre 1900, relatori E. D'OVIDIO e C. SEGRE, Atti Acc. Torino, XXXVI, pag. 278-279.
- 1901 - 77. Relazione sulla Memoria del dott. FRANCESCO SEVERI: *Sopra alcune singolarità delle curve di un iperspazio*; 13 gennaio 1901, relatori E. D'OVIDIO e C. SEGRE, Atti Acc. Torino, XXXVI, pag. 380-381.
78. Relazione sulla memoria del prof. EMILIO VENERONI: *Sui connessi bilineari fra punti e rette nello spazio ordinario*; 10 marzo 1901, relatori E. D'OVIDIO e C. SEGRE, Atti Acc. Torino, XXXVI, pag. 615-616.
79. *Un'osservazione relativa alla riducibilità delle trasformazioni Cremoniane e dei sistemi lineari di curve piane per mezzo di trasformazioni quadratiche*; marzo 1901, Atti Acc. Torino, XXXVI, pag. 645-651.
- 1902 - 80. Relazione sulla Memoria del dott. FRANCESCO SEVERI intitolata: *Sulle intersezioni delle varietà algebriche, e sopra i loro caratteri e singolarità proiettive*; 2 febbraio 1902, relatori E. D'OVIDIO e C. SEGRE, Atti Acc. Torino, XXXVII, pag. 267-269.
81. Relazione sulla Memoria di G. Z. GIAMBELLI intitolata: *Risoluzione del problema degli spazi secanti*; 13 giugno 1902, relatori E. D'OVIDIO e C. SEGRE, Atti Acc. Torino, XXXVII, pag. 733.
- 1903 - 82. *Congetture intorno all'influenza di Girolamo Saccheri sulla formazione della geometria non-Euclidea*; aprile 1903, Atti Acc. Torino, XXXVIII, pag. 535-547.
83. Relazione sulla Memoria del dott. FRANCESCO SEVERI, intitolata: *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica, e sopra certe classi di superficie*; 24 maggio 1903, relatori G. MORERA e C. SEGRE, Atti Acc. Torino, XXXVIII, pag. 764-766.
- 1904 - 84. Relazione sulla Memoria del dott. UMBERTO PERAZZO intitolata: *Sull'incidenza di rette, piani e spazi ordinari in uno spazio a cinque dimensioni, e su alcune corrispondenze birazionali fra piani e spazi ordinari*; 17 gennaio 1904, relatori G. MORERA e C. SEGRE, Atti Acc. Torino, XXXIX, pag. 355.
85. Relazione sulla Memoria del dott. BEPPO LEVI intitolata: *Fondamenti della geometria proiettiva*, 17 aprile 1904, relatori G. MORERA e C. SEGRE, Atti Acc. Torino, XXXIX, pag. 716-717.
86. *La geometria d'oggi e i suoi legami con l'analisi*; 13 agosto 1904, Verhandlungen des 3<sup>en</sup> intern. Math.-Kongress in Heidelberg, pag. 109-120; e Rend. Palermo, XIX (1905), pag. 81-83.
87. *On some tendencies in geometry investigations*; Bull. Amer. Math. Society, (2) X, pag. 442-468 (traduz. del n. 46).

- 1905 - 88. Relazione sulla Memoria del prof. MARIO PIERI: *Nuovi principi di geometria proiettiva complessa*; 5 febbraio 1905, relatori G. PEANO e C. SEGRE, Atti Acc. Torino, XL, pag. 378-379.
89. *Sur la génération projective des surfaces cubiques*; Extrait d'une lettre adressée à M. le prof. R. STURM; 25 marzo 1905, Archiv der Math. u. Ph., (3) X (1906), pag. 209-215.
90. Geometrya dzisiejsza i iy związty z Analiza, 1905, Abbitka z *Wiadomosci matematycznych*, T. IX, Warszawa, pag. 7-41, (traduzione del n. 86).
91. Relazione sulla Memoria del prof. UGO AMALDI intitolata: *I gruppi conformi reali nello spazio*; 11 giugno 1905, relatori G. MORERA e C. SEGRE, Atti Acc. Torino, XL, pag. 974.
- 1906 - 92. Relazione sulla Memoria del prof. UGO AMALDI: *Sui gruppi continui infiniti di trasformazioni di contatto dello spazio*; 17 giugno 1906, relatori C. SOMIGLIANA e C. SEGRE, Atti Acc. Torino, XLI, pag. 1114-1115.
- 1907 - 93. *Monge e le congruenze generali di rette*; Bibl. Math., (3) VIII, pag. 321-324.
94. *Le congruenze rettilinee W aderenti a due superficie rigate*; marzo 1907, Atti Acc. Torino, XLII, pag. 539-550.
95. *Su una classe di superficie degli iperspazi, legata con le equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine*; giugno 1907, Atti Acc. Torino, XLII, pag. 1047-1079.
96. Relazione intorno alla Memoria del dott. UMBERTO PERAZZO intitolata: *Sopra alcune varietà di rette e in particolare su vari tipi di complessi cubici*; 15 dicembre 1907; relatori C. SOMIGLIANA e C. SEGRE, Atti Acc. Torino, XLIII, pag. 252.
- 1908 - 97. M. NOETHER, H. POINCARÉ, C. SEGRE, Relazione del concorso internazionale per la « Medaglia Guccia »; febbraio 1908, Atti del IV Congresso intern. dei Mat., I, pag. 209-216; e Rend. Palermo, XXVI, pag. 145-151.
98. *Sulla generazione delle superficie che ammettono un doppio sistema coniugato di coni circoscritti*; giugno 1908, Atti Acc. Torino, XLIII, pag. 985-997.
99. Relazione sulla Memoria di G. Z. GIAMBELLI intitolata: *Risoluzione del problema generale numerativo per gli spazi plurisecanti di una curva algebrica*; 14 giugno 1908, relatori G. MORERA e C. SEGRE, Atti Acc. Torino, XLIII, pag. 1165.
100. *Complementi alla teoria delle tangenti coniugate di una superficie*; novembre 1908, Rend. Acc. Lincei, (5) XVII<sub>2</sub>, pag. 405-412.
- 1909 - 101. Relazione intorno alla Memoria del dott. A. COMESSATTI: *Sulle curve doppie di genere qualunque, e particolarmente sulle curve ellittiche doppie*; 21 marzo 1909, relatori E. D'OVIDIO e C. SEGRE, Atti Acc. Torino, XLIV, pag. 509-510.
- 1910 - 102. *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi*; 22 marzo 1910, Rend. Palermo, XXX, pag. 87-121.
103. Aggiunta alla Memoria *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi*; 9 luglio 1910, Rend. Palermo, XXX, pag. 246-348.
- 1911 - 104. Relazione sulla Memoria del sig. M. STUYVAERT, *Un complexe cubique de droites*; 17 dicembre 1911, relatori E. D'OVIDIO e C. SEGRE, Atti Acc. Torino, XLV<sub>4</sub>I, pag. 219-220.
- 1912 - 105. *Le geometrie proiettive nei campi di numeri duali*; gennaio 1912, Atti Acc. Torino, XLVII, Nota I, pag. 308-327, Nota II, pag. 384-405.

- 1913 - 106. *Sulle congruenze rettilinee  $W$  di cui una od ambe le falde focali sono rigate*: dicembre 1913. Atti Acc. Torino, XLIX, pag. 291-303.
- 1915 - 107. Relazione intorno alla Memoria del dott. ETTORE DEL VECCHIO: *Sulle equazioni*  
 $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(xy)$ ;  $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \varphi(xy)$ ; 11 aprile 1915, relatori E. D'OVIDIO e C. SEGRE,  
 Atti Acc. Torino, I, pag. 839.
- 1916 - 108. Relazione sul concorso al Premio Reale per la Matematica del 1913; commissari:  
 E. BERTINI, L. BIANCHI, S. PINCHERLE, V. VOLTERRA, C. SEGRE (relatore); 6 gennaio  
 1916, Atti Acc. Lincei, Rendiconti, Adunanze solenni, III pag. 23-33.
109. *Su una generazione dei complessi quadratici di rette del Battaglini*; ottobre 1916, Rend.  
 Palermo, XLII, pag. 85-93.
- 1917 - 110. *Sui complessi lineari di schiere rigate, o regoli*; marzo 1917, Rend. Acc. Lincei,  
 (5) XXVI<sub>1</sub>, pag. 341-344.
111. *Commemorazione del socio nazionale Giuseppe Veronese*; 4 novembre 1917, Rend. Acc.  
 (5) XXVI<sub>2</sub>, pag. 249-256.
112. *Sui complessi lineari di piani nello spazio a 5 dimension.*; Annali di Mat., (3) XXVII,  
 pag. 75-123.
- 1918 - 113. *Sulla geometria delle schiere rigate o regoli, e in particolare sui complessi lineari  
 di tali enti*; Annali di Mat., (3) XXVII, pag. 151-181.
114. *Mehrdimensionale Räume*; Enzyklopädie der math., Wiss, IIIc 7, pag. 769-972.
115. *Su alcune classi particolari di sistemi continui di quadriche, e sui rispettivi involuppi*.  
 Scritti matematici offerti ad ENRICO D'OVIDIO, Torino, Bocca, pag. 1-21.
116. *Le previsioni*; Discorso inaugurale, novembre 1918, Annuario della R. Università di  
 Torino, 1918-19, pag. 11-25.
- 1919 - 117. *I connessi bilineari alternati di coppie di rette*; novembre 1919, Rend. Palermo,  
 XLIV, pag. 139-166.
118. *Un principio di riduzione nello studio delle corrispondenze algebriche*; novembre 1919,  
 Rend. Acc. Lincei, (5) XXVII<sub>1</sub>, pag. 308-312.
- 1920 - 119. *H. G. Zeuthen*; cenno commemorativo, 25 gennaio 1920, Atti Acc. Torino, LV,  
 pag. 327-328.
120. *Sulle corrispondenze quadrilineari tra forme di prima specie e su alcune loro rappre-  
 sentazioni spaziali*; Annali di Math., (3) XXIX, pag. 105-140.
- 1921 - 121. *Sui fochi di 2° ordine dei sistemi infiniti di piani e sulle curve iperspaziali con  
 una doppia infinità di piani plurisecanti*; febbraio 1921, Rend. Acc. Lincei, (5) XXX<sub>2</sub>,  
 pag. 67-71.
122. *Le linee principali di una superficie di  $S_5$  e una proprietà caratteristica della superficie  
 di Veronese*; Rend. Acc. Lincei, (5) XXX<sub>1</sub>, Nota I, marzo 1921, pag. 200-203; Nota II,  
 aprile 1921, pag. 227-231.
123. *Le superficie degli iperspazi con una doppia infinità di curve piane o spaziali*; giugno  
 1921, Atti Acc. Torino, LVI, pag. 143-157.

- 
- 1922 - 124. *Le superficie degli iperspazi con una doppia infinità di curve spaziali*; Nota II, giugno 1922, Atti Acc. Torino, LVII, pag. 575-585.
125. *Max Noether e Hermann Schwarz*; 8 gennaio 1922, Atti Acc. Torino, LVII, pag. 161-163.
126. *Commemorazione del socio straniero Carlo Teodoro Reye*; 2 aprile 1922, Rend. Acc. Lincei, (5) XXX<sub>1</sub>, pag. 269-72.
- 1924 - 127. *Sugli elementi lineari che hanno comuni la tangente e il piano osculatore*; 13 aprile 1924; Rend. Acc. Lincei, (5) 33<sub>1</sub>, pag. 325-329.
128. *Le curve piane d'ordine  $n$  circoscritte ad un  $(n+1)$ -latero completo di tangenti ed una classe particolare di superficie con doppio sistema coniugato di coniche circoscritte*. Atti Acc. Torino, LIX, pag. 303-320.
-





# Sulle congruenze cicliche

di RENATO CALAPSO a Messina

---

## PREFAZIONE

Nello spazio ordinario è noto che *un sistema coniugato avente la stessa rappresentazione sferica di una congruenza ciclica è suscettibile di deformazione finita in cui si conserva coniugato.*

Questo teorema si enuncia anche in modo diverso, introducendo alcune denominazioni, ormai accettate da vari geometri; se il punto  $P$  descrive un sistema coniugato (rete) e se per ogni posizione di  $P$  costruiamo la normale alla rete, possiamo ritenere una corrispondenza fra le dette normali e le rette della congruenza, in guisa che rette corrispondenti siano parallele. In tali condizioni fra la tangente all'una od all'altra curva della rete ed il raggio della congruenza sussiste la relazione d'ortogonalità, e la rete si dirà (in senso lato) *normale* alla congruenza. Inoltre si sa che per ragioni da dirsi dualistiche, che intervengono tra alcune proposizioni intorno alle reti e alle congruenze, si ha l'abitudine di chiamare *rete ciclica* un sistema coniugato suscettibile di deformazione finita, in cui si conservi coniugato.

Con tali denominazioni: *una rete normale ad una congruenza ciclica è pure ciclica.*

Lo scopo della presente Memoria è la generalizzazione e conveniente estensione di questo importante teorema in uno spazio ad un numero qualunque  $(n + 2)$  di dimensioni; la ricerca dà luogo a proprietà in parte nuove e per  $n > 1$  presenta anche delle soluzioni singolari.

Nei primi due paragrafi viene stabilito un metodo per la costruzione delle congruenze cicliche, e quindi, formata una tale congruenza, viene attaccato il problema della costruzione delle reti normali.

Applicando i metodi di CAUCHY si riconosce che il problema dipende da  $2n$  funzioni arbitrarie.

Le proprietà di queste reti normali dipendono allora dall'assegnazione di queste funzioni arbitrarie; così in generale una rete normale ad una con-

gruenza ciclica si deforma in una rete dello stesso spazio e quindi, seguendo la denominazione di GUICHARD è da dirsi  $nC$ ; cioè:

*Nello spazio  $S_{n+2}$  una rete normale ad una congruenza  $C$  è in generale  $nC$ .*

Ma si può disporre delle funzioni arbitrarie in guisa da avere una rete  $sC$  ( $s < n$ ); precisamente:

*In uno spazio  $S_{n+2}$  fra le reti normali ad una congruenza  $C$  vi sono infinite reti  $sC$ , dipendenti da  $2s$  funzioni arbitrarie.*

In particolare per  $s=1$  si ha:

*In uno spazio  $S_{n+2}$  fra le reti normali ad una congruenza ciclica vi sono infinite reti cicliche dipendenti da due funzioni arbitrarie.*

Nello spazio ordinario  $S_3$  queste proposizioni si confondono con la sola sopra enunciata; se poi la dimensione dello spazio è maggiore di 3, si hanno anche soluzioni singolari, per esempio si può avere una rete *iper*ciclica.

## § 1. Formule relative alle congruenze cicliche.

1. Consideriamo un determinante ortogonale di ordine  $n+2$

$$(1) \quad \Delta = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & x_{1n+1} & x_{1n+2} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & x_{2n+1} & x_{2n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} & x_{nn+1} & x_{nn+2} \\ \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n & \xi_{n+1} & \xi_{n+2} \\ \eta_1 & \eta_2 & \dots & \eta_n & \eta_{n+1} & \eta_{n+2} \end{vmatrix}$$

i cui elementi sono funzioni di due parametri  $u$  e  $v$  soddisfacenti al sistema di equazioni

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \xi_r}{\partial u} = -\sum_{s=1}^n a_s x_{sr} - p\eta_r, \quad \frac{\partial \xi_r}{\partial v} = q\eta_r \\ \frac{\partial \eta_r}{\partial u} = p\xi_r, \quad \frac{\partial \eta_r}{\partial v} = -\sum_{s=1}^n b_s x_{sr} - q\xi_r \\ \frac{\partial x_{kr}}{\partial u} = a_k \xi_r, \quad \frac{\partial x_{kr}}{\partial v} = b_k \eta_r \end{array} \right.$$

( $r = 1, 2, \dots, n, n+1, n+2$ ;  
 $k = 1, 2, \dots, n$ ).

Per l'integrabilità di questo sistema le quantità  $p$ ,  $q$ ,  $a_s$ ,  $b_s$  debbono verificare le relazioni

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial a_s}{\partial v} = p b_s, \quad \frac{\partial b_s}{\partial u} = q a_s \\ \frac{\partial p}{\partial v} + \frac{\partial q}{\partial u} + \sum_{s=1}^n a_s b_s = 0. \end{array} \right.$$

Per altro le quantità  $a_s$ ,  $b_s$ ,  $p$ ,  $q$  possono essere qualunque, purchè siano soddisfatte le (3), giacchè è noto come da queste sia deducibile il determinante (1), integrando le (2) a convenienti condizioni iniziali.

Se per un punto fisso dello spazio (che possiamo prendere nell'origine delle coordinate) conduciamo le rette  $t_1$  e  $t_2$ , aventi per coseni direttori rispettivamente gli elementi delle ultime due righe del determinante (1), otteniamo, al variare di  $u$  e  $v$ , delle coppie di rette ortogonali, il cui insieme si può considerare come caso limite di un sistema coniugato ed ortogonale (rete  $O$ ) e che per comodità di linguaggio chiameremo brevemente rete  $\bar{O}$ .

2. Vogliamo formare una congruenza armonica alla detta rete  $\bar{O}$ .

Prendiamo un punto  $P_1$  sulla retta  $t_1$ ; le sue coordinate hanno la forma

$$(4) \quad x'_r = \frac{\xi_r}{h};$$

similmente prendiamo un punto  $P_2$  sulla retta  $t_2$ , le cui coordinate hanno la forma

$$(5) \quad x''_r = \frac{\eta_r}{l}.$$

Dobbiamo disporre di  $h$  ed  $l$  in modo che, quando varia soltanto  $v$ , il punto  $P_1$  descrive una curva tangente alla retta  $P_1 P_2$ , e, quando varia soltanto  $u$ , il punto  $P_2$  descrive una curva tangente alla retta  $P_1 P_2$ ; si trova allora facilmente per  $h$  ed  $l$  il sistema

$$(6) \quad \frac{\partial h}{\partial v} = ql, \quad \frac{\partial l}{\partial u} = ph.$$

Determinate in questo modo  $h$  ed  $l$ , la congruenza  $P_1 P_2$  risulta armonica alla rete  $\bar{O}$ .

Possiamo formare l'equazione di LAPLACE a cui soddisfano i parametri direttori del raggio:

$$(7) \quad X_r = h \eta_r \quad l \xi_r.$$

Si ha :

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial X_r}{\partial u} = \left( \frac{\partial h}{\partial u} + pl \right) \eta_r + l \sum_{s=1}^n a_s x_{sr} \\ \frac{\partial X_r}{\partial v} = - \left( \frac{\partial l}{\partial v} + qh \right) \xi_r - h \sum_{s=1}^n b_s x_{sr} \end{cases}$$

indi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X_r}{\partial u \partial v} = & \left( \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} + p \frac{\partial l}{\partial v} + l \frac{\partial p}{\partial v} \right) \eta_r - \left( \frac{\partial h}{\partial u} + pl \right) \left[ \sum_{s=1}^n b_s x_{sr} + q \xi_r \right] + \\ & + \frac{\partial l}{\partial v} \sum_{s=1}^n a_s x_{sr} + l \sum_{s=1}^n \left( \frac{\partial a_s}{\partial v} x_{sr} + a_s b_s \eta_r \right) \end{aligned}$$

e facendo uso delle (3) e (6) abbiamo più semplicemente :

$$\frac{\partial^2 X_r}{\partial u \partial v} = - q \left( \frac{\partial h}{\partial u} + pl \right) \xi_r + p \left( \frac{\partial l}{\partial v} + qh \right) \eta_r + \frac{\partial l}{\partial v} \sum_{s=1}^n a_s x_{sv} - \frac{\partial h}{\partial u} \sum_{s=1}^n b_s x_{sr}.$$

Se ora nell'espressione

$$\frac{\partial l}{\partial v} \sum_{s=1}^n a_s x_{sr}$$

sostituiamo al posto di  $\sum_{s=1}^n a_s x_{sr}$  il valore dato dalla prima delle (8), e nell'espressione analoga

$$\frac{\partial h}{\partial u} \sum_{s=1}^n b_s x_{sr}$$

sostituiamo per  $\sum_{s=1}^n b_s x_{sr}$  il valore dato dalla seconda delle (8), la precedente prende la forma

$$(9) \quad \frac{\partial^2 X_r}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \log l}{\partial v} \frac{\partial X_r}{\partial u} + \frac{\partial \log h}{\partial u} \frac{\partial X_r}{\partial v} + \left( pq - \frac{\partial \log h}{\partial u} \frac{\partial \log l}{\partial v} \right) X_r.$$

Frattanto la relazione

$$\sum_{r=1}^{n+2} X_r^2 = l^2 + h^2$$

(immediatamente deducibile dalle (7)) interpretata sull'equazione di LAPLACE (9) conferma che la congruenza descritta dalla retta  $P_1 P_2$  è ciclica.

Una congruenza ciclica così ottenuta è generale, nel senso che ad una congruenza di questo tipo è sempre riducibile ogni altra congruenza ciclica per trasformazione parallela in cui le sviluppabili si corrispondano.

## § 2. Le reti normali alla congruenza ciclica.

3. Richiamiamo anzitutto qualche definizione.

È noto che nello spazio a tre dimensioni si risolve il problema di formare le congruenze con assegnata immagine sferica delle sviluppabili, e che la detta immagine sferica si può dare ad arbitrio.

Ma se la dimensione dello spazio è maggiore di tre ( $n + 2 > 3$ ) si può ugualmente porre il problema analogo di formare una congruenza quando si assegnino i parametri direttori del raggio:

$$(10) \quad X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}, X_{n+2}$$

come funzioni di due parametri  $u$  e  $v$ , con la condizione che per  $u = \text{cost.}$  e  $v = \text{cost.}$  si ottengano le due serie di sviluppabili; se non che ora, per la possibilità del problema, le funzioni (10) non possono darsi ad arbitrio, ma debbono soddisfare ad una stessa equazione di LAPLACE

$$(11) \quad \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = A \frac{\partial X}{\partial u} + B \frac{\partial X}{\partial v} + CX$$

(il che sempre si verifica in uno spazio  $S_3$ ).

Se ora consideriamo un punto  $P$  le cui coordinate

$$(12) \quad x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}$$

sono funzioni degli stessi parametri  $u$  e  $v$ , e facciamo l'ipotesi che al variare di questi parametri il punto  $P$  descrive una rete, diremo questa rete *normale* alla congruenza quando fra le coordinate di  $P$  ed i parametri direttori del raggio (soddisfacenti le (11)) sussistono le condizioni di ortogonalità

$$(12) \quad \sum X_r \frac{\partial x_r}{\partial u} = 0, \quad \sum X_r \frac{\partial x_r}{\partial v} = 0.$$

Si tenga presente che se dal punto  $P$  si conduce la retta avente i parametri direttori (10) non si ha, in generale, una congruenza riferita alle sviluppabili; quindi la rete è normale alla congruenza nel senso che il raggio della congruenza e la tangente all'una o all'altra curva della rete sono ortogonali, ma il raggio della congruenza non passa in generale per  $P$ .

4. Premesse queste generalità, passiamo a formare le reti normali alla congruenza ciclica, costruita al precedente paragrafo.

Tenendo presente che il determinante (1) è diverso da zero, esistono le funzioni  $A_1, B_1, \lambda_k$  soddisfacenti al sistema:

$$\frac{\partial x_r}{\partial u} = A_1 \xi_r + B_1 \eta_r + \sum_{k=1}^n \lambda_k x_{kr};$$

ma dovendo essere soddisfatta l'equazione

$$\Sigma(h\eta_r - l\xi_r) \frac{\partial x_r}{\partial u} = 0$$

(v. le (12)), segue, per l'ortogonalità del determinante (1) che  $A_1$  e  $B_1$  sono proporzionali ad  $h$  ed  $l$ , e perciò

$$A_1 = \omega h, \quad B_1 = \omega l.$$

Similmente procederemo per  $\frac{\partial x_r}{\partial v}$ , introducendo delle funzioni  $A_2, B_2, \mu_k$ .

Possiamo ritenere allora le equazioni

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{\partial x_r}{\partial u} = \omega h \xi_r + \omega l \eta_r + \sum_{k=1}^n \lambda_k x_{kr} \\ \frac{\partial x_r}{\partial v} = \Omega h \xi_r + \Omega l \eta_r + \sum_{k=1}^n \mu_k x_{kr}, \end{cases}$$

e si tratta di disporre delle funzioni  $\omega, \Omega, \lambda_k, \mu_k$  in guisa da aversi

$$(14) \quad \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial x_r}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial x_r}{\partial v} \right)$$

ed in guisa ancora che il punto descriva una rete.

Tenendo presenti le equazioni fondamentali (2) e seguenti, si trova con facile calcolo:

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial x_r}{\partial u} \right) &= h \frac{\partial \omega}{\partial v} \xi_r + \left( l \frac{\partial \omega}{\partial v} + \omega \frac{\partial l}{\partial v} + \omega h q + \sum_{k=1}^n \lambda_k b_k \right) \eta_r \\ &\quad - \omega l \sum_{k=1}^n b_k x_{kr} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \lambda_k}{\partial v} x_{kr}, \\ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial x_r}{\partial v} \right) &= \left( h \frac{\partial \Omega}{\partial u} + \Omega \frac{\partial h}{\partial u} + \Omega l p + \sum_{k=1}^n \mu_k a_k \right) \xi_r + l \frac{\partial \Omega}{\partial u} \eta_r \\ &\quad - \Omega h \sum_{k=1}^n a_k x_{kr} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mu_k}{\partial u} x_{kr}, \end{aligned} \right.$$

e poichè la (14) deve essere verificata per tutti i valori di  $r$  si dovrà avere separatamente

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega \left( \frac{\partial h}{\partial u} + lp \right) + \sum_{k=1}^n a_k \mu_k = h \left( \frac{\partial \omega}{\partial v} - \frac{\partial \Omega}{\partial u} \right) \\ \omega \left( \frac{\partial l}{\partial v} + hq \right) + \sum_{k=1}^n b_k \lambda_k = l \left( \frac{\partial \Omega}{\partial u} - \frac{\partial \omega}{\partial v} \right) \\ \frac{\partial \lambda_k}{\partial v} - \omega b_k - \left( \frac{\partial \mu_k}{\partial u} - \Omega h a_k \right) = 0 \end{array} \right.$$

dopo di che le (15) si scriveranno

$$(17) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial x_r}{\partial u} \right) &= h \frac{\partial \omega}{\partial v} \xi_r + l \frac{\partial \Omega}{\partial u} \eta_r - \omega l \sum_{k=1}^n b_k x_{kr} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \lambda_k}{\partial v} x_{kr}; \\ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial x_r}{\partial v} \right) &= h \frac{\partial \omega}{\partial v} \xi_r + l \frac{\partial \Omega}{\partial u} \eta_r - \Omega h \sum_{k=1}^n a_k x_{kr} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mu_k}{\partial u} x_{kr}. \end{aligned}$$

Resta ancora ad esprimere che le funzioni  $x_r$  soddisfano ad una stessa equazione di LAPLACE della forma

$$\frac{\partial^2 x_r}{\partial u \partial v} = A \frac{\partial x_r}{\partial u} + B \frac{\partial x_r}{\partial v}.$$

Sostituendo in questa le espressioni (17) e (13) e tenendo presente che questa deve verificarsi per tutti i valori di  $r$ , si trovano le equazioni:

$$\frac{\partial \omega}{\partial v} = A\omega + B\Omega$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u} = A\omega + B\Omega$$

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial v} - \omega b_k = A\lambda_k + B\mu_k.$$

Riunendo ora tutte le equazioni trovate, avremo le condizioni necessarie

e sufficienti :

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \omega}{\partial v} = A\omega + B\Omega \\ \frac{\partial \Omega}{\partial u} = A\omega + B\Omega \\ \frac{\partial \lambda_k}{\partial v} = \omega b_k + A\lambda_k + B\mu_k \\ \frac{\partial \mu_k}{\partial u} = \Omega h a_k + A\lambda_k + B\mu_k \\ \sum_{k=1}^n a_k \mu_k = -\Omega \left( \frac{\partial h}{\partial u} + lp \right) \\ \sum_{k=1}^n b_k \lambda_k = -\omega \left( \frac{\partial l}{\partial v} + hq \right). \end{array} \right. \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

È questo un sistema di  $2n + 4$  equazioni nelle altrettante incognite  $\omega$ ,  $\Omega$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $\lambda_k$ ,  $\mu_k$ .

### § 3. Trasformazione del sistema fondamentale.

5. Dalle prime due equazioni (18) si rileva che  $\omega$  ed  $\Omega$  sono le derivate di una stessa funzione  $\Phi$ ; cioè

$$(19) \quad \omega = \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \quad \Omega = \frac{\partial \Phi}{\partial v}$$

e le prime due equazioni (18) si riducono alla sola

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} = A \frac{\partial \Phi}{\partial u} + B \frac{\partial \Phi}{\partial v}.$$

Si vede inoltre senza difficoltà che la derivata di  $a_k \cdot h$  rispetto a  $v$  è uguale alla derivata di  $b_k \cdot l$  rispetto ad  $u$ ; quindi è lecito introdurre le funzioni  $\theta_k$  (che dipendono soltanto dalla congruenza data) mediante le formule

$$(20) \quad \frac{\partial \theta_k}{\partial u} = a_k h, \quad \frac{\partial \theta_k}{\partial v} = b_k l;$$



poscia per le (18) stesse sono coesistenti le equazioni

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_k = \theta_k \frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{\partial \Psi_k}{\partial u} \\ \mu_k = \theta_k \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{\partial \Psi_k}{\partial v} \end{array} \right.$$

nelle incognite  $\Psi_k$ ; in questo modo il secondo gruppo delle (18) si riduce alle sole  $n$  equazioni

$$\frac{\partial^2 \Psi_k}{\partial u \partial v} = A \frac{\partial \Psi_k}{\partial u} + B \frac{\partial \Psi_k}{\partial v}.$$

Possiamo dunque sostituire alle (18) il sistema seguente:

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} = A \frac{\partial \Phi}{\partial u} + B \frac{\partial \Phi}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 \Psi_k}{\partial u \partial v} = A \frac{\partial \Psi_k}{\partial u} + B \frac{\partial \Psi_k}{\partial v} \\ \sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial \Psi_k}{\partial v} = M \frac{\partial \Phi}{\partial v} \quad \left[ M = \frac{\partial h}{\partial u} + lp + \sum_{k=1}^n a_k \theta_k \right] \\ \sum_{k=1}^n b_k \frac{\partial \Psi_k}{\partial u} = N \frac{\partial \Phi}{\partial u} \quad \left[ N = \frac{\partial l}{\partial v} + hq + \sum_{k=1}^n b_k \theta_k \right] \end{array} \right.$$

in cui le quantità  $M$  ed  $N$  dipendono soltanto dalla congruenza data.

Questo sistema contiene  $n + 3$  equazioni ed altrettante incognite:

$$\Psi_k, \quad \Phi, \quad A, \quad B.$$

Importa anche osservare la forma che prendono le (13) nelle attuali notazioni. Si ha:

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x_r}{\partial u} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} h \xi_r + \frac{\partial \Phi}{\partial u} l \eta_r + \sum_{k=1}^n x_{kr} \left( \theta_k \frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{\partial \Psi_k}{\partial u} \right) \\ \frac{\partial x_r}{\partial v} = \frac{\partial \Phi}{\partial v} h \xi_r + \frac{\partial \Phi}{\partial v} l \eta_r + \sum_{k=1}^n x_{kr} \left( \theta_k \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{\partial \Psi_k}{\partial v} \right). \end{array} \right.$$

6. In quanto all'integrazione del sistema (22), facciamo l'ipotesi che le quantità

$$(24) \quad Na_k - Mb_k$$

non siano tutte nulle; in tal caso derivando la penultima rispetto ad  $u$  e l'ultima rispetto a  $v$  ed eliminando le derivate seconde di  $\Psi_k$  e  $\Phi$ , si ottiene:

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{\sum_{k=1}^n \left( a_k \frac{\partial M}{M \partial u} - \frac{\partial a_k}{\partial u} \right) \frac{\partial \Psi_k}{\partial v}}{\sum_{k=1}^n \left( a_k - \frac{M}{N} b_k \right) \frac{\partial \Psi_k}{\partial u}} \\ B = \frac{\sum_{k=1}^n \left( b_k \frac{\partial N}{N \partial v} - \frac{\partial b_k}{\partial v} \right) \frac{\partial \Psi_k}{\partial u}}{\sum_{k=1}^n \left( b_k - \frac{N}{M} a_k \right) \frac{\partial \Psi_k}{\partial v}} \end{array} \right.$$

Prendiamo il punto iniziale  $u=0$ ,  $v=0$  e siano  $U_k$  e  $V_k$  i valori delle  $\frac{\partial \Psi_k}{\partial u}$  per  $v=0$  e delle  $\frac{\partial \Psi_k}{\partial v}$  per  $u=0$ , i valori  $U_k^0$  delle funzioni  $U_k$  (per  $u=0$ ) siano tali che l'espressione

$$\sum_{k=1}^n \left( a_k^0 - \frac{M^0}{N^0} b_k^0 \right) U_k^0$$

sia diversa da zero, e similmente per i valori  $V_k^0$ .

Supponiamo di avere calcolato (per  $u=0$ ,  $v=0$ ) i valori delle derivate di  $\Psi_k$  fino all'ordine  $s-1$  e quelle di  $A$  e  $B$  fino all'ordine  $s-2$ ; si avranno allora le derivate

$$\left( \frac{\partial^s \Psi_k}{\partial u^s} \right)_0, \quad \left( \frac{\partial^s \Psi_k}{\partial v^s} \right)_0$$

dalle relazioni

$$\left( \frac{\partial \Psi_k}{\partial u} \right)_{v=0} = U_k, \quad \left( \frac{\partial \Psi_k}{\partial v} \right)_{u=0} = V_k,$$

e le altre derivate di ordine  $s$  si ottengono dal secondo gruppo delle (22); dopo di che le equazioni che si ottengono dalle (25) per derivazione fanno conoscere le derivate di  $A$  e  $B$  fino all'ordine  $s-1$ .

Per quanto riguarda le derivate di  $\Phi$ , osserviamo che

$$\left( \frac{\partial^s \Phi}{\partial u^s} \right)_0 \quad \text{e} \quad \left( \frac{\partial^s \Phi}{\partial v^s} \right)_0$$

si ottengono dalle due ultime delle (22); le altre derivate si calcolano indifferentemente da questa o dalla prima, perchè, per il modo con cui sono

espresse  $A$  e  $B$  mediante le (25) le due ultime (22) sono coesistenti ed ammettono la prima come conseguenza differenziale.

L'integrale dipende frattanto da  $2n$  funzioni arbitrarie.

#### § 4. Esame di casi particolari.

7. Se nelle (22) prendiamo nulle alcune  $\Psi_k$ , per esempio

$$\Psi_1 = 0, \quad \Psi_2 = 0, \dots, \quad \Psi_s = 0 \quad (s < n)$$

si ottiene un sistema della stessa forma, e si potranno applicare le considerazioni precedenti, purchè fra le quantità

$$Na_k - Mb_k \quad (k = s + 1, \dots, n)$$

ve ne sia una almeno diversa da zero.

Supponiamo

$$Na_1 - Mb_1 \neq 0$$

e cerchiamo una soluzione delle (22) per la quale si abbia

$$\Psi_2 = 0, \quad \Psi_3 = 0, \dots, \quad \Psi_n = 0.$$

Siamo allora ridotti ad integrare il sistema

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} = A \frac{\partial \Phi}{\partial u} + B \frac{\partial \Phi}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial u \partial v} = A \frac{\partial \Psi_1}{\partial u} + B \frac{\partial \Psi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \Psi_1}{\partial v} = \frac{M}{a_1} \frac{\partial \Phi}{\partial v} \\ \frac{\partial \Psi_1}{\partial u} = \frac{N}{b_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \end{array} \right.$$

Eliminando  $\Psi_1$  fra le due ultime si perviene all'equazione

$$(27) \quad \left( \frac{M}{a_1} - \frac{N}{b_1} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{N}{b_1} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{M}{a_1} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial v}.$$

Preso una soluzione  $\Phi$  di questa, le due ultime (26) danno  $\Psi_1$  per quadrature, dopo di che le due prime fanno conoscere  $A$  e  $B$ .

Se è assegnato il valore di  $\frac{\partial \Psi_1}{\partial u}$  per  $v=0$ , se ne deduce quello di  $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$ ; similmente dal valore di  $\frac{\partial \Psi_1}{\partial v}$  per  $u=0$  se ne deduce quello di  $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$  ed il problema si riduce a quello di trovare una soluzione  $\Phi$  dell'equazione (27) che per  $v=0$  si riduce ad un'assegnata funzione  $U$  della sola  $u$  e per  $u=0$  si riduce ad una funzione  $V$  della sola  $v$ , pure assegnata, con la condizione

$$U^0 = V^0.$$

8. Interessa altresì osservare che il caso particolare ora osservato non dà una soluzione degenerare, ma una soluzione propria del problema, nel senso che se le funzioni  $X_r$  sono linearmente indipendenti, tali saranno anche le funzioni  $x_r$ .

Infatti le (23) in questo caso diventano

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_r}{\partial u} &= \frac{\partial \Phi}{\partial u} \left[ h\xi_r + l\eta_r + \sum_{k=1}^n \theta_k x_{kr} - \frac{N}{b_1} x_{1r} \right] \\ \frac{\partial x_r}{\partial v} &= \frac{\partial \Phi}{\partial v} \left[ h\xi_r + l\eta_r + \sum_{k=1}^n \theta_k x_{kr} - \frac{M}{a_1} x_{1r} \right], \end{aligned}$$

e se si avesse una relazione  $\Sigma c_r x_r = \text{cost.}$ , in cui le  $c_r$  siano costanti, seguirebbe

$$\begin{aligned} h\Sigma c_r \xi_r + l\Sigma c_r \eta_r + \Sigma_r c_r \Sigma_k \theta_k x_{kr} - \frac{N}{b_1} \Sigma c_r x_{1r} &= 0 \\ h\Sigma c_r \xi_r + l\Sigma c_r \eta_r + \Sigma_r c_r \Sigma_k \theta_k x_{kr} - \frac{M}{a_1} \Sigma c_r x_{1r} &= 0 \end{aligned}$$

donde sottraendo e sopprimendo il fattore non nullo  $\frac{N}{b_1} - \frac{M}{a_1}$ , si trova

$$\Sigma c_r x_{1r} = 0.$$

Da questa derivando ancora e tenendo presenti le (2), otteniamo

$$\Sigma c_r x_r = 0, \quad \Sigma c_r \eta_r = 0,$$

e per le (7)

$$\Sigma C_r X_r = 0,$$

contro l'ipotesi.

9. In generale vogliamo integrare il sistema (22) con funzioni

$$\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_s \quad (2 \leq s \leq n)$$

tutte diverse da zero, ma le rimanenti  $\Psi_k$  nulle, ed in condizioni generali. Dimostriamo che non può esistere una relazione lineare

$$(28) \quad \sum c_r x_r = \text{cost.}$$

a coefficienti costanti.

Anzitutto osserviamo che le costanti additive nelle  $\theta_k$  che si introducono dalle (20) e le funzioni  $\Psi_k$  e  $\Phi$  che si deducono dalle (22) non dipendono da un movimento qualsiasi della rete  $(x_r)$ , o ciò che è lo stesso non dipendono da un movimento della rete  $\bar{O}$ ; possiamo quindi assumere la (28) nella forma semplice

$$(29) \quad x_1 = \text{cost.}$$

e vedere se quest'ultima può avere luogo quando le costanti additive nelle  $\theta_k$  restano arbitrarie e le funzioni integrali siano costruite in modo generale.

Supponiamo, il che non lede la generalità, che per  $u=0$  e  $v=0$  le quantità  $a_1, b_1, a_2 b_1 - a_1 b_2$  siano diverse da zero.

Dalla (29) si ha

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = 0$$

e quindi per la prima delle (23) possiamo scrivere

$$(30) \quad h\xi_1 + l\eta_1 + \alpha_1 x_{11} + \alpha_2 x_{21} + \dots + \alpha_s x_{s1} + \theta_{s+1} x_{s+11} + \theta_{s+2} x_{s+21} + \dots + \theta_n x_{n1} = 0$$

in cui

$$\alpha_k = \theta_k - \frac{N \frac{\partial \Psi_k}{\partial u}}{\sum_{t=1}^s b_t \frac{\partial \Psi_t}{\partial u}};$$

epperò

$$\sum_{k=1}^s b_k \alpha_k = \sum_{k=1}^s \theta_k b_k - N.$$

Se il valore di  $\alpha_1$ , tratto da questa, si sostituisce in (30) si ottiene:

$$(31) \quad h\xi_1 + l\eta_1 + \frac{1}{b_1} \left( \sum_{k=1}^s \theta_k b_k - N \right) x_{11} + \alpha_2 \left( x_{21} - \frac{b_2}{b_1} x_{11} \right) + \alpha_3 \left( x_{31} - \frac{b_3}{b_1} x_{11} \right) + \dots + \alpha_s \left( x_{s1} - \frac{b_s}{b_1} x_{11} \right) + \theta_{s+1} x_{s+11} + \theta_{s+2} x_{s+21} + \dots + \theta_n x_{n1} = 0.$$

Ma le quantità  $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_s$  sono arbitrarie, per  $v = 0$ , e perciò si dovrà avere

$$b_1 x_{k_1} - b_k x_{1_1} = 0 \quad \text{per } v = 0;$$

quindi, derivando rispetto ad  $u$ , abbiamo ancora

$$q(a_1 x_{k_1} - a_k x_{1_1}) - (a_1 b_k - a_k b_1) \xi_1 = 0 \quad \text{per } v = 0.$$

Similmente si dovrà avere

$$a_1 x_{k_1} + a_k x_{1_1} = 0,$$

da cui

$$p(b_1 x_{k_1} - b_k x_{1_1}) + (a_1 b_k - a_k b_1) \eta_1 = 0$$

per  $u = 0$ .

Segue che, per i valori iniziali  $u = 0, v = 0$ , sarà:

$$x_{1_1}^0 = 0, \quad x_{2_1}^0 = 0, \dots, \quad x_{s_1}^0 = 0, \quad \xi_1^0 = 0, \quad \eta_1^0 = 0$$

e per la (31) segue

$$\theta_{s+1}^0 x_{s+1_1}^0 + \theta_{s+2}^0 x_{s+2_1}^0 + \dots + \theta_n^0 x_{n_1}^0 = 0,$$

da cui essendo arbitrari i valori  $\theta_k^0$ , si trae

$$x_{s+1_1}^0 = 0, \quad x_{s+2_1}^0 = 0, \dots, \quad x_{n_1}^0 = 0.$$

Ma allora per  $u = 0, v = 0$  il determinante (1) sarebbe nullo, il che è assurdo.

Si osservi che i valori arbitrari di  $\frac{\partial \Psi_k}{\partial u}$  per  $v = 0$  di  $\frac{\partial \Psi_k}{\partial v}$  per  $u = 0$  si danno indipendentemente dalle costanti additive nelle  $\theta_k$ .

## § 5. Proprietà delle reti normali ad una congruenza ciclica.

**10.** Dopo i teoremi sopra stabiliti, preveniamo facilmente alle proprietà delle reti normali ad una congruenza ciclica.

Dalle (23) abbiamo

$$dx_r = h \xi_r d\Phi + l \eta_r d\Phi + x_{1r} (\theta_1 d\Phi - d\Psi_1) + x_{2r} (\theta_2 d\Phi - d\Psi_2) + \\ + \dots + x_{nr} (\theta_n d\Phi - d\Psi_n),$$

e quindi, quadrando e sommando, otteniamo:

$$(32) \quad \sum_{r=1}^{n+2} dx_r^2 = \sum_{r=1}^n d\Psi_r^2 + d\Phi \left[ (h^2 + l^2 + \sum_{k=1}^n \theta_k^2) d\Phi - 2 \sum_{k=1}^n \Phi_k d\Psi_k \right]$$

Ora si verifica che l'espressione

$$\left( h^2 + l^2 + \sum_{k=1}^n \theta_k^2 \right) d\Phi - 2 \sum_{k=1}^n \theta_k d\Psi_k$$

è un differenziale esatto, cioè che le espressioni

$$\begin{aligned} & \left( h^2 + l^2 + \sum_{k=1}^n \theta_k^2 \right) \frac{\partial \Phi}{\partial u} - 2 \sum_{k=1}^n \theta_k \frac{\partial \Psi_k}{\partial u} \\ & \left( h^2 + l^2 + \sum_{k=1}^n \theta_k^2 \right) \frac{\partial \Phi}{\partial v} - 2 \sum_{k=1}^n \theta_k \frac{\partial \Psi_k}{\partial v}, \end{aligned}$$

sono le derivate di una stessa funzione, che chiamiamo  $\chi$ ; perciò la (32) prende la forma

$$\sum_{r=1}^{n+2} dx_r^2 = \sum_{r=1}^n d\Psi_r^2 + d\Phi \cdot d\chi.$$

Se poniamo infine

$$(33) \quad \begin{cases} \Phi = \Psi_{n+1} + i\Psi_{n+2} \\ \chi = \Psi_{n+1} - i\Psi_{n+2}, \end{cases}$$

troviamo la relazione definitiva

$$(34) \quad \sum_{r=1}^{n+2} dx_r^2 = \sum_{r=1}^{n+2} d\Psi_r^2.$$

**11.** Immaginiamo di avere integrato il sistema (22), nelle condizioni espresse al n.º 8 del paragrafo precedente, e dimostriamo che non può sussistere una relazione lineare

$$(35) \quad c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2 + \dots + c_s\Psi_s + c_{n+1}\Phi + c_{n+2}\chi = \text{cost.}$$

Infatti derivando rispetto ad  $u$  ed eliminando le derivate di  $\Phi$  e di  $\chi$ , si perviene con facile calcolo alla relazione

$$(36) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial \Psi_1}{\partial u} \right\} c_1 - 2c_{n+2}\theta_1 + \frac{b_1}{N} [c_{n+1} + c_{n+2}(h^2 + l^2 + \sum \theta_k^2)] \left\{ + \right. \\ & + \dots + \\ & \left. + \frac{\partial \Psi_s}{\partial u} \right\} c_s - 2c_{n+2}\theta_s + \frac{b_s}{N} [c_{n+1} + c_{n+2}(h^2 + l^2 + \sum \theta_k^2)] \left\{ = 0. \right. \end{aligned} \right.$$

Fissiamo i valori iniziali per  $v = 0$  di

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial u}, \quad \frac{\partial \Psi_3}{\partial u}, \dots, \quad \frac{\partial \Psi_s}{\partial u}$$

in guisa che il loro determinante Wronskiano sia diverso da zero, e similmente fissiamo i valori iniziali per  $u = 0$  di

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial v}, \quad \frac{\partial \Psi_3}{\partial v}, \dots, \quad \frac{\partial \Psi_s}{\partial v};$$

restano ancora arbitrari il valore di  $\frac{\partial \Psi_1}{\partial u}$  per  $v = 0$  e il valore di  $\frac{\partial \Psi_1}{\partial v}$  per  $u = 0$ , e ad una scelta di queste funzioni sussiste sempre per ipotesi una relazione analoga a (35); al variare della scelta potranno anche variare le costanti e alla peggio queste costanti saranno arbitrarie con  $\Psi_1$ .

Intanto la (36) per  $v = 0$  dà la funzione arbitraria  $\frac{\partial \Psi_1}{\partial u}$  espressa mediante funzioni determinate ed un numero finito di costanti arbitrarie, il che è assurdo; dunque si dovrà avere:

$$(37) \quad N(c_1 - 2c_{n-2}\theta_1) + b_1[c_{n+1} + c_{n+2}(h^2 + l^2 + \Sigma \theta_k^2)] = 0$$

per  $v = 0$ .

Allora derivando rispetto ad  $u$  si ottiene (per  $v = 0$ ):

$$(38) \quad \frac{\partial N}{\partial u}(c_1 - 2c_{n+2}\theta_1) - 2c_{n+2}h(Na_1 - Mb_1) + qa_1[c_{n+1} + c_{n+2}(h^2 + l^2 + \Sigma \theta_k^2)] = 0,$$

similmente (per  $u = 0$ ):

$$(39) \quad \begin{cases} M(c_1 - 2c_{n-2}\theta_1) + a_1[c_{n+1} + c_{n+2}(h^2 + l^2 + \Sigma \theta_k^2)] = 0 \\ \frac{\partial M}{\partial v}(c_1 - 2c_{n+2}\theta_1) + 2c_{n+2}l(Na_1 - Mb_1) + pb_1[c_{n+1} + c_{n+2}(h^2 + l^2 + \Sigma \theta_k^2)] = 0. \end{cases}$$

Per  $u = 0$ ,  $v = 0$  saranno verificate tutte queste relazioni (37), (38), (39); la (37) e la prima delle (39) danno

$$\begin{cases} c_{n+1} + c_{n+2}(h^2 + l^2 + \Sigma \theta_k^2) \\ c_1 - 2c_{n+2}\theta_1 = 0 \end{cases}$$

per  $u = 0$ ,  $v = 0$ . Ma allora per la (38) si ha subito

$$c_{n+1} = 0, \quad c_{n+2} = 0, \quad c_1 = 0.$$



Dall'analisi fatta risulta dunque che una relazione della forma (35), per le funzioni integrali costituite nel modo suddetto, esige che si abbia

$$c_1 = 0, \quad c_{n+1} = 0, \quad c_{n+2} = 0;$$

cioè la (35) è necessariamente della forma

$$c_2\Psi_2 + c_3\Psi_3 + \dots + c_s\Psi_s = \text{cost.}$$

Ma questa è assurda; infatti avendo essa luogo per tutti i valori di  $u$  e  $v$ , sussisterà anche per  $v=0$ , e ciò non può essere, perchè abbiamo preso le condizioni iniziali per  $v=0$  di

$$\frac{\partial\Psi_2}{\partial u}, \quad \frac{\partial\Psi_3}{\partial u}, \dots, \quad \frac{\partial\Psi_s}{\partial u}$$

in guisa che il Wronskiano sia diverso da zero.

Infine con procedimento poco diverso da quello usato al n.° 8 del paragrafo precedente si prova che la funzione  $\Psi_1$  non è funzione lineare delle coordinate  $x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$ .

**12.** Siamo ora in grado di *classificare* le reti normali ad una congruenza *ciclica*.

Consideriamo dapprima il caso generale in cui  $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_n$  siano tutte diverse da zero; allora la rete  $(x_r)$  dello spazio  $S_{n+2}$  si deforma in una rete dello stesso spazio ed è quindi  $nC$ . Perciò: *Nello spazio  $S_{n+2}$  una rete normale ad una congruenza  $C$  è in generale  $nC$ .*

**13.** Consideriamo ora il caso in cui  $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_s$  siano diverse da zero, ma le altre  $\Psi_k$  nulle; allora la rete  $(x_r)$  di  $S_{n+2}$  si deforma in una rete  $\Psi_k$  dello spazio  $S_{s+2}$ , ed è quindi  $sC$ .

Ricordando il modo con cui si ottengono le funzioni integrali, concludiamo:

*In uno spazio  $S_{n+2}$  fra le reti normali ed una congruenza  $C$  vi sono infinite reti  $sC$  ( $s < n$ ), dipendenti da  $2s$  funzioni arbitrarie.*

**14.** In particolare per  $s=1$  si ha:

*In uno spazio  $S_{n+2}$  fra le reti normali ad una congruenza ciclica vi sono infinite reti cicliche dipendenti da due funzioni arbitrarie.*

15. Nello spazio ordinario  $S_3$  queste proposizioni si confondono nella sola già nota:

*Nello spazio  $S_3$  una rete normale ad una congruenza ciclica è pure ciclica.*

### § 6. Soluzioni singolari.

16. Nello spazio ordinario  $S_3$  non esiste altra configurazione oltre a questa ora osservata; ma se la dimensione dello spazio è maggiore di 3, si possono avere soluzioni singolari del problema, per esempio si può avere una rete *iperciclica*. Supponendo  $n + 2 \geq 4$  proponiamoci di ottenere una rete iperciclica.

Basta integrare il sistema (22), ponendo

$$\Psi_3 = 0, \quad \Psi_4 = 0, \dots, \quad \Phi = 0.$$

Si ha così

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial u \partial v} = A \frac{\partial \Psi_1}{\partial u} + B \frac{\partial \Psi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial u \partial v} = A \frac{\partial \Psi_2}{\partial u} + B \frac{\partial \Psi_2}{\partial v} \end{array} \right.$$

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Psi_1}{\partial u} = -\frac{b_2}{b_1} \frac{\partial \Psi_2}{\partial u} \\ \frac{\partial \Psi_1}{\partial v} = -\frac{a_1}{a_2} \frac{\partial \Psi_2}{\partial v} \end{array} \right.$$

Se fra le due ultime eliminiamo  $\Psi_1$ , si ottiene per  $\Psi_2$  una equazione alle derivate parziali seconde del tipo di LAPLACE; note  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$  si deducono dalle (40) le funzioni incognite  $A$  e  $B$ .

Per una soluzione siffatta si avrà

$$\sum_{r=1}^{n+2} dx_r^2 = d\Psi_1^2 + d\Psi_2^2$$

e la rete è perciò *iperciclica*.

Ma affinchè non si sospetti che il risultato ora ottenuto sia illusorio, bisognerà accertarsi che non esiste una relazione lineare

$$(42) \quad \sum_{r=1}^n c_r x_r = C\Psi$$

a coefficienti costanti.

Ed infatti supponiamo soddisfatta la (42) e per conseguenza

$$\sum_{r=1}^{n+2} c_r \frac{\partial x_r}{\partial u} = C \frac{\partial \Psi_1}{\partial u}, \quad \sum_{r=1}^n c_r \frac{\partial x_r}{\partial v} = C \frac{\partial \Psi_1}{\partial v}.$$

Sostituendo in questa i valori (23) delle derivate di  $x_r$ , si ottiene:

$$(43) \quad \begin{cases} b_1 \sum c_r x_{1r} + b_2 \sum c_r x_{2r} = C b_1 \\ a_1 \sum c_r x_{1r} + a_2 \sum c_r x_{2r} = C a_1 \end{cases}$$

per tutti i valori di  $u$  e  $v$ .

Se ne deduce

$$\sum c_r x_{1r} = C, \quad \sum c_r x_{2r} = 0,$$

e per conseguenza risulta una relazione lineare fra i parametri direttori del raggio della congruenza, contro l'ipotesi.

Le funzioni  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$  che si traggono dalle (41) danno dunque un'effettiva soluzione del problema.

*Messina, ottobre 1923.*



# Ueber die Lösung der zweiten Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie

Von ARTHUR KORN (a Charlottenburg)

---

## I.

Das Problem, den Gleichgewichtszustand eines elastischen Körpers bei gegebenen Drucken an der Oberfläche zu finden (zweite Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie) kann bekanntlich auf die folgende Aufgabe zurückgeführt werden: Man sucht drei mit ihren ersten Ableitungen eindeutige und stetige Funktionen  $u, v, w$  eines Raumbgebietes  $\tau$ , welche in  $\tau$  den 3 Differentialgleichungen:

$$(1) \quad \Delta u + k \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \dots \quad (1)$$

an der Oberfläche  $\omega$  von  $\tau$  den Grenzbedingungen:

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{1-k}{2} \theta \cos(\nu x) - \frac{1}{2} \{ w \cos(\nu y) - v \cos(\nu z) \} + f_1, \dots$$

genügen, wenn  $\nu$  die innere Normale von  $\omega$  vorstellt,  $f_1, f_2, f_3$  sind dabei drei Funktionen der Stelle an der Oberfläche  $\omega$ , welche den Bedingungen genügen:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\omega} f_1 d\omega = 0, \dots \\ \int_{\omega} (y f_3 - z f_2) d\omega = 0, \dots, \end{array} \right.$$

---

(1) Wir benützen stets die Abkürzungen:

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$u = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \dots$$

und die an  $\omega$  derart stetig sind, dass für irgend zwei Punkte  $(x_1, y_1, z_1)$  und  $(x_2, y_2, z_2)$  der Oberfläche:

$$(4) \quad |f_1(x_2, y_2, z_2) - f_1(x_1, y_1, z_1)| \leq b r_{12}^{\bar{\omega}}, \dots$$

wo  $b$  eine endliche Konstante,  $r_{12}$  den Abstand der beiden Punkte,  $\bar{\omega}$  eine Zahl  $> 0$  vorstellt.

$k$  ist eine der Elastizität des Körpers entsprechende Konstante  $> \frac{1}{3}$ .

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass  $\tau$  einfach zusammenhängend ist (sonst sind gewisse Komplikationen zu beachten), und bezüglich der Oberfläche  $\omega$  nehmen wir an, dass sie ganz im Endlichen liegt und dass  $\cos(vx)$ ,  $\cos(vy)$ ,  $\cos(vz)$  mit ihren ersten Ableitungen an der Oberfläche eindeutig und stetig sind.

Ich habe dieses Problem zum ersten Male ganz allgemein im Jahre 1908<sup>(1)</sup> gelöst, indem ich die Aufgabe zunächst für  $k = 1$  löste und mit Hilfe dieser Lösung dann, unter Anwendung der Methode der sukzessiven Näherungen zur allgemeinen Lösung für ein beliebiges  $k > \frac{1}{3}$  gelangte.

Auch die Lösung des « preliminären Problems »

$$(5) \quad \Delta u + \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \dots \text{ in } \tau,$$

$$(6) \quad \frac{\partial u}{\partial v} = -\frac{1}{2} (\mathbf{w} \cos(vy) - \mathbf{v} \cos(vz)) + f_1, \dots \text{ an } \omega,$$

fand ich mit Hilfe der Methode der sukzessiven Näherungen. Ich legte mir nun die Frage vor, ob die Methode, welche zur Lösung des preliminären Problems führte, nicht sogleich zur Lösung des Problems (1) (2) für irgend ein anderes  $k$  verwandt werden kann. Ich werde hier zeigen, dass dies in der Tat möglich ist; wir kommen hierdurch zu einer neuen allgemeinen Lösung der zweiten Randwertaufgabe und zu neuen Reihenentwickelungen der Lösungen.

Wir bilden sukzessive die folgenden Potentialfunktionen  $u'_j, v'_j, w'_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ) des Gebietes  $\tau$  mit den Mittelwerten null in  $\tau$  und den nor-

(<sup>1</sup>) *Solution générale du problème d'équilibre dans la théorie de l'élasticité, dans le cas où les efforts sont donnés à la surface.* Ann. de Toulouse 1908.

*Sur certaines questions qui se rattachent au problème des efforts dans la théorie de l'élasticité.* Ann. de Toulouse 1910

malen Ableitungen an  $\omega$ :

$$(7) \quad \frac{\partial u_0'}{\partial \nu} = f_1, \dots$$

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u_j'}{\partial \nu} &= -\frac{k+2}{k} \frac{\partial u_{j-1}'}{\partial \nu} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \nu} \int_{\tau} \theta'_{j-1} \frac{d\tau}{r} \\ &+ \frac{1-k}{k} \theta'_{j-1} \cos(\nu x) - \frac{1+k}{k} \{ \mathbf{w}'_{j-1} \cos(\nu y) - \mathbf{v}'_{j-1} \cos(\nu z) \} \\ &+ \frac{2}{k} \frac{\partial U'_{j-1}}{\partial \nu} + \frac{1}{k} \{ \mathbf{W}'_{j-1} \cos(\nu y) - \mathbf{V}'_{j-1} \cos(\nu z) \}, \dots \end{aligned} \right\} j=1, 2, \dots$$

Dabei sollen die  $U'_j$ ,  $V'_j$ ,  $W'_j$  durch die folgenden Gleichungen definiert sein:

$$(9) \quad U'_j = \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \left( \frac{\partial \varphi'_j}{\partial z} \cos(\nu y) - \frac{\partial \varphi'_j}{\partial y} \cos(\nu z) \right) \frac{d\omega}{r}, \dots, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

wenn  $\varphi'_j$  die Potentialfunktion des Gebietes  $\tau$  mit der Eigenschaft:

$$(10) \quad \frac{\partial \psi'_j}{\partial \nu} \equiv \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \nu} \int_{\omega} \varphi'_j \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega = \\ = \mathbf{u}'_j \cos(\nu x) + \mathbf{v}'_j \cos(\nu y) + \mathbf{w}'_j \cos(\nu z) \equiv \mathbf{u}'_{j\nu}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

an  $\omega$  ist <sup>(4)</sup>.

Wenn wir beweisen können, dass die Reihen

$$(11) \quad \begin{cases} u' = u_0' + u_1' + u_2' + \dots, \dots \\ U' = U_0' + U_1' + U_2' + \dots, \dots \end{cases}$$

Potentialfunktionen des Gebietes  $\tau$  sind, gleichmässig konvergent im Gebiete  $\tau$  mit ihren ersten Ableitungen, dann werden sie Lösungen des Problems:

$$\frac{\partial u'}{\partial \nu} = -\frac{k+2}{k} \frac{\partial u'}{\partial \nu} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \nu} \int_{\tau} \theta' \frac{d\tau}{r} \\ + \frac{1-k}{k} \theta' \cos(\nu x) - \frac{1+k}{k} \{ \mathbf{w}' \cos(\nu y) - \mathbf{v}' \cos(\nu z) \} \\ + \frac{2}{k} \frac{\partial U'}{\partial \nu} + \frac{1}{k} \{ \mathbf{W}' \cos(\nu y) - \mathbf{V}' \cos(\nu z) \} + f_1, \dots \quad \text{an } \omega$$

<sup>(4)</sup> Eindeutig bestimmt bis auf eine willkürliche, additive Konstante, die für (9) nicht in betracht kommt.

Man beachte die Modifikation gegen das frühere preliminäre Problem ( $k=1$ ), die durch die Verallgemeinerung notwendig geworden ist.

sein, oder, was dasselbe ist, Lösungen des Problems:

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial v} &= -\frac{1}{4\pi} \frac{k}{k+1} \frac{\partial^2}{\partial x \partial v} \int_{\tau} \theta' \frac{d\tau}{r} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{1-k}{1+k} \theta' \cos(vx) - \frac{1}{2} \{ \mathbf{w}' \cos(vy) - \mathbf{v}' \cos(vz) \} \\ &+ \frac{1}{1+k} \frac{\partial U'}{\partial v} + \frac{1}{2(1+k)} \{ \mathfrak{U}' \cos(vz) - \mathbf{U}' \cos(vz) \} + \frac{k}{2(1+k)} f_1, \dots \end{aligned} \right.$$

an  $\omega$  <sup>(1)</sup>.

Setzen wir dann:

$$(13) \quad u = \frac{2(1+k)}{k} u' - \frac{2}{k} U' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \theta' \frac{d\tau}{r}, \dots,$$

sodass:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \theta &= \frac{2}{k} \theta', \\ \mathbf{u} &= \frac{2(1+k)}{k} \mathbf{u}' - \frac{2}{k} \mathfrak{U}', \dots \end{aligned} \right.$$

dann folgt:

$$(15) \quad \Delta u + k \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \dots \text{ in } \tau;$$

$$(16) \quad \frac{\partial u}{\partial v} = \frac{1-k}{2} \theta \cos(vx) - \frac{1}{2} (\mathbf{w} \cos(vy) - \mathbf{v} \cos(vz)) + f_1, \dots \text{ an } \omega.$$

Die durch (13) gegebenen Funktionen stellen also Lösungen des gestellten Problems dar.

Für  $k=1$  gehen die Untersuchungen in die früheren das preliminäre Problem betreffenden Untersuchungen über <sup>(2)</sup>.

Die Konvergenzfragen für die Reihen (11) führen von selbst zu den « verallgemeinerten preliminären Triplets »  $\overline{\overline{u}}'_j, \overline{\overline{v}}'_j, \overline{\overline{w}}'_j$ , Potentialfunktionen

<sup>(1)</sup> Durch Hinzufügung der Bedingungen des Verschwindens der Mittelwerte  $u', v', w$  in  $\tau$ :

$$(12') \quad \int_{\tau} u' d\tau = 0, \dots$$

kann das Problem zu einem eindeutigen gemacht werden.

<sup>(2)</sup> Abgesehen von einer geringen, vereinfachenden Modifikation.



des Gebietes  $\tau$  mit den Eigenschaften:

$$(17) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_j'}{\partial \nu} &= \lambda_j \left[ -\frac{k+2}{k} \frac{\partial \bar{u}_j'}{\partial \nu} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \nu} \int_{\tau} \frac{\bar{\theta}_j'}{r} d\tau \right. \\ &+ \frac{1-k}{k} \bar{\theta}_j' \cos(\nu x) - \frac{1+k}{k} \{ \bar{w}_j' \cos(\nu y) - \bar{v}_j' \cos(\nu z) \} \\ &\left. + \frac{2}{k} \frac{\partial \bar{U}_j'}{\partial \nu} + \frac{1}{k} \{ \bar{\omega}_j' \cos(\nu y) - \bar{V}_j' \cos(\nu z) \} \right], \dots \text{ an } \omega, \end{aligned} \right.$$

$$(18) \quad \int_{\tau} \bar{u}_j' d\tau = 0, \dots$$

mit den zugehörigen Zahlen  $\lambda_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ), und zu den allgemeinen Entwicklungen nach diesen Triplets <sup>(1)</sup>.

## II.

Wir denken die sukzessiven Funktionentriplets  $u_j', v_j', w_j'$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ) konstruiert, welche den Gleichungen (7) (8) entsprechen, und fügen noch die Gleichungen:

$$\int_{\tau} u_j' d\tau = 0, \dots$$

hinzu, wodurch die Bestimmung der Triplets eindeutig wird; wir wollen die Konvergenz der Reihen:

$$(19) \quad u' = u_0' + \lambda u_1' + \lambda^2 u_2' + \dots, \dots$$

untersuchen, wenn  $\lambda$  irgend eine Zahl vorstellt.

<sup>(1)</sup> Diese Gleichungen (17) kann man auch in der folgenden Form schreiben:

$$(17') \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_j'}{\partial \nu} &= -\frac{\lambda_j k}{k + \lambda_j(k+2)} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \nu} \int_{\tau} \frac{\bar{\theta}_j'}{r} d\tau \\ &+ \lambda_j \frac{1-k}{k + \lambda_j(k+2)} \bar{\theta}_j' \cos(\nu x) - \lambda_j \frac{1+k}{k + \lambda_j(k+2)} \{ \bar{w}_j' \cos(\nu y) - \bar{v}_j' \cos(\nu z) \} \\ &+ \frac{2\lambda_j}{k + \lambda_j(k+2)} \frac{\partial \bar{U}_j'}{\partial \nu} + \frac{\lambda_j}{k + \lambda_j(k+2)} \{ \bar{\omega}_j' \cos(\nu y) - \bar{V}_j' \cos(\nu z) \}, \dots \end{aligned} \right.$$

Wie in der früheren Abhandlung, werden wir zunächst drei Hilfssätze über die sukzessiven Funktionentriplets  $u'_j, v'_j, w'_j$  ableiten, welche für die Konvergenzbetrachtungen von grundlegender Bedeutung sind.

Hilfssatz 1. Es seien

$$u'_j, v'_j, w'_j \quad (j = 0, 1, 2, \dots, p)$$

$p + 1$  Triplets von Potentialfunktionen des Gebietes  $\tau$ , und sei die Stetigkeit ihrer ersten Ableitungen derart, dass:

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta'_j(x_2, y_2, z_2) - \theta'_j(x_1, y_1, z_1) \leq B'_j r_{12}^{\bar{\omega}} \\ \mathbf{u}'_j(x_2, y_2, z_2) - \mathbf{u}'_j(x_1, y_1, z_1) \leq B'_j r_{12}^{\bar{\omega}}, \dots \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 < \bar{\omega} < 1, \\ B'_j \text{ Konstanten,} \\ j = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right.$$

für irgend zwei Punkte  $(x_1, y_1, z_1)$  und  $(x_2, y_2, z_2)$  in  $\tau$  mit der Entfernung  $r_{12}$ ; wir setzen

$$(21) \quad u' = \alpha_0 u'_0 + \alpha_1 u'_1 + \alpha_2 u'_2 + \dots + \alpha_p u'_p, \dots$$

$$(22) \quad B' = \alpha_0 B'_0 + \alpha_1 B'_1 + \alpha_2 B'_2 + \dots + \alpha_p B'_p,$$

wo  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$   $p + 1$  reelle, der Bedingung:

$$(23) \quad \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_p^2 = 1$$

genügende Konstanten sind, und wir definieren die drei Potentialfunktionen  $\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}'$  des Gebietes  $\tau$  durch die Bedingungen:

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{u}'}{\partial \nu} = -\frac{k+2}{k} \frac{\partial u'}{\partial \nu} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \nu} \int_{\tau} \theta' \frac{d\tau}{r} \\ + \frac{1-k}{k} \theta' \cos(\nu x) - \frac{1+k}{k} \{ \mathbf{w}' \cos(\nu y) - \mathbf{v}' \cos(\nu z) \} \\ + \frac{2}{k} \frac{\partial U'}{\partial \nu} + \frac{1}{k} \{ \mathbf{U}' \cos(\nu y) - \mathbf{V}' \cos(\nu z) \}, \dots \quad \text{an } \omega, \\ \int_{\tau} u' d\tau = 0, \dots, \end{array} \right.$$

dann kann man stets für irgend ein  $k$ , das in den Grenzen

$$(25) \quad 0 < |k| \leq 1$$

liegt, die Konstanten  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  so wählen, dass:

$$(26) \quad \bar{I} \leq \varepsilon_p I + \varepsilon_p B'^2,$$

wenn wir

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} I &= (1 - k) \int_{\tau} \theta'^2 d\tau + (1 + k) \int_{\tau} (\mathbf{u}'^2 + \mathbf{v}'^2 + \mathbf{w}'^2) d\tau \\ &\quad - \int_{\tau} \left\{ \left( \frac{\partial \Psi'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi'}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi'}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau, \quad (1) \\ \bar{I} &= (1 - k) \int_{\tau} \bar{\theta}'^2 d\tau + (1 + k) \int_{\tau} (\bar{\mathbf{u}}'^2 + \bar{\mathbf{v}}'^2 + \bar{\mathbf{w}}'^2) d\tau - \\ &\quad - \int_{\tau} \left\{ \left( \frac{\partial \bar{\Psi}'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{\Psi}'}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{\Psi}'}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau \end{aligned} \right.$$

setzen und  $\epsilon_p, \epsilon_p'$  positive Zahlen sind, die man durch Vergrößerung der Zahl  $p$  beliebig klein machen kann, und die von der Wahl der Triplets  $u_j', v_j', w_j', (j=0, 1, 2, \dots, p)$  ganz unabhängig sind.

Der Beweis ist ganz analog, wie in dem Falle  $k=1$ . Wir zerlegen das Gebiet in  $m$  Teile, wobei  $m = \frac{p}{4}$  oder gleich der nächsten ganzen Zahl unterhalb  $\frac{p}{4}$  zu wählen ist, in solcher Weise, dass in jedem Teilgebiete die grösste Entfernung zwischen je zwei Punkten

$$(28) \quad r_{12} \leq \frac{\alpha}{\sqrt{p}}$$

ist, wo  $\alpha$  eine endliche, nur von der Gestalt der Fläche  $\omega$  abhängende Konstante vorstellt, und dass:

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{\tau_i} \theta' d\tau &= 0 \\ \int_{\tau_i} \bar{\mathbf{u}}' d\tau &= 0, \dots \end{aligned} \right.$$

(1) Wir können, um einzusehen, dass  $I$  und  $\bar{I}$  positiven Grössen sind, auch schreiben:

$$I = (1 - k) \int_{\tau} \theta'^2 d\tau + \int_{\tau} \left[ \left( \mathbf{u}' - \frac{\partial \Psi'}{\partial x} \right)^2 + \left( \mathbf{v}' - \frac{\partial \Psi'}{\partial y} \right)^2 + \left( \mathbf{w}' - \frac{\partial \Psi'}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau + k \int_{\tau} (\mathbf{u}'^2 + \mathbf{v}'^2 + \mathbf{w}'^2) d\tau,$$

entsprechend  $\bar{I}$ .

für jedes Teilgebiet  $\tau_i$ ; diese Gleichungen stellen  $p$  (oder weniger) lineare, homogene Gleichungen für die  $p + 1$  Konstanten

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$$

dar, die noch die Gleichung

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_p^2 = 1$$

zu erfüllen haben.

Die durch die Gleichungen (24) definierten Potentialfunktionen  $\bar{u}'$ ,  $\bar{v}'$ ,  $\bar{w}'$  des Gebietes  $\tau$  haben stetige erste Ableitungen, deren Stetigkeit den Bedingungen genügt:

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\bar{\theta}(x_2, y_2, z_2) - \bar{\theta}(x_1, y_1, z_1)| \leq (c_1 \text{ abs. Max. } (\theta', u', v', w') + c_2 B') r_{12}^{\bar{\omega}}, \\ |\bar{u}(x_2, y_2, z_2) - \bar{u}(x_1, y_1, z_1)| \leq (c_1 \text{ abs. Max. } (\theta', u', v', w') + c_2 B') r_{12}^{\bar{\omega}}, \dots \end{array} \right.$$

für irgend zwei Punkte  $(x_1, y_1, z_1)$  und  $(x_2, y_2, z_2)$  von  $\tau$  im Abstände  $r_{12}$ ; dabei sind  $c_1, c_2$  zwei endliche Konstanten, welche nur von der Gestalt der Fläche  $\omega$ , von  $h$  und  $\bar{\omega}$  abhängen.

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (29) ist für jeden Punkt  $(\xi, \eta, \zeta)$  von  $\tau_i$ :

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\theta}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{\tau_i} \int_{\tau_i} \{ \bar{\theta}(\zeta, \eta, \zeta) - \bar{\theta}(x, y, z) \} d\tau, \\ \bar{u}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{\tau_i} \int_{\tau_i} \{ \bar{u}(\xi, \eta, \zeta) - \bar{u}(x, y, z) \} d\tau, \dots \end{array} \right.$$

somit nach (28) und (30):

$$\bar{\theta}(\xi, \eta, \zeta) \leq \{ c_1 \text{ abs. Max. } (\theta', u', v', w') + c_2 B' \} \left( \frac{\alpha}{\sqrt{p}} \right)^{\bar{\omega}}$$

$$\bar{u}(\xi, \eta, \zeta) \leq \{ c_1 \text{ abs. Max. } (\theta', u', v', w') + c_2 B' \} \left( \frac{\alpha}{\sqrt{p}} \right)^{\bar{\omega}}, \dots$$

und

$$(32) \quad \bar{I} \leq 2 \int_{\tau} (\bar{\theta}^2 + \bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2) d\tau,$$

$$\leq \{ C_1 [\text{abs. Max. } (\theta', u', v', w')]^2 + C_2 B'^2 \} \frac{1}{\sqrt{p^2 \bar{\omega}}}$$

wo  $C_1$  und  $C_2$  zwei endliche Konstanten sind, die nur von der Gestalt der

Oberfläche  $\omega$ , von  $k$  und  $\tilde{\omega}$  abhängen. Nun sind  $\theta'$ ,  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$ ,  $\frac{\partial \psi'}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \psi'}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \psi'}{\partial z}$  von der Art (30) in  $\tau$  stetig und genügen der Laplace'schen Gleichung, somit ist stets:

$$\begin{aligned} |\theta'| &\leq \frac{c}{\rho^3} \sqrt{\int_{\tau} \theta'^2 d\tau + \rho \tilde{\omega} B'}, \\ |u'| &\leq \frac{c}{\rho^3} \sqrt{\int_{\tau} u'^2 d\tau + \rho \tilde{\omega} B'}, \dots \\ \left| u' - \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right| &\leq \frac{c}{\rho^3} \sqrt{\int_{\tau} \left( u' - \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right)^2 d\tau + c' \rho \tilde{\omega} B'}, \dots \\ \left| \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right| &\leq \frac{c}{\rho^3} \sqrt{\int_{\tau} \left( \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right)^2 d\tau + c' \rho \tilde{\omega} B'}, \dots, \end{aligned}$$

wö  $\rho$  eine genügend klein gewählte Strecke,  $c$  und  $c'$  zwei endliche Konstanten sind, die nur von der Gestalt der Oberfläche  $\omega$ , von  $\tilde{\omega}$  und  $k$  abhängen (<sup>1</sup>), und es folgt so unmittelbar aus (32) die Behauptung (26), wenn man bedenkt, dass man auch bei genügend klein gewählten  $\rho$  durch Vergrößerung von  $p$

$$\frac{1}{\rho^6} \cdot \frac{1}{\sqrt{p^2 \tilde{\omega}}}$$

unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabdrücken kann, denn die obere Grenze von  $\rho$  ist in keiner Weise von den Funktionen  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  abhängig.

*Hilfssatz 2.* Es seien  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  drei Potentialfunktionen des Gebietes  $\tau$ , und sei die Stetigkeit ihrer ersten Ableitungen derart, dass:

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\theta'(x_2, y_2, z_2) - \theta'(x_1, y_1, z_1)| \leq B' r_{12}^{\tilde{\omega}} \\ |u'(x_2, y_2, z_2) - u'(x_1, y_1, z_1)| \leq B' r_{12}^{\tilde{\omega}}, \dots \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0 < \tilde{\omega} < 1 \\ B' \text{ endl. Konst.} \end{array}$$

für irgend zwei Punkte  $(x_1, y_1, z_1)$  und  $(x_2, y_2, z_2)$  des Gebietes  $\tau$  im Abstände  $r_{12}$ ; wir definieren die drei Potentialfunktionen  $\bar{u}'$ ,  $\bar{v}'$ ,  $\bar{w}'$  des

(<sup>1</sup>) Man vgl. A. KORN, *Allgemeine Lösung des biharmonischen Problems*. (Krakauer Anzeiger, 1907, S. 847).

Gebietes  $\tau$  durch die Bedingungen ( $|k| < 1$ )

$$(34) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}'}{\partial \nu} &= -\frac{k+2}{k} \frac{\partial u'}{\partial \nu} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \nu} \int_{\tau} \theta' \frac{d\tau}{r} \\ &+ \frac{1+k}{k} \theta' \cos(\nu x) - \frac{1+k}{k} \{ \mathbf{w}' \cos(\nu y) - \mathbf{v}' \cos(\nu z) \} \\ &+ \frac{2}{k} \frac{\partial U'}{\partial \nu} + \frac{1}{k} \{ \mathbf{U}' \cos(\nu y) - \mathbf{V}' \cos(\nu z) \}, \dots \text{ an } \omega, \\ &\int_{\tau} u' d\tau = 0, \dots, \end{aligned} \right.$$

dann ist stets für irgend zwei Punkte  $(x_1, y_1, z_1)$  und  $(x_2, y_2, z_2)$  des Gebietes  $\tau$  im Abstände  $r_{12}$ :

$$(35) \left\{ \begin{aligned} |\theta'(x_2, y_2, z_2) - \theta'(x_1, y_1, z_1)| &\leq \left\{ \frac{c}{\varepsilon^{1+\bar{\omega}}} \sqrt{I} + \varepsilon B' \right\} r_{12}^{\bar{\omega}}, \\ |\bar{\mathbf{u}}'(x_2, y_2, z_2) - \bar{\mathbf{u}}'(x_1, y_1, z_1)| &\leq \left\{ \frac{c}{\varepsilon^{1+\bar{\omega}}} \sqrt{I} + \varepsilon B' \right\} r_{12}^{\bar{\omega}}, \dots, \end{aligned} \right.$$

wo  $c$  eine endliche Konstante ist, die nur von der Gestalt der Fläche  $\omega$ , von  $k$  und  $\bar{\omega}$  abhängt, und  $\varepsilon$  eine positive Zahl, die man *beliebig klein* wählen kann.

Wir bemerken zum Beweise, dass wir (34) auch so schreiben können:

$$(36) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \bar{u}' + \frac{k+2}{k} u' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \theta' \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \mathbf{w}' \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \mathbf{v}' \frac{d\tau}{r} - \frac{2}{k} U' - U \right) \\ = -\frac{1}{2\pi} \left( \frac{\partial^2}{\partial y \partial \nu} \int_{\tau} \mathbf{w}' \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial^2}{\partial z \partial \nu} \int_{\tau} \mathbf{v}' \frac{d\tau}{r} \right)_a, \dots \text{ an } \omega, \end{aligned} \right.$$

wenn wir durch den Index  $(-)_a$  andeuten, dass die Werte an der äusseren Seite der Fläche  $\omega$  zu nehmen sind und mit  $U, V, W$  die drei Potentialfunktionen des Gebietes  $\tau$  mit den normalen Ableitungen

$$(37) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \nu} &= \frac{1-k}{k} \{ \theta' \cos(\nu x) - \mathbf{w}' \cos(\nu y) + \mathbf{v}' \cos(\nu z) \} \\ &+ \frac{1}{k} \{ \mathbf{U}' \cos(\nu y) - \mathbf{V}' \cos(\nu z) \}, \dots \text{ an } \omega \end{aligned} \right.$$

bezeichnen.

Mit Rücksicht auf die Methode des arithmetischen Mittels <sup>(1)</sup> und die Ungleichheiten:

$$\left| D_2 \int_{\tau} \theta' \frac{d\tau}{r} \right| \leq \gamma \frac{\text{abs. Max.}(\theta', u', v', w')}{\epsilon_1} + \epsilon_1 B',$$

$$\left| D_2 \int_{\tau} u' \frac{d\tau}{r} \right| \leq \gamma \frac{\text{abs. Max.}(\theta', u', v', w')}{\epsilon_1} + \epsilon_1 B', \dots,$$

wo  $D_2$  irgend eine zweite Ableitung in  $\tau$ ,  $\gamma$  eine endliche, nur von der Gestalt der Fläche  $\omega$  abhängende,  $\epsilon_1$  eine positive Zahl vorstellt, die man *beliebig klein* wählen kann <sup>(2)</sup>, wird:

$$(38) \left\{ \begin{aligned} \bar{u}' + \frac{k+2}{k} u' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \theta' \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w' \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v' \frac{d\tau}{r} - \frac{2}{k} U' - U \\ = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w' \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v' \frac{d\tau}{r} \right) + \Xi, \dots, \text{ an } \omega, \end{aligned} \right.$$

wobei  $\Xi, H, Z$  so beschaffen sind, dass ihre ersten Ableitungen an  $\omega$  von der Art stetig sind, dass für irgend zwei Punkte  $(x_1, y_1, z_1)$  und  $(x_2, y_2, z_2)$  von  $\omega$  im Abstände  $r_{12}$ :

$$(39) \left\{ \begin{aligned} |D_1 \Xi(x_2, y_2, z_2) - D_1 \Xi(x_1, y_1, z_1)| \\ \leq \left[ \Gamma \frac{\text{abs. Max.}(\theta', u', v', w')}{\epsilon_2} + \epsilon_2 B' \right] r_{12}^{\bar{\omega}}, \dots, \end{aligned} \right.$$

wenn  $\Gamma$  eine endliche, nur von der Gestalt der Fläche  $\omega$  abhängende Konstante,  $\epsilon_2$  eine positive Zahl ist, die man *beliebig klein* wählen kann.

Wir können die Gleichungen (38) mit Rücksicht auf (37) und die Methode

<sup>(1)</sup> Man vgl. die genau analoge Betrachtung in meiner Abhandlung: *Sur les équations de l'élasticité* (Ann. Ec. Norm. (3) 24, 1907)

<sup>(2)</sup> Mit Rücksicht auf HÖLDER, *Beiträge zur Potentialtheorie*, Diss. Stuttgart 1882 und (33).

des arithmetischen Mittels auch so schreiben:

$$\begin{aligned}
 (40) \quad & \left\{ \begin{aligned}
 & \bar{u}' + \frac{k+2}{k} u' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \theta' \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w' \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v' \frac{d\tau}{r} - \frac{2}{k} U' \\
 & = - \frac{1}{2\pi} \frac{1-k}{k} \int_{\omega} (\theta' \cos(\nu x) - w' \cos(\nu y) + v' \cos(\nu z)) \frac{d\omega}{r} - \\
 & \quad - \frac{1}{2\pi k} \int_{\omega} (\mathcal{W} \mathcal{A}' \cos(\nu y) - \mathcal{V}' \cos(\nu z)) \frac{d\omega}{r} \\
 & + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w' \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v' \frac{d\tau}{r} \right) + \Xi, \dots, \text{ an } \omega,
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

wo  $\Xi, H, Z$  zwar nicht dieselben Funktionen, wie in (38), sind, aber wiederum die Eigenschaft (39) haben. Nach (40) und (36) folgt an der Oberfläche  $\omega$ :

$$\begin{aligned}
 (41) \quad & \left\{ \begin{aligned}
 & \bar{u}' + \frac{k+2}{k} u' - 2u' - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} u'_v \frac{d\omega}{r} - \frac{2}{k} \mathcal{U}' \\
 & = \frac{2}{k} \left( u' + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} u'_v \frac{d\omega}{r} \right) \\
 & - \frac{1}{2\pi k} \left( \frac{\partial}{\partial y} \int_{\omega} (\mathcal{W} \mathcal{A}' \cos(\nu x) - \mathcal{V}' \cos(\nu y)) \frac{d\omega}{r} - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\omega} (\mathcal{U}' \cos(\nu z) - \mathcal{W} \mathcal{A}' \cos(\nu x)) \frac{d\omega}{r} \right) \\
 & + \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \int_{\tau} u' \frac{d\tau}{r} \right|_{i+a} - \frac{1}{2\pi} \left[ \cos(\nu x) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \nu} \int_{\tau} u' \frac{d\tau}{r} + \cos(\nu y) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \nu} \int_{\tau} v' \frac{d\tau}{r} \right. \\
 & \quad \left. + \cos(\nu z) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \nu} \int_{\tau} w' \frac{d\tau}{r} \right]_{i+a} + \xi', \dots, \text{ an } \omega,
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

wo  $\xi', \eta', \zeta'$  Funktionen der Stelle auf  $\omega$  sind, deren Stetigkeit die Bedingungen erfüllt:

$$(42) \quad |\xi'(x_2, y_2, z_2) - \xi'(x_1, y_1, z_1)| \leq \left( \Gamma \frac{\text{abs. Max.}(\theta', u', v', w')}{\epsilon_3} + \epsilon_3 B' \right) r_{12}^{\bar{\omega}}, \dots,$$

wenn  $\Gamma$  eine endliche nur von der Gestalt der Fläche  $\omega$  abhängende Konstante,  $\epsilon_3$  eine positive Zahl ist, die man *beliebig klein* wählen kann.



Mit Rücksicht darauf, dass (1):

$$(43) \quad \left\{ \begin{aligned} & \mathbf{u}' + \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial^2}{\partial v^2} \int_{\tau} \mathbf{u}' \frac{d\tau}{r} \right|_{t+a} = \varepsilon_1, \dots \\ & \left| \cos(vx) \frac{\partial^2}{\partial x \partial v} \int_{\tau} \mathbf{u}' \frac{d\tau}{r} + \cos(vy) \frac{\partial^2}{\partial x \partial v} \int_{\tau} \mathbf{v}' \frac{d\tau}{r} \right. \\ & \left. + \cos(vz) \frac{\partial^2}{\partial x \partial v} \int_{\tau} \mathbf{w}' \frac{d\tau}{r} \right|_{t+a} = \xi_2 + \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} \mathbf{u}'_v \frac{d\omega}{r}, \dots, \end{aligned} \right.$$

wo  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi_2, \eta_2, \zeta_2$  von derselben Art auf  $\omega$  stetig sind (42), wie  $\xi', \eta', \zeta'$ , folgt:

$$(44) \quad \left\{ \begin{aligned} & \bar{\mathbf{u}}' = \frac{1}{2\pi k} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} \mathbf{u}'_v \frac{d\omega}{r} + \frac{2}{k} \mathbf{u}' + \xi \\ & - \frac{1}{2\pi k} \left( \frac{\partial}{\partial y} \int_{\omega} (\mathbf{v}' \cos(vx) - \mathbf{w}' \cos(vy)) \frac{d\omega}{r} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\omega} (\mathbf{w}' \cos(vx) - \mathbf{u}' \cos(vz)) \frac{d\omega}{r} \right), \dots, \end{aligned} \right.$$

wo wieder  $\xi, \eta, \zeta$  auf  $\omega$  von derselben Art stetig sind (42), wie  $\xi', \eta', \zeta'$ , oder:

$$(45) \quad \bar{\mathbf{u}}' = \frac{1}{2\pi k} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} (\mathbf{u}'_v - \mathbf{u}'_v) \frac{d\omega}{r} + \xi, \dots$$

Bedenkt man schliesslich, dass nach der Definition der Funktionen  $U', V', W'$ :

$$U' = \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \left( \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \cos(vy) - \frac{\partial \varphi'}{\partial y} \cos(vz) \right) \frac{d\omega}{r},$$

wenn  $\varphi'$  die Potentialfunktion des Gebietes  $\tau$  mit der Eigenschaft:

$$\frac{\partial \psi'}{\partial v} \equiv \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial v} \int_{\omega} \varphi' \frac{\cos(r \cdot v)}{r^2} d\omega = \mathbf{u}'_v$$

(1) Ann. Ec. Norm. (3) 24, S. 31, 1907 und *Comptes rendus* 143, S. 673, 1906.

vorstellt, somit:

$$\mathfrak{u}' = \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} \frac{\partial \varphi'}{\partial \nu} \frac{d\omega}{r},$$

$$\mathfrak{u}'_{\nu} = \frac{\partial \varphi'}{\partial \nu} = u'_{\nu},$$

so folgt aus (45):

$$(46) \quad \bar{u}' = \xi, \dots,$$

wo  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  Funktionen der Stelle auf  $\omega$  sind, deren Stetigkeit die Bedingungen erfüllt:

$$(47) \quad |\xi(x_2, y_2, z_2) - \xi(x_1, y_1, z_1)| \leq \left( \Gamma \frac{\text{abs. Max.}(\theta', u', v', w')}{\varepsilon'} + \varepsilon' B' \right) r_{12}^{\bar{\omega}}, \dots,$$

wenn  $\Gamma$  eine endliche, nur von der Gestalt der Fläche  $\omega$  abhängende Konstante,  $\varepsilon'$  eine positive Zahl ist, die man *beliebig klein* machen kann.

Nach den bereits bei dem Beweise des Hilfssatzes 1 gebrauchten Schlüssen ist:

$$\text{abs. Max.}(\theta', u', v', w') \leq \frac{C}{\rho^{\frac{1}{3}}} \sqrt{I} + c' \rho^{\bar{\omega}} B',$$

wo  $\rho$  eine genügend klein gewählte Strecke,  $C$  und  $c'$  zwei endliche Konstanten sind, die nur von der Gestalt der Fläche  $\omega$ , von  $k$  und von  $\bar{\omega}$  abhängen, sodass, wenn wir

$$(48) \quad c' \rho^{\bar{\omega}} = \varepsilon'^2, \quad \varepsilon = 2\varepsilon'$$

setzen, (47) auch so schreiben können:

$$(49) \quad |\xi(x_2, y_2, z_2) - \xi(x_1, y_1, z_1)| \leq \left( \frac{c}{\varepsilon \left(1 + \frac{\bar{\omega}}{3}\right)} \sqrt{I} + \varepsilon B' \right) r_{12}^{\bar{\omega}}, \dots,$$

wo  $c$  wiederum eine endliche, nur von der Gestalt der Fläche  $\omega$ , von  $\bar{\omega}$  und  $k$  abhängende Konstante vorstellt,  $\varepsilon$  eine positive Zahl, die man *beliebig klein* wählen kann.

Damit ist zunächst der eine Teil der Behauptungen (35) erwiesen; um die Behauptung auch für  $\bar{\theta}'$  zu beweisen, schreiben wir die drei ersten

Gleichungen (34), welche  $\bar{u}'$ ,  $\bar{v}'$ ,  $\bar{w}'$  definieren, in der Form:

$$(50) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \bar{u}' + \frac{k+2}{k} u' - \frac{2}{k} U' - U \right) &= - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \nu} \int_{\tau} \theta' \frac{d\tau}{r} - 2(\mathbf{w}' \cos(\nu y) - \mathbf{v}' \cos(\nu z)) \\ &= 2(\theta' \cos(\nu x) - \mathbf{w}' \cos(\nu y) + \mathbf{v}' \cos(\nu z)) - \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial^2}{\partial x \partial \nu} \int_{\tau} \theta' \frac{d\tau}{r} \right|_a, \dots, \quad \text{an } \omega; \end{aligned} \right.$$

hieraus folgt in derselben Weise, wie (40) aus (37):

$$(51) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{u}' + \frac{k+2}{k} u' - \frac{2}{k} U' &= - \frac{1}{2\pi} \frac{1+k}{k} \int_{\omega} \{ \theta' \cos(\nu x) - \mathbf{w}' \cos(\nu y) + \mathbf{v}' \cos(\nu z) \} \frac{d\omega}{r} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi k} \int_{\omega} (\mathbf{u}' \cos(\nu y) - \mathbf{v}' \cos(\nu z)) \frac{d\omega}{r} \\ &\quad + \frac{1}{2k} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \theta' \frac{d\tau}{r} \\ &\quad + \bar{\Xi}, \dots, \quad \text{an } \omega, \end{aligned} \right.$$

wo  $\bar{\Xi}$ ,  $\bar{H}$ ,  $\bar{Z}$  zwar nicht dieselben Funktionen sind, wie in (38), aber wiederum die Eigenschaft (39) haben. Nunmehr folgt aus (51) und (50):

$$\begin{aligned} \bar{\theta}' + \frac{k+2}{k} \theta' &= \frac{2(1+k)}{k} \theta' - 2\theta' \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \int_{\tau} \theta' \frac{d\tau}{r} \right|_{i+a} + Z', \quad \text{an } \omega, \end{aligned}$$

oder:

$$(52) \quad \theta' = - \left\{ \theta' + \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \int_{\tau} \theta' \frac{d\tau}{r} \right|_{i+a} \right\} + Z', \quad \text{an } \omega,$$

wo  $Z'$  eine Funktion der Stelle von  $\omega$  ist, deren Stetigkeit die Bedingung erfüllt:

$$(53) \quad |Z'(x_2, y_2, z_2) - Z'(x_1, y_1, z_1)| \leq \left( \Gamma \frac{\text{abs. Max.}(\theta', u', v', w')}{\varepsilon_4} + \varepsilon_4 B' \right) r_{12}^{\bar{\omega}},$$

wenn  $\Gamma$  eine endliche, nur von der Gestalt der Fläche  $\omega$ , von  $\bar{\omega}$  und  $k$  abhängende Konstante,  $\varepsilon_4$  eine positive Zahl ist, die man *beliebig klein*

wählen kann, oder schliesslich mit Rücksicht auf (43) (44):

$$(54) \quad \bar{\theta}' = Z,$$

wo wieder  $Z$  eine Funktion der Stelle von  $\omega$  ist, deren Stetigkeit dieselbe Bedingung erfüllt, wie  $Z'$ , oder, entsprechend der Art, wie (49) aus (47) folgt, die Bedingung:

$$(55) \quad |Z(x_2, y_2, z_2) - Z(x_1, y_1, z_1)| \leq \frac{c}{\varepsilon \frac{1+\bar{\omega}}{\bar{\omega}}} \sqrt{I} + \varepsilon B',$$

wo  $c$  eine endliche, nur von der Gestalt der Fläche  $\omega$ , von  $k$  und  $\bar{\omega}$  abhängende Konstante vorstellt,  $\varepsilon$  eine positive Zahl, die man *beliebig klein* wählen kann.

Damit ist der Hilfssatz 2 vollständig bewiesen.

*Hilfssatz 3.* Die sukzessiven Funktionen

$$u_j', v_j', w_j' \quad (j = 0, 1, 2, \dots),$$

welche durch die Gleichungen (7) bis (10) definiert sind, erfüllen die Identitäten:

$$(56) \quad \left\{ \begin{aligned} & (1-k) \int_{\tau} \theta_j'^2 d\tau + \int_{\tau} \left[ \left( u_j' - \frac{\partial \psi_j'}{\partial x} \right)^2 + \left( v_j' - \frac{\partial \psi_j'}{\partial y} \right)^2 + \left( w_j' - \frac{\partial \psi_j'}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau + \\ & \quad + k \int_{\tau} (u_j'^2 + v_j'^2 + w_j'^2) d\tau \\ & = (1-k) \int_{\tau} \theta'_{j-1} \theta'_{j+1} d\tau + \int_{\tau} \left[ \left( u'_{j-1} - \frac{\partial \psi'_{j-1}}{\partial x} \right) \left( u'_{j+1} - \frac{\partial \psi'_{j+1}}{\partial x} \right) + \right. \\ & \quad + \left. \left( v'_{j-1} - \frac{\partial \psi'_{j-1}}{\partial y} \right) \left( v'_{j+1} - \frac{\partial \psi'_{j+1}}{\partial y} \right) + \left( w'_{j-1} - \frac{\partial \psi'_{j-1}}{\partial z} \right) \left( w'_{j+1} - \frac{\partial \psi'_{j+1}}{\partial z} \right) \right] d\tau \\ & \quad + k \int_{\tau} (u'_{j-1} u'_{j+1} + v'_{j-1} v'_{j+1} + w'_{j-1} w'_{j+1}) d\tau, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned} \right.$$

In der Tat setzen wir:

$$(57) \quad u_j = u_j' + \frac{k+2}{k} u'_{j-1} - \frac{2}{k} U'_{j-1} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \theta'_{j-1} \frac{d\tau}{r}, \dots,$$

so wird:

$$(58) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u_j = -2 \frac{\partial \theta'_{j-1}}{\partial x}, \dots \text{ in } \tau, \\ \frac{\partial u_j}{\partial \nu} = \frac{1-k}{k} \theta'_{j-1} \cos(\nu x) - \frac{1+k}{k} (\mathfrak{W}'_{j-1} \cos(\nu y) - \mathfrak{V}'_{j-1} \cos(\nu z)) \\ \quad + \frac{1}{k} (\mathfrak{U}'_{j-1} \cos(\nu y) - \mathfrak{W}'_{j-1} \cos(\nu z)), \dots \text{ an } \omega, \end{array} \right.$$

somit:

$$\begin{aligned} & \int_{\tau} \left[ \frac{\partial u_j}{\partial x} \frac{\partial u_{j+1}}{\partial x} + \dots + \frac{\partial v_j}{\partial x} \frac{\partial v_{j+1}}{\partial x} + \dots + \frac{\partial w_j}{\partial x} \frac{\partial w_{j+1}}{\partial x} + \dots \right] d\tau = - \int_{\tau} \{ u_j \Delta u_{j+1} + \dots \} d\tau \\ & \quad - \int_{\omega} \left\{ u_j \frac{\partial u_{j+1}}{\partial \nu} + \dots \right\} d\omega, \\ & = 2 \int_{\tau} \left( u_j \frac{\partial \theta'_j}{\partial x} + \dots \right) d\tau - \frac{1-k}{k} \int_{\omega} u_{j\nu} \theta'_j d\omega \\ & \quad + \frac{1+k}{k} \int_{\omega} [u_j (\mathfrak{W}'_j \cos(\nu y) - \mathfrak{V}'_j \cos(\nu z)) + \dots] d\omega \\ & \quad - \frac{1}{k} \int_{\omega} [u_j (\mathfrak{U}'_j \cos(\nu y) - \mathfrak{W}'_j \cos(\nu z)) + \dots] d\omega \\ & = \frac{1-k}{k} \int_{\tau} \theta_j \theta'_j d\tau + \frac{1+k}{k} \int_{\tau} (u_j u'_j + \dots) d\tau - \frac{1}{k} \int_{\tau} (u_j \mathfrak{U}'_j + \dots) d\tau, \end{aligned}$$

und ebenso auch:

$$= \frac{1-k}{k} \int_{\tau} \theta_{j+1} \theta'_{j-1} d\tau + \frac{1+k}{k} \int_{\tau} (u_{j+1} u'_{j-1} + \dots) d\tau - \frac{1}{k} \int_{\tau} (u_{j+1} \mathfrak{U}'_{j-1} + \dots) d\tau.$$

Die Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke ergibt, mit Hilfe der aus (57) folgenden Relationen:

$$(59) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_j = \theta'_j + \frac{2-k}{k} \theta'_{j-1}, \\ u_j = u'_j + \frac{2+k}{k} u'_{j-1} - \frac{2}{k} \mathfrak{U}'_{j-1}, \dots, \end{array} \right.$$

dass:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1-k}{k} \int_{\tau} \theta_j' \left( \theta_j' + \frac{2-k}{k} \theta_{j-1}' \right) d\tau + \frac{1+k}{k} \int_{\tau} \left[ \mathbf{u}_j' \left( \mathbf{u}_j' + \frac{2+k}{k} \mathbf{u}_{j-1}' - \frac{2}{k} \mathfrak{A}'_{j-1} \right) + \dots \right] d\tau \\
 & - \frac{1}{k} \int_{\tau} \left[ \mathfrak{A}'_j \left( \mathbf{u}_j' + \frac{2+k}{k} \mathbf{u}_{j-1}' - \frac{2}{k} \mathfrak{A}'_{j-1} \right) + \dots \right] d\tau \\
 & = \frac{1-k}{k} \int_{\tau} \theta_{j-1}' \left( \theta_{j+1}' + \frac{2-k}{k} \theta_j' \right) d\tau + \frac{1+k}{k} \int_{\tau} \left[ \mathbf{u}'_{j-1} \left( \mathbf{u}'_{j+1} + \frac{2+k}{k} \mathbf{u}_j' - \frac{2}{k} \mathfrak{A}'_j \right) + \dots \right] d\tau \\
 & - \frac{1}{k} \int_{\tau} \left[ \mathfrak{A}'_{j-1} \left( \mathbf{u}'_{j+1} + \frac{2+k}{k} \mathbf{u}_j' - \frac{2}{k} \mathfrak{A}'_j \right) + \dots \right] d\tau,
 \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1-k}{k} \int_{\tau} (\theta_j'^2 - \theta_{j-1}' \theta_{j+1}') d\tau + \frac{1+k}{k} \int_{\tau} (\mathbf{u}_j'^2 + \dots - \mathbf{u}'_{j-1} \mathbf{u}'_{j+1} - \dots) d\tau \\
 & = \frac{1}{k} \int_{\tau} (\mathbf{u}_j' \mathfrak{A}'_j + \dots) d\tau - \frac{1}{k} \int_{\tau} (\mathbf{u}'_{j+1} \mathfrak{A}'_{j-1} + \dots) d\tau \\
 & + \frac{2}{k} \frac{1+k}{k} \int_{\tau} (\mathbf{u}_j' \mathfrak{A}'_{j-1} + \dots - \mathbf{u}'_{j-1} \mathfrak{A}'_j - \dots) d\tau \\
 & + \frac{1}{k} \frac{2+k}{k} \int_{\tau} (\mathfrak{A}'_j \mathbf{u}'_{j-1} + \dots - \mathfrak{A}'_{j-1} \mathbf{u}'_j - \dots) d\tau \\
 & = \frac{1}{k} \int_{\tau} \left( \frac{\partial \psi_j'}{\partial x} \mathbf{u}_j' + \dots \right) d\tau - \frac{1}{k} \int_{\tau} \left( \frac{\partial \psi_{j-1}'}{\partial x} \mathbf{u}'_{j+1} + \dots \right) d\tau \\
 & + \frac{1}{k} \int_{\tau} \left( \frac{\partial \psi_{j-1}'}{\partial x} \mathbf{u}' + \dots \right) d\tau - \frac{1}{k} \int_{\tau} \left( \frac{\partial \psi_j'}{\partial x} \mathbf{u}'_{j-1} + \dots \right) d\tau \quad (^1).
 \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf

$$U_{j\nu}' = \frac{\partial \psi_j'}{\partial \nu} = \mathbf{u}_{j\nu}'$$

(<sup>1</sup>) Nach (9) und (10) ist:

$$\mathfrak{A}' = \frac{\partial \psi_j'}{\partial x}, \dots$$

lässt sich die rechte Seite auch so schreiben:

$$\frac{1}{k} \int_{\tau} \left\{ \left( \frac{\partial \psi_j'}{\partial x} \right)^2 - \dots - \frac{\partial \psi'_{j-1}}{\partial x} \frac{\partial \psi'_{j+1}}{\partial x} - \dots \right\} d\tau,$$

und die Gleichung lässt sich nunmehr auf die behauptete Form (56) bringen. Als Folge von (56) ergibt sich die Ungleichheit:

$$(60) \quad I_j^2 \geq I_{j-1} I_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Damit kommen wir nun völlig in das Fahrwasser der Untersuchungen für das einfachere Problem ( $k = 1$ ); es folgt jetzt in genau analoger Weise die Lösung für ein beliebiges  $k$ , welches der Bedingung:

$$(61) \quad \frac{1}{3} < k \leq 1$$

genügt; einer besonderen Betrachtung bedürfen nur die Pole der Lösung, welche für solche Werte  $\lambda_j$  von  $\lambda$  sich ergeben können, denen Funktionentripel  $\bar{u}_j', \bar{v}_j', \bar{w}_j'$ , Potentialfunktionen mit den Eigenschaften (17) bzw. (17') entsprechen (Verallgemeinerte, preliminäre Triplets).

### III.

Wir setzen:

$$(62) \quad \bar{u}_j = \{ k + \lambda_j(2 + k) \} \bar{u}_j' - 2\lambda_j \bar{U}_j' + \frac{\lambda_j k}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \bar{\theta}_j \frac{d\tau}{r}, \dots \quad (1);$$

diese Funktionen sind mit ihren ersten Ableitungen in  $\tau$  eindeutig und stetig und genügen nach (17) den Differentialgleichungen:

$$(63) \quad \Delta \bar{u}_j = -2 \frac{\lambda_j k}{k + \lambda_j(2 - k)} \frac{\partial \bar{\theta}_j}{\partial x} = -2 \frac{\lambda_j k}{k + \lambda_j(2 + k)} \left( \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial z} \right), \dots \quad (2) \quad \text{in } \tau$$

(1) so dass:

$$(62') \quad \bar{\theta}_j = \{ k + \lambda_j(2 - k) \} \bar{\theta}_j', \quad \bar{u}_j = \{ k + \lambda_j(2 + k) \} \bar{u}_j' - 2\lambda_j \bar{U}_j', \dots$$

(2) oder:

$$(63') \quad \Delta u_j = \frac{\lambda_j(1 - k)}{k + \lambda_j(2 - k)} \frac{\partial \bar{\theta}_j}{\partial x} - \frac{\lambda_j(1 + k)}{k + \lambda_j(2 + k)} \left( \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial z} \right), \dots$$

und den Grenzbedingungen:

$$(64) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \nu} &= \frac{\lambda_j(1-k)}{k + \lambda_j(1-k)} \bar{\theta}_j \cos(\nu x) - \frac{\lambda_j(1+k)}{k + \lambda_j(2+k)} (\bar{w}_j \cos(\nu y) - \bar{v}_j \cos(\nu z)) \\ &- \frac{\lambda_j(\lambda_j-1)k}{k + \lambda_j(2+k)} (\bar{u}_j' \cos(\nu y) - \bar{v}_j' \cos(\nu z)), \dots \text{ an } \omega. \end{aligned} \right.$$

Aus (63') und (64) folgt:

$$\begin{aligned} & \int_{\tau} \left\{ \left( \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x} \right)^2 + \dots + \left( \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x} \right)^2 + \dots + \left( \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial x} \right)^2 + \dots \right\} d\tau = - \int_{\tau} (\bar{u}_j \Delta \bar{u}_j + \dots) d\tau \\ & - \int_{\omega} \left( \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \nu} + \dots \right) d\omega, \\ & = \frac{\lambda_j(1-k)}{k + \lambda_j(2-k)} \int_{\tau} \bar{\theta}_j^2 d\tau + \frac{\lambda_j(1+k)}{k + \lambda_j(2+k)} \int_{\tau} (\bar{u}_j^2 + \bar{v}_j^2 + \bar{w}_j^2) d\tau \\ & + \frac{\lambda_j(\lambda_j-1)k}{k + \lambda_j(2+k)} \int_{\tau} (\bar{u}_j \bar{u}_j' + \bar{v}_j \bar{v}_j' + \bar{w}_j \bar{w}_j') d\tau, \end{aligned}$$

und die für  $k > \frac{1}{3}$  stets positive Grösse:

$$(65) \left\{ \begin{aligned} & \int_{\tau} \left\{ \left( \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x} \right)^2 + \dots + \left( \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x} \right)^2 + \dots + \left( \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial x} \right)^2 + \dots + \frac{k-1}{2} \bar{\theta}_j^2 - \frac{1}{2} (\bar{u}_j^2 + \bar{v}_j^2 + \bar{w}_j^2) \right\} d\tau \\ & = \frac{k(\lambda_j-1)(1-k)}{2(k + \lambda_j(2-k))} \int_{\tau} \bar{\theta}_j^2 d\tau + \frac{k(\lambda_j-1)}{2(k + \lambda_j(2-k))} \int_{\tau} (\bar{u}_j^2 + \bar{v}_j^2 + \bar{w}_j^2) d\tau \\ & + \frac{\lambda_j(\lambda_j^2-1)k^2}{k + \lambda_j(2+k)} \int_{\tau} \left( \left( \frac{\partial \bar{\Psi}_j}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{\Psi}_j}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{\Psi}_j}{\partial z} \right)^2 \right) d\tau, \end{aligned} \right.$$

Aus dieser Formel geht hervor, dass die singulären Werte  $\lambda_j$ , soweit sie positiv sind,  $\geq 1$  sein müssen, falls

$$(66^a) \quad \frac{1}{3} < k \leq 1.$$



Dass die singulären Werte  $\lambda_j$ , soweit sie positiv sind, auch  $\geq 1$  sein müssen, falls

$$(66^b) \quad 1 \leq k < \infty,$$

folgt daraus, dass

$$(67) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_{\tau} \left( \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x} \right)^2 + \dots + \left( \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x} \right)^2 + \dots + \left( \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial x} \right)^2 + \dots - \frac{1}{3} \bar{\theta}_j^2 - \frac{1}{2} (\bar{u}_j^2 + \dots) \Big| d\tau \\ & = \frac{\lambda_j(1-2k) - k}{k + \lambda_j(2-k)} \int_{\tau} \bar{\theta}_j^2 d\tau + \frac{k(\lambda_j - 1)}{2(k + \lambda_j(2-k))} \int_{\tau} (\bar{u}_j^2 + \dots) d\tau \\ & + \frac{\lambda_j(\lambda_j^2 - 1)k^2}{k + \lambda_j(2+k)} \int_{\tau} \left( \left( \frac{\partial \bar{\Psi}_j'}{\partial x} \right)^2 + \dots \right) d\tau, \end{aligned} \right.$$

und für

$$k = 1 + \mu, \quad \mu \geq 0$$

der Ausdruck

$$\frac{k(1-2k) - k}{k + \lambda_j(2-k)} = - \frac{1 + \mu + \lambda_j(1 + 2\mu)}{1 + \mu + \lambda_j(1 - \mu)}$$

stets negativ ist, falls  $0 \leq \lambda_j \leq 1$ .

Für  $\lambda_j = 1$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x} &\equiv \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial y} \equiv \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial z} \equiv 0, \\ \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial z} &\equiv \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial x} \equiv \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial y} \equiv 0, \\ \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial z} &= \text{const.}, \quad \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial x} = \text{const.}, \quad \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial y} = \text{const.}, \end{aligned}$$

es existieren also für  $\lambda_j = 1$  die singulären Triplets:

$$(68^a) \quad \bar{u} = 0, \quad \bar{v} = -\alpha z, \quad \bar{w} = +\alpha y,$$

$$(68^b) \quad \bar{u} = \beta z, \quad \bar{v} = 0, \quad \bar{w} = -\beta x, \quad (\alpha, \beta, \gamma \text{ Konstanten})$$

$$(68^c) \quad \bar{u} = -\gamma y, \quad \bar{v} = \gamma x, \quad \bar{w} = 0.$$

Dass die Lösung des Grundproblemcs:

$$(69) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial \nu} = \lambda \left\{ -\frac{k+2}{k} \frac{\partial u'}{\partial \nu} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \nu} \int_{\tau} \theta' \frac{d\tau}{r} \right. \\ \left. + \frac{1-k}{k} \theta' \cos(\nu x) - \frac{1+k}{k} \{ \mathbf{w}' \cos(\nu y) - \mathbf{v}' \cos(\nu z) \} \right. \\ \left. + \frac{2}{k} \frac{\partial U'}{\partial \nu} + \frac{1}{k} \{ \mathbf{U}' \cos(\nu y) - \mathbf{V}' \cos(\nu z) \} \right\} + f_1, \dots \text{ an } \omega \end{aligned} \right.$$

keinen Pol für

$$\lambda = 1$$

haben kann, folgt mit Rücksicht auf die Voraussetzungen (3) in derselben Weise, wie in dem Spezialfalle  $k = 1$  (<sup>1</sup>).

Das Problem (69) kann also für

$$(70) \quad \frac{1}{3} < k < +\infty$$

mit Hilfe der Methode der sukzessiven Annäherungen gelöst werden und hat für

$$0 \overline{\leq} \lambda \overline{\leq} 1$$

keine Pole. Der Fall  $\lambda = 1$  führt aber zur Lösung des zweiten Randwertproblemcs der Elastizitätstheorie, und damit haben wir das Ziel unserer Untersuchungen erreicht.

#### IV.

Wir wollen für den Fall der Kugel die verallgemeinerten, präliminären Triplets angeben.

Sei

$$(71) \quad F_j(x, y, z) = r_1^j Y_j(\mu_1, \varphi_1), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

wo  $Y_j(\mu_1, \varphi_1)$  eine allgemeine Kugelfunktion  $j$  ter Ordnung ihrer Argumente ist, bei Verwendung der Transformation in Polarkoordinaten  $r_1, \mu_1, \varphi_1$ :

$$(72) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= r_1 \mu_1, \\ y &= r_1 \sqrt{1 - \mu_1^2} \cos \varphi_1, \quad \mu_1 = \cos \theta_1; \\ z &= r_1 \sqrt{1 - \mu_1^2} \sin \varphi_1, \end{aligned} \right.$$

(<sup>1</sup>) Ann. de Toulouse 1908, S. 222.

wir setzen:

$$(73) \quad \bar{u}_j' = \frac{\alpha_j}{(j+1)(2j+3)} \left[ (2j+1)x F_j - r^2 \frac{\partial F_j}{\partial x} \right], \dots \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

sodass:

$$(74) \quad \begin{cases} \bar{\theta}_j' = \alpha_j F_j, \\ \bar{u}_j' = -\frac{\alpha_j}{j+1} \left( y \frac{\partial F_j}{\partial z} - z \frac{\partial F_j}{\partial y} \right), \dots \end{cases}$$

$$(75) \quad \begin{cases} \bar{w}_j' \cos(\nu y) - \bar{v}_j' \cos(\nu z) = \frac{\alpha_j}{(j+1)R} \left( jx F_j - R^2 \frac{\partial F_j}{\partial x} \right), \dots \\ \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \nu} \int_{\tau} \bar{\theta}_j' \frac{d\tau}{r} = \frac{\alpha_j}{(2j+3)R} \left[ (j+1)x F_j + \frac{j+2}{2j+1} R^2 \frac{\partial F_j}{\partial x} \right], \dots \\ \frac{\partial \bar{u}_j'}{\partial \nu} = -\frac{\alpha_j}{(2j+3)R} \left[ (2j+1)x F_j - R^2 \frac{\partial F_j}{\partial x} \right], \dots \end{cases}$$

an einer Kugelfläche mit dem Radius  $R$  um den Anfangspunkt.

Die Funktionen (73) stellen Triplets von der Art (17) bzw. (17') dar, bei denen  $\bar{u}_{j\nu}' = 0$  an  $(R)$ , somit auch  $\bar{u}_j' \equiv \bar{v}_j' \equiv \bar{w}_j' \equiv 0$  sind, denn es ergibt sich aus (75) das Bestehen der Gleichungen (17'), wenn

$$(76) \quad \lambda_j = \frac{k(j+1)(2j+1)}{2j+1 - k(j+2)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Ausser den singulären Triplets (73) gibt es nun auch noch solche, bei denen die  $\bar{u}_{j\nu}'$  nicht an  $(R)$  identisch null sind.

Wir setzen:

$$(77) \quad \bar{u}_\kappa' = \beta_\kappa \left( y \frac{\partial F_\kappa}{\partial z} - z \frac{\partial F_\kappa}{\partial y} \right), \quad \kappa = 1, 2, \dots$$

dann ist:

$$(78) \quad \begin{cases} \bar{\theta}_\kappa' = 0, \\ \bar{u}_\kappa' = -(\kappa+1)\beta_\kappa \frac{\partial F_\kappa}{\partial x}, \dots \\ \bar{U}_\kappa' = \bar{u}_\kappa', \dots \end{cases}$$

$$(79) \quad \frac{\partial u_\kappa'}{\partial \nu} = \frac{\partial \bar{U}_\kappa'}{\partial \nu} = -\frac{\kappa}{R} \beta_\kappa \left( y \frac{\partial F_\kappa}{\partial z} - z \frac{\partial F_\kappa}{\partial y} \right), \dots \quad \text{an } (R)$$

und die Gleichungen (17') bestehen, wenn:

$$(80) \quad \lambda_\kappa = +\kappa, \quad \kappa = 1, 2, \dots$$

Schliesslich ist noch der Fall

$$k + \lambda_j(k + 2) = 0$$

zu berücksichtigen; für

$$(81) \quad \bar{\lambda} = -\frac{k}{2+k}$$

werden die Gleichungen (17) für jedes

$$(82) \quad \bar{u} = \frac{\partial F_j}{\partial x}, \dots \quad j = 1, 2, \dots$$

erfüllt.

# Sulle varietà abeliane reali

(di ANNIBALE COMESSATTI a Padova)

## MEMORIA PRIMA

Com'è ben noto, un ente algebrico  $V$  che ammetta entro alla propria classe un rappresentante reale  $V^{(0)}$ , o, come dirò brevemente, un ente algebrico di tipo reale, è caratterizzato dalla proprietà di possedere una simmetria  $S$ <sup>(1)</sup> che lo trasforma in se stesso. La considerazione di questa simmetria, assunta su  $V$  come ente invariante, permette di subordinare la geometria sull'ente reale  $V^{(0)}$  (cioè il complesso delle proprietà di  $V^{(0)}$  invarianti per trasformazioni birazionali reali) alla geometria sull'ente  $V$ , allo stesso modo che l'introduzione dell'assoluto permette di subordinare la metrica d'uno spazio lineare (dotato d'un gruppo di movimenti) alla sua geometria proiettiva. In quella subordinazione restano per così dire incluse (in quanto alla lor volta subordinate) le subordinazioni ulteriori corrispondenti ad un'ambientazione più ristretta (ad es. proiettiva) delle proprietà reali.

Una tal concezione dei problemi reali nel campo algebrico, si rivela tanto più feconda, quanto più immediata e più appropriata alla considerazione delle simmetrie, è la rappresentazione (o modello) dell'ente astratto  $V$ , di cui è dato disporre. Valgano in proposito i due esempli delle curve algebriche, e delle superficie razionali, nei quali il ricorso ad opportune immagini (riemanniane simmetriche, e rappresentazione piana) ha additato le vie maestre per la trattazione dei problemi reali.

In quest'ordine d'idee il caso delle varietà abeliane si presenta quanto mai allettante, sia per la visione immediata dell'ente in sè ch'è offerta dalla rappresentazione parametrica, sia per la semplice ed espressiva rappresentazione trascendente delle trasformazioni (birazionali ed antibirazionali) e delle varietà algebriche subordinate, sia infine per il grado di perfezione a cui, segnatamente per opera della scuola italiana, son pervenuti i metodi di ricerca.

---

<sup>(1)</sup> « Simmetria » sta, qui e nel seguito, al modo di KLEIN, per « trasformazione antibirazionale involutoria ». Rinvio al testo per le citazioni dei lavori richiamati nell'introduzione.

Aggiungasi la vastità del campo di applicazioni che può investire tutta la sfera d'influenza delle *funzioni abeliane*, vale a dire tutta la categoria degli *enti algebrici irregolari*.

\*\*\*

Le prime ricerche sulle varietà abeliane con trasformazioni antibirazionali in sé, e sulle corrispondenti *matrici di Riemann* son dovute al CHERUBINO. Ma i procedimenti di quest'Autore risentono troppo, nell'applicazione alle simmetrie, della loro impostazione *generale*, mentre la posizione dei problemi reali, accennata nelle prime righe di questo scritto, richiede che la rappresentazione trascendente di quelle corrispondenze, venga, per quanto possibile, affidata ad *elementi intrinseci*.

E gli elementi in parola sono essenzialmente: i *parametri*, cioè gl'integrali semplici di 1<sup>a</sup> specie della varietà abeliana  $V_p$  (o, più in generale, della *varietà algebrica irregolare*), ed i *periodi*, o il che è lo stesso, i *cicli primitivi* a cui quei periodi son riferiti.

La scelta di parametri intrinseci (integrali *reali* rispetto ad una data simmetria  $S$ ) non presenta difficoltà. Meno immediata e più interessante è la risoluzione del problema riguardante la scelta dei cicli primitivi, che implica la riduzione a *forma tipica* della sostituzione unimodulare prodotta su quei cicli dalla simmetria  $S$ . Una riduzione siffatta può dedursi da un teorema generale sulle sostituzioni unimodulari involutorie che stabilisco al § 1, e conduce, sotto forma più completa, ad un risultato di HURWITZ, contenuto anche implicitamente in un più recente lavoro del LEFSCHETZ.

La struttura della sostituzione, sotto la forma ridotta, e della corrispondente matrice dei periodi di opportuni integrali reali (*matrice o tabella pseudonormale*), dipende essenzialmente da un intero  $\lambda$  che dà un *carattere intrinseco* della simmetria  $S$ , anzi più in generale (almeno nel caso non singolare) della stessa varietà  $V_p$  (*carattere reale*). E da quel carattere dipendono (§ 2) alcune fra le più salienti proprietà reali della  $V_p$  (numero delle *classi di varietà reali* appartenenti alla classe definita in senso complesso da  $V_p$ , *falde* delle varietà di quelle classi, ecc.) e degli enti algebrici collegati ad una data matrice pseudonormale: ad esempio il *numero dei rami reali* delle curve algebriche.

Ma con ciò lo strumento d'indagine non è ancora perfetto. La considerazione delle tabelle pseudonormali e del carattere reale, mentre da un lato non rivela talune caratteristiche più riposte della  $S$  a cui son collegate essenziali proprietà degli enti reali, non concede dall'altro quella libertà di movi-

menti ch'è necessario possedere, quando, per il tramite delle *funzioni intermedie*, e in particolare delle  $\mathfrak{F}$ , si vuol rendersi conto del modo con cui la  $S$  e le trasformazioni (reali) con essa permutabili operano sulle varietà subordinate entro alla  $V_p$ , o sui loro sistemi. Occorre fare un passo più avanti e procurarsi *periodi normali*.

Naturalmente, trattandosi d'acquistare *nuovi vantaggi*, importa essenzialmente conservare quelli già acquisiti colle matrici pseudonormali, e ciò assoggetta il *problema della normalizzazione* a condizioni che ne rendono la discussione aritmetica notevolmente delicata. In compenso le conclusioni che si raccolgono, almeno nel caso da me trattato, dei *divisori unitari* <sup>(2)</sup> (§ 3), sono assai espressive e feconde, e pongono in luce una distinzione, che, stabilita dal KLEIN per le curve algebriche in base a note considerazioni topologiche, viene così trasportata in un ambiente più vasto. È questa la distinzione fra il *caso diasimmetrico* ed il *caso ortosimmetrico*, che qui si rivela in talune caratteristiche aritmetiche della *relazione di Riemann* su cui s'impone il procedimento di normalizzazione, e conduce a *due tipi* di tabelle normali <sup>(3)</sup>, strutturalmente identici (in una delle loro forme) a quelli assegnati dal WEICHOLD per le curve, mediante costruzione diretta delle retrosezioni sulle riemanniane simmetriche.

\*\*\*

Affinati così gli strumenti, non mancavano certo le occasioni per cimentarli alla prova. Ed il risultato del cimento mi sembra davvero incoraggiante <sup>(4)</sup>.

Intanto il problema fondamentale riguardante la *trasformazione delle  $\mathfrak{F}$*  per effetto d'una simmetria  $S$ , consente una rapida soluzione, che si piega con docilità alle esigenze d'interessanti questioni. È fra queste (§ 4), il *problema dei gruppi semicanonici reali* d'una curva algebrica, al quale le ricerche di KLEIN han conferito un'alta notorietà, e quello concernente la

---

<sup>(2)</sup> Per  $\lambda = 0$  ho trattato addirittura il caso generale. In ogni caso i risultati hanno valore anche per varietà abeliane *singolari*, e per *varietà algebriche irregolari qualunque* (di tipo reale).

<sup>(3)</sup> Nell'ultima parte della discussione del § 3 mi valgo di certe speciali trasformazioni delle tabelle normali, richiamando i risultati di alcune osservazioni, che, per alleggerire il presente lavoro, ho pubblicate a parte.

<sup>(4)</sup> Per esigenze editoriali, a cui ho acconsentito di buon grado, la seconda parte del lavoro (§§ 4-7), pur rimanendo organicamente collegata alla prima, vedrà la luce in un prossimo fascicolo di questi stessi Annali.

*classificazione delle varietà di Kummer reali* (§ 6) che, oltre a comprendere e completare i risultati ottenuti dal ROHN per le superficie (aggiungendo nuovi tipi reali non riducibili *realmente* al noto modello proiettivo) rivela nuove ed interessanti vedute.

Non minore interesse mi sembra presentino, nonostante la maggior particolarità del caso, talune questioni concernenti le *superficie iperellittiche* a cui son dedicati i §§ 5, 7. Nel primo ho discusso un punto delicato della classificazione delle *superficie di Jacobi* e delle *curve di genere 2 reali*, precisando, in base ad opportune disequaglianze fra i periodi, la distinzione fra due casi (curve di tipo *ortosimmetrico* con un ramo reale, e curve *prive di rami reali*) corrispondenti allo stesso tipo di tabella normale; nel secondo ho studiato un caso speciale di *superficie singolari* (di tipo reale) che si presta ad illustrare il significato di taluni concetti, la portata dei metodi, ed il carattere delle *nuove* proprietà reali che la singolarità introduce.

Il lettore mi vorrà conceder di buon grado il sacrificio di molti particolari, e la concisa sobrietà del discorso e del calcolo.

Padova, Aprile 1924.

## § 1. Periodi pseudonormali.

**1. Integrali reali.** — Sia  $V$  una varietà algebrica la quale ammetta una *simmetria*  $S$  che la trasformi in se stessa. Notoriamente si può assumere come immagine di  $V$  un *modello reale*  $V^{(0)}$  (definito a meno d'una trasf. birazionale *reale*) su cui la  $S$  sia addirittura il *coniugio*, cioè resti subordinata dal coniugio dello spazio ambiente. Quel modello si dirà *corrispondente alla simmetria*  $S$  <sup>(5)</sup>.

Supponiamo che  $V$  possieda integrali semplici di 1<sup>a</sup> specie non costanti, cioè abbia *irregolarità superficiale* (genere)  $p > 0$ . Allora detti  $v_1, v_2, \dots, v_p$   $p$  integrali siffatti linearmente indipendenti, e  $C_1, C_2, \dots, C_{2p}$ ,  $2p$  *cicli primitivi* della riemanniana  $R$  relativa a  $V$ , è pur notorio che:

a) Se con  $v_i, v_i'$  si denotano i valori di  $v_i$  in due punti  $P, P'$  corrispondenti nella  $S$  (*coniugati* sul modello  $V^{(0)}$ ), e, al solito, con  $\bar{v}_i$  il numero

<sup>(5)</sup> Ciò può stabilirsi imitando un ragionamento della mia Memoria, *Fondamenti per la geometria sopra le superficie razionali*, ecc. [Math. Ann. 73 (1912) pp. 1-72] n. 6, che in sostanza risale al KLEIN. Cfr. anche CHERUBINO *Sulle varietà abeliane reali*, ecc. [Giorn. di Mat. 60 (1922) e 61 (1923)] Memoria I, n. 23.



complesso coniugato di  $v_i$ , si hanno  $p$  relazioni del tipo

$$(1) \quad v_i' \equiv \lambda_{i1} \bar{v}_1 + \lambda_{i2} \bar{v}_2 + \dots + \lambda_{ip} \bar{v}_p + c_i, \quad (\text{m. p.})$$

(a coefficienti generalmente complessi) che, si può dire, forniscono le *equazioni trascendenti della simmetria S* <sup>(6)</sup>.

b) La  $S$  induce sui cicli  $C_i$  una *sostituzione unimodulare involutoria* a coefficienti interi, cioè li muta in cicli  $C_i'$  espressi dalle

$$(2) \quad C_i' = m_{i1} C_1 + m_{i2} C_2 + \dots + m_{i, 2p} C_{2p}, \quad (i=1, 2, \dots, 2p)$$

con  $\|m_{rs}\| = \pm 1$  <sup>(7)</sup>.

Le (1) (2) dipendono naturalmente, oltre che da  $S$ , anche dalla scelta dei  $v_i$  e dei  $C_i$ . Si può quindi cercar di disporre degli elementi arbitrari da cui quella scelta dipende, nel modo più favorevole alla discussione dei problemi reali concernenti  $V^{(0)}$  proponendosi di ridurre le (1) (2) a forme più semplici e che mettano per quanto possibile in evidenza i *caratteri intrinseci* della  $S$ .

Nei riguardi della (1) il problema è assai semplice, e ci basterà riportare, con qualche commento un'osservazione del LEFSCHETZ <sup>(8)</sup>. Se  $dv = P_1 dx_1 + P_2 dx_2 + \dots + P_n dx_n$  è un differenziale totale di 1<sup>a</sup> specie di  $V$  (le coordinate son relative ad un modello  $V^{(0)}$  corrispondente alla  $S$ ), lo è anche, per ovvie ragioni, il suo *coniugato*  $dw = \bar{P}_1 dx_1 + \bar{P}_2 dx_2 + \dots + \bar{P}_n dx_n$ , denotandosi con  $\bar{P}_i$  la funzione razionale *coniugata* (a coefficienti complessi coniugati) di  $P_i$ . Inoltre i valori di  $dv$ ,  $dw$  relativi a due cammini elementari coniugati (corrispondenti in  $S$ ) della riemanniana  $R$  sono coniugati, sicchè se si pone  $du = dv + dw$  lo stesso può dirsi dei valori di  $du$  lungo quei due cammini, e quindi dei valori di  $u$  lungo due cammini (finiti) di  $R$  fra di loro coniugati.

Ne segue che se  $u$ ,  $u'$  denotano i valori di  $u$  in due punti  $P$ ,  $P'$  coniugati, si ha

$$(3) \quad u' \equiv \bar{u} + c, \quad (\text{m. p.})$$

<sup>(6)</sup> Per maggiori dettagli riguardanti il caso della  $V_p$  abeliane cfr. il n.° 6. L'indicazione (m. p.) sta per (modd. periodi) ed ha nel caso della (1) un ben noto significato. Nel seguito quell'indicazione, quando non vi sia ambiguità verrà addirittura omessa.

<sup>(7)</sup> Nella (2) si è scritto = per « omologo », come se ai cicli  $C_i$ ,  $C_i'$  fossero sostituiti i corrispondenti periodi d'un integrale qualunque. Per quanto sia sostanzialmente lo stesso, preferiamo in genere parlar di *cicli* anzichè di *periodi* perchè ci sembra più intuitivo, e, in molte questioni formali, più comprensivo.

<sup>(8)</sup> Contenuta nella Nota, *On the real folds of abelian varieties* [Proc. of National Acad. of Sciences, Vol. 5 (1919), pp. 103-106], n. 2.

dove  $c$  è una costante che dipende dall'origine delle integrazioni, e si annulla quando quell'origine è un punto reale (cioè un punto di  $R$  unito in  $S$ ).

Un integrale come  $u$ , che coincide col proprio coniugato, si dirà *reale* (rispetto alla simmetria  $S$ ) <sup>(9)</sup>: tale è anche  $u_0 = i(v - w)$ , ed inoltre si ha  $v = \frac{1}{2}(u - iu_0)$ , cioè  $v$  è una combinazione lineare dei due integrali reali  $u, u_0$ .

Ora se al posto di  $v$  si pongono successivamente i  $p$  integrali  $v_i$ , se ne deducono  $2p$  integrali reali, mediante cui si esprimono linearmente i  $v_i$  stessi, e quindi ogni integrale di 1<sup>a</sup> specie di  $V$ . Ne segue che fra quei  $2p$  integrali se ne trovano certo  $p$  indipendenti  $u_1, u_2, \dots, u_p$  in corrispondenza ai quali le (1), a norma della (3), assumono la forma

$$(I) \quad u_i' \equiv u_i + c_i, \quad (i = 1, 2, \dots, p).$$

Quando la  $S$  ha punti uniti, cioè  $V^{(0)}$  ha punti reali, converrà in generale assumere uno di essi come origine delle integrazioni; e allora le costanti  $c_i$  saranno nulle.

È ovvio che ogni integrale *reale* di  $V$  (rispetto alla simmetria  $S$ ) è una combinazione lineare a coefficienti reali degli  $u_i$  e viceversa; e che i valori di un integrale siffatto in due punti corrispondenti in  $S$  son legati da una relazione del tipo (3).

Invece d'integrali reali si possono, volendo, considerare su  $V$  integrali *immaginarî puri* (rispetto ad  $S$ ): tali sono ad es. i  $v_n = iu_n$  per i quali le (I) divengono

$$(I^a) \quad v_i' \equiv -\bar{v}_i + d_i, \quad (i = 1, 2, \dots, p).$$

**2. Cieli pseudonormali.** — Occupiamoci ora di ridurre a forma opportuna la sostituzione (2). Ma poichè il nostro scopo è in definitiva quello di procurarci una conveniente tabella di periodi per gl'integrali  $u_i$ , non vogliamo passare sotto silenzio un'osservazione inerente a questo problema.

Poichè  $u_i$  è reale, i suoi periodi  $\omega_{ih}, \bar{\omega}_{ih}$  relativi a  $C_h, C_h'$  sono *coniugati*: e la (2) dà subito le espressioni degli  $\omega$  in funzione degli  $\omega$ . Essa, se si vuole, esprime con SCORZA che la matrice degli  $\omega$  è *equivalente alla sua coniugata* (fermi restando gli  $u_i$ ).

Se  $p = 1$ , ciò viene a dire che i vertici della rete *parallelogrammica* son simmetrici rispetto all'asse reale: ed allora si vede facilmente che, scelti

<sup>(9)</sup> Più esattamente è il differenziale  $du$  che coincide col proprio coniugato: e si vede subito che le funz. raz.  $P_i + \bar{P}_i$  che figurano nella sua espressione, posson ridursi a coefficienti reali.

opportunamente i periodi primitivi, quella rete è costituita da *rettangoli* o da *rombi*, coi lati, o risp. colle diagonali parallele agli assi coordinati. In altre parole i periodi primitivi dell'integrale reale possono ricondursi all'uno od all'altro dei due tipi  $(1, i\tau)$   $(1, \frac{1}{2} + i\tau)$ ; e ciò a seconda che la curva ellittica reale corrispondente ha un numero pari (due o zero) o dispari (uno) di rami reali <sup>(10)</sup>.

Questo caso semplice suggerisce una posizione geometrica in base alla quale si può discutere il problema generale: ma noi non c'inoltreremo per quella via, preferendo ritornare alle (2).

Consideriamo anzi più in generale una sostituzione *unimodulare involutoria* (a coefficienti interi) su  $n$  variabili

$$(4) \quad x_i' = m_{i1}x_1 + m_{i2}x_2 + \dots + m_{in}x_n, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

e dimostriamo il seguente teorema:

*L'equazione caratteristica  $\|m_{ii} - \rho\| = 0$  corrispondente alla sostituzione (4) ha tutte le sue radici eguali a  $+1$  od a  $-1$ . Se  $h$  e  $k$  ne esprimono i numeri rispettivi, la (4) può, con una sostituzione unimodulare sulle variabili, ridursi indifferentemente all'una od all'altra delle due forme*

$$(5) \quad \begin{aligned} X_i' &= X_i, & X'_{h+j} &= X_j - X_{h+j}, & X'_{h+t} &= -X_{h+t} \\ & & (i &= 1, 2, \dots, h; & j &= 1, 2, \dots, \lambda; & t &= \lambda + 1, \dots, k) \end{aligned}$$

$$(5) \quad \begin{aligned} Y_i' &= -Y_i, & Y'_{k+j} &= Y_{k+j} - Y_j, & Y'_{k+t} &= Y_{k+t} \\ & & (i &= 1, 2, \dots, k; & j &= 1, 2, \dots, \lambda; & t &= \lambda + 1, \dots, h), \end{aligned}$$

dove  $\lambda$  è un intero non maggiore del più piccolo dei due numeri  $h, k$ .

Dimostriamo il teorema per induzione, dal momento ch'esso è ovviamente vero per  $n=1$ , giacchè allora la (4) non può essere che  $x_1' = x_1$  cd  $x_1' = -x_1$ .

Perciò interpretiamo le  $x_i$  come *coordinate non omogenee* di punto in un  $S_n$ ; allora le (4) son le equazioni di un'*affinità involutoria*  $\Omega$  in cui l'origine delle coordinate è un punto unito. Se oltre a questo non esistono

<sup>(10)</sup> Ciò è sostanzialmente noto. Cfr. KLEIN *Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen*, ecc. [Leipzig, Teubner (1882). *Gesammelte Abhand.* Vol. III, XCIX] § 20, BIANCHI *Teoria delle funzioni di variabile complessa*, ecc. [Pisa, Spoerri (1901)] Cap. XIII. Devesi osservare che il caso delle curve ellittiche con *zero rami* non si presenta nella teoria delle funzioni ellittiche ad *invarianti*  $g_2, g_3$  reali, giacchè *una tal curva non può trasformarsi realmente in una cubica piana*, e quindi tanto meno nella  $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ . È però *reale* anche per le funzioni corrispondenti a queste curve l'*invariante assoluto*  $J$ .

altri punti uniti *propri*, la  $\Omega$  è l'*omotetia*  $x'_i = -x_i$  ed il teorema è dimostrato ( $h = \lambda = 0$ ,  $k = n$ ); altrimenti esiste almeno un punto unito proprio, e quindi una radice eguale a  $+1$  dell'equazione caratteristica  $\|m_{ii} - \rho\| = 0$ . Ma allora esiste anche una combinazione lineare delle  $x$

$$(6) \quad X_1 = \mu_{11}x_1 + \mu_{12}x_2 + \dots + \mu_{1n}x_n,$$

(i cui coefficienti si possono supporre *primi tra di loro*) ch'è trasformata in se stessa dalla sostituzione (4).

Aggregando alla (6) le posizioni

$$(6') \quad X_i = \mu_{i1}x_1 + \mu_{i2}x_2 + \dots + \mu_{in}x_n, \quad (i=2, 3, \dots, n)$$

i cui coefficienti (interi) si suppongono scelti in modo che il determinante  $\|\mu_{rs}\|$  risulti eguale a  $\pm 1$  <sup>(14)</sup>, otteniamo una trasformazione unimodulare di variabili, che riduce la (4) alla forma

$$(7) \quad x'_1 = x_1, \quad x'_i = p_{i1}x_1 + p_{i2}x_2 + \dots + p_{in}x_n, \quad (i=2, 3, \dots, n)$$

dove abbiamo scritte ancora le  $x$  in luogo delle  $X$ .

L'equazione caratteristica corrispondente alla (7), che ha le stesse radici di  $\|m_{ii} - \rho\| = 0$ , si riduce, dopo eliminata una radice  $\rho = +1$  a quella corrispondente alla sostituzione (pure unimodulare involutoria)

$$(8) \quad x'_i = p_{i2}x_2 + p_{i3}x_3 + \dots + p_{in}x_n, \quad (i=2, 3, \dots, n),$$

la quale rappresenta l'affinità involutoria che la  $\Omega$  subordina entro allo spazio unito  $x_1 = 0$  (nelle coordinate della (7)). Poichè supponiamo vero il teorema per le sostituzioni su  $n-1$  variabili, l'equazione caratteristica della (8) avrà tutte le sue radici eguali a  $+1$  od a  $-1$ , e precisamente ne avrà  $h-1$ ,  $k$ , se  $h, k$  esprimono i numeri analoghi per la (7), cioè per la (4).

Mediante una sostituzione unimodulare sulle  $x_2, x_3, \dots, x_n$  possiamo ridurre la (8) alla forma (5); ed allora la (7) assume la forma

$$(9) \quad \begin{array}{lll} x'_1 = x_1 & x'_{h+1} = q_{1, h+1}x_1 + x_2 - x_{h+1} & \\ x'_2 = q_{12}x_1 + x_2 & x'_{h+2} = q_{1, h+2}x_1 + x_3 - x_{h+2} & x'_{h+t} = q_{1, h+t}x_1 - x_{h+t}, \\ \dots & \dots & (t = \lambda' + 1, \dots, k) \\ x'_h = q_{1, h}x_1 + x_h & x'_{h+\lambda'} = q_{1, h+\lambda'}x_1 + x_{\lambda'+1} - x_{h+\lambda'} & \end{array}$$

dove  $\lambda'$  è il numero analogo a  $\lambda$  relativo alla (8).

<sup>(14)</sup> Ciò è notoriamente possibile perchè le  $\mu_{ih}$  son *prime fra loro*. Vedi p. es. la classica Memoria di FROBENIUS, *Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten* [Journ. für. Math. 86 (1879), pp. 146-208] § 8, VI.

Esaminiamo ordinatamente i tre gruppi di relazioni così ottenuti:

1) Gli interi  $q_{12}, \dots, q_{1h}$  sono nulli in forza del carattere *involutorio* della sostituzione; sicchè le relazioni del 1° gruppo son proprio le  $X'_i = X_i$  delle (5);

2) Si cambino le variabili  $x_2, x_3, \dots, x_{\lambda'+1}$  sostituendo al posto della generica  $x_i$  tra esse la  $X_i = x_i + q_{1i}x_1$ ; allora le sostituzioni del primo gruppo restano inalterate, mentre quelle del secondo (scrivendo sempre  $x$  in luogo di  $X$ ) divengono

$$x'_{h+1} = x_2 - x_{h+1}, \quad x'_{h+2} = x_3 - x_{h+2}, \dots, \quad x'_{h+\lambda'} = x_{\lambda'+1} - x_{h+\lambda'},$$

e, salva la diversità degl'indici, son dello stesso tipo di quelle del 2° gruppo di (5);

3) Nelle espressioni  $x'_r = q_{1r}x_1 - x_r$  del terzo gruppo, si può anzitutto ridurre il coefficiente di  $x_1$  a 0 od 1 secondo che  $q_{1r}$  è pari o dispari: basta, a seconda dei casi, cambiare  $x_r$  in

$$X_r = x_r - \frac{1}{2}q_{1r}x_1, \quad \text{oppure in} \quad X_r = x_r - \frac{1}{2}(q_{1r} - 1)x_1.$$

Dopo ciò se in due fra le espressioni ottenute quel coefficiente è eguale, ad 1, p. es. se si ha  $x'_r = x_1 - x_r$ ,  $x'_s = x_1 - x_s$  esso si può sempre ridurre zero in una delle due, cambiando le variabili  $x_r, x_s$  nelle  $x_r, x_r - x_s$ : sicchè in definitiva le espressioni del terzo gruppo si riducono ad  $x'_i = -x_i$  meno al più una che potrà rimanere del tipo  $x'_r = x_1 - x_r$ .

Non resta allora che trasportare quella relazione nel secondo gruppo, e si ha senz'altro, dopo opportuno cambiamento d'indici, la (5) <sup>(12)</sup>.

Della (5') si può dare una dimostrazione analoga, partendo dall'osservare che se l'equazione  $\|m_{it} - \rho\| = 0$  non ha radici eguali a  $-1$ , la (4) è l'*identità*  $x'_i = x_i$ , oppure applicando la (5) al prodotto della (4) per la  $x'_i = -x_i$ . Ma più facilmente si raggiunge lo scopo cambiando le  $X$  nelle  $Y$  mediante la sostituzione (unimodulare perchè invertibile a vista)

$$(10) \quad \begin{aligned} Y_t &= X_i - 2X_{h+t}, & Y_t &= -X_{h+t}, & (i &= 1, 2, \dots, \lambda) \\ Y_{h+i} &= X_i - X_{h+i}, & Y_j &= X_j, & (j &= \lambda + 1, \dots, h; t = \lambda + 1, \dots, h) \end{aligned}$$

che trasforma le (5) nelle (5') <sup>(13)</sup>.

Ora poniamo  $n = 2p$  e torniamo alla varietà  $V$ . Interpretando le  $x_i$ , e quindi le  $X_i$  come simboli di  $2p$  cicli *primitivi* della riemanniana  $R$ , il teorema dimostrato ne dice che la sostituzione indotta su quei cicli da una

<sup>(12)</sup> Si osservi che risulterà  $\lambda = \lambda'$ , o  $\lambda = \lambda' + 1$  secondo che le  $q_{1r}$  del 3° gruppo sono tutte pari, o almeno una di esse è dispari.

<sup>(13)</sup> La (10) non è l'*unica* sostituzione che adempia all'ufficio indicato (in quanto si trovano subito sostituzioni che trasformano in se stesse le (5) o le (5')), ma per noi è la più conveniente.

qualsiasi trasformazione biunivoca (continua) *involutoria*  $T$  della  $R$ , può essere ridotta alla forma (5) o (5').

Se p. es.  $T$  è imagine d'una trasformazione *birazionale involutoria*  $\tau$  di  $V$  generante una  $\gamma_2^1$  d'irregolarità (genere)  $\pi$ , si può dimostrare che  $h \leq 2\pi$ ; quindi, se  $\pi = 0$ , la (5) sarà necessariamente  $X_i' = -X_i$ . Potrà aver interesse proseguire su questa via, ma qui ci basterà avervi accennato.

Torniamo alla nostra simmetria  $S$ , e *dimostriamo che*  $h = k = p$ . In virtù della (5), i cicli  $X_1, X_2, \dots, X_h$  sono trasformati in se stessi da  $S$ , e quindi i relativi periodi degl'integrali *reali*  $u_i$  sono *reali*, mentre i cicli  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$  della (5') son mutati nei loro opposti, e quindi i corrispondenti periodi sono *immaginari puri*. Se fosse  $h > p$ , da una opportuna combinazione lineare a coefficienti *reali* degli  $u_i$  si potrebbero far sparire le parti immaginarie dei  $k = 2p - h < p$  periodi ai cicli  $X_{h+1}, \dots, X_{2p}$ , ottenendo un integrale *coi periodi tutti reali*, il che è notoriamente assurdo. Per analoga ragione non può essere  $k > p$ : dunque, come si è affermato,  $h = k = p$ .

Se ora introduciamo notazioni più appropriate, indicando con  $A_1, A_2, \dots, A_p, B_1, B_2, \dots, B_p$  i cicli  $X_i$ , e con  $C_1, C_2, \dots, C_p, D_1, D_2, \dots, D_p$  i cicli  $Y_i$ , le (5) (5') divengono

$$(II) \quad A_i' = A_i, \quad B_j' = A_j - B_j, \quad B_t' = -B_t \quad (A^4), \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

$$(II^a) \quad C_i' = -C_i, \quad D_j' = D_j - C_j, \quad D_t' = D_t, \quad (j = 1, 2, \dots, \lambda; t = \lambda + 1, \dots, p)$$

mentre la sostituzione (10) che fa passare dall'uno all'altro tipo di cicli, assume la forma

$$(III) \quad C_i = A_i - 2B_i, \quad C_j = -B_j; \quad D_i = A_i - B_i, \quad D_j = A_j, \\ (i = 1, 2, \dots, \lambda; j = \lambda + 1, \dots, p).$$

Chiameremo **pseudonormali** (rispetto ad una simmetria  $S$ ) risp. di *prima* e di *seconda specie*,  $2p$  cicli primitivi che si comportino come gli  $A_i, B_i$ , o come i  $C_i, D_i$ . Ma in generale, se la specie non è dichiarata, la denominazione s'intenderà riferita alla prima, cioè agli  $A_i, B_i$ ; i quali alla lor volta si distingueranno, a parole, in cicli  $A_i$  *del primo gruppo*, e cicli  $B_i$  *del secondo gruppo*.

(<sup>44</sup>) Il risultato espresso dalla (II) (non dalla II<sup>a</sup>) risale ad HURWITZ che vi è, come noi, pervenuto attraverso ad un procedimento di riduzione della (2), ma assai più complesso e meno generale del nostro. Cfr. la Memoria *Ueber die Perioden solcher eindeutiger 2n-fach periodischer Functionen* ecc. [Journ. für Math. 94 (1883), pp. 1-20]. Se si osserva che le (2), nelle quali i simboli  $C_i, C_i'$  sian sostituiti con  $x_i, \bar{x}_i'$  rappresentano l'*antisostituzione riemanniana* corrispondente alla  $S$ , dalla (II) e dalle proprietà della trasformazione si deduce che il *modulo* di quell'*antisostituzione* è  $(-1)^p$  e che la corrispondente equazione caratteristica ha  $p$  radici eguali a  $+1$ , e  $p$  eguali a  $-1$ . Cfr. CHERUBINO, loco cit. I, nn. 11, 19.

3. **Integrali e periodi pseudonormali. Invarianti della riduzione.** — Risulta facilmente dalle (II) (II<sup>a</sup>) che ogni ciclo trasformato in se stesso (in un ciclo omologo) da  $S$  (o, come brevemente diremo, *ciclo reale*) è una combinazione lineare dei  $p$  cicli  $A_i$ , mentre ogni ciclo trasformato nel suo opposto (*ciclo immaginario puro*) è una combinazione lineare dei  $p$  cicli  $C_i$ . Inoltre, tenendo conto delle (III) si trova anche che il *doppio* di ogni ciclo della riemanniana  $R$ , è una combinazione lineare dei  $2p$  cicli  $A_i, C_i$ , i quali sono *indipendenti*, ma in generale *non primitivi* in quanto il determinante della sostituzione che li lega agli  $A_i, B_i$  è eguale a  $(-2)^\lambda$  <sup>(15)</sup>.

Come si è già osservato il periodo d'un integrale reale ad un ciclo reale è reale; onde tali saranno i  $p^2$  periodi degl'integrali  $u_i$  ai cicli  $A_i$ . Ma di più il loro determinante è *diverso da zero*, giacchè in caso contrario esisterebbe un integrale *reale* coi periodi ai cicli  $A_i$  nulli, e quindi, come risulta dalle (II), coi periodi ai cicli  $B_i$  immaginari puri, il che, come sappiamo è assurdo. Potremo quindi *normalizzare rispetto ai cicli  $A_i$  gl'integrali reali*, cioè determinare  $p$  combinazioni lineari (indipendenti) a *coefficienti reali* degli  $u_i$ , per cui la matrice quadrata dei periodi ai cicli  $A_i$  abbia diversi da zero. ed eguali ad 1, soltanto gli elementi della diagonale principale. A questi integrali, che chiameremo *pseudonormali*, e continueremo ad indicare con  $u_i$ , spetta, in virtù delle (II) una matrice di periodi (*matrice o tabella pseudonormale*) del tipo

	$A_1$	$A_2$	$\dots$	$A_p$	$B_1$	$B_2$	$\dots$	$B_\lambda$	$B_{\lambda+1}$	$\dots$	$B_p$
$u_1$	1	0	$\dots$	0	$\frac{1}{2} + i\tau_{11}$	$i\tau_{12}$	$\dots$	$i\tau_{1\lambda}$	$i\tau_{1, \lambda+1}$	$\dots$	$i\tau_{1p}$
$u_2$	0	1	$\dots$	0	$i\tau_{21}$	$\frac{1}{2} + i\tau_{22}$	$\dots$	$i\tau_{2\lambda}$	$i\tau_{2, \lambda+1}$	$\dots$	$i\tau_{2p}$
(P)	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$u_\lambda$	0	0	$\dots$	0	$i\tau_{\lambda 1}$	$i\tau_{\lambda 2}$	$\dots$	$\frac{1}{2} + i\tau_{\lambda\lambda}$	$i\tau_{\lambda, \lambda+1}$	$\dots$	$i\tau_{\lambda p}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$i\tau_{\lambda+1, \lambda+1}$	$\dots$	$\dots$
$u_p$	0	0	$\dots$	1	$i\tau_{p1}$	$i\tau_{p2}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$i\tau_{pp}$

che scriviamo per disteso, onde il lettore la possa aver sempre sott'occhio.

<sup>(15)</sup> L'esistenza d'un sistema di cicli come gli  $A_i, C_i$  può stabilirsi anche indipendentemente dalle (II) (II<sup>a</sup>) con un procedimento diretto assai semplice. Cfr. LEFSCHETZ, loco cit., n. 2.

Volendo invece della (P) ottenere una tabella nella quale in luogo dei valori 1 figurino, secondo le consuetudini di taluni Autori, i valori  $i$ , o  $\pi i$ , o  $2\pi i$  senza che perciò gl'integrali cessino d'esser reali, basta sostituire ai cicli  $A_i$ ,  $B_i$ , i cicli  $C_i$ ,  $D_i$  e normalizzare nel modo voluto gl'integrali  $u_i$  rispetto ai cicli  $C_i$ . Analoghe tabelle si ottengono per gl'integrali immaginari puri  $v_i$ , ma su di esse per ora non c'intratteremo.

Alla considerazione d'una matrice pseudonormale (P) è naturalmente collegata quella dell'intero  $\lambda$  e del determinante  $\Delta = \|\tau_{rs}\|$ . Vedremo più avanti l'importanza ed il significato di questi elementi; per ora ci limiteremo a dimostrare che  $\lambda$  ed il valore assoluto di  $\Delta$  sono invarianti della riduzione, cioè non dipendono dai particolari cicli pseudonormali  $A_i$ ,  $B_i$  considerati.

Difatti siano  $E_i$ ,  $F_i$  altri cicli pseudonormali, relativi alla stessa simmetria  $S$ ,  $\sigma_{rs}$  le parti immaginarie (coefficienti di  $i$ ) dei periodi pseudonormali ai cicli  $F_i$ ,  $\lambda'$  e  $\Delta' = \|\sigma_{rs}\|$  gli analoghi di  $\lambda$  e  $\Delta$ . Esprimendo i cicli  $E_i$ ,  $F_i$  mediante gli  $A_i$ ,  $B_i$  avremo

$$(11) \quad \begin{aligned} E_i &= a_{i1}A_1 + a_{i2}A_2 + \dots + a_{ip}A_p & (i = 1, 2, \dots, p) \\ F_i &= b_{i1}A_1 + b_{i2}A_2 + \dots + b_{ip}A_p + c_{i1}B_1 + c_{i2}B_2 + \dots + c_{ip}B_p, \end{aligned}$$

dove nei secondi membri delle espressioni degli  $E_i$  figurano solo gli  $A_i$  perchè gli  $E_i$  son cicli reali. Inoltre perchè la (11) è unimodulare  $\|a_{rs}\| = \pm 1$ ,  $\|c_{rs}\| = \pm 1$ .

Poichè, in virtù della (11), l'integrale  $u_h$  della (P) ha al ciclo  $E_i$  il periodo  $a_{ih}$ , così gl'integrali pseudonormali rispetto ai nuovi cicli saranno

$$(12) \quad U_i = \alpha_{i1}u_1 + \alpha_{i2}u_2 + \dots + \alpha_{ip}u_p, \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

dove gli  $\alpha_{rs}$  son gli elementi reciproci degli  $a_{rs}$  e si sono omesse le costanti additive, qui inessenziali. Ma per le (11) la parte immaginaria  $\rho_{hi}$  del periodo di  $u_h$  al ciclo  $F_i$  è

$$(13) \quad \rho_{hi} = c_{i1}\tau_{h1} + c_{i2}\tau_{h2} + \dots + c_{ip}\tau_{hp}, \quad (i, h = 1, 2, \dots, p)$$

sicchè quella di  $U_r$  al ciclo  $F_s$ , cioè  $\sigma_{rs}$  sarà

$$(14) \quad \sigma_{rs} = \alpha_{r1}\rho_{1s} + \alpha_{r2}\rho_{2s} + \dots + \alpha_{rp}\rho_{ps}, \quad (r, s = 1, 2, \dots, p)$$

e per tanto  $\|\rho_{rs}\| = \|c_{rs}\| \Delta$ ,  $\Delta' = \|\alpha_{rs}\| \|c_{rs}\| = \|a_{rs}\| \|c_{rs}\| \Delta$ , ed infine  $\Delta' = \pm \Delta$ .

Per dimostrare che  $\lambda = \lambda'$  trasformiamo i due membri delle (11) mediante la  $S$ , tenendo conto della (II) e della sostituzione analoga (con  $\lambda'$  al posto di  $\lambda$ ) indotta sugli  $E_i$ ,  $F_i$ . Troviamo allora facilmente le relazioni

$$(15) \quad a_{r1} = 2b_{r1} + c_{r1}, \dots, a_{r\lambda} = 2b_{r\lambda} + c_r; \quad a_{r,\lambda+1} = 2b_{r,\lambda+1}, \dots, a_{rp} = 2b_{rp}$$

$$(15') \quad c_{s1} = -2b_{s1}, \dots, c_{s\lambda} = -2b_{s\lambda}; \quad b_{s,\lambda+1} = \dots = b_{sp} = 0.$$

$$(r = 1, 2, \dots, \lambda'; s = \lambda' + 1, \dots, p)$$



In virtù della (15) nelle prime  $\lambda'$  righe della matrice  $\|a_{rs}\|$  gli elementi delle ultime  $p - \lambda$  colonne sono tutti *pari*. Se fosse  $\lambda' > \lambda$ , ogni minore d'ordine  $\lambda'$  della matrice stessa, contenendo una almeno fra quelle colonne, risulterebbe anch'esso pari, e quindi tale sarebbe in definitiva  $\|a_{rs}\|$ , il che è assurdo perchè  $\|a_{rs}\| = \pm 1$ . Dunque  $\lambda' \leq \lambda$ , e per analogia ragione,  $\lambda' \geq \lambda$ , cioè infine  $\lambda = \lambda'$ , c. d. d.

All'intero  $\lambda$ , ch'è in fondo un invariante della sostituzione (2), daremo il nome di **carattere reale** della matrice pseudonormale ( $P$ ), o della simmetria  $S$ , o della varietà reale  $V^{(p)}$  corrispondente; mentre  $\Delta$  se ne dirà il *determinante*.

**4. Matrici complementari.** — Agli argomenti trattati si collega una questione riguardante le varietà abeliane che riteniamo opportuno esaminare in anticipo.

Sarà dimostrato al § seguente, e del resto risulta da facili osservazioni, che se  $p$  integrali semplici di 1<sup>a</sup> specie  $u_1, u_2, \dots, u_p$  d'una *varietà abeliana*  $V_p$  <sup>(16)</sup> ammettono, rispetto a certi  $2p$  cicli primitivi  $A_i, B_i$  la tabella di periodi ( $P$ ), allora  $V_p$  ammette le simmetrie rappresentate dalle equazioni

$$(16) \quad u'_i \equiv \bar{u}_i + c_i \quad (c_i + \bar{c}_i \equiv 0) \\ (16') \quad u'_i \equiv -\bar{u}_i + d_i \quad (d_i - \bar{d}_i \equiv 0), \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

e che (quindi) ciò si verifica appena  $V_p$  ammette una simmetria  $S$  (cioè è *di tipo reale*). Anzi se  $V_p$  non è *singolare* le (16) (16') danno *tutte* le simmetrie di  $V_p$ .

Poichè le (16) son del tipo (I), gli  $u_i$  sono integrali reali rispetto alle simmetrie corrispondenti, e quindi ( $P$ ) è proprio la relativa tabella pseudonormale. Notiamo che dalla struttura di essa, e dalla realtà degli  $u_i$ , segue subito che i cicli  $A_i, B_i$  subiscono per effetto d'una *qualunque* fra le simmetrie (16) la sostituzione (II): nè deve sorprendere che si tratti sempre della *stessa* sostituzione, giacchè una (16) qualunque può dedursi dalla particolare  $u'_i \equiv \bar{u}_i$  moltiplicandola per la trasformazione *ordinaria* (di 2<sup>a</sup> specie)  $u'_i \equiv u_i + c_i$  che trasforma in se stesso ogni ciclo di  $V_p$ .

Invece le equazioni (16') son del tipo (I<sup>a</sup>) sicchè rispetto alle simmetrie corrispondenti gl'integrali  $u_i$  sono *immaginari puri*. La ( $P$ ) non è dunque matrice pseudonormale per le simmetrie (16'); tale sarà un'altra matrice ( $P_1$ ) che diremo *complementare* della ( $P$ ), e che ci proponiamo di determinare.

<sup>(16)</sup> Sottintendiamo, qui e nel seguito, « *di rango 1* » cioè tale che ad un suo punto corrisponda un solo sistema di valori dei parametri  $u_1, u_2, \dots, u_p$  (modd. periodi).

Perciò occorre determinare per quelle simmetrie a) gl'integrali reali, b) i cicli pseudonormali (di 1<sup>a</sup> specie) c) gl'integrali pseudonormali.

a) Integrali reali per le (16') sono i  $v_n = iu_n$  (cfr. n. 1). Con questa posizione i due tipi (16) (16') si scambiano tra di loro, e ciò, tra l'altro, prova che *la relazione fra matrici complementari è simmetrica* <sup>(17)</sup>.

b) Cicli pseudonormali di 1<sup>a</sup> specie per le (16') sono i  $C_i, D_i$ . Difatti la simmetria  $u'_i \equiv -\bar{u}_i$ , è il prodotto di  $u'_i \equiv \bar{u}_i$  per la trasformazione (di 1<sup>a</sup> specie)  $u'_i \equiv -u_i$  che muta ogni ciclo di  $V_p$  nel suo opposto. Pertanto le sostituzioni indotte da  $u'_i \equiv -\bar{u}_i$  (e quindi da ogni altra simmetria (16')) sui cicli  $A_i, B_i; C_i, D_i$ , si ottengono dalle (II) (II<sup>a</sup>) cambiando i segni dei secondi membri; ma ciò scambia tra di loro i due tipi (II) (II<sup>a</sup>), quindi, ecc.

c) I periodi degl'integrali  $v_i$  ai cicli  $A_i, B_i$  son quelli della (P) moltiplicati per  $i$ ; pertanto se s'indica con  $\omega_{rs}$  il periodo di  $v_r$  lungo  $C_s$ , risulta dalla (III)

$$\omega_{ri} = 2\tau_{ri}, \quad \omega_{rj} = \tau_{rj}. \quad (i=1, 2, \dots, \lambda; j=\lambda+1, \dots, p)$$

Normalizzando i  $v_r$  rispetto ai cicli  $C_s$ , ne segue che i cercati integrali pseudonormali (prescindendo dalle costanti additive) sono:

$$(17) \quad \begin{aligned} V_i &= \frac{1}{2}(\tau'_{1i}v_1 + \tau'_{2i}v_2 + \dots + \tau'_{pi}v_p) & (i=1, 2, \dots, \lambda; j=\lambda+1, \dots, p) \\ V_j &= \tau'_{1j}v_1 + \tau'_{2j}v_2 + \dots + \tau'_{pj}v_p, \end{aligned}$$

indicandosi con  $\tau'_{rs}$  gli elementi reciproci dei  $\tau_{rs}$  nel determinante  $\Delta = \|\tau_{rs}\|$ .

La matrice ( $P_1$ ) che ha evidentemente lo stesso carattere reale della (P), sarà dopo ciò completamente conosciuta, note che siano le parti immaginarie dei periodi che i  $V_i$  hanno ai cicli  $D_i$ . Ricorrendo alle (III) si trova con facile calcolo che il relativo determinante  $\Delta_1$  corrisponde allo schema:

$$(A_1) \quad \begin{array}{c|c} \frac{\tau'_{rs}}{4} & \frac{\tau'_{rs}}{2} \\ \hline \frac{\tau'_{rs}}{2} & \tau'_{rs} \end{array}$$

nel quale la separazione corrisponde (tanto per le righe, quanto per le colonne) al passaggio dall'indice  $\lambda$  a  $\lambda+1$  ed i primi indici variano colle colonne anzichè colle righe. (continua)

<sup>(17)</sup> E prova anche che sarebbe improprio distinguere i due tipi (16) (16') con denominazioni speciali, giacchè quelle equazioni, a differenza delle analoghe  $u'_i \equiv \pm u_i + c_i$ , non hanno carattere invariante per le trasformazioni dei parametri. Vedremo più avanti che anche la distinzione fra trasf. (antibirazionali) ordinarie e singolari è, almeno in taluni casi (Cfr. § 7) del pari impropria.

Moltiplicando per 2 le prime  $\lambda$  righe e colonne di  $\Delta_1$ , si ottiene, salvo lo scambio delle righe colle colonne  $\|\tau'_{rs}\| = \frac{1}{\Delta}$ , quindi:

*Fra i determinanti  $\Delta$ ,  $\Delta_1$  di due matrici pseudonormali complementari, di carattere reale  $\lambda$ , intercede la relazione*

$$(18) \quad 4^\lambda \Delta \Delta_1 = 1.$$

In particolare se  $\Delta = 2^{-\lambda}$  si ha quindi  $\Delta = \Delta_1$  per quanto le due matrici siano ancora in generale *distinte*. Vedremo più avanti (§ 6) un caso in cui la relazione  $\Delta = \Delta_1$  ha un notevole significato geometrico.

## § 2. Prime proprietà reali delle varietà abeliane <sup>(18)</sup>.

**5. Premessa sulle caratteristiche dei semiperiodi.** — Fissiamo una volta per sempre talune convenzioni e notazioni abbreviative che ci saranno di grande aiuto per la loro espressiva concisione.

Data una matrice di periodi

$$(1) \quad \|\omega_{r_1}, \omega_{r_2}, \dots, \omega_{r_p} : \omega'_{r_1}, \omega'_{r_2}, \dots, \omega'_{r_p}\|, \quad (r=1, 2, \dots, p)$$

distinti in due gruppi di  $p$  periodi ciascuno, un *sistema di semiperiodi simultanei*, o, come più brevemente diremo, un *semiperiodo*, può rappresentarsi mediante espressioni del tipo

$$(2) \quad \frac{1}{2}(g_1\omega_{r_1} + g_2\omega_{r_2} + \dots + g_p\omega_{r_p} + h_1\omega'_{r_1} + h_2\omega'_{r_2} + \dots + h_p\omega'_{r_p}),$$

nelle quali le  $g, h$  sono eguali a *zero* o ad *uno*. Il sistema di numeri  $g_i, h_i$ , raccolto nel simbolo  $(g_1, g_2, \dots, g_p | h_1, h_2, \dots, h_p)$  si dirà *caratteristica* del semiperiodo, e *servirà anche a denotare il semiperiodo stesso*.

Ai due simboli  $(g_1, g_2, \dots, g_p)(h_1, h_2, \dots, h_p)$  daremo il nome di *semicaratteristiche*, risp. *del primo* e *del secondo gruppo*: e cogli stessi simboli denoteremo i semiperiodi corrispondenti, cioè quelli per cui tutte le  $h_i$ , risp. le  $g_i$  sono nulle (*semiperiodi del primo* e *del secondo gruppo*). Quando le  $g_i, h_i$  son sostituite dai loro valori numerici, i due tipi di semicaratteristiche si distin-

(18) La numerazione in arabo delle formule riprende al principio d'ogni §: non così quella in romano.

gueranno con una *sottolineazione* o risp. una *sopralineazione*: così ad es. il simbolo  $(\overline{1, 1, \dots, 1})$  designerà il semiperiodo  $\frac{1}{2}(\omega'_{r_1} + \omega'_{r_2} + \dots + \omega'_{r_p})$ .

Le semicaratteristiche distinte di ciascun gruppo sono  $2^p$ , le caratteristiche sono  $2^{2p}$ ; ogni semicaratteristica appartiene a  $2^p$  caratteristiche.

Una caratteristica dicesi *pari* o *dispari* secondo ch'è pari o dispari il valore dell'espressione  $\sum_{i=1}^p g_i h_i$ . Ogni semicaratteristica (di un assegnato gruppo) appartiene a  $2^{p-1}$  caratteristiche pari e ad altrettante caratteristiche dispari, fatta eccezione per la  $(0, 0, \dots, 0)$  (*semicaratteristica impropria*) che appartiene a  $2^p$  caratteristiche pari ed a *nessuna* caratteristica dispari. Vi sono quindi  $2^{p-1}(2^p + 1)$  caratteristiche pari, e  $2^{p-1}(2^p - 1)$  caratteristiche dispari <sup>(19)</sup>.

Infine un *numero reale arbitrario* si denoterà sempre con  $r$  ed un *numero immaginario puro*, del pari arbitrario, con  $j$ .

**6. Trasformazioni antibirazionali, simmetriche, e classi reali delle varietà abeliane.** — Una trasformazione antibirazionale d'una varietà abeliana  $V_p$  è rappresentata, qualunque siano i parametri  $u_i$ , da equazioni del tipo:

$$(3) \quad u'_i \equiv \lambda_{i_1} \overline{u}_1 + \lambda_{i_2} \overline{u}_2 + \dots + \lambda_{i_p} \overline{u}_p + c_i \cdot (i = 1, 2, \dots, p).$$

Di questa rappresentazione abbiám già fatto cenno al § 1; qui ci converrà ricordarne nel modo piú breve la dimostrazione.

Riferiamoci ad un modello, del resto qualunque, di  $V_p$ , in un  $S_r$  ( $r > p$ ) di equazioni  $x_h = \varphi_h(u_1, u_2, \dots, u_p)$  ( $h = 1, 2, \dots, r$ ) dove le  $\varphi_h$  son funzioni  $2p$  volte periodiche delle  $u_i$ . La varietà  $\overline{V}_p$  *coniugata* di  $V_p$  avrà le equazioni  $x_h = \overline{\varphi}_h(v_1, v_2, \dots, v_p)$ , indicandosi con  $\overline{\varphi}_h$  le *funzioni coniugate* delle  $\varphi_h$ ; e la trasformazione di coniugio  $K$  tra  $V_p$  e  $\overline{V}_p$  sarà rappresentata dalle equazioni  $v_i \equiv \overline{u}_i$  o dalle equivalenti  $u_i \equiv \overline{v}_i$ .

Se  $T$  è una trasformazione antibirazionale di  $V_p$  in sè, la  $\tau = KT$  sarà una trasformazione *birazionale* di  $\overline{V}_p$  in  $V_p$ , e quindi avrà equazioni del tipo

$$(4) \quad u'_i \equiv \lambda_{i_1} v_1 + \lambda_{i_2} v_2 + \dots + \lambda_{i_p} v_p + c_i,$$

dalle quali discendono per la  $T = K\tau$  le (3).

Viceversa se la corrispondenza  $T$  che vien posta dalle (3) fra i punti di  $V_p$  è *biunivoca*, lo è anche la corrispondente (4), cioè la  $\tau = KT$ . Ma allora questa è notoriamente birazionale, dunque  $T$  è antibirazionale, ecc.

<sup>(19)</sup> Per altre proprietà delle caratteristiche rinviamo al trattato di KRAZER: *Lehrbuch der Thetafunctionen* [Leipzig, Teubner (1903)], Cap. VII.

Ricordiamo infine che la condizione perchè la corrispondenza stabilita dalle (3) sia biunivoca, è che quando le  $u_i$  s'incrementano di periodi simultanei, lo stesso accada delle  $u'_i$  e viceversa <sup>(20)</sup>.

Supponiamo ora che la varietà abeliana  $V_p$  corrisponda alla tabella pseudo-normale (P). Allora si vede subito che le equazioni

$$(5) \quad u'_i \equiv \bar{u}_i + c_i,$$

$$(5') \quad u'_i \equiv -\bar{u}_i + d_i, \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

soddisfano alla condizione predetta, e quindi rappresentano trasformazioni antibirazionali di  $V_p$ . Fra queste sono involutorie, cioè *simmetrie*, quelle per cui  $c_i + \bar{c}_i \equiv 0$ ,  $d_i - \bar{d}_i \equiv 0$ .

Viceversa se una varietà abeliana  $V_p$  possiede una simmetria (cioè è di tipo reale), la sua equazione è riducibile alla forma (5) (cfr. n.° 1) e la tabella dei periodi alla (P): quindi  $V_p$  possiede tutte le trasformazioni (5)(5'). Alle (5) è collegata, nel senso del § precedente (n. 4) la matrice (P) ed alle (5') la sua complementare: quelle due matrici hanno, come si è visto, lo stesso carattere reale  $\lambda$  che si dirà *carattere reale della  $V_p$* .

Tal denominazione è legittima se  $V_p$  non è singolare (cioè ha l'indice di moltiplicabilità, e quindi quello di singolarità eguale a 0) giacchè allora le (5)(5') esauriscono tutte le trasformazioni antibirazionali di  $V_p$ . Difatti una trasformazione antibirazionale diversa dalle predette, moltiplicata per la  $u'_i \equiv \bar{u}_i$  darebbe una trasformazione birazionale *singolare* di  $V_p$  <sup>(21)</sup>.

Analizziamo ora le condizioni di simmetria

$$(6) \quad c_i + \bar{c}_i \equiv 0, \quad d_i - \bar{d}_i \equiv 0,$$

determinando i valori che vi soddisfano. Dalla prima delle (6) si ricava che  $c_n$  è congruo ad un numero immaginario puro  $j_n$  *arbitrario*, più un *semiperiodo reale*. Ora sappiamo dal n. 3 che ogni periodo reale degl'integrali  $u_n$  è una combinazione lineare (a coeff. interi) dei periodi ai cicli  $A_i$ ; sicchè una analoga conclusione varrà per il nostro semiperiodo. Ma per  $i = 1, 2, \dots, \lambda$  si ha dalle (III)  $A_i - 2B_i = C_i$  quindi il semiperiodo al ciclo  $A_i$  diminuito del *periodo* al ciclo  $B_i$  è eguale ad una quantità *immaginaria pura* (semiperiodo

<sup>(20)</sup> Per maggiori dettagli cfr. CHERUBINO, loco cit. I, n. 18.

<sup>(21)</sup> In generale una data simmetria ha lo stesso carattere reale di quelle che se ne deducono moltiplicandola per trasformazioni ordinarie (che si potran dire *associate* alla data): finora però non mi son noti esempi di  $V_p$  (singolari) con due simmetrie di *diverso* carattere reale. Cfr. il § 7.

al ciclo  $C_i$ ) che si può inglobare in  $j_h$ , eliminando così dalla parte reale delle  $c_h$  ogni contributo dei semiperiodi ai cicli  $A_1, A_2, \dots, A_\lambda$ . In definitiva i valori delle  $c_h$  corrispondenti alle *simmetrie* (5) sono (modd. periodi) del tipo

$$(7) \quad c \equiv j + (0, 0, \dots, 0, g_{\lambda+1}, g_{\lambda+2}, \dots, g_p),$$

restando sottintesi, come nelle formule analoghe che otterremo in seguito, gl'indici variabili da 1 a  $p$ .

Ponendo in una stessa *schiera* due simmetrie che differiscano solo per valori della *parte reale* delle  $c_h$  (le  $j_h$  sono, si ricordi, *arbitrarie*) le (7) danno, al variare della semicaratteristica,  $2^{p-\lambda}$  schiere di simmetrie, di cui vedremo tra poco l'importanza.

Le stesse conclusioni valgono per le (5') se esse si rappresentano mediante i relativi integrali pseudonormali  $V_h$  (n. 4) purchè la (7) si riferisca alla matrice  $(P_1)$  complementare della  $(P)$ . Ma se si vogliono conservare gli  $u_h$  e le (5') allora per le costanti  $d_h$  si trovano facilmente i valori

$$(7') \quad d \equiv r + (0, 0, \dots, 0, h_{\lambda+1}, h_{\lambda+2}, \dots, h_p)$$

i semiperiodi essendo presi rapporto alla  $(P)$  <sup>(22)</sup>.

Ora interessa determinare le *classi* in cui si ripartiscono le simmetrie considerate, quando si pongono in una stessa classe due simmetrie *equivalenti* (cioè trasformate una nell'altra) per trasformazioni birazionali di  $V_p$ ; giacchè com'è noto, a queste corrispondono le *classi di varietà reali* (distinte per trasformazioni birazionali reali) appartenenti alla classe definita, in senso complesso, da  $V_p$  <sup>(23)</sup>.

La risoluzione di questo problema, supposta  $V_p$  *non singolare*, è immediata. Basta osservare che le trasformate d'una (5) differiscono soltanto (ed *arbitrariamente*) per la *parte immaginaria* della costante  $c_h$ , e che analogamente, nel caso della (5'), l'alterazione colpisce solo la *parte reale* delle  $d_h$ , per concludere che le classi cercate coincidono colle  $2^{p-\lambda} + 2^{p-\lambda} = 2^{p+1-\lambda}$  schiere dedotte dalle (7)(7'). Quindi:

<sup>(22)</sup> Le (5)(5')(7)(7') sussistono anche se gli  $u_h$  sono *integrali reali qualunque*, purchè i semiperiodi s'intendano sempre relativi ai cicli pseudonormali.

<sup>(23)</sup> Questa proprietà può stabilirsi imitando il ragionamento della mia Memoria citata in (5), n. 7. Si noti che l'equivalenza per trasformazioni antibirazionali non dà nulla di nuovo, giacchè se due simmetrie  $S, T$  sono equivalenti rispetto ad una trasformazione antibirazionale  $U$ , cioè se  $U^{-1}SU = T$ , lo sono anche rispetto alla trasformazione *birazionale*  $SU$ . Cfr. anche CHERUBINO, loco cit., I, n. 26.

Alla classe complessa definita da una varietà abeliana non singolare  $V_p$ , di tipo reale, e carattere reale  $\lambda$ , appartengono  $2^{p+1-\lambda}$  classi distinte di varietà reali <sup>(24)</sup>.

Sappiamo dal n. 4 che se agli integrali  $u_h$  si sostituiscono i  $v_h = iu_h$  od i  $V_h$ , le (5') assumono la forma (5) e quindi le relative costanti son date (nel caso delle simmetrie) dalle (7) i semiperiodi essendo presi rispetto ai cicli  $D_i$ , cioè, per i  $V_h$ , rispetto alla matrice  $(P_1)$ . Ne risulta che si può associare ad ogni classe di simmetrie (5) quella classe (5') le cui costanti (nella rappresentazione predetta) corrispondono allo stesso simbolo (7). Due classi siffatte, e le simmetrie che vi appartengono si diranno *complementari*: se si mantengono le rappresentazioni (5)(5') si vede che le relative costanti si ottengono dalle (7)(7') assumendo ogni  $g$  eguale alla corrispondente  $h$ .

Notiamo che una *tal relazione è indipendente dall'origine delle integrazioni*; giacchè un cambiamento di quell'origine altera soltanto la *parte arbitraria* ( $j_h$  o risp.  $r_h$ ) delle  $c_h, d_h$ .

**7. Falde delle varietà reali. Prime osservazioni sulle trasformazioni di prima specie reali.** — Il primo e più saliente carattere reale d'una classe di varietà reali, è il numero delle falde reali. Determiniamolo per ciascuna delle classi sopra ottenute.

I punti reali d'una varietà reale provengono dai punti uniti della simmetria corrispondente. Poichè le simmetrie d'una stessa classe sono, nei riguardi della questione, equivalenti, porremo addirittura nelle (7)(7')  $j = r = 0$ ; anzi considereremo soltanto il caso (7), in quanto, come risulterà dal procedimento, classi complementari hanno lo stesso numero di falde.

Se qualcuna delle  $g$  del simbolo a secondo membro di (7) è diversa da zero, la corrispondente simmetria *non ha punti uniti*, giacchè, come risulta dalla (5), se  $u_h = a_h + ib_h$  fosse un punto unito, l'espressione  $(0, 0, \dots, 0, g_{\lambda+1}, g_{\lambda+2}, \dots, g_p) - 2ib_h$  dovrebbe dare un *periodo* mentre non esistono periodi siffatti, come risulta subito dalla (P). Si hanno così (colle complementari)  $2(2^{p-\lambda} - 1)$  classi di varietà reali *prive di punti reali*.

Resta la classe corrispondente a valori tutti nulli delle  $g$ , cioè, per  $j = 0$  alla simmetria  $u'_i \equiv \bar{u}_i$  (assieme alla complementare  $u'_i \equiv -\bar{u}_i$ ). Nei punti uniti è  $u_i \equiv \bar{u}_i$  cioè  $u_i$  è uguale ad un numero reale più un *semiperiodo immaginario puro*, e può aver quindi valori dello stesso tipo di quelli assegnati

<sup>(24)</sup> Se  $V_p$  è singolare quel numero può *aumentare* (§ 7) e non è neppur escluso che possa *diminuire*. (Cfr. n. 18).

colle (7') per le costanti  $d_i$ . I *parametri dei punti uniti* hanno quindi i valori

$$(8) \quad u \equiv r + (0, 0, \dots, 0, h_{\lambda+1}, h_{\lambda+2}, \dots, h_p),$$

indicandosi, al solito, con  $r$  un numero reale arbitrario.

Fisse restando le  $h$ , al variare degli  $r$  le  $u$  variano con continuità, mentre valori delle  $u$  corrispondenti a due diversi sistemi di valori delle  $h$ , non possono dedursi uno dall'altro attraverso ad una successione continua di valori (8). Tanto basta per concludere che a ciascuno di quei sistemi corrisponde una falda reale, i cui punti si ottengono al variare delle parti arbitrarie  $r_h$ . Si hanno quindi  $2^{p-\lambda}$  falde <sup>(25)</sup>.

Quando le  $h$  son tutte nulle, le  $u$  sono reali (modd. periodi) quindi la falda corrispondente (*falda origine*) è quella che contiene l'*origine delle integrazioni*. Fissata questa falda, ogni altra è caratterizzata dalla *semicaratteristica* del 2° membro di (8): ma se si cambia la falda origine, quelle semicaratteristiche si permutano evidentemente tra loro.

In conclusione:

*Delle  $2^{p+1-\lambda}$  classi di cui all'enunciato precedente,  $2(2^{p-\lambda} - 1)$  son costituite da varietà reali prive di punti reali, le altre 2 da varietà con  $2^{p-\lambda}$  falde reali.*

E in particolare:

*Una varietà abeliana reale, di carattere reale  $\lambda$ , dotata di punti reali, ha  $2^{p-\lambda}$  falde. Le varietà abeliane reali, prive di punti reali, si presentano per tutti i valori del carattere reale  $\lambda$ , escluso  $\lambda = p$ .*

Consideriamo ora, sopra una  $V_p^{(0)}$  reale dotata di punti reali una trasformazione  $T$  di prima specie, rappresentata dalle equazioni  $u'_i \equiv -u_i + k_i$ . La condizione perchè  $T$  sia reale, vale a dire trasformi in se stesso il coniugio di  $V_p^{(0)}$ , che per quanto precede possiamo supporre rappresentato da  $u'_i \equiv \bar{u}_i$ , è  $k_i \equiv \bar{k}_i$ , vale a dire è la stessa di quella a cui soddisfano le costanti  $d_i$  delle simmetrie (5'); e quindi le  $k_i$  possono avere i valori

$$(9) \quad k \equiv r + (0, 0, \dots, h_{\lambda+1}, h_{\lambda+2}, \dots, h_p).$$

Dunque intanto le trasformazioni considerate si distribuiscono in  $2^{p-\lambda}$  schiere, ciascuna caratterizzata dalla semicaratteristica del 2° membro di (9) (cfr. la nota più sotto).

<sup>(25)</sup> Le conclusioni ricavate sussistono anche per varietà singolari, sia nei riguardi delle simmetrie singole, sia per l'insieme delle simmetrie associate a una data nel senso della nota <sup>(24)</sup>.



Inoltre se  $(0, 0, \dots, 0, h'_{\lambda+1}, \dots, h'_p)$   $(0, 0, \dots, 0, h''_{\lambda+1}, \dots, h''_p)$  son le semicatteristiche di due falde trasformate una nell'altra da una  $T$  corrispondente ai valori (9), si ha  $h''_i - h'_i \equiv h_i \pmod{2}$ , o, sotto forma simmetrica  $h'_i + h''_i \equiv h_i \pmod{2}$ ; e ne segue che tutte le trasformazioni d'una schiera scambiano tra loro a due a due nello stesso modo le falde di  $V_p^{(0)}$  e possono individuarsi facendo corrispondere ad un punto *reale* fisso un punto (reale) variabile sopra una falda pure fissata <sup>(26)</sup>.

Due falde corrispondenti sono sempre *distinte* salvo quando le  $h_i$  sono tutte nulle; quindi *fra le predette schiere una sola è costituita da trasformazioni che lasciano fisse tutte le falde di  $V_p^{(0)}$  ed è quella corrispondente a valori reali (modd. periodi) delle costanti  $k_i$ .*

Una trasformazione di 1<sup>a</sup> specie  $T$  ha  $2^{2p}$  punti uniti, dei quali nessuno è certo reale se  $T$  scambia a due a due falde *distinte* di  $V_p^{(0)}$ , cioè se qualcuna delle  $h_i$  è diversa da zero. Invece se le  $h_i$  son nulle, e quindi le  $k_i$  reali, i parametri dei punti uniti sono

$$(10) \quad u \equiv \frac{1}{2} k + (g_1, g_2, \dots, g_p | h_1, h_2, \dots, h_p),$$

e di essi corrispondono a punti reali quelli che son del tipo (8) cioè (tenuto conto che i semiperiodi del primo gruppo son reali) quelli per cui  $h_1 = h_2 = \dots = h_\lambda = 0$ . Concludiamo pertanto che:

*Sopra una varietà abeliana reale  $V_p^{(0)}$ , di carattere reale  $\lambda$ , dotata di punti reali, una trasformazione di 1<sup>a</sup> specie reale o non ha punti uniti reali (e allora non trasforma in se stessa nessuna falda di  $V_p$ ) o ne ha  $2^p$  su ciascuna falda, cioè in tutto  $2^p \cdot 2^{p-\lambda} = 2^{2p-\lambda}$ .*

I punti uniti d'una stessa falda si ottengono dalla (10) tenendo fissa la semicaratteristica  $(0, 0, \dots, 0, h_{\lambda+1}, \dots, h_p)$  del secondo gruppo e facendo variare quella  $(g_1, g_2, \dots, g_p)$  del primo.

## 8. Particolari sulle varietà jacobiane, e sulle curve algebriche reali. —

A titolo di applicazione, e specialmente di preparazione ad argomenti che verranno approfonditi più avanti, ci occuperemo brevemente di talune questioni riguardanti le *curve algebriche reali*.

<sup>(26)</sup> Notiamo che i due membri della congruenza  $h''_i - h'_i \equiv h_i$  sono *indipendenti dall'origine delle integrazioni* purchè questa sia un *punto reale* di  $V_p^{(0)}$ , cioè purchè le equazioni del coniugio restino  $u'_i \equiv u_i$ . Ciò si vede facilmente tenendo conto dei valori (8) corrispondenti ai punti di  $V_p^{(0)}$ .

Sia  $C$  una curva algebrica di genere  $p$  possedente una simmetria  $s$  che possiamo supporre sia addirittura il coniugio (quindi  $C$  reale). Indichiamo con  $a_i, b_i$  un sistema di cicli pseudonormali (di 1<sup>a</sup> specie) relativi ad  $s$ , con  $u_i$  i corrispondenti integrali pseudonormali, con  $(P)$  la matrice relativa, con  $u'_i \equiv u_i + c_i$  le equazioni di  $s$ , dove assumeremo le  $c_i$  nulle se  $C$  ha punti reali (n. 1). Altrimenti, per la condizione di simmetria, le  $c_i$  avran valori del tipo (7).

Indichiamo con  $V_q$  la varietà del gruppi di  $q$  punti di  $C$ . Alla simmetria  $s$  corrisponde su  $V_q$  una simmetria  $S$ : trasformandola nel coniugio otterremo un modello reale  $V_q^{(0)}$  di  $V_q$  che chiameremo l'*immagine reale propria dei gruppi di  $q$  punti della curva reale  $C$* .

Analogamente si definisce l'*immagine reale propria  $W_q^{(0)}$  delle serie lineari d'ordine  $q$  di  $C$* . Se  $q \leq p$ , la  $W_q^{(0)}$  ha dimensione  $q$  ed è in corrispondenza biunivoca reale con  $V_q^{(0)}$  (dotata su  $V_q^{(0)}$  di eccezioni in corrispondenza ai gruppi speciali): sicchè  $V_q^{(0)}$  e  $W_q^{(0)}$  hanno lo stesso numero di falde.

Invece se  $q > p$  la dimensione di  $W_q^{(0)}$  è sempre  $p$ , cioè  $W_q^{(0)}$  è un modello reale della varietà di Jacobi  $V_p$  relativa a  $C$  e la corrispondenza fra  $W_q^{(0)}$  e  $V_q^{(0)}$  non è più biunivoca. Vedremo più avanti (§ 4, n. 15) che il numero delle falde di  $W_q^{(0)}$  può variare colla parità di  $q$  (quando  $C$  non ha punti reali).

Siano  $x_1, x_2, \dots, x_q$ ,  $q$  punti di  $C$ ,  $X$  il punto corrispondente di  $V_q^{(0)}$ . Se  $x_1, x_2, \dots, x_{q-1}$  coincidono in un punto fisso  $P$  (reale o no) di  $C$ , ed  $x_q$  descrive il ciclo  $a_i$  o  $b_i$ ,  $X$  descriverà in  $V_q$  un ciclo che indicheremo con  $A_i$  o risp. con  $B_i$ ; ed è facile vedere che i cicli  $A_i, B_i$  son pseudonormali rispetto alla simmetria  $S$ . Basta osservare ch'essi subiscono per effetto di  $S$  la stessa sostituzione (II) ch'è indotta da  $s$  sugli  $a_i, b_i$  (27).

Gli integrali pseudonormali di  $V_q^{(0)}$  relativi ai cicli predetti sono  $U_n = \sum_{r=1}^q u_n(x_r)$ , e la loro tabella di periodi è ancora la  $(P)$ ; perciò  $C$  e  $V_q^{(0)}$  hanno lo stesso carattere reale  $\lambda$ . Infine su  $V_q^{(0)}$  le equazioni di  $S$  sono  $U_i \equiv \bar{U}_i + qc_i$ .

Analoghe conclusioni sussistono per le  $W_q^{(0)}$ : ma su esse per ora non insistiamo.

Supponiamo ora che  $C$  abbia  $\mu$  rami reali  $H_1, H_2, \dots, H_\mu$  (incluso  $\mu = 0$ ), e determiniamo, generalizzando lievemente un procedimento di LEFSCHETZ (28), le falde reali di  $V_q^{(0)}$ .

(27) Si tenga presente che se  $P'$  è il punto omologo di  $P$  in  $s$ , i due cicli corrispondenti ai due aggruppamenti  $(P, a_i)$   $(P', a_i)$  sono omologhi (nel senso dell'*analysis situs*) su  $V_q^{(0)}$ .

(28) Loco cit., n. 6.

Un punto *reale*  $X$  di  $V_q^{(0)}$  corrisponde ad un gruppo *reale*  $G_q(x_1, x_2, \dots, x_q)$  di  $C$  del quale alcuni punti saranno reali, e distribuiti, in numero di  $t_1, t_2, \dots, t_\mu$  sui rami di  $C$ . ed altri, in numero di  $2\nu$ , a coppie immaginari coniugati. Il punto  $X$  si muove restando sulla stessa falda di  $V_q^{(0)}$ , quando  $G_q$  varia con continuità *rimanendo reale*, quindi se le  $\nu$  coppie immaginarie coniugate variano rimanendo tali, o se variano con continuità i  $t_i$  punti sul ramo  $H_i$ ; ma anche se due di questi punti si portano a coincidere, e poi *abbandonano il ramo* diventando immaginari coniugati, o se, col procedimento inverso si fanno *nascere* sul ramo  $H_i$  due nuovi punti reali. Ne segue che *le falde di  $V_q^{(0)}$  corrispondono agli aggruppamenti  $t_1, t_2, \dots, t_\mu$  aventi diversa parità*, onde sostituendo ai  $t_i$  i loro resti (mod. 2) potremo *associare ad ogni falda un simbolo*  $[t_1, t_2, \dots, t_\mu]$  in cui le  $t_i$  sono eguali a zero o ad uno ed inoltre soddisfano alle condizioni

$$(11) \quad t_1 + t_2 + \dots + t_\mu \leq q, \quad t_1 + t_2 + \dots + t_\mu \equiv q \pmod{2}.$$

Il numero dei simboli distinti, cioè *il numero  $N$  delle falde di  $V_q^{(0)}$*  si calcola facilmente, ed è *per  $\mu > 0$*

$$(12) \quad N = \sum_{h=0}^q \binom{\mu-1}{h},$$

e, *per  $\mu = 0$ , uno o zero secondo che  $q$  è pari o dispari.*

In particolare se  $q \geq \mu - 1$  e  $\mu > 0$  è dunque  $N = 2^{\mu-1}$ , e se  $q = \mu - 2$ ,  $N = 2^{\mu-1} - 1$ ; quindi  $V_p^{(0)}$  ha  $2^{\mu-1}$  falde (perchè è sempre  $\mu \leq p + 1$ , cioè  $p \geq \mu - 1$ ) e lo stesso accade di  $V^{(0)}_{p-1}$ , salvo se  $\mu$  ha il valor massimo  $p + 1$ ; allora  $V^{(0)}_{p-1}$  ha  $2^p - 1$  falde.

Ma se  $\mu > 0$  le costanti  $c_i$  delle equazioni di  $s$  sono nulle, e quindi su  $V_p^{(0)}$  e  $W_p^{(0)}$  le equazioni di  $S$  sono  $U'_i \equiv \bar{U}_i$ . D'altra parte  $W_p^{(0)}$  è una varietà abeliana reale di carattere reale  $\lambda$ : pertanto il numero delle sue falde è (n. prec.)  $2^{p-\lambda}$ . Quindi  $2^{p-\lambda} = 2^{\mu-1}$ , cioè  $\mu = p + 1 - \lambda$ .

Più delicato è il caso  $\mu = 0$ , che qui discuteremo soltanto in parte.

Supponiamo anzitutto  $p$  pari: allora dalle costanti  $pc_i$  della simmetria  $S$  di  $V_p^{(0)}$  (e di  $W_p^{(0)}$ ) spariscono i semiperiodi, cioè quelle costanti sono (modd. periodi) immaginarie pure. Dunque (n. 6) la  $S$  è della stessa schiera di  $U'_i \equiv \bar{U}_i$ , quindi  $W_p^{(0)}$  ha  $2^{p-\lambda}$  falde: e pertanto  $2^{p-\lambda} = 1$ , cioè  $\lambda = p$ .

Invece se  $p$  è dispari la  $W_p^{(0)}$  *non ha punti reali* (perchè non ci sono su  $C$  gruppi di  $p$  punti reali) mentre, *come si vedrà* al § 4 (n. 15)  $W^{(0)}_{p+1}$  (ch'è un altro *modello reale* della varietà di JACOBI relativa a  $C$ ) ha *due falde*. Dunque  $2^{p-\lambda} = 2$ , cioè  $\lambda = p - 1$ .

In conclusione:

*Una curva algebrica reale di genere  $p$ , e carattere reale  $\lambda$ , dotata di punti reali, ha  $p + 1 - \lambda$  rami reali.*

*Le curve reali prive di rami reali hanno carattere reale  $p$  o  $p - 1$  secondo che  $p$  è pari o dispari.*

Risulta da queste osservazioni che il solo carattere reale non basta a caratterizzare i diversi tipi di curve algebriche reali; tanto meno poi se si tien conto della distinzione fra il caso *diasimmetrico* ed il caso *ortosimmetrico* rilevata ed illustrata dal KLEIN (<sup>29</sup>). Senza approfondire per ora le questioni attinenti a quest'argomento, diamo un rapido sguardo al caso  $p = 2$ , su cui dovremo ritornare al § 5.

Anzitutto va rilevata una proprietà speciale dipendente dal *carattere iperellittico* della curva  $C$ . Appena questa ammette una simmetria  $s_1$  ne ammette un'altra  $s_2$  prodotto della prima per la  $g_2^1$ , e le due simmetrie conducono ai *modelli reali*  $C_1, C_2$

$$(13) \quad y^2 = f(x), \quad Y^2 = -f(X),$$

( $f$  polinomio di 6° grado a coefficienti reali) che si trasformano uno nell'altro ponendo  $X = x, Y = \pm iy$  (<sup>30</sup>).

Sia  $F$  la superficie di JACOBI relativa a  $C, S_1, S_2$  le relative simmetrie dedotte da  $s_1, s_2, F_1, F_2$  i modelli reali corrispondenti, cioè le immagini reali proprie delle  $C_1, C_2$ . Proviamo che *le simmetrie  $S_1, S_2$  appartengono a classi complementari*.

Difatti siano  $u'_i, u_2$  due integrali pseudonormali di  $C_1$  (relativi ad  $s_1$ ), e supponiamo scelta l'origine delle integrazioni in un punto doppio della  $g_2^1$ , di guisa che le sue equazioni siano  $u'_i \equiv -u_i$ . Allora, se  $P$  è reale, le equazioni di  $s_1$  sono  $u'_i \equiv \bar{u}_i$ , e quindi quelle di  $s_2, u'_i \equiv -\bar{u}_i$ , e l'enunciata proprietà è provata senz'altro: se  $P$  non può esser scelto reale quelle due equazioni saranno  $u'_i \equiv \pm \bar{u}_i + c_i$ , ma in tal caso, come si vedrà tra poco, è  $\lambda = 2$ , e quindi la proprietà è ancora vera, perchè per  $\lambda = p$  esistono *due sole classi* di simmetrie tra di loro complementari (n. 6).

Se ora indichiamo con  $\nu$  il numero delle *radici reali di  $f(x) = 0$* , cioè dei punti doppi reali della  $g_2^1$ , e teniam conto, sia delle osservazioni generali precedenti, sia del legame noto fra quei punti ed i rami reali di  $C_1, C_2$ , vediamo

(<sup>29</sup>) Vedi la III parte delle *Riemann'sche Flächen* e, in genere, tutto il gruppo dei lavori dell'A. dedicati alle curve reali [Ges. Abh. vol. II, pp. 63-198].

(<sup>30</sup>) Cfr. *Riemann'sche Flächen*, Parte III, pp. 137-142 e 164-167 [Ediz. 1906].

che possono presentarsi i seguenti casi:

$$\begin{array}{ll} \lambda = 0; & F_1, F_2 \text{ quattro falde} & \nu = 6; & C_1, C_2 \text{ tre rami} \\ \lambda = 1; & F_1, F_2 \text{ due falde} & \nu = 4; & C_1, C_2 \text{ due rami} \\ \lambda = 2; & F_1, F_2 \text{ una falda} & \left. \begin{array}{l} \nu = 2; \\ \nu = 0 \end{array} \right\} & \begin{array}{l} C_1, C_2 \text{ un ramo (caso diasimmetrico),} \\ C_1 \text{ un ramo (caso ortosimmetrico)} \\ C_2 \text{ zero rami }^{(34)}. \end{array} \end{array}$$

Questo prospetto conferma le osservazioni di poc' anzi, mostrando che per  $\lambda = 2$  si possono avere *tre tipi diversi* di curve di genere 2, e, colle considerazioni precedenti, prepara la via ad una discussione più approfondita che verrà svolta al § 5.

### § 3. Periodi normali.

#### 9. Relazioni di Riemann e funzioni intermediarie. Posizione del problema.

— Ricordiamo nel modo più breve alcune proprietà fondamentali inerenti ai periodi, ed alla rappresentazione dei sistemi di varietà  $V_{p-1}$  contenuti in una varietà abeliana  $V_p$ .

Dato in  $V_p$  un sistema di *cicli primitivi*  $C_1, C_2, \dots, C_{2p}$ , i periodi  $x_i, y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 2p$ ) di due integrali di 1<sup>a</sup> specie *qualunque* di  $V_p$  soddisfano ad un certo numero di *relazioni di Riemann alternate* del tipo

$$(1) \quad \sum a_{rs} x_r y_s = 0, \quad (r, s = 1, 2, \dots, 2p), \quad a_{rs} + a_{sr} = 0,$$

che talvolta scriveremo sotto la forma

$$(1') \quad \sum a_{r,s}(r \cdot s) = 0, \quad (rs) = (x_r y_s - x_s y_r) \quad r < s.$$

Le relazioni (1) hanno significato solo in quanto sia dato il sistema di cicli  $C_i$  a cui son riferite; se a questi si sostituiscono altri cicli primitivi  $C'_i$  espressi dalle

$$(2) \quad C'_i = m_{i1} C_1 + m_{i2} C_2 + \dots + m_{i,2p} C_{2p}, \quad (i = 1, 2, \dots, 2p), \quad \|m_{rs}\| = \pm 1,$$

le (1) si mutano in relazioni analoghe fra i nuovi periodi  $x'_i, y'_i$ , le quali evidentemente se ne deducono sostituendo al posto degli  $x, y$  le loro espressioni mediante gli  $x', y'$  ricavate dalle (2). Diremo brevemente che *le nuove*

<sup>(34)</sup> Supponiamo  $f(x) > 0$  per  $x$  reale: nell'ipotesi  $f(x) < 0$  basta scambiare  $C_1$  con  $C_2$ .

relazioni (o meglio le (1) sotto la nuova forma) son le trasformate della (1) mediante la sostituzione (2).

Fissata una (1) si può sempre determinare una (2) che la riduce alla forma normale

$$(3) \quad \sum_{h=1}^p e_h(h, p+h) = 0,$$

nella quale gl'interi  $e_h$  sono i divisori elementari del determinante emisimmetrico  $\|a_{rs}\|$ .

Alla (3) è collegato un sistema di cicli normali che indicheremo con  $M_1, M_2, \dots, M_p, N_1, N_2, \dots, N_p$  ed un sistema d'integrali normali  $u_1, u_2, \dots, u_p$  individuati (a meno della costante additiva) dalla condizione d'avere i periodi ai cicli  $M_i$  tutti nulli, eccetto quelli della diagonale principale, eguali ordinatamente ad  $\frac{1}{e_1}, \frac{1}{e_2}, \dots, \frac{1}{e_p}$ . Notoriamente, in forza della (3), la matrice quadrata dei periodi normali ai cicli  $N_i$  è simmetrica.

Un sistema di cicli normali dipende:

a) dalla relazione (1) che si vuol ridurre alla forma normale;

b) da un certo grado di arbitrarietà inerente alla sostituzione normalizzante di cui dovremo disporre opportunamente a suo luogo <sup>(32)</sup>.

Fissati su  $V_p$   $p$  integrali indipendenti  $u_1, u_2, \dots, u_p$ , ad ogni relazione (1) corrispondono, subordinatamente a determinate condizioni d'esistenza, infiniti sistemi di funzioni intermediarie  $\varphi(u_1, u_2, \dots, u_p)$ , ciascuno dei quali è collegato ad un sistema d'interi  $n_{ik}$  (interi caratteristici) proporzionali agli elementi reciproci degli  $a_{rs}$  <sup>(33)</sup>. Le accennate condizioni d'esistenza, che si esprimono mediante una disuguaglianza classica, la quale vincola le parti reali ed immaginarie dei periodi di due integrali di 1<sup>a</sup> specie qualunque della  $V_p$ , sono state ridotte dallo SCORZA ad un sistema di disuguaglianze, nelle quali, oltre

<sup>(32)</sup> Poggiando sulle conclusioni di una mia Nota *Sopra certe trasformazioni dei periodi normali* [Atti Istituto Veneto, T. LXXXIII (1924) pp. 735-750], che il lettore volentoso potrà inserire fra questo numero ed il successivo, e che ad ogni modo, per la perfetta intelligibilità del testo, saranno debitamente richiamate.

<sup>(33)</sup> Per le proprietà fondamentali di queste funzioni, che qui si ricordano, cfr. CASTELNUOVO *Sulle funzioni abeliane* [Rendic. Lincei (5), Vol. 30 (1921) pp. 50-55, 99-103, 195-200, 355-359] segnatamente le due prime Note: e per  $p=2$ , BAGNERA-DE FRANCHIS, *Le nombre  $\rho$  de M. Picard pour les surfaces hyperelliptiques*, ecc. [Rendic. Palermo, Vol. 30 (1910) pp. 185-288]. Nel confronto, assai interessante, fra i due lavori, si tenga presente che per  $p=2$  le  $n_{ik}$  son proporzionali alle  $a_{ik}$  sicchè la considerazione della forma reciproca della (1) è, se si vuole, superflua.

alle  $a_{rs}$ , compariscono soltanto i periodi di  $p$  integrali indipendenti comunque scelti <sup>(34)</sup>. Una relazione di Riemann che soddisfi a tali condizioni, si dirà con SCORZA, *principale* <sup>(35)</sup>.

Ad ogni sistema di funzioni intermediarie  $\varphi$  si possono collegare due interi  $n, \delta$ , il primo dei quali è il m. c. d. degli  $n_{ik}$  (ordine delle  $\varphi$ ), l'altro lo *pfaffiano* del determinante emisimmetrico  $\|n_{ik}\|$  (*determinante* delle  $\varphi$ ). Eguagliando a zero una  $\varphi$ , si ottiene su  $V_p$  una  $V_{p-1}$  *algebraica* (*varietà intermedia*), secondo CASTELNUOVO) che al variare di  $\varphi$  entro al relativo sistema, descrive un *sistema algebrico*  $\Phi_n, \infty^{p+\delta-1}$ , costituito da  $\infty^p$  sistemi lineari di dimensione  $\delta-1$ . Quando *i divisori della (1) sono tutti eguali* (e quindi, supposti i coefficienti  $a_{rs}$  primi tra di loro, *unitari*) ed  $n=1$ , si ha anche  $\delta=1$  <sup>(36)</sup>, ed allora riducendo la (1) alla forma normale, e scegliendo come parametri  $u_i$  i corrispondenti integrali normali, le  $\varphi$  riduconsi a funzioni  $\wp$  del 1° ordine, ai periodi normali.

In questo caso il sistema  $\Phi_1, \infty^{p-1}$ , s'indicherà con  $\Sigma$ , e le  $V_{p-1}$  che lo compongono si diranno *varietà*  $\wp$ .

Viceversa, per un teorema stabilito per  $p=2$  da APPELL-HUMBERT, e generalizzato da LEFSCHETZ, *ogni  $V_{p-1}$  algebraica di  $V_p$  si ottiene annullando una funzione intermedia* <sup>(37)</sup>.

Le funzioni  $\varphi$  per il modo stesso con cui son definite, sono indipendenti da un cambiamento di parametri: vogliam dire con ciò che se si passa a nuovi parametri  $U_i$ , e si pone  $\varphi(u_1, u_2, \dots, u_p) = \psi(U_1, U_2, \dots, U_p)$ , la  $\psi$  è ancora una funzione intermedia, dello stesso ordine, *corrispondente alla stessa relazione (1)*: e naturalmente le equazioni  $\varphi=0, \psi=0$  rappresentano la stessa varietà intermedia. Se però *si cambiano i cicli primitivi*, cambia anche quella relazione, a norma della trasformazione effettuata.

Come si trasformano i sistemi  $\Phi$  mediante le trasformazioni birazionali ed antibirazionali di  $V_p$ ? Ecco in proposito un'osservazione importante <sup>(38)</sup>:

<sup>(34)</sup> SCORZA, *Sul teorema d'esistenza delle funzioni abeliane* [Rendic. Palermo, Vol. 36 (1913), pp. 386-395].

<sup>(35)</sup> SCORZA, *Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann*, ecc. [Rendic. Palermo, Vol. 41 (1916)] n. 10.

<sup>(36)</sup> Se  $p=2$  e gli  $a_{rs}$  son primi fra di loro, il determinante  $\delta$ , per  $n=1$ , coincide col *divisore* della (1),  $\delta = a_{12}a_{43} + a_{13}a_{24} + a_{14}a_{32}$ .

<sup>(37)</sup> LEFSCHETZ, *On certain numerical invariants of algebraic varieties*, ecc. (Prix Bordin, 1919) [Trans. of the Amer. Math. Soc., Vol. 22 (1921), pp. 327-482] Parte II, Cap. I, § 4.

<sup>(38)</sup> Per quanto non nuova: BAGNERA e DE FRANCHIS, senza dedicarvi una esplicita dimostrazione, l'hanno sistematicamente applicata (cfr. i §§ 5, 6, 7 del citato lavoro). Qui si è creduto che la maggior generalità del caso, e l'estensione alle trasformazioni antibirazionali, bastassero a giustificare un cenno dimostrativo.

Una trasformazione birazionale od antibirazionale di  $V_p$  che induca sui cicli  $C_i$  la sostituzione (2) trasforma il sistema  $\Phi_n$  corrispondente ad un'assegnata relazione (1) nel sistema  $\Phi'_n$  corrispondente alla relazione trasformata mediante la sostituzione inversa della (2) (sempre riferita ai cicli  $C_i$ ).

Supponiamo dapprima che la trasformazione sia birazionale, ed abbia le equazioni

$$(4) \quad u'_i \equiv \lambda_{i1}u_1 + \lambda_{i2}u_2 + \dots + \lambda_{ip}u_p + c_i.$$

Indichiamo con  $\omega_{rs}$  il periodo di  $u_r$  al ciclo  $C_s$ , e con  $U_1, U_2, \dots, U_p$  nuovi parametri definiti scrivendo nei primi membri delle (4) le  $U_i$  al posto delle  $u'_i$ . Allora se, com'è notoriamente lecito, poniamo

$$(5) \quad \omega'_{ih} \equiv \lambda_{i1}\omega_{1h} + \lambda_{i2}\omega_{2h} + \dots + \lambda_{ip}\omega_{ph} = m_{h1}\omega_{i1} + m_{h2}\omega_{i2} + \dots + m_{h,2p}\omega_{i,2p},$$

le  $\omega'_{ih}$  si possono interpretare:

- a) come periodi di  $u_i$  al ciclo  $C'_h$ ;
- b) come periodi di  $U_i$  al ciclo  $C_h$ .

Sia  $V$  una varietà intermedia di  $V_p$  rappresentata dall'equazione  $\varphi(u_1, u_2, \dots, u_p) = 0$ , dove  $\varphi$  è una funzione corrispondente ad una relazione di Riemann  $A=0$ ,  $V'$  la varietà trasformata di  $V$  mediante (4). Passando ai parametri  $U_i$ , e ponendo  $\varphi(u_1, u_2, \dots, u_p) = \psi(U_1, U_2, \dots, U_p)$  la  $\psi$  è ancora una funzione intermedia corrispondente alla relazione  $A=0$  (fra i periodi  $\omega'_{ih}$  delle  $U_i$ ) e l'equazione  $\psi=0$  rappresenta ancora  $V$ .

Sostituendo materialmente nella  $\psi$  al posto delle  $U_i$  le  $u_i$ , la  $\psi(u_1, u_2, \dots, u_p)$  è ancora una funzione intermedia, che però (rispetto ai cicli  $C_i$  e quindi ai periodi  $\omega_{ih}$  degli  $u_i$ ) non corrisponde più alla relazione  $A=0$ , sibbene a quella che se ne deduce ponendo al posto dei periodi  $\omega'_{ih}$  degli  $U_i$ , le loro espressioni mediante gli  $\omega_{ih}$ , ch'è precisamente la trasformata di  $A=0$  mediante la sostituzione inversa della (2). D'altronde la  $\psi(u_1, u_2, \dots, u_p)$  si annulla nei punti dove le  $u_i$  assumono i valori che hanno le  $U_i$  nei punti di  $V$ ; e questi, a norma della (4) sono i punti di  $V'$ .

Se la trasformazione considerata è antibirazionale, cioè se nelle (4) al posto delle  $u_i$  son scritte le  $\bar{u}_i$  la dimostrazione procede in modo analogo. Basta, come al n. 6, introdurre la varietà  $V_p$  coniugata di  $V_p$  e considerare su essa la  $\bar{V}$  (coniugata di  $V$ ) rappresentata dall'equazione

$$\bar{\varphi}(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_p) = \psi(U_1, U_2, \dots, U_p) = 0, \text{ ecc.}$$

Veniamo ora a porre in forma precisa il *problema della normalizzazione* che ci proponiamo di risolvere in questo paragrafo.



Fissata in  $V_p$  una simmetria  $S$  (parlando di  $V_p$  come di una varietà reale, ci riferiremo, al solito, ad un modello  $V_p^{(0)}$  su cui  $S$  è il coniugio) sia  $A_i, B_i$  un sistema di cicli pseudonormali (relativo ad  $S$ ) a cui supponiamo riferite le relazioni di Riemann (1),  $A$  una forma Riemanniana principale, e  $\Phi$  uno qualunque fra i sistemi di varietà intermedie ad essa corrispondenti.

Indichiamo con  $A'$  la forma trasformata di  $A$  mediante la sostituzione (II) indotta da  $S$  sui cicli  $A_i, B_i$ , (n. 2), cioè, perchè la (II) coincide colla propria inversa) la forma corrispondente al sistema  $\Phi'$  trasformato di  $\Phi$ . Se  $V_p$  non è singolare, dev'essere  $A' \equiv \pm A$ , quindi  $\Phi' = \Phi$ , cioè  $\Phi$  reale, ma se  $V_p$  è singolare potrà essere  $A'$  distinta da  $A$ . In questo caso però nel fascio  $\lambda A + \mu A'$  sono unite (perchè la (II) è involutoria) le due forme  $A + A'$ ,  $A - A'$  e di queste una (almeno) è certo principale<sup>(39)</sup>: sicchè anche se  $V_p$  è singolare esiste una forma di Riemann principale  $A$  ch'è trasformata in se stessa dalla sostituzione (II) corrispondente alla simmetria  $S$ .

Poichè nel caso non singolare è questo il comportamento dell'unica forma esistente, e l'invarianza predetta conferisce a quella forma carattere intrinseco, così imposteremo su di essa il problema della normalizzazione, proponendoci di ridurla alla forma normale (3).

Se però vogliam conservare alle tabelle normali il principale vantaggio delle tabelle pseudonormali, allora un'altra fondamentale esigenza s'impone. Occorre che anche gl'integrali normali risultino reali, cioè che lo siano i cicli normali del 1° gruppo  $M_1, M_2, \dots, M_p$ ; onde essi (n. 3) dovranno risultare combinazioni lineari dei soli cicli  $A_1, A_2, \dots, A_p$ . È questa condizione imposta alla sostituzione normalizzante che costituisce la vera difficoltà del problema.

Enunciamo fin d'ora le caratteristiche più salienti delle tabelle normali a cui perverremo, quali risultano senz'altro dalle condizioni contenute nella posizione esposta:

- a) Il procedimento di normalizzazione, colle relative conclusioni, ha valore per varietà singolari e non singolari;
- b) Gl'integrali normali sono reali (rispetto alla simmetria  $S$ );
- c) I sistemi  $\Phi$  corrispondenti alla relazione normale (cioè alla  $A$  ridotta a forma normale) son reali;

<sup>(39)</sup> Perchè lo sono tanto  $A$  quanto  $A'$ . Se il segno dei loro coefficienti è fissato in modo che le disuguaglianze del tipo  $\sum a_{rs} \xi_r \eta_s \geq 0$  relative ad  $A$  ed  $A'$  abbiano lo stesso senso, è  $A + A'$  ch'è principale; altrimenti è  $A - A'$ . S'intende che quando parliamo di forma trasformata in se stessa, o unita non escludiamo che essa possa alterarsi per un fattore, in particolare cambiare segno: giacchè quello che interessa è che sia trasformata in se la relazione ottenuta eguagliando a zero quella forma.

d) La relazione normale è trasformata in sé dalla sostituzione sui cicli, corrispondente alla simmetria  $S$ . Quindi la matrice coniugata della matrice normale è ancora una matrice normale, cogli stessi integrali normali.

**10. Periodi normali per le varietà di carattere reale nullo.** — Se una forma di Riemann  $A$  fra i periodi ai cicli pseudonormali  $A_i, B_i$  è trasformata in se stessa dalla sostituzione (II) corrispondente ad una simmetria di carattere reale  $\lambda = 0$ , cioè dalla  $A'_i = A_i, B'_i = -B_i$ , suddividendo la matrice  $\|a_{rs}\|$  in quattro quadranti ciascuno con  $p$  righe e colonne, si vede che devono esser nulle tutte le  $a_{rs}$  appartenenti ai due quadranti attraversati da una delle due diagonali.

Supponiamo dapprima che si tratti della diagonale secondaria, cioè che le  $a_{rs}$  non nulle abbiano entrambi gl'indici  $\leq p$ , o  $> p$ , e proviamo, mediante le condizioni di SCORZA, che la  $A$  non può esser principale. Difatti scrivendola per i periodi ( $P$ ) dei due integrali  $u_r, u_s$  ( $r, s = 1, 2, \dots, p$ ) si trova

$$(6) \quad a_{rs} - \sum a_{ik} \Delta_{ik}^{(rs)} = 0, \quad (i, k = p+1, \dots, 2p; i < k)$$

dove si è posto

$$(7) \quad \Delta_{ik}^{(rs)} = (\tau_{ri} \tau_{sk} - \tau_{rk} \tau_{si}).$$

Ma d'altra parte, con un breve calcolo, si trova per il  $\Delta_2$  di SCORZA l'espressione

$$(8) \quad \Delta_2 = -a_{12} \sum a_{ik} \Delta_{ik}^{(12)}, \quad (i, k = p+1, \dots, 2p; i < k),$$

sicchè per la (6) è  $\Delta_2 = -a_{12}^2$ , il che è inconciliabile colla condizione  $\Delta_2 > 0$ .

Pertanto la relazione principale  $A = 0$  di cui si tratta, avrà nulli tutti i coefficienti dei due quadranti attraversati dalla diagonale principale, cioè sarà del tipo

$$(9) \quad A \equiv \sum a_{r, p+s} (r, p+s) = 0, \quad (r, s = 1, 2, \dots, p)$$

e noi ci proponiamo, conformemente alla posizione del numero precedente (anzi con una restrizione ulteriore) di ridurla a forma normale con una sostituzione unimodulare che operi separatamente sui due gruppi di cicli  $A_i, B_i$ , cioè della forma

$$(10) \quad \begin{aligned} M_i &= \lambda_{i1} A_1 + \lambda_{i2} A_2 + \dots + \lambda_{ip} A_p \\ N_i &= \mu_{i1} B_1 + \mu_{i2} B_2 + \dots + \mu_{ip} B_p, \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

con  $\|\lambda_{rs}\| = \pm 1, \|\mu_{rs}\| = \pm 1$ .

Intanto si vede subito che una sostituzione siffatta muta la (9) in una relazione analoga, i cui coefficienti si potranno indicare con  $a'_{r, p+s}$ . Detto  $f_i$

il m. c. d. degli  $a_{r,p+s}$ , cerchiamo anzitutto di determinare le  $\lambda, \mu$  in modo che risulti  $a'_{1,p+1} = f_1$ .

Osservando che

$$(11) \quad a'_{1,p+1} = \sum_{s=1}^p \mu_{s1} \delta_s, \quad \delta_s = \sum_{r=1}^p a_{r,p+s} \lambda_{r1},$$

si vede che perciò basta anzitutto determinare  $\lambda_{11}, \lambda_{21}, \dots, \lambda_{p1}$  in modo che il m. c. d. delle  $\delta_s$  sia lo stesso di quello delle  $a_{r,p+s}$ , cioè  $f_1$  <sup>(40)</sup>, con che le  $\lambda_{r1}$  risulteranno *prime fra di loro*; poi analogamente  $\mu_{11}, \mu_{21}, \dots, \mu_{p1}$  in modo che risulti  $a'_{1,p+1} = f_1$ : infine le altre  $\lambda, \mu$  in modo che i determinanti  $\|\lambda_{rs}\|, \|\mu_{rs}\|$  siano unitari.

Si avrà così una sostituzione unimodulare del tipo (10) che riduce la (9) alla forma  $f_1 H$ , dove  $H$  è una forma dello stesso tipo con  $a_{1,p+1} = 1$ .

Indicando con  $x_i, y_i$  i periodi ai nuovi cicli di due integrali qualunque, immaginiamo che nella  $H$  al posto del simbolo  $(r, p+s)$  sia effettivamente scritto  $(x_r y_{p+s} - x_s y_{p+r})$  ed osserviamo con FROBENIUS che ponendo

$$(12) \quad A_1 = \begin{vmatrix} H & \frac{\partial H}{\partial y_1} & \frac{\partial H}{\partial y_{p+1}} \\ \frac{\partial H}{\partial x_1} & 0 & 1 \\ \frac{\partial H}{\partial x_{p+1}} & -1 & 0 \end{vmatrix},$$

la  $A_1$  è una forma bilineare alternata dello stesso tipo della  $A$  indipendente da  $x_1, y_1, x_{p+1}, y_{p+1}$ .

Dalla (12) si ricava

$$(12) \quad H = \frac{\partial H}{\partial y_{p+1}} \frac{\partial H}{\partial x_1} - \frac{\partial H}{\partial y_1} \frac{\partial H}{\partial x_{p+1}} + A_1,$$

sicchè se passiamo a nuovi periodi (cioè a nuovi cicli) ponendo

$$(14) \quad \begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial H}{\partial y_{p+1}} = x_1 + a_{2,p+1} x_2 + \dots + a_{p,p+1} x_p, & X_2 &= x_2, \dots, & X_p &= x_p \\ X_{p+1} &= \frac{\partial H}{\partial y_1} = -x_{p+1} - a_{1,p+2} x_{p+2} - \dots - a_{1,2p} x_{2p}, & X_{p+2} &= x_{p+2}, \dots, & X_{2p} &= x_{2p} \end{aligned} \quad (41)$$

<sup>(40)</sup> FROBENIUS, loco cit., § 4, Teor. I.

<sup>(41)</sup> Con  $a_{r,p+s}$  si indicano ora i coefficienti della  $H$ .

(ed imaginando eseguita la sostituzione cogrediente sulle  $y$ ), la  $H$  si trasforma in

$$(15) \quad H' = (X_1 Y_{p+1} - X_{p+1} Y_1) + A'_1,$$

dove  $A'_1$  è una *forma bilineare indipendente* da  $X_1, Y_1, X_{p+1}, Y_{p+1}$ , ed inoltre, poichè la (14) è del tipo (10), *dello stesso tipo di A*. In definitiva questa è ridotta ad  $f_1 H'$ , cioè alla

$$(16) \quad f_1(X_1 Y_{p+1} - X_{p+1} Y_1) + f_1 A'_1,$$

dalla quale, ripetendo il procedimento, si deduce la *cercata forma normale*

$$(17) \quad \sum_{h=1}^p e_h(h, p+h),$$

con  $e_h = f_1 \cdot f_2 \dots f_h$ . Risulta a posteriori con FROBENIUS che le  $e_h$  sono i *divisori elementari* del determinante emisimmetrico formato coi coefficienti della  $A$ ; in particolare, se questi si suppongono primi fra di loro, è  $e_1 = 1$ .

Dalla (10) risulta che i cicli  $M_i$  sono, come gli  $A_i$ , reali, e gli  $N_i$ , come i  $B_i$ , immaginari puri, cioè che *la simmetria S induce sui cicli normali la sostituzione*

$$(IV) \quad M'_i = M_i, \quad N'_i = -N_i.$$

Ne segue, come proposto, che gl'integrali normali  $u_1, u_2, \dots, u_p$  son reali, e che *la tabella dei periodi normali è*

$$(V) \quad \left| \begin{array}{cccc|cccc} \frac{1}{e_1} & 0 & \dots & 0 & i\tau_{11} & i\tau_{12} & \dots & i\tau_{1p} \\ 0 & \frac{1}{e_2} & \dots & 0 & i\tau_{21} & i\tau_{22} & \dots & i\tau_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & \frac{1}{e_p} & i\tau_{p1} & i\tau_{p2} & \dots & i\tau_{pp} \end{array} \right| \quad (\tau_{rs} = \tau_{sr}).$$

Dalle (IV) risulta inoltre che *i cicli normali sono anche pseudonormali*: i relativi *integrali pseudonormali* sono, per la (V)  $e_1 u_1, e_2 u_2, \dots, e_p u_p$ .

OSSERVAZIONE. Nel lavoro citato alla nota <sup>(32)</sup> abbiamo dimostrato che, *quando i divisori  $e_h$  sono unitari* (o, se i coefficienti della  $A$  non son primi tra di loro, eguali) la (17) rimane invariata se sui cicli  $M_i$  si eseguisce una *arbitraria* sostituzione unimodulare, e sugli  $N_i$  una opportuna sostituzione ad essa associata. Ciò fa passare a nuovi cicli (e periodi) normali che soddisfanno alle condizioni da noi richieste in quanto la trasformazione eseguita è del

tipo (10); quindi in tal caso agli  $M_i$  posson sostituirsi  $p$  arbitrari cicli reali primitivi in particolare gli stessi  $A_i$  da cui siamo partiti. Tal conclusione resta maggiormente precisata se si osserva che la sostituzione

$$(VI) \quad M_i = A_i, \quad N_i = a_{i,p+1}B_1 + a_{i,p+2}B_2 + \dots + a_{i,2p}B_{2p}, \quad (i=1, 2, \dots, p)$$

riduce in ogni caso la  $A$  alla forma normale  $\Sigma(h, p+h)$ , e che quando i divisori della  $A$  sono unitari quella sostituzione è unimodulare, perchè  $\|a_{r,p+s}\| = \pm 1$ . Quindi:

*Se i divisori della  $A$  sono unitari, si può assumere come sostituzione normalizzante la (VI) ed allora gl' integrali normali coincidono cogl' integrali pseudonormali.*

**11. Periodi normali per le varietà di carattere reale  $> 0$ .** — Risolveremo il problema, che, come si vedrà, è abbastanza complesso, soltanto nel caso in cui la forma  $A$  ha i divisori unitari, suppostine i coefficienti primi fra loro.

Cerchiamo anzitutto a quali relazioni fra i coefficienti di  $A$  conduce l'ipotesi che la  $A$  sia trasformata in sè stessa dalla sostituzione (II) corrispondente alla simmetria  $S$ , e sia inoltre principale. Per far ciò nel modo più rapido, profittando dei risultati del numero precedente, consideriamo assieme ai cicli pseudonormali  $A_i, B_i$  i  $2p$  cicli indipendenti ma non primitivi  $A_i, E_i$ , dove gli  $E_i$  son definiti dalle

$$(18) \quad E_1 = 2B_1 - A_1, \dots, E_\lambda = 2B_\lambda - A_\lambda; \quad E_{\lambda+1} = 2B_{\lambda+1}, \dots, E_p = 2B_p,$$

e quindi, per le (III) coincidono ordinatamente con  $C_1, C_2, \dots, C_\lambda; 2C_{\lambda+1}, \dots, 2C_p$  cambiati di segno; ed osserviamo subito che gli  $E_i$  sono, come i  $C_i$ , *immaginari puri*, di guisa che per effetto di  $S$  i nuovi cicli subiscono la sostituzione  $A_i' = A_i, E_i' = -E_i$ . Indichiamo poi con  $x_i, X_i$  ( $i=1, 2, \dots, 2p$ ) i periodi di uno stesso integrale ai due gruppi di cicli  $(A_i, B_i)$   $(A_i, E_i)$ , le espressioni degli  $X_i$  mediante gli  $x_i$  deducendosi subito dalle (18).

Mediante la trasformazione di periodi così definita, la  $A$  si muta in una forma  $A_0$  i cui coefficienti  $A_{rs}$  si esprimono facilmente mediante quelli,  $a_{rs}$ , della  $A$ ; e come la  $A$  è trasformata in sè dalla sostituzione (II), così la  $A_0$  lo sarà dalla corrispondente sostituzione sui cicli  $A_i, E_i$ , cioè dalla  $A_i' = A_i, E_i' = -E_i$ . Ma questa è del tipo considerato al numero precedente, quindi la  $A_0$  è necessariamente di una delle due forme ivi ottenute per la  $A$ .

D'altronde se  $A$  è principale lo è anche  $A_0$  perchè le funzioni intermedie ai periodi  $x$  sono *a fortiori* funzioni intermedie ai periodi  $X$ ; quindi

(n. prec.)  $A_0$  è necessariamente del tipo

$$(19) \quad \Sigma A_{r,p+s}(r, p+s), \quad (r, s = 1, 2, \dots, p)$$

cioè ha nulli tutti coefficienti cogl'indici entrambi  $\leq$ , o entrambi  $> p$ . Sostituendo alle  $A_{rs}$  le loro espressioni mediante le  $a_{rs}$  si trovano facilmente le relazioni

(20) a)  $a_{rs} = 0$ , b)  $2a_{rs} + a_{r,p+s} = 0$ ,  
 c)  $2a_{rs} + a_{p+r,s} + a_{p+s,r} = 0$ , d)  $a_{rs} = A_{rs}$ ,

1 . . . . .  $\lambda$  . . . . . p . . . . . 2p

c	b	d
b	a	
d		a

ciascuna delle quali è verificata quando gl'indici di  $a_{rs}$  hanno i valori corrispondenti alle zone contrassegnate colla stessa lettera nello schema annesso.

Tenuto conto dei valori degli indici corrispondenti alle zone  $d$ ) l'ultima delle (20) può scriversi

$$(21) \quad a_{r,p+t} = A_{r,p+t}; \quad (r, t = 1, 2, \dots, p)$$

e siccome il determinante  $\|a_{rs}\|$  dei coefficienti di  $A$ , come risulta dalle (20) e dallo schema, è eguale ad  $\|a_{r,p+t}\|^2$ , così, in conseguenza dell'ipotesi fatta sui divisori della  $A$ , è  $\|a_{r,p+t}\| = \|A_{r,p+t}\| = \pm 1$ .

Poichè  $A_0$  è della forma (9) considerata al numero precedente, così in base all'osservazione con cui si chiude quel numero, si può ridurre la  $A_0$  alla forma normale

$$(22) \quad \sum_{h=1}^p (X_h Y_{p+h} - X_{p+h} Y_h),$$

passando dai cicli  $A_i, E_i$ , ai cicli  $M_i, P_i$  mediante la sostituzione *unimodulare*

$$(23) \quad M_i = A_i, \quad P_i = a_{i,p+1}E_1 + a_{i,p+2}E_2 + \dots + a_{i,2p}E_p, \quad (i=1, 2, \dots, p)$$

dove si son scritte le  $a_{i,p+k}$  invece delle  $A_{i,p+k}$ , a norma della (21). S'intende che nella (22) con  $X_i, Y_i$  s'indicano due serie di periodi ai nuovi cicli  $M_i, P_i$ .

La  $A$  è così ridotta alla forma normale ma *i cicli  $M_i, P_i$  non sono normali perchè non sono primitivi*; e difatti come risulta dalle (18)(23), il modulo della sostituzione che esprime il passaggio dagli  $A_i, B_i$  agli  $M_i, P_i$  ha per valore assoluto  $2^p$ .

Per dedurre dai cicli  $M_i, P_i$  un sistema di cicli normali, cerchiamo anzitutto di trasformare mediante una sostituzione unimodulare, i cicli  $P_i$  in nuovi cicli  $Q_i$ , che risultino *tutti divisibili per 2*; allora ponendo  $2N_i = Q_i$  i cicli  $M_i, N_i$  risulteranno intanto *primitivi*.

Lo scopo si ottiene ponendo

$$(24) \quad Q_h = P_h + \varepsilon_{h_1} M_1 + \varepsilon_{h_2} M_2 + \dots + \varepsilon_{h_\lambda} M_\lambda, \quad Q_k = P_k, \quad (h=1, 2, \dots, \lambda; k=\lambda+1, \dots, p)$$

dove gli  $\varepsilon_{ht}$  sono interi aventi la stessa parità dei coefficienti  $a_{h,p+t}$  della (23) cioè della  $A$ . E per persuadersene basta osservare:

$\alpha$ ) Che per le (18) i cicli  $E_{\lambda+1}, E_{\lambda+2}, \dots, E_p$  son divisibili per 2;

$\beta$ ) che per le (20 b) son pur divisibili per 2, i coefficienti di  $E_1, E_2, \dots, E_\lambda$  nelle espressioni di  $P_{\lambda+1}, P_{\lambda+2}, \dots, P_p$ ;

$\gamma$ ) che infine per  $h$  e  $t \leq \lambda$  è pure divisibile per 2 il ciclo  $a_{h,p+t} E_t + \varepsilon_{ht} M_t$ , giacchè per le (18) (23) esso è eguale a  $2a_{h,p+t} B_t + (\varepsilon_{ht} - a_{h,p+t}) A_t$ , e la differenza racchiusa in parentesi è pari.

Notiamo che *il determinante d'ordine  $\lambda$   $\|\varepsilon_{ht}\|$  è dispari*. Difatti esso ha la stessa parità di  $\|a_{h,p+t}\|$  ( $h, t = 1, 2, \dots, \lambda$ ), e se questo fosse pari, tenendo conto di  $\beta$ ) si vede che lo sarebbero tutti i minori d'ordine  $\lambda$  della matrice formata dalle prime  $\lambda$  colonne di  $\|a_{r,p+s}\|$  ( $r, s = 1, 2, \dots, p$ ) il che è assurdo perchè  $\|a_{r,p+s}\| = \pm 1$ .

Così abbiamo raggiunta una parte del nostro scopo; se però vogliamo che i cicli primitivi  $M_i, N_i$  siano normali, occorre che sia soddisfatta un'altra condizione; ed è che nel passaggio dagli  $M_i, P_i$  agli  $M_i, N_i$  la forma normale (22) rimanga invariata. E perciò basta che lo sia per la (24) giacchè il passaggio dai cicli  $Q_i$  alle loro metà  $N_i$  non fa che introdurre un fattore 2 in tutti i termini della (22).

Ora, a norma d'una osservazione della mia citata Nota, d'altronde immediata, la condizione perchè la (24) muti in sè stessa la (22) è che la matrice  $\|\varepsilon_{ht}\|$  sia simmetrica. È questa condizione conciliabile coll'altra già imposta alle  $\varepsilon_{ht}$  d'aver la stessa parità delle corrispondenti  $a_{h,p+t}$ ?

La risposta è affermativa: ed invero dalla (20 c) risulta che nella matrice  $\|a_{h,p+t}\|$  ( $h, t = 1, 2, \dots, \lambda$ ) due elementi simmetrici rispetto alla diagonale principale hanno la stessa parità. E con ciò lo scopo è raggiunto.

Vediamo ora come si comportano i cicli normali  $M_i, N_i$  rispetto alla simmetria  $S$ . Intanto i cicli  $M_i$  sono (come richiesto) *reali*, anzi coincidono cogli  $A_i$ ; poi tenendo conto che i cicli  $P_i$  sono, come gli  $E_i$ , *immaginarî puri*, si ricava dalla (24) che i cicli  $N_i$  subiscono per effetto di  $S$  la sostituzione

$$(25) \quad N'_h = \varepsilon_{h_1} M_1 + \varepsilon_{h_2} M_2 + \dots + \varepsilon_{h_\lambda} M_\lambda - N_h, \quad N'_k = -N_k \quad (h=1, 2, \dots, \lambda; k=\lambda+1, \dots, p)$$

e quindi, come al n. 3, che la tabella dei periodi normali ai cicli  $N_i$  è del tipo

$$(VII) \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & N_1 & N_2 & N_\lambda & N_{\lambda+1} & N_p \\ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_\lambda \\ u_{\lambda+1} \\ \dots \\ u_p \end{array} & \left[ \begin{array}{cccc} \frac{\varepsilon_{11}}{2} + i\tau_{11}, & \frac{\varepsilon_{12}}{2} + i\tau_{12}, \dots, & \frac{\varepsilon_{1\lambda}}{2} + i\tau_{1\lambda}, & i\tau_{1,\lambda+1}, \dots, i\tau_{1p} \\ \frac{\varepsilon_{21}}{2} + i\tau_{21}, & \frac{\varepsilon_{22}}{2} + i\tau_{22}, \dots, & \frac{\varepsilon_{2\lambda}}{2} + i\tau_{2\lambda}, & i\tau_{2,\lambda+1}, \dots, i\tau_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varepsilon_{\lambda 1}}{2} + i\tau_{\lambda 1}, & \frac{\varepsilon_{\lambda 2}}{2} + i\tau_{\lambda 2}, \dots, & \frac{\varepsilon_{\lambda \lambda}}{2} + i\tau_{\lambda \lambda}, & i\tau_{\lambda,\lambda+1}, \dots, i\tau_{\lambda p} \\ i\tau_{\lambda+1,1}, & i\tau_{\lambda+1,2}, \dots, & i\tau_{\lambda+1,\lambda}, & i\tau_{\lambda+1,\lambda+1}, \dots, i\tau_{\lambda+1,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ i\tau_{p1}, & i\tau_{p2}, & \dots & \dots & i\tau_{pp} \end{array} \right] \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} (\varepsilon_{rs} = \varepsilon_{sr}) \\ (\tau_{rs} = \tau_{sr}) \end{array}$$

dove gli  $\varepsilon_{rs}$  sono interi il cui determinante (simmetrico) ha valore dispari.

Ci si può ora chiedere se ricorrendo ad opportune trasformazioni si possa conseguire qualche semplificazione delle tabelle normali ottenute (che diremo di tipo reale); ed il procedimento seguito fa intravedere una tal possibilità, almeno nei riguardi della matrice  $\|\varepsilon_{rs}\|$ .

Non conviene però rimaner legati a quel procedimento, ma val la pena di considerare più in generale il problema dell'equivalenza di due tabelle normali, soddisfacenti alle condizioni del n. 9 e corrispondenti alla stessa relazione di Riemann  $A = 0$  <sup>(42)</sup>.

Di tale problema ci siamo occupati nel lavoro citato alla nota <sup>(32)</sup> con particolare riguardo alle tabelle normali i cui periodi del 2° gruppo son del tipo (VII), ed alle relative parti reali, cioè alle matrici  $\|\varepsilon_{rs}\|$ . Eccone brevemente le conclusioni:

Una matrice  $\|\varepsilon_{rs}\|$  ( $r, s = 1, \dots, \lambda$ ) a determinante dispari si dice di carattere diasimmetrico od ortosimmetrico secondo che il prodotto  $(\varepsilon_{11} + 1)(\varepsilon_{22} + 1) \dots (\varepsilon_{\lambda\lambda} + 1)$  è pari o dispari, cioè secondo che il gruppo  $(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \dots, \varepsilon_{\lambda\lambda})$  contiene o no qualche elemento dispari. Il caso ortosimmetrico può presentarsi soltanto quando  $\lambda$  è pari.

<sup>(42)</sup> Evidentemente per l'equivalenza in tal senso di due tabelle normali corrispondenti ai due sistemi di cicli normali  $M_i, N_i; M'_i, N'_i$  occorre e basta che:

- a) I cicli  $M'_i$  siano combinazioni lineari dei soli cicli  $M_i$ ;
- b) la sostituzione unimodulare mediante cui si passa dall'uno all'altro sistema, trasformi in se stessa la relazione normale  $\Sigma(h, p+h) = 0$ .



Condizione necessaria e sufficiente perche due matrici  $\|\varepsilon_{rs}\|$ ,  $\|\varepsilon'_{rs}\|$  dello stesso ordine  $\lambda$  siano equivalenti, cioè appartengano a tabelle normali equivalenti (nel senso predetto) è che abbiano entrambe carattere diasimmetrico od ortosimmetrico.

Ogni matrice  $\|\varepsilon_{rs}\|$  è equivalente ad una delle due matrici (o schemi normali)

$$(VIII) \quad d) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \quad o) \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

o in altre parole sempre restando soddisfatte le condizioni del n. 9, alla tabella normale di cui fa parte la (VII) può sostituirsi una tabella equivalente nella quale le  $\varepsilon_{rs}$  hanno i valori (VIII d)) od (VIII o)) secondo che si presenta il caso diasimmetrico od ortosimmetrico <sup>(43)</sup>.

A queste tabelle ridotte ci riferiremo sempre nel seguito.

12. **Osservazioni finali.** — I) Sempre indicando con  $M_i, N_i$  i cicli normali, sostituendo nelle (25) i valori (VIII), si trova che la sostituzione indotta dalla simmetria  $S$  (e più in generale dalle simmetrie  $u'_i \equiv \bar{u}_i + c_i$ ) sui cicli delle tabelle ridotte è rispettivamente

$$(IX) \quad d) M'_i = M_i, N'_j = M_j - N_j, N'_t = -N_t \quad (i=1, 2, \dots, p) \\ o) M'_i = M_i, N'_j = N_{\lambda+1-j} - N_j, N'_t = -N_t \quad (j=1, 2, \dots, \lambda; t=\lambda+1, \dots, p).$$

La (IX d)) coincide, salvo le notazioni, colla (II) del n. 2. E ciò è ben naturale dal momento che nel caso diasimmetrico i cicli (ed i periodi) normali sono anche pseudonormali, come risulta subito dalla (VII) e dallo schema (VIII d)). Invece nel caso ortosimmetrico dai cicli (e periodi) normali si deducono cicli (e periodi) pseudonormali invertendo l'ordine di  $N_1, N_2, \dots, N_\lambda$ .

Ne segue facilmente che le formule del § 2 sussistono inalterate anche se i periodi sono normali.

II) Ricordando che gl'interi  $\varepsilon_{rs}$  hanno la stessa parità dei coefficienti  $a_{r, p+s}$  della relazione  $A=0$ , si può trasferire a quella relazione il carattere diasimmetrico od ortosimmetrico della matrice  $\|\varepsilon_{rs}\|$  dipendentemente dalla esistenza o no di un elemento dispari nel gruppo d'interi  $(a_{1, p+1}, a_{2, p+2}, \dots, a_{\lambda, p+\lambda})$ .

<sup>(43)</sup> Altri schemi semplici, e fra essi lo schema ortosimmetrico di WEICHOLD del quale si parlerà tra poco, si trovano nel citato lavoro. D'ora in poi la distinzione fra i due casi verrà affidata nelle formule alle lettere d), o).

Risulta dalle conclusioni riferite alla fine del n. prec. che quel carattere appartiene alla relazione  $A=0$  indipendentemente dai particolari cicli *pseudonormali* a cui è riferita, cioè è invariante per trasformazioni di periodi pseudonormali. Del resto, tenendo conto che una trasformazione siffatta è (fra i cicli) rappresentata da una sostituzione del tipo (11) (n. 3) i cui coefficienti soddisfano alle (15) (15') basta un facile calcolo per persuadersene.

Si tratta insomma d'un carattere del sistema reale (rispetto ad  $S$ )  $\Sigma$  corrispondente alla relazione  $A=0$ , che, come vedremo al numero seguente, si rivela attraverso espressive proprietà reali di quel sistema. Ma si badi che *in generale quel carattere non può attribuirsi alla simmetria  $S$ , cioè alla varietà reale  $V_p^{(0)}$  corrispondente*, giacchè quella varietà può benissimo contenere due sistemi  $\Sigma$  reali l'uno di carattere diasimmetrico, l'altro di carattere ortosimmetrico. Basta che esistano due relazioni del tipo di  $A=0$  e di carattere diverso (trasformate in se stesse dalla sostituzione corrispondente ad  $S$ ), come ad esempio nel caso della tabella (pseudonormale)

$$(26) \quad \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} + ia & ib \\ 0 & 1 & ib & \frac{1}{2} + ia \end{array}, \quad a^2 - b^2 \neq 0,$$

le relazioni  $(13) + (24) = 0$ ,  $(14) + (23) = 0$ . Alla prima ch'è già di forma normale, corrisponde la tabella (26) stessa ch'è *normale diasimmetrica*; alla seconda, che si riduce a forma normale scambiando gl'indici 3, 4 la tabella *normale ortosimmetrica* che si deduce dalla (26) scambiandone le due ultime colonne. Le due tabelle non sono equivalenti nel senso della nota <sup>(42)</sup>.

III) I risultati dei n. 10, 11 hanno valore non solo per le varietà abeliane, ma per varietà algebriche irregolari qualunque, in particolare per le curve algebriche. Ciò risulta dai procedimenti seguiti che sussistono inalterati anche se si prescinde dalla considerazione delle varietà intermedie.

Per le curve algebriche reali le tabelle normali di tipo reale sono state determinate dal WEICHOLD <sup>(44)</sup> che vi è pervenuto mediante costruzione diretta delle retrosezioni sulle superficie riemanniane simmetriche. Il predetto A. assegna però soltanto i tipi corrispondenti, per il caso diasimmetrico, allo schema (VIII d)), e per quello ortosimmetrico allo schema di cui alla nota <sup>(43)</sup>; inoltre i suoi periodi son quelli a cui si giungerebbe col nostro procedimento

<sup>(44)</sup> WEICHOLD. *Ueber symmetrische Riemann'sche Flächen*, ecc. [Zeitsch. f. Math. u. Phys., Anno 28° (1883) pp. 321-351].

partendo dai cicli pseudonormali di 2ª specie  $C_i, D_i$  anzichè dagli  $A_i, B_i$ . Perciò gl'integrali normali, pur essendo reali, hanno ai cicli del 1º gruppo periodi immaginari puri (eguali a  $\pi i$ ) (cfr. n. 3).

• Per le *curve prive di rami reali*, il WEICHOOLD dà una tabella di altro tipo: fu il KLEIN <sup>(45)</sup> a mostrare che essa poteva sostituirsi colla tabella *ortosimmetrica* corrispondente al carattere reale  $\lambda = p$  o  $\lambda = p - 1$  secondo che  $p$  è pari o dispari (cf. n. 8). Però entrambi gli A. impiegano per questo caso integrali normali di tipo diverso (immaginari puri invece di reali e viceversa), mentre noi ci riferiremo sempre ad integrali reali <sup>(46)</sup>.

Nei riguardi dell'applicazione dei nostri procedimenti alle curve, convien osservare che in questo caso esiste sempre una relazione  $A = 0$  di *divisori unitari* ch'è trasformata in sè dalla sostituzione sui cicli indotta da *qualunque* simmetria  $S$ ; ed è quella che riferita ad un sistema di *retrosezioni* assume la forma normale. Difatti ad essa corrisponde sulla varietà di Jacobi il sistema  $\Sigma$  delle varietà  $\mathfrak{F}$  (ai periodi delle retrosezioni) immagini dei gruppi di  $p$  punti contenuti parzialmente nelle  $g_{2p-1}^{p-1}$  della curva; e questo sistema è reale (rispetto a tutte le simmetrie che provengono da simmetrie della curva) perchè lo è la totalità di quelle  $g_{2p-1}^{p-1}$ .

IV) Per le tabelle normali (VII) e corrispondenti relazioni normali (incluso il caso  $V$  per  $e_1 = e_2 = \dots = e_p = 1$ , che considereremo come un *particolare caso ortosimmetrico*) indicando con  $D_h$  il determinante formato dalle prime  $h$  righe e colonne di  $\|\tau_{rs}\|$ , le condizioni di SCORZA si riducono alle

$$(27) \quad D_2 > 0, \quad D_1 D_3 < 0, \quad D_4 > 0, \dots,$$

che, unitamente alla  $D_1 = \tau_{11} < 0$  danno notoriamente le condizioni di convergenza delle serie  $\mathfrak{F}$  <sup>(47)</sup>. Quest'ultima condizione si può ritenere superflua potendosi, nella (VII) cambiare il segno a tutti i periodi (cioè ai cicli  $N_i$ ) <sup>(48)</sup>: quindi, verificate le (27) la  $V_p$  esiste, ed ammette tutte le simmetrie rappresentate dalle equazioni (5)(5) del n. 6. E ovvio che una tal varietà è in generale *non singolare*.

<sup>(45)</sup> KLEIN. *Ueber Realitätsverhältnisse bei der einem beliebigem Geschlechte*, ecc. [Math. Ann. 42 (1892) pp. 1-29. Ges. Abh. XLII] § 7.

<sup>(46)</sup> A complemento dei risultati del n. 8, dimostreremo più avanti (n. 15) che alle curve *prive di rami reali* corrisponde tabella normale *ortosimmetrica*.

<sup>(47)</sup> KRAZER, § 3

<sup>(48)</sup> Se si vuol cambiar segno alle  $\tau_{rs}$  ma non alle  $\varepsilon_{rs}$  basta sostituire al ciclo  $N_i$  il ciclo  $-N_i + \varepsilon_{i1}M_1 + \varepsilon_{i2}M_2 + \dots + \varepsilon_{i\lambda}M_\lambda$ , o  $-N_i$  secondo che  $i \leq$  oppure  $> \lambda$ . La nuova tabella ottenuta è ancora normale.

L'eventualità di un tal cambiamento di segno era da prevedersi dato che non abbiamo fissato il *sensu* delle disuglianze di cui alla Nota <sup>(39)</sup>. Cfr. la Nota <sup>(3)</sup> del lavoro più volte citato.

V) Anche ad una matrice normale può collegarsi la considerazione del determinante  $\Delta = \|\tau_{r,s}\|$ , della *matrice complementare*, e dei relativi cicli normali  $P_i, Q_i$  che rispetto agli  $M_i, N_i$  si trovano in condizione analoga a quella dei  $C_i, D_i$  rispetto agli  $A_i, B_i$ . Per ottenere la matrice complementare basta, nel caso diasimmetrico procedere esattamente come al n. 4, e nel caso ortosimmetrico ricondursi a quel procedimento tenendo opportuno conto della Oss. I di questo numero. In definitiva le *matrici complementari sono normali e dello stesso carattere delle date*, ed i relativi cicli normali sono espressi dalle

$$(X) \quad \begin{aligned} d) & P_i = M_i - 2N_i, P_j = -N_j; Q_i = M_i - N_i, Q_j = M_j & (i=1, 2, \dots, \lambda) \\ o) & P_i = M_i - 2N_{\lambda+i-i}; P_j = -N_j; Q_i = M_{\lambda+i-i} - N_i, Q_j = M_j & (j=\lambda+1, \dots, p) \end{aligned}$$

delle quali la *d*) coincide, salvo le notazioni, colla (III) del n. 2. Si noti che le sostituzioni (X) trasformano in sè stessa la relazione normale.

Fra i determinanti  $\Delta, \Delta_1$  di due matrici normali complementari, intercede ancora la relazione (18) del n. 4.

VI) Una matrice normale di tipo reale può esser *composta* con più matrici analoghe; e viceversa la composizione di matrici siffatte dà, dopo opportune permutazioni di linee e colonne, una matrice dello stesso tipo. In forza delle conclusioni riportate alla fine del n. prec. questa *ha carattere diasimmetrico appena lo ha una delle componenti*, ed *ha carattere ortosimmetrico soltanto quando lo hanno tutte*,

Sono ovvie le conseguenze riguardanti la  $V_p$  dei gruppi di  $p = p_1 + p_2 + \dots + p_n$  punti dei quali  $p_1$  variabili sopra una curva *reale*  $C_1$  di genere  $p_1, p_2$  su di una curva *reale* di genere  $p_2$ , ecc.

# Sur un cas d'élimination et l'extension aux fonctions algébroides du théorème de M. Picard

par M. GEORGES J. RÉMOUNDOS, à Athènes

1. Soit <sup>(1)</sup>:

$$(1) \quad F(z, u) = u^v + A_1(z)u^{v-1} + A_2(z)u^{v-2} + \dots + A_{v-1}(z)u + A_v(z)$$

où les  $A_i(z)$  désignent des fonctions quelconques de  $z$ ; attribuons à  $u$   $v$  valeurs distinctes quelconques  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_v$  et posons :

$$(2) \quad F(z, u_1) = f_1(z), \quad F(z, u_2) = f_2(z), \quad F(z, u_3) = f_3(z), \dots, \quad F(z, u_v) = f_v(z).$$

Comme le déterminant de VANDERMONDE :

$$| 1 \quad u_i \quad u_i^2 \quad \dots \quad u_i^{v-1} | \quad (i = 1, 2, 3, \dots, v)$$

est différent de zéro, les équations (2) résolues par rapport aux  $A_i$  donneront une solution unique et, par conséquent, les relations (2) déterminent une correspondance biuniforme entre les  $A_1, A_2, \dots, A_v$  d'une part et les  $f_1, f_2, \dots, f_v$  d'autre part.

Cela posé, donnons à  $u$  une nouvelle valeur  $u_0$  (différente des autres) et éliminons les  $A_i(z)$  entre les équations (2) et  $F(z, u_0) = f_0(z)$  (3); le résultat de l'élimination sera l'égalité :

$$(4) \quad q_0 f_0(z) + q_1 f_1(z) + q_2 f_2(z) + \dots + q_v f_v(z) = Q$$

où  $Q$  est le déterminant :

$$| 1 \quad u_i \quad u_i^2 \quad u_i^3 \quad \dots \quad u_i^v | \quad (i = 0, 1, 2, 3, \dots, v)$$

et le  $q_i$  désigne le mineur du déterminant  $Q$  que nous en tirons en supprimant la ligne qui contient  $u_i$  et la dernière colonne (qui contient les puissances du degré  $v$ ).

---

<sup>(1)</sup> Ce travail est le développement d'une communication que j'ai faite à l'Académie de Paris. Voir : G. RÉMOUNDOS, *Sur une propriété d'élimination et les fonctions algébroides*. « Comptes Rendus », 1923, t. 177, pag. 524, (17 septembre 1923).

Alors, dans plusieurs problèmes importants, se pose la question suivante :

*Dans quels cas le résultat (4) est-il réductible, pouvant se décomposer en deux ou plusieurs autres relations de la même forme ? D'une façon plus précise, dans quel cas la somme de deux ou de plusieurs termes du premier membre de (4) peut-elle être nulle ?*

2. Remarquons d'abord que la relation (4) devient une identité par rapport aux  $A_i$ , si nous les introduisons en remplaçant les  $f_0, f_1, f_2, \dots, f_v$  moyennant les relations (2) et (3).

Supposons maintenant que l'on ait, par exemple :

$$(5) \quad q_0 f_0(z) + q_1 f_1(z) + q_2 f_2(z) + q_3 f_3(z) = 0.$$

Alors, si nous introduisons les fonctions  $A_i(z)$  en remplaçant les  $f_0(z), f_1(z), f_2(z), f_3(z)$  respectivement par les  $F(z, u_0), F(z, u_1), F(z, u_2), F(z, u_3)$ , la relation (5) se transformera en :

$$(6) \quad \alpha_0 + \alpha_1 A_1(z) + \alpha_2 A_2(z) + \dots + \alpha_v A_v(z) = 0$$

où les  $\alpha_i$  sont des polynômes entiers par rapport aux  $u_0, u_1, u_2, u_v$ .

Cette égalité linéaire en  $A_i(z)$  n'est *jamais* une identité par rapport aux  $A_i(z)$ . En effet, si l'égalité (6) était une identité par rapport aux  $A_i(z)$ , alors il en serait de même de l'égalité (5) par rapport aux  $f_0, f_1, f_2, f_3$ , grâce à la correspondante biuniforme entre les  $A_i(z)$  et les  $f_0(z), f_1(z), f_2(z), \dots, f_{v-1}(z)$ , ci-dessus indiquée : S'il y avait un système de valeurs de  $f_0(z), f_1(z), \dots, f_{v-1}(z)$  ne satisfaisant pas à (5), alors le système correspondant des valeurs des  $A_i(z)$  ne satisferait pas non plus à (6).

Or, l'égalité (5) ne saurait jamais être une identité, puisque les coefficients  $q_i$  sont des déterminants de VANDERMONDE ; donc, la relation (6) n'est pas une identité et nous obtenons ainsi le théorème suivant :

THÉORÈME I. *Soit :*

$$(7) \quad F(z, u) = u^v + A_1(z)u^{v-1} + A_2(z)u^{v-2} + \dots + A_{v-1}(z)u + A_v(z)$$

*un polynôme entier en u, où les  $A_i(z)$  sont des fonctions quelconques de z, donnons à u, v + 1 valeurs distinctes  $u_0, u_1, u_2, \dots, u_v$  et éliminons les  $A_i(z)$  entre les équations :*

$$F(z, u_i) = f_i(z) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, v).$$

*Pour que le résultat de l'élimination soit déchirable (décomposable) dans le sens ci-dessus indiqué, il faut qu'il existe des relations linéaires à coefficients constants entre les fonctions  $A_i(z)$ .*

3. Supposons que le résultat de l'élimination des  $A_i(z)$  entre les équations :

$$(8) \quad F(z, u_1) = f_1(z), \quad F(z, u_2) = f_2(z), \dots, \quad F(z, u_\nu) = f_\nu(z), \quad F(z, u) = f(z)$$

soit déchirable (dans les sens plus haut indiqué) pour  $\mu$  valeurs  $u'_1, u'_2, \dots, u'_\mu$ , de  $u$ .

Alors, d'après le théorème précédent, à chacune des valeurs  $u'_1, u'_2, \dots, u'_\mu$  correspond au moins une relation linéaire entre les  $A_i(z)$  et, par conséquent, leur nombre total est au moins égal à  $\mu$ .

Ces relations sont distinctes, puisque, dans le cas contraire, les relations correspondantes entre les  $f_i(z)$  (moyennant la transformation biuniforme ci-dessus indiquée) ne seraient pas non plus, distinctes <sup>(1)</sup>, et il en serait de même des quantités  $F(z, u'_1), F(z, u'_2), \dots, F(z, u'_\mu)$ , ce qui est absurde à cause de l'inégalité des valeurs  $u'_1, u'_2, \dots, u'_\mu$ . Nous obtenons, donc, le théorème suivant qui complète le précédent, à savoir :

**THÉORÈME II.** *S'il existe  $\mu$  relations linéaires à coefficients constants entre les  $A_i(z)$ , le nombre des valeurs de  $u$ , distinctes des  $u_1, u_2, \dots, u_\nu$ , pour lesquelles le résultat de l'élimination des  $A_i(z)$  entre les équations (8) est déchirable, ne saurait jamais dépasser la quantité  $\mu$ .*

Pour abrégier le langage, appelons *exceptionnelle* toute valeur de  $u$ , pour laquelle le résultat de l'élimination ci-dessus indiquée soit déchirable, et remarquons que les valeurs  $u = u_1, u_2, u_3, \dots, u_\nu$  sont évidemment exceptionnelles, puisque ces valeurs annullent tous les déterminants  $q_i$  sauf ceux qui ne contiennent pas ou bien  $u$  ou bien sa valeur. Nous pouvons, donc, compléter le théorème II par le suivant.

**THÉORÈME II<sub>b</sub>.** *S'il existe, entre les  $A_i(z)$ ,  $\mu$  relations linéaires distinctes à coefficients constants, le nombre des valeurs exceptionnelles de  $u$  est au plus égal à  $\nu + \mu$ .*

D'autre part, si les  $A_i(z)$  ne sont pas toutes des constantes, le nombre  $\mu$  sera au plus égal à  $\nu - 1$  et on en déduit la conclusion suivante :

**COROLLAIRE.** *Si les  $A_i(z)$  ne sont pas toutes des constantes, le nombre des valeurs exceptionnelles finies de  $u$  ne saurait dépasser la quantité  $2\nu - 1$ .*

Je tiens à signaler ici de nouveau le fait important que tous ces théorèmes, qui ont un caractère purement algébrique, sont valables quelles que soient les fonctions  $A_i(z)$ , et présentent une simplicité et *généralité* frappante.

4. Considérons maintenant une famille ( $F$ ) de fonctions  $f(z)$  ayant la propriété suivante :

(1) Il est, d'ailleurs, aisé de voir que les relations entre les  $f_i$ , dont il s'agit, ne contiennent pas les mêmes  $f_i$  et, conséquent, si  $f_i$  (par exemple) figure dans l'une de ces relations, elle manque dans les autres et n'en est nullement engagée.

Toute identité de la forme :

$$(9) \quad q_1 f_1 + q_2 f_2 + q_3 f_3 + \dots + q_k f_k = q \quad [\text{les } q \text{ et } q_i \text{ constants}]$$

où les  $f_1(z)$ ,  $f_2(z)$ , ...,  $f_k(z)$  appartiennent à la famille  $(F)$ , entraîne ou bien son déchirement (dans le sens plusieurs fois indiqué) ou bien la nullité de tous les coefficients  $q_i$  et  $q$ .

Alors, toute valeur de  $u$  pour laquelle la fonction  $F(z, u)$  appartient à cette famille, doit être considérée comme exceptionnelle, car leur nombre ne saurait jamais dépasser la quantité  $2\nu - 1$  (l'infini non compris) et, particulièrement, la quantité  $\nu + \mu$  dans les cas où il existe, entre les  $A_i(z)$ ,  $\mu$  relations linéaires à coefficients constants.

Une telle famille est, par exemple, l'ensemble des fonctions de la forme :  $P(z)e^{H(z)}$ , où les  $P(z)$  et  $H(z)$  sont des polynômes quelconques ou des fonctions entières telles que  $P(z)$  soit d'ordre inférieur à celui de  $e^{H(z)}$  dans les sens bien connu de la théorie des fonctions entières, pourvu que les  $f_i(z)$  ne soient pas tous des polynômes.

Cela résulte d'un théorème fondamental de M. BOREL qui m'a servi comme base pour l'extension aux fonctions multiformes du théorème classique de M. PICARD et de ses généralisations (<sup>1</sup>). Nous en tirons ainsi, comme cas particuliers des théorèmes généraux algébriques de N<sup>os</sup> précédents de ce travail, tous mes résultats antérieurs sur l'extension ci-dessus indiquée et de plus de nouvelles précisions sur le nombre maximum des valeurs exceptionnelles, qui, comme nous voyons, peut être inférieur à  $2\nu$  et dépend aussi du nombre des relations linéaires à coefficients constants qui existent entre les  $A_i(z)$ .

Ces nouvelles précisions ont été communiquées (sans démonstration) dans les « Comptes-rendus » (*Sur les valeurs exceptionnelles des fonctions multiformes*, tome 177, 1923, pag. 306) pour la première fois par mon élève M. VAROPOULOS, mais sans aucune relation avec mes théorèmes généraux du travail actuel, dont les dites précisions ne sont qu'une application très particulière.

Une application analogue de mes théorèmes peut se faire aussi à certaines fonctions ayant une infinité de branches, ce que nous traiterons dans un travail ultérieur.

*Athènes, le 17 Juillet 1924.*

(<sup>1</sup>) Voir, par exemple : É. BOREL, *Sur les zéros des fonctions entières*. (Acta mathematica, t. XX). G. RÉMOUNDOS, *Sur les zéros d'une classe des fonctions transcendantes*; Thèse de doctorat de l'Université de Paris, 1906, et Annales de la Faculté de Toulouse, 2<sup>e</sup> Série, VIII.



# Sulla definizione di integrale delle funzioni di una variabile

di GIUSEPPE VITALI, a Padova

---

In una recente pubblicazione <sup>(1)</sup> il prof. BEPPO LEVI presenta a scopi didattici una nuova definizione di integrale di funzioni limitate a proposito della quale scrive <sup>(2)</sup>:

« Per le funzioni misurabili l'integrale quale è qui definito coincide col-  
« l'integrale di LEBESGUE: ma resta dubbio se non sia possibile immaginare  
« l'applicazione della definizione a funzioni non misurabili ».

Io dimostro che effettivamente la definizione del LEVI è del tutto equi-  
valente a quella di LEBESGUE.

Nella esposizione io rinuncio ai vincoli di linguaggio che il LEVI si impone  
per i fini didattici del suo lavoro.

1. Il LEVI definisce dapprima l'integrale superiore delle funzioni limitate  
e  $> 0$  nel modo seguente:

« Sia  $f(x)$  una funzione di variabile reale limitata e  $> 0$  definita in un  
« intervallo  $(a, b)$ ,  $a < b$ .

« Consideriamo una successione di segmenti di  $(a, b)$

$$(1) \quad \delta_1, \delta_2, \dots$$

« e una successione di numeri reali e  $> 0$

$$(2) \quad h_1, h_2, \dots$$

« tali che per ogni  $x$  di  $(a, b)$  esista un numero intero positivo  $n$ , per cui  $x$  appar-  
« tenga a  $\delta_n$  o come punto interno o come punto estremo, e sia  $f(x) \leq h_n$  <sup>(3)</sup>.

---

<sup>(1)</sup> BEPPO LEVI, *Sulla definizione dell'integrale*. (« Annali di Matematica pura ed appli-  
cata », serie IV, tomo I, 1923-24, pp. 58-82).

<sup>(2)</sup> Loc. cit., p. 58.

<sup>(3)</sup> Non è escluso che la successione (1) consti di un numero finito di elementi. Però  
in questo caso anche la (2) deve intendersi finita e contenente un numero di elementi uguale  
al numero degli elementi di (1).

« Formiamo poi la somma

$$(3) \quad \Sigma_n d_n \cdot h_n$$

« nella quale  $d_n$  indica il numero assoluto che misura la lunghezza di  $\delta_n$ .

« Il limite inferiore delle somme (3) corrispondenti alle varie coppie di successioni (1) e (2) che soddisfano alle condizioni sopra richieste si chiama « *integrale superiore di  $f(x)$*  da  $a$  e  $b$  e si indica con

$$\int_a^b f(x) dx \text{ » } (4).$$

Sia  $c$  il limite superiore di  $f(x)$  in  $(a, b)$ , e per ogni  $y$  positivo e  $\leq c$  si indichi con  $e(y)$  la misura esterna <sup>(2)</sup> del gruppo dei punti di  $(a, b)$  per cui  $f(x) > y$ .

È evidente che  $e(c) = 0$  ed  $e(0) = b - a$ .

La  $e(y)$  è una funzione monotona della  $y$  e quindi integrabile secondo RIEMANN in  $(0, c)$ .

Dico che

$$\int_a^b f(x) dx = \int_0^c e(y) dy.$$

(4) Veramente il LEVI anzichè considerare le successioni (1) e (2) considera due gruppi in corrispondenza biunivoca, che possono quindi avere anche una potenza maggiore del numerabile; prende dal 1° gruppo un numero finito qualunque di segmenti

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$$

e i corrispondenti numeri

$$h_1, h_2, \dots, h_n$$

del 2° gruppo, calcola il valore dell'espressione

$$d_1 h_1 + d_2 h_2 + \dots + d_n h_n$$

e considera il limite superiore  $S$  dei valori che per questa via si possono ottenere, quindi nella definizione di integrale superiore fa compiere alla  $S$  la stessa parte che la (3) compie nella definizione che ho dato nel testo.

Si può però notare che nella definizione hanno importanza solo le  $S$  finite e che una  $S$  non può essere finita che quando i gruppi assunti dal LEVI in luogo delle successioni (1) e (2) hanno una potenza non superiore a quella del numerabile.

(2) Per *misura esterna* e per *misura interna* si intende ciò che con questi nomi è stato indicato dal LEBESGUE a pag. 104 del suo trattato *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, 1904, Paris, Gauthier-Villars.

La *misura esterna* è l'estensione minima della nota: G. VITALI, *Sui gruppi di punti*. (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XVIII, (1904), pp. 116-126).

Dim. Sia  $r$  un qualsiasi numero intero  $> 0$ , e si ponga

$$y_i = i \frac{c}{r} \quad (i=0, 1, 2, \dots, r),$$

cosicchè in particolare  $y_0 = 0$ ,  $y_r = c$ .

Indico con  $G_i$  ( $i=0, 1, \dots, r$ ) il gruppo dei punti di  $(a, b)$  per cui  $f(x) > y_i$ . La misura esterna di ogni  $G_i$  è allora data da  $e(y_i)$ .

Consideriamo ora una qualsiasi coppia di successioni (1) e (2) e indichiamo con  $\mu_i$  la somma delle lunghezze dei segmenti di (1) a cui corrispondono numeri di (2) maggiori di  $y_i$ . Siccome ogni punto di  $G_i$  appartiene ad uno di questi segmenti (v. Def.), sarà

$$\mu_i \geq e(y_i) \quad (i=0, 1, 2, \dots, r),$$

e quindi

$$\begin{aligned} \sum_n d_n h_n &\geq \mu_{r-1} \cdot y_{r-1} + (\mu_{r-2} - \mu_{r-1}) y_{r-2} + \dots + (\mu_1 - \mu_0) y_0 \\ &= \mu_{r-1} (y_{r-1} - y_{r-2}) + \mu_{r-2} (y_{r-2} - y_{r-3}) + \dots + \mu_1 (y_1 - y_0) \\ &\geq e(y_{r-1}) (y_{r-1} - y_{r-2}) + e(y_{r-2}) (y_{r-2} - y_{r-3}) + \dots + e(y_1) (y_1 - y_0). \end{aligned}$$

Quest'ultima sommatoria col tendere di  $r$  all'  $\infty$  tende a

$$\int_0^c e(y) dy,$$

dunque

$$\sum_n d_n h_n \geq \int_0^c e(y) dy,$$

e infine

$$(4) \quad \int_a^b f(x) dx \geq \int_0^c e(y) dy.$$

Sia ora  $\varepsilon$  un numero  $> 0$  piccolo a piacere. È possibile includere i punti di  $G_{r-1}$  in un sistema  $\Gamma_{r-1}$  di segmenti le cui lunghezze abbiano una somma minore di  $e(y_{r-1}) + \varepsilon$ . I punti di  $G_{r-2}$  che non appartengono ad alcun segmento di  $\Gamma_{r-1}$  formano un gruppo che ha una misura esterna che non supera

$e(y_{r-2}) - e(y_{r-1})$  <sup>(4)</sup>, e quindi si possono includere in un sistema  $\Gamma_{r-2}$  di segmenti le cui lunghezze abbiano una somma minore di  $e(y_{r-2}) - e(y_{r-1}) + \varepsilon$ .

I punti di  $G_{r-3}$  che non appartengono ad alcuno dei segmenti di  $\Gamma_{r-1}$  e di  $\Gamma_{r-2}$  formano un gruppo che ha misura esterna che non supera  $e(y_{r-3}) - e(y_{r-2})$  e quindi si possono rinchiudere in un sistema  $\Gamma_{r-3}$  di segmenti le cui lunghezze abbiano una somma minore di  $e(y_{r-3}) - e(y_{r-2}) + \varepsilon$ , e così via.

Ordiniamo i segmenti di

$$\Gamma_{r-1}, \Gamma_{r-2}, \dots, \Gamma_0$$

in una successione come (1) e costruiamo una successione (2) in modo che ad ogni segmento di  $\Gamma_{r-1}$  corrisponda il numero  $y_r$ , ad ogni segmento di  $\Gamma_{r-2}$  corrisponda il numero  $y_{r-1}$ , ad ogni segmento di  $\Gamma_{r-3}$  corrisponda il numero  $y_{r-2}$  e così via.

Le successioni (1) e (2) così formate soddisfano alla condizione che per ogni  $x$  di  $(a, b)$  esiste un numero intero positivo  $n$  per cui  $x$  appartiene a  $\delta_n$  e sia  $f(x) \geq h_n$ .

Per tali successioni è

$$\begin{aligned} \Sigma_n d_n \cdot h_n &< [e(y_{r-1}) + \varepsilon]y_r + [e(y_{r-2}) - e(y_{r-1}) + \varepsilon]y_{r-1} + \\ &+ [e(y_{r-3}) - e(y_{r-2}) + \varepsilon]y_{r-2} + \dots + [e(y_0) - e(y_1) + \varepsilon]y_1 \\ &= e(y_{r-1}) \cdot (y_r - y_{r-1}) + e(y_{r-2}) \cdot (y_{r-1} - y_{r-2}) + \dots \\ &+ e(y_1) \cdot (y_2 - y_1) + e(y_0) \cdot (y_1 - y_0) + \varepsilon(y_1 + y_2 + \dots + y_r) \\ &< \sum_{i=0}^{r-1} e(y_i) \cdot (y_{i+1} - y_i) + r \cdot \varepsilon \cdot c. \end{aligned}$$

(4) Ciò è conseguenza del teorema:

*Se  $G$  è un gruppo di punti di misura esterna  $e$ , se  $G'$  è un sottogruppo di  $G$  di misura esterna  $e'$  e se  $\Gamma$  è un gruppo di segmenti racchiudente  $G'$ , il gruppo  $G''$  dei punti di  $G$  che non appartengono a qualche segmento di  $\Gamma$  ha misura esterna  $\leq e - e'$ .*

Questo teorema si può dimostrare come segue:

Per ogni  $\sigma > 0$  si può includere  $G$  in un sistema  $\Delta$  di segmenti le cui lunghezze abbiano una somma  $< e + \sigma$ . I punti appartenenti a qualche segmento di  $\Delta$  formano un gruppo  $\Omega$  misurabile di misura  $\leq e + \sigma$ . I punti comuni ad un segmento di  $\Gamma$  e ad uno di  $\Delta$  formano un gruppo misurabile di misura  $\geq e'$ , perchè questo gruppo contiene  $G'$ .

I punti di  $\Omega$  che non appartengono ad alcun segmento di  $\Gamma$  formano allora un gruppo misurabile di misura  $\leq (e + \sigma) - e' = (e - e') + \sigma$ . Il gruppo  $G''$  è sottogruppo di questo, quindi la misura esterna di  $G''$  è  $\leq (e - e') + \sigma$ . Ciò per ogni  $\sigma$ , dunque la misura esterna di  $G''$  è  $\leq e - e'$ . c. d. d.

Scelto poi un  $\eta > 0$  piccolo a piacere, si può prendere  $r$  così grande per cui

$$\sum_{i=0}^{r-1} e(y_i) \cdot (y_{i+1} - y_i) < \int_0^c e(y) dy + \frac{\eta}{2}$$

e poi  $\varepsilon$  così piccolo per cui

$$r \cdot \varepsilon \cdot c < \frac{\eta}{2}.$$

Allora risulta

$$\sum_n d_n \cdot h_n < \int_0^c e(y) dy + \eta,$$

e quindi è certamente

$$\int_a^{\bar{b}} f(x) dx \leq \int_0^c e(y) dy.$$

Da questa disuguaglianza e dalla (4) si ricava

$$(5) \quad \int_a^{\bar{b}} f(x) dx = \int_0^c e(y) dy. \quad \text{c. d. d.}$$

Si osservi inoltre che se  $\bar{e}(y)$  indica la misura esterna del gruppo di punti di  $(a, b)$  in cui  $f(x) \geq y$  è  $\bar{e}(y) \geq e(y)$  è, per ogni  $\varepsilon > 0$ ,  $\bar{e}(y) \leq e(y - \varepsilon)$ , così che

$$(6) \quad \int_0^c e(y) dy \leq \int_0^c \bar{e}(y) dy$$

ed inoltre

$$\int_0^c \bar{e}(y) dy \leq \int_0^{\varepsilon} \bar{e}(y) dy + \int_{\varepsilon}^c e(y - \varepsilon) dy.$$

Ma

$$\bar{e}(y) \leq b - a$$

e quindi

$$\int_0^{\varepsilon} \bar{e}(y) dy \leq \varepsilon(b - a),$$

inoltre

$$\int_a^c e(y - \varepsilon) dy = \int_0^{c-\varepsilon} e(y) dy \leq \int_0^c e(y) dy,$$

dunque

$$\int_0^c \bar{e}(y) dy \leq \varepsilon(b - a) + \int_0^c e(y) dy,$$

e, poichè  $\varepsilon$  può essere piccolo a piacere,

$$\int_0^c \bar{e}(y) dy \leq \int_0^c e(y) dy.$$

Da questa disuguaglianza e da (6) si ricava

$$\int_0^c e(y) dy = \int_0^c \bar{e}(y) dy$$

e quindi anche

$$(7) \quad \int_a^{\bar{b}} f(x) dx = \int_0^c \bar{e}(y) dy.$$

Si ha così il

**TEOREMA.** *Se  $f(x)$  è una funzione limitata e  $> 0$  in  $(a, b)$ ,  $a < b$ , se  $e(y)$  è la misura esterna del gruppo dei punti di  $(a, b)$  in cui  $f(x) > y$ , se  $\bar{e}(y)$  è la misura esterna del gruppo di punti di  $(a, b)$  in cui  $f(x) \geq y$ , se infine  $c$  è il limite superiore dei valori di  $f(x)$  si ha:*

$$\int_a^{\bar{b}} f(x) dx = \int_0^c e(y) dy = \int_0^c \bar{e}(y) dy.$$

2. Sia ancora  $f(x) > 0$  in  $(a, b)$ ,  $a < b$ , ed  $m$  indichi un numero positivo a piacere. Poniamo

$$f_1(x) = f(x) + m$$

ed indichiamo con  $e_1(y)$  la misura esterna del gruppo dei punti di  $(a, b)$  in cui  $f_1(x) > y$ . È evidentemente

$$e_1(y + m) = e(y),$$

e quindi

$$\int_m^{m+c} e_1(y) dy = \int_0^c e(y) dy = \int_a^{\overline{b}} f(x) dx.$$

Poi è

$$\int_a^{\overline{b}} f_1(x) dx = \int_0^{m+c} e_1(y) dy = \int_0^m e_1(y) dy + \int_m^{m+c} e_1(y) dy = \int_0^m e_1(y) dy + \int_a^{\overline{b}} f(x) dx.$$

Inoltre per  $y \leq m$  è  $e_1(y) = b - a$  e quindi

$$\int_0^m e_1(y) dy = m(b - a),$$

dunque

$$\int_a^{\overline{b}} f_1(x) dx = m(b - a) + \int_a^{\overline{b}} f(x) dx,$$

o anche

$$\int_a^{\overline{b}} [f(x) + m] dx = m(b - a) + \int_a^{\overline{b}} f(x) dx.$$

Da questa relazione si ricava come fa il LEVI <sup>(1)</sup> che se  $f(x)$  è una funzione limitata (non più necessariamente  $> 0$ ), qualunque sia il numero  $m$  tale che in tutto  $(a, b)$  sia  $f(x) + m > 0$ , l'espressione

$$\int_a^b [f(x) + m] dx - m(b - a)$$

ha sempre lo stesso valore.

Questo valore si chiama, secondo il LEVI, l'integrale superiore di  $f(x)$  da  $a$  a  $b$  e si rappresenta con

$$\int_a^{\overline{b}} f(x) dx.$$

Così resta definito l'integrale superiore di ogni funzione limitata.

(1) Loc. cit., pag. 66.

3. Sia ora  $f(x)$  una funzione limitata in  $(a, b)$  e sia  $m$  un numero maggiore del limite superiore di  $|f(x)|$  in  $(a, b)$ .

Poniamo

$$f_1(x) = f(x) + m.$$

Indichiamo con  $e_1(y)$  la misura esterna del gruppo dei punti di  $(a, b)$  in cui  $f_1(x) > y$ , con  $\bar{e}_1(y)$  quella del gruppo dei punti in cui  $f_1(x) \geq y$ , con  $e(y)$  quella del gruppo dei punti in cui  $f(x) > y$  e con  $\bar{e}(y)$  quella del gruppo dei punti in cui  $f(x) \geq y$ .

È evidentemente

$$e_1(y) = e(y - m)$$

$$\bar{e}_1(y) = \bar{e}(y - m).$$

È inoltre

$$\int_a^{\bar{b}} f_1(x) dx = \int_0^{2m} e_1(y) dy = \int_0^{2m} \bar{e}_1(y) dy,$$

perchè per  $y$  maggiore del limite superiore di  $f_1(x)$  è  $e_1(y) = \bar{e}_1(y) = 0$ .

Dunque

$$\int_a^{\bar{b}} f_1(x) dx = \int_0^{2m} e(y - m) dy = \int_0^{2m} \bar{e}(y - m) dy,$$

e, mutando  $y - m$  in  $y$ , si ha quindi

$$\int_a^{\bar{b}} f_1(x) dx = \int_{-m}^m e_1(y) dy = \int_{-m}^m e(y) dy.$$

È poi

$$\int_a^{\bar{b}} f(x) dx = \int_a^{\bar{b}} f_1(x) dx - m(b - a),$$

e perciò

$$\int_a^{\bar{b}} f(x) dx = \int_{-m}^m e(y) dy - m(b - a)$$



ed anche

$$\int_a^{\bar{b}} f(x) dx = \int_{-m}^m \bar{e}(y) dy - m(b-a) \quad (1).$$

4. Il LEVI chiama poi *integrale inferiore* di una funzione limitata  $f(x)$  in  $(a, b)$  e lo indica con

$$\int_a^b f(x) dx$$

il contrario dell'integrale superiore da  $a$  a  $b$  di  $-f(x)$ . Cosichè

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_a^{\bar{b}} [-f(x)] dx.$$

Allora se  $m$  è un numero maggiore del limite superiore di  $|f(x)|$  in  $(a, b)$  è

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_{-m}^m \bar{e}(y) dy + m(b-a) = m(b-a) - \int_{-m}^m \bar{e}(-y) dy$$

dove  $\bar{e}(y)$  indica la misura esterna del gruppo di punti in cui  $-f(x) \geq y$  cioè in cui  $f(x) \leq -y$ .

Indicando con  $i(y)$  la misura interna del gruppo dei punti in cui  $f(x) > y$  si ha allora

$$i(y) = (b-a) - \bar{e}(-y)$$

e quindi

$$\bar{e}(-y) = (b-a) - i(y)$$

---

(1) Questo risultato si potrebbe anche enunciare dicendo che

$$\int_a^{\bar{b}} f(x) dx = \int_{-m}^m g(y) dy = \int_{-m}^m \bar{g}(y) dy,$$

dove  $g(y)$  è la funzione che per  $y > 0$  indica la misura esterna del gruppo di punti in cui  $f(x) > y$  e per  $y < 0$  la contraria della misura interna del gruppo di punti in cui  $f(x) \leq y$ , e dove  $\bar{g}(y)$  è la funzione che per  $y > 0$  indica la misura esterna del gruppo di punti in cui  $f(x) \geq y$  e per  $y < 0$  la contraria della misura interna del gruppo dei punti in cui  $f(x) < y$ .

e perciò

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_{-m}^m [i(y) - (b-a)]dy + m(b-a) \\ &= \int_{-m}^m i(y)dy - 2m(b-a) + m(b-a) \\ &= \int_{-m}^m i(y)dy - m(b-a) \quad (1).\end{aligned}$$

5. Se  $f(x)$  è una funzione limitata in  $(a, b)$  e se

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

si dice col LEVI che  $f(x)$  è *integrabile* in  $(a, b)$ , e il valore comune dei precedenti integrali si chiama *integrale* di  $f(x)$  da  $a$  a  $b$ .

Allora se  $f(x)$  è integrabile è

$$\int_{-m}^m e(y)dy = \int_{-m}^m i(y)dy,$$

dove  $m$  indica un qualunque numero maggiore del limite superiore di  $|f(x)|$  ed  $e(y)$  ed  $i(y)$  hanno lo stesso significato che nei n.° 3 e 4.

Evidentemente per ogni  $y$  è

$$e(y) - i(y) \geq 0.$$

Dico che è sempre

$$e(y) - i(y) = 0$$

ossia che  $f(x)$  è misurabile (2).

(1) Questo risultato può essere anche enunciato dicendo che

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-m}^m \gamma(y)dy,$$

dove  $\gamma(y)$  è la funzione che per  $y > 0$  indica la misura interna del gruppo dei punti in cui  $f(x) > y$  e per  $y \leq 0$  la contraria della misura esterna del gruppo dei punti in cui  $f(x) \leq y$ .

(2) Vedi LEBESGUE, loc. cit.

Infatti, poichè

$$\int_{-m}^m [e(y) - i(y)] dy = 0 \quad \text{ed} \quad e(y) - i(y) \geq 0,$$

non può esistere un segmento in cui sia sempre

$$e(y) - i(y) > 0,$$

e quindi, qualunque sia  $y$ , si può trovare una successione decrescente

$$y_1, y_2, y_3, \dots$$

avente per limite  $y$  e tale che per ogni  $n$  sia

$$e(y_n) - i(y_n) = 0$$

e tale quindi che sia misurabile il gruppo  $G_n$  dei punti in cui  $f(x) > y_n$ .

Il gruppo  $G$  dei punti in cui  $f(x) > y$  è l'insieme dei punti appartenenti a qualche  $G_n$  e quindi deve essere misurabile.

Si conclude che, qualunque sia  $y$ , il gruppo  $G$  dei punti in cui  $f(x) > y$  è misurabile e che quindi la funzione  $f(x)$  è misurabile. c. d. d.



# Ricerche intorno alla curva dei redditi

di LUIGI AMOROSO, a Napoli

---

SOMMARIO. — I. La trottola sociale. - II. La forma della curva dei redditi. - III. Il rapporto di concentrazione. - IV. Studio analitico della funzione  $K$ . - V. Interpolazione della curva nel caso in cui sia applicabile al metodo dei momenti. - VI. Caso del reddito globale. - VII. L'indagine teorica.

## § I. La trottola sociale.

Sia  $x, y, z$  una terna di assi cartesiani ortogonali, in cui, per fissare le idee, supponiamo l'asse  $x$  sia verticale, il piano  $yz$  sia l'orizzonte. E sia la superficie rotonda

$$\sqrt{y^2 + z^2} = \varphi(x).$$

Sull'asse verticale  $x$  misuriamo, a partire da una data origine e con una data unità di misura, il reddito e supponiamo che se  $x, y, z$  è un punto della superficie, il prodotto

$$\sqrt{y^2 + z^2} dx$$

misuri, in un determinato gruppo sociale, il numero dei redditi compresi tra  $x$  ed  $x + dx$ .

Diremo allora che quella superficie è, per il gruppo considerato, la *superficie dei redditi* ed ogni sua curva meridiana è la *curva dei redditi*.

In *Economia Politica* è stata da tempo studiata la forma di questa superficie. J. B. SAY, per divinazione, più che in base ad un qualsiasi dato sperimentale, parlò per il primo di una *piramide sociale*. Di mano in mano pertanto che le statistiche dei redditi divenivano più copiose e più precise, si chiariva sempre più il fatto che, avvicinandosi al piano orizzontale, la superficie dei redditi diverge, *il più delle volte*, dalla forma piramidale. Successive sezioni eseguite con piano orizzontale a quota sempre più bassa non danno luogo a cerchi di area continuamente maggiore, ma a cerchi la cui area va crescendo fino ad un massimo (*cerchio equatoriale*), poi diminuisce fino a ridursi ad un minimo in un piano orizzontale, *base* della superficie, che non

coincide coll'orizzontale, ma ha sopra questo una quota positiva più o meno elevata. La qual cosa esprime, in concreto, il fatto di esperienza quotidiana, che il reddito più frequente (*reddito normale* o *reddito modello*) è vicino al reddito minimo, ma non è il reddito minimo.

Questo (*il minimo*), corrispondente allo stretto necessario per non morire, è goduto da un numero limitato di redditeri.

La superficie dei redditi non è quindi in generale una piramide, ma ha piuttosto la forma di un *fiasco* o di una *trottola*.

È noto che il PARETO per la funzione  $\varphi(x)$  ha proposto, *in prima approssimazione*, una espressione del tipo

$$\varphi(x) = Ax^{p-1}$$

in cui  $x$  varia per valori positivi;  $A$ ,  $p$  sono due costanti di cui la prima positiva, la seconda negativa compresa tra 0 ed 1. Ma, come è immediatamente evidente, una equazione così fatta è atta a rappresentare compiutamente la superficie dei redditi, quando ha forma di piramide; quando ha forma di trottola, può rappresentarne solo il mantello superiore, nella sua parte degradante, al di là del piano equatoriale. E ciò perchè, essendo  $A > 0$ ,  $0 < p < 1$ , la derivata  $\varphi'(x) = (p-1)Ax^{p-2}$  è sempre negativa.

Per ottenere una equazione, che possa rappresentare, in ogni caso, la superficie completa, propongo per la funzione  $\varphi(x)$  la espressione:

$$\varphi(x) = ce^{-\gamma(x-h)^s} (x-h)^{\frac{p-s}{s}}$$

In essa:  $x$  varia nel campo  $h < x < \infty$ ;  $c$ ,  $h$ ,  $\gamma$ ,  $p$  sono costanti essenzialmente positive;  $s$  è costante che può essere positiva o negativa, non nulla, tale peraltro, in ogni caso, che sia positiva la quantità  $p+s$ ; infine, ove le potenze ammettono due determinazioni reali diverse, *devesi sempre scegliere la positiva*. La corrispondente curva dei redditi, che si ottiene ponendo  $x=0$  nell'equazione della superficie è pertanto

$$(1) \quad y = ce^{-\gamma(x-h)^s} (x-h)^{\frac{p-s}{s}},$$

e può scriversi anche

$$(2) \quad \log y = \alpha + \beta \log(x-h) - \gamma(x-h)^s,$$

avendo posto

$$\alpha = \log c, \quad \beta = \frac{p-s}{s}, \quad \epsilon = \frac{1}{s}.$$

Questa curva non coincide con nessuna delle curve pearsoniane, ma comprende come casi particolare i tipi III e V, cui si riduce rispettivamente per  $s = +1$  e per  $s = -1$ .

Com'è noto, la equazione corrispondente al tipo terzo ( $s = +1$ ) era stata suggerita, *in seconda approssimazione*, dallo stesso PARETO. Recentemente il CANTELLI ha mostrato come essa possa farsi discendere da principî teorici di calcolo delle probabilità.

Modificando alquanto le ipotesi del CANTELLI, il VINCI ha dedotto dagli stessi principî, la equazione corrispondente al tipo V, per cui è  $s = -1$ . Sarebbe facile, in generale, dedurre analogamente la equazione (2).

Parmi che la curva (1) bene si adatti a rappresentare le distribuzioni dei redditeri note dalla Statistica.

Tale mio convincimento si basa sopra elementi sintetici ed analitici. Sintetici in quanto (come sarà visto al § 2) la curva (1) assume per diversi valori dei parametri, proprio la forma del meridiano di una superficie rotonda che ora ha il mantello di piramide, ora quello di una trottola. La base analitica poi (§ 5 e seguente) consiste nei risultati di interpolazioni, mediante le quali si rappresentano, con notevole esattezza, determinate seriazioni di redditi, quali sono date dalle statistiche.

La curva (1) contiene cinque parametri indipendenti. È logico pertanto pensare che per essi possano essere espressi cinque degli elementi caratteristici della distribuzione, quali per es. il reddito minimo, il medio, il numero totale dei redditi (*popolazione totale*), la concentrazione dei redditeri e quella dei redditi. Questi elementi possono allora essere considerati indipendenti. Ogni altro si esprime per essi. Possono dirsi pertanto *le costanti fondamentali della curva dei redditi*.

Tutte le proprietà che caratterizzano una determinata distribuzione possono leggersi attraverso le costanti fondamentali. Ogni variazione di esse definisce una *deformazione* della trottola (o piramide) sociale, ed esprime una variazione della consistenza numerica e finanziaria delle varie classi. Dà luogo a fenomeni, che sono compresi sotto i nomi generici di *circolazione delle aristocrazie*, *movimento dei redditi*. Lo studio sistematico di tutti questi movimenti costituisce la indagine teoretica, di cui al § 7.

La presente Memoria deve appunto considerarsi come preliminare a questa indagine, che il tempo e le forze non mi consentono oggi di compiere, ma che spero essere prima o poi ripresa da altri o da me stesso.

## § II. La forma della curva dei redditi.

Sia dunque la curva (1) definita per  $x > h$ , il che porta, per i segni delle costanti sopra indicati,  $y > 0$ .

L'origine delle coordinate nel piano  $x, y$  dicesi *polo* della distribuzione o della curva; la unità di misura, segnata sull'asse  $x$ , il *metro dei redditi*; quella sull'asse  $y$  il *metro della popolazione*.

L'intervallo infinito  $x > h$ , sull'asse  $x$  costituisce il *campo della distribuzione*.

Il punto  $x = h$  è l'estremo sinistro di questo campo. È pertanto  $h$  l'estremo inferiore dei redditi. Può dirsi impropriamente il reddito minimo. Impropriamente, in quanto il reddito  $x = h$  non è generalmente raggiunto, il valore di  $y$  che risulta da (1) non essendo, in generale, per  $x = h$ , finito e diverso da 0. Si raggiunge pertanto ogni valore  $x > h$ , vicino ad  $h$  tanto, quanto si vuole.

Diciamo  $n$  la popolazione totale,  $m$  il reddito medio del gruppo considerato. È evidentemente

$$n = \int_h^{\infty} y dx, \quad m = \frac{1}{n} \int_h^{\infty} xy dx.$$

Da (1) si ha

$$n = c \int_h^{\infty} e^{-\gamma(x-h)^{\frac{1}{s}} (x-h)^{\frac{p-s}{s}} dx.$$

Posto  $x - h = t^s$ , la quantità sotto il segno diventa

$$s e^{-\gamma t} t^{p-1} dt,$$

mentre i limiti inferiore e superiore d'integrazione sono rispettivamente 0 ed  $\infty$  per  $s > 0$ , ed  $\infty$  e 0 per  $s < 0$ . Segue

$$n = c |s| \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} t^{p-1} dt$$

il segno  $|s|$  indicando, come usualmente, valore assoluto di  $s$ . E quindi

$$(3) \quad n = \frac{c \cdot |s| \cdot \Gamma(p)}{\gamma^p}$$

$\Gamma(p)$  essendo, al solito, l'integrale euleriano di seconda specie.



Analogamente si ha:

$$(4) \quad m = h + \frac{\Gamma(p+s)}{\gamma^s \Gamma(p)}.$$

La (3) e la (4) esprimono la popolazione totale ed il reddito medio in funzione dei parametri che figurano nell'equazione della curva.

La (4) assume una forma particolarmente semplice, quando è  $s = \pm 1$ .

Per  $s = +1$ , diventa

$$(5) \quad m = h + \frac{p}{\gamma},$$

e per  $s = -1$

$$(6) \quad m = h + \frac{\gamma}{p-1}.$$

La differenza fra il reddito medio ed il minimo è quindi, inversamente proporzionale a  $\gamma$ , direttamente a  $p$  per  $s = +1$ ; inversamente proporzionale a  $p-1$ , direttamente a  $\gamma$ , per  $s = -1$ .

Cerchiamo i massimi e minimi locali della funzione  $y(x)$ .

Si ha:

$$\log y = \log c - \gamma(x-h)^{\frac{1}{s}} + \frac{p-s}{s} \log(x-h)$$

da cui

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{\gamma}{s} (x-h)^{\frac{1-s}{s}} + \frac{p-s}{s(x-h)},$$

od anche, essendo  $x > h$ ,  $y(x) > 0$

$$y'(x) = \left\{ -\gamma(x-h)^{\frac{1}{s}} + (p-s) \right\} \frac{y(x)}{s(x-h)}.$$

Il termine

$$(7) \quad -\gamma(x-h)^{\frac{1}{s}}$$

nell'interno del campo della distribuzione è sempre negativo, perchè  $\gamma$  è per ipotesi una quantità positiva,  $x$  è maggiore  $h$ , ed infine, ove vi sia scelta, della potenza va sempre presa la determinazione positiva.

Se quindi  $p-s$  è negativo o nullo, la quantità dentro la parentesi è negativa.

Ma se  $p-s$  è negativo o nullo, poichè  $p$  è, per ipotesi, sempre positivo, deve essere  $s$  positivo; quindi il termine fuori della parentesi nella precedente

espressione di  $y'$  è positivo; quindi  $y'$  è sempre negativo e la funzione  $y(x)$  è, per ogni  $x > h$ , decrescente.

Supponiamo invece che sia  $p - s$  positivo. In tal caso crescendo  $x$  da  $h$  ad  $\infty$ , il termine (7) decresce con continuità da 0 a  $-\infty$ , se  $s$  è positivo, e cresce invece, sempre con continuità, da  $-\infty$  a 0, se è negativo. Pertanto esiste sempre, nel campo  $h < x < \infty$  uno ed uno solo valore di  $x$  che annulla la quantità dentro la parentesi. Detto  $v$  questo valore, è

$$(8) \quad v = h + \left( \frac{p - s}{\gamma} \right)^s.$$

Tenuto conto che il termine fuori della parentesi conserva segno costante e precisamente il segno di  $s$ , si conclude che  $y'(x)$  è positivo per  $x$  compreso fra  $h$  e  $v$ , si annulla per  $x = v$ , è negativo per  $x > v$ . La funzione  $y(x)$  è crescente nell'intorno di  $x = h$ , raggiunge un massimo in (8), poi decresce.

Dunque, se i segni delle costanti che figurano nella equazione della curva (1) sono quelli indicati al parag. 1, la forma della curva, nell'interno del campo di distribuzione, e cioè per  $h < x < \infty$ , dipende essenzialmente dal segno della differenza  $p - s$ . Se questo segno è negativo, la curva è sempre decrescente e la superficie dei redditi ha quindi forma di *piramide*; se quel segno è positivo, è prima crescente, poi decrescente e la superficie dei redditi ha forma di *trottola*.

In ambo i casi l'asse della  $x$  (*asse dei redditi*) è un asintoto della curva.

L'asse della  $y$  (*asse dei redditieri*) è un asintoto solo per  $p < s$ ; per  $p = s$  è intersecato dalla curva in un punto di ordinata finita; per  $p > s$  è intersecato nel polo, cioè nell'origine delle coordinate.

Per  $p - s > 0$ , la (4) e la (8) consentono di paragonare l'ascissa del valore medio con quella del valore normale, o se si vuole, riferendoci alla trottola, la quota del piano orizzontale per il baricentro con quella del piano equatoriale. Si ha immediatamente

$$m - v = \frac{1}{\gamma^s} \left\{ \frac{\Gamma(p + s)}{\Gamma(p)} - (p - s)^s \right\}$$

da cui, essendo  $p - s > 0$ ,  $p > 0$ , deriva  $m - v > 0$ .

Ciò significa che il piano del barometro è sempre più elevato del piano equatoriale, cioè che il reddito medio è sempre superiore al normale. Questa evidente proprietà della legge di distribuzione della ricchezza è pertanto implicita nella forma scelta per la funzione  $y(x)$ .

Il grado di schiacciamento della trottola può essere misurato appunto dal rapporto delle distanze di questi due piani dal piano orizzontale passante per la base della superficie. In formole, da

$$\frac{v-h}{m-h} = \frac{(p-s)^s \Gamma(p)}{\Gamma(p+s)}.$$

Lo schiacciamento cresce col crescere di questo rapporto o di una qualunque funzione crescente di esso, quindi anche di

$$\Delta = (p-s) \sqrt[s]{\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+s)}}.$$

La stessa quantità misura, se è  $p-s < 0$ , lo sfilzamento della piramide, in quanto anche in questo caso la funzione  $y(x)$  ammette un massimo: solamente esso cade fuori del campo interno di distribuzione, cioè in un punto  $x < h$ , ad una distanza da  $x=h$  pari in valore assoluto a

$$\left(\frac{s-p}{\gamma}\right)^s.$$

E ciò significa che la piramide può idealmente esser prolungata, oltre il piano asintotico  $x=h$ , in modo che i due pezzi costituenti la superficie, al di qua ed al di là di quel piano, ricostruiscano idealmente nell'insieme la figura della trottola.

Il grado di schiacciamento della trottola o di sfilzamento della piramide, può in ambo i casi essere assunto come misura della dispersione delle ordinate intorno alla media, cioè della concentrazione dei redditieri.

Osserviamo che la concentrazione è tanto maggiore quanto minore è  $\Delta$ . D'altra parte, essendo  $p$  sempre positivo, il valore assoluto di  $\Delta$  è sempre inferiore ad 1, per  $p-s > 0$ , mentre può assumere ogni valore comunque grande per  $p-s < 0$ .

Giova per chiarezza e per simmetria cambiare il segno della funzione e ridurne il campo di variabilità anche per  $p-s < 0$ , e ciò si ottiene sostituendo a  $\Delta$  la espressione

$$(9) \quad q = 1 - 2^\Delta = 1 - 2^{(p-s) \sqrt[s]{\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+s)}}},$$

che ha segno opposto a  $\Delta$ , decresce al crescere di  $\Delta$ , variando da  $+1$  a  $-1$ .

La quantità  $q$  è quindi un indice, dal cui valore numerico si desume la forma della curva dei redditi, e la misura del grado di concentrazione dei redditieri. La diremo il *determinante* della curva.

Possiamo allora concludere:

Se il determinante  $q$  è positivo o nullo, la curva è decrescente in tutto il campo della distribuzione. Sono suoi asintoti entrambi gli assi coordinati, colla sola eccezione che l'asse  $y$  non è asintoto per  $q=0$ . La distribuzione statistica è zeronormale. Se è invece  $q$  positivo, la curva passa per l'origine delle coordinate, è dapprima crescente, poi raggiunge un massimo, infine decresce, l'ordinata tendendo a zero al crescente indefinito di  $x$ . La distribuzione statistica è uninormale (<sup>1</sup>).

In entrambi i casi il valore algebrico di  $q$  misura la concentrazione dei redditieri. Il campo di variabilità di  $q$  essendo compreso fra  $+1$  e  $-1$ , la concentrazione è minima per  $q=-1$ , intermedia per  $q=0$ , massima per  $q=1$ .

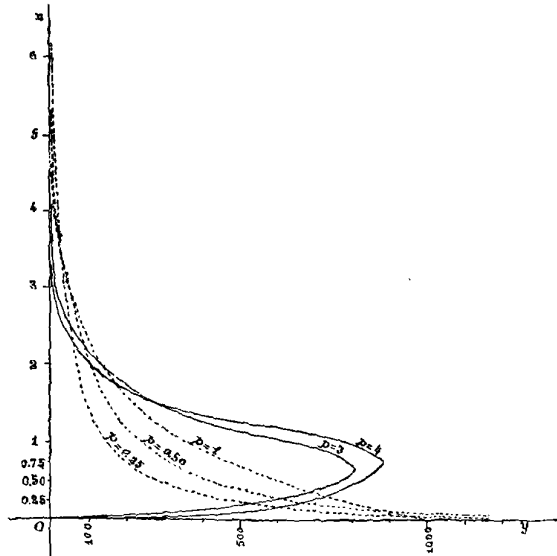


Fig. 1.

Nella figura sono disegnate le curve corrispondenti ai seguenti valori dei parametri

[1]	$c = 160,2$	$\gamma = p = 0,25$	$h = 0$	$s = 1$
[2]	$\gg = 313,3$	$\gg = 0,50$	$\gg$	$\gg$
[3]	$\gg = 1000$	$\gg = 1$	$\gg$	$\gg$
[4]	$\gg = 13500$	$\gg = 3$	$\gg$	$\gg$
[5]	$\gg = 42667$	$\gg = 4$	$\gg$	$\gg$

(<sup>1</sup>) Per il significato preciso di queste parole, cfr. la mia Nota: *Sulle curve di indifferenza nella teoria dei fenomeni collettivi di due argomenti*, pubblicata nel « Giornale degli Economisti » del Luglio 1917.

Esse corrispondono tutte alla stessa popolazione totale  $n$  ed alla stesso reddito medio  $m$ . Precisamente a

$$n = 1000 \quad m = 1,$$

e danno luogo, ordinatamente ai seguenti valori di  $q$

$$0,875 \quad 0,50 \quad 0 \quad -0,672 \quad -0,866.$$

Ecco i valori delle ordinate di queste curve

$x$	$y = c \cdot e^{-\gamma(x-h)^s} (x-h)^{\frac{p-s}{s}}$				
0.00	$\infty$	$\infty$	1000	0	0
.25	568	705	798	399	245
.50	290	439	620	753	573
.75	201	317	434	800	896
1.00	151	242	368	672	781
2.00	70	104	139	134	114
3.00	40	51	51	15	7
	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]

È  $m = 1$ , ossia l'unità di misura dei redditi è il reddito medio. La Tabella esprime quindi, nelle diverse ipotesi, il numero dei redditori aventi reddito rispettivamente pari ad un quarto, la metà, tre quarti del reddito medio, e così via.

Definiamo *classe ricca*, quella che ha reddito superiore a dieci volte il reddito medio; *classe media* quella che ha reddito compreso fra il reddito medio e dieci volte il reddito medio; *classe popolare* quella che ha reddito inferiore al reddito medio, ma superiore a  $\frac{1}{4}$  della differenza fra il reddito medio ed il minimo; *classe povera* quella che ha il reddito inferiore ad un quarto di questa differenza.

La composizione numerica di queste classi si determina immediatamente, quando è nota la espressione della funzione  $y(x)$ , calcolando gli integrali.

$$U_l = \int_{a_{l-1}}^{a_l} y(x) dx, \quad l = 1, 2, 3, 4$$

quando si ponga

$$a_0 = 0; \quad a_1 = \frac{m-h}{4}; \quad a_2 = m; \quad a_3 = 10m; \quad a_4 = \infty,$$

$m$  essendo sempre il reddito medio,  $h$  il reddito minimo. Ecco i valori di questi integrali relativamente alla prima, alla seconda ed alla quarta delle curve precedenti:

(classe ricca)	$U_1 =$	20	5	0
( > media)	$U_2 =$	260	336	423
( > popolare)	$U_3 =$	206	308	536
( > povera)	$U_4 =$	514	351	41
Totale . . . $\Sigma U_i =$				
		1000	1000	1000
		[1]	[2]	[4]

Tanto dalla figura, quanto dalla Tabella si vede come, per  $s = 1$ , al diminuire di valori dell'indice  $p$ , va prevalendo la consistenza numerica delle classi intermedie (*che hanno reddito vicino al medio*) rispetto a quella delle classi estreme, (*che hanno reddito molto inferiore o molto superiore al medio*). La prevalenza delle classi medie è già accentuata, quando  $q$  raggiunge il valore 0,50 per cui  $p$  è pari a  $\frac{1}{2}$ ; ed è forte per  $q$  vicino a 0,672, per cui  $p$  è 3. Il che significa che, a  $s = 1$ ,  $p > 0$  corrispondono distribuzioni, in cui quella consistenza media è già notevole, come, per esempio in redditi di lavoro.

### § III. Il rapporto di concentrazione.

La forma della curva dei redditi esprime la maggiore o minore concentrazione del numero dei redditi, (o, se si vuole, la concentrazione dei redditi) intorno al reddito medio, non la concentrazione dell'ammontare dei redditi, che dicesi anche semplicemente concentrazione dei redditi. L'asserto evidente allo statistico, diventa tale anche al matematico, ove si rifletta che, la concentrazione dei redditi varia al variare del polo della distribuzione (*origine delle coordinate*) e dal metro dei redditi (*unità di misura delle ascisse*), rispetto ai quali elementi la forma della curva è evidentemente invariante.

Ciò risulterà, del resto, direttamente dalle formule che definiscono il rapporto di concentrazione.

Conservando tutte le precedenti notazioni, introduciamo per questo, le funzioni

$$(10) \quad \Phi(x) = \frac{1}{n} \int_h^x y(t) dt, \quad \Psi(x) = \frac{1}{m \cdot n} \int_h^x ty(t) dt.$$

Poichè  $n$  esprime il numero totale dei redditi (*popolazione totale*),  $m$  il reddito medio,  $h$  il reddito minimo, la prima delle due funzioni,  $\Phi(x)$ , misurerà il rapporto fra il numero dei redditi uguali o minori ad  $x$  ed il totale; la seconda,  $\Psi(x)$ , misurerà l'analogo rapporto fra l'ammontare complessivo dei redditi uguali e minori ad  $x$  ed il reddito totale.

Variando  $x$  da 0 ad  $\infty$ ,  $\Phi(x)$ ,  $\Psi(x)$  variano, *sempre crescendo*, da 0 ad 1. Facendo corrispondere tra di loro valori di  $\Phi$  e di  $\Psi$ , corrispondenti allo stesso  $x$ , possiamo considerare una delle due quantità funzione dell'altra, per esempio  $\Psi$  funzione di  $\Phi$ .

Ma, come abbiamo indicato, è

$$0 \leq \Phi(x) \leq 1, \quad 0 \leq \Psi(x) \leq 1.$$

D'altra parte  $m$ , che è il valor medio di tutti i redditi, è evidentemente superiore alla media dei redditi inferiori ad  $x$ , il che porta

$$\int_h^x ty(t)dt < m \int_h^x y(t)dt$$

ossia

$$\Phi(x) > \Psi(x).$$

Segue da tutto ciò che nel piano cartesiano in cui è  $\Phi$  ascissa,  $\Psi$  ordinata, la indicata relazione fra queste due quantità dà luogo ad una linea  $l$ , che congiunge l'origine delle coordinate 0 col punto  $B$  di coordinate (1,1) la quale:

a) È tutta contenuta nel triangolo  $OAB$ , essendo  $A$  il punto di coordinate (1,0);

b) da ogni parallela agli assi coordinati è intersecata in un solo punto.

Quanto più la distribuzione dei redditi si avvicina all'uniformità, tanto più i singoli punti della linea  $l$  si avvicinano alla retta  $OB$ .

La retta  $OB$  fu detta da LORENZ *linea di equidistribuzione*; la linea  $l$  *linea di concentrazione*; l'area racchiusa fra la linea  $l$  e la retta  $OB$ , dal GINI <sup>(1)</sup>, *area di concentrazione*.

Il rapporto  $r$  dell'area di concentrazione all'area del triangolo rettilineo  $OAB$  fu assunto dallo stesso GINI come *misura del rapporto di concentrazione*.

(1) Cfr. GINI: *Sulla misura della concentrazione della variabilità dei caratteri*. Atti del R. Istituto Veneto, Anno LXXIII, Parte II, 1924.

Detta  $S$  la regione del triangolo  $OAB$  esterna all'area di concentrazione si ha evidentemente, l'area del triangolo  $OAB$  essendo  $\frac{1}{2}$ :

$$r = \frac{OAB - S}{OAB} = 1 - 2S.$$

E poichè  $S$  può variare da 0 ad  $\frac{1}{2}$ ,  $R$  varia tra 1 e 0.

Ma si ha

$$S = \int_0^1 \Psi d\Phi,$$

per cui, sostituendo:

$$(11) \quad r = 1 - 2S = 1 - \frac{2}{mn^2} \int_h^\infty y(t) dt \int_h^t \xi y(\xi) d\xi,$$

e l'integrazione impropria è soltanto apparente, in quanto da un certo valore di  $t$  in poi,  $y(t)$  è identicamente nulla.

Applicando all'integrale doppio che è al secondo membro la formula di inversione di DIRICHLET, ricordando che per definizione è

$$mn^2 = \int_h^\infty y(t) dt \int_h^\infty \xi y(\xi) d\xi,$$

posto infine

$$z(t) = \int_h^t y(\xi) d\xi$$

con che  $z(t)$  esprime il numero dei redditi uguali od inferiori a  $t$ , si raccoglie

$$\frac{1+r}{2} = \frac{1}{mn^2} \int_h^\infty t y(t) z(t) dt.$$

Questa formula, che coincide sostanzialmente con altra data dal GINI <sup>(1)</sup> si applica ordinariamente per il calcolo di  $r$ , quando sono noti empiricamente i valori di  $y(t)$ .

Passiamo a vedere quale forma essa assuma, quando in (11) si sostituisca, al posto di  $y(t)$ , la espressione definita da (1).

(1) È la formula (15) della citata memoria (loc. cit., pag. 1209).



Osserviamo per questo che la (11) si può scrivere

$$r = 1 - \frac{2h}{mn^2} \int_h^\infty y dx \int_h^x y dt - \frac{2}{mn^2} \int_h^\infty y dx \int_h^x (t-h)y dt,$$

e poichè è identicamente

$$\int_h^\infty y dx \int_h^x y dt = \int_h^\infty y dx \int_x^\infty y dt = \frac{n^2}{2},$$

la (11) si può pure scrivere

$$r = \frac{m-h}{m} - \frac{2}{mn^2} \int_h^\infty y(x) dx \int_h^x (t-h)y(t) dt.$$

Sostituito per  $y$  la (1)

$$y = ce^{-\gamma(x-h)^{\frac{1}{s}} (x-h)^{\frac{p-s}{s}}}$$

con immediate trasformazioni si ha, per  $s > 0$

$$r = \frac{m-h}{m} - \frac{2c^2s^2}{mn^2\gamma^{2p+s}} \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx \int_0^x e^{-t} t^{p+s-1} dt.$$

Ma da (3) e da (4),

$$\frac{c^2s^2}{n^2\gamma^{2p+s}} = \frac{1}{\gamma^s \{\Gamma(p)\}^2} = \frac{m-h}{\Gamma(p)\Gamma(p+s)},$$

onde, sostituendo,

$$(12) \quad r = \frac{m-h}{m} \{1 - 2H(p, s)\},$$

in cui si è posto

$$H(p, s) = \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(p+s)} \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx \int_0^x e^{-t} t^{p+s-1} dt.$$

Per  $s < 0$  sussistono le stesse formule, colla sola differenza che nella espressione di  $r$ , occorre al secondo membro, cambiare il segno, onde si ha

in generale

$$(13) \quad r = \pm \frac{m-h}{m} \{1 - 2H(p, s)\}$$

il segno positivo valendo per  $s > 0$ , il segno negativo per  $s < 0$ .

Queste formole esprimono il rapporto di concentrazione  $r$  per i parametri che figurano nell'equazione della curva dei redditi.

Con immediate trasformazioni si ha

$$\begin{aligned} H(p, s) &= 1 - \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(p+s)} \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx \int_x^\infty e^{-t} t^{p+s-1} dt \\ &= 1 - \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(p+s)} \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} \left\{ e^{-x} x^{p+s-1} + (p+s-1) \int_x^\infty e^{-t} t^{p+s-2} dt \right\} dx \\ &= H(p, s-1) - \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(p+s)} \int_0^\infty e^{-2x} x^{2p+s-2} dx, \end{aligned}$$

da cui

$$H(p, s) = H(p, s-1) - \frac{\Gamma(2p+s-1)}{2^{2p+s-1}\Gamma(p)\Gamma(p+s)}.$$

Ma è

$$H(p, 0) = \frac{1}{\{\Gamma(p)\}^2} \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx \int_0^x e^{-t} t^{p-1} dt = \frac{1}{2}.$$

La precedente formula ricorrente riduce quindi il calcolo numerico di  $H(p, s)$ , per ogni  $s$  intero, positivo o negativo, alle  $\Gamma$  euleriane.

Per  $s$  frazionario si interpola fra valori interi consecutivi.

Si ha inoltre

$$H(p, 1) = \frac{1}{2} - \frac{\Gamma(2p)}{2^{2p}\Gamma(p)\Gamma(p+1)},$$

e sostituendo in (12), per  $s = 1$ :

$$(14) \quad r = \frac{m-h}{m} K(p),$$

ove si è posto

$$(15) \quad K(p) = \frac{\Gamma(2p)}{2^{2p-1}\Gamma(p)\Gamma(p+1)}.$$

La (14) indica la forma semplice, che assume l'espressione del rapporto di concentrazione, per  $s = 1$  (ipotesi PARETO-CANTELLI).

Analogamente nella ipotesi del VINCI ( $s = -1$ ), si ha:

$$r = \frac{m - h}{m} \frac{\Gamma(2p - 1)}{2^{2p-1} [\Gamma(p)]^2}$$

Queste formule, e più in generale la (12), confermano quanto avevamo previsto circa la dipendenza della concentrazione del polo (*origine*) della distribuzione. Figurano invero nell'espressione analitica del rapporto  $r$ , tanto l'ascissa del reddito medio  $m$ , quanto quella del reddito minimo  $h$ .

Per  $s = 1$ ,  $h = 4$ ,  $m = 10$ ,  $p = 0,5$  si ha, per esempio

$$K\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{2}{\pi} = 0,6366$$

e quindi

$$r = 0,6 \cdot 0,6366 = 0,3820.$$

Esistono infinite quaderne di valori di  $s$ ,  $h$ ,  $m$ ,  $p$ , che danno luogo ad uno stesso valore del rapporto di concentrazione.

Per  $p = 1,5$  si ha, per esempio

$$K(1,5) = \frac{\Gamma(3)}{2^2 \Gamma(1,5) \Gamma(2,5)} = \frac{4}{3\pi} = 0,4244.$$

Tutti i valori di  $m$  e di  $h$  che verificano alla equazione

$$0,3820 = 0,4244 \frac{m - h}{m}$$

associati a  $p = 1,5$ ,  $s = 1$ , danno luogo, per esempio, allo stesso valore del rapporto di concentrazione. La precedente equazione si può scrivere  $10h = m$  e quindi è verificata, per esempio, dalla coppia  $m = 10$ ,  $h = 1$ ; ovvero da  $m = 12,50$ ,  $h = 1,25$ ; ecc.

Da  $h = 4$ ,  $m = 10$ ,  $p = 0,5$ ,  $s = 1$  si calcola

$$\gamma = \frac{p}{m - h} = 0,08333$$

e analogamente da  $h = 1$ ,  $m = 10$ ,  $p = 1,5$ ,  $s = 1$

$$\gamma = 0,16667.$$

Dunque le due curve

$$y = \frac{ce^{-0,08333(x-4)}}{\sqrt{x-4}}$$

$$y = ce^{-0,1687(x-1)} \sqrt{x-1},$$

che corrispondono a distribuzione profondamente diverse (basti osservare che la prima è zeronormale, la seconda uninormale) danno luogo allo stesso rapporto di concentrazione.

E ciò chiarisce ancora una volta da un terzo punto di vista, come il rapporto di concentrazione non serva a misurare la concentrazione dei redditi.

#### § IV. Studio analitico della funzione $K$ .

La funzione  $K$  gode di importanti proprietà analitiche che è prezzo dell'opera rilevare.

Da (15), moltiplicando numeratore e denominatore per  $2p$ , segue:

$$K(p) = \frac{1}{2^{2p}} \frac{\Gamma(2p+1)}{[\Gamma(p+1)]^2}.$$

Per  $p$  tendente a zero per valori positivi, il secondo membro tende ad 1. Porremo quindi, per conservare la continuità,  $K(0) = 1$ .

D'altra parte *per p molto grande*, applicando la formula di STIRLING, con immediate riduzioni, si ha, *approssimativamente*

$$(16) \quad K(p) = \frac{1}{\sqrt{\pi(p-1)}}.$$

Al limite per  $p = \infty$ ,  $K = 0$ .

*Dunque, variando p da 0 ad  $\infty$ , K varia da 1 a 0.*

Sempre da (15), con calcoli immediati:

$$(17) \quad \frac{K(p+1)}{K(p)} = \frac{2p+1}{2p+2}$$

ed in generale

$$(18) \quad \frac{K(p+q)}{K(p)} = \frac{2p+1}{2p+2} \frac{2p+3}{2p+4} \cdots \frac{2(p+q)-1}{2(p+q)}$$

formula valida per  $p, q$  interi.

Posto in generale:

$$\begin{aligned} \Delta K(p) &= K(p+1) - K(p) \\ \Delta^2 K(p) &= \Delta K(p+1) - \Delta K(p) \\ \Delta^3 K(p) &= \Delta^2 K(p+1) - \Delta^2 K(p) \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

ecc., da (17) si ha

$$(2p+2)\Delta K(p) + K(p) = 0$$

da cui segue:

$$\begin{aligned} (2p+4)\Delta^2 K(p) + 3\Delta K(p) &= 0 \\ (2p+6)\Delta^3 K(p) + 5\Delta^2 K(p) &= 0 \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

ecc., e queste formule si scrivono

$$\begin{aligned} \Delta K(p) &= \frac{-1}{2p+2} K(p) \\ \Delta^2 K(p) &= \frac{1 \cdot 3}{(2p+2)(2p+4)} K(p) \\ \Delta^3 K(p) &= \frac{-1 \cdot 3 \cdot 5}{(2p+2)(2p+4)(2p+6)} K(p) \end{aligned}$$

ecc. Sostituendo allora nella formula di NEWTON, si ha

$$\begin{aligned} (19) \quad K(p+\rho) &= K(p) \left\{ 1 - \binom{\rho}{1} \frac{1}{2p+2} + \binom{\rho}{2} \frac{1 \cdot 3}{(2p+2)(2p+4)} - \right. \\ &\quad \left. - \binom{\rho}{3} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2p+2)(2p+4)(2p+6)} + \dots \right\} \\ &= K(p) \left\{ 1 + (-1)^s \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{2^s} \binom{\rho}{s} \frac{1 \cdot 3 \dots (2s-1)}{(p+1)(p+2) \dots (p+s)} \right\}. \end{aligned}$$

In particolare per  $p=0$

$$(20) \quad K(\rho) = 1 - \frac{1}{2} \binom{\rho}{1} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \binom{\rho}{2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \binom{\rho}{3} + \dots$$

Per  $\rho$  intero positivo, le serie al secondo membro si riducono ad espressioni con un numero finito di termini.

In generale, il termine

$$\frac{1}{2^s} \frac{1 \cdot 3 \dots (2s - 1)}{(p + 1)(p + 2) \dots (p + s)}$$

è, per ogni  $p \geq 0$ , positivo o minore dell'unità.

D'altra parte la serie binomiale  $\sum_s \binom{\rho}{s} x^s$ , per  $\rho \geq 0$  converge assolutamente <sup>(1)</sup> per ogni  $|x| < 1$  ed anche per  $x = 1$ . Se ne conclude che la serie (19) converge assolutamente ed uniformemente per  $\rho \geq 0$ ,  $p \geq 0$ , e quindi rappresenta effettivamente, per ogni  $\rho \geq 0$ , la funzione  $K(p + \rho)$ .

Se  $\rho$  è una frazione propria ( $0 < \rho < 1$ ), i successivi coefficienti binomiali

$$\binom{\rho}{1}, \binom{\rho}{2}, \binom{\rho}{3}, \dots$$

hanno segni alternati, onde tutti i termini entro la parentesi (19) hanno lo stesso segno negativo.

Se ne deduce anzitutto la disuguaglianza

$$K(p + \rho) < K(p),$$

conseguenza immediata della (18) per  $\rho$ ,  $p$  interi; valida, qualunque sieno  $\rho$ ,  $p$ , purchè positivi.

Il che significa che la *funzione*  $K(p)$  è *decescente in tutto il campo*  $0 \leq p \leq \infty$ .

Si deduce poi che arrestando la serie ad un qualsiasi termine, si ottiene per la somma un valore approssimato per eccesso.

Ma la serie binomiale, converge ancora, per quanto non assolutamente anche (cfr. *loco citato*) per  $x = 1$ ,  $-1 < \rho < 0$ . La (19) converge quindi anche se  $\rho$  è negativo, purchè in valore assoluto minore di 1.

Quindi, se in (19) possiamo  $p + 1$  al posto di  $p$ ,  $\rho - 1$  al posto di  $\rho$ , essendo sempre  $0 < \rho < 1$ , lo sviluppo resta convergente, per quanto non assolutamente convergente, e rappresenta sempre  $K(p + \rho)$ .

<sup>(1)</sup> Cfr. A. CAPELLI, *Istituzioni di analisi algebrica*. Quarta edizione, Napoli, Pellerano, 1909, pag. 444.

Si ha, pertanto, la formula

$$\begin{aligned}
 K(p+\rho) &= K(p+1) \left\{ 1 - \binom{\rho-1}{1} \frac{1}{2p+4} + \right. \\
 (21) \quad &+ \binom{\rho-1}{2} \frac{1 \cdot 3}{(2p+4)(2p+6)} - \binom{\rho-1}{3} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2p+4)(2p+6)(2p+8)} + \dots \left. \right\} \\
 &= K(p+1) \left\{ 1 - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{2^s} \binom{\rho-1}{s} \frac{1 \cdot 3 \dots (2s-1)}{(p+2)(p+3) \dots (p+s+1)} \right\}
 \end{aligned}$$

valida per  $p \geq 1$ ,  $0 < \rho < 1$ .

E poichè i termini di questa serie sono tutti positivi, ovunque se ne arresti lo sviluppo, si ottiene, per la somma, un valore  $K(p+\rho)$  approssimato per difetto.

Passiamo al calcolo numerico di  $K(p)$ .

Abbiamo già calcolato  $K(0) = 1$ . La (15) ci dà immediatamente

$$K(1) = \frac{1}{2}, \quad K(2) = \frac{3}{8}, \quad K(3) = \frac{5}{16}, \dots$$

ecc. La (17) consente eseguire rapidamente il calcolo per i primi valori dell'argomento.

Ecco per i primi dieci:

$p=0$	.....	$K(p) = 1,000\ 000\ 000$
1	.....	» = 0,500 000 000
2	.....	» = 0,375 000 000
3	.....	» = 0,312 500 000
4	.....	» = 0,273 437 500
5	.....	» = 0,246 093 750
6	.....	» = 0,225 585 938
7	.....	» = 0,209 472 656
8	.....	» = 0,196 380 796
9	.....	» = 0,185 470 582
10	.....	» = 0,176 197 054

Come abbiamo dimostrato  $K$  è per  $p \geq 0$ , sempre decrescente. Questa decrescenza è rapida per i primi valori dell'argomento, sicchè,  $K$  essendo compreso fra 1 e 0, già per  $p=1$ ,  $K$  ha percorso la metà del suo campo

di variabilità. Ne ha percorso oltre  $\frac{2}{3}$ , per  $p=3$ ,  $\frac{3}{4}$ , per  $p=5$ ,  $\frac{4}{5}$ , per  $p=8$ , ecc.

Calcoliamo, senza passare attraverso i valori intermedi,  $K(20)$ .

Si applica la (18) ponendo ivi  $p=10$ ,  $q=10$ .

Si raccoglie

$$\frac{K(20)}{K(10)} = \frac{21}{22} \cdot \frac{23}{24} \cdots \frac{39}{40}$$

e sostituendo per  $K(10)$  il valore indicato nella precedente tabella, eseguiti i calcoli

$$K(20) = 0,128585334.$$

L'applicazione della (16) avrebbe fornito un valore approssimato di  $K(20)$

$$\frac{1}{\sqrt{19\pi}} = 0,1294$$

con approssimazione inferiore ad un millesimo.

Si applica direttamente la (15), quando l'argomento è un numero decimale.

Per  $p=3,584$ , per esempio, essa fornisce

$$K = \frac{1}{2^{6,168}} \frac{\Gamma(6,168)}{\Gamma(3,584)\Gamma(4,584)}$$

Eseguendo il calcolo numerico con quattro decimali

$$\begin{array}{r} \log \Gamma(6,168) = 2,9952 \\ \log \Gamma(3,584) = \dots\dots\dots 0,5624 \\ \log \Gamma(4,584) = \dots\dots\dots 1,1168 \\ 6,168 \log 2 = \dots\dots\dots 1,8566 \\ \hline \phantom{\log \Gamma(6,168)} \phantom{=} 2,9952 \phantom{=} 3,5358 \\ \phantom{\log \Gamma(6,168)} \phantom{=} 3,5358 \\ \hline \log K = 9,4594 \\ K = 0,2880 \end{array}$$

L'applicazione delle formule (19) e (21) conduce con eguale rapidità allo stesso risultato, con vantaggio di far conoscere due valori di  $K$  rispettivamente approssimati per eccesso e per difetto.

Per  $p=3$ , arrestando la serie al terzo termine, la (19) dà

$$K(3 + \rho) < 0,3125 - \frac{5}{128} \left\{ \rho + \frac{3\rho(1-\rho)}{20} + \frac{\rho(1-\rho)(2-\rho)}{48} \right\}$$



e la (21) analogamente

$$K(3 + \rho) > 0,2734 + \frac{7}{256} \left\{ (1 - \rho) + \frac{(1 - \rho)(2 - \rho)}{8} + \frac{5(1 - \rho)(2 - \rho)(3 - \rho)}{336} \right\}.$$

Per  $\rho = 0,584$  le due formule danno

$$0,2874 < K < 0,2884.$$

Il valore  $K = 0,288$  è quindi approssimato al vero per meno di un millesimo.

### § V. Interpolazione della curva nel caso in cui sia applicabile al metodo dei momenti.

Passiamo finalmente a vedere, come la curva (1) effettivamente sia atta a rappresentare le distribuzioni dei redditi, quali risultano dalla esperienza.

Supponiamo dunque nota statisticamente una certa distribuzione. Ciò significa supporre noti i valori degli integrali

$$(22) \quad U_l = \int_{a_{l-1}}^{a_l} y(x) dx, \quad l = 1, 2, \dots, \omega$$

$a_0, a_1, \dots, a_\omega$  essendo una successione crescente, i cui termini sono tutti compresi nel campo della distribuzione.

Si ha evidentemente

$$U_1 + U_2 + \dots + U_\omega = n,$$

sempre essendo  $n$  la popolazione totale. In generale, il numero  $\omega$  è superiore a cinque, per cui sostituendo nelle precedenti espressioni al posto di  $y$  la (1) si ottiene un sistema, in cui il numero delle equazioni indipendenti è superiore a quello delle incognite, e non può quindi esser risoluto, se non approssimativamente, per interpolazione.

Quando la successione  $a_0, a_1, \dots, a_\omega$  costituisce una progressione aritmetica, si applica con vantaggio il metodo dei momenti del PEARSON.

In questo caso particolare nella formula generale (1) può porsi  $s = 1$  (*ipotesi del CANTELLI*) ovvero  $s = -1$  (*ipotesi del VINCI*). Allora il numero dei parametri incogniti si riduce a quattro e l'equazione della curva interpolatrice diventa

$$(23) \quad y = ce^{-\gamma(x-h)}(x-h)^{p-1}$$

nel primo caso ( $s = 1$ );

$$(24) \quad y = ce^{-\frac{\gamma}{x-h}}(x-h)^{-(p+1)}$$

nel secondo ( $s = -1$ ). Le due curve, come abbiamo già osservato, sono pearsoniane, e corrispondono precisamente la prima al tipo III, la seconda al tipo V.

La determinazione delle incognite si riduce allora, come noto, alla soluzione dei due problemi seguenti:

a) Calcolo *dei momenti* della distribuzione, assunto come polo l'origine della variabile  $x$  nella equazione interpolatrice; come metro della  $y$  l'intera popolazione.

Cioè calcolo delle quantità

$$m_l = \frac{1}{n} \int_h^{\infty} t^l y(t) dt$$

per  $l = 0, 1, 2, 3$  essendo sempre  $n$  la popolazione totale.

b) Espressione dei parametri incogniti per i successivi momenti  $m_0, m_1, m_2, m_3$ .

Il problema b) è puramente algebrico. Limitandoci a considerare il caso  $s = 1$ , eccone, modificata alquanto nella forma, la soluzione data dal PEARSON (<sup>1</sup>).

Da (23) con immediate riduzioni, per  $l \geq 0$  si ha

$$\int_h^{\infty} (t - h)^l y(t) dt = c \frac{\Gamma(p + l)}{\gamma^{p+l}}$$

e quindi

$$\frac{\gamma^l}{n} \int_h^{\infty} (t - h)^l y(t) dt = \frac{\Gamma(p + l)}{\Gamma(p)}.$$

Ne deriva allora per  $l = 1, 2, 3$

$$\gamma(m_1 - h) = p$$

$$\gamma^2(m_2 - 2hm_1 + h^2) = p(p + 1)$$

$$\gamma^3(m_3 - 3hm_2 + 3h^2m_1 - h^3) = p(p + 1)(p + 2),$$

sistema di tre equazioni nelle tre incognite  $\gamma, k, p$ .

Giova, per risolverlo, sostituire alla incognita  $h$  la  $k = m_1 - h$ . Posto

$$(25) \quad \begin{cases} n_1 = m_1 \\ n_2 = m_2 - m_1^2 \\ n_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3, \end{cases}$$

(<sup>1</sup>) Una soluzione del tutto analoga si ha per  $s = -1$ . Cfr. p. e. *Elderton Frequency curves and correlation*. (London, Layton).

il sistema si riduce a

$$\begin{aligned} k &= p \\ \gamma^2(n_2 + k^2) &= p(p + 1) \\ \gamma^3(n_3 + 3kn_2 + k^3) &= p(p + 1)(p + 2), \end{aligned}$$

ovvero a

$$p = \gamma k = \gamma^2 n_2 = \frac{1}{2} \gamma^3 n_3$$

ed ammette quindi la unica soluzione

$$\gamma = \frac{2n_2}{n_3}, \quad p = \gamma^2 n_2, \quad k = \frac{p}{\gamma}.$$

Resta da determinare  $c$ ; ma essa si esprime immediatamente, come già sappiamo, in funzione di  $n$ ,  $\gamma$ ,  $p$  mediante la (3), che in questo caso si riduce a

$$n = c \frac{\Gamma(p)}{\gamma^p}.$$

Abbiamo quindi le formule risolutive

$$(26) \quad \gamma = \frac{2n_2}{n_3}, \quad p = \gamma^2 n_2, \quad k = \frac{p}{\gamma}, \quad c = \frac{n\gamma^p}{\Gamma(p)}.$$

In esse le quantità  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  sono espresse da (25) in funzione dei tre momenti  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ .

Resta a vedere come possano calcolarsi questi momenti, cioè come possa risolversi il problema *a*).

Il metodo più spiccio, per questo calcolo, è quello di eseguire un cangiamento di variabile in modo da ottenere che i punti medi dei singoli intervalli  $a_0 a_1$ ,  $a_1 a_2, \dots$ ,  $a_{\omega-1} a_\omega$  costituiscano la successione dei numeri naturali 1, 2, ...,  $\omega$ .

Posto invero

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{ll} V_1(x) = \sum_{\rho=x}^{\omega} U_\rho & S_1 = \frac{1}{n} \sum_{x=1}^{\omega} V_1(x) \\ V_2(x) = \sum_{\rho=x}^{\omega} V_1(\rho) & S_2 = \frac{1}{n} \sum_{x=1}^{\omega} V_2(x) \\ V_3(x) = \sum_{\rho=x}^{\omega} V_2(\rho) & S_3 = \frac{1}{n} \sum_{x=1}^{\omega} V_3(x) \end{array} \right.$$

ecc., con che  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ , sono le successive somme della funzione

$$\frac{1}{n} y(x),$$

si ha

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{n} \sum_{\rho=1}^n \rho U_\rho \\ S_2 &= \frac{1}{2n} \sum_{\rho=1}^n (\rho + \rho^2) U_\rho \\ S_3 &= \frac{1}{6n} \sum_{\rho=1}^n (2\rho + 3\rho^2 + \rho^3) U_\rho \end{aligned}$$

ecc., da cui deriva

$$(28) \quad \begin{cases} m_1 = S_1 \\ m_2 = 2S_2 - S_1 \\ m_3 = 6S_3 - 6S_2 + S_1 \end{cases}$$

ecc. e queste formule risolvono il problema *A*).

È utile esprimere direttamente con formule ricorrenti le  $n_3$  per le  $S_r$ .

Ci si riesce immediatamente sostituendo questi valori in (25). Si raccoglie

$$(29) \quad \begin{cases} n_1 = S_1 \\ n_2 = S_2 - n_1(1 + n_1) \\ n_3 = 6S_3 - 3n_2(1 + n_1) - n_1(1 + n_1)(2 + n_1). \end{cases}$$

Riassumendo, *nella ipotesi che la successione dei limiti delle singole classi rilevate statisticamente costituisca una progressione aritmetica*, per applicare il metodo pearsonianò dei momenti all'interpolazione delle equazioni (1), occorre:

1°) Fissare l'origine e la unità di misura delle  $x$  in modo che i punti medi dei singoli intervalli  $a_0a_1, a_1a_2, a_2a_3, \dots, a_{\omega-1}a_\omega$  siano i numeri interi 1, 2, ...,  $\omega$ ; assumere per unità di misura delle  $y$  la popolazione totale.

2°) Applicare successivamente le formule (27) per il calcolo di

$$\begin{array}{ccc} V_1(x), & V_2(x), & V_3(x); \\ S_1, & S_2, & S_3; \end{array}$$

(29) per il calcolo di

$$n_1, \quad n_2, \quad n_3;$$

(26) per il calcolo di

$$\gamma, \quad p, \quad h, \quad c.$$

Le formule (28) e quindi le (29) che ne derivano sono approssimate in quanto in esse si identificano i momenti  $m_1, m_2, m_3$ , che sono degli integrali,

colle somme finite

$$\sum_{\rho=1}^{\omega} \rho U_{\rho}, \quad \sum_{\rho=1}^{\omega} \rho^2 U_{\rho}, \quad \sum_{\rho=1}^{\omega} \rho^3 U_{\rho}.$$

Come ha dimostrato lo SHEPPARD <sup>(1)</sup>, si migliora tale approssimazione, togliendo ad  $n_2$  il valore fisso 1:12.

Applichiamo le formule indicate alla distribuzione rappresentata dalle colonne (2) e (3) della allegata tav. I, che si riferisce al reddito mensile di lavoro (per stipendi, paghe, indennità, ecc.) di una particolare classe speciale, quella dei ferrovieri.

Essa presenta il particolare vantaggio di essere completa, a differenza di quelle che derivano dalla applicazione della imposta sul reddito, le quali non comprendono in generale i redditi inferiori al minimo imponibile.

È poi rigorosamente esatta, la rilevazione essendo stata eseguita direttamente sui ruoli paga di un mese determinato <sup>(2)</sup>.

Eseguiamo ordinatamente le operazioni indicate, facendo sempre riferimento alla tav. I. Come prima cosa occorre fissare la variabile  $x$ . Detto  $t$  il reddito in lire quale è indicato nella colonna (2), deve essere  $x = 1$  per  $t = 550$ ;  $x = 2$  per  $t = 650$ ; ecc., onde

$$(30) \quad x = \frac{t - 450}{100}.$$

Dalla colonna (3) della tavola, la quale contiene i valori di  $V_r$ , si calcolano, applicando le formule (28), le cifre delle colonne (4), (5), (6), che contengono rispettivamente i valori di  $V_1(x)$ ,  $V_2(x)$ ,  $V_3(x)$ .

I totali di queste colonne danno, sempre secondo (28), i valori di  $n S_1 = 866.378$ ,  $n S_2 = 3.026.039$ ,  $n S_3 = 9.186.989$ . E successivamente applicando le (29), essendo  $n = 186.021$ , tenuto conto della correzione di SHEPPARD

$$n_1 = 4,6574 \quad n_2 = 6,1021 \quad n_3 = 15,9246$$

e finalmente applicando le (26)

$$\gamma = 0,7664, \quad p = 3,5839, \quad h = -0,0190, \quad c = 19650.$$

L'equazione della curva considerata è quindi

$$y = 19650e^{-0,7664(x+0,019)}(x+0,019)^{3,5839}$$

<sup>(1)</sup> Cfr. ELDETON, loco citato, pag. 29.

<sup>(2)</sup> Precisamente del giugno 1923. Fu tenuto conto di tutte le competenze percepite, al lordo dell'importo di ricchezza mobile o di eventuali trattenute per la cessione del quinto dello stipendio.

o più semplicemente, nella variabile  $X = x + 0,019$  (assunto come origine il reddito minimo  $h = 0,019$ ),

$$y = 19650e^{-0,7664X} X^{2,5889},$$

o infine sostituita la espressione per  $t$ , data da (30),

$$y = 0,1336e^{-0,7664(t-448,1)}(t-448,1)^{2,5889}.$$

Nella tav. II i valori degli integrali  $U_p$  (definiti dalla (24)) calcolati con questa formola sono posti a confronto coi valori osservati. Lo stesso confronto è illustrato nella fig. 2.

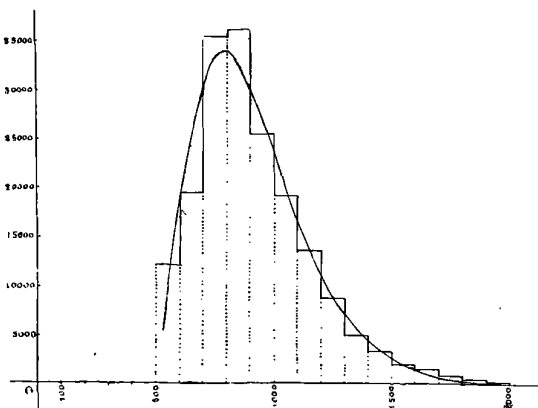


Fig. 2.

L'esame della Tavola e della Figura esaurientemente conferma la rispondenza della equazione proposta ai dati forniti della statistica.

## § VI. Caso del reddito globale.

Il metodo dei momenti dà ottimo risultato, per distribuzioni in cui la dispersione è limitata in modo che è possibile rappresentarla statisticamente mediante una successione di integrali come (22), in cui i successivi limiti  $a_0, a_1, \dots, a_\omega$  costituiscono una progressione aritmetica. In tal caso il rapporto fra l'argomento massimo contemplato dalla rilevazione statistica, cioè  $a_\omega$ , e la differenza fra l'argomento medio e l'argomento minimo è pari, in generale, ad un numero di una sola cifra intera.

Diventa inapplicabile nel caso opposto, e ciò perchè il calcolo approssimato dei momenti di grado superiore al primo diventa allora ipotetico, acquistando, nel calcolo, una parte assolutamente preponderante quella porzione

della distribuzione, cui corrispondono gli argomenti maggiori. L'interpolazione si adatta quindi non a tutta la curva, ma solo ad una parte di essa.

Ciò si verifica ordinariamente nelle rilevazioni che si riferiscono al reddito globale, in cui, assunta come unità di misura la differenza fra il reddito medio ed il minimo, la statistica dei redditi registra in generale redditi pari, in cifra tonda, anche a 10000.

Per coinverso, quando si tratta di redditi globali, è noto generalmente il limite inferiore dei redditi, in quanto, in generale, la statistica registra soltanto redditi superiori ad una certa cifra: il minimo imponibile, se si tratta di statistica fiscale.

Nella formula interpolatrice (1) il parametro  $s$  assume in generale valori diversi da 1, ed è pertanto incognito. Viceversa  $h$  è noto.

Sieno allora

$$x_1 - h, \quad x_2 - h, \quad x_3 - h, \quad x_4 - h$$

quattro valori del reddito crescenti secondo una progressione geometrica, tali cioè che per essi si abbia

$$(31) \quad \frac{x_2 - h}{x_1 - h} = \frac{x_3 - h}{x_2 - h} = \frac{x_4 - h}{x_3 - h}$$

e tali inoltre che il numero dei redditi compresi fra il massimo ed il minimo, cioè fra  $x_4 - h$  ed  $x_1 - h$  comprenda la quasi totalità, per esempio nove decimi della popolazione totale. La determinazione di siffatte quantità  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , è evidentemente possibile in infiniti modi.

Immaginiamo calcolati empiricamente i valori  $y_1, y_2, y_3, y_4$  corrispondenti ai precedenti  $x_1, x_2, x_3, x_4$ .

Il metodo che proponiamo per la determinazione dei parametri  $c, \gamma, s, p$ , analogo a quello che si applica usualmente nella interpolazione delle tavole di mortalità secondo la formula di GOMPertz-MAKEHAM, consiste nel determinare quelle incognite in modo che per  $x = x_1, x = x_2, x = x_3, x = x_4$  la

$$y = ce^{-\gamma(x-h)^s} (x-h)^{\frac{p-s}{s}} \quad (4).$$

assuma ordinatamente i valori  $y_1, y_2, y_3, y_4$ . Tale determinazione, in forza della equazione di partenza (31), è assai rapida.

(4) Per  $x = h$ , questa formula dà  $y = 0$ . Esprime cioè che il numero dei redditi uguale ad  $x$  tende a zero quando  $x$  tende al minimo imponibile. Esprime quindi il fatto intuitivo dell'evasione dei redditi *realmente* uguali al minimo imponibile.

Si ha, invero,

$$\log y_i = \log c - \gamma(x-h)^{\frac{1}{s}} + \frac{p-s}{s} \log(x_i-h)$$

per  $i = 1, 2, 3, 4$ ; ed eliminando  $c, \gamma, p-s$

$$\begin{vmatrix} \log y_1 & 1 & (x_1-h)^{\frac{1}{s}} & \log(x_1-h) \\ \log y_2 & 1 & (x_2-h)^{\frac{1}{s}} & \log(x_2-h) \\ \log y_3 & 1 & (x_3-h)^{\frac{1}{s}} & \log(x_3-h) \\ \log y_4 & 1 & (x_4-h)^{\frac{1}{s}} & \log(x_4-h) \end{vmatrix} = 0.$$

Il simbolo  $\log$  indica i logaritmi naturali.

Posto

$$T_1 = -\log y_1 + 2 \log y_2 - \log y_3$$

$$T_2 = -\log y_2 + 2 \log y_3 - \log y_4$$

$$T_3 = (x_1-h)^{\frac{1}{s}} - 2(x_2-h)^{\frac{1}{s}} + (x_3-h)^{\frac{1}{s}}$$

$$T_4 = (x_2-h)^{\frac{1}{s}} - 2(x_3-h)^{\frac{1}{s}} + (x_4-h)^{\frac{1}{s}},$$

e detto  $\lambda$  il rapporto

$$\frac{x_{i+1}-h}{x_i-h},$$

costante in forza di (31), per  $i = 1, 2, 3$ , la precedente equazione si riduce, come è immediatamente evidente, a

$$T_1 T_4 = T_2 T_3$$

ossia, per essere identicamente  $T_3 \lambda^{\frac{1}{s}} = T_4$ , a

$$T_1 \lambda^{\frac{1}{s}} = T_2.$$

Si raccoglie

$$(32) \quad s = \frac{\log \lambda}{\log T_2 - \log T_1}.$$



In questa formula il simbolo  $\log$  può indicare evidentemente tanti logaritmi naturali, quanto logaritmi volgari.

Determinata  $s$ , è immediata la determinazione delle altre incognite che figurano nel sistema linearmente.

Posto  $\gamma_1 = \gamma \log e$ , il simbolo  $\log$  indicando adesso logaritmi volgari, si ha

$$(33) \left\{ \begin{array}{ll} \gamma_i = + \frac{T_i}{T_{i+2}}; & i = 1, 2 \\ \frac{p-s}{s} = \frac{\log y_{i+1} - \log y_i + \gamma_i \left\{ (x_{i+1} - h)^{\frac{1}{s}} - (x_i - h)^{\frac{1}{s}} \right\}}{\log \lambda}; & i = 1, 2, 3 \\ \log c = \log y_i + \gamma_i (x_i - h)^{\frac{1}{s}} - \frac{p-s}{s} \log (x_i - h); & i = 1, 2, 3, 4. \end{array} \right.$$

Non è superfluo calcolare i secondi membri per i diversi valori indicati di  $i$ , onde avere un controllo per l'esattezza dei calcoli numerici.

Il problema è in tal modo risoluto: le costanti della formula interpolatrice sono determinate.

Sono possibili due verifiche generali, che consentono subito di giudicare del grado di approssimazione raggiunto.

Esse consistono nel verificare che sono soddisfatte le formole (3) e (4) e cioè le

$$(34) \quad n = \frac{c |s| \Gamma(p)}{\gamma^p}, \quad m = h + \frac{\Gamma(p+s)}{\gamma^s \Gamma(p)}$$

$n$  essendo sempre la popolazione totale,  $m$  il reddito medio.

Convieni in generale correggere i valori calcolati di  $\gamma$  e di  $c$ , sostituendo ad essi quelli che risultano da queste formole.

Applichiamo il metodo indicato alla statistica dei redditi prussiani, quale risulta dall'Annuario Statistico del 1912.

Il reddito minimo è di 900 marchi, onde, assunto il marco come unità di misura  $h = 900$ . Assumiamo  $\log(x_1 - h) = 1,69900$ ,  $\lambda = \frac{3}{4}$ , il che porta  $\log(x_2 - h) = 3,03233$ ;  $\log(x_3 - h) = 4,36567$ ;  $\log(x_4 - h) = 5,69900$ ; e quindi

$$\begin{array}{cccc} x_1 - h = 50, & x_2 - h = 1077, & x_3 - h = 23210, & x_4 - h = 500000 \\ x_1 = 950, & x_2 = 1977 & x_3 = 24110 & x_4 = 500900. \end{array}$$

Sopra 6906497 redditeri risultano dalla statistica godenti reddito, compreso

tra 950 e 500900 marchi, circa 6 milioni e mezzo, quindi oltre ai nove decimi del totale.

Dalla stessa statistica risulta che i valori di  $y$  corrispondenti ai precedenti valori di  $x$  sono

$$y_1 = \frac{1.364.434}{50}; \quad y_2 = \frac{380.616}{300}; \quad y_3 = \frac{1983}{1000}; \quad y_4 = \frac{50}{50000}$$

quindi  $\log y_1 = 3,95872$ ;  $\log y_2 = 3,103367$ ;  $\log y_3 = 0,29732$ ;  $\log y_4 = 3$ ; e conseguentemente  $T_1 = 1,95070$ ;  $T_2 = 0,59885$ ; e, per (32),  $s = -2,22648$ .

Segue  $T_3 = 0,09658$ ;  $T_4 = 0,02433$ ; e quindi applicando le formole (33)

$$\gamma_1 = 20,196, \quad \frac{p-s}{s} = -2,59695, \quad \log c = 11,85565.$$

Conseguentemente

$$\gamma = \frac{\gamma_1}{\log e} = 46,503, \quad p = 3,55557.$$

Verifichiamo che sono soddisfatte le (34). Si ha sostituendo

$$\frac{c |s| \Gamma(p)}{\gamma^p} = 6.801.000, \quad h + \frac{\Gamma(p+s)}{\gamma^s \Gamma(p)} = 2203.$$

La statistica fornisce direttamente

$$n = 6.906.497, \quad m = \frac{15.239.790.000}{6.906.497} = 2206,$$

il che mostra che l'approssimazione raggiunta è assai buona.

Giova sostituire al valore di  $c$  precedentemente trovato quello che direttamente risulta da (34). Si ha così il valore corretto  $\log c = 11,8623$ , da cui  $c = 7183.10^8$ . Raccogliamo quindi la formula interpolatrice

$$(35) \quad y = 7183.10^8 \cdot e^{-46,503(x-900)^{-0,44914}} (x-900)^{-2,59695}.$$

Nella tavola III sono contenuti i valori della funzione  $y$  calcolata in base a questa formula, posti a raffronti coi valori osservati. Dai valori contenuti

in quella tavola è ricavato, mediante quadrature, lo specchio sintetico seguente:

Redditi	NUMERO DEI REDDITI	
	(1)	(2)
900 = 1800	5.065.100	5.207.586
1800 = 6500	1.524.762	1.485.342
6500 = 30500	207.343	188.114
30500 = 100000	20.665	20.999
100000 = 500000	4.743	4.139
500000	415	317
	6.823.028	6.906.497

Le quadrature, quali risultano nelle cifre della colonna (2), sono eseguite col metodo dei trapezi e danno luogo quindi a cifre approssimate. La lieve differenza fra i due totali, che, in forza della correzione eseguita sopra  $c$ , dovrebbero essere rigorosamente uguali, esprime appunto i limiti di quella approssimazione.

### § VII. L'indagine teorica.

Abbiamo considerato successivamente le quantità

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} h \dots\dots \text{reddito minimo;} \\ m \dots\dots \text{reddito medio;} \\ n \dots\dots \text{popolazione;} \\ q \dots\dots \text{determinante della curva (indice di con-} \\ \qquad \qquad \qquad \text{centrazione dei redditi);} \\ r \dots\dots \text{rapporto di concentrazione (dei redditi).} \end{array} \right.$$

Le diremo le *costanti fondamentali della curva dei redditi*.

Sono gli elementi fondamentali che caratterizzano ogni distribuzione di ricchezza.

Sono in numero di cinque, cioè quanti i parametri indipendenti

$$(37) \quad h, \quad c, \quad \gamma, \quad s, \quad p,$$

che figurano nell'equazione della curva dei redditi quale abbiamo proposta, e cioè nella equazione (1). Le (36) si esprimono per (37). Ecco sinteticamente in un quadro le formule relative, che sono state successivamente stabilite nel corso di questo studio :

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} n = \frac{c |s| \Gamma(p)}{\gamma^p}, \quad m = h + \frac{\Gamma(p+s)}{\gamma^s \Gamma(p)} \\ q = 1 - 2^{(p-s)} \sqrt{\Gamma(p) : \Gamma(p+s)} \\ r = \pm \frac{m-h}{m} [1 - 2H(p, s)]. \end{array} \right.$$

Sono in numero di quattro perchè la  $h$  figura contemporaneamente fra le (36) e le (37).

La  $H(p, s)$  è la funzione indicata della formula (12) alla pag. 135.

Le (38) ci dicono che le costanti (36) sono indipendenti nel senso che si può *pensare* che una di esse varii, senza che per questo debbano successivamente variare le altre. Una variazione nel reddito minimo, per esempio, non porta *necessariamente* una variazione del reddito medio, o del determinante della curva, ecc.

Questa proposizione *non* significa, per esempio, che, *se gli altri parametri restano invariati*, una variazione di  $h$  non porta nessuna variazione di  $m$ . Che anzi la seconda delle (38) ci dice che una variazione avviene e precisamente in modo che la differenza  $m - h$  resta costante. Significa che, *variando alcune delle (36)*, si possono sempre *pensare* concomitanti variazioni dei parametri (37) *tali, che le (36) rimanenti restino invariate*.

Ogni altra quantità che definisca qualsiasi altro carattere della curva di distribuzione della ricchezza si esprime per le (36).

Pensiamo tutta la collettività considerata distinta in classi sociali secondo le categorie del reddito e diciamo  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_\omega$  gli estremi delle singole categorie. Sarà  $a_0 = h, a_\omega = \infty$ . Supponiamo che  $a_1, a_2, \dots, a_\omega$ , sieno determinate funzioni di  $m$  e di  $h$ , scelte opportunamente in base ai criteri, con cui si vuole stabilire la distinzione in classi sociali.

Posto, per esempio,  $\omega = 4$

$$a_1 = \frac{m-h}{4}, \quad a_2 = m, \quad a_3 = 10m, \quad a_4 = \infty,$$

si ha la distinzione in classe povera, popolare, media, ricca, considerata al § II, pag. 131.

Gli integrali

$$(39) \quad U_l = \int_{a_{l-1}}^{a_l} y(x) dx, \quad W_l = \int_{a_{l-1}}^{a_l} xy(x) dx \quad l = 1, 2, \dots, \omega,$$

esprimono i primi la *composizione demografica*, i secondi la *ricchezza* delle diverse classi sociali.

Gli uni e gli altri sono pienamente determinati, quando sono date le costanti (36). Sono quindi funzioni di quelle cinque costanti.

Per variazioni infinitesime di queste costanti si ha

$$(40) \quad \begin{cases} dU_l = H_{1l} dh + M_{1l} dm + N_{1l} dn + Q_{1l} dq + R_{1l} dr \\ dW_l = H_{2l} dh + M_{2l} dm + N_{2l} dn + Q_{2l} dq + R_{2l} dr \end{cases}$$

$H_{1l}, \dots, R_{2l}$  essendo delle funzioni delle (36) medesime, che il calcolo differenziale insegna a calcolare da (38) e da (39). Potremo quindi scrivere

$$\begin{aligned} H_{1l} &= \varphi_{1, l}(k, m, n, q, r) \\ &\dots \dots \dots \\ R_{2l} &= \varphi_{2, l}(k, m, n, q, r) \end{aligned}$$

le  $\varphi_{k, l}$  essendo funzioni note.

Le formule (40) esprimono nella forma più generale, quali effetti ha sulla *composizione e sulla ricchezza delle singole classi sociali ogni variazione degli elementi fondamentali che caratterizzano la legge di distribuzione della ricchezza medesima.*

Pensiamo le (36) funzioni del tempo  $t$ , le (40) ci danno

$$(41) \quad \frac{dU_l}{dt} = H_{1l} \frac{dh}{dt} + M_{1l} \frac{dm}{dt} + N_{1l} \frac{dn}{dt} + Q_{1l} \frac{dq}{dt} + R_{1l} \frac{dr}{dt}.$$

equazioni esprimenti il movimento così detto *della circolazione delle aristocrazie*; e ci danno ancora

$$(42) \quad \frac{dW_l}{dt} = H_{2l} \frac{dh}{dt} + M_{2l} \frac{dm}{dt} + N_{2l} \frac{dn}{dt} + Q_{2l} \frac{dq}{dt} + R_{2l} \frac{dr}{dt}$$

equazioni esprimenti *il movimento dei redditi.*

*L'indagine teorica sulla dinamica della distribuzione della ricchezza consiste nello studio sistematico e generale delle equazioni (40), (41), (42).*

R. Istituto Superiore di Scienze Economiche e Commerciali.  
Napoli, Luglio 1924.

(V. le Tavole alle pagine seguenti).



TAVOLA I.

x	Amunontare delle competenze mensili	Numero degli agenti aventi competenza compresa nei limiti indicati dalla colonna (2)	Successive somme relative alla funzione U(x)		
			U(x)	V <sub>1</sub> (x)	V <sub>2</sub> (x)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1	500-600	12 236	186 021	866 378	3 026 039
2	600-700	19 801	173 785	680 357	2 159 661
3	700-800	35 260	153 984	506 572	1 479 304
4	800-900	36 606	118 724	352 588	972 732
5	900-1000	25 777	82 118	233 864	620 144
6	1000-1100	19 367	56 341	151 746	386 280
7	1100-1200	13 866	36 974	95 405	234 534
8	1200-1300	9 055	23 108	58 431	139 129
9	1300-1400	5 077	14 053	35 323	80 698
10	1400-1500	3 464	8 976	21 270	45 375
11	1500-1600	2 015	5 512	12 294	24 105
12	1600-1700	1 552	3 497	6 782	17 811
13	1700-1800	1 009	1 945	3 285	5 029
14	1800-1900	532	936	1 340	1 744
15	1900-2000	404	404	404	404
	> 2000	981			
Totale		186 021	866 378	3 026 039	9 186 989

$$n_1 = \frac{866\ 378}{186\ 021} = 4,6574204;$$

$$n_2 = 2 \frac{3\ 026\ 039}{186\ 021} - n_1(1 + n_1) - \frac{1}{12} = 6,102062;$$

$$c^3 = 6 \frac{9\ 186\ 089}{186\ 021} - 3n_2(1 + n_1) - n_1(1 + n_1)(2 + n_1) = 15,924559.$$

TAVOLA II.

$$y = Ae^{-\gamma(x-h)}(x-h)^{p-1},$$

$$\log y = \log A - \gamma_1(x-h) + (p-1) \log(x+q),$$

$$x = t - 4,6574; \quad h = -0,019; \quad p = 3,5839;$$

$$\gamma = 0,76637; \quad \gamma_1 = \gamma \log e = 0,3328; \quad \log A = 4,2934.$$

(x)	x-h	log A - \gamma_1(x-h)	log(x+h)	log y(x)	Valori di U(x)	
					previsti	osservati
1	1,019	3,9543	0,0080	3,9754	9 441	12 236
2	2,019	6214	3051	4,4097	25 680	19 801
3	3,019	2886	4799	5286	33 780	35 260
4	4,019	2,9559	6041	5168	32 870	36 606
5	5,019	6231	7015	4357	27 270	25 777
6	6,019	2903	7795	3045	20 160	19 367
7	7,019	1,9575	8463	1443	13 940	13 866
8	8,019	6247	9041	3,9608	9 139	9 055
9	9,019	2919	9551	7598	5 751	5 077
10	10,019	0,9591	1,0008	5451	3 509	3 464
11	11,019	6263	0422	3292	2 134	2 015
12	12,019	2935	0799	0839	1 214	1 552
13	13,019	9,9607	1145	2,8405	693	1 009
14	14,019	6279	1467	5909	390	532
15	15,019	2951	1767	3356	217	404





TAVOLA III.

$$\log y = \log c - \gamma_1(x-h)^s + \frac{p-s}{s} \log(x-h)$$

$h = 900$      $\log c = 11,86230$      $\log \gamma_1 = 1,305265$      $\frac{1}{s} = -0,44914$      $\frac{p-s}{s} = -2,59695$

$x$	$\log(x-h)$	$\log \gamma_1 + \frac{1}{s} \log(x-h)$	$\gamma_1(x-h)^{\frac{1}{s}}$	$\log c + p-s \log(x-h)$	$\log y$	$y$	Area calcolata col metodo dei trapezi	Area osservata
900						0		
950	1.69897	0.54219	3.48490	7.45016	3.96526	9.231		
1.000	2.00000	.40743	2.55523	6.66840	4.11317	12.977		
1.050	.17609	.32790	.12765	.21110	.08345	12.112		
1.100	.30103	.27178	1.86973	5.88664	·01691	10.397		
1.150	.39794	.22825	.69141	.63497	3.94356	8.782		
1.200	.47712	.19269	.55844	.42934	.87090	7.427		
1.350	.65321	.11360	.29897	4.97205	.67308	4.711		
1.500	.77815	.05749	.14154	.64758	.50604	3.206		
1.650	.87506	·01395	.32264	.39591	.33627	2.169		
1.800	95.424	9.97840	0.95148	.19029	.23881	1.733	5.065.100	5.207.586
1.800	2.95424	9.97840	0.95148	4.19029	3.23881	1.733,1		
2.100	3.07918	.92228	.83614	3.86582	.02868	1.068,3		
2.400	.17609	.87876	.75641	.61415	2.85774	720,5		
2.700	.25527	.81312	.69693	.40853	.71160	514,6		
3.000	.32222	.81212	.65032	.23466	.58435	384,02		
3.700	.44716	.75701	.57149	2.91020	.33871	218,13		
4.400	.54407	.71348	.51699	.65852	.14153	138,53		
5.100	.62325	.67792	.47634	.45290	1.97656	94,74		
5.800	.69020	.64785	.44448	.27904	.83456	68,32		
6.500	.74819	.62180	.41860	.12844	.70984	51,27	1.524.762	1.485.342
6.500	3.74819	9.62180	0.41860	2.12844	1.70984	51,27		
7.500	.81954	.58976	.38883	1.94314	.55431	35,83		
8.500	.88081	.56224	.36495	.78403	.41908	26,25		
9.500	.93450	.53813	.34524	.64460	.29936	19,923		
12.500	4.06446	.47975	.30182	.30710	.00598	10,139		
15.500	.16435	.43489	.27220	.04769	0.77549	5,962		
18.500	.24551	.39843	.25029	0.83692	.58663	3,870		
21.000	.31387	.36773	.23320	.65940	.42620	2,668		
24.500	.37291	.34121	.21939	.50607	.28662	1,935		
27.500	.42488	.31787	.20791	.37111	.16320	1,456		
30.500	.47129	.29703	.19817	.25058	.05241	1,128	207.343	188.114
30.500	4.47129	9.29703	9.19817	0.25058	0.05241	1,1282		
44.400	.63849	.22193	.16670	9.81637	9.64967	0,4464		
58.300	.75891	.16785	.14718	.50365	.35647	0,2273		
72.200	.85309	.12555	.13352	.25907	.12555	0,1336		
86.000	.93044	.09081	.12326	.05819	8.93193	0,0855		
100.000	.99607	.06133	.11517	8.88776	.76593	0,0582	20.665	20.999
100.000	4.99607	9.06133	0.11517	8.88776	8.77259	0,059.237		
200.000	5.27907	7.93422	.08594	.15282	.06688	.011.665		
300.000	.47582	.84586	.06996	7.64187	7.57191	.003.732		
400.000	.59108	.79409	.06224	.34254	.28030	.001.906		
500.000	.69819	.74598	.05572	.06439	.00867	.001.021	4.743	4.139
500.000	5.69819	8.74598	0.05572	7.06439	7.00867	0.001.0201		
1.000.000	.99961	.61060	.04079	6.28161	6.24082	.000.1741		
1.500.000	6.17383	.53235	.03407	5.82917	5.79510	.000.0624		
2.000.000	.30083	.47531	.02987	.49936	.46999	.0000.295		
2.500.000	.39778	.43177	.02703	.24759	.21756	.000.0165		
3.000.000	.47599	.39664	.02493	.04448	.01955	.000.0105		
3.500.000	.54396	.36611	.02323	4.86796	4.84473	.000.0070		
4.000.000	.60196	.34006	.02188	.71734	.69546	.000.0050		
4.500.000	.65313	.31708	.02075	.58445	.56370	.000.0037		
5.000.000	.69889	.29653	.01979	.46562	.44583	.000.0028		
10.000.000	.99996	.16130	.01450	2.68375	3.66925	.000.0005		
15.000.000	7.17607	.08220	.01208	.22641	.21432	.000.0002		
20.000.000	.30161	.02609	.01062	.90194	2.89133	.000.0001	415	317
Totale							6.823.028	6.906.497



# Ricerche sulle trasformazioni delle superficie applicabili sul paraboloido iperbolico equilatero.

(Di H. JONAS, a Berlino)

---

## PREFAZIONE

Nuove e notevoli proprietà delle superficie applicabili sopra quadriche e delle loro trasformazioni emanano dall'esistenza di certe superficie ausiliarie, legate con corrispondenza delle asintotiche alla quadrica deformata, la quale nelle sue flessioni ne trascina seco, invariabilmente fissati nei suoi piani tangenti, ed i punti e le rispettive normali. Trascurando nel presente lavoro l'esame delle quadriche generali, mi occuperò del paraboloido iperbolico equilatero, particolarmente interessante per semplicità, proponendomi nell'istesso tempo l'altro scopo di svolgere siffatta teoria a base di quella classica delle congruenze rettilinee  $W$ , fondata sul teorema di MOUTARD.

Sebbene, come si sa, l'elemento geometrico della trasformazione  $B_k$  di BIANCHI sia costituito dalle congruenze  $W$ , aventi per falde focali due quadriche deformate, l'una data e l'altra trasformata, delle difficoltà considerabili s'oppongono ai tentativi di dedurre questa classe di trasformazioni asintotiche dal concetto generale della trasformazione di MOUTARD. Qui si presenta però una via indiretta, non studiata finora, per la quale ho preso le mosse dai risultati conseguiti in una mia recente Memoria <sup>(1)</sup>. Il metodo ivi stabilito per la costruzione delle deformate del detto paraboloido è sorto dallo studio delle reti ortogonali  $\Gamma$  sulla sfera, godenti della proprietà di avere uguali in ogni punto d'intersezione le derivate geometriche delle due curvatures geodetiche, ciascuna di esse presa lungo la linea ortogonale. Le relative formule del resto si confondono in sostanza con quelle ottenute dal BIANCHI <sup>(2)</sup> nel caso dei paraboloidi immaginari per l'applicazione del metodo di WEINGARTEN

---

<sup>(1)</sup> H. JONAS, *Untersuchungen über die als Gewebe bezeichneten Kurvennetze und über eine Reihe von Problemen, die mit der Verbiegung des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids zusammenhängen*. Math. Ann., 87, (1922), 157.

<sup>(2)</sup> L. BIANCHI, *Ricerche sulla deformazione delle quadriche*. Palermo Rend. 22, (1906), 75.

alle superficie di curvatura costante negli spazi ellittico ed iperbolico, o più recentemente dedotte dalle quaderne armoniche di soluzioni del sistema differenziale dovuto a CALAPSO <sup>(3)</sup>. Giova ricordare che l'uso originalmente fatto di questo sistema differenziale <sup>(4)</sup> consisteva solo nel ricavarne gli elementi *intrinseci* dei paraboloidi deformati, mentre il nuovo assetto dato alla teoria consente il calcolo diretto delle coordinate.

Accenniamo per incidenza, cioè senza l'intento di servircene nel seguito, ad un altro importante passo all'infuori dei limiti della primitiva teoria, muovendosi peraltro pressochè nel medesimo indirizzo. La connessione fra le deformate dei paraboloidi immaginari e le superficie a curvatura costante dello spazio ordinario, presentatasi dapprima sotto un aspetto puramente analitico, può formare l'oggetto di un'interpretazione geometrica, enunciandosi nel caso del paraboloide  $z = ixy$  colla proposizione seguente, deducibile dai risultati contenuti nella mia citata Memoria: *Da un'assegnata coppia di superficie applicabili sulla sfera, legate fra loro dalla trasformazione di Hazzidakis, riesce definita una deformata reale del paraboloide  $z = ixy$ , costruibile in termini finiti e che conseguentemente si trova in una posizione perfettamente determinata nello spazio* <sup>(5)</sup>. Converrebbe, col sussidio di questo teorema, riprendere la teoria delle trasformazioni, la quale per tal via subirebbe notevoli modificazioni. Ma, tutto ciò restando immaginario quando si considerino le deformate del paraboloide reale  $z = xy$ , mi è parso più vantaggioso seguire qui l'idea al principio segnalata, avendo in mira lo stabilire nuove particolarità reali ed intuitive.

Nel caso adunque delle deformate del paraboloide  $z = xy$  come opportune superficie ausiliarie, dotate delle proprietà di sopra, s'offrono le due *evolventi principali*, descritte dagli estremi di fili inestendibili nello svilupparsi dell'uno o dell'altro sistema di geodetiche risultanti per flessione dalle generatrici rettilinee: questi estremi, nella posizione iniziale trovandosi sul-

<sup>(3)</sup> L. BIANCHI, *Ricerche sui sistemi tripli coniugati con una famiglia di superficie applicabili sopra quadriche*. Annali di Mat., 23, (1914), 135.

<sup>(4)</sup> P. CALAPSO, *Sulla deformazione delle quadriche*. Palermo Rend. 16, (1902), 297.

L. BIANCHI, *Sulla deformazione dei paraboloidi*. Annali di Mat., (3) 9, 247; *Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sui paraboloidi*. Annali di Mat., (3) 12, 263; *Lezioni di geometria differenziale*, 3, (1909), §§ 87-89.

<sup>(5)</sup> Riservandomi di ritornarvi in un'altra occasione, mi contento d'avvertir qui che l'esattezza dell'enunciato appare immediatamente dalle considerazioni, bensì concernenti una coppia immaginaria di HAZZIDAKIS, che si trovano alla fine del § 7 dello scritto menzionato, mentre la verifica è meno rapida, quando si parte dalle formule del § 9, complicate di quadrature, indispensabili del resto, ponendo a base le sfere rappresentative.

l'una o l'altra delle generatrici, anch'esse deformate, che passano pel vertice del paraboloido. Cerchiamo allora di maneggiare la trasformazione di MOUTARD in guisa da far nascere dalle evolventi principali due trasformate asintotiche simultanee che formino una coppia della medesima specie, legandosi ad una nuova deformata del paraboloido  $z = xy$ . Questo passaggio, che chiameremo una *trasformazione E*, proveremo ridursi a due successive trasformazioni di BIANCHI, individuate da due congruenze  $W$ , tangenti rispettivamente alle deformate data e trasformata ed aventi per falda focale comune una terza deformata dello stesso paraboloido. Benchè tale decomposizione non sembri affatto strana, importa pure notare che ci siamo così imbattuti in un nuovo caso da collocarsi accanto alla trasformazione di GUICHARD, in cui l'effetto della composizione di due  $B_k$ , vale a dire dell'applicazione del teorema di permutabilità, possiede il carattere di un'operazione a sè. La nostra  $E$  cioè, diversa dalla trasformazione  $G$  di GUICHARD, equivale a due successive  $B_k$ ,  $B_{-k}$  di BIANCHI, mentre la  $G$ , caratterizzata come ben si sa dalla *relazione armonica* <sup>(6)</sup>, la quale ha luogo fra i sistemi coniugati permanenti delle due deformate e la congruenza formata dalle rette d'intersezione dei piani tangenti, risulta composta da una  $B_k$  con una  $B'_k$ , indicandosi con  $B$  e  $B'$  le due classi di trasformazioni già distinte dal BIANCHI.

Anzi di più, il procedimento stesso per cui giungiamo all'accennata decomposizione della  $E$  ci fornirà senz'altro le formule necessarie per la rappresentazione indipendente della  $B_k$ . Sembrami meritevole d'interesse l'introduzione di una *terza superficie ausiliaria*, la quale, trovandosi anch'essa nelle condizioni indicate al principio, è luogo del quarto vertice d'un parallelogrammo, l'opposto coincidendo col punto generico della deformata del paraboloido ed i due rimanenti essendo costituiti dai punti corrispondenti delle evolventi principali. Questa superficie ancora si muta per trasformazione asintotica in un'altra del medesimo tipo, non però insieme alle evolventi principali, ma contemporaneamente colla deformata del paraboloido, cioè nell'applicazione della trasformazione  $B_k$  di BIANCHI.

Dopo di avere stabilite le formule per la composizione di due successive  $B_k$ , del resto senza maggiormente insistere sul ben noto teorema di permutabilità, passiamo allo studio di tre casi speciali, cioè della  $B_k B_{-k}$  che è sempre equivalente alla nostra  $E$ , della  $B_k B'_{-k}$  che diremo *trasformazione F* e finalmente della  $B_k B'_k$ , identica alla  $G$  del GUICHARD. Fra queste tre ope-

<sup>(6)</sup> L. BIANCHI, *Sulle trasformazioni di Guichard delle superficie applicabili sulle quadriche*. Acc. Linc. Rend., (5) 20<sub>1</sub>, (1911), 145.

razioni si scopre un'analogia notevole, quando si considerano, legate alle evolventi principali, due coppie di superficie che ne chiameremo le *prime* e *seconde associate*. Esse corrispondono a queste con parallelismo dei piani tangenti ed hanno per asintotiche, indicandosi con  $\alpha$  e  $\beta$  i parametri di quelle della deformata stessa e delle evolventi principali, rispettivamente le curve  $\alpha \pm i\beta = \text{cost.}$  e  $\alpha \pm \beta = \text{cost.}$  Mentre nella trasformazione  $E$  le evolventi principali vengono assoggettate a due simultanee trasformazioni asintotiche, cioè individuate da congruenze  $W$ , nel caso della  $F$  le prime associate si trovano in tale relazione e nel caso della  $G$  la proprietà in questione sussiste per le seconde associate.

## § 1.

**Costruzione delle deformate del paraboloide  $z = xy$   
e studio di talune superficie secondarie.**

1. Assumendo preliminarmente come variabili indipendenti i parametri  $\vartheta, \vartheta'$  delle generatrici rettilinee, s'immagini data una superficie  $S(x, y, z)$  applicabile sul paraboloide iperbolico equilatero

$$x = \vartheta, \quad y = \vartheta', \quad z = \vartheta\vartheta' \quad \text{ossia:} \quad z = xy.$$

Scriviamo per la  $S$  il quadrato dell'elemento lineare:

$$(1) \quad \Sigma dx^2 = (\vartheta'^2 + 1)d\vartheta^2 + 2\vartheta\vartheta'd\vartheta d\vartheta' + (\vartheta^2 + 1)d\vartheta'^2,$$

e la seconda forma quadratica fondamentale:

$$-\Sigma dx dX = Dd\vartheta^2 + 2D'd\vartheta d\vartheta' + D''d\vartheta'^2,$$

$X, Y, Z$  indicando i coseni di direzione della normale. Notiamo di più l'espressione della curvatura totale:

$$(2) \quad K = -\frac{1}{H^2} \quad \text{con:} \quad H = \vartheta^2 + \vartheta'^2 + 1,$$

ovvero l'equazione di GAUSS:

$$(3) \quad DD'' - D'^2 = -\frac{1}{H},$$

e le due relazioni differenziali di CODAZZI:

$$(4) \quad \frac{\partial D}{\partial \vartheta'} - \frac{\partial D'}{\partial \vartheta} - \frac{\vartheta'}{H} D - \frac{\vartheta}{H} D' = 0, \quad \frac{\partial D''}{\partial \vartheta} - \frac{\partial D'}{\partial \vartheta'} - \frac{\vartheta}{H} D'' - \frac{\vartheta'}{H} D' = 0.$$

Convieni ricordare che da ogni terna  $D, D', D''$  di soluzioni del sistema (3), (4) risulta definita una deformata  $S$  in modo *intrinseco*.

Ponendo ora:

$$(5) \quad dx = \xi'd\vartheta + \xi d\vartheta', \quad dy = \eta'd\vartheta + \eta d\vartheta', \quad dz = \zeta'd\vartheta + \zeta d\vartheta',$$

avremo:

$$(6) \quad \begin{cases} \Sigma\xi^2 = \vartheta^2 + 1, & \Sigma\xi'^2 = \vartheta'^2 + 1, & \Sigma\xi\xi' = \vartheta\vartheta', \\ \Sigma\xi'd\xi = \vartheta'd\vartheta, & \Sigma\xi d\xi' = \vartheta d\vartheta' \end{cases}$$

e con calcolo assai semplice, tralasciato qui per brevità:

$$(7) \quad \begin{cases} \Sigma d\xi^2 = d\vartheta^2 + D'(Dd\vartheta^2 + 2D'd\vartheta d\vartheta' + D''d\vartheta'^2), \\ \Sigma d\xi'^2 = d\vartheta'^2 + D(Dd\vartheta^2 + 2D'd\vartheta d\vartheta' + D''d\vartheta'^2), \\ \Sigma d\xi d\xi' = d\vartheta d\vartheta' - \frac{2d\vartheta d\vartheta'}{H} + D'(Dd\vartheta^2 + 2D'd\vartheta d\vartheta' + D''d\vartheta'^2). \end{cases}$$

2. Ciò premesso, introduciamo col nome d'*evolventi principali* di  $S$  quelle due particolari relative alle geodetiche  $\vartheta = \text{cost.}$  e  $\vartheta' = \text{cost.}$  che risultano per flessione dalle generatrici rettilinee, prendendo sopra queste come estremi degli archi da svolgersi i punti in cui si trovano ortogonalmente tagliate dall'una o dall'altra delle curve  $\vartheta' = 0$  e  $\vartheta = 0$ , deformate delle generatrici passanti pel vertice del paraboloido. Indicandole con  $\widehat{S}(x, \dots)$  e  $\widehat{S}'(x', \dots)$ , troviamo le formule:

$$(8) \quad \widehat{x} = x - \vartheta'\xi, \quad \widehat{x}' = x - \vartheta\xi', \quad (7)$$

onde viene:

$$(9) \quad d\widehat{x} = \xi'd\vartheta - \vartheta'd\xi, \quad d\widehat{x}' = \xi d\vartheta' - \vartheta d\xi',$$

valendo di più, pei coseni di direzione delle rispettive normali, le espressioni seguenti:

$$\widehat{X} = \frac{\xi}{\sqrt{\vartheta^2 + 1}}, \quad \widehat{X}' = \frac{\xi'}{\sqrt{\vartheta'^2 + 1}}.$$

Di qui, calcolando la seconda forma fondamentale di  $\widehat{S}$ :

$$-\Sigma d\widehat{x}d\widehat{X} = \frac{\vartheta D'}{\sqrt{\vartheta^2 + 1}} (Dd\vartheta^2 + 2D'd\vartheta d\vartheta' + D''d\vartheta'^2)$$

(7) Di ogni terna di formule relative ai tre assi coordinati ci contentiamo, per brevità, di scrivere la prima, trascurando di accennare all'aver luogo delle due analoghe.

e quella di  $\widehat{S}'$ , si verifica la *corrispondenza delle asintotiche fra la deformata del paraboloide e le sue evolventi principali*. Formando finalmente l'elemento lineare di  $\widehat{S}$  e di  $\widehat{S}'$  col tener conto delle (7), si stabilisce facilmente i valori delle curvatures totali:

$$(10) \quad \widehat{K} = -\frac{1}{(\vartheta^2 + 1)^2}, \quad \widehat{K}' = -\frac{1}{(\vartheta'^2 + 1)^2}.$$

Consideriamo al tempo stesso una *terza superficie ausiliaria*  $S(x^*, \dots)$ , data da

$$(11) \quad x^* = x - \vartheta \xi - \vartheta' \xi',$$

i cui punti ancora, come pure le normali, giacciono rigidamente fissati nei piani tangenti della  $S$ , quest'ultima comunque flettendosi.

È evidente che i quattro punti corrispondenti di  $S$ ,  $\widehat{S}$ ,  $S^*$ ,  $\widehat{S}'$  segnano i vertici d'un parallelogrammo, anzi riconosciamo che la normale a  $S^*$ , avendo per relativi coseni di direzione:

$$(12) \quad X^* = \frac{\xi \vartheta' - \xi' \vartheta}{\sqrt{\vartheta^2 + \vartheta'^2}},$$

risulta parallela alla diagonale congiungente i punti di  $\widehat{S}$  e  $\widehat{S}'$ . Col calcolo della seconda forma fondamentale di  $S^*$  si dimostra nuovamente che vige la corrispondenza delle asintotiche e cioè fra le quattro superficie  $S$ ,  $S^*$ ,  $\widehat{S}$ ,  $\widehat{S}'$  descritte dai vertici del parallelogrammo variabile. Ricorrendo poi ai coefficienti dell'elemento lineare di  $S^*$ , formato altresì coll'aver riguardo alle (7), deducesi l'espressione seguente per la curvatura totale di  $S^*$ :

$$(13) \quad K^* = -\frac{1}{(\vartheta^2 + \vartheta'^2)^2}.$$

È da notarsi che nelle deformazioni subite dalla  $S$ , non cangiano di valore né anche le curvatures totali delle tre superficie secondarie da noi considerate.

**3.** Riferiremo d'ora innanzi la  $S$  ai parametri  $\alpha$  e  $\beta$  delle asintotiche, rammentando per ciò un importante fatto dalla teoria generale della deformazione delle quadriche: *sopra un'assegnata deformata di una quadrica le asintotiche si determinano per mezzo di quadrature* <sup>(8)</sup>.

<sup>(8)</sup> Questa proposizione è intimamente legata a quella trovata a DARBOUX e a SERVANT che: *il sistema coniugato permanente, cioè comune alla deformata ed alla quadrica stessa, costituisce sopra la deformata un sistema isotermo-coniugato e si deduce per un'assegnata*



Qui non sarà necessario fermarsi a tale argomento, trattandosi per l'attuale ricerca di definire la deformata iniziale  $S$  a base di un sistema differenziale in cui figurano  $\alpha$  e  $\beta$  come variabili indipendenti.

Indicheremo sempre in seguito col simbolo  $\mathfrak{S}$  una somma estesa alle quattro lettere  $\xi, \eta, \zeta, \vartheta$ , l'ultimo termine preso col segno negativo. Con ciò le (6) diventano:

$$(14) \quad \mathfrak{S}\xi^2 = 1, \quad \mathfrak{S}\xi'^2 = 1, \quad \mathfrak{S}\xi\xi' = 0, \quad \mathfrak{S}\xi'd\xi = 0, \quad \mathfrak{S}\xi'd\xi' = 0,$$

mentre le (7) si traducono nelle relazioni seguenti:

$$(15) \quad \mathfrak{S}(\xi_\alpha)^2 = 0, \quad \mathfrak{S}(\xi_\beta)^2 = 0, \quad \mathfrak{S}(\xi'_\alpha)^2 = 0, \quad \mathfrak{S}(\xi'_\beta)^2 = 0,$$

$$(16) \quad \mathfrak{S}\xi_\alpha\xi'_\alpha = -\frac{2\vartheta_\alpha\vartheta'_\alpha}{\vartheta^2 + \vartheta'^2 + 1}, \quad \mathfrak{S}\xi_\beta\xi'_\beta = -\frac{2\vartheta_\beta\vartheta'_\beta}{\vartheta^2 + \vartheta'^2 + 1}.$$

Ora, tenuto conto delle (10), è evidente che le terne  $\xi, \eta, \zeta$  e  $\xi', \eta', \zeta'$  non sono altro che i coseni di direzione *normalizzati* <sup>(9)</sup> delle normali alle evolventi principali  $\widehat{S}$  e  $\widehat{S}'$ , e quindi verificano rispettivamente due equazioni a derivate parziali del tipo di MOUTARD:

$$(17) \quad \xi_{\alpha\beta} = M\xi, \quad \xi'_{\alpha\beta} = M'\xi'$$

con  $M$  e  $M'$  convenienti funzioni di  $\alpha$  e  $\beta$ . Queste equazioni differenziali, come si constata subito derivando le (14) e le (15), sono soddisfatte anche da  $\vartheta$  e  $\vartheta'$ . Valgono inoltre due relazioni della forma:

$$\mathfrak{S}\xi_\alpha\xi'_\alpha = \Psi_1(\alpha), \quad \mathfrak{S}\xi_\beta\xi'_\beta = \Psi_2(\beta),$$

essendo nulla per la prima somma la derivata rispetto a  $\beta$  e per la seconda

*deformata con quadrature.* La dimostrazione della seconda parte di questo teorema, data dal BIANCHI nel t. 3 delle sue *Lezioni* (§ 85, p. 259), si fonda sul fatto che la forma differenziale il cui annullarsi definisce il sistema coniugato permanente (ovvero con leggieri modificazioni quella da cui dipendono le asintotiche) ammette un moltiplicatore di carattere invariante che la converte in una forma di curvatura nulla. Si noti però che con ciò non risulta ancora provato che, scindendo la forma, le due equazioni differenziali che danno separatamente le due famiglie di curve, posseggono due fattori integranti costruibili senza segno d'integrazione. Per questo complemento della dimostrazione confrontisi H. JONAS, *Über eine neue partielle Differentialgleichung des Deformationsproblems ecc.* Berl. Math. Ges. Ber. 13, (1914), 52, e particolarmente rispetto al caso del paraboloido il § 8 della citata Memoria nel t. 87 dei Math. Annalen.

<sup>(9)</sup> Per una qualsiasi superficie, posto  $K = -\frac{1}{\rho^2}$ , le quantità richieste sono  $X\sqrt{\rho}, Y\sqrt{\rho}, Z\sqrt{\rho}$ .

quella rispetto a  $\alpha$ . Esse si riducono per un'opportuna scelta dei parametri  $\alpha$  e  $\beta$  alle seguenti:

$$\mathfrak{S}\xi_\alpha\xi'_\alpha = \varepsilon_1, \quad \mathfrak{S}\xi_\beta\xi'_\beta = \varepsilon_2,$$

designando con  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  l'unità positiva o negativa. Combinando queste colle (16) avremo:

$$(18) \quad 2\vartheta_\alpha\vartheta'_\alpha = -\varepsilon_1(\vartheta^2 + \vartheta'^2 + 1), \quad 2\vartheta_\beta\vartheta'_\beta = -\varepsilon_2(\vartheta^2 + \vartheta'^2 + 1) \quad (10).$$

Formiamo ora l'equazione differenziale del *sistema coniugato permanente*, cioè comune alla deformata  $S$  ed al paraboloido stesso:

$$\vartheta_\alpha\vartheta'_\alpha d\alpha^2 - \vartheta_\beta\vartheta'_\beta d\beta^2 = 0$$

che, in forza delle relazioni precedenti, assume la forma:

$$\varepsilon_1 d\alpha^2 - \varepsilon_2 d\beta^2 = 0.$$

Limitandoci per tutta la nostra ricerca alle deformate dette dal BIANCHI di 1<sup>a</sup> specie, per le quali il sistema coniugato permanente è *reale*, supponiamo  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ . Senza alterare la generalità basta fare  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$ , cangiando nel caso contrario i segni di  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $\vartheta$ , cioè surrogando la deformata  $S$  colla sua simmetrica rispetto all'origine.

4 Dopo di ciò importa stabilire la proposizione seguente che ci servirà di base pel nostro metodo di trasformazione svolto nel § 2.

*Date che siano come soluzioni di due equazioni di Moutard (11) le quadernie  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $\vartheta$  e  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $\zeta'$ ,  $\vartheta'$ , vincolate dalle relazioni:*

$$(A) \quad \mathfrak{S}\xi^2 = 1, \quad \mathfrak{S}\xi'^2 = 1, \quad \mathfrak{S}\xi\xi' = 0, \quad \mathfrak{S}\xi'd\xi = 0 \quad (12)$$

*e dalle altre compatibili colle precedenti:*

$$(B) \quad \mathfrak{S}(\xi_x)^2 = 0, \quad \mathfrak{S}(\xi_\beta)^2 = 0,$$

(10) Escludendo il caso delle deformate rigate, è manifesto che  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$  ossia le costanti  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  sono necessariamente diverse da zero; ciò che vale anche per le funzioni  $M$  e  $M'$  che figurano nelle equazioni (17) di MOUTARD. Per convincersene, basta derivare la prima delle (18) rapporto a  $\beta$  e la seconda rapporto a  $\alpha$ . Nell'ipotesi p. es.  $M = 0$ , si dedurrebbe con facile calcolo  $\varepsilon_1(\vartheta\beta)^2 = \varepsilon_2(\vartheta\alpha)^2$ , il che, paragonando con  $\varepsilon_2\vartheta_\alpha\vartheta'_\alpha = \varepsilon_1\vartheta_\beta\vartheta'_\beta$ , darebbe  $\vartheta_\beta\vartheta'_\alpha - \vartheta_\alpha\vartheta'_\beta = 0$ ; ma questo risultato è assurdo.

(11) Non facciamo dunque nessun'ipotesi preliminare in riguardo alle funzioni  $M$  e  $M'$  tranne che siano diverse da zero.

(12) Qui non faremo uso delle considerazioni di geometria non-euclidea suggerite dalle (A), perchè non si prestano troppo bene allo scopo nostro.

e supposto  $\mathfrak{S}\xi_z\xi'_z \neq 0$ ,  $\mathfrak{S}\xi_\beta\xi'_\beta \neq 0$ , se ne ricava una deformata (non rigata) del paraboloido  $\mathbf{z} = \mathbf{xy}$ , riferita alle asintotiche  $(\alpha, \beta)$  e definita dalle formule:

$$(19) \quad x = \int(\xi'd\vartheta + \xi d\vartheta'), \quad y = \int(\eta'd\vartheta + \eta d\vartheta'), \quad z = \int(\zeta'd\vartheta + \zeta d\vartheta').$$

Per compiere la verifica, cominciamo coll'osservare che, attenendoci alla restrizione testè avvertita, possiamo aggiungere:

$$(C) \quad \mathfrak{S}\xi_z\xi'_z = -1, \quad \mathfrak{S}\xi_\beta\xi'_\beta = -1.$$

Ora derivando le

$$\mathfrak{S}\xi'_z\xi_z = 0, \quad \mathfrak{S}\xi'_\beta\xi_\beta = 0$$

col tener conto delle equazioni (17) di MOUTARD, si ottiene:

$$\mathfrak{S}\xi_z\xi'_\beta = 0, \quad \mathfrak{S}\xi_\beta\xi'_z = 0.$$

Derivando poi la prima e la seconda delle (A) successivamente rispetto a  $\alpha$  e  $\beta$ , trovasi:

$$\mathfrak{S}\xi_z\xi_\beta = -M, \quad \mathfrak{S}\xi'_z\xi'_\beta = -M'.$$

Allora, avendo luogo contemporaneamente i due gruppi di relazioni:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}\xi\xi'_z = 0, \quad \mathfrak{S}\xi'_z\xi_z = 0, \quad \mathfrak{S}\xi_z\xi'_\alpha = -1, \quad \mathfrak{S}\xi_\beta\xi'_\alpha = 0, \\ \mathfrak{S}\xi\xi'_\beta = 0, \quad \mathfrak{S}\xi'_\beta\xi_\beta = 0, \quad \mathfrak{S}\xi_z\xi_\beta = -M, \quad \mathfrak{S}\xi_\beta\xi'_z = 0 \end{aligned}$$

ed essendo

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi & \xi' & \xi_z & \xi_\beta \\ \eta & \eta' & \eta_\alpha & \eta_\beta \\ \zeta & \zeta' & \zeta_\alpha & \zeta_\beta \\ \vartheta & \vartheta' & \vartheta'_\alpha & \vartheta_\beta \end{vmatrix} \neq 0,$$

poichè quadrando viene  $\Delta^2 = M^2$ , si conclude dal paragonarli:

$$(20) \quad \xi'_\alpha = \frac{1}{M} \xi_\beta, \dots, \quad \vartheta'_\alpha = \frac{1}{M} \vartheta_\beta$$

e medesimamente:

$$(21) \quad \xi'_\beta = \frac{1}{M} \xi_z, \dots, \quad \vartheta'_\beta = \frac{1}{M} \vartheta_\alpha.$$

Di qui avremo a complemento delle (B) le relazioni:

$$\mathfrak{S}(\xi'_\alpha)^2 = 0, \quad \mathfrak{S}(\xi'_\beta)^2 = 0.$$

Con un procedimento analogo troveremo :

$$\xi_{\alpha} = \frac{1}{M'} \xi'_{\beta}, \dots, \quad \xi_{\beta} = \frac{1}{M'} \xi'_{\alpha}, \dots$$

e quindi, confrontando con (20) e (21):

$$MM' = 1,$$

cosicchè si potrà porre :

$$M = e^{\varphi}, \quad M' = e^{-\varphi}.$$

Con tale denotazione non intendiamo esclusi valori negativi per  $e^{\varphi}$ , avendosi allora  $\varphi = \omega + \pi i$  con  $\omega$  reale. Osservisi intanto che, nello studio delle trasformazioni, per la deformata iniziale almeno si può supporre  $e^{\varphi} > 0$ , scrivendosi nel caso contrario  $-e^{\varphi}$  e  $-\beta$  invece di  $e^{\varphi}$  e di  $\beta$ .

Ora in forza delle relazioni

$$\xi'_{\alpha} = e^{-\varphi} \xi_{\beta}, \quad \xi'_{\beta} = e^{-\varphi} \xi_{\alpha},$$

valenti per ciascuna delle quattro coppie  $\xi, \xi', \vartheta, \vartheta'$ , si verificano immediatamente le condizioni d'integrabilità per le (19). Il  $ds^2$ , in virtù delle (A), essendo ben quello del paraboloide, dobbiamo riportarci alle relazioni (7) dal cui paragone colle (B) vediamo facilmente che le asintotiche sono formate dalle curve  $(\alpha, \beta)$ .

La nostra asserzione essendo così confermata, trascriviamo il sistema differenziale

$$(22) \quad \begin{cases} \xi_{\alpha\beta} = e^{\varphi} \xi, & \xi'_{\alpha\beta} = e^{-\varphi} \xi', \\ \xi'_{\alpha\alpha} = e^{-\varphi} \xi_{\beta}, & \xi'_{\beta\beta} = e^{-\varphi} \xi_{\alpha} \end{cases}$$

cui aggiungiamo le relazioni che ne risultano per derivazione :

$$(23) \quad \begin{cases} \xi_{\alpha\alpha} = \varphi_{\alpha} \xi_{\alpha} + \xi', & \xi_{\beta\beta} = \varphi_{\beta} \xi_{\beta} + \xi, \\ \xi'_{\alpha\alpha} = -\varphi_{\alpha} \xi'_{\alpha} + \xi, & \xi'_{\beta\beta} = -\varphi_{\beta} \xi'_{\beta} + \xi \end{cases}$$

ed infine l'equazione a derivate parziali soddisfatta dalla  $\varphi$  :

$$(24) \quad \varphi_{\alpha\beta} = e^{\varphi} - e^{-\varphi},$$

quest'ultima, come ben si sa, essendo in sostanza identica a quella da cui dipende la determinazione delle superficie a curvatura costante.

5. Passiamo ora ad esporre rapidamente il metodo di ricerca per le 8 funzioni  $\xi, \xi', \vartheta, \vartheta'$ , già segnalato nella mia citata Memoria. Per ciò conside-

riamo il punto  $(X^{(0)}, Y^{(0)}, Z^{(0)})$  dato da

$$(25) \quad X^{(0)} = \frac{\xi_\alpha}{\vartheta_\alpha} = \frac{\xi_\beta}{\vartheta'_\beta}, \dots,$$

il quale in conseguenza delle (B) è situato sulla sfera unitaria col centro nell'origine. Ammettendo ancora provvisoriamente la validità delle formole (22) e (23), avremo :

$$(26) \quad \Sigma(dX^{(0)})^2 = \frac{d\alpha^2}{(\vartheta_\alpha)^2} + \frac{d\beta^2}{(\vartheta'_\beta)^2}.$$

Con ciò, il nostro problema riesce ricondotto alla costruzione d'un certo sistema ortogonale  $\Gamma$  sulla sfera, corrispondente alle asintotiche della deformata richiesta <sup>(13)</sup>. Per determinarlo in modo intrinseco basta calcolare le due funzioni  $\vartheta$ ,  $\vartheta'$ , cioè integrando le equazioni simultanee :

$$\begin{aligned} \vartheta_{\alpha\beta} &= e^{\vartheta}\vartheta, & \vartheta'_{\alpha\beta} &= e^{-\vartheta}\vartheta', \\ \vartheta'_\alpha &= e^{-\vartheta}\vartheta_\beta, & \vartheta'_\beta &= e^{-\vartheta}\vartheta_\alpha, \end{aligned}$$

le quali, coll'aggiungervi

$$\vartheta_{\alpha\alpha} = \varphi_\alpha\vartheta_\alpha + \vartheta', \quad \vartheta_{\beta\beta} = \varphi_\beta\vartheta_\beta + \vartheta',$$

possono riguardarsi come un sistema completo, lineare ed omogeneo d'equazioni differenziali per le quattro funzioni incognite  $\vartheta$ ,  $\vartheta'$ ,  $\vartheta_\alpha$ ,  $\vartheta_\beta$ , illimitatamente integrabile in virtù della (24) e possedente l'integrale quadratico

$$(27) \quad 2e^{-\vartheta}\vartheta_\alpha\vartheta_\beta - \vartheta^2 - \vartheta'^2 = \text{cost.},$$

il che si verifica per derivazione. Ma, esprimendo mediante l'equazione di GAUSS che la curvatura della forma quadratica (26) è +1, si giunge alla relazione :

$$(28) \quad 2\vartheta_\alpha\vartheta'_\alpha = 2\vartheta_\beta\vartheta'_\beta = \vartheta^2 + \vartheta'^2 + 1,$$

la quale, in conferma delle (18), deve sostituirsi alla (27) più generale e figura nel calcolo d'integrazione come condizione iniziale. Notiamo che il presente sistema completo, formato a base d'una nota soluzione  $\varphi$  della (24), identico per altro in sostanza a quello dato dal CALAPSO, può inversamente ricavarsi dalle formole (28), interpretandole come due equazioni simultanee a derivate

<sup>(13)</sup> Per le proprietà geometriche dei sistemi  $\Gamma$ , oltre di ciò che ne abbiamo detto nella prefazione, rimandiamo il lettore alla citata Memoria (Math. Ann., 87).

parziali per le funzioni  $\vartheta$ ,  $\vartheta'$  e riducendo così la deformazione del paraboloide  $z = xy$  al cosiddetto *problema di Tchebychef* per la forma differenziale

$$\frac{2d\vartheta d\vartheta'}{\vartheta^2 + \vartheta'^2 + 1} \quad (14).$$

Dopo ciò, compiuto il passaggio dall'elemento lineare sferico (26) alle coordinate  $X^{(0)}$ ,  $Y^{(0)}$ ,  $Z^{(0)}$  che domanda l'integrazione di un'equazione a differenziali totali del tipo di RICCATI, scriviamo le relazioni differenziali pel triedro mobile formato del raggio ( $X^{(0)}$ ,  $Y^{(0)}$ ,  $Z^{(0)}$ ) e delle tangenti alle curve del sistema  $\Gamma$ , indicando con  $X^{(1)}$ ,  $Y^{(1)}$ ,  $Z^{(1)}$  e  $X^{(2)}$ ,  $Y^{(2)}$ ,  $Z^{(2)}$  i rispettivi coseni di direzione:

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{ll} X_{\alpha}^{(0)} = \frac{1}{\vartheta_x} X^{(1)}, & X_{\beta}^{(0)} = \frac{1}{\vartheta'_{\beta}} X^{(2)}, \\ X_{\alpha}^{(1)} = \frac{\vartheta}{\vartheta_x} X^{(2)} - \frac{1}{\vartheta_x} X^{(0)}, & X_{\beta}^{(1)} = -\frac{\vartheta'}{\vartheta'_{\beta}} X^{(2)}, \\ X_{\alpha}^{(2)} = -\frac{\vartheta}{\vartheta_x} X^{(1)}, & X_{\beta}^{(2)} = \frac{\vartheta'}{\vartheta'_{\beta}} X^{(1)} - \frac{1}{\vartheta'_{\beta}} X^{(0)}. \end{array} \right.$$

Ora dalle formule

$$(30) \quad \xi = \vartheta X^{(0)} + X^{(2)}, \quad \xi' = \vartheta' X^{(0)} + X^{(1)},$$

analoghe valendo per  $\eta$ ,  $\eta'$ ,  $\zeta$ ,  $\zeta'$ , si deduce derivando coll'aver riguardo alle (29):

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_x = \vartheta_x X^{(0)}, \quad \xi_{\beta} = \frac{1}{\vartheta'_{\beta}} \left[ \frac{1}{2} (\vartheta^2 + \vartheta'^2 - 1) X^{(0)} + \vartheta' X^{(1)} + \vartheta X^{(2)} \right], \\ \xi'_{\alpha} = \frac{1}{\vartheta_x} \left[ \frac{1}{2} (\vartheta^2 + \vartheta'^2 - 1) X^{(0)} + \vartheta' X^{(1)} + \vartheta X^{(2)} \right], \quad \xi'_{\beta} = \vartheta'_{\beta} X^{(0)}, \end{array} \right.$$

talchè, proseguendo il calcolo si perviene a verificare per  $\xi$ ,  $\xi'$  tutte le formule del n.° 4. Notiamo che l'integrale quadratico, legandosi al sistema differenziale (23), qui diviene:

$$(32) \quad 2\xi_x \xi'_{\alpha} = 2\xi_{\beta} \xi'_{\beta} = \xi^2 + \xi'^2 - 1,$$

cioè differisce da (28) pel segno della costante.

(14) Ricordiamo che la deformazione delle quadriche a centro equivale ancora ad un certo problema di TCHEBYCHEF, ma senza che si riesca a farlo dipendere da un'unica equazione a derivate parziali analoga alla (24).

6. Convieni aggiungere qui alcune relazioni utili pel seguito che discendono dalle precedenti. Osservando per questo il segno del determinante

$$\begin{vmatrix} X^{(0)} & X^{(1)} & X^{(2)} \\ Y^{(0)} & Y^{(1)} & Y^{(2)} \\ Z^{(0)} & Z^{(1)} & Z^{(2)} \end{vmatrix} = \varepsilon, \quad (\varepsilon^2 = 1)$$

avremo :

$$(33) \quad \begin{cases} \xi \vartheta_x - \vartheta' \xi_x = \varepsilon(\eta \zeta_x - \zeta \eta_x), & \xi' \vartheta_\beta - \vartheta' \xi_\beta = -\varepsilon(\eta \zeta_\beta - \zeta \eta_\beta), \\ \xi \vartheta'_\alpha - \vartheta \xi'_\alpha = \varepsilon(\eta' \zeta'_\alpha - \zeta' \eta'_\alpha), & \xi' \vartheta'_\beta - \vartheta' \xi'_\beta = -\varepsilon(\eta' \zeta'_\beta - \zeta' \eta'_\beta), \end{cases}$$

$$(34) \quad \begin{cases} \xi_x \vartheta'_\alpha - \xi'_\alpha \vartheta_x = (\xi_\beta \vartheta'_\beta - \xi'_\beta \vartheta_\beta) = -\varepsilon(\eta \zeta'_\alpha - \zeta \eta'_\alpha), \\ \eta_x \zeta'_\alpha - \zeta'_\alpha \eta_x = -(\eta_\beta \zeta'_\beta - \zeta'_\beta \eta_\beta) = \varepsilon(\xi \vartheta - \xi' \vartheta'), \end{cases}$$

$$(35) \quad \begin{cases} \xi_x \vartheta'_\alpha + \xi'_\alpha \vartheta_x = \xi_\beta \vartheta'_\beta + \xi'_\beta \vartheta_\beta = \xi \vartheta + \xi' \vartheta', \\ \eta_x \zeta'_\alpha + \zeta'_\alpha \eta_x = \eta_\beta \zeta'_\beta + \zeta'_\beta \eta_\beta = \eta \zeta + \eta' \zeta'. \end{cases}$$

Dalle (33) vengono date le formule di LELIEUVRE per le evolventi principali  $\widehat{S}$  e  $\widehat{S}'$ . Per gli ulteriori sviluppi pare preferibile disporre di  $\varepsilon$  invece di lasciarlo arbitrario. Facendo come è naturale  $\varepsilon = +1$ , troveremo per le (9):

$$(36) \quad \begin{cases} \widehat{x}_\alpha = \eta \zeta_x - \zeta \eta_x, & \widehat{x}_\beta = -(\eta \zeta_\beta - \zeta \eta_\beta), \\ \widehat{x}'_\alpha = \eta' \zeta'_\alpha - \zeta' \eta'_\alpha, & \widehat{x}'_\beta = -(\eta' \zeta'_\beta - \zeta' \eta'_\beta). \end{cases}$$

Notiamo intanto che con tale convenzione le nostre formule di LELIEUVRE non sono d'accordo in riguardo al segno colla loro solita forma adottata negli scritti della scuola di BIANCHI <sup>(15)</sup>.

Segnaliamo di più l'equazione di MOUTARD relativa alla deformata  $S$ , soddisfatta dai coseni direttori normalizzati della normale:

$$E = \eta \zeta' - \zeta \eta', \quad H = \zeta \xi' - \xi \zeta', \quad Z = \xi \eta' - \eta \xi'.$$

Derivando questi di seguito rapporto ad  $\alpha$  e  $\beta$ , si ha tenendo conto delle (22):

$$(37) \quad E_{x\beta} = (e^\varphi + e^{-\varphi})E.$$

Da ogni quarta soluzione della (37) verrebbe dunque definita una congruenza  $W$ , avente la  $S$  per prima falda focale. È notevole che l'equazione

<sup>(15)</sup> Di questo fatto devesi tener conto più tardi nell'applicare le formule di GUICHARD per la seconda falda focale d'una congruenza  $W$  con assegnata prima falda.

di MOUTARD riesce la medesima per la terza superficie ausiliaria  $S^*$ , data da (11), essendo a causa delle (12), (13)

$$\Xi^* = \xi\vartheta' - \xi'\vartheta, \dots$$

i rispettivi coseni normalizzati.

7. Termineremo questi preliminari coll'introdurre due nuove coppie di superficie secondarie, legate alla deformata  $S$ , chiamandole *prime e seconde associate alle evolventi principali*. Rammentiamo per ciò che due superficie sogliono dirsi *associate*, quando, corrispondendosi per parallelismo di normali, alle asintotiche dell'una corrisponde un sistema coniugato sull'altra, cioè essendo nullo il covariante simultaneo delle loro seconde forme fondamentali (<sup>16</sup>).

Definendo le *prime associate*  $\dot{S}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  e  $\dot{S}'(\dot{x}', \dot{y}', \dot{z}')$  colle formule

$$(38) \quad \dot{x} = \frac{\xi'}{\vartheta'}, \quad \dot{x}' = \frac{\xi}{\vartheta},$$

ci si persuade subito che valgono le relazioni

$$\Sigma \xi d\dot{x} = 0, \quad \Sigma \xi' d\dot{x}' = 0,$$

ed anzi di più, essendo

$$-\vartheta'^2 \Sigma d\dot{x} d\xi = -\vartheta^2 \Sigma d\dot{x}' d\xi' = d\alpha^2 + d\beta^2,$$

si conclude che le asintotiche (immaginarie) di  $\dot{S}$  e di  $\dot{S}'$  sono date da  $\alpha \pm i\beta = \text{cost.}$  e corrispondono dunque ad un sistema isoterma-coniugato tanto sulla deformata  $S$  come sulle evolventi principali  $\widehat{S}$  e  $\widehat{S}'$ .

Qui non esamineremo più da vicino le interessanti proprietà delle prime associate, limitandoci all'osservazione seguente. Considerandole come ricoperte dai sistemi coniugati  $(\alpha, \beta)$ , corrispondenti alle asintotiche di  $S$ ,  $\widehat{S}$ ,  $\widehat{S}'$ , si passa da ciascuna delle due superficie mediante le relative trasformazioni di LAPLACE ai sistemi ortogonali  $\Gamma$  e  $\Gamma'$  della sfera  $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ , descritti dai punti  $X^{(0)} = \frac{\xi z}{\vartheta \alpha} = \frac{\xi' \beta}{\vartheta' \beta}, \dots$  e  $\bar{X}^{(0)} = \frac{\xi \beta}{\vartheta \beta} = \frac{\xi' z}{\vartheta' \alpha}, \dots$ , in guisa da costituirsi un ciclo chiuso di quattro trasformazioni di LAPLACE.

Quanto alle *seconde associate*, che indicheremo con  $\ddot{S}(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$  e  $\ddot{S}'(\ddot{x}', \ddot{y}', \ddot{z}')$  esse vengono fornite dalle quadrature

$$(39) \quad \ddot{x} = \int (\eta d\zeta' - \zeta d\eta'), \quad \ddot{x}' = \int (\eta' d\zeta - \zeta' d\eta)$$

(<sup>16</sup>) Veggansi L. BIANCHI, *Lezioni*, 2, (1903), § 225, p. 8.



e dalle analoghe circolando. Sopra queste, come facilmente si riconosce, le asintotiche (reali) sono formate dalle curve  $\alpha \pm \beta = \text{cost.}$ , corrispondenti nuovamente ad un sistema isotermo-coniugato e cioè al sistema permanente della  $S$ . Anche qui, come si è mostrato nella mia citata Memoria, notevoli particolarità geometriche risultano dall'applicarsi la trasformazione di LAPLACE alle reti coniugate  $(\alpha, \beta)$  distese sopra  $\tilde{S}$  e  $\tilde{S}'$ . Lasciandole da parte, ci contentiamo d'avvertire che *le superficie  $\tilde{S}$  e  $\tilde{S}'$ , convenientemente collocate nello spazio, costituiscono le due falde focali di una congruenza rettilinea  $W$* ; il che si verifica subito in forza della relazione

$$(40) \quad \ddot{x}' - \ddot{x} = \eta' \zeta - \zeta' \eta,$$

dedotta dalle (39), osservando inoltre la corrispondenza delle asintotiche  $\alpha \pm \beta = \text{cost.}$  di  $\tilde{S}$  e di  $\tilde{S}'$ .

## § 2.

### La trasformazione $E$ delle deformate del paraboloido $z = xy$ .

1. Passiamo ora a ricercare una *trasformazione  $E$ , applicabile alle deformate del paraboloido  $z = xy$  e caratterizzata dalla proprietà che le due evolventi principali dell'assegnata deformata  $S$  si cangino per trasformazioni asintotiche simultanee in quelle collegate alla sua trasformata  $S_1$* . Per questo assoggettiamo contemporaneamente le quaderne  $\xi, \eta, \zeta, \vartheta$  e  $\xi', \eta', \zeta', \vartheta'$  di soluzioni delle rispettive equazioni differenziali

$$\xi_{x\beta} = e^{\varphi} \xi, \quad \xi'_{\alpha\beta} = e^{-\varphi} \xi'$$

a due trasformazioni di MOUTARD, delle quali, conformemente a quel che si è visto al n.° 4 del § 1, basterà disporre in tal modo che le relazioni (A), (B), (C), scritte per le quaderne trasformate  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \vartheta_1$  e  $\xi'_1, \eta'_1, \zeta'_1, \vartheta'_1$ , riescano soddisfatte.

Indicando come al solito con  $R$  la funzione trasformatrice, cominciamo dal formare le relazioni differenziali della trasformazione di MOUTARD, non specializzata ancora, relativa al primo sistema:

$$(41) \quad (R\xi_1)_x = -R\xi_x + \xi R_x, \quad (R\xi'_1)_\beta = R\xi'_\beta - \xi R_\beta.$$

Esprimiamo ora le quantità richieste  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \vartheta_1$ , nel modo seguente

mediante quattro coefficienti  $\lambda, \mu, \sigma, \tau$ , assunti insieme alla  $R$  come funzioni incognite:

$$R\xi_1 = \lambda\xi + \mu\xi' + \sigma\xi_x + \tau\xi_\beta;$$

ciò che può farsi, tenuto conto che si ha  $\Delta \neq 0$ . Sostituita l'espressione nelle formule (41), queste si scindono nelle relazioni:

$$(42) \quad \begin{cases} \mu_x + \sigma = 0, & \lambda_x - R_x + e^\varphi\tau = 0, & \lambda + R + \sigma_x + \varphi_x\sigma = 0, & \tau_x + e^{-\varphi}\mu = 0, \\ \mu_\beta + \tau = 0, & \lambda_\beta + R_\beta + e^\varphi\sigma = 0, & \lambda - R + \tau_\beta + \varphi_\beta\tau = 0, & \sigma_\beta + e^{-\varphi}\mu = 0. \end{cases}$$

Con  $\sigma = -\mu_x, \tau = -\mu_\beta$  si deduce dalle ultime formule delle due righe:

$$(43) \quad \mu_{\alpha\beta} = e^{-\varphi}\mu,$$

cosicchè la trasformazione asintotica generale per l'una delle due evolventi principali viene a ridursi all'equazione di Moutard relativa all'altra, togliendosi al tempo stesso le quadrature da effettuarsi nell'applicazione delle (41) colla  $R$  supposta nota. Per mezzo delle terze formule del sistema (42)  $\lambda$  e  $R$  si calcolano dalla soluzione  $\mu$  di (43), essendo:

$$(44) \quad \lambda + R = \mu_{xx} + \varphi_x\mu_x, \quad \lambda - R = \mu_{\beta\beta} + \varphi_\beta\mu_\beta;$$

di qui si ha per derivazione

$$(45) \quad \lambda_\beta + R_\beta = e^\varphi\mu_x, \quad \lambda_x - R_x = e^\varphi\mu_\beta,$$

in guisa da verificarsi le seconde, ed infine, derivando queste:

$$(46) \quad \lambda_{x\beta} = e^\varphi\lambda, \quad R_{x\beta} = e^\varphi R,$$

onde risulta confermato il fatto che la funzione trasformatrice  $R$  da cui si partirebbe nell'applicazione diretta delle (41) è una soluzione particolare della data equazione di MOUTARD.

Utilizzando per  $\xi'_1, \eta'_1, \zeta'_1, \vartheta'_1$  lo stesso procedimento, avremo:

$$(47) \quad (R\xi'_1)_x = -R'\xi'_x + \xi'R'_x, \quad (R\xi'_1)_\beta = R'\xi'_\beta - \xi'R'_\beta$$

e di qui, essendo

$$R'\xi'_1 = \lambda'\xi' + \mu'\xi' - \mu'_x\xi'_x - \mu'_\beta\xi'_\beta,$$

in corrispondenza alle (43)-(46):

$$(48) \quad \begin{aligned} \mu'_{\alpha\beta} &= e^\varphi\mu', \\ \lambda' + R' &= \mu'_{xx} - \varphi_x\mu'_x, & \lambda' - R' &= \mu'_{\beta\beta} - \varphi_\beta\mu'_\beta, \\ \lambda'_\beta + R'_\beta &= e^{-\varphi}\mu'_x, & \lambda'_x - R'_x &= e^{-\varphi}\mu'_\beta, \\ \lambda'_{x\beta} &= e^{-\varphi}\lambda', & R'_{\alpha\beta} &= e^{-\varphi}R'. \end{aligned}$$

2. Ora, per giungere allo scopo prefisso occorre vincolare le due quadernie trasformate dalle relazioni:

$$(A_1) \quad \mathfrak{S}\xi_1^2 = 1, \quad \mathfrak{S}\xi_1'^2 = 1, \quad \mathfrak{S}\xi_1\xi_1' = 0, \quad \mathfrak{S}\xi_1'd\xi_1 = 0,$$

$$(B_1) \quad \mathfrak{S}[(\xi_1)_\alpha]^2 = 0, \quad \mathfrak{S}[(\xi_1)_\beta]^2 = 0,$$

$$(C_1) \quad \mathfrak{S}(\xi_1)_\alpha(\xi_1')_\alpha = -1, \quad \mathfrak{S}(\xi_1)_\beta(\xi_1')_\beta = -1.$$

Osserviamo che attualmente le  $(B_1)$  e  $(C_1)$  si presentano come conseguenze dirette delle  $(A_1)$ . Per ciò, scrivendo le relazioni (41) e (47) sotto la forma:

$$(49) \quad R(\xi_1)_\alpha + \xi_1 R_\alpha = -R\xi_\alpha + \xi R_\alpha, \quad R(\xi_1)_\beta + \xi_1 R_\beta = R\xi_\beta - \xi R_\beta,$$

$$(50) \quad R'(\xi_1')_\alpha + \xi_1' R'_\alpha = -R'\xi'_\alpha + \xi_1' R'_\alpha, \quad R'(\xi_1')_\beta + \xi_1' R'_\beta = R'\xi'_\beta - \xi_1' R'_\beta,$$

dobbiamo quadrarle ovvero moltiplicarle membro a membro, la superiore coll'inferiore, sommando poi nel modo indicato dal simbolo  $\mathfrak{S}$ .

Ammettendo ancora come già soddisfatte le tre prime relazioni delle  $(A_1)$ , cioè a termini finiti, moltiplichiamo le (49) per  $\xi_1$  e formiamo nuovamente la somma  $\mathfrak{S}$  col tener conto che si ha:

$$\mathfrak{S}\xi_1\xi = \frac{\lambda}{R}, \quad \mathfrak{S}\xi_1\xi_\alpha = \frac{e^\varphi\mu_\beta}{R} = \lambda_\alpha - R_\alpha, \quad \mathfrak{S}\xi_1\xi_\beta = \frac{e^\varphi\mu_\alpha}{R} = \lambda_\beta + R_\beta.$$

Troveremo così:

$$R_\alpha\lambda - \lambda_\alpha R = 0, \quad R_\beta\lambda - \lambda_\beta R = 0$$

in guisa da aversi, coll'aggiungere la formula analoga dedotta dalle (50):

$$(51) \quad \lambda = mR, \quad \lambda' = m'R'$$

con  $m$  e  $m'$  costanti. D'altra parte, formando la somma  $\mathfrak{S}$  delle (49) moltiplicate per  $\xi_1', \dots$  coll'osservare le relazioni:

$$\mathfrak{S}\xi_1'\xi = \frac{\mu'}{R'}, \quad \mathfrak{S}\xi_1'\xi_\alpha = \frac{\mu'_\alpha}{R'}, \quad \mathfrak{S}\xi_1'\xi_\beta = \frac{\mu'_\beta}{R'}$$

e procedendo similmente colle (50), si arriva a concludere che l'aver luogo della quarta  $(A_1)$  dipende da due ulteriori relazioni, enunciandosi:

$$(52) \quad \mu = nR, \quad \mu' = n'R$$

con  $n$ ,  $n'$  anch'esse costanti.

Stabilite le (51) e (52), ci resta da soddisfare alle relazioni

$$(53) \quad \mathfrak{S}\xi_1^2 = 1, \quad \mathfrak{S}\xi_1'^2 = 1, \quad \mathfrak{S}\xi_1\xi_1' = 0,$$

le quali, come vedremo subito, si riducono ad una sola condizione che verrà imposta alle  $R, R'$ , prese a funzioni incognite invece di  $\mu, \mu'$ . Prima di ciò, giova domandare se le formule (51), (52) sono compatibili coi sistemi differenziali di sopra. Ricorrendo alle (45), (48), si trova in effetti:

$$\begin{aligned}(m+1)R_\beta &= ne^\varphi R'_\alpha, & (m-1)R_\alpha &= ne^\varphi R'_\beta, \\ (m'+1)R'_\beta &= n'e^{-\varphi}R_\alpha, & (m'-1)R'_\alpha &= n'e^{-\varphi}R_\beta,\end{aligned}$$

onde segue:

$$\frac{m+1}{n} = \frac{n'}{m'-1}, \quad \frac{m-1}{n} = \frac{n'}{m'+1}$$

o infine:

$$m' = m, \quad nn' = m^2 - 1,$$

Abbiamo dunque il sistema differenziale:

$$\begin{aligned}R_{\alpha\beta} &= e^\varphi R, & R'_{\alpha\beta} &= e^{-\varphi} R', \\ R'_\alpha &= \frac{m+1}{n} e^{-\varphi} R_\beta, & R'_\beta &= \frac{m-1}{n} e^{-\varphi} R_\alpha\end{aligned}$$

da cui evidentemente tutte le rimanenti relazioni si deducono per derivazione. Ora le equazioni (53) aggiunte alle precedenti, porgono l'unica:

$$2n'e^{-\varphi}R_\alpha R_\beta = 2ne^\varphi R'_\alpha R'_\beta = n'R^2 + nR^2.$$

Notisi intanto che, avuto riguardo all'omogeneità delle equazioni differenziali ed a quella di grado zero delle espressioni di  $\xi_1$  e di  $\xi'_1$ , sarà lecito sostituire a  $R, R'$  le quantità  $cR, c'R'$ , potendosi disporre delle costanti  $c$  e  $c'$  in guisa da aversi

$$m+1 = n, \quad m-1 = n' \quad (17).$$

Con ciò abbiamo il risultato seguente: *La trasformazione E, per un valore m della costante caratteristica, è definita da due funzioni R, R' soddisfacenti al sistema differenziale:*

$$(54) \quad \left\{ \begin{aligned} R_{\alpha\beta} &= e^\varphi R, & R'_{\alpha\beta} &= e^{-\varphi} R', \\ R'_\alpha &= e^{-\varphi} R_\beta, & R'_\beta &= \frac{m-1}{m+1} e^{-\varphi} R_\alpha \end{aligned} \right.$$

(17) Si osserverà che tale convenzione porta per conseguenza una certa mancanza di simmetria nelle formule di trasformazione; mi è sembrata nondimeno preferibile, perchè coll'assumere  $n' = \pm n$  bisognerebbe complicarle di doppii segni, dovendosi separare allora i casi  $m > 1$  e  $m < 1$ .

e vincolate dalla relazione :

$$(55) \quad 2e^{-\varphi} R_x R_\beta = 2 \frac{m+1}{m-1} e^\varphi R'_\alpha R'_\beta = R^2 + \frac{m+1}{m-1} R'^2.$$

Le (54), illimitatamente integrabili in virtù della (24), vengono completate dalle equazioni

$$(56) \quad R_{xx} = \varphi_x R_x + \frac{m+1}{m-1} R', \quad R_{\beta\beta} = \varphi_\beta R_\beta + R',$$

dedotte per derivazione (ossia dalle altre :

$$R'_{xx} = -\varphi_x R'_x + R, \quad R'_{\beta\beta} = -\varphi_\beta R'_\beta + \frac{m-1}{m+1} R)$$

di tal maniera che risulta stabilito un sistema simultaneo d'equazioni lineari omogenee alle derivate parziali del 1° ordine per le quattro funzioni  $R$ ,  $R'$ ,  $R_x$ ,  $R_\beta$ . Questo possiede l'integrale quadratico

$$2e^{-\varphi} R_x R_\beta - R^2 - \frac{m+1}{m-1} R'^2 = \text{cost.},$$

onde la (55), fissante il valore nullo della costante, dovrà riguardarsi come una condizione imposta ai valori iniziali delle quattro funzioni.

Pel calcolo della funzione  $\varphi_1$ , la quale, secondo il ragionamento adoperato al n.° 4 del § 1, costituisce una nuova soluzione dell'equazione alle derivate parziali seconde (24), cioè della

$$(\varphi_1)_{\alpha\beta} = e^{\varphi_1} - e^{-\varphi_1},$$

ricorrendo ad una relazione ben nota della teoria generale delle trasformazioni di MOUTARD, avremo :

$$e^{\varphi_1} + e^\varphi = 2 \frac{R_x R_\beta}{R^2}$$

e quindi coll'osservare la (55):

$$(57) \quad e^{\varphi_1} = \frac{m+1}{m-1} \left( \frac{R'}{R} \right)^2 e^\varphi.$$

Notisi che, assumendo  $|m| < 1$ , si avrà  $e^{\varphi_1} < 0$  e, per ciò,  $\varphi_1 = \omega_1 + \pi i$ .

### 3. Scriviamo ora le formole

$$(58) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = m\xi + \frac{m+1}{R} (R'\xi' - R'_x \xi_x - R'_\beta \xi_\beta), \\ \xi'_1 = m\xi' + \frac{m-1}{R'} (R\xi - R_x \xi'_\alpha - R_\beta \xi'_\beta) \end{array} \right.$$

pel cui mezzo si ottengono le due quaderne trasformate. Tenendo conto della omogeneità, si riconosce entrare nell'integrazione del nostro sistema differenziale *due* costanti essenziali, sicchè la  $E_m$ , per un assegnato valore di  $m$ , viene a fornirci una doppia infinità di superficie  $S_1$ , applicabili ancora sul paraboloido  $z = xy$ .

Colle espressioni (58), la nuova deformata  $S_1$ , secondo le formole (19), si costruirebbe mediante tre quadrature, avendosi

$$(59) \quad x_1 = \int (\xi'_1 d\vartheta_1 + \xi_1 d\vartheta'_1)$$

e due analoghe per  $y_1$ ,  $z_1$  circolando. Ma, riferendosi al concetto geometrico donde si era partiti, appare ben naturale che tale calcolo può eseguirsi per operazioni finite. Riflettendo adunque che le evolventi principali, insieme alle trasformazioni di MOUTARD subite dalle terne  $\xi, \eta, \zeta$  e  $\xi', \eta', \zeta'$ , vengono assoggettate a due trasformazioni asintotiche simultanee, conviene adoperare le notissime formole di GUICHARD, esprimenti le coordinate della seconda falda focale di una congruenza  $W$ . Queste ci daranno per  $\widehat{S}_1$  e  $\widehat{S}'_1$ :

$$(60) \quad \widehat{x}_1 = \widehat{x} + \eta\zeta_1 - \zeta\eta_1, \quad \widehat{x}'_1 = \widehat{x}' + \eta'\zeta'_1 - \zeta'\eta'_1.$$

Di qui, essendò conformemente alle (8):

$$(61) \quad \widehat{x} = x_1 - \vartheta'_1 \xi_1, \quad \widehat{x}' = x'_1 - \vartheta_1 \xi'_1,$$

giungeremo ad un doppio modo di rappresentare la  $S_1$  richiesta:

$$(62) \quad \begin{cases} x_1 = x - \vartheta'\xi + \vartheta'_1 \xi_1 + \eta\zeta_1 - \zeta\eta_1 \\ \quad = x - \vartheta\xi' + \vartheta_1 \xi'_1 + \eta'\zeta'_1 - \zeta'\eta'_1. \end{cases}$$

Al rigore di questa deduzione mancano due verifiche che ci affrettiamo a compiere. In primo luogo, pensando previamente  $S_1, \widehat{S}_1, \widehat{S}'_1$  come definite dalle (59) e (61), sarà necessario, per rendere legittima l'applicazione dell'una o dell'altra delle relazioni (60), provare la concordanza dei segni, cioè dei fattori  $\epsilon (= +1)$  e  $\epsilon_1$  figuranti nelle formole di LELIEUVRE per  $\widehat{S}, \widehat{S}_1$  e  $\widehat{S}', \widehat{S}'_1$ . In secondo luogo, l'equivalenza della (59) con ciascuna delle formole (62) portando solo sui differenziali, dovremo accertarci che queste due espressioni non possono differire per una costante additiva.

Orbene, avendosi in corrispondenza alla prima delle (33) la relazione:

$$\xi'_1 (\vartheta_1)_x - \vartheta'_1 (\xi_1)_x = \epsilon_1 [\eta_1 (\zeta_1)_x - \zeta_1 (\eta_1)_x]$$

e due analoghe, moltiplichiamo ordinatamente per  $\xi, \eta, \zeta$  e sommiamo, in guisa

da dedurne con leggere modificazioni, osservando (49) e la citata (33) con  $\varepsilon = +1$ :

$$\begin{aligned} (\vartheta_1)_x \mathfrak{S}\xi'_1 \xi - \vartheta'_1 \mathfrak{S}(\xi_1)_x \xi &= -\varepsilon_1 \Sigma \xi_1 [\eta(\zeta_1)_x - \zeta(\eta_1)_x] = \\ &= \varepsilon_1 \Sigma \xi_1 (\eta \zeta_x - \zeta \eta_x) = \varepsilon_1 [\vartheta_x \mathfrak{S}\xi_1 \xi' - \vartheta' \mathfrak{S}\xi_1 \xi_x]. \end{aligned}$$

Di qui, essendo

$$\mathfrak{S}\xi'_1 \xi = (m-1) \frac{R}{R'}, \quad \mathfrak{S}(\xi_1)_x \xi = -\mathfrak{S}\xi_1 \xi_x = -(m+1) \frac{R'_\beta}{R} e^\varphi,$$

segue:

$$(m-1) \frac{R}{R'} (\vartheta_1)_x + (m+1) \frac{R'_\beta}{R} e^\varphi \vartheta'_1 = \varepsilon_1 \frac{m+1}{R} (R' \vartheta_x - e^\varphi R'_\beta \vartheta').$$

Sostituendovi

$$(\vartheta_1)_x = e^{\varphi_1} (\vartheta'_1)_\beta = \frac{m+1}{m-1} \left(\frac{R'}{R}\right)^2 e^\varphi (\vartheta'_1)_\beta, \quad \vartheta_x = e^\varphi \vartheta'_\beta,$$

viene

$$R'(\vartheta'_1)_\beta + R'_\beta \vartheta'_1 = \varepsilon_1 (R' \vartheta'_\beta - R'_\beta \vartheta')$$

e dal paragonare quest'ultima colla seconda delle relazioni (50), scritta in  $\vartheta$ , risulta finalmente  $\varepsilon_1 = +1$ , cosicchè le formule di LELIEUVRE per  $\widehat{S}_1$  e  $\widehat{S}'_1$  sono precisamente date dalle (36), aggiungendovi l'indice 1.

Procedendo alla seconda verifica, formiamo la differenza delle due espressioni (62), costante in ogni caso secondo quanto sopra abbiamo osservato:

$$\vartheta'_1 \xi_1 - \vartheta_1 \xi'_1 - (\vartheta' \xi - \vartheta \xi') + \eta \zeta_1 - \zeta \eta_1 - (\eta' \zeta'_1 - \zeta' \eta'_1) = C_1,$$

ed indichiamo con  $C_2, C_3$  le rispettive costanti nelle relazioni analoghe che ne seguono per permutazione circolare delle lettere  $\xi, \eta, \zeta$ . Per rendere palese, in modo semplice, l'annullarsi delle  $C_1, C_2, C_3$ , moltiplichiamo ordinatamente per  $\xi, \eta, \zeta$  e sommiamo, onde verrà

$$C_1 \xi + C_2 \eta + C_3 \zeta = \vartheta'_1 \mathfrak{S}\xi_1 \xi - \vartheta'_1 \mathfrak{S}\xi'_1 \xi - \vartheta' \mathfrak{S}\xi^2 + \vartheta \mathfrak{S}\xi \xi' - \Sigma \xi'_1 (\eta \zeta' - \zeta \eta').$$

Questa espressione, sostituitovi, coll' aiuto di (34), nell' ultimo termine:

$$\eta \zeta'_1 - \zeta \eta'_1 = -(\xi_x \vartheta'_x - \xi'_x \vartheta_x)$$

e tenuto conto delle

$$\mathfrak{S}\xi_1 \xi = m, \quad \mathfrak{S}\xi'_1 \xi = (m-1) \frac{R}{R'}, \quad \mathfrak{S}\xi_1 \xi_x = (m-1) \frac{R_x}{R'}, \quad \mathfrak{S}\xi'_1 \xi'_x = (m-1) \frac{R'_x}{R'},$$

si trasforma nella seguente:

$$m \vartheta'_1 - (m-1) \frac{R}{R'} \vartheta_1 - \vartheta' + (m-1) \frac{R_x}{R'} \vartheta'_x - (m-1) \frac{R'_x}{R'} \vartheta_x,$$

la quale risulta nulla in virtù delle formole (58) scritte in  $\vartheta$ . Ora da

$$C_1\xi + C_2\eta + C_3\zeta = 0$$

si deduce derivando:

$$C_1\xi_x + C_2\eta_x + C_3\zeta_x = 0, \quad C_1\xi_\beta + C_2\eta_\beta + C_3\zeta_\beta = 0$$

e quindi, osservando che il determinante facilmente calcolabile per le (30), (31)

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi_x & \eta_x & \zeta_x \\ \xi_\beta & \eta_\beta & \zeta_\beta \end{vmatrix} = e^{\vartheta\vartheta'}$$

è diverso da zero, si ha  $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ ; con che resta assicurata l'identità delle due espressioni (62) ottenute per  $x_1$ .

### § 3.

#### Decomposizione della trasformazione $E$ in due successive trasformazioni $B$ di BIANCHI.

1. Il procedimento stesso con cui riusciremo a decomporre la nostra trasformazione  $E$  in due successive trasformazioni del tipo  $B_k$  di BIANCHI, cioè individuate da congruenze  $W$  tangenti rispettivamente a  $S$  e  $S_1$  ed aventi a falda focale comune una terza deformata  $\bar{S}$ , mi pare notevole fondandosi sostanzialmente sulle relazioni differenziali (49), (50), date dalla teoria generale, che si legano alle due trasformazioni simultanee di MOUTARD, operate sulle quaderne  $\xi, \eta, \zeta, \vartheta$  e  $\xi', \eta', \zeta', \vartheta'$ . Cominciamo dal combinare la prima delle (49) colla seconda delle (50), cangiando leggermente la scrittura nell'ultima:

$$\begin{aligned} \frac{R}{R_x} \xi_x - \xi &= -\frac{R}{R_x} (\xi_1)_x - \xi_1, \\ \frac{m+1}{m-1} \frac{R'}{R_x} \xi_x - \xi' &= \frac{R^2}{R'R_x} (\xi_1)_x + \xi'_1. \end{aligned}$$

Moltiplichiamo per due costanti  $b, c$  di cui disporremo più tardi e sommiamo; il che ci dà

$$(63) \quad \bar{\xi} = A\xi_x - b\xi - c\xi' = A_1(\xi_1)_x - b\xi_1 + c\xi'_1$$



con

$$(64) \quad A = \frac{1}{R\alpha} \left( bR + c \frac{m+1}{m-1} R' \right), \quad A_1 = \frac{R}{R'R\alpha} (-bR' + cR),$$

introducendo così le notazioni  $\bar{\xi}$ ,  $\bar{\eta}$ ,  $\bar{\zeta}$ ,  $\bar{\vartheta}$  pel valore comune dei due membri dell'equazione presente e delle analoghe valenti per le lettere  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $\vartheta$ . In simile modo si ottiene:

$$(65) \quad \bar{\xi}' = A'\xi'_\alpha - b\xi' - c\bar{\xi} = A'_1(\xi'_1)_\alpha - b\xi'_1 + c\bar{\xi}_1$$

con

$$A' = \frac{1}{R'_\alpha} (bR' + cR), \quad A'_1 = \frac{R'}{R'R'_\alpha} \left( -bR + c \frac{m+1}{m-1} R' \right).$$

Ci resta ora da provare che per le due nuove quaderne  $\bar{\xi}$ ,  $\bar{\eta}$ ,  $\bar{\zeta}$ ,  $\bar{\vartheta}$  e  $\bar{\xi}'$ ,  $\bar{\eta}'$ ,  $\bar{\zeta}'$ ,  $\bar{\vartheta}'$ , scegliendosi convenientemente le costanti  $b$ ,  $c$ , risultano soddisfatte appunto le relazioni caratteristiche stabilite al n.º 4 del § 1, in guisa da ricavarne una nuova deformata  $S(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  del paraboloido  $z = xy$ . Assoggettando perciò primieramente le  $\bar{\xi}, \dots, \bar{\xi}', \dots$  alle condizioni  $S\bar{\xi}^2 = 1$ ,  $S\bar{\xi}'^2 = 1$ , abbiamo subito

$$b^2 + c^2 = 1,$$

mentre poi la  $S\bar{\xi}\bar{\xi}' = 0$  porge le relazioni

$$(66) \quad AA' = 2bc, \quad A_1A'_1 = -2bc,$$

verificandosi in forza della (55) col porre

$$b^2 + c^2 \frac{m+1}{m-1} = 0.$$

Di qui, come

$$b^2 - c^2 = m,$$

troveremo, limitandoci per causa di realtà all'ipotesi  $|m| < 1$ :

$$b = \sqrt{\frac{1+m}{2}}, \quad c = \pm \sqrt{\frac{1-m}{2}}.$$

Basta infatti che l'una delle due costanti sia dotata del doppio segno, poichè cangiando ambo i segni si verrebbe a mutare tutte le quantità  $\bar{\xi}, \dots, \bar{\xi}', \dots$  nelle opposte, ciò che, ricordate le (19), sarebbe indifferente pel calcolo della  $\bar{S}$ .

Derivando la prima delle (64), scritta sotto la forma

$$AR_\alpha - bR - c \frac{m+1}{m-1} R' = 0,$$

col tener presenti le (54), (56), avremo dopo qualche riduzione le formule :

$$(67) \quad A_x + \varphi_\alpha A + \frac{A^2}{2c} - b = 0, \quad A_\beta + \frac{e^\varphi}{2b} A^2 - ce^{-\varphi} = 0$$

che acquisteranno'una fondamentale importanza nell'ulteriore sviluppo. Con queste, derivando le (63), (65) e riducendo, deducesi :

$$(68) \quad \begin{cases} -A'\bar{\xi}_\alpha = \bar{\xi} + b\bar{\xi}' + c\bar{\xi}', & -A'e^{-\varphi}\bar{\xi}_\beta = \bar{\xi}' + b\bar{\xi}' + c\bar{\xi}, \\ -A\bar{\xi}'_\alpha = \bar{\xi}' + b\bar{\xi}'' + c\bar{\xi}', & -Ae^\varphi\bar{\xi}'_\beta = \bar{\xi} + b\bar{\xi} + c\bar{\xi}', \end{cases}$$

e quindi :

$$\bar{\xi}'_\alpha = e^{-\varphi}\bar{\xi}, \quad \bar{\xi}'_\beta = e^{-\varphi}\bar{\xi}_\alpha,$$

ponendo

$$(69) \quad \frac{e^\varphi A^2}{2bc} = e^{\bar{\varphi}}, \quad \text{cioè: } A = \sqrt{2bc} e^{\frac{\bar{\varphi}-\varphi}{2}}, \quad A' = \sqrt{2bc} e^{\frac{-\bar{\varphi}+\varphi}{2}}.$$

Derivando poi la

$$\bar{\xi}_\beta = -\frac{e^\varphi A}{2bc} (\bar{\xi}' + b\bar{\xi}'' + c\bar{\xi}''')$$

rapporto ad  $\alpha$  col servirsi di (67) e procedendo similmente sulla  $\bar{\xi}'$ , è facile verificare l'aver luogo delle due equazioni di MOUTARD :

$$\bar{\xi}_{\alpha\beta} = e^{\bar{\varphi}}\bar{\xi}, \quad \bar{\xi}'_{\alpha\beta} = e^{-\bar{\varphi}}\bar{\xi}'.$$

Si stabilirà infine, fondandosi sulle (63), (65), (68), con semplice calcolo, trascurato qui per ragione di spazio, le relazioni

$$\mathfrak{S}\bar{\xi}' d\bar{\xi} = 0, \quad \mathfrak{S}(\bar{\xi}_\alpha)^2 = \mathfrak{S}(\bar{\xi}_\beta)^2 = 0, \quad \mathfrak{S}\bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}'_\alpha = \mathfrak{S}\bar{\xi}_\beta \bar{\xi}'_\beta = -1,$$

onde verrà assicurata l'esistenza della nuova deformata  $\bar{S}$ , data da

$$(70) \quad \bar{x} = \int (\bar{\xi}' d\bar{\vartheta} + \bar{\xi} d\bar{\vartheta}'),$$

o più propriamente di *due* deformate  $\bar{S}$  corrispondenti al doppio segno di  $c$  <sup>(18)</sup>. Ma anche qui faremo sparire le quadrature nel calcolo delle coordinate.

(18) Riguardo all'essere preferite nelle formule di definizione (63), (65) le derivate rispetto ad  $\alpha$  importa constatare che la cosa non sta così che in apparenza, potendo sostituirsi  $\bar{\xi}_\alpha = e^{\varphi}\bar{\xi}'_\beta$  e  $\bar{\xi}'_\alpha = e^{-\varphi}\bar{\xi}_\beta$ .

Manifestamente ciascuna delle due  $\bar{\varphi}$  dedotte dalle funzioni trasformatrici  $R, R'$  che figuravano nella nostra  $E_m$  (con  $|m| < 1$ ), costituisce ancora una soluzione dell'equazione alle derivate seconde (24), osservandosi che nel prendersi  $b$  e  $c$  con segni opposti l'esponentiale  $e^{\bar{\varphi}}$  risulta negativa per modo che si ha  $\bar{\varphi} = \bar{\omega} + \pi i$  con  $\bar{\omega}$  reale.

2. Moltiplicando membro a membro le equazioni

$$(71) \quad A\xi_\alpha = \bar{\xi} + b\xi + c\xi', \quad A'\xi'_\alpha = \bar{\xi}' + b\xi' + c\xi$$

ed utilizzando la (32), troveremo la relazione

$$(72) \quad \bar{\xi}\bar{\xi}' + \xi\xi' + b(\bar{\xi}\xi' + \bar{\xi}'\xi) + c(\bar{\xi}\xi + \bar{\xi}'\xi') + bc = 0$$

che sussiste per  $\eta$  e  $\zeta$ . Al contrario, scritta in  $\vartheta$ , essa cangia a causa della (28) il segno dell'ultimo termine:

$$(73) \quad \bar{\vartheta}\bar{\vartheta}' + \vartheta\vartheta' + b(\bar{\vartheta}\vartheta' + \bar{\vartheta}'\vartheta) + c(\bar{\vartheta}\vartheta + \bar{\vartheta}'\vartheta') - bc = 0.$$

Notiamo che nella *relazione quadrilineare* soddisfatta dalle due coppie di parametri corrispondenti alle generatrici rettilinee si riconosce una proprietà essenziale della trasformazione  $B_h$  di BIANCHI che vale anche nel caso delle quadriche a centro. Resta intanto notevole il presentarsi delle formule (72) che offrono un aspetto del tutto simile.

Col medesimo processo avremo:

$$\begin{aligned} \bar{\xi}\xi' + \xi_1\xi'_1 + b(\bar{\xi}\xi'_1 + \bar{\xi}'\xi_1) - c(\bar{\xi}\xi_1 + \bar{\xi}'\xi'_1) - bc &= 0, \\ \bar{\vartheta}\vartheta' + \vartheta_1\vartheta'_1 + b(\bar{\vartheta}\vartheta'_1 + \bar{\vartheta}'\vartheta_1) - c(\bar{\vartheta}\vartheta_1 + \bar{\vartheta}'\vartheta'_1) + bc &= 0, \end{aligned}$$

ed infine, trasformando nella prima delle (35):

$$\xi_\alpha\vartheta'_\alpha + \xi'_\alpha\vartheta_\alpha = \xi\vartheta + \xi'\vartheta'$$

il primo membro mediante le (71), scritte in  $\xi$  e  $\vartheta$ :

$$\begin{aligned} \bar{\xi}(\bar{\vartheta}' + b\bar{\vartheta}' + c\bar{\vartheta}') + \bar{\xi}'(\bar{\vartheta} + b\bar{\vartheta} + c\bar{\vartheta}) \\ + \xi(\vartheta' + b\vartheta' + c\vartheta') + \xi'(\vartheta + b\vartheta + c\vartheta) = 0. \end{aligned}$$

Quest'ultimo risultato ci induce a considerare l'espressione:

$$(74) \quad \begin{cases} \bar{x} = x - \xi(\vartheta' + b\bar{\vartheta}' + c\bar{\vartheta}') - \xi'(\vartheta + b\bar{\vartheta} + c\bar{\vartheta}) \\ \quad = x + \bar{\xi}(\bar{\vartheta}' + b\bar{\vartheta}' + c\bar{\vartheta}') + \bar{\xi}'(\bar{\vartheta} + b\bar{\vartheta} + c\bar{\vartheta}) \end{cases}$$

che dimostreremo essere appunto la coordinata  $\bar{x}$  di  $\bar{S}$ , data dalla quadra-

tura (70). Derivando per ciò rispetto ad  $\alpha$  col tener presente la (19), abbiamo:

$$\begin{aligned} \bar{x}_\alpha = & -\xi_\alpha(\vartheta' + b\bar{\vartheta}' + c\bar{\vartheta}) - \xi'_\alpha(\vartheta + b\bar{\vartheta} + c\bar{\vartheta}') \\ & - (b\xi + c\xi')\bar{\vartheta}'_\alpha - (b\xi' + c\xi)\bar{\vartheta}_\alpha, \end{aligned}$$

onde, sostituendovi secondo le (63), (65), (68)

$$\begin{aligned} \vartheta' + b\bar{\vartheta}' + c\bar{\vartheta} &= -A\vartheta_x, & \vartheta + b\bar{\vartheta} + c\bar{\vartheta}' &= -A'\bar{\vartheta}_x, \\ b\xi + c\xi' &= A\xi_x - \bar{\xi}, & b\xi' + c\xi &= A'\xi'_x - \xi', \end{aligned}$$

risulta immediatamente l'eguaglianza voluta

$$\bar{x}_\alpha = \bar{\xi}'\bar{\vartheta}_\alpha + \bar{\xi}\bar{\vartheta}'_\alpha,$$

l'analogia valendo rispetto alla variabile  $\beta$ . Ora, colle (74) riesce stabilito il fatto geometrico che le rette congiungenti i punti corrispondenti di  $S$  e di  $\bar{S}$  sono tangenti comuni alle due superficie e formano in forza della corrispondenza delle asintotiche una congruenza  $W$ .

Oltre le (74), otteniamo le formole seguenti relative al passaggio da  $S_1$  a  $\bar{S}$ :

$$(75) \quad \begin{cases} \bar{x} = x_1 - \xi_1(\vartheta'_1 + b\bar{\vartheta}'_1 - c\bar{\vartheta}_1) - \xi'_1(\vartheta_1 + b\bar{\vartheta}_1 - c\bar{\vartheta}'_1) \\ \quad = x_1 + \bar{\xi}(\bar{\vartheta}'_1 + b\vartheta'_1 - c\vartheta_1) + \bar{\xi}'(\bar{\vartheta}_1 + b\vartheta_1 - c\vartheta'_1). \end{cases}$$

Si badi però che, sebbene ciascuna delle due formole (74) e (75) equivalga alla quadratura (70), con ciò non risulta assicurata la coincidenza della  $\bar{S}$  data da (74) con quella data da (75), potendo queste distinguersi per una traslazione. La questione che qui si presenta è quella da noi già riscontrata alla fine del § 2. Adoperando un ragionamento affatto analogo, facciamo la differenza, costante in ogni caso, dei due valori ottenuti per  $\bar{x}$ , sostituendovi a  $x_1 - x$  l'espressione (62), in guisa che si abbia:

$$\begin{aligned} & \bar{\xi}[b(\vartheta'_1 - \vartheta') - c(\vartheta_1 - \vartheta)] + \bar{\xi}'[b(\vartheta_1 - \vartheta) - c(\vartheta'_1 - \vartheta')] \\ & \quad + \xi_1\vartheta'_1 - \xi\vartheta' + \eta\zeta_1 - \zeta\eta_1 = C_1, \end{aligned}$$

scrivendo  $C_2$ ,  $C_3$  nelle relazioni che ne discendono circolando. Di qui, moltiplicando ordinatamente per  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  e sommando, troveremo:

$$\begin{aligned} & C_1\xi + C_2\eta + C_3\zeta \\ &= (\bar{\vartheta}\vartheta - b)[b(\vartheta'_1 - \vartheta') - c(\vartheta_1 - \vartheta)] + (\bar{\vartheta}'\vartheta' - c)[b(\vartheta_1 - \vartheta) - c(\vartheta'_1 - \vartheta')] \\ & \quad + (b^2 - c^2 + \vartheta_1\vartheta)\vartheta'_1 - (1 + \vartheta^2)\vartheta' \\ &= \vartheta \left\{ [\bar{\vartheta}\bar{\vartheta}' + \vartheta_1\vartheta'_1 + b(\bar{\vartheta}\bar{\vartheta}'_1 + \bar{\vartheta}'\vartheta_1) - c(\bar{\vartheta}\vartheta_1 + \bar{\vartheta}'\vartheta'_1) + bc] \right. \\ & \quad \left. - [\bar{\vartheta}\bar{\vartheta}' + \vartheta\vartheta' + b(\bar{\vartheta}\vartheta' + \bar{\vartheta}'\vartheta) + c(\bar{\vartheta}\vartheta + \bar{\vartheta}'\vartheta') - bc] \right\} = 0, \end{aligned}$$

onde, come al § 2,  $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ . L'identità di (74) e (75) è dunque esatta.

Riassumiamo il risultato così ottenuto col teorema: *Note due deformate*  $S, S_1$  *del paraboloido*  $z = xy$ , *fra loro legate da una trasformazione*  $E_m$  *con*  $|m| < 1$ , *esiste, e cioè in doppia maniera, una terza deformata*  $\bar{S}$  *tale che le rette che uniscono i punti di*  $\bar{S}$  *ai punti corrispondenti di*  $S$  *e di*  $S_1$  *formino due congruenze*  $W$  *aventi rispettivamente le coppie*  $S, \bar{S}$  *e*  $\bar{S}, S_1$  *per falde focali.*

Resta adunque da provarsi che le due trasformazioni asintotiche del tipo  $B_k$  di BIANCHI di cui si trova composta la nostra  $E_m$  si caratterizzano appunto come una  $B_k$  seguita da una  $B_{-k}$ ; ciò che differiamo all'ultimo paragrafo, passando prima a studiare la  $B_k$  a base di una definizione indipendente.

## § 4.

### La trasformazione $B_k$ di Bianchi. Studio della terza superficie ausiliaria e della composizione di due successive $B_k$ .

1. Il metodo da noi utilizzato al precedente paragrafo per scomporre la nostra trasformazione  $E_m$  ci pone in grado di stabilire subito le formule indipendenti per la trasformazione  $B_k$  che ne costituisce l'elemento. Basta per ciò ricordare che nella verifica riguardante le quaderne  $\bar{\xi}, \dots, \bar{\xi}', \dots$  ci siamo appoggiati essenzialmente sulle relazioni differenziali (67) soddisfatte dalla funzione  $A$ . Ora queste, scritte coll'osservare la (69) sotto la forma seguente:

$$(76) \quad \begin{cases} \frac{1}{2}(\bar{\varphi}_\alpha + \varphi_\alpha) = -\sqrt{\frac{b}{2c}} \left( e^{\frac{\bar{\varphi}-\varphi}{2}} - e^{\frac{-\bar{\varphi}+\varphi}{2}} \right), \\ \frac{1}{2}(\bar{\varphi}_\beta - \varphi_\beta) = -\sqrt{\frac{c}{2b}} \left( e^{\frac{\bar{\varphi}+\varphi}{2}} - e^{\frac{-\bar{\varphi}-\varphi}{2}} \right), \end{cases} \quad (b^2 + c^2 = 1)$$

ci serviranno a definire la trasformazione  $B_k$  che previamente indicheremo col simbolo  $B(b, c)$ . Datone un integrale  $\bar{\varphi}$ , avremo secondo le (63), (65):

$$(77) \quad \bar{\xi} = \sqrt{2bc} e^{\frac{\bar{\varphi}-\varphi}{2}} \xi_\alpha - b\xi - c\xi', \quad \bar{\xi}' = \sqrt{2bc} e^{\frac{-\bar{\varphi}+\varphi}{2}} \xi'_\alpha - b\xi' - c\xi$$

ed espressioni analoghe per  $\bar{\eta}, \bar{\eta}', \bar{\zeta}, \bar{\zeta}', \bar{\vartheta}, \bar{\vartheta}'$ . Di qui, applicando le (74), si ricava la superficie trasformata  $\bar{S}$ :

$$(78) \quad \begin{cases} \bar{x} = x - \xi(\vartheta + b\vartheta' + c\vartheta) - \xi'(\vartheta + b\vartheta' + c\vartheta) \\ \quad = x + \bar{\xi}(\bar{\vartheta}' + b\bar{\vartheta}' + c\bar{\vartheta}) + \bar{\xi}'(\bar{\vartheta} + b\bar{\vartheta} + c\bar{\vartheta}'), \end{cases}$$

anch'essa applicabile sul paraboloido  $z = xy$  e formante la seconda falda focale della congruenza  $W$ , i cui raggi escono tangenzialmente dai punti corrispondenti di  $S$ .

Il sistema differenziale (76), ben noto del resto sotto forma leggermente diversa <sup>(19)</sup>, con cui si passa da un integrale  $\varphi$  della (24) ad una nuova soluzione  $\bar{\varphi}$ , può assumere l'aspetto di un'equazione a differenziali totali di RICCATI, entrando una costante arbitraria nell'integrale generale. La trasformazione  $B(b, c)$  si trova così ricondotta al processo analitico legato alla trasformazione di BÄCKLUND.

Accenniamo di più alle relazioni quadrilineari (72), (73) che non occorre riportar qui. Scriviamo intanto nuovamente le (68):

$$(79) \quad \xi = -\sqrt{2bc} e^{\frac{-\bar{\varphi} + \varphi}{2}} \xi_x - b\bar{\xi} - c\bar{\xi}', \quad \xi' = -\sqrt{2bc} e^{\frac{\bar{\varphi} - \varphi}{2}} \bar{\xi}'_x - b\bar{\xi}' - c\bar{\xi},$$

rappresentanti il passaggio inverso che è ancora una  $B(b, c)$ . È quasi superfluo constatare che nelle formule (76), (77), (79) il radicale s'intende preso col medesimo segno. La discrepanza dei segni che si presenta al paragonare le (77) colle formule d'inversione (79) viene spiegata dal fatto che nelle equazioni differenziali (76), perchè tornino in sè stesse scambiando  $\varphi$  e  $\bar{\varphi}$ , bisogna cangiare il segno del radicale. Nell'ipotesi  $c < 0$ , l'immaginario non entra che in apparenza; ponendo allora  $\sqrt{c} = i\sqrt{c'}$  e  $\bar{\varphi} = \bar{\omega} + \pi i$ , le (76) si trasformano nelle:

$$\frac{1}{2}(\bar{\omega}_x + \varphi_x) = -\sqrt{\frac{b}{2c'}} \left( e^{\frac{\bar{\omega} - \varphi}{2}} + e^{\frac{-\bar{\omega} + \varphi}{2}} \right), \quad \frac{1}{2}(\bar{\omega}_\beta - \varphi_\beta) = \sqrt{\frac{c'}{2b}} \left( e^{\frac{\bar{\omega} + \varphi}{2}} + e^{\frac{-\bar{\omega} - \varphi}{2}} \right).$$

Notiamo infine, senza trattenerci sulla verifica, che nelle formule (33), (34) del § 1, scritte in  $\bar{\xi}, \dots, \bar{\xi}', \dots$ , il segno indicato con  $\epsilon$  rimane lo stesso, cioè  $\epsilon = +1$  secondo la convenzione da noi fatta.

2. Volendo ora ricercare il legame esistente fra la costante  $k$  del BIANCHI e le nostre  $b, c$ , converrà stabilire quell'importante proprietà della trasformazione  $B$  che ha fornito il fondamento alle considerazioni geometriche di BIANCHI, onde è sorto il metodo generale abbracciante il caso delle quadriche a centro.

<sup>(19)</sup> L. BIANCHI, *Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sui paraboloidi*. Annali di Mat., (3) 12, 263; cfr. il § 9.

Denotiamo brevemente con  $\vartheta$  e  $\vartheta'$ , in luogo di  $\vartheta = \text{cost.}$  e  $\vartheta' = \text{cost.}$ , le generatrici del paraboloido  $z = xy$ , richiamando le formule:

$$x = \vartheta, \quad y = \vartheta', \quad z = \vartheta\vartheta'.$$

Similmente diremo tangenti  $\vartheta$  e  $\vartheta'$ , passanti pel punto generico  $(\vartheta, \vartheta')$  della deformata  $S$ , le tangenti rispettivamente alle geodetiche  $\vartheta = \text{cost.}$  e  $\vartheta' = \text{cost.}$ , che risultano per flessione dalle generatrici rettilinee.

Vale adunque la proposizione seguente: *Essendo  $S, \bar{S}$  due deformate del paraboloido  $P_0(z = xy)$ , contigue per una trasformazione  $B$ , quando la  $S$  viene ad applicarsi sul paraboloido  $P_0$ , trascinando seco, in sistema rigido, i segmenti tangenziali portanti i punti di  $\bar{S}$  ed i rispettivi elementi superficiali, questi estremi si disporranno sopra un paraboloido confocale  $P_k$  le cui generatrici rettilinee, per tale operazione, corrispondono alle generatrici deformate  $\bar{\vartheta} = \text{cost.}$  e  $\bar{\vartheta}' = \text{cost.}$  di  $S$  <sup>(20)</sup>; oltre di ciò, una delle due tangenti  $\bar{\vartheta}, \bar{\vartheta}'$ , passanti pel punto di  $\bar{S}$ , viene a sovrapporsi alla rispettiva generatrice di  $P_k$ , mentre l'altra, invece di confondersi colla generatrice corrispondente, passa nella posizione simmetrica rispetto al piano tangente di  $P_0$ , contenente il segmento tangenziale.*

Aggiungiamo che, nell'assetto da noi dato alla trasformazione  $B$  e ritenendo la convenzione  $\varepsilon = +1$ , fatta al § 1, la tangente  $\bar{\vartheta}$  è sempre quella coincidente colla generatrice  $\bar{\vartheta}$  di  $P_k$  nell'applicarsi della  $S$  sul paraboloido  $P_0$ .

Per rendere evidente la prima parte dell'assunto, basta operare sulla (78) e sulle relazioni analoghe che danno  $\bar{y}$  e  $\bar{z}$  le sostituzioni seguenti:

$$(80) \quad x|\vartheta, \quad y|\vartheta', \quad z|\vartheta\vartheta'; \quad \xi|0, \quad \eta|1, \quad \zeta|\vartheta; \quad \xi'|1, \quad \eta'|0, \quad \zeta'|\vartheta',$$

onde, ricorrendo alla (73) per fare sparire le variabili  $\vartheta, \vartheta'$  dalla terza delle formule così ottenute, avremo le coordinate dell'estremità del segmento tangenziale, trasportato nell'applicabilità di  $S$  sopra  $P_0$ :

$$(81) \quad x_k = -b\bar{\vartheta} - c\bar{\vartheta}', \quad y_k = -b\bar{\vartheta}' - c\bar{\vartheta}, \quad z_k = \bar{\vartheta}\bar{\vartheta}' - bc.$$

Per convincersi che il punto  $(x_k, y_k, z_k)$  descrive un paraboloido omofocale  $P_k$ , conviene rotare il triedro degli assi coordinati di  $45^\circ$  attorno all'asse delle  $z$ ,

<sup>(20)</sup> Di qui si giunge a stabilire l'affinità d'Ivory fra i paraboloidi omofocali  $P_0$  e  $P_k$ , la quale, nella teoria di BIANCHI, fornisce la legge d'applicabilità della  $\bar{S}$  sopra il paraboloido  $P_0$ . Per tutto l'oggetto del presente articolo si consultino diversi passi del tomo 3 delle *Lezioni*.

con che l'equazione di  $P_0$  e quella di  $P_k$  assumeranno la forma seguente:

$$P_0) x^2 - y^2 = 2z, \quad P_k) \frac{x^2}{1+2bc} - \frac{y^2}{1-2bc} = 2z + 2bc.$$

Confrontando colle formole date dal BIANCHI <sup>(21)</sup>, si avrà subito la relazione richiesta fra le costanti:

$$(82) \quad k = -2bc.$$

Per dimostrare la seconda parte del teorema, occorre fissare la posizione relativa della tangente  $\bar{\mathfrak{F}}$  di  $\bar{S}$ , avente i coseni direttori proporzionali a  $\bar{\xi}$ ,  $\bar{\eta}$ ,  $\bar{\zeta}$ , rispetto ad un triedro legato all'elemento superficiale di  $S$ . Esprimendo per ciò con tre coefficienti  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$

$$(83) \quad \bar{\xi} = \mathfrak{A}\xi + \mathfrak{B}\xi' + \mathfrak{C}(\eta\zeta' - \zeta\eta')$$

ed analogamente  $\bar{\eta}$ ,  $\bar{\zeta}$ , moltiplichiamo ordinatamente per  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ;  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $\zeta'$ ;  $\xi_x$ ,  $\eta_x$ ,  $\zeta_x$  in guisa da ricavarne sommando e riducendo:

$$\mathfrak{A} + \bar{\mathfrak{F}}\mathfrak{C} = -b, \quad \mathfrak{B} + \bar{\mathfrak{F}}\mathfrak{C} = -c, \quad \mathfrak{A}\bar{\mathfrak{F}} + \mathfrak{B}\bar{\mathfrak{F}}' - \mathfrak{C} = \bar{\mathfrak{F}}.$$

Con queste appunto, operando sulla (83) e sulle formole analoghe le sostituzioni (80) corrispondenti all'applicabilità della  $S$  sopra il paraboloido  $P_0$ , avremo:

$$\mathfrak{B} + \bar{\mathfrak{F}}\mathfrak{C} = -c = \frac{\partial x_k}{\partial \bar{\mathfrak{F}}'}, \quad \mathfrak{A} + \bar{\mathfrak{F}}\mathfrak{C} = -b = \frac{\partial y_k}{\partial \bar{\mathfrak{F}}'}, \quad \mathfrak{A}\bar{\mathfrak{F}} + \mathfrak{B}\bar{\mathfrak{F}}' - \mathfrak{C} = \bar{\mathfrak{F}} = \frac{\partial z_k}{\partial \bar{\mathfrak{F}}'},$$

onde resta provata la coincidenza della tangente  $\bar{\mathfrak{F}}$  di  $\bar{S}$  colla generatrice  $\bar{\mathfrak{F}}$  di  $P_k$ . Al contrario, tale proprietà non sussiste per la tangente  $\bar{\mathfrak{F}}'$  della  $\bar{S}$ , come facilmente si vedrà partendo da:

$$\bar{\xi}' = \mathfrak{A}'\xi + \mathfrak{B}'\xi' + \mathfrak{C}'(\eta\zeta' - \zeta\eta').$$

Qui si presenta in effetti una discordanza dei segni di  $\mathfrak{C}'$ , per la qual causa la coincidenza viene surrogata da una simmetria rispetto al piano tangente di  $P_0$ . Notiamo che la stessa cosa accadrebbe per la prima tangente  $\bar{\mathfrak{F}}$  nell'ipotesi  $\epsilon = -1$ , contraria a quella da noi fatta al n. 6 del § 1; le due tangenti  $\bar{\mathfrak{F}}$  e  $\bar{\mathfrak{F}}'$  scambiando allora le parti attribuite loro nell'applicarsi della  $S$  sul paraboloido  $P_0$ ; è per questa ragione che mi è parso utile fissare avanti il segno  $\epsilon = +1$  invece di lasciarlo arbitrario.

<sup>(21)</sup> *Lezioni*, 3. 30.



È noto che nella teoria generale svolta da BIANCHI le trasformazioni  $B_k$  applicabili alla deformata  $S'$  di una quadrica rigata  $Q_0$  sono state distinte in due classi, secondochè nel processo geometrico or ora considerato l'una o l'altra delle tangenti alle generatrici deformate della superficie trasformata  $\bar{S}$  si sovrappone alla rispettiva generatrice della quadrica confocale  $Q_k$ . Domandiamo che aspetto assume questa distinzione nell'ordine d'idee da noi seguito.

Per un assegnato valore di  $k$ , combinando la (82) con  $b^2 + c^2 = 1$ , avremo:

$$b = \sqrt{\frac{1-k}{2}} \begin{matrix} (+) \\ (-) \end{matrix} \sqrt{\frac{1+k}{2}}, \quad c = \sqrt{\frac{1-k}{2}} \begin{matrix} (-) \\ (+) \end{matrix} \sqrt{\frac{1+k}{2}}.$$

Scriviamo p. es.  $b$  e  $c$  coi segni superiori col porre  $B_k \equiv B(b, c)$ , il passaggio ai segni inferiori valendo a scambiare  $b$  e  $c$  <sup>(22)</sup>. Ma allora, perchè la relazione quadrilineare (73) come pure le formule (78) restino inalterate, occorre scambiare anche le notazioni  $\bar{\vartheta}$  e  $\bar{\vartheta}'$ . Con questo ci troveremo appunto nel caso della trasformazione  $B_k$  dell'altra classe che designeremo col simbolo  $B'_k$ . Prescindendo dallo scambio di  $\bar{\vartheta}$  e  $\bar{\vartheta}'$  che non pare essenziale, abbiamo dunque:

$$B_k \equiv B(b, c), \quad B'_k \equiv B(c, b).$$

Oltre di ciò, si stabilirà senz'altro le equivalenze seguenti:

$$B_k \equiv B(b, -c), \quad B'_{-k} \equiv B(c, -b).$$

3. Aggiungiamo una nuova proprietà della trasformazione  $B_k$  che riguarda il comportarsi della terza superficie ausiliaria  $S^*$ , introdotta al n.° 2 del § 1. Essa s'enuncia col teorema: *Data una deformata del paraboloido  $z = \mathbf{xy}$  ed una sua trasformata  $\bar{S}$ , ottenuta mediante una  $B_k$ , le due terze superficie ausiliarie  $S^*$  e  $\bar{S}^*$  che vi appartengono si trovano anch'esse collegate da una trasformazione asintotica, formando cioè le falde focali di una congruenza  $W$ .*

Abbiamo infatti per le coordinate di  $S^*$  e di  $\bar{S}^*$  secondo la (11):

$$x^* = x - \vartheta \xi - \vartheta \xi', \quad \bar{x}^* = \bar{x} - \bar{\vartheta}' \bar{\xi} - \bar{\vartheta} \bar{\xi}',$$

ricordando inoltre che i coseni di direzione della normale a  $S^*$  sono proporzionali a  $\xi \vartheta' - \xi' \vartheta$ ,  $\eta \vartheta' - \eta' \vartheta$ ,  $\zeta \vartheta' - \zeta' \vartheta$ . Tenendo presente la (78), si avrà:

$$\bar{x}^* - x^* = \bar{\xi}(b \vartheta' + c \vartheta) + \bar{\xi}'(b \vartheta + c \vartheta')$$

(22) Accenniamo all'osservazione di sopra che, scrivendo  $-b$ ,  $-c$ , invece di  $b$ ,  $c$ , la trasformazione resta inalterata.

e di qui

$$\Sigma(x^* - x^*)(\xi\vartheta' - \xi'\vartheta) = 0,$$

le riduzioni eseguendosi facilmente colle (77). Resta così dimostrato che le rette congiungenti i punti corrispondenti di  $S^*$  e di  $\bar{S}^*$  sono tangenti alla  $S^*$  ed anche, il che si verifica con calcolo analogo, alla  $\bar{S}^*$ . La congruenza del resto è  $W$ , come risulta subito dalla corrispondenza, già osservata al § 1, fra le asintotiche della deformata e quelle della terza superficie ausiliaria.

4. Andiamo ora a stabilire le formule relative alla *composizione di due successive trasformazioni*  $B_k$ . Supposto di aver dedotta mediante una  $B(b, c)$ , cioè partendo da una soluzione  $\bar{\varphi}$  del sistema (76) ed utilizzando (77) e (78), da una data deformata  $S$  un'altra  $\bar{S}$ , assoggettiamo questa  $\bar{S}$  ad una trasformazione  $B(b_1, c_1)$  che ne fa derivare una terza deformata  $S_1(x_1, \dots)$ . A tale uopo, integrato il sistema

$$(84) \quad \begin{cases} \frac{1}{2}[(\varphi_1)_x + \bar{\varphi}_x] = -\sqrt{\frac{b_1}{2c_1}} \left( e^{\frac{\varphi_1 - \bar{\varphi}}{2}} - e^{\frac{-\varphi_1 + \bar{\varphi}}{2}} \right), \\ \frac{1}{2}[(\varphi_1)_\beta - \bar{\varphi}_\beta] = -\sqrt{\frac{c_1}{2b_1}} \left( e^{\frac{\varphi_1 + \bar{\varphi}}{2}} - e^{\frac{-\varphi_1 - \bar{\varphi}}{2}} \right), \end{cases} \quad (b_1^2 + c_1^2 = 1)$$

formiamo secondo le (77):

$$(85) \quad \xi_1 = \sqrt{2b_1c_1} e^{\frac{\varphi_1 - \bar{\varphi}}{2}} \bar{\xi}_x - b_1 \bar{\xi}' - c_1 \bar{\xi}'', \quad \xi'_1 = \sqrt{2b_1c_1} e^{\frac{-\varphi_1 + \bar{\varphi}}{2}} \bar{\xi}'_x - b_1 \bar{\xi}'' - c_1 \bar{\xi}'''$$

e  $\eta_1, \eta'_1, \zeta_1, \zeta'_1, \vartheta_1, \vartheta'_1$  in modo analogo. Introducendo nelle (85) i valori di  $\bar{\xi}_x, \bar{\xi}'_x$  tratti dalle relazioni (79) ed infine, sostituendo a  $\xi, \bar{\xi}'$  le espressioni (77), avremo le formule richieste:

$$(86) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi_1 &= (bb_1 + cc_1)\xi + \left( bc_1 + cb_1 + 2\sqrt{bc}b_1c_1 e^{\frac{\varphi_1 - \varphi}{2}} \right) \xi' \\ &\quad - b_1\sqrt{2bc} e^{\frac{\bar{\varphi} - \varphi}{2}} \left( 1 + \sqrt{\frac{bc_1}{cb_1}} e^{\frac{\varphi_1 - \varphi}{2}} \right) \bar{\xi}_x - c_1\sqrt{2bc} e^{\frac{-\bar{\varphi} - \varphi}{2}} \left( 1 + \sqrt{\frac{cb_1}{bc_1}} e^{\frac{\varphi_1 - \varphi}{2}} \right) \bar{\xi}_\beta, \\ \xi'_1 &= (bb_1 + cc_1)\xi' + \left( bc_1 + cb_1 + 2\sqrt{bc}b_1c_1 e^{\frac{-\varphi_1 + \varphi}{2}} \right) \xi \\ &\quad - b_1\sqrt{2bc} e^{\frac{-\bar{\varphi} + \varphi}{2}} \left( 1 + \sqrt{\frac{bc_1}{cb_1}} e^{\frac{-\varphi_1 + \varphi}{2}} \right) \bar{\xi}'_x - c_1\sqrt{2bc} e^{\frac{\bar{\varphi} + \varphi}{2}} \left( 1 + \sqrt{\frac{cb_1}{bc_1}} e^{\frac{-\varphi_1 + \varphi}{2}} \right) \bar{\xi}'_\beta, \end{aligned} \right.$$

mentre pel calcolo delle coordinate  $x_1, y_1, z_1$ , converrà ricorrere alla (75):

$$(87) \quad \begin{aligned} x_1 &= \bar{x} - \bar{\xi}(\bar{\vartheta}' + b_1\vartheta'_1 + c_1\vartheta'_1) - \bar{\xi}'(\bar{\vartheta} + b_1\vartheta_1 + c_1\vartheta_1) \\ &= x + \bar{\xi}(b\vartheta' + c\vartheta - b_1\vartheta'_1 - c_1\vartheta_1) + \bar{\xi}'(b\vartheta + c\vartheta' - b_1\vartheta_1 - c_1\vartheta'_1). \end{aligned}$$

Ciò premesso, l'esistenza d'un *teorema di permutabilità* per le  $B_k$  da noi considerate, ben noto del resto dalle ricerche di BIANCHI, viene suggerita dalla forma dei due primi termini delle (86) che evidentemente ammettono lo scambio delle due coppie di costanti  $b, c$ , e  $b_1, c_1$ . Immaginiamo dunque eseguita prima una  $B(b_1, c_1)$  che dalla  $S$  conduca ad una deformata  $\bar{S}$  ed applichiamo poi ad  $\bar{S}$  una  $B(b, c)$ . Domandiamo se tale composizione colle costanti invertite, scegliendosi convenientemente le due trasformazioni, possa produrre il medesimo effetto, cioè fornire ancora la  $S_1$  ottenuta componendo nell'ordine  $B(b, c) B(b_1, c_1)$ . Scambiando per ciò nelle formole (86)  $b$  e  $b_1$  fra loro e  $c$  e  $c_1$  fra loro e surrogando  $\bar{\varphi}$  con  $\bar{\varphi}'$ , vedremo facilmente che risultano identiche alle stesse (86), quando si supponga soddisfatta l'unica condizione:

$$(88) \quad e^{\frac{\bar{\varphi} - \bar{\varphi}'}{2}} = \frac{1 + \sqrt{\frac{bc_1}{cb_1}} e^{\frac{\varphi_1 - \varphi}{2}}}{\sqrt{\frac{bc_1}{cb_1}} + e^{\frac{\varphi_1 - \varphi}{2}}}.$$

Ma, derivando questa rapporto ad  $\alpha$  e  $\beta$  coll'osservare le (76), (84), si perverrà a stabilire che la  $\bar{\varphi}$  si trova legata alla  $\varphi$  ed alla  $\varphi_1$  dalle relazioni differenziali, formate in analogia alle (76), (84), che definiscono appunto una  $B(b_1, c_1)$  ed una  $B(b, c)$ .

Tralasciando tale calcolo, alquanto lungo, bensì privo di difficoltà, volgiamoci ad una verifica indispensabile per l'esattezza della presente deduzione del teorema di permutabilità. Sebbene nei due modi di composizione i valori di  $\xi_1, \dots, \xi'_1, \dots$  risultino gli stessi, resta in dubbio se le due rispettive superficie  $S_1$ , la prima essendo data da (87) e l'altra da:

$$(89) \quad x_1 = x + \bar{\xi}(b_1\vartheta' + c_1\vartheta - b\vartheta'_1 - c\vartheta_1) + \bar{\xi}'(b_1\vartheta + c_1\vartheta' - b\vartheta_1 - c\vartheta'_1)$$

con

$$\bar{\xi} = \sqrt{2b_1c_1} e^{\frac{\bar{\varphi} - \varphi}{2}} \xi_\alpha - b_1\bar{\xi} - c_1\xi', \quad \bar{\xi}' = \sqrt{2b_1c_1} e^{\frac{-\bar{\varphi} - \varphi}{2}} \xi'_\alpha - b_1\xi' - c_1\bar{\xi},$$

occupano la medesima posizione nello spazio ovvero differiscono per una trasla-

zione. Dobbiamo per ciò formare la differenza delle espressioni (87) e (89), costante a causa dell'eguaglianza dei differenziali  $dx_1$ :

$$\begin{aligned} & \bar{\xi}(b\vartheta' + c\vartheta - b_1\vartheta_1' - c_1\vartheta_1) + \xi'(b\vartheta + c\vartheta' - b_1\vartheta_1 - c_1\vartheta_1') \\ & - \bar{\xi}(b_1\vartheta' + c_1\vartheta - b\vartheta_1' - c\vartheta_1) - \xi'(b_1\vartheta + c_1\vartheta' - b\vartheta_1 - c\vartheta_1') = C_1, \end{aligned}$$

indicando  $C_2, C_3$  le costanti che s'introducono circolando. Moltiplicando ordinatamente per  $\xi, \eta, \zeta$  e sommando con riguardo alle:

$$\mathfrak{S}\bar{\xi}\xi = -b, \quad \mathfrak{S}\bar{\xi}'\xi = -c, \quad \mathfrak{S}\bar{\xi}\xi = -b_1, \quad \mathfrak{S}\bar{\xi}'\xi = -c_1,$$

avremo:

$$\begin{aligned} & (\bar{\vartheta}\vartheta - b)(b\vartheta' + c\vartheta - b_1\vartheta_1' - c_1\vartheta_1) + (\bar{\vartheta}'\vartheta - c)(b\vartheta + c\vartheta' - b_1\vartheta_1 - c_1\vartheta_1') \\ & - (\bar{\vartheta}\vartheta - b_1)(b_1\vartheta' + c_1\vartheta - b\vartheta_1' - c\vartheta_1) - (\bar{\vartheta}'\vartheta - c_1)(b_1\vartheta + c_1\vartheta' - b\vartheta_1 - c\vartheta_1') \\ & = C_1\xi + C_2\eta + C_3\zeta. \end{aligned}$$

In questa il primo membro può mettersi sotto la forma:

$$\begin{aligned} & \vartheta \left\{ [\bar{\vartheta}\bar{\vartheta}' + \vartheta\vartheta' + b(\bar{\vartheta}\vartheta' + \bar{\vartheta}'\vartheta) + c(\bar{\vartheta}\vartheta + \bar{\vartheta}'\vartheta') - bc] \right. \\ & \quad - [\bar{\vartheta}\bar{\vartheta}' + \vartheta_1\vartheta_1' + b_1(\bar{\vartheta}\vartheta_1' + \bar{\vartheta}'\vartheta_1) + c_1(\bar{\vartheta}\vartheta_1 + \bar{\vartheta}'\vartheta_1') - b_1c_1] \\ & \quad + [\bar{\vartheta}\bar{\vartheta}' + \vartheta\vartheta' + b_1(\bar{\vartheta}\vartheta' + \bar{\vartheta}'\vartheta) + c_1(\bar{\vartheta}\vartheta + \bar{\vartheta}'\vartheta') - b_1c_1] \\ & \quad \left. - [\bar{\vartheta}\bar{\vartheta}' + \vartheta_1\vartheta_1' + b(\bar{\vartheta}\vartheta_1' + \bar{\vartheta}'\vartheta_1) + c(\bar{\vartheta}\vartheta_1 + \bar{\vartheta}'\vartheta_1') - bc] \right\}, \end{aligned}$$

le quattro parentesi [ ] del resto annullandosi in virtù delle relazioni quadri-lineari legate alle quattro trasformazioni  $B$  in considerazione. Indi, col ragionamento già due volte usato, concludiamo  $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ , con che riesce provata la coincidenza delle superficie  $S_1$ .

Riepiloghiamo dicendo che: *Dedotta dalla deformata  $S$  per due successive trasformazioni  $B(b, c) B(b_1, c_1)$  la  $S_1$ , esiste un secondo passaggio da  $S$  a  $S_1$ , costruibile senza calcolo d'integrazione ed eseguendosi per una  $B(b_1, c_1)$  seguita da una  $B(b, c)$ , le due deformate frapposte  $\bar{S}, \bar{S}'$  formando colle  $S, S_1$  le quattro falde focali di una quaderna di congruenze  $W$ .*

Osserviamo che la formula in termini finiti (88) del teorema di permutabilità cadrà in difetto, quando si avrà  $bc_1 = cb_1$ , cioè  $b_1 = b, c_1 = c$  (ossia  $b_1 = -b, c_1 = -c$ ), vale a dire nel comporre due trasformazioni  $B_k$  a costanti eguali e di medesima classe. D'altra parte, le nostre formule di composizione (86) in tale ipotesi serberanno la loro validità, il passaggio da  $S$  a  $S_1$  questa volta realizzandosi in un unico modo.

## § 5.

**Studio dei tre casi particolari  $B_k B_{-k}$ ,  $B_k B'_{-k}$  e  $B_k B'_k$  che si presentano nella composizione delle trasformazioni di Bianchi.**

1. Termineremo l'attuale ricerca collo studio di tre casi particolari, recati dalla composizione delle trasformazioni  $B_k$ , presentanti per altro per le loro proprietà geometriche il carattere di trasformazioni speciali, ciò che fin ad ora pare essere osservato solo pel caso della  $B_k B'_k$  che è la trasformazione  $G$  di GUICHARD. Rivolghiamoci in primo luogo alla nostra trasformazione  $E_m$ , la quale, ammesso per causa di realtà l'ipotesi  $|m| < 1$ , è stata scomposta al § 3 in due successive trasformazioni di BIANCHI. Basta ricorrere ai risultati del precedente paragrafo per constatare senz'altro che la  $E$  è l'effetto di una  $B(b, c)$  composta con una successiva  $B(b, -c)$ . Scrivendo perciò  $E \equiv B_k B_{-k}$ , ci proponiamo qui di stabilire la reciproca, dimostrando che: *La composizione di due trasformazioni di Bianchi di medesima classe a costanti opposte equivale sempre alla trasformazione  $E$ , caratterizzata dalla proprietà che le evolventi principali legate alla deformata  $S$  ed alla trasformata finale  $S_1$  costituiscono le falde focali di due congruenze  $W$ .*

A tale oggetto consideriamo le evolventi principali  $\widehat{S}(\widehat{x}, \dots)$  e  $\widehat{S}_1(\widehat{x}_1, \dots)$ , date da:

$$\widehat{x} = x - \xi \vartheta', \quad \widehat{x}_1 = x_1 - \xi_1 \vartheta'_1,$$

e facciamo col tener presente la (87) ed osservando  $b_1 = b$ ,  $c_1 = -c$ :

$$\widehat{x}_1 - \widehat{x} = \xi [b(\vartheta' - \vartheta'_1) + c(\vartheta + \vartheta_1)] + \xi' [b(\vartheta - \vartheta_1) + c(\vartheta' + \vartheta'_1)] - \xi_1 \vartheta'_1 + \xi \vartheta'.$$

Moltiplichiamo questa relazione e le due analoghe rispettivamente per le quantità  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  che sappiamo essere proporzionali ai coseni di direzione della normale a  $\widehat{S}$  e sommiamo. Di qui, deducendo da (86):

$$\Sigma \xi_1 \xi = \mathfrak{S} \xi_1 \xi + \vartheta_1 \vartheta = \vartheta_1 \vartheta + b^2 - c^2,$$

avremo:

$$\begin{aligned} \Sigma (\widehat{x}_1 - \widehat{x}) \xi &= (\overline{\vartheta} \vartheta - b) [b(\vartheta' - \vartheta'_1) + c(\vartheta + \vartheta_1)] + (\overline{\vartheta}' \vartheta - c) [b(\vartheta - \vartheta_1) + c(\vartheta' + \vartheta'_1)] \\ &\quad - (\vartheta_1 \vartheta + b^2 - c^2) \vartheta'_1 + (\vartheta^2 + 1) \vartheta' \\ &= \vartheta \left\{ \overline{\vartheta} \overline{\vartheta}' + \vartheta \vartheta' + b(\overline{\vartheta} \vartheta' + \overline{\vartheta}' \vartheta) + c(\overline{\vartheta} \vartheta + \overline{\vartheta}' \vartheta') - bc \right. \\ &\quad \left. - [\overline{\vartheta} \overline{\vartheta}' + \vartheta_1 \vartheta'_1 + b(\overline{\vartheta} \vartheta'_1 + \overline{\vartheta}' \vartheta_1) - c(\overline{\vartheta} \vartheta_1 + \overline{\vartheta}' \vartheta'_1) + bc] \right\} = 0, \end{aligned}$$

onde appare che la retta congiungente i punti corrispondenti di  $\widehat{S}$  e di  $\widehat{S}_1$  è tangente alla  $\widehat{S}$ , verificandosi per via analoga che tocca anche la  $\widehat{S}_1$ . Altrettanto dimostrasi per la coppia  $\widehat{S}'$ ,  $\widehat{S}'_1$ .

2. Accenniamo ad un altro caso, chiamando *trasformazione F* il risultato della composizione di una  $B(b, c)$  con una  $B(c, b)$  e scrivendo secondo l'osservazione fatta al n.° 2 del § 4  $F \equiv B_R B'_R$ . Esaminando qui come si comportano le *prime associate*, definite al n.° 7 del § 1, arriveremo a stabilire tra queste appunto il legame geometrico che nel caso della  $E$  valeva per le evolventi principali stesse. Notiamo intanto che attualmente occorre combinare *in croce*, cioè la  $\dot{S}$  colla  $\dot{S}'_1$  e la  $\dot{S}'$  colla  $\dot{S}_1$ , la qual circostanza si presenta come una conseguenza dell'essere le due trasformazioni di classe diversa. Rammentando le formole (38) del § 1 che danno  $\dot{S}$  e  $\dot{S}'$ :

$$\dot{x} = \frac{\xi'}{\vartheta'}, \quad \dot{x}' = \frac{\xi}{\vartheta},$$

aggiungiamo le analoghe per  $\dot{S}_1$ ,  $\dot{S}'_1$ :

$$\dot{x}_1 = \frac{\xi'_1}{\vartheta'_1}, \quad \dot{x}'_1 = \frac{\xi_1}{\vartheta_1}.$$

Si notino di più le relazioni:

$$\Sigma \xi_1 \xi = \mathfrak{S} \xi_1 \xi + \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}, \quad \Sigma \xi'_1 \xi' = \mathfrak{D}'_1 \mathfrak{D}',$$

dedotte dalle (86) facendovi  $b_1 = c$ ,  $c_1 = -b$ . Con ciò avremo:

$$\Sigma (\dot{x}'_1 - \dot{x}) \xi = \Sigma \left( \frac{\xi_1}{\vartheta_1} - \frac{\xi'}{\vartheta'} \right) \xi = 0, \quad \Sigma (\dot{x}'_1 - \dot{x}) \xi'_1 = 0,$$

il che pone in evidenza che la congiungente i punti corrispondenti di  $\dot{S}$  e di  $\dot{S}'_1$  è tangente comune alle due superficie, sulle quali in oltre le asintotiche  $\alpha \pm i\beta = \text{cost.}$  si corrispondono. Tale ragionamento ripetendosi per l'altra coppia  $\dot{S}'$ ,  $\dot{S}_1$ , diremo: *Nella composizione di due successive trasformazioni di Bianchi a costanti opposte e di classe diversa le prime associate alle evolventi principali si trovano legate fra loro rispettivamente da due congruenze W tangenziali.*

3. Passiamo al terzo caso, componendo la  $B(b, c)$  con una successiva  $B(c, b)$  e scrivendo  $G \equiv B_R B'_R$ . Cominciamo dal dimostrare che la proprietà geometrica in considerazione qui sussiste per le *secondo associate* alle evolventi

principali. Ricordando per ciò le formule (39), (40) del § 1, abbiamo per  $\bar{S}$  e  $\bar{S}'$ :

$$(90) \quad \bar{x} = \int (\eta' d\zeta + \eta d\zeta') - \eta'\zeta, \quad \bar{x}' - \bar{x} = \eta'\zeta - \zeta'\eta$$

e similmente per  $\bar{S}_1$  e  $\bar{S}'_1$ :

$$(91) \quad \bar{x}'_1 = \int (\eta'_1 d\zeta_1 + \eta_1 d\zeta'_1) - \eta'_1\zeta_1, \quad \bar{x}'_1 - \bar{x}_1 = \eta'_1\zeta_1 - \zeta'_1\eta_1.$$

Per formare la differenza  $\bar{x}'_1 - \bar{x}$ , osservisi che dal confronto dei due integrali figuranti nelle (90), (91), colle (19) del § 1 risulta che basta sostituire nella (87) le lettere  $\eta$  e  $\zeta$  in luogo di  $\xi$  e  $\eta$ . Otteniamo così con  $b_1 = c$ ,  $c_1 = b$  la relazione:

$$\bar{x}'_1 - \bar{x} = \bar{\eta}(b\zeta' + c\zeta - c\zeta'_1 - b\zeta_1) + \bar{\eta}'(b\zeta + c\zeta' - c\zeta_1 - b\zeta'_1) - \eta_1\zeta'_1 + \eta'\zeta$$

che giova porre sotto la forma seguente:

$$(92) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{x}'_1 - \bar{x} &= -(\eta + b\bar{\eta} + c\bar{\eta}')(\zeta_1 - \zeta) - (\eta_1 + c\bar{\eta} + b\bar{\eta}')(\zeta'_1 - \zeta) \\ &+ \eta(\zeta_1 - \zeta) - \zeta(\eta_1 - \eta). \end{aligned} \right.$$

Ora, eliminando  $\bar{\xi}_x$  e  $\bar{\xi}'_x$  dalle due coppie (79), (85), scritte con  $b_1 = c$ ,  $c_1 = b$ , avremo:

$$(93) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi_1 + c\bar{\xi} + b\bar{\xi}' + e^{\frac{\varphi_1 - \varphi}{2}} (\xi + b\bar{\xi} + c\bar{\xi}') &= 0, \\ e^{\frac{\varphi_1 - \varphi}{2}} (\xi'_1 + c\bar{\xi}' + b\bar{\xi}) + \xi' + b\bar{\xi}' + c\bar{\xi} &= 0, \end{aligned} \right.$$

donde sottraendo:

$$(94) \quad \xi_1 - \xi' = e^{\frac{\varphi_1 - \varphi}{2}} (\xi'_1 - \xi),$$

analoghe formule valendo nelle lettere  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $\eta$ . La (94) peraltro si dedurrebbe direttamente dalle (86); ma, dobbiamo adoperare anche la prima delle (93), per ridurre la relazione (92) alla forma semplicissima:

$$(95) \quad \bar{x}'_1 - \bar{x} = e^{\frac{\varphi_1 - \varphi}{2}} (\eta'\zeta'_1 - \zeta'\eta'_1).$$

Convieni convincersi che sussiste l'analogia:

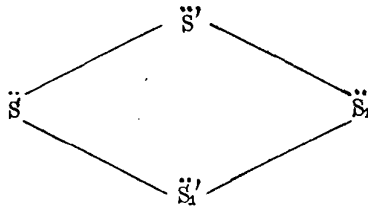
$$(96) \quad \bar{x}_1 - \bar{x}' = e^{\frac{-\varphi_1 + \varphi}{2}} (\eta'\zeta_1 - \zeta'\eta_1).$$

Osserviamo per ciò che dal combinare questa e la precedente colle seconde formole (90), (91) risulterebbe la relazione:

$$\eta_1 \zeta'_1 - \zeta_1 \eta'_1 - (\eta' \zeta - \zeta' \eta) = e \cdot \frac{-\varphi_1 + \varphi}{2} (\eta' \zeta_1 - \zeta' \eta_1) - e \cdot \frac{\varphi_1 - \varphi}{2} (\eta \zeta'_1 - \zeta \eta'_1)$$

che resta adunque da verificarsi. Ma questa riesce un'identità in virtù della (94) scritta per  $\eta$  e  $\zeta$ .

Tenuto conto che le normali alle superficie associate sono parallele a quelle delle evolventi principali stesse e, di più, che sulle seconde associate le linee asintotiche sono date da  $\alpha \pm \beta = \text{cost.}$ , trovandosi cioè in corrispondenza col sistema coniugato permanente sopra ognuna delle deformate qui considerate, le formole (95) e (96) si traducono nella seguente proposizione geometrica: *Nella trasformazione G composta di due successive trasformazioni di Bianchi a costanti eguali e di classe diversa, le seconde associate alle evolventi principali sono legate fra loro rispettivamente da due congruenze W tangenziali. Anzi, coll'appoggiarci sull'osservazione fatta alla fine del § 1, possiamo aggiungere: Le due coppie di seconde associate allora costituiscono le quattro falde focali di una quaderna di congruenze W, nel modo indicato schematicamente dalla figura:*



4. Proseguendo lo studio della trasformazione di GUICHARD  $G \equiv B_k B'_k$ , operiamo sull'espressione (87), essendovi  $b_1 = c$ ,  $c_1 = b$ , una riduzione del tutto analoga a quella eseguita mediante le (93), (94) al n.º precedente. Otterremo così le due formule equivalenti:

$$(97) \quad \begin{cases} x_1 - \xi_1 (\vartheta'_1 - \vartheta) = x - \xi (\vartheta' - \vartheta_1), \\ x_1 - \xi'_1 (\vartheta_1 - \vartheta') = x - \xi' (\vartheta - \vartheta'_1), \end{cases}$$

suscettibili della seguente interpretazione geometrica: *Se due superficie  $S, S_1$  applicabili sul paraboloido  $z = xy$  sono legate fra loro da una trasformazione  $G \equiv B_k B'_k$ , ciascuna delle due tangenti alle generatrici deformate in un qualunque punto di  $S$  incontra una di quelle uscenti dal punto corrispondente di  $S_1$ .*



Dimostreremo da ultimo una proprietà importante della trasformazione di GUICHARD, ben nota del resto anche pel caso delle quadriche generali<sup>(23)</sup>, enunciandosi col teorema seguente: *Le tangenti alle curve  $\alpha + \beta = \text{cost.}$  e  $\alpha - \beta = \text{cost.}$  del sistema coniugato permanente di S e quelle corrispondenti di  $S_1$  s'incontrano a due a due nei fuochi del raggio generico della congruenza formata dalle intersezioni dei piani tangenti, nella quale inoltre le sviluppabili sono date da  $\alpha \pm \beta = \text{cost.}$ , corrispondendo cioè ai sistemi permanenti.* Possiamo anche dire coll'adottare una nozione introdotta dal GUICHARD che: *I sistemi coniugati permanenti distesi sopra S e  $S_1$  sono armonici rispetto ad una medesima congruenza rettilinea.*

Venendo alla verifica, cominciamo dall'osservare le relazioni:

$$(98) \quad x_\alpha + x_\beta = (\xi + e^{\varphi\xi'}) (\vartheta'_\alpha + \vartheta'_\beta), \quad x_\alpha - x_\beta = (\xi - e^{\varphi\xi'}) (\vartheta'_\alpha - \vartheta'_\beta),$$

analoghe valendo per l'indice 1. Ora dalle (97) risulta con semplice calcolo:

$$x_1 - \frac{(\xi_1 \pm e^{\varphi_1\xi'_1}) (\vartheta'_1 - \vartheta)}{1 \pm e^{\frac{\varphi_1 + \varphi}{2}}} = x - \frac{(\xi \pm e^{\varphi\xi'}) (\vartheta' - \vartheta_1)}{1 \pm e^{\frac{\varphi_1 + \varphi}{2}}},$$

onde, paragonando colle (98), resta confermata l'esistenza dei punti d'incontro delle tangenti corrispondenti. Indicando questi con  $(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)})$  e  $(x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)})$  e separando i segni nelle formole precedenti, avremo:

$$x^{(1)} = x - \frac{(\xi + e^{\varphi\xi'}) (\vartheta' - \vartheta_1)}{1 + e^{\frac{\varphi_1 + \varphi}{2}}}, \quad x^{(2)} = x - \frac{(\xi - e^{\varphi\xi'}) (\vartheta' - \vartheta_1)}{1 - e^{\frac{\varphi_1 + \varphi}{2}}};$$

di qui, col porre<sup>(24)</sup>

$$(99) \quad \frac{d\psi}{\psi} = \frac{d\vartheta'}{\vartheta' - \vartheta_1} + \frac{d\vartheta}{\vartheta - \vartheta_1},$$

<sup>(23)</sup> L. BIANCHI, *Sulle trasformazioni di Guichard delle superficie applicabili sulle quadriche.* Acc. Linc., Rend. (5), 20<sub>1</sub>, (1911), 145.

<sup>(24)</sup> Qui potremmo intanto fondarci sulla seguente proposizione ausiliare: *Se le tangenti di due sistemi coniugati corrispondentisi punto per punto s'incontrano, essi sono armonici rispetto alla congruenza costituita dalle intersezioni dei piani tangenti.* Essendo, cioè,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = A \frac{\partial x}{\partial u} + B \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} = A_1 \frac{\partial x_1}{\partial u} + B_1 \frac{\partial x_1}{\partial v}$$

le relative equazioni di LAPLACE ed avendosi per ipotesi

$$(a) \quad x^{(1)} = x + h \frac{\partial x}{\partial u} = x_1 + h_1 \frac{\partial x_1}{\partial u}, \quad x^{(2)} = x + k \frac{\partial x}{\partial v} = x_1 + k_1 \frac{\partial x_1}{\partial v},$$

si deducono le espressioni seguenti:

$$x^{(1)} = x - \frac{\psi(x_\alpha + x_\beta)}{\psi_\alpha + \psi_\beta}, \quad x^{(2)} = x - \frac{\psi(x_\alpha - x_\beta)}{\psi_\alpha - \psi_\beta}.$$

In quanto alla quadratura (99) che definisce la funzione  $\psi$ , notiamo che la condizione d'integralità si verifica subito in virtù delle relazioni:

$$\begin{aligned} \vartheta'_\alpha &= e^{-\varphi} \vartheta_\beta, & \vartheta'_\beta &= e^{-\varphi} \vartheta_\alpha, & (\vartheta'_1)_\alpha &= e^{-\varphi_1} (\vartheta_1)_\beta, & (\vartheta'_1)_\beta &= e^{-\varphi_1} (\vartheta_1)_\alpha, \\ & & & & \vartheta' - \vartheta_1 &= e^{\frac{\varphi_1 - \varphi}{2}} (\vartheta - \vartheta'_1). \end{aligned}$$

Ora, per condurre a termine l'attuale dimostrazione, basterà convincersi che la  $\psi$  soddisfa appunto all'equazione di LAPLACE associata al sistema coniugato permanente  $\alpha \pm \beta = \text{cost.}$  di  $S$ . Quest'ultima essendo l'effetto dell'eliminazione di  $\xi, \xi'$  fra le tre equazioni:

$$(100) \quad \begin{cases} x_\alpha = \xi \vartheta'_\alpha + \xi' \vartheta_\alpha, & x_\beta = \xi \vartheta'_\beta + \xi' \vartheta_\beta, \\ x_{\alpha\alpha} - x_{\beta\beta} = \xi(-\varphi_\alpha \vartheta'_\alpha + \varphi_\beta \vartheta'_\beta) + \xi'(\varphi_\alpha \vartheta_\alpha - \varphi_\beta \vartheta_\beta), \end{cases}$$

facciamo corrispondentemente

$$\frac{\vartheta'_\alpha}{\vartheta' - \vartheta_1} = \psi\sigma, \quad \frac{\vartheta_\alpha}{\vartheta - \vartheta'_1} = \psi\sigma'$$

deducesi:

$$(b) \quad x^{(1)} - x^{(2)} = h \frac{\partial x}{\partial u} - k \frac{\partial x}{\partial v} = h_1 \frac{\partial x_1}{\partial u} - k_1 \frac{\partial x_1}{\partial v},$$

poi, derivando le (a):

$$\frac{\partial x^{(1)}}{\partial v} = \left( \frac{\partial h}{\partial v} + Ah \right) \frac{\partial x}{\partial u} + (1 + hB) \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial x^{(2)}}{\partial u} = (1 + Ak) \frac{\partial x}{\partial u} + \left( \frac{\partial k}{\partial u} + Bk \right) \frac{\partial x}{\partial v},$$

dove ai secondi membri possono sostituirsi espressioni analoghe coll'indice 1. Ora, siccome oltre alla (b) non può aver luogo nessun'altra relazione lineare ed omogenea fra le derivate prime di  $x, x_1$ , senza che i piani tangenti e con ciò i sistemi coniugati si confondano, si avrà necessariamente:

$$\frac{\partial x^{(1)}}{\partial v} = \lambda(x_1 - x_2), \quad \frac{\partial x^{(2)}}{\partial u} = \mu(x_1 - x_2).$$

Di qui è manifesto che i punti d'incontro delle tangenti formano i fuochi e le rigate  $u = \text{cost.}, v = \text{cost.}$  le sviluppabili nella congruenza considerata. L'annullarsi dell'uno o dei due fattori di proporzionalità  $\lambda, \mu$  spetta come si vede al caso degenerare che il rispettivo luogo dei punti d'incontro si riduca ad una curva, le sviluppabili diventando superficie coniche.

per modo di avere

$$\psi_x = \sigma \vartheta'_\alpha + \sigma' \vartheta_\alpha, \quad \psi_\beta = \sigma \vartheta'_\beta + \sigma' \vartheta_\beta,$$

onde derivando e riducendo:

$$\psi_{\alpha\alpha} - \psi_{\beta\beta} = \sigma(-\varphi_\alpha \vartheta'_\alpha + \varphi_\beta \vartheta'_\beta) + \sigma'(\varphi_\alpha \vartheta_\alpha - \varphi_\beta \vartheta_\beta).$$

Confrontando questa terza d'equazioni con (100), si conchiude che l'assunto è esatto.

Aggiungiamo che la formula (99) per la funzione  $\psi$  è essenziale, anche nel caso delle quadriche generali, dal punto di vista di una trattazione diretta della trasformazione di GUICHARD, sulla quale converrà ritornare in altra occasione. Osserviamo in fine che il modo, da ultimo considerato, di comporre due trasformazioni asintotiche d'un carattere speciale in guisa da far nascerne una trasformazione del tipo *armonico* si estende all'intera classe delle superficie  $R$ , caratterizzate, nel riferirle alle linee asintotiche, dalla relazione  $\frac{\partial}{\partial\beta} \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial\alpha} \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}$  <sup>(25)</sup>.

---

<sup>(25)</sup> H. JONAS, *Über die Konstruktion der W — Kongruenzen zu einem gegebenen Brennflächenmantel und über die Transformation der R — Flächen*. Jahresber. der Deutschen Math. Vereinigung, 29, (1920), 40.



# Costruzioni di curve sghembe aventi il massimo numero di circuiti

di MARGHERITA PIAZZOLLA-BELOCH, a Palermo

1. Mentre nel piano il metodo di « piccola variazione » <sup>(1)</sup> è stato applicato per dedurre svariati tipi di curve d'ordine assegnato, aventi il massimo numero di circuiti, ricorrendo a diverse curve ausiliarie <sup>(2)</sup>, per le curve sghembe di dato ordine, dotate del massimo numero di circuiti (situate, come è noto <sup>(3)</sup> sopra superficie del secondo ordine) si conoscono soltanto i tipi

---

<sup>(1)</sup> Il metodo di « piccola variazione », che consiste nel dedurre da una curva di ordine assegnato, spezzantesi in più curve di ordine inferiore, una curva irriducibile del dato ordine, è stato costantemente adoperato per la costruzione di curve soddisfacenti a date condizioni.

Già PLÜCKER se ne serve (v. *Theorie der algebraischen Curven*, 1839) per la generazione di una curva d'ordine  $n$  mediante  $n$  rette. Sembra che KLEIN sia stato il primo ad introdurlo sistematicamente per la ricerca delle singularità reali di curve e superficie algebriche (v. *Eine neue Relation zwischen den Singularitäten einer algebraischen Kurve*, *Math. Ann.*, X, pp. 199-209; *Über Flächen dritter Ordnung*, *Math. Ann.*, Bd. VI, pp. 551-581).

<sup>(2)</sup> A. HARNACK: *Über die Vielteiligkeit ebener algebraischen Kurven*. (*Math. Ann.*, X, pagg. 189-198).

D. HILBERT: *Über die reellen Züge algebraischer Kurven*. (*Math. Ann.*, Bd. XXXVIII, pagg. 115-138).

L. S. HULBERT: *A Class of New Theorems on the Number and Arrangement of the real Branches of Plane Algebraic Curves*. (*American Journ. of Math.*, vol. 14, pagg. 246-250).

V. RAGSDALE: *On the Arrangement of the Real Branches of Plane Algebraic Curves*. (*American Journ. of Math.*, vol. 28, pagg. 377-404).

L. BRUSOTTI: *Sulla generazione delle curve piane di genere  $p$ , dotate di  $p+1$  circuiti*. (*Rend. R. Ist. Lomb.*, serie II, vol. XLIII, 1910, pagg. 143-156); *Sulla generazione di curve piane algebriche, reali, mediante piccola variazione di una curva spezzata* (*Ann. di Mat.*, serie III, t. XXII, pp. 117-169); *Nuovi metodi costruttivi di curve piane di ordine assegnato, dotate del massimo numero di circuiti* (*Rend. R. Ist. Lombardo*, serie II, vol. XLVII, XLVIII, XLIX); *Curve generatrici e curve aggregate nella costruzione di curve piane, ecc.* (*Rend. Circolo Mat. Palermo*, t. XLII, pp. 138-144).

A. WIMAN: *Über die reellen Züge der ebenen algebraischen Kurven* (*Math. Annalen*, Bd. 90, pp. 222-228).

<sup>(3)</sup> HALPHEN: *Recherches de géométrie à  $n$  dimensions*, *Bull. de la Soc. Math. de France*, vol. II, pp. 31-52; NOETHER: *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven*, *Crelle's Journ.*, vol. 93, pp. 271-318.

costruiti da HILBERT <sup>(1)</sup>, con tale metodo, per dimostrare l'esistenza effettiva delle curve suddette.

HILBERT si serve di una *conica ausiliaria* per la costruzione di curve algebriche sghembe, d'ordine  $n$ , irriducibili, prive di singolarità col massimo numero di circuiti aventi soli circuiti d'ordine pari <sup>(2)</sup> se  $n$  è pari, e un circuito d'ordine dispari più circuiti d'ordine pari, se  $n$  è dispari; e di una *quartica ausiliaria composta di due circuiti d'ordine dispari* per costruire curve sghembe con più circuiti d'ordine dispari. In queste costruzioni HILBERT non si occupa della mutua posizione dei circuiti.

Ora io farò vedere che, usando una *quartica ausiliaria composta di due circuiti d'ordine pari* si possono costruire sopra quadriche a punti parabolici o quadriche a punti iperbolici, nuovi tipi di curve sghembe dotate del massimo numero di circuiti, che presentano notevoli configurazioni, curve da me prevedute in due mie precedenti Note <sup>(3)</sup> e di cui allora tralasciai le dimostrazioni d'esistenza.

Lo stesso metodo di HILBERT della conica ausiliaria può condurre, come pure esporrò, alla costruzione di nuovi tipi di curve, situate sopra quadriche a punti ellittici, e anch'esse prevedute nelle dette mie Note <sup>(4)</sup>.

## I.

### Applicazioni del metodo di Hilbert della conica ausiliaria.

#### § 1.

**2. Costruzione di curve algebriche d'ordine  $n$  (pari  $\geq 6$ ), prive di singolarità, situate sopra quadriche a punti ellittici, e dotate del massimo numero di circuiti, tra cui  $\frac{n}{2} - 1$  omocentrici tra loro <sup>(5)</sup>.**

<sup>(1)</sup> Loc. cit.

<sup>(2)</sup> Per la definizione di circuiti d'ordine pari e d'ordine dispari, cfr. STAUDT: *Geometrie der Lage*, § 12, pag. 153.

<sup>(3)</sup> *Sulla configurazione delle curve situate sopra quadriche e in particolare sulla configurazione delle curve algebriche sghembe col massimo numero di circuiti.* (Rend. R. Acc. Lincei, vol. XXII, serie V, 2° sem., fasc. 2° e 3°). Nelle citazioni seguenti questa mia Nota sarà richiamata con l'indicazione L.

<sup>(4)</sup> Id. id.

<sup>(5)</sup> Cioè riducibili tutti ad uno stesso punto per deformazione continua, restando sulla superficie, e senza che essi si attraversino mai durante la deformazione (v. loc. cit., L, § 5). La denominazione *circuiti omocentrici* fu da me introdotta, loc. cit., L, § 5. Per circuiti piani *omocentrici* gli Inglesi dicono *nested branches*, e i Tedeschi, seguendo HILBERT, *eingeschachtelte Züge*.

Sia data una quadrica a punti ellittici, che potremo supporre un ellissoide di equazione  $q = 0$ .

Sulla quadrica sia tracciata un'ellisse  $C^2$ , intersezione della quadrica con un piano  $f_1 = 0$ . Consideriamo poi un'ellisse ausiliaria  $E$ , intersezione della quadrica con un piano  $p = 0$ , e che seghi l'ellisse data  $C^2$  in due punti:  $T_1, T_2$ . Fissiamo sull'ellisse  $E$  in uno dei tratti in cui la dividono i punti  $T_1, T_2$ , quattro punti ad arbitrio  $U_1, U_2, U_3, U_4$ , susseguentisi sull'ellisse nell'ordine scritto, e costruiamo due piani passanti rispettivamente per le coppie di punti  $U_1, U_2$ ; e  $U_3, U_4$ . Siano  $u_1 = 0, u_2 = 0$  rispettivamente le equazioni di questi piani.

Se consideriamo allora l'equazione

$$f_2 \equiv f_1 p + \lambda u_1 u_2 = 0$$

essa rappresenterà, per  $\lambda$  sufficientemente piccola, una superficie del 2° ordine segante l'ellissoide secondo una curva del quarto ordine  $C^4$  con due circuiti  $g_1, g_2$ ; di cui uno,  $g_2$  avente con l'ellisse ausiliaria  $E$  quattro punti in comune (susseguentisi sulla curva  $C^4$  e sull'ellisse  $E$  nel medesimo ordine).

Applicando a questa curva lo stesso procedimento, fissiamo sopra l'ellisse  $E$ , in uno dei tratti in cui la dividono i punti  $U_1, U_2, U_3, U_4$ , sei punti  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ , susseguentisi sull'ellisse nell'ordine scritto, e costruiamo tre piani  $p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 = 0$  passanti rispettivamente per le coppie di punti  $P_1, P_2$ ;  $P_3, P_4$ ;  $P_5, P_6$ .

L'equazione:

$$f_3 \equiv f_2 p + \lambda p_1 p_2 p_3 = 0$$

rappresenterà allora, per  $\lambda$  abbastanza piccola, una superficie del terzo ordine, segante l'ellissoide secondo una curva del 6° ordine  $C^6$ , avente cinque circuiti  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$ , (ossia il massimo per  $n = 6$ ), ciò che si potrà sempre ottenere costringendo la superficie  $f_3$  a passare per un punto scelto opportunamente sulla quadrica e precisamente: considerando uno dei quattro *occhielli* (1) formati dall'insieme dei circuiti  $g_2$  ed  $E$ , e le due regioni in cui esso divide la superficie, si dovrà far passare  $f_3$  per un punto di quella tra queste due regioni in cui non giacciono gli altri occhielli.

(1) Considerando due circuiti segantisi in un numero  $n$  di punti reali  $A_1, A_2, \dots, A_n$  si può chiamare *occhietto* l'insieme di due archi, l'uno dell'uno e l'altro dell'altro circuito, aventi in comune due soli dei punti  $A$ .

Per la denominazione analoga nel piano, cfr. p. es.: ENRIQUES-CHISINI: *Lezioni sulla Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, vol. II, libro III, cap. IV, § 36.

Poichè, per il modo stesso in cui la curva  $C^4$  è stata generata, il circuito  $g_1$  giace rispetto ad ognuno dei detti occhielli nella regione della superficie in cui giacciono tutti gli altri, risulta che dei circuiti  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$  della curva  $C^6$ , mai tre sono omocentrici tra loro, ma essi sono omocentrici a due a due. Uno di essi  $c_5$ , sega l'ellisse  $E$  nei 6 punti  $P_1, P_2, \dots, P_6$ , susseguentisi sul circuito  $c_5$  e sull'ellisse  $E$  nel medesimo ordine.

Osservando che dei quattro tratti staccati dall'ellisse  $E$  sul circuito  $g_2$ , due si trovano situati sulla quadrica dall'una banda rispetto al piano dell'ellisse  $E$  e due dall'altra, risulta che, fatta astrazione dal circuito  $c_5$  segante l'ellisse  $E$  nei 6 punti  $P_1, P_2, \dots, P_6$ , degli altri circuiti della curva  $C^6$  costruita almeno uno p. es.  $c_1$  si troverà sulla quadrica rispetto al piano dell'ellisse  $E$  da banda opposta ai rimanenti.

Ciò posto dei sei occhielli formati dall'insieme dell'ellisse  $E$  e dal circuito  $c_5$ , scegliamone uno tale che i quattro circuiti rimanenti della curva  $C^6$  giacciono tutti in una stessa delle due regioni  $S_1$  e  $S_2$  in cui l'occhiello stesso divide la superficie, e precisamente nella regione  $S_2$  in cui giacciono gli altri occhielli formati da  $g_2$  ed  $E$ . (Un occhiello siffatto evidentemente esiste).

Fissiamo sul tratto dell'ellisse  $E$  facente parte dell'occhiello considerato otto punti  $Q_1, Q_2, \dots, Q_8$ , susseguentisi sull'ellisse  $E$  nell'ordine scritto, e consideriamo quattro piani  $q_1 = 0, q_2 = 0, q_3 = 0, q_4 = 0$  passanti rispettivamente per le coppie di punti  $Q_1, Q_2; Q_3, Q_4; Q_5, Q_6; Q_7, Q_8$ .

Formiamo poi l'equazione:

$$f_4 = f_3 p + \lambda q_1 q_2 q_3 q_4 = 0$$

che, per  $\lambda$  sufficientemente piccola, rappresenta una superficie del quarto ordine, segante la quadrica  $q$  in una curva dell'ottavo ordine  $C^8$  (prossima all'insieme delle curve  $C^6$  ed  $E$ ), composta di 10 circuiti (ossia il massimo per  $n = 8$ ), ciò che si potrà sempre ottenere costringendo la superficie  $f_4$  a passare per un punto scelto opportunamente sulla superficie, p. es. un punto della regione  $S_1$  suddetta.

I circuiti  $c_1, c_2, c_3, c_4$ , danno così luogo, ognuno ad un nuovo circuito  $c'_1, c'_2, c'_3, c'_4$ , e il circuito  $c_5$  insieme all'ellisse ausiliaria  $E$  dà luogo a sei nuovi circuiti  $c'_5, c'_6, c'_7, c'_8, c'_9, c'_{10}$ , di cui uno  $c'_{10}$  segante l'ellisse  $E$  nei punti  $Q_1, Q_2, \dots, Q_8$ ; (susseguentisi sul circuito  $c'_{10}$  e sull'ellisse  $E$  nel medesimo ordine), ed uno  $c'_5$  che sulla superficie lascia da bande opposte il circuito  $c'_1$  rispetto ai rimanenti, ossia forma con  $c'_1$  e uno qualunque dei circuiti rimanenti una serie di tre circuiti omocentrici tra loro.

Abbiamo cioè costruita una curva dell'ottavo ordine col massimo numero



di circuiti, che presenta tre circuiti omocentrici tra loro, ossia il massimo numero di circuiti omocentrici tra loro, compatibili con l'ordine <sup>(1)</sup>.

La curva  $C^8$  si trova rispetto all'ellisse ausiliaria  $E$  nelle stesse condizioni della curva  $C^6$  precedente, e quindi ad essa si potrà applicare lo stesso procedimento, deducendone una curva  $C^{10}$  del 10<sup>mo</sup> ordine dello stesso tipo.

Così continuando si passerà da una curva algebrica d'ordine  $n$  (pari) priva di singolarità, dotata del massimo numero di circuiti, ossia  $\frac{1}{4}(n-2)^2 + 1$ , tra cui  $\frac{n}{2} - 1$  <sup>(2)</sup> omocentrici tra loro (ed uno secante l'ellisse ausiliaria  $E$  in  $n$  punti) ad una curva d'ordine  $n + 2$  dello stesso tipo <sup>(3)</sup>.

§ 2.

**3. Costruzioni di curve algebriche d'ordine  $n$  (pari  $\geq 6$ ) situate sopra quadriche a punti parabolici (o sopra quadriche a punti iperbolici) e dotate del massimo numero di circuiti, tra cui  $\frac{n}{2} - 2$  monocentrici (rispettivamente di 2<sup>a</sup> specie) <sup>(4)</sup>.**

Sia data una quadrica a punti parabolici, che, per fissare le idee, possiamo supporre un cilindro ellittico, di equazione  $q = 0$ .

Prendiamo sul cilindro un'ellisse  $C^2$ , intersezione del cilindro con un piano  $f_1 = 0$ . Sia poi  $E$  un'ellisse ausiliaria, intersezione del cilindro con un piano  $p = 0$ , e che seghi l'ellisse  $C^2$  in due punti  $T_1, T_2$ . L'insieme delle curve  $C^2$  ed  $E$  divide la superficie cilindrica in tre regioni, in due delle quali  $\Sigma_1, \Sigma_2$  non si possono tracciare per intero dei circuiti d'ordine dispari, nella terza  $\Sigma_3$  invece, se ne possono tracciare.

Sopra l'ellisse  $E$ , in uno dei tratti in cui la dividono i punti  $T_1, T_2$ , fissiamo quattro punti:  $U_1, U_2, U_3, U_4$  ad arbitrio, susseguentisi sull'ellisse  $E$  nell'ordine scritto. Conduciamo un piano per i punti  $U_1, U_2$ , e un altro piano per i punti  $U_3, U_4$ , e siano  $u_1 = 0, u_2 = 0$  rispettivamente le equazioni di questi piani. L'equazione:

$$f_2 \equiv f_1 p + \lambda u_1 u_2 = 0$$

<sup>(1)</sup> V. loc. cit., L, § 5.

<sup>(2)</sup> Ossia il massimo compatibile con l'ordine, come ho dimostrato, loc. cit., L, § 5.

<sup>(3)</sup> Resta così provata sopra quadriche a punti ellittici l'esistenza di curve algebriche d'ordine  $n$  (pari  $\geq 6$ ) prive di singolarità, col massimo numero di circuiti, tra cui  $\frac{n}{2} - 1$  omocentrici tra loro (curve da me indicate, loc. cit., § 5).

<sup>(4)</sup> Ossia il massimo compatibile con l'ordine, come ho dimostrato, loc. cit., L, § 10 e § 17.

rapresenterà allora, per  $\lambda$  abbastanza piccola, una superficie del 2° ordine che sega il cilindro  $q$  secondo una curva del 4° ordine  $C^4$  composta di due circuiti  $c_1, c_2$ , (prossimi all'insieme delle curve  $C^2$  ed  $E$ ), di cui uno  $c_2$  segante l'ellisse  $E$  nei 4 punti  $U_1, U_2, U_3, U_4$ . Costringendo la superficie  $f_2$  a passare per un punto di una delle regioni  $\Sigma_1$  o  $\Sigma_2$ , potremo ottenere che i due circuiti  $c_1$  e  $c_2$ , siano di 1ª specie (¹).

Considerando i quattro tratti staccati dal circuito  $c_2$  sull'ellisse  $E$ , scegliamone uno in cui non cadano i punti  $T_1, T_2$ ; sia p. es. il tratto  $s$  limitato dai punti consecutivi  $U_1, U_2$ . In questo tratto fissiamo 6 punti  $P_1, P_2, \dots, P_6$  susseguentisi sull'ellisse  $E$  nell'ordine scritto, e consideriamo tre piani  $p_1=0, p_2=0, p_3=0$ , passanti rispettivamente per le coppie di punti  $P_1, P_2; P_3, P_4; P_5, P_6$ . Allora la equazione:

$$f_3 \equiv f_2 p + \lambda p_1 p_2 p_3 = 0$$

rapresenterà per  $\lambda$  sufficientemente piccola una superficie del 3° ordine, segante il cilindro  $q$  secondo una curva  $C^6$  del 6° ordine. Costringendo la superficie  $f_3$  a passare per un punto scelto opportunamente sulla superficie (²), potremo ottenere che la curva  $C^6$  presenti cinque circuiti,  $c'_1, c'_2, c'_3, c'_4, c'_5$ , (ossia il massimo per  $n=6$ ). Tra essi ve ne sarà uno monocentrico  $c'_4$  ed uno  $c'_5$  segante l'ellisse  $E$  nei 6 punti  $P_1, P_2, \dots, P_6$ . La curva  $C^6$  si trova quindi, rispetto all'ellisse  $E$ , nelle stesse condizioni, come la curva  $C^4$  precedente, e ad essa potremo applicare lo stesso procedimento, deducendone una curva dell'8° ordine dello stesso tipo, ossia col massimo numero di circuiti, tra cui *due* monocentrici, ed uno segante l'ellisse  $E$  in 8 punti.

Così continuando riusciremo a dedurre da una curva d'ordine  $n$  (pari)

(¹) Ho chiamato circuito di 1ª specie un circuito d'ordine pari riducibile ad un punto per deformazione continua senza uscire dalla superficie, circuito di 2ª specie un circuito d'ordine pari che non si possa ridurre ad un punto per deformazione continua senza uscire dalla superficie. Sulle quadriche a punti parabolici (coni e cilindri) non esistono circuiti di 2ª specie propriamente detti, ma esistono circuiti d'ordine pari, tutti riducibili al vertice del cono, per deformazione continua senza uscire dalla superficie, circuiti da me detti *monocentrici*, cfr. loc. cit., L, § 2 e § 3.

(²) E precisamente nel modo seguente. Dicendo ancora *occhiello* l'insieme di due archi, l'uno del circuito  $c_2$  e l'altro dell'ellisse  $E$ , che abbiano in comune due soli dei punti  $U$  d'intersezione di  $c_2$  ed  $E$ , scegliamo tra i quattro occhielli formati dall'insieme di  $c_2$  ed  $E$  quello di cui fa parte il tratto  $s$  detto sopra. Quest'occhiello divide la superficie in due regioni (mentre si osservi che tra gli altri tre occhielli ve ne è uno che considerato come taglio non spezza la connessione della superficie).

Basterà allora scegliere il punto per cui deve passare la superficie  $f_3$  in quella di queste due regioni in cui non giacciono gli altri occhielli formati da  $c_2$  ed  $E$ .

col massimo numero di circuiti, tra cui  $\frac{n}{2} - 2$  monocentrici, ed uno dei rimanenti segante l'ellisse  $E$  in  $n$  punti, una curva d'ordine  $n + 2$  dello stesso tipo. La stessa dimostrazione vale per curve situate sopra quadriche a punti iperbolici (<sup>4</sup>).

## II.

### Metodo della quartica ausiliaria.

**4. Costruzione di curve algebriche, d'ordine  $n$ , (pari  $\geq 6$ ), prive di singolarità, situate sopra quadriche a punti parabolici od iperbolici, dotate del massimo numero di circuiti, tra cui una serie di  $l$  circuiti disposti in modo che il primo sia tutto situato nella regione interna al secondo, questo sia**

(<sup>4</sup>) Resta così dimostrata, sopra quadriche a punti parabolici (e sopra quadriche a punti iperbolici), l'esistenza di curve algebriche d'ordine  $n$ , (pari  $\geq 6$ ) prive di singolarità, dotate del massimo numero di circuiti, tra cui  $\frac{n}{2} - 2$  monocentrici, (rispettivamente di 2<sup>a</sup> specie), ossia il massimo compatibile con l'ordine (v. loc. cit., L, § 10 e § 17).

Per le curve di questo tipo si può dimostrare che la *disposizione dei circuiti di prima specie* rispetto ai circuiti monocentrici (rispettivamente di 2<sup>a</sup> specie) *non può essere qualunque*.

Sia infatti data una curva  $C^n$  ( $n$  pari  $\geq 6$ ) del detto tipo, situata p. es. sopra un cono di vertice  $V$ .

Consideriamo le regioni in cui la superficie conica viene divisa dai  $\frac{n}{2} - 2$  circuiti monocentrici e dal vertice  $V$ , ossia le regioni intermedie ai circuiti monocentrici e le (due) regioni confinanti col vertice, e limitate inoltre ciascuna da un circuito monocentrico.

Osserviamo che i circuiti di 1<sup>a</sup> specie della curva sono in numero di  $\frac{1}{4}(n-2)^2 + 1 - \left(\frac{n}{2} - 2\right)$ , e quindi al minimo 4 (per  $n = 6$ ).

Ciò posto, dico, che se vi sono dei circuiti di 1<sup>a</sup> specie (in numero  $\geq 1$ ) in una delle due dette regioni confinanti col vertice, non ve ne potrà essere alcuno nell'altra. Infatti, se ve ne fosse p. es. uno,  $c_1$  in una di queste regioni, e uno  $c_2$  nell'altra, detto  $c_3$  un altro circuito qualsiasi della curva (che certo esiste per quel che abbiamo osservato sopra), un piano passante per tre punti, situati rispettivamente sopra  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$ , segherebbe inoltre necessariamente tutti i circuiti monocentrici della curva, ed avrebbe evidentemente in comune con la curva  $6 + 2\left(\frac{n}{2} - 2\right) = n + 2$  punti, ciò che non è possibile. Dunque, *in una delle due regioni confinanti col vertice e limitate inoltre da un circuito monocentrico, non vi potrà essere alcun circuito di prima specie, se ve ne sono nell'altra*, mentre nulla vieta che ve ne siano anche nelle regioni intermedie ai circuiti monocentrici. Per il caso  $n = 6$ , cfr. COMESSATTI: *Fondamenti per la geometria sopra le superficie razionali dal punto di vista reale*, (Math. Annalen, Bd. LXXIII, pp. 1-72), § 5, n. 35.

tutto situato nella regione interna al terzo, e così di seguito, il penultimo sia tutto situato nella regione interna all'ultimo, dove  $l$  è uguale al massimo intero contenuto in  $\frac{n}{4}$  (<sup>4</sup>).

Sia data una quadrica a punti parabolici, che possiamo supporre un cilindro, di equazione  $q=0$ , su cui vogliamo costruire una curva d'ordine  $n$  del detto tipo.

Distinguiamo i casi  $n=4\nu$ ,  $n=4\nu+1$ ,  $n=4\nu+2$ ,  $n=4\nu+3$ .

1°)  $n=4\nu$ . Fissiamo sul cilindro dato  $q$  una quartica sghemba ausiliaria  $A^4$ , composta di due circuiti  $a_1, a_2$  di prima specie, intersezione del cilindro con una quadrica  $s_2=0$ . Seghiamo il circuito  $a_2$  con 4 generatrici  $g_1, g_2, g_3, g_4$  del cilindro, rispettivamente nei punti  $P_1, P_2; P_3, P_4; P_5, P_6; P_7, P_8$ ; e sia l'ordine scritto quello in cui le dette generatrici si susseguono sul cilindro. Degli 8 tratti, determinati dalle generatrici  $g_1, g_2, g_3, g_4$  sul circuito  $a_2$ , i sei intermedi avranno ognuno gli estremi sopra due generatrici  $g$ , distinte tra loro, mentre gli altri due  $\alpha_1, \alpha_2$  li avranno ognuno sopra una stessa generatrice (rispettivamente  $g_1, g_4$ ). Siano  $p_1=0, p_2=0$ , rispettivamente le equazioni dei piani delle coppie di generatrici  $g_1, g_2; g_3, g_4$ .

Allora l'equazione:

$$f_2 \equiv s_2 + \lambda p_1 p_2 = 0$$

rappresenta, per  $\lambda$  sufficientemente piccola, una superficie del 2° ordine, che sega il cilindro secondo una quartica sghemba  $C^4$ , prossima alla curva  $A^4$ , composta di due circuiti di prima specie  $c_1, c_2$ , di cui uno  $c_1$  prossimo al circuito ausiliario  $a_1$ , e l'altro  $c_2$  segante il circuito ausiliario  $a_2$  nei punti  $P_1, P_2, \dots, P_8$ , susseguentisi sopra i circuiti  $c_2$  ed  $a_2$  nel medesimo ordine.

Seghiamo poi il tratto  $\alpha_1$  (oppure  $\alpha_2$ ) del circuito  $a_2$ , con otto generatrici del cilindro  $g'_1, g'_2, \dots, g'_8$ , susseguentisi sul cilindro nell'ordine scritto, e siano  $Q_1, Q_2; Q_3, Q_4; \dots; Q_{15}, Q_{16}$ , rispettivamente i punti d'intersezione di ciascuna generatrice col circuito  $a_2$ , che si troveranno situati tutti sul detto circuito tra i punti consecutivi  $P_1, P_2$ , estremi del tratto  $\alpha_1$  (oppure tra i punti consecutivi  $P_7, P_8$  estremi del tratto  $\alpha_2$ ).

(<sup>4</sup>) Ho dimostrato infatti (loc. cit., I, § 8) che per una curva algebrica d'ordine  $n$ , priva di singolarità, situata sopra una quadrica a punti parabolici od iperbolici, il numero dei circuiti disposti nel modo detto, non può superare il massimo intero contenuto in  $\frac{n}{4}$ .

Siano  $p'_1 = 0, p'_2 = 0, p'_3 = 0, p'_4 = 0$ , rispettivamente le equazioni dei piani delle coppie di generatrici  $g'_1, g'_2; g'_3, g'_4; g'_5, g'_6; g'_7, g'_8$ . L'equazione

$$f_4 \equiv f_2 s_2 + \lambda' p'_1 p'_2 p'_3 p'_4 = 0$$

rappresenta allora, per  $\lambda'$  sufficientemente piccola, una superficie del 4° ordine, segante il cilindro  $q$  secondo una curva dell'8° ordine  $C^8$ , (prossima all'insieme delle curve  $C^4$  e  $A^4$ ) composta del massimo numero di circuiti, ossia 10, e del tipo voluto.

Costringendo la superficie  $f_4$  a passare per un punto scelto opportunamente sulla superficie cilindrica <sup>(1)</sup>, il circuito  $c_2$  della curva  $C^4$  insieme al circuito ausiliario  $a_2$  darà luogo a 8 nuovi circuiti:  $c'_3, c'_4, c'_5, \dots, c'_{10}$ , tra cui uno  $c'_{10}$  segante  $a_2$  nei 16 punti  $Q_1, Q_2, \dots, Q_{16}$ ; mentre i circuiti  $c_1$  e  $a_1$ , daranno luogo ognuno ad un nuovo circuito  $c'_1$  e  $c'_2$ , di cui uno sarà tutto contenuto nella regione interna all'altro. La curva  $C^8$  è quindi del tipo voluto, e si trova rispetto ai circuiti ausiliari  $a_1$  e  $a_2$ , nelle stesse condizioni come la curva  $C^4$  precedente. Potremo cioè operare su di essa in modo analogo, deducendone una curva del 12° ordine del tipo voluto, e così di seguito riusciremo a dedurre da una curva d'ordine  $n = 4v$ , intersezione totale del cilindro con una superficie  $f_{2v}$  d'ordine  $2v$ , e dotata del massimo numero di circuiti, ossia  $\frac{1}{4}(n-2)^2 + 1$  <sup>(2)</sup>, tra cui  $\frac{n}{4} = v$  situati il primo tutto nella regione interna al secondo, questo tutto nella regione interna al terzo, e così di seguito il penultimo tutto nella regione interna all'ultimo, ed uno dei rimanenti segante il circuito ausiliario  $a_2$  in  $2n$  punti, una curva d'ordine  $n+4 = 4(v+1)$  avente  $\frac{(n-2)^2}{4} + 1 - 1 + 2n + 1 = \frac{\{(n+4)-2\}^2}{4} + 1$  circuiti (ossia il massimo per l'ordine  $n+4$ ), tra cui  $\frac{n}{4} + 1 = \frac{n+4}{4} = v+1$  situati nel modo detto ed uno segante  $a_2$  in  $2(n+4)$  punti; una curva cioè dello stesso tipo della precedente. Resta quindi provata sul cilindro l'esistenza di curve d'ordine  $4v$  del tipo voluto.

2°)  $n = 4v + 1$ . Partiamo ancora dalla quartica ausiliaria  $A^4$  e sia  $C^4$  una generatrice del cilindro, che seghi il circuito  $a_2$  in due punti  $P_1, P_2$ .

<sup>(1)</sup> E precisamente per un punto di quella delle due regioni in cui uno qualunque degli occhielli, formati dall'insieme dei circuiti  $a_2$  e  $c_2$ , divide la superficie, in cui non giacciono gli altri occhielli.

<sup>(2)</sup> V. HILBERT, loc. cit.

Per  $C^4$  conduciamo un piano  $p=0$ , che non seghi  $A^4$  ulteriormente in punti reali. Questo piano avrà quindi in comune col cilindro una seconda generatrice  $r$ , non segante  $A^4$ .

Seghiamo uno dei due tratti, determinati sul circuito  $a_2$  dai due punti  $P_1, P_2$ , con cinque generatrici  $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5$ , (susseguentisi sul cilindro nell'ordine scritto), e siano  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, \dots, Q_9, Q_{10}$ , rispettivamente i punti d'intersezione col circuito  $a_2$ . Conduciamo poi i tre piani  $rg_1, g_2g_3, g_4g_5$ , che abbiano rispettivamente per equazioni  $p_1=0, p_2=0, p_3=0$ ; e poniamo:

$$f_3 \equiv ps_2 + \lambda p_1 p_2 p_3 = 0$$

equazione che rappresenta, per  $\lambda$  abbastanza piccola, una superficie  $f_3$  del 3° ordine, segante il cilindro  $q$  secondo la retta  $r$  e una curva del 5° ordine  $C^5$  avente tre circuiti  $c_1, c_2, c_3$  (ossia il massimo per  $n=5$ ) di cui uno  $c_3$  d'ordine dispari, ed uno  $c_2$  segante  $a_2$  nei 10 punti  $Q_1, Q_2, \dots, Q_{10}$ . (Ciò si potrà sempre ottenere costringendo la superficie  $f_3$  a passare per un punto scelto opportunamente sulla superficie cilindrica).

I punti  $Q_1, Q_2, \dots, Q_{10}$ , determinano sul circuito  $a_2$  dieci tratti, di cui gli 8 *intermedi* avranno ognuno gli estremi sopra due generatrici distinte, e gli altri due li avranno ognuno sopra una sola generatrice (rispettivamente  $g_1, g_5$ ).

Seghiamo uno di questi ultimi due tratti con 9 generatrici  $g'_1, g'_2, \dots, g'_9$  (susseguentisi sul cilindro nell'ordine scritto) rispettivamente nei punti  $R_1, R_2; R_3, R_4; \dots; R_{17}, R_{18}$ .

Siano  $p'_1=0, p'_2=0, p'_3=0, p'_4=0, p'_5=0$  rispettivamente le equazioni dei 5 piani  $rg'_1, g'_2g'_3; g'_4g'_5; g'_6g'_7; g'_8g'_9$ . Poniamo:

$$f_5 \equiv f_3 s_2 + \lambda' p'_1 p'_2 p'_3 p'_4 p'_5 = 0$$

che, per  $\lambda'$  abbastanza piccola, sarà l'equazione di una superficie del quinto ordine  $f_5$ , segante il cilindro  $q$  secondo la retta  $r$  e una curva del nono ordine  $C^9$  con 13 circuiti (ossia il massimo per  $n=9$ ), ciò che si può sempre ottenere costringendo la superficie  $f_5$  a passare per un punto scelto opportunamente sulla superficie cilindrica (<sup>1</sup>).

La curva  $C^9$ , così ottenuta, sarà del tipo voluto, poichè uno dei 13 circuiti passa per i 18 punti  $R$ , e due sono tali che l'uno sia tutto situato nella

(<sup>1</sup>) E precisamente considerando, tra gli occhielli formati dall'insieme dei circuiti  $a_2$  e  $c_2$ , uno di cui fa parte uno dei tratti *intermedi* detti sopra, e le due regioni in cui quest'occhiello divide la superficie, si dovrà far passare  $f_5$  per un punto appartenente a quella di queste due regioni in cui non giacciono gli altri occhielli.

regione interna all'altro. Potremo applicare alla curva  $C^3$  ancora lo stesso procedimento, e così di seguito riusciremo a dedurre da una curva d'ordine  $n = 4\nu + 1$  (intersezione di  $q$  con una superficie  $f_{2\nu+1}$  d'ordine  $2\nu + 1$  passante per  $r$ ) avente il massimo numero di circuiti, ossia  $\frac{1}{4}(n-1) \cdot (n-3) + 1$  (tra cui uno secante il circuito ausiliario  $a_2$  in  $2n$  punti, e  $\frac{n-1}{4} = \nu$  situati il primo tutto nella regione interna al secondo, questo tutto nella regione interna al terzo e così di seguito il penultimo tutto nella regione interna all'ultimo), una curva d'ordine  $n + 4 = 4(\nu + 1) + 1$  avente  $\left\{ \frac{1}{4}(n-1) \cdot (n-3) + 1 \right\} - 1 + (2n + 1) = \frac{1}{4}[(n+4) - 1][(n+4) - 3] + 1$  circuiti, (ossia il massimo compatibile con l'ordine  $n + 4$ ) tra cui uno secante il circuito  $a_2$  in  $2(n+4)$  punti, e  $\frac{n-1}{4} + 1 = \frac{(n+4)-1}{4}$  situati nel modo detto, una curva cioè dello stesso tipo della precedente. È quindi dimostrata sul cilindro l'esistenza di curve del tipo voluto anche nel caso  $n = 4\nu + 1$ .

3°)  $n = 4\nu + 2$ . Consideriamo sul cilindro  $q$  la quartica, (intersezione del cilindro con una superficie del secondo ordine  $\varphi_2 = 0$ ) costruita al § 2, n.° 3, mediante piccola variazione di una quartica spezzantesi in due ellissi  $E$  e  $C^2$ , aventi in comune due punti  $T_1, T_2$ . Indichiamo questa quartica con  $A^4$  e siano  $a_1, a_2$ , i due circuiti (di prima specie) di cui risulta composta, dei quali uno,  $a_2$ , secante l'ellisse  $E$  in 4 punti  $U_1, U_2, U_3, U_4$ , susseguentisi sul circuito  $a_2$  e sull'ellisse  $E$  nel medesimo ordine: e sia precisamente  $T_1, U_1, U_2, U_3, U_4, T_2$  l'ordine dei detti punti rispetto ai punti  $T_1, T_2$  sopra l'ellisse  $E$ .

Assumiamo ora la quartica  $A^4$  come curva ausiliaria, e, partendo dall'ellisse  $E$ , deduciamone per piccola variazione una sestica  $C^6$  nel modo seguente.

Conduciamo le generatrici  $r, s$  del cilindro passanti rispettivamente per i due punti  $U_1, U_4$ , e quelle  $t_1, t_2$  passanti rispettivamente per i punti  $T_1, T_2$ , e consideriamo le due regioni della superficie cilindrica, comprese rispettivamente tra le generatrici contigue  $t_1, r$  e  $s, t_2$ . In una di queste regioni fissiamo altre 6 generatrici  $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6$  che seghino ognuna il circuito  $a_2$  in due punti reali (e ciò per il modo stesso in cui  $A^4$  è stata generata sarà sempre possibile). Sia l'ordine scritto quello in cui le dette 6 generatrici si susseguono sul cilindro, e siano  $R_1, R_2; R_3, R_4; \dots; R_{11}, R_{12}$ ; rispettivamente le coppie di punti in cui esse seghano  $a_2$ , punti che si trovano evidentemente

tutti in quel tratto  $s$  del circuito  $a_2$ , compreso tra i punti  $U_1, U_4$ , in cui non giacciono i punti  $U_2$  e  $U_3$ . Siano poi  $p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 = 0$  le equazioni dei piani  $g_1g_2; g_3g_4; g_5g_6$ . Se  $p = 0$  è l'equazione del piano dell'ellisse  $E$ , l'equazione

$$f_3 \equiv p\varphi_2 + \lambda p_1 p_2 p_3 = 0$$

rappresenta, per  $\lambda$  sufficientemente piccola, una superficie del 3° ordine  $f_3$  secante il cilindro secondo una curva del 6° ordine  $C^6$ , prossima all'insieme dell'ellisse  $E$  e della quartica  $A^4$ . Essa sarà composta di 5 circuiti  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$  (ossia il numero massimo per  $n = 6$ ) se costringiamo la superficie  $f_3$  a passare per un punto scelto opportunamente sulla superficie cilindrica <sup>(1)</sup>. Di questi circuiti uno, p. es.  $c_1$ , sarà prossimo al circuito ausiliario  $a_1$ , ed uno, p. es.  $c_5$ , sarà monocentrico <sup>(2)</sup> e segnerà il circuito ausiliario  $a_2$  nei 12 punti  $R$ .

Partendo dalla curva  $C^6$  e procedendo come nel caso  $n = 4\nu$ , si prova anche qui l'esistenza di curve del tipo voluto.

4°)  $n = 4\nu + 3$ . Assumiamo come quartica ausiliaria  $A^4$  quella costruita al § 2, n.° 3, composta di due circuiti  $a_1, a_2$  (di 1° specie) di cui uno  $a_2$  secante l'ellisse  $E$  in 4 punti  $U_1, U_2, U_3, U_4$ . Sia poi  $C^3$  una cubica sghemba, intersezione del cilindro con una quadrica di equazione  $s_2 = 0$ , passante per una generatrice del cilindro stesso, cubica che seghi il circuito  $a_2$  in 6 punti reali, susseguentisi nello stesso ordine sul circuito  $a_2$  e sulla cubica  $C^3$ .

Dimostriamo in primo luogo che una tale cubica si può effettivamente costruire (col metodo della conica ausiliaria). Sia  $g$  una generatrice del cilindro che seghi il circuito  $a_2$  in due punti reali  $L_1, L_2$  tali che i punti  $U_1, U_2, U_3, U_4$  si trovino tutti in uno stesso dei due tratti in cui  $L_1$  e  $L_2$  dividono il circuito stesso.

Facendo per un momento astrazione della curva  $A^4$ , consideriamo come curva ausiliaria la conica  $E$ . Partendo dalla generatrice  $g$ , conduciamo per essa un piano  $f_1 = 0$ , non secante  $A^4$  ulteriormente in punti reali, e sia  $r$  la generatrice secondo cui esso sega ancora il cilindro. Siano  $g_2, g_3, g_4$  rispettivamente le generatrici del cilindro passanti per i punti  $U_2, U_3, U_4$  e conside-

<sup>(1)</sup> E precisamente: considerando uno dei quattro occhielli formati dai circuiti  $a_2$  e  $c_2$  del quale *non* faccia parte il tratto  $s$  detto sopra, si faccia passare  $f_3$  per un punto di quella delle due regioni in cui l'occhiello divide la superficie, in cui non giacciono gli altri occhielli. (Si osservi che l'occhiello di cui fa parte il tratto  $s$ , considerato come taglio non spezza la connessione della superficie).

<sup>(2)</sup> V. loc. cit., L, § 9.



riamo i piani  $rg_2, g_3g_4$ , che abbiano rispettivamente le equazioni  $p_1 = 0, p_2 = 0$ . L'equazione

$$f_2 \equiv pf_1 + \lambda p_1 p_2 = 0$$

rappresenta allora, per  $\lambda$  sufficientemente piccola, una superficie del secondo ordine segante il cilindro secondo la generatrice  $r$  e una cubica  $C^3$  (prossima all'insieme formato dall'ellisse ausiliaria  $E$  e dalla generatrice  $g$ ). Questa cubica sega il circuito  $a_2$  in 6 punti  $P_1, P_2, \dots, P_6$  (di cui tre coincidenti coi punti  $U_2, U_3, U_4$  e gli altri prossimi ai punti  $U_1, L_1, L_2$ ). Obbligando la superficie  $f_2$  a passare per un punto scelto opportunamente sul cilindro, abbastanza vicino alla generatrice  $g$ , si potrà fare in modo che i punti  $P_1, P_2, \dots, P_6$  si susseguano nello stesso ordine sulla cubica  $C^3$  e sul circuito  $a_2$ . Sia l'ordine quello indicato  $P_1, P_2, \dots, P_6$ ; dove p. es.  $P_1, P_2$  siano i punti prossimi ad  $L_1, L_2$ .

Essi dividono il circuito  $a_2$  in due tratti  $\alpha'_1, \alpha'_2$ , di cui uno,  $\alpha'_2$ , per le ipotesi fatte, non contiene alcuno dei punti rimanenti  $P_3, P_4, P_5, P_6$ , (situati tutti nel tratto  $\alpha'_1$ ).

Applichiamo ora a  $C^3$  il metodo della quartica ausiliaria. Seghiamo il tratto  $\alpha'_2$  con 7 generatrici  $g'_1, g'_2, \dots, g'_7$ , rispettivamente nelle coppie di punti  $Q_1, Q_2; Q_3, Q_4; \dots; Q_{13}, Q_{14}$ , e conduciamo i quattro piani  $rg'_1, g'_2g'_3, g'_4g'_5, g'_6g'_7$ , che abbiano rispettivamente per equazioni  $p'_1 = 0, p'_2 = 0, p'_3 = 0, p'_4 = 0$ .

Poniamo :

$$f_4 \equiv f_2 s_2 + \lambda' p'_1 p'_2 p'_3 p'_4 = 0$$

equazione che rappresenta, per  $\lambda'$  sufficientemente piccola, una superficie del 4° ordine passante per  $r$  e segante il cilindro ulteriormente secondo una curva del 7° ordine  $C^7$ , avente il massimo numero di circuiti, ossia 7, ciò che si può sempre ottenere costringendo la superficie  $f_4$  a passare per un punto scelto opportunamente sulla superficie cilindrica, analogamente a quel che si è fatto nei casi precedenti. Dei 7 circuiti di  $C^7$  uno,  $c'_7$ , passerà per i 14 punti  $Q_1, Q_2, \dots, Q_{14}$  (susseguentisi sui circuiti  $c'_7$  e  $a_2$  nel medesimo ordine) ed uno sarà prossimo al circuito  $a_1$ .

Operando analogamente sulla curva  $C^7$  come sulla  $C^3$ , e così proseguendo, potremo, col metodo dei casi precedenti, provare anche qui l'esistenza di curve del tipo voluto (1).

(1) Resta così provata, per  $n$  qualunque, l'esistenza di curve di ordine  $n$  del tipo suddetto, situate sopra quadriche a punti parabolici (curve da me indicate, loc. cit., L, § 8).

Per provare l'esistenza di curve di tipo analogo, situate sopra quadriche a punti iperboliche, (v. loc. cit., L, § 13) p. es. iperboloidi di rotazione, supponiamo costruita sopra un cilindro di rotazione  $g$ , col metodo or ora esposto, una curva  $C^n$  d'ordine  $n$  priva di singo-

larità, del tipo suddetto, intersezione totale del cilindro con una superficie  $f_n$  d'ordine  $\frac{n}{2}$ , se  $n$  è pari; intersezione residua del cilindro con una superficie  $f_{\frac{n+1}{2}}$  d'ordine  $\frac{n+1}{2}$ , passante per una generatrice  $r$  del cilindro, se  $n$  è dispari.

Sia in primo luogo  $n$  pari. Allora, siccome per le costruzioni fatte, tanto nel caso  $n=4v$ , quanto nel caso  $n=4v+2$ , tutti i circuiti della curva risultano d'ordine pari e situati a distanza finita, si potranno determinare due piani  $\pi_1, \pi_2$ , perpendicolari all'asse del cilindro, tali che la curva si trovi tutta situata nella regione del cilindro tra essi compresa.

Consideriamo i cerchi, sezioni del cilindro con  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , e deformiamo il cilindro, facendo subire ad uno di questi cerchi, una rotazione infinitesima intorno all'asse del cilindro, mentre teniamo fisso l'altro. Si ottiene così, come superficie deformata un'iperboloide di rotazione ad una falda  $q_1$ , infinitamente vicina al cilindro  $g$ .

Mentre il cilindro si deforma, si deformerà pure la sua curva d'intersezione  $C^n$  con la superficie  $f_n$  e si porterà nella posizione infinitamente vicina  $C_1^n$ , intersezione di  $f_n$  con l'iperboloide  $q_1$ , ed evidentemente anch'essa priva di singolarità. Le due curve  $C^n$  e  $C_1^n$  (d'ordine  $n$ ) presentano quindi lo stesso numero di circuiti, della stessa natura e posizione reciproca. La curva  $C_1^n$  è quindi anch'essa del tipo voluto.

Sia ora  $n$  dispari. In questo caso la curva  $C^n$  d'ordine  $n$ , da noi costruita sul cilindro  $g$ , (intersezione residua del cilindro con una superficie  $f_{\frac{n+1}{2}}$  d'ordine  $\frac{n+1}{2}$ , passante per una generatrice  $r$  del cilindro), presenta, oltre circuiti d'ordine pari (tutti a distanza finita) un circuito d'ordine dispari.

Conduciamo due piani  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , perpendicolari all'asse del cilindro, tali che i circuiti d'ordine pari della curva, si trovino tutti situati nella regione della superficie cilindrica tra essi compresa, e facciamo subire anche qui al cilindro la stessa deformazione come nel caso di  $n$  pari. Immaginiamo inoltre che la retta  $r$ , comune alla superficie  $f_{\frac{n+1}{2}}$  e al cilindro, mentre viene trascinata dal cilindro nel suo movimento, sia rigidamente collegata alla superficie  $f_{\frac{n+1}{2}}$ , in modo che questa subisca in conseguenza uno spostamento infinitesimo. Ciò posto, la curva  $C^n$ , deformandosi sulla superficie  $f_{\frac{n+1}{2}}$ , si porterà nella curva  $C_1^n$  infinitamente vicina, intersezione residua dell'iperboloide  $q_1$  con la superficie  $f_{\frac{n+1}{2}}$  nella sua nuova posizione, passante per una retta di  $q_1$ .

La curva  $C_1^n$ , evidentemente priva di singolarità, avrà un sol circuito d'ordine dispari, ottenuto per deformazione dal circuito d'ordine dispari di  $C^n$ , e lo stesso numero di circuiti d'ordine pari, della stessa natura e posizione reciproca.

La curva  $C_1^n$  è quindi, anche in questo caso, del tipo voluto.

# Deformazioni finite di sistemi continui.

Memoria 1<sup>a</sup> dell'ing. R. ARIANO, a Milano

## INTRODUZIONE

Lo studio delle deformazioni finite dei mezzi continui ha formato oggetto di alcuni lavori, le cui conclusioni sono state magistralmente riprodotte, in una con le relazioni dimostrative, dai signori E. ed F. COSSERAT nella loro Memoria *Sur la Théorie de l'Elasticité* <sup>(1)</sup>.

Gli stessi Autori hanno considerato le linee, le superficie e i corpi deformabili nella loro *Note sur la Théorie des corps déformables* <sup>(2)</sup>.

Lavori aventi di mira la trattazione di casi particolari — ad esempio l'applicazione della detta teoria allo studio di corpi vetrosi, sia nel caso in cui gli elementi dei detti corpi sono sottoposti ad azioni newtoniane, sia quando queste azioni sono qualsiasi — sono stati pubblicati da KIRCHOFF, BOUSSINESQ, DUHEM <sup>(3)</sup> ecc.; i corpi isotropi sono stati studiati dal prof. ALMANSI <sup>(4)</sup>. Mi sono proposto di ritrattare lo stesso tema abbandonando l'uso delle coordinate curvilinee, uso frequente nei precedenti lavori, e ricavando le equazioni di equilibrio dalla considerazione del potenziale interno.

Ho trovato utile nel corso della trattazione l'impiego del calcolo vettoriale, tanto più che i vettori ausiliari di cui mi son servito, oltre a condurre a notevoli semplificazioni formali, hanno senso fisico e possono facilmente risultare da ricerche sperimentali, quando dalla trattazione generale si passi a considerare particolari tipi di deformazione.

Ho dato inoltre alle principali conclusioni anche una forma sintetica, servendomi di espressioni proprie alla teoria delle omografie vettoriali, e mi sono a volte servito di questa teoria per ottenere con la maggiore rapidità conclusioni notevoli. Gran parte di quanto qui si è ottenuto di dimostrare, era stato già dimostrato in precedenza, quasi sempre però con metodi

<sup>(1)</sup> « *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* », t. X, 1896.

<sup>(2)</sup> Questa Nota è stata stampata in un libro a parte e riprodotta anche nel *Traité de Physique* di CHWOLSON, t. II. In detta Nota gli Autori si riferiscono ad azioni euclidee.

<sup>(3)</sup> Si veda ad esempio il libro di DUHEM: *Recherches sur l'Elasticité*.

<sup>(4)</sup> « *Rendiconti Accademia Lincei* », 1911, I semestre, pag. 705; II semestre, pagg. 89 e 289.

diversi. Parte delle conclusioni che esporrò non erano note ai precedenti scrittori.

In tutta la trattazione fondamentale ho fatto uso di variabili indipendenti riferentisi al « sistema iniziale »; variabili che, per brevità e per analogia con quanto si usa fare in Idrodinamica, chiamerò lagrangiane. Ho però tradotto le conclusioni anche in espressioni dipendenti da variabili proprie del « sistema deformato », variabili che chiamerò euleriane.

In questa prima Nota tratterò della « cinematica delle deformazioni finite », facendo uso di coordinate cartesiane, o di omografie vettoriali.

## PARTE PRIMA

1. **Deformazione. Stato iniziale e deformato.** — Si dice che un sistema si deforma allorchè i suoi punti subiscono degli spostamenti a partire dalle posizioni che occupano nell'istante « iniziale » e a cui corrisponde uno stato « iniziale ». Allorchè i punti del mezzo hanno subito gli spostamenti sopradetti, si dice che il mezzo è nello stato « deformato ». In questa prima parte assumeremo come variabili indipendenti fondamentali le coordinate dei punti del sistema iniziale (variabili lagrangiane).

Sia una terna di assi fissi. Siano  $a, b, c$ , le coordinate di un punto  $M$  di detto mezzo nello stato iniziale, e  $x, y, z$ , le coordinate del punto  $P$  in cui il punto  $M$  si è portato in virtù della deformazione.

Le differenze

$$u = x - a; \quad v = y - b; \quad w = z - c$$

varieranno da punto a punto, e quindi saranno funzioni di  $a, b, c$ .

Si potrà perciò scrivere:

$$(1) \quad \begin{cases} x = a + u(a, b, c) \\ y = b + v(a, b, c) \\ z = c + w(a, b, c). \end{cases}$$

(Chiameremo con  $M$  con apici i punti dello stato iniziale, e con  $P$  con apici i punti corrispondenti dello stato deformato).

Un altro punto  $M'$ , di coordinate  $a', b', c'$ ; avrà per corrispondente il punto  $P'$  di coordinate  $x', y', z'$ , tali che

$$(1') \quad \begin{cases} x' = a' + u(a', b', c') \\ y' = b' + v(a', b', c') \\ z' = c' + w(a', b', c'). \end{cases}$$

Se supponiamo di aver preso  $M'$  a distanza infinitesima da  $M$ , sarà:

$$\begin{cases} a' = a + da \\ b' = b + db \\ c' = c + dc. \end{cases}$$

Dalle (1) e (1') si ricava facilmente:

$$(2) \quad \begin{cases} x' - x = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial a}\right) da + \frac{\partial u}{\partial b} db + \frac{\partial u}{\partial c} dc \\ y' - y = \frac{\partial v}{\partial a} da + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial b}\right) db + \frac{\partial v}{\partial c} dc \\ z' - z = \frac{\partial w}{\partial a} da + \frac{\partial w}{\partial b} db + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial c}\right) dc. \end{cases}$$

Da (1) si ricava:

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial a} = 1 + \frac{\partial u}{\partial a}; & \frac{\partial x}{\partial b} = \frac{\partial u}{\partial b}; & \frac{\partial x}{\partial c} = \frac{\partial u}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} = \frac{\partial v}{\partial a}; & \frac{\partial y}{\partial b} = 1 + \frac{\partial v}{\partial b}; & \frac{\partial y}{\partial c} = \frac{\partial v}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial w}{\partial a}; & \frac{\partial z}{\partial b} = \frac{\partial w}{\partial b}; & \frac{\partial z}{\partial c} = 1 + \frac{\partial w}{\partial c} \end{cases}$$

perciò le (2) possono scriversi:

$$(4) \quad \begin{cases} x' - x = \frac{\partial x}{\partial a} da + \frac{\partial x}{\partial b} db + \frac{\partial x}{\partial c} dc = dx \\ y' - y = \frac{\partial y}{\partial a} da + \frac{\partial y}{\partial b} db + \frac{\partial y}{\partial c} dc = dy \\ z' - z = \frac{\partial z}{\partial a} da + \frac{\partial z}{\partial b} db + \frac{\partial z}{\partial c} dc = dz. \end{cases}$$

Le (4) esprimono in ultima analisi la condizione di continuità del sistema; esse dicono infatti che due punti infinitamente vicini si trasformano in due punti del pari infinitamente vicini.

Vedremo in seguito come può scriversi la condizione di continuità in modo diverso.

**2. La funzione  $\sigma$ .** — L'elemento lineare  $dl$ , limitato dai punti  $M(a, b, c)$  e  $M'(a', b', c')$  si trasforma, in virtù della detta trasformazione, nell'elemento  $dl'$ ,

limitato dai punti  $P(x, y, z)$  e  $P(x', y', z')$  dove

$$dl^2 = da^2 + db^2 + dc^2$$

$$dl'^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Ne risulta che la variazione relativa del suo quadrato, che indicheremo con  $2\sigma$ , è

$$(5) \quad 2\sigma = \frac{dl'^2 - dl^2}{dl^2} = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2 - da^2 - db^2 - dc^2}{dl^2}.$$

È noto che per caratterizzare la deformazione si suol considerare la funzione  $\sigma$  delle coordinate  $(a, b, c)$  che, come si vedrà in seguito, è legata nel caso di deformazione infinitesime, da una relazione semplice al « coefficiente di dilatazione » definito da:

$$d = \frac{dl' - dl}{dl}.$$

Si farà qui altrettanto. Pertanto sarà utile trasformare la (5), sostituendo in essa a  $dx, dy, dz$ , i valori forniti dalla (4) e indicando con  $\lambda, \mu, \nu$  i coseni direttori della direzione  $MM'$ , ponendo cioè:

$$\lambda = \frac{da}{dl}; \quad \mu = \frac{db}{dl}; \quad \nu = \frac{dc}{dl}.$$

Si ricava così:

$$(6) \quad \sigma = \varepsilon_1 \lambda^2 + \varepsilon_2 \mu^2 + \varepsilon_3 \nu^2 + 2\gamma_1 \mu \nu + 2\gamma_2 \nu \lambda + 2\gamma_3 \lambda \mu = F(\lambda, \mu, \nu)$$

dove con  $F$  si indica una funzione quadratica di  $\lambda, \mu, \nu$  e lineare dei coefficienti  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ . Questi coefficienti sono definiti da:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial a} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial a} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial a} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial a} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial b} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial b} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial b} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial b} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_3 = \frac{\partial w}{\partial c} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial c} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial c} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial c} \right)^2 \right] \\ \gamma_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial b} + \frac{\partial v}{\partial c} \right) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial b} \frac{\partial u}{\partial c} + \frac{\partial v}{\partial b} \frac{\partial v}{\partial c} + \frac{\partial w}{\partial b} \frac{\partial w}{\partial c} \right] \\ \gamma_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial c} + \frac{\partial w}{\partial a} \right) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial a} \frac{\partial u}{\partial c} + \frac{\partial v}{\partial a} \frac{\partial v}{\partial c} + \frac{\partial w}{\partial a} \frac{\partial w}{\partial c} \right] \\ \gamma_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial b} \right) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial a} \frac{\partial u}{\partial b} + \frac{\partial v}{\partial a} \frac{\partial v}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial a} \frac{\partial w}{\partial b} \right]. \end{array} \right.$$

Le (7) possono anche scriversi:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \frac{1}{2}(V_i^2 - 1) \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{2}(V_j^2 - 1) \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{2}(V_k^2 - 1) \\ \gamma_1 = \frac{1}{2}(V_j \times V_k) \\ \gamma_2 = \frac{1}{2}(V_k \times V_i) \\ \gamma_3 = \frac{1}{2}(V_i \times V_j) \end{array} \right.$$

dove con  $V_i, V_j, V_k$  si indicano i vettori

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_i = \frac{\partial x}{\partial a} i + \frac{\partial y}{\partial a} j + \frac{\partial z}{\partial a} k = \frac{\partial P}{\partial a} \\ V_j = \frac{\partial x}{\partial b} i + \frac{\partial y}{\partial b} j + \frac{\partial z}{\partial b} k = \frac{\partial P}{\partial b} \\ V_k = \frac{\partial x}{\partial c} i + \frac{\partial y}{\partial c} j + \frac{\partial z}{\partial c} k = \frac{\partial P}{\partial c} \end{array} \right.$$

essendo  $i, j, k$  la terna dei vettori unitari ortogonali fissi, cui riferiamo il nostro sistema;  $P$  il punto di coordinate  $x, y, z$  e  $u, v, w$  le componenti del vettore  $U$  che definisce lo spostamento.

Si ha anche da (9)

$$(10) \quad dP = V_i da + V_j db + V_k dc.$$

**3. I vettori  $U, V_i, V_j, V_k$ .** — A mezzo dei vettori  $U, V_i, V_j, V_k$  si possono esprimere molto semplicemente le formule precedenti.

Così dalle (2) si ricava in modo ovvio

$$(11) \quad (x' - x)i + (y' - y)j + (z' - z)k = da \cdot i + db \cdot j + dc \cdot k + dU$$

o, in termini vettoriali

$$(12) \quad dP = dM + dU$$

da cui integrando si ricava:

$$(13) \quad P = M + U.$$

La (13) permette di affermare che: *una deformazione di un sistema continuo equivale ad una corrispondenza fra l'insieme dei punti M e quello dei punti P, tale che il passaggio dall'uno all'altro si ottiene imprimendo uno spostamento variabile da punto a punto (U).*

Dalle (6) e dalla (8) si ricava facilmente la relazione:

$$(14) \quad 2\sigma = (V_i\lambda + V_j\mu + V_k\nu)^2 - 1.$$

Ricordando d'altra parte che

$$2\sigma = \frac{dl'^2 - dl^2}{dl^2} = \frac{dl'}{dl} - 1$$

si ha che « la dilatazione lineare  $\delta$  », definita da

$$\delta = \frac{dl'}{dl}$$

(e legata al « coefficiente di dilatazione  $d$  » dalla relazione  $\delta = d + 1$ ), deve soddisfare la relazione

$$(15) \quad \delta^2 = (V_i\lambda + V_j\mu + V_k\nu)^2.$$

Se si pone

$$(16) \quad V_s = V_i\lambda + V_j\mu + V_k\nu$$

dove  $s$  indica la direzione definita dai coseni  $\lambda, \mu, \nu$ , le (14) e (15) equivalgono a:

$$(14') \quad 2\alpha = V_s^2 - 1$$

$$(15') \quad \delta^2 = V_s^2$$

dalla (15) si desume in modo semplice il significato fisico dei moduli di  $V_i, V_j, V_k$ . Infatti se la direzione  $\lambda, \mu, \nu$  coincide con quella dell'asse  $i$ , è:

$$\lambda = 1, \quad \mu = 0, \quad \nu = 0$$

e quindi, se si indica in genere con  $\delta_s$  la dilatazione lineare nella direzione definita dal vettore unitario  $s$ , da (15) si ricava:

$$(16') \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_i^2 = V_i^2 \\ \delta_j^2 = V_j^2 \\ \delta_k^2 = V_k^2 \end{array} \right.$$

*cioè: i moduli dei vettori  $V_i, V_j, V_k$  sono uguali alle dilatazioni lineari nelle direzioni dei tre assi.*



Si noti che i detti vettori sono quindi funzioni della terna di assi ortogonali che si è scelto, e del punto del sistema continuo cui ci si riferisce.

Le dette dilatazioni lineari, quando si tenga conto delle (8) e delle (16) possono anche esprimersi in funzione delle componenti di deformazione, nel modo seguente :

$$(17) \quad \begin{cases} \delta_i = \sqrt{1 + 2\varepsilon_1} \\ \delta_j = \sqrt{1 + 2\varepsilon_2} \\ \delta_k = \sqrt{1 + 2\varepsilon_3} \end{cases}$$

Per una direzione qualsiasi la dilatazione lineare è data da

$$\text{mod}(\mathbf{V}_i\lambda + \mathbf{V}_j\mu + \mathbf{V}_k\nu)$$

cioè da  $\mathbf{V}_s$ , (dove  $\lambda, \mu, \nu$  sono i coseni che definiscono la direzione  $s$ , considerata come appartenente allo stato iniziale).

Noteremo inoltre che le  $\varepsilon$  possono desumersi in modo semplice quando si conosca — il che è fattibile a mezzo di esperienze, come si dirà in appresso — la funzione  $\sigma$ .

Infatti se si indicano con  $\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k$  i valori delle  $\sigma$  nelle direzioni  $i, j, k$ , da (14) si ricava :

$$(18) \quad \begin{cases} \varepsilon_1 = \sigma_i \\ \varepsilon_2 = \sigma_j \\ \varepsilon_3 = \sigma_k \end{cases}$$

cioè le  $\varepsilon$  hanno per valori quelli assunti dalla  $\sigma$  nelle direzioni degli assi coordinati.

**4. Ellissoide di dilatazione.** — È comodo rappresentare le deformazioni, che si producono nei dintorni di un punto  $M$ , geometricamente, perchè da questa rappresentazione si possono desumere in modo semplice alcune caratteristiche delle deformazioni stesse.

Per farlo poniamo :

$$(19) \quad \xi = \frac{\lambda}{\delta}; \quad \eta = \frac{\mu}{\delta}; \quad \zeta = \frac{\nu}{\delta}$$

e consideriamo l'insieme dei punti definiti dalle  $\xi, \eta, \zeta$  riguardate come coordinate dei medesimi, quando come centro si assume il punto  $M$ . Con queste notazioni la (15) può scriversi :

$$(20) \quad (\mathbf{V}_i\xi + \mathbf{V}_j\eta + \mathbf{V}_k\zeta)^2 = 1$$

o sviluppando

$$(21) \quad F(\xi, \eta, \zeta) = \delta_i^2 \xi^2 + \delta_j^2 \eta^2 + \delta_k^2 \zeta^2 + 4\gamma_1 \eta \zeta + 4\gamma_2 \zeta \xi + 4\gamma_3 \xi \eta = 1.$$

Le (20) e (21) sono forme diverse che può assumere l'equazione di una quadrica, avente per centro il punto  $M$  e per raggio vettore la funzione  $\rho$  definita da

$$(22) \quad \rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = \frac{1}{\delta}$$

cioè *avente in ogni direzione un raggio vettore eguale al reciproco della rispettiva dilatazione lineare.*

Volendo esprimere la equazione della detta quadrica a mezzo dei soliti coefficienti  $\epsilon$  e  $\gamma$  si può sostituire in (21) a  $\delta_i^2$ ,  $\delta_j^2$ ,  $\delta_k^2$  i valori forniti dalle (17); cón che si ricava

$$(23) \quad 2(\epsilon_1 \xi^2 + \epsilon_2 \eta^2 + \epsilon_3 \zeta^2 + 2\gamma_1 \eta \zeta + 2\gamma_2 \zeta \xi + 2\gamma_3 \xi \eta) = 1 - \rho^2.$$

Questa quadrica è un ellissoide.

Infatti qui si tratta di sistemi continui, e la continuità non si concilia nè con l'esistenza dei punti  $(\xi, \eta, \zeta)$  all'infinito, vale a dire di valori nulli della dilatazione lineare, nè di punti zero, vale a dire di valori infinitamente grandi di  $\delta$ .

A detto ellissoide si dà il nome di *ellissoide di dilatazione*. In verità noi non potremo parlare che di un mezzo ellissoide, perchè a  $\rho < 0$  corrisponde  $\delta < 0$ , il che non ha senso. A questa obbiezione formale però si può ovviare osservando che in effetti occorre tener conto su ogni direzione uscente da  $M$  di due sensi opposti, cui corrispondono valori eguali di  $\delta$ , e quindi di  $\rho$ ; cui potremo — con la riserva di non dare alcun valore fisico, a questa convenzione — attribuire i due segni: più e meno.

Quanto al valore assoluto di  $\delta$ , esso può, in tutte le direzioni uscenti da  $M$ , essere compreso fra 0 e 1 e in tal caso si ha *contrazione* in ogni direzione; può essere in ogni direzione maggiore di 1 ed in tal caso in ogni direzione si ha *dilatazione*; può essere in parte delle direzioni maggiore e in parte delle direzioni uscenti da  $M$  minore di 1, e in tal caso vi sarà una zona contratta ed una dilatata, separate da una zona di deformazione nulla, definita da  $\rho = 1$ , ossia da

$$(24) \quad (V_i \lambda + V_j \mu + V_k \nu)^2 = 1$$

o anche da

$$(25) \quad \epsilon_1 \xi^2 + \epsilon_2 \eta^2 + \epsilon_3 \zeta^2 + 2\gamma_1 \eta \xi + 2\gamma_2 \zeta \xi + 2\gamma_3 \xi \eta = 0.$$

Questa zona è quindi un *cono quadrico* e precisamente è il cono che proietta da  $M$  l'intersezione dell'ellissoide delle dilatazioni con la sfera di raggio uno. Si avrà solo *dilatazione* se la sfera di raggio uno è tutta interna all'ellissoide; si avrà solo *contrazione* se la detta sfera è tutta esterna all'ellissoide stesso.

Si noti che all'equazione della quadrica sopra detta si può dare forma canonica, e cioè

$$(26) \quad \delta_{i_1}^2 \xi^2 + \delta_{j_1}^2 \eta^2 + \delta_{k_1}^2 \zeta^2 = 1$$

o anche

$$(27) \quad (1 + 2\varepsilon_1)\xi^2 + (1 + 2\varepsilon_2)\eta^2 + (1 + 2\varepsilon_3)\zeta^2 = 1$$

quando si scelga come particolare terna di assi coordinati la terna  $i_1, j_1, k_1$  degli assi dell'ellissoide, cui si dà il nome di « *assi principali di deformazione* ». Com'è ovvio questa terna varierà da punto a punto del sistema, e ad essa corrisponderanno valori nulli delle  $\gamma$ , cioè in virtù del particolare significato, che — come vedremo — occorre attribuire a queste funzioni, le direzioni  $i_1, j_1, k_1$  si muteranno in virtù della deformazione in tre altre formanti del pari una terna ortogonale.

Da quanto si è detto deriva la possibilità di enunciare il teorema seguente: « *Esiste sempre per ogni punto del sistema che si deforma una terna ortogonale di assi — la terna principale degli assi di deformazione — che in virtù della deformazione si trasforma in una terna di assi ortogonali* ».

Le lunghezze dei semiassi dell'ellissoide, e quindi i valori di  $\delta_{i_1}, \delta_{j_1}, \delta_{k_1}$ , si ottengono risolvendo l'equazione di terzo grado in  $\omega$ :

$$(28) \quad \begin{vmatrix} \delta_{i_1}^2 - \omega & 2\gamma_3 & 2\gamma_2 \\ 2\gamma_3 & \delta_{j_1}^2 - \omega & 2\gamma_1 \\ 2\gamma_2 & 2\gamma_1 & \delta_{k_1}^2 - \omega \end{vmatrix} = 0$$

— dove  $\delta_i, \delta_j, \delta_k$  sono gli allungamenti unitari relativi a tre assi coordinati ortogonali qualsiasi — e prendendo i valori reciproci alla radice quadrata di  $\omega$ .

Se poi con le terne  $A, B, C$ , munite di indici 1, 2, 3, in corrispondenza ai tre valori di  $\omega$ , si indicano i coseni direttori di questi assi, è noto che essi devono soddisfare le seguenti relazioni:

$$(29) \quad \begin{cases} \delta_{i_1}^2 A + 2\gamma_3 B + 2\gamma_2 C = \omega A \\ 2\gamma_3 A + \delta_{j_1}^2 B + 2\gamma_1 C = \omega B \\ 2\gamma_2 A + 2\gamma_1 B + \delta_{k_1}^2 C = \omega C \\ A^2 + B^2 + C^2 = 1. \end{cases}$$

Le prime tre delle (29) possono anche scriversi per la (16):

$$(30) \quad \begin{cases} \mathbf{V}_i \times \mathbf{V}_{i_1} = \omega A \\ \mathbf{V}_j \times \mathbf{V}_{i_1} = \omega B \\ \mathbf{V}_k \times \mathbf{V}_{i_1} = \omega C \end{cases} \quad \text{e analoghe per } \mathbf{V}_{j_1} \text{ e } \mathbf{V}_{k_1}.$$

Moltiplicando le (30) rispettivamente per  $A, B, C$  e sommando si ricava

$$\mathbf{V}^2 = \omega$$

che equivale alla (15'). Risulta quindi

$$(31) \quad \begin{cases} \delta_i \cos(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_{i_1}) = \sqrt{\omega} A \\ \delta_j \cos(\mathbf{V}_j, \mathbf{V}_{i_1}) = \sqrt{\omega} B \\ \delta_k \cos(\mathbf{V}_k, \mathbf{V}_{i_1}) = \sqrt{\omega} C. \end{cases}$$

In particolare se come terna di assi coordinati si assume la terna di origine  $M$ , e vettori unitari  $i_1, j_1, k$  poichè per  $i_1$  è:

$$A_1 = 1, \quad B_1 = 0, \quad C_1 = 0$$

da (31) si ricava

$$\delta_{i_1} = \sqrt{\omega},$$

identità questa di cui si è parlato in precedenza:

$$\cos(\mathbf{V}_{j_1}, \mathbf{V}_{i_1}) = 0$$

$$\cos(\mathbf{V}_{k_1}, \mathbf{V}_{i_1}) = 0.$$

Facendo lo stesso per gli altri assi  $j_1, k_1$ , si perviene alla conclusione, d'altronde desumibile anche in altro modo:

*I vettori  $\mathbf{V}_{i_1}, \mathbf{V}_{j_1}, \mathbf{V}_{k_1}$  relativi alla terna degli assi principali, sono fra loro ortogonali.*

**5. Quadrica delle deformazioni.** — Si suol considerare un'altra quadrica: la quadrica delle deformazioni. Essa è definita dalla seguente relazione che intercede fra il suo raggio vettore  $\rho_1$  relativo ad una direzione del mezzo non deformato, e il corrispondente valore della funzione  $\sigma$  precedentemente definita:

$$(32) \quad \rho_1 = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}}.$$

Il suo raggio vettore è legato a quello dell'ellissoide di dilatazione corrispondente alla stessa direzione dalla relazione

$$(33) \quad \frac{1}{\rho_1^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho^2} + 1 \right)$$

o — ciò che è lo stesso — da:

$$\delta = \sqrt{1 + 2\sigma}.$$

Per costruire questa quadrica — come lo indica la (32) — basta riportare in ogni direzione il corrispondente valore del reciproco della radice quadrata di  $\sigma$ . Viceversa, nota la quadrica, sarà facilmente desumibile  $\sigma$ .

All'equazione (33), si può dare pure — grazie alla (6) — la forma:

$$(34) \quad F_1(\xi, \eta, \zeta) = \varepsilon_1 \xi^2 + \varepsilon_2 \eta^2 + \varepsilon_3 \zeta^2 + 2\gamma_1 \eta \zeta + 2\gamma_2 \zeta \xi + 2\gamma_3 \xi \eta = 1$$

dove con  $\xi, \eta, \zeta$  si indicano le coordinate di un punto della quadrica rispetto alla terna  $i, j, k$  di origine  $M$ .

La forma quadratica  $F_1(\xi, \eta, \zeta)$  può essere definita positiva o negativa e in tal caso la quadrica è un *ellissoide* reale o immaginario, o non essere definita e in tal caso è un *iperboloide*, il cui cono quadrico è quello stesso considerato trattando dell'ellissoide delle dilatazioni.

Anche qui quindi — com'era da prevedersi — si ritrova che in ogni direzione uscente da  $M$  può aversi:

1° *dilatazione* ( $\sigma > 0$ , ellissoide reale);

2° *contrazione* ( $\sigma < 0$ , ellissoide immaginario);

3° in una zona dilatazione, in un'altra contrazione, (iperboloide). Le due zone sono separate dal *cono* di dilatazione nulla, cui corrisponde  $\sigma = 0$ .

Si può dare alla equazione di questa quadrica forma canonica:

$$\sigma_{i'} \xi^2 + \sigma_{j'} \eta^2 + \sigma_{k'} \zeta^2 = 1$$

dove con  $i', j', k'$  si indica una terna di vettori unitari presa nella direzione degli assi della quadrica, assunti come assi coordinati, dove le lunghezze dei semiassi  $\omega_1', \omega_2', \omega_3'$  sono date da

$$\omega_1' = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{i'}}}; \quad \omega_2' = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{j'}}}; \quad \omega_3' = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{k'}}}$$

e soddisfano l'equazione

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_1 - \omega' & \gamma_3' & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \varepsilon_2 - \omega & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \varepsilon_3 - \omega' \end{vmatrix} = 0$$

o quando si tenga conto delle (17):

$$(35) \quad \begin{vmatrix} \delta_i^2 - 1 - 2\omega' & 2\gamma_3 & 2\gamma_2 \\ 2\gamma_3 & \delta_j^2 - 1 - 2\omega & 2\gamma_1 \\ 2\gamma_2 & 2\gamma_1 & \delta_k^2 - 1 - \omega' \end{vmatrix} = 0.$$

Se inoltre indichiamo con  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  i coseni direttori degli assi della quadrica (distinguendo ogni terna di coseni con gli indici 1, 2, 3), deve essere:

$$(35') \quad \begin{cases} \epsilon_1 A' + \gamma_3 B' + \gamma_2 C' = \omega' A' \\ \gamma_3 A' + \epsilon_2 B' + \gamma_1 C' = \omega' B' \\ \gamma_2 A' + \gamma_1 B' + \epsilon_3 C' = \omega' C' \\ A'^2 + B'^2 + C'^2 = 1 \end{cases}$$

o anche, per le (22) e (23)

$$\begin{cases} V_i \times V' = (2\omega' + 1)A' \\ V_j \times V' = (2\omega' + 1)B' \\ V_k \times V' = (2\omega' + 1)C' \end{cases}$$

dove

$$V' = V_i A' + V_j B' + V_k C'.$$

Anche qui si può ricavare il valore del modulo di  $V'$  come si è fatto nelle pagine precedenti per  $V$ . Si trova quindi:

$$(36) \quad \begin{cases} \delta_{i'} \cos(V_i, V') = \sqrt{2\omega' + 1} A' \\ \delta_{j'} \cos(V_j, V') = \sqrt{2\omega' + 1} B' \\ \delta_{k'} \cos(V_k, V') = \sqrt{2\omega' + 1} C'. \end{cases}$$

Dalle formule precedenti si desume che « *gli assi dell'ellissoide di dilatazione, e quelli della quadrica delle deformazioni coincidono* ».

Infatti, le equazioni (28) e (35) diventano un'unica equazione quando fra  $\omega$  ed  $\omega'$  intercede la relazione

$$(37) \quad 2\omega' + 1 = \omega$$

nel mentre per la (33) e per le definizioni di  $\omega$  e  $\omega'$  ciò ha luogo solo se le due terne di assi coincidono.

Per verifica, si può notare che scegliendo come terna di assi coordinati la terna  $i_1, j_1, k_1$  dalle (36) si desume per l'asse  $i_1'$  che:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{i_1'} \cos(V_{i_1}, V_{i_1'}) = \sqrt{2\omega' + 1} A' \\ \delta_{j_1'} \cos(V_{j_1'}, V_{i_1'}) = \sqrt{2\omega' + 1} B' \\ \delta_{k_1'} \cos(V_{k_1'}, V_{i_1'}) = \sqrt{2\omega' + 1} C' \end{array} \right.$$

che per  $\delta_{i_1'} = \delta_{i_1}$ ,  $V_{i_1} = V_{i_1'}$ ;  $A' = 1$ ;  $B' = C' = 0$ ;  $\omega = 2\omega' + 1$ , sono soddisfatte. Altrettanto dicasi per le (36) riferite a  $j_1'$  e  $k_1'$ .

**6. Variazione, in virtù della deformazione, dell'angolo di due direzioni.** — La (12) permette di calcolare l'angolo che formano due direzioni, a deformazione avvenuta.

Detti infatti  $dM$  e  $\delta M$  due vettori di lunghezza  $dl$  e  $\delta l$ , e coseni direttori  $\lambda_1, \mu_1, \nu_1$ ;  $\lambda_2, \mu_2, \nu_2$ ; detto  $\omega$  l'angolo che essi formano, e indicati con  $dP$  e  $\delta P$  i due vettori in cui si trasformano in virtù della deformazione — vettori aventi le lunghezze  $dl'$  e  $\delta l'$ , e formanti fra loro l'angolo  $\omega'$  — è, in virtù della (12):

$$dP \times \delta P = (dM + dU) \times (\delta M + \delta U).$$

Quindi è

$$dP \times \delta P - dM \times \delta M = dM \times \delta U + \delta M \times dU + dU \times \delta U.$$

Ricordando che:

$$M = 0 + ai + bj + ck$$

dove 0 è un qualsiasi punto fisso, e tenendo presente la (10), si ricava facilmente dalla relazione precedente, l'altra:

$$dl'\delta l' \cos \omega' - dl\delta l \cos \omega = (V_i^2 - 1)da\delta a + (V_j^2 - 1)db\delta b + (V_k^2 - 1)dc\delta c + \\ + V_j \times V_k (db\delta c + dc\delta b) + V_k \times V_i (dc\delta a + da\delta c) + V_i \times V_j (da\delta b + db\delta a).$$

Dividendo per  $dl\delta l$ , tenendo conto delle (8) e indicando rispettivamente con  $\delta_1$  e  $\delta_2$  le dilazioni lineari nelle direzioni  $dM$  e  $\delta M$ , si ha la relazione nota

$$(37) \quad \delta_1 \delta_2 \cos \omega' - \cos \omega = 2[\varepsilon_1 \lambda_1 \lambda_2 + \varepsilon_2 \mu_1 \mu_2 + \varepsilon_3 \nu_1 \nu_2 + \\ + \gamma_1 (\mu_1 \nu_2 + \mu_2 \nu_1) + \gamma_2 (\nu_1 \lambda_2 + \lambda_1 \nu_2) + \gamma_3 (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1)].$$

La (37) risolve il problema indicato dal principio di questo paragrafo. Ad essa si può dare forma più semplice. Infatti se ricordiamo che

$$\cos \omega = \lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + \nu_1 \nu_2$$

e indichiamo con  $s_1$  e  $s_2$  le direzioni  $\lambda_1, \mu_1, \nu_1; \lambda_2, \mu_2, \nu_2$ , si può dare alla (37) la forma

$$(38) \quad \delta_1 \delta_2 \cos \omega' = (V_i \lambda_1 + V_j \mu_1 + V_k \nu_1) \times (V_i \lambda_2 + V_j \mu_2 + V_k \nu_2) = V_{s_1} \times V_{s_2}.$$

La (38) ci permette di trovare semplicemente alcune espressioni che definiscono le  $\gamma$  dal punto di vista fisico. Se infatti consideriamo i valori assoluti dagli angoli degli assi a deformazione avvenuta, e indichiamo con

$$\frac{\pi}{2} - \alpha_1; \quad \frac{\pi}{2} - \alpha_2; \quad \frac{\pi}{2} - \alpha_3$$

i detti valori rispettivamente per gli angoli  $(j, k); (k, i); (i, j)$ , dalla (38) si desumono facilmente le relazioni:

$$(39) \quad \begin{cases} \delta_j \delta_k \sin \alpha_1 = V_j \times V_k = 2\gamma_1 \\ \delta_k \delta_i \sin \alpha_2 = V_k \times V_i = 2\gamma_2 \\ \delta_i \delta_j \sin \alpha_3 = V_i \times V_j = 2\gamma_3. \end{cases}$$

È possibile desumere dalla (38) alcuni teoremi:

A) *Se due direzioni sono coniugate rispetto all'ellissoide delle dilatazioni, esse si trasformano in due direzioni ortogonali.*

Infatti dall'equazione (15') dell'ellissoide di dilatazione si desume che due direzioni  $s_1$  e  $s_2$  coniugate devono soddisfare la relazione:

$$V_{s_1} \times V_{s_2} = 0$$

e quindi per la (38) il loro angolo, a deformazione avvenuta, deve essere di  $90^\circ$ .

B) *Esiste sempre nell'intorno di ogni punto un triedro trirettangolo — quello costituito dagli assi comuni alla quadrica delle deformazioni e all'ellissoide di dilatazione — che si trasforma in un triedro trirettangolo.*

Questo teorema deriva immediatamente dal teorema precedente, in quanto le direzioni degli assi di una quadrica sono tra loro coniugate rispetto alla quadrica stessa.

**7. Il vettore  $V$  e la sua quadrica.** — Ci sembra utile ricordare qui le proprietà di  $V$ .

A) Il vettore  $V$  ha in ogni direzione un valore del suo modulo uguale alla corrispondente dilatazione lineare.

B) Dai valori di  $V$  nelle direzioni dei tre assi coordinati, si ricavano facilmente, a mezzo delle (8) le componenti di deformazione.

C) L'angolo dei vettori  $V_{s_1}, V_{s_2}$  è l'angolo che formano a deformazione avvenuta le direzioni  $s_1, s_2$  del mezzo iniziale.



Vedremo inoltre che il vettore  $V$  gode di alcune altre notevolissime proprietà.

Sarà perciò opportuna considerare una quadrica che chiameremo *la quadrica delle  $V$* , che si ottiene riportando a partire da  $P$  i vettori  $V$  relativi a tutte le direzioni.

Il suo raggio vettore sarà quindi dato da

$$(40) \quad \rho_s = \text{mod } V = \delta.$$

*Questa quadrica è la trasformata di una sfera di raggio uno tracciata con centro  $M$  nel mezzo iniziale.*

Infatti si mostrerà che una direzione  $s$ , assume — a deformazione avvenuta — la direzione  $V_s$ ; nel mentre un segmento di lunghezza uno si trasforma in un segmento di lunghezza eguale al modulo di  $V_s$ .

Gli assi di questa quadrica — com'è evidente — sono  $V_{i_1}, V_{j_1}, V_{k_1}$ .

Risulta perciò chiara la possibilità di tracciare sperimentalmente la quadrica delle  $V$ , e quindi di desumere da essa tutte le caratteristiche della deformazione.

**8. I valori delle componenti di deformazione in relazione a cambiamenti degli assi coordinati.** — È facile desumere le espressioni delle sei componenti di deformazione relative ad una terna d'assi  $i', j', k'$  di valori che essi assumono quando si prendono come assi coordinati  $i, j, k$  e dai valori dei coseni direttori dei primi rispetto ai secondi assi.

Indichiamo infatti con le lettere  $A, B, C$  questi coseni, e con gli indici 1, 2, 3 come è indicato nel quadro:

	$i$	$j$	$k$
$i'$	$A_1$	$A_2$	$A_3$
$j'$	$B_1$	$B_2$	$B_3$
$k'$	$C_1$	$C_2$	$C_3$

e scriviamo i valori delle  $V$  relative agli assi  $i', j', k'$ :

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_{i'} = V_i A_1 + V_j A_2 + V_k A_3 \\ V_{j'} = V_i B_1 + V_j B_2 + V_k B_3 \\ V_{k'} = V_i C_1 + V_j C_2 + V_k C_3. \end{array} \right.$$

Indichiamo inoltre con  $\varepsilon', \gamma', i$  valori delle componenti  $\varepsilon$  e  $\gamma$  relativi agli assi  $i', j', k'$ . Dalle (8) e (41), e dalle relazioni intercedenti fra  $A, B, C$  in virtù della perpendicolarità degli assi  $i, j, k$ , si ricavano le relazioni seguenti:

$$(42) \quad \begin{cases} \varepsilon_1' = \varepsilon_1 A_1^2 + \varepsilon_2 A_2^2 + \varepsilon_3 A_3^2 + 2\gamma_3 A_1 A_2 + 2\gamma_1 A_2 A_3 + 2\gamma_2 A_3 A_1 \\ \gamma_1' = \varepsilon_1 B_1 C_1 + \varepsilon_1 B_2 C_2 + \varepsilon_3 B_3 C_3 + \gamma_3 (B_1 C_2 + B_2 C_1) + \\ \quad + \gamma_1 (B_2 C_3 + B_3 C_2) + \gamma_2 (B_3 C_1 + B_1 C_3) \end{cases}$$

(le espressioni di  $\varepsilon_2', \varepsilon_3'; \gamma_2', \gamma_3'$  si ottengono da quelle di  $\varepsilon_1'$  e  $\gamma_1'$  permutando circolarmente  $A, B, C$ ).

**9. Dilatazione superficiale.** — Definiremo come *dilatazione superficiale* del sistema nel punto  $M$ , il rapporto fra l'area di un elemento infinitesimo di superficie che circonda  $M$  e quella che il detto elemento aveva prima che la deformazione si producesse.

Poichè come vedremo in appresso un qualsiasi vettore unitario  $\mathfrak{s}$ , si trasforma in virtù della deformazione nel vettore  $\mathbf{V}_\mathfrak{s}$ , la detta dilatazione — che indicheremo sempre con  $\Sigma$  — è definita da:

$$(43) \quad \Sigma = \frac{\text{mod}(\mathbf{V}_{\mathfrak{s}_1} \wedge \mathbf{V}_{\mathfrak{s}_2})}{\text{mod}(\mathfrak{s}_1 \wedge \mathfrak{s}_2)}.$$

Anche la dilatazione superficiale è quindi desumibile dei vettori  $\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j, \mathbf{V}_k$ . In particolare per elementi normali alla terna  $i, j, k$  è quindi:

$$(44) \quad \begin{cases} \Sigma_i = \frac{\text{mod}(\mathbf{V}_j \wedge \mathbf{V}_k)}{\text{mod}(j \wedge k)} = \delta_j \delta_k \text{sen}(\mathbf{V}_j, \mathbf{V}_k) = \sqrt{\delta_j^2 \delta_k^2 - 4\gamma_1^2} = \sqrt{(1+2\varepsilon_2)(1+2\varepsilon_3) - 4\gamma_1^2} \\ \Sigma_j = \frac{\text{mod}(\mathbf{V}_k \wedge \mathbf{V}_i)}{\text{mod}(k \wedge i)} = \delta_k \delta_i \text{sen}(\mathbf{V}_k, \mathbf{V}_i) = \sqrt{\delta_k^2 \delta_i^2 - 4\gamma_2^2} = \sqrt{(1+2\varepsilon_3)(1+2\varepsilon_1) - 4\gamma_2^2} \\ \Sigma_k = \frac{\text{mod}(\mathbf{V}_i \wedge \mathbf{V}_j)}{\text{mod}(i \wedge j)} = \delta_i \delta_j \text{sen}(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j) = \sqrt{\delta_i^2 \delta_j^2 - 4\gamma_3^2} = \sqrt{(1+2\varepsilon_1)(1+2\varepsilon_2) - 4\gamma_3^2}. \end{cases}$$

Per un elemento qualsiasi normale al vettore unitario  $\mathfrak{n}$  (di coseni direttori  $n_i, n_j, n_k$ ) — elemento definito dai vettori unitari  $\mathfrak{s}_1(\lambda_1, \mu_1, \nu_1); \mathfrak{s}_2(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$  — è:

$$(45) \quad \begin{aligned} \Sigma_{\mathfrak{n}} &= \frac{\text{mod}(\mathbf{V}_{\mathfrak{s}_1} \wedge \mathbf{V}_{\mathfrak{s}_2})}{\text{mod}(\mathfrak{s}_1 \wedge \mathfrak{s}_2)} = \frac{\text{mod}[(\mathbf{V}_i \lambda_1 + \mathbf{V}_j \mu_1 + \mathbf{V}_k \nu_1) \wedge (\mathbf{V}_i \lambda_2 + \mathbf{V}_j \mu_2 + \mathbf{V}_k \nu_2)]}{\text{sen}(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)} = \\ &= \text{mod}[\mathbf{V}_i \wedge \mathbf{V}_j \cdot n_k + \mathbf{V}_j \wedge \mathbf{V}_k \cdot n_i + \mathbf{V}_k \wedge \mathbf{V}_i \cdot n_j]. \end{aligned}$$

Se in particolare come terna fondamentale si assume la terna degli assi

principali di deformazione è:

$$(46) \quad \Sigma_n = \text{mod} \left[ \delta_i \delta_{j_1} n_{k_1} \cdot \frac{V_{k_1}}{\delta_{k_1}} + \delta_{j_1} \delta_{k_1} \cdot n_{i_1} \frac{V_{i_1}}{\delta_{i_1}} + \delta_{k_1} \delta_{i_1} \cdot n_{j_1} \frac{V_{j_1}}{\delta_{j_1}} \right] = \\ = \sqrt{\Sigma_{i_1}^2 n_{i_1}^2 + \Sigma_{j_1}^2 n_{j_1}^2 + \Sigma_{k_1}^2 n_{k_1}^2}.$$

Vedremo in seguito come sia facile dare alle espressioni sopra scritte forme più semplici.

Si può dare alla (45) — come può verificarsi facilmente — anche la forma seguente

$$(47) \quad \Sigma_n = \text{mod} \left( \begin{array}{c|c|c|c} \left. \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial y}{\partial a} \frac{\partial z}{\partial a} n_i \\ \frac{\partial x}{\partial b} \frac{\partial y}{\partial b} \frac{\partial z}{\partial b} n_j \\ \frac{\partial x}{\partial c} \frac{\partial y}{\partial c} \frac{\partial z}{\partial c} n_k \\ 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array} \right| i + & \left. \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial y}{\partial a} \frac{\partial z}{\partial a} n_i \\ \frac{\partial x}{\partial b} \frac{\partial y}{\partial b} \frac{\partial z}{\partial b} n_j \\ \frac{\partial x}{\partial c} \frac{\partial y}{\partial c} \frac{\partial z}{\partial c} n_k \\ 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \end{array} \right| j + & \left. \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial y}{\partial a} \frac{\partial z}{\partial a} n_i \\ \frac{\partial x}{\partial b} \frac{\partial y}{\partial b} \frac{\partial z}{\partial b} n_j \\ \frac{\partial x}{\partial c} \frac{\partial y}{\partial c} \frac{\partial z}{\partial c} n_k \\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \end{array} \right| k & \end{array} \right)$$

ossia

$$(48) \quad \Sigma_n = \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2}$$

dove con  $D_1, D_2, D_3$  si sono indicati i tre determinanti di quarto ordine scritti in precedenza.

Brevemente possiamo scrivere:

$$(49) \quad \Sigma_n = \text{mod} \left( \begin{array}{c|c} \left. \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial y}{\partial a} \frac{\partial z}{\partial a} n_i \\ \frac{\partial x}{\partial b} \frac{\partial y}{\partial b} \frac{\partial z}{\partial b} n_j \\ \frac{\partial x}{\partial c} \frac{\partial y}{\partial c} \frac{\partial z}{\partial c} n_k \\ i \quad j \quad k \quad 0 \end{array} \right| \end{array} \right).$$

Se le direzioni  $V_i, V_j, V_k$ , concordano con  $i, j, k$ , è

$$(50) \quad D_1 = \left| \begin{array}{cccc} \delta_i & 0 & 0 & n_i \\ 0 & \delta_j & 0 & n_j \\ 0 & 0 & \delta_k & n_k \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| = \delta_j \delta_k n_i$$

e poichè in tal caso da (44) si ricava

$$(50') \quad \begin{aligned} \Sigma_i &= \delta_j \delta_k \\ D_i &= \Sigma_i n_i \end{aligned}$$

Quindi per la detta terna — se esiste — si ha

$$(51) \quad \Sigma_n = \sqrt{\Sigma_i^2 n_i^2 + \Sigma_j^2 n_j^2 + \Sigma_k^2 n_k^2} = \sqrt{\delta_j^2 \delta_k^2 n_i^2 + \delta_k^2 \delta_i^2 n_j^2 + \delta_i^2 \delta_j^2 \delta_k^2}.$$

**10. Dilatazione cubica.** — Se indichiamo con  $\tau$  il volume di un parallelepipedo infinitesimo di lati  $da$ ,  $db$ ,  $dc$ , avente il centro in  $M$ , e con  $\tau'$  il corrispondente volume nello spazio dei punti  $P$ , si definisce come *coefficiente di dilatazione cubica* nel punto  $M$  il rapporto  $\frac{\tau' - \tau}{\tau}$ . Si suol indicare detto coefficiente con  $\theta$ .

La *dilatazione cubica*, cioè il rapporto fra i volumi corrispondenti nello stato deformato e in quello iniziale è quindi  $\theta + 1$ .

Dopo quanto si è detto è facile scrivere le espressioni di  $\theta$  che sono:

$$(52) \quad \begin{aligned} \theta &= \frac{dx dy dz}{da db dc} - 1 = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} - 1 = \\ &= V_i \wedge V_j \times V_k - 1 \end{aligned}$$

dove con  $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)}$  si indica l'Jacobiano di  $x, y, z$  rispetto ad  $a, b, c$ .

Per gli assi  $i_1, j_1, k_1$ , le formule precedenti possono anche scriversi:

$$(53) \quad \theta = \delta_{i_1} \delta_{j_1} \delta_{k_1} - 1 = (d_{i_1} + 1)(d_{j_1} + 1)(d_{k_1} + 1) - 1.$$

Risulta di qui, che anche la dilatazione cubica può essere ricavata in modo semplice dai valori dei vettori  $V$ , relativi ai tre assi coordinati.

**11. Equazione di continuità.** — Se indichiamo con  $\rho_0$ , la densità del mezzo nel punto  $M$  e con  $\rho$  quella nel punto  $P$ , la massa contenuta nei parallelepipedi prima considerata sarà ovviamente rispettivamente

$$\begin{aligned} \rho_0 da db dc \\ \rho dxdydz. \end{aligned}$$

Il postulato di continuità afferma che allorchè una determinata massa si trasforma in un'altra essa deve rimanere invariata, anche se variano i suoi

attributi (densità, volume, velocità, ecc.); perciò deve essere

$$\rho \, dx \, dy \, dz = \rho_0 \, da \, db \, dc$$

ossia

$$(54) \quad \begin{aligned} \rho_0 &= \frac{dx \, dy \, dz}{da \, db \, dc} \rho = \\ &= (\theta + 1)\rho \\ &= \mathbf{V}_i \wedge \mathbf{V}_j \times \mathbf{V}_k \cdot \rho. \end{aligned}$$

Le equazioni (54), che sono diverse forme di una stessa equazione, vanno sotto il nome di *equazione di continuità*.

Anche quindi il valore del rapporto della densità a deformazione avvenuta a quella dello stato iniziale, è desumibile dai valori di  $\mathbf{V}_i$ ,  $\mathbf{V}_j$ ,  $\mathbf{V}_k$ .

**12. Analisi della deformazione di una particella.** — Consideriamo un punto  $M$  del mezzo allo stato iniziale e una parte piccolissima del mezzo circostante.

Si indichino al solito con  $a, b, c$ , le coordinate di  $M$  e con  $x, y, z$  le coordinate punto  $P$ .

Si consideri come deformazione di questa parte di mezzo, lo spostamento che i punti  $M'$  di essa — punti che sono quindi per ipotesi infinitamente vicini ad  $M$  — subiscono rispetto ad  $M$ . In altri termini per deformazione di una particella elementare che circonda  $M$ , s'intenda il moto relativo dei suoi punti  $M'$  rispetto ad  $M$ .

Tale deformazione si può ricavare facilmente dalle (2). Se infatti poniamo:

$$\begin{aligned} \xi &= da; \quad \eta = db; \quad \zeta = dc \\ dx - da &= W_1; \quad dy - db = W_2; \quad dz - dc = W_3 \end{aligned}$$

vale a dire se indichiamo con  $W_1, W_2, W_3$  le componenti di  $dU = dP - dM$  e con  $\xi, \eta, \zeta$  le coordinate di  $M'$  rispetto ad una terna di assi coordinati di origine  $M$ , possiamo scrivere:

$$(55) \quad \left\{ \begin{aligned} W_1 &= \frac{\partial u}{\partial a} \xi + \frac{\partial u}{\partial b} \eta + \frac{\partial u}{\partial c} \zeta \\ W_2 &= \frac{\partial v}{\partial a} \xi + \frac{\partial v}{\partial b} \eta + \frac{\partial v}{\partial c} \zeta \\ W_3 &= \frac{\partial w}{\partial a} \xi + \frac{\partial w}{\partial b} \eta + \frac{\partial w}{\partial c} \zeta. \end{aligned} \right.$$

Le (55) possono scriversi:

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{l} W_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} [\rho_3^2 (\mathbf{s} \times \mathbf{V}_s - 1) + 2(q\zeta - r\eta)] \\ W_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} [\rho_3^2 (\mathbf{s} \times \mathbf{V}_s - 1) + 2(r\xi - p\zeta)] \\ W_3 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \zeta} [\rho_3^2 (\mathbf{s} \times \mathbf{V}_s - 1) + 2(p\eta - q\xi)]. \end{array} \right. \quad \text{dove } \rho_3^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

quindi la deformazione equivale a 3 dilatazioni nelle direzioni dei vettori  $\mathbf{V}_i$ ,  $\mathbf{V}_j$ ,  $\mathbf{V}_k$ , i cui valori sono

$$\delta_i, \delta_j, \delta_k,$$

e a una rotazione rigida di vettore

$$(57) \quad 2\Omega = pi + qj + rk = \text{rot}(P - M).$$

**13. Invarianti di deformazione.** — Espressioni invariate possono ottenersi dai coefficienti delle equazioni delle quadriche considerate.

Consideriamo per prima la quadrica delle deformazioni.

Dalla sua equazione:

$$\varepsilon_1 \xi^2 + \varepsilon_2 \eta^2 + \varepsilon_3 \zeta^2 + 2\gamma_1 \eta \zeta + 2\gamma_2 \zeta \xi + 2\gamma_3 \xi \eta = 1$$

si ricavano subito tre invarianti:

$$(58) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ J_2 = -(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) + (\varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_1 + \varepsilon_3 \varepsilon_2) \\ J_3 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 + 2\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 - (\varepsilon_1 \gamma_1^2 + \varepsilon_2 \gamma_2^2 + \varepsilon_3 \gamma_3^2). \end{array} \right.$$

Si noti che:

A) Per le (17) è:

$$J_1 = \frac{1}{2} (\delta_i^2 + \delta_j^2 + \delta_k^2 - 3).$$

Vale quindi il teorema: *La somma dei quadrati delle dilatazioni lineari in tre direzioni formanti triedro trirettangolo ed uscenti da uno stesso punto M è invariante, vale a dire è solo funzione del punto considerato:*

B)  $J_2$  per le (8) equivale a:

$$\frac{1}{4} [(V_i^2 - 1)(V_k^2 - 1) + (V_j^2 - 1)(V_i^2 - 1) + (V_k^2 - 1)(V_j^2 - 1)] - \\ - \frac{1}{4} [(V_j \times V_k)^2 + (V_k \times V_i)^2 + (V_i \times V_j)^2]$$

che, in virtù della relazione che lega due qualsiasi vettori  $e, f$

$$e^2 f^2 - (e \times f)^2 = (e \wedge f)^2$$

può scriversi:

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{4} \{ (V_i \wedge V_j)^2 + (V_j \wedge V_k)^2 + (V_k \wedge V_i)^2 - 2(V_i^2 + V_j^2 + V_k^2) + 3 \} = \\ &= \frac{1}{4} \{ \Sigma_k^2 + \Sigma_i^2 + \Sigma_j^2 \} - J - \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

È quindi invariante:

$$J_2 = \Sigma_i^2 + \Sigma_j^2 + \Sigma_k^2.$$

Ne deriva il teorema: *La somma dei quadrati delle dilatazioni superficiali relative a tre elementi di superficie formanti triedro trirettangolo è costante in ogni punto.*

$$C) \quad J_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \gamma_3 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \varepsilon_2 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}.$$

Allo stesso modo possono ricavarsi tre invarianti dall'ellissoide di dilatazione, la cui equazione è:

$$\delta_i^2 \xi^2 + \delta_j^2 \eta^2 + \delta_k^2 \zeta^2 + 4\gamma_1 \eta \zeta + 4\gamma_2 \zeta \xi + 4\gamma_3 \xi \eta = 1.$$

Essi sono:

$$(59) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_4 = \delta_i^2 + \delta_j^2 + \delta_k^2 \\ J_5 = 4(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) - (\delta_i^2 \delta_j^2 + \delta_j^2 \delta_k^2 + \delta_k^2 \delta_i^2) \\ J_6 = \begin{vmatrix} \delta_i^2 & 2\gamma_3 & 2\gamma_2 \\ 2\gamma_3 & \delta_j^2 & 2\gamma_1 \\ 2\gamma_2 & 2\gamma_1 & \delta_k^2 \end{vmatrix} \end{array} \right.$$

Di questi invarianti:

A)  $J_4$  era già stato ottenuto.

B)  $J_5$  nel caso in cui come assi coordinati si assumono  $i, j, k$  si riduce all'espressione:

$$- \delta_{i_1}^2 \delta_{j_1}^2 - \delta_{j_1}^2 \delta_{k_1}^2 - \delta_{k_1}^2 \delta_{i_1}^2$$

essendo in tal caso  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$ .

Ne deriva che  $J_5$  coincide con  $J_2'$  salvo il segno.

$$C) \quad J_6 = \begin{vmatrix} 1 + 2\varepsilon_1 & 2\gamma_3 & 2\gamma_2 \\ 2\gamma_3 & 1 + 2\varepsilon_2 & 2\gamma_1 \\ 2\gamma_2 & 2\gamma_1 & 1 + 2\varepsilon_3 \end{vmatrix}.$$

Si può inoltre verificare la relazione :

$$1 + 2J_1 - 4J_2 - 8J_3 = J_6 = (\theta + 1)^2.$$

Da tutto ciò che si è detto in questo paragrafo deriva quindi l'esistenza di tre invarianti fondamentali, cui gli altri possono ridursi.

Invece delle terne precedentemente studiate, si può assumere come terna fondamentale la seguente, che è formata con le dilatazioni lineari, superficiali e cubiche.

$$(60) \quad \begin{cases} i_1 = \delta_i^2 + \delta_j^2 + \delta_k^2 \\ i_2 = \Sigma_i^2 + \Sigma_j^2 + \Sigma_k^2 \\ i_3 = \theta. \end{cases}$$

**14. Deformazione omogenea. Dilatazione e scorrimento semplice.** — Alcune fra le espressioni invariantive precedentemente ricavate acquistano un particolare valore nel caso che si considerino alcune speciali deformazioni. È ciò che mostreremo in questo paragrafo.

Intanto occorre premettere che si possono definire con Lord KELVIN <sup>(5)</sup> come *deformazioni omogenee* quelle deformazioni cui corrispondono valori costanti, non tutti nulli, delle componenti la deformazione:

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3.$$

Ciò avrà luogo quando le nove derivate di  $x, y, z$  rispetto ad  $a, b, c$ , sono costanti, cioè quando  $x, y, z$  sono funzioni lineari di  $a, b, c$ , quando cioè è:

$$(61) \quad \begin{cases} x = \alpha_{10} + (1 + \alpha_{11})a + \alpha_{12}b + \alpha_{13}c \\ y = \alpha_{20} + \alpha_{21}a + (1 + \alpha_{22})b + \alpha_{23}c \\ z = \alpha_{30} + \alpha_{31}a + \alpha_{32}b + (1 + \alpha_{33})c \end{cases}$$

dove la  $\alpha$  sono dei coefficienti costanti.

Com'è ovvio  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ , sono definiti in tal caso da

$$(62) \quad \begin{cases} \varepsilon_i = \alpha_{ii} + \frac{1}{2} \Sigma \alpha_{ji}^2 \\ 2\gamma_k = \alpha_{ij} + \alpha_{ji} + \Sigma \alpha_{li} \alpha_{lj} \end{cases} \quad i, j, l, k = 1, 2, 3.$$

Le (62) si ottengono facilmente a mezzo delle semplici considerazioni seguenti.

<sup>(5)</sup> THOMSON e TAIT: *Treatise on natural philosophy*; vol. I, parte I, p. 116.



Essendo  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ , indipendenti da  $a, b, c$ , altrettanto potrà dirsi per i moduli di  $V_i, V_j, V_k$  e per gli angoli che questi vettori formano fra loro; e ciò per le (8). Ove si prescindia quindi da una rotazione rigida di tutto il sistema la terna  $V_i, V_j, V_k$  è per questo tipo di deformazione, indipendente da  $M$ . Si consideri ancora un vettore:

$$dM = dl \cdot s$$

(dove  $s$  è un vettore unitario, di coseni direttori  $\lambda, \mu, \nu$ ). Esso si trasformerà in

$$dP = dl \cdot V_s$$

e poichè

$$V_s = V_i \lambda + V_j \mu + V_k \nu$$

vale a dire  $V_s$  non dipende da  $M$ , altrettanto può dirsi di  $dP$  (e quindi della omografia  $\alpha$ ).

L'ultima relazione può anche scriversi

$$dP = V_i da + V_j db + V_k dc$$

da cui integrando si ricava

$$P - P_0 = V_i a + V_j b + V_k c$$

che moltiplicata scalarmente per  $i, j, k$  (essendo  $V_i, V_j, V_k$  indipendenti da  $M$ , altrettanto potrà dirsi di  $V_i \times i, V_j \times j$  ecc.) dà le (62), nonchè le espressioni delle costanti che vi compaiono in funzione di elementi aventi significato fisico-geometrico.

È questo un modo indiretto di integrazione del sistema di equazioni differenziali

$$(63) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)^2 = 2\varepsilon_1 + 1 \\ \left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial b}\right)^2 = 2\varepsilon_2 + 1 \\ \left(\frac{\partial x}{\partial c}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial c}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial c}\right)^2 = 2\varepsilon_3 + 1 \\ \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial y}{\partial a} \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial a} \frac{\partial z}{\partial b} = 2\gamma_3 \\ \frac{\partial x}{\partial b} \frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial y}{\partial b} \frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial z}{\partial b} \frac{\partial z}{\partial c} = 2\gamma_1 \\ \frac{\partial x}{\partial c} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial c} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial c} \frac{\partial z}{\partial a} = 2\gamma_2 \end{array} \right.$$

dove  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  non sono funzioni dei punti del sistema, ma dipendono solo dalla terna di assi coordinati  $i, j, k$ .

Le costanti  $1 + \alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}$  sono misurate dalle proiezioni di  $V_i$  sui tre assi come si desume dalle (61) notando che il punto  $M(1, 0, 0)$  si trasporta in virtù della deformazione nel punto  $P(1 + \alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31})$  <sup>(6)</sup>.

Particolarmente importanti sono per le deformazioni omogenee le seguenti proprietà:

A) *La terna principale di deformazione è indipendente dai punti del sistema*, essendo la terna di assi della quadrica a coefficienti indipendenti dai detti punti:

$$\varepsilon_1 \xi^2 + \varepsilon_2 \eta^2 + \varepsilon_3 \zeta^2 + 2\gamma_1 \eta \zeta + 2\gamma_2 \zeta \xi + 2\gamma_3 \xi \eta = 1.$$

B) *Le dilatazioni lineare e superficiale dipendono solo dalle direzioni a cui si riferiscono*. Ciò deriva immediatamente dal fatto avanti dimostrato che  $\alpha$  è indipendente dal punto  $M$ .

C) *La dilatazione cubica oltre ad essere invariante rispetto alla terna d'assi coordinati cui si riferisce il sistema — proprietà questa comune a tutte le deformazioni — gode la proprietà particolarissima di essere anche indipendente dal punto a cui la si riferisce*.

Infatti dalle (62) si ricava facilmente:

$$(64) \quad \begin{cases} V_i = (1 + \alpha_{11})i + \alpha_{21}j + \alpha_{31}k \\ V_j = \alpha_{12}i + (1 + \alpha_{22})j + \alpha_{32}k \\ V_k = \alpha_{13}i + \alpha_{23}j + (1 + \alpha_{33})k \end{cases}$$

e quindi

$$(65) \quad \theta = V_i \wedge V_j \times V_k - 1 = \begin{vmatrix} 1 + \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & 1 + \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & 1 + \alpha_{33} \end{vmatrix} - 1$$

espressione in cui tutte le  $\alpha$  non dipendono da  $M$ . Altrettanto può quindi dirsi di  $\theta$ .

Si noti che all'espressione di  $\theta$  si può dare anche la forma

$$\theta = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} + \alpha_{11}\alpha_{22} + \alpha_{11}\alpha_{33} + \alpha_{22}\alpha_{33} + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix}.$$

(continua)

<sup>(6)</sup> Per altro modo d'integrare il detto sistema di equazioni, si veda la Memoria del sig. RQUIER in « Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure », Serie 3<sup>a</sup>, T. 22, pagg. 475-538.

D) *Le deformazioni omogenee equivalgono ad una rotazione rigida e a tre dilatazioni.*

Infatti:

$$2\Omega = i \wedge V_i + j \wedge V_j + k \wedge V_k = (\alpha_{21} - \alpha_{21})k + (\alpha_{13} - \alpha_{31})j + (\alpha_{32} - \alpha_{23})i$$

ossia il vettore della rotazione  $\Omega$  non dipende da  $M$ . Esso caratterizza quindi una rotazione rigida del sistema.

Se prescindiamo dalla rotazione rigida, se poniamo cioè:

$$p = q = r = 0$$

ossia:

$$\Omega = 0$$

risulta:

$$(66) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial b} = \frac{\partial v}{\partial a} \\ \frac{\partial u}{\partial c} = \frac{\partial w}{\partial a} \\ \frac{\partial v}{\partial c} = \frac{\partial w}{\partial b} \end{array} \right.$$

e quindi è:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{12} = \alpha_{21} \\ \alpha_{13} = \alpha_{31} \\ \alpha_{23} = \alpha_{32} \end{array} \right.$$

Per gli assi  $i_1, j_1, k_1$ , è:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\gamma_3 = V_{i_1} \times V_{j_1} = (1 + \alpha_{11})\alpha_{12} + \alpha_{12}(1 + \alpha_{22}) + \alpha_{13}\alpha_{23} = 0 \\ 2\gamma_1 = V_{j_1} \times V_{k_1} = \alpha_{12}\alpha_{13} + (1 + \alpha_{22})\alpha_{23} + (1 + \alpha_{33})\alpha_{23} = 0 \\ 2\gamma_2 = V_{k_1} \times V_{i_1} = (1 + \alpha_{11})\alpha_{13} + \alpha_{12}\alpha_{23} + \alpha_{13}(1 + \alpha_{33}) = 0 \end{array} \right.$$

Queste tre equazioni possono anche scriversi:

$$(67) \quad \left\{ \begin{array}{l} (2 + \alpha_{11} + \alpha_{22}) + \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{12}} \alpha_{23} = 0 \\ (2 + \alpha_{22} + \alpha_{33}) + \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{23}} \alpha_{12} = 0 \\ (2 + \alpha_{11} + \alpha_{33}) + \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{13}} \alpha_{23} = 0 \end{array} \right.$$

e quindi può essere

$$(68) \quad \alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{23} = 0$$

oppure

$$(69) \quad \begin{cases} \alpha_{12}^2 = (2 + \alpha_{11} + \alpha_{33})(2 + \alpha_{22} + \alpha_{33}) \\ \alpha_{13}^2 = (2 + \alpha_{11} + \alpha_{22})(2 + \alpha_{22} + \alpha_{33}) \\ \alpha_{23}^2 = (2 + \alpha_{11} + \alpha_{22})(2 + \alpha_{11} + \alpha_{33}). \end{cases}$$

Esamineremo separatamente le due soluzioni (68) e (69).

Dalle (69) si ricava

$$\begin{aligned} V_{i_1} = & (1 + \alpha_{11})i_1 + \sqrt{[(1 + \alpha_{11}) + (1 + \alpha_{33})][(1 + \alpha_{22}) + (1 + \alpha_{33})]}j_1 + \\ & + \sqrt{[(1 + \alpha_{11}) + (1 + \alpha_{22})][(1 + \alpha_{22}) + (1 + \alpha_{33})]}k_1 \end{aligned}$$

e quindi

$$\delta_{i_1}^2 = [(1 + \alpha_{11}) + (1 + \alpha_{22}) + (1 + \alpha_{33})]^2.$$

In modo analogo si ricavano le espressioni di  $\delta_{j_1}^2$ ,  $\delta_{k_1}^2$ .

Risulta

$$\delta_{i_1} = \delta_{j_1} = \delta_{k_1}.$$

E se il sistema è incompressibile ( $\theta = 0$ ), da

$$\delta_{i_1} \delta_{j_1} \delta_{k_1} = 1$$

si ricava pure

$$\delta_{i_1} = \delta_{j_1} = \delta_{k_1} = 1,$$

il che val quanto dire che non v'è deformazione.

Nel caso quindi di sistema incompressibile occorrerà prendere in considerazione solo la soluzione (68), cui corrisponde:

$$(70) \quad \begin{cases} V_{i_1} = (1 + \alpha_{11})i_1 \\ V_{j_1} = (1 + \alpha_{22})j_1 \\ V_{k_1} = (1 + \alpha_{33})k_1. \end{cases}$$

Per l'incompressibilità del sistema è poi:

$$(1 + \alpha_{11})(1 + \alpha_{22})(1 + \alpha_{33}) = 1$$

ossia:

$$(71) \quad 1 + \alpha_{11} = \frac{1}{(1 + \alpha_{22})(1 + \alpha_{33})}.$$

Quanto alle dilatazioni superficiali, esse sono :

$$(72) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i_1} = (1 + \alpha_{22})(1 + \alpha_{33}) = \frac{1}{1 + \alpha_{11}} \\ \sum_{j_1} = (1 + \alpha_{33})(1 + \alpha_{11}) = \frac{1}{1 + \alpha_{22}} \\ \sum_{k_1} = (1 + \alpha_{11})(1 + \alpha_{22}) = \frac{1}{1 + \alpha_{33}} \end{array} \right.$$

In una direzione qualsiasi la deformazione è definita da :

$$(73) \quad \mathbf{V}_s = (1 + \alpha_{11})\lambda \mathbf{i}_1 + (1 + \alpha_{22})\mu \mathbf{j}_1 + (1 + \alpha_{33})\nu \mathbf{k}_1$$

dove  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  sono i coseni direttori di  $\mathbf{s}$  rispetto alla terna  $\mathbf{i}_1$ ,  $\mathbf{j}_1$ ,  $\mathbf{k}_1$ .

Cosicchè in definitiva lo studio *cinematico delle deformazioni omogenee dei sistemi incompressibili può ricondursi alla ricerca di due funzioni.*

Questa conclusione può presentare interesse nello studio dell'equilibrio dei liquidi e del caucciù vulcanizzato, perchè gli uni e l'altro sono sistemi incompressibili.

Fra le deformazioni omogenee considereremo la dilatazione e lo scorrimento semplice.

#### A) *Dilatazione semplice :*

Si dice che una deformazione è una dilatazione semplice quando essa corrisponde ad una dilatazione parallelamente ad una direzione e alla invarianza delle lunghezze in tutte le direzioni normali alla detta.

Ne deriva che se si assume come terna d'assi la direzione parallelamente alla quale vi è dilatazione (e la si chiama  $\mathbf{i}$ ) e due qualsiasi direzioni ad essa normale, è :

$$\delta_i = 1, \quad \delta_j = 1, \quad \delta_k = 1.$$

Quindi :

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_j^2 - 1) = \frac{1}{2}(\delta_j^2 - 1) = 0$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_k^2 - 1) = \frac{1}{2}(\delta_k^2 - 1) = 0.$$

Poichè inoltre per la definizione stessa di questa dilatazione la direzione  $\mathbf{i}$  si trasporta in  $\mathbf{V}_i$  che coincide con essa, e  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$  coincidono del pari

con  $V_j$  e  $V_k$  e quindi  $V_i, V_j, V_k$  formano terna ortogonale:

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} V_j \times V_k = 0$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{2} V_k \times V_i = 0$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{2} V_i \times V_j = 0.$$

Se consideriamo ora i tre invarianti (82) vediamo che per le relazioni prima scritte è:

$$J_2 = J_3 = 0$$

$$J_1 = \varepsilon_1 = \frac{1}{2} (\delta_1^2 - 1)$$

cioè

$$\delta_1 = \sqrt{1 + 2J_1}.$$

#### B) *Scorrimento semplice:*

Si dice che una deformazione è uno scorrimento semplice allorchè tutti i punti contenuti in un piano restano in esso dopo la deformazione, conservando le loro posizioni primitive; tutti i punti contenuti in un piano parallelo al primo restano nel loro piano, ma si spostano parallelamente ad una direzione contenuta nel piano dato e proporzionalmente alle loro distanze da questo piano che si chiama « *piano di scorrimento* ». Se si assume come piano di scorrimento il piano  $b = \text{cost.}$  e come direzione parallelamente alla quale ha luogo lo scorrimento la direzione  $i$ , e si indica con  $g$  un coefficiente di proporzionalità, risulta ovviamente dalla precedente definizione che

$$\begin{cases} x = a + gb \\ y = b \\ z = c. \end{cases}$$

Deriva quindi dalle (62) che

$$(74) \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0, \quad \varepsilon_2 = \frac{g^2}{2}, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = g$$

e dalle (22)

$$(V_j, V_k) = (V_k, V_i) = \frac{\pi}{2}; \quad \cos(V_i, V_j) = \frac{g}{\sqrt{1 + g^2}};$$

ossia

$$\operatorname{tg}(V_i, V_j) = g.$$

Vale a dire mentre la direzione  $\mathbf{k}$  resta normale al piano  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ , varia, in virtù della deformazione l'angolo  $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$  e diviene tale che la sua tangente è eguale al coefficiente di scorrimento.

Risulta inoltre dalle (74) che gli invarianti hanno i valori seguenti:

$$\begin{aligned} J_3 &= 0 \\ \sqrt{2J_1} &= \sqrt{J_2} = g. \end{aligned}$$

Naturalmente a cagione dell'invarianza delle  $J$  queste relazioni sono verificate qualunque siano gli assi coordinati scelti, qualunque sia cioè la loro orientazione rispetto al piano e alla direzione di scorrimento.

15. **La deformazione considerata come un'omografia vettoriale.** — Si è già detto che la deformazione può essere considerata come una corrispondenza fra i punti  $M(a, b, c)$  e i punti  $P(x, y, z)$  definita dalla (12). Essa equivale quindi alla omografia  $\alpha$  definita da

$$(75) \quad \alpha = \frac{dP}{dM} = 1 + \frac{dU}{dM}$$

in quanto entrambe si riducono a stabilire una corrispondenza fra i vettori  $dM$  e i vettori  $dP$ .

La teoria delle omografie vettoriali deve quindi permettere di ricavare tutte le relazioni prima stabilite. È ciò che vedremo rapidamente, approfittando anzi di questa omografia per ricavare con rapidità e semplicità massime qualche altra relazione interessante.

Siano due punti  $M$  ed  $M'$  a distanza finita, aventi per coordinate rispettivamente

$$\begin{aligned} &a; \quad b; \quad c \\ &a + \Delta a; \quad b + \Delta b; \quad c + \Delta c. \end{aligned}$$

Il vettore  $M' - M$  sarà definito da

$$(76) \quad M' - M = \Delta a \cdot \mathbf{i} + \Delta b \cdot \mathbf{j} + \Delta c \cdot \mathbf{k}.$$

Si ha subito da (75) e (76)

$$P' - P = \alpha(M' - M) = \Delta a \cdot \alpha \mathbf{i} + \Delta b \cdot \alpha \mathbf{j} + \Delta c \cdot \alpha \mathbf{k}$$

perchè l'omografia  $\alpha$  è funzione solo del punto  $M$ .

Poichè d'altra parte è (7):

$$(77) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha i = \frac{dP}{dM} i = \frac{\partial P}{\partial a} = V_i \\ \alpha j = \frac{dP}{dM} j = \frac{\partial P}{\partial b} = V_j \\ \alpha k = \frac{dP}{dM} k = \frac{\partial P}{\partial c} = V_k \end{array} \right.$$

l'ultima relazione può scriversi

$$(78) \quad P' - P = V_i \cdot \Delta a + V_j \cdot \Delta b + V_k \cdot \Delta c.$$

Moltiplicando la (78) scalarmente e successivamente per  $i$ ,  $j$ ,  $k$  si ricavano le relazioni

$$(79) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta x = \frac{\partial x}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial x}{\partial b} \Delta b + \frac{\partial x}{\partial c} \Delta c \\ \Delta y = \frac{\partial y}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial y}{\partial b} \Delta b + \frac{\partial y}{\partial c} \Delta c \\ \Delta z = \frac{\partial z}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial z}{\partial b} \Delta b + \frac{\partial z}{\partial c} \Delta c \end{array} \right.$$

dove con  $x, y, z$  si sono indicate al solito le coordinate del punto  $P$  e con  $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$  si sono indicate le coordinate di  $P'$ .

Nel caso in cui  $M$  ed  $M'$  siano infinitamente vicini, vale a dire nel caso in cui  $\Delta a, \Delta b, \Delta c$ , siano infinitesimi, le (78) e (79), si riducono alle (10) e (4), che sono state già ricavate in precedenza.

La dilatazione lineare è presto ottenuta, chè:

$$\delta^2 = \frac{(P' - P)^2}{(M' - M)^2} = V^2.$$

La dilatazione superficiale è data da

$$(80) \quad \Sigma = \frac{\text{mod}(\alpha s_1 \wedge \alpha s_2)}{\text{mod}(s_1 \wedge s_2)} = \frac{\text{mod} R\alpha(s_1 \wedge s_2)}{\text{mod}(s_1 \wedge s_2)}.$$

(7) Qui ed in seguito ci riferiremo per la parte relativa ad omografie vettoriali al libro di BURALI-FORTI e MARCOLONGO, *Les transformations linéaires*, che brevemente indicheremo con T. L. (Vedi T. L. a pag. 65).



Analogamente si ritrova la formula relativa alla variazione dell'angolo di due direzioni  $P' - P$  e  $P'' - P$ :

$$\cos \omega' = \frac{(P' - P) \times (P'' - P)}{\text{mod}(P' - P) \cdot \text{mod}(P'' - P)} = \frac{\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2}{\delta_1 \delta_2}$$

la dilatazione cubica la si ottiene osservando semplicemente che <sup>(8)</sup>:

$$I_3 \alpha = \frac{\tau'}{\tau} = \alpha i \wedge \alpha j \times \alpha k = \mathbf{V}_i \wedge \mathbf{V}_j \times \mathbf{V}_k.$$

Quanto alla *quadrica indicatrice* dell'omografia  $\beta$ , si può scriverne l'equazione in termini vettoriali:

$$(S - M) \times \alpha(S - M) = 1$$

dove con  $S$  si indica un punto generico della quadrica. Se le coordinate di  $S$  sono  $\xi, \eta, \zeta$ , è:

$$\begin{aligned} S - M &= \xi i + \eta j + \zeta k \\ \alpha(S - M) &= \xi \cdot \alpha i + \eta \cdot \alpha j + \zeta \cdot \alpha k = \\ &= \xi \cdot \mathbf{V}_i + \eta \cdot \mathbf{V}_j + \zeta \cdot \mathbf{V}_k \end{aligned}$$

e quindi se si indica con  $\rho_3$  il raggio vettore, vale a dire se si pone:

$$\rho_3^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

si ricava

$$(81) \quad \rho_3^2 \cdot \mathbf{s} \times \mathbf{V}_s = 1$$

dove con  $\mathbf{s}$  si indica un vettore unitario nella direzione  $S - M$ .

In coordinate cartesiane la (81) può scriversi:

$$(82) \quad \frac{\partial x}{\partial a} \xi^2 + \frac{\partial y}{\partial b} \eta^2 + \frac{\partial z}{\partial c} \zeta^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial x}{\partial b} \right) \xi \eta + \left( \frac{\partial z}{\partial b} + \frac{\partial y}{\partial c} \right) \eta \zeta + \left( \frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial z}{\partial a} \right) \zeta \xi = 1.$$

Il significato fisico di  $\rho_3$  può essere ottenuto facilmente dalla (81). Infatti da detta equazione si ricava:

$$\rho_3 = \frac{1}{\sqrt{\delta_s \cos \gamma_s}}$$

dove con  $\gamma_s$  si indica l'angolo di cui ha rotato in virtù della deformazione la direzione  $\mathbf{s}$ .

<sup>(8)</sup> T. L., pag. 27.

Si verifica facilmente che gli assi della quadrica (82) sono  $V_{i_1}, V_{j_1}, V_{k_1}$ .  
Dimosteremo qui i seguenti teoremi:

A) *L'ellissoide delle dilatazioni si trasforma in seguito alla deformazione nella sfera di raggio uno.*

Infatti dalle (79) si ricava facilmente:

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = F(\xi, \eta, \zeta)$$

ed essendo verificata, per i punti dell'ellissoide di dilatazione la relazione

$$F(\xi, \eta, \zeta) = 1$$

sarà del pari per i corrispondenti valori di  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  verificata la relazione:

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = 1$$

che è l'equazione di una sfera.

B) *Nell'intorno di ogni punto M esiste un triedro trirettangolo che si trasforma in un triedro trirettangolo.*

Infatti per ogni omografia esiste una terna di direzioni principali, vale a dire di direzioni formanti triedro trirettangolo, che è trasformata dall'omografia in una terna formante del pari triedro trirettangolo.

C) *La terna  $i_1, j_1, k_1$  è trasformata nella terna  $V_{i_1}, V_{j_1}, V_{k_1}$ .*

Infatti si è dimostrato che

$$\begin{aligned}\alpha i_1 &= V_{i_1} \\ \alpha j_1 &= V_{j_1} \\ \alpha k_1 &= V_{k_1}.\end{aligned}$$

La terna  $i_1, j_1, k_1$  poichè  $V_{i_1}, V_{j_1}, V_{k_1}$  sono vettori a due a due ortogonali è la terna indicata nel teorema precedente.

D) *Un vettore unitario qualsiasi  $s$ , si trasforma nel vettore  $V_s$ .*

Infatti se  $\lambda, \mu, \nu$  sono i coseni direttori di  $s$ , è

$$s = \lambda i + \mu j + \nu k$$

e quindi

$$\begin{aligned}\alpha s &= \lambda \cdot \alpha i + \mu \cdot \alpha j + \nu \cdot \alpha k = \\ &= \lambda V_i + \mu V_j + \nu V_k = \\ &= V_s.\end{aligned}$$

E) La quadrica delle  $\mathbf{V}$  è la trasformata della sfera di centro  $\mathbf{M}$  e raggio uno.

Infatti  $\alpha$  trasforma  $\mathbf{M}$  in  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{s}$  in  $\mathbf{V}_s$ , dove  $\mathbf{s}$  è un vettore unitario.

F) Ogni deformazione può ridursi a tre rotazioni rigide elementari e a tre dilatazioni.

Infatti ogni omografia è individuata dando tre vettori non paralleli ad uno stesso piano e i tre vettori corrispondenti.

Si può quindi definire  $\alpha$  nel modo seguente

$$(83) \quad \alpha = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_i & \mathbf{V}_j & \mathbf{V}_k \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix}.$$

D'altra parte essendo un'omografia vettoriale una sostituzione fra vettori, essa equivarrà ad ogni insieme di operazioni che permette di passare da  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  a  $\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j, \mathbf{V}_k$ . Tra queste considereremo l'insieme seguente:

A) Tre dilatazioni nella direzione dei tre assi  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  rispettivamente con allungamenti unitari eguali a

$$\delta_i = \text{mod } \mathbf{V}_i; \quad \delta_j = \text{mod } \mathbf{V}_j; \quad \delta_k = \text{mod } \mathbf{V}_k.$$

B) Tre rotazioni elementari di vettori:

$$\mathbf{i} \wedge \mathbf{V}_i, \quad \mathbf{j} \wedge \mathbf{V}_j, \quad \mathbf{k} \wedge \mathbf{V}_k.$$

Si noti che queste tre rotazioni elementari equivalgono ad una rotazione unica di vettore  $2\Omega$ , definito da

$$(84) \quad \begin{aligned} 2\Omega &= \mathbf{i} \wedge \mathbf{V}_i + \mathbf{j} \wedge \mathbf{V}_j + \mathbf{k} \wedge \mathbf{V}_k = \\ &= \mathbf{i} \wedge \alpha\mathbf{i} + \mathbf{j} \wedge \alpha\mathbf{j} + \mathbf{k} \wedge \alpha\mathbf{k} = {}^{(9)} \\ &= 2V \frac{dP}{dM} = {}^{(10)} \\ &= \text{rot}(P - 0) \end{aligned}$$

dove  $0$  è un punto fisso qualsiasi.

Ciò equivale in fondo a scomporre l'omografia  $\alpha$  nella sua dilatazione  $D\alpha$ , e nel suo vettore  $V = \Omega$ .

<sup>(9)</sup> T. L., pag. 70, [1]

<sup>(10)</sup> T. L., pag. 28, [2].

Il vettore  $\Omega$  ha quindi per componenti:

$$(85) \quad \left\{ \begin{aligned} p = \Omega \times i &= \frac{1}{2} (j \wedge V_j \times i + k \wedge V_k \times i) = \\ &= \frac{1}{2} (V_j \times k - V_k \times j) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial b} - \frac{\partial v}{\partial c} \right) \\ q = \Omega \times j &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial c} - \frac{\partial w}{\partial a} \right) \\ r = \Omega \times k &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial a} - \frac{\partial u}{\partial b} \right). \end{aligned} \right.$$

Prima di terminare questo paragrafo vogliamo osservare che poichè  $V_i, V_j, V_k$  sono tra loro ortogonali essi sono gli assi della quadrica delle  $V$ .

Sicchè *le direzioni degli assi dell'ellissoide di dilatazione si trasportano in virtù della deformazione in quelli della quadrica delle  $V$ .*

**16. Considerazioni sulla sufficienza di  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  per determinare la deformazione.** — Ad ogni deformazione corrisponde un determinato sistema di valori di  $u, v, w$  e quindi di  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ .

Vogliamo qui rispondere alla domanda: A quali condizioni occorre che soddisfino queste funzioni  $\gamma$  ed  $\varepsilon$  perchè sia determinata la deformazione? O in altri termini quali sono le condizioni di integrabilità del sistema di equazioni (7)?

Premetteremo alcuni teoremi <sup>(14)</sup>.

**Teorema 1°.** — *Se le componenti della deformazione sono tutte nulle, il sistema non subisce deformazioni, ma solo spostamenti d'assieme.*

Infatti se  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$  per la (6) è

$$\sigma = 0$$

e quindi

$$dl' = dl$$

ossia: *la deformazione conserva le lunghezze.*

<sup>(14)</sup> Si veda per questi teoremi la *Meccanica Razionale* di P. APPEL, vol. III, pag. 239.

D'altra parte se si considera un triangolo di lati infinitesimi esso si trasforma in un triangolo del pari con lati infinitesimi, ed uguali rispettivamente a quelli del primo. Perciò anche *gli angoli sono conservati dalla deformazione*.

Ne deriva che essendo conservati angoli e distanze non è variata in virtù della deformazione la posizione relativa dei punti del sistema e quindi non vi è stata alcuna deformazione. Tutto può quindi ridursi a dei moti d'assieme, spostamenti o rotazioni, rigide entrambi.

Anche la simmetria corrisponde a una deformazione che conserva angoli e distanze, ma è da scartarsi, perchè le corrisponde come determinante funzionale delle  $x, y, z$  rispetto ad  $a, b, c$ , il valore  $-1$ , e quindi per l'equazione di continuità per essa si verifica la relazione

$$\rho_0 = -\rho$$

il che è privo di senso.

**Teorema 2.°** — *Due deformazioni dello stesso mezzo per cui le  $\varepsilon$  e le  $\gamma$  sono rispettivamente uguali, differiscono fra loro per moti di insieme.*

Infatti se le  $\varepsilon$  e le  $\gamma$  sono uguali altrettanto può dirsi per i moduli dei vettori  $V_i, V_j, V_k$  e per gli angoli che essi formano tra loro. A meno quindi di una rotazione rigida coincidono le terne  $V_i, V_j, V_k$  e quindi le omografie  $\alpha$ , o, ciò che è lo stesso, le due deformazioni sono una stessa cosa.

**Teorema 3.°** — *Le componenti di deformazione non sono arbitrarie, ma devono soddisfare sei equazioni di condizione, perchè possano definire una deformazione possibile.*

Dette condizioni sono state ricavate con metodi cartesiani dai sigg. MANVILLE<sup>(12)</sup> e RIQUIER<sup>(13)</sup> e dal prof. MARCOLONGO<sup>(14)</sup>, con metodi vettoriali dal prof. BURGATTI<sup>(15)</sup>.

I vettori  $V_i, V_j, V_k$  che abbiano introdotto in questa trattazione ci consentono di ottenere con relativa facilità le dette condizioni.

<sup>(12)</sup> *Sur les déformations finies*. Thèse, Bordeaux 1903.

<sup>(13)</sup> *Sur l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles*, in Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 1905, pagg. 475-538.

<sup>(14)</sup> *Le formule di Saint-Venant per le deformazioni finite*. Rend. Circ. Mat. di Palermo, T. XIX, 1905, pagg. 151-155.

<sup>(15)</sup> *Sulle deformazioni finite dei corpi continui*. Mem. della R. Acc. delle Sc. di Bologna, Serie VII, T. I, 1913-14; pagg. 237-244.

Infatti dalle (8) si ricavano le seguenti equazioni:

$$(88) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial a} \left( -\frac{\partial \gamma_1}{\partial a} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} + \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial b \partial c} = \\ \quad = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} \left[ -\frac{\partial}{\partial a} (\mathbf{V}_j \times \mathbf{V}_k) + \frac{\partial}{\partial b} (\mathbf{V}_k \times \mathbf{V}_i) + \frac{\partial}{\partial c} (\mathbf{V}_i \times \mathbf{V}_j) \right] \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{V}_i}{\partial b \partial c} \\ \text{e due simili:} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial c^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial b^2} - 2 \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial b \partial c} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{V}_i}{\partial c^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{V}_k}{\partial b^2} - \frac{\partial^2 (\mathbf{V}_j \times \mathbf{V}_k)}{\partial b \partial c} \\ \text{e due simili.} \end{array} \right.$$

Se si tiene presente che:

$$\mathbf{V}_i = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial a}; \quad \mathbf{V}_j = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial b}; \quad \mathbf{V}_k = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial c}$$

e si ammette che sia invertibile l'ordine delle derivazioni seconde di  $\mathbf{U}$  — il che deve essere perchè  $d\mathbf{U}$  sia un differenziale esatto — si vede che le relazioni precedenti equivalgono a

$$(89) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial a} \left( -\frac{\partial \gamma_1}{\partial a} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} + \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial b \partial c} = \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial a^2} \times \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial b \partial c} - \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial a \partial b} \times \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial a \partial c} \\ \text{e due simili:} \\ 2 \frac{\partial^2 \gamma_3}{\partial a \partial b} - \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial b^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial a^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial a^2} \times \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial b^2} - \left( \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial a \partial b} \right) \\ \text{e due simili.} \end{array} \right.$$

Per ricavare le equazioni cercate occorrerà sostituire in queste espressioni, alle derivate seconde del vettore  $\mathbf{U}$ , le equivalenti espressioni formate a mezzo delle derivate delle componenti di deformazione rispetto alle coordinate.

Si noti che dalle (7) si ricava

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial a} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial a} \times \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial a^2} \\ \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial a} \times \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial a \partial b} \\ \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial c} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial a} \times \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial a \partial c} \\ 2 \frac{\partial \gamma_2}{\partial a} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial a} \times \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial a \partial c} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial c} \times \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial a^2} \\ 2 \frac{\partial \gamma_3}{\partial a} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial b} \times \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial a^2} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial a} \times \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial a \partial b} \end{array} \right.$$

e quindi

$$(90) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial a} = \frac{\partial U}{\partial a} \times \frac{\partial^2 U}{\partial a^2} \\ 2 \frac{\partial \gamma_3}{\partial a} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b} = \frac{\partial U}{\partial b} \times \frac{\partial^2 U}{\partial a^2} \\ 2 \frac{\partial \gamma_2}{\partial a} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial c} = \frac{\partial U}{\partial c} \times \frac{\partial^2 U}{\partial a^2} \end{array} \right.$$

Indicando con  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  i primi membri di queste equazioni, da esse si ricava facilmente e successivamente:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{j} + \alpha_3 \mathbf{k} &= \frac{\partial U}{\partial a} \times \frac{\partial^2 U}{\partial a^2} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial b} \times \frac{\partial^2 U}{\partial a^2} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial c} \times \frac{\partial^2 U}{\partial a^2} \mathbf{k} = \\ &= \{ H(\alpha \mathbf{i}, \mathbf{i}) + H(\alpha \mathbf{j}, \mathbf{j}) + H(\alpha \mathbf{k}, \mathbf{k}) \} \frac{\partial^2 U}{\partial a^2} = \text{<sup>(16)</sup>} \\ &= k\alpha \frac{\partial^2 U}{\partial a^2} \end{aligned}$$

e quindi

$$(91_a) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial a^2} = \alpha_1 \cdot k\alpha^{-1} \mathbf{i} + \alpha_2 k\alpha^{-1} \mathbf{j} + \alpha_3 \cdot k\alpha^{-1} \mathbf{k}.$$

Analogamente si ricava

$$(91_b) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial b^2} = \beta_1 \cdot k\alpha^{-1} \mathbf{i} + \beta_2 \cdot k\alpha^{-1} \mathbf{j} + \beta_3 \cdot k\alpha^{-1} \mathbf{k}$$

$$(91_c) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial c^2} = \theta_1 \cdot k\alpha^{-1} \mathbf{i} + \theta_2 \cdot k\alpha^{-1} \mathbf{j} + \theta_3 \cdot k\alpha^{-1} \mathbf{k}$$

dove le  $\beta$  e le  $\theta$  si ottengono dalle  $\alpha$  a mezzo di permutazioni circolari degli indici 1, 2, 3 e di  $a, b, c$ .

Con procedimento analogo si ottiene:

$$(92_a) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial a \partial b} = \delta_2' k\alpha^{-1} \mathbf{i} + \delta_3 \cdot k\alpha^{-1} \mathbf{j} + \eta_3 \cdot k\alpha^{-1} \mathbf{k}$$

$$(92_b) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial a \partial c} = \delta_2 \cdot k\alpha^{-1} \mathbf{i} + \eta_2 k\alpha^{-1} \mathbf{j} + \delta_1' k\alpha^{-1} \mathbf{k}$$

$$(92_c) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial b \partial c} = \eta_1 \cdot k\alpha^{-1} \mathbf{i} + \delta_3' k\alpha^{-1} \mathbf{j} + \delta_1 k\alpha^{-1} \mathbf{k}$$

<sup>(16)</sup> La dimostrazione della relazione

$$H(\alpha \mathbf{i}, \mathbf{i}) + H(\alpha \mathbf{j}, \mathbf{j}) + H(\alpha \mathbf{k}, \mathbf{k}) = k\alpha$$

si ottiene facilmente quando si ricordi che (T. L. 19, [7])

$$H(\mathbf{i}, \alpha \mathbf{i}) + H(\mathbf{j}, \alpha \mathbf{j}) + H(\mathbf{k}, \alpha \mathbf{k}) = \alpha; \quad \text{e che } kH(\mathbf{i}, \alpha \mathbf{i}) = H(\alpha \mathbf{i}, \mathbf{i}).$$

dove

$$(93_a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_1 = \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial b}; \quad \delta_2 = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial c}; \quad \delta_3 = \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a} \\ \delta'_1 = \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial a}; \quad \delta'_2 = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial b}; \quad \delta'_3 = \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial c} \end{array} \right.$$

$$(93_b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta_1 = \left( -\frac{\partial \gamma_1}{\partial a} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} + \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} \right) \\ \eta_2 = \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} - \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} + \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} \right) \\ \eta_3 = \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial b} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial c} \right). \end{array} \right.$$

Sostituendo quindi in (90) ed effettuando le operazioni ivi indicate si ricava:

$$(94) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \eta_1}{\partial a} - \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial b \partial c} = (k\alpha^{-1}i)^2(\alpha_1\eta_1 - \delta_2\delta'_2) + (k\alpha^{-1}j)^2(\alpha_2\delta'_3 - \delta_3\eta_2) + (k\alpha^{-1}k)^2(\alpha_3\delta_1 - \eta_3\delta'_1) \\ \quad + (k\alpha^{-1}i \times k\alpha^{-1}j)(\alpha_1\delta'_3 + \alpha_2\eta_1 - \delta'_2\eta_2 - \delta_2\delta_3) \\ \quad + (k\alpha^{-1}i \times k\alpha^{-1}k)(\alpha_1\delta_1 + \alpha_3\eta_1 - \delta'_1\delta'_2 - \eta_3\delta_2) \\ \quad + (k\alpha^{-1}j \times k\alpha^{-1}k)(\alpha_2\delta_1 + \delta_3\alpha_3 - \delta_3\delta'_1 - \eta_2\eta_3) \end{array} \right.$$

e due altre equazioni simili

$$(95) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{\partial^2 \gamma_3}{\partial a \partial b} - \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial b^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial a^2} = (k\alpha^{-1}i)^2(\beta_1\alpha_1 - \delta_2'^2) + (k\alpha^{-1}j)^2(\beta_2\theta_2 - \delta_3^2) + k\alpha^{-1}k(\beta_3\theta_3 - \eta_3^2) \\ \quad + (k\alpha^{-1}i) \times (k\alpha^{-1}j)[\beta_1\theta_2 + \beta_2\theta_1 - 2\delta_2'\delta_3] \\ \quad + (k\alpha^{-1}i) \times (k\alpha^{-1}k)[\beta_1\theta_3 + \theta_3\beta_1 - 2\delta_2'\eta_3] \\ \quad + (k\alpha^{-1}j) \times (k\alpha^{-1}k)[\beta_2\theta_3 + \theta_3\beta_2 - 2\delta_3\eta_3] \end{array} \right.$$

e due equazioni simili.

È facile vedere che queste equazioni equivalgono ad es. a quelle del prof. MARCOLONGO e alle altre del sig. RIQUIER.

Ciò sarà fatto in seguito.

Il sig. MANVILLE dimostra pure che queste condizioni sono sufficienti a caratterizzare la deformazione.



## PARTE SECONDA

Nella seconda parte di questa Memoria faremo uso di variabili euleriane (cioè di variabili riferite ai punti del sistema deformato).

1. **Premesse.** — Per scrivere le relazioni precedentemente ricavate in funzione delle coordinate  $x, y, z$  dei punti del mezzo deformato, noi faremo uso di un principio di dualità facilmente stabilibile.

Premettiamo perciò alcune espressioni che ci serviranno per stabilire il detto principio.

Dalle (1) si ricava:

$$(96) \quad \begin{cases} a = x + u' \\ b = y + v' \\ c = z + w' \end{cases}$$

dove:

$$(96_a) \quad \begin{cases} u' = -u \\ v' = -v \\ w' = -w. \end{cases}$$

Inoltre dalle (79) si ricava:

$$(97) \quad \begin{cases} D \cdot \Delta a = \frac{\partial(y, z)}{\partial(b, c)} \Delta x + \frac{\partial(z, x)}{\partial(b, c)} \Delta y + \frac{\partial(x, y)}{\partial(b, c)} \Delta z \\ D \cdot \Delta b = \frac{\partial(y, z)}{\partial(c, a)} \Delta x + \frac{\partial(z, x)}{\partial(c, a)} \Delta y + \frac{\partial(x, y)}{\partial(c, a)} \Delta z \\ D \cdot \Delta c = \frac{\partial(y, z)}{\partial(a, b)} \Delta x + \frac{\partial(z, x)}{\partial(a, b)} \Delta y + \frac{\partial(x, y)}{\partial(a, b)} \Delta z \end{cases}$$

con:

$$D = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)}.$$

Si può dimostrare che queste equazioni equivalgono alle altre:

$$(97_a) \quad \begin{cases} \Delta a = \frac{\partial a}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial a}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial a}{\partial z} \Delta z \\ \Delta b = \frac{\partial b}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial b}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial b}{\partial z} \Delta z \\ \Delta c = \frac{\partial c}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial c}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial c}{\partial z} \Delta z. \end{cases}$$

Per noi è comodo dimostrare queste ultime relazioni, servendoci della omografia vettoriale  $\alpha^{-1}$ , definita da

$$(98) \quad \alpha^{-1} = \frac{dM}{dP}$$

e introducendo tre vettori ausiliari  $V_i'$ ,  $V_j'$ ,  $V_k'$  definiti da

$$(99) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_i' = \frac{\partial a}{\partial x} i + \frac{\partial b}{\partial x} j + \frac{\partial c}{\partial x} k = \frac{\partial M}{\partial x} \\ V_k' = \frac{\partial a}{\partial y} i + \frac{\partial b}{\partial y} j + \frac{\partial c}{\partial y} k = \frac{\partial M}{\partial y} \\ V_j' = \frac{\partial a}{\partial z} i + \frac{\partial b}{\partial z} j + \frac{\partial c}{\partial z} k = \frac{\partial M}{\partial z} \end{array} \right.$$

Infatti è

$$(100) \quad \begin{aligned} M' - M &= \alpha^{-1}(P' - P) = \alpha^{-1}(\Delta x \cdot i + \Delta y \cdot j + \Delta z \cdot k) = \\ &= \Delta x \cdot \alpha^{-1}i + \Delta y \cdot \alpha^{-1}j + \Delta z \cdot \alpha^{-1}k \\ &= V_i' \cdot \Delta x + V_j' \cdot \Delta y + V_k' \cdot \Delta z. \end{aligned}$$

Dalla (100), moltiplicandole scalarmente e successivamente per  $i$ ,  $j$ ,  $k$  si ottengono le (97<sub>a</sub>).

Dalle (97) e dalle (97<sub>a</sub>) risultano inoltre le seguenti eguaglianze di cui abbiamo già fatto uso nella parte prima:

$$(101) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{1}{D} \frac{\partial(y, z)}{\partial(b, c)}; \quad \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{1}{D} \frac{\partial(y, z)}{\partial(c, a)}; \quad \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{1}{D} \frac{\partial(y, z)}{\partial(a, b)} \\ \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{1}{D} \frac{\partial(z, x)}{\partial(b, c)}; \quad \frac{\partial b}{\partial y} = \frac{1}{D} \frac{\partial(z, x)}{\partial(c, a)}; \quad \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{1}{D} \frac{\partial(z, x)}{\partial(a, b)} \\ \frac{\partial a}{\partial z} = \frac{1}{D} \frac{\partial(x, y)}{\partial(b, c)}; \quad \frac{\partial b}{\partial z} = \frac{1}{D} \frac{\partial(x, y)}{\partial(c, a)}; \quad \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{1}{D} \frac{\partial(x, y)}{\partial(a, b)}. \end{array} \right.$$

È facile dimostrare che

$$(102) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{grad } a = \frac{R\alpha i}{I_3\alpha} \\ \text{grad } b = \frac{R\alpha j}{I_3\alpha} \\ \text{grad } c = \frac{R\alpha k}{I_3\alpha} \end{array} \right.$$

Basterà perciò notare che la forma reciproca della funzione definita da:

$$2\varphi(x, y, z) = V_i^2 x^2 + V_j^2 y^2 + V_k^2 z^2 + 2V_i \times V_j xy + \\ + 2V_j \times V_k yz + 2V_k \times V_i zx$$

è

$$2\Phi(x, y, z) = \frac{1}{(\theta+1)^2} (V_j \wedge V_k)^2 x^2 + (V_k \wedge V_i)^2 y^2 + (V_i \wedge V_j)^2 z^2 + \\ + 2(V_j \wedge V_k) \times (V_k \wedge V_i) xy + 2(V_k \wedge V_i) \times (V_i \wedge V_j) yz + 2(V_i \wedge V_j) \times (V_j \wedge V_k) zx.$$

Ne risulta che a

$$2\varphi(x, y, z) = [\alpha i \cdot x + \alpha j \cdot y + \alpha k \cdot z]^2$$

corrisponde come reciproca

$$2\Phi(x, y, z) = [R\alpha i \cdot x + R\alpha j \cdot y + R\alpha k \cdot z]^2$$

e per le (102):

$$2\Phi(x, y, z) = \frac{1}{(I_3 \alpha)^2} [k\alpha^{-1} i \cdot x + k\alpha^{-1} j \cdot y + k\alpha^{-1} k \cdot z]^2.$$

Sicchè le nostre relazioni (92) e (93) possono scriversi:

$$(103) \quad \begin{cases} \frac{\partial \eta_1}{\partial a} - \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial b \partial c} = \Phi \begin{pmatrix} \eta_1 & \delta_3' & \beta_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} - \Phi \begin{pmatrix} \delta_2 & \eta_2 & \delta_1' \\ \delta_2' & \delta_3 & \eta_3 \end{pmatrix} \\ 2 \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial a \partial b} - \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial b^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial c^2} = \Phi \begin{pmatrix} \beta_3 & \beta_1 & \beta_2 \\ \theta_2 & \theta_3 & \theta_1 \end{pmatrix} - 2\Phi(\eta_1, \delta_3', \delta_1') \end{cases}$$

dove con i simboli

$$\Phi \begin{pmatrix} \eta_1 & \delta_3' & \beta_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \text{ ecc.}$$

si denotano le polari di  $\Phi$ .

Queste equazioni corrispondono a quelle date dal prof. MARCOLONGO.

Le formule del RIQUIER si ottengono immediatamente tenendo conto di relazioni come le seguenti che si ricavano facilmente:

$$(k\alpha^{-1} i)^2 = \frac{(V_j \wedge V_k)^2}{(\theta+1)^2} = \frac{(1_3^2 + 2\varepsilon_2)(1 + 2\varepsilon_3) - 4\gamma_1^2}{(\theta+1)^2} \\ (k\alpha^{-1} i) \times (k\alpha^{-1} j) = 2\gamma_3(1 + 2\varepsilon_3) - 4\gamma_1\gamma_2.$$

Esse sono :

$$(104) \left\{ \begin{array}{l} (\theta + 1)^2 \left| \frac{\partial \eta_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial b \partial c} \right| = \left| \begin{array}{ccc} \alpha_1 \eta_1 - \delta_2' \delta_2 & 2\gamma_3 & 2\gamma_2 \\ \alpha_2 \eta_1 - \delta_3 \delta_2 & 1 + 2\varepsilon_2 & 2\gamma_1 \\ \alpha_3 \eta_1 - \eta_3 \delta_2 & 2\gamma_1 & 1 + 2\varepsilon_3 \end{array} \right| + \\ + \left| \begin{array}{ccc} 1 + 2\varepsilon_1 & \alpha_1 \delta_3' - \delta_2' \eta_2 & 2\gamma_2 \\ 2\gamma_3 & \alpha_2 \delta_3' - \delta_3 \eta_2 & 2\gamma_1 \\ 2\gamma_2 & \alpha_3 \delta_3' - \eta_3 \eta_2 & 1 + 2\varepsilon_3 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} 1 + 2\varepsilon_1 & 2\gamma_3 & \alpha_1 \delta_1 - \delta_2' \delta_1' \\ 2\gamma_3 & 1 + 2\varepsilon_2 & \alpha_2 \delta_1 - \delta_3 \delta_1' \\ 2\gamma_2 & 2\gamma_1 & \alpha_3 \delta_1 - \eta_3 \delta_1' \end{array} \right| \\ (\theta + 1)^2 \left( 2 \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial b \partial c} - \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial c^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial b^2} \right) = \left| \begin{array}{ccc} \beta_1 \alpha_1 - \delta_2'^2 & 2\gamma_3 & 2\gamma_2 \\ \beta_1 \theta_2 - \delta_3 \delta_2' & 1 + 2\varepsilon_2 & 2\gamma_1 \\ \beta_1 \theta_3 - \eta_3 \delta_2' & 2\gamma_1 & 1 + 2\varepsilon_3 \end{array} \right| + \\ + \left| \begin{array}{ccc} 1 + 2\varepsilon_1 & \beta_2 \theta_1 - \delta_3 \delta_2' & 2\gamma_2 \\ 2\gamma_3 & \beta_2 \theta_2 - \delta_3^2 & 2\gamma_1 \\ 2\gamma_2 & \beta_2 \theta_3 - \delta_3 \eta_3 & 1 + 2\varepsilon_2 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} 1 + 2\varepsilon_3 & 2\gamma_3 & \beta_3 \theta_1 - \eta_3 \delta_2' \\ 2\gamma_3 & 1 + 2\varepsilon_3 & \beta_2 \theta_2 - \delta_3 \eta_3 \\ 2\gamma_2 & 2\gamma_1 & \beta_3 \theta_3 - \eta_3^2 \end{array} \right|. \end{array} \right.$$

È opportuno ricordare che queste relazioni potrebbero ottenersi semplicemente notando che perchè la forma ternaria quadratica di  $dI'^2$ :

$$\varepsilon_1 da^2 + \varepsilon_2 db^2 + \varepsilon_3 dc^2 + 2\gamma_1 dbdc + 2\gamma_2 dcda + 2\gamma_3 dadb$$

definisca un elemento lineare dello spazio è necessario e sufficiente che si annullino i sei simboli di RIEMANN (o di RICCI) formati a mezzo dei coefficienti della detta forma (<sup>47</sup>).

**3. Principio di dualità.** — Si osservi che le espressioni fondamentali, da cui è stato possibile desumere nella prima parte tutte le conclusioni cui siamo pervenuti sono le (1) e le (59); ne deriva che poichè da esse possono ottenersi le (94) e le (97) a mezzo della sostituzione:

$$(105) \quad \begin{cases} x, y, z, a, b, c, u, v, w \\ a, b, c, x, y, z, u', v', w' \end{cases}$$

dove essere possibile ricavare espressioni analoghe operando la stessa sostituzione in tutte le espressioni ricavate.

(<sup>47</sup>) Si veda BIANCHI: *Lezioni di Geometria Differenziale*, vol. I, cap. XVIII.

Si noti che la stessa sostituzione permette di passare da

$$\begin{aligned} & \mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j, \mathbf{V}_k, \lambda, \mu, \nu \\ \text{a} & \mathbf{V}'_i, \mathbf{V}'_j, \mathbf{V}'_k, \lambda', \mu', \nu' \end{aligned}$$

da  $\mathbf{V}_s$  a  $\mathbf{V}'_{s'}$  definito da

$$\mathbf{V}'_{s'} = \mathbf{V}'_i \lambda' + \mathbf{V}'_j \mu' + \mathbf{V}'_k \nu'$$

dove  $\lambda', \mu', \nu'$  sono i coseni direttori di una direzione del mezzo deformato uscente da  $P$ .

Risultano definite le espressioni seguenti: in dipendenza della detta sostituzione, rispetto alla quale hanno come corrispondenti le stesse espressioni senz'apice:

$$(106) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta'_{s'} &= \frac{dl}{dl'} = \frac{1}{\delta_s} \\ 2\sigma'_{s'} &= \frac{dl^2 - dl'^2}{dl'^2} = \delta'_{s'}{}^2 - 1 = \frac{1}{\delta_s^2} - 1 = -\frac{2\sigma_s}{\delta_s^2} = -2\sigma_s \delta'_{s'}{}^2 \\ \theta' &= \frac{\tau - \tau'}{\tau} = -\frac{\theta}{\theta + 1} \\ \delta'_{s'} &= \frac{dl - dl'}{dl'} = \delta'_{s'} - 1 = \frac{1}{\delta_s} - 1 = \frac{1 - \delta_s}{\delta_s} = -\frac{d_s}{\delta_s} \end{aligned} \right.$$

Dopo di ciò è possibile dal detto principio ricavare senz'altro le relazioni seguenti:

A) La funzione  $\sigma'$  è data da

$$\sigma' = \varepsilon'_1 \lambda'^2 + \varepsilon'_2 \mu'^2 + \varepsilon'_3 \nu'^2 + 2\gamma'_3 \lambda' \mu' + 2\gamma'_1 \mu' \nu' + 2\gamma'_2 \nu' \lambda'$$

dove

$$(107) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon'_1 &= \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w'}{\partial x} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} (\mathbf{V}'_i{}^2 - 1) \\ \varepsilon'_2 &= \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v'}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w'}{\partial y} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} (\mathbf{V}'_j{}^2 - 1) \\ \varepsilon'_3 &= \frac{\partial w'}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u'}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v'}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w'}{\partial z} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} (\mathbf{V}'_k{}^2 - 1) \\ \gamma'_1 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u'}{\partial y} \frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial v'}{\partial y} \frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y} \frac{\partial w'}{\partial z} \right] = \frac{1}{2} \mathbf{V}'_j \times \mathbf{V}'_k \\ \gamma'_2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u'}{\partial x} \frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial v'}{\partial x} \frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \frac{\partial w'}{\partial z} \right] = \frac{1}{2} \mathbf{V}'_k \times \mathbf{V}'_i \\ \gamma'_3 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u'}{\partial y} \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial y} \frac{\partial w'}{\partial x} \right] = \frac{1}{2} \mathbf{V}'_i \times \mathbf{V}'_j \end{aligned} \right.$$

le (107) mostrano come si possa passare da  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  a  $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3, \gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3$  a mezzo della sostituzione (105) e in qualche modo verificano il principio di dualità.

Dalla espressione ora ricavata per  $\sigma'$ , dalla seconda e dalla prima delle (106), possiamo ricavare l'espressione della funzione  $\sigma_s$ , relativa ad una direzione del mezzo iniziale in funzione delle  $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3, \gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3$  e di funzioni relative alla direzione  $s'$ , in cui si trasforma  $s$ :

$$\sigma_s = \frac{1}{\delta'_s{}^2} [\varepsilon'_1 \lambda'^2 + \varepsilon'_2 \mu'^2 + \varepsilon'_3 \nu'^2 + 2\gamma'_1 \mu' \nu' + 2\gamma'_2 \nu' \lambda' + 2\gamma'_3 \lambda' \mu'].$$

B) La funzione  $\delta'$  è data da

$$\delta'_s{}^2 = V'_s{}^2.$$

Quindi possiamo, grazie alla prima delle (106), ricavare l'allungamento lineare in una direzione del mezzo iniziale:

$$\delta_s{}^2 = \frac{1}{V'_s{}^2} = \frac{1}{(V'_i \lambda' + V'_j \mu' + V'_k \nu')^2}.$$

Ciò corrisponde all'identità

$$(\alpha s)^2 = \frac{1}{\left(\alpha^{-1} \frac{V_s}{\delta_s}\right)^2}.$$

C) Se l'angolo di due direzioni nel mezzo deformato è  $w'$ , quello  $w$ , nel mezzo iniziale era tale che

$$\delta'_{s_1} \delta'_{s_2} \cos w = V_{s_1}' \times V_{s_2}' = (V'_i \lambda'_1 + V'_j \mu'_1 + V'_k \nu'_1) \times (V'_i \lambda'_2 + V'_j \mu'_2 + V'_k \nu'_2)$$

o anche per la prima delle (106)

$$\cos w = \delta_{s_1} \delta_{s_2} (V'_i \lambda'_1 + V'_j \mu'_1 + V'_k \nu'_1) \times (V'_i \lambda'_2 + V'_j \mu'_2 + V'_k \nu'_2)$$

che corrisponde all'identità

$$\cos w = s_1 \times s_2 = \left(\alpha^{-1} \frac{V_{s_1}}{\delta_{s_1}}\right) \times \left(\alpha^{-1} \frac{V_{s_2}}{\delta_{s_2}}\right).$$

Si noti che nelle predette espressioni di  $\sigma$ ,  $\delta_s$ ,  $\cos w$ , si può far comparire solo coseni direttori del mezzo deformato, e far uso per le altre funzioni che vi compaiono di quelle proprie al mezzo iniziale.

D) *La direzione del vettore  $V'$  è quella che aveva la direzione  $\lambda', \mu', \nu'$  del mezzo deformato, prima che la deformazione si producesse.*

Ne deriva quindi che è possibile tracciare nell'intorno di ogni punto  $M$  una quadrica riportandovi le  $V'$ . Questa quadrica delle  $V'$ , gode le proprietà seguenti che permettono, com'è evidente, di riandare dal mezzo deformato a quello iniziale.

a) *Il raggio vettore è eguale al raggio vettore dell'ellissoide delle dilatazioni.*

b) *L'angolo fra due raggi vettori è quello che avevano le direzioni corrispondenti nello stato iniziale.*

*Ne deriva che la quadrica delle  $V'$  è l'ellissoide delle dilatazioni.*

E quanto qui si è detto ci permette di tracciare l'ellissoide di dilatazione quando siano note tre direzioni dello stato iniziale e le tre corrispondenti dello stato finale, e inoltre si conosca il sistema nello stato deformato.

E) L'equazione di continuità può anche scriversi quando si noti che dalla terza delle (106) si desume:

$$\theta = - \frac{\theta'}{\theta' + 1}$$

sotto la forma:

$$\rho = (\theta' + 1)\rho_0 = \frac{\partial(a, b, c)}{\partial(x, y, z)}\rho_0.$$

F) Invarianti analoghi a quelli scritti in un paragrafo precedente potrebbero scriversi tenendo conto del principio di dualità.





## Sui metodi di sommazione delle serie.

Memoria di MAURO PICONI (a Napoli).

Per abbreviare il discorso e per enunciare in una sola proposizione risultati che, di solito, ne occupano più d'una, credo assai opportuno valermi delle locuzioni seguenti.

Dati due numeri complessi  $z' = x' + iy'$ ,  $z'' = x'' + iy''$ , dirò che  $z'$  è *minore o eguale* (oppure *non superiore*) a  $z''$  e scriverò  $z' \leq z''$ , se contemporaneamente si ha  $x' \leq x''$ ,  $y' \leq y''$ ; dirò che  $z'$  è *minore di* (oppure *inferiore a*)  $z''$  e scriverò  $z' < z''$  se contemporaneamente si ha  $x' < x''$ ,  $y' < y''$ . Se  $z' \leq z''$ , chiamerò *intervallo di estremi*  $z'$  e  $z''$  e lo indicherò con la notazione  $(z', z'')$ , la totalità dei numeri complessi  $z$  verificanti la limitazione  $z' \leq z \leq z''$ . Se  $z' < z''$  l'intervallo  $(z', z'')$  è rappresentato, nel piano complesso di GAUSS, da un rettangolo coi lati paralleli agli assi coordinati di dimensioni  $x'' - x'$ ,  $y'' - y'$ ; se  $x' = x''$ ,  $y' < y''$  l'intervallo  $(z', z'')$  è rappresentato dal segmento rettilineo (parallelo all'asse  $y$ ) di punti terminali  $(x', y')$  e  $(x', y'')$ , ecc. Se  $z' < z''$  chiamerò *intervallo aperto di estremi*  $z'$  e  $z''$  e lo indicherò con la notazione  $(z', z'')$ , aggiungendovi la qualifica di aperto, la totalità dei numeri complessi  $z$  verificanti la limitazione  $z' < z < z''$ .

Con qualche lieve modificazione, tutto quello che precede sta anche se talune o tutte le quantità  $x'$ ,  $y'$ ,  $x''$ ,  $y''$  sono infinite. Così l'intervallo  $(0 + i0, +\infty + i\infty)$  sarà il primo quadrante del piano complesso di GAUSS, l'intervallo  $(+\infty - i\infty, +\infty + i\infty)$  sarà la totalità dei punti  $+\infty$  degli assi del piano orientati come l'asse delle  $x$  <sup>(1)</sup>. Un numero complesso  $z$  si dirà *finito*, se tali sono la parte reale e il coefficiente dell'immaginario, si dirà *infinito* nell'altro caso.

Sia ora  $z$  la più arbitraria *variabile complessa ordinata* <sup>(2)</sup>, nelle mie *Lezioni* [loc. cit. <sup>(3)</sup>], ho dato il concetto di *minimo limite* e di *massimo limite*

<sup>(1)</sup> Si noti che parlo di assi (cioè di rette con un verso) e non semplicemente di rette. Sol che si rifletta un istante si vedrà che le locuzioni introdotte possono conciliarsi con la concezione di GAUSS del piano complesso.

<sup>(2)</sup> Cfr. le mie *Lezioni di Analisi infinitesimale*. [Circolo Matematico di Catania; Catania (R. Università), 1923], vol. I, n. 5 e 11. In seguito citerò questo libro con « *Lezioni* ».

anche per una tale variabile. Ogni variabile complessa ordinata ha sempre un determinato minimo limite  $l'$  e un determinato massimo limite  $l''$ . Risulta  $l' \leq l''$ . Se  $l' = l''$  la variabile è detta *regolare*, e il valore comune  $l$  di  $l'$  e di  $l''$  è il *limite* della variabile; in tal caso, la variabile dicesi *convergente* o *divergente* secondochè il limite  $l$  è finito o infinito. Se  $l' \neq l''$  la variabile è detta *non regolare* e *definitivamente limitata* se  $l'$  e  $l''$  sono entrambi finiti. Le proprietà caratteristiche di  $l' = l'_x + i l''_y$  e di  $l'' = l''_x + i l''_y$  sono le seguenti: Comunque si assegni un numero complesso  $\varepsilon = \varepsilon_x + i \varepsilon_y > 0 + i0$ , la variabile ordinata  $z = x + iy$  è definitivamente contenuta nell'intervallo aperto  $(l' - \varepsilon, l'' + \varepsilon)$ , laddove non è mai definitivamente nè  $x \leq l'_x - \varepsilon_x$ , nè  $y \leq l''_y - \varepsilon_y$ , nè  $x \geq l'_x + \varepsilon_x$ , nè  $y \geq l''_y + \varepsilon_y$ . Indicherò (come nelle citate mie *Lezioni*) con le notazioni

$$\lim' z, \quad \lim'' z,$$

rispettivamente il minimo ed il massimo limite della variabile ordinata  $z$  <sup>(3)</sup>.

Ciò posto, vado a dichiarare lo scopo del presente scritto.

I procedimenti di calcolo dell'Analisi matematica che soglionsi dire *infiniti*, consistono tutti nella costruzione di una variabile ordinata (reale o complessa)  $z$  e nella ricerca del limite per tale variabile. Perchè il procedimento, applicato ad un certo ente  $E$ , dia un risultato determinato (finito o no) occorre ovviamente che l'indicata variabile  $z$  sia regolare; ebbene dirò il procedimento *determinato* o *indeterminato* secondochè la variabile ordinata  $z$  a cui esso dà luogo è regolare o no; se il procedimento è indeterminato, detti  $l'$  e  $l''$  il minimo e il massimo limite della variabile, chiamo *intervallo di indeterminazione* relativo al detto procedimento, applicato a  $E$ , l'intervallo  $(l', l'')$ ; di due procedimenti infiniti di calcolo  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$ , sarà detto il primo *meno indeterminato* del secondo se: I°) qualunque sia l'ente  $E$  a cui si applicano, l'intervallo di indeterminazione relativo a  $\Pi_1$  è contenuto in quello relativo a  $\Pi_2$ ; II°) esistono esempi di particolari enti per i quali gli intervalli di indeterminazione relativi ai due procedimenti non coincidono.

Si può ben dire che perfezionare un procedimento infinito di calcolo, equivale a renderlo meno indeterminato. Da questo punto di vista LEBESGUE ha perfezionato il procedimento di integrazione delle funzioni <sup>(4)</sup>.

<sup>(3)</sup> Queste notazioni sono tipograficamente più comode delle altre, di solito impiegate,

$$\overline{\lim} z, \quad \underline{\lim} z.$$

<sup>(4)</sup> Infatti nelle mie *Lezioni*, al n.° 90, è dimostrato che: *Gli integrali riemanniani, per difetto e per eccesso, di una qualsiasi funzione limitata, possono pure considerarsi, rispettivamente, il minimo e il massimo limite di una certa variabile ordinata.*

Ora io mi sono domandato: I procedimenti di sommazione delle serie successivamente proposti e applicati da POISSON, ABEL, EULERO, CESÀRO, HÖLDER, BOREL, RIESZ,..., (per parlare solo di quelli divenuti classici) possono considerarsi, dal punto di vista sopradetto, altrettanti perfezionamenti del metodo ordinario di sommazione? La domanda ha bene ragion d'essere — parmi — poichè se è stato dimostrato che, per esempio, il metodo esponenziale di BOREL di sommazione delle serie è determinato tutte le volte che è tale il metodo ordinario e si sono dati esempi di serie per le quali il metodo di sommazione ordinario è indeterminato laddove quello di BOREL è determinato, pure nulla è stato mai detto di generale intorno alle relazioni in cui vengono a trovarsi gli intervalli di indeterminazione dei due metodi e, in particolare, negli esempi dianzi indicati non è stato neppure stabilito se la somma attribuita alla serie col metodo di BOREL ha un valore contenuto o pur no nell'intervallo di indeterminazione del procedimento ordinario di sommazione.

Dimostrerò che alla domanda che mi sono posta si risponde affermativamente. Arrecato inoltre, in questa Memoria, un essenziale perfezionamento ai generali procedimenti di sommazione delle serie, otterrò in seguito, per questi, taluni risultati che reputo nuovi e sfruttabili con profitto nelle applicazioni. L'esposizione di tali risultati — segnatamente di quelli contenuti nei n.° 4, 5 e 6 — è il principale movente di questa Memoria.

**1. Il più generale procedimento di sommazione delle serie.** — I metodi di sommazione delle serie (di POISSON, ABEL, EULERO, CESÀRO, HÖLDER, BOREL, RIESZ,...) possono tutti considerare casi speciali di quello che vado ad esporre. Sia data la serie

$$(1) \quad u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots,$$

a termini reali o complessi. Nell'insieme illimitato  $\mathcal{A}$  di uno spazio lineare ad un qualsiasi numero di dimensioni siano definite le funzioni in infinità numerata

$$(2) \quad f_0(P), f_1(P), f_2(P), \dots, f_n(P), \dots,$$

reali, limitate, mai negative, verificanti le condizioni:

È sempre in  $\mathcal{A}$

$$f_0(P) \geq f_1(P) \geq \dots \geq f_n(P) \geq \dots,$$

laddove ogni funzione  $f_k(P)$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) è convergente su  $\mathcal{A}$ , all'infinito, e riesce

$$\lim_{P \rightarrow \infty} f_k(P)(\text{su } \mathcal{A}) = 1 \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Si ponga, per ogni punto  $P$  di  $\mathcal{A}$ ,

$$F_n(P) = u_0 f_0(P) + u_1 f_1(P) + \dots + u_n f_n(P),$$

$$\lim'_{u \rightarrow \infty} F_n(P) = F'(P), \quad \lim''_{u \rightarrow \infty} F_n(P) = F''(P),$$

diremo *minima* e *massima somma*, su  $\mathcal{A}$  e relativa alla successione (2), della serie (1), rispettivamente i seguenti limiti

$$(3) \quad \lim'_{P \rightarrow \infty} F'(P)(\text{su } \mathcal{A}), \quad \lim''_{P \rightarrow \infty} F''(P)(\text{su } \mathcal{A}).$$

La serie (1) si dirà *sommabile* o *non sommabile*, su  $\mathcal{A}$  e relativamente alla successione (2), secondochè questi due limiti coincidono o pur no. Nel caso della sommabilità il valore comune dei due limiti (3) si dirà la *somma*, su  $\mathcal{A}$  e relativa alla successione (2), della serie (1) e questa serie si dirà *convergente* o *divergente*, su  $\mathcal{A}$  e relativamente alla successione (2), secondochè la sua somma è finita o infinita. Poichè  $F'(P) \leq F''(P)$ , si ha

$$\lim'_{P \rightarrow \infty} F'(P)(\text{su } \mathcal{A}) \left\{ \begin{array}{l} \leq \lim'_{P \rightarrow \infty} F''(P)(\text{su } \mathcal{A}) \leq \\ \leq \lim''_{P \rightarrow \infty} F'(P)(\text{su } \mathcal{A}) \leq \end{array} \right\} \lim''_{P \rightarrow \infty} F''(P)(\text{su } \mathcal{A}),$$

e pertanto: *Se la serie (1) è sommabile, su  $\mathcal{A}$  e relativamente alla successione (2), entrambe le funzioni  $F'(P)$  e  $F''(P)$  sono regolari, su  $\mathcal{A}$  all'infinito, tendendo ad un limite comune (finito o infinito) che è la somma, su  $\mathcal{A}$  e relativa alla successione (2), della serie (1).*

In ogni caso, il generale procedimento di sommazione delle serie (1) ora descritto, si dirà sull'insieme  $\mathcal{A}$  e relativo alla successione (2), esso ha l'intervallo

$$\left[ \lim'_{P \rightarrow \infty} F'(P)(\text{su } \mathcal{A}), \quad \lim''_{P \rightarrow \infty} F''(P)(\text{su } \mathcal{A}) \right]$$

per intervallo di indeterminazione.

Diamo alcuni esempi particolari. Sia, anzitutto,  $\mathcal{A}$  l'insieme dei numeri naturali 1, 2, ..., il punto  $P$  potrà allora essere sostituito dalla sua ascissa  $m$  che prenderà esclusivamente i valori 1, 2, ... Definiamo al modo seguente le funzioni della successione (2)

$$f_k(m) \left\{ \begin{array}{l} = 1 \quad \text{se } m \geq k \\ = 0 \quad \text{se } m < k, \end{array} \right.$$

si avrà allora

$$\lim'_{n \rightarrow \infty} F_n(m) = \lim''_{n \rightarrow \infty} F_n(m) = u_0 + u_1 + \dots + u_m.$$

Porremo sempre

$$s' = \lim'_{m \rightarrow \infty} (u_0 + u_1 + \dots + u_m), \quad s'' = \lim''_{m \rightarrow \infty} (u_0 + u_1 + \dots + u_m).$$

Questo particolare procedimento di sommazione della serie (1) è il *procedimento ordinario*. Le quantità  $s'$  e  $s''$  sono la *minima* e la *massima somma ordinaria* delle serie.

Definiamo, in secondo luogo, sull'insieme dei numeri naturali, al modo seguente le funzioni della successione (2),

$$f_0(m) = 1,$$

$$f_k(m) \begin{cases} = \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)\left(1 + \frac{r}{m-1}\right) \dots \left(1 + \frac{r}{m-k+1}\right)}, & \text{se } m \geq k, \\ = 0 & , \text{ se } m < k, \end{cases}$$

designando  $r$  una costante positiva quale si voglia. Si avrà allora

$$\begin{aligned} \lim'_{n \rightarrow \infty} F_n(m) &= \lim''_{n \rightarrow \infty} F_n(m) = \\ &= u_0 + \frac{u_1}{1 + \frac{r}{m}} + \frac{u_2}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)\left(1 + \frac{r}{m-1}\right)} + \dots + \frac{u_m}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)\left(1 + \frac{r}{m-1}\right) \dots (1 + r)}. \end{aligned}$$

Si ha in tal modo il noto procedimento di sommazione d'ordine  $r$  di CÉSARO, designato con la notazione  $(C, r)$ , che, per  $r = 0$  si riduce al procedimento ordinario e per  $r = 1$  al noto procedimento della media.

Definiamo, in terzo luogo, sempre sull'insieme dei numeri naturali, al modo seguente le funzioni della successione (2),

$$f_0(m) = 1,$$

$$f_k(m) \begin{cases} = 1 - \frac{1}{2^{r(m+1)}} \sum_{i=0}^k \binom{m+1}{i} (2^r - 1)^{m+1-i}, & \text{se } m \geq k, \\ = 0 & , \text{ se } m < k, \end{cases}$$

designando  $r$  una costante positiva quale si voglia. Si avrà allora

$$\lim'_{n \rightarrow \infty} F_n(m) = \lim''_{n \rightarrow \infty} F_n(m) = \sum_{k=0}^m u_k \left[ 1 - \frac{1}{2^{r(m+1)}} \sum_{i=0}^k \binom{m+1}{i} (2^r - 1)^{m+1-i} \right].$$

Si ha così una nuova assai semplice forma del procedimento di somma-

zione che, molto opportunamente, KNOPP <sup>(5)</sup> chiama di EULERO e d'ordine  $r$  e indica con la notazione  $E_r$ .

Sia infine  $A$  l'insieme dei numeri reali non negativi, il punto  $P$  potrà allora essere sostituito dalla sua ascissa  $x$  che prende esclusivamente tutti i valori reali e non negativi. Definiamo al modo seguente le funzioni della successione (2)

$$(4) \quad \begin{cases} f_0(x) = 1, \\ f_k(x) = 1 - \left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\right) e^{-x} \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Si ha così un metodo di sommazione della serie (1) che può chiamarsi il *metodo esponenziale generalizzato* di BOREL. Il metodo esponenziale, propriamente detto, di BOREL presuppone che la serie di potenze in  $\alpha$ :

$$(5) \quad u_0 + u_1 \frac{\alpha}{1} + u_2 \frac{\alpha^2}{2!} + \dots + u_n \frac{\alpha^n}{n!} + \dots$$

abbia infinito il raggio di convergenza, cioè che risulti

$$(6) \quad \lim \sqrt[n]{|u_n|/(n!)} = 0.$$

In tale ipotesi la somma ordinaria  $u(x)$  della serie (5) è una trascendente intera e ne segue la convergenza (ordinaria) uniforme sull'asse reale (e sull'intero piano complesso) della serie

$$u_0 f_0(x) + u_1 f_1(x) + \dots + u_n f_n(x) + \dots,$$

la cui somma riesce

$$u_0 + \int_0^x e^{-\alpha} \frac{du}{d\alpha} d\alpha.$$

Laddove il metodo di sommazione, quale risulta da quello generale da noi esposto, è completamente liberato dalla condizione restrittiva (6) <sup>(6)</sup>.

<sup>(5)</sup> KNOPP, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen* (Berlin, Springer, 1924), p. 509.

<sup>(6)</sup> Lo stesso BOREL propone di attenuare la condizione (6) sostituendola con l'altra che la serie (5) abbia un raggio di convergenza finito ma determini una funzione analitica di  $\alpha$  il cui campo di regolarità contenga l'asse reale non negativo.

PINCHERLE, *Sugli sviluppi asintotici e sulle serie sommabili* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. XIII della serie 5<sup>a</sup>, pp. 513-519) ha pure completamente liberato il metodo

Appunto, il perfezionamento, al quale ho alluso nelle parole alla fine dell'introduzione, qui apportato ai generali procedimenti di sommazione delle serie, consiste nel *non prendere in veruna considerazione l'eventuale convergenza ordinaria della serie*

$$u_0 f_0(P) + u_1 f_1(P) + \dots + u_n f_n(P) + \dots$$

**2. Teorema fondamentale.** — Dimostriamo ora il teorema fondamentale seguente :

I. *L'intervallo di indeterminazione del procedimento di sommazione della serie (1), su qualsiasi insieme  $\mathbf{A}$  e relativo ad una qualsiasi successione (2), è sempre contenuto nell'intervallo di indeterminazione del procedimento di sommazione ordinario.*

Con le notazioni introdotte, dobbiamo cioè dimostrare che è sempre

$$s' \leq \lim'_{P \rightarrow \infty} F'(P)(\text{su } \mathbf{A}) \leq \lim''_{P \rightarrow \infty} F''(P)(\text{su } \mathbf{A}) \leq s''.$$

Possiamo evidentemente limitarci a considerare il caso che la serie (1) sia a termini reali e ci limiteremo ancora a dimostrare che :

$$(7) \quad \lim''_{P \rightarrow \infty} F''(P)(\text{su } \mathbf{A}) \leq s''.$$

Ciò occorrerà fare soltanto nei due casi seguenti:  $s''$  è finito,  $s''$  è  $-\infty$ .

I. *Caso:*  $s''$  è finito. Porremo, come sempre,

$$s_k = u_0 + u_1 + \dots + u_k.$$

Comunque si assegni un numero positivo  $\varepsilon$ , si potrà determinare un indice  $k$  tale che per  $n \geq k$  riesca

$$(8) \quad u_0 + u_1 + \dots + u_n = s_n \leq s'' + \varepsilon/2 \quad (n \geq k).$$

Poniamo  $n = k + q$ , si ha

$$F_{k+q}(P) = u_0 f_0(P) + \dots + u_k f_k(P) - s_k f_k(P) + \\ + s_k f_k(P) + u_{k+1} f_{k+1}(P) + \dots + u_{k+q} f_{k+q}(P).$$

esponenziale di sommazione di BOREL da ogni ipotesi sul raggio di convergenza della serie (5), introducendo però l'altra dell'esistenza di una funzione  $u(x)$ , definita per  $\alpha$  reale e non negativa, finita e continua con le derivate di qualsiasi ordine, verificante le condizioni:

$$u^{(n)}(0) = u_n,$$

insieme ad altre che, nel nostro attuale punto di vista, si possono però togliere.

Ma

$$\lim_{P \rightarrow \infty} [u_0 f_0(P) + \dots + u_k f_k(P) - s_k f_k(P)] (\text{su } \mathcal{A}) = 0,$$

ed esisterà pertanto un numero positivo  $R$  tale che per qualsiasi punto  $P$  di  $\mathcal{A}$  per cui  $\overline{OP} \geq R$  ( $O$  designando l'origine dello spazio a cui appartiene  $\mathcal{A}$ ) risulti sempre

$$u_0 f_0(P) + u_1 f_1(P) + \dots + u_k f_k(P) - s_k f_k(P) \leq \varepsilon/2;$$

in  $\mathcal{A}$  e per  $\overline{OP} \geq R$ , si ha dunque

$$(9) \quad F_{k+q}(P) \leq \frac{\varepsilon}{2} + s_k f_k(P) + u_{k+1} f_{k+1}(P) + \dots + u_{k+q} f_{k+q}(P).$$

D'altra parte, tenendo conto della (8),

$$\begin{aligned} s_k f_k(P) + u_{k+1} f_{k+1}(P) + \dots + u_{k+q} f_{k+q}(P) &= \\ &= s_k f_k(P) + (s_{k+1} - s_k) f_{k+1}(P) + \dots + (s_{k+q} - s_{k+q-1}) f_{k+q}(P) = \\ &= s_k [f_k(P) - f_{k+1}(P)] + s_{k+1} [f_{k+1}(P) - f_{k+2}(P)] + \dots + s_{k+q-1} [f_{k+q-1}(P) - \\ &- f_{k+q}(P)] + s_{k+q} f_{k+q}(P) \leq \left( s'' + \frac{\varepsilon}{2} \right) f_k(P), \end{aligned}$$

onde dalla (9) segue, in  $\mathcal{A}$  e per  $\overline{OP} \geq R$ ,

$$F_{k+q}(P) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left( s'' + \frac{\varepsilon}{2} \right) f_k(P)$$

e quindi, passando al limite per  $q \rightarrow \infty$ ,

$$F''(P) = \lim_{q \rightarrow \infty} F_{k+q}(P) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left( s'' + \frac{\varepsilon}{2} \right) f_k(P),$$

e con un ulteriore passaggio al limite per  $P$  tendente all'infinito su  $\mathcal{A}$ ,

$$\lim_{P \rightarrow \infty} F''(P) (\text{su } \mathcal{A}) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left( s'' + \frac{\varepsilon}{2} \right) \lim_{P \rightarrow \infty} f_k(P) (\text{su } \mathcal{A}) = s'' + \varepsilon,$$

ciò che, per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ , dimostra la (7).

(7) Se  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  indicano due insiemi di punti, non escludendo il caso che uno di essi o entrambi possano ridursi ad un unico punto, con la notazione  $\overline{\mathcal{A}\mathcal{B}}$  designerò la mutua distanza dei due insiemi.



*II Caso:*  $s'' = -\infty$ . Comunque si assegnino i numeri positivi  $M$  e  $\varepsilon$ , si potrà fissare un indice  $k$  tale che per  $n \geq k$  riesca

$$s_n \leq -M - \varepsilon \quad (n \geq k).$$

Poniamo  $n = k + q$  e supponiamo che, per  $P$  in  $\mathbf{A}$  e  $\overline{OP} \geq R$ , risulti:

$$u_0 f_0(P) + u_1 f_1(P) + \dots + u_k f_k(P) - s_k f_k(P) \leq \varepsilon,$$

si avrà allora

$$F_{k+q}(P) \leq \varepsilon - (M + \varepsilon) f_k(P),$$

e quindi

$$F''(P) \leq \varepsilon - (M + \varepsilon) f_k(P),$$

$$\lim_{P \rightarrow \infty}'' F''(P)(\text{su } \mathbf{A}) \leq -M,$$

e pertanto, data l'arbitrarietà di  $M$ ,

$$\lim_{P \rightarrow \infty} F''(P)(\text{su } \mathbf{A}) = \lim_{P \rightarrow \infty} F''(P)(\text{su } \mathbf{A}) = -\infty.$$

Ne segue:

II. *Se la serie (1) è sommabile col procedimento ordinario, essa è tale su qualsiasi insieme  $\mathbf{A}$  e relativamente a qualsiasi successione (2), ed ha una somma (finita o infinita) coincidente con quella ordinaria.*

Osserviamo ancora le preposizioni:

III. *Se la serie (1) è convergente col procedimento ordinario, la serie*

$$(10) \quad u_0 f_0(P) + u_1 f_1(P) + \dots + u_n f_n(P) + \dots$$

*è convergente con lo stesso procedimento in ogni punto di  $\mathbf{A}$  e lo è ivi uniformemente. Onde in tal caso le funzioni  $F'(P)$  e  $F''(P)$  sono in  $\mathbf{A}$  ovunque finite e coincidenti.*

Posto invero  $R_{n,m} = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+m}$ , dato  $\varepsilon$  positivo arbitrario risulti  $|R_{n,m}| \leq \varepsilon$  per  $n \geq k$ . Per tali valori di  $n$  si avrà

$$|u_{n+1} f_{n+1}(P) + \dots + u_{n+m} f_{n+m}(P)| \leq \varepsilon f_{n+1}(P) \leq \varepsilon f_0(P).$$

IV. *Se la (1) ha finite la minima e la massima somma ordinaria, tali sono pure, ovunque, in  $\mathbf{A}$ , la minima e la massima somma ordinaria della serie (10), tali sono cioè, ovunque in  $\mathbf{A}$ , le funzioni  $F'(P)$  e  $F''(P)$ , le quali risultano inoltre limitate in  $\mathbf{A}$ .*

Infatti, condizione necessaria e sufficiente affinché la minima e la massima somma ordinaria della serie (1) risultino finite è che esista un numero positivo  $L$  per cui si abbia, qualunque sia  $k$ ,

$$|s_k| = |u_0 + u_1 + \dots + u_k| \leq L.$$

Ne segue allora

$$|F_k(P)| = |u_0 f_0(P) + u_1 f_1(P) + \dots + u_k f_k(P)| \leq L f_0(P),$$

e quindi

$$|F'(P)| \leq L f_0(P) \sqrt{2}, \quad |F''(P)| \leq L f_0(P) \sqrt{2}.$$

**3. Distributività del più generale procedimento di sommazione.** — Il descritto generale procedimento di sommazione non avrebbe possibilità di utili applicazioni se esso non fosse distributivo, ma esso è tale secondo quanto asserisce la proposizione seguente:

V. *Se le due serie*

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots,$$

$$v_0 + v_1 + \dots + v_n + \dots,$$

sono entrambe convergenti, su  $\mathbf{A}$  e relativamente alla successione (2), avendo rispettivamente per somme  $u$  e  $v$ , comunque si assegnino le due costanti  $a$  e  $b$ , anche la serie

$$(au_0 + bv_0) + (au_1 + bv_1) + \dots + (au_n + bv_n) + \dots$$

è convergente, su  $\mathbf{A}$  e relativamente alla successione (2), ed ha per somma  $au + bv$ .

Dimostriamo anzitutto il teorema per il caso particolare  $a = b = 1$ . Porremo

$$G_k(P) = v_0 f_0(P) + v_1 f_1(P) + \dots + v_k f_k(P),$$

$$\lim'_{k \rightarrow \infty} G_k(P) = G'(P), \quad \lim''_{k \rightarrow \infty} G_k(P) = G''(P),$$

$$w_k = u_k + v_k,$$

$$H_k(P) = w_0 f_0(P) + w_1 f_1(P) + \dots + w_k f_k(P),$$

$$\lim'_{k \rightarrow \infty} H_k(P) = H'(P), \quad \lim''_{k \rightarrow \infty} H_k(P) = H''(P).$$

Poichè, per ipotesi,  $F'(P)$ ,  $F''(P)$ ,  $G'(P)$ ,  $G''(P)$  sono convergenti, su  $\mathbf{A}$  all'infinito, esisterà una quantità positiva  $R$  tale che, ovunque in  $\mathbf{A}$  e per  $\overline{OP} \geq R$ , riesciranno  $F'(P)$ ,  $F''(P)$ ,  $G'(P)$ ,  $G''(P)$  sempre finite. Considerando

esclusivamente punti di  $\mathcal{A}$  per i quali  $\overline{OP} \geq R$ , poichè  $H_k(P) = F_k(P) + G_k(P)$  si ricava

$$F'(P) + G'(P) \leq H'(P) \leq H''(P) \leq F''(P) + G''(P),$$

e quindi, passando al limite per  $P$  tendente all'infinito su  $\mathcal{A}$ ,

$$\begin{aligned} \lim' F'(P) + \lim' G'(P) &\leq \lim' [F'(P) + G'(P)] \leq \lim' H'(P) \leq \\ &\leq \lim'' H''(P) \leq \lim'' [F''(P) + G''(P)] \leq \lim'' F''(P) + \lim'' G''(P). \end{aligned}$$

Ma, per ipotesi,

$$\lim' F'(P) = \lim'' F''(P) = u, \quad \lim' G'(P) = \lim'' G''(P) = v$$

e quindi

$$\lim' H'(P) = \lim'' H''(P) = u + v.$$

Per la completa dimostrazione del teorema occorre ora solo far vedere che esso è valido qualunque sia la costante  $a$  e per  $b = 0$ . Ponendo ora  $w_k = au_k$ , manterremo le rimanenti notazioni. Si ha  $H_k(P) = aF_k(P)$ , e quindi, se  $a > 0$ ,

$$\begin{aligned} H'(P) &= \lim'_{k \rightarrow \infty} H_k(P) = a \left[ \lim'_{k \rightarrow \infty} F_k(P) \right] = aF'(P), \\ \lim'_{P \rightarrow \infty} H'(P)(\text{su } \mathcal{A}) &= a \left[ \lim'_{P \rightarrow \infty} F'(P)(\text{su } \mathcal{A}) \right], \dots, \end{aligned}$$

se  $a < 0$

$$\begin{aligned} H'(P) &= \lim'_{k \rightarrow \infty} H_k(P) = a \left[ \lim''_{k \rightarrow \infty} F_k(P) \right] = aF''(P), \\ \lim'_{P \rightarrow \infty} H'(P)(\text{su } \mathcal{A}) &= a \left[ \lim''_{P \rightarrow \infty} F''(P)(\text{su } \mathcal{A}) \right], \dots \end{aligned}$$

#### 4. Procedimenti di sommazione uniformi in un dato insieme di punti. —

Siano  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{K}$  due arbitrari insiemi di punti di due spazii che possono anche essere di dimensioni diverse, e, variando il punto  $X$  in  $\mathbf{H}$  e il punto  $Y$  in  $\mathbf{K}$ , sia definita la funzione

$$\varphi(X, Y)$$

dei due punti  $X$  e  $Y$ . Supponendo, per esempio,  $\mathbf{H}$  illimitato, si sa bene cosa si vuol significare dicendo che, *al tendere del punto  $X$  all'infinito su  $\mathbf{H}$ , la funzione  $\varphi(X, Y)$  tende ad un limite finito, uniformemente nell'insieme  $\mathbf{K}$* . Ora, più in generale, può darsi che la funzione  $\varphi(X, Y)$ , per fissati punti  $Y$  di  $\mathbf{K}$ , non tenda ad un limite determinato e finito al tendere all'infinito del punto  $X$  su  $\mathbf{H}$ , ed allora vogliamo stabilire, per utilizzarli, i due concetti seguenti: I concetti di comportamento uniforme in  $\mathbf{K}$ , rispetto al massimo

limite o rispetto al minimo limite, della funzione  $\varphi(X, Y)$  al tendere di  $X$  all'infinito su  $\mathbf{H}$ .

Supponendo, in primo luogo,  $\varphi(X, Y)$  reale, diremo che: *al tendere di  $X$  all'infinito su  $\mathbf{H}$  la funzione  $\varphi(X, Y)$  si comporta uniformemente in  $\mathbf{K}$  rispetto al suo massimo limite  $\varphi''(Y)$ , oppure che la relazione di limite*

$$(11) \quad \lim_{X \rightarrow \infty}'' \varphi(X, Y)(\text{su } \mathbf{H}) = \varphi''(Y)$$

è uniforme in  $\mathbf{K}$ , se:

I) è sempre in  $\mathbf{K}$  o  $\varphi''(Y)$  finita, o  $\varphi''(Y) = +\infty$ , oppure  $\varphi''(Y) = -\infty$ ;

II) nel primo caso, comunque si assegnino due numeri positivi  $\varepsilon$  e  $R$ , è sempre possibile:

a) determinare un numero positivo  $R_\varepsilon$  tale che, per  $X$  in  $\mathbf{H}$  e  $\overline{OX} \geq R_\varepsilon$  ( $O$  designando l'origine dello spazio a cui appartiene  $\mathbf{H}$ ) riesca

$$\varphi(X, Y) \leq \varphi''(Y) + \varepsilon, \quad \text{ovunque si prenda il punto } Y \text{ in } \mathbf{K},$$

b) trovare un punto  $X_{\varepsilon R}$  di  $\mathbf{H}$  per cui  $OX_{\varepsilon R} \geq R$  ed inoltre

$$\varphi(X_{\varepsilon R}, Y) \geq \varphi''(Y) - \varepsilon, \quad \text{ovunque si prenda il punto } Y \text{ in } \mathbf{K},$$

nel secondo caso, comunque si assegnino due numeri positivi  $M$  e  $R$ , è sempre possibile trovare un punto  $X_{MR}$  di  $\mathbf{H}$ , per cui  $\overline{OX_{MR}} \geq R$  ed inoltre

$$\varphi(X_{MR}, Y) \geq M, \quad \text{ovunque si prenda il punto } Y \text{ in } \mathbf{K},$$

nel terzo caso, comunque si assegni il numero positivo  $M$ , è sempre possibile determinarne un altro  $R_M$  tale che per  $X$  in  $\mathbf{H}$  e  $\overline{OX} \geq R_M$ , risulti:

$$\varphi(X, Y) \leq -M, \quad \text{ovunque si prenda il punto } Y \text{ in } \mathbf{K}.$$

In modo analogo si definirà la frase: *la relazione di limite*

$$(12) \quad \lim' \varphi(X, Y)(\text{su } \mathbf{H}) = \varphi'(Y)$$

è uniforme in  $\mathbf{K}$ .

Diremo poi che *al tendere di  $X$  all'infinito su  $\mathbf{H}$  la funzione si comporta uniformemente in  $\mathbf{K}$*  se essa si comporta uniformemente tanto rispetto al suo massimo limite quanto rispetto al suo minimo limite.

Per esempio, la funzione  $y \sin x$ , al tendere di  $x$  all'infinito si comporta uniformemente nell'intervallo  $(1, 2)$  nel quale venga mantenuta la  $y$ .

La funzione  $\varphi(X, Y) = \psi(X, Y) + i\chi(X, Y)$  sia ora complessa. Diremo che essa, al tendere di  $X$  all'infinito su  $\mathbf{H}$ , si comporta uniformemente in  $\mathbf{K}$

rispetto al suo massimo limite (rispetto al suo minimo limite) se in tal modo si comportano tanto la parte reale  $\psi$  quanto il coefficiente  $\chi$  dell'immaginario.

Sussiste il TEOREMA DELLA CONTINUITÀ :

VI. Per ogni punto  $X$ , comunque fissato in  $\mathbf{H}$ , la  $\varphi(X, Y)$  sia funzione di  $Y$ , continua nel punto  $Y_0$ , di  $\mathbf{K}$  e del suo derivato: se, al tendere di  $X$  all'infinito su  $\mathbf{H}$ , la  $\varphi(X, Y)$  ha un massimo limite  $\varphi''(Y)$ , [un minimo limite  $\varphi'(Y)$ ] ovunque finito in  $\mathbf{K}$ , ed inoltre essa si comporta ivi uniformemente rispetto al suo massimo limite (rispetto al suo minimo limite) questo limite è pur esso funzione di  $Y$  continua nel punto  $Y_0$ .

Poniamo invero

$$\varphi''(Y) = \varphi(X, Y) + \psi(X, Y),$$

e supponiamo  $\varphi(X, Y)$  reale. Comunque si assegni il numero positivo  $\varepsilon$ , è possibile trovare un punto  $X_\varepsilon$  in  $\mathbf{K}$  in modo che riesca

$$|\psi(X_\varepsilon, Y)| \leq \varepsilon/3,$$

ovunque si prenda il punto  $Y$  in  $\mathbf{K}$ . Fissato un tal punto  $X_\varepsilon$ , data la continuità, in  $Y_0$ , della funzione  $\varphi(X_\varepsilon, Y)$  di  $Y$ , è possibile costruire un intorno  $I_\varepsilon$  di  $Y_0$  su  $\mathbf{K}$ , tale che per ogni suo punto risulti

$$|\varphi(X_\varepsilon, Y) - \varphi(X_\varepsilon, Y_0)| \leq \varepsilon/3.$$

Ne segue, per  $Y$  in  $I_\varepsilon$ ,

$$\begin{aligned} & |\varphi''(Y) - \varphi''(Y_0)| = \\ & = |\varphi(X_\varepsilon, Y) + \psi(X_\varepsilon, Y) - \varphi(X_\varepsilon, Y_0) - \psi(X_\varepsilon, Y_0)| \leq \\ & \leq |\varphi(X_\varepsilon, Y) - \varphi(X_\varepsilon, Y_0)| + |\psi(X_\varepsilon, Y)| + |\psi(X_\varepsilon, Y_0)| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

ciò che, per l'arbitrarietà del numero positivo  $\varepsilon$ , prova l'asserita continuità in  $Y_0$  del massimo limite  $\varphi''(Y)$ .

Posti questi preliminari, ritorniamo ai procedimenti di sommazione della serie (1), nell'ipotesi però che i termini di essa siano funzioni di un punto  $Q$ , simultaneamente definite in un certo insieme  $\mathbf{B}$  di uno spazio ad un certo numero arbitrario di dimensioni. Al variare del punto  $Q$  in  $\mathbf{B}$ , vogliamo considerare il procedimento di sommazione, sull'insieme  $\mathbf{A}$  e relativo alla successione (2), della serie di funzioni

$$(1') \quad u_0(Q) + u_1(Q) + \dots + u_n(Q) + \dots$$

Porremo ora :

$$F_n(P, Q) = u_0(Q)f_0(P) + u_1(Q)f_1(P) + \dots + u_n(Q)f_n(P),$$

$$(13) \quad \lim'_{n \rightarrow \infty} F_n(P, Q) = F'(P, Q), \quad \lim''_{n \rightarrow \infty} F_n(P, Q) = F''(P, Q),$$

$$(14) \quad \lim'_{P \rightarrow \infty} F'(P, Q)(\text{su } \mathcal{A}) = u'(Q), \quad \lim''_{P \rightarrow \infty} F''(P, Q)(\text{su } \mathcal{A}) = u''(Q).$$

Il procedimento di sommazione della serie (1'), sull'insieme  $\mathcal{A}$  e relativo alla successione (2), si dirà *uniforme* in  $\mathcal{B}$ , se:

I) comunque si fissi il punto  $P$  in  $\mathcal{A}$ , le relazioni di limite (13) sono entrambe uniformi in  $\mathcal{B}$ ,

II) le ulteriori relazioni di limite (14) sono entrambe, pur esse, uniformi in  $\mathcal{B}$ .

Come immediati corollarii del teor. VI si hanno i seguenti.

VII. TEOREMA DELLA CONTINUITÀ PER IL PIÙ GENERALE PROCEDIMENTO DI SOMMAZIONE DELLE SERIE DI FUNZIONI. — *La minima e la massima somma  $u'(Q)$  e  $u''(Q)$  della serie (1'), sull'insieme  $\mathcal{A}$  e relative alla successione (2), siano sempre finite in  $\mathcal{B}$ , mentre i termini della serie sono tutti funzioni continue nel punto  $Q_0$  di  $\mathcal{B}$  e del suo derivato. Se il procedimento di sommazione è uniforme in  $\mathcal{B}$ , entrambe le somme  $u'(Q)$  e  $u''(Q)$  risultano, esse pure, continue in  $Q_0$ .*

Infatti, poichè  $u'(Q)$  e  $u''(Q)$  sono per ipotesi finite in  $\mathcal{B}$  e ivi il procedimento di sommazione della serie è uniforme, supponendo le  $u_k(Q)$  reali, comunque si assegni un numero reale e positivo  $\varepsilon$ , è possibile determinarne un altro  $R_\varepsilon$ , tale che, in  $\mathcal{A}$  e per  $\overline{OP} \geq R_\varepsilon$ , si abbia

$$u'(Q) - \varepsilon \leq F'(P, Q) \leq F''(P, Q) \leq u''(Q) + \varepsilon,$$

ovunque si prenda il punto  $Q$  in  $\mathcal{B}$ . Detta  $\mathcal{A}_\varepsilon$  quella parte di  $\mathcal{A}$  luogo dei punti  $P$  per cui  $\overline{OP} \geq R_\varepsilon$ , le funzioni  $F'(P, Q)$  e  $F''(P, Q)$  si conservano dunque finite se si mantiene  $P$  in  $\mathcal{A}_\varepsilon$  e  $Q$  in  $\mathcal{B}$ . La  $F_n(P, Q)$  è per ipotesi funzione di  $Q$  continua nel punto  $Q_0$ , e poichè le relazioni di limite (13) sono uniformi in  $\mathcal{B}$  e  $F'(P, Q)$  e  $F''(P, Q)$  riescono finite per  $P$  in  $\mathcal{A}_\varepsilon$ , le  $F'(P, Q)$  e  $F''(P, Q)$ , sono funzioni di  $Q$  continue in  $Q_0$ . Da tale continuità (di nuovo in forza del teor. VI) segue, per essere uniformi in  $\mathcal{B}$  anche le relazioni di limite (14), la continuità in  $Q_0$  di  $u'(Q)$  e di  $u''(Q)$ .

VIII. TEOREMA DELLA DERIVABILITÀ TERMINE A TERMINE PER IL PIÙ GENERALE PROCEDIMENTO DI SOMMAZIONE DELLE SERIE DI FUNZIONI. — *L' in-*

sieme  $\mathbf{B}$  sia aperto e ciascuna funzione  $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{Q})$  vi sia dotata di derivata parziale  $u_{\mathbf{k}\mathbf{x}}(\mathbf{Q})$ , determinata e finita, rispetto ad una fissata coordinata  $\mathbf{x}$  del punto  $\mathbf{Q}$ . La serie (1') e la serie delle derivate parziali

$$(15) \quad u_{0\mathbf{x}}(\mathbf{Q}) + u_{1\mathbf{x}}(\mathbf{Q}) + \dots + u_{n\mathbf{x}}(\mathbf{Q}) + \dots,$$

siano entrambe convergenti su  $\mathbf{A}$  e relativamente alla successione (2), risultando inoltre ordinariamente convergenti le due serie

$$\begin{aligned} & u_0(\mathbf{Q})f_0(P) + u_1(\mathbf{Q})f_1(P) + \dots + u_n(\mathbf{Q})f_n(\mathbf{Q}) + \dots, \\ & u_{0\mathbf{x}}(\mathbf{Q})f_0(P) + u_{1\mathbf{x}}(\mathbf{Q})f_1(P) + \dots + u_{n\mathbf{x}}(\mathbf{Q})f_n(P) \dots \end{aligned}$$

Se il procedimento di sommazione della serie (15) delle derivate riesce uniforme in ogni dominio rettangolare contenuto in  $\mathbf{B}$ , allora la somma della serie (15) è in ogni punto di  $\mathbf{B}$  la derivata parziale rispetto alla  $\mathbf{x}$  della somma della serie (1').

La dimostrazione del teorema è facile.

**5. Integrazione termine a termine delle serie.** — Ritorniamo a considerare la funzione  $\varphi(X, Y)$ , definita per  $X$  e  $Y$  variabili, rispettivamente, negli insiemi  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{K}$ . Supporremo l'insieme  $\mathbf{K}$  misurabile al modo di LEBESGUE (di misura finita o no) e per ogni punto  $X$ , comunque fissato nell'insieme illimitato  $\mathbf{H}$ , supporremo la  $\varphi(X, Y)$  funzione di  $Y$  (limitata o no, sommabile o (come qui diremo) integrabile al modo di LEBESGUE sull'insieme  $\mathbf{K}$ . Nelle citate mie *Lezioni* ai n.º 94 e 95, ponendomi dal punto di vista più elementare dell'integrazione riemanniana, ho dato il concetto di ciò che ho chiamato *sommabilità* o (come qui diremo) *integrabilità su  $\mathbf{K}$  della funzione  $\varphi(X, Y)$  uniforme al variare di  $X$  su  $\mathbf{H}$  verso l'infinito* (\*) e nel corso d'*Analisi superiore* tenuto a Pisa l'anno passato ho poi esteso tale concetto all'integrazione lebesghiana, ricavandone proprietà perfettamente analoghe a quelle che trovansi esposte nel citato n. 95 delle mie *Lezioni*.

Indicherò con  $O_{\mathbf{H}}$  l'origine dello spazio a cui appartiene l'insieme  $\mathbf{H}$  e con  $O_{\mathbf{K}}$  quella dello spazio a cui appartiene  $\mathbf{K}$ . Dico che *la funzione  $\varphi(X, Y)$  è integrabile su  $\mathbf{K}$ , uniformemente al variare di  $X$  in  $\mathbf{H}$ , verso l'infinito*, se, ad ogni arbitrario numero positivo  $\varepsilon$ , si possono far corrispondere tre altri numeri positivi  $\delta(\varepsilon)$ ,  $R_{\mathbf{H}}(\varepsilon)$ ,  $R_{\mathbf{K}}(\varepsilon)$ , tali che, comunque si prenda un in-

(\*) Oppure, il che è lo stesso, al variare di  $X$  in  $\mathbf{H}$ , nelle vicinanze di un punto  $X_0$  del derivato di  $\mathbf{H}$ .

sieme misurabile  $\mathbf{T}$  contenuto in  $\mathbf{K}$ , risulti

$$(15) \quad \int_{\mathbf{T}} |\varphi(X, Y)| dT \leq \varepsilon$$

non appena sia  $\overline{O_{\mathbf{H}}X} \geq R_{\mathbf{H}}(\varepsilon)$ , e si verifichi almeno una delle seguenti condizioni

$$(16) \quad m\mathbf{T} \leq \delta(\varepsilon),$$

$$(17) \quad \overline{O_{\mathbf{K}}\mathbf{T}} \geq R_{\mathbf{K}}(\varepsilon) \text{ } ^{(9)}.$$

Se, non appena sia soddisfatta una almeno delle limitazioni (16) o (17), la (15) riesce verificata per tutti i punti  $X$  di  $\mathbf{H}$ , indistintamente, la funzione  $\varphi(X, Y)$  si dirà *integrabile su  $\mathbf{K}$ , uniformemente in  $\mathbf{H}$* .

È subito visto che se  $\mathbf{K}$  è limitato o ha misura finita, per l'indicata integrabilità uniforme della  $\varphi(X, Y)$  occorre e basta che, ad ogni arbitrario numero positivo  $\varepsilon$ , sia possibile far corrispondere due numeri positivi  $\delta(\varepsilon)$  e  $R_{\mathbf{H}}(\varepsilon)$  tali che, comunque si prenda un insieme misurabile  $\mathbf{T}$  contenuto in  $\mathbf{K}$ , risulti soddisfatta la (15) non appena sia  $\overline{O_{\mathbf{H}}X} \geq R_{\mathbf{H}}(\varepsilon)$  e  $m\mathbf{T} \leq \delta(\varepsilon)$  <sup>(10)</sup>.

Sussistono i teoremi seguenti.

*Se la funzione  $\varphi(X, Y)$  è integrabile su  $\mathbf{K}$ , uniformemente al variare di  $X$  in  $\mathbf{H}$ , verso l'infinito, posto*

$$(18) \quad \Phi(X) = \int_{\mathbf{K}} |\varphi(X, Y)| dT,$$

*la funzione  $\Phi(X)$ , al tendere di  $X$  all'infinito su  $\mathbf{H}$ , è definitivamente limitata.*

Fatto, per esempio,  $\varepsilon = 1$ , dico che in quella parte di  $\mathbf{H}$ , luogo dei punti  $X$  per i quali  $\overline{O_{\mathbf{H}}X} \geq R_{\mathbf{H}}(1)$ , la  $\Phi(X)$  è limitata. Designamo invero

<sup>(9)</sup> Facendo variare il punto  $X$  sull'insieme dei numeri naturali, si hanno ciò che si potrebbero chiamare le successioni di funzioni  $\varphi_1(Y)$ ,  $\varphi_2(Y)$ , ..., integrabili su  $\mathbf{K}$ , uniformemente al divergere dell'indice.

<sup>(10)</sup> Se l'insieme  $\mathbf{H}$  si riduce a quello dei numeri naturali e l'insieme  $\mathbf{K}$  ad un insieme di misura finita, dell'asse delle  $x$ , l'integrabilità su  $\mathbf{K}$  della  $\varphi(X, Y)$ , supposta reale, uniforme in  $\mathbf{H}$ , dà luogo ad un tipo di integrabilità delle funzioni di una successione  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ , ..., reali e di una variabile reale  $x$ , che si può dire *uniforme* e che, considerato la prima volta dal VITALI [*Sull'integrazione per serie*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXIII (1907), pp. 137-155], è stato recentemente di nuovo preso in considerazione dal DE LA VALLÉE-POUSSIN [*Sur l'intégrale de Lebesgue*, Transactions of the American Mathematical Society, t. 16 (1915), pp. 435-501] e dal TONELLI [*Sulla nozione di integrale*, Annali di Matematica pura ed applicata, Serie IV, t. I (1923-1924), pp. 105-145].



con  $K_1$  quella parte di  $K$  luogo dei punti  $Y$  per i quali  $\overline{O_K Y} < R_K(1)$ ; poichè  $K_1$  è un insieme limitato, è possibile costruire un certo numero  $N$  di insiemi misurabili e limitati  $T_1, T_2, \dots, T_N$ , tali che risulti

$$K_1 = T_1 + T_2 + \dots + T_N,$$

ed inoltre

$$mT_s \leq \delta(1), \quad m(T_s \cdot T_s) = 0 \quad (14) \quad (s, s = 1, 2, \dots, N).$$

Ne segue, per  $\overline{O_H X} \geq R_H(1)$

$$\begin{aligned} \Phi(X) &= \int_{K_1} |\varphi(X, Y)| dT + \int_{K-K_1} |\varphi(X, Y)| dT = \\ &= \sum_{r=1}^N \int_{T_r} |\varphi(X, Y)| dT + \int_{K-K_1} |\varphi(X, Y)| dT \leq N + 1. \end{aligned}$$

Se la funzione  $\varphi(X, Y)$  è integrabile su  $K$ , uniformemente al variare di  $X$  in  $H$ , verso l'infinito, indicando, per ogni punto  $X$  in  $H$  e per ogni numero naturale  $n$ , con  $T_n(X)$  quella parte di  $K$  per cui  $|\varphi(X, Y)| > n$ , comunque si assegni un numero positivo  $\varepsilon$ , è possibile determinare il numero naturale  $\nu(\varepsilon)$  e il numero positivo  $R'_H(\varepsilon)$  tali che risulti

$$(19) \quad \int_{T_n(X)} |\varphi(X, Y)| dT \leq \varepsilon,$$

per  $n \geq \nu(\varepsilon)$  e per  $\overline{O_H X} \geq R'_H(\varepsilon)$ .

Ed inverso, supponendo che per la funzione  $\Phi(X)$ , definita dalla (18), si abbia  $\Phi(X) \leq L$  per  $\overline{O_H X} \geq R$ , risulterà

$$L \geq \Phi(X) \geq \int_{T_n(X)} |\varphi(X, Y)| dT \geq n[mT_n(X)]$$

donde

$$mT_n(X) \leq L/n,$$

e quindi, se per  $n \geq \nu(\varepsilon)$  riesce  $L/n \leq \delta(\varepsilon)$ , se ne deduce la (19) non appena sia  $\overline{O_H X} \geq R'_H(\varepsilon)$ , avendo designato con  $R'_H(\varepsilon)$  il più grande fra i numeri  $R_H(\varepsilon)$  e  $R$ .

IX. TEOREMA DEL PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO IL SEGNO INTEGRALÈ. — Se la funzione  $\varphi(X, Y)$  è integrabile su  $K$ , uniformemente al variare di  $X$

(14) Con la notazione  $A \cdot B$  designo il prodotto dei due insiemi di punti  $A$  e  $B$ , cioè l'insieme dei punti che appartengono ad entrambi gli insiemi  $A$  e  $B$ .

in  $\mathbf{H}$ , verso l'infinito, e se, comunque si fissi il punto  $Y$  in  $\mathbf{K}$ , la  $\varphi(X, Y)$  è funzione di  $X$  regolare al tendere di  $X$ , su  $\mathbf{H}$ , all'infinito, posto

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \varphi(X, Y)(\text{su } \mathbf{H}) = \varphi(Y),$$

la funzione limite  $\varphi(Y)$  riesce pur cosa integrabile su  $\mathbf{K}$  e si ha inoltre

$$(20) \quad \lim_{X \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{T}} \varphi(X, Y) dT(\text{su } \mathbf{H}) = \int_{\mathbf{T}} \varphi(Y) dT,$$

uniformemente al variare in  $\mathbf{K}$  dell'insieme misurabile  $\mathbf{T}$ .

Per la dimostrazione del teorema, possiamo limitarci a supporre reale la  $\varphi(X, Y)$  e distingueremo due casi, secondochè  $\mathbf{K}$  è limitato o pur no.

I. Caso: L'insieme  $\mathbf{K}$  è limitato. Per ogni numero naturale  $n$  poniamo

$$\varphi_n(X, Y) \left\{ \begin{array}{l} = \varphi(X, Y), \text{ se } -n \leq \varphi(X, Y) \leq n \\ = n, \text{ se } \varphi(X, Y) > n \\ = -n, \text{ se } \varphi(X, Y) < -n \end{array} \right. \quad \varphi_n(Y) \left\{ \begin{array}{l} = \varphi(Y), \text{ se } -n \leq \varphi(Y) \leq n \\ = n, \text{ se } \varphi(Y) > n \\ = -n, \text{ se } \varphi(Y) < -n \end{array} \right.$$

si ha

$$\lim_{X \rightarrow \infty} |\varphi_n(X, Y)|(\text{su } \mathbf{H}) = |\varphi_n(Y)|$$

e per il ben noto teorema di LEBESGUE del passaggio al limite sotto il segno integrale

$$(21) \quad \lim_{X \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{K}} |\varphi_n(X, Y)| dT = \int_{\mathbf{K}} |\varphi_n(Y)| dT.$$

D'altra parte

$$\int_{\mathbf{K}} \varphi_n(X, Y) | dT \leq \int_{\mathbf{K}} \varphi(X, Y) | dT \leq \Phi(X),$$

e quindi, se per  $\overline{O_H X} \geq R$  risulta  $\Phi(X) \leq L$ , dalla (21) si trae, per qualunque valore dell'intero positivo  $n$ ,

$$\int_{\mathbf{K}} |\varphi_n(Y)| dT \leq L$$

e ciò prova la integrabilità su  $\mathbf{K}$  di  $\varphi(Y)$ . Indichiamo ora con  $\mathbf{T}_n$  quella parte di  $\mathbf{K}$  nei punti della quale si ha  $|\varphi(Y)| > n$  e sia  $\mathbf{T}$  il più arbitrario

insieme misurabile contenuto in  $\mathbf{K}$ , riesce

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{T}} \varphi(Y) dT - \int_{\mathbf{T}} \varphi(X, Y) dT &= \int_{\mathbf{T}-\mathbf{T}_n} \varphi_n(Y) dT - \int_{\mathbf{T}-\mathbf{T}_n(X)} \varphi_n(X, Y) dT + \\ &+ \int_{\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}_n} \varphi(Y) dT - \int_{\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}_n(X)} \varphi(X, Y) dT = \\ &= \int_{\mathbf{T}} \varphi_n(Y) dT - \int_{\mathbf{T}} \varphi_n(X, Y) dT - \int_{\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}_n} \varphi_n(Y) dT + \int_{\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}_n(X)} \varphi_n(X, Y) dT + \\ &+ \int_{\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}_n} \varphi(Y) dT - \int_{\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}_n(X)} \varphi(X, Y) dT, \end{aligned}$$

e quindi

$$(22) \quad \left| \int_{\mathbf{T}} \varphi(Y) dT - \int_{\mathbf{T}} \varphi(X, Y) dT \right| \leq \\ \leq \int_{\mathbf{T}} \left| \varphi_n(Y) - \varphi_n(X, Y) \right| dX + 2 \int_{\mathbf{T}_n} \left| \varphi(Y) \right| dT + 2 \int_{\mathbf{T}_n(X)} \left| \varphi(X, Y) \right| dT.$$

Per  $n \geq \nu'(\varepsilon)$  e per  $\overline{O_H X} \leq R'_H(\varepsilon/6)$  si abbia

$$\int_{\mathbf{T}_n} \left| \varphi(Y) \right| dT \leq \varepsilon/6, \quad \int_{\mathbf{T}_n(X)} \left| \varphi(X, Y) \right| dT \leq \varepsilon/6,$$

si ricava dalla (22), per  $n \geq \nu'(\varepsilon)$  e per  $\overline{O_H X} \geq R'_H(\varepsilon/6)$ ,

$$(23) \quad \left| \int_{\mathbf{T}} \varphi(Y) dT - \int_{\mathbf{T}} \varphi(X, Y) dT \right| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \int_{\mathbf{K}} \left| \varphi_n(Y) - \varphi_n(X, Y) \right| dT.$$

Fissato un numero naturale  $n \geq \nu'(\varepsilon)$ , per il noto teorema di LEBESGUE, si può trovare un numero positivo  $R$  tale che, se  $\overline{O_H X} \geq R$ , risulti

$$\int_{\mathbf{K}} \left| \varphi_n(Y) - \varphi_n(X, Y) \right| dT \leq \varepsilon/3,$$

ma allora, in virtù della (23), per  $\overline{O_H X}$  non minore al più grande fra i due numeri  $R'_H(\varepsilon/3)$  e  $R$ , e qualunque sia l'insieme  $\mathbf{T}$  di  $\mathbf{K}$ , si ha

$$\left| \int_{\mathbf{T}} \varphi(Y) dT - \int_{\mathbf{T}} \varphi(X, Y) dT \right| \leq \varepsilon,$$

e ciò dimostra il teorema nel considerato primo caso.

*II Caso:* L'insieme  $\mathbf{K}$  non è limitato. Per quanto precede, la funzione limite  $\varphi(Y)$  è integrabile su ogni insieme limitato e misurabile  $\mathbf{T}$  contenuto in  $\mathbf{K}$ . Inoltre, supposto che per  $\overline{O_{\mathbf{H}}\mathbf{X}} \geq R$  riesca  $\Phi(X) \leq L$ , si ha, per ogni tale insieme  $\mathbf{T}$ ,

$$L \geq \lim_{\overline{X} \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{T}} |\varphi(X, Y)| dT(\text{su } \mathbf{H}) = \int_{\mathbf{T}} |\varphi(Y)| dT,$$

ne segue la integrabilità della funzione limite  $\varphi(Y)$  sull'insieme illimitato  $\mathbf{K}$ , ed inoltre che

$$\int_{\mathbf{K}} |\varphi(Y)| dT \leq L.$$

Sappiamo che, comunque sia l'insieme misurabile  $\mathbf{T}$  contenuto in  $\mathbf{K}$  e comunque si prescriva il numero positivo  $\varepsilon$ , riesce

$$(24) \quad \int_{\mathbf{T}} |\varphi(X, Y)| dT \leq \varepsilon/3$$

se  $\overline{O_{\mathbf{H}}\mathbf{X}} \geq R_{\mathbf{H}}(\varepsilon/3)$  e  $\overline{O_{\mathbf{K}}\mathbf{T}} \geq R_{\mathbf{K}}(\varepsilon/3)$ . Data la integrabilità di  $\varphi(Y)$  su  $\mathbf{K}$ , se designamo con  $\mathbf{K}(R)$  quella parte (limitata) di  $\mathbf{K}$  luogo dei punti  $Y$  per cui  $\overline{O_{\mathbf{K}}\mathbf{Y}} \leq R$ , si ha anche che

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{K}-\mathbf{K}(R)} |\varphi(Y)| dT = 0,$$

e pertanto, in virtù della (24), si potrà determinare un numero positivo  $R'$  tale che se  $\overline{O_{\mathbf{H}}\mathbf{X}} \geq R_{\mathbf{H}}(\varepsilon/3)$ , risulti simultaneamente

$$\int_{\mathbf{K}-\mathbf{K}(R')} |\varphi(X, Y)| dT \leq \varepsilon/3, \quad \int_{\mathbf{K}-\mathbf{K}(R')} |\varphi(Y)| dT \leq \varepsilon/3.$$

Per il più arbitrario insieme misurabile  $\mathbf{T}$ , contenuto in  $\mathbf{K}$ , e per  $\overline{O_{\mathbf{H}}\mathbf{X}} \geq R_{\mathbf{H}}(\varepsilon/3)$ , se ne deduce

$$\left| \int_{\mathbf{T}} \varphi(Y) dT - \int_{\mathbf{T}} \varphi(X, Y) dT \right| \leq \left| \int_{\mathbf{T} \cdot \mathbf{K}(R')} \varphi(Y) dT - \int_{\mathbf{T} \cdot \mathbf{K}(R')} \varphi(X, Y) dT \right| + \frac{2\varepsilon}{3},$$

donde, per quanto già si è stabilito nel primo caso,

$$\left| \int_{\mathbf{T}} \varphi(Y) dT - \int_{\mathbf{T}} \varphi(X, Y) dT \right| \leq \varepsilon,$$

per  $\overline{O_H X}$  non inferiore ad un certo numero positivo, *qualunque* sia l'insieme misurabile  $T$  contenuto in  $K$ .

Nella considerata integrabilità su  $K$  della funzione  $\varphi(X, Y)$ , uniforme al variare di  $X$  in  $H$ , verso l'infinito (o nelle vicinanze di un punto  $X_0$  del derivato di  $H$ ) sono contenuti i casi delle più importanti applicazioni, nei quali avviene che l'insieme dei punti di  $K$  in ciascuno dei quali la  $\varphi(X, Y)$  presenta delle singolarità rispetto alla integrazione, dipende — esso pure — dal punto  $X$  <sup>(12)</sup>.

È utile tenere presente che (RIESZ) se al tendere di  $X$  all'infinito su  $H$ , la funzione

$$(25) \quad \int_K |\varphi(X, Y)|^2 dT,$$

è definitivamente limitata e se  $K$  è di misura finita, l'integrabilità di  $\varphi(X, Y)$  su  $K$  è uniforme al variare di  $X$  in  $H$ , verso l'infinito. Ed invero se per  $\overline{O_H X} \geq R$  l'integrale (25) non supera il numero positivo  $L$ , per ogni insieme  $T$  contenuto in  $K$  si ha, in virtù della disuguaglianza di SCHWARZ,

$$\int_T |\varphi(X, Y)| dT \leq \sqrt{L} \sqrt{mT}.$$

Un tipo assai particolare di integrabilità uniforme si ha nelle seguenti ipotesi: *Essendo  $\Psi(Y)$  una funzione reale e non negativa definita nell'insieme  $K$  e su questo integrabile, al tendere di  $X$  all'infinito, su  $H$ , riesce definitivamente, ed indipendentemente da  $Y$ .*

$$(26) \quad |\varphi(X, Y)| \leq \Psi(Y) \quad (13).$$

Allora tanto il minimo limite  $\varphi'(Y)$  quanto il massimo limite  $\varphi''(Y)$  che, al tendere di  $X$  all'infinito su  $H$ , competono alla  $\varphi(X, Y)$ , riescono integrabili su  $K$ . Dalla (26) si deduce invero

$$|\varphi'(Y)| < \Psi(Y) \sqrt{2}, \quad |\varphi''(Y)| \leq \Psi(Y) \sqrt{2}.$$

(12) È quello che, per esempio, avviene nell'integrale

$$\int_K \frac{\mu(Y)}{XY^\alpha} dT, \quad (\alpha > 0)$$

che si incontra nella teoria del potenziale.

(13) In tal caso dunque le singolarità, rispetto all'integrazione in  $Y$ , della  $\varphi(X, Y)$ , al tendere di  $X$  all'infinito su  $H$ , riesciranno definitivamente indipendenti da  $X$ .

X. Alle ipotesi ora dette si soddisfa, in particolare, se: Essendo  $\mathbf{K}$  di misura finita, al tendere di  $X$  all'infinito su  $\mathbf{H}$ , la  $\varphi(X, Y)$ , supposta sempre funzione di  $Y$  integrabile su  $\mathbf{K}$ , si comporta ivi uniformemente, avendo finiti il suo minimo limite  $\varphi'(Y)$  e il suo massimo limite  $\varphi''(Y)$ , ed essendo inoltre limitata in  $\mathbf{K}$  la differenza  $\varphi''(Y) - \varphi'(Y)$ .

Ed inverso, supposta  $\varphi(X, Y)$  reale, si ha allora per  $\overline{O_{\mathbf{H}}X}$  non inferiore ad un certo  $R$  e per  $Y$  ovunque in  $\mathbf{K}$ ,

$$\varphi'(Y) - 1 \leq \varphi(X, Y) \leq \varphi''(Y) + 1,$$

pertanto, se fissiamo arbitrariamente un punto  $X_0$  di  $\mathbf{H}$  per il quale  $\overline{O_{\mathbf{H}}X_0} \geq R$  e se designano con  $L$  l'estremo superiore in  $\mathbf{K}$  di  $|\varphi''(Y) - \varphi'(Y)|$ , si ha, per  $\overline{O_{\mathbf{H}}X} \geq R$ ,

$$|\varphi(X, Y)| \leq |\varphi(X_0, Y)| + L + 2,$$

ora, essendo  $\mathbf{K}$  di misura finita, la funzione  $|\varphi(X_0, Y)| + L + 2$  è integrabile su  $\mathbf{K}$ .

Sussiste il seguente teorema di CARATHÉODORY <sup>(14)</sup>.

XI. Se, essendo  $\Psi(Y)$  una funzione reale non negativa definita nell'insieme  $\mathbf{K}$  e su di questo integrabile, al tendere di  $X$  all'infinito su  $\mathbf{H}$  riesce, definitivamente e indipendentemente da  $Y$ , verificata la (26), dalla  $\varphi(X, Y)$ , supposta funzione di  $Y$  misurabile in  $\mathbf{K}$ , il minimo ed il massimo limite di  $\varphi(X, Y)$  risultano entrambi integrabili su  $\mathbf{K}$  e si hanno le relazioni:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{K}} \lim'_{X \rightarrow \infty} \varphi(X, Y) dT &\leq \lim'_{X \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{K}} \varphi(X, Y) dT \leq \\ &\leq \lim''_{X \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{K}} \varphi(X, Y) dT \leq \int_{\mathbf{K}} \lim''_{X \rightarrow \infty} \varphi(X, Y) dT. \end{aligned}$$

Ritorniamo ora alla considerazione della serie (1') di funzioni

$$(1') \quad u_0(Q) + u_1(Q) + \dots + u_n(Q) + \dots,$$

per domandarci, supposto misurabile l'insieme  $\mathbf{B}$  ove sono definite le funzioni della serie e integrabili su di esso queste funzioni, in che relazioni si trovino le somme, sull'insieme  $\mathbf{A}$  e relative alla successione (2), della serie (1') e

<sup>(14)</sup> C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen*. [Teubner, Leipzig und Berlin, 1918], p. 444.

della serie degli integrali

$$(27) \quad \int_T u_0(Q) dT + \int_T u_1(Q) dT + \dots + \int_T u_n(Q) dT + \dots,$$

ove  $T$  designa, il più arbitrario insieme misurabile contenuto in  $B$ . Un primo notevole teorema che risponde a questa domanda è il seguente:

XII. *Nelle seguenti ipotesi:*

a) *la serie*

$$(28) \quad u_0(Q)f_0(P) + u_1(Q)f_1(P) + \dots + u_n(Q)f_n(P) + \dots,$$

*comunque si prendano il punto  $Q$  in  $B$  e il punto  $P$  in  $A$ , è sommabile nel senso ordinario;*

b) *la serie (1'), comunque si fissi il punto  $Q$  in  $B$ , è sommabile su  $A$  relativamente alla successione (2);*

c) *posto  $s_k(Q) = u_0(Q) + u_1(Q) + \dots + u_k(Q)$ , la funzione  $s_k(Q)$  è integrabile su  $B$ , uniformemente al divergere di  $k$ ;*

*si può affermare che: detta  $u(Q)$ , la somma, su  $A$  e relativa alla successione (2), della serie (1'), questa riesce integrabile su  $B$ ; per ogni insieme misurabile  $T$ , comunque fissato in  $B$ , la serie (27) degli integrali estesi a  $T$ , risulta convergente, su  $A$  e relativamente alla successione (2), avendo per somma l'integrale di  $u(Q)$  esteso a  $T$ .*

La dimostrazione del teorema, che possiamo fare supponendo le  $u_k(Q)$  reali, si deduce facilmente dal teor. IX. Per l'ipotesi c) possiamo asserire che, comunque si assegni il numero positivo  $\epsilon$ , si possono determinare il numero naturale  $\nu(\epsilon)$  ed i numeri positivi  $\delta(\epsilon)$  e  $R_B(\epsilon)$ , tali che, per  $k \geq \nu(\epsilon)$ , riesce

$$\int_T |s_k(Q)| dT \leq \epsilon,$$

non appena sia  $mT \leq \delta(\epsilon)$ , oppure  $\overline{O_B T} \geq R_B(\epsilon)$ . Diciamo  $L$  l'estremo superiore di  $f_0(P)$  in  $A$  e poniamo  $\nu(\epsilon/2L) = \nu'$ ,  $k = \nu' + \mu$ , si ha, qualunque sia  $\mu$  (cfr. n. 2)

$$\begin{aligned} F_{\nu'+\mu}(P, Q) &= u_0(Q)f_0(P) + \dots + u_{\nu'}(Q)f_{\nu'}(P) - s_{\nu'}(Q)f_{\nu'}(P) + \\ &+ s_{\nu'}(Q)[f_{\nu'}(P) - f_{\nu'+1}(P)] + \dots + s_{\nu'+\mu-1}(Q)[f_{\nu'+\mu-1}(P) - f_{\nu'+\mu}(P)] + \\ &+ s_{\nu'+\mu}(Q)f_{\nu'+\mu}(P), \end{aligned}$$

e quindi, se  $mT \leq \delta(\varepsilon/2L)$  oppure  $\overline{O_B T} \geq R_B(\varepsilon/2L)$ ,

$$\int_T |F_{\nu+\mu}(P, Q)| dT \leq L \int_T (|u_0(Q)| + \dots + |u_{\nu-1}(Q)|) dT + \frac{\varepsilon}{2};$$

e pertanto, supposto che, non appena  $mT \leq \delta'(\varepsilon)$  oppure  $\overline{O_B T} \geq R'_B(\varepsilon)$ , risulti

$$\int_T (|u_0(Q)| + \dots + |u_{\nu-1}(Q)|) dT \leq \varepsilon/2L,$$

detta  $\delta''(\varepsilon)$  la minore fra le quantità  $\delta(\varepsilon/2L)$  e  $\delta'(\varepsilon)$  e detta  $R''_B(\varepsilon)$  la maggiore fra le quantità  $R_B(\varepsilon/2L)$  e  $R'_B(\varepsilon)$ , si ha che, qualunque sia il punto  $P$  di  $H$ ,

$$(29) \quad \int_T |F_k(P, Q)| dT \leq \varepsilon,$$

per  $k \geq \nu(\varepsilon)$ , non appena sia  $mT \leq \delta''(\varepsilon)$  oppure  $\overline{O_B T} \geq R''_B(\varepsilon)$ . Ciò prova che, comunque si fissi il punto  $P$  in  $A$ , la  $F_k(P, Q)$  è funzione di  $Q$  integrabile su  $B$ , in modo uniforme al divergere di  $k$  e pertanto (teor. IX) il limite  $F(P, Q)$  di  $F_k(P, Q)$  [che in forza dell'ipotesi  $a$ ) è ben determinato per  $k \rightarrow \infty$ ] risulta integrabile su  $B$  e si ha inoltre, comunque si prenda in  $B$  l'insieme misurabile  $T$ ,

$$(30) \quad \int_T F(P, Q) dT = f_0(P) \int_T u_0(Q) dT + \dots + f_n(P) \int_T u_n(Q) dT + \dots,$$

$$(31) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_T |F_k(P, Q)| dT = \int_T |F(P, Q)| dT.$$

Dalle (29) e (31) si deduce che

$$\int_T |F(P, Q) dT| \leq \varepsilon,$$

ovunque si prenda il punto  $P$  in  $A$ , non appena sia  $mT \leq \delta''(\varepsilon)$  oppure  $\overline{O_B T} \geq R''_B(\varepsilon)$ , onde segue che la  $F(P, Q)$  è funzione di  $Q$  integrabile su  $B$ , uniformemente in  $A$ , e pertanto (teor. IX), detta  $u(Q)$  la somma, su  $A$  e relativa alla successione (2), della serie (1'), posto cioè  $u(Q) = \lim_{P \rightarrow \infty} F(P, Q)$  (su  $A$ ), si ha che  $u(Q)$  è integrabile su  $B$  ed inoltre

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \int_T F(P, Q) dT (\text{su } A) = \int_T u(Q) dT,$$

ciò che, in virtù della (30), dimostra completamente il teorema.



Se, nei riguardi dell'integrabilità su  $B$  delle funzioni  $s_k(Q)$ , ci si mette in un'ipotesi più particolare già contemplata, il teorema ora stabilito può essere liberato dall'ipotesi  $a$ ). Ciò è consentito dal teor. XI di CARATHÉODORY, in forza del quale dimostreremo il seguente:

XIII. *Al divergere dell'indice  $k$ , riesca definitivamente e indipendentemente da  $Q$ ,*

$$(32) \quad |s_k(Q)| \leq \sigma(Q),$$

ove  $\sigma(Q)$  è una certa funzione di  $Q$ , definita in  $B$  e su di questo integrabile. Allora, la minima somma  $u'(Q)$  e la massima somma  $u''(Q)$  della serie (1'), sull'insieme  $A$  e relative alla successione (2), risultano entrambe integrabili su  $B$ , laddove l'intervallo di indeterminazione del procedimento di sommazione, su  $A$  e relativo alla (2), della serie (27) degli integrali è contenuto nell'intervallo

$$\left( \int_T u'(Q) dT, \int_T u''(Q) dT \right).$$

*Pertanto: se  $u'(Q) \equiv u''(Q) \equiv u(Q)$ , se cioè la serie (1') è sommabile, in ogni punto di  $B$ , su  $A$  e relativamente alla (2), tale sarà pure la serie (27) degli integrali, risultando anzi convergente con somma eguale all'integrale esteso a  $T$  della  $u(Q)$ ; se viceversa, la serie (27) degli integrali estesi a  $T$  è sommabile, allora, la serie (1') è — quasi ovunque in  $T$  — sommabile (su  $A$  e relativamente alla (2)).*

Riesca dunque verificata la (32) per  $k \geq \nu$ , se ne deduce, per  $k \geq \nu$ , ovunque si prendano i punti  $P$  in  $A$  e  $Q$  in  $B$ ,

$$(33) \quad |F_k(P, Q)| \leq L(|u_0(Q)| + \dots + |u_{\nu-1}(Q)| + \sigma(Q)),$$

e pertanto che, comunque si fissi il punto  $P$  in  $A$ , la  $F_k(P, Q)$  è funzione di  $Q$ , integrabile su  $B$ , uniformemente al divergere di  $k$ . Per il minimo limite  $F'(P, Q)$  e per il massimo limite  $F''(P, Q)$  di  $F_k(P, Q)$ , per  $k$  divergente, si deduce dalla (33)

$$(34) \quad \left. \begin{array}{l} |F'(P, Q)| \\ |F''(P, Q)| \end{array} \right\} \leq (\sigma(Q) + \sum_{i=0}^{\nu-1} |u_i(Q)|) L\sqrt{2},$$

e per il teorema di CARATHÉODORY

$$(35) \quad \int_T F'(P, Q) dT \leq \lim'_{k \rightarrow \infty} \int_T F_k(P, Q) \leq \lim''_{k \rightarrow \infty} \int_T F_k(P, Q) dT \leq \int_T F''(P, Q) dT.$$

Poichè

$$\int_T F_k(P, Q) dT = \sum_{l=0}^k f_l(P) \int_T u_l(Q) dT,$$

il minimo ed il massimo limite, per  $k \rightarrow \infty$ , di questo integrale sono la minima e la massima somma ordinaria della serie

$$f_0(P) \int_T u_0(Q) dT + \dots + f_n(P) \int_T u_n(Q) dT + \dots,$$

pertanto, la minima e la massima somma, su  $A$  e relative alla (2), della serie (27) degli integrali, sono rispettivamente

$$\lim'_{P \rightarrow \infty} \left[ \lim'_{k \rightarrow \infty} \int_T F_k(P, Q) dT \right] (\text{su } A), \quad \lim''_{P \rightarrow \infty} \left[ \lim''_{k \rightarrow \infty} \int_T F_k(P, Q) dT \right] (\text{su } A).$$

Ora, la minima e massima somma  $u'(Q)$  e  $u''(Q)$  della serie (1'), su  $A$  e relative alla (2), sono rispettivamente

$$\lim'_{P \rightarrow \infty} F'(P, Q) (\text{su } A), \quad \lim''_{P \rightarrow \infty} F''(P, Q) (\text{su } A),$$

e sussistendo le (34), in forza di nuovo del teorema di CARATHÉODORY, tali somme riescono entrambe integrabili su  $B$ , mentre variando  $P$  su  $A$  si verificano le relazioni:

$$\int_T u'(Q) dT \leq \lim'_{P \rightarrow \infty} \int_T F'(P, Q) dT \leq \lim''_{P \rightarrow \infty} \int_T F''(P, Q) dT \leq \int_T u''(Q) dT.$$

D'altra parte dalle (35) si ricava (variando  $P$  su  $A$ )

$$\lim''_{P \rightarrow \infty} \left[ \lim''_{k \rightarrow \infty} \int_T F_k(P, Q) dT \right] \leq \lim''_{P \rightarrow \infty} \int_T F''(P, Q) dT,$$

$$\lim'_{P \rightarrow \infty} \int_T F'(P, Q) dT \leq \lim'_{P \rightarrow \infty} \left[ \lim'_{k \rightarrow \infty} \int_T F_k(P, Q) dT \right],$$

e con ciò il teorema è dimostrato.

**6. Applicazione alla teoria delle funzioni analitiche.** — Se si fa ricorso al teorema di MORERA sulle funzioni analitiche <sup>(15)</sup> è ben facile dedurre dai

<sup>(15)</sup> Il quale teorema, nella più grande economia di ipotesi, può enunciarsi al modo seguente:

*Sia  $f(z)$  una funzione complessa della variabile complessa  $z$ , definita nell'insieme aperto  $B$*

teoremi VII, X e XIII la seguente notevole generalizzazione del teorema di WEIERSTRASS sulle serie di funzioni analitiche, generalizzazione la cui fecondità, anche in ipotesi più ristrette di quelle che noi contempliamo, è stata spesso mostrata principalmente dal BOREL nelle sue belle ricerche sulle funzioni analitiche, le quali, iniziate verso il 1900, proseguono tuttora col più grande successo.

XIV. *Le funzioni delle serie*

$$(36) \quad u_0(z) + u_1(z) + \dots + u_n(z) + \dots$$

siano funzioni analitiche, monodrome, finite e continue in ogni punto dell'insieme aperto  $\mathbf{B}$  del piano complesso  $z = x + iy$ . La serie sia, in ogni punto di  $\mathbf{B}$ , convergente, sull'insieme  $\mathbf{A}$  e relativamente alla successione (2), mentre, in ogni dominio rettangolare contenuto in  $\mathbf{B}$ , il procedimento di sommazione, su  $\mathbf{A}$  e relativo alla (2), sia uniforme. Allora la somma  $u(z)$  della serie, fornita da tale procedimento, è pur essa funzione analitica, monodroma, finita e continua in ogni punto di  $\mathbf{B}$  e la serie delle derivate  $k^{\text{mo}}$  ( $n = 1, 2, \dots$ )

$$u_0^{(k)}(z) + u_1^{(k)}(z) + \dots + u_n^{(k)}(z) + \dots$$

possiede tutte le proprietà della serie (36), avendo per somma, su  $\mathbf{A}$  e relativa alla (2), la derivata  $k^{\text{mo}}$  di  $u(z)$ .

**7. Contrazioni dell'intervallo di indeterminazione dei procedimenti di sommazione delle serie.** — Ritorniamo da ultimo a considerare il procedimento di sommazione della serie numerica (1), sull'insieme  $\mathbf{A}$  e relativo alla successione (2), per rilevare che, dipendendo il relativo intervallo di indeterminazione e dall'insieme  $\mathbf{A}$  e dalla successione (2), si può pensare di perfezionare il procedimento, cioè di far contrarre quell'intervallo, disponendo in modo opportuno dell'insieme  $\mathbf{A}$  oppure delle funzioni della successione (2).

Al riguardo osserviamo, in primo luogo, che se  $\mathbf{B}$  è un qualsiasi insieme illimitato contenuto in  $\mathbf{A}$ , l'intervallo di indeterminazione del procedimento di sommazione, sull'insieme  $\mathbf{B}$  e relativo alla successione (2), è contenuto nell'intervallo di indeterminazione del procedimento di sommazione, sull'insieme  $\mathbf{A}$  e relativo alla medesima successione (2).

---

*del piano  $z$ , monodroma e continua in ogni punto di  $\mathbf{B}$ . Se l'integrale di  $f(z)$  esteso al contorno di un qualsiasi dominio rettangolare (rettangolo coi lati paralleli agli assi coordinati) contenuto in  $\mathbf{B}$  riesce sempre nullo, la funzione  $f(z)$  è analitica in  $\mathbf{B}$ .*

In secondo luogo, limitandoci a considerare il metodo di sommazione esponenziale, propriamente detto, di BOREL (cfr. n. 1) <sup>(16)</sup> vogliamo osservare l'effetto sul relativo intervallo di indeterminazione delle sostituzioni sulle funzioni

$$(37) \quad f_0(x) \equiv 1, \quad f_k(x) = 1 - \left(1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\right)e^{-x} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

già successivamente studiate da BROMWICH, HARDY, SANNIA.

Insieme alle (37) introduciamo le funzioni

$$f_k(x) \equiv 1 \quad (k = -1, -2, \dots);$$

il metodo di sommazione, sul semiasse reale non negativo, relativo alla successione

$$(2_r) \quad f_r(x), \quad f_{r+1}(x), \dots \quad (r = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$$

sarà indicato con la notazione  $(B, r)$ . Ebbene, sussiste la proposizione:

XV. *L'intervallo di indeterminazione del metodo di sommazione  $(B, r+1)$  è contenuto in quella del metodo di sommazione  $(B, r)$*  <sup>(17)</sup>.

Per la dimostrazione, osserviamo che, indicando con  $p$  un numero intero e positivo, ponendo:

$$u_p(\alpha) = u_0 \frac{\alpha^p}{p!} + u_1 \frac{\alpha^{p+1}}{(p+1)!} + \dots,$$

$$u_0(\alpha) = u(\alpha) = u_0 + u_1 \frac{\alpha}{1!} + u_2 \frac{\alpha^2}{2!} + \dots,$$

$$u^{(p)}(\alpha) = u_p + u_{p+1} \frac{\alpha}{1!} + u_{p+2} \frac{\alpha}{2!} + \dots,$$

<sup>(16)</sup> Sarebbe facile dimostrare, per esempio, che al crescere dell'ordine  $r$  l'intervallo di indeterminazione del procedimento di sommazione  $(C, r)$  di CESÀRO (cfr. n.° 1) non si dilata, e addurre esempi nei quali quell'intervallo, nel passaggio dal metodo  $(C, r)$  al metodo  $(C, r+1)$ , si contrae in un punto.

<sup>(17)</sup> E si può dire che effettivamente il metodo di sommazione  $(B, r)$  si perfeziona al crescere di  $r$ , in grazia degli esempi addotti da HARDY e SANNIA. Cfr. SANNIA, *Nuovo metodo di sommazione delle serie: estensione del metodo di Borel*, [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XLII (1917), pp. 303-322]. Quivi il metodo di sommazione da noi indicato con  $(B, r)$  è indicato con  $(B, -r+1)$ .

le  $u_p(\alpha)$ ,  $u(\alpha)$ ,  $u^{(p)}(\alpha)$  riescono trascendenti intere in  $\alpha$ , e che :

$$\begin{aligned}
 u_0 f_{p+1}(x) + u_1 f_{p+2}(x) + \dots &= \int_0^x e^{-\alpha} u_p(\alpha) d\alpha, \\
 u_0 f_p(x) + u_1 f_{p+1}(x) + \dots &= \int_0^x e^{-\alpha} \frac{du_p}{d\alpha} d\alpha = e^{-x} u_p(x) + \int_0^x e^{-\alpha} u_p(\alpha) d\alpha, \\
 u_0 f_1(x) + u_1 f_2(x) + \dots &= \int_0^x e^{-\alpha} u(\alpha) d\alpha, \\
 u_0 f_0(x) + u_1 f_1(x) + \dots &= u_0 + \int_0^x e^{-\alpha} \frac{du}{d\alpha} d\alpha = e^{-x} u(x) + \int_0^x e^{-\alpha} u(\alpha) d\alpha, \\
 u_0 f_{-p+1}(x) + u_1 f_{-p+2}(x) + \dots &= u_0 + u_1 + \dots + u_{p+1} + \int_0^x e^{-\alpha} u^{(p)}(\alpha) d\alpha, \\
 u_0 f_{-p}(x) + u_1 f_{-p+1}(x) + \dots &= u_0 + u_1 + \dots + u_p + \int_0^x e^{-\alpha} u^{(p)}(\alpha) d\alpha = \\
 &= u_0 + u_1 + \dots + u_{p-1} + e^{-x} u^{(p)}(x) + \int_0^x e^{-\alpha} u^{(p)}(\alpha) d\alpha,
 \end{aligned}$$

e pertanto se ne deduce che il teorema è *immediato* corollario della seguente proposizione :

XVI. *Se la funzione  $f(x)$  della variabile reale  $x$ , definita per  $x \geq a$ , è continua, sussistono le relazioni*

$$\lim'_{x \rightarrow \infty} \left[ f(x) + \int_a^x f(\alpha) d\alpha \right] \leq \lim'_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(\alpha) d\alpha \leq \lim''_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(\alpha) d\alpha \leq \lim''_{x \rightarrow \infty} \left[ f(x) + \int_a^x f(\alpha) d\alpha \right].$$

*Pertanto, se, per  $x$  divergente, la funzione*

$$(38) \quad f(x) + \int_a^x f(\alpha) d\alpha$$

*è regolare si ha che, per  $x$  divergente, la funzione*

$$(39) \quad \int_a^x f(\alpha) d\alpha$$

è pur essa regolare ed ha lo stesso limite (finito o infinito) della (38). Risulta perciò  $f(x)$  infinitesima (per  $x \rightarrow \infty$ ) quando la (38) è convergente (per  $x \rightarrow \infty$ ).

Supponendo  $f(x)$  reale, limitiamoci a dimostrare che

$$(40) \quad \lim'' \int_a^x f(\alpha) d\alpha \leq \lim'' \left[ f(x) + \int_a^x f(\alpha) d\alpha \right].$$

Cominciamo dall'osservare che se

$$(41) \quad \lim'' f(x) < 0,$$

i due membri della (40) valgono entrambi  $-\infty$ . Ed invero, sussistendo la (41), esistono un numero negativo  $-k$  e un valore  $x_0 (> a)$  tali che, per  $x \geq x_0$ , riesce  $f(x) < -k$ , e quindi, per  $x \geq x_0$ ,

$$\int_a^x f(\alpha) d\alpha < \int_a^{x_0} f(\alpha) d\alpha - k(x - x_0),$$

$$f(x) + \int_a^x f(\alpha) d\alpha < -k + \int_a^{x_0} f(\alpha) d\alpha - k(x - x_0),$$

il che dimostra la nostra asserzione. Ciò posto, diciamo  $M$  l'insieme dei valori di  $x$ , non minori di  $a$ , per ciascuno dei quali la funzione (39) ha un massimo. Due casi devono distinguere: I) l'insieme  $M$  non esiste o esistendo è limitato, II) l'insieme  $M$  è illimitato.

*I Caso.* Nel primo caso, si potrà determinare un valore  $x_0$  di  $x$  tale che per  $x \geq x_0$  la derivata  $f(x)$  della (39) o è sempre non negativa, oppure è sempre non positiva. Se, per  $x \geq x_0$ , riesce sempre  $f(x) \geq 0$  si ha

$$\int_a^x f(\alpha) d\alpha \leq f(x) + \int_a^x f(\alpha) d\alpha,$$

onde segue immediatamente la (40). Se, per  $x \geq x_0$ , riesce sempre  $f(x) \leq 0$  si ha pure  $\lim'' f(x) (x \rightarrow \infty) \leq 0$ . Se  $\lim'' f(x) < 0$  i due membri della (40) valgono  $-\infty$ , come già abbiamo osservato, supponiamo allora  $\lim'' f(x) = 0$ . Al divergere di  $x$  la funzione (39) è definitivamente non crescente, essa avrà dunque un limite determinato (finito o  $-\infty$ ) e pertanto

$$\lim'' \left[ f(x) + \int_a^x f(\alpha) d\alpha \right] = \lim'' f(x) + \lim \int_a^x f(\alpha) d\alpha = \lim \int_a^x f(\alpha) d\alpha = \lim'' \int_a^x f(\alpha) d\alpha,$$

e nella (40) vale dunque di nuovo il segno eguale.

*II Caso.* Nel secondo caso, se cioè l'insieme  $M$  dei punti di massimo della (39) è illimitato, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow \infty}'' \int_a^x f(\alpha) d\alpha = \lim_{x \rightarrow \infty}'' \int_a^x f(\alpha) d\alpha (\text{su } M) \quad (18),$$

e d'altra parte, poichè in ogni punto di  $M$  riesce  $f(x) = 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty}'' \int_a^x f(\alpha) d\alpha (\text{su } M) = \lim_{x \rightarrow \infty}'' \left[ f(x) + \int_a^x f(\alpha) d\alpha \right] (\text{su } M),$$

ma

$$\lim_{x \rightarrow \infty}'' \left[ f(x) + \int_a^x f(\alpha) d\alpha \right] (\text{su } M) \leq \lim_{x \rightarrow \infty}'' \left[ f(x) + \int_a^x f(\alpha) d\alpha \right],$$

onde segue di nuovo la (40).

COROLLARI DEL TEOREMA XVI. Questo teorema fornisce taluni criterii

(18) Sussiste invero la proposizione seguente:

La funzione reale  $F(x)$  della variabile reale  $x$  sia definita per  $x \geq a$  e sia continua; detto  $M$  l'insieme dei punti di massimo (dei punti di minimo) della  $F(x)$ , se tale insieme è illimitato si ha

$$\lim_{x \rightarrow \infty}'' F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty}'' F(x) (\text{su } M), \quad \left[ \lim_{x \rightarrow \infty}' F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty}' F(x) (\text{su } M) \right].$$

Per dimostrare la proposizione poniamo  $\lim_{x \rightarrow \infty}'' F(x) = l''$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty}'' F(x) (\text{su } M) = \lambda''$ . Se  $\lambda''$  è finito, comunque si assegni un numero positivo  $\varepsilon$ , si può determinare un valore  $x_\varepsilon (\geq a)$  di  $x$  tale che, per  $x \geq x_\varepsilon$ , il valore di  $F(x)$  in ogni punto di massimo è minore di  $\lambda'' + \varepsilon$ . Ne segue che, qualunque sia il valore  $x \geq x_\varepsilon$  riesce sempre  $F(x) < \lambda'' + \varepsilon$ ; ed infatti, a destra di un tale valore  $x_1$  ve ne sarà certo uno  $x_2$  per cui  $F(x_2) \geq F(x_1)$  e a destra di  $x_2$  uno  $x_3$  per cui  $F(x_3) \geq F(x_2)$ , il massimo assoluto della funzione continua  $F(x)$ , nell'intervallo  $(x_1, x_3)$  sarà pertanto conseguito anche in un punto  $x_4$  interno a tale intervallo e sarà  $\geq F(x_1)$ . Il punto  $x_4$ , per essere interno all'intervallo  $(x_1, x_3)$ , è anche punto di massimo (sull'intero insieme  $x \geq a$ ) per la  $F(x)$  e si avrà quindi  $F(x_1) \leq F(x_4) < \lambda'' + \varepsilon$ . Ma essendo  $F(x) < \lambda'' + \varepsilon$ , per  $x \geq x_\varepsilon$ , se ne deduce  $l'' \leq \lambda'' + \varepsilon$ , donde, data l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ ,  $l'' \leq \lambda''$ ; d'altra parte è anche  $\lambda'' \leq l''$  e si conclude che  $\lambda'' = l''$ . Ripetendo un ragionamento identico si prova che se  $\lambda''$  è  $-\infty$  anche  $l''$  è  $-\infty$ . Se  $\lambda''$  è  $+\infty$ , per essere  $\lambda'' \leq l''$ , anche  $l''$  è  $+\infty$ .

Il teorema non è suscettibile di un'inalterata estensione alle funzioni di più variabili, e un ingegnoso esempio comunicatomi dal prof. FUBINI fa vedere che le ulteriori condizioni che bisognerebbe allora aggiungere farebbero perdere ogni interesse all'estensione indicata.

di regolarità <sup>(19)</sup> per gli integrali impropri che mi sembrano degni d'esser notati. Si ha anzitutto:

*Se la funzione  $f(x)$  è definita per  $x \geq a$ , ed è continua con la sua derivata prima  $f'(x)$ , dalla regolarità dell'integrale improprio*

$$(42) \quad \int_a^{+\infty} [f(x) + f'(x)] dx,$$

*si deduce quella dell'altro*

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx,$$

*laddove il valore (finito o infinito) del primo, aumentato di  $f(a)$ , dà il valore del secondo. Condizione necessaria affinché l'integrale (42) sia convergente è che  $f(x)$  sia infinitesima per  $x \rightarrow \infty$ .*

Sia  $f(x)$  la più arbitraria funzione continua, definita per  $x \geq a$ , designando  $c$  una costante arbitrariamente fissata, posto

$$g(x) = ce^{-x} + e^{-x} \int_a^x f(\alpha) e^{\alpha} d\alpha,$$

si ha

$$g(x) + g'(x) = f(x),$$

onde, dall'ultima proposizione enunciata si deduce, in particolare, la seguente ben singolare:

*Se la funzione  $f(x)$ , definita per  $x \geq a$ , è continua, condizione necessaria per la convergenza dell'integrale improprio*

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

<sup>(19)</sup> Dico *regolare* un integrale improprio  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  se è determinato (finito o infinito) il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(x) dx.$$



è che risulti

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ e^{-x} \int_a^x f(\alpha) e^{\alpha} d\alpha \right] = 0,$$

oppure, il che equivale,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_a^x f(\alpha) e^{\alpha} d\alpha}{\int_a^x e^{\alpha} d\alpha} = 0.$$

Dallo stesso teor. XVI si deduce pure il seguente criterio di regolarità per gli integrali impropri, il quale, nel caso particolare della convergenza, è stato già osservato dal BROMWICH <sup>(20)</sup>:

Se la funzione  $f(x)$  è definita per  $x \geq a$  ed è continua con la sua derivata prima  $f'(x)$ , dalla regolarità dell'integrale

$$(43) \quad \int_a^{+\infty} e^{-x} f'(x) dx,$$

si deduce quella dell'altro

$$\int_a^{+\infty} e^{-x} f(x) dx,$$

laddove il valore (finito o infinito) del primo aumentato di  $e^{-a}f(a)$ , dà il valore del secondo. Nel caso particolare della convergenza dell'integrale (43) se ne ricava che la funzione  $e^{-x}f(x)$  è infinitesima all'infinito.

Si ha invero

$$e^{-a}f(a) + \int_a^x e^{-\alpha} f'(\alpha) d\alpha = e^{-x}f(x) + \int_a^x e^{-\alpha} f(\alpha) d\alpha.$$

Torino, 21 settembre 1924.

<sup>(20)</sup> P. J. F. A. BROMWICH, *An introduction to the theory of infinite series*. [Macmillan and Co., London (1908)], pp. 271-273.



# Über geschlossene Extremalen und periodische Variationsprobleme in der Ebene und im Raume.

Von C. CARATHÉODORY, in München.

---

## EINLEITUNG

1. Das Problem der geschlossenen Extremalen in der Ebene ist von POINCARÉ zuerst behandelt worden <sup>(1)</sup>. Später hat Herr HADAMARD die Poincaréschen Resultate mit Hilfe von sehr einfachen Betrachtungen über die zweite Variation von neuem aufgestellt <sup>(2)</sup>, und neuerdings Herr RADON eine mit der Hadamardschen verwandte Methode auf räumliche Probleme angewandt <sup>(3)</sup>.

Herr RADON hat insbesondere eine quadratische Form aufgestellt, deren Definitsein für das Eintreten des Extremums bei geschlossenen Extremalen charakteristisch ist. Von einem rein formalen Standpunkte aus ist also das Problem endgültig gelöst. Trotzdem scheint mir die folgende Behandlungsweise, bei der die geometrische Seite des Problems mehr hervortritt, nicht überflüssig zu sein.

2. Wir werden unsere Untersuchungen mit einer geometrischen Konstruktion beginnen, die auf sehr elementarem Wege zu hinreichenden Bedingungen für das Eintreten des Extremums bei geschlossenen Extremalen der Ebene und des Raumes führt.

In der Ebene werden diese hinreichenden Bedingungen auf die glücklichste Weise durch einen berühmten Satz von POINCARÉ ergänzt, für den ich in den §§ 16-21 eine einfache Beweisordnung geben werde. Aus diesem Poincaréschen Satze hat man insbesondere die Folge gezogen, dass das Fehlen von konjugierten Punkten auf einer geschlossenen Extremale in der Ebene für das Eintreten eines Extremums notwendig ist. Diese letzte Bedingung ist aber

---

<sup>(1)</sup> *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, T. III, p. 283.

<sup>(2)</sup> *Leçons sur le calcul des variations*, p. 432.

<sup>(3)</sup> *Zur Behandlung geschlossener Extremalen in der Variationsrechnung*. (Abhandl. aus dem Mathem. Seminar d. Hamburger Univers., Bd. I, S. 195).

keineswegs hinreichend <sup>(1)</sup> und es wird im § 24 eine ganze Klasse von Problemen angegeben, bei denen sie erfüllt ist, ohne dass ein Minimum der geschlossenen Extremale stattfindet.

**3.** Der zuletzt erwähnte Poincarésche Satz schränkt die Möglichkeiten so sehr ein, dass es nicht ganz leicht sein dürfte ein konkretes Beispiel eines ebenen Variationsproblems anzugeben, bei welchem eine geschlossene Extremale ein Minimum liefert, ohne dass die geometrische Konstruktion, von der im vorigen Paragraphen die Rede war, ausführbar sei.

Im drei-dimensionalen Raume aber liegen die Verhältnisse anders. Herr RADON hat schon bemerkt und wir werden an speziellen Beispielen erkennen, dass der Poincarésche Satz hier nicht mehr gilt.

Wir werden überdies zeigen, dass, wenn man Vergleichskurven zulässt, die sich erst nach einem  $k$ -fachen Umlaufe in der Nähe der geschlossenen Extremale schliessen, es sehr wohl vorkommen kann, dass die  $k$ -fach durchlaufene Extremale mit diesen Kurven verglichen, immer dann und nur dann ein starkes Minimum liefert, wenn  $k$  nicht durch eine vorgeschriebene Zahl  $m$  teilbar ist.

**4. Zurückführung auf periodische Variationsprobleme.** — Es sei  $\bar{f}(t, x_1, \dots, x_n; \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$  die Funktion unter dem Integral eines Variationsproblems des  $(n+1)$ -dimensionalen Raumes, das eine geschlossene Extremale  $C$  aufweist. Wir bemerken zunächst mit Herrn HADAMARD, dass man eine Umgebung der geschlossenen Extremale  $C$  derart auf die Umgebung der  $t$ -Achse abbilden kann, dass erstens diese Achse das Bild der unendlich oft durchlaufenen Extremale  $C$  darstellt, und zweitens die Abbildung periodisch ist. Die Periode, die man willkürlich wählen kann, werden wir im Folgenden stets gleich Eins setzen.

Indem wir das gegebene Problem mit Hilfe dieser Abbildung transformieren, sehen wir, dass das Problem der geschlossenen Extremalen vollständig äquivalent ist mit folgendem:

*Gegeben sei ein periodisches Variationsproblem, d. h. ein solches für welches die positive Funktion  $f(t, x_i, \dot{x}_i)$  unter dem Integralzeichen der Relation*

$$(1) \quad f(t+1, x_1, \dots, x_n; \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = f(t, x_1, \dots, x_n; \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$$

<sup>(1)</sup> Eine diesbezügliche Bemerkung HADAMARDS, die RADON wiederholt, ist, obschon im Grunde korrekt, vielleicht doch irreführend.

genügt. Es sollen Bedingungen dafür aufgestellt werden, dass das Integral über  $f$  längs des Intervalls  $0 \leq t \leq 1$  der  $t$ -Achse keinen grösseren Wert besitze als das Integral derselben Funktion längs einer Vergleichskurve, die die Punkte mit den Koordinaten  $(0, x_1^0)$  und  $(1, x_1^0)$  verbindet, und ganz innerhalb eines Gebietes  $|x_i| < M$  verläuft.

**5. Ein System hinreichender Bedingungen für das Minimum.** — Es ist selbstverständlich, dass ein Minimum unter den vorgeschriebenen Bedingungen nur dann stattfinden kann, wenn die  $t$ -Achse selbst eine Extremale ist, längs welcher die Weierstrass'sche Bedingung erfüllt ist. Ausserdem darf kein Punkt  $x_i = 0, t = t_0$  dieser Achse einen konjugierten Punkt  $x_i = 0, t = t_1$  besitzen, so dass  $|t_1 - t_0| < 1$  sei.

Diese notwendigen Bedingungen sind aber, wie sich weiterhin ergeben wird, keineswegs hinreichend.

**6.** Wir wollen nun zunächst einen Fall betrachten, der eine grosse Klasse von periodischen Variationsproblemen umfasst, und für welchen der Nachweis des Minimums sich fast ohne Rechnungen ergeben wird.

Dazu betrachten wir ein Feld  $F_0$  von Extremalen, das aus lauter Extremalenstücken besteht, deren Endpunkte im Anfangspunkte  $O$  der Koordinaten zusammenfallen. Wir nehmen an, dass man das Feld  $F_0$  so wählen kann, dass, wenn ein Punkt  $P$  mit den Koordinaten  $(t, x_1, \dots, x_n)$  im Inneren von  $F_0$  liegt, das Gleiche vom Punkte  $P_{-1}$  mit den Koordinaten  $(t - 1, x_1, \dots, x_n)$  gilt, und dass die Strecke  $-1 \leq t < 0$  der  $t$ -Achse aus lauter inneren Punkten des Feldes  $F_0$  besteht. Ausserdem soll die Weierstrass'sche Bedingung in jedem Punkte von  $F_0$  erfüllt sein.

Diese letzte Bedingung hat zur Folge, dass, wenn man mit  $J_{P_1}^{P_2}$  das Integral bezeichnet, das über eine Vergleichskurve  $\gamma$  erstreckt ist, die zwei Punkte  $P_1$  und  $P_2$  von  $F_0$  verbindet, und selbst ganz im Inneren des Feldes verläuft, und mit  $J_{P_1}^O$  bzw.  $J_{P_2}^O$  die Integrale über die Extremalen des Feldes bezeichnet, die  $P_1$  mit  $O$  bzw.  $P_2$  mit  $O$  verbinden, stets die Relation

$$(2) \quad J_{P_1}^O \leq J_{P_1}^{P_2} + J_{P_2}^O$$

erfüllt ist. Hierbei ist bekanntlich das Gleichheitszeichen nur dann zu nehmen, wenn  $\gamma$  mit einem Stücke einer Extremalen von  $F_0$  zusammenfällt.

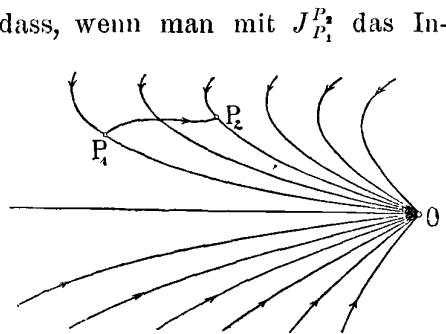


Fig. 1.

7. Die abgeschlossene Strecke  $-2 \leq t \leq -1$  der  $t$ -Achse besteht nach Voraussetzung aus lauter inneren Punkten unseres Feldes  $F_0$ . Man kann also eine positive Zahl  $M$  so klein wählen, dass alle Punkte des abgeschlossenen Gebietes

$$-2 \leq t \leq -1, \quad |x_i| \leq M$$

im Inneren von  $F_0$  liegen, und nach den Voraussetzungen des vorigen Paragraphen gilt dann auch das Gleiche von allen Punkten des abgeschlossenen Gebietes

$$(3) \quad -\infty < t \leq -1, \quad |x_i| \leq M.$$

Man kann also jeden Punkt des Gebietes (3) mit  $O$  durch ein Extremalenstück des Feldes  $F_0$  verbinden, das allerdings das Gebiet (3) eventuell auch verlassen kann.

8. Wegen der Periodizität unseres Variationsproblems können wir das Feld  $F_0$  parallel zur  $t$ -Achse um eine endliche Anzahl  $n$  von Einheitsstrecken nach rechts verschieben, und erhalten so ein Feld  $F_n$ , dessen Extremalen in Punkte  $O_n$  mit den Koordinaten  $t = n, x_i = 0$  zusammenlaufen.

Wir betrachten jetzt das abgeschlossene Gebiet, dessen Punkte durch die Relationen

$$(4) \quad 0 \leq t \leq 1, \quad |x_i| \leq M$$

charakterisiert werden. Dieses Gebiet liegt im Inneren eines jeden der Felder  $F_n$  für  $n \geq 2$ . Jeder Punkt  $P$  des Gebietes (4) kann also für  $n \geq 2$  mit  $O_n$  durch eine Extremale  $e_n$  verbunden werden, die eine Extremale des Feldes  $F_n$  ist, und in jedem der darauffolgenden Extremalenfelder  $F_{n+1}, F_{n+2}, \dots$  enthalten ist.

Falls wir jetzt  $e_n$  als Vergleichskurve des Feldes  $F_{n+1}$  betrachten, erhalten wir aus (2) die Relation

$$I_P^{O_{n+1}} \leq I_P^{O_n} + I_{O_n}^{O_{n+1}},$$

oder, falls wir

$$I_{O_n}^{O_{n+1}} = I_O^{O_1} = I_0$$

setzen,

$$(5) \quad I_P^{O_{n+1}} \leq I_P^{O_n} + I_0.$$

Wir führen jetzt für alle  $n \geq 2$  die Bezeichnung ein:

$$(6) \quad S_n(P) = I_P^{O_n} - nI_0.$$

Dann kann man statt (5) schreiben :

$$(7) \quad S_{n+1}(P) \leq S_n(P);$$

die Folge der Funktionen  $S_1(P), S_2(P), \dots$  ist mithin monoton abnehmend.

9. Wir bezeichnen mit  $K$  die obere Grenze der Werte des Integrals unseres Variationsproblems längs der geradlinigen Strecken, die den Punkt  $O_{-1}$  (mit den Koordinaten  $t = -1, x_i = 0$ ) mit dem Punkte  $P$  verbinden, falls  $P$  das ganze Gebiet (4) durchläuft.

Aus der Relation (2) entnehmen wir jetzt

$$K + I_P^{O_n} > (n + 1)I_0,$$

und ferner mit Hilfe von (6)

$$S_n(P) \geq I_0 - K.$$

Da die rechte Seite der letzten Ungleichheit weder von  $P$  noch von  $n$  abhängt, sehen wir, dass die monotone Funktionenfolge der  $S_n(P)$  nach unten hin beschränkt ist. Sie muss demnach konvergieren und insbesondere die Bedingung

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [S_n(P) - S_{n+1}(P)] = 0$$

erfüllen.

10. Es sei  $\gamma$  eine Kurve, die innerhalb des Gebietes (4) verläuft, und die einen Punkt  $P_0$  mit den Koordinaten  $t = 0, x_i = x_i^0$  mit einem Punkte  $P_1$ , der die Koordinaten  $t = 1, x_i = x_i^1$  besitzt, verbindet. Bezeichnen wir mit  $J$  den Wert unseres Kurvenintegrals längs der Kurve  $\gamma$ , so liefert die Relation (2) auf das Feld  $F_n$  angewandt

$$I_{P_0}^{O_n} \leq J + I_{P_1}^{O_n};$$

nun ist aber nach (6)

$$I_{P_0}^{O_n} = S_n(P_0) + nI_0,$$

und — wenn man noch ausserdem die Periodizität unseres Variationsproblems berücksichtigt :

$$I_{P_1}^{O_n} = I_{P_0}^{O_{n-1}} = S_{n-1}(P_0) + (n - 1)I_0.$$

Aus dem Vergleich der letzten drei Relationen folgt sodann :

$$J \geq I_0 - [S_{n-1}(P_0) - S_n(P_0)]$$

und hieraus, wenn wir noch (8) berücksichtigen und zur Grenze übergehen,

$$(9) \quad J \geq I_0,$$

d. h. die Relation, die wir beweisen wollten.

11. Gibt es eine Kurve  $\gamma_0$ , die  $P_0$  mit  $P_1$  verbindet, und für welche das entsprechende Integral  $J_0 = I_0$  ist, so muss  $\gamma_0$  notwendig eine Extremale sein. Sonst könnte man — im Widerspruche mit der Relation (9) — durch Variation von  $\gamma_0$  Vergleichskurven  $\gamma$  mit denselben Endpunkten wie  $\gamma_0$  konstruieren, für welche  $J < I_0$  wäre. Es ist aber ein Leichtes darüber hinaus noch zu beweisen, dass  $\gamma_0$  eine *periodische* Extremale darstellt.

Durch Verschiebung der Extremalen  $\gamma_0$  parallel zur  $t$ -Achse um eine Einheit nach rechts, erhalten wir nämlich einen Extremalenbogen  $\gamma'_0$ , der den Punkt  $P_1$  mit einem Punkte  $P_2$  verbindet. Das Integral des Variationsproblems, genommen längs der Kurve  $\bar{\gamma}$ , die aus  $\gamma_0$  und  $\gamma'_0$  besteht und  $P_0$  mit  $P_2$  verbindet, ist aber — wegen der Periodizität des Variationsproblems — gleich  $2I_0$ . Andererseits kann man aber, genau wie oben, beweisen, dass für jede Kurve  $\gamma''$ , die  $P_0$  mit  $P_2$  verbindet, das entsprechende Integral  $J'$  die Bedingung  $J' \geq 2I_0$  erfüllt. Letzteres könnte aber nicht der Fall sein, wenn  $\gamma_0$  und  $\gamma'_0$  im gemeinsamen Punkte  $P_1$  eine Ecke bilden würden, da man in diesem Falle durch Variation der Kurve  $\bar{\gamma}$  das Integral über diese Kurve noch verkleinern könnte.

Wir sehen also, dass unter den für das Feld  $F_0$  gemachten Voraussetzungen jeder Kurve  $\gamma$ , die die Punkte  $P_0$  mit  $P_1$  verbindet, ein Integral  $J$  entspricht, für welches die Relation

$$J > I_0$$

besteht, ausser wenn das Variationsproblem eine *periodische* Extremale besitzt, die durch  $P_0$  hindurchgeht.

12. Man kann die obige Methode dazu verwenden, um die Existenz des Minimums auch für den Fall eines *schwachen* Extremums nachzuweisen. Dann genügt es allerdings, dass auf der  $t$ -Achse nur das *Legendresche* Kriterium erfüllt sei. Aber unser Feld  $F_0$  muss in diesem Falle gewissen Zusatzbedingungen genügen, die z. B. erfüllt sind, wenn jede Extremale des Feldes  $F_0$ , deren Anfangspunkt im Gebiete  $t < 0$ ,  $|x_i| < M$  liegt, ganz im Inneren dieses Gebietes verläuft, und wenn die obere Grenze des Winkels, den eine dieser so beschränkten Extremalen in einem ihrer Punkte mit der  $t$ -Achse macht, mit  $M$  gegen Null konvergiert.



13. Die Bedingungen für das Feld  $F_0$ , die wir im § 6 gefordert haben, haben natürlich zur Folge, dass kein Punkt der  $t$ -Achse einen konjugierten Punkt auf dieser Geraden besitzt. Hieraus folgt aber nicht, dass die Extremalen des Feldes  $F_0$ , wenn man sie hinreichend weit nach links verlängert, die  $t$ -Achse nicht wieder treffen könnten.

Betrachten wir z. B. in der  $t, x$ -Ebene das Variationsproblem, für welches

$$f(t, x; \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{1 - x^2}$$

ist. Dieses Problem ist periodisch, da  $f$  nicht von  $t$  abhängt. Die Gleichung für die Extremalen des Feldes  $F_0$  lautet hier in geschlossener Form

$$x = \sin \alpha t.$$

Jede dieser Extremalen schneidet unendlich oft die  $t$ -Achse; und doch bildet die Gesamtheit dieser Extremalen, wenn man die Intervalle

$$-\frac{\pi}{2|\alpha|} \leq t \leq 0$$

betrachtet ein Feld  $F_0$ , das den Anforderungen des § 6 genügt.

14. Im zuletzt besprochenen Problem lautet die Eulersche Differentialgleichung

$$(1 - x^2)\ddot{x} + x\dot{x}^2 = 0$$

und die Jacobische lineare Differentialgleichung, die der Extremalen  $x = 0$  entspricht, besitzt die einfache Gestalt  $\ddot{\xi} = 0$ . Dies ist gerade ein Fall, in dem die Betrachtung der zweiten Variation, wie sie z. B. durch POINCARÉ gehandhabt wird, nicht zum Ziele führt. Allerdings findet hier der Ausnahmefall statt, den HADAMARD ausdrücklich erwähnt, und der darin besteht, dass eine Schar periodischer Extremalen (nämlich die Geraden  $x = \text{const.}$ ) vorhanden ist.

Es ist aber leicht Beispiele zu konstruieren, bei denen die Betrachtung der zweiten Variation ebenfalls nicht zum Ziele führt, der letzte Umstand aber nicht stattfindet. Wir betrachten die Funktion

$$f(t, x; \dot{x}) = \sqrt{(1 + x^4)(1 + \dot{x}^2)}.$$

Hier zeigt zwar schon sofort eine elementare Abschätzung des Integrals über  $f$ , dass die  $t$ -Achse  $x = 0$  ein Minimum für unser Problem liefert. Wir

wollen dennoch zeigen, dass die Konstruktion des § 6 ebenfalls ausführbar ist. Ein erstes Integral der Eulerschen Differentialgleichung lautet nämlich hier

$$(10) \quad \frac{1 + \dot{x}^2}{1 + x^4} = \text{const.}$$

Das Feld  $F_0$  wird durch Extremalen erzeugt, für welche

$$(11) \quad \frac{1 + \dot{x}^2}{1 + x^4} = 1 + \alpha^2$$

ist. Hieraus folgt aber

$$\frac{dx}{dt} = \alpha \sqrt{1 + \frac{1 + \alpha^2}{\alpha^2} x^4}$$

und da die Grösse  $|\dot{x}|$  monoton mit  $x$  wächst, sieht man leicht ein, dass unsere Voraussetzungen für das Feld  $F_0$  erfüllt sind.

Die Eulersche Differentialgleichung lautet in unserem Falle

$$(1 + x^4)\ddot{x} = 2x^3(1 + \dot{x}^2)$$

und die Variation der Extremalen  $x = 0$  führt wiederum auf die Jacobische Differentialgleichung  $\xi = 0$ .

**15.** Das zuletzt besprochene Problem kann als Schulbeispiel benutzt werden, um den Unterschied zwischen der Hadamardschen, der Poincaréschen und unserer Feldkonstruktion zu beleuchten.

Herr HADAMARD und Herr RADON benutzen Extremalenstücke deren Endpunkte gleiche Ordinaten haben und den Abscissenabstand Eins besitzen. Für derartige Extremalen muss die Konstante in (10) kleiner als Eins sein und diese Differentialgleichung also lauten

$$\frac{1 + \dot{x}^2}{1 + x^4} = \frac{1}{1 + \beta^4}.$$

Die Extremalen unseres Feldes  $F_0$  führen andererseits nach (11) zu Werten der betreffenden Konstante, die die Einheit überschreiten.

Die Poincarésche Methode endlich benutzt ausschliesslich die sogenannten asymptotischen Extremalen, deren Differentialgleichung in unserem Beispiele

$$\frac{1 + \dot{x}^2}{1 + x^4} = 1$$

(oder  $\dot{x} = \pm x^2$ ) lautet.

Es ist nicht uninteressant zu konstatieren, dass diese drei Arten von Extremalen, die in der Regel von einander verschieden sind, jede für sich zu einem und demselben Zweck benutzt werden können. Es können allerdings, wie im Beispiele des § 13 die asymptotischen Extremalen POINCARÉ'S und diejenigen, die HADAMARD benutzt hat, manchmal zusammenfallen.

**16. Der Poincarésche Satz.** — Die Theorie der geschlossenen Extremalen in der Ebene, oder was dasselbe ist, der ebenen periodischen Variationsprobleme mit der Periode Eins wird durch einen Satz von POINCARÉ beherrscht, den man — indem man ihn noch gehörig präzisiert — folgendermassen aussprechen kann:

*Bezeichnet man wiederum mit  $I_0$  das Integral über  $f(t, x, \dot{x})$  längs der  $t$ -Achse über das Intervall  $0 \leq t \leq 1$ , so ist folgende Bedingung notwendig und hinreichend dafür, dass es Vergleichskurven  $\gamma_0$  gebe, deren Endpunkte gleiche Ordinaten und die Abscissendifferenz Eins besitzen, für welche das Kurvenintegral einen Wert*

$$J_0 < I_0$$

*besitzt:*

*Es gibt mindestens eine ganze Zahl  $n \geq 1$  derart, dass gewisse Vergleichskurven  $\gamma$ , die den Anfangspunkt  $O$  der Koordinaten mit dem Punkte  $O_n$  verbinden, dessen Koordinaten  $x = 0, t = n$  sind, einem Werte  $J$  des Variationsintegrals entsprechen, für welchen die Bedingung*

$$J < nI_0.$$

*besteht.*

*Man kann ausserdem voraussetzen, dass  $\gamma_0$  aus einem Polygon ohne Doppelpunkte besteht, das die  $t$ -Achse nirgends trifft, und dass  $\gamma$  ebenfalls ein Polygon ohne Doppelpunkte ist, das im kleinsten Streifen liegt, der durch die  $t$ -Achse und eine Parallele zu dieser Geraden begrenzt wird, und der  $\gamma_0$  enthält.*

**17.** Wir nehmen zunächst an, es gebe eine Kurve  $\bar{\gamma}$ , deren Endpunkte  $C$  und  $D$  irgendwo auf der  $t$ -Achse liegen und für welche das entsprechende Kurvenintegral

$$\bar{J} < I_0^D$$

ist; dabei soll  $C$  links von  $D$  liegen und  $I_0^D$  das Integral längs der  $t$ -Achse zwischen den Punkten  $C$  und  $D$  bezeichnen.

Man kann nun zunächst  $\bar{\gamma}$  durch ein Polygon  $\gamma'$  mit denselben Endpunkten  $C$  und  $D$  derart approximieren, dass erstens das Integral  $J'$  über das Polygon  $\gamma'$  genommen die Bedingung

$$(12) \quad J' < I_O^D$$

erfüllt, und zweitens keine einzige Seite von  $\gamma'$  der  $t$ -Achse parallel sei.

Das Polygon  $\gamma'$  begegnet dann der  $t$ -Achse in höchstens *endlich vielen* Punkten.

Wir bezeichnen mit  $A$  denjenigen dieser Schnittpunkte, der am weitesten links liegt; dieser Punkt  $A$  kann natürlich auch mit  $C$  zusammenfallen. Durch  $A$  wird auf  $\gamma'$  ein Polygonzug  $\gamma'_1$  bestimmt, der  $A$  mit  $D$  verbindet und von dem kein innerer Punkt mit  $A$  zusammenfällt. Wir bezeichnen mit  $B$  den Schnittpunkt von  $\gamma'_1$  mit der  $t$ -Achse, der am weitesten rechts liegt, und der eventuell auch mit  $D$  zusammenfallen kann. Durch  $B$  wird auf  $\gamma'_1$  ein Polygonzug  $\gamma'_2$  bestimmt, der in  $A$  beginnt, in  $B$  endet und keinen inneren Punkt besitzt, der mit  $B$  zusammenfällt. Nun besteht für den Wert  $J'_2$  unseres Kurvenintegrals über  $\gamma'_2$ , weil  $f(t, x, \dot{x}) > 0$  ist, die Relation  $J'_2 \leq J'$ ; dagegen ist  $I_A^B \geq I_O^D$  und wir haben also, wegen (12),

$$(13) \quad J'_2 < I_A^B.$$

Die Anzahl der Schnittpunkte von  $\gamma'_2$  mit der  $t$ -Achse ist nicht grösser als die der ursprünglichen Kurve  $\gamma'$  und wir haben jedenfalls gewonnen, dass diese Schnittpunkte alle auf der Strecke  $AB$  liegen.

Im Falle nun, dass ein innerer Punkt  $E$  von  $\gamma'_2$  sich noch auf der  $t$ -Achse zwischen  $A$  und  $B$  befindet, betrachten wir die zwei Teilbögen  $\gamma'_3$  und  $\gamma'_4$ , in die  $\gamma'_2$  durch  $E$  zerlegt wird, und von denen der erste  $A$  mit  $E$ , der zweite aber  $E$  mit  $B$  verbindet. Wenn man mit  $J'_3$  bzw.  $J'_4$  die diesen Teilbögen entsprechenden Werte des Kurvenintegrals bezeichnet, so folgt aus

$$J'_3 + J'_4 = J'_2 \quad \text{und} \quad I_A^E + I_E^B = I_A^B$$

in Verbindung mit (13), dass nicht gleichzeitig

$$J'_3 \geq I_A^E \quad \text{und} \quad J'_4 \geq I_E^B$$

stattfinden kann. Es ist also z. B.

$$J'_3 < I_A^E,$$

nun besitzt aber das Polygon  $\gamma'_3$  sicher *weniger* Schnittpunkte mit der  $t$ -Achse als  $\gamma'$ . Wir nennen das Polygon  $\gamma'_3$ , das wir so konstruiert haben,

$\gamma''$  und iterieren das ganze Verfahren. Schliesslich erhalten wir ein Polygon  $\gamma^{(v)}$  mit den Endpunkten  $L$  und  $M$ , das keinen einzigen inneren Punkt besitzt, der auf der  $t$ -Achse liegt, und für welches ebenfalls die Beziehung

$$J^{(v)} < I_L^M$$

gilt.

18. Wir verschieben nun  $\gamma^{(v)}$  um eine endliche Anzahl von Perioden nach rechts oder links, bis der Punkt  $L$  in das Intervall  $0 \leq t < 1$  gebracht wird. Wir bezeichnen mit  $\gamma_1^{(v)}$  das Polygon in seiner neuen Lage, und mit  $P$  und  $Q$  seine Endpunkte. Ferner sei  $O_n$  ein Punkt der  $t$ -Achse mit ganzzahliger Abscisse, der rechts von  $Q$  liegt. Wir können nun auf  $\gamma_1^{(v)}$  einen inneren Punkt  $P_1$  so nahe an  $P$  und einen inneren Punkt  $Q_1$  so nahe an  $Q$  wählen, dass, wenn wir mit  $\tilde{\gamma}$  dasjenige Polygon bezeichnen, das aus den geradlinigen Strecken  $OP_1$  und  $Q_1O_n$  und aus demjenigen Teil von  $\gamma_1^{(v)}$  besteht, der zwischen  $P_1$  und  $Q_1$  liegt, und ferner mit  $\gamma$  dasjenige Polygon ohne Doppelpunkte, das aus  $\tilde{\gamma}$  durch Auslöschen der noch möglicherweise vorhandenen Schleifen gewonnen wird, das Kurvenintegral  $J$  über  $\gamma$  der Bedingung

$$(14) \quad J < nI_0$$

genügt.

19. Es sei nun  $\gamma$  ein Polygon ohne Doppelpunkte, das  $O$  mit  $O_n$  verbindet, keinen inneren Punkt auf der  $t$ -Achse besitzt, und für welches, bei möglichst kleinem Werte von  $n$ , die Bedingung (14) besteht.

Ist  $n = 1$ , so sieht man leicht ein, dass es Polygone  $\gamma_0$  gibt, deren Endpunkte gleiche Ordinaten besitzen, für welche  $J_0 < I_0$  ist und von denen kein einziger Punkt — auch nicht ein Endpunkt. — auf der  $t$ -Achse liegt.

Wir nehmen also an, es sei  $n \geq 2$ ; um ein bestimmtes Bild zu haben, können wir ferner voraussetzen, dass die Kurve  $\gamma$  oberhalb der  $t$ -Achse verläuft. Wir bezeichnen mit  $M$  denjenigen Punkt von  $\gamma$  für welchen die Ordinate  $x$  am grössten ist, oder — falls es auf  $\gamma$  mehrere Punkte mit gleicher Maximalordinate geben sollte — denjenigen unter allen diesen Punkten der die grösste Abscisse  $t$  besitzt.

Es seien  $\gamma'$  und  $\gamma''$  die beiden Teilpolygone von  $\gamma$ , von denen das erste  $O$  mit  $M$ , das zweite  $M$  mit  $O_n$  verbindet. Wir bezeichnen ferner mit  $G$  das Gebiet, dessen Begrenzung erstens aus allen Punkten der  $t$ -Achse rechts von  $O_n$  besteht, zweitens aus  $\gamma''$  und drittens aus einer Halbgeraden, die im Punkte  $M$  beginnt und einen Winkel von  $45^\circ$  mit der positiven  $t$ -Achse einschliesst.

Nun betrachten wir den Polygonzug  $\gamma'_1$ , der entsteht, wenn wir  $\gamma'$  um eine Periode nach rechts verschoben. Der Anfangspunkt  $O_1$  von  $\gamma'_1$  liegt ausserhalb, der Endpunkt  $M_1$  dieses Kurvenstückes im Inneren von  $G$ . Also besitzt  $\gamma'_1$  mindestens einen Punkt  $S_1$  auf der Begrenzung dieses Gebietes, und da  $\gamma'_1$  keinen Punkt auf der  $t$ -Achse rechts von  $O_n$  und ebenfalls keinen Punkt mit grösserer Ordinate als  $M$  besitzt, muss notwendig  $S_1$  auf  $\gamma''$  liegen. Der Punkt  $S_1$  ist aber auf  $\gamma'_1$  das Bild eines Punktes  $S$  der auf  $\gamma'$  liegt, und, was sehr wichtig ist,  $S$  liegt auf  $\gamma$  zwischen  $O$  und  $S_1$ .

20. Durch die beiden Punkte  $S$  und  $S_1$  werden auf  $\gamma$  drei Teilpolygone bestimmt, die wir der Reihe nach mit  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  bezeichnen.

Die Integrale längs dieser Polygone nennen wir  $J_1, J_2, J_3$ . Verschiebt man nun  $\gamma_3$  um eine Periode nach links, so erhält man ein neues Polygon  $\gamma'_3$ , das mit  $\gamma_1$ , zusammen eine Vergleichskurve darstellt, die  $O$  mit  $O_{n-1}$  verbindet und keine inneren Punkte auf der  $t$ -Achse besitzt; dieser Kurve (die übrigens auch Doppelpunkte besitzen kann) entspricht aber der Integralwert  $J_1 + J_3$ . Jedenfalls ist aber, wegen der Voraussetzungen am Anfang des § 19.

$$J_1 + J_3 \geq (n-1)I_0.$$

Andererseits haben wir aber

$$J = J_1 + J_2 + J_3 < nI_0;$$

aus den beiden letzten Relationen folgt also

$$J_2 < I_0.$$

Wir konstruieren nun das eindeutig bestimmte unendliche Polygon  $\Gamma$ , das durch periodische Wiederholung von  $\gamma_2$  entsteht und bezeichnen mit  $\gamma'_0$  einen Teil dieses Polygons, dessen Endpunkte gleiche Ordinaten und die Abscissen  $t=0$  bzw.  $t=1$  besitzen; dabei soll  $\gamma'_0$  so gewählt werden, dass durch periodische Verschiebungen von  $\gamma'_0$  wiederum  $\Gamma$  erzeugt wird. Endlich bezeichnen wir mit  $\gamma_0$  dasjenige Polygon ohne Doppelpunkte, das aus  $\gamma'_0$  entsteht, wenn man die durch die letzten Operationen möglicherweise neu entstandenen Schleifen auslöscht. Da nun, wenn man mit  $J'_0$  und  $J_0$  die Werte unseres Kurvenintegrals über  $\gamma'_0$  bzw.  $\gamma_0$  bezeichnet, die Relationen  $J'_0 = J_2$  und  $J_0 \leq J'_0$  bestehen, hat man schliesslich  $J_0 < I_0$ , womit die eine Hälfte des Poincaréschen Satzes bewiesen ist.

21. Es sei umgekehrt  $\gamma$  eine beliebige Kurve, deren Endpunkte  $P_0$  und  $P_1$  gleiche Ordinaten und die Abscissen  $t=0$  bzw.  $t=1$  besitzen, und für

welche der entsprechende Wert  $\bar{J}_0$  des Kurvenintegrals der Bedingung

$$(15) \quad \bar{J}_0 = I_0 - \alpha \quad (\alpha > 0)$$

genügt. Wir bezeichnen mit  $\bar{\gamma}_k$  die Kurve, die aus  $\bar{\gamma}_0$  entsteht, wenn man sie um  $k$  Perioden nach rechts parallel zur  $t$ -Achse verschiebt, und mit  $P_k, P_{k+1}$  ihre Endpunkte. Nun konstruieren wir eine Kurve  $\bar{\gamma}$ , die aus den geradlinigen Strecken  $O_{-1}P_0$  und  $P_m O_{m+1}$  und aus den  $m$  aufeinanderfolgenden Kurvenstücken  $\bar{\gamma}_0, \bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_{m-1}$  besteht. Bezeichnet man mit  $\bar{J}$  den Wert des Kurvenintegrals genommen über  $\bar{\gamma}$ , so ist wegen (15) bei hinreichend grossem  $m$

$$\bar{J} < I_{O_{-1}}^{O_{m+1}}.$$

Die Kurve  $\bar{\gamma}$  besitzt also die Eigenschaften, die wir von der gleichnamigen Kurve im § 17 vorausgesetzt haben. Unsere obigen Ausführungen erlauben uns ein Polygon  $\gamma$  und ein Polygon  $\gamma_0$  zu konstruieren, wie dies durch den Poincaréschen Satz des § 16 verlangt wird. Hiermit ist aber dieser Satz in allen seinen Einzelheiten bewiesen.

**22.** Im Falle, dass ein Punkt  $A$  auf der  $t$ -Achse einen konjugierten Punkt  $A^*$  auf dieser Achse besitzt, gibt es natürlich in jedem Streifen, der die  $t$ -Achse enthält, Kurven  $\bar{\gamma}$ , die den Bedingungen des § 17 genügen. Aus dem Poincaréschen Theorem folgt demnach der Satz;

*Für das Eintreten des Minimums ist es notwendig, dass kein Punkt der  $t$ -Achse einen konjugierten Punkt auf dieser Achse besitzt.*

Im Gegensatz zum Satze, den wir im § 16 ausgesprochen haben, ist diese letzte Bedingung aber *nicht hinreichend*. Sie kann sehr wohl erfüllt sein, ohne dass ein Minimum stattfindet.

Betrachten wir z. B. das Variationsproblem, das zu der Funktion

$$(16) \quad f(t, x, \dot{x}) = \frac{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}{\sqrt{1 + x^4}}$$

gehört; man sieht durch Abschätzung des Integrals sofort ein, dass bei diesem periodischen Variationsprobleme kein Minimum in unserem Sinne stattfindet. Ist nun  $\gamma'$  eine Vergleichskurve, die  $O$  mit  $O_n$  verbindet und deren grösster Abstand von der  $t$ -Achse mit  $h$  bezeichnet sein möge, so ist die Länge dieser Vergleichskurve nicht kleiner als  $\sqrt{n^2 + 4h^2}$ . Längs der

ganzen Kurve ist aber  $\sqrt{1+x^4} \leq \sqrt{1+h^4}$ ; wir erhalten also, durch Abschätzung des Kurvenintegrals

$$J > \frac{\sqrt{n^2 + 4h^2}}{\sqrt{1+h^4}} = n \sqrt{\frac{1 + \frac{4}{n^2}h^2}{1+h^2 \cdot h^2}}.$$

Andererseits ist

$$I_0^{O_n} = n;$$

man hat also stets  $J > I_0^{O_n}$ , sobald  $h < \frac{2}{n}$  ist, woraus folgt, dass kein konjugierter Punkt zwischen  $O$  und  $O_n$  liegen kann.

23. Um dieser Erscheinung, die noch nicht bemerkt worden zu sein scheint, auf den Grund zu gehen, untersuchen wir die Extremalen des letzten Problems, die durch Integration der Differentialgleichung

$$(1+x^4)(1+\dot{x}^2) = 1+\alpha^4$$

oder

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{\alpha^4 - x^4}{1+x^4}}$$

gewonnen werden.

Insbesondere werden die Extremalen, die durch den Anfangspunkt der Koordinaten gehen und in der oberen Halbebene liegen, durch die Gleichung

$$(17) \quad t = \int_0^x \frac{\sqrt{1+x^4}}{\sqrt{\alpha^4 - x^4}} dx$$

oder, indem man  $x = \alpha u$  setzt, durch die Gleichung

$$t = \int_0^{\frac{x}{\alpha}} \frac{\sqrt{1+\alpha^4 u^4}}{\alpha \sqrt{1-u^4}} du$$

dargestellt. Diese Kurven haben ein Maximum im Punkte  $x = \alpha$ ,  $t = t_x$ , wobei

$$t_x = \frac{1}{\alpha} \int_0^1 \frac{\sqrt{1+\alpha^4 u^4}}{\sqrt{1-u^4}} du > \frac{1}{\alpha} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$$

ist. Man sieht also, dass

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} t_x = \infty$$



ist. Im Intervalle  $0 \leq t < t_\alpha$  wird die Extremale direkt durch die Gleichung (17) dargestellt, und die Gesamtheit der so abgeschnittenen Extremalen bildet ein Feld, das jeden Punkt der  $t$ -Achse in seinem Inneren enthält. Man sieht dies am leichtesten ein, wenn man bemerkt, dass nach (17), solange  $\alpha^2 > x^2$  ist, für feste Werte von  $x$  und variables  $\alpha$  die Abscisse  $t$  eine monotone Funktion von  $\alpha$  ist. Die Verlängerung der Extremale über ihren Maximalpunkt hinaus wird nun durch die Gleichung dargestellt:

$$t = \left( \int_0^1 + \int_x^\alpha \right) \frac{\sqrt{1 + \alpha^4 u^4} du}{\alpha \sqrt{1 - u^4}}.$$

Hieraus entnimmt man aber

$$\frac{\partial t}{\partial \alpha} = \frac{x \sqrt{1 + x^4}}{\alpha \sqrt{\alpha^4 - x^4}} \left( \int_0^1 + \int_x^\alpha \right) \frac{(1 - \alpha^4 u^4) du}{\alpha^2 \sqrt{(1 - u^4)(1 + \alpha^4 u^4)}};$$

aus dieser letzten Gleichung folgt aber, dass für fest gegebene Werte von  $\alpha < 1$ , Werte von  $x$  zwischen Null und  $\alpha$  liegen, für welche  $\frac{\partial t}{\partial \alpha}$  verschwindet.

Diese Extremalen berühren also ihre Enveloppe vor ihrem zweiten Schnittpunkt mit der  $t$ -Achse; hieraus schliesst man, wenn man alles zusammenfasst, dass die  $t$ -Achse eine Asymptote dieser Enveloppe ist.

24. Man kann nun ganz allgemein beweisen, dass, wenn bei einem periodischen Variationsproblem das Extremalenbüschel durch den Anfangspunkt der Koordinaten eine die  $t$ -Achse nicht treffende Enveloppe besitzt, die diese Achse zur Asymptote hat, ein Minimum in unserem Sinne nicht stattfinden kann.

Wir betrachten wie im § 6 das Büschel der Extremalen, die ihren Endpunkt in  $O$  haben, und bezeichnen mit  $E_n$  den Schnittpunkt ihrer Enveloppe mit der

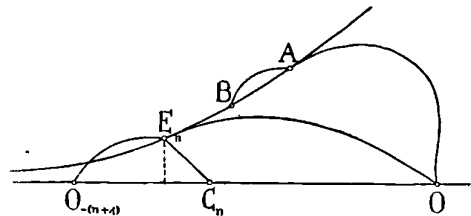


Fig. 2.

Ordinate  $t = -n$  (s. Fig. 2). Wir verbinden  $E_n$  mit einem Punkte  $C_n$  der  $t$ -Achse durch eine geradlinige Strecke, die den von  $n$  unabhängigen Winkel  $\alpha$  mit der  $t$ -Achse einschliesst, und bezeichnen mit  $K_n$  den Wert unseres In-

tegrals längs dieser Strecke. Dann ist, weil der Abstand zwischen  $E_n$  und der  $t$ -Achse gegen Null konvergiert,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = 0.$$

Ferner betrachten wir das Extremalenstück, das den Punkt  $O_{-n-1}$  mit  $E_n$  verbindet und bezeichnen mit  $H_n$  das Integral längs dieses Extremalenstückes; ebenfalls bezeichnen wir mit  $I_n$  das Integral längs derjenigen Extremale des Feldes, die  $E_n$  mit  $O$  verbindet. Ist dann der Winkel  $\alpha$  hinreichend klein, so ist nicht nur stets der Punkt  $C_n$  rechts von  $O_{-n}$ , sondern es gelten für grosse  $n$  die Gleichungen

$$H_n + \vartheta_1 K_n = I_{O_{-n-1}}^{C_n} \quad (0 \leq \vartheta_1 \leq 1)$$

und

$$I_n = \vartheta_2 K_n + I_{O_n}^O \quad (0 \leq \vartheta_2 < 1).$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen erhält man dann:

$$\begin{aligned} H_n + I_n &= I_{O_{-n-1}}^O + (\vartheta_2 - \vartheta_1) K_n \\ &= (n+1) I_0 + \vartheta K_n \quad |\vartheta| \leq 1. \end{aligned}$$

Nun sei  $A$  ein fester Punkt der Enveloppe und  $B$  ein zweiter fester Punkt dieser Enveloppe zwischen  $E_n$  und  $A$ . Wir wählen  $B$  so nahe an  $A$ , dass, wenn man mit  $J_B^A$  das Integral längs der Enveloppe und mit  $I_B^A$  das Integral längs der Extremalen zwischen  $B$  und  $A$  bezeichnet,

$$J_B^A = I_B^A + h \quad h > 0$$

ist. Nun ist wegen des Enveloppensatzes, wenn man das Integral längs der Enveloppe zwischen  $E_n$  und  $A$  mit  $J_{E_n}^A$  und das Integral längs der Feldextremalen zwischen  $A$  und  $O$  mit  $I_A$  bezeichnet,

$$\begin{aligned} I_n &= J_{E_n}^A + I_A \\ &= J_{E_n}^B + I_B^A + I_A + h. \end{aligned}$$

Wir haben also

$$H_{n+1} + J_{E_n}^B + I_B^A + I_A = (n+1)I_0 + \vartheta K_n - h$$

und für hinreichend grosse Werte von  $n$

$$H_{n+1} + J_{E_n}^B + I_B^A + I_A < (n+1)I_0.$$

Der Ausdruck links ist aber der Wert des Integrals längs einer Vergleichskurve, die  $O_{-n-1}$  mit  $O$  verbindet. Nach dem Poincaréschen Satze darf also kein Minimum stattfinden.

**25. Periodische Probleme im drei-dimensionalen Raume.** — Wir werden im Folgenden Variationsprobleme im Raume der  $x, y, t$  behandeln, für welche die Funktion unter dem Integral die Gestalt

$$(18) \quad \sqrt{\frac{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2}{1 + r^2 \varphi(r^2)}}$$

besitzt. Hierbei soll

$$r^2 = x^2 + y^2$$

gesetzt werden,  $r^2 \varphi(r^2)$  im Intervalle  $0 \leq r^2 \leq \rho^2$  monoton mit  $r$  zunehmen, und  $\varphi(r^2)$  in diesem Intervalle beschränkt sein.

Um das Integral über (18) längs einer Vergleichskurve bequem abschätzen zu können, behandeln wir zunächst folgendes elementargeometrische Problem.

Wir betrachten einen Rotationszylinder  $K$  von der Höhe  $k$  und dem Radius  $r$  und wählen zwei feste Punkte  $A$  und  $B$ , die auf den Kreisen liegen, welche die Grundflächen des Zylinders  $K$  begrenzen. Ferner betrachten wir einem konzentrischen unbegrenzten Zylinder  $K_1$  vom Radius  $(r + h)$ , wobei  $h > 0$  ist. Es soll die Länge des kürzesten Weges abgeschätzt werden, der  $A$  mit  $B$  verbindet und mindestens einen Punkt  $C$  des grösseren Zylinders  $K_1$  enthält.

Es ist fast evident, dass man unsere Frage folgendermassen beantworten kann: Wir betrachten eine beliebige Tangentialebene des Zylinders  $K_1$ , bezeichnen mit  $A_1$  den spiegelsymmetrischen Punkt von  $A$  bezüglich dieser Tangentialebene und berechnen das Minimum der Strecke  $A_1 B$ , wenn die Tangentialebene variiert.

Bezeichnen wir mit  $B'$  die Projektion von  $B$  auf die Basis des Zylinders  $K$ , so erhält man:

$$A_1 B = \sqrt{k^2 + (A_1 B')^2},$$

und unsere Frage ist auf das ebene Problem zurückgeführt, das darin besteht, das Minimum von  $A_1 B'$  abzuschätzen.

26. Wir bezeichnen (s. Fig. 3) mit  $\alpha$  den gegebenen Winkel  $AOB'$  und mit  $\vartheta$  den veränderlichen Winkel  $AOP$ ; dann gelten im Dreieck  $A_1AB'$  folgende Relationen:

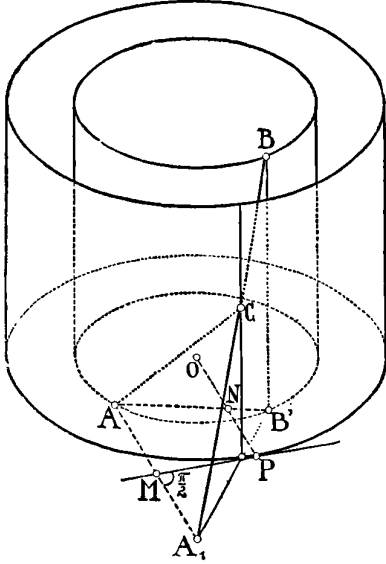


Fig. 3.

$$AA_1 = 2AM = 2[(r+h) - r \cos \vartheta]$$

$$AB' = 2r \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\widehat{A_1AB'} = \widehat{ANO}$$

$$= \pi - \left( \vartheta + \frac{\pi - \alpha}{2} \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left( \vartheta - \frac{\alpha}{2} \right).$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$\vartheta = \frac{\alpha}{2} + u;$$

dann wird

$$\cos \widehat{A_1AB'} = \sin u$$

und das Dreieck  $A_1AB'$  liefert die Relation:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(A_1B')^2 &= \left[ (r+h) - r \cos \left( \frac{\alpha}{2} + u \right) \right]^2 + r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\ &\quad - 2 \left[ (r+h) - r \cos \left( \frac{\alpha}{2} + u \right) \right] r \sin \frac{\alpha}{2} \sin u. \end{aligned}$$

Durch Ausrechnen dieses Ausdrucks findet man nun:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(A_1B')^2 &= (r+h)^2 + r^2 \cos^2 u - 2r(r+h) \cos \frac{\alpha}{2} \cos u \\ &= (r+h)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left( r \cos u - (r+h) \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2 \\ &\geq (r+h)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Für die Länge  $l$  jeder Kurve, die  $A$  mit  $B$  verbindet und deren grösster Abstand von der  $t$ -Achse gleich  $(r+h)$  ist, haben wir demnach die Relation:

$$(19) \quad l \geq \sqrt{k^2 + (r+h)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

27. Wir kehren jetzt zu unserem Variationsproblem (18) zurück und bezeichnen mit  $\gamma$  eine beliebige Vergleichskurve, deren Endpunkte  $A_0$  und  $B_0$  auf einem Kreiszyylinder liegen, dessen Achse die  $t$ -Achse ist und der den Radius  $r_0$  besitzt. Bezeichnen wir jetzt mit  $k$  und  $\alpha$  dieselben geometrischen Grössen wie oben und mit  $r_1$  das Maximum der Entfernung der Kurve  $\gamma$  von der  $t$ -Achse, wobei auch  $r_1 = r_0$  sein kann, wenn  $\gamma$  ganz im Inneren des betrachteten Zylinders bleibt, so ist die Länge von  $\gamma$  mindestens gleich

$$\sqrt{k^2 + 4r_1^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

In jedem Punkte von  $\gamma$  ist aber, wegen der Voraussetzungen über  $\varphi(r^2)$ ,

$$\sqrt{1 + r_1^2 \varphi(r_1^2)} \geq \sqrt{1 + r^2 \varphi(r^2)}.$$

Der Wert  $J$  unseres Kurvenintegrals längs  $\gamma$  genügt also der Relation :

$$J \geq \frac{\sqrt{k^2 + 4r_1^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{1 + r_1^2 \varphi(r_1^2)}}.$$

Wir lassen jetzt bei konstant gehaltenen  $k$  und  $\alpha$  die Grösse  $r_0$  im Intervalle  $0 < r_0 \leq \rho$  variieren und wählen dabei die Konstanten  $k$  und  $\alpha$  so, dass für diese Werke von  $r$

$$(20) \quad \varphi(r^2) < \frac{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{k^2}$$

ist. Dann ist für alle unsere Kurven  $\gamma$ , solange  $r_0 \leq r_1 \leq \rho$  ist,

$$(21) \quad J > k.$$

28. Nachdem wir dies vorausgeschickt haben, konstruieren wir die periodischen Variationsprobleme, die wir untersuchen wollen, folgendermassen: Wir betrachten einen drei-dimensionalen Raum der  $x_1, x_2, t$ , der aus dem soeben betrachteten Raume der  $x, y, t$  mit Hilfe einer Schraubung längs der  $t$ -Achse hervorgeht. Die Transformationsformeln lauten

$$(22) \quad \begin{cases} x = x_1 \cos \mu t + x_2 \sin \mu t \\ y = -x_1 \sin \mu t + x_2 \cos \mu t. \end{cases}$$

Hieraus folgt durch Differentiation

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (\dot{x}_1 + \mu x_2)^2 + (\dot{x}_2 - \mu x_1)^2,$$

sodass unser Variationsproblem die endgültige Gestalt annimmt:

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x_1, x_2, x_1, x_2) = \sqrt{\frac{1 + (\dot{x}_1 + \mu x_2)^2 + (\dot{x}_2 - \mu x_1)^2}{1 + r^2 \varphi(r^2)}} \\ r^2 = x_1^2 + x_2^2. \end{array} \right.$$

In diesem Variationsproblem kommt die Variable  $t$  nicht vor, und wir können daher annehmen, dass es periodisch ist und die Periode Eins hat.

**29.** Wir setzen in den letzten Formeln

$$\mu = \frac{2\pi}{m},$$

wobei  $m$  eine ganze Zahl bedeutet, die nicht kleiner als 2 ist.

Betrachten wir nun im Raume der  $x_1, x_2, t$  zwei Punkte  $A$  und  $B$ , die um  $n$  Perioden voneinander verschieden sind, so entsprechen ihnen zwei Punkte  $A$  und  $B$  im Raume der  $x, y, t$ , die auf der Mantelfläche eines Kreiszyinders liegen, dessen Achse die  $t$ -Achse ist und für welche mit den Bezeichnungen der §§ 25 u. 26

$$(24) \quad k = n \quad \alpha = \frac{2n\pi}{m}$$

gesetzt werden muss.

Durch Spezialisierung der Funktion  $\varphi(r^2)$  erhalten wir einen Einblick über die verschiedenen Verhältnisse, die hier eintreten können.

**30. Erstes Beispiel.** — Wir setzen

$$\varphi(r^2) = c^2$$

und

$$(25) \quad c^2 < \frac{4 \sin^2 \frac{\pi}{m}}{(m-1)^2}.$$

Bemerken wir nun, dass für  $n = 1, 2, \dots, (m-1)$  nach (24)

$$k \leq (m-1) \quad \text{und} \quad \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \sin^2 \frac{n\pi}{m} \geq \sin^2 \frac{\pi}{m}$$

ist, so sehen wir, dass nach (25) die Bedingung (20) erfüllt ist. Hieraus folgt, dass für unser Problem die betreffenden Abschnitte der  $t$ -Achse gegenüber allen periodischen Vergleichskurven, für welche die Periode  $1, 2, \dots, (m-1)$  ist, ein starkes Minimum liefern. Für die periodischen Vergleichskurven mit der Periode  $m$  liefert aber das entsprechende Stück der  $t$ -Achse kein Minimum.

In der Tat kann man jetzt als Vergleichskurve im Raume der  $(x_1, x_2, t)$  das Bild einer Erzeugenden des entsprechenden Zylinders im Raume der  $(x, y, t)$  wählen, für welche das Integral stets kleiner als  $m$  ist.

Es ist selbstverständlich (cf. § 21), dass der Poincarésche Satz hier nicht mehr gilt. Jeder Punkt der  $t$ -Achse besitzt sogar hier einen konjugierten Punkt im Abstände  $\frac{\pi}{c}$ , was sehr leicht auszurechnen ist.

### 31. Zweites Beispiel. — Wir setzen

$$\varphi(r^2) = r^2.$$

Ist dann  $n$  nicht durch  $m$  teilbar, und verläuft eine periodische Vergleichskurve mit der Periode  $n$  innerhalb eines Zylinders mit dem Radius

$$\rho = \frac{2 \sin \frac{\pi}{m}}{n},$$

so folgt aus (20), dass das Kurvenintegral einen Wert  $J > n$  besitzt. Die  $t$ -Achse liefert also ein starkes Minimum für hinreichend benachbarte periodische Vergleichskurven mit der Periode  $n$ .

Ist aber  $n = m$  oder gleich einem Vielfachen von  $m$ , so sieht man wie oben, dass kein Minimum vorhanden sein kann.

32. Wir halten jetzt im letzten Beispiel an der Grundperiode Eins fest und lassen  $m$  variieren. Dann folgt aus unseren früheren Ueberlegungen, dass für irrationale Werte von  $m$  allen periodischen Kurven mit der Periode  $n$ , wenn sie in einer gewissen Nachbarschaft der  $t$ -Achse bleiben, ein Wert  $J > n$  des Kurvenintegrals entspricht. Ist dagegen  $m$  rational, z. B. gleich  $p:q$ , so gibt es periodische Kurven mit der Periode  $p$  für welche  $J < p$  ist.

33. Herr RADON hat bemerkt, dass es im Raume periodische Variationsprobleme mit der Periode Eins gibt, für welche allen periodischen Kurven mit dieser Periode ein Wert  $J > I_0$  des Kurvenintegrals entspricht, während

auf der  $t$ -Achse die aufeinanderfolgenden konjugierten Punkte die kleinste noch erlaubte Entfernung Eins besitzen (cf. § 5).

Da das Beispiel, das er in dieser Hinsicht publiziert hat <sup>(1)</sup>, den gestellten Anforderungen nicht genügt, hat er ein anderes konstruiert, das er vor Kurzem im Bd. IV der Hamburger Abhandlungen veröffentlicht hat. Man erhält aber ein viel einfacheres und geometrisch durchsichtigeres Variationsproblem, wenn man den ursprünglichen Gedanken von RADON, der darin besteht, eine nichteuklidische Massbestimmung zu benutzen, konsequent durchführt.

### 34. Die Oberfläche der Einheitskugel

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \tau^2 = 1$$

im vierdimensionalen Raum der  $\xi, \eta, \zeta, \tau$ , kann nämlich mit Hilfe von drei Parametern  $x, y, t$  folgendermassen dargestellt werden:

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2} \cos \pi t \\ \eta = \frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2} \sin \pi t \\ \zeta = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2} \\ \tau = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2} \end{array} \right.$$

Für  $x^2 + y^2 < 1$  und  $-1 < t \leq 1$  werden alle Punkte dieser Kugel mit Ausnahme derjenigen, die auf dem Kreise  $\xi = \eta = 0, \zeta^2 + \tau^2 = 1$  liegen dargestellt.

Aus (26) folgt für das Linienelement auf der Kugel

$$(27) \quad d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 + d\tau^2 = \pi^2 \left( \frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2} \right)^2 dt^2 + 4 \frac{dx^2 + dy^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}.$$

Nun sind die geodätischen Linien auf der Kugel gegeben durch die grössten Kreise, deren Gleichungen geschrieben werden können:

$$\begin{aligned} \zeta &= \alpha \xi + \beta \eta \\ \tau &= \gamma \xi + \delta \eta; \end{aligned}$$

<sup>(1)</sup> a. u. O. p. 204.



hierbei bedeuten  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  Integrationskonstanten. Mit Hülfe von (26) findet man hierauf:

$$\frac{2x}{1-x^2-y^2} = \alpha \cos \pi t + \beta \sin \pi t$$

$$\frac{2y}{1-x^2-y^2} = \gamma \cos \pi t + \delta \sin \pi t.$$

Setzt man

$$(28) \quad \begin{cases} \alpha \cos \pi t + \beta \sin \pi t = A \\ \gamma \cos \pi t + \delta \sin \pi t = B \\ 1 - x^2 - y^2 = \lambda, \end{cases}$$

so folgt aus den vorhergehenden Gleichungen

$$\begin{cases} 2x = \lambda A, & 2y = \lambda B \\ \frac{4(1-\lambda)}{\lambda^2} = A^2 + B^2 \end{cases}$$

und hieraus

$$(29) \quad x = \frac{A}{1 + \sqrt{1 + A^2 + B^2}}, \quad y = \frac{B}{1 + \sqrt{1 + A^2 + B^2}}.$$

Wir setzen jetzt, ähnlich wie im § 28

$$x_1 = x \cos \pi t + y \sin \pi t, \quad x_2 = x \sin \pi t - y \cos \pi t$$

und erhalten aus (28) und (29) für die allgemeine Gleichung der Extremalen

$$(30) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \frac{(\alpha + \delta) + (\alpha - \delta) \cos 2\pi t + (\beta + \gamma) \sin 2\pi t}{1 + \sqrt{1 + \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}{2} + \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2}{2} \cos 2\pi t + (\alpha\beta + \gamma\delta) \sin 2\pi t}} \\ x_2 = \frac{1}{2} \frac{(\beta - \gamma) - (\beta + \gamma) \cos 2\pi t + (\alpha - \delta) \sin 2\pi t}{1 + \sqrt{1 + \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}{2} + \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2}{2} \cos 2\pi t + (\alpha\beta + \gamma\delta) \sin 2\pi t}}. \end{cases}$$

Die Funktion unter dem Integral des transformierten Variationsproblems lautet:

$$(31) \quad f = \frac{\sqrt{\pi^2(1-x_1^2-x_2^2)^2 + 4((x_1' + \pi x_2)^2 + (x_2' - \pi x_1)^2)}}{1+x_1^2+x_2^2}.$$

Dieses Variationsproblem hat nach (30) lauter periodische Extremalen mit der Periode Eins und auf jeder Extremalen sind die konjugierten Punkte genau

um eine Periode voneinander entfernt. Der Wert des Integrals längs einer Extremalen zwischen zwei aufeinanderfolgenden konjugierten Punkten ist beständig gleich  $\pi$ .

Das Variationsproblem

$$f^* = (1 + (x_1^2 + x_2^2)^2)f$$

besitzt nun auf der  $t$ -Achse dieselbe Variationsgleichung wie (31); hier sind also wieder die konjugierten Punkte um eine Periode voneinander entfernt. Für jede periodische Vergleichskurve, die nicht mit der  $t$ -Achse zusammenfällt, ist aber der Wert  $J$  des Kurvenintegrals über eine Periode genommen grösser als  $I_0$ .

*München, den 5<sup>ten</sup> Februar 1925.*

---

# Sui gruppi transitivi. Totalità delle sostituzioni permutabili con tutte quelle di un dato gruppo.

Memoria di PACIFICO MAZZONI (a Bari).

1. In una nota pubblicata nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (nel 1923), mi occupai di alcune questioni sui gruppi transitivi di sostituzioni; tra l'altro, determinai la totalità delle sostituzioni permutabili con tutte quelle di un dato gruppo transitivo (problema che era stato risolto dal JORDAN nel solo caso di gruppi transitivi *regolari*).

Nella presente nota risolvo il problema per un gruppo qualunque di sostituzioni. In una prima parte, ritorno sui gruppi transitivi, per completare e dimostrare alcune proprietà che in quella nota avevo soltanto enunciate; nella seconda parte considero anche i gruppi intransitivi.

Premetto alcune ovvie considerazioni.

Dato un gruppo  $G$  transitivo di sostituzioni sopra  $n$  lettere  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , quelle sostituzioni di  $G$  che lasciano ferma una data lettera  $a_1$  formano un sottogruppo  $\Gamma_1$  di  $G$ . Siccome  $G$  è transitivo, vi sarà qualche sostituzione  $g_i$  che porterà la lettera  $a_1$  in un'altra prefissata  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ); e, com'è noto, si potrà scrivere il quadro seguente di  $G$  rispetto a  $\Gamma_1$ :

$$(1) \quad G = (\Gamma_1, g_1; \Gamma_1, g_2; \dots; \Gamma_1, g_n),$$

dove  $g_1 = 1$ , e nella riga  $i$ .<sup>ma</sup>  $\Gamma_1 g_i$  si troveranno tutte e sole le sostituzioni di  $G$  che portano  $a_1$  in  $a_i$  (per  $i = 1, 2, \dots, n$ ). Osserviamo:

*Il gruppo trasformato  $g_i^{-1} \Gamma_1 g_i = \Gamma_i$  è costituito da tutte e sole quelle sostituzioni di  $G$  che non spostano la lettera  $a_i$ ; e ciò qualunque sia  $i = 1, 2, \dots, n$ .*

Infatti se  $\gamma$  è una sostituzione qualunque di  $\Gamma_1$ , la trasformata  $g_i^{-1} \gamma g_i$  lascia ferma  $a_i$ . Viceversa, se una sostituzione  $g$  di  $G$  non sposta  $a_i$ , la trasformata  $g_i g g_i^{-1}$  lascerà ferma  $a_1$ , e dovrà coincidere con una sostituzione  $\gamma$  di  $\Gamma_1$ : segue che  $g = g_i^{-1} \gamma g_i$ , ossia che  $g$  appartiene a  $\Gamma_i$ . c. d. d.

*È evidente che tutte le sostituzioni della riga  $i$ .<sup>ma</sup> del quadro (1) trasformano pure  $\Gamma_1$  in  $\Gamma_i$ .*

Ora se il gruppo  $\Gamma_1$  coincide con qualcuno dei gruppi affini  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ , ad esempio con  $\Gamma_i$ , allora  $\Gamma_1$ , oltre a lasciar invariata  $a_1$ , lascia immutata anche  $a_i$ . E se invece  $\Gamma_1$  non coincide con  $\Gamma_i$ , allora il massimo sottogruppo comune a  $\Gamma_1$  e a  $\Gamma_i$  sarà precisamente quel sottogruppo di  $G$  che lascia ferme insieme  $a_1$  e  $a_i$ .

*In ogni caso, il massimo sottogruppo comune a  $\Gamma_1$  e ai suoi affini in  $G$  è l'identità (che lascia ferme tutte le lettere  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ).*

2. Ciò premesso, supponiamo che in generale  $\Gamma_1$  lasci ferme certe  $r$  lettere, che possiamo supporre sieno  $a_1, a_2, \dots, a_r$ . Allora i gruppi affini  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_r$  coincidono, ma sono diversi dai rimanenti  $\Gamma_{r+1}; \dots; \Gamma_n$ . Dimostriamo che ha luogo il teorema:

« Dato un gruppo transitivo qualunque  $G$  di sostituzioni sopra le  $n$  lettere  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , se  $\Gamma_1$  è quel suo sottogruppo che lascia ferma  $a_1$ , e se in generale  $\Gamma_1$  lascia ferme  $r$  lettere  $a_1, a_2, \dots, a_r$ , e sposta tutte le altre, indicato con  $I$  il massimo sottogruppo di  $G$  che contiene  $\Gamma_1$  come sottogruppo invariante, questo gruppo  $I$  è formato da tutte quelle sostituzioni di  $G$  che portano la lettera  $a_1$  nelle lettere  $a_1, a_2, \dots, a_r$ , cioè è formato dalle sostituzioni contenute nelle prime  $r$  righe del quadro (1) di  $G$  rispetto a  $\Gamma_1$ . Il numero  $r$  è un divisore di  $n$  ».

Infatti  $I$  è costituito da quelle sostituzioni di  $G$  che trasformano  $\Gamma_1$  in  $\Gamma_1$  stesso; esse sono precisamente le sostituzioni delle prime  $r$  righe del quadro (1) (le quali trasformano  $\Gamma_1$  in  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \dots = \Gamma_r$ ). Inoltre se l'ordine di  $\Gamma_1$  è  $q$ , l'ordine di  $G$  è  $qn$  e quello di  $I$  è  $qr$ ; onde segue che  $r$  è un divisore di  $n$ . c. d. d.

Segue che « ha luogo il quadro seguente, di  $I$  rispetto a  $\Gamma_1$  »:

$$(2) \quad I = (\Gamma_1 g_1; \Gamma_1 g_2; \dots; \Gamma_1 g_r).$$

Aggiungiamo che « le sostituzioni di  $I$  non fanno altro che scambiare tra loro le lettere  $a_1, a_2, \dots, a_r$ , che ne costituiscono dunque un sistema di « transitività ».

3. « Se  $a_i = a_{i_1}$  indica una qualunque delle  $r$  lettere  $a_1, a_2, \dots, a_r$ , lasciate ferme da  $\Gamma_1$ , le generatrici  $g_1, g_2, \dots, g_n$  del quadro (1) portano la lettera  $a_{i_1}$  rispettivamente in certe lettere  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}$ , che sono le stesse  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , in altro ordine ».

Infatti  $\Gamma_1$  si può anche riguardare come il sottogruppo di  $G$  che lascia ferma  $a_{i_1}$ , (dato che  $\Gamma_1$  coincide con  $\Gamma_{i_1}$ ; cioè  $\Gamma_1$  si trova nelle stesse condizioni

rispetto ad  $a_i$  e ad  $a_i$ ; e perciò nella riga s.<sup>ma</sup> del quadro (1) si troveranno tutte e sole le sostituzioni che portano  $a_i = a_{i_1}$  in una stessa lettera  $a_{i_s}$  (N. 1).

Ora possiamo dimostrare direttamente un teorema fondamentale, che nella nota citata veniva dedotto come caso particolare di un altro teorema.

*Se G è un gruppo transitivo di sostituzioni sulle lettere  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , e  $\Gamma_1$  è quel suo sottogruppo che ne lascia ferma una lettera, se  $\Gamma_1$  lascia ferme r lettere, allora esistono precisamente r sostituzioni distinte sopra  $a_1, a_2, \dots, a_n$  che sieno permutabili con tutte quelle di G: esse formano un gruppo K, e sono della forma*

$$(3) \quad S_i = \begin{pmatrix} a_{i_1}, & a_{i_2}, & \dots, & a_{i_n} \\ a_1, & a_2, & \dots, & a_n \end{pmatrix},$$

essendo  $a_{i_1}$  una delle suddette r lettere,  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}$  essendo quelle in cui  $a_{i_1}$  è portata rispettivamente dalle moltiplicatrici  $g_1, g_2, \dots, g_n$  del quadro (1) di G rispetto a  $\Gamma_1$ .

Dimostriamo dapprima che la sostituzione  $S_i$  è permutabile con tutte le sostituzioni di G. Supponiamo che una sostituzione qualunque  $g$  di G porti  $a_k$  in  $a_s$ ; la trasformata  $S_i^{-1}gS_i$  porterà  $a_{i_k}$  in  $a_{i_s}$ . Bisogna provare che anche la  $g$  porta  $a_{i_k}$  in  $a_{i_s}$ .

Infatti la  $g_k g$  porta  $a_i$  in  $a_s$ , e deve trovarsi nella riga s.<sup>ma</sup> del quadro (1); sarà dunque  $g_k g = \gamma g_s$ . Segue che  $g = g_k^{-1} \gamma g_s$ . Ma quest'ultima sostituzione porta precisamente  $a_{i_k}$  in  $a_{i_s}$  (perchè  $g_k^{-1}$  porta  $a_{i_k}$  in  $a_{i_1}$ , la  $\gamma$  lascia ferma  $a_{i_1}$ , e la  $g_s$  porta  $a_{i_1}$  in  $a_{i_s}$ ); e dunque pure  $g$  porta  $a_{i_k}$  in  $a_{i_s}$ . E siccome  $a_k$  è una qualunque delle lettere  $a_1, \dots, a_n$ , anche  $a_{i_k}$  è poi una qualunque delle stesse lettere; e dunque le due sostituzioni  $S_i^{-1}gS_i$  e  $g$  coincidono. c. d. d.

Resta da dimostrare che  $S_i$  è l'unica sostituzione sulle lettere  $a_1, a_2, \dots, a_n$  che porti  $a_i$  in  $a_{i_1}$  e sia permutabile con tutte quelle di  $G$ .

Sia  $S$  infatti una sostituzione permutabile con tutte quelle di  $G$ . Anzitutto  $S$  deve portare  $a_i$  in una certa lettera  $a_t = a_{i_1}$  compresa tra  $a_1, a_2, \dots, a_r$  (poichè in caso contrario tutte le sostituzioni della forma  $S^{-1}\gamma S = \gamma$  lascierebbero ferma una lettera diversa da  $a_1, \dots, a_r$ ). Ora, dovendo essere  $S^{-1}g_k S = g_k$ , si ricava  $S = g_k^{-1} S g_k$ . Ma questa sostituzione porta  $a_k$  in  $a_{i_k}$ , qualunque sia  $k$  (<sup>1</sup>); e dunque la  $S$  coincide precisamente con la  $S_i$ .

In conclusione, le r sostituzioni  $S_1, S_2, \dots, S_r$  sono tutte e sole quelle

(<sup>1</sup>) La  $g_k^{-1}$  porta  $a_k$  in  $a_1$ , la  $S$  porta per ipotesi  $a_1$  in  $a_i = a_{i_1}$ , e la  $g_k$  porta  $a_{i_1}$  in  $a_{i_k}$ ; dunque  $g_k^{-1} S g_k$  porta  $a_k$  in  $a_{i_k}$ .

domandate, aventi la proprietà di essere permutabili con tutte le sostituzioni di  $G$ . Esse formano evidentemente un gruppo.

4. Il gruppo  $K$  formato dalle  $r$  sostituzioni  $S_1, S_2, \dots, S_r$  permutabili con tutte quelle di un gruppo transitivo  $G$ , è oloedricamente isomorfo al gruppo complementare  $I|\Gamma_1$ , essendo  $I$  il massimo sottogruppo di  $G$  che contenga  $\Gamma_1$  come sottogruppo invariante. Inoltre  $K$  è anche oloedricamente isomorfo a un certo sottogruppo di  $G$ .

Anzitutto osserviamo che siccome  $\Gamma_1$  è invariante in  $I$ , il quadro (2) di  $I$  rispetto a  $\Gamma_1$  si può scrivere nei due modi seguenti:

$$(2) \quad I = (\Gamma_1 g_1; \Gamma_1 g_2; \dots; \Gamma_1 g_r),$$

e

$$(2') \quad I = (g_1 \Gamma_1; g_2 \Gamma_1; \dots; g_r \Gamma_1);$$

in altre parole: se  $i$  è uno dei numeri  $1, 2, \dots, r$ , la totalità delle operazioni della forma  $\gamma g_i$  coincide con la totalità delle operazioni della forma  $g_i \gamma'$  ( $\gamma$  e  $\gamma'$  rappresentando operazioni di  $\Gamma_1$ ) <sup>(2)</sup>.

Ora se  $g_i$  è una delle moltiplicatrici  $g_1, g_2, \dots, g_r$ , moltiplicando a sinistra per  $g_i$  tutte le operazioni di  $I$ , le righe del quadro (2') vengono a permutarsi secondo la sostituzione corrispondente  $\lambda_i$  del gruppo complementare *sinistrorso*  $\Lambda = I|\Gamma_1$  <sup>(3)</sup>. Facciamo corrispondere alla sostituzione  $S_i$  data dalla (3) (e considerata al n. 3) questa sostituzione  $\lambda_i$  sulle righe del quadro (2'), e dimostriamo che la corrispondenza così stabilita è una relazione d'isomorfismo oloedrico tra i due gruppi  $K$  e  $\Lambda$ .

Intanto, siccome  $\Gamma_1$  è invariante in  $I$ , il gruppo complementare  $I|\Gamma_1$  è di ordine  $r$ , e le sue sostituzioni  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  corrispondono biunivocamente a  $g_1, g_2, \dots, g_r$ ; dimodochè la corrispondenza tra le sostituzioni  $S_1, S_2, \dots, S_r$  del gruppo  $K$  e le sostituzioni  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  del gruppo  $\Lambda$  è biunivoca. Facciamo vedere che al prodotto  $S_k S_i$  corrisponde  $\lambda_k \lambda_i$ .

Infatti  $S_k$  porta  $a_i$  in  $a_{k_1} = a_k$ , mentre  $S_i$  porta  $a_k$  in  $a_{i_k}$ ; ondè  $S_k S_i$  porta  $a_i$  in  $a_{i_k}$  (lettera pure compresa tra  $a_1, a_2, \dots, a_r$ ); e sarà  $S_k S_i = S_{i_k}$ . D'altra parte  $\lambda_k$  porta  $g_i$  in  $g_k$ , mentre  $\lambda_i$  porta  $g_k$  in  $g_{i_k}$  (o se si vuole, porta le sostituzioni della riga  $k$ .<sup>ma</sup> del quadro (2') in quelle della riga  $i_k$ .<sup>ma</sup>) <sup>(4)</sup>;

<sup>(2)</sup> Infatti da  $g_i^{-1} \gamma g_i = \gamma'$  si ricava  $\gamma g_i = g_i \gamma'$ .

<sup>(3)</sup> Sui gruppi complementari v. L. BIANCHI: *Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche secondo Galois*. (Pisa, Spoerri ed., 1900).

<sup>(4)</sup> La  $\lambda_i$  porta  $g_k$  in  $g_i g_k$ . Ma  $g_i g_k$  porta la lettera  $a_1$  in  $a_{i_k}$ , e perciò  $g_i g_k$  si trova nella riga  $i_k$ .<sup>ma</sup> del quadro (2), o del quadro (2').

e dunque la  $\lambda_k \lambda_i$  porta le operazioni della 1<sup>a</sup> riga di (2') in quelle della riga  $i_k$ .<sup>ma</sup>, e perciò  $\lambda_k \lambda_i$  coincide con  $\lambda_{i_k}$ . Dunque a  $S_k S_i = S_{i_k}$  corrisponde  $\lambda_k \lambda_i = \lambda_{i_k}$ , e perciò  $K$  è oloedricamente isomorfo al gruppo complementare sinistrorso  $I|\Gamma_1$ .

Ma quello sinistrorso è a sua volta oloedricamente isomorfo al gruppo complementare destrorso  $I|\Gamma_1$  (5); la proprietà è dunque dimostrata.

Per dimostrare infine che  $K$  e  $\Lambda = I|\Gamma_1$  sono alla loro volta oloedricamente isomorfi a un sottogruppo di  $G$ , osserviamo che alle operazioni  $g_1, g_2, \dots, g_r$  corrispondono nel gruppo complementare sinistrorso  $G|\Gamma_1$  certe sostituzioni diverse  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r$ , e che al prodotto  $g_i g_k$  corrisponde  $\delta_k \delta_i$ . Allora facciamo corrispondere alle sostituzioni  $S_i$  e  $\lambda_i$  la  $\delta_i$  (per  $i = 1, 2, \dots, r$ ): ad  $S_k S_i$  e a  $\lambda_k \lambda_i$  corrisponderà  $\delta_k \delta_i$  (poichè sia  $\lambda_k \lambda_i$  che  $\delta_k \delta_i$  portano  $g_i$  in  $g_i g_k$ ): dunque le  $r$  sostituzioni  $\delta_k, \dots, \delta_r$  formano un sottogruppo di  $G|\Gamma_1$  oloedricamente isomorfo a  $K$  e a  $\Lambda$ . E siccome  $G|\Gamma_1$  è a sua volta oloedricamente isomorfo a  $G$  (perchè il massimo sottogruppo comune a  $\Gamma_1$  e ai suoi affini in  $G$  è 1), dunque il teorema è completamente dimostrato.

5. Consideriamo alcuni casi particolari importanti. Se  $\Gamma_1$  si riduce a 1, allora  $G$  ha l'ordine eguale al numero  $n$  delle lettere, e si chiama *regolare*. Allora  $r$  diventa  $= n$ , il gruppo  $K$  diventa il cosiddetto *gruppo congiunto* di  $G$ , e si ritrova così un noto teorema di JORDAN, sulla totalità delle sostituzioni permutabili con tutte quelle del gruppo regolare  $G$ .

Se il gruppo  $G$  è più volte transitivo, allora  $\Gamma_1$  lascia ferma una sola lettera, cioè allora  $r$  si riduce  $= 1$ ; il gruppo  $K$  si riduce all'identità e  $I$  si riduce a  $\Gamma_1$ : cioè allora non esiste alcuna sostituzione sulle lettere  $a_1, a_2, \dots, a_n$  (tranne l'identità) che sia permutabile con tutte quante le sostituzioni di  $G$ , e non esiste alcuna sostituzione di  $G$  che trasformi  $\Gamma_1$  in sè stesso, all'infuori delle sostituzioni di  $\Gamma_1$  stesso.

Infatti allora l'ordine di  $G$  è della forma  $qn = pn(n - 1)$ , dove  $q$  è l'or-

(5) In generale, se  $G$  è un gruppo, e  $\Gamma$  un suo sottogruppo qualunque, dal quadro  $G = (\Gamma g_1; \Gamma g_2; \dots; \Gamma g_n)$  si ottiene evidentemente l'altro  $G = (g_1^{-1} \Gamma_1; g_2^{-1} \Gamma_1; \dots; g_n^{-1} \Gamma_1)$ , prendendo le inverse di tutte quante le operazioni del primo quadro (si pensi che se  $g = \gamma g_k$ , si ha  $g^{-1} = g_k^{-1} \gamma^{-1}$ ). Ora se si moltiplicano le operazioni del 1° quadro a destra per  $g_i$ , le sue  $n$  righe vengono a permutarsi allo stesso modo come si permutano le righe del 2° quadro, quando si moltiplicano tutte le sue operazioni a sinistra per  $g_i^{-1}$  (per il fatto che invece della sostituzione  $\gamma g_k g_i$  si viene a prendere l'inversa  $g_i^{-1} g_k^{-1} \gamma^{-1}$ ). Dunque i due gruppi complementari destrorso e sinistrorso  $G|\Gamma$  coincidono, se si pensano come gruppi di sostituzioni sulle righe dei due quadri considerati; e se invece si pensano come gruppi che agiscono sulle moltiplicatrici, allora dall'uno si ottiene l'altro, cambiando le moltiplicatrici  $g_1, g_2, \dots, g_n$  rispettivamente nelle altre  $g_1^{-1}, g_2^{-1}, \dots, g_n^{-1}$ .

dine di  $\Gamma_1$ , e  $p$  l'ordine del sottogruppo di  $G$  che lascia ferme due date lettere <sup>(6)</sup>. Dunque allora  $q = p(n - 1)$ , ed è  $q > p$ , appena  $n > 2$ . Dunque  $\Gamma_1$  non può lasciar ferme due lettere, e di conseguenza si hanno le altre proprietà sopra enunciate.

*Altrettanto accade, se  $G$  è un gruppo transitivo non regolare su un numero primo  $n$  di lettere.* c. d. d.

Infatti allora  $r$ , che è un divisore di  $n$  (V. n. 2), dovrà essere  $= 1$ , oppure  $= n$ . Ma non può essere  $r = n$ , perchè  $\Gamma_1$  non può ridursi all'identità (perchè  $G$  non è regolare); e dunque sarà  $r = 1$ ; ecc. c. d. d.

Tornando al caso generale; se  $K$  è il gruppo formato dalle  $r$  sostituzioni (3) sulle lettere  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , permutabili con tutte quelle di  $G$ , è facile vedere che « se una sostituzione  $S$  è permutabile con tutte quelle di  $G$ , allora o  $S$  agisce su lettere tutte diverse da  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , oppure  $S$  è il prodotto di una sostituzione di  $K$  per un'altra che agisce su lettere tutte diverse da  $a_1, \dots, a_n$  ».

6. Passiamo ora a risolvere il problema analogo per i gruppi intransitivi. Dato un gruppo  $H$  *intransitivo* qualunque di sostituzioni, cerchiamo la totalità delle sostituzioni permutabili con tutte quelle di  $H$ . Le lettere su cui  $H$  agisce si possono scomporre, com'è noto, in tanti sistemi di lettere

$$(4) \quad a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots; c_1, c_2, \dots; \text{ecc.},$$

detti sistemi di transitività, tali che le sostituzioni di  $H$  portano le lettere di un sistema in tutte e sole quelle dello stesso sistema. Una sostituzione  $h$  di  $H$  si può scomporre (in un modo unico) nel prodotto di una sostituzione  $g$  che agisce soltanto sulle lettere  $a_1, a_2, \dots$ , per una  $g'$  che agisce soltanto su  $b_1, b_2, \dots$ , per una  $g''$  che agisce soltanto su  $c_1, c_2, \dots$ ; ecc. La totalità di queste sostituzioni  $g$  forma un gruppo  $G$  transitivo sulle lettere  $a_1, a_2, \dots$ ; la totalità delle sostituzioni  $g'$  costituisce un altro  $G'$  transitivo sulle lettere  $b_1, b_2, \dots$ ; ecc.

Ora se  $k$  è una sostituzione sulle lettere  $a_1, a_2, \dots$  permutabile con tutte quelle di  $G$ , se  $k'$  è una sostituzione sulle lettere  $b_1, b_2, \dots$  permutabile con tutte quelle di  $G'$ , ecc., è evidente che il prodotto  $k \cdot k' \cdot k'' \dots$  sarà una sostituzione sulle lettere (4) permutabile con tutte quelle del gruppo dato  $H$ . Allora costruito (come al n. 3) il gruppo  $K$  formato dalla totalità delle sostituzioni sopra le lettere  $a_1, a_2, \dots$  che sieno permutabili con tutte quelle del gruppo

<sup>(6)</sup> V. BIANCHI: Op. cit., § 10.



transitivo  $G$ , formato analogamente il gruppo  $K'$  per  $G'$ , ecc., è evidente che il prodotto (diretto) dei gruppi  $K, K', K'' \dots$  è un gruppo di sostituzioni sulle lettere (4) permutabili con tutte quelle di  $H$ .

In generale però non si può dire che il prodotto  $(K, K', K'' \dots)$  esaurisca la totalità delle sostituzioni richieste, permutabili con tutte quelle di  $H$ . In alcuni casi vi sono altre sostituzioni che hanno la stessa proprietà.

7. Consideriamo infatti l'esempio seguente: Sia  $G$  un gruppo transitivo sulle lettere  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , e sieno  $b_1, b_2, \dots, b_n$  lettere diverse da  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Se si trasforma  $G$  con la sostituzione

$$\begin{pmatrix} b_1, b_2, \dots, b_n \\ a_1, a_2, \dots, a_n \end{pmatrix},$$

si ottiene un altro gruppo  $G'$ , simile a  $G$ , le cui sostituzioni si ottengono da quelle di  $G$ , cambiando le lettere  $a_1, \dots, a_n$  rispettivamente nelle altre  $b_1, \dots, b_n$ ; e  $G'$  sarà pure transitivo, come  $G$ . Ora se si moltiplica una sostituzione  $g$  di  $G$  per la trasformata  $g'$  di  $G'$ , e si considera la totalità dei prodotti  $gg'$  di due tali sostituzioni trasformate, questa totalità costituisce evidentemente un altro gruppo di sostituzioni  $H$ , *intransitivo*, i cui due sistemi di transitività sono  $a_1, a_2, \dots, a_n$  e  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . Orbene, per il gruppo  $H$  non è affatto vero che il prodotto  $(K, K')$  comprenda *tutte* le sostituzioni permutabili con quelle di  $H$ . Infatti ad esempio la sostituzione seguente

$$(5) \quad \begin{pmatrix} b_1, b_2, \dots, b_n, a_1, a_2, \dots, a_n \\ a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \end{pmatrix}$$

è pure permutabile con tutte quelle di  $H$ , poichè trasforma ogni  $g$  in  $g'$ , e  $g'$  in  $g$ , quindi trasforma ogni  $gg'$  in sè stessa.

E se  $\begin{pmatrix} a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n} \\ a_1, a_2, \dots, a_n \end{pmatrix} = k_i$  rappresenta una sostituzione generica di  $K$ , e  $\begin{pmatrix} b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_n} \\ b_1, b_2, \dots, b_n \end{pmatrix} = k'_j$  ne rappresenta una generica di  $K'$ , anche la sostituzione seguente:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n} \\ a_1, a_2, \dots, a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_n} \\ b_1, b_2, \dots, b_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1, b_2, \dots, b_n, a_1, a_2, \dots, a_n \\ a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \end{pmatrix} = \\ & = k_i k'_j \cdot \begin{pmatrix} b_1, \dots, b_n, a_1, \dots, a_n \\ a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

che possiamo scrivere :

$$\begin{pmatrix} b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_n}, & a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_n} \\ a_1, a_2, \dots, a_n, & b_1, b_2, \dots, b_n \end{pmatrix},$$

è permutabile con tutte quelle di  $H$ .

Per questo gruppo  $H$  che abbiamo considerato troviamo dunque non  $r^2$ , ma  $2r^2$  sostituzioni permutabili con tutte quelle di  $H$  stesso. Dimostriamo che non ve ne sono altre.

Infatti se una sostituzione  $S$  sulle lettere  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  è permutabile con ogni  $gg'$ , la  $S$  o scambia tra loro  $a_1, \dots, a_n$ , e quindi anche  $b_1, \dots, b_n$ , e quindi trasforma ogni  $g$  in sè stessa, e  $g'$  pure; oppure la  $S$  porta  $a_1, \dots, a_n$  nelle lettere  $b_1, \dots, b_n$ , e viceversa, trasformando allora ogni  $g$  in  $g'$ , e  $g'$  in  $g$  (7). Dunque la  $S$ , se non è una sostituzione del tipo

$$(6) \quad \begin{pmatrix} a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n} \\ a_1, a_2, \dots, a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_n} \\ b_1, b_2, \dots, b_n \end{pmatrix} = k_i k'_j,$$

è del tipo

$$(7) \quad \begin{pmatrix} b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_n}, & a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_n} \\ a_1, a_2, \dots, a_n, & b_1, b_2, \dots, b_n \end{pmatrix}.$$

Nel primo caso la  $S$  si trova nel prodotto  $(K, K')$ ; nel secondo caso essa si può ottenere moltiplicando qualcuna delle sostituzioni (6):  $k_i k'_j$  per la sostituzione (5):  $\begin{pmatrix} b_1, \dots, b_n, & a_1, \dots, a_n \\ a_1, \dots, a_n, & b_1, \dots, b_n \end{pmatrix}$  (8). c. d. d.

Se il gruppo intransitivo dato  $H$  ha due sistemi di transitività, allora il problema proposto è dunque risoluto; enunciamo il risultato ottenuto:

• Se  $H$  è un gruppo *intransitivo* di sostituzioni e le sue lettere si distribuiscono nei due sistemi seguenti di transitività:  $a_1, a_2, \dots, a_n$  e  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , per trovare la totalità delle sostituzioni (sulle stesse lettere) che sieno permutabili con tutte quelle di  $H$ , si scomponga ogni sostituzione di  $H$  nel prodotto di

(7) Non può avvenire che la  $S$  porti, ad es.,  $a_1$  in  $a_i$ , e  $a_2$  in  $b_k$ ; poichè, detta  $g$  una sostituzione del gruppo transitivo  $G$  la quale porti  $a_1$  in  $a_2$ , allora la  $S^{-1}gg'S = gg'$  porterebbe  $a_i$  in  $b_k$ : assurdo.

(8) Infatti se la  $S$  è del tipo (7) e trasforma ogni  $g$  in  $g'$ , e  $g'$  in  $g$ , allora il prodotto della  $S$  per la (5) è del tipo (6); e dovendo trasformare ogni  $g$  in sè stessa, e  $g'$  pure, detto prodotto sarà precisamente  $= k_i k'_j$ . Si ha dunque  $S \cdot \begin{pmatrix} b_1, \dots, b_n, & a_1, \dots, a_n \\ a_1, \dots, a_n, & b_1, \dots, b_n \end{pmatrix} = k_i k'_j$ , da cui segue  $S = k_i k'_j \cdot \begin{pmatrix} b_1, \dots, b_n, & a_1, \dots, a_n \\ a_1, \dots, a_n, & b_1, \dots, b_n \end{pmatrix}$ . c. d. d.

« una  $g$  che agisca sulle lettere  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , per un'altra  $g'$  che agisca sulle  
 « lettere  $b_1, b_2, \dots, b_m$ , e si consideri il gruppo transitivo  $G$  formato dalla totalità  
 « delle sostituzioni  $g$  e il gruppo  $G'$  costituito dalla totalità delle  $g'$ ; si consideri  
 « inoltre il gruppo  $K$  formato dalle  $r$  sostituzioni (sulle lettere  $a_1, \dots, a_n$ ) permuta-  
 « bili con tutte quelle di  $G$  e il gruppo  $K'$  formato dalle  $s$  sostituzioni permutabili  
 « con tutte quelle di  $G'$ : orbene, le sostituzioni richieste, permutabili con tutte  
 « quelle del gruppo dato  $H$  sono precisamente tutte e sole quelle del prodotto  
 « diretto  $(K, K')$ , di ordine  $rs$ , tranne nel solo caso che  $G$  e  $G'$  sieno due gruppi  
 « trasformati l'uno dell'altro, e che ogni sostituzione di  $H$  sia il prodotto di  
 « una  $g$  di  $G$  per la relativa trasformata di  $G'$ : nel quale caso le sostituzi-  
 « zioni richieste sono invece in numero di  $2r^2$ , e sono date dalle sostituzioni  
 « di  $(K, K')$  e dai prodotti di queste ultime per una sostituzione del tipo

$$\begin{pmatrix} b_1, b_2, \dots, b_n, & a_1, a_2, \dots, a_n \\ a_1, a_2, \dots, a_n, & b_1, b_2, \dots, b_n \end{pmatrix}$$

« la quale trasforma ogni  $g$  nella relativa  $g'$  e viceversa (cioè trasforma  $G$   
 « in  $G'$ , e viceversa) »<sup>(9)</sup>.

Per assicurarsi infine se i due gruppi transitivi  $G$  e  $G'$  sono trasformati l'uno dell'altro (o, come si dice, sono simili), può servire il teorema seguente, dimostrato nel lavoro citato al n. 1.

« Se  $G$  e  $G'$  sono due gruppi transitivi, se  $\Gamma$  è il sottogruppo di  $G$  che  
 « lascia ferma una sua lettera, e  $\Gamma'$  quello di  $G'$  che ne lascia ferma una  
 « lettera, se vi è una relazione d'isomorfismo oloedrico tra  $G$  e  $G'$  in cui a  
 « ogni sostituzione di  $G$  ne corrisponda una di  $\Gamma'$ , e viceversa, allora  $G$  e  $G'$   
 « sono simili, cioè trasformati l'uno dell'altro per mezzo di una certa sostituzi-  
 « one che porta le lettere  $a_1, a_2, \dots, a_n$  dell'uno nelle lettere  $b_1, b_2, \dots, b_n$   
 « dell'altro. E se  $r$  è il numero delle lettere lasciate ferme da  $\Gamma$  o da  $\Gamma'$ , esi-  
 « stono precisamente  $r$  sostituzioni del tipo

$$\begin{pmatrix} b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_n} \\ a_1, a_2, \dots, a_n \end{pmatrix}$$

« le quali trasformano ogni sostituzione di  $G$  nella corrispondente di  $G'$ . Da  
 « una di queste si ottengono poi le altre, moltiplicandola per le varie sostituzi-  
 « zioni del solito gruppo  $K'$  ».

<sup>(9)</sup> È ovvio che in tal caso deve essere  $n = m$ , e che se occorre, bisogna mutare opportunamente l'ordine delle lettere  $b_1, \dots, b_n$ ; inoltre che non vi è altro caso possibile.

8. È facile estendere queste considerazioni al caso generale. Così se il gruppo transitivo  $G$  si trasforma con la sostituzione  $\begin{pmatrix} b_1, b_2, \dots, b_n \\ a_1, a_2, \dots, a_n \end{pmatrix}$  in  $G'$ , e se  $G'$  a sua volta si trasforma in  $G''$  con la sostituzione  $\begin{pmatrix} c_1, c_2, \dots, c_n \\ b_1, b_2, \dots, b_n \end{pmatrix}$ , considerando la totalità dei prodotti  $gg'g''$  di ogni sostituzione  $g$  di  $G$  per la propria trasformata  $g'$  di  $G'$  e per la trasformata  $g''$  di  $G''$ , si ottiene un gruppo intransitivo  $H$  sulle lettere  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n$ . Orbene le sostituzioni (su queste lettere) che sieno permutabili con tutte quelle di  $H$  si ottengono (tutte e sole) moltiplicando quelle del solito gruppo  $(K, K', K'')$  successivamente per le 6 sostituzioni seguenti:

$$1; \begin{pmatrix} b_1, \dots, b_n, a_1, \dots, a_n \\ a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} c_1, \dots, c_n, a_1, \dots, a_n \\ a_1, \dots, a_n, c_1, \dots, c_n \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} c_1, \dots, c_n, b_1, \dots, b_n \\ b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n, a_1, \dots, a_n \\ a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} c_1, \dots, c_n, b_1, \dots, b_n, a_1, \dots, a_n \\ a_1, \dots, a_n, c_1, \dots, c_n, b_1, \dots, b_n \end{pmatrix}.$$

Tutte queste sostituzioni formano un gruppo di ordine  $6 \cdot 3 = 1^3 \cdot 3!$  <sup>(10)</sup>.

Analogamente, se i gruppi trasformati sono quattro  $G, G', G'', G'''$ , allora le sostituzioni richieste sono in numero  $1^4 \cdot 4!$  <sup>(11)</sup>. E così via.

9. Ora possiamo enunciare il teorema finale. Considerato un gruppo intransitivo qualunque  $H$ , e i suoi sistemi di transitività (4), considerati i soliti gruppi transitivi  $G, G', G'', \dots$  di cui al n. 6, e i relativi gruppi  $K, K', K'', \dots$ , allora se due qualunque di questi gruppi  $G, G', G'', \dots$  non sono mai trasformati l'uno dell'altro (il che accade certamente se essi non sono oloedricamente isomorfi, o se agiscono su lettere in numero diverso), allora le sostituzioni sulle lettere (4) che sieno permutabili con tutte quelle di  $H$  sono tutte e sole quelle del prodotto  $(K, K', K'', \dots)$ .

<sup>(10)</sup> Queste sostituzioni si possono indicare simbolicamente così:  $\begin{pmatrix} abc \\ abc \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} bac \\ abc \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} cba \\ abc \end{pmatrix};$   
 $\begin{pmatrix} acb \\ abc \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} bca \\ abc \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} cab \\ abc \end{pmatrix}.$

<sup>(11)</sup> Indicando infatti brevemente le sostituzioni richieste coi simboli  $\begin{pmatrix} abcd \\ abcd \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} bacd \\ abcd \end{pmatrix};$   
 $\begin{pmatrix} acbd \\ abcd \end{pmatrix}; \dots$ ; si vede che tali simboli sono in numero di  $4!$ , e che le sostituzioni domandate sono in numero di  $1^4 \cdot 4!$  c. d. d.

---

Se invece due di questi gruppi, ad esempio  $G$  e  $G'$ , sono simili tra loro, ma non simili ai rimanenti gruppi, e se ogni sostituzione di  $H$  contiene il prodotto di una  $g$  di  $G$  per la relativa trasformata  $g'$  di  $G'$ , allora oltre alle sostituzioni di  $(K, K', K'', \dots)$  vi sono pure i prodotti di queste ultime per una sostituzione del tipo (5) che trasforma  $G$  in  $G'$  e viceversa, e il numero delle sostituzioni domandate allora raddoppia. Se invece tre dei gruppi  $G, G', G'', \dots$  sono simili tra loro, ecc., le sostituzioni richieste si ottengono in modo analogo, e il loro numero è uguale all'ordine di  $(K, K', K'', \dots)$ , moltiplicato per 3! E così in generale, se si presentano diverse coppie di gruppi simili, o diversi sistemi di gruppi simili.

Il problema di costruire le sostituzioni permutabili con tutte quelle di un dato gruppo (transitivo o intransitivo) è così completamente risolto.

*Bari, luglio 1924.*

---



---

Il giorno 22 giugno 1925 moriva in Gottinga il grande matematico

## FELIX KLEIN

Una commemorazione dell'illustre Estinto verrà pubblicata in un prossimo fascicolo degli « Annali ».

---

Il giorno 6 agosto 1925 moriva a Bologna l'illustre

## GREGORIO RICCI CURBASTRO

professore nella R. Università di Padova, fondatore del Calcolo differenziale assoluto, di cui tanto si è giovata la teoria matematica della relatività. Anche di Lui verrà pubblicata negli « Annali » una commemorazione.

---





## INDICE DEL TOMO II DELLA SERIE 4<sup>a</sup>

---

G. LORIA: L'opera geometrica di Corrado Segre . . . . .	Pag. 1
R. CALAPSO: Sulle congruenze cicliche. . . . .	» 23
A. KORN: Ueber die Lösung der zweiten Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie . . . . .	» 43
A. COMESSATTI: Sulle varietà abeliane reali . . . . .	» 67
G. J. RÉMOUNDOS: Sur un cas d'élimination et l'extension aux fonctions algébroides du théorème de M. Picard . . . . .	» 107
G. VITALI: Sulla definizione di integrale delle funzioni di una variabile . . . . .	» 111
L. AMOROSO: Ricerche intorno alla curva dei redditi . . . . .	» 123
H. JONAS: Ricerche sulle trasformazioni delle superficie applicabili sul paraboloido iperbolico equilatero . . . . .	» 161
M. PIAZZOLLA-BELOCH: Costruzioni di curve sghembe aventi il massimo numero di circuiti . . . . .	» 203
R. ARIANO: Deformazioni finite di sistemi continui . . . . .	» 217
M. PICONE: Sui metodi di sommazione delle serie . . . . .	» 263
C. CARATHÉODORY: Ueber geschlossene Extremalen und periodische Variationsprobleme in der Ebene und im Raume . . . . .	» 297
P. MAZZONI: Sui gruppi transitivi. Totalità delle sostituzioni permutabili con tutte quelle di un dato gruppo . . . . .	» 321
<i>Indice</i> . . . . .	» 335

---