

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

COURS
D'ASTRONOMIE

PAR

H. ANDOYER

Professeur à la Faculté des Sciences

PREMIÈRE PARTIE

ASTRONOMIE THÉORIQUE

PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN

LIBRAIRE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE

6, RUE DE LA SORBONNE, 6

1906

COURS D'ASTRONOMIE

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

COURS
D'ASTRONOMIE

PAR

H. ANDOYER

Professeur à la Faculté des Sciences

PREMIÈRE PARTIE

ASTRONOMIE THÉORIQUE

PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN

LIBRAIRE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE

6, RUE DE LA SORBONNE, 6

1906

Cours d'Astronomie

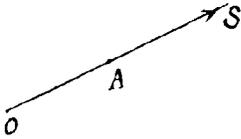
1^{ère} Partie

Astronomie Théorique

Chapitre I Trigonométrie Sphérique

L'étude analytique de la géométrie des directions issues d'un même point O , a une importance capitale en Astronomie.

Décrivons une sphère, de rayon quelconque, autour du point O comme centre : ce sera la sphère céleste, de centre O . Une direction quelconque, OS , coupe cette sphère en un point A ; et réciproquement chaque point A de la sphère définit une direction, celle du vecteur OA . Nous sommes donc amenés à étudier analytiquement les figures sphériques, c'est-à-dire à la Trigonométrie Sphérique.

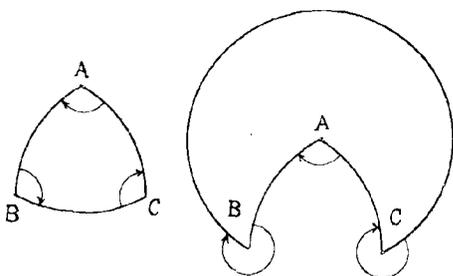


Triangle Sphérique. — Soient A, B, C , trois points quelconques de la sphère, dont nous prendrons le rayon comme unité. Joignons ces points deux à deux par des arcs de grand cercle quelconques, pouvant dépasser la longueur d'un grand cercle, si l'on veut. On forme ainsi une figure que nous nommerons d'une façon générale *triangle sphérique*. Ses côtés de ce triangle $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, sont les longueurs des arcs tracés BC, CA, AB , prises d'ailleurs positivement ou négativement, et cela comme on voudra, pour chacun.

Choisissons maintenant, pour un observateur placé suivant un rayon de la sphère, les pieds au centre O , la tête à l'infini, de façon qu'il regarde la surface extérieure de la sphère (et nous dessinerons toujours les figures sphériques

comme vu et ainsi extérieurement), un sens de rotation arbitraire, mais qui restera le même pour un triangle déterminé.

L'Angle A du triangle sphérique ABC est alors l'un quelconque des angles que l'on décrit, dans le sens choisi, pour amener le côté AC tracé, ou son prolongement, (suivant que b est positif ou négatif), sur le côté tracé AB , ou son prolongement, (suivant que c est positif ou négatif). Les angles B et C sont définis de la même façon, en permutant circulairement les lettres A, B, C , dans la définition de l'angle A .



En faisant abstraction des multiples de 2π , on voit que trois points A, B, C , déterminent huit triangles sphériques différents, dont chacun a deux systèmes d'éléments. En effet:

1° On peut changer tous les angles de signe, en changeant le sens choisi;

2° on peut changer le signe d'un côté a et augmenter de π les angles adjacents B et C . Ainsi sur les figures précédentes, les côtés étant positifs, on voit que a a été remplacé par $2\pi - a$, ou ce qui revient au même, par $-a$, et que B et C ont été augmentés de π , les sommets et les autres éléments n'ayant pas changé.

Relations fondamentales, ou du premier ordre, entre les éléments d'un triangle sphérique.

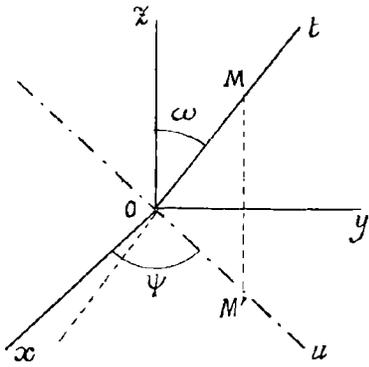
Trois éléments d'un triangle sphérique déterminent (peut-être avec une certaine ambiguïté) les trois autres. Donc, entre quatre éléments quelconques d'un triangle sphérique, existe une relation et une seule (distincte). Il existe un nombre de ces relations égal au nombre des combinaisons de 6 quantités 4 à 4, soit 15. Elles sont de quatre types différents, savoir:

- (I) trois entre les trois côtés et un angle,
- (II) trois entre les trois angles et un côté,
- (III) trois entre deux côtés et les deux angles opposés,
- (IV) six entre deux côtés, l'angle compris, et l'angle opposé à l'un d'eux.

Il est clair que ces relations ne sont distinctes qu'au nombre de trois.

Entre cinq éléments d'un triangle sphérique, on peut trouver une infinité de relations: ce qui peut nous fournir celles qui sont utiles.

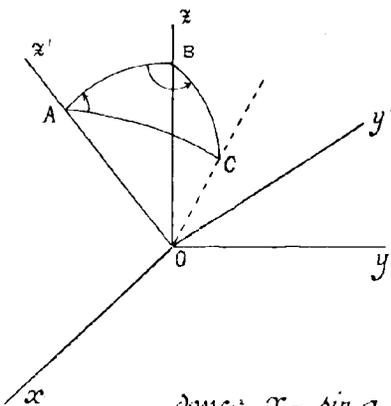
Avant de procéder à la recherche des 15 relations fondamentales, nous ferons la remarque suivante :



Soient trois axes rectangulaires Ox, y, z , et un point M de coordonnées x, y, z . Menons la droite OM , et choisissons sur cette droite un sens positif, Ot ; projetons M en M' sur le plan des xy , et sur la droite OM' , choisissons un sens positif Ou . Soit alors r le segment OM ; ω , l'angle que fait Oz avec Ot , compté dans le plan Ozu de Oz vers Ou ; ψ , l'angle que fait Ox avec Ou , compté dans le plan Oxy de Ox vers Oy . On aura toujours

$$x = r \sin \omega \cos \psi, \quad y = r \sin \omega \sin \psi, \quad z = r \cos \omega.$$

Considérons maintenant un triangle sphérique ABC , et prenons les rayons OB, OA , comme axes Oz, Oz' ; choisissons Ox perpendiculaire au plan Oz, z' , de façon que le côté c soit décrit pour un observateur placé sur Ox de B vers A dans le sens de rotation choisi, ou dans le sens contraire, suivant qu'il est positif ou négatif. Achèverons enfin avec Oy et Oy' deux trièdres trirectangles $Oxyz, Oxy'z'$ orientés dans le sens choisi, c'est-à-dire que l'observateur placé sur Ox , voit Oy ou Oy' décrire l'angle $+\frac{\pi}{2}$ dans le sens choisi, pour venir s'appliquer sur Oz ou Oz' .



Le rayon de la sphère étant l'unité, et le rayon OC étant la direction positive de l'axe qui porte le segment \overline{OC} , on obtient immédiatement les coordonnées du point C par rapport aux axes $Oxyz$, en faisant dans les formules de la remarque précédente

$$r = 1, \quad \omega = a, \quad \psi = B - \frac{\pi}{2};$$

$$\text{donc: } x = \sin a \sin B, \quad y = -\sin a \cos B, \quad z = \cos a.$$

Si de même x', y', z' sont les coordonnées de C par rapport aux axes $Oxy'z'$, on doit faire

$$r = 1, \quad \omega = b, \quad \psi = \frac{\pi}{2} - A$$

d'où $x' = \sin b \sin A$, $y' = \sin b \cos A$, $z' = \cos b$.

Mais d'après les formules bien connues du changement de coordonnées rectangulaires dans le plan, on a :

$$x = x', \quad y = y' \cos c - z' \sin c, \quad z = y' \sin c + z' \cos c.$$

Par suite, il vient :

$$(I) \quad \begin{cases} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \sin a \sin B = \sin b \sin A, \\ \sin a \cos B = \sin c \cos b - \sin b \cos c \cos A. \end{cases}$$

Ce système de formules, dit système de Gauss, est fondamental en Astronomie : il convient de savoir l'appliquer sans la moindre hésitation.

Les trois relations (I) ne dépendent que de cinq éléments, ne sauraient être distinctes : en effet, la somme des carrés des premiers membres, comme celle des carrés des seconds, vaut l'unité.

La première des formules (I) fournit, après permutation des lettres, les trois relations du type (I) :

$$(I) \quad \begin{cases} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B, \\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \end{cases}$$

De même la seconde des formules (I) fournit les trois relations du type (II) que l'on peut écrire sous la forme :

$$(II) \quad \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

La troisième des formules (I) fournit six relations entre cinq éléments qu'il est inutile d'écrire.

Si dans ces dernières, nous remplaçons $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$, par les quantités proportionnelles $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$, on obtient six nouvelles relations entre cinq éléments, du type :

$$(2) \quad \sin A \cos B = \sin C \cos b - \sin B \cos A \cos c.$$

Permutant dans cette dernière B et C, b et c, on a :

$$(2') \quad \sin A \cos C = \sin B \cos c - \sin C \cos A \cos b;$$

entre (2) et (2') éliminons $\sin C \cos b$; il vient :

$$\sin A \cos A \cos B + \sin A \cos C = \sin B \cos c (1 - \cos^2 A),$$

c'est-à-dire après division par $\sin A$:

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c ;$$

en permutant les lettres, on a les trois relations du type (II):

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} \cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a , \\ \cos B = -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b , \\ \cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c . \end{array} \right.$$

Enfin, éliminons $\sin a$ entre les deux dernières formules (I);

$$\text{on a} \quad \cotg B = \frac{\sin c \cotg b}{\sin A} - \cos c \cotg A ,$$

ce qui par permutation des lettres, fournit les six formules du type IV:

$$(IV) \left\{ \begin{array}{l} \cos a \cos B = \sin a \cotg c - \sin B \cotg C , \\ \cos b \cos A = \sin b \cotg c - \sin A \cotg C , \\ \cos b \cos C = \sin b \cotg a - \sin C \cotg A , \\ \cos c \cos B = \sin c \cotg a - \sin B \cotg A , \\ \cos c \cos A = \sin c \cotg b - \sin A \cotg B , \\ \cos a \cos C = \sin a \cotg b - \sin C \cotg B . \end{array} \right.$$

On vérifiera sans peine que les formules que nous venons d'obtenir sont invariantes par rapport aux transformations définies plus haut.

On constate aussi sans peine une certaine corrélation entre les côtés et les angles : ceci correspond à l'existence du triangle polaire.

On peut remplacer simultanément a, b, c, A, B, C , par $\pi - A, \pi - B, \pi - C, \pi - a, \pi - b, \pi - c$. Par cette substitution, les systèmes (I) et (II) s'échangent, tandis que les systèmes (III) et (IV) se conservent.

Une autre transformation légitime, qui est encore en évidence sur les formules, consiste à changer b, c, B, C simultanément en $\pi - b, \pi - c, \pi - B, \pi - C$: géométriquement, ceci revient à considérer le triangle $A'BC$, A' étant diamétralement opposé à A sur la sphère.

Les relations précédentes entre les éléments d'un triangle sphérique sont rationnelles, et ne contiennent que les lignes trigonométriques des éléments eux-mêmes : ce sont les relations du premier ordre.

Il est facile de s'assurer que l'ambiguïté qu'elles comportent correspond exactement à celle que comporte la définition que nous avons donnée du triangle sphérique.

Proposons-nous en effet de résoudre un triangle sphérique, connaissant trois éléments quelconques, en nous servant seulement des formules fondamentales. Il y a six cas possibles; mais la considération du triangle polaire permet de les réduire à trois.

1^o On donne a, b, c .

Les formules (I) donnent $\cos A, \cos B, \cos C$; et définissent par suite les angles A, B, C , au signe près, (et à un multiple de 2π près, toujours).

Mais les formules (III) montrent qu'une fois le signe de A fixé, celui de B et celui de C sont par là-même déterminés. Ceci correspond bien à la définition des angles A, B, C , connaissant les trois côtés a, b, c .

2^o On donne b, c, A .

La première formule (I) donne a au signe près; une fois ce signe fixé, les deux autres formules (I) et les formules (III) donnent B et C sans ambiguïté; on peut aussi employer certaines formules (IV).

3^o On donne a, b, A .

La première formule (I) donne deux valeurs pour c ; on peut prendre l'une et l'autre et achever comme plus haut.

On peut encore observer que les formules (I), en restreignant leur généralité à l'aide de (III), entraînent toutes les autres relations.

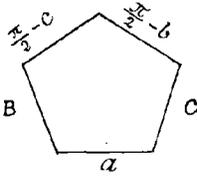
En effet de (I), on peut tirer seulement

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \pm \frac{\sin B}{\sin b} = \pm \frac{\sin C}{\sin c}$$

Triangles rectangles. — Un triangle rectangle est celui dans lequel un angle A est égal à $\frac{\pi}{2}$. Ici, A mis de côté, deux éléments déterminent les trois autres, et par suite, il existe dix relations entre les cinq éléments a, b, c, B, C pris trois à trois. Ce sont les dix relations qui contiennent A , parmi les quinze relations fondamentales (I), (II), (III), (IV). On peut les écrire sous la forme :

$$(V) \left\{ \begin{array}{l} \cos a = \cos b \cos c = \cotg B \cotg C, \\ \sin b = \sin A \sin B = \tg c \cotg C, \\ \sin c = \sin a \sin C = \tg b \cotg B, \\ \cos B = \cos b \sin C = \cotg a \tg c, \\ \cos C = \cos c \sin B = \cotg a \tg b. \end{array} \right.$$

Pour retrouver ces formules, on peut appliquer la règle mnémorique suivante: Sur les côtés d'un pentagone, écrivons successivement les éléments $a, B, \frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - b, C$, comme le montre la figure.



Alors:

Le cosinus d'un côté quelconque de ce pentagone est égal :

1° au produit des sinus des deux côtés opposés ;

2° au produit des cotangentes des deux

côtés adjacents.

On traiterait de la même façon les triangles rectilatères, dans lesquels un côté, α , est égal $\bar{\alpha} + \frac{\pi}{2}$.

Relations du second ordre. — Les relations du second ordre, entre les éléments d'un triangle sphérique, sont celles où figurent les lignes trigonométriques des moitiés des éléments. Leur importance est due surtout à la facilité qu'elles offrent pour le calcul logarithmique.

$$\text{On a : } \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

$$\text{d'où : } 1 + \cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{\cos a - \cos (b+c)}{\sin b \sin c} = \frac{2 \sin \frac{a+b+c}{2} \sin \frac{b+c-a}{2}}{\sin b \sin c},$$

$$1 - \cos A = 2 \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{\cos (b-c) - \cos a}{\sin b \sin c} = \frac{2 \sin \frac{a-b+c}{2} \sin \frac{a+b-c}{2}}{\sin b \sin c};$$

si donc, on fait $\alpha + b + c = 2 p$,

$$\text{on a : } \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin p \sin (p-a)}{\sin b \sin c}, \quad \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin (p-b) \sin (p-c)}{\sin b \sin c},$$

$$\text{d'où } \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin (p-b) \sin (p-c)}{\sin p \sin (p-a)}.$$

$$\text{Si l'on fait } k = + \sqrt{\frac{\sin (p-a) \sin (p-b) \sin (p-c)}{\sin p}},$$

on peut donc écrire :

$$(3) \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{\varepsilon k}{\sin (p-a)}, \quad \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{\varepsilon' k}{\sin (p-b)}, \quad \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{\varepsilon'' k}{\sin (p-c)},$$

$\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ ayant pour valeur absolue l'unité.

$$\text{Mais on a : } \sin A = 2 \cos^2 \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2},$$

et par suite :

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{2 \varepsilon k \sin p}{\sin a \sin b \sin c} ;$$

Donc, à cause des relations (III), on a $\varepsilon = \varepsilon' = \varepsilon''$, et il est manifeste que l'on ne peut diminuer davantage l'ambiguïté.

Changeons α, \dots, A, \dots en $\pi - A, \dots, \pi - \alpha, \dots$; et posons:

$$\sigma = A + B + C - \pi ,$$

de sorte que σ est l'excès sphérique du triangle ABC.

On aura l'ensemble de formules :

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin(B - \frac{\sigma}{2}) \sin(C - \frac{\sigma}{2})}{\sin B \sin C} , \quad \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\sigma}{2} \sin(A - \frac{\sigma}{2})}{\sin B \sin C} , \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \varepsilon' \frac{\sin(A - \frac{\sigma}{2})}{k'} , \dots \\ k' = + \sqrt{\frac{\sin(A - \frac{\sigma}{2}) \sin(B - \frac{\sigma}{2}) \sin(C - \frac{\sigma}{2})}{\sin \frac{\sigma}{2}}} , \end{array} \right.$$

ε' ayant pour valeur absolue l'unité, et ne changeant pas quand on passe de α à b ou c .

Remarquons maintenant que l'on a :

$$\cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2} = \frac{k^2 \sin^4 p}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c} ,$$

et par suite $\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{\eta k \sin^2 p}{\sin a \sin b \sin c} ,$

η ayant pour valeur absolue l'unité, sans que l'on puisse préciser.

De la même façon la transformation déjà employée donnera :

$$\sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} = \frac{\eta' k' \sin^2 \frac{\sigma}{2}}{\sin A \sin B \sin C} ,$$

η' ayant pour valeur absolue l'unité.

En combinant d'une façon évidente la première des formules précédentes avec les formules (3), et celles qui y conduisent,

$$\text{ou } \alpha : \frac{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2}} = \varepsilon \eta \frac{\sin p}{\sin a}, \quad \frac{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2}} = \varepsilon \eta \frac{\sin (p-a)}{\sin a},$$

$$\frac{\sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \varepsilon \eta \frac{\sin (p-c)}{\sin a}, \quad \frac{\sin \frac{C}{2} \cos \frac{B}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \varepsilon \eta \frac{\sin (p-b)}{\sin a}.$$

d'où enfin :

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\cos \frac{B+C}{2}}{\sin \frac{A}{2}} = \varepsilon \eta \frac{\sin p - \sin (p-a)}{\sin a} = \varepsilon \eta \frac{\cos \frac{b+c}{2}}{\cos \frac{a}{2}}, \\ \frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{A}{2}} = \varepsilon \eta \frac{\sin p + \sin (p-a)}{\sin a} = \varepsilon \eta \frac{\sin \frac{b+c}{2}}{\sin \frac{a}{2}}, \\ \frac{\sin \frac{B+C}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \varepsilon \eta \frac{\sin (p-c) + \sin (p-b)}{\sin a} = \varepsilon \eta \frac{\cos \frac{b-c}{2}}{\cos \frac{a}{2}}, \\ \frac{\sin \frac{B-C}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \varepsilon \eta \frac{\sin (p-c) - \sin (p-b)}{\sin a} = \varepsilon \eta \frac{\sin \frac{b-c}{2}}{\sin \frac{a}{2}} \end{array} \right.$$

Ce sont les formules de Delambre, dites aussi formules de Gauss : mais la priorité de publication appartient à Delambre (1807).

On remarquera, pour s'en souvenir, que dans les premiers membres, où figurent les angles, on a le rapport de deux lignes différentes, tandis que dans les seconds membres, où figurent les côtés, on a le rapport de deux lignes semblables ; de plus, relativement aux numérateurs, un signe + ou - dans l'un des membres correspond à une ligne cos ou sin dans l'autre.

Si l'on applique aux formules de Delambre la transformation déjà employée, qui change α en $\pi - A$, ... A en $\pi - a$, ... ε en ε' , η en η' on voit que ces formules ne subissent d'autre changement que celui de $\varepsilon \eta$ en $\varepsilon' \eta'$. On doit donc avoir $\varepsilon \eta = \varepsilon' \eta'$, et il est facile de vérifier qu'il n'existe pas d'autre relation entre les coefficients $\varepsilon, \varepsilon', \eta, \eta'$.

Les formules de Delambre conduisent par division aux analogies de Néper, qui ne contiennent aucun signe ambigu :

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{B+C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \frac{\cos \frac{b-c}{2}}{\cos \frac{b+c}{2}}, \operatorname{tg} \frac{b+c}{2} = \operatorname{tg} \frac{a}{2} \frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\cos \frac{B+C}{2}}, \\ \operatorname{tg} \frac{B-C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \frac{\sin \frac{b-c}{2}}{\sin \frac{b+c}{2}}, \operatorname{tg} \frac{b-c}{2} = \operatorname{tg} \frac{a}{2} \frac{\sin \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{B+C}{2}} \end{array} \right.$$

La souplesse de la Trigonométrie permet de multiplier à l'infini les formules utiles. En voici encore quelques-unes intéressant surtout l'excès sphérique. On a :

$$\begin{aligned} \cos \frac{\sigma}{2} &= \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B+C}{2} + \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B+C}{2} \\ &= \frac{\varepsilon \eta}{\cos \frac{a}{2}} \left(\cos \frac{b-c}{2} \cos^2 \frac{A}{2} + \cos \frac{b+c}{2} \sin^2 \frac{A}{2} \right) \\ &= \frac{\varepsilon \eta}{\cos \frac{a}{2}} \left(\cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2} + \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} \cos A \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{\sigma}{2} &= \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B+C}{2} - \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B+C}{2} \\ &= \frac{\varepsilon \eta}{\cos \frac{a}{2}} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} \sin A = \frac{\eta k \sin p}{2 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}; \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{b}{2} \operatorname{tg} \frac{c}{2} \sin A}{1 + \operatorname{tg} \frac{b}{2} \operatorname{tg} \frac{c}{2} \cos A}.$$

Dans la valeur de $\cos \frac{\sigma}{2}$ remplaçons $\cos A$ par $\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$,
on aura :

$$\begin{aligned} \cos \frac{\sigma}{2} &= \varepsilon \eta \frac{4 \cos^2 \frac{b}{2} \cos^2 \frac{c}{2} + \cos a - \cos b \cos c}{4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}} \\ &= \varepsilon \eta \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}} \\ &= \varepsilon \eta \frac{\cos^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{b}{2} + \cos^2 \frac{c}{2} - 1}{2 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}. \end{aligned}$$

Relations du troisième ordre. — Cette dernière formule conduit à d'importantes relations du troisième ordre, c'est-à-dire contenant les lignes trigonométriques des quarts des éléments.

En supposant $\varepsilon \eta = 1$, ce qu'on peut toujours réaliser, on a :

$$1 + \cos \frac{\sigma}{2} = 2 \cos^2 \frac{\sigma}{4} = \frac{2 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2} + \cos^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{b}{2} + \cos^2 \frac{c}{2} - 1}{2 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}},$$

d'où par un calcul connu,

$$\cos^2 \frac{\sigma}{4} = \frac{\cos \frac{p}{2} \cos \frac{p-a}{2} \cos \frac{p-b}{2} \cos \frac{p-c}{2}}{\cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}};$$

on obtiendra de même :

$$\sin^2 \frac{\sigma}{4} = \frac{\sin \frac{p}{2} \sin \frac{p-a}{2} \sin \frac{p-b}{2} \sin \frac{p-c}{2}}{\cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}},$$

et par suite, la remarquable formule de Simon L'Huilier

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\sigma}{4} = \operatorname{tg} \frac{p}{2} \operatorname{tg} \frac{p-a}{2} \operatorname{tg} \frac{p-b}{2} \operatorname{tg} \frac{p-c}{2}.$$

Changeant b, c, B, C en leurs suppléments, on a de nouvelles relations, dont nous n'écrirons que les suivantes :

$$\operatorname{tg} \left(A - \frac{\sigma}{2} \right) = \frac{\operatorname{cotg} \frac{b}{2} \operatorname{cotg} \frac{c}{2} \sin A}{1 + \operatorname{cotg} \frac{b}{2} \operatorname{cotg} \frac{c}{2} \cos A},$$

$$\operatorname{tg}^2 \left(\frac{A - \sigma}{2} \right) = \operatorname{cotg} \frac{p}{2} \operatorname{cotg} \frac{p-a}{2} \operatorname{tg} \frac{p-b}{2} \operatorname{tg} \frac{p-c}{2}.$$

Si enfin, on considère le triangle polaire de ABC , on aura de nouvelles relations, entre autres les suivantes :

$$\operatorname{tg}^2 \frac{p}{2} = \operatorname{tg} \frac{\sigma}{4} \operatorname{cotg} \left(\frac{A - \sigma}{2} \right) \operatorname{cotg} \left(\frac{B - \sigma}{2} \right) \operatorname{cotg} \left(\frac{C - \sigma}{2} \right),$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{p-a}{2} = \operatorname{tg} \frac{\sigma}{4} \operatorname{cotg} \left(\frac{A - \sigma}{2} \right) \operatorname{tg} \left(\frac{B - \sigma}{2} \right) \operatorname{tg} \left(\frac{C - \sigma}{2} \right),$$

qui résultent d'ailleurs immédiatement des précédentes.

Résolution des triangles sphériques. — Le cas des triangles rectangles ne demande aucune attention particulière. Au surplus, on

peut le faire rentrer dans le cas général, et nous avons déjà dit que les différents problèmes que l'on pouvait alors se proposer, se ramenaient à trois.

1^o On donne les trois côtés a, b, c .

On se servira alors avec avantage des formules (3); la condition de possibilité du problème est que la quantité k soit réelle.

Comme vérification, on peut user des formules (III).

On peut aussi employer les relations du troisième ordre qui donne $\operatorname{tg} \frac{\sigma}{2}$, $\operatorname{tg} \left(\frac{A-\sigma}{2} \right)$, ... et qui comportent une vérification par elles-mêmes; l'ambiguïté résultant des signes des radicaux sera facilement levée dans la pratique.

Si l'on avait besoin d'un seul angle, A , on pourrait bien souvent se contenter d'appliquer la première des formules (I).

2^o On donne deux côtés b, c et l'angle compris A .

On emploiera les formules de Delambre, en faisant $\varepsilon \eta = 1$, on écrira :

$$\cos \frac{a}{2} \sin \frac{B+C}{2} = \cos \frac{A}{2} \cos \frac{b-c}{2},$$

$$\cos \frac{a}{2} \cos \frac{B+C}{2} = \sin \frac{A}{2} \cos \frac{b+c}{2};$$

$$\sin \frac{a}{2} \sin \frac{B-C}{2} = \cos \frac{A}{2} \sin \frac{b-c}{2},$$

$$\sin \frac{a}{2} \cos \frac{B-C}{2} = \sin \frac{A}{2} \sin \frac{b+c}{2},$$

d'où l'on tirera $\operatorname{tg} \frac{B+C}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{B-C}{2}$, $\sin \frac{a}{2}$ et $\cos \frac{a}{2}$, enfin $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$, avec une vérification. Le problème est toujours possible.

Si l'on n'a besoin que de B et C , les analogies de Neper suffiront.

Si, comme il arrive souvent, on n'a besoin que de a et B , on utilisera le système (1) de Gauss, qui fournit $\operatorname{tg} B$, $\sin a$, $\cos a$ et par suite $\operatorname{tg} a$, avec une vérification.

Le plus souvent on dirige le calcul ainsi. On fait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos b = m \cos M, \\ \sin b \cos A = m \sin M; \end{array} \right.$$

on en déduit $\operatorname{tg} M$, et ensuite m . Alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos a = m \cos(c-M), \\ \sin a \sin B = \sin b \sin A, \\ \sin a \cos B = m \sin(c-M). \end{array} \right.$$

Une analogie de Néper permet la vérification du calcul. Si l'on n'avait besoin que de σ , on prendrait une des formules donnant $\operatorname{tg} \frac{\sigma}{2}$ ou $\operatorname{tg} \left(A - \frac{\sigma}{2} \right)$, établies plus haut.

3^e: On donne deux côtés a, b , et l'angle A opposé à l'un d'eux.

En général, en Astronomie, on n'a besoin alors que de c . On utilise la formule:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

qui, en déterminant m et M , comme dans le cas précédent, donne

$$\cos (c-M) = \frac{\cos a}{m}.$$

On en déduit deux valeurs pour c , dont aucune n'est à rejeter, si c n'est assujéti à aucune condition: pratiquement, il n'y a pas d'ambiguïté, en général.

La condition de possibilité du problème est $\cos^2 a < m^2$, ce qui revient à $\sin^2 a > \sin^2 b \sin^2 A$.

Si l'on a besoin des autres éléments, on achève comme dans l'un des cas précédents, ou bien on utilise les formules (III)

Il est d'ailleurs bien clair que les indications précédentes n'ont rien d'absolu: dans chaque cas particulier, on devra choisir les formules les plus convenables, en se réservant toujours une vérification.

Relations différentielles. — La résolution d'un triangle sphérique d'après les principes précédents suppose les trois éléments donnés exactement connus, et, par suite, les erreurs à craindre sont seulement celles qui résultent de l'emploi des tables: en augmentant la précision de ces dernières, on peut diminuer les erreurs autant qu'on le veut. Mais, pratiquement, les données ne sont jamais exactes, et il importe de savoir quelles modifications on doit faire subir aux éléments calculés, si les éléments donnés subissent eux-mêmes des corrections déterminées. Cette connaissance permettra d'ailleurs de fixer la précision avec laquelle le calcul doit être effectué: il est inutile de calculer à 0", 1 près si l'on craint, par suite des données, des erreurs d'une demi-minute.

Pour arriver facilement au but poursuivi, on considère toutes les corrections, tant données qu'inconnues, comme deux quantités très petites dont on peut négliger les carrés et les produits deux à deux: tout se passe alors comme s'il s'agissait

de différentielles, et la solution du problème est fournie par la simple différentiation des formules fondamentales. On aura ainsi autant de relations différentielles entre les corrections de quatre éléments, qu'il y a de formules fondamentales, soit quinze, et ces formules seront de quatre types différents, correspondant aux types (I), (II), (III), (IV).

$$1^{\circ} \text{ On a } \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

on déduit, en affectant la caractéristique d à la correction d'un élément :

$$\begin{aligned} \sin a \, da &= (\sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A) \, db \\ &+ (\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A) \, dc \\ &+ (\sin b \sin c \sin A) \, dA, \end{aligned}$$

$$\text{ou (I) } da = \cos c \cdot db + \cos B \cdot dc + \left\{ \begin{array}{l} \sin b \sin c \\ \sin c \sin B \end{array} \right\} dA,$$

les quantités entre accolades pouvant être substituées l'une à l'autre.

2^o On a de même, en partant de (II)

$$(II) \, dA = -\cos c \, dB - \cos b \, dC + \left\{ \begin{array}{l} \sin b \sin c \\ \sin c \sin B \end{array} \right\} da.$$

3^o La différentiation logarithmique de la relation

$$\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

$$\text{donne (III) } \cotg b \cdot db - \cotg B \cdot dB = \cotg c \cdot dc - \cotg C \cdot dC.$$

4^o En partant de

$$\cos b \cos c = \sin b \cotg a - \sin c \cotg A,$$

on a :

$$\begin{aligned} &(\sin b \cos c + \cos b \cotg a) \, db + (\cos b \sin c - \cos c \cotg A) \, dC \\ &= \frac{\sin b}{\sin^2 a} \, da - \frac{\sin c}{\sin^2 A} \, dA; \end{aligned}$$

multipliant par $\sin a \sin A$ on peut écrire :

$$(IV) \cos c \sin A \cdot db + \sin a \cos B \cdot dC = \sin B \cdot da - \sin c \, dA.$$

On a ainsi toutes les formules cherchées, et l'on remarquera que, pour les appliquer, il faut en général connaître.

tous les éléments du triangle envisagé, même ceux qui a priori ne sont pas nécessaires; ces derniers ne seront par suite calculés que d'une façon approchée. Mais il faut se souvenir que, pour appliquer légitimement ces formules, il faut que l'hypothèse qui a servi de point de départ soit vérifiée, c'est-à-dire que les quantités du second ordre, par rapport aux corrections, soient négligeables: les formules elles-mêmes montreront s'il en est ainsi.

Exemple: - Dans un triangle sphérique équilatéral, on a:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} = - \frac{\cos \frac{3A}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$$

et d'après (II)

$$da = \frac{1 + 2 \cos a}{\sin a \sin A} dA;$$

appliquons d'abord à $A = 90^\circ$; alors $a = 90^\circ$, $da = dA$; et en effet si l'on fait $A = 90^\circ 10'$, le calcul direct donne $a = 90^\circ 9' 58''$.

Faisons maintenant $A = 60^\circ 20'$, de sorte que $a = 11^\circ 28' 27''$, et $da = 17, 13 dA$. Si donc on prend $dA = \pm 10'$, il vient $da = \pm 2^\circ 51'$: le facteur de dA est grand, et da ne peut plus être considérée comme du même ordre que dA ; certainement l'erreur des formules différentielles doit être considérable, et on ne peut les utiliser que comme indication.

Et en effet:

pour $A = 60^\circ 30'$, on a $\alpha = 14^\circ 2' 7''$, $da = + 2^\circ 33' 40''$;

— $A = 60^\circ 10'$, on a $\alpha = 8^\circ 7' 25''$, $da = - 3^\circ 21' 2''$;

les vraies valeurs de da s'écartent sensiblement de la valeur calculée.

Triangles géodésiques sur la sphère. - Si les côtés d'un triangle sphérique sont a, b, c , rapportés au rayon R comme unité, leurs longueurs sont $\alpha = aR, \beta = bR, \gamma = cR$. Si α, β, γ restent fixes, tandis que R augmente, a, b, c diminuent, à la limite, si on fait R infini, a, b, c deviennent nuls, et le triangle devient plan.

La trigonométrie rectiligne doit donc résulter de la trigonométrie sphérique par un simple passage à la limite: c'est ce que nous allons montrer tout d'abord sur les formules fondamentales.

Celles-ci sont des quatre types.

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

$$\begin{aligned}\cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a, \\ \sin b \sin C &= \sin c \sin B, \\ \cos b \cos C &= \sin b \cotg a - \sin C \cotg A.\end{aligned}$$

Remplaçons a, b, c par $\frac{\alpha}{R}, \frac{\beta}{R}, \frac{\gamma}{R}$, et développons les deux membres de chacune de ces relations suivant les puissances décroissantes de R ; α, β, γ , restant fixes, A, B, C varient avec R , en tendant vers des limites A_0, B_0, C_0 , qui correspondent à R infini : les relations limites correspondantes s'obtiennent alors immédiatement, en égalant les coefficients de la plus grande puissance de R dans les deux membres, et remplaçant A, B, C par A_0, B_0, C_0 .

On a ainsi :

$$1^\circ \quad 1 - \frac{\alpha^2}{2R^2} + \dots = \left(1 - \frac{\beta^2}{2R^2} + \dots\right) \left(1 - \frac{\gamma^2}{2R^2} + \dots\right) + \left(\frac{\beta}{R} + \dots\right) \left(\frac{\gamma}{R} + \dots\right) \cos A,$$

$$\text{d'où} \quad \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos A_0.$$

$$2^\circ \quad \cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \left(1 - \frac{\alpha^2}{2R^2} + \dots\right),$$

$$\text{d'où} \quad \cos A_0 = -\cos B_0 \cos C_0 + \sin B_0 \sin C_0 = -\cos(B_0 + C_0),$$

et par suite, à cause des relations analogues,

$$A_0 + B_0 + C_0 = (2k + 1)\pi.$$

$$3^\circ \quad \left(\frac{\beta}{R} + \dots\right) \sin C = \left(\frac{\gamma}{R} + \dots\right) \sin B,$$

$$\text{d'où} \quad \beta \sin C_0 = \gamma \sin B_0.$$

$$4^\circ \quad (1 \dots) \cos C = \left(\frac{\beta}{R} + \dots\right) \left(\frac{\alpha}{R} + \dots\right) - \sin C \cotg A$$

$$\text{d'où} \quad \cos C_0 = \frac{\beta}{\alpha} - \sin C_0 \cotg A_0,$$

$$\text{ou} \quad \beta = \alpha \cos C_0 + \frac{\alpha \sin C_0}{\sin A_0} \cos A_0$$

$$\text{ou enfin} \quad \beta = \alpha \cos C_0 + \gamma \cos A_0.$$

On voit que nous avons bien retrouvé toutes les formules de la Trigonométrie plane formules qui auront la même généralité que celles de la trigonométrie sphérique, si l'on définit

un triangle rectiligne d'une façon générale. Mais nous nous bornerons, dans ce paragraphe, à la considération des triangles rectilignes et sphériques ordinaires, tels qu'on les envisage en Géométrie Élémentaire.

La surface S du triangle ABC est donnée, comme l'on sait, par σR^2 , où $\sigma = A + B + C - \pi$, excès sphérique. Or nous avons vu que :

$$\lg \frac{\sigma}{4} = \sqrt{\lg \frac{p}{2} \lg \frac{p-a}{2} \lg \frac{p-b}{2} \lg \frac{p-c}{2}},$$

de sorte que :

$$\frac{S}{4R^2} + \dots = \sqrt{\left(\frac{\varphi}{2R} + \dots\right) \left(\frac{\varphi-\alpha}{2R} + \dots\right) \left(\frac{\varphi-\beta}{2R} + \dots\right) \left(\frac{\varphi-\gamma}{2R} + \dots\right)},$$

en faisant $2\varphi = \alpha + \beta + \gamma$.

Si donc S tend vers S_0 quand R devient infini, on a :

$$S_0 = \sqrt{\varphi(\varphi-\alpha)(\varphi-\beta)(\varphi-\gamma)}.$$

À chaque formule de la trigonométrie sphérique, on peut faire correspondre de même une formule de trigonométrie plane.

Imaginons maintenant, que sans devenir infini, R devienne très grand par rapport à α, β, γ , de sorte que a, b, c sont très petits. Le triangle sphérique est alors voisin du triangle rectiligne limite, et il convient de profiter de ce fait, pour faciliter la résolution des questions qui se rapportent au triangle sphérique. Les calculs trigonométriques sur les petits arcs sont en effet pénibles, et d'autre part, il vaut mieux se servir des longueurs α, β, γ . C'est ce que l'on voit clairement sur les triangles géodésiques : si la Terre est supposée sphérique, un arc de 3° représente 333 km , les triangles géodésiques auront donc de très petits côtés α, b, c ; il vaut mieux les traiter comme des triangles rectilignes, quitte à faire ensuite de petites corrections, et cela d'autant plus que ce sont les longueurs α, β, γ , qui sont données directement.

Théorème de Legendre. — Gardant les notations précédentes, cherchons la différence $A - A_0$. On a :

$$\cos A_0 = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}, \quad \cos A = \frac{\cos a - \cos b - \cos c}{\sin b \sin c};$$

faisons :

$$u^2 = (\beta + \gamma)^2, \quad v^2 = (\beta - \gamma)^2,$$

et écrivons :

$$\cos A_0 = \frac{u^2 + v^2 - 2\alpha^2}{u^2 - v^2}, \quad \cos A = \frac{2 \cos a - \cos(b+c) - \cos(b-c)}{\cos(b-c) - \cos(b+c)},$$

d'où :

$$\cos A_0 - \cos A = \frac{(u^2 - \alpha^2) [\cos(b-c) - \cos a] - (\alpha^2 - v^2) [\cos a - \cos(b+c)]}{\frac{1}{2} (u^2 - v^2) [\cos(b-c) - \cos(b+c)]},$$

développant les cosinus en série, il vient :

$$\cos A_0 - \cos A = \frac{(u^2 - \alpha^2) \left(\frac{\alpha^2 - v^2}{2R^2} - \frac{\alpha^4 - v^4}{24R^4} + \frac{\alpha^6 - v^6}{720R^6} - \dots \right) - (\alpha^2 - v^2) \left(\frac{u^2 - \alpha^2}{2R^2} - \frac{u^4 - \alpha^4}{24R^4} + \frac{u^6 - \alpha^6}{720R^6} - \dots \right)}{2\beta\gamma \left(\frac{u^2 - v^2}{2R^2} - \frac{u^4 - v^4}{24R^4} + \dots \right)};$$

le numérateur est divisible par $(u^2 - \alpha^2)(\alpha^2 - v^2)(u^2 - v^2)$, et le dénominateur par $u^2 - v^2$; d'ailleurs, on a d'après une formule connue de Géométrie,

$$(u^2 - \alpha^2)(\alpha^2 - v^2) = 16S_0^2;$$

donc :

$$\cos A_0 - \cos A = \frac{2}{3} \frac{S_0^2}{\beta\gamma R^2} \frac{1 - \frac{u^2 + v^2 + \alpha^2}{30R^2} + \dots}{1 - \frac{u^2 + v^2}{12R^2} + \dots};$$

faisant la division, et remplaçant $u^2 + v^2$ par sa valeur, on a enfin :

$$\cos A_0 - \cos A = \frac{2}{3} \frac{S_0^2}{\beta\gamma R^2} \left(1 + \frac{3\beta^2 + 3\gamma^2 - \alpha^2}{30R^2} + \dots \right).$$

Si nous écrivons :

$$\cos A = \cos A_0 - h,$$

d'où :

$$A = \arccos [\cos A_0 - h],$$

la formule de Taylor donne, comme nous le verrons plus loin,

$$A = A_0 + \frac{h}{\sin A_0} - \frac{\cos A_0}{2 \sin^3 A_0} h^2 + \dots;$$

d'ailleurs, $\sin A_0 = \frac{2S_0}{\beta\gamma}$, de sorte que :

$$A - A_0 = \frac{S_0}{3R^2} \left(1 + \frac{3\beta^2 + 3\gamma^2 - \alpha^2}{30R^2} + \dots - \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{24R^2} - \dots \right)$$

et finalement :

$$A - A_0 = \frac{S_0}{3R^2} \left(1 + \frac{7\beta^2 + 7\gamma^2 + \alpha^2}{120R^2} + \dots \right);$$

le développement pourrait d'ailleurs être poussé aussi loin qu'on le voudrait.

On en déduit :

$$\sigma = A + B + C - \pi = \frac{S_0}{R^2} \left(1 + \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{24R^2} + \dots \right),$$

d'où :

$$S = S_0 \left(1 + \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{24R^2} + \dots \right),$$

et

$$A - A_0 = \frac{\sigma}{3} \left(1 + \frac{\beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha^2}{60R^2} + \dots \right).$$

Si l'on se borne aux premiers termes des développements, on a simplement :

$$\left\{ \begin{array}{l} S = S_0, \quad A - A_0 = \frac{\sigma}{3}, \\ \sigma = \frac{S_0}{R^2}, \quad B - B_0 = \frac{\sigma}{3}, \\ \quad \quad \quad \quad \quad C - C_0 = \frac{\sigma}{3}. \end{array} \right.$$

Ces résultats constituent ce que l'on appelle le Théorème de Legendre.

Voici comment on peut appliquer ce qui précède :

1° On a mesuré α, β, γ .

Alors on calcule A_0, B_0, C_0, S_0 , et les corrections sont immédiates.

Pour nous rendre compte de leur grandeur, faisons :

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{R}{20},$$

ce qui, à la surface de la Terre, correspond à un triangle équilatéral, dont le côté dépasse 300 km. On a en secondes d'arc :

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\sqrt{3}}{4 \times 400} \left(1 + \frac{1}{8 \times 400} + \dots \right) \times 206265'' , \\ &= 223'', 29 + 0'', 0698 + \dots \\ &= 223'', 36, \end{aligned}$$

et par suite : $A = B = C = 60^\circ + 74'', 15$.

On voit que l'application du simple théorème de Legendre donnerait une erreur bien peu sensible.

2° On a mesuré β, γ , et A .

Ce sont les angles A, B, C , eux-mêmes, en effet, qui sont mesurables directement.

Il faut avoir A_0 pour être ramené à la trigonométrie plane, et alors on achève comme plus haut.

On a les relations :

$$A_0 = A - \frac{S_0}{3R^2} \left(1 + \frac{7\beta^2 + 7\gamma^2 + \alpha^2}{120R^2} + \dots \right),$$

$$S_0 = \frac{\beta\gamma \sin A_0}{2}, \quad \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos A_0,$$

que l'on résout par approximations successives, et qui conduisent à :

$$A_0 = A - \frac{\beta\gamma \sin A}{6R^2} \left(1 + \frac{4\beta^2 + 4\gamma^2 - 11\beta\gamma \cos A}{60R^2} + \dots \right).$$

On opérera d'une façon analogue dans les autres cas possibles.

Quelques formules auxiliaires. — Il est souvent utile, ainsi, que nous venons de le voir, de substituer à des formules rigoureuses, des développements en série, rapidement convergents. Ces développements sont en général ordonnés par rapport aux puissances croissantes de petites quantités, et peuvent s'obtenir par la simple application de la formule de Taylor : il n'est pas nécessaire, d'ailleurs, que le développement suive une loi générale simple, facile à formuler, car les premiers termes seuls sont utiles.

Voici quelques exemples importants d'application fréquente.

1° Soit $\sin x = \sin \alpha + b$, b étant petit ;

on a $x = \arcsin (\sin \alpha + b)$;

faisons $\sin \alpha = t$; on a :

$$\cos \alpha \frac{d\alpha}{dt} = 1, \quad \text{donc} \quad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{\cos \alpha},$$

$$\cos \alpha \frac{d^2\alpha}{dt^2} - \sin \alpha \frac{d^2\alpha}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha},$$

$$\cos \alpha \frac{d^3\alpha}{dt^3} - 3 \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} \frac{d^2\alpha}{dt^2} - \cos \alpha \frac{d^3\alpha}{dt^3} = 0, \quad \frac{d^3\alpha}{dt^3} = \frac{1 + 3 \tan^2 \alpha}{\cos^3 \alpha},$$

..... ;

et par suite :

$$x = \alpha + \frac{h}{\cos \alpha} + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \frac{h^2}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{6} (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \alpha) \frac{h^3}{\cos^3 \alpha} + \dots ;$$

cette formule sera applicable si $\cos \alpha$ n'est pas trop petit.

2° Si $\cos x = \cos \alpha + h$,

on a de même :

$$x = \alpha - \frac{h}{\sin \alpha} - \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \alpha \frac{h^2}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{6} (1 + 3 \operatorname{cotg}^2 \alpha) \frac{h^3}{\sin^3 \alpha} \dots,$$

$\sin \alpha$ n'étant pas trop petit.

3° Soit à calculer x et α par les deux équations :

$$x \sin x = a \sin \alpha,$$

$$x \cos x = 1 + a \cos \alpha.$$

Le problème est toujours possible, et l'on peut, ce que nous ferons, supposer $x > 0$.

En faisant $i = \sqrt{-1}$, on a :

$$x (\cos x + i \sin x) = 1 + a (\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

Si donc le module de a est < 1 , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \log r + i (x + 2k\pi) &= a (\cos \alpha + i \sin \alpha) \\ &\quad - \frac{a^2}{2} (\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha) \\ &\quad + \frac{a^3}{3} (\cos 3\alpha + i \sin 3\alpha) \\ &\quad \dots \dots \dots \end{aligned}$$

D'après le développement en série de $\log(1+z)$, et la formule de Moivre ; $\log r$ désigne ici d'ailleurs le logarithme népérien arithmétique de r ; quant à k , c'est un entier convenablement choisi.

Puisque l'on a $|a| < 1$, on a $\cos \alpha > 0$, et par suite, on peut choisir x compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; dans ce cas, on a $k=0$, puisqu'il en est évidemment ainsi pour $a=0$, et que k ne peut pas varier brusquement.

Égalant alors séparément les parties réelles et imaginaires, on a :

$$x = a \sin \alpha - \frac{a^2}{2} \sin 2\alpha + \frac{a^3}{3} \sin 3\alpha - \dots,$$

$$\log r = a \cos \alpha - \frac{a^2}{2} \cos 2\alpha + \frac{a^3}{3} \cos 3\alpha - \dots$$

D'ailleurs, on peut écrire pour définir x et α :

$$\operatorname{tg} x = \frac{a \sin \alpha}{1 + a \cos \alpha} \quad \left(|x| < \frac{\pi}{2} \right), \quad \pi = \sqrt{1 + 2a \cos \alpha + a^2}$$

4° Soit à calculer x par la relation

$$\operatorname{tg} x = p \operatorname{tg} \alpha.$$

On a :

$$\operatorname{tg} (x - \alpha) = \frac{(p-1) \operatorname{tg} \alpha}{1 + p \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{(p-1) \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + p \sin^2 \alpha} = \frac{(p-1) \sin 2\alpha}{(p+1) - (p-1) \cos 2\alpha};$$

faisant $\frac{1-p}{1+p} = q$, il vient donc :

$$\operatorname{tg} (\alpha - x) = \frac{q \sin 2\alpha}{1 + q \cos 2\alpha};$$

supposons $|q| < 1$, c'est-à-dire $p > 0$, (dans le cas contraire, on pourrait changer α en $-\alpha$); alors on prend $|\alpha - x| < \frac{\pi}{2}$, et l'on a le développement très employé :

$$x = \alpha - q \sin 2\alpha + \frac{q^2}{2} \sin 4\alpha - \frac{q^3}{3} \sin 6\alpha + \dots$$

Si, comme il arrive souvent, $p = \cos \omega$, on a :

$$q = \frac{1 - \cos \omega}{1 + \cos \omega} = \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2},$$

et par suite :

$$x = \alpha - \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2} \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^4 \frac{\omega}{2} \sin 4\alpha - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^6 \frac{\omega}{2} \sin 6\alpha + \dots$$

Les développements précédents peuvent trouver leur application plus d'une fois en Trigonométrie sphérique, par exemple dans le calcul des analogies de Néper; etc.

— Chapitre II —

La Terre.

Objet du Cours. — L'objet principal de ce cours est l'étude des mouvements célestes apparents, c'est-à-dire tels que nous les voyons : savoir déterminer dans quelle direction se trouve un astre donné et quelles apparences il offre, à un instant donné, et dans un

lieu donné, tel est l'énoncé général du problème dont nous pourrions la solution.

Nous accepterons les notions habituelles de temps et d'espace absolus, telles qu'on les accepte en mécanique rationnelle; nous supposerons connus les mouvements des différents astres qui constituent l'Univers, tels que nous les enseigne la Mécanique Céleste, fondée sur le principe de la gravitation universelle. Enfin, nous nous appuyerons, toutes les fois qu'il sera nécessaire, sur les théories physiques proprement dites.

Connaissance des Temps. - La Connaissance des Temps est un recueil d'éphémérides, publié chaque année par le Bureau des Longitudes. Ce recueil contient tout ce qui est nécessaire pour la résolution pratique du problème général que nous nous sommes posé: c'est donc un instrument indispensable, dont il faut savoir se servir. L'usage de la Connaissance des Temps est un point capital, qui attirera toute notre attention; en même temps que le développement des théories astronomiques.

Les principaux recueils d'éphémérides, analogues à la Connaissance des Temps, et publiés à l'étranger sont:

Le Nautical Almanac, en Angleterre;

Le Berliner Astronomisches Jahrbuch, en Allemagne,

L'American Ephemeris, aux États-Unis.

La Terre. - Axe du monde - Pôles - Équateur. - La première question que nous avons à résoudre est évidemment de déterminer les éléments qui fixent la position du lieu d'observation à la surface de la Terre.

La Terre peut être assimilée, pour les usages astronomiques, à un corps solide, de forme pensiblement sphérique. Le mouvement de ce corps est déterminé par celui de son centre de gravité O , et par sa rotation autour d'un axe instantané OI , passant par O , et dit axe du monde.

L'axe du monde n'est pas absolument fixe par rapport à la Terre, mais il est très près de l'être: sa direction ne s'écarte de la position moyenne que d'une quantité qui paraît inférieure à $0''5$.

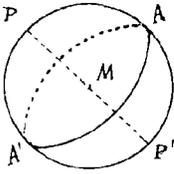
En d'autres termes, sur la surface de la terre, le pôle se déplace dans un cercle dont le rayon est inférieur à 15^m .

Nous supposerons toujours l'axe du monde OI , dirigé de telle façon, que la rotation de la Terre autour de OI , se fasse

dans le sens direct, c'est-à-dire de la droite vers la gauche.

C'est ce sens qui est toujours appelé direct en Astronomie; le sens contraire, de la gauche vers la droite, est dit rétrograde.

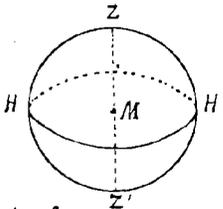
Si par le centre M d'une sphère quelconque, on mène une parallèle à OI , le point P où cette demi-droite perce la sphère en est le pôle boréal ou pôle Nord, ou encore simplement le pôle; le point diamétralement opposé, P' , est le pôle austral, ou pôle sud; $P'P$ est la ligne des pôles.



et austral.

L'équateur proprement dit est le plan mené par O perpendiculaire à OI . Sur une sphère quelconque de centre M , l'équateur est le grand cercle AA' dont le plan est parallèle à l'équateur proprement dit; il admet pour pôles sphériques les deux pôles boréal

Verticale. — En un point M de la Terre, il existe une direction parfaitement définie à chaque instant: c'est celle du fil à plomb, ou de la pesanteur ou gravité. C'est la verticale vraie ou géographique, ou encore astronomique; ou simplement la verticale; nous la supposerons toujours dirigée vers le haut, de sorte que la verticale descendante est la direction du mouvement relatif que prendrait un point matériel en repos relatif par rapport à la Terre, si on l'abandonnait à lui-même.



La verticale du point M rencontre la sphère céleste de centre M en un point Z , qui est le zénith; le point diamétralement opposé Z' est le nadir; le plan mené par M perpendiculairement à la verticale est l'horizon de M , HH' .

La verticale descendante est la direction de la résultante des deux forces qui sollicitent un point matériel en équilibre relatif en M , savoir: 1° l'attraction newtonienne des masses qui constituent le système du monde; 2° la force centrifuge due au mouvement absolu de la Terre elle-même. Cette force résultante est la pesanteur ou gravité. L'intensité de la pesanteur est déterminée par les observations du pendule.

La verticale ne saurait être, d'après ce qui précède, rigoureusement fixe par rapport à la Terre: mais des variations, comme celles de l'intensité de la pesanteur, peuvent être regardées comme absolument inconnues.

Surfaces de niveau. — Au champ de forces déterminé par la pesanteur,

correspondent des surfaces de niveau constamment normales à la force et des lignes de force constamment tangentes à la force. Ces surfaces et ces lignes ne sont pas rigoureusement fixes, mais subissent des perturbations très faibles, que nous négligeons, dues aux mouvements de la matière terrestre, et à l'action des astres extérieurs.

Les surfaces de niveau sont sensiblement sphériques.

Méridien. — Le méridien du lieu M est le plan qui contient la verticale et la ligne des pôles relatives à ce lieu. Le plus souvent, il est convenable d'orienter ce plan, en redonnant le nom de méridien à l'un des demi-plans limités par la ligne des pôles, soit par la verticale. Le méridien limité par la ligne des pôles contient toujours le zénith, mais non le nadir; le méridien limité par la verticale contient toujours le pôle austral, mais non le pôle boréal.

Points Cardinaux. — L'horizon et l'équateur du point M se coupent suivant une ligne perpendiculaire au méridien EW ; l'horizon et le méridien se coupent suivant une ligne NS perpendiculaire à EW . On choisit N ou point Nord, de façon que

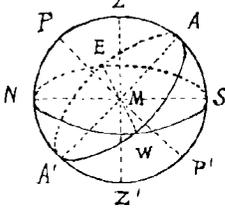


Fig. (a)

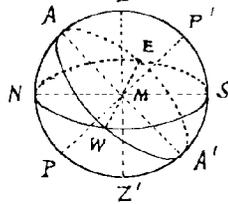


Fig. (b)

l'angle des directions MP et MN soit toujours aigu; S est alors le point Sud et est toujours dans le méridien limité par la verticale; les points E ou Est et W ou Ouest, sont disposés de façon que les quatre points cardinaux $NESEW$ se trouvent dans le sens rétrograde pour un observateur placé suivant MZ , les pieds en M .

L'équateur et le méridien se coupent suivant une ligne AA' perpendiculaire à EW ; nous placerons le point A de façon que l'angle des directions MZ et MA soit toujours aigu; il est donc toujours dans le méridien limité par la ligne des pôles.

Les deux figures (a) et (b) correspondent aux deux cas qui se présentent, suivant que l'angle de MP avec MZ est aigu ou obtus.

Pour définir un lieu à la surface de la Terre, il faut se donner trois éléments, la latitude, la longitude, l'altitude.

Latitude. — La latitude de M est l'angle AMZ de la verticale avec le plan de l'équateur, compté positivement ou négativement de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, suivant que l'angle de MP avec MZ est aigu ou obtus, c'est-à-dire encore, suivant que la verticale et la direction de l'axe du monde sont du même côté ou non de l'horizon.

L'angle de la verticale avec l'équateur est le même que celui de la ligne des pôles avec l'horizon ; la latitude est donc encore l'angle NMP , ou hauteur du pôle boréal, cette hauteur étant prise positivement ou négativement suivant que le pôle est au-dessus ou au-dessous de l'horizon. L'angle de la verticale avec la ligne des pôles, ZMP , compté de 0 à π est le complément de la latitude : c'est la colatitude. Nous emploierons toujours la latitude, φ .

Dans le cas de la figure (a), la latitude est positive ; dans le cas de la figure (b), elle est négative ; prise en valeur absolue, on la dit boréale ou Nord dans le premier cas, australe ou Sud dans le second.

Longitude. — La longitude de M est l'angle L que fait le méridien de M limité à la ligne des pôles avec le méridien (limité de la même façon) d'un lieu choisi arbitrairement, mais fixe, F , qui sera pour nous l'Observatoire de Paris. Cet angle est compté à partir du méridien de F dans le sens rétrograde, de 0 à 2π , ou ce qui revient au même de 0 à π vers l'Ouest, de 0 à $-\pi$, vers l'Est ; prise en valeur absolue, on la dit Occidentale ou Orientale suivant le cas.

Altitude. — Imaginons une surface de niveau particulière, choisie comme fondamentale, S_0 , et menons la ligne de force qui passe par le point M jusqu'à sa rencontre en M' avec S_0 ; la longueur $M'M$, comptée positivement ou négativement suivant que M est extérieur ou intérieur à S_0 est l'altitude du point M .

Géoiède. — On peut considérer la surface formée par le niveau moyen des mers comme une surface de niveau particulière, qui sera supposée prolongée sous les continents : en pillonnant ceux-ci de canaux en communication avec les mers, leur surface appartiendrait à la même surface de niveau. Par niveau moyen des mers, il faut d'ailleurs entendre celui qu'aurait l'eau si elle était en équilibre relatif, abstraction faite par conséquent des marées, des courants, des vents, etc. Cette surface idéale, mais de définition suffisamment nette cependant, est de niveau ; car la surface des eaux tranquilles est perpendiculaire à la verticale telle qu'elle a été définie.

Cette surface particulière est la surface mathématique de la Terre, ou le géoiède, d'après Listing.

En géodésie, c'est le géoiède qui sert de surface fondamentale de référence ; les altitudes rapportées au géoiède sont les altitudes proprement dites, comptées, comme on dit, au dessus du niveau de la mer.

La détermination du géoïde est l'objet de la géodésie.

Sur le géoïde les parallèles et les méridiens sont les lignes d'égalité latitude, ou d'égalité longitude : ce sont en général des courbes gauches

Ellipsoïde de révolution. — La géoïde s'écarte très peu de la forme d'un ellipsoïde de révolution aplati ayant pour centre le centre de gravité O de la Terre, pour axe de révolution l'axe du monde, supposé invariablement fixé à la Terre. Les demi-axes principaux de cet ellipsoïde, d'après Clarke, sont

$$a = \text{rayon équatorial} = 6378263^m,$$

$$b = \text{rayon polaire} = 6356521^m.$$

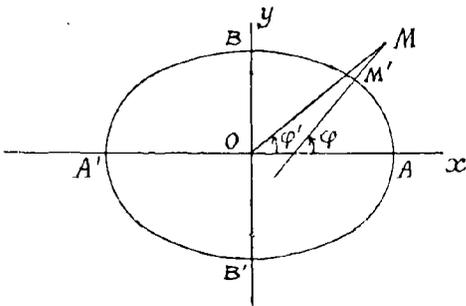
L'aplatissement α de cet ellipsoïde, c'est-à-dire le rapport $\frac{a-b}{a}$ a donc pour valeur $\frac{1}{293,5}$.

En chiffres ronds, la Terre est une sphère de 6370^m de rayon, et dans bien des cas on peut se borner à cette approximation.

Sur la sphère, comme sur l'ellipsoïde de révolution, les parallèles et les méridiens sont des lignes planes en évidence.

Pour les besoins de l'Astronomie, il est nécessaire de savoir fixer la position relative du centre O de la Terre et du lieu M d'observation.

On y arrive, avec une approximation largement suffisante, en supposant le centre de la Terre dans le plan méridien du point M et en adoptant pour la Terre la forme de l'ellipsoïde de révolution.



Son alors $AA'BB'$ l'ellipse méridienne de la Terre proportionnée à ses axes principaux Ox, Oy , et M' le point de cette ellipse qui a pour latitude, la latitude φ de M , c'est-à-dire que la normale en M' à l'ellipse fait avec l'axe Ox l'angle φ ; si

l'on prend sur cette normale, à partir de M' et dans le sens convexe une longueur $M'M$ égale à l'altitude du point donné M , on obtient une représentation suffisamment exacte du lieu d'observation

Latitude géocentrique. — Le rayon vecteur OM , prolongé dans le sens OM est la verticale géocentrique du point M , et définit le zénith géocentrique de M .

L'angle φ' que fait OM avec Ox est la latitude géocentrique

ou réduite de M . La distance OM , que nous représenterons par $\alpha \rho$, a étant le rayon équatorial OA , est la distance du point M au centre de la Terre.

Le point M est défini par ses coordonnées polaires φ' et ρ qu'il faut calculer en fonction de la latitude vraie φ , et de l'altitude h , ou par ses coordonnées rectangulaires

$$x = \alpha \rho \cos \varphi', \quad y = \alpha \rho \sin \varphi'.$$

Supposons d'abord l'altitude nulle; ψ étant un angle auxiliaire, on peut poser

$$x = a \cos \psi, \quad y = b \sin \psi,$$

b étant le rayon polaire égal à $\alpha(1-\alpha)$, où α désigne l'aplatissement. D'ailleurs :

$$-\frac{dx}{dy} = \frac{\operatorname{tg} \psi}{1-\alpha} = \operatorname{tg} \varphi,$$

puisque la normale fait l'angle φ avec Ox .

Donc

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \psi = (1-\alpha) \operatorname{tg} \varphi, \\ \frac{x}{a} = \rho \cos \varphi' = \cos \psi \\ \frac{y}{a} = \rho \sin \varphi' = (1-\alpha) \sin \psi; \end{cases}$$

ces formules résolvent la question proposée.

Il est souvent plus commode de se servir de développements en série, à cause de la petitesse de α .

On a d'abord :

$$\operatorname{tg} \varphi' = (1-\alpha) \operatorname{tg} \psi = (1-\alpha)^2 \operatorname{tg} \varphi;$$

puis :

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \cos^2 \varphi + (1-\alpha)^2 \sin^2 \varphi \\ &= \frac{1 + (1-\alpha)^4 \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + (1-\alpha)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \\ &= \frac{(1-\alpha)^4 + 1 + [1 - (1-\alpha)^4] \cos 2\varphi}{(1-\alpha)^2 + 1 + [1 - (1-\alpha)^2] \cos 2\varphi} \\ &= \frac{\left[\frac{1 + (1-\alpha)^2}{1 + (1-\alpha)} \right]^2 + \left[\frac{1 - (1-\alpha)^2}{1 + (1-\alpha)^2} \right]^2 + 2 \frac{1 - (1-\alpha)^2}{1 + (1-\alpha)^2} \cos 2\varphi}{\left[\frac{1 + (1-\alpha)^2}{1 + (1-\alpha)} \right]^2 + \left[\frac{1 - (1-\alpha)^2}{1 + (1-\alpha)} \right]^2 + 2 \frac{1 - (1-\alpha)^2}{1 + (1-\alpha)} \cos 2\varphi}. \end{aligned}$$

Soit alors

$$k = \frac{1-(1-\alpha)^2}{1+(1-\alpha)^2}, \quad k' = \frac{1-(1-\alpha)}{1+(1-\alpha)};$$

on a :

$$\rho = \frac{1+(1-\alpha)^2}{1+(1-\alpha)} \frac{\sqrt{1+2k \cos 2\varphi + k^2}}{\sqrt{1+2k' \cos 2\varphi + k'^2}}.$$

En appliquant à la détermination de φ' et de ρ les développements en série obtenus à la fin du chapitre précédent, il vient :

$$\varphi' = \varphi - k \sin 2\varphi + \frac{1}{2} k^2 \sin 4\varphi - \frac{1}{3} k^3 \sin 6\varphi + \dots,$$

$$\log_{10} \rho = \log_{10} \frac{1+(1-\alpha)^2}{1+(1-\alpha)} + M(k-k') \cos 2\varphi - \frac{M}{2}(k^2-k'^2) \cos 4\varphi + \dots;$$

dans cette dernière formule, où les logarithmes sont décimaux, M désigne le module de ces logarithmes.

Ces séries sont très convergentes, et d'un emploi commode. En prenant $\alpha = \frac{1}{293,5}$, on trouve en effet :

$$\varphi' = \varphi - 11'44'',0 \sin 2\varphi + 1'',20 \sin 4\varphi - \dots,$$

$$\log_{10} \rho = \bar{1}.9992608 + 0,0007411 \cos 2\varphi - 0,0000019 \cos 4\varphi + \dots$$

Ces calculs sont d'ailleurs facilités par l'emploi de tables que l'on trouve dans la *Connaissance des Temps*.

Le maximum de $\varphi - \varphi'$ a lieu à peu près pour $\varphi = 45^\circ$; c'est $11'44''$ environ; la différence $\varphi - \varphi'$ est donc toujours plus petite en valeur absolue que $12'$.

Voilà maintenant l'influence de l'altitude h . Le rapport $\frac{h}{a}$ est toujours très petit; si donc, x, y, ρ, φ' désignant les coordonnées de M' , on appelle $x+dx, y+dy, \rho+d\rho, \varphi'+d\varphi'$ celles de M , on peut traiter les corrections $dx, dy, d\rho, d\varphi'$, comme des différentielles. On a alors directement et par différentiation :

$$\frac{dx}{a} = \frac{h}{a} \cos \varphi = \cos \varphi' d\rho - \rho \sin \varphi' d\varphi',$$

$$\frac{dy}{a} = \frac{h}{a} \sin \varphi = \sin \varphi' d\rho + \rho \cos \varphi' d\varphi',$$

d'où
$$d\rho = \frac{h}{a} \cos(\varphi - \varphi') \quad , \quad d\varphi' = \frac{h}{a\rho} \sin(\varphi - \varphi') \quad ;$$

la rectilinéarité de $\frac{h}{a}$ et de $\varphi - \varphi'$ montre que l'on peut négliger $d\varphi'$ et prendre $d\rho = \frac{h}{a}$.

Chapitre III

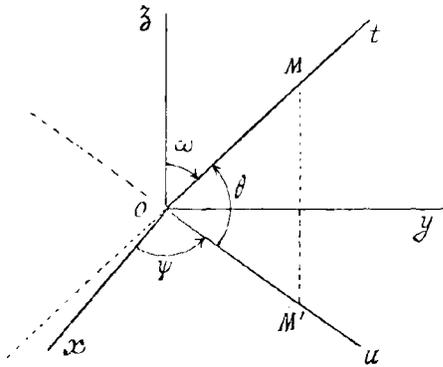
Coordonnées Astronomiques. — Temps

Systèmes de coordonnées. — Les systèmes d'axes de coordonnées, dont on fait usage en Astronomie sont toujours rectangulaires. Pour définir un tel système, il faut se donner 1° son origine O ; 2° son orientation; celle-ci est directe ou rétrograde, suivant qu'un observateur placé suivant l'axe Oz , les pieds en O , la tête en z voit l'axe Ox venir s'appliquer sur l'axe Oy , en décrivant l'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens direct (c'est-à-dire de la droite vers la gauche), ou dans le sens opposé, dit rétrograde; 3° la direction de l'axe Oz ; 4° dans le plan Oxy perpendiculaire à Oz , la direction de l'axe Ox .

Une sphère décrite du point O , origine des coordonnées, comme centre, est la sphère céleste de centre O : elle sert, comme nous l'avons déjà dit, à représenter les directions issues du point O .

On emploie quelquefois les coordonnées rectilignes x, y, z d'un point M , pour définir ce point. Mais le plus souvent, on se sert de coordonnées polaires. Nous définirons celle-ci de la façon générale suivante, quels que soient les axes de référence.

Coordonnées polaires. — Sur la droite indéfinie OM , choisissons



un sens positif Ot ; puis M' étant la projection de M sur le plan Oxy , sur la droite indéfinie OM' , choisissons un sens positif Ou . Les coordonnées polaires du point M sont alors.

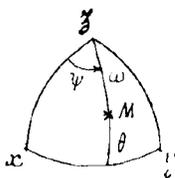
1° la longueur du segment OM , r , comptée dans le sens Ot ; 2° l'angle ψ que fait Ox avec Ou , compté de Ox vers Oy ; 3° l'angle θ que fait Ou avec Ot , compté de Ou vers Oz . Dans ces conditions, on a toujours

$$x = r \cos \theta \cos \psi, \quad y = r \cos \theta \sin \psi, \quad z = r \sin \theta.$$

Dans certains cas, on utilise, au lieu de θ , son complément ω , c'est-à-dire l'angle de Oz avec Ot , compté de Oz vers Ou ; alors

$$\omega = \frac{\pi}{2} - \theta$$

La définition précédente laisse subsister une certaine ambiguïté, qui dépend du choix des directions Oz et Ou ; d'une façon très générale, on fait ce choix de façon que π soit positif, et que l'angle θ soit compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; alors aussi $\cos \theta$ est positif, et l'angle ω est compris entre 0 et π . Mais ce choix que nous adopterons, en général, n'a rien d'essentiellement obligatoire, et nous pourrions quelquefois, pour conserver la généralité des formules, en faire un autre: quand ce fait se produira, il sera toujours spécifié explicitement.



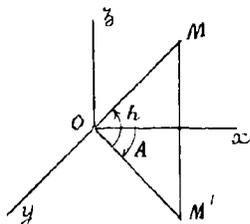
La figure ci-contre représente sur la sphère céleste de centre O , les traces des axes de coordonnées et de la direction OM , et met en évidence les coordonnées angulaires de cette direction.

Les systèmes de coordonnées employés en Astronomie sont les suivants au nom-

bre de quatre:

Coordonnées horizontales. — 1^o Coordonnées horizontales

L'origine O est le lieu d'observation; le système est de sens rétrograde; l'axe Oz est la verticale, de sorte que z correspond au zénith; l'axe Ox est dirigé dans le plan de l'horizon Oxy vers le point Sud.



Dans ces conditions

l'angle ψ est l'azimut, A ;

l'angle θ est la hauteur, h ;

l'angle ω est la distance zénithale, ζ .

La direction de l'axe du monde x pour azimut π , et pour hauteur la latitude φ ; d'après ce qui a été dit précédemment.

La distance zénithale est la colatitude $\frac{\pi}{2} - \varphi$

La verticale géocentrique peut être considérée dans tous les cas comme ayant pour distance zénithale $\varphi - \varphi'$, et pour azimut 0 , φ' étant la latitude géocentrique; lorsque la latitude φ est négative, nous sommes ainsi dans le cas exceptionnel prévu plus haut, ou l'angle ω est négatif.

Ce système de coordonnées locales est évidemment celui qui s'impose a priori; remarquons que les seuls astres visibles sont ceux qui sont au-dessus de l'horizon, c'est-à-dire qui ont une hauteur positive.

Les demi-plans passant par la verticale Oz et limités à Oz sont des verticaux; en particulier le demi-plan Oyz est le premier

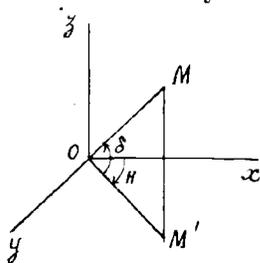
vertical; l'axe Oy est dirigé vers l'ouest, son prolongement vers l'est.

Le lieu des points de même hauteur sur la sphère céleste est un petit cercle ayant pour pôle le zénith, et du cercle de hauteur.

Coordonnées horaires. - 2° Coordonnées horaires ou équatoriales locales.

L'origine O étant comme toujours le lieu d'observation, le système est encore de sens rétrograde; l'axe Oz est dirigé suivant l'axe du monde, de sorte que z correspond au pôle boréal; l'axe Ox est dirigé dans le plan de l'équateur Oxy vers le point A le plus élevé de l'équateur.

(Voir les figures (a) et (b) de la page 25.)



Le plan Oxz est donc, comme dans le cas précédent, le plan du méridien du lieu O , et l'axe Oy est commun aux deux systèmes, dirigé vers l'ouest.

Ici :

l'angle ψ est l'angle horaire, H ;

l'angle δ est la déclinaison, δ ;

l'angle ω est la distance polaire Nord, P .

On exprime d'habitude les angles horaires en temps, c'est-à-dire en heures, minutes et secondes, l'heure étant la 24^e partie de la circonférence, la minute (de temps) la 60^e partie de l'heure, la seconde (de temps) la 60^e partie de la minute (de temps).

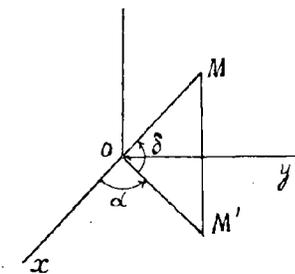
La verticale a toujours pour angle horaire 0, et pour déclinaison la latitude φ ; sa distance polaire est $\frac{\pi}{2} - \varphi$, c'est-à-dire la colatitude. De même, la verticale géocentrique a pour angle horaire 0, et pour déclinaison la latitude géocentrique φ' !

Ce système de coordonnées locales nous est imposé par les apparences du mouvement diurne. Les demi-plans passant par l'axe Oz , ou ligne des pôles, déterminent sur la sphère céleste les cercles horaires; le lieu des points de même déclinaison sur la sphère céleste est un petit cercle ayant pour pôle le pôle boréal, et dit cercle de déclinaison.

Coordonnées équatoriales célestes. - 3° Coordonnées équatoriales célestes.

Le système est de sens direct; l'axe Oz est dirigé comme dans le système précédent, suivant l'axe du monde; quant à l'axe Ox , il est dirigé vers un point idéal de l'équateur, qui sera défini plus tard, et qu'on appelle équinoxe de printemps, ou point vernal, γ .

Ici l'angle ψ est l'inclinaison droite α ; l'angle δ et l'angle ω conservent les mêmes valeurs que ci-dessus.



L'ascension droite est généralement exprimée en temps.

L'angle horaire du point γ est le temps sidéral local, c'est-à-dire relatif au lieu d'observation O . Il est clair que pour une direction quelconque d'ascension droite α et d'angle horaire H , on a, en désignant par t le temps sidéral local, la relation fondamentale.

$\alpha + H = t$, en considérant toujours comme égales les angles qui diffèrent d'un multiple de 2π .

En particulier, l'ascension droite du zénith γ vrai, ou géocentrique, est le temps sidéral local.

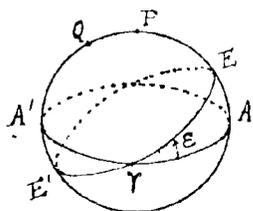
Ce système de coordonnées définit les positions des étoiles indépendamment du lieu d'observation, car les dimensions de la Terre sont négligeables devant la distance des étoiles à la Terre: de plus le point vernal variant peu, l'ascension droite et la déclinaison d'une étoile varient peu.

Coordonnées écliptiques — 4° Coordonnées écliptiques.

Dans ce système qui est de sens direct, l'axe Oz est le même que dans le système précédent, dirigé vers l'équinoxe de printemps.

Mais le plan Oxy est un plan particulier, dit plan de l'écliptique, parallèle au plan de l'orbite apparente du soleil autour de la Terre, et que nous définirons plus tard avec précision. Le plan de l'écliptique EE' fait avec l'équateur un angle ϵ qui varie peu, de $23^{\circ} 27'$ environ, dit obliquité de l'écliptique, et cela de telle façon que les

points de l'écliptique voisins du point γ aient leur ascension droite et leur déclinaison de même signe.



L'axe Oz est alors dirigé vers le pôle boréal Q de l'écliptique, c'est-à-dire vers celui des deux pôles du grand cercle EE' qui est par rapport à l'équateur AA' dans le même

hémisphère que le pôle Nord P .

Dans ces conditions :

L'angle ψ est la longitude λ ,

L'angle θ est la latitude β .

Il n'y a évidemment pas de confusion possible, entre ces coordonnées célestes et les coordonnées géographiques de même nom d'un lieu, à la surface de la Terre.

La longitude du pôle P est $+\frac{\pi}{2}$, et sa latitude $\frac{\pi}{2} - \epsilon$.

L'ascension droite du pôle Q de l'écliptique est $-\frac{\pi}{2}$, et sa

déclinaison $\frac{\pi}{2} - \epsilon$.

Ce système offre les mêmes avantages que le précédent, relativement à la définition de la position des étoiles; il nous est imposé par l'importance prépondérante pour nous du Soleil.

Les lieux géométriques des points d'égalité longitude ou d'égalité latitude sur la sphère céleste sont des cercles de longitude ou de latitude; les premiers sont des demi-grands cercles contenant le pôle Q de l'écliptique; les seconds sont des petits cercles admettant Q comme pôle sphérique.

Changement du lieu d'observation. — Lorsque le lieu d'observation change, les coordonnées célestes, c'est-à-dire $\alpha, \delta, \lambda, \beta$ d'une même direction ne changent pas; mais les coordonnées locales A, h, H changent. En parlant d'une même direction, il faut d'ailleurs entendre que si O et O' sont les deux lieux d'observation, on considère les coordonnées angulaires de deux vecteurs $OM, O'M'$ parallèles; un même astre M est vu au même instant dans la même direction des deux points différents O et O' si la distance OO' est négligeable par rapport aux distances OM et $O'M$.

Il existe entre les angles horaires H et H' d'une même direction rapportée aux deux points O et O' de la Terre, une relation fondamentale très simple. Si L est la longitude géographique du point O , c'est-à-dire l'angle du méridien origine avec le méridien de O , compte dans le sens rétrograde, il est clair que $H + L$ est l'angle horaire de la direction considérée par rapport au méridien origine; par suite si L' est de même la longitude géographique de O' , on a :

$$H + L = H' + L',$$

toujours à un multiple de 2π près.

En particulier, si t est le temps sidéral local en O , t' le temps sidéral local en O' , à un même instant, t et t' sont les angles horaires d'une même direction, celle du point vernal, et l'on a :

$$t + L = t' + L'.$$

Détermination du temps. — L'angle horaire d'un astre quelconque, en un lieu donné, lorsqu'on l'assujettit à varier d'une façon continue, (ce qui veut dire qu'on ne s'astreint pas à le compter entre 0 et 2π par exemple), va toujours en augmentant, en vertu du mouvement d'urne. Il en résulte que l'on peut s'en servir pour fixer sans ambiguïté une époque quelconque ou encore pour déterminer le temps.

Pretons pour origine du temps, en un lieu donné, le moment

où l'angle horaire de l'astre considéré a été nul ; si à une époque quelconque, cet angle horaire, suivi d'une façon continue, a une valeur de la forme $2n\pi + H$, n étant un entier, et H un angle compris entre 0 et 2π , l'époque envisagée peut être caractérisée par les deux nombres n et H : le premier n , indique le nombre de jours (relatifs à l'astre considéré) qui se sont écoulés depuis l'origine ; le second H , correspond à la fraction de jour qui s'est écoulée depuis le commencement du $(n+1)^{\text{ème}}$ jour jusqu'à l'instant dont il s'agit.

Il est convenable de choisir pour la Détermination du temps, un astre, réel ou fictif, tel que son angle horaire varie proportionnellement au temps absolu, d'une façon sinon absolument rigoureuse, au moins très approchée. Alors en effet, le jour correspondant a une valeur constante : c'est la durée nécessaire pour que l'angle augmente de 2π ; de plus si le jour est divisé en 24 heures, l'heure en 60 minutes, la minute en 60 secondes, on voit que l'heure, la minute, la seconde, ainsi définies, sont respectivement les durées nécessaires pour que l'angle horaire exprimé en temps, augmente d'une heure, d'une minute, d'une seconde. En réalité, on mesure ainsi le temps.

Le choix du point vernal γ , comme astre fictif servant à mesurer le temps, satisfait aux conditions précédentes ; le temps sidéral varie en effet d'une façon presque rigoureuse proportionnellement au temps absolu.

Temps vrai. — Mais ce choix ne correspond pas aux circonstances ordinaires de la vie, qui dépendent elles-mêmes du mouvement apparent du Soleil. On est donc amené à choisir le Soleil pour définir le temps ; alors l'angle horaire du Soleil à un instant donné et en un lieu donné, est le temps vrai local.

Le temps vrai est incommode cependant, parce qu'il ne remplit pas avec assez d'exactitude la condition de varier proportionnellement au temps absolu.

Temps moyen. — On a donc substitué au Soleil, pour définir le temps, un astre fictif dit Soleil moyen, dont l'angle horaire varie d'une façon presque rigoureuse proportionnellement au temps absolu, ainsi que nous le verrons plus tard.

Le jour défini par le mouvement de cet astre fictif est le jour solaire moyen, d'une durée constante ; il est partagé en heures, minutes et secondes de temps moyen, comme nous l'avons dit. L'angle horaire du Soleil moyen en un lieu donné et à un instant donné est le temps moyen local.

C'est du temps moyen que l'on se sert pour fixer une époque. Quel que soit l'astre qui sert à définir le temps, le jour correspondant dans commence au moment où H est nul. Le jour solaire moyen, commence donc en un lieu donné au moment où l'angle horaire du soleil moyen est nul, c'est-à-dire à midi moyen.

Date. — Pour définir complètement une époque, il faut se donner d'abord le nombre de jours écoulés depuis le commencement d'un jour déterminé; ceci se fait avec la date, suivant les règles du calendrier; la date est marquée en Astronomie de la façon suivante:

1906 Mars 11,

par exemple.

Mais il faut remarquer que le 11 Mars commence seulement à l'heure appelée communément midi; de sorte que pendant toute la matinée du 11 Mars civil, on est encore le 10 Mars astronomiquement.

Pour compléter la fixation de l'époque, on ajoute la connaissance de l'heure moyenne, c'est-à-dire de l'angle H , compris entre 0 et 2π , ou entre 0^h et 24^h . Ainsi le 11 Mars à 9^h du matin sera astronomiquement le 10 Mars à 21^h .

Au lieu de donner l'heure moyenne, on peut donner l'heure sidérale, ou l'heure vraie; mais la date est toujours exprimée en jours moyens, (ou en jours vrais, quelquefois).

Dans certains cas, on exprime l'heure en parties décimales du jour; ainsi la date précédente serait aussi:

1906 Mars 10,875.

Quelquefois on emploie des dates non usitées dans la vie civile, mais bien faciles à comprendre. Il est clair que:

1906 Janvier 0,0,

indique le midi moyen du 31 Décembre 1905.

Enfin, on exprime dans certains cas, le temps en parties décimales d'années; ainsi 1906 Mars 11,0 correspond à 1906,1889, le commencement de l'année étant le midi moyen du 1^{er} Janvier.

Changement de lieu. — Quel que soit l'astre employé pour définir le temps, si la distance des deux lieux O et O' est négligeable devant leurs distances à l'astre, la différence des heures en ces deux lieux, est toujours égale et de signe contraire à la différence des longitudes, à un multiple de 2π près, en vertu de la relation:

$$H + L = H' + L'.$$

Mais il convient de préciser non-seulement l'heure, mais la date.

Soit O' l'origine des méridiens, pour nous Paris, de sorte que $L' = 0$; prenons L compris entre $-\pi$ et $+\pi$, et soit H l'heure moyenne de Paris, comprise entre 0 et 2π . Il faut former la différence $H'-L$: cela fait, 1^o si cette différence est comprise entre 0 et 2π , elle représente l'heure moyenne en O , et la date est la même qu'à Paris; 2^o si cette différence est supérieure à 2π , son excès sur 2π est l'heure moyenne en O , mais la date en O dépasse d'un jour celle de Paris; 3^o si cette différence est négative, on obtient l'heure moyenne en O en lui ajoutant 2π , mais la date en O est inférieure d'un jour à celle de Paris.

Telles sont les conventions adoptées.

Considérons, comme exemple, le méridien antipode; sur le bord Ouest, la longitude est $\pi - \epsilon$, ϵ étant très petit, et la différence $H'-L$ est $H' - \pi + \epsilon$; sur le bord Est au contraire, la longitude est $-\pi + \epsilon$, et la différence $H'-L$ est $H' + \pi - \epsilon$; l'heure est donc la même sur les deux bords, en négligeant ϵ , mais la date sur le bord Est dépasse d'une unité la date sur le bord Ouest. Si donc on traverse le méridien antipode de l'Ouest vers l'Est, il faut augmenter à ce moment la date d'un jour; si au contraire on le traverse de l'Est vers l'Ouest, il faut diminuer la date d'un jour. Dans le premier cas, on saute un jour; dans le second, on compte deux fois le même jour.

Temps de Greenwich. — On emploie souvent le temps du méridien de Greenwich; la longitude de Greenwich, par rapport à Paris, est $+9^m 20^s, 9$.

Passage du temps sidéral au temps moyen. — Le temps sidéral et le temps moyen variant, d'une façon presque rigoureuse, proportionnellement au temps absolu, sont susceptibles d'être déterminés à l'aide des instruments appelés pendules ou chronomètres. Nous supposerons que nous avons à notre disposition de tels instruments, et provisoirement nous les imaginerons parfaits.

Le temps sidéral et le temps moyen variant, évidemment, d'une façon presque rigoureuse, proportionnellement l'un à l'autre.

En fait, le jour sidéral vaut un jour moyen, diminué de $3^m 55^s, 910$ de temps moyen; le jour moyen vaut un jour sidéral augmenté de $3^m 56^s, 556$ de temps sidéral.

Si une durée est mesurée en temps sidéral par θ_s , en temps moyen par θ_m , on a donc des relations de la forme:

$$\theta_s = \theta_m (1 + \lambda), \quad \theta_m = \theta_s (1 - \mu),$$

avec

$$\lambda = \frac{3^m 56^s, 556}{24^h} = 0,0027379,$$

$$\mu = \frac{3^m 55^s, 910}{24^h} = 0,0027304,$$

$$(1 + \lambda) (1 - \mu) = 1, \quad \mu = \frac{\lambda}{1 + \lambda}, \quad \lambda = \frac{\mu}{1 - \mu}.$$

La Connaissance des Temps renferme des Tables qui permettent de transformer à vue une durée de temps sidéral en temps moyen, et inversement.

Comme nous l'avons déjà dit, et comme il est facile de le comprendre d'après les instruments à notre disposition, on fixe une époque en donnant la date, et de plus, le temps moyen ou le temps sidéral correspondant ce jour-là à l'époque considérée : Il est nécessaire de savoir passer de l'heure moyenne à l'heure sidérale et inversement.

Soit en un lieu de longitude L , t et T les heures sidérale et moyenne qui correspondent à un même instant ; soit de plus, à la même date, t_0 le temps sidéral à midi moyen à Paris, fourni par la Connaissance des Temps. Le temps moyen à Paris rapporté à la même date est $T + L$; le temps sidéral correspondant est $t_0 + (T + L)(1 + \lambda)$, et par suite on a la relation :

$$t = t_0 + (T + L)(1 + \lambda) - L,$$

ou

$$t = t_0 + T + (T + L) \lambda ;$$

et la correction $(T + L) \lambda$ est fournie immédiatement par la Connaissance des Temps.

Cette valeur de t devra naturellement être réduite entre les limites 0 et 2π .

Inversement on a :

$$T + L = \frac{t - t_0 + L}{1 + \lambda} = (t - t_0 + L) (1 - \mu),$$

ou

$$T = t - t_0 - (t - t_0 + L) \mu,$$

et la correction $(t - t_0 + L) \mu$ est immédiatement fournie par la Connaissance des Temps.

Dans cette seconde formule, t n'est déterminé qu'à un multiple de 2π près, mais T doit être compris entre 0 et 2π ; on choisira donc les valeurs de t qui donnent pour T une valeur convenable ; en général il n'y en aura qu'une, mais exceptionnellement,

on pourra en trouver deux : quelquefois, pratiquement, il n'y aura pas d'ambiguïté.

Exemples. — A Paris, le 11 Mars 1906, on donne $t = 2^h$. Calculer T , sachant que $t_0 = 23^h 12^m 55^s, 36$.

Il faut évidemment prendre $t = 26^h$, d'où $t - t_0 = 2^h 47^m 45^s, 64$ et $T = 2^h 46^m 37^s, 27$.

A la même date, on donne $t = 23^h 14^m$.

On peut alors prendre $t = 23^h 14^m$ ou bien $t = 47^h 14^m$; dans le premier cas $t - t_0 = 1^m 4^s, 64$, d'où $T = 0^h 1^m 4^s, 46$; dans le second cas $t - t_0 = 24^h 1^m 4^s, 64$, d'où $T = 23^h 57^m 8^s, 55$; mais il est clair que pratiquement il ne peut y avoir doute : on peut bien en effet si l'on était au moment considéré un peu après le midi du 11 Mars, ou un peu avant le midi du 12 Mars.

Remarque. — Il est facile de constater avec la Connaissance des temps que le temps sidéral et le temps moyen de varient pas proportionnellement l'un à l'autre d'une façon absolument rigoureuse. C'est ainsi que les méridiens moyens du 1^{er} Janvier, du 15 Mai et du 26 Septembre 1906 sont des époques équidistantes en temps moyen; les valeurs de t_0 correspondantes sont :

$$18^h 40^m 53^s, 08 \quad ; \quad 3^h 29^m 11^s, 31 \quad ; \quad 12^h 17^m 29^s, 69 .$$

Les différences successives de ces nombres sont :

$$8^h 48^m 18^s, 23 \quad , \quad 8^h 48^m 18^s, 38 ,$$

et ne sont pas rigoureusement égales.

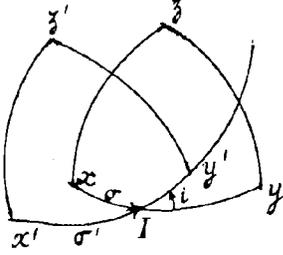
Nous verrons plus tard quelle est la cause de ce fait, dont pratiquement on ne doit pas se préoccuper.

Chapitre IV.

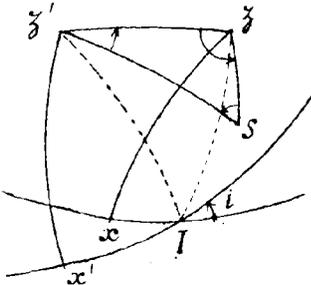
Changement de coordonnées

Avant de commencer l'exposition des théories purement astronomiques, il est encore nécessaire de savoir résoudre d'une façon générale un problème qui se présente à chaque instant; celui du changement de coordonnées.

Premier cas : l'origine ne change pas. — Nous supposons d'abord qu'il s'agit de passer d'un système $Oxyz$, à un autre système $Ox'y'z'$ de même origine, orienté de la même façon. Nous pouvons représenter les deux systèmes par les traces des axes sur la sphère céleste de centre O , ce qui conduit aux deux triangles trirectangle xyz , $x'y'z'$!



ment dans le sens $x'y'$. Il est clair que la connaissance des angles i , σ , σ' définit complètement la position relative des deux systèmes d'axes.



à i , $\frac{\pi}{2} - \theta$, $\frac{\pi}{2} - \theta'$, ainsi qu'il est légitime.

L'angle en z , compté de $z z'$ vers $z S$ dans le sens de l'orientation des deux systèmes a pour valeur évidente $\frac{\pi}{2} + \psi - \sigma$; l'angle en z' est alors compté dans le même sens de $z' S$ vers $z' z$ et a pour valeur $\frac{\pi}{2} - \psi' + \sigma'$; enfin l'angle parallélique est compté dans le même sens de $S z$ vers $S z'$.

On peut appliquer au triangle de position toutes les formules ordinaires de la Trigonométrie sphérique, en faisant par exemple

$$\begin{aligned} a &= \frac{\pi}{2} - \theta', & A &= \frac{\pi}{2} + \psi - \sigma, \\ b &= \frac{\pi}{2} - \theta, & B &= \frac{\pi}{2} - \psi' + \sigma', \\ c &= i, & C &= \hat{S}, \end{aligned}$$

et se souvenant que d'après les conventions faites, a et b sont généralement compris entre θ et π , de sorte que $\sin a$ et $\sin b$, ou $\cos \theta$ et $\cos \theta'$ sont positifs.

En particulier le système des formules de Gauss donne pour passer des coordonnées ψ , θ , aux coordonnées ψ' , θ' , les relations fondamentales :

$$(1) \begin{cases} \cos \theta' \sin (\psi' - \sigma') = \cos i \cos \theta \sin (\psi - \sigma) + \sin i \sin \theta, \\ \cos \theta' \cos (\psi' - \sigma') = \cos \theta \cos (\psi - \sigma), \\ \sin \theta' = \cos i \sin \theta - \sin i \cos \theta \sin (\psi - \sigma). \end{cases}$$

Les deux premières donnent par division $\operatorname{tg} (\psi' - \sigma')$, et l'angle $\psi' - \sigma'$ sans ambiguïté (à un multiple près de 2π), puisque $\cos \theta$ étant positif, on a le signe de $\sin (\psi' - \sigma')$ et celui de $\cos (\psi' - \sigma')$. Connaissant $\psi' - \sigma'$, on en déduit $\cos \theta'$, et par combinaison avec la dernière relation, $\operatorname{tg} \theta'$, d'où θ' sans ambiguïté.

On aurait de même les relations qui permettent de passer de ψ', θ' à ψ, θ ; il suffit en général d'échanger les lettres ψ et θ , avec ψ' et θ' et de changer le signe de i .

Le calcul des formules (1) peut se faire en posant.

$$\begin{cases} \cos \theta \sin (\psi - \sigma) = m \sin M, \\ \sin \theta = m \cos M; \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} \cos \theta' \sin (\psi' - \sigma') = m \sin (i + M), \\ \cos \theta' \cos (\psi' - \sigma') = \cos \theta \cos (\psi - \sigma), \\ \sin \theta' = m \cos (i + M). \end{cases}$$

On peut encore employer, pour passer du premier système au second, les formules de Delambre, qui donneront en même temps l'angle parallactique S ; on pourra d'ailleurs y faire $\varepsilon \eta = 1$, sans altérer la généralité. Il est inutile de les récrire ici; on fera sans peine le changement de notations.

Formules différentielles. — Cherchons encore les relations différentielles qui correspondent à ce problème. On aura en appliquant les formules générales au cas particulier considéré:

$$(2) \begin{cases} \cos \theta' d(\psi' - \sigma') = \cos S \cos \theta d(\psi - \sigma) + \sin S d\theta + \sin \theta \cos (\psi' - \sigma') di, \\ d\theta' = -\sin S \cos \theta d(\psi - \sigma) + \cos S d\theta - \sin (\psi' - \sigma') di. \end{cases}$$

Ces relations appellent une remarque très importante et d'un caractère général que nous ferons ici une fois pour toutes.

Si $\Delta (\psi' - \sigma')$ et $\Delta \theta'$ sont les accroissements véritables que subissent les angles $\psi' - \sigma'$ et θ' lorsque les données reçoivent les accroissements $d(\psi - \sigma)$, $d\theta$, di , les quantités $d(\psi' - \sigma')$ et $d\theta'$, telles que les fournissent les formules (2) sont en réalité les premiers termes des développements de $\Delta (\psi' - \sigma')$ et $\Delta \theta'$ suivant les puissances croissantes de $d(\psi - \sigma)$, $d\theta$, di .

L'erreur commise en remplaçant $\Delta(\psi'-\sigma')$ et $\Delta\theta'$ par $d(\psi'-\sigma')$ et $d\theta'$ est donc, en général, de l'ordre du carré des corrections des données, ou en d'autres termes, l'erreur relative ainsi commise, est de l'ordre des corrections des données. Comme la plupart du temps, les erreurs des données ne sont pas connues elles-mêmes rigoureusement, on voit que l'on ne peut demander davantage et que l'emploi des formules (2) est parfaitement légitime.

Mais il est clair que ces conclusions cessent d'être vraies si $\cos\theta'$ est petit; les développements de $\Delta(\psi'-\sigma')$ et de $\Delta\theta'$ renferment en effet en dénominateur des puissances de $\cos\theta'$, et cessent d'être convergents pratiquement, si le rapport des erreurs des données à $\cos\theta'$ cesse d'être petit; l'erreur relative commise en employant les formules (2) est en réalité de l'ordre de ce rapport, et par conséquent peut devenir très grande si $\cos\theta'$ est très petit, c'est-à-dire si S' est très voisin du pôle Z' ou du pôle opposé.

Cette difficulté tient à l'emploi des coordonnées sphériques; il est évident en effet qu'au voisinage du pôle Z' , la coordonnée ψ' peut varier beaucoup, sans que le point S' cesse de subir un petit déplacement, puisqu'en particulier, au pôle, cette coordonnée est parfaitement indéterminée.

Dans ce cas, les formules (2) sont donc inutilisables telles qu'elles, et ceci n'a pas lieu de surprendre, puisque les hypothèses qui ont servi à légitimer leur emploi ne sont plus réalisées, la correction $\Delta(\psi'-\sigma')$ étant grande.

Si l'on veut cependant calculer $\Delta(\psi'-\sigma')$ et $\Delta\theta'$, faudra-t-il alors nécessairement recourir aux formules rigoureuses (1), en remplaçant $\psi-\sigma$ par $(\psi-\sigma) + d(\psi-\sigma), \dots$, et résolvant à nouveau complètement le triangle de position, sans pouvoir utiliser les calculs déjà faits?

Méthode de Fabritius. — Nous allons montrer, en exposant la méthode de Fabritius, qu'il n'en est pas ainsi, et qu'en employant convenablement les formules (2), on peut en core arriver aux valeurs de $\Delta(\psi'-\sigma')$ et de $\Delta\theta'$, avec une erreur relative qui reste de l'ordre des corrections données, ce qui est, comme nous l'avons déjà dit, tout ce que l'on peut demander pratiquement.

$$\text{Posons: } x' = \cos\theta' \cos(\psi'-\sigma'), \quad y' = \cos\theta' \sin(\psi'-\sigma'), \quad z' = \sin\theta';$$

si $\Delta x', \Delta y', \Delta z'$, sont les accroissements des coordonnées rectangulaires x', y', z' , qui correspondent aux corrections des données, les formules (1) montrent immédiatement que ces accroissements seront toujours développables suivant les puissances de ces corrections, et que si dx', dy', dz' ,

pour les parties du premier ordre de ces développements, on peut faire $\Delta x' = dx'$, $\Delta y' = dy'$, $\Delta z' = dz'$, en ne commettant qu'une erreur relative de l'ordre de $d(\psi - \sigma)$, $d\theta$, di , ainsi que nous le voulons. L'emploi des coordonnées rectangulaires surpasse donc la difficulté créée par l'emploi des coordonnées sphériques.

Or, en général, on a :

$$\begin{cases} dx' = -\cos \theta' \sin(\psi' - \sigma') d(\psi' - \sigma') - \sin \theta' \cos(\psi' - \sigma') d\theta', \\ dy' = +\cos \theta' \cos(\psi' - \sigma') d(\psi' - \sigma') - \sin \theta' \sin(\psi' - \sigma') d\theta', \\ dz' = \cos \theta' d\theta', \end{cases}$$

et les formules (2) fournissent $\cos \theta' d(\psi' - \sigma')$, $d\theta'$.

Appelant donc P et Q les seconds membres des formules (2), on a toujours, au degré d'approximation demandé :

$$\begin{cases} \Delta x' = -\sin(\psi' - \sigma') P - \sin \theta' \cos(\psi' - \sigma') Q, \\ \Delta y' = \cos(\psi' - \sigma') P - \sin \theta' \sin(\psi' - \sigma') Q, \\ \Delta z' = \cos \theta' Q, \end{cases}$$

D'autre part, d'après la définition des coordonnées rectangulaires, on a, en désignant par λ une constante quelconque :

$$\begin{cases} \Delta [\cos \theta' \cos(\psi' - \sigma' - \lambda)] = \cos \lambda \Delta x' + \sin \lambda \Delta y', \\ \Delta [\cos \theta' \sin(\psi' - \sigma' - \lambda)] = -\sin \lambda \Delta x' + \cos \lambda \Delta y', \\ \Delta [\sin \theta'] = \Delta z'; \end{cases}$$

en prenant $\lambda = \psi' - \sigma'$, ceci devient :

$$\begin{cases} \cos(\theta' + \Delta \theta') \cos \Delta(\psi' - \sigma') - \cos \theta' = -\sin \theta' Q, \\ \cos(\theta' + \Delta \theta') \sin \Delta(\psi' - \sigma') = P, \\ \sin(\theta' + \Delta \theta') - \sin \theta' = \cos \theta' Q. \end{cases}$$

Des deux premières de ces relations, on déduit d'abord :

$$\operatorname{tg} \Delta(\psi' - \sigma') = \frac{P}{\cos \theta' - \sin \theta' Q}$$

Multippliant ensuite la première par $\cos \frac{1}{2} \Delta(\psi' - \sigma')$, la seconde par $\sin \frac{1}{2} \Delta(\psi' - \sigma')$, et ajoutant, il vient après division par $\frac{1}{2} \Delta(\psi' - \sigma')^2$,

$$\cos(\theta' + \Delta \theta') - \cos \theta' = -\sin \theta' Q + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Delta(\psi' - \sigma') P;$$

combinant d'une façon évidente ce résultat avec la troisième des équations ci-dessus, il vient :

$$\sin \Delta \theta' = Q - \sin \theta' \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Delta (\psi' - \sigma') \cdot P.$$

Ceci montre que $\Delta \theta'$ reste toujours de l'ordre de P et Q , c'est-à-dire des corrections données ; donc finalement, on peut écrire, à la place des formules (2), pour résoudre le problème proposé :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \Delta (\psi' - \sigma') = \frac{P}{\cos \theta' - \sin \theta' Q} \\ \Delta \theta' = Q - \sin \theta' \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Delta (\psi' - \sigma') P. \end{array} \right.$$

L'exemple suivant mettra en lumière ce que nous venons d'expliquer. Soient les valeurs concordantes :

$$i = 30^\circ, \theta = 60^\circ 20', \theta' = 89^\circ 40', \psi - \sigma = 90^\circ, \psi' - \sigma' = 90^\circ, S = 180^\circ.$$

$$\text{Donnons-nous } d(\psi - \sigma) = d\theta = di = -5'.$$

Les formules (2) donnent $d(\psi' - \sigma') = 7^\circ 5'$, $d\theta' = 10'$.

Les formules (3) donnent $\Delta(\psi' - \sigma') = 13^\circ 54' 0''$, $\Delta\theta' = 9^\circ 41'' 9$,

Les valeurs exactes sont : $\Delta(\psi' - \sigma') = 13^\circ 55' 56''$, $\Delta\theta' = 9^\circ 41'' 7$.

Cas de i petit. — Lorsque l'angle i est petit, il est clair que $\psi' - \sigma'$ et θ' diffèrent peu de $\psi - \sigma$ et θ . Dans ce cas il est préférable de déterminer directement les différences $\psi' - \sigma' - (\psi - \sigma)$ et $\theta' - \theta$, que nous appellerons $\Delta(\psi - \sigma)$ et $\Delta\theta$.

Écrivons les deux premières formules (1) sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \theta' \sin (\psi' - \sigma') = \cos \theta \sin (\psi - \sigma) + p \cos \theta, \\ \cos \theta' \cos (\psi' - \sigma') = \cos \theta \cos (\psi - \sigma), \end{array} \right.$$

en posant :

$$p = \sin i \operatorname{tg} \theta - 2 \sin^2 \frac{i}{2} \sin (\psi - \sigma);$$

on a immédiatement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \theta' \sin \Delta(\psi - \sigma) = p \cos \theta \cos (\psi - \sigma), \\ \cos \theta' \cos \Delta(\psi - \sigma) = \cos \theta + p \cos \theta \sin (\psi - \sigma), \end{array} \right.$$

d'où :

$$(4) \quad \operatorname{tg} \Delta(\psi - \sigma) = \frac{p \cos (\psi - \sigma)}{1 + p \sin (\psi - \sigma)},$$

de sorte que l'on peut facilement développer $\Delta(\psi - \sigma)$, si l'on veut,

d'après une formule connue ; si'il y avait ambiguïté sur la détermination de $\Delta(\psi - \sigma)$, on remarquera que le sinus et le cosinus de cet angle ont, d'après les relations précédemment écrites, respectivement le signe du numérateur et du dénominateur du second membre.

Quant à $\Delta\theta$, on aura d'après une analogie de Néper, dans le triangle de position :

$$(4) \quad \operatorname{tg} \frac{\Delta\theta}{2} = - \operatorname{tg} \frac{i}{2} \frac{\sin(\psi - \sigma + \frac{1}{2} \Delta(\psi - \sigma))}{\cos \frac{1}{2} \Delta(\psi - \sigma)}.$$

Ces deux formules (4) sont rigoureuses et peuvent être appliquées dans tous les cas.

Si i est assez petit pour qu'on en puisse négliger le carré, et si θ n'est pas voisin de $\pm \frac{\pi}{2}$, il en est de même de p , et l'on peut se borner aux valeurs approchées de $(\psi - \sigma)$ et de θ fournies par les relations différentielles :

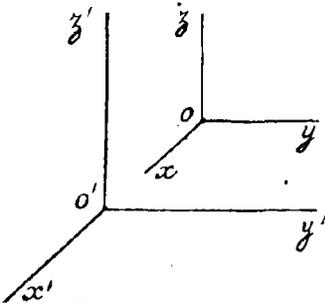
$$(5) \quad \begin{cases} \cos \theta d(\psi - \sigma) = i \sin \theta \cos(\psi - \sigma), \\ d\theta = -i \sin(\psi - \sigma). \end{cases}$$

Si, le carré de i étant toujours négligeable, $\cos \theta$ devient petit, on appliquera la méthode de Fabritius comme plus haut ; désignant par P et Q les seconds membres des relations précédentes, on aura avec une erreur relative de l'ordre de i :

$$(6) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \Delta(\psi - \sigma) = \frac{P}{\cos \theta - \sin \theta \cdot Q}, \\ \Delta\theta = Q - \sin \theta \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Delta(\psi - \sigma) P. \end{cases}$$

Les relations (5) et (6) résultent d'ailleurs des relations (2) et (3), où l'on fait $i = 0$, $d(\psi - \sigma) = d\theta = 0$, et où l'on remplace di par i , de sorte que $\psi' - \sigma' = \psi - \sigma$, $\theta' = \theta$.

Deuxième cas : l'origine des coordonnées change. — Nous



supposons ici qu'il s'agit de passer d'un système de coordonnées $Ox yz$, à un autre système $O'x'y'z'$, les origines étant différentes, mais les directions des axes restant parallèles.

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point M par rapport au système $Ox yz$; $x' y' z'$ les coordonnées du même point par rapport à $O'x'y'z'$;

x_0, y_0, z_0 les coordonnées de O par rapport à $O'x'y'z'$. On a d'abord les relations fondamentales :

$$(7) \quad x' = x + x_0, \quad y' = y + y_0, \quad z' = z + z_0,$$

qui suffisent dans certains problèmes.

En général ce sont les coordonnées polaires que l'on transforme ; on a alors, avec les notations habituelles :

$$(8) \quad \begin{cases} \kappa' \cos \psi' \cos \theta' = \kappa \cos \psi \cos \theta + x_0, \\ \kappa' \sin \psi' \cos \theta' = \kappa \sin \psi \cos \theta + y_0, \\ \kappa' \sin \theta' = \kappa \sin \theta + z_0. \end{cases}$$

D'ailleurs, si l'on a les coordonnées polaires $\kappa_0, \psi_0, \theta_0$ de O par rapport à O' , on fera :

$$x_0 = \kappa_0 \cos \psi_0 \cos \theta_0, \quad y_0 = \kappa_0 \sin \psi_0 \cos \theta_0, \quad z_0 = \kappa_0 \sin \theta_0.$$

Dans le cas où $\kappa, \kappa', \kappa_0$ sont du même ordre de grandeur, on appliquera ces formules directement : elles donnent sans peine $\operatorname{tg} \psi', \operatorname{tg} \theta'$ et κ' . C'est ce qui arrive quand on transforme les coordonnées héliocentriques d'une planète ou d'une comète en coordonnées géocentriques, ou inversement.

On pourra simplifier un peu le calcul, en remarquant que λ désignant une constante arbitraire, on peut écrire, en faisant tourner les axes Ox, Oy de λ :

$$(9) \quad \begin{cases} \kappa' \cos(\psi - \lambda) \cos \theta' = \kappa \cos(\psi - \lambda) \cos \theta + \begin{cases} x_0 \cos \lambda + y_0 \sin \lambda \\ \kappa_0 \cos(\psi_0 - \lambda) \cos \theta_0 \end{cases}, \\ \kappa' \sin(\psi - \lambda) \cos \theta' = \kappa \sin(\psi - \lambda) \cos \theta + \begin{cases} -x_0 \sin \lambda + y_0 \cos \lambda \\ \kappa_0 \sin(\psi_0 - \lambda) \cos \theta_0 \end{cases}, \end{cases}$$

les expressions entre accolades étant équivalentes.

On pourra alors disposer de l'arbitraire λ de façon à obtenir des simplifications, par exemple en faisant $\lambda = \psi_0$ ou $\lambda = \psi$.

Problèmes de Parallaxe. — Dans les problèmes de parallaxe, la distance κ_0 est petite par rapport à κ et κ' . Par suite r', ψ', θ' diffèrent peu de r, ψ, θ et il vaut mieux déterminer directement les différences $\kappa' - \kappa, \psi' - \psi, \theta' - \theta$ que nous appellerons

$$\Delta r, \Delta \psi, \Delta \theta.$$

Les formules (9) où l'on fait $\lambda = \psi$, donnent d'abord

$$\operatorname{tg} \Delta \psi = \frac{-x_0 \sin \psi + y_0 \cos \psi}{\kappa \cos \theta + x_0 \cos \psi + y_0 \sin \psi}.$$

Multipliant ces mêmes formules respectivement par $\cos \frac{1}{2} \Delta \psi$ et $\sin \frac{1}{2} \Delta \psi$, et ajoutant, on a après division par $\cos \frac{1}{2} \Delta \psi$:

$$\pi' \cos \theta' = \pi \cos \theta + t_0,$$

en faisant

$$t_0 = \frac{x_0 \cos(\psi + \frac{1}{2} \Delta \psi) + y_0 \sin(\psi + \frac{1}{2} \Delta \psi)}{\cos \frac{1}{2} \Delta \psi}.$$

On a de plus, par la dernière des formules (8)

$$\pi' \sin \theta' = \pi \sin \theta + z_0;$$

par suite il vient:

$$(10) \begin{cases} \pi' \sin \Delta \theta = -t_0 \sin \theta + z_0 \cos \theta, \\ \pi' \cos \Delta \theta = \pi + t_0 \cos \theta + z_0 \sin \theta, \end{cases}$$

d'où

$$\operatorname{tg} \Delta \theta = \frac{-t_0 \sin \theta + z_0 \cos \theta}{\pi + t_0 \cos \theta + z_0 \sin \theta};$$

enfin des relations qui donnent $\pi' \cos \theta'$ et $\pi' \sin \theta'$, on tire immédiatement:

$$\frac{\pi'}{\pi} = \frac{-t_0 \sin \theta + z_0 \cos \theta}{-t_0 \sin \theta' + z_0 \cos \theta'}.$$

On peut aussi écrire, en élevant au carré les relations (10), et ajoutant

$$\pi'^2 = \pi^2 + 2\pi(t_0 \cos \theta + z_0 \sin \theta) + (t_0^2 + z_0^2).$$

Pour simplifier le calcul des diverses formules obtenues, introduisons deux angles auxiliaires, et deux nombres auxiliaires, par les relations.

$$(11) \begin{cases} x_0 = m \cos \psi_0, & t_0 = n \cos \gamma, \\ y_0 = m \sin \psi_0, & z_0 = n \sin \gamma; \end{cases}$$

dans le cas où l'on connaît les coordonnées polaires de O par rapport à O' , l'angle auxiliaire ψ_0 est précisément la coordonnée ψ_0 , et l'on a $m = \pi_0 \cos \theta_0$, $z_0 = \pi_0 \sin \theta_0$.

Si alors on pose

$$(11bis) \quad p = \frac{m}{\pi \cos \theta}, \quad q = \frac{n}{\pi} = \frac{z_0}{\pi \sin \gamma},$$

on a

$$(12) \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \Delta \psi = \frac{p \sin (\psi_0 - \psi)}{1 + p \cos (\psi_0 - \psi)}, \\ \operatorname{tg} \Delta \theta = \frac{q \sin (\gamma - \theta)}{1 + q \cos (\gamma - \theta)}, \\ \frac{\pi'}{\pi} = \frac{\sin (\gamma - \theta)}{\sin (\gamma - \theta')} \\ = \sqrt{1 + 2q \cos (\gamma - \theta) + q^2}. \end{array} \right.$$

Il est inutile de calculer n ; on calcule simplement

$$(12 \text{ bis}) \operatorname{tg} \gamma = \frac{z_0 \cos \frac{1}{2} \Delta \psi}{x_0 \cos (\psi + \frac{1}{2} \Delta \psi) + y_0 \sin (\psi + \frac{1}{2} \Delta \psi)} = \frac{\operatorname{tg} \theta_0 \cos \frac{1}{2} \Delta \psi}{\cos (\psi_0 - \psi - \frac{1}{2} \Delta \psi)}$$

la seconde expression correspondant au cas où l'on connaît les coordonnées polaires de O .

On reconnaît dans les formules (12) des expressions faciles à développer en série, mais il est inutile d'insister sur ce point.

La solution précédente est rigoureuse : mais on ne doit l'employer que si les différences $\Delta \psi$ et $\Delta \theta$ sont petites.

Quelquefois, il faut calculer ψ' et θ' , connaissant τ' et non π ; ceci ne se présente d'ailleurs que dans l'hypothèse précédente, et connaissant π_0 , ψ_0 , θ_0 .

La seconde des formules (9) où λ est égal à ψ donne :

$$\sin \Delta \psi = \frac{\pi_0 \cos \theta_0 \sin (\psi_0 - \psi)}{\pi' \cos \theta'} ;$$

la première des formules (10) donne aussi

$$\sin \Delta \theta = \frac{\tau_0 \sin \theta_0 \sin (\gamma - \theta)}{\pi' \sin \gamma},$$

avec toujours :

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \theta_0 \cos \frac{1}{2} \Delta \psi}{\cos (\psi_0 - \psi - \frac{1}{2} \Delta \psi)}.$$

Ces trois relations fourniront les inconnues $\Delta \psi$ et $\Delta \theta$ par approximations successives ; en effet, θ' est voisin de θ , et par suite la première équation donne, en faisant $\theta' = \theta$, une valeur approchée de $\Delta \psi$, avec laquelle on calcule des valeurs approchées de

γ et de $\Delta \theta$; on recommence ensuite le calcul en se servant de la nouvelle valeur de θ '.

Formules différentielles. — Dans bien des cas le rapport $\frac{\pi_0}{\pi}$ est assez petit pour qu'on puisse négliger son carré ; on peut alors se borner à prendre pour $\Delta \psi$ et $\Delta \theta$ les valeurs approchées $d\psi$ et $d\theta$ fournies par les formules différentielles suivantes :

$$(13) \left\{ \begin{array}{l} d\psi = \frac{-x_0 \sin \psi + y_0 \cos \psi}{\pi \cos \theta} = \frac{\pi_0 \cos \theta_0}{\pi \cos \theta} \sin (\psi_0 - \psi), \\ d\theta = \frac{-t_0 \sin \theta + z_0 \cos \theta}{\pi}, \text{ avec } t_0 = x_0 \cos \psi + y_0 \sin \psi \\ \text{ou bien} \\ d\theta = \frac{\pi_0 \sin \theta_0}{\pi \sin \gamma} \sin (\gamma - \theta), \text{ avec } \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \theta_0 \operatorname{sec} (\psi_0 - \psi). \end{array} \right. = \pi_0 \cos \theta_0 \cos (\psi_0 - \psi),$$

On peut y joindre :

$$(13 \text{ bis}) \quad d\tau = t_0 \cos \theta + z_0 \sin \theta = \pi_0 \sin \theta_0 \frac{\cos (\gamma - \theta)}{\sin \gamma},$$

ce qui résulte de la seconde formule (10).

Dans le cas où θ est voisin de $\pm \frac{\pi}{2}$, les résultats précédents sont inapplicables, mais il est facile de reprendre le calcul conformément à la méthode de Fabritius. Les accroissements des coordonnées rectangulaires $\pi \cos \psi \cos \theta$, $\pi \sin \psi \cos \theta$, $\pi \sin \theta$ sont égaux à x_0 , y_0 , z_0 ; appelons alors P, Q, R les valeurs de $\cos \theta \, d\psi$, $d\theta$, $\frac{d\tau}{\pi}$, fournies par les formules (13) et (13 bis) de sorte que

$$\left\{ \begin{array}{l} P = \frac{-x_0 \sin \psi + y_0 \cos \psi}{\pi}, \\ Q = \frac{-t_0 \sin \theta + z_0 \cos \theta}{\pi}, \text{ avec } t_0 = x_0 \cos \psi + y_0 \sin \psi, \\ R = \frac{t_0 \cos \theta + z_0 \sin \theta}{\pi}; \end{array} \right.$$

on en déduit inversement :

$$\left\{ \begin{array}{l} z_0 = \pi (Q \cos \theta + R \sin \theta), \\ t_0 = x_0 \cos \psi + y_0 \sin \psi = \pi (-Q \sin \theta + R \cos \theta); \end{array} \right.$$

les formules (9), où $\lambda = \psi$, deviennent :

$$\begin{cases} r' \cos \theta' \cos \Delta \psi = r (\cos \theta - Q \sin \theta + R \cos \theta), \\ r' \cos \theta' \sin \Delta \psi = r \cdot P, \end{cases}$$

d'où, d'abord :

$$(14) \quad \operatorname{tg} \Delta \psi = \frac{P}{\cos \theta - Q \sin \theta + R \cos \theta},$$

formule qui est rigoureuse.

Un procédé déjà appliqué plusieurs fois conduit alors à :

$$\Delta (r \cos \theta) = r (-Q \sin \theta + R \cos \theta) + r P \operatorname{tg} \frac{\Delta \psi}{2},$$

tandis que la troisième équation (8) donne :

$$\Delta (r \sin \theta) = r (Q \cos \theta + R \sin \theta).$$

Ceci montre que $\Delta \theta$ et $\frac{\Delta r}{r}$ restent de l'ordre de $\frac{x_0}{r}, \frac{y_0}{r}, \frac{z_0}{r}$;
écrivant alors, en négligeant les carrés et les produits de ces quantités :

$$\begin{cases} \Delta (r \cos \theta) = \cos \theta \Delta r - r \sin \theta \Delta \theta, \\ \Delta (r \sin \theta) = \sin \theta \Delta r + r \cos \theta \Delta \theta, \end{cases}$$

on a immédiatement :

$$(14 \text{ bis}) \quad \begin{cases} \Delta \theta = Q - P \sin \theta \operatorname{tg} \frac{\Delta \psi}{2}, \\ \frac{\Delta r}{r} = R + P \cos \theta \operatorname{tg} \frac{\Delta \psi}{2}. \end{cases}$$

En appliquant les formules (14) et (14 bis), on ne commettra qu'une erreur relative de l'ordre de $\frac{x_0}{r}, \frac{y_0}{r}, \frac{z_0}{r}$.

On obtiendrait d'ailleurs sans peine des formules rigoureuses pour $\Delta \theta$ et $\frac{\Delta r}{r}$; mais elles sont sans utilité.

Chapitre V

Mouvement diurne

Passage des coordonnées équatoriales aux coordonnées écliptiques. — Appliquons d'abord ce qui précède au pas-

sage des coordonnées équatoriales aux coordonnées écliptiques. Si l'on prend pour z le pôle de l'équateur et pour z' le pôle de l'écliptique, il suffira de faire dans les formules générales $i = \varepsilon$, ε désignant l'obliquité de l'écliptique.

$$\sigma = \sigma' = 0, \quad \psi = \alpha, \quad \psi' = \lambda, \quad \theta = \varepsilon, \quad \theta' = \beta;$$

les éléments du triangle de position seront donc :

$$a = \frac{\pi}{2} - \beta, \quad A = \frac{\pi}{2} + \alpha,$$

$$b = \frac{\pi}{2} - \delta, \quad B = \frac{\pi}{2} - \lambda,$$

$$c = \varepsilon, \quad C = \bar{S},$$

et tout ce qui a été dit plus haut s'appliquera sans difficulté.

Passage des coordonnées horizontales aux coordonnées équatoriales.

— On passe d'abord comme on sait — des coordonnées équatoriales célestes aux coordonnées horaires, à l'aide de la relation générale.

$$A = H + \alpha,$$

t étant le temps sidéral local.

Pour passer maintenant des coordonnées horaires aux coordonnées horizontales, prenons pour ζ le pôle de l'équateur, et pour ζ' le zénith; on pourra appliquer tout ce qui précède en faisant

$$i = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

φ désignant la latitude, $\sigma = \sigma' = \frac{\pi}{2}$, $\psi = H$, $\psi' = A$, $\theta = \delta$, $\theta' = h$.

Les éléments du triangle de position seront :

$$a = \frac{\pi}{2} - h, \quad A = H,$$

$$b = \frac{\pi}{2} - \delta, \quad B = \pi - A,$$

$$c = \frac{\pi}{2} - \varphi, \quad C = \bar{S},$$

sans qu'il y ait confusion possible sur le double emploi momentané de la lettre A .

En particulier on a les relations fréquemment employées :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \cos h \cos A = -\cos \varphi \sin \delta + \sin \varphi \cos \delta \cos H, \\ \cos h \sin A = \cos \delta \sin H, \\ \sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H, \end{array} \right.$$

avec les formules différentielles.

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \cos h \, dA = \cos S \cos \delta \, dH + \sin S \, d\delta - \sin h \sin A \, d\varphi, \\ d h = -\sin S \cos \delta \, dH + \cos S \, d\delta - \cos A \, d\varphi. \end{array} \right.$$

Mouvement diurne. — Nous allons appliquer ces résultats à l'étude des apparences du mouvement diurne, c'est-à-dire à l'étude du mouvement apparent d'un astre qui a une ascension droite et une déclinaison fixes, au moins pendant un certain temps. C'est le cas des étoiles d'une façon à peu près rigoureuse; pour les autres astres, Soleil, Lune, Planètes, Comètes, les coordonnées célestes α et δ varient continuellement, mais d'une façon assez lente pour que pendant l'intervalle d'un jour, leur mouvement soit sensiblement le même que celui d'une étoile voisine.

L'ascension droite α étant fixe, la relation $H = t - L$ montre que l'angle horaire H varie proportionnellement au temps absolu. On peut donc prendre H comme variable indépendante, au même titre que le temps. La périodicité évidente du mouvement montre alors qu'il suffit de faire varier H dans un intervalle de 2π , de $-\pi$ à $+\pi$ par exemple.

Variation de la hauteur. — La seconde formule (2) donne:

$$\frac{dh}{dH} = -\sin S \cos \delta;$$

d'ailleurs, dans le triangle de position, on a:

$$\frac{\sin S}{\cos \varphi} = \frac{\sin A}{\cos \delta} = \frac{\sin H}{\cos h},$$

ce qui montre en passant, que les angles H, A, S , étant choisis entre $-\pi$ et $+\pi$ sont en même temps positifs ou négatifs;

donc:

$$\frac{dh}{dH} = -\frac{\cos \varphi \cos \delta}{\cos h} \sin H.$$

Quand H varie de $-\pi$ à 0 , $\sin H$ est négatif, et h croît; quand H varie de 0 à π , $\sin H$ est positif et h décroît.

La hauteur h est donc maxima pour $H=0$: l'astre est alors à son passage supérieur au méridien, ou à sa culmination supérieure. Au contraire la hauteur h est minima par $H=\pi$: l'astre est alors à son passage inférieur au méridien ou à sa culmination inférieure.

Si h_0 et h_1 , sont les valeurs maxima et minima de h ,

lorsque H varie de $-\pi$ à 0 , h augmente de h_1 à h_0 en variant toujours dans le même sens ; puis H variant de 0 à π , h diminue de h_0 à h_1 . Le mouvement de l'étoile pendant cette seconde période est d'ailleurs symétrique de son mouvement pendant la première période, par rapport au méridien.

Tout le passage supérieur si A_0 est l'azimut, on a, d'après les formules (1) :

$$\begin{aligned} \sin A_0 &= 0, \\ \cos h_0 \cos A_0 &= \sin(\varphi - \delta); \\ \sin h_0 &= \cos(\varphi - \delta); \end{aligned}$$

l'angle $\varphi - \delta$ est compris entre $-\pi$ et π ; si $\varphi - \delta > 0$, on a :

$$A_0 = 0, \quad h_0 = \frac{\pi}{2} - \varphi + \delta;$$

si $\varphi - \delta < 0$, on a :

$$A_0 = \pi, \quad h_0 = \frac{\pi}{2} + \varphi - \delta.$$

Dans le premier cas, le passage supérieur a lieu du côté du Sud ; dans le second cas, c'est du côté du Nord.

Si de même A_1 est l'azimut pour le passage inférieur, on a :

$$\begin{aligned} \sin A_1 &= 0, \\ \cos h_1 \cos A_1 &= -\sin(\varphi + \delta), \\ \sin h_1 &= -\cos(\varphi + \delta); \end{aligned}$$

$\varphi + \delta$ est compris entre $-\pi$ et π ; si $\varphi + \delta > 0$, on a :

$$A_1 = \pi, \quad h_1 = \varphi + \delta - \frac{\pi}{2};$$

si $\varphi + \delta < 0$, on a :

$$A_1 = 0, \quad h_1 = -\varphi - \delta - \frac{\pi}{2}.$$

Lever et Coucher - Circumpolaires. — L'étoile n'est visible que si sa hauteur est positive. Il faut donc savoir si celle-ci peut s'annuler. Faisant $h = 0$, la troisième formule (1) donne :

$$\cos H = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta.$$

Si la somme des valeurs absolues de φ et de δ , $|\varphi| + |\delta|$, est supérieure à $\frac{\pi}{2}$, cette équation en H n'a pas de racines : l'étoile reste toujours au-dessus ou au-dessous de l'horizon : on dit que c'est une circumpolaire. Si $\varphi \delta > 0$, on a $h_1 > 0$, et par suite l'étoile est toujours visible ; si au contraire $\varphi \delta < 0$, on a $h_0 < 0$, et l'étoile est toujours invisible.

Supposons maintenant $|\varphi| + |\delta| < \frac{\pi}{2}$; l'équation précédente a alors deux racines $-H'$ et $+H'$, H' étant compris entre 0 et π ; pour $H = -H'$, l'astre est dans l'horizon, mais sa hauteur croît; on dit qu'il est à son lever; pour $H = H'$, l'astre est encore dans l'horizon, mais sa hauteur décroît: il est à son coucher.

H' est l'arc semi-diurne, relatif aux valeurs de φ et δ .

Si $-A'$ et $+A'$ sont les azimuts qui correspondent à $-H'$ et $+H'$, A' étant comme H' compris entre 0 et π , on a :

$$\cos A' = -\frac{\sin \delta}{\cos \varphi},$$

comme le montre le triangle de position qui est alors rectilatère. On aurait aussi sans peine dans ce triangle :

$$\operatorname{tg}^2 \frac{H'}{2} = \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos(\varphi + \delta)}, \quad \operatorname{tg}^2 \frac{A'}{2} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi - \delta}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi + \delta}{2}\right)}$$

$A' - \frac{\pi}{2}$ est l'amplitude de l'étoile à son lever ou à son coucher.

Variation maxima de la hauteur. — Il est utile de savoir quand la hauteur varie le plus vite. Écrivons :

$$\frac{dh}{dH} = -\cos \varphi \sin A,$$

et nous voyons que la hauteur variera le plus rapidement lorsque $\sin A$ sera le plus grand possible en valeur absolue.

Nous sommes donc amenés à étudier la variation de l'azimut.

Variation de l'azimut. — On a :

$$\frac{dA}{dH} = \frac{\cos \delta \cos \delta'}{\cos h}$$

mais dans le triangle de position,

$$\cos h \cos \delta = \sin \varphi \cos \delta' - \cos \varphi \sin \delta \cos H;$$

donc

$$\frac{dA}{dH} = \frac{\cos^2 \delta \cos \varphi}{\cos^2 h} (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \delta \cos H).$$

Il faut distinguer deux cas. Si l'on a $|\varphi| > |\delta|$, on voit que $\frac{dA}{dH}$ garde toujours le même signe, qui est celui de φ ; l'azimut

va donc toujours en croissant ou en décroissant suivant que la latitude est positive ou négative: sa valeur au moment du passage supérieur est nulle, dans le premier cas, égale à π ou $-\pi$ dans le second.

Supposons maintenant $|\varphi| < |\delta|$. L'équation :

$$\cos H = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \delta}$$

admet deux racines $-H''$ et $+H''$, H'' étant compris entre 0 et π .

Or, si H , partant de $-\pi$, l'azimut commence à croître ou à décroître suivant que la déclinaison δ est positive ou négative, il atteint un maximum ou minimum $-A''$ pour $H = -H''$, A'' étant compris entre 0 et π ; il varie ensuite en sens contraire, et devient minimum ou maximum pour $H = +H''$; sa valeur est alors A'' ; enfin il recommence à croître ou à décroître. A'' est la plus grande digression de l'astre.

Lorsque l'astre est à sa plus grande digression, le triangle de position est rectangle en S' , puisque alors $\frac{dA}{dH} = 0$. Si h'' est la hauteur correspondante, on a :

$$\sin h'' = \frac{\sin \varphi}{\sin \delta}, \quad \sin A'' = \frac{\cos \delta}{\cos \varphi}, \quad \cos A'' = -\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} h''}.$$

Passage au premier vertical. — L'astre passe au premier vertical quand on a $A = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $\cos A = 0$. Ceci a lieu par suite pour

$$\cos H = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \varphi}.$$

Cette équation n'est possible que si l'on a $|\varphi| > |\delta|$, c'est-à-dire s'il n'y a pas plus grande digression. Elle admet alors deux racines $-H'''$ et $+H'''$, H''' étant compris entre 0 et π , et le triangle de position est rectangle au zénith. Si h''' est la hauteur correspondante, on a :

$$\sin h''' = \frac{\sin \delta}{\sin \varphi}.$$

Il est maintenant facile de savoir le moment de la plus grande variation de la hauteur h : ce sera pour le passage au premier vertical, ou pour le moment de la plus grande digression suivant que l'on a $|\varphi| > |\delta|$, ou $|\varphi| < |\delta|$.

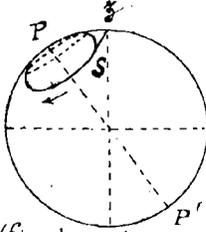
Toutefois, ceci n'a de valeur pratique que si la hauteur est alors positive, c'est-à-dire si l'on a $\varphi \delta > 0$; dans le cas contraire, la variation de hauteur observable est maxima au lever et au coucher.

Vérification géométrique. — Il est facile de se rendre compte géométriquement de la plupart des résultats précédents. On sera amené à distinguer quatre cas principaux différents suivant que la latitude φ sera positive ou négative, plus grande ou plus petite en valeur absolue que $\frac{\pi}{4}$; et dans chacun de ces cas principaux, cinq classes différentes d'étoiles, suivant leurs valeurs de la déclinaison δ .

Supposons par exemple $\varphi > \frac{\pi}{4}$, ainsi qu'il arrive à Lorient, où l'on a, à l'Observatoire,

$$\varphi = 48^\circ 50' 11''.$$

a) On a $\delta > \varphi$.



(fig. a)

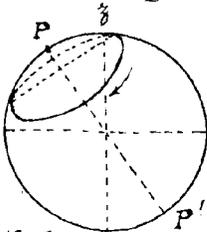
L'étoile qui semble toujours décrire dans le sens rétrograde un petit cercle ayant pour pôle sphérique le pôle du monde P, est circumpolaire, toujours visible; ses deux passages au méridien ont lieu du côté du Nord et l'on a:

$$h_0 = \frac{\pi}{2} + \varphi - \delta, \quad h_1 = \varphi + \delta - \frac{\pi}{2}.$$

Il y a une plus grande digression, qui correspond aux points tels que S où la trajectoire de l'étoile est tangente au vertical correspondant ZS.

L'angle horaire H variant de $-\pi$ à 0, l'azimut augmente d'abord de $-\pi$ à $-A''$, puis diminue de $-A''$ à $-\pi$; H variant de 0 à π , l'azimut diminue de π à A'' , puis augmente de A'' à π . La plus grande digression A'' est supérieure à $\frac{\pi}{2}$, puisqu'il n'y a pas passage au premier vertical.

b) On a $\frac{\pi}{2} - \varphi < \delta < \varphi$.



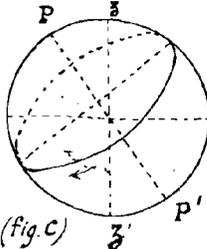
(fig. b)

L'étoile est encore circumpolaire, toujours visible; le passage supérieur a lieu du côté du Sud, le passage inférieur du côté du Nord, et l'on a

$$h_0 = \frac{\pi}{2} - \varphi + \delta, \quad h_1 = \varphi + \delta - \frac{\pi}{2}.$$

L'azimut va toujours en croissant de $-\pi$ à $+\pi$, quand H varie de $-\pi$ à $+\pi$.

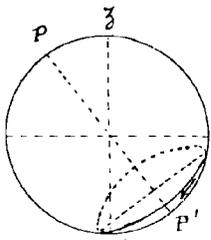
c) On a $-\frac{\pi}{2} + \varphi < \delta < \frac{\pi}{2} - \varphi$.



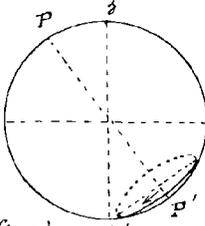
(fig. c)

L'étoile a un lever et un coucher; son passage supérieur a lieu du côté du Sud avec

$$h_0 = \frac{\pi}{2} - \varphi + \delta.$$



(fig. d)



(fig. e)

L'azimut va toujours en croissant.

$$d) \text{ On a } -\varphi < \delta < -\frac{\pi}{2} + \varphi.$$

L'étoile est une circumpolaire toujours invisible ;

L'azimut croît toujours.

$$e) \text{ On a } \delta < -\varphi.$$

L'étoile est encore une circumpolaire toujours invisible ; mais il y a une plus grande dégression. L'azimut décroît d'abord de 0 à $-A''$, puis croît de $-A''$ à A'' , décroît de A'' à 0 ; A'' est ici inférieur à $\frac{\pi}{2}$.

On fera une discussion analogue dans les trois autres cas principaux.

Direction du mouvement diurne. — La direction du mouvement diurne, c'est-à-dire celle de la tangente menée à la trajectoire apparente d'une étoile dans le sens du mouvement, a évidemment pour coordonnées horaires $H' = H + \frac{\pi}{2}$, $\delta' = 0$, H étant l'angle horaire de l'astre. Son azimut A' et sa hauteur h' sont donc définis par les relations :

$$\cos h' \cos A' = -\sin \varphi \sin H',$$

$$\cos h' \sin A' = \cos H',$$

$$\sin h' = -\cos \varphi \sin H' ;$$

pour $H' = 0$, on a donc $A' = \frac{\pi}{2}$, $h' = 0$; pour $H' = \pi$, on a $A' = -\frac{\pi}{2}$, $h' = 0$.

Chapitre VI.

Réfraction Astronomique

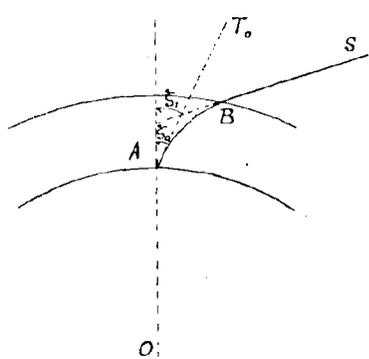
Énoncé du problème. — Les rayons lumineux qui traversent l'atmosphère terrestre sont sensiblement déviés : le pouvoir réfringent de cette atmosphère est en effet sensible, quoique petit. Le problème général des réfractions atmosphériques est surtout un problème de Physique : nous n'en traiterons ici que la partie connue sous le nom de réfraction astronomique.

Voici les premières hypothèses qui servent de base à cette théorie.

Tous supposons que l'atmosphère est limitée, disposée autour du lieu A d'observation en couches homogènes, sphériques, à l'état d'équilibre, admettant comme centre commun le point O , centre de la surface sphérique que l'on peut confondre avec la surface mathématique de la Terre aux environs de A , et situé par suite sur la verticale de A . L'indice de réfraction absolu, c'est-à-dire par rapport au vide, de ces couches successives sera de plus une fonction continue de leur rayon, et prendra la valeur 1 à la limite de l'atmosphère.

Il est facile de voir ce que ces premières hypothèses renferment d'arbitraire : il est manifeste cependant qu'elles doivent correspondre à la réalité d'une façon très approchée.

Imaginons alors un rayon lumineux se propageant dans le vide vers la Terre et provenant d'un point S que nous regarderons d'abord comme infiniment éloigné : sa route est rectiligne. Mais à partir du moment où il pénètre dans l'atmosphère en B , il suit une courbe déterminée par les lois de la réfraction pour arriver en A , au lieu d'observation. Inversement, d'après le principe du retour des rayons, un rayon lumineux part de A pour aller en B puis en S , en suivant la même route en sens inverse, et par suite, en raison de la parfaite symétrie autour de la verticale de A qui résulte des hypothèses faites, la route de lumière ABS est entièrement située dans un plan vertical.



En d'autres termes, il n'y a pas de réfraction en azimut ; les distances zénithales (ou les hauteurs) seules sont altérées par la réfraction.

Mais on ne doit pas oublier que ces conclusions ne peuvent pas être considérées comme absolument rigoureuses, puis qu'elles résultent d'hypothèses qui ne représentent la réalité que d'une façon approchée.

il en sera de même pour tout ce qui suivra.

La distance zénithale vraie de S est l'angle ζ_0 , que fait BS avec OA ; la distance zénithale apparente de S est l'angle ζ_1 que fait avec OA la tangente AT_0 en A à la courbe de lumière. La réfraction astronomique, R , est l'angle dont tourne le rayon lumineux en allant de B en A , de sorte que

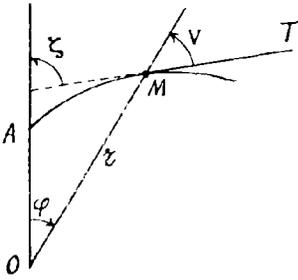
$$R = \zeta_1 - \zeta_0, \text{ ou } \zeta_1 = \zeta_0 + R ;$$

si h_1 et h_0 sont les hauteurs vraie et apparente de S , on a aussi :

$$h_1 = h_0 - R.$$

La réfraction est toujours positive comme nous le verrons; donc on peut dire que la réfraction relève les astres.

Equation de la trajectoire lumineuse. — Si M est un point—



quelconque de la route de lumière, nous le définirons par ses coordonnées polaires, savoir: la distance OM ou r , et l'angle φ que fait la verticale OA avec OM .

Si alors V est l'angle de la tangente MT avec le rayon vecteur OM , compté comme l'indique la figure, et si ζ est la distance zénithale de la direction MT , on

a toujours la relation

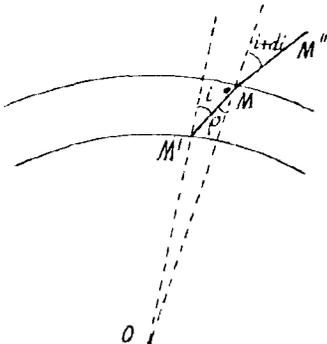
$$\zeta = \varphi + V.$$

D'une façon générale nous affecterons de l'indice 0 les diverses quantités qui se rapportent au lieu d'observation A , et de l'indice 1 celles qui se rapportent au point d'entrée B dans l'atmosphère; dans ces conditions, la tangente en B à la trajectoire étant évidemment BS , on peut écrire

$$R = \int_C d\zeta,$$

l'intégrale affectée de la lettre C étant, comme dans ce qui suivra, une intégrale curviligne prise suivant la courbe de lumière depuis le point A jusqu'au point B .

La loi connue de la réfraction permet de trouver facilement l'équation de la trajectoire lumineuse, en regardant l'indice de réfraction de l'atmosphère au point M , soit n , comme une fonction déterminée de r .



Considérons à cet effet l'élément MM' de trajectoire contenu dans la couche atmosphérique d'indice n , limitée par les sphères de centre O et de rayons r et $r + dr$; puis de plus MM'' l'élément voisin, contenu dans la couche d'indice $n + dn$; soit enfin $i + di$ l'angle d'incidence en M , i' l'angle d'incidence en M' , et r l'angle de réfraction en M .

La loi de Descartes donne :

$$(n + dn) \sin(i + di) = n \sin \rho ;$$

d'autre part dans le triangle OMM' , on a :

$$(r + dr) \sin \rho = r \sin i ;$$

éliminant $\sin \rho$ il vient :

$$(n + dn)(r + dr) \sin(i + di) = n r \sin i ,$$

c'est-à-dire que l'on a la relation

$$n r \sin i = C^{\text{cte}} .$$

L'angle i n'est d'ailleurs autre que l'angle V défini précédemment, de sorte que l'équation différentielle de la trajectoire lumineuse est finalement :

$$n r \sin V = C ,$$

et d'après les conditions initiales en A on a :

$$C = n_0 r_0 \sin \zeta_0 .$$

Il est facile avec cette équation de trouver le sens de la concavité de la trajectoire ; faisons $\frac{1}{r} = u$ de sorte que

$$C u = n \sin V ;$$

on a la relation connue $\text{tg } V = -\frac{u}{u'}$, en marquant par un accent la dérivée de u par rapport à l'angle polaire φ . Donc :

$$C^2 u^2 = n^2 \frac{u^2}{u^2 + u'^2} \text{ ou } u^2 + u'^2 = \frac{n^2}{C^2} ;$$

différentiant par rapport à φ , il vient :

$$u'(u + u'') = \frac{n n'}{C^2} ;$$

u et n sont positifs ; donc d'après une règle connue, la trajectoire tournera sa concavité vers le pôle O si le rapport $\frac{n'}{u}$ est positif, c'est-à-dire encore si $\frac{dn}{dr}$ est négatif, ou bien si n décroît lorsque r augmente ; ce sera l'inverse dans le cas contraire. Ces conclusions étaient d'ailleurs évidentes a priori.

Expression de R . — En différentiant l'équation de la trajectoire,

il vient :

$$\frac{dn}{n} + \frac{dr}{r} + \frac{dV}{\operatorname{tg} V} = 0 ;$$

remplaçant $\frac{dr}{r}$ par $\frac{d\varphi}{\operatorname{tg} V}$, on a :

$$\frac{dn}{n} + \frac{1}{\operatorname{tg} V} (d\varphi + dV) = 0 ;$$

mais $\zeta = \varphi + V$; donc :

$$d\zeta = -\frac{dn}{n} \operatorname{tg} V ,$$

et l'on a pour expression de la réfraction

$$R = -\int_c \operatorname{tg} V \frac{dn}{n} .$$

Mais $\sin V = \frac{n_0 r_0 \sin \zeta_0}{n r}$,

de sorte que

$$\operatorname{tg} V = \frac{\frac{n_0 r_0}{n r} \sin \zeta_0}{\varepsilon \sqrt{1 - \left(\frac{n_0}{n}\right)^2 \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \sin^2 \zeta_0}} ,$$

Et ayant pour valeur ± 1 suivant que V est aigu ou obtus.
Finalement on peut écrire :

$$R = \int_c \frac{\frac{r_0}{r} d\left(\frac{n_0}{n}\right)}{\varepsilon \sqrt{\cot^2 \zeta_0 + 1 - \left(\frac{n_0}{n}\right)^2 \left(\frac{r_0}{r}\right)^2}} ;$$

Et aura d'abord le signe de $\cos \zeta_0$, et changera ensuite de signe lorsque le radical s'annulera, si ce fait se produit, c'est-à-dire évidemment si $\cos \zeta_0$ est négatif.

Nouvelles hypothèses . — Si l'indice de réfraction n était une fonction connue de ρ , on pourrait sans peine calculer l'intégrale R . Mais il n'en est pas ainsi. Voici d'abord les nouvelles hypothèses que nous pouvons faire légitimement. Si ρ est la densité (ou masse spécifique) de l'air dans la couche d'indice n , nous admettrons, comme on le fait aujourd'hui, que cette densité est

proportionnelle à $n-1$, de sorte que l'on peut écrire, avec les conventions déjà faites,

$$\frac{n-1}{n_0-1} = \frac{f}{f_0}.$$

De plus, nous supposons les lois de Mariotte et de Gay-Lussac rigoureusement applicables dans toute l'étendue de l'atmosphère, de sorte que si p et t désignent la pression et la température absolue de l'air dans la couche d'indice n , on a, en faisant encore abstraction de l'humidité de l'air, la relation :

$$\frac{p}{p_0} = \frac{f}{f_0} \frac{t}{t_0}$$

Si enfin g désigne l'intensité de la pesanteur dans la couche déjà considérée d'indice n , la condition d'équilibre de l'air s'exprime évidemment par la relation.

$$dp = -g p dr;$$

d'ailleurs, en négligeant l'attraction insensible des couches d'air inférieures, on a

$$g r^2 = g_0 r_0^2,$$

de sorte que l'on peut écrire :

$$d\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{g_0 r_0 f_0}{p_0} \frac{f}{f_0} d\left(\frac{r_0}{r}\right).$$

Faisant donc :

$$n_0 = 1 + \alpha, \quad \frac{p_0}{g_0 r_0 f_0} = \beta, \quad \frac{f}{f_0} = \omega, \quad \frac{p}{p_0} = \chi, \quad \frac{t}{t_0} = \theta.$$

les hypothèses précédentes sont réduites par les relations fondamentales :

$$n = 1 + \alpha \omega, \quad \chi = \omega \theta, \quad \beta d\chi = \omega d\left(\frac{r_0}{r}\right).$$

Nous avons aussi introduit trois fonctions nouvelles, ω, χ, θ , en même temps que trois relations reliant ces fonctions à n et r . Il manque donc toujours une relation pour que le problème soit complètement déterminé, par exemple une relation entre θ et ω , c'est-à-dire la connaissance de la loi de variation de la température de l'air en fonction de la densité. Nous laisserons d'abord cette loi indéterminée, et nous observerons seulement qu'au lieu d'observation A, on a :

$$\omega_0 = \chi_0 = \theta_0 = 1;$$

au point B, à la limite de l'atmosphère puisqu'alors $n_1 = 1$, on a $\omega_1 = \chi_1 = 0$, d'après les relations écrites; on a de plus $\theta_1 = 0$, car si θ tendait vers une limite non nulle quand on se rapproche de B, la formule

$$d\left(\frac{r_0}{r}\right) = \frac{\beta d\chi}{\omega} = \beta d\theta + \beta\theta \frac{d\omega}{\omega},$$

montre que $\frac{\tau_0}{\tau}$ ne pourrait être compris entre 0 et 1, ainsi qu'il est nécessaire, puisqu'alors l'intégration serait croisée le second membre sans limite.

Développement de R en série. — Posons $1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \left(\frac{n_0}{n}\right)^2 = 2u$, et remarquons que u reste toujours voisin de zéro, car $\frac{n_0}{n}$ et $\frac{r_0}{r}$ diffèrent peu de l'unité. Si donc $\cotg^2 \zeta_0$ est notablement supérieur à la valeur maxima de $2u$, c'est-à-dire si ζ_0 n'est pas voisin de 90° on voit que l'intégrale R peut se développer en série convergente ordonnée suivant les puissances impaires de $\text{tg } \zeta_0$. On a en effet:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\cotg^2 \zeta_0 + 2u}} &= \text{tg } \zeta_0 (1 + 2u \text{tg}^2 \zeta_0)^{-1/2} \\ &= \text{tg } \zeta_0 - u \text{tg}^3 \zeta_0 + \frac{1.3}{1.2} u^2 \text{tg}^5 \zeta_0 - \frac{1.3.5}{1.2.3} u^3 \text{tg}^7 \zeta_0 + \dots \end{aligned}$$

on peut donc écrire :

$$R = A \text{tg } \zeta_0 - B \text{tg}^3 \zeta_0 + C \text{tg}^5 \zeta_0 - D \text{tg}^7 \zeta_0 + \dots,$$

en faisant :

$$A = \int_c \frac{\tau_0}{r} d\left(\frac{n_0}{n}\right),$$

$$B = \int_c u \frac{\tau_0}{r} d\left(\frac{n_0}{n}\right),$$

$$C = \frac{3}{2} \int_c u^2 \frac{\tau_0}{r} d\left(\frac{n_0}{n}\right),$$

$$D = \frac{5}{2} \int_c u^3 \frac{\tau_0}{r} d\left(\frac{n_0}{n}\right),$$

Pour la commodité du calcul nous ferons $\frac{\tau_0}{\tau} = 1 - \rho$, de sorte que ρ augmente avec r , et que l'on a la relation :

$$\omega d\rho = -\beta d\chi;$$

on a d'ailleurs $\rho_0 = 0$: ρ , dépend de la hauteur inconnue de

l'atmosphère, mais est petit certainement. On voit que χ diminue régulièrement de 1 à 0, quand ρ varie de 0 à ρ_1 ; nous supposons qu'il en est de même de θ , c'est-à-dire que la température diminue quand l'altitude augmente. Enfin nous supposons encore qu'il en est de même de ω ; la densité, et par suite aussi l'indice de réfraction de l'air, diminue donc à mesure qu'on s'élève.

D'après la valeur de π , on a :

$$u = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{n_0}{n} \right)^2 + \rho \left(\frac{n_0}{n} \right)^2 - \frac{\rho^2}{2} \left(\frac{n_0}{n} \right)^2,$$

et l'on est amené pour calculer A, B, C, \dots à évaluer des intégrales de la forme :

$$I = \int_c \rho^p \left(\frac{n_0}{n} \right)^q d \left(\frac{n_0}{n} \right),$$

p et q étant des entiers positifs ou nuls.

Cette intégrale a d'ailleurs tous ses éléments positifs d'après les hypothèses faites.

Si p est nul, l'intégration est immédiate et donne

$$I = \frac{(1+\alpha)^{q+1} - 1}{q+1}.$$

Si p n'est pas nul, observons que $\frac{n_0}{n}$ reste compris entre 1 et $1+\alpha$; par suite en remplaçant $\frac{n_0}{n}$ par 1 sous le signe \int , on ne commet qu'une erreur relative de l'ordre de α . Tolérant cette erreur, on peut écrire.

$$I = \int_c \rho^p d \left(\frac{n_0}{n} - n_0 \right);$$

intégrant par parties et remarquant que $\rho^p \left(\frac{n_0}{n} - n_0 \right)$ s'annule aux deux limites, on a :

$$I = -p \int_c \left(\frac{n_0}{n} - n_0 \right) \rho^{p-1} d\rho;$$

remplaçons $d\rho$ par $-\frac{\beta d\chi}{\omega}$, et remarquons que $\omega = \frac{n-1}{\alpha}$; il vient :

$$I = -p\alpha\beta \int_c \frac{n_0}{n} \rho^{p-1} d\chi;$$

on peut encore, comme plus haut, remplacer $\frac{n_0}{n}$ sous le signe \int par l'unité, et il reste, avec une erreur relative de l'ordre de α :

$$I = -p \alpha \beta \int_c \rho^{p-1} d\chi.$$

Si $p = 1$, on a simplement $I = \alpha \beta$.

Si p est supérieur à 1 intégrons par parties, comme ci-dessus ; on a :

$$I = p(p-1) \alpha \beta \int_c \rho^{p-2} \chi d\rho.$$

La relation $\chi = \omega \theta$ montre que l'on a $\chi \leq \omega$, puisque $\theta \leq 1$. Donc on peut écrire :

$$I \leq p(p-1) \alpha \beta \int_c \rho^{p-2} \omega d\rho,$$

ou bien, puisque $\omega d\rho = -\beta d\chi$,

$$I \leq -p(p-1) \alpha \beta^2 \int_c \rho^{p-2} d\chi.$$

Si donc $p=2$, on a $I \leq 1.2. \alpha \beta^2$.

Si $p > 2$, on continue de même et finalement :

$$I \leq 1.2.3. \dots p. \alpha \beta^p.$$

Telles sont les seules conclusions qui résultent des hypothèses faites ; elles ne peuvent être plus précises, puisque nous avons laissé une indétermination dans le problème.

Si nous les appliquons au calcul de A, B, C, \dots elles nous conduisent à des résultats très importants. On a immédiatement :

$$A = \alpha - \alpha \beta ;$$

le premier terme est exact, et l'erreur relative sur le second est de l'ordre de α , de sorte que l'erreur relative sur A est de l'ordre de $\alpha \beta$.

Considérons maintenant B ; ce coefficient se compose d'abord d'une partie que l'on peut calculer exactement et qui est

$$\int_c \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{n_0}{n} \right)^2 \right) d \left(\frac{n_0}{n} \right) = -\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^3}{6},$$

et d'une partie qui ne peut être calculée qu'approximativement ; c'est :

$$\int_c (1-\omega) \left(\omega - \frac{\omega^2}{2} \right) d \left(\frac{n_0}{n} \right),$$

avec une erreur relative de l'ordre de α ; la valeur de cette intégrale est $\alpha \beta$, en négligeant nécessairement les termes d'ordre

$\alpha\beta^2$ qu'on ne connaît pas.

De la même façon C contient d'abord une partie exacte qui est de l'ordre de α^3 et une autre partie dont on ne peut fixer qu'une limite supérieure, de l'ordre de $\alpha\beta^2$.

De même encore D contient une partie exacte de l'ordre de α^4 , et une partie dont la limite supérieure est de l'ordre de $\alpha\beta^3$.

Et ainsi de suite.

En résumé, on peut donc écrire, et cela indépendamment de toute hypothèse sur la loi de variation de θ en fonction de co ,

$$R = \alpha(1-\beta) \operatorname{tg} \zeta_0 - \alpha\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{tg}^3 \zeta_0,$$

en ne commettant qu'une erreur absolue de l'ordre de $\alpha\beta^2$; on peut même ajouter que l'erreur relative sur le coefficient de $\operatorname{tg} \zeta_0$ est de l'ordre de $\alpha\beta$; de plus les coefficients inconnus de $\operatorname{tg}^5 \zeta_0$, $\operatorname{tg}^7 \zeta_0$, ... sont respectivement de l'ordre de $\alpha\beta^2$, $\alpha\beta^3$, ...

Ces résultats sont importants si l'on observe que α et β sont petits, β étant d'ailleurs plus grand que α , ainsi qu'on l'a implicitement supposé dans l'énoncé précédent, où l'on a négligé α^3 et $\alpha^2\beta$ devant $\alpha\beta^2$, α^4 devant $\alpha\beta^3$, etc...

Plaçons-nous en effet dans des conditions moyennes, en supposant qu'au lieu d'observation la température soit de 0° centigrade, la pression de $0^m,76$ de mercure, et la distance R_0 de 6371^{km} . Prenons alors, suivant M. Mascart, $n_0 = 1,0002927$; et adoptons pour la densité du mercure $13,596$, pour le poids du litre d'air $1^g,2932$.

$$\text{On aura } \alpha = 0,0002927 = 60",37$$

$$\beta = \frac{0,76 \times 13,596}{1,2932 \times 6371000} = \frac{1}{797} = 0,001254.$$

Dat suite la formule établie ci-dessus:

$$R = \alpha(1-\beta) \operatorname{tg} \zeta_0 - \alpha\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{tg}^3 \zeta_0.$$

fournira la valeur de la réfraction à moins de $0",1$ près, tant que l'on aura $\zeta_0 < 75^\circ$.

La valeur de α , pour les conditions de température et de pression indiquées plus haut, sera pour nous la constante de la réfraction.

Réfraction horizontale. Pour étudier la réfraction dans le cas de grandes distances zénithales, c'est-à-dire dans le voisinage de

l'horizon, faisons

$$\frac{\pi_0}{\pi} d\left(\frac{n_0}{n}\right) = \varphi(u) du,$$

φ étant une fonction à déterminer. On a alors

$$R = \int_c \frac{\varphi(u) du}{\sqrt{\cotg^2 \zeta_0 + 2u}};$$

nous appellerons u_1 , la valeur inconnue de u qui correspond à la limite de l'atmosphère, et nous observerons que le radical commence par être négatif lorsque ζ_0 est supérieur à 90° .

L'ignorance où nous sommes de la vraie nature de la fonction θ , regardée comme dépendant de ω ou de ρ , nous permet de regarder la fonction $\varphi(u)$ comme indéterminée : au lieu de faire différentes hypothèses sur θ , nous pouvons faire différentes hypothèses sur φ .

Toutefois ces hypothèses ne peuvent être complètement arbitraires : la définition de u et de $\varphi(u)$ permet de regarder $\frac{\pi_0}{r}$, $\frac{n_0}{n}$ et par suite ω comme des fonctions de u ; il faudra donc que $\frac{n_0}{n}$ varie de 1 à $1 + \alpha$ quand u varie de 0 à u_1 ; il faudra aussi que l'intégrale

$$-\int_c \omega d\left(\frac{r_0}{r}\right) \text{ ou } -\int_c \beta d\chi$$

soit égale à β . Mais ces conditions vérifiées, nous pourrions choisir $\varphi(u)$ comme nous voudrions, de façon par exemple à rendre immédiat le calcul de R ; quel que soit le choix fait, on retrouvera les résultats précédents pour les valeurs de ζ_0 inférieures à 75° ; mais la réfraction horizontale variera notablement avec ce choix.

Pour nous rapprocher le plus possible de la vérité, examinons ce qu'on peut dire de θ . L'observation nous apprend que l'on peut regarder, sans grande erreur, θ comme étant de la forme ω^f , f étant petit, $0,2$ environ. Avec cette hypothèse, on a immédiatement

$$\chi = \omega^{f+1}, \quad \omega = \left(1 - \frac{\beta}{S_1}\right)^{\frac{1}{f}},$$

en faisant $S_1 = \frac{\beta(1+f)}{f}$. Ceci résulte de la relation

$$\omega d\beta = -\beta d\chi,$$

qui donne par intégration $\delta, -S = \beta \frac{1+S}{S} \omega^S$

La partie principale de u est δ , et $d\left(\frac{n_0}{n}\right)$ est évidemment proportionnelle à $d\omega$; la fonction $\varphi(u)$ est donc évidemment proportionnelle à $\frac{d\omega}{d\delta}$ ou encore, en confondant δ avec u comme on vient de le dire, à

$$\left(1 - \frac{u}{u_1}\right)^{\frac{1}{S} - 1}$$

La présence de ce facteur rend le calcul de R peu simple; mais les couches atmosphériques qui influent le plus sur la réfraction sont les basses couches pour lesquelles $\frac{u}{u_1}$ est petit; et, dans ce cas, on a approximativement:

$$1 - \frac{u}{u_1} = e^{-\frac{u}{u_1}},$$

en désignant par e la base des logarithmes népériens. Ceci réflexions nous amènent finalement à prendre la fonction $\varphi(u)$ sous la forme

$$\varphi(u) = a e^{-ku},$$

a, k, u_1 , étant trois constantes à déterminer. Ce choix, qui pourrait se justifier par d'autres raisons, a l'avantage de rendre le calcul de R suffisamment simple et de correspondre très exactement à la réalité.

Nous avons déjà indiqué deux conditions nécessaires que doit vérifier la fonction $\varphi(u)$, et qui fournissent deux relations entre les inconnues a, k, u_1 . Pour trouver une troisième relation entre ces quantités, nous écrirons que l'on a bien, au lieu d'observation A , l'égalité

$$\left(\frac{d\theta}{d\omega}\right)_0 = f,$$

qui résulte de la forme ω^S primitivement supposée pour θ .

De cette façon, le mode de décroissement de la température avec la densité, tel qu'il résulte du choix fait, sera conforme à l'expérience, au moins dans le voisinage du lieu d'observation.

En A , on a les relations:

$$\left[d\left(\frac{n_0}{n}\right)\right]_0 = -\frac{\alpha}{1+\alpha} (d\omega)_0 = a (du)_0,$$

$$(du)_0 + \left[d\left(\frac{r_0}{r}\right)\right]_0 + \left[d\left(\frac{n_0}{n}\right)\right]_0 = 0,$$

$$\left[d \left(\frac{r_0}{r} \right) \right]_0 = \beta (d \chi)_0 = \beta (d \theta)_0 + \beta (d \omega)_0 = \beta (1+f) (d \omega)_0;$$

on en tire immédiatement.

$$a = \frac{\alpha}{\beta (1+\alpha)(1+f) - \alpha}$$

Pour trouver les deux autres relations qui lient a, k, u_1 , développons en série suivant les puissances croissantes de $\operatorname{tg} \zeta_0$ l'intégrale

$$R = \int_0^{u_1} \frac{a e^{-ku} du}{\sqrt{\cot^2 \zeta_0 + 2u}},$$

et écrivons que le résultat est de la forme $A \operatorname{tg} \zeta_0 - B \operatorname{tg}^3 \zeta_0 + \dots$, A et B ayant les valeurs très suffisamment approchées calculées plus haut $A = \alpha (1 - \beta)$, $B = \alpha \left(\beta - \frac{\alpha}{2} \right)$, qui sont indépendantes de toute hypothèse sur la fonction θ . On a ainsi :

$$A = \int_0^{u_1} a e^{-ku} du = \frac{a}{k} (1 - e^{-ku_1}),$$

$$B = \int_0^{u_1} a e^{-ku} u du = \frac{A}{k} - \frac{a}{k} u_1 e^{-ku_1},$$

cette dernière égalité résultant immédiatement de l'intégration par parties.

Posons $k = \frac{a}{A} (1 - \mathcal{E})$, de sorte que $\mathcal{E} = e^{-ku_1}$; on a donc

$$u_1 = \frac{B}{A} + \left(\frac{A}{a} - \frac{B}{A} \right) \frac{1}{\mathcal{E}}, \quad ku_1 = -\log \mathcal{E},$$

le logarithme étant népérien; faisant $\frac{aB}{A^2} = h$, il en résulte pour déterminer \mathcal{E} , l'équation transcendante facile à résoudre

$$\frac{1 - \mathcal{E} + \mathcal{E} \log \mathcal{E}}{(1 - \mathcal{E})^2} = h.$$

Une fois cette équation résolue, on a

$$k = \frac{a}{A} (1 - \mathcal{E}), \quad ku_1 = -\log \mathcal{E}.$$

Il est facile maintenant de calculer R . En faisant le changement de variable

$$\frac{2x^2}{k} = \cotg^2 \zeta_0 + 2u,$$

et posant, comme on fait d'ordinaire,

$$\psi(x) = e^{x^2} \int_x^\infty e^{-x^2} dx,$$

on a immédiatement

$$\begin{aligned} R &= a \sqrt{\frac{2}{k}} \left[\psi\left(\sqrt{\frac{k}{2}} \cotg \zeta_0\right) - e^{-ku} \psi\left(\sqrt{\frac{k}{2}} (\cotg^2 \zeta_0 + 2u)\right) \right] \\ &= a \sqrt{\frac{2}{k}} \left[\psi\left(\sqrt{\frac{k}{2}} \cotg \zeta_0\right) - \varepsilon \psi\left(\sqrt{\frac{k}{2}} \cotg^2 \zeta_0 - \log \varepsilon\right) \right] \end{aligned}$$

et il est visible que cette formule s'applique sans modification aux distances zénithales apparentes ζ_0 supérieures à 90° .

Les tables étendues de la fonction $\psi(x)$ publiées par M. Kradau au tome XVIII des Annales de l'observatoire de Paris (mémoires) rendent facile le calcul de R sous cette forme.

La même méthode s'appliquerait sans difficulté si l'on adoptait pour $\varphi(u)$ une fonction de la forme

$$e^{-ku} (a + bu + cu^2 + \dots),$$

a, b, c étant des constantes que l'on peut déterminer à l'aide des dérivées successives de θ par rapport à ω au lieu d'observation.

En prenant pour α, β les valeurs qui nous ont déjà servi et faisant $f=0,2$ afin de nous rapprocher le plus possible de la théorie de la réfraction de M. Kradau, on trouve

$$\log_{10} a = 4,69710, \quad \log_{10} \varepsilon = \bar{2}.5030, \quad \log_{10} k = 2.90275,$$

a étant évalué en secondes d'arc, et les logarithmes étant décimaux. Dans ces conditions, pour $\zeta_0 = 90^\circ$, la réfraction horizontale proprement dite est égale à $2188''$ ou $36'28''$; les Tables de M. Kradau donnent à cette réfraction la valeur $2208''$; la différence est insignifiante, si l'on songe à l'incertitude de la correction de réfraction dans le voisinage de l'horizon.

La théorie que nous avons exposée correspond donc d'une façon largement suffisante à la réalité, et offre l'avantage d'une grande simplicité par rapport aux théories classiques de Laplace, de Bessel, etc., qui ne pourraient trouver place dans ce cours.

Réfraction moyenne. - Tables de réfraction. - La réfraction change avec les conditions météorologiques au lieu d'observation, puisqu'elle dépend des constantes α, β, f qui changent avec ces conditions. Pour obtenir facilement la réfraction R qui correspond à une distance zénithale apparente donnée, on construit d'abord une Table des réfractions moyennes, c'est-à-dire des réfractions qui correspondent à des conditions atmosphériques moyennes : des Tables auxiliaires permettent ensuite de passer de ces réfractions moyennes aux réfractions véritables qui correspondent aux conditions atmosphériques réellement observées.

Ces tables auxiliaires remplissent leur but avec plus ou moins de précision suivant la façon dont elles sont construites. Nous nous bornerons ici à indiquer comment on peut passer des réfractions moyennes aux réfractions vraies d'une façon suffisamment approchée pour la pratique.

Quand les distances zénithales apparentes sont faibles, la partie principale de R est $\alpha \operatorname{tg} \zeta_0$, et par suite R varie comme α ; nous admettrons ce résultat comme vrai dans tous les cas : il n'est qu'approché, mais il l'est suffisamment, puisque d'une part la réfraction contient en facteur α , à cause de la différentielle $d\left(\frac{n_0}{n}\right)$ qui figure dans l'intégrale R , et que d'autre part si l'exactitude de cette hypothèse diminue à mesure que ζ_0 grandit, il ne faut pas oublier que la réfraction est très incertaine dans le voisinage de l'horizon. Cette incertitude tient d'ailleurs à ce que le rayon lumineux demeure alors plus longtemps dans les basses couches de l'atmosphère, pour lesquelles les hypothèses fondamentales sont souvent assez loin d'être réalisées, et par suite peut subir, et subit en effet, des perturbations notables ainsi qu'il résulte de l'expérience.

Désignons par p_0 et t_0 la pression et la température absolue de l'air au lieu d'observation dans les conditions moyennes, et par p'_0 et t'_0 les mêmes grandeurs dans des conditions quelconques; si de plus n_0 et n'_0 sont les indices de réfraction dans les deux cas, et si l'on fait $n_0 = 1 + \alpha$, $n'_0 = 1 + \alpha'$, on voit que l'on a, d'après la relation admise entre l'indice et la densité,

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{p'_0}{p_0} \times \frac{t_0}{t'_0} \dots$$

La réfraction vraie, qui correspond aux conditions

p'_0 et t'_0 sera donc égale à la réfraction moyenne multipliée par le produit des deux facteurs

$$\frac{p'_0}{p_0} \quad \text{et} \quad \frac{t_0}{t'_0}.$$

Voici comment on applique pratiquement ce résultat. Supposons que les conditions moyennes soient définies par une température T_0 en degrés centigrades, et une hauteur H_0 de la colonne barométrique mercurienne, mesurée à la même température T_0 , et dans un lieu où l'accélération de la pesanteur est g_0 . Au lieu d'observation, l'accélération de la pesanteur est g , la température extérieure de l'air est T (en degrés centigrades), enfin la hauteur de la colonne barométrique telle qu'on l'observe directement est H' , et la température du baromètre est T' .

Soit H la hauteur barométrique réduite à la température T de l'air, et au lieu où l'intensité de la pesanteur est g_0 , de sorte que

$$H = H' \frac{g}{g_0} \left[1 - (m - k)(T' - T) \right],$$

en désignant par m le coefficient de dilatation absolue du mercure ($\frac{1}{5550}$), et k celui de l'échelle barométrique (généralement en laiton).

Orso on a

$$\frac{p'_0}{p_0} = \frac{H}{H_0} \left[1 - (m - k)(T - T_0) \right]$$

de plus

$$\frac{t_0}{t'_0} = \frac{1 + \delta T_0}{1 + \delta T},$$

en désignant encore par δ le coefficient de dilatation de l'air, 0,00367.

Finalement, on a donc

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{H}{H_0} \times \frac{1 + \delta T_0}{1 + \delta T} \left[1 - (m - k)(T - T_0) \right].$$

$\frac{H}{H_0}$ est le facteur barométrique et l'on voit que pour l'obtenir il faut d'abord réduire la hauteur observée H' à H ; quand à

$$\frac{1 + \delta T_0}{1 + \delta T} \left[1 - (m - k)(T - T_0) \right]$$

c'est le facteur thermométrique; le dernier terme est le moins

important et sera obtenu avec une approximation suffisante en faisant $m - k = \frac{1}{6000}$.

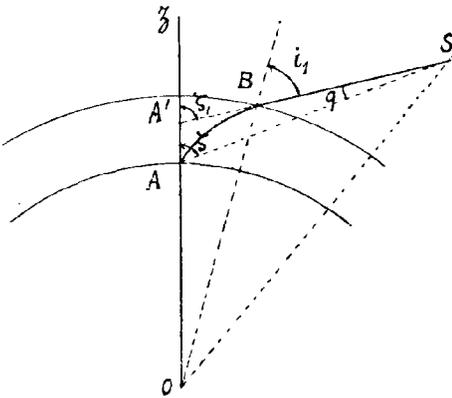
On passera de la réfraction moyenne à la réfraction vraie en la multipliant par les deux facteurs barométrique et thermométrique, qui en général, diffèrent peu de 1, de sorte que les multiplications se feront aisément.

La Table de réfraction, que l'on trouve dans la Compendium des Temps, donne les réfractions moyennes pour $T_0 = 10^\circ$ centigrades, $H_0 = 760 \text{ mm}$, à Paris; elle est construite d'après la théorie de Laplace.

Une seconde table fournit les facteurs barométrique et thermométrique pour les différentes pressions et températures que l'on rencontre d'habitude.

Si l'on veut une plus grande précision, il faudra se servir de tables plus complètes, par exemple de celles publiées par M. Rodau.

Cas où l'astre est à distance finie. — Dans ce qui précède nous



avons appris à corriger de la réfraction une direction: en d'autres termes l'astre S était supposé à l'infini. Supposons maintenant qu'il n'en soit plus ainsi.

Le rayon lumineux issu de S pénètre toujours en B dans l'atmosphère, et arrive au lieu d'observation A avec la distance zénithale apparente z ; la distance zénithale vraie de S est

alors l'angle de AS avec la verticale OAz en A soit z .

Si d'autre part z_1 , est la distance zénithale z_0 corrigée de la réfraction astronomique R , c'est-à-dire $z_0 + R$, z_1 est l'angle de BS avec la verticale Oz , angle qui a son sommet en A' , point de rencontre de Oz avec BS .

Si l'on appelle q l'angle à l'astre ASB , on a donc

$$z = z_1 - q = z_0 + R - q,$$

et tout revient à évaluer l'angle q .

En conservant les notations déjà employées, soit $OA = r_0$, $OB = r$, et $AA' = h$; l'indice de réfraction de l'air en A est n_0 , tandis qu'en B il est 1, enfin l'angle de OB avec BS est i_1 . D'après

l'équation connue de la trajectoire lumineuse AB , on a d'abord

$$\kappa_1 \sin i_1 = n_0 \kappa_0 \sin \zeta_0 ;$$

de plus le triangle $OA'B$ donne

$$(\kappa_0 + h) \sin \zeta_1 = \kappa_1 \sin i_1 ;$$

donc

$$1 + \frac{h}{\kappa_0} = n_0 \frac{\sin \zeta_0}{\sin \zeta_1} .$$

Cette première relation fournit h , que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{h}{\kappa_0} = \frac{n_0 \sin \zeta_0 - \sin \zeta_1}{\sin \zeta_1} ;$$

il est facile de voir que le second membre est toujours très petit: en effet, si ζ_0 n'est pas voisin de 90° , on a

$$n_0 = 1 + \alpha, \text{ et } R = \alpha \lg \zeta_0 ;$$

il vient par suite $\sin \zeta_1 = \sin (\zeta_0 + \alpha \lg \zeta_0) = \sin \zeta_0 + \alpha \sin \zeta_0$, sensiblement, et $n_0 \sin \zeta_0 - \sin \zeta_1$ est nul à ce degré d'approximation.

À la limite, si $\zeta_0 = 90^\circ$ on a sensiblement $\frac{h}{\kappa_0} = \alpha = 0,0003$ environ; le point A' est donc toujours très voisin de A .

Pour calculer q , faisons $OS = d$, et remarquons que pour l'astre le plus voisin de nous de beaucoup, la Lune, AS diffère peu de d . On peut alors écrire dans le triangle ASA' où q est très petit,

$$\begin{aligned} q &= \frac{h}{d} \sin \zeta_1 \\ &= \frac{\kappa_0}{d} (n_0 \sin \zeta_0 - \sin \zeta_1) . \end{aligned}$$

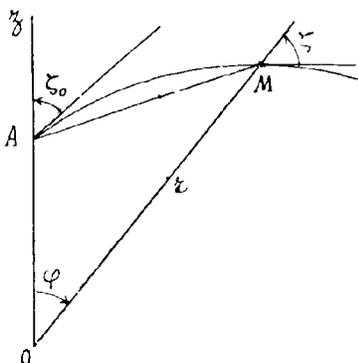
Cet angle q est donc toujours négligeable, d'après ce qui précède; il dépasse à peine en effet $1''$ dans l'horizon.

Si cependant, il devient nécessaire de tenir compte de cet angle, ceci ne peut arriver que dans le cas de la Lune; et alors d'habitude, on conserve $\zeta_1 = \zeta_0 + R$ pour la distance zénithale vraie, mais on suppose le lieu d'observation transporté en A' : c'est ce que l'on fait dans la théorie des éclipses de Soleil et des occultations d'étoiles par la Lune.

Pour exprimer en effet que l'on voit du point A , l'astre S

Dans l'horizon, par exemple, il suffit d'exprimer que la distance zénithale vraie de S vue de A est égale à $90^\circ + R$, R étant ici la réfraction horizontale proprement dite.

Réfraction terrestre. — Pour étudier sommairement les réfractions terrestres, considérons le point d'observation A où, comme plus haut, les éléments qui définissent le rayon et les conditions de l'air sont ζ_0, n_0, r_0 ; un rayon lumineux issu de A suit une courbe AM , dont chaque point M est défini par ses coordonnées polaires r et φ et pour laquelle l'angle du



rayon vecteur avec la tangente en M sera désigné par ζ . L'indice de l'air en M étant n , on a donc d'après ce qu'on a déjà vu :

$$nr \sin \zeta = n_0 r_0 \sin \zeta_0, \quad \lg \zeta = r \frac{d\varphi}{dr}$$

Si de plus ζ_1 est la distance zénithale vraie de M c'est-à-dire l'angle de AM avec la verticale Az , nous allons développer en série r, ζ, ζ_1 ,

suivant les puissances croissantes de l'angle φ , qui reste toujours très petit, tant que M est comme A , un objet terrestre.

On a d'abord

$$\frac{dr}{d\varphi} = r \cotg \zeta,$$

puis

$$d\zeta \cotg \zeta + \frac{dn}{n} + \frac{dr}{r} = 0,$$

d'où

$$\frac{d\zeta}{d\varphi} = -1 - \lg \zeta \frac{dn}{n d\varphi} = -1 - \frac{r dn}{n dr} = -(1-k),$$

en faisant

$$k = -\frac{r}{n} \frac{dn}{dr}.$$

On a ensuite

$$\frac{d^2 r}{d\varphi^2} = r \cotg^2 \zeta + r \operatorname{cosec}^2 \zeta (1-k),$$

$$\frac{d^2 \zeta}{d\varphi^2} = \frac{dk}{d\varphi} = r \cotg \zeta \frac{dk}{dr} = k' \cotg \zeta,$$

en faisant

$$k' = -\frac{r}{dr} d\left(\frac{r}{n} \frac{dn}{dr}\right); \text{ et ainsi de suite.}$$

Si donc on marque de l'indice 0 les valeurs de k, k', \dots relatives à A, on a :

$$\begin{cases} \frac{\pi}{\pi_0} = 1 + \cotg \zeta_0 \varphi + \left[\cotg^2 \zeta_0 + \operatorname{cosec}^2 \zeta_0 (1-k_0) \right] \frac{\varphi^2}{2} + \dots, \\ \zeta = \zeta_0 - (1-k_0) \varphi + k_0 \cotg \zeta_0 \frac{\varphi^2}{2} + \dots; \end{cases}$$

la convergence de ces formules est d'ailleurs augmentée par le fait que, dans le cas des réfracteurs terrestres, ζ_0 est voisin de $\frac{\pi}{2}$, et par suite $\cotg \zeta_0$ est très petit : on peut donc se contenter de la connaissance de k_0 .

On a maintenant dans le triangle OAM

$$\operatorname{tg} \zeta_1 = \frac{\pi \sin \varphi}{r \cos \varphi - r_0},$$

comme on le voit en projetant M en M' sur OA, et considérant le triangle rectangle AMM'. On a :

$$\frac{\pi}{\pi_0} \sin \varphi = \varphi + \cotg \zeta_0 \varphi^2 + \dots,$$

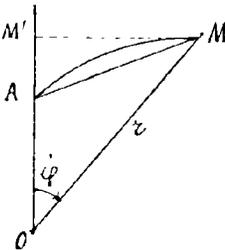
$$\frac{\pi}{\pi_0} \cos \varphi - 1 = \cotg \zeta_0 \varphi + \left[-1 + \cotg^2 \zeta_0 + \operatorname{cosec}^2 \zeta_0 (1-k_0) \right] \frac{\varphi^2}{2} + \dots,$$

et par suite

$$\operatorname{tg} \zeta_1 = \operatorname{tg} \zeta_0 + \frac{k_0}{\cos^2 \zeta_0} \frac{\varphi}{2} + \dots,$$

ou finalement

$$\zeta_1 = \zeta_0 + \frac{k_0}{2} \varphi + \dots$$



On voit ainsi que la réfraction proprement dite est sensiblement proportionnelle à φ , puisque c'est la différence $\zeta_1 - \zeta_0$.

La valeur du coefficient k_0 , telle qu'elle résulte des hypothèses que nous avons faites et précédemment dans l'étude de la réfraction astronomique, est facile à calculer ; en gardant toutes les notations déjà employées, on a en effet :

$$k_0 = -\frac{(\pi_0)}{\pi_0} \left(\frac{r}{n_0} \right) \frac{d \left(\frac{n_0}{r} \right)}{d \left(\frac{r_0}{r} \right)} = \frac{a}{a+1} = \frac{a}{\beta(1+\alpha)(1+f)},$$

d'où dans les conditions normales $k_0 = 0,1944$.

En réalité la valeur de k_0 est très incertaine et varie beaucoup avec les conditions météorologiques. Dans la pratique de la navigation, en particulier, on adopte la valeur moyenne $k_0 = 0,16$. Cette valeur diffère sensiblement de celle qui précède, mais il ne faut pas s'en étonner, car dans le cas des réfractions terrestres, les couches inférieures de l'atmosphère interviennent seules, tandis que pour la réfraction astronomique, c'est l'influence de l'atmosphère entière qui se fait sentir.

Dépression apparente de l'horizon. — Les formules ci-dessus permettent de résoudre tous les problèmes relatifs aux réfractions terrestres. Signalons seulement les suivants:

Appelons a le rayon de la surface sphérique de la mer, h , la hauteur de l'œil au dessus du niveau de la mer, et cherchons la dépression apparente D de l'horizon sensible, c'est-à-dire l'angle que fait avec l'horizon vrai de l'œil, le rayon visuel tangent à la surface de la mer. Il faut faire

$$\tau_0 = a + h, \quad \tau = a, \quad \zeta = \frac{\pi}{2}, \quad \zeta_0 = \frac{\pi}{2} + D.$$

Comme $\frac{h}{a}$ est très petit, on peut remplacer $\frac{a}{a+h}$ par $1 - \frac{h}{a}$, et comme D est petit aussi, on a avec une approximation suffisante

$$\frac{h}{a} = D \varphi - (1 - k_0) \frac{\varphi^2}{2} + \dots,$$

$$D = (1 - k_0) \varphi + \dots,$$

d'où l'on tire

$$D = \sqrt{(1 - k_0) \frac{2h}{a}}, \quad \varphi = \sqrt{\frac{1}{1 - k_0} \frac{2h}{a}}.$$

Si l'on exprime φ en minutes d'arc, on aura précisément de cette façon, comme l'on sait, la distance en milles marins de l'horizon sensible.

Exemple. — Faisons $k_0 = 0,16$, $a = 6371 \text{ km}$, $h = 10 \text{ m}$;

on a

$$D = 5' 35'', \quad \varphi = 6', 6''.$$

Soit encore à calculer la dépression apparente D du pied d'une côte qui borne l'horizon, connaissant φ , c'est-à-dire la distance de cette côte à l'observateur. On a les mêmes notations, sauf que ζ n'est plus égal à $\frac{\pi}{2}$, et on emploie l'unique équation

$$\frac{h}{a} = D \varphi - (1 - k_0) \frac{\varphi^2}{2} + \dots,$$

d'où avec une approximation suffisante :

$$D = \frac{h}{a} \frac{1}{\varphi} + (1 - k_0) \frac{\varphi}{2} .$$

Exemple - Avec les mêmes valeurs de k_0, a, h , soit $\varphi = 1'$;

on a
$$D = 18' 58''$$

Influence de la réfraction sur les coordonnées équatoriales

La réfraction altère les hauteurs, mais non les azimuts; elle altère par suite les autres coordonnées, par exemple les coordonnées équatoriales, dont l'usage est le plus fréquent.

Si nous marquons d'un accent les coordonnées apparentes d'une direction, tandis que les coordonnées vraies correspondantes sont indiquées par les mêmes lettres sans accent, nous aurons donc avec les notations habituelles

$$A' = A, \quad h' = h + R,$$

R désignant la réfraction relative à la hauteur apparente h' . Ces relations permettent de calculer rigoureusement H' et δ' .

Supposons comme application qu'il s'agisse de déterminer le lever ou le coucher apparent d'une étoile de déclinaison δ , en un lieu de latitude φ ; on a $h' = 0$, $h = -R_0$, R_0 désignant la réfraction horizontale proprement dite; alors dans le triangle de position on connaît les trois côtés et l'on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos H = - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta - \frac{\sin R_0}{\cos \varphi \cos \delta}, \\ \cos A = - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} R_0 - \frac{\sin \delta}{\cos \varphi \cos R_0}. \end{array} \right.$$

Il agira - nous maintenant dans le cas assez général où l'on peut négliger le carré de R ; l'emploi des formules différentielles suffira alors, et en faisant $A' - A = dA$, $h' - h = dh$, ... on aura d'à près ce qui a été vu antérieurement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \delta \, dH = - \sin S \cdot R \\ d\delta = \cos S \cdot R, \end{array} \right.$$

puisque $dA = 0$, $dh = R$. S désigne toujours l'angle parallactique déterminé ainsi que h , par les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H, \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{aligned} \cos h \sin \delta &= \cos \varphi \sin H, \\ \cos h \cos \delta &= \sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta \cos H, \end{aligned} \right\}$$

comme le montre immédiatement le triangle de position.

On prend généralement R sous la forme $k \cotg h$, k étant déterminé par cette relation même : ceci est avantageux, puisque, si la hauteur n'est pas très petite, k est sensiblement constant, d'après ce que nous avons vu plus haut ; en gardant les notations déjà employées, k est sensiblement égal à d .

On a alors :

$$\left\{ \begin{aligned} dA &= 0, \quad dh = k \cotg h, \\ \cos \delta \, dH &= -\frac{k \cos \varphi \sin H}{\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H}, \\ d\delta &= k \frac{\sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta \cos H}{\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H}; \end{aligned} \right.$$

on peut évidemment poser

$$\left\{ \begin{aligned} \cos \varphi \cos H &= \sin n \sin N, \\ \sin \varphi &= \sin n \cos N, \\ \cos \varphi \sin H &= \cos n, \end{aligned} \right.$$

et par suite

$$\left\{ \begin{aligned} \cos \delta \, dH &= -k \frac{\cotg n}{\sin(N+\delta)}, \\ d\delta &= k \cotg(N+\delta), \end{aligned} \right.$$

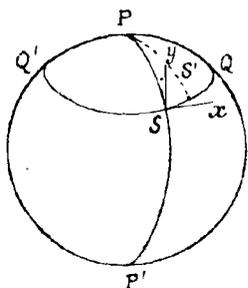
formules faciles à calculer.

Si α' et α désignent les ascensions droites apparentes et vraies, on a aussi $d\alpha + dH = 0$, puisque $\alpha + H = t$, t étant le temps sidéral.

Trajectoire apparente d'une étoile autour de sa position moyenne.

— Imaginons que k reste constant, et cherchons la trajectoire apparente de l'étoile S autour de sa position moyenne pendant le temps qu'il reste au dessus de l'horizon, en supposant que α et δ soient constants.

Soit S le point de la sphère céleste de coordonnées α, δ ; menons par S le cercle horaire PSP' et le parallèle QSQ' ; pour



Soit la tangente au parallèle menée dans le sens direct, Sy la tangente au cercle horaire menée vers le pôle P . Le point S' , position apparente de S , à un instant donné est toujours voisin de S , et peut être regardé comme situé dans le plan tangent à la sphère en S , de sorte qu'on peut le définir par ses deux coordonnées rectangulaires x et y par rapport aux axes Sx, Sy . On voit alors que le rayon du parallèle étant $\cos \delta$

on a
$$x = \cos \delta \, d\alpha, \quad y = d\delta.$$

Nous avons donc pour définir la trajectoire apparente considérée

$$x = k \frac{\cos \varphi \sin H}{\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H}, \quad y = k \frac{\sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta \cos H}{\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H}.$$

Si l'étoile est une circumpolaire toujours visible c'est-à-dire si l'on a $|\varphi| + |\delta| > \frac{\pi}{2}$ avec $\varphi \delta > 0$, H doit varier de $-\pi$ à π .

Si l'étoile a un lever et un coucher, c'est-à-dire si $|\varphi| + |\delta| < \frac{\pi}{2}$, H doit varier entre les valeurs $-H_0$ et H_0 prises plus petites que π en valeur absolue et déterminées par l'équation

$$\cos H_0 = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta.$$

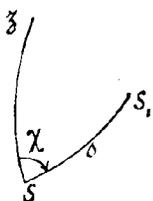
On voit sans peine que le lieu du point (x, y) lorsque H varie, est toujours une conique admettant Sy comme axe de symétrie. Dans le premier cas, ce sera une ellipse facile à construire; les ordonnées des sommets situées sur Sy sont pour le passage supérieur $y_0 = k \operatorname{tg} (\varphi - \delta)$ et pour le passage inférieur

$$y_1 = -k \operatorname{tg} (\varphi + \delta).$$

Dans le second cas, c'est une hyperbole dont une branche seulement convient à la question, celle dont le sommet situé sur Sy a pour ordonnée y_0 . Il est clair d'ailleurs que k ne peut être considéré comme constant lorsque l'étoile est voisine de l'horizon, et que ce qui précède ne représente la réalité que si la hauteur n'est pas très petite.

Réfraction différentielle. — Examinons deux astres voisins S et S_1 , dont les coordonnées par rapport à un système d'axes quelconques sont respectivement ψ et δ , ψ_1 et δ_1 . On définit le plus souvent la position de S_1 par rapport à S en se donnant les différences

$$\Delta \psi = \psi_1 - \psi, \quad \Delta \theta = \theta_1 - \theta.$$



On peut aussi se donner la distance angulaire SS_1 , ou ρ , essentiellement positive et l'angle de position χ de S_1 par rapport à S , c'est-à-dire, d'une façon précise, l'angle que fait Sz , (z désignant le pôle du système de coordonnées employé) avec SS_1 , compte dans le sens de l'orientation du système.

Ce sera le sens rétrograde pour les coordonnées horizontales ou horaires; dans le premier cas, nous désignerons χ par Z , dans le second par P .

Si ρ est assez petit pour qu'on puisse négliger son carré, et si $\cos \theta$ n'est pas très petit, il est clair que l'on a d'une façon générale:

$$\begin{cases} \rho \sin \chi = -\cos \theta \Delta \psi, \\ \rho \cos \chi = \Delta \theta; \end{cases}$$

il suffit pour le voir de mener par S le petit cercle de pôle z jusqu'à sa rencontre en S_2 avec zS_1 , et de considérer le triangle SS_1S_2 , que l'on peut assimiler à un triangle rectiligne rectangle en S_2 dans lequel on a $S_1S_2 = \Delta \theta$, $SS_2 = -\cos \theta \Delta \psi$, $SS_1 = \rho$, $\widehat{SS_1S_2} = \frac{\pi}{2} - \chi$.

La réfraction fait voir S et S_1 en d'autres positions S' et S'_1 dont les coordonnées seront ψ' et θ' , ψ'_1 et θ'_1 , et nous poserons comme plus haut $\psi' - \psi = d\psi$, $\theta' - \theta = d\theta$, ... Les différences $\Delta \psi$ et $\Delta \theta$ deviennent alors $\Delta \psi + d(\Delta \psi)$, $\Delta \theta + d(\Delta \theta)$; de même la distance et l'angle de position deviennent ρ ou $\rho + d\rho$, χ ou $\chi + d\chi$.

Le problème de la réfraction différentielle consiste à calculer les accroissements $d(\Delta \psi)$, $d(\Delta \theta)$, $d\rho$, $d\chi$.

Il est clair d'ailleurs que ces accroissements sont très petits puisque S et S_1 étant voisins, la réfraction agit sensiblement de la même façon pour les deux; on peut considérer $d(\Delta \psi)$, $d(\Delta \theta)$, $d\rho$ comme des quantités de l'ordre du produit de la réfraction par ρ ; quant à $d\chi$, il est de l'ordre de la réfraction, mais il est évident que ce qui importe, c'est en réalité le produit $\rho d\chi$, qui est du même ordre que les quantités précédentes.

Il résulte de ces remarques que nous pouvons considérer sans erreur sensible, et dans tous les cas, tous les accroissements marqués par les caractéristiques d ou Δ comme des différentielles

On a $d(\Delta \psi) = \Delta(d\psi)$, car on peut intervertir les deux caractéristiques; donc aussi, d'après ce qui précède et la formule de Taylor

$$d(\Delta \psi) = \frac{\partial(d\psi)}{\partial \psi} \Delta \psi + \frac{\partial(d\psi)}{\partial \theta} \Delta \theta;$$

de même

$$d(\Delta \theta) = \frac{\partial(d\theta)}{\partial \psi} \Delta \psi + \frac{\partial(d\theta)}{\partial \theta} \Delta \theta.$$

Différenciant ensuite par rapport à la caractéristique d les formules qui donnent ρ et χ , on a:

$$\begin{cases} d\rho \sin \chi + \rho \cos \chi d\chi = \sin \theta d\theta \Delta \psi - \cos \theta d(\Delta \psi), \\ d\rho \cos \chi - \rho \sin \chi d\chi = d(\Delta \theta), \end{cases}$$

et par suite, en profitant des relations déjà écrites, et remplaçant $\Delta \psi$ et $\Delta \theta$ par leurs valeurs:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\rho}{\rho} &= -\sin^2 \chi \operatorname{tg} \theta d\theta + \sin^2 \chi \frac{\partial(d\psi)}{\partial \psi} - \sin \chi \cos \chi \cos \theta \frac{\partial(d\psi)}{\partial \theta} \\ &\quad - \sin \chi \cos \chi \operatorname{sec} \theta \frac{\partial(d\theta)}{\partial \psi} + \cos^2 \chi \frac{\partial(d\theta)}{\partial \theta}, \\ d\chi &= -\sin \chi \cos \chi \operatorname{tg} \theta d\theta + \sin \chi \cos \chi \frac{\partial(d\psi)}{\partial \psi} - \cos^2 \chi \cos \theta \frac{\partial(d\psi)}{\partial \theta} \\ &\quad + \sin^2 \chi \operatorname{sec} \theta \frac{\partial(d\theta)}{\partial \psi} - \sin \chi \cos \chi \frac{\partial(d\theta)}{\partial \theta}. \end{aligned} \right.$$

On voit donc que tout revient à calculer les dérivées partielles de $d\psi$ et $d\theta$ par rapport à ψ et θ .

Réfraction différentielle pour les coordonnées horizontales

Dans le cas des coordonnées horizontales ce calcul est immédiat; on a en effet $dA = 0$, et $dh = R$, en désignant par R la réfraction qui correspond à la hauteur vraie h . R est fonction de h seulement, de sorte que la seule dérivée partielle non nulle est $\frac{\partial(dh)}{\partial h}$, égale à $-R'$, si R' est la dérivée changée de signe de R par rapport à h , de sorte que R' soit positif. On a alors:

$$\left\{ \begin{aligned} d(\Delta A) &= 0, \quad d(\Delta h) = -R' \Delta h; \\ \frac{d\rho}{\rho} &= -(\sin^2 Z \operatorname{tg} h R + \cos^2 Z R'), \\ dZ &= -\sin Z \cos Z (\operatorname{tg} h R - R'); \end{aligned} \right.$$

on peut aussi écrire directement :

$$\begin{cases} d(\rho \sin Z) = -\rho \sin Z \operatorname{tg} h R, \\ d(\rho \cos Z) = -\rho \cos Z R'. \end{cases}$$

Si l'on fait $R = k \operatorname{ctg} h$, on peut considérer k comme constant tant que h n'est pas très petit ; alors

$$R' = + \frac{k}{\sin^2 h},$$

et l'on a

$$d(\Delta A) = 0, \quad d(\Delta h) = -\frac{k}{\sin^2 h} \Delta h,$$

$$d\rho = -k \rho (1 + \cos^2 Z \operatorname{ctg}^2 h), \quad dZ = k \sin Z \cos Z \operatorname{ctg}^2 h.$$

Déformation du Soleil et de la Lune. — Les disques circulaires du Soleil et de la Lune nous apparaissent déformés par la réfraction. Soit en effet S le centre et S' un point du bord, défini par la distance constante ρ et l'angle de position Z ; si S et S' paraissent en S' et S'_1 , on a d'après ce qui précède :

$$\begin{cases} \rho' \sin Z' = \rho \sin Z (1 - \operatorname{tg} h R), \\ \rho' \cos Z' = \rho \cos Z (1 - R'); \end{cases}$$

on voit pour là que le lieu géométrique du point S'_1 est une ellipse de centre S' , dont le demi-grand axe est horizontal et vaut $\rho(1 - \operatorname{tg} h R)$, tandis que le demi-petit axe est vertical et vaut $\rho(1 - R')$; (R' est en effet supérieur à $R \operatorname{tg} h$). Il y a donc contraction dans le sens vertical. Si par exemple, on prend $\rho = 16'$, valeur moyenne du demi-diamètre apparent du Soleil et de la Lune, et $h = 6^\circ$, on a en gros $R = 8'$, et la variation de R pour $10'$ de hauteur étant $12''$, on a $R' = \frac{12}{600} = \frac{1}{50}$; la contraction sur le demi-diamètre vertical est donc $19'',2$ environ, tandis que sur le demi-diamètre horizontal, elle n'est que de $0'',2$.

En général, l'accourcissement du demi-diamètre correspondant à l'angle de position Z est $\rho(\sin^2 Z \operatorname{tg} h R + \cos^2 Z R')$, ou simplement $\rho \cos^2 Z R'$ en remarquant que $\sin^2 Z \operatorname{tg} h R$ est toujours très petit et pratiquement négligeable. Il est facile de réduire cet accourcissement en Tables.

Observons enfin que, si la hauteur h est petite, la contraction réelle du demi-diamètre vertical inférieur est un peu plus grande que celle du demi-diamètre vertical supérieur, car les formules précédentes ne sont qu'approchées, et R augmente rapidement quand la hauteur diminue et est voisine de $0'$.

Réfraction différentielle pour les coordonnées équatoriales.

Ici l'on a, comme nous avons vu,

$$\left\{ \begin{array}{l} dH = -k \frac{\cotg n}{\cos \delta \sin(N+\delta)} \\ d\delta = k \cotg(N+\delta) \end{array} \right. \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} \sin n \sin N = \cos \varphi \cos H, \\ \sin n \cos N = \sin \varphi, \\ \cos n = \cos \varphi \sin H. \end{array} \right.$$

On en tire pour un calcul facile :

$$\frac{\partial n}{\partial H} = -\sin N, \quad \frac{\partial N}{\partial H} = -\cotg n \cos N;$$

$$\frac{\partial (dH)}{\partial H} = -k \left(\frac{\sin N}{\cos \delta \sin(N+\delta)} + \frac{\cotg^2 n}{\sin^2(N+\delta)} \right),$$

$$\frac{\partial (dH)}{\partial \delta} = \frac{k \cotg n \cos(N+2\delta)}{\cos^2 \delta \sin^2(N+\delta)},$$

$$\frac{\partial (d\delta)}{\partial H} = k \frac{\cotg n \cos N}{\sin^2(N+\delta)},$$

$$\frac{\partial (d\delta)}{\partial \delta} = -\frac{k}{\sin^2(N+\delta)}.$$

Alors

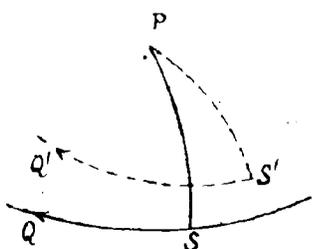
$$\left\{ \begin{array}{l} d(\Delta H) = \frac{\partial (dH)}{\partial H} \Delta H + \frac{\partial (dH)}{\partial \delta} \Delta \delta, \\ d(\Delta \delta) = \frac{\partial (d\delta)}{\partial H} \Delta H + \frac{\partial (d\delta)}{\partial \delta} \Delta \delta; \end{array} \right.$$

et après réduction :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\rho = -\frac{k\rho}{\sin^2(N+\delta)} \left[1 + \sin^2 P [\cotg^2 n - \cos^2(N+\delta)] + 2 \sin P \cos P \cotg n \cos(N+\delta) \right], \\ dP = \frac{k}{\sin^2(N+\delta)} \left[-\frac{\cotg n \cos(N+2\delta)}{\cos \delta} + 2 \sin^2 P \cotg n \cos(N+\delta) \right. \\ \left. + \sin P \cos P [\cos^2(N+\delta) - \cotg^2 n] \right]. \end{array} \right.$$

Celles sont les formules relatives aux coordonnées équatoriales.

Influence de la réfraction sur la direction du mouvement diurne. — La direction du mouvement diurne en S est modifiée par la



réfraction. En effet l'étoile S semble décrire au lieu du parallèle de pôle P mené par S , soit SQ , une trajectoire $S'Q'$, en vertu de la réfraction. La direction apparente du mouvement diurne est celle de la tangente à $S'Q'$, dans le sens du mouvement. Il est facile de la déterminer à l'aide des formules précédentes ; l'angle de position de la direction SQ est en effet $-\frac{\pi}{2}$; l'angle de position de la direction apparente du mouvement diurne sera donc $-\frac{\pi}{2} + dP$, en calculant dP pour $P = \frac{\pi}{2}$; c'est donc finalement

$$-\frac{\pi}{2} + h \frac{\cotg n \cos N}{\cos \delta \sin^2(N + \delta)}$$

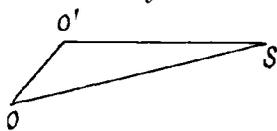
Nous répondrons plus loin quelques problèmes qui dépendent encore de la réfraction, mais en même temps de la parallaxe.

Chapitre VII. Parallaxe.

Les problèmes de parallaxe sont des problèmes de changement de coordonnées ; l'origine des coordonnées change, mais la direction des axes reste invariable.

On distingue deux sortes de parallaxes, la parallaxe annuelle et la parallaxe diurne ; nous étudierons séparément les problèmes correspondants.

Parallaxe annuelle. — La distance des étoiles au Soleil et à la Terre peut toujours être regardée comme infinie par rapport aux dimensions de la Terre, mais non par rapport à la distance du Soleil à la Terre, ou en d'autres termes, par rapport aux dimensions du système solaire.



Si O et O' désignent respectivement les centres du Soleil et de la Terre, et si S est l'étoile, la parallaxe de cette étoile à un instant donné est l'angle $O'SO'$ pour lequel on voit à cet instant la distance OO' .

Si OO' est supposé constant, égal à la distance moyenne b de la Terre au Soleil, qui sera définie d'une façon précise un peu plus loin, et si la distance OS ou r de l'étoile au Soleil est aussi regardée comme constante, la relation évidente

$$\sin S = \frac{b}{r} \sin O'$$

montre que la parallaxe $\tilde{O}SO'$ est maxima lorsque l'angle O' est droit. Si alors \tilde{O} est sa valeur, définie par la relation

$$\sin \tilde{O} = \frac{b}{r},$$

\tilde{O} est la parallaxe annuelle de l'étoile.

La plus grande parallaxe annuelle stellaire paraît être celle de l'étoile α Centaure, égale à $0,72''$. Le rapport $\frac{b}{r}$ est donc toujours extrêmement petit, et l'on pourra toujours confondre $\sin \tilde{O}$ avec \tilde{O} .

Dans ce cas qui correspond à l'étoile la plus rapprochée, on a $r = b \times 286\,000$; en désignant toujours par a le rayon équatorial de la Terre, on a d'ailleurs, comme nous le verrons bientôt, $b = a \times 23400$, et par suite $r = a \times 286\,000 \times 23400$, ce qui justifie ce que nous avons dit plus haut. Comme $a = 6378^{\text{km}}$, la distance r peut être évaluée à 43×10^{12} kilomètres, et la lumière, dont la vitesse est de $300\,000^{\text{km}}$ par seconde, met 4 ans, 5 à parcourir cette distance.

Le problème de parallaxe est ici le suivant : connaissant les coordonnées π, φ, θ , dans un certain système, de l'étoile par rapport au Soleil O , calculer ses coordonnées ψ, θ' , par rapport à la Terre O' , les nouveaux axes restant parallèles aux premiers.

Nous pouvons appliquer tout ce que nous avons dit au Chapitre IV, avec les mêmes notations générales. Toutefois nous désignerons comme on le fait d'habitude par R le rayon vecteur du Soleil, c'est-à-dire la distance OO' , par Θ la longitude géocentrique du Soleil, et nous négligerons la latitude toujours très petite du Soleil.

Parallaxe en longitude et latitude. — Employons d'abord les coordonnées écliptiques; on a ici.

$x_0 = R \cos \Theta, y_0 = R \sin \Theta, z_0 = 0, t_0 = R \cos (\Theta - \lambda)$;
par suite en remplaçant $\frac{R}{r}$ par $\frac{R}{b} \times \frac{b}{r} = \tilde{O} \frac{R}{b}$, de façon à mettre en évidence la parallaxe annuelle \tilde{O} et le rapport $\frac{R}{b}$ toujours très voisin de 1, les formules différentielles (13) du chapitre IV, applicables à cause de la petitesse de \tilde{O} , donnent immédiatement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \beta \, d\lambda = \tilde{O} \frac{R}{b} \sin (\Theta - \lambda), \\ d\beta = -\tilde{O} \frac{R}{b} \sin \beta \cos (\Theta - \lambda), \end{array} \right.$$

en désignant comme toujours par $d\lambda$ et $d\beta$ les différences $\lambda' - \lambda$ et $\beta' - \beta$.

Si $\cos \beta$ était très petit, on appliquerait les formules de Fabricius, comme dans tous les cas semblables.

Parallaxe en ascension droite et déclinaison. — Le plus souvent, on fait usage des coordonnées équatoriales. Alors en désignant toujours par ϵ l'obliquité de l'écliptique, on a

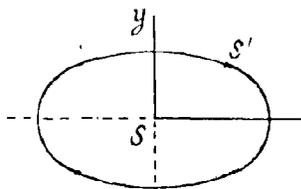
$$x_0 = R \cos \Theta, \quad y_0 = R \sin \Theta \cos \epsilon, \quad z_0 = R \sin \Theta \sin \epsilon,$$

et par suite:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \delta \, d\alpha = \omega \frac{R}{b} (\cos \epsilon \cos \alpha \sin \Theta - \sin \alpha \cos \Theta), \\ d\delta = \omega \frac{R}{b} (\sin \epsilon \cos \delta \sin \Theta - \sin \delta \cos \alpha \cos \Theta - \cos \epsilon \sin \delta \sin \alpha \sin \Theta). \end{array} \right.$$

Représentation géométrique. — Considérons sur la sphère céleste qui a pour centre la Terre O' , la position moyenne de l'étoile, c'est-à-dire le point S de coordonnées λ, β . En vertu de la parallaxe, l'étoile apparaît en un point voisin S' , que l'on peut regarder comme situé dans le plan tangent à la sphère en S et que l'on définira par ses deux coordonnées rectangulaires par rapport à deux axes Sx, Sy ; Sx est la tangente au cercle de latitude, menée dans le sens direct, et Sy est la tangente au cercle de longitude, menée vers le pôle de l'écliptique. Dans ces conditions, on a ainsi que nous l'avons déjà vu dans un cas analogue:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \cos \beta \, d\lambda = \omega \frac{R}{b} \sin (\Theta - \lambda), \\ y = d\beta = -\omega \frac{R}{b} \sin \beta \cos (\Theta - \lambda). \end{array} \right.$$

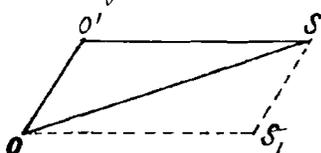


Faisons $\frac{R}{b} = 1$, et remarquons que la longitude augmente d'une façon presque uniforme de 2π en un an; les formules précédentes montrent alors que le point S' décrit autour de sa position moyenne S une petite ellipse dont le demi-grand axe est dirigé suivant Sx et vaut ω , tandis que le demi-petit axe dirigé suivant Sy vaut $\omega \sin \beta$. La période de ce mouvement est d'ailleurs une année, d'où le nom de parallaxe annuelle. Le sens du mouvement est direct ou rétrograde suivant que la latitude β est positive ou négative; il suffit pour le voir de faire successivement $\Theta - \lambda = 0$, et $\Theta - \lambda = 90^\circ$.

Les formules qui nous ont conduit au résultat précédent

cessent d'être applicables si $\cos \beta$ est très petit : cependant les expressions de x et de y restent vraies encore dans ce cas. On pourrait les obtenir en effet en projetant sur les directions Sx et Sy le segment SS' dont les composantes suivant les axes fondamentaux ont, comme nous l'avons dit à propos de la méthode de Fabricius, des expressions toujours valables.

Quand la latitude β est nulle, l'ellipse de parallaxe se réduit à un segment de droite ; si au contraire $\beta = \pm \frac{\pi}{2}$ on a un cercle.

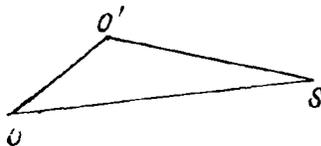


Tous ces résultats ²étaient faciles à prévoir. Menons par S un vecteur SS_1 égal au vecteur $O'O$; la direction de l'étoile vue de O' est la même que celle du point S_1 vu de O . La terre O' décrit autour de

O dans les hypothèses faites, un cercle dans le plan de l'écliptique ; donc S_1 décrit autour de S un cercle égal dont le plan est parallèle au plan de l'écliptique, et la droite OS_1 décrit un cône ayant pour base ce cercle ; dans le plan tangent à la sphère en S_1 , le point S_1 décrit la section de ce cône par le plan perpendiculaire à OS passant par S , c'est-à-dire une ellipse de centre S et d'axes faciles à déterminer.

Parallaxe diurne. — Les dimensions de la Terre ne sont pas négligeables par rapport à celles du Système Solaire ; les observations d'un astre appartenant à ce système diffèrent donc avec le lieu d'observation, et pour les rendre comparables entre elles, il faut les rapporter au centre de la Terre, c'est-à-dire les corriger de la parallaxe diurne.

Conservant toutes les notations générales du chapitre IV, soit O le centre de la Terre, O' le lieu d'observation, S l'astre. La parallaxe à un instant donné est l'angle OSO' pour lequel on voit à cet instant le rayon de la Terre OO' .



Soit π la distance géocentrique OS de l'astre, et désignons par a ρ , comme nous l'avons déjà fait, le rayon de la Terre en O' , a étant le rayon équatorial. On a la relation :

$$\sin S = \frac{a \rho}{\pi} \sin OO'S.$$

Toute une valeur de π donnée et en un même point O' , la parallaxe est donc maxima lorsque l'angle $OO'S$ est droit, c'est-à-dire quand l'astre est dans l'horizon du point O' , non pas dans l'horizon proprement dit, mais dans l'horizon perpendiculaire à la verticale géocentrique. Si alors ω est sa valeur, on a $\sin \omega = \frac{a \rho}{\pi}$, et ω est la parallaxe horizontale de l'astre pour le point O' .

Si maintenant O' change, le maximum de ω a lieu pour $\rho = 1$, c'est-à-dire pour un point situé dans l'équateur ; si ω

est cette valeur maxima, on a

$$\sin \omega = \frac{a}{r},$$

et ω est la parallaxe horizontale équatoriale de l'astre S pour la distance r . C'est la parallaxe horizontale équatoriale de la Lune, du Soleil et des planètes que l'on trouve dans les éphémérides. La plus grande parallaxe est celle de la Lune; sa valeur moyenne est de 57', et elle peut varier entre 53' et 62'. On ne peut donc pas confondre ω avec $\sin \omega$, du moins dans les calculs de précision.

La parallaxe moyenne du Soleil a été fixée par la Conférence internationale des étoiles fondamentales réunie à Doris en 1896, à 8", 80; elle varie entre 8", 95 et 8", 65, en vertu de l'excentricité de l'orbite Solaire. Nous désignerons par ω_0 cette valeur moyenne de la parallaxe horizontale équatoriale du Soleil, et nous pourrions toujours remplacer $\sin \omega_0$ par ω_0 .

Si b désigne la distance moyenne du Soleil à la Terre, on a

$$b = \frac{a}{\sin \omega_0} = 23439 \times a = 149.500.000 \text{ km}$$

en prenant $a = 6378 \text{ km}$.

La parallaxe ω des planètes, et en général des comètes, ne dépasse pas 30", et l'on peut encore confondre ω avec $\sin \omega$ dans ce cas. Le plus souvent on exprime ω ou $\frac{a}{r}$ sous la forme $\frac{b \omega_0}{r}$; les éphémérides fournissent directement en effet la valeur $\frac{r}{a}$ de la distance géocentrique r , exprimée en prenant b comme unité, c'est-à-dire le rapport $\frac{r}{b}$.

Les problèmes de parallaxe sont les suivants; connaissant les coordonnées π, ψ, θ , dans un certain système, de l'astre par rapport au centre de la Terre O , calculer ses coordonnées π', ψ', θ' par rapport à un point O' de la Terre, les nouvelles axes restant parallèles aux premiers; inversement on peut aussi avoir à calculer ψ, θ connaissant π, ψ', θ' .

Le point O' de la Terre est défini par le rayon terrestre OO' égal à $a \rho$, par sa latitude géocentrique φ' et ces quantités sont toujours faciles à calculer en fonction de la latitude vraie φ , comme nous l'avons vu.

D'une façon générale, d'après ce qui précède, il faudra dans le cas de la Lune appliquer les formules rigoureuses; tandis que dans le cas des autres astres, les formules différentielles suffisent.

Parallaxe en azimut et en hauteur. — Pour appliquer les formules du Chapitre IV, puisque x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées de O par rapport aux axes d'origine O' , on peut prendre ici :

$$\alpha_0 = -a \rho, \quad A_0 = 0 \quad h_0 = \frac{\pi}{2} - \varphi + \varphi';$$

nous sommes dans le cas exceptionnel prévu antérieurement où l'on choisit le rayon vecteur négatif, et où la hauteur peut être supérieure à 90° (si φ est négatif). En remplaçant π par $\frac{a}{\sin \alpha}$, les formules rigoureuses sont :

$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{tg} \Delta A &= \frac{\rho \sin \alpha \sin (\varphi - \varphi') \sin A}{\cos h - \rho \sin \alpha \sin (\varphi - \varphi') \cos A}, \\ \operatorname{cotg} \gamma &= \operatorname{tg} (\varphi - \varphi') \frac{\cos(A + \frac{1}{2} \Delta A)}{\cos \frac{1}{2} \Delta A}, \\ \operatorname{tg} \Delta h &= \frac{-\rho \sin \alpha \cos (\varphi - \varphi') \sin (\gamma - h)}{\sin \gamma - \rho \sin \alpha \cos (\varphi - \varphi') \cos (\gamma - h)}, \\ \frac{\tau'}{\tau} &= \frac{\sin (\gamma - h)}{\sin (\gamma - h')}. \end{aligned} \right.$$

La petitesse de $\varphi - \varphi'$, qui ne dépasse pas $12'$ en valeur absolue, permet en général de simplifier le calcul. ΔA est de l'ordre du produit de α par $\varphi - \varphi'$, et l'on a d'une façon très suffisamment exacte :

$$\Delta A = \frac{\rho \sin \alpha \sin A}{\cos h} (\varphi - \varphi');$$

l'angle γ peut être choisi voisin de 90° ; il n'en diffère que d'une quantité de l'ordre de $\varphi - \varphi'$, et il suffit d'écrire :

$$\gamma = 90^\circ - (\varphi - \varphi') \cos A.$$

Enfin, $\sin \gamma$ et $\cos (\varphi - \varphi')$ peuvent être remplacés par l'unité, de sorte que

$$\operatorname{tg} \Delta h = \frac{-\rho \sin \alpha \sin (\gamma - h)}{1 - \rho \sin \alpha \cos (\gamma - h)}.$$

La parallaxe en azimut est donc toujours très petite, et s'annulerait si la Terre était sphérique. Elle est toujours rigoureusement nulle quand l'astre est au méridien.

Tout les astres autres que la Lune, on aura simplement par les formules différentielles, et en profitant de la petitesse de $\varphi - \varphi'$:

$$dA = 0, \quad dh = -\rho \alpha_0 \frac{b}{\tau} \cos h, \quad \frac{d\tau}{\tau} = -\rho \alpha_0 \frac{b}{\tau} \sin h.$$

Ces derniers résultats s'obtiendraient immédiatement par la

considération du triangle OSO' , dont on peut supposer le plan vertical.

La quantité OS est alors l'angle en S : on l'appelle parallaxe de hauteur. On la réduit en tables, en prenant pour arguments la hauteur h et la parallaxe horizontale $\rho \frac{\omega}{z}$ au lieu considéré.

Dans le problème inverse, il faut calculer A et h connaissant A' , h' et ω ; ce problème ne se présente que pour la Lune, puisque dans les formules différentielles, on peut remplacer h par h' . La différence $A-A'$ étant très petite, on peut prendre

$$\gamma = 90^\circ - (\varphi - \varphi') \cos A';$$

il vient alors, par la première des formules (10) du Chapitre IV, où l'on échange les lettres accentuées et non accentuées et où l'on fait pour suite $\alpha_0 = + a \rho$:

$$\sin (h - h') = \rho \sin \omega \sin (\gamma - h'),$$

en remplaçant toujours $\cos (\varphi - \varphi')$ et $\sin \gamma$ par l'unité. Enfin, comme plus haut:

$$A - A' = - \frac{\rho \sin \omega \sin A'}{\cos h} (\varphi - \varphi');$$

on a pu en effet remplacer A par A' qui en diffère très peu.

Parallaxe en ascension droite et en déclinaison. — On a ici, en désignant par t le temps sidéral local:

$$\alpha_0 = - a \rho, \quad \alpha_0 = t, \quad \delta_0 = \varphi'.$$

Par suite, les formules rigoureuses sont:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \Delta \alpha = \frac{- \rho \sin \omega \cos \varphi' \sec \delta \sin (t - \alpha)}{1 - \rho \sin \omega \cos \varphi' \sec \delta \cos (t - \alpha)}, \\ \operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \varphi' \cos \frac{1}{2} \Delta \alpha}{\cos (t - \alpha - \frac{1}{2} \Delta \alpha)}, \\ \operatorname{tg} \Delta \delta = \frac{- \rho \sin \omega \sin \varphi' \operatorname{cosec} \gamma \sin (\gamma - \delta)}{1 - \rho \sin \omega \sin \varphi' \operatorname{cosec} \gamma \cos (\gamma - \delta)}, \\ \frac{\alpha'}{z} = \frac{\sin (\gamma - \delta)}{\sin (\gamma - \delta')} \end{array} \right.$$

La parallaxe en ascension droite est toujours nulle quand l'astre est au méridien.

Quand aux formules différentielles, elles deviennent

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \delta \, d\alpha = -\rho \, \omega_0 \, \frac{b}{\pi} \cos \varphi' \sin (t - \alpha), \\ \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \varphi' \operatorname{sec} (t - \alpha), \\ d\delta = -\rho \, \omega_0 \, \frac{b}{\pi} \sin \varphi' \frac{\sin (\gamma - \delta)}{\sin \gamma}, \quad \frac{d\pi}{\pi} = -\rho \, \omega_0 \, \frac{b}{\pi} \sin \varphi' \frac{\cos (\gamma - \delta)}{\sin \gamma}. \end{array} \right.$$

Les facteurs de $\frac{b}{\pi}$ dans les expressions de $d\alpha$ et de $d\delta$ sont, changés de piqué π , les facteurs de la parallaxe en ascension droite et en déclinaison ; on exprime le premier en secondes de temps, le second en secondes d'arc, de sorte que leurs valeurs, telles qu'on les publie toujours en même temps que les observations sont en faisant $\omega_0 = 8'' 80$,

$$P_\alpha = \frac{1}{15} \rho \, \omega_0 \cos \varphi' \operatorname{sec} \delta \sin (t - \alpha),$$

$$P_\delta = \rho \, \omega_0 \sin \varphi' \sin (\gamma - \delta) \operatorname{cosec} \gamma = \rho \, \omega_0 \sin \varphi' \cos \delta - \rho \, \omega_0 \cos \varphi' \sin \delta \cos (t - \alpha),$$

et que l'on a en secondes de temps

$$\alpha - \alpha' = \frac{b}{\pi} P_\alpha,$$

et en secondes d'arc

$$\delta - \delta' = \frac{b}{\pi} P_\delta.$$

Les coefficients $\operatorname{tg} \varphi'$, $\rho \, \omega_0 \sin \varphi'$, $\frac{1}{15} \rho \, \omega_0 \cos \varphi'$ qui sont ainsi nécessaires pour le calcul de la parallaxe sont réduits en tables, en prenant pour argument la latitude vraie φ , dans la Connaissance des Temps.

S'il faut calculer α et δ connaissant α' , δ' et ω , on appliquera les formules que nous avons indiquées au Chapitre IV pour ce cas ; il suffira d'échanger les lettres accentuées et non accentuées et par suite de faire $\pi_0 = + a \rho$, pour obtenir les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin (\alpha - \alpha') = \frac{\rho \sin \omega \cos \varphi' \sin (t - \alpha)}{\cos \delta}, \\ \operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \varphi' \cos \frac{1}{2} (\alpha - \alpha')}{\cos (t - \alpha' - \frac{1}{2} (\alpha - \alpha'))}, \\ \sin (\delta - \delta') = \frac{\rho \sin \omega \sin \varphi' \sin (\gamma - \delta')}{\sin \gamma}, \end{array} \right.$$

que l'on résoudra par approximations successives, ainsi que

correspondantes, sont $dA=0$, $d h = -\omega \cos h$, en négligeant aussi le carré de ω .

Soient alors S et S' , deux astres voisins, de même parallaxe ω , et supposons S' défini par rapport à S soit par les différences $A', -A = \Delta A$, $h', -h = \Delta h$, soit par sa distance ρ à S et l'angle de position Z . Les différences ΔA et Δh deviendront en vertu de la parallaxe $\Delta A + d(\Delta A)$, $\Delta h + d(\Delta h)$, et l'on aura :

$$d(\Delta A) = 0, \quad d(\Delta h) = \omega \sin h \Delta h.$$

Si donc ρ et Z deviennent $\rho + d\rho$ et $Z + dZ$, on aura aussi, d'après les formules générales indiquées à propos de la réfraction différentielle :

$$d\rho = \rho \omega \sin h, \quad dZ = 0.$$

On voit que l'angle de position ne change pas, tandis que la distance augmente, et d'autant plus que h est plus grand.

Si par exemple S est le centre de la Lune, et S' un point du bord, on voit en faisant $\rho = 16'$, $\omega = 57'$ que l'accroissement moyen du demi-diamètre lunaire au zénith est de $15''$, et par suite est loin d'être négligeable. Mais la Lune est le seul astre pour lequel cet effet de la parallaxe soit sensible.

Et la vérité, le raisonnement précédent suppose que la Lune est de forme circulaire aplatie, et non sphérique, puisque nous supposons que le bord vu du centre de la Terre est encore le bord vu de O' ; mais il est facile de se convaincre que l'erreur ainsi commise est négligeable.

Problèmes divers. — Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que, quand il s'agit d'un astre à diamètre apparent, on en pouvait observer le centre. Ceci n'est jamais possible; on est cependant ramené à ce cas théorique en observant deux bords parallèles (verticaux et horizontaux par exemple, si il s'agit de coordonnées horizontales), et prenant la moyenne des observations en tenant compte des corrections nécessaires.

Mais ce procédé ne peut s'appliquer à la Lune, dont on ne peut jamais observer qu'un seul bord parallèle à une direction donnée. Nous sommes donc amenés à résoudre le problème suivant, qui s'impose pratiquement et qui dépend à la fois de la théorie de la parallaxe et de celle de la réfraction.

On a observé en un lieu O' la hauteur apparente au-dessus de l'horizon vrai du bord inférieur ou supérieur de la Lune, par exemple, soit h''' ; on demande la hauteur apparente h'' du centre, la hauteur locale vraie (c'est-à-dire corrigée de la réfraction

de ce même centre, h' ; enfin la hauteur géocentrique, h , du centre.

On suppose connus les éléments qui définissent la position du point O' , soit le rayon terrestre OO' , ou a , et les latitudes vraie et géocentrique φ et φ' ; l'azimut apparent A' du centre de la Lune ; la parallaxe horizontale équatoriale ϖ ; enfin le demi-diamètre apparent géocentrique ρ .

Soit R la réfraction pour la hauteur apparente h'' et R' la dérivée de R par rapport à la hauteur apparente ; soit de plus ρ' le demi-diamètre apparent local vrai (c'est-à-dire corrigé de la réfraction) de la Lune. On a d'abord, en tenant compte de l'accourcissement dû à la réfraction :

$$h'' = h''' + \varepsilon \rho' (1 - R'),$$

ε étant égal à $+1$ ou -1 , suivant qu'on a observé le bord inférieur ou supérieur.

$$\text{On a aussi } h' = h''' - R + \varepsilon \rho'.$$

Reprenons maintenant les deux formules suivantes du Chapitre IV :

$$\begin{cases} \pi' \cos \theta' = \pi \cos \theta + t_0, \\ \pi' \sin \theta' = \pi \sin \theta + \tau_0. \end{cases}$$

$$\text{Ici l'on a } \tau_0 = -a \rho \cos(\varphi - \varphi'), \quad t_0 = -a \rho \sin(\varphi - \varphi') \frac{\cos(A - \frac{1}{2}\Delta A)}{\cos \frac{1}{2}\Delta A}.$$

Tout d'abord comme nous l'avons déjà fait

$$(1) \quad \gamma = 90^\circ - (\varphi - \varphi') \cos A,$$

et remplaçant $\sin \gamma$ et $\cos(\varphi - \varphi')$ par 1, on a avec une exactitude toujours plus que suffisante :

$$\begin{cases} \pi' \cos h' = \pi \cos h - a \rho \cos \gamma, \\ \pi' \sin h' = \pi \sin h - a \rho \sin \gamma; \end{cases}$$

π et π' sont les distances du centre de la Lune au centre de la Terre et au lieu d'observation, et par suite on a :

$$\pi \sin \delta = \pi' \sin \beta',$$

car chacune de ces expressions est égale au rayon linéaire de la Lune.

En multipliant les deux relations précédentes par $\sin(h'' - R)$ et $\cos(h'' - R)$, ajoutant et profitant de ce qui a été dit, il vient :

$$\begin{aligned} \varepsilon \pi \sin \delta &= \pi \sin(h - h''' + R) - a \rho \sin(\gamma - h''' + R), \\ \text{ou bien } (2) \quad \sin(h - h''' + R) &= \varepsilon \sin \delta + \rho \sin \varpi \sin(\gamma - h''' + R). \end{aligned}$$

ayant donc calculé γ par la formule (1) cette formule (2) fournira h , (que l'on pourrait sans peine développer en série.) d'où h' par la relation établie plus haut:

$$(3) \quad \operatorname{tg} (h' - h) = - \frac{\rho \sin \omega \sin (\gamma - h)}{1 - \rho \sin \omega \cos (\gamma - h)} ;$$

et il viendra enfin

$$(4) \quad \varepsilon \rho' = h' - h''' + R, \quad h'' = h''' + \varepsilon \rho' (1 - R').$$

Si de plus on veut l'azimut géocentrique A du centre de la Lune, on aura comme nous l'avons vu:

$$(5) \quad A - A' = - \frac{\rho \sin \omega \sin A'}{\cos h} (\varphi - \varphi').$$

Telle est la solution rigoureuse du problème proposé; elle peut être simplifiée de bien des façons lorsqu'on n'a pas besoin d'une grande précision, en particulier à l'aide de Tables appropriées.

Ce qui précède s'applique à tous les astres d'apparence circulaire; mais en dehors de la Lune, pour le Soleil par exemple, on se contentera des formules suivantes:

$$h'' = h''' + \varepsilon \delta (1 - R'), \quad h' = h''' - R + \varepsilon \rho, \quad h = h' + \rho \omega \cos h, \quad A = A'.$$

Proposons-nous maintenant de résoudre le problème du lever ou du coucher apparent d'un astre. Si le centre de cet astre apparaît dans l'horizon d'un lieu donné, sa hauteur apparente h'' est nulle; par suite sa hauteur vraie locale h' est égale à $-R_0$, R_0 désignant la réfraction horizontale, et la hauteur géocentrique h a pour valeur approchée $\omega - R_0$: ce résultat est suffisamment exact; même dans le cas de la Lune, car on ne peut évidemment pas prétendre à une grande précision dans la résolution du problème proposé, à cause de l'incertitude de la réfraction horizontale.

Si alors on désigne par φ la latitude du lieu d'observation, par δ la déclinaison géocentrique du centre de l'astre, et par H l'angle horaire géocentrique au moment du lever ou du coucher apparent, on a pour déterminer H la relation connue:

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H,$$

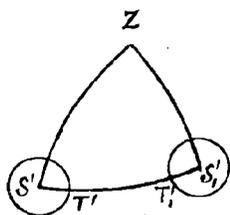
$$\text{ou } h = \omega - R_0.$$

Mais il faut remarquer que, s'il ne s'agit pas d'une étoile, la déclinaison δ varie avec l'angle horaire; il faudra donc résoudre l'équation précédente par approximations successives. Si l'on

veut savoir par exemple le moment du coucher qui suit le passage supérieur au méridien un certain jour où la déclinaison est δ_0 , à l'instant de ce passage, on fera d'abord dans la relation précédente $\delta = \delta_0$ et l'on en déduira une valeur approchée H_0 de H ; avec cette valeur approchée, il sera facile en se servant des éphémérides de calculer une valeur plus approchée de δ , avec laquelle on recommencera le calcul. Finalement, quand on aura obtenu la valeur de H , il sera toujours facile, d'après les éphémérides, d'avoir l'époque correspondante en temps moyen.

Considérons enfin le problème suivant qui se présente en navigation.

On a observé au même instant la Lune et le Soleil par exemple, et l'on en a déduit comme précédemment les hauteurs apparentes h'' et h_1'' , ainsi que les hauteurs géocentriques h et h_1 de leurs centres; on a pu déterminer aussi les différences d'azimuts géocentriques et apparents $A - A'$, $A_1 - A'_1$: il faut remarquer d'ailleurs que pratiquement cette seconde différence relative au Soleil ou à un autre astre est nulle, et que pour avoir la première, toujours très petite, relative à la Lune, il suffit d'avoir une valeur grossièrement approchée de l'azimut apparent A' du centre de la Lune. Enfin, on a observé, toujours au même instant, la distance apparente D'' des deux bords les plus rapprochés des deux astres. On demande de calculer dans ces conditions la distance géocentrique D des centres des deux astres.



Soit Z le zénith, et désignons par S' et S'_1 les positions apparentes des centres des deux astres; si l'arc de grand cercle $S'S'_1$ rencontre les disques du Soleil et de la Lune en T' et T'_1 , la distance mesurée D'' est l'arc $T'T'_1$; si D' désigne la distance $S'S'_1$, on a donc pour valeur approchée de D' l'expression $D'' + \rho + \rho_1$, ρ désignant comme plus haut le demi-diamètre apparent vrai local de la Lune, et ρ_1 le demi-diamètre vrai du Soleil (qui n'est pas altéré par la parallaxe), et que l'on trouve ainsi que ρ dans les éphémérides. Avec cette valeur approchée de D' , on calculera d'abord d'une façon très sommairement approchée les angles S', S'_1 du triangle $ZS'S'_1$. Connaissant ces angles on aura les demi-diamètres $S'T', S'_1T'_1$ de la Lune et du Soleil, tels qu'on les voit accourcis en vertu de la réfraction par les formules données à ce sujet et l'on en déduira la valeur exacte de D' .

Le triangle $ZS'S'_1$ donne alors la relation :

$$\cos D' = \sin h'' \sin h_1'' + \cos h'' \cos h_1'' \cos Z,$$

tandis que le triangle analogue relatif aux positions géocentriques donne

$$\cos D = \sin h \sin h_1 + \cos h \cos h_1 \cos (Z + dZ),$$

en appelant dZ la différence très petite $A - A_1'$, et en ayant soin de prendre pour Z la différence $A' - A_1'$.

Pour calculer D par la méthode de Borda, déterminons d'abord une distance fictive D_0 telle que

$$\cos D_0 = \sin h'' \sin h_1'' + \cos h'' \cos h_1'' \cos (Z + dZ);$$

dZ étant très petit, on a par différentiation

$$D_0 - D = \frac{\cos h'' \cos h_1'' \sin Z}{\sin D'} \cdot dZ,$$

ce qu'on peut encore écrire, à cause du triangle $Z S' S_1'$,

$$D_0 - D = \cos h'' \sin S' dZ = \cos h_1'' \sin S_1' dZ;$$

le calcul déjà fait des angles S' et S_1' permet donc d'avoir immédiatement D_0 , mais il faudra avoir soin de prendre ces angles du signe de Z , c'est-à-dire de $A' - A_1'$.

L'élimination de $\cos (Z + dZ)$ entre les deux relations qui donnent $\cos D$ et $\cos D_0$ conduit alors à

$$\frac{\cos D - \sin h \sin h_1}{\cos h \cos h_1} = \frac{\cos D_0 - \sin h'' \sin h_1''}{\cos h'' \cos h_1''};$$

ajoutant 1 aux deux membres, on peut écrire :

$$\cos D + \cos (h + h_1) = \frac{\cos h \cos h_1}{\cos h'' \cos h_1''} \left(\cos D_0 + \cos (h'' + h_1'') \right),$$

ou bien

$$\sin^2 \frac{D}{2} = \cos^2 \frac{h + h_1}{2} \frac{\cos h \cos h_1}{\cos h'' \cos h_1''} \cos \frac{h'' + h_1'' + D_0}{2} \cos \frac{h'' + h_1'' - D_0}{2};$$

posant

$$\sin^2 \alpha = \frac{\cos h \cos h_1}{\cos h'' \cos h_1''} \frac{\cos \frac{h'' + h_1'' + D_0}{2} \cos \frac{h'' + h_1'' - D_0}{2}}{\cos^2 \frac{h + h_1}{2}},$$

on a finalement

$$\sin \frac{D}{2} = \cos \frac{h + h_1}{2} \cos \alpha.$$

On voit encore que l'on passe du triangle $Z S' S_1'$ au triangle analogue relatif aux positions géocentriques en donnant aux côtés $Z S'$ et $Z S_1'$ les accroissements $h'' - h$, $h_1'' - h_1$, et à l'angle Z

l'accroissement dZ . Si l'on considère ces accroissements comme des différentielles, et que l'on néglige dZ , on a d'après les relations différentielles des triangles sphériques, l'équation approchée

$$D - D' = (h'' - h) \cos S' + (h_1'' - h_1) \cos S_1',$$

qui montre que l'exactitude de la différence $D - D'$ dépend surtout de l'exactitude des différences $h'' - h$ et $h_1'' - h_1$, et non de l'exactitude des quantités h'' , h , h_1'' , h_1 , elles-mêmes.

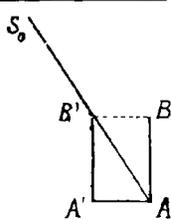
Mais nous n'insisterons pas sur ce problème pour lequel on a donné maintes méthodes de résolution plus ou moins expéditives.

Il nous suffira d'avoir montré par les exemples précédents comment on peut résoudre les différentes questions qui dépendent à la fois de la parallaxe et de la réfraction, et d'avoir mis en évidence les précautions dont il faut s'entourer quand on veut traiter les problèmes avec précision.

Chapitre VIII.

Aberration

Énoncé du problème. — La direction dans laquelle on aperçoit un astre à un instant donné, une fois corrigée de la réfraction, (et nous supposons toujours qu'il en est ainsi) n'est pas la direction de la droite qui joint l'œil à l'astre à ce même instant, car la propagation de la lumière n'est pas instantanée. Il faut étudier les conséquences de ce fait, c'est-à-dire les phénomènes d'aberration.



Soit S_0 la position au temps t_0 d'une source lumineuse S ; cette source émet des ondes qui se propagent et tout se passe comme si le rayon lumineux était rectiligne. On observe S avec une lunette ou d'une façon plus générale à l'aide d'un instrument possédant une ligne de visée déterminée par deux points A et B ; l'observation consiste à placer l'astre tel qu'on le voit sur le prolongement de AB , et la direction AB est alors la direction apparente de l'astre, au moment t où l'on fait l'observation, c'est-à-dire au moment où le rayon lumineux arrive en A . Ce rayon est arrivé au point B au temps t et comme la lunette AB se déplace avec la Terre, à ce moment elle occupait la position $A'B'$. Sa direction $A'B'$ est celle de la droite qui joint l'observateur au temps t à l'astre au temps t_0 .

La lumière parcourt le segment $B'A$ en même temps que

l'observateur parcourt $A'A$; il semble donc que la forme de la figure doive changer avec le milieu qui remplit l'espace $B'A$, puis que la vitesse de la lumière change avec le milieu qu'elle traverse :

Mais une théorie plus approfondie, confirmée par la célèbre expérience des Astronomes de Greenwich, montre qu'il n'en est rien. Il faut toujours considérer que la lumière décrit le segment $B'A$ avec sa vitesse dans le vide, soit V . Pour plus de détails à ce sujet, nous renverrons aux traités de Physique.

Appelons x, y, z les coordonnées du point A au temps t par rapport à des axes absolument fixes ; si V est la vitesse absolue de A , les projections de cette vitesse sur les axes sont

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}.$$

Soient de plus α, β, γ les cosinus directeurs de la direction AS_0 ; α', β', γ' ceux de la direction apparente AB . On a $AB = V\tau$, et comme le temps τ est très court, on a aussi $\overline{AA} = v\tau$. Le vecteur $\overline{A'B'}$ étant la somme géométrique $\overline{AA} + \overline{AB}$, on peut donc écrire, en posant $\frac{AB}{\tau} = V'$, les relations fondamentales :

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} V'\alpha' = V\alpha + \frac{dx}{dt}, \\ V'\beta' = V\beta + \frac{dy}{dt}, \\ V'\gamma' = V\gamma + \frac{dz}{dt}. \end{array} \right.$$

Examinons ce que nous savons sur la vitesse v . Nous pouvons la considérer comme la résultante de trois autres :

- 1° la vitesse d'entraînement du système solaire, v_0 ;
- 2° la vitesse de translation de la Terre autour du Soleil, v_1 ;
- 3° la vitesse du lieu d'observation A par rapport au Centre de la Terre, v_2 .

Prenez pour unité de longueur le kilomètre, pour unité de temps la seconde de temps moyen, de sorte que $V = 300000$, d'une façon très approchée. La durée de la révolution sidérale de la Terre étant de $365^d, 256$, on a, en appelant toujours b la valeur moyenne de la distance de la Terre au Soleil, $\frac{2\pi b}{365,256 \times 86400}$ pour valeur moyenne de la vitesse v_1 , c'est-à-dire d'après la valeur de b donnée précédemment $29,8$. Le rapport $\frac{v_1}{V}$ est donc fort petit, égal très sensiblement à $\frac{1}{10000}$.

Si a désigne toujours le rayon équatorial de la Terre, et si

φ est la latitude du lieu d'observation, la vitesse v_2 est probablement égale à $\frac{2\pi a \cos \varphi}{86164}$, puisque le jour sidéral contient 86164 secondes de temps moyen. On a ainsi $v_2 = 0,465 \cos \varphi$ et le rapport $\frac{v_2}{V}$ ne dépasse pas $\frac{1}{600.000}$.

Quant à la vitesse v_0 , nous ne la connaissons pas. Toutefois on est en droit de regarder le système Solaire comme se déplaçant par rapport aux étoiles d'un mouvement rectiligne et uniforme dont la vitesse est du même ordre de grandeur que v_1 . Sans insister sur ce point nous regarderons la vitesse v_0 comme satisfaisant à ces conditions.

Il est clair, après cette discussion sur l'ordre de grandeur des rapports tels que $\frac{v_i}{V}$, que l'on peut considérer les trois vitesses v_0, v_1, v_2 comme agissant séparément, et que pour avoir leur effet total, il suffit d'ajouter leurs effets partiels. Ce sera là pour nous une hypothèse fondamentale.

Nous avons par suite à envisager séparément :

- 1° l'aberration séculaire, due à la vitesse v_0 ;
- 2° l'aberration annuelle due à la vitesse v_1 ;
- 3° l'aberration diurne due à la vitesse v_2 .

Aberration séculaire. Nous ne pouvons pas calculer l'effet de cette aberration. Tout ce que nous pouvons dire, c'est que, d'après les hypothèses faites, elle donne aux différences $\alpha' - \alpha$, $\beta' - \beta$, $\gamma' - \gamma$ des valeurs constantes, tant que l'on peut considérer α, β, γ comme étant eux-mêmes constants.

Aberration annuelle en longitude et latitude. — D'après les formules fondamentales (1) le calcul de l'aberration revient à un changement de coordonnées, l'origine changeant, tandis que les axes restent parallèles à eux-mêmes. On peut donc appliquer les formules générales du Chapitre IV, en faisant $x=V, y=V'$ et prenant pour x_0, y_0, z_0 les composantes de la vitesse v_1 ; on doit d'ailleurs, à cause de la petitesse du rapport $\frac{v_1}{V}$ appliquer les formules différentielles.

Si alors on veut obtenir dans un certain système de coordonnées, les différences $\psi' - \psi$, $\theta' - \theta$ ou $d\psi$, $d\theta$ des coordonnées angulaires de la direction apparente AB et de la direction AS_0 , il suffit évidemment de prendre les formules correspondantes relatives à la parallaxe annuelle, et de remplacer les seconds membres par leurs dérivées changées de signe par rapport au temps, en même temps que ω par $\frac{b}{V}$.

Si donc les coordonnées employées sont les coordonnées

écliptiques, on aura

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \beta \, d\lambda = -\frac{b}{V} \frac{d}{dt} \left[\frac{R}{b} \sin(\Theta - \lambda) \right], \\ d\beta = \frac{b}{V} \sin \beta \frac{d}{dt} \left[\frac{R}{b} \cos(\Theta - \lambda) \right] \end{array} \right.$$

Or, le Soleil décrit autour de la Terre une ellipse de demi-grand axe b , d'excentricité $e = \sin \varphi$, la longitude du périhélie étant ω ; de sorte que l'équation de cette trajectoire est

$$\frac{R}{b} = \frac{\cos^2 \varphi}{1 + \sin \varphi \cos(\Theta - \omega)}$$

de plus, ce mouvement ayant lieu suivant la loi des aires, on a

$$\frac{R^2}{b^2} \frac{d\Theta}{dt} = n \cos \varphi,$$

n étant une constante égale à $\frac{2\pi}{T}$, si T désigne le temps de la révolution sidérale du Soleil autour de la Terre: la surface totale de l'ellipse décrite est en effet $\pi b^2 \cos \varphi$.

Il est facile dans ces conditions de voir que l'on a:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{R}{b} \sin(\Theta - \lambda) \right] = \frac{n}{\cos \varphi} \left[\cos(\Theta - \lambda) + \sin \varphi \cos(\omega - \lambda) \right],$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{R}{b} \cos(\Theta - \lambda) \right] = \frac{n}{\cos \varphi} \left[-\sin(\Theta - \lambda) - \sin \varphi \sin(\omega - \lambda) \right],$$

et par suite, en posant

$$k = \frac{bn}{V \cos \varphi}$$

il vient

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \cos \beta \, d\lambda = -k \left[\cos(\Theta - \lambda) + \sin \varphi \cos(\omega - \lambda) \right], \\ d\beta = -k \sin \beta \left[\sin(\Theta - \lambda) + \sin \varphi \sin(\omega - \lambda) \right]. \end{array} \right.$$

La quantité k est la Constante de l'aberration; elle a été déterminée par l'observation et sa valeur fixée par la conférence de Paris (1896) est $20''.47$. On trouve d'ailleurs le même résultat en partant des valeurs numériques déjà données pour V, T, b et observant que $\varphi = 57'$ environ.

Le facteur $k \sin \varphi$ est par suite petit et ne dépasse pas $0''.34$.
L'équation de la lumière est le temps $\frac{b}{V}$ que met la lumière

à parcourir le demi-grand axe de l'orbite polaire ; sa valeur est donc $498^s,4 = 8^m 18^s,4$.

Aberration annuelle en ascension droite et déclinaison.

En partant des formules correspondantes pour la parallaxe, on trouvera de même pour l'aberration annuelle en ascension droite et déclinaison :

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} d\alpha = -k \left[\cos \varepsilon \cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta \right] \\ \quad - k \sin \varphi \left[\cos \varepsilon \cos \alpha \cos \omega + \sin \alpha \sin \omega \right], \\ d\delta = -k \left[\sin \varepsilon \cos \delta \cos \theta + \sin \delta \cos \alpha \sin \theta - \cos \varepsilon \sin \delta \sin \alpha \cos \theta \right] \\ \quad - k \sin \varphi \left[\sin \varepsilon \cos \delta \cos \omega + \sin \delta \cos \alpha \sin \omega - \cos \varepsilon \sin \delta \sin \alpha \cos \omega \right]. \end{array} \right.$$

Ces formules sont très employées ; voici comment on les calcule pratiquement, en laissant de côté les termes qui contiennent $k \sin \varphi$ en facteur, pour des raisons que nous verrons plus loin : ces termes pourraient d'ailleurs être calculés d'une façon toute semblable.

La correction $d\alpha$ étant calculée en secondes de temps, tandis que $d\delta$ est exprimée en secondes d'arc, on pose, en faisant $k = 20,47$:

$$\begin{aligned} A &= -k \cos \varepsilon \cos \theta, \\ B &= -k \sin \theta, \\ a &= \frac{1}{15} \cos \alpha \sec \delta, & a' &= \operatorname{tg} \varepsilon \cos \delta - \sin \alpha \sin \delta, \\ b &= \frac{1}{15} \sin \alpha \sec \delta, & b' &= \sin \delta \cos \alpha, \end{aligned}$$

de sorte que A et B dépendent uniquement de la position du Soleil, tandis que les coefficients a, b, a', b' dépendent uniquement des coordonnées α, δ .

Dans ces conditions on a immédiatement :

$$d\alpha = Aa + Bb, \quad d\delta = Aa' + Bb'.$$

On pose aussi

$$h \sin H = A, \quad h \cos H = B, \quad i = A \operatorname{tg} \varepsilon,$$

et l'on a, avec ces nouveaux éléments :

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} d\alpha = \frac{1}{15} h \sin (H + \alpha) \sec \delta, \\ d\delta = h \cos (H + \alpha) \sin \delta + i \cos \delta. \end{array} \right.$$

Nous reviendrons bientôt sur l'usage de ces réducteurs.

Représentation géométrique. — Cherchons, comme pour la parallaxe, la courbe décrite par la position apparente S' de l'étoile autour de sa position moyenne, S , en vertu de l'aberration. En conservant les mêmes notations et faisant abstraction du petit terme en $k \sin \epsilon$, on a ici :

$$\begin{cases} x = -k \cos (\theta - \lambda), \\ y = -k \sin \beta \sin (\theta - \lambda). \end{cases}$$

Le point S' décrit donc encore une petite ellipse, dont les demi-axes dirigés suivant Sx et Sy valent k et $k \sin \beta$, et la période du mouvement est une année : le sens du mouvement est le même que pour la parallaxe.

En composant ce mouvement avec celui dû à la parallaxe, on a :

$$\begin{cases} x = -k \cos (\theta - \lambda) + \omega \sin (\theta - \lambda), \\ y = -k \sin \beta \sin (\theta - \lambda) - \omega \sin \beta \cos (\theta - \lambda), \end{cases}$$

de sorte que la trajectoire résultante est une ellipse semblable à la précédente, mais dont le demi-grand axe vaut $\sqrt{k^2 + \omega^2}$.

Ces résultats étaient faciles à prévoir : AB' étant supposé fixe, le vecteur $\overline{B'B}$ est proportionnel à la vitesse v , du point A , en supposant que la Terre décrit autour du Soleil un cercle d'un mouvement uniforme, le point B décrit donc lui-même, en une année, un cercle dont le plan est parallèle à celui de l'écliptique, et l'on en tire les mêmes conséquences que dans le cas de la parallaxe.

Aberration diurne. — De même que pour l'aberration annuelle, il suffit pour avoir l'aberration diurne en ascension droite et en déclinaison, de prendre les formules correspondantes de la parallaxe diurne, et de remplacer les seconds membres par leurs dérivées ω changées de signe par rapport au temps en même temps que k par V . On obtient donc en remarquant que la dérivée du temps sidéral par rapport au temps moyen est $\frac{2\pi}{86164}$ avec les unités choisies :

$$\begin{cases} \cos \delta \, d\alpha = \frac{2\pi}{86164} \omega_0 \frac{b}{V} \rho \cos \varphi' \cos (t - \alpha), \\ d\delta = \frac{2\pi}{86164} \omega_0 \frac{b}{V} \rho \cos \varphi' \sin \delta \sin (t - \alpha). \end{cases}$$

Remplaçant $\omega_0 b$ par a , et faisant

$$k' = \frac{2\pi a}{86164 V} = 0'' 320$$

on a

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} \cos \delta \, d\alpha = k' \cdot \rho \cos \varphi' \cos (t - \alpha), \\ d\delta = k' \cdot \rho \cos \varphi' \sin \delta \sin (t - \alpha). \end{array} \right.$$

L'aberration diurne est donc toujours très petite; elle est nulle au méridien, en déclinaison.

On peut la représenter géométriquement comme l'aberration annuelle.

Les formules que nous venons d'établir, supposent naturellement que soit $\cos \beta$, soit $\cos \delta$, suivant les coordonnées employées n'est pas très petit; dans le cas contraire, on appliquerait la méthode de Fabricius.

Théorème général. — Revenons aux équations fondamentales (1) et supposons d'une façon générale que la vitesse v du point A est la résultante de deux autres vitesses v' et v'' , dont les projections sur les axes sont respectivement p', q', r' , et p'', q'', r'' , de sorte que

$$V\alpha' = V\alpha + p' + p''$$

Soit de plus $d'\alpha, d'\beta, d'\gamma$ les corrections d'aberration dues à la vitesse v' ; $d''\alpha, d''\beta, d''\gamma$ les corrections dues à la vitesse v'' , de sorte que notre hypothèse fondamentale sur l'indépendance de ces corrections étant conservée, on a :

$$\alpha' = \alpha + d'\alpha + d''\alpha, \dots$$

Considérons la direction de cosinus directeurs $\alpha + d'\alpha, \beta + d'\beta, \gamma + d'\gamma$, ou encore $\alpha' - d''\alpha, \beta' - d''\beta, \gamma' - d''\gamma$, c'est-à-dire la direction observée AB corrigée de l'aberration relative à v'' . Il existe un nombre V'' tel que

$$V''(\alpha + d'\alpha) = V\alpha + p',$$

D'après la façon même dont on a déterminé $d'\alpha, \dots$ Multipliant ces relations par $t - t_0$, on a aussi

$$V''(\alpha + d'\alpha)(t - t_0) = V(t - t_0)\alpha + p'(t - t_0),$$

Prends alors un point A_0 , tel que le vecteur $\overline{A_0 A}$ soit parallèle à v' et égal à $v'(t - t_0)$, et remarquons que le vecteur $\overline{A_0 S_0}$



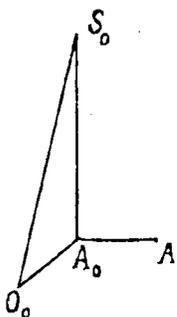
est égal à $V(t-t_0)$ et a pour cosinus directeurs α, β, γ . Les équations précédentes montrent alors que $\alpha + d\alpha, \dots$ sont précisément les cosinus directeurs de la direction $A_0 S_0$.

Donc la direction apparente corrigée de l'aberration relative à v'' , est la direction de la droite $A_0 S_0$, le point A_0 étant choisi comme il a été dit.

Tel est le théorème que nous avons en vue.

Il faut d'ailleurs observer que A_0 n'est pas en général la position qu'aurait le point A au temps t_0 , s'il n'était soumis qu'au mouvement qui correspond à la vitesse v' , car ce mouvement n'est pas en général rectiligne et uniforme.

Applications du théorème. — I Soit α', β', γ' la direction apparente d'une étoile, et corrigeons cette direction de l'aberration des fixes, c'est-à-dire de l'aberration annuelle et de l'aberration diurne; la nouvelle direction $\alpha'', \beta'', \gamma''$ sera celle de $A_0 S_0$ le vecteur $A_0 A$ étant égal à $v(t-t_0)$,



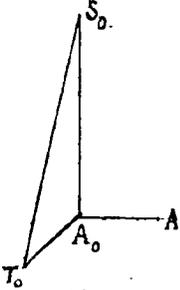
d'après le théorème précédent; soit de plus O_0 la position du Soleil au temps t_0 . Sa vitesse v_0 étant, ainsi que nous l'avons supposé, constante en grandeur et en direction, le point A_0 est la position qu'occuperait l'observateur au temps t si, à partir du moment t_0 , il n'avait été soumis qu'à son mouvement annuel et diurne.

Si donc on corrige encore la direction $\alpha'', \beta'', \gamma''$ de la parallaxe annuelle relative au temps t , on obtient finalement la direction $O_0 S_0$ qui joint les positions du Soleil et de l'étoile au temps t_0 , direction qui peut être considérée comme constante, au moins pendant très long temps.

II. Supposons maintenant que l'astre observé soit un astre rapproché, c'est-à-dire tel que le temps d'aberration correspondant $t-t_0$ soit assez petit pour qu'on puisse considérer la vitesse de translation v , comme constante en grandeur et en direction pendant ce temps: c'est le cas de tous les astres du système solaire, puisque $t-t_0$ ne dépasse guère 4 heures, même pour Neptune.

a) Soit alors $\alpha'', \beta'', \gamma''$, la direction α', β', γ' corrigée de l'aberration des fixes comme plus haut; on peut répéter ce qui précède sur le point A_0 , et considérant l'astre comme appartenant au système solaire, on peut dire que la direction $\alpha'', \beta'', \gamma''$ est celle qui joint l'observateur au temps t à l'astre au temps t_0 , mais par rapport au système solaire pris comme système de comparaison.

b) Mais on peut appliquer autrement le Théorème général. Soit $\alpha''', \beta''', \gamma'''$ la direction apparente α', β', γ' corrigée seulement de l'aberration diurne. Alors A_0 est tel que le vecteur $\overline{A_0 A}$ soit égal à $(v_0 + v_1)(t - t_0)$, de sorte que le temps $t - t_0$ étant court, le point A_0 est la position qu'occuperait l'observateur, si, à partir du moment t_0 il n'avait été soumis qu'à son mouvement diurne. Si donc T_0 désigne le centre



de la Terre au temps t_0 , et que l'on corrige encore la direction $\alpha''', \beta''', \gamma'''$ de la parallaxe diurne, au temps t , on obtient finalement la direction $T_0 S_0$, c'est-à-dire la position géocentrique vraie de l'étoile au temps t_0 .

Si en particulier, A était le centre de la Terre, l'aberration diurne serait nulle de sorte que la direction apparente de l'étoile au temps t n'est autre que sa direction vraie au temps t_0 , en entendant toujours par direction vraie celle qui joint les positions au même instant du centre de la Terre et de l'étoile. C'est là le théorème de l'aberration planétaire.

Appliquons en particulier ces résultats au Soleil, A étant toujours le centre de la Terre.

Soit Θ' la longitude apparente du Soleil au temps t , telle qu'on la trouve dans les éphémérides, et Θ la longitude vraie. D'après (a) le soleil étant fixe dans le système Solaire, il suffit de corriger Θ' de l'aberration annuelle pour avoir Θ ; donc d'après les formules (2), on a

$$\Theta = \Theta' + k + k \sin \varphi \cos(\Theta - \varpi).$$

D'après (b) il suffit de prendre la longitude apparente au temps $t + \Delta t$, Δt étant le temps d'aberration égal à $\frac{R}{V}$; donc ce temps étant très petit, il vient

$$\Theta = \Theta' + \frac{R}{V} \frac{d\Theta'}{dt} = \Theta' + k \left[1 + \sin \varphi \cos(\Theta - \varpi) \right],$$

D'après les expressions de $\frac{d\Theta'}{dt}$ et de R données plus haut.

III S'il s'agissait, enfin d'un astre comme la Lune, très rapproché de la Terre, les résultats précédents subsisteraient, mais on verra de plus que, $t - t_0$ étant ici assez court pour que la vitesse v_2 elle-même puisse être considérée comme constante en grandeur et en direction pendant ce temps, la position apparente au temps t est la même que la position vraie au temps t_0 , non seulement pour le centre, mais pour un point

quelconque de la Terre.

Chapitre IX.

Notions de Mécanique Céleste.

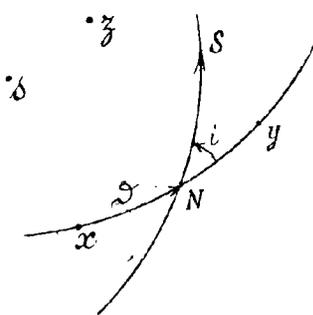
Nous avons étudié dans les Chapitres précédents l'influence de la position et du mouvement de l'Observateur sur les observations. Il est nécessaire maintenant d'acquiescer quelques notions précises sur le mouvement des astres, considéré indépendamment de l'observateur.

Ces notions nous seront fournies par la Mécanique Céleste, qui est fondée sur le principe de la gravitation universelle, et dont nous allons exposer les résultats élémentaires.

Problème des deux corps. — Considérons deux points matériels M et M_0 , de masses m et m_0 , et soumis uniquement à leur attraction mutuelle, déterminée par la loi de Newton: en d'autres termes, r étant la distance M_0M , et f un coefficient constant, la force qui agit sur M par exemple, est dirigée suivant MM_0 , et a pour intensité $\frac{f m m_0}{r^2}$.

Étudions dans ces conditions le mouvement relatif de M par rapport à M_0 , rapporté à deux axes de directions fixes ayant pour origine M_0 . La mécanique rationnelle élémentaire nous apprend immédiatement :

- 1° que la trajectoire de M est une section conique admettant M_0 comme foyer;
- 2° que le mouvement de M sur cette trajectoire se fait d'après la loi des aires, c'est-à-dire que l'aire décrite par le rayon vecteur M_0M varie proportionnellement au temps, t .



Ce sont les deux premières lois de Kepler, déduites de l'observation; c'est sur elles que nous allons nous appuyer.

Supposons les axes M_0x , M_0y , M_0z formant un système orienté dans le sens direct, et considérons la trace xy du plan M_0xy sur la sphère céleste de centre M_0 . Soit S le grand cercle trace du plan de la trajectoire de M sur la sphère céleste. Il faut tout d'abord définir

la position de S par rapport à αy . On le fait de la façon suivante:

S coupe αy en deux points N et N' , diamétralement opposés, qui sont les nœuds de l'orbite de M ; soit N celui de ces points qui est tel que en traversant N dans son mouvement sur S , M passe dans l'hémisphère déterminé par αy qui contient Z , ainsi que l'indique la flèche: N est le nœud ascendant, et N' le nœud descendant. N est déterminé pour l'arc αN ou S , compté dans le sens direct: c'est la longitude du nœud ascendant, le sens du mot longitude étant convenablement généralisé. L'angle que fait αy avec S en N , compté dans le sens direct est alors positif et moindre que π : c'est l'inclinaison, i , de l'orbite de M .

Les deux angles S et i déterminent complètement la position du plan de l'orbite, et aussi le sens du mouvement de M .

Si ρ est le pôle de S , choisi de façon que le mouvement de M sur S se fasse dans le sens direct par rapport à ρ , on voit tout de suite que les coordonnées angulaires ψ, θ de ρ par rapport au système d'axes $M_0, \alpha y, Z$ sont respectivement

$$S - \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2} - i.$$

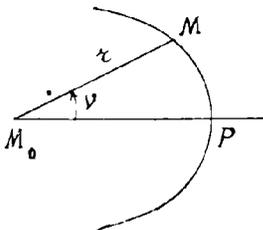
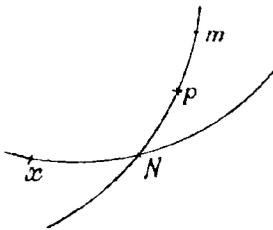
Ensuite si l'on veut changer les axes de coordonnées, on pourra appliquer toutes les formules du Chapitre IV, en y faisant la substitution qu'on vient d'indiquer.

La trajectoire est dans son plan une section conique, dont il faut d'abord définir l'orientation. Soit P le point de la trajectoire le plus voisin de M_0 et soit p_0 la trace de $M_0 P$ sur la sphère; supposant que M_0 soit le soleil, P est le périhélie de l'orbite, et la somme des deux arcs αN et $N p_0$ comptés dans le sens direct, est la longitude du périhélie, ω .

Soit p le paramètre de l'orbite, et e son excentricité; ces deux éléments achèvent de la définir complètement, et si r et ν sont les coordonnées polaires de M , rapportées à l'axe $M_0 P$, et orientées dans le sens direct, l'équation de la trajectoire est comme l'on sait

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}.$$

L'angle ν est l'anomalie vraie; p est la trace de $M_0 M$ sur la sphère céleste, c'est l'arc $p m$. La somme



$\alpha N + Nm$ ou $\nu + \omega$ est la longitude dans l'orbite de M .

L'orbite est une ellipse, une parabole, ou une hyperbole suivant que e est inférieur, égal ou supérieur à 1. Dans tous les cas la concavité de l'orbite est toujours tournée vers M_0 , et si $e > 1$, la trajectoire n'est en réalité qu'une branche d'hyperbole.

Dans le cas de l'ellipse, ν prend toutes les valeurs possibles; r est minimum au périhélie pour $\nu = 0$, et maximum à l'aphélie P' pour $\nu = \pi$: la ligne PP' est la ligne des apsides.

Si a est le demi-grand axe de la courbe, on a

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} \right) = \frac{p}{1-e^2},$$

et le plus souvent on emploie a au lieu du paramètre p .

Dans le cas de la parabole, ν varie de $-\pi$ à $+\pi$, et l'on substitue d'ordinaire à p la distance périhélie q , égale à $\frac{p}{2}$, et l'on a

$$r = \frac{q}{\cos^2 \frac{\nu}{2}}.$$

Dans le cas de l'hyperbole, ν varie de $-\alpha$ à $+\alpha$, α étant l'angle positif et plus petit que π dont le cosinus est $-\frac{1}{e}$.

Le demi-axe transverse de la courbe a pour valeur

$$\frac{1}{2} \left(\frac{p}{e-1} - \frac{p}{e+1} \right) = \frac{p}{e^2-1};$$

on convient d'appeler encore a ce demi-axe, changé de signe, de façon à avoir toujours $p = a(1-e^2)$.

Il nous reste à étudier la loi du mouvement sur la trajectoire. On a à cet effet, d'après la loi des aires, la relation

$$r^2 \frac{dv}{dt} = C,$$

C étant une constante, qui d'après la Mécanique, est égale à $\sqrt{f(m_0+m)} p$, dans tous les cas. C'est ce qu'il est facile de vérifier en invoquant le théorème des forces vives. Remarquons d'abord que M_0 étant considéré comme fixe, l'accélération relative de M est égale à son accélération absolue, plus l'accélération absolue de M_0 changée de signe, c'est-à-dire à

$$\frac{f(m_0+m)}{r^2};$$

Donc d'après le théorème des forces vives, on a :

$$\frac{d\pi^2}{dt^2} + \pi^2 \frac{dv^2}{dt^2} = f(m_0+m) \left(\frac{2}{r} - h \right),$$

h étant une constante. Ceci peut s'écrire :

$$C^2 \left[\frac{1}{\pi^2} + \left(\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dv} \right)^2 \right] = f(m_0+m) \left(\frac{2}{r} - h \right);$$

remplaçant $\frac{1}{\pi}$ par sa valeur, on a :

$$C^2 \left[(1+e \cos v)^2 + e^2 \sin^2 v \right] = f(m_0+m) p (2+2e \cos v - h p),$$

d'où par identification :

$$C^2 = f(m_0+m) p, \quad h = \frac{1-e^2}{p} = \frac{1}{a}.$$

Nous trouvons donc bien le résultat annoncé, et en même temps la constante de l'équation des forces vives.

Mouvement parabolique. — L'intégration de l'équation $\frac{\pi^2 dv}{r^2} = C$ est différente suivant les cas. Laissons de côté le cas de l'hyperbole, qui n'a pas d'importance pratique, traitons d'abord le cas de la parabole. On a

$$\frac{dt}{dv} = \frac{q^{3/2}}{\sqrt{2f(m_0+m)}} \frac{1}{\cos^4 \frac{v}{2}}.$$

$$\text{or} \quad \frac{1}{2 \cos^4 \frac{v}{2}} = \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2} \right) \frac{d. \operatorname{tg} \frac{v}{2}}{dv}.$$

$$\text{Donc} \quad t - t_0 = \frac{q^{3/2} \sqrt{2}}{\sqrt{f(m_0+m)}} \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} \right);$$

on voit que la constante t_0 est le temps du passage au périhélie.

Finalement le mouvement parabolique est défini par les cinq constantes \mathcal{D} , i , ω , q , t_0 .

C'est à l'étude du mouvement des comètes que ce qui précède s'applique; alors m est négligeable devant m_0 et l'on réduit en Tables (Table de Barker), la quantité

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v}{2}}{\sqrt{f(m_0+m)}},$$

de façon à pouvoir immédiatement calculer t connaissant.

ν ou inversement.

Pour résoudre directement cette dernière question, il faut, faisant $x = \operatorname{tg} \frac{\nu}{2}$, résoudre l'équation du troisième degré à une seule racine réelle,

$$x^3 + 3x = \frac{3(t-t_0)\sqrt{f(m_0+m)}}{\sqrt{2} q^{3/2}};$$

à cet effet, on pose

$$x = \operatorname{cotg} \lambda - \operatorname{tg} \lambda = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \lambda}{\operatorname{tg} \lambda} = 2 \operatorname{cotg} 2 \lambda;$$

alors

$$x^3 + 3x = \operatorname{cotg}^3 \lambda - \operatorname{tg}^3 \lambda;$$

faisant

$$\operatorname{tg} \lambda = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \varphi},$$

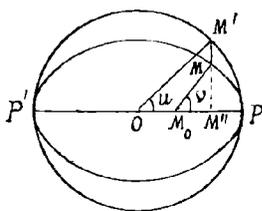
il vient

$$x^3 + 3x = \operatorname{cotg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi = 2 \operatorname{cotg} 2 \varphi;$$

Donc finalement, on aura la suite des calculs indiquée par les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{cotg} 2 \varphi = \frac{3(t-t_0)\sqrt{f(m_0+m)}}{2\sqrt{2} q^{3/2}}, \\ \operatorname{tg} \lambda = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \varphi}, \\ \operatorname{tg} \frac{\nu}{2} = 2 \operatorname{cotg} 2 \lambda. \end{array} \right.$$

Mouvement elliptique. — Occupons-nous maintenant du cas très important de l'ellipse.



Il est nécessaire de faire tout d'abord un changement de variables; décrivons sur le grand axe PP' de l'orbite comme diamètre, un cercle de centre O ; soit M' le point où l'ordonnée MM'' de M , perpendiculaire à PP' , coupe ce cercle; on voit que l'on a la relation $MM'' = M'M''\sqrt{1-e^2}$.

Soit u l'angle de OP avec OM' , ou anomalie excentrique; on a alors immédiatement

$$\left\{ \begin{array}{l} r \cos v = a(\cos u - e), \\ r \sin v = a\sqrt{1-e^2} \sin u, \end{array} \right.$$

puisque $OM_0 = ae$. On en déduit :

$$r^2 \frac{dv}{dt} = r \cos v \frac{d}{dt} (r \sin v) - r \sin v \frac{d}{dt} (r \cos v)$$

$$= a^2 \sqrt{1-e^2} (1-e \cos u) \frac{du}{dt} ;$$

et d'après la valeur de la constante des aires :

$$(1-e \cos u) \frac{du}{dt} = a^{-3/2} \sqrt{f(m_0+m)}.$$

En faisant $n = a^{-3/2} \sqrt{f(m_0+m)}$, et intégrant, on a donc :

$$u - e \sin u = n (t - t_0).$$

On voit que t_0 est l'époque d'un passage au périhélie, celui pour lequel $u=0$.

Il est clair d'ailleurs que le mouvement est périodique ; les époques des divers passages au périhélie sont $t_0 + \frac{2k\pi}{n}$, k étant un entier quelconque ; n est le moyen mouvement de M , dans son mouvement autour de M_0 , puisque $\frac{2\pi}{n}$ est la période T de ce mouvement.

Les éléments de l'orbite de M sont les six constantes $\varrho, \varOmega, i, \omega, a, e, t_0$; on peut remplacer a par n , puisque l'on a

$$n^2 a^3 = f (m_0 + m) ;$$

cette relation correspond à la troisième loi de Kepler : si l'on peut négliger m devant m_0 , le carré de T est proportionnel au cube de a .

La quantité $n (t - t_0)$ ou M est encore dite anomalie moyenne, parce qu'elle varie proportionnellement au temps ; la longitude moyenne du point M est égale à $M + \omega$, et nous la désignerons par l .

Si l_0 est la longitude moyenne à l'origine du temps, ou longitude moyenne de l'époque, on a

$$l_0 = -n t_0 + \omega,$$

et par suite, on peut écrire

$$M = n t + l_0 - \omega.$$

On remplace toujours pratiquement la connaissance de t_0 par celle de l_0 , et on donne en même temps l'époque, c'est-à-dire l'origine du temps.

L'angle l ou M varie proportionnellement au temps, et augmente de 2π après chaque période T ; l'angle u va toujours en croissant, car on a

$$(1-e \cos u) \frac{du}{dt} = n,$$

et $1 - e \cos u$ est une quantité toujours positive ; on voit d'ailleurs que u et M sont toujours compris dans la même demi-circonférence, car on a $u = M$ toutes les fois que M est un multiple de π .

Pour déterminer le mouvement effectué par le point M depuis l'époque jusqu'au temps t , on peut toujours, et c'est ce que nous ferons, réduire la longitude moyenne et l'anomalie moyenne à être comprises entre 0 et 2π , et tenir compte en même temps du nombre de révolutions totales effectuées.

Posons-nous le problème général suivant : connaissant les éléments de l'orbite du point M , déterminez la position de ce point au temps t .

On calcule d'abord l'anomalie moyenne M , et on la réduit entre les limites 0 et 2π .

On calcule ensuite l'anomalie excentrique M , et l'on est amené à cet effet à résoudre l'équation

$$u - e \sin u = M,$$

dite équation de Kepler. Comme il résulte de ce qui a été dit, cette équation a une racine et une seule comprise entre 0 et 2π ; on la déterminera par une méthode d'approximation, par exemple, celle de Newton : si u_1 est une valeur approchée de u , on aura une meilleure valeur u_2 en faisant

$$u_2 = u_1 - \frac{u_1 - e \sin u_1 - M}{1 - e \cos u_1} ;$$

il est toujours facile d'avoir une première valeur approchée de u en remarquant que u est compris entre M et $M \pm e$, le signe + correspondant au cas où M est $< \pi$, le signe - au cas contraire.

On calcule ensuite le rayon vecteur r et l'anomalie vraie v ; on a pour cela les formules

$$\begin{cases} r \sin v = a \sqrt{1 - e^2} \sin u, \\ r \cos v = a (\cos u - e) ; \end{cases}$$

on rendra le calcul plus facile en procédant de la façon suivante, Élevant au carré et ajoutant, on a d'abord :

$$r^2 = a^2 (1 + e^2 \cos^2 u - 2e \cos u),$$

d'où
$$r = a (1 - e \cos u).$$

Écrivons alors

$$\begin{cases} r \left(\cos^2 \frac{v}{2} + \sin^2 \frac{v}{2} \right) = a (1 - e \cos u), \\ r \left(\cos^2 \frac{v}{2} - \sin^2 \frac{v}{2} \right) = a (\cos u - e) ; \end{cases}$$

on en tire immédiatement par addition et soustraction :

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sin \frac{v}{2} = \sqrt{1+e} \sin \frac{u}{2}, \\ \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cos \frac{v}{2} = \sqrt{1-e} \cos \frac{u}{2}, \end{cases}$$

d'où en particulier $\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{u}{2}$.

Il n'y a aucune ambiguïté sur les signes, car v et u appartiennent toujours à la même demi-circonférence.

Il est facile maintenant d'avoir les coordonnées de M par rapport aux axes $M_0 x, M_0 y, M_0 z$. Soit $M_0 x', M_0 y', M_0 z'$ un système de coordonnées orienté dans le sens direct, $M_0 x'$ étant dirigé vers le périhélie de l'orbite de M , et $M_0 z'$ vers le pôle S du plan S de cette orbite. Si ψ', θ' sont les coordonnées angulaires de M par rapport à ce système, on a $\psi' = v, \theta' = 0$. La position de ce système par rapport au premier est définie comme nous l'avons fait au Chapitre IV: il suffit de remplacer σ par \mathcal{D}, σ' par $\mathcal{D} - \omega$, et de conserver i . Si donc ψ et θ sont les coordonnées angulaires de M par rapport à ce premier système, on a d'après le Chapitre IV:

$$\begin{cases} \cos \theta \sin (\psi - \mathcal{D}) = \cos i \sin (v + \omega - \mathcal{D}), \\ \cos \theta \cos (\psi - \mathcal{D}) = \cos (v + \omega - \mathcal{D}), \\ \sin \theta = \sin i \sin (v + \omega - \mathcal{D}), \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} x = \pi \cos \theta \cos \psi = \pi [\cos \mathcal{D} \cos (v + \omega - \mathcal{D}) - \cos i \sin \mathcal{D} \sin (v + \omega - \mathcal{D})], \\ y = \pi \cos \theta \sin \psi = \pi [\sin \mathcal{D} \cos (v + \omega - \mathcal{D}) + \cos i \cos \mathcal{D} \sin (v + \omega - \mathcal{D})], \\ z = \pi \sin \theta = \pi \sin i \sin (v + \omega - \mathcal{D}). \end{cases}$$

On peut en encore écrire :

$$\begin{cases} x = \pi \alpha \sin (v + A), \\ y = \pi \beta \sin (v + B), \\ z = \pi \gamma \sin (v + C), \end{cases}$$

en déterminant les constantes $\alpha, \beta, \gamma, A, B, C$ par les relations :

$$\begin{cases} \alpha \sin (A - \mathcal{D} - \omega) = \cos \mathcal{D}, \\ \alpha \cos (A + \mathcal{D} - \omega) = -\cos i \sin \mathcal{D}, \\ \beta \sin (B + \mathcal{D} - \omega) = \sin \mathcal{D}, \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta \cos (B + \mathcal{D} - \mathcal{C}) = \cos i \cos \mathcal{D}; \\ \gamma = \sin i, \quad C = \mathcal{C} - \mathcal{D}. \end{array} \right.$$

On voit ainsi comment les coordonnées dépendent simplement de π et ν .

Ces formules s'appliquent d'ailleurs aussi bien au mouvement parabolique ou hyperbolique.

Il est facile ensuite de passer de ce système de coordonnées à un autre.

Supposons par exemple, ainsi qu'il arrive dans la pratique, que M_0 soit le Soleil et le plan $M_0 xy$ celui de l'écliptique, $M_0 x$ étant dirigé vers le point vernal : les formules précédentes fourniraient les coordonnées écliptiques. Si x', y', z' désignent les coordonnées équatoriales, on aura, en désignant par E l'obliquité de l'écliptique :

$$x' = x, \quad y' = y \cos E - z \sin E, \quad z' = y \sin E + z \cos E,$$

et l'on pourra écrire de même :

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = r \alpha' \sin (\nu + A'), \\ y' = r \beta' \sin (\nu + B'), \\ z' = r \gamma' \sin (\nu + C'), \end{array} \right.$$

en faisant

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha' \sin (A' + \mathcal{D} - \mathcal{C}) = \cos \mathcal{D}, \\ \alpha' \cos (A' + \mathcal{D} - \mathcal{C}) = -\cos i \sin \mathcal{D}, \\ \beta' \sin (B' + \mathcal{D} - \mathcal{C}) = \sin \mathcal{D} \cos E, \\ \beta' \cos (B' + \mathcal{D} - \mathcal{C}) = \cos i \cos \mathcal{D} \cos E - \sin i \sin E, \\ \gamma' \sin (C' + \mathcal{D} - \mathcal{C}) = \sin \mathcal{D} \sin E, \\ \gamma' \cos (C' + \mathcal{D} - \mathcal{C}) = \cos i \cos \mathcal{D} \sin E + \sin i \cos E. \end{array} \right.$$

Le problème général proposé est ainsi complètement résolu.

Développements en série. — Il y a lieu dans certains cas de diriger le calcul autrement, en évitant le calcul direct de u, ν et π , et mettant en évidence le temps.

Considérons d'abord l'anomalie excentrique u définie par l'équation :

$$u - e \sin u = M,$$

et M ayant une valeur donnée réelle, regardons u comme

fonction de e .

Pour $e=0$ on a $u=M$, et l'on peut développer u en série convergente ordonnée suivant les puissances de e , la valeur initiale étant M . Quel sera le rayon de convergence de cette série? Comme on le sait d'après un théorème général de la théorie des fonctions, ce sera le plus petit module des valeurs de e pour lesquelles la fonction u cesse d'être régulière, c'est-à-dire ici des valeurs de e pour lesquelles l'équation de Kepler a une racine double, valeurs déterminées par la relation

$$1 - e \cos u = 0,$$

jointe à l'équation elle-même.

Si donc on cherche la limite supérieure des valeurs de e qui rendent convergente la série donnée, quelle que soit la valeur réelle de M , il faudra déterminer le plus petit module des valeurs de e pour lesquelles on a simultanément:

$$1 - e \cos u = 0, \quad u - e \sin u = M,$$

M étant une quantité réelle quelconque.

En faisant $i = \sqrt{-1}$ et désignant par ε la base des logarithmes népériens, ces deux équations s'écrivent:

$$1 \pm i u - e \varepsilon^{\pm i u} = \pm i M;$$

faisons $e = \rho \varepsilon^{i\theta}$, $i u = \alpha + i \beta$, $\rho, \theta, \alpha, \beta$ étant réels; ρ , pris positivement, sera le module de e et l'on aura:

$$1 \pm \alpha \pm i \beta - \rho \varepsilon^{\pm \alpha} (\cos(\beta \pm \theta) \pm i \sin(\beta \pm \theta)) = \pm i M;$$

séparant les quantités réelles et imaginaires, on a les relations:

$$\rho \varepsilon^{\alpha} \cos(\beta + \theta) = 1 + \alpha, \quad \rho \varepsilon^{-\alpha} \cos(\beta - \theta) = 1 - \alpha,$$

$$\rho \varepsilon^{\alpha} \sin(\beta + \theta) = \beta - M, \quad \rho \varepsilon^{-\alpha} \sin(\beta - \theta) = \beta - M,$$

et par suite:

$$(\beta - M)^2 = \rho^2 \varepsilon^{2\alpha} (1 + \alpha)^2 = \rho^2 \varepsilon^{-2\alpha} (1 - \alpha)^2.$$

On a donc:

$$\rho^2 = \frac{4\alpha}{\varepsilon^{2\alpha} - \varepsilon^{-2\alpha}},$$

et l'on peut choisir α comme paramètre, à la condition que ρ^2 et $(\beta - M)^2$ soient positifs.

On peut d'abord faire $\alpha = 0$ et par suite $\rho^2 > 1$: mais nous laisserons ce cas de côté, ce que la suite justifiera:

En développant $e^{2\alpha} - e^{-2\alpha}$ en série, on a :

$$\rho^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1.2.3} (2\alpha)^2 + \frac{1}{1.2.3.4.5} (2\alpha)^4 + \dots}$$

ce qui montre que ρ^2 est toujours positif et décroît de 1 à 0 quand α^2 croît de 0 à $+\infty$. Mais il faut encore $(\beta - M)^2$ positif, ce qui donne en supposant $\alpha > 0$, ainsi qu'on peut le faire évidemment :

$$e^{4\alpha} \leq \frac{(\alpha+1)^2}{(\alpha-1)^2} ;$$

si $\alpha < 1$, ceci est toujours vérifié, car on peut écrire :

$$e^{2\alpha} \leq 1 + \frac{2\alpha}{1-\alpha} ,$$

ou bien :

$$1 + \frac{2\alpha}{1} + \frac{(2\alpha)^2}{1.2} + \frac{(2\alpha)^3}{1.2.3} + \dots \leq 1 + 2\alpha + 2\alpha^2 + 2\alpha^3 + \dots ,$$

ce qui est toujours vrai ; si $\alpha > 1$, la condition revient à :

$$e^{2\alpha} \leq \frac{\alpha+1}{\alpha-1} ,$$

c'est-à-dire $\alpha \leq \alpha_0$, en désignant par α_0 la racine positive évidemment unique de l'équation :

$$e^{2x} = \frac{x+1}{x-1} .$$

D'après suite le maximum des valeurs possibles de α est α_0 , et comme alors $\beta - M = 0$, on a

$$\rho_0^2 = \alpha_0^2 - 1 .$$

Le minimum de la valeur de ρ est donc $\sqrt{\alpha_0^2 - 1}$, et la série qui donne u cesse de converger pour toute valeur de M quand l'excentricité e atteint cette limite que l'on vérifiera être égale à 0,66274 ... L'équation de Répler commencent à avoir une racine double pour $e = \pm i \rho_0$ et $M = \pm \frac{\pi}{2}$.

Les premiers termes du développement de u en série sont facile à trouver ; on a en effet :

$$\frac{du}{de} (1 - e \cos u) - \sin u = 0 ,$$

$$\frac{d^2u}{de^2} (1-e \cos u) + e \sin u \left(\frac{du}{de}\right)^2 - 2 \cos u \frac{du}{de} = 0,$$

$$\frac{d^3u}{de^3} (1-e \cos u) + 3e \sin u \frac{du}{de} \frac{d^2u}{de^2} - 3 \cos u \frac{d^2u}{de^2} + e \cos u \left(\frac{du}{de}\right)^3 +$$

$$3 \sin u \left(\frac{du}{de}\right)^2 = 0,$$

$$\text{d'où } \left(\frac{du}{de}\right)_0 = \sin M, \quad \left(\frac{d^2u}{de^2}\right)_0 = 2 \sin M \cos M = \sin 2M,$$

$$\left(\frac{d^3u}{de^3}\right)_0 = 3 \cos M \sin 2M - 3 \sin^3 M = \frac{9}{4} \sin 3M - \frac{3}{4} \sin M, \dots;$$

$$\text{donc } u = M + e \sin M + \frac{e^2}{2} \sin 2M + e^3 \left(\frac{3}{8} \sin 3M - \frac{1}{8} \sin M\right) + \dots$$

Sans insister ici sur la loi générale de cette série, remarquons seulement que le coefficient de e^p est toujours de la forme $\alpha \sin pM + \beta \sin (p-2)M + \gamma \sin (p-4)M + \dots$, α, β, γ , étant des coefficients numériques. La même observation s'appliquera aux développements analogues que nous allons rencontrer, les sinus pouvant être changés en cosinus.

Le rayon vecteur r a pour valeur $a(1-e \cos u)$; on peut donc le développer en série ordonnée suivant les puissances de e dans les mêmes conditions que u , et l'on a :

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos M + \frac{e^2}{2} (1 - \cos 2M) + e^3 \left(\frac{3}{8} \cos M - \frac{3}{8} \cos 3M\right) + \dots$$

L'anomalie vraie est fournie par la relation :

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{u}{2};$$

faisons

$$q = \frac{\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} - 1}{\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} + 1} = \frac{1 - \sqrt{1-e^2}}{e};$$

on a d'après une formule connue :

$$v = u + 2q \sin u + 2 \frac{q^2}{2} \sin 2u + 2 \frac{q^3}{3} \sin 3u + \dots;$$

pour $e < 1$, on a

$$q = \frac{e}{2} + \frac{e^3}{8} + \dots;$$

et il vient dans les mêmes conditions que plus haut :

$$v = M + 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + e^3 \left(\frac{3}{12} \sin 3M - \frac{1}{4} \sin M \right) + \dots$$

La différence $v - M$ et qu'on appelle l'équation du centre, C . On a :

$$\frac{dC}{dt} = \frac{dv}{dt} - n = n \left(-1 + \frac{a^2}{\kappa^2} \sqrt{1 - e^2} \right),$$

D'après la valeur de la constante des aires. L'équation du centre, nulle au périhélie et à l'aphélie, a en valeur absolue un maximum pour $\frac{\kappa}{a} = \sqrt{1 - e^2}$. Il est facile de calculer ce maximum ; d'après le ⁴ développement en série, il a lieu pour

$$2 \cos M + \frac{5}{2} e \cos 2M + \dots = 0,$$

c'est-à-dire, en supposant M positif, pour $M = \frac{\pi}{2} - \frac{5}{4} e - \dots$; le maximum cherché est alors égal à $2e + \frac{11}{48} e^3 + \dots$

Considérons enfin la coordonnée ψ , ou longitude vraie de M ; des formules déjà écrites donnent :

$$\operatorname{tg}(\psi - \mathcal{D}) = \cos i \operatorname{tg}(v + \omega - \mathcal{D}),$$

et par suite d'après une relation connue :

$$\psi = v + \omega - \operatorname{tg}^2 \frac{i}{2} \sin 2(v + \omega - \mathcal{D}) + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^4 \frac{i}{2} \sin 4(v + \omega - \mathcal{D}) + \dots$$

C étant l'équation du centre, et l la longitude moyenne, on a $v + \omega = l + C$; faisons :

$$R = - \operatorname{tg}^2 \frac{i}{2} \sin 2(l + C - \mathcal{D}) + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^4 \frac{i}{2} \sin 4(l + C - \mathcal{D}) + \dots ;$$

on a finalement :

$$\psi = l + C + R$$

La différence $\psi - l$ entre la longitude vraie et la longitude moyenne est donc la somme de l'équation du centre, et d'une autre quantité R , dite réduction au plan fondamental ; cette réduction est une fonction périodique de l'angle $l + C - \mathcal{D}$, dit argument de la latitude, lorsque le plan fondamental est celui de l'écliptique ; elle s'annule toutes les fois que cet argument est un multiple de $\frac{\pi}{2}$, et seulement alors l'étude de la différence $\psi - l$ se fera ² par approximations successives quand on connaîtra e, i , et $\omega - \mathcal{D}$.

Système Solaire. — Le système solaire se compose du Soleil, des planètes et de leurs satellites, des comètes : on peut, à cause de

l'éloignement des étoiles, considérer ce système comme soustrait à toute action extérieure.

La masse du Soleil est beaucoup plus grande que celle des différents astres qui l'accompagnent ; on la prend en général comme unité de masse :

Les planètes se distinguent en grosses planètes et petites planètes. Les premières sont au nombre de huit, savoir, en les rangeant par ordre de distance croissante au Soleil :

Mercure, ☿, de masse $\frac{1}{5.000.000}$ environ ;

Venus, ♀ de masse $\frac{1}{406.000}$;

La Terre ♂ avec son satellite la Lune ; la masse du système est $\frac{1}{320.000}$;

Mars ♂ avec ses deux satellites, Phobos et Deimos ; la masse du système est $\frac{1}{3.100.000}$;

Jupiter ♃ avec sept satellites connus : I Io, II Europe, III Ganymède, IV Callisto, V, VI, VII ; la masse du système est $\frac{1}{1047,2}$;

Saturne ♄, avec ses anneaux, et dix satellites connus : Mimas, Encelade, Téthys, Dioné, Rhéa, Titan, Hypériorion, Japet, Iphébé, X ; la masse du système est $\frac{1}{3500}$;

Uranus ♅, avec ses quatre satellites, Ariel, Umbriel, Titania, Obéron ; la masse du système est $\frac{1}{22600}$;

Neptune ♆, avec son satellite ; la masse totale est $\frac{1}{19380}$.

Les masses des satellites sont en général négligeables devant la masse de la planète à laquelle ils appartiennent ; seule la Lune fait exception ; sa masse vaut environ $\frac{1}{80}$ de celle de la Terre.

Les petites planètes sont de masse négligeable ; leur nombre au 31 Octobre 1905 dépassait 600 ; leurs orbites sont toutes comprises entre Mars et Jupiter, exception faite pour (433) Eros, dont l'orbite est comprise entre celle de Mars et de la Terre.

Les comètes ont aussi une masse négligeable.

Il résulte de ces remarques que l'on peut regarder en

première approximation chaque comète ou planète comme seule en présence du Soleil ; de même chaque satellite peut être considéré comme seul en présence de la planète à laquelle il appartient. De plus la constitution de ces différents corps et la faiblesse de leurs dimensions par rapport à leurs distances permet de les regarder comme réduits à leurs centres de gravité.

Par suite, en première approximation, le mouvement des planètes ou comètes par rapport au Soleil, de même que le mouvement des satellites par rapport aux planètes correspondantes, n'est autre que le mouvement étudié ci-dessus.

Pour compléter cette première approximation, il faut ajouter que le Soleil, les grosses planètes et la Lune tournent sensiblement sur eux-mêmes autour d'axes de direction fixe, d'un mouvement uniforme.

Perturbations. — Mais si l'on ne veut pas se contenter de cette première approximation, et étudier les mouvements tels qu'ils sont, il faut tenir compte des perturbations, c'est-à-dire des actions qui proviennent des corps laissés tout d'abord de côté.

Considérons d'abord une planète ou comète M , réduite à son centre de gravité ; à un instant donné t_0 elle occupe une certaine position M_0 et sa vitesse (par rapport au Soleil) est $M_0 V_0$. Si elle n'était soumise qu'à l'action du Soleil, elle décrirait une trajectoire, soit en général une ellipse E_0 (la parabole n'étant qu'un cas limite), qui est complètement déterminée par la connaissance de M_0 et $M_0 V_0$.

Si maintenant on tient compte de l'action perturbatrice des autres planètes, il est clair que la trajectoire véritable est tangente en M_0 à l'ellipse E_0 et s'éloigne progressivement, mais lentement, de cette ellipse, à mesure que le temps croît en valeur absolue.

Cette ellipse E_0 est l'orbite osculatrice de M au temps t_0 ; ses éléments sont les éléments osculateurs de M au temps t_0 .

Les éléments osculateurs de l'astre M sont des fonctions du temps, qui varient lentement ; si l'on connaît cette variation, on pourra déterminer la position de M à un instant quelconque ; il suffira d'appliquer les formules du mouvement elliptique, en y considérant les éléments non plus comme constants, mais comme variables. On voit d'ailleurs, d'après la définition même des éléments osculateurs, que les fonctions des dérivées premières des coordonnées s'exprimeront encore de la même façon que dans le

mouvement elliptique proprement dit, puisque l'orbite osculatrice est déterminée à chaque instant par la position de M et sa vitesse.

Sous quelle forme se présentent les éléments osculateurs de M ? Voici ce que nous enseignent à ce sujet la Mécanique Céleste. Soit h un élément quelconque, ou, plus généralement, une fonction quelconque des éléments, et soit h_0 sa valeur à l'origine du temps; on peut écrire

$$h = h_0 + p + p - p_0 + p',$$

où voici la signification des lettres :

1° p est une somme finie de termes de la forme $A t^p$, A étant une constante au moins de l'ordre des masses perturbatrices, p étant un entier positif; ces termes sont dits séculaires, et leur ensemble constitue les perturbations ou inégalités séculaires de h .

2° p est une somme finie de termes de la forme $A \frac{\sin(\alpha t + \beta)}{\cos}$, A étant une constante au moins de l'ordre des masses perturbatrices, α et β des constantes; ces termes sont dits périodiques, et leur ensemble constitue les perturbations périodiques de h .

3° p_0 est ce que devient p pour $t=0$;

4° p' est une somme finie de termes mixtes, c'est-à-dire de termes de la forme $A t^p \frac{\sin(\alpha t + \beta)}{\cos}$, les lettres conservant la même signification; leur ensemble constitue les perturbations mixtes de h .

Il est clair d'ailleurs que les termes séculaires étant susceptibles de grandir indéfiniment, les expressions précédentes ne peuvent être valables pour toute valeur de t ; mais elles le seront pour une longue période de temps s'étendant à plusieurs siècles avant et après l'origine du temps, ce qui est largement suffisant pour la pratique actuelle de l'Astronomie, la seule chose dont nous ayons à nous occuper ici.

Nous appellerons valeur moyenne de h à l'époque t , l'expression de h dans laquelle on supprime les termes périodiques et les termes mixtes, de sorte que cette valeur sera $h_0 + p - p_0$. On voit immédiatement que, comme il convient, cette valeur est indépendante de l'origine du temps, car, si cette origine vient à changer, les termes périodiques restent périodiques, et les termes mixtes deviennent périodiques ou mixtes tandis que les termes séculaires deviennent séculaires ou constants.

Considérons une fonction de h , soit $f(h)$, et faisons

$$f(h_0) = f_0.$$

On aura les perturbations de $f(h)$, en écrivant, suivant la formule de Taylor.

$$f(h) = f_0 + \frac{df_0}{dh_0} (\delta + \pi - \pi_0 + \delta') + \frac{1}{2} \frac{d^2f}{dh_0^2} (\delta + \pi - \pi_0 + \delta')^2 + \dots;$$

si d'ailleurs $f(h) = f_0 + S + P - P_0 + S'$,

en mettant en évidence les perturbations séculaires S , périodiques P , mixtes S' , on voit que $P - P_0$ n'est autre chose que $f(h_0 + \pi - \pi_0) - f_0$, de sorte que l'ensemble de termes $P - P_0$ correspond exactement à $\pi - \pi_0$.

La valeur moyenne de $f(h)$ est $f_0 + S - P_0$; on voit qu'on peut la confondre avec $f_0 + S - P_0$, si l'on peut négliger les termes de l'ordre du carré de $\pi + \delta'$; dans ce cas, mais seulement alors, l'ensemble $S - P_0$ correspond exactement à $\delta - \delta_0$.

Les mêmes conclusions resteraien vraies si l'on considérait une fonction de plusieurs éléments.

Les résultats relatifs au mouvement des satellites sont analogues.

Il en est encore de même quand il s'agit de précéder le mouvement des astres sur eux-mêmes.

Éléments des grosses planètes. — Pour terminer ce chapitre nous allons indiquer les valeurs moyennes des éléments des grosses planètes, d'après Le Verrier. L'époque est 1850 Janvier 1, 0 temps moyen de Paris; les longitudes sont comptées sur l'écliptique moyen, et à partir de l'équinoxe moyen de la même époque; (la signification exacte de ces termes sera indiquée un peu plus loin).

On prend en général dans l'étude du mouvement des planètes et des comètes le jour moyen pour unité de temps; n est donc le moyen mouvement diurne. Ce moyen mouvement, de même que le demi grand axe n'a pas d'inégalités séculaires sensibles; c'est là le célèbre théorème de l'invariabilité des grands axes.

L'unité de longueur résulte de la valeur de la constante d'attraction f ; on fait d'après Gauss.

$$\log \sqrt{f} = \bar{2}.2355814414;$$

d'après la relation du mouvement elliptique

$$n = a^{-3/2} \sqrt{f(m_0 + m)},$$

on voit alors que, la masse du Soleil m_0 étant prise comme

unité, ainsi que nous l'avons déjà dit, le moyen mouvement diurne d'un corps de masse négligeable décrivant autour du Soleil un cercle dont le rayon serait l'unité de distance aurait pour valeur \sqrt{f} .

La durée de sa révolution T serait donc $\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{\sqrt{f}}$ en jours moyens; ce qui donne

$$T = 365,2568984.$$

On voit que ce temps est très voisin de celui de la Terre. Gauss a déterminé f en prenant pour unité le demi grand axe de l'orbite terrestre: mais la masse de la Terre intervient alors, et si cette masse vient à être mieux connue, f change: on a préféré conserver la détermination de Gauss.

S'il y a lieu de changer d'unités, on remarquera que les dimensions de f sont marquées par la relation symbolique

$$f = L^3 M^{-1} T^{-2}$$

Dans le Tableau ci-contre, n , a , e , i , l_0 , ϱ , ω ont la signification indiquée plus haut; T désigne le temps de la révolution sidérale en jours moyens et années juliennes de 365,25.

Comme on le voit, les excentricités et les inclinaisons sont petites, sauf pour Mercure.

Pour les petites planètes l'excentricité atteint souvent 0,35 et l'inclinaison de Gallax est presque de 35°.

Pour les comètes en fin, l'inclinaison est quelconque, et l'excentricité forte; le plus souvent elle est très voisine de 1 et le mouvement

	n	T	a	e	i	ϱ	ω	l_0
Mercure	14 732",4	87 ^d 95 ^g 9	0,38710	0,20560	7° 0' 8"	46° 33' 9"	75° 7' 14"	82° 7' 15" 20"
Venus	5767",67	224 ^d 70 ^g 1	0,72333	0,00684	3° 23' 35"	75° 49' 32"	129° 27' 15"	245° 33' 15"
Terre	3548",19	1 ^{an} 0 ^d 00 ^g 64	1,00000	0,01677	0° 0' 0"	0° 0' 0"	100° 21' 42"	100° 47' 4"
Mars	1886",52	1 ^{an} 321 ^d 73	1,52369	0,09326	1° 51' 21"	48° 23' 53"	333° 17' 54"	83° 40' 31"
Jupiter	299",28	11 ^{ans} 311 ^d 84	5,2028	0,04825	1° 18' 14"	98° 56' 17"	41° 54' 58"	460° 4' 10"
Saturne	120",453	29 ^{ans} 168 ^d 99	9,5389	0,05607	2° 29' 40"	112° 20' 53"	90° 6' 57"	14° 52' 28"
Uranus	42",231	84 ^{ans} 7 ^d 3 ^g	19,183	0,04634	0° 46' 20"	73° 18' 54"	170° 50' 7"	29° 17' 51"
Neptune	21",535	164 ^{ans} 280 ^d	30,055	0,00896	1° 47' 21"	130° 6' 25"	45° 59' 43"	334° 33' 29"

peut être considérée comme parabolique

Les Satellites des planètes ont en général de très petites excentricités.

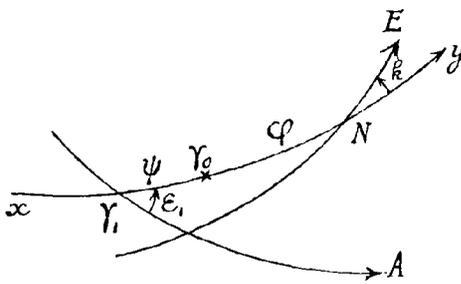
Chapitre X

Précession et Nutation

Déplacement des plans fondamentaux. — Le précédent Chapitre a pour objet l'étude des déplacements des plans fondamentaux, c'est-à-dire des plans de l'écliptique et de l'équateur, et l'étude de l'influence de ces déplacements sur les coordonnées des astres.

L'écliptique vrai à l'époque t est à proprement parler, le plan de l'orbite osculatrice de la Terre par rapport au Soleil.

L'équateur vrai à l'époque t est le plan perpendiculaire à l'axe instantané de rotation de la Terre sur elle-même. Cet axe peut être considéré comme fixe par rapport à la Terre, mais non dans l'espace, à cause de l'action du Soleil et de la Lune sur la Terre, rendue sensible par la forme ellipsoïdale de cette dernière.



Considérons la sphère Céleste, et par son centre O , menons un plan fixe de trace xy , l'écliptique vrai au temps t de trace E , l'équateur vrai de trace A ; soit de plus γ_0 un point fixe de xy . Si N est le nœud ascendant de E par rapport

à xy , la position de E est définie par la longitude φ , ou $\gamma_0 N$, de ce nœud, comptée à partir de γ_0 dans le sens direct et par l'inclinaison k de E sur xy .

Si γ_1 est le nœud ascendant descendant de xy par rapport à A , on peut définir la position de A par l'arc $\gamma_1 \gamma_0$ ou ψ , compté sur xy dans le sens direct à partir de γ_1 , et l'inclinaison ϵ_1 de xy sur A . Ajoutons pour préciser que A et E sont ici supposés parcourus dans le sens direct, chacun par rapport à son pôle boréal, et qu'il en est de même de xy par rapport à son pôle Z , x, y, z étant les traces des axes d'un système trirectangle $Oxyz$ orienté dans le sens direct.

Les quantités k et φ sont fournies par la théorie du

mouvement de la Terre autour du Soleil, et l'on peut écrire, avec une approximation suffisante, et d'après le Chapitre précédent:

$$(1) \begin{cases} \sin k \sin \varphi = a + b t + c t^2 + \mathcal{I}, \\ \sin k \cos \varphi = a' + b' t + c' t^2 + \mathcal{Q}, \end{cases}$$

a, b, c, a', b', c' étant des constantes, \mathcal{I} et \mathcal{Q} des termes périodiques très petits.

Les quantités ψ et \mathcal{E} , sont fournies par la théorie du mouvement de rotation de la Terre sur elle-même. On a de même:

$$(2) \begin{cases} \psi = a'' + b'' t + c'' t^2 + \mathcal{P}', \\ \mathcal{E} = a''' + b''' t + c''' t^2 + \mathcal{Q}', \end{cases}$$

\mathcal{P}' et \mathcal{Q}' étant des termes périodiques ou mixtes fort petits.

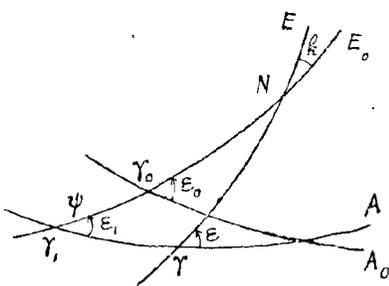
Si dans les formules (1) on fait abstraction de \mathcal{I} et de \mathcal{Q} , on définit l'écliptique moyen; et cette définition, d'après des remarques faites précédemment, est indépendante de l'origine du temps et du choix du plan fixe xy , puisque les termes du second ordre par rapport à \mathcal{I} et \mathcal{Q} sont négligeables.

L'écliptique moyen est ce qu'on appelle d'habitude simplement l'écliptique à la date t , et nous ferons toujours ainsi.

De même les formules (2) où l'on fait abstraction de \mathcal{P}' et \mathcal{Q}' définissent l'équateur moyen à l'époque t ; et cette définition est comme la précédente, indépendante de l'origine du temps et des coordonnées employées.

Le noeud ascendant de l'écliptique (moyen) sur l'équateur vrai ou moyen, est l'équinoxe (de printemps) vrai ou moyen; l'inclinaison de l'écliptique (moyen) sur l'équateur vrai ou moyen, est de même l'obliquité vraie ou moyenne; on dit aussi l'obliquité apparente au lieu de vraie, et équinoxe apparent au lieu de vrai.

Précisons maintenant les variations de l'écliptique et de l'équateur. Supposons que le plan fixe xy soit l'écliptique



moyen à l'origine du temps E_0 et que le point γ_0 soit l'équinoxe moyen à l'origine du temps; soit E l'écliptique (moyen) au temps t , A l'équateur vrai à la même époque; on aura alors:

$$(3) \begin{cases} \sin k \sin \varphi = p t + p' t^2, \\ \sin k \cos \varphi = q t + q' t^2; \end{cases}$$

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \psi = ft + f't^2 + P', \\ \varepsilon_1 = \varepsilon_0 + ct^e + Q'; \end{array} \right.$$

la théorie montre en effet alors que ε_1 ne renferme pas de terme en t ; elle fournit aussi la relation $c = \frac{1}{2} pf$.

Si Λ_0 est l'équateur moyen au temps t , on voit que ε_0 est l'inclinaison de E_0 sur Λ_0 , c'est-à-dire l'obliquité moyenne à l'origine du temps.

L'équinoxe vrai est le nœud ascendant γ de E sur Λ , et l'obliquité vraie ε est l'inclinaison de E sur Λ .

Les coordonnées écliptiques d'un astre sont vraies ou moyennes suivant qu'elles sont rapportées à l'équinoxe vrai ou moyen, le plan fondamental étant toujours celui de l'écliptique (moyen).

De même les coordonnées équatoriales sont vraies ou moyennes suivant qu'elles sont rapportées à l'équateur et à l'équinoxe vrais ou moyens. Il faudra d'ailleurs toujours indiquer l'époque de l'équinoxe choisi.

Il est important de déterminer complètement les éléments du triangle sphérique $N\gamma\gamma$ dont nous connaissons déjà deux angles et le côté compris.

On a d'abord pour déterminer l'obliquité ε la relation

$$\cos \varepsilon = \cos \varepsilon_1 \cos h - \sin \varepsilon_1 \sin h \cos (\varphi + \psi),$$

ou

$$\cos \varepsilon - \cos \varepsilon_1 = -2 \cos \varepsilon_1 \sin^2 \frac{h}{2} - \sin \varepsilon_1 \cos \psi \sin h \cos \varphi + \sin \varepsilon_1 \sin \psi \sin h \sin \varphi,$$

si donc h désigne pour un instant le second membre, on a, d'après un développement connu :

$$\varepsilon = \varepsilon_1 - \frac{h}{\sin \varepsilon_1} - \frac{1}{2} \cotg \varepsilon_1 \frac{h^2}{\sin^2 \varepsilon_1} \dots \dots \dots$$

Négligeons les termes séculaires en t^3 , les termes mixtes en t^2 , et les termes mixtes en t , qui sont du second ordre par rapport à P' et Q' ; on a :

$$\frac{h}{\sin \varepsilon_1} = -qt + (-q' + pf - \frac{p^2 + q^2}{2} \cotg \varepsilon_0) t^2 + pP't;$$

on peut donc écrire. (4) $\varepsilon = \varepsilon_0 + at + bt^2 + Q$,

en faisant

$$\left\{ \begin{array}{l} a = q, \\ b = q' - c + \frac{p^2}{2} \cotg \varepsilon_0, \\ Q = Q' - pP't; \end{array} \right.$$

on a d'ailleurs remplacé dans la valeur de b le produit pf par $2c$.
L'arc γ, γ ou χ est déterminé ensuite par la relation :

$$\sin \chi \sin \varepsilon = \sin k \sin (\varphi + \psi);$$

on peut donc écrire

$$(5) \quad \chi = gt + g't^2 + R,$$

et l'on trouve sans peine

$$\begin{cases} g \sin \varepsilon_0 = \mu, \\ g' \sin \varepsilon_0 = \mu' + gf - \mu g \cotg \varepsilon_0, \\ R \sin \varepsilon_0 = (gP' - pQ' \cotg \varepsilon_0) t. \end{cases}$$

Enfin pour avoir l'arc $\gamma'N$ ou ω , nous nous servirons d'une analogie de Néper, qui donne :

$$\operatorname{tg} \frac{\omega - \varphi - \psi}{2} = - \operatorname{tg} \frac{\chi}{2} \frac{\cos \frac{\varepsilon + \varepsilon_1}{2}}{\cos \frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{2}};$$

on aura alors toujours au même degré d'approximation :

$$(6) \quad \omega - \varphi = ht + h't^2 + P,$$

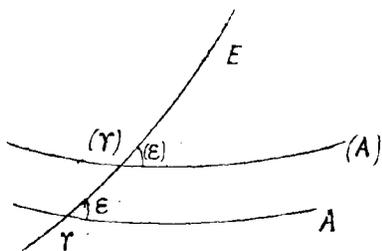
en faisant

$$\begin{cases} h = f - g \cos \varepsilon_0, \\ h' = f' - g' \cos \varepsilon_0 + \frac{\mu g}{2} \\ P = P' + \left(gP' \cotg \varepsilon_0 + \frac{pQ'}{\sin^2 \varepsilon_0} \right) t. \end{cases}$$

Précession - Nutation — Le déplacement de l'équateur et de l'écliptique moyens est ce qu'on appelle d'une façon générale la précession; c'est un déplacement purement séculaire. Toutes les formules relatives à la précession résultent des précédentes où l'on ne conserve que les termes séculaires. Si en est ainsi, l'arc ψ est la précession luni-solaire, et l'arc χ est la précession planétaire: en effet, comme nous l'avons déjà dit, le déplacement de l'écliptique tient à l'action perturbatrice des planètes sur le mouvement de la Terre autour du Soleil, tandis que le déplacement de l'équateur tient à l'action de la lune et du Soleil sur l'ellipsoïde terrestre.

La différence $\omega - \varphi$ qui détermine l'équinoxe moyen est la précession générale.

On passe ensuite de l'équateur et de l'équinoxe moyens à l'équateur et à l'équinoxe vrais par un nouveau déplacement appelé nutation, défini par les termes périodiques ou mixtes P et Q .



P est la nutations de la longitude, Q est la nutations de l'obliquité. Si $\bar{\alpha}$ à l'époque t , A et (A) sont les équateurs vrai et moyen γ et (γ) les équinoxes vrai et moyen, l'arc γ (γ) compté dans le sens direct sur l'écliptique, E est la nutation de la longitude P ; la différence des obliquités vraie et moyenne E et (E) est la nutation de l'obliquité Q .

Voici les valeurs numériques des coefficients de la précession, d'après M. S. Newcomb, telles qu'on les déduit de la théorie et de l'observation combinées. Prenant pour origine du temps le commencement de l'année tropique 1900, et pour unité de temps l'année tropique (le sens de ce mot sera expliqué plus loin), on a, en ne gardant que les termes de la précession:

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} \sin k \sin \varphi = 0",0497 t + 19",6 \left(\frac{t}{1000}\right)^2, \\ \sin k \cos \varphi = -0",4685 t + 5",5 \left(\frac{t}{1000}\right)^2; \\ \psi = 50",3707 t - 107",2 \left(\frac{t}{1000}\right)^2, \\ \mathcal{E}_1 = 23^\circ 27' 8",26 + 6",066 \left(\frac{t}{1000}\right)^2; \\ \mathcal{E} = 23^\circ 27' 8",26 - 0",46845 t - 0",59 \left(\frac{t}{1000}\right)^2, \\ \chi = 0",1248 t - 237",8 \left(\frac{t}{1000}\right)^2, \\ \omega - \varphi = 50",2564 t + 111" \left(\frac{t}{1000}\right)^2. \end{array} \right.$$

Le coefficient de t dans $\omega - \varphi$ est la constante de la précession. Il va sans dire d'ailleurs que dans la détermination des valeurs numériques ci-dessus, on ne suit pas la marche théorique que nous avons indiquée; c'est l'obliquité et la précession générale que l'observation détermine directement.

Il est inutile de donner ici les valeurs complètes des nutations P et Q ; en négligeant les termes dont le coefficient est inférieur à une seconde d'arc, on a simplement:

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} P = - \left(17",234 + 0",17 \frac{t}{1000} \right) \sin \Omega - 1",272 \sin 2L, \\ Q = \left(9",210 + 0",009 \frac{t}{1000} \right) \cos \Omega, \end{array} \right.$$

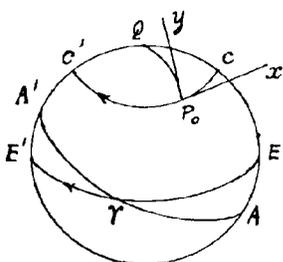
où Ω et L désignent respectivement la longitude moyenne du nœud ascendant de la Lune, et la longitude moyenne du Soleil.

Le coefficient de $\cos \Omega$ dans Q est ce qu'on appelle la

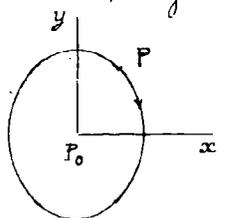
constante de la nutation ; sa valeur $9''{,}210$ a été fixée par la conférence de Livio (1896).

Représentation géométrique. — Les formules ci-dessus montrent suffisamment que, au moins dans une première approximation, on peut considérer l'écliptique comme fixe et prendre simplement en tenant compte de la partie principale de la nutation.

$$\psi = 50''{,}37 t - 17''{,}23 \sin \Omega, \quad \epsilon_1 = 23^\circ 27' + 9''{,}21 \cos \Omega.$$



Donc, en vertu de la seule précession, et à ce degré d'approximation, le pôle P_0 de l'équateur décrit autour du pôle fixe Q de l'écliptique, un petit cercle cc' dont le rayon polaire est de $23^\circ 27'$, avec une vitesse uniforme, dans le sens rétrograde ; le point γ , équinoxe de printemps, rétrograde sur l'écliptique de $50''$ par an, de sorte que le soleil décrivant l'écliptique dans le sens direct revient à l'équinoxe avant d'avoir achevé sa révolution sidérale ; il y a donc précession de l'équinoxe.

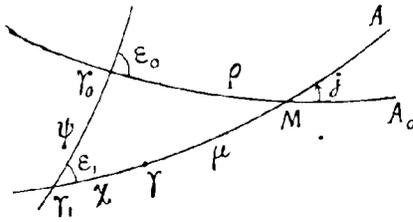


Pour tenir compte de la nutation, étudions la trajectoire relative du pôle vrai P de l'équateur par rapport à sa position moyenne P_0 . Si nous rapportons cette trajectoire supposée contenue dans le plan tangent à la sphère céleste en P_0 à deux axes rectangulaires P_0x, P_0y , orientés comme nous l'avons déjà dit plusieurs fois, on a évidemment pour les coordonnées de P :

$$\begin{cases} x = 17''{,}23 \sin \epsilon_0 \sin \Omega = 6''{,}86 \sin \Omega, \\ y = -9''{,}21 \cos \Omega ; \end{cases}$$

or l'angle Ω varie proportionnellement au temps, et diminue de 2π en 18 ans $\frac{2}{3}$ environ ; le point P décrit donc autour de sa position moyenne P_0 , en 18 ans $\frac{2}{3}$, une petite ellipse dont le demi grand-axe est dirigé suivant P_0y et a pour valeur $9''{,}21$, tandis que le demi petit-axe, dirigé suivant P_0x a pour valeur $6''{,}86$. Le mouvement est d'ailleurs rétrograde.

Précession en ascension droite. — Soit M le nœud ascendant de l'équateur A sur l'équateur moyen A_0 à l'origine du temps ; il est important de déterminer les éléments du triangle $M\gamma\gamma'$, en supposant que A est l'équateur moyen, c'est-à-dire en ne tenant



compte que de la précession.
Nous serons $\gamma_0 M = \rho$, $\gamma' M = \mu$,
et l'angle en M sera j : γ est
l'équinoxe moyen.

La différence $\mu - \rho$ est la
précession générale en ascension
droite; on la calcule immédiatement, car une analogie de
Néper donne :

$$\operatorname{tg} \frac{\mu + \chi - \rho}{2} = \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \frac{\cos \frac{\epsilon_1 + \epsilon_0}{2}}{\cos \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{2}},$$

d'où, en négligeant les termes en t^3 :

$$(8) \begin{cases} \mu - \rho = \psi \cos \epsilon_0 - \chi \\ = \kappa t + \kappa' t^2 \\ = 46'',0850 t + 139'',5 \left(\frac{t}{1000}\right)^2. \end{cases}$$

On a encore dans le triangle considéré :

$$(9) \begin{cases} \sin j \sin \rho = \psi \sin \epsilon_0 \\ = \delta t + \delta' t^2 \\ = 20'',0468 t - 42'',6 \left(\frac{t}{1000}\right)^2; \end{cases}$$

puis $\sin j \cos \rho = \sin \epsilon_0 \cos \epsilon_1 - \sin \epsilon_1 \cos \epsilon_0 \cos \psi$,
c'est-à-dire :

$$\sin j \cos \rho = \sin (\epsilon_0 - \epsilon_1) + 2 \sin \epsilon_1 \cos \epsilon_0 \sin^2 \frac{\psi}{2},$$

et par suite

$$\sin j \cos \rho = \left(-c + \frac{1}{2} f^2 \sin \epsilon_0 \cos \epsilon_0\right) t^2;$$

faisons donc le coefficient de t^2 égal à δ'' , on a :

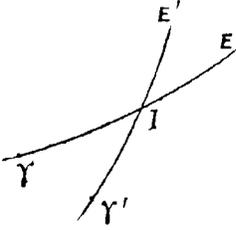
$$(10) \begin{cases} \sin j \cos \rho = \delta'' t^2, \\ = 2239'',5 \left(\frac{t}{1000}\right)^2. \end{cases}$$

On voit que ρ est voisin de $\frac{\pi}{2}$, et cela tient à ce qu'il
n'y a pas de terme en t dans le développement de ϵ_1 .

Position relative de deux écliptiques ou équateurs moyens. —

Il est nécessaire de savoir déterminer la position relative des
deux écliptiques moyens E, E' , ou équateurs moyens $AA',$ aux
époques t et t' .

Nous serons à cet effet comme au chapitre IV; si T est le



noeud ascendant de E' par rapport à E , et si γ et γ' sont les équinoxes moyens, nous ferons $\gamma I = \sigma$, $\gamma' I = \sigma'$, $E'I E' = i$; nous emploierons les mêmes notations affectées de l'indice 1 quand il s'agira de l'équateur.

Considérons $\sin i$ $\sin \sigma$, par exemple; il est clair que cette quantité est développable suivant les puissances de t et de $t'-t$, et que l'on peut écrire, au même degré d'approximation que plus haut:

$$\sin i \sin \sigma = (\alpha + \beta t) (t'-t) + \gamma (t'-t)^2,$$

car pour $t=t'$, on trouve zéro. Si l'on fait $t=0$, on doit retrouver la valeur de $\sin k \sin \varphi$ où l'on fait $t=t'$; donc $\alpha = p$, $\gamma = p'$; si l'on fait $t'=0$, on doit retrouver la valeur de $-\sin k \sin \varphi$, ou bien $-\sin k \sin \varphi \cos(\omega - \varphi) - \sin k \cos \varphi \sin(\omega - \varphi)$; donc, il vient en identifiant: $\beta = 2p' + qh$.

En appliquant toujours la même méthode, suffisante pour le degré d'approximation indiqué, on aura l'ensemble suivant:

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} \sin i \sin \sigma = (p + (2p' + qh)t) (t'-t) + p'(t'-t)^2, \\ \sin i \cos \sigma = (q + (2q' - ph)t) (t'-t) + q'(t'-t)^2, \\ \sigma' - \sigma = (h + 2h't) (t'-t) + h'(t'-t)^2, \\ \sin i_1 \sin \sigma_1 = (\rho + 2\rho't) (t'-t) + \rho'(t'-t)^2, \\ \sin i_1 \cos \sigma_1 = (2\rho'' - \pi\rho) t (t'-t) + \rho''(t'-t)^2, \\ \sigma_1' - \sigma_1 = (\tau + 2\tau't) (t'-t) + \tau'(t'-t)^2, \end{array} \right.$$

où il est facile d'introduire les valeurs numériques.

Pour pousser les développements plus loin, il faudrait redoubler le triangle formé par les 3 écliptiques ou équateurs aux époques $0, t, t'$.

Si l'on veut avoir les valeurs mêmes de i et σ , i_1 et σ_1 , on trouve sans peine, en faisant:

$$\sin u = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \quad \cos u = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}},$$

les relations analogues:

$$(11^{bis}) \left\{ \begin{array}{l} \sigma = u + \left(h + 2 \frac{p'q - pq'}{p^2 + q^2} \right) t + \frac{p'q - pq'}{p^2 + q^2} (t'-t), \\ i = \left(\sqrt{p^2 + q^2} + 2(p' \sin u + q' \cos u) t \right) (t'-t) + (p' \sin u + q' \cos u) (t'-t)^2, \\ \sigma_1 = \frac{\pi}{2} + \left(\pi - 2 \frac{\rho''}{\rho} \right) t - \frac{\rho''}{\rho} (t'-t), \\ i_1 = (\rho + 2\rho't) (t'-t) + \rho'(t'-t)^2. \end{array} \right.$$

Numériquement, on a donc enfin :

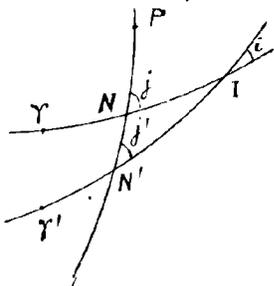
$$(12) \left\{ \begin{array}{l} \sigma = 173^{\circ} 56', 8 + 0', 546 t - 0', 146 (t-t'), \\ i = \left(0'' 4711 - \frac{6'', 4}{10^6} t \right) (t-t') - \frac{3'', 2}{10^6} (t-t')^2, \\ \sigma' - \sigma = \left(50'', 2564 + \frac{222''}{10^6} t \right) (t-t') + \frac{111''}{10^6} (t-t')^2; \\ \sigma_1 = \frac{\pi}{2} - 23'', 0425 (t-t'), \\ i_1 = \left(20'', 0468 - \frac{85'', 2}{10^6} t \right) (t-t') - \frac{42'', 6}{10^6} (t-t')^2, \\ \sigma_1' - \sigma_1 = \left(46'', 0850 + \frac{279''}{10^6} t \right) (t-t') + \frac{139'', 5}{10^6} (t-t')^2; \end{array} \right.$$

on s'assure en effet sans peine que le coefficient de t dans σ , est nul.

Le coefficient de la première puissance de $t-t'$ dans $\sigma' - \sigma$ ou $\sigma_1' - \sigma_1$, est la précession annuelle en longitude ou en ascension droite.

Transformation des coordonnées moyennes. — Il est facile à l'aide des formules précédentes de passer des coordonnées moyennes d'un point de la sphère céleste, écliptiques ou équatoriales, à l'époque t , aux coordonnées de même nom à l'époque t' . On pourra toujours appliquer les formules (4) du Chapitre IV, qui dépendent de $\sigma' - \sigma$, i et σ ; souvent aussi on pourra appliquer les formules différentielles (5), ou encore (6), si i est assez petit pour qu'on puisse négliger son carré, ce qui arrive en général dans le cas des coordonnées écliptiques.

De la même façon, on pourra transformer les éléments d'une orbite et les rapporter à une autre époque; si \mathcal{D} , j , \mathcal{C} désignent la longitude du nœud ascendant, l'inclinaison et la longitude du périhélie rapportées à l'équinoxe moyen de l'époque t , on s'assera aux quantités analogues relatives à l'époque t' , en appliquant ce qui précède au pôle P de l'orbite, dont les coordonnées



sont $\mathcal{D} = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} - j$, comme nous l'avons déjà dit; on obtient ainsi $\Delta \mathcal{D}$ et Δj ; la figure ci-contre montre en outre que l'on a $\Delta \mathcal{C} = \Delta \mathcal{D} + N'N$, avec :

$$\sin N'N = \frac{\sin i \sin (\sigma - \mathcal{D})}{\sin (j + \Delta j)}.$$

On peut d'ailleurs diriger le calcul autrement, tout revenant en réalité à la résolution du triangle $NI N'$.

Dans la pratique, on procède en général autrement. Considérons par exemple les coordonnées écliptiques moyennes λ, β , et λ', β' , aux deux époques t et t' . Les différences $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$, $\Delta\beta = \beta' - \beta$, sont évidemment développables suivant les puissances de $t' - t$ comme les quantités $\sigma, i, \sigma' - \sigma$ elles-mêmes; et comme dans les développements de ces dernières, nous n'avons conservé que les deux premiers termes, il est clair que nous ne pouvons pas obtenir plus de deux termes dans les développements de $\Delta\lambda$ et $\Delta\beta$.

Nous devons donc écrire simplement:

$$\Delta\lambda = \lambda_1 (t' - t) + \frac{1}{2} \lambda_2 (t' - t)^2,$$

$$\Delta\beta = \beta_1 (t' - t) + \frac{1}{2} \beta_2 (t' - t)^2,$$

λ_1, λ_2 , par exemple, étant les dérivées première et seconde par rapport au temps de la longitude moyenne λ , relative à l'époque t .

De même avec les coordonnées équatoriales, on aura

$$\begin{cases} \Delta\alpha = \alpha_1 (t' - t) + \frac{1}{2} \alpha_2 (t' - t)^2, \\ \Delta\delta = \delta_1 (t' - t) + \frac{1}{2} \delta_2 (t' - t)^2. \end{cases}$$

Les coefficients $\lambda_1, \beta_1, \alpha_1, \delta_1$ sont les précessions annuelles en longitude, en latitude, en ascension droite, et en déclinaison, pour l'étoile considéré à l'époque t ; les coefficients $\lambda_2, \beta_2, \alpha_2, \delta_2$, multipliés par 100, sont les variations séculaires des mêmes coordonnées.

Connaissant ces quantités, le calcul $\Delta\lambda, \Delta\beta, \dots$ est immédiat.

Les premiers termes des développements de σ, i, \dots suivant les puissances de $(t' - t)$ sont donnés par :

$$\begin{cases} \sigma = \xi + \dots, \sigma' - \sigma = \mu (t' - t) + \dots, i = \nu (t' - t) + \dots, \\ \sigma_1 = \frac{\pi}{2} + \dots, \sigma_1' - \sigma_1 = m (t' - t) + \dots, i_1 = n (t' - t) + \dots, \end{cases}$$

de sorte que ξ, μ, ν, m, n , sont des fonctions de t .

On a alors immédiatement par les formules (5) du chapitre IV.

$$\begin{cases} \lambda_1 = \mu + \nu \operatorname{tg} \beta \cos(\lambda - \xi), & \alpha_1 = m + n \operatorname{tg} \delta \sin \alpha, \\ \beta_1 = -\nu \sin(\lambda - \xi), & \delta_1 = n \cos \alpha. \end{cases}$$

Pour calculer $\lambda_2, \beta_2, \alpha_2, \delta_2$, il suffit de dériver ces expressions,

C'est ainsi que l'on a, en se bornant à α_2 et δ_2 :

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{dm}{dt} + \frac{dn}{dt} \operatorname{tg} \delta \sin \alpha + m n \operatorname{tg} \delta \cos \alpha + n^2 \sin \alpha \cos \alpha (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \delta), \\ \delta_2 &= \frac{dn}{dt} \cos \alpha - m n \sin \alpha - n^2 \operatorname{tg} \delta \sin^2 \alpha. \end{aligned} \right.$$

Mais le plus souvent on ne se sert pas des variations séculaires ; écrivons en effet, par exemple :

$$\Delta \lambda = \left(\lambda_1 + \frac{1}{2} \lambda_2 (t'-t) \right) (t'-t),$$

et remarquons que $\lambda_1 + \frac{1}{2} \lambda_2 (t'-t)$ n'est autre chose que la valeur λ'' , que prend λ_1 pour l'époque $t'' = \frac{1}{2} (t'+t)$, en négligeant des termes du second ordre qui ne produiraient dans $\Delta \lambda$ que des termes du troisième ordre. On a donc simplement :

$$\Delta \lambda = \lambda'' (t'-t),$$

et tout revient à calculer λ'' . Pour calculer cette quantité, il faut connaître λ'' et β'' , coordonnées moyennes à l'époque t'' ; mais, comme précédemment on peut se borner à prendre :

$$\lambda'' = \lambda + \lambda_1 (t''-t), \quad \beta'' = \beta + \beta_1 (t''-t);$$

on commet ainsi dans ces quantités une erreur du second ordre, qui ne produit dans $\Delta \lambda$ qu'une erreur du troisième ordre, négligeable par hypothèse.

En résumé donc, 1° on cherchera la précession annuelle pour l'époque t , et on en déduira des valeurs approchées des coordonnées pour l'époque t'' ; 2° on cherchera la précession annuelle pour l'époque t'' , et l'on en déduira les valeurs des coordonnées pour l'époque t' ; et de cette façon on ne néglige que les termes du troisième ordre. Il est clair d'ailleurs que ce procédé sera inapplicable si l'astre est voisin du pôle du système de coordonnées employé : les développements en série des coordonnées cessent alors d'être convergents. Il ne faudra pas non plus l'appliquer quand $t'-t$ sera très grand, et qu'on voudra avoir une grande précision : il est facile de voir en effet que les séries qui représentent les coordonnées sont moins convergentes, surtout quand il s'agit des coordonnées équatoriales, que celles qui définissent la position des plans fondamentaux.

Passage des coordonnées moyennes aux coordonnées vraies. — Il est facile maintenant de passer des coordonnées moyennes à une époque t aux coordonnées vraies à la même époque. Si d'abord il s'agit des coordonnées écliptiques, et si les lettres accentuées et non accentuées désignent respectivement les coordonnées vraies et moyennes, on a immédiatement :

$$\lambda' = \lambda + P, \quad \beta' = \beta,$$

P étant la mutation de la longitude : la mutation en effet ne change pas l'écliptique, mais seulement l'équinoxe.

Si maintenant, il s'agit des coordonnées équatoriales, on trouvera les très petites différences $\alpha' - \alpha$, $\delta' - \delta$, en appliquant les formules différentielles relatives au passage des coordonnées écliptiques aux coordonnées équatoriales, où l'on fera :

$$d\lambda = P, \quad d\beta = 0, \quad d\varepsilon = Q,$$

Q étant la mutation de l'obliquité ε . Si donc S désigne l'angle à l'astre, on aura :

$$\begin{cases} \cos \delta (\alpha' - \alpha) = \cos S \cos \beta \cdot P - \sin \delta \cos \alpha \cdot Q, \\ \delta' - \delta = - \sin S \cos \beta \cdot P + \sin \alpha \cdot Q, \end{cases}$$

d'après les formules (2) du Chapitre IV. On a d'ailleurs immédiatement dans le triangle de position :

$$\begin{cases} \sin S \cos \beta = - \sin \varepsilon \cos \alpha, \\ \cos S \cos \beta = \cos \varepsilon \cos \delta + \sin \varepsilon \cdot \sin \delta \sin \alpha; \end{cases}$$

donc finalement :

$$(19) \begin{cases} \alpha' - \alpha = (\cos \varepsilon + \sin \varepsilon \operatorname{tg} \delta \sin \alpha) P - \operatorname{tg} \delta \cos \alpha \cdot Q, \\ \delta' - \delta = \sin \varepsilon \cos \alpha P + \sin \alpha \cdot Q. \end{cases}$$

Si $\cos \delta$ était voisin de zéro, on appliquerait la méthode de Fabricius.

On a d'habitude à résoudre le problème suivant : Connais-sant les coordonnées moyennes α , δ d'un point de la sphère céleste, rapportées au commencement d'une certaine année tropique, calculer les coordonnées vraies α' , δ' de ce point, rapportées à l'équinoxe vrai de l'époque t , l'origine du temps étant le commencement de l'année tropique considérée : t est d'ailleurs une fraction plus petite que l'unité, les deux époques envisagées appartenant à la même année.

Il est clair que si m et n sont les précessions annuelles en ascension droite et en déclinaison au commencement de l'année considérée, on a, à cause de la petitesse de t :

$$\begin{cases} \alpha' - \alpha = (m + n \operatorname{tg} \delta \sin \alpha) t + (\cos \varepsilon + \sin \varepsilon \operatorname{tg} \delta \sin \alpha) P - \operatorname{tg} \delta \cos \alpha \cdot Q, \\ \delta' - \delta = n \cos \alpha t + P \sin \varepsilon \cos \alpha + \sin \alpha \cdot Q. \end{cases}$$

Voici comment on dirige le calcul de façon à obtenir la

correction $\alpha' - \alpha$ en secondes de temps et la correction $\delta' - \delta$ en secondes d'arc.

Supposons m, n, P, Q exprimés en secondes d'arc, et faisons $m \stackrel{s}{=} \frac{m}{15}$, $n \stackrel{s}{=} \frac{n}{15}$, de sorte que m^s, n^s sont les expressions de m et n en secondes de temps. On pose :

$$\begin{aligned} C &= t + \frac{P}{n} \sin \varepsilon, & c &= m^s + n^s \operatorname{tg} \delta' \sin \alpha, \\ D &= -Q, & c' &= n \cos \alpha, \\ E &= P \left(\cos \varepsilon - \frac{m}{n} \sin \varepsilon \right), & d &= \frac{1}{15} \operatorname{tg} \delta' \cos \alpha, \\ & & d' &= -\sin \alpha; \end{aligned}$$

dans ces conditions, on a

$$(14) \begin{cases} \alpha' - \alpha = Cc + Dd + \frac{1}{15} E, \\ \delta' - \delta = Cc' + Dd'. \end{cases}$$

Les coefficients C, D, E dépendent uniquement de l'époque t ; c, c', d, d' au contraire ne dépendent que de α, δ' et de l'année tropique envisagée.

Il est facile de voir encore que, d'après la théorie, le coefficient de P dans E est très petit, de sorte que E reste très petit.

On pose encore :

$$\begin{cases} g \sin G = D, & f = mC + E, \\ g \cos G = nC, \end{cases}$$

et alors

$$(15) \begin{cases} \alpha' - \alpha = \frac{f}{15} + \frac{g}{15} \operatorname{tg} \delta' \sin (G + \alpha), \\ \delta' - \delta = g \cos (G + \alpha). \end{cases}$$

D'après les décisions de la Conférence de Turin (1896), on partage C et D en deux parties; les premières parties auxquelles on conserve les désignations C et D comprennent les termes les plus importants de la nutation, ceux dont la période est au moins de quatre mois, et en outre le terme t de C ; les secondes parties C' et D' renferment les termes à courte période de la nutation, qui restent toujours très petits, mais varient rapidement.

Il faut donc en réalité remplacer dans les formules (14) C par $C + C'$, D par $D + D'$. De la même façon, en gardant la définition de g, G, f à l'aide des nouvelles valeurs de C et D , on doit poser en outre :

$$\begin{cases} g' \sin G' = D', & f' = m C', \\ g \cos G = n C', \end{cases}$$

et on a au lieu des formules (15).

$$\begin{cases} \alpha' - \alpha = \frac{f'}{15} + \frac{g'}{15} \operatorname{tg} \delta' \sin (G + \alpha) + \frac{f''}{15} + \frac{g''}{15} \operatorname{tg} \delta' \sin (G' + \alpha), \\ \delta' - \delta = g \cos (G + \alpha) + g' \cos (G' + \alpha). \end{cases}$$

Ceci posé, on est convenu de négliger C' et D' , et par suite f' et g' dans le calcul des éphémérides de tous les astres, sauf les étoiles circumpolaires; et encore dans ce cas on néglige toujours f' dans le calcul de l'ascension droite, de sorte que $d\alpha$ étant la correction due à C' et D' , on doit prendre :

$$d\alpha = \frac{g'}{15} \operatorname{tg} \delta' \sin (G' + \alpha),$$

ou bien :

$$d\alpha = C'c + D'd - f'.$$

On trouve dans la *Connaissance des Temps* les valeurs des constantes $A, B, C, D, C'D', fg, G, f', g', G'$ pour tous les jours de l'année.

Chapitre XI

Positions apparentes des astres.

Coordonnées apparentes. — On appelle *coordonnées apparentes* d'un astre quelconque à l'instant t , et en un lieu donné, ses coordonnées (écliptiques ou équatoriales) rapportées à l'équinoxe vrai du même instant, telles qu'on les observe, après cependant les corrections préalables de refraction et d'aberration diurne que l'on applique toujours immédiatement.

Le présent chapitre a pour but d'expliquer comment on peut déterminer les coordonnées apparentes d'un astre quelconque, à un instant quelconque, et en un lieu quelconque.

Il faut distinguer deux cas, essentiellement différents, suivant qu'il s'agit d'un astre du système solaire, ou bien d'une étoile.

Cas des astres du système solaire. — Occupons-nous d'abord du premier cas. Nous pouvons en premier lieu supposer que le lieu

d'observation est le centre de la Terre T : la théorie de la parallaxe nous permettra en effet de passer facilement ensuite de ce point à un point quelconque de la surface de la Terre. Si maintenant nous tenons compte du théorème de l'aberration planétaire, nous voyons que, si $t-t_0$ est le temps d'aberration de l'astre donné S , c'est-à-dire le temps que met la lumière à parcourir la distance ST , la position apparente au temps t , est la même que la position vraie au temps t_0 . Tout revient donc à chercher les coordonnées vraies de S à une époque donnée.

Or la théorie du mouvement de l'astre S , supposée connue d'après la mécanique Céleste et les observations, nous permet de calculer les coordonnées géocentriques de S pour une époque donnée, rapportées à l'équinoxe moyen d'une certaine époque; on passera alors, en appliquant la précession, aux coordonnées de même nom rapportées à l'équinoxe moyen du commencement de l'année tropique à laquelle appartient l'époque donnée, et enfin par application simultanée de la précession et de la nutation, on obtiendra comme nous l'avons vu à la fin de Chapitre précédent, les coordonnées vraies cherchées. Les dernières corrections:

$$\begin{cases} \alpha' - \alpha = \frac{1}{15} (f + g \operatorname{tg} \delta \sin (G + \alpha)), \\ \delta' - \delta = g \cos (G + \alpha), \end{cases}$$

que l'on est ainsi amené à appliquer, constituent la réduction au lieu vrai ou réduction au jour, pour les planètes.

Positions moyennes des étoiles. — Passons maintenant aux étoiles. Supposons que l'on corrige la position apparente P d'une étoile de la parallaxe annuelle et de l'aberration annuelle complète, puis de la nutation; on obtiendra ainsi une position P' qui sera d'une façon exacte, d'après ce qui a été dit au sujet de l'aberration, la direction, rapportée au système de coordonnées moyennes employées pour l'instant t , de la droite qui joint les positions véritables du Soleil et de l'étoile au temps t_0 , $t-t_0$ étant le temps que met la lumière à parcourir la distance de l'étoile à la Terre. En fait, on convient, comme nous l'avons déjà indiqué, de négliger dans le calcul de l'aberration annuelle les termes très petits qui contiennent en facteur l'excentricité de l'orbite du Soleil: ces termes restent d'ailleurs, pour une étoile déterminée sensiblement constants pendant une longue période de temps, car ils ne dépendent que des coordonnées de l'étoile et des éléments de l'orbite solaire. Il en résulte que, après les corrections déjà citées, moine

l'aberration étant réduite à ses termes principaux, la position apparente P fournit une position P'' qui diffère légèrement, mais d'une façon sensiblement constante, de la position P' . C'est cette position P'' que l'on appelle position moyenne de l'étoile à l'époque t .

En lui appliquant inversement la nutation, l'aberration réduite à ses termes principaux, et la parallaxe, on retombe sur la position apparente P et c'est là tout ce qui nous importe, car comme nous ne connaissons pas suffisamment la distance des étoiles à la Terre, nous ne pouvons pas obtenir les coordonnées proprement dites d'une étoile par rapport à la Terre ou au Soleil à une époque déterminée, comme quand il s'agit d'astères du système Solaire.

Mouvements propres. — La position moyenne d'une étoile est fonction du temps t , d'abord parce qu'elle est rapportée au système de coordonnées moyennes employées pour l'époque t . Pour faire disparaître cette cause de variabilité, on peut rapporter la position moyenne de l'époque variable t , par application de la précession, à une époque fixe t_0 : on obtient ainsi les coordonnées par rapport à l'écliptique ou l'équateur et l'équinoxe moyens de l'époque t_0 de la position moyenne à l'époque t . Ces coordonnées sont encore des fonctions du temps t , mais des fonctions qui varient avec une extrême lenteur; on peut les représenter, en employant comme d'habitude l'ascension droite et la déclinaison, sous la forme:

$$\alpha = \alpha_0 + \mu (t - t_0) \quad , \quad \delta = \delta_0 + \nu (t - t_0);$$

μ et ν sont des constantes appelées composantes du mouvement propre en ascension droite et en déclinaison à l'époque t_0 .

Il est clair d'ailleurs que ces formules ne peuvent représenter que d'une façon approchée la loi de variation de α et δ ; mais elles suffisent pendant une longue période de temps dans la pratique actuelle de l'Astronomie.

Exemple. — En prenant comme époque fixe 1906,0 et pour unité de temps l'année tropique, on a pour α Bouvier (Arcturus).

$$\alpha_0 = 14^{\text{h}} \cdot 11^{\text{m}} 22^{\text{s}}, 41, \quad \mu = -0^{\text{s}}, 078;$$

$$\delta_0 = 19^{\circ} 40' 17'', 6 \quad \nu = -2', 00.$$

C'est un des grands mouvements propres.

Ce n'est pas ici le lieu d'étudier la cause des mouvements propres.

Résolvons le problème suivant : changeons l'époque fixe t_0 et prenons-en une autre t'_0 : les coordonnées de la position moyenne à

l'époque t par rapport à l'équateur et l'équinoxe moyens de l'époque t'_0 , seront, elles aussi, de la forme :

$$\alpha' = \alpha'_0 + \mu' (t - t'_0), \quad \delta' = \delta'_0 + \nu' (t - t'_0);$$

il faut calculer α'_0, δ'_0 et les nouvelles composantes du mouvement propre μ' et ν' .

Désignons d'une façon générale par α, δ ce que deviennent les coordonnées α, δ d'un point de la sphère céleste, lorsque l'on passe, par application de la précession, de l'équinoxe moyen de l'époque t_0 , à celui de l'époque t'_0 . On pourra poser :

$$\alpha' = f(\alpha, \delta), \quad \delta' = g(\alpha, \delta),$$

les fonctions f et g , n'ayant pas besoin d'être plus explicitement représentées.

Il est clair alors que l'on a d'abord

$$\alpha'_0 = f(\alpha_0 + \mu(t'_0 - t_0), \delta_0 + \nu(t'_0 - t_0)), \\ \delta'_0 = g(\alpha_0 + \mu(t'_0 - t_0), \delta_0 + \nu(t'_0 - t_0)).$$

Quand à μ' et ν' , ce sont les dérivées de α' et δ' , par rapport au temps, pour $t = t'_0$; on a donc :

$$\mu' = \frac{\partial f}{\partial \alpha} \mu + \frac{\partial f}{\partial \delta} \nu, \quad \nu' = \frac{\partial g}{\partial \alpha} \mu + \frac{\partial g}{\partial \delta} \nu,$$

en faisant $\alpha = \alpha_0 + \mu(t'_0 - t_0), \delta = \delta_0 + \nu(t'_0 - t_0)$.

Pour calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial \alpha}, \frac{\partial f}{\partial \delta}, \frac{\partial g}{\partial \alpha}, \frac{\partial g}{\partial \delta}$,

il suffit de se reporter aux formules différentielles (2) du Chapitre IV; si nous appelons i, σ, σ' les éléments qui définissent la position du système de coordonnées à l'époque t'_0 par rapport au système de coordonnées à l'époque t_0 , éléments qui sont fournis par la théorie de la précession, on a immédiatement

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{\cos S \cos \delta}{\cos \delta'}, \quad \frac{\partial f}{\partial \delta} = \frac{\sin S}{\cos \delta'},$$

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha} = -\sin S \cos \delta, \quad \frac{\partial g}{\partial \delta} = \cos S;$$

S est l'angle à l'astre, et l'on a les deux relations :

$$\sin S \cos \delta = \sin i \cos(\alpha' - \sigma'),$$

$$\cos S \cos \delta = \cos i \cos \delta' - \sin i \sin \delta' \sin(\alpha' - \sigma').$$

Finalement on aura donc :

$$\begin{cases} \mu' = \mu \left[\cos i - \sin i \operatorname{tg} \delta'_0 \sin (\alpha'_0 - \sigma') \right] + \nu \frac{\sin i \cos (\alpha'_0 - \sigma')}{\cos \delta'_0 \cos [\delta'_0 + \nu (t'_0 - t_0)]}, \\ \nu' = -\mu \sin i \cos (\alpha'_0 - \sigma') + \nu \frac{\cos \delta'_0}{\cos [\delta'_0 + \nu (t'_0 - t_0)]} \left[\cos i - \sin i \operatorname{tg} \delta'_0 \sin (\alpha'_0 - \sigma') \right]. \end{cases}$$

Catalogues d'étoiles. — Un catalogue d'étoiles fournit les positions moyennes d'un certain nombre d'étoiles, et leurs mouvements propres, pour une date déterminée t_0 , en général le commencement d'une année tropique. Il est facile alors en appliquant les formules que nous avons données au Chapitre précédent, et tenant compte comme nous venons de le dire, du mouvement propre, de trouver la position moyenne d'une étoile du catalogue pour une autre date, en général aussi, le commencement d'une année tropique, par exemple 1906, 0. On pourra se servir aussi pour faire cette transformation, nécessitée par la précession, des données que fournissent souvent les catalogues, soit la précession annuelle, et la variation séculaire, ou encore la variation annuelle, c'est-à-dire la précession annuelle, en ascension droite et en déclinaison augmentée du mouvement propre annuel correspondant. On peut aussi, pour plus de précision, tenir compte dans la variation séculaire (c'est-à-dire dans les termes du second ordre) du mouvement propre; mais quand on est amené à faire ainsi, il faut aussi généralement tenir compte des termes du troisième ordre que nous avons systématiquement laissés de côté dans l'étude précédente, et mieux, on fera un calcul direct.

Réduction au jour. — Une fois obtenue la position moyenne d'une étoile pour le commencement d'une année tropique 1906, 0, par exemple, on aura sans peine ses coordonnées apparentes pour une époque quelconque t comptée à partir du début de cette année; en laissant de côté la parallaxe, il suffira d'appliquer les corrections d'aberration, de précession, de nutation et de mouvement propre; ce qui donnera pour la réduction au lieu apparent ou réduction au jour, en conservant les notations des Chapitres VIII et X, les α et δ formules suivantes, où α' et δ' désignent les coordonnées apparentes, tandis que α et δ sont les coordonnées moyennes au commencement de l'année, et où μ et ν sont les composantes du mouvement propre annuel, exprimées la première en secondes de temps, la deuxième en secondes d'arc :

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha' &= \alpha + Aa + Bb + Cc + Dd + \frac{1}{15} E + t\mu \\ &= \alpha + \frac{1}{15} \left[f + g \sin(G + \alpha) \operatorname{tg} \delta + h \sin(H + \alpha) \operatorname{sec} \delta \right] + t\mu, \\ \delta' &= \delta + Aa' + Bb' + Cc' + Dd' + t\nu \\ &= \delta + g \cos(G + \alpha) + h \cos(H + \alpha) \sin \delta + i \cos \delta + t\nu. \end{aligned} \right.$$

On trouve d'ailleurs dans la Connaissance des Temps, tous les éléments nécessaires au calcul de ces formules.

Formules différentielles. — Considérons deux étoiles voisines S et S_1 , et définissons la position de S_1 par rapport à S comme nous l'avons fait à propos de la réfraction différentielle par les différences d'ascension droite et de déclinaison $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$, ou bien par la distance ρ et l'angle de position Q , qui, les coordonnées étant ici orientées dans le sens direct, sera compté dans le sens direct depuis le cercle horaire de S dirigé vers le pôle jusqu'à l'arc SS_1 .

Les quantités $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$, ρ , Q se rapportent aux coordonnées moyennes au commencement de l'année, quels changements subiront-elles quand on passera aux coordonnées apparentes? en d'autres termes quelles sont les formules différentielles relatives à la réduction au jour? Pour le savoir, il suffit d'appliquer les formules générales que nous avons données à propos de la réfraction différentielle. En négligeant les mouvements propres, et laissant de côté le facteur 15, afin de rétablir l'homogénéité, on a ici :

$$d\alpha = f + g \sin(G + \alpha) \operatorname{tg} \delta + h \sin(H + \alpha) \operatorname{sec} \delta,$$

$$d\delta = g \cos(G + \alpha) + h \cos(H + \alpha) \sin \delta + i \cos \delta,$$

et les quantités f, g, G, h, H, i sont indépendantes de α et δ . D'où suit :

$$\frac{\partial(d\alpha)}{\partial\alpha} = g \cos(G + \alpha) \operatorname{tg} \delta + h \cos(H + \alpha) \operatorname{sec} \delta,$$

$$\frac{\partial(d\alpha)}{\partial\delta} = g \sin(G + \alpha) \operatorname{sec}^2 \delta + h \sin(H + \alpha) \operatorname{sec} \delta \operatorname{tg} \delta,$$

$$\frac{\partial(d\delta)}{\partial\alpha} = g \sin(G + \alpha) - h \sin(H + \alpha) \sin \delta,$$

$$\frac{\partial(d\delta)}{\partial\delta} = h \cos(H + \alpha) \cos \delta - i \sin \delta.$$

D'où suit, il vient en particulier :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\rho}{\rho} &= h \cos(H + \alpha) \cos \delta - i \sin \delta, \\ dQ &= -g \sin(G + \alpha) \operatorname{sec} \delta - h \sin(H + \alpha) \operatorname{tg} \delta. \end{aligned} \right.$$

On voit que $\delta\omega$ ne dépend pas de la précession ni de la nutation : c'était évident puisque ce sont les plans de coordonnées \mathcal{O} qui sont affectés par ces causes. On voit de plus que les quantités $\delta\beta$ et $\delta\varrho$ sont indépendantes de l'angle de position \mathcal{Q} : l'effet est donc toujours le même dans toutes les directions autour du point S .

Chapitre XII

Mouvement du Soleil - Temps.

Mouvement géocentrique du Soleil. — Au lieu d'envisager le mouvement de la Terre par rapport au Soleil, on considère d'habitude le mouvement du Soleil par rapport à la Terre, ce qui n'est pas différent en réalité.

D'après ce qui a été dit au Chapitre IX, le soleil décrit autour de la Terre une orbite elliptique à éléments variables avec le temps. Nous laisserons de côté dans tout ce qui suivra les perturbations périodiques et mixtes des éléments ou des coordonnées, et nous nous contenterons de représenter par le symbole général \mathcal{P} un groupe quelconque de termes périodiques ou mixtes.

Le demi-grand axe a de l'orbite solaire n'a pas d'inégalités séculaires ; sa valeur moyenne est très voisine de l'unité ; on a d'après M^r. Newcomb, que nous suivrons encore dans tout ce Chapitre, $\log_{10} a = 0,000\,000\,10$. Cette valeur de a , correspond un moyen mouvement n déterminé par la relation $n^2 a^3 = f(m_0 + m)$, m_0 et m étant respectivement les masses du Soleil et de la Terre.

Prenez pour plan fixe l'écliptique à l'origine du temps, et comptons les longitudes à partir de l'équinoxe moyen correspondant.

La longitude moyenne de l'époque t a des inégalités séculaires et périodiques et l'on peut écrire :

$$l_0 = \lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \mathcal{P},$$

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ étant des constantes dont la dernière est très petite.

De même on a pour la longitude du périhélie et pour l'excentricité des expressions de la forme :

$$\begin{cases} \varpi = \varpi_0 + \varpi_1 t + \varpi_2 t^2 + \mathcal{P}, \\ e = e_0 + e_1 t + e_2 t^2 + \mathcal{P}. \end{cases}$$

Enfin, comme nous l'avons dit à propos de la précession, si φ est la longitude du nœud ascendant, et k l'inclinaison, on a

$$\begin{cases} \sin k \sin \varphi = p t + p' t^2 + \mathcal{P}, \\ \sin k \cos \varphi = q t + q' t^2 + \mathcal{P}; \end{cases}$$

nous conserverons d'ailleurs, d'une façon générale, dans ce qui suivra, toutes les notations du chapitre X.

Connaissant les valeurs numériques des coefficients que nous venons d'introduire (nous les donnerons plus loin), il sera facile de résoudre toutes les questions relatives au mouvement du soleil, en négligeant l'influence très petite des perturbations périodiques.

Considérons d'abord la longitude moyenne l ; comme dans le mouvement elliptique, elle est égale à $n t + l_0$, de sorte que

$$l = \lambda_0 + (n + \lambda_1) t + \lambda_2 t^2 + \mathcal{P}.$$

Le plus souvent quand on parle de la longitude moyenne du Soleil, on fait abstraction des termes périodiques \mathcal{P} . La vitesse de cette longitude moyenne à l'époque t , soit $n + \lambda_1 + 2 \lambda_2 t$, est ce qu'on appelle à proprement parler le moyen mouvement sidéral du Soleil, au lieu de n ; c'est en effet le moyen mouvement tel que le fournissent les observations; il est dit sidéral parce que l est comptée à partir d'un point fixe.

L'équation du centre C se calculera comme dans le mouvement elliptique à l'aide des parties séculaires des valeurs de e , l , ϖ . La réduction au plan fixe R , est ici de l'ordre des perturbations, et négligeable.

Si donc λ est la longitude du Soleil, rapportée à l'équinoxe moyen de l'origine du temps, on a

$$\lambda = \lambda_0 + (n + \lambda_1) t + \lambda_2 t^2 + C + \mathcal{P}.$$

Cherchons maintenant la longitude du Soleil Θ , rapportée à l'écliptique de l'époque t et à l'équinoxe vrai correspondant; c'est-à-dire la longitude vraie au temps t : il faut ajouter à λ la précession générale et la nutation en longitude, de sorte que

$$\Theta = \lambda_0 + (n + \lambda_1 + h) t + (\lambda_2 + h') t^2 + C + \mathcal{P} + \mathcal{P}'.$$

La latitude du Soleil rapportée au même écliptique, ne comprend que des termes périodiques très petits, de l'ordre des perturbations.

Si enfin, on veut le rayon vecteur R , on le calculera par les formules du mouvement elliptique.

Ajoutons encore que si, comme il est d'usage, on veut avoir la longitude apparente du Soleil à l'époque t , soit Θ' , il faut tenir compte de l'aberration, de sorte que

$$\Theta' = \Theta - k,$$

k étant la constante de l'aberration, en négligeant un petit terme périodique que l'on peut faire entrer dans \mathcal{P} .

Ascension droite du Soleil. — Déterminons maintenant l'ascension droite apparente α du Soleil à l'époque t , rapportée à l'équateur et à l'équinoxe vrais. En négligeant la latitude du Soleil, qui ne donne que de petits termes périodiques on a immédiatement

$$\operatorname{tg} \alpha = \cos \varepsilon \operatorname{tg} \theta'$$

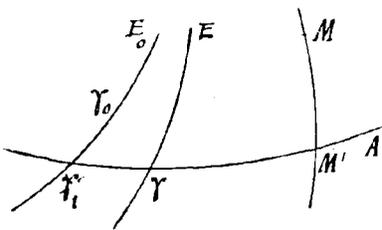
et par suite $\alpha = \theta' + \rho$, en désignant par ρ la réduction à l'équateur, égale comme on sait à

$$- \operatorname{tg}^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin 2 \theta' + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^4 \frac{\varepsilon}{2} \sin 4 \theta' \dots$$

et composée par suite de termes périodiques. Donc finalement

$$\alpha = \lambda_0 - k + (n + \lambda_1 + h) t + (\lambda_2 + h') t^2 + C + \rho + \mathcal{P}.$$

Temps sidéral. — Pour pouvoir calculer l'angle horaire du Soleil en un lieu donné M , il est nécessaire de déterminer d'abord le temps sidéral local, θ . Comme nous l'avons déjà dit, l'équateur A peut être considéré comme fixe par rapport à la Terre, et de plus, la rotation instantanée ω de la Terre sur elle-même doit être regardée comme constante. Si le méridien géographique du lieu M coupe



l'équateur en M' , le temps sidéral local θ est l'angle horaire de l'équinoxe γ , c'est-à-dire l'arc $\gamma M'$.

Le mouvement instantané de la Terre sur elle-même peut être regardé comme résultant de trois rotations :

1° la rotation

$$\frac{d(\gamma, M')}{dt} = \frac{d\gamma}{dt} + \frac{d\theta}{dt}$$

autour du pôle de l'équateur, 2° la rotation $-\frac{d\varepsilon}{dt}$ autour de γ ,
3° la rotation $-\frac{d\psi}{dt}$ autour du pôle boréal de E_0 .

En projetant sur l'axe du monde, on a donc :

$$\omega = \frac{d\chi}{dt} + \frac{d\theta}{dt} - \cos \varepsilon \frac{d\psi}{dt},$$

$$\text{ou} \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega - \frac{d\chi}{dt} + \cos \varepsilon \frac{d\psi}{dt};$$

intégrant, et ne négligeant que des termes très petits, on a par suite

$$\theta = \theta_0 + (\omega + f \cos \varepsilon_0 - g) t + (f' \cos \varepsilon_0 - g') t^2 + P \cos \varepsilon_0,$$

θ_0 étant une constante.

Temps vrai. — L'angle horaire du Soleil, ou temps vrai, H , a pour valeur $\theta - \alpha$; donc

$$H = \theta_0 - \lambda_0 + k + (\omega + f \cos \varepsilon_0 - g - n - \lambda_1 - h) t + (f' \cos \varepsilon_0 - g' - \lambda_2 - h') t^2 \\ = C - \rho - P (1 - \cos \varepsilon_0) + \mathcal{P},$$

et l'on voit bien que de même que le temps sidéral, le temps vrai ne varie pas proportionnellement au temps absolu t .

Soleil moyen. Temps moyen. — Considérons un astre fictif, supposé dans l'équateur, et dont l'angle horaire apparent aît pour valeur $\bar{\alpha}$ à chaque instant

$$H_0 = \theta_0 - \lambda_0 + k + (\omega + f \cos \varepsilon_0 - g - n - \lambda_1 - h) t,$$

c'est-à-dire la valeur de H limitée à son terme constant et à son terme proportionnel au temps. Cet astre est le Soleil moyen; H_0 est le temps moyen, qui varie d'une façon rigoureuse proportionnellement au temps absolu t .

L'ascension droite α_0 du soleil moyen est $\theta - H_0$, de sorte que

$$\alpha_0 = \lambda_0 - k + (n + \lambda_1 + h) t + (f' \cos \varepsilon_0 - g') t^2 + P \cos \varepsilon_0;$$

elle ne varie pas proportionnellement à t . Mais envisageons l'ascension droite du point fixe γ_0 , comptée sur l'équateur vrai, à partir de γ ; si nous l'appelons α_1 , on a évidemment avec une exactitude suffisante

$$\alpha_1 = \psi \cos \varepsilon_0 = \chi = (f \cos \varepsilon_0 - g) t + (f' \cos \varepsilon_0 - g') t^2 + P \cos \varepsilon_0;$$

donc il vient

$$\alpha_0 + \alpha_1 = \lambda_0 - k + (n + \lambda_1 + h - f \cos \varepsilon_0 + g) t,$$

et l'on voit que le mouvement en ascension droite du soleil moyen, compté à partir du point fixe γ_0 , est uniforme.

Jour solaire moyen. — Le jour solaire moyen est l'intervalle de temps nécessaire pour que l'angle horaire H_0 du soleil moyen augmente de 2π . Il est constant et peut être pris pour unité de temps: il est clair que sa définition dépend légèrement, mais d'une façon insensible pratiquement, du choix de l'origine du temps, car le coefficient de t dans H change avec cette origine. Nous prendrons pour origine du temps dans tout ce qui suit l'époque 1900, Janvier,

midi moyen de Greenwich; et l'unité de temps sera l'année julienne de 365,25 jours moyens.

Année tropique - Année sidérale - L'année tropique à l'époque t est le temps nécessaire pour que la partie séculaire de la longitude Θ , ou ce qui revient au même de l'ascension droite α , augmente de 2π ; cette durée dépend légèrement de l'époque t , car elle est égale à

$$\frac{2\pi}{n + \lambda_1 + h + 2(\lambda_2 + h')t}$$

L'observation facilement répétée pendant des siècles et combinée avec la théorie donne pour la durée de l'année tropique en jours moyens.

$$365,24219879 - \frac{614}{10^{10}} t,$$

t étant exprimé comme nous l'avons dit en années juliennes.

L'année tropique est un peu plus courte que l'année julienne, et c'est ce fait qui a nécessité comme l'on sait, la réforme grégorienne du calendrier julien.

En 1000 ans, l'année tropique diminue de 5 secondes environ. D'après ce qui précède, on a l'égalité

$$\frac{2\pi \times 365,25}{n + \lambda_1 + h + 2(\lambda_2 + h')t} = 365,24219879 - \frac{614}{10^{10}} t;$$

on en déduit

$$n + \lambda_1 + h = 1296027",6813, \quad \lambda_2 + h' = 0",0001089.$$

L'unité étant l'année julienne et non l'année tropique, on a d'ailleurs d'après le chapitre précédent

$$h = 50",2564 \times \frac{365,25}{365,2422} = 50",2575,$$

etc $h' = 0,000111$ donc

$$n + \lambda_1 = 1295977",4238, \quad \lambda_2 = -0",000002.$$

Le mouvement sidéral diurne à l'époque t a par suite, en divisant par 365,25, pour valeur $3548",1928 - \frac{1''}{10^3} t$.

L'année sidérale à l'époque t est le temps nécessaire pour que la longitude moyenne du Soleil, rapportée à l'équinoxe fixe γ_0 , augmente de 2π ; c'est donc $\frac{2\pi}{n + \lambda_1 + 2\lambda_2 t}$; sa valeur en jours moyens est $365,25636 + \frac{11}{10^{10}} t$.

La constante λ_0 de la longitude du Soleil est égale à $279^\circ 41' 48",01$, et par suite la constante $\lambda_0 - k$ de la longitude apparente vaut $279^\circ 41' 27",54$.

L'année tropique se numérote comme l'année civile; on la fait commencer, d'après Bessel, au moment voisin du 1^{er} Janvier, et le même pour toute la Terre, où la partie séculaire de la longitude apparente du Soleil, ϑ , est égale à 280° . Si par exemple, on veut calculer l'époque du commencement de l'année 1906, on doit avoir, en tenant compte des révolutions totales effectuées: $6 \times 360^\circ + 280^\circ = 279^\circ 41' 27",54 + 1296027,6813t + 0",0001089t^2$, d'où $t = 6,0007302$, c'est-à-dire 6 années juliennes + $0^d 2667$; l'époque cherchée est par suite, en tenant compte de l'année bissextile 1904, et en temps moyen de Greenwich, 1906 Janvier 0,7667; la longitude de Greenwich par rapport à Paris étant $0^d 0065$, l'époque cherchée tombe finalement $0^d 2268$ avant le midi moyen du 1^{er} Janvier 1906, à Paris. La connaissance des Temps donne $0^d 2270$; mais elle utilise les tables du Soleil de Le Verrier.

Rotation de la Terre. — D'après l'expression du temps moyen H_0 , on a évidemment

$$\omega + f \cos \varepsilon_0 - g - n - \lambda, - h = 2\pi \times 365,25;$$

donc $\omega = 2\pi \times 365,25 + 1295981",5953$

En rapportant la vitesse angulaire ω de la Terre sur elle-même au jour moyen, on a donc $\omega = 1299548",2042$.

Le temps de la révolution de la Terre sur elle-même, qui ne doit pas être confondu avec le jour sidéral est par suite, en jours moyens, $1 - 0,002730336$, ou en secondes de temps moyen $86164,099$.

Temps sidéral. — En un lieu tel que la longitude de Greenwich par rapport à ce lieu soit L , il est clair que le temps moyen à l'époque t , comptée toujours de la même façon, est

$$H_0 = L + 2\pi \times 365,25 \times t$$

de sorte que la constante locale θ_0 est égale à $\lambda_0 - k + L$.

D'autre part, l'ascension droite du Soleil moyen est, en remplaçant les lettres par leurs valeurs:

$$\alpha_0 = 18^h 36^m 45^s,836 + 86401,84542t + 0^s,929 \frac{t^2}{10^5} + P \cos \varepsilon_0,$$

la mutation P étant exprimée en temps.

Le temps sidéral local est égal à $\alpha_0 + H_0$; c'est donc

$$\theta = 18^{\circ} 38^m 45^s,836 + L + (2\pi \times 366,25 + 1,84542)t + 0,929 \frac{t^2}{10^5} + P \cos \varepsilon_0;$$

dans cette formule, on aura soin de supprimer les multiples de 2π .

On voit que le temps sidéral est assujéti à une variation séculaire et à une variation périodique très petites toutes les deux : il ne varie pas proportionnellement au temps, ainsi que nous l'avions déjà annoncé.

Le jour sidéral à l'époque t est le temps nécessaire pour que la partie séculaire du temps sidéral θ augmente de 2π ; sa valeur en jours moyens est par suite

$$\frac{365,25}{366,25 + \frac{1,84542}{86400} + \frac{1,858}{10^5 \times 86400}} t'$$

c'est-à-dire $1 - 0,002730433 - \frac{0,59}{10^{12}} t$. On voit que le terme en t est pratiquement insensible.

Le jour sidéral vaut encore 86164,091 secondes de temps moyen.

Inversement, le jour moyen vaut en jours sidéraux 1,002737909 ou 86636,555 secondes de temps sidéral.

Comme nous l'avons déjà dit, on voit que le jour sidéral ne doit pas être confondu avec le temps de la révolution de la Terre sur son axe ; il ne doit pas être confondu davantage avec le jour stellaire, c'est-à-dire avec le temps nécessaire pour que l'angle horaire d'une étoile augmente de 2π : en effet l'ascension droite apparente d'une étoile fixe change avec le temps, et est soumise à des variations tant séculaires que périodiques provenant de la précession et de la nutation ; le jour stellaire ne sera donc pas le même que le jour sidéral, et dépendra d'ailleurs des coordonnées de l'étoile.

Temps vrai. — Le temps vrai est l'angle horaire H du soleil ; le temps moyen étant H_0 , la différence $H_0 - H$, dite équation du temps E , est égale à

$$(\lambda_2 + h' - f' \cos \varepsilon_0 + g') t^2 + C + \rho + \mathcal{P},$$

en désignant toujours par \mathcal{P} un groupe de termes périodiques qui dépendent ici des perturbations du Soleil et de la nutation. Remplaçant le coefficient de t^2 par sa valeur numérique, on a donc

$$E = - 0,000306 t^2 + C + \rho + \mathcal{P}.$$

Equation du temps. — Pour pouvoir étudier de plus près l'équation du temps, complétons d'abord les données numériques déjà indiquées, en donnant les valeurs de l'excentricité et de la longitude du

périgée du Soleil, cette dernière étant comptée à partir de l'équinoxe de l'époque t . On a, aux termes périodiques précédés,

$$e = 0,01075104 - 0,4180 \frac{t}{10^6} - 0,126 \frac{t^2}{10^{10}}$$

$$= 3'55",150 - 0",08621 t - 2",60 \frac{t^2}{10^6},$$

$$\omega = 281^\circ 13' 15",0 + 61",8903 t + 0",000163 t^2;$$

par suite l'anomalie moyenne du Soleil sera

$$M = 358^\circ 28' 33",0 + 1295965",7910 t - 0",000054 t^2.$$

Le temps nécessaire pour que cette anomalie moyenne augmente de 2π est l'année anomalistique; sa valeur en jours moyens sera $365,25964134 + 304 \frac{t}{10^{10}}$.

Le terme principal de l'équation du centre C est $2e \sin M$; le terme principal de la réduction à l'équateur p est $-tg^2 \frac{\epsilon}{2} \sin 2\Theta'$, ou en confondant ici Θ' avec $M + \omega$, $-tg^2 \frac{\epsilon}{2} \sin 2(M + \omega)$.

On a donc numériquement pour valeur approchée de l'équation du temps dans les années voisines de 1900,

$$E = 461^s \sin M - 592^s \sin (2M + 202^\circ 5'),$$

$$\text{d'où } \frac{dE}{dM} = 461^s \cos M - 1184^s \cos (2M + 202^\circ 5').$$

Voici alors comment varie E .

Pour $M = 0$, $E = 3^m 46^s$, et E croît;

Pour $M = 42^\circ$, $E = 14^m 36^s$; c'est un maximum;

Pour $M = 103,5$, E s'annule;

Pour $M = 131^\circ$, $E = -3^m 45^s$; c'est un minimum;

Pour $M = 161,5$, E s'annule;

Pour $M = 203^\circ$, $E = 6^m 11^s$; c'est un maximum;

Pour $M = 238^\circ$, E s'annule;

Pour $M = 298,5$, $E = -16^m 27^s$; c'est un minimum;

Pour $M = 352^\circ$, E s'annule.

Cette étude n'est qu'approchée : en fait pour 1906, à Paris l'équation du temps atteint un maximum de $14^m 25^s$ le 11 Février, s'annule le 15 Avril, atteint un minimum de $-3^m 51^s$ le 15 Mai, s'annule le 15 Juin, atteint un maximum de $6^m 18^s$ le 27 Juillet.

s'annule le 1^{er} Septembre, atteint un minimum de $-16^m 21^s$ le 3 Novembre, et s'annule enfin le 25 Décembre.

L'équation du temps dépendant uniquement de M , varie de la même façon chaque année. Quand elle est positive, le jour paraît plus long l'après-midi que le matin; c'est le contraire quand elle est négative. C'est ce qui explique que les jours augmentent plus vite le soir que le matin en Janvier et diminuent plus vite le soir que le matin en Octobre.

La Connaissance des Temps donne pour chaque jour le temps moyen à midi vrai, c'est-à-dire l'équation du temps à midi vrai et sa variation pour 1^h; elle donne aussi le temps vrai à midi moyen, c'est-à-dire l'équation du temps changée de signe à midi moyen.

Saisons. — Le commencement des diverses saisons, printemps, été, automne, hiver, a lieu lorsque la longitude du Soleil est égale à $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

Faisons le calcul d'une façon approchée pour 1906². La longitude du périhélie est sensiblement $281^{\circ} 20'$; les anomalies vraies correspondantes au commencement des quatre saisons sont donc

$$r_1 = 78^{\circ} 40', \quad r_2 = 168^{\circ} 40', \quad r_3 = 258^{\circ} 40', \quad r_4 = 348^{\circ} 40';$$

d'après la formule

$$\operatorname{tg} \frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{v}{2}, \text{ avec } e = 0,01675,$$

les anomalies excentriques sont alors

$$u_1 = 77^{\circ} 43',6, \quad u_2 = 168^{\circ} 28',6, \quad u_3 = 259^{\circ} 36',5, \quad u_4 = 348^{\circ} 51',2;$$

et d'après la formule $u - e \sin u = M$, les anomalies moyennes sont :

$$M_1 = 76^{\circ} 47',3, \quad M_2 = 168^{\circ} 17',1, \quad M_3 = 260^{\circ} 33',1, \quad M_4 = 349^{\circ} 2',3$$

D'ailleurs l'anomalie moyenne du Soleil au 1^{er} Janvier 1906, midi moyen de Paris est $M_0 = 358^{\circ} 54',3$, et le moyen mouvement diurne de l'anomalie moyenne est $59',14$. Par suite les temps écoulés depuis le 1^{er} Janvier jusqu'au commencement des quatre saisons, sont respectivement, exprimés en jours moyens.

$$t_1 = 79,02, \quad t_2 = 171,85, \quad t_3 = 265,47, \quad t_4 = 355,25$$

ce qui correspond à moins d'une demi-heure près aux époques exactes, 21 Mars 1^h 2^m, 21 Juin 20^h 51^m, 23 Septembre 11^h 24^m, 22 Décembre 6^h 8^m.

Il résulte de la valeur de M_0 que le Soleil est au périhélie dans les environs du 1^{er} Janvier, et par suite à l'apogée vers le

1^{er} Juillet.

Les durées des saisons sont actuellement en moyenne :

Printemps	92 ^j 21 ["] ,
Été	93 ^j 14 ["] ,
Automne	89 ^j 19 ["]
Hiver	89 ^j 0 ["]

Ces durées changent avec le temps, car elles dépendent surtout d'après la loi des aires, de la position relative de la ligne des apsidés et de celle des équinoxes, c'est-à-dire de la longitude du périhélie, qui augmente de plus d'une minute par an : remarquons d'ailleurs que cette augmentation séculaire de ω tient à deux causes : la précession qui fournit 50' environ, et les perturbations planétaires, qui ne fournissent que 11'.

Chapitre XIII

Mouvement géocentrique des Planètes

Énoncé du problème. — Nous avons étudié précédemment le mouvement des planètes par rapport au Soleil ; connaissant de plus le mouvement du Soleil par rapport à la Terre, il est facile de calculer les coordonnées géocentriques d'une planète à telle époque que l'on voudra, et de former ainsi des éphémérides telles qu'en publie la Connaissance des temps pour les grosses planètes.

Nous nous proposons ici de nous rendre compte d'une façon approchée des circonstances principales du mouvement géocentrique d'une planète, et nous supposerons simplement à cet effet que la planète est animée d'un mouvement circulaire et uniforme autour du Soleil comme centre, dans le plan de l'écliptique supposé fixe ; de même aussi le Soleil tournera d'un mouvement circulaire et uniforme autour de la Terre : en d'autres termes, nous négligeons les excentricités, les inclinaisons et les perturbations ; l'approximation ainsi obtenue sera assez grossière évidemment, mais suffisante cependant pour expliquer les apparences des mouvements des planètes telles que nous les observons.

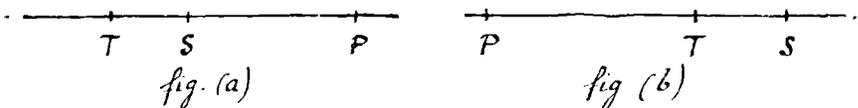
Planètes inférieures et supérieures. — Il faut d'abord faire une distinction entre les planètes qui circulent autour du Soleil en dedans de l'orbite de la Terre et celles qui circulent en dehors ; les premières sont dites inférieures, les secondes supérieures. Les seules planètes inférieures sont Mercure et Vénus.

Conjonctions. Oppositions. — On dit d'une façon générale que deux astres sont en conjonction, en ascension droite ou en longitude, lorsqu'ils ont par rapport à l'observateur, même ascension droite ou même longitude.

De même ils sont en opposition, ou bien en quadrature, lorsque leurs ascensions droites ou leurs longitudes, suivant les coordonnées employées, diffèrent de 180° ou bien de 90° .

Les signes de la conjonction, de l'opposition, de la quadrature, sont respectivement les suivants : \odot , \ominus , \square .

Il est clair immédiatement, qu'une planète supérieure présente alternativement des conjonctions et des oppositions, en désignant par T la Terre, S le Soleil, P la planète, ou a au moment d'une conjonction la disposition (a), au moment de l'opposition, la disposition (b).



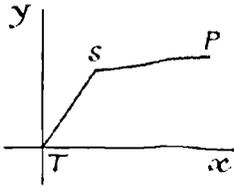
Au contraire une planète inférieure ne présente pas d'oppositions, mais alternativement deux sortes de conjonctions, suivant que la planète est plus ou moins éloignée de la Terre que le Soleil; dans le premier cas, la conjonction est supérieure, et correspond à la figure (c); dans le second, elle est inférieure, et correspond à la figure (d).



Nous comprendrons, dans ce qui suit, de dire simplement conjonction, quand il s'agira pour une planète inférieure, d'une conjonction supérieure; au contraire les conjonctions inférieures seront toujours spécifiées.

Le moment le plus favorable pour observer une planète supérieure est évidemment celui de l'opposition, puisqu'alors on la voit la nuit.

Coordonnées de la planète. Prenons dans le plan de l'écliptique deux axes de coordonnées rectangulaires, orientés dans le sens direct, Tx , Ty , ayant pour origine le centre T de la Terre et en même temps que les coordonnées rectangulaires, x , y , employons les coordonnées polaires correspondantes r , λ .



Le Soleil S aura pour coordonnées géocentriques x', y' ; le rayon du cercle qu'il décrit autour de la Terre est a' , son moyen mouvement n' . La planète P aura pour coordonnées x, y ; le rayon du cercle qu'elle décrit autour de S , sera a , et le moyen mouvement héliocentrique n .

D'après la troisième loi de Kepler, on a la relation très approchée $n^2 a^3 = n'^2 a'^3$.

Si ξ, η sont les coordonnées héliocentriques de P , c'est-à-dire les projections du vecteur SP , on a

$$x = x' + \xi, \quad y = y' + \eta$$

Choisissons pour origine du Temps l'époque d'une conjonction, et prenons pour Ox la demi-droite sur laquelle se produit cette conjonction; on a alors :

$$x' = a' \cos n't, \quad y' = a' \sin n't;$$

$$\xi = a \cos nt, \quad \eta = a \sin nt;$$

par suite

$$\begin{cases} x = \pi \cos \lambda = a' \cos n't + a \cos nt, \\ y = \pi \sin \lambda = a' \sin n't + a \sin nt; \end{cases}$$

la différence $\lambda - n't$ des longitudes de la planète et du Soleil est l'élongation de la planète.

Révolution synodique. — Il est clair qu'il suffit d'étudier le mouvement de la planète pendant la période de Temps T , dite révolution synodique, qui sépare deux conjonctions successives, car au bout de ce temps, le Soleil et la planète se retrouvent dans la même position relative par rapport à la Terre et les circonstances du mouvement se reproduisent. Et la vérité, la droite sur laquelle se présente la nouvelle conjonction ne coïncide pas avec Ox , mais il est facile de tenir compte de l'angle dont elle a tourné, si l'on veut comparer le mouvement de la planète non plus à celui du Soleil mais à celui des étoiles, c'est-à-dire étudier sa longitude λ et non son élongation $\lambda - n't$.

Une conjonction se produit, d'après la définition, lorsque les vecteurs TS et SP sont de même direction et de même sens, c'est-à-dire quand on a

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$$

la valeur commune de ces rapports étant positive. La relation

$x'y' - x'y = 0$ conduit à $\sin(n-n')t = 0$, d'où $(n-n')t = k\pi$, k étant un entier quelconque; mais pour que $\frac{x}{x'}$ soit positif, il faut en outre que k soit pair. Le Temps T de la révolution synodique a donc pour valeur $\frac{2\pi}{[n-n']}$.

D'après ce qui précède au bout du temps $\frac{T}{2}$, les vecteurs TS et SP seront de sens contraire; il y aura opposition ou conjonction inférieure suivant que la planète sera supérieure ou inférieure: il en clair que les circonstances du mouvement sont symétriques par rapport à l'époque de l'opposition ou de la conjonction inférieure.

Si les durées de révolution de la planète et de la Terre autour du Soleil sont respectivement T_0 et T_0' , on a aussi la relation.

$$\frac{1}{T} = \left[\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_0'} \right].$$

D'après le tableau donné précédemment des éléments des grosses planètes, on trouvera ainsi pour leurs révolutions synodiques en jours moyens:

Mercure	116 ^d	Saturne	378 ^d
Venus	584 ^d	Uranus	370 ^d
Mars	780 ^d	Neptune	368 ^d
Jupiter	399 ^d		

Etude de la longitude. — La longitude de la planète, comptée à partir de T_{\odot} , est définie par

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{a \sin nt + a' \sin n't}{a \cos nt + a' \cos n't},$$

$$\text{d'où} \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{n a^2 + n' a'^2 + (n+n') a a' \cos(n-n')t}{a^2 + a'^2 + 2 a a' \cos(n-n')t};$$

le dénominateur de cette dérivée est toujours positif; le numérateur s'annulera si l'on a

$$h = \frac{n a^2 + n' a'^2}{(n+n') a a'} < 1;$$

$$\text{ceci revient à} \quad (n a - n' a') (a - a') < 0,$$

$$\text{ou} \quad (n^2 a^2 - n'^2 a'^2) (a - a') < 0,$$

$$\text{ou encore, d'après la relation } n^2 a^3 = n'^2 a'^3, \text{ à}$$

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a'}\right) (a - a') < 0,$$

ce qui est vrai.

Appelons alors ω l'angle positif obtus dont le cosinus est $-h$; on voit que la longitude λ augmente d'abord, jusqu'à l'époque t_1 , telle que $[n - n'] t_1 = \omega$, ou $t_1 = \frac{\omega}{2\pi} T$; elle diminue ensuite jusqu'à l'époque t_2 telle que

$$[n - n'] t_2 = 2\pi - \omega, \text{ ou } t_2 = T - \frac{\omega}{2\pi} T;$$

puis elle augmente à nouveau.

Quand la longitude est croissante, la planète se déplace dans le sens direct à travers les étoiles; quand au contraire la longitude est décroissante, la planète se déplace dans le sens rétrograde, et l'on dit qu'elle est dans sa période de rétrogradation. Au moment du maximum et du minimum de la longitude, la planète est stationnaire. C'est toujours pendant la rétrogradation que se produit l'opposition ou la conjonction inférieure. Si λ_1 et λ_2 sont les longitudes aux époques t_1 et t_2 des deux stations, la longitude λ_0 au moment de l'opposition ou de la conjonction inférieure sera $\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$, à cause de la symétrie déjà signalée, et finalement entre deux conjonctions successives, la longitude augmente de $2\lambda_0$. On a d'ailleurs évidemment

$$\lambda_0 = n' \frac{T}{2}, \text{ ou } \lambda_0 = n \frac{T}{2}$$

suivant que la planète est inférieure ou supérieure.

Étude de l'élongation. — L'élongation E est la différence $\lambda - n't$; donc

$$\frac{dE}{dt} = a(n - n') \frac{a + a' \cos(n - n')t}{a^2 + a'^2 + 2aa' \cos(n - n')t}.$$

Pour une planète supérieure, on a $n < n'$, $a > a'$; $\frac{dE}{dt}$ est toujours négative; l'élongation va toujours en diminuant; en d'autres termes la planète s'éloigne toujours du Soleil vers l'Ouest.

Pour une planète inférieure, il n'en va pas de même; soit ω' l'angle positif obtus dont le cosinus est $-\frac{a}{a'}$; l'élongation augmente d'abord jusqu'à l'époque t'_1 telle que $(n' - n)t'_1 = \omega'$ ou $t'_1 = \frac{\omega'}{2\pi} T$, et atteint un maximum D ; puis elle diminue jusqu'à l'époque t'_2 telle que $(n' - n)t'_2 = 2\pi - \omega'$ ou $t'_2 = T - \frac{\omega'}{2\pi} T$, et atteint un minimum $-D$; ensuite elle augmente à nouveau.

L'élongation s'annule aux deux conjonctions; D est la plus grande élongation ou digression. Pendant la première partie du mouvement, la planète s'éloigne, puis se rapproche du Soleil,

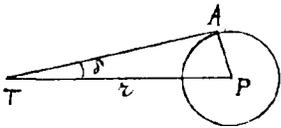
en restant à l'Est; pendant la seconde partie le contraire à lieu.

Rayon vecteur. — On a $r^2 = a^2 + a'^2 + 2aa' \cos(n-n')t$;

le rayon vecteur varie donc régulièrement entre $a + a'$ et $|a - a'|$; il est maximum à la conjonction, minimum à l'opposition et à la conjonction inférieure.

Tous les résultats précédents ne sont qu'approximatifs: il suffira de consulter une éphéméride pour se rendre compte cependant qu'ils correspondent d'une façon suffisante à la réalité.

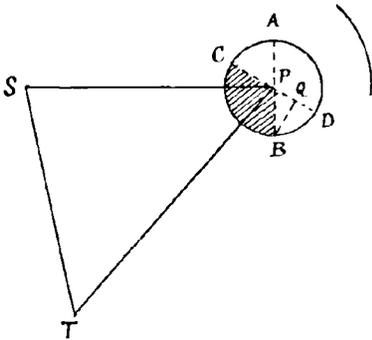
Diamètre apparent et parallaxe. — Les planètes peuvent être regardées comme des corps sphériques, quoique Jupiter et Saturne aient un aplatissement sensible. On définit leurs dimensions par leur demi-diamètre apparent à la distance choisie comme unité; soit δ_0 , de sorte que leur rayon linéaire est $\sin \delta_0$.



Si alors, à un instant donné, la distance géocentrique de la planète est r , le rayon linéaire est $r \sin \delta$, comme le montre la figure. Donc $\sin \delta = \frac{1}{r} \sin \delta_0$, et comme r et δ_0 sont petits, on a avec une approximation suffisante, $\delta = \frac{1}{r} \delta_0$.

Si de même P_0 est la parallaxe horizontale de l'astre à la distance 1, sa parallaxe horizontale à la distance r sera $P = \frac{1}{r} P_0$.

Phases. — Les planètes ne sont pas lumineuses par elles-mêmes; elles présentent donc des phases, comme la Lune.



Soient S, T, P le Soleil, la Terre et la planète; menons les diamètres AB, CD de la section Σ de la planète par le plan des trois corps, perpendiculairement à SP et TP ; les distances SP et TP étant très grandes par rapport aux dimensions de la planète, on peut dire que la partie éclairée est la demi-sphère se projetant en ACB , tandis que la partie

visible est la demi-sphère se projetant en CBD . La partie éclairée visible est donc le fuseau projeté en BCP .

Si BQ est perpendiculaire sur CD , la largeur de ce fuseau tel qu'on le voit est CQ et si φ est l'angle SPT à la planète, le rapport de cette largeur au diamètre apparent CD est

$$\frac{1}{2} (1 + \cos \varphi).$$

Ce fuseau se projette d'ailleurs orthographiquement, tel qu'on le voit, sur le plan perpendiculaire à Σ passant par CD suivant une surface limitée par un demi-cercle et une demi-ellipse, dont l'aire est évidemment aussi $\frac{1}{2}(1 + \cos \varphi)$, en prenant pour unité l'aire totale de Σ . On peut donc prendre le nombre

$$\frac{1}{2}(1 + \cos \varphi), \text{ ou } \cos^2 \frac{\varphi}{2},$$

pour mesure de la phase, celle-ci étant égale à l'unité quand le disque de la planète paraît complètement éclairé.

Soit R le rayon vecteur du Soleil ST , x celui de la planète TP , ρ la distance SP de la planète au Soleil, ω l'élongation en valeur absolue, \widehat{STP} , de la planète; on a $\sin \varphi = \frac{R}{\rho} \sin \omega$, et il est par suite facile de calculer la phase $\cos^2 \frac{\varphi}{2}$.

Pour une planète inférieure, toutes les phases sont évidemment possibles, car φ varie de 0 à π ; mais pour une planète supérieure, on a $R < \rho$, et par suite l'angle φ , toujours aigu, a un maximum, auquel correspond un minimum de phase. Le sinus du maximum de φ a pour valeur approchée le rapport des demi-grands axes de l'orbite de la Terre et de la planète: le minimum de la phase est par suite $\frac{1}{2}$ environ pour Mars, $\frac{99}{100}$ pour Jupiter; à la distance de cette dernière planète, les phases sont donc incensibles.

Éclat. — L'éclat de la planète peut être considéré comme proportionnel à la surface éclairée visible, et inversement proportionnel au carré de la distance à la Terre c'est-à-dire d'après ce qui précède à

$$\frac{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}{x^2}$$

Il sera maximum ou minimum lorsque la différentielle de cette quantité s'annulera, c'est-à-dire quand on aura:

$$\frac{dr}{x d\varphi} = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

On a d'ailleurs, dans le triangle TSP :

$$R^2 = x^2 + \rho^2 - 2x\rho \cos \varphi,$$

c'est-à-dire en considérant R et ρ comme constants,

$$\frac{dr}{x d\varphi} = -\frac{\rho \sin \varphi}{x - \rho \cos \varphi}$$

mais $x - \rho \cos \varphi = R \cos \omega$, et $\rho \sin \varphi = R \sin \omega$, de sorte que

$$\frac{dr}{r d\varphi} = - \operatorname{tg} \omega .$$

L'équation du problème est donc

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} ,$$

avec la relation

$$\rho \sin \varphi = R \sin \omega .$$

Éliminant φ , il vient

$$\frac{4 \rho \operatorname{tg} \omega}{1 + 4 \operatorname{tg}^2 \omega} = R \sin \omega ,$$

ou bien, en laissant de côté les solutions évidentes qui correspondent à $\operatorname{tg} \omega = 0$:

$$\cos^2 \omega + \frac{4}{3} \frac{\rho}{R} \cos \omega - \frac{4}{3} = 0 .$$

Cette équation a une racine et une seule comprise entre -1 et $+1$, savoir :

$$\cos \omega = \frac{2}{3} \left(-\frac{\rho}{R} + \sqrt{\frac{\rho^2}{R^2} + 3} \right) ,$$

en supposant toutefois $\frac{\rho}{R} > \frac{1}{4}$.

Mais la valeur correspondante de ω n'est acceptable que pour les planètes inférieures, car dans le cas d'une planète supérieure, on doit avoir $\varphi < \omega$, ce qui est contradictoire avec la relation

$$2 \operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} .$$

Dans le cas de Vénus, on trouve ainsi, en prenant pour $\frac{\rho}{R}$ sa valeur moyenne 0,7233 :

$$\omega = 39^\circ 45' , \quad \varphi = 118^\circ .$$

Chapitre XIV

Chapitre XIV

Mouvement de la Lune et des Satellites

Mouvement de la Lune — La théorie du mouve-

ment de la Lune autour de la Terre présente de grandes difficultés, à cause de l'importance de l'action du Soleil, et on ne peut pas la traiter exactement comme celle des planètes. On peut toujours dire cependant, dans une première approximation, que la Lune décrit autour de la Terre une ellipse variable dont la Terre occupe un des foyers, mais les perturbations de ce mouvement sont considérables.

L'inclinaison de cette orbite a pour valeur moyenne $5^{\circ} 9'$, et varie entre $5^{\circ} 0'$ et $5^{\circ} 18''$.

L'excentricité vaut en moyenne 0,0549, tandis que le demi-grand axe est égal à $60,3$ rayons équatoriaux terrestres.

Mais la longitude du nœud ascendant et celle du périhélie varient rapidement avec le temps : la ligne des nœuds décrit l'écliptique entier, dans le sens rétrograde, d'un mouvement sensiblement uniforme, en $6793^{\text{d}} 39$, soit 18 ans $\frac{2}{3}$ environ ; la ligne des apsides fait de même, dans le sens direct et en $3232^{\text{d}} 57$, soit un peu moins de 9^{ans} .

Enfin, la Lune elle-même décrit son orbite en $27^{\text{d}} 7^{\text{h}} 43^{\text{m}}$ environ.

Il est nécessaire de porter plus loin la précision pour se rendre un compte suffisamment exact du mouvement de la Lune.

En fait, la théorie et les tables construites d'après la théorie et les observations, fournissent directement les trois coordonnées suivantes de la Lune :

- 1.° Sa longitude géocentrique apparente λ ;
- 2.° Sa latitude géocentrique apparente β ;
- 3.° Sa parallaxe horizontale équatoriale ω .

Cette dernière coordonnée est équivalente au rayon vecteur r , puisque, si a désigne le rayon équatorial.

de la Terre, on a $\sin \mathcal{C} = \frac{a}{\varepsilon}$.

Voici maintenant sous quelle forme se présentent ces quantités.

La longitude λ est de la forme

$$\lambda = \lambda_0 + n t + n' t^2 + P,$$

λ_0 ; n , n' étant des constantes et P , une somme de termes périodiques.

La latitude β est elle-même une somme de termes périodiques.

La parallaxe \mathcal{C} est égale à une constante \mathcal{C}_0 augmentée d'une somme de termes périodiques.

De ces expressions, on peut conclure les éléments elliptiques osculateurs à chaque instant. En particulier, la longitude du nœud \mathcal{D} , est de la forme

$$\mathcal{D} = h t + h' t^2 + P',$$

h , h' étant des constantes, P' une somme de termes périodiques; de même la longitude du périhélie, σ , est de la forme

$$\sigma = g t + g' t^2 + P''.$$

g , g' étant des constantes, P'' une somme de termes périodiques. Ces longitudes sont d'ailleurs, comme λ , supposées rapportées à l'équinoxe vrai.

Si l'on fait abstraction des termes périodiques, on obtient les longitudes moyennes de la Lune, de son nœud ascendant et de son périhélie. Ces longitudes sont sensiblement proportionnelles au temps, car les termes en t^2 sont très petits; leurs coefficients n , h , g , rapportés au siècle comme unité de temps, sont les coefficients des accélération séculaires des trois longitudes considérées.

On a, d'après les tables des syzygies de Ch. v. Oppolzer, on a, en prenant l'année julienne pour unité de temps, et en fixant l'origine du temps à l'époque 1800 Janvier 0,0 temps moyen de Greenwich,

$$\lambda = 335^{\circ} 43' 26",70 + (13 \times 360^{\circ} + 477644",1961) \cdot t \\ + 13",678 \left(\frac{t}{100}\right)^2 + P,$$

$$D = 33^{\circ} 16' 25",65 - 69629",2861 t + 7",744 t^2 + P',$$

$$\sigma = 225^{\circ} 23' 53",06 + 146485",8246 t - 37",456 t^2 + P''.$$

Les moyens mouvements diurnes de ces trois longitudes sont par suite, respectivement

$$13^{\circ} 10' 35",03; - 3' 10",63; + 6' 41",06.$$

La révolution tropique de la Lune, c'est-à-dire le temps nécessaire pour que la longitude moyenne augmente de 2π , est par suite de $27^d 7^h 43^m 45^s,7$.

La révolution sidérale de la Lune est le temps nécessaire pour que sa longitude moyenne, rapportée à un équinoxe fixe, augmente de 2π ; elle vaut par suite en tenant compte de la précession, $27^d 7^h 43^m 11^s,5$.

La révolution anomalistique de la Lune est le temps qui sépare deux passages consécutifs au périhélie, soit $27^d 13^h 18^m 33^s,3$.

La révolution draconitique de la Lune est le temps qui sépare deux passages consécutifs au nœud ascendant, soit $27^d 5^h 5^m 36^s$.

Le terme constant E_0 de la parallaxe est la constante de la parallaxe lunaire, soit $57' 2",68$ d'après M. Newcomb. C'est à cette valeur moyenne de la parallaxe que l'on fait correspondre la distance moyenne de la Lune à la Terre, soit $60,27$ rayons équatoriaux. La parallaxe varie entre $52'$ et $62'$, en gros.

Le terme principal de la latitude de la Lune est proportionnel à $\sin(\lambda - D)$; on a d'ailleurs toujours : $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} i \sin(\lambda - D)$, en désignant par i l'inclinaison, dont nous avons déjà indiqué la variation.

Dans les nombreuses inégalités périodiques de la longitude λ , on distingue principalement l'équation du centre, dont la partie principale est proportionnelle à $\sin(\lambda - \sigma)$, et peut dépasser $6''$ en valeur absolue; l'érection, de la forme approchée $1'' 20' \times \sin(\lambda - 2\lambda' + \sigma)$, en désignant par λ' la longitude du Soleil; la variation, égale en gros à $36' \sin 2(\lambda - \lambda')$; l'équation

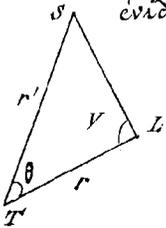
annuelle de la forme $-11'16'' \sin(\lambda' - \sigma')$, en désignant par σ' la longitude du périhélie Solaire.

Mouvement Synodique de la Lune. Phases. — La Lune

est un corps très sensiblement sphérique, qui reçoit la lumière du Soleil; par suite, elle présente des phases, que l'on peut étudier comme nous avons fait pour les planètes. Le mouvement de la Lune par rapport au Soleil s'étudie immédiatement; il est clair que λ' désignant la longitude du Soleil, la différence $\lambda - \lambda'$ va constamment en augmentant. La révolution synodique de la Lune est le temps nécessaire pour que la valeur moyenne de cette différence augmente de 2π : sa valeur est facile à calculer, et égale à $29^d 12^h 44^m 2^s,9$.

Quand le Soleil et la Lune sont en conjonction (nouvelle Lune), ou en opposition (pleine Lune) en longitude, on est aux syzygies; quand la différence de leurs longitudes est égale à $\pm 90^\circ$, on est aux quadratures (premier ou dernier quartier).

Pour déterminer avec exactitude la phase, il faut, comme nous l'avons vu à propos des planètes, connaître l'angle à la Lune V : il est toujours facile à calculer si r et r' sont les distances géocentriques de la Lune et du Soleil, et si θ est la distance angulaire géocentrique des deux astres, on a successivement d'une façon évidente:



$$\cos \theta = \cos \beta \cos (\lambda - \lambda'), \quad \text{tg } V = \frac{\sin \theta}{\frac{r}{r'} - \cos \theta}$$

Dimensions et diamètre apparent de

la Lune. — Le demi-diamètre apparent de la Lune à la distance moyenne à la Terre est de $15'34''$, 09 . Si δ_0 désigne cette valeur, le demi-diamètre δ correspondant à une parallaxe ω , sera donné par la formule

$$\sin \delta = \sin \omega \frac{\sin \delta_0}{\sin \omega_0}$$

Le rapport constant $\frac{\sin \delta}{\sin \omega}$ sera égal au rayon

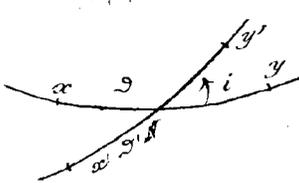
linéaire de la Lune (l'unité étant le rayon équatorial terrestre), si le demi-diamètre apparent n'était pas augmenté par l'irradiation. L'observation de ces éclipses montre en effet, qu'en réalité, la valeur de δ_0 doit être prise égale à $15'32''83$. On en déduit pour le rayon k de la Lune

$$\log k = \bar{1}.43545, \quad k = 0,27255 \text{ ou } \frac{3}{11} \text{ pensiblement.}$$

Remarquons en passant que le même fait se produit pour le Soleil; le demi-diamètre apparent à la distance moyenne à la Terre est de $16'1''82$, mais doit être réduit, à cause de l'irradiation, à $15'59''63$, ce qui donne 109 pour le rayon linéaire du Soleil.

Libration de la Lune. - La Lune, comme tous les corps

célestes, a un mouvement de rotation sur elle-même, que l'on peut définir de la façon générale suivante. Prenons comme centre O de la sphère céleste le centre de la Lune, et soit xy la trace du plan fondamental de coordonnées, par exemple celui de l'écliptique. Prenons d'autre



part des axes rectangulaires $Ox'y'z'$, orientés comme les axes fixes et invariablement liés à la Lune, et soit $x'y'$ la trace du plan $Ox'y'$, choisi comme équateur lunaire: les axes Ox', Oy', Oz' sont

d'ailleurs les axes principaux d'inertie de la Lune, et si A, B, C sont les moments d'inertie correspondants, on a $A < B < C$.

Soit N l'un des nœuds de l'équateur lunaire par rapport à xy ; on peut définir le mouvement de rotation de la Lune par les arcs $xN = \mathcal{D}$, $x'N = \mathcal{D}'$, et par l'inclinaison i de $x'y'$ par rapport à xy , comptée dans le sens convenable.

Les lois de Cassini et la Mécanique Céleste nous apprennent alors que: 1° si N est le nœud descendant de l'équateur lunaire, de sorte que l'angle i soit négatif et aigu, la longitude de N est toujours extrêmement voisine de celle du nœud ascendant de l'orbite

de la Lune (ou ce qui revient au même, de celle du nœud ascendant de l'orbite relative de la Terre par rapport à la Lune), et l'angle i reste sensiblement constant, égal à $-1^{\circ}31'22''$; 2° l'axe Oa' reste toujours dirigé vers la Terre, c'est-à-dire que la différence $\mathcal{D} - \mathcal{D}'$ ne diffère que par des termes périodiques très petits de la longitude moyenne de la Lune augmentée de 180° . Cette petite différence constitue la libration physique ou réelle de la Lune, que nous n'avons pas à étudier.

Il résulte de ces lois que la Lune tourne toujours à très peu près la même face vers la Terre. Pour étudier d'une façon plus précise ce phénomène, considérons un point de la Terre, pour lequel λ et β seront la longitude et la latitude du centre de la Lune, et cherchons les coordonnées angulaires, λ', β' de ce même point, vu du centre de la Lune, rapportées aux axes Ox', Oy', Oz' ; d'après ce qui précède, ces coordonnées resteront toujours petites; elles définiront la libration apparente ou optique de la Lune pour le point de la Terre considéré. Il suffit, pour les obtenir d'appliquer les formules générales du changement de coordonnées: comme l'angle i est petit, on prendra les formules (4) du Chapitre IV, et on les développera jusqu'au second ordre par rapport à i , en remplaçant $\psi, \theta, \psi', \theta', \sigma, \sigma'$ respectivement par $\pi + \lambda, -\beta, \lambda', \beta', \mathcal{D}, \mathcal{D}'$, car la longitude et la latitude géocentriques du point considéré sont précisément $\pi + \lambda$ et $-\beta$; d'ailleurs \mathcal{D} est précisément la longitude du nœud ascendant de la Lune, d'une façon au moins très approchée.

On a ainsi en négligeant encore les termes en $i^2 \text{tg} \beta$ à cause de la petitesse de β :

$$\begin{cases} \lambda' = \pi + \lambda - (\mathcal{D} - \mathcal{D}') + i \text{tg} \beta \cos(\lambda - \mathcal{D}) - \frac{i^2}{4} \sin 2(\lambda - \mathcal{D}), \\ \beta' = -\beta + i \sin(\lambda - \mathcal{D}). \end{cases}$$

Si l'on suppose que λ et β se rapportent au centre de la Terre, on a ainsi la libration en longitude et la libration en latitude; la première peut atteindre environ 8° en valeur absolue, la seconde $6^{\circ}45'$.

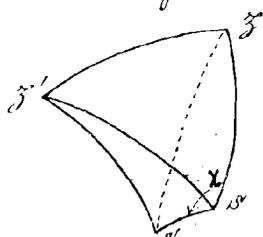
Si λ et β se rapportent à un point de la surface de la Terre, il faut en outre les affecter de la parallaxe,

ce qui conduit à la libration diurne. Ces résultats nous montrent quelle est l'étendue de la surface de la Lune, qu'on peut apercevoir : c'est à chaque instant l'hémisphère qui a pour pôle le point de coordonnées λ', δ' .

Satellites. — Nous n'étudierons pas ici le mouvement des satellites par rapport aux planètes dont ils dépendent, nous supposons ce mouvement connu, et nous dirons seulement qu'on peut le regarder comme un mouvement elliptique, mais le plus souvent, avec de fortes perturbations.

Le problème que nous nous proposons de résoudre consiste simplement dans la détermination du mouvement apparent des satellites, tel que nous pourrions l'observer. Pour y arriver, et obtenir en même temps des formules qui peuvent servir dans quelques autres questions, nous devons envisager le problème général suivant. Soit T la Terre, S et S' deux astres voisins; par rapport à des axes Tx, Ty, Tz , (orientés dans le sens direct) les coordonnées de S sont r, ψ, θ ; par rapport à d'autres axes Sx'', Sy'', Sz'' , orientés de la même façon, mais non parallèles aux premiers, les coordonnées de S' sont r', ψ'', θ'' ; on demande de déterminer la position relative de S et de S' pour l'observateur placé en T .

Si r', ψ'', θ'' sont les coordonnées de S' par rapport à Tx, Ty, Tz , tout revient à déterminer les différences de coordonnées $\Delta\psi = \psi' - \psi$, $\Delta\theta = \theta' - \theta$, ou bien encore la distance apparente ρ de S et S' , et l'angle de position χ de S'' par rapport à S , compté comme nous l'avons déjà fait, dans le sens direct de Sz vers SS' .



Menons par T des axes Tx', Ty', Tz' parallèles aux axes Sx'', Sy'', Sz'' ; définissons la position relative des deux trièdres $Txyz, Tx'y'z'$ comme au Chapitre IV, et cherchons d'abord les coordonnées angulaires de la direction

TS par rapport à Tx', Ty', Tz' ; en les appelant ψ', θ' , et désignant par δ' l'angle à l'astre, on a immédiatement:

$$(1) \begin{cases} \cos \theta, \sin (\psi, - \sigma') = \cos i \cos \theta \sin (\psi - \sigma) + \sin i \sin \theta, \\ \cos \theta, \cos (\psi, - \sigma') = \cos \theta \cos (\psi - \sigma), \\ \sin \theta, = \cos i \sin \theta - \sin i \cos \theta \sin (\psi - \sigma), \\ \cos \theta, \sin S = \sin i \cos (\psi - \sigma), \\ \cos \theta, \cos S = \sin i \sin \theta \sin (\psi - \sigma) + \cos i \cos \theta. \end{cases}$$

Appelons de la même façon ψ', θ' , les coordonnées angulaires de la direction TS' par rapport à $T\alpha' y' z'$; on aura évidemment les relations.

$$\begin{cases} \pi' \cos \psi' \cos \theta' = \pi \cos \psi \cos \theta + \pi'' \cos \psi'' \cos \theta'', \\ \pi' \sin \psi' \cos \theta' = \pi \sin \psi \cos \theta + \pi'' \sin \psi'' \cos \theta'', \\ \pi' \sin \theta' = \pi \sin \theta + \pi'' \sin \theta''. \end{cases}$$

Maintenant, le triangle $SS'z'$ donne:

$$\begin{cases} \sin s \sin (\chi - S) = \sin (\psi, - \psi') \cos \theta', \\ \sin s \cos (\chi - S) = \sin \theta' \cos \theta - \sin \theta \cos \theta' \cos (\psi, - \psi'), \end{cases}$$

et d'après les relations précédentes ceci devient:

$$\begin{cases} \sin s \sin (\chi - S) = \frac{\pi''}{\pi'} \sin (\psi', - \psi'') \cos \theta'', \\ \sin s \cos (\chi - S) = - \frac{\pi''}{\pi'} \left[\sin \theta \cos (\psi, - \psi'') \cos \theta'' - \cos \theta \sin \theta'' \right] \end{cases}$$

de plus

$$\pi'^2 = \pi^2 + 2\pi\pi'' \left[\sin \theta \sin \theta'' + \cos \theta \cos \theta'' \cos (\psi, - \psi'') \right] + \pi''^2$$

Si enfin, nous supposons qu'on puisse négliger les quantités du troisième ordre par rapport à $\frac{\pi''}{\pi'}$ et par suite par rapport à s , on a définitivement

$$(2) \begin{cases} s \sin (\chi - S) = k \frac{\pi''}{\pi'} \sin (\psi', - \psi'') \cos \theta'', \\ s \cos (\chi - S) = - k \frac{\pi''}{\pi'} \left[\sin \theta \cos (\psi, - \psi'') \cos \theta'' - \cos \theta \sin \theta'' \right], \\ k = 1 - \frac{\pi''}{\pi'} \left[\sin \theta \sin \theta'' + \cos \theta \cos \theta'' \cos (\psi, - \psi'') \right]. \end{cases}$$

On peut ainsi calculer s et χ , puisqu'on a déjà calculé ψ, θ, S par les formules (1).

Pour avoir aussi $\Delta \psi$ et $\Delta \theta$, on considérera le triangle SS' qui donne

$$\begin{cases} \cos \theta' \sin (\psi - \psi') = \sin \rho \sin \chi, \\ \cos \theta' \cos (\psi - \psi') = \cos \theta \cos \rho - \sin \theta \sin \rho \cos \chi, \\ \sin \theta' = \sin \theta \cos \rho + \cos \theta \sin \rho \cos \chi, \end{cases}$$

d'où avec la même approximation que ci-dessus :

$$(3) \begin{cases} \Delta \psi = -\rho \sin \chi \sec \theta (1 + \rho \cos \chi \operatorname{tg} \theta), \\ \Delta \theta = \rho \cos \chi - \frac{\rho^2}{2} \sin^2 \chi \operatorname{tg} \theta : \end{cases}$$

le plus souvent d'ailleurs, les termes en ρ^2 sont négligeables.

Il est facile de comprendre maintenant l'usage des formules précédentes pour le mouvement des satellites. Supposons par exemple que ψ et θ sont les coordonnées équatoriales α et δ ; S est le centre d'une planète P , S' est un satellite; le plan $Sx''y''$ est celui de l'orbite du satellite par rapport à la planète et Sx'' est la direction du nœud ascendant de cette orbite par rapport à l'équateur. Dans ces conditions, on a $\theta'' = 0$, et ψ'' est la longitude l du satellite dans son orbite, comptée à partir du nœud ascendant. Si alors i et ϱ désignent l'inclinaison et la longitude du nœud ascendant de l'orbite du satellite par rapport à l'équateur, on a $\sigma = \varrho$, $\sigma' = 0$ et i garde sa signification, de sorte que finalement, on a l'ensemble de formules suivantes, en remplaçant θ , et ψ par j et f :

$$\begin{cases} \cos j \sin f = \cos i \cos \delta \sin (\alpha - \varrho) + \sin i \sin \delta, \\ \cos j \cos f = \cos \delta \cos (\alpha - \varrho), \\ \sin j = \cos i \sin \delta - \sin i \cos \delta \sin (\alpha - \varrho), \\ \cos j \sin \delta = \sin i \cos (\alpha - \varrho), \\ \cos j \cos \delta = \sin i \sin \delta \sin (\alpha - \varrho) + \cos i \cos \delta, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho \sin (\chi - \delta) = -k \frac{r''}{r} \sin (l - f), \\ \rho \cos (\chi - \delta) = -k \frac{r''}{r} \sin j \cos (l - f), \\ k = 1 - \frac{r''}{r} \cos j \cos (l - f). \end{cases}$$

On emploierait de la même façon les coordonnées écliptiques.

Les quantités j , f , S varient beaucoup plus lentement que l ; on peut donc, au moins pendant un certain temps, les regarder comme constantes, et ne faire attention qu'à la variation de l . Les dernières formules écrites montrent alors que le Satellite semble décrire autour de la planète une petite ellipse de demi-axes $\frac{x''}{r}$ et $\frac{r''}{r}$ sur j .

Le satellite est à l'élongation, c'est-à-dire que sa distance à la planète est maxima, pour $l = f \pm \frac{\pi}{2}$, du moins en négligeant la variation de x'' .

Satellites de Jupiter. — Les Satellites de Jupiter ont des orbites très peu inclinées sur l'écliptique et l'orbite de Jupiter est elle-même dans ce cas. On voit donc en prenant des coordonnées écliptiques comme coordonnées fondamentales, que j est petit et que l'angle de position x reste par suite voisin de $\pm \frac{\pi}{2}$; les Satellites de Jupiter paraissent décrire une même ligne droite passant par le centre de la planète, au moins d'une façon approchée.

Anneau de Saturne. — Un bord de l'anneau de Saturne peut être regardé comme l'orbite circulaire d'un Satellite; l'apparence de l'anneau de Saturne est donc celle d'une ellipse dont les éléments sont faciles à calculer par les formules précédentes.

Toutefois, il faut ajouter que l'anneau de Saturne recevant sa lumière du Soleil, n'est pas toujours visible, car une seule de ses faces est éclairée. Pour qu'il soit visible, il faut et il suffit évidemment que la hauteur de la Terre et celle du Soleil au-dessus du plan de l'anneau soient de même signe. Or f et j sont les coordonnées angulaires de la direction TS par rapport aux axes Sx'' , Sy'' , Sz'' dont les deux premiers déterminent le plan de l'anneau; donc r et j est la hauteur de la Terre au-dessus du plan de l'anneau. On peut calculer de la même façon la hauteur du Soleil en remplaçant la Terre par le Soleil, et par suite, on sera toujours à même de déterminer si l'anneau est visible ou non.

Mais nous n'insisterons pas davantage sur ces questions, qui exigeraient de longs détails pour être traitées complètement.

Taches du Soleil. - La théorie précédente permet encore d'étudier avec la plus grande facilité le mouvement apparent d'un point de la surface d'un astre, par exemple des taches du Soleil, en faisant abstraction de leur mouvement propre, dont l'étude n'a pas sa place ici.

Le Soleil tourne sur lui-même dans le sens direct d'un mouvement uniforme autour d'un axe de direction fixe; la durée de sa rotation est de $25^d 4^h 29^m$; l'équateur solaire est incliné de $6^{\circ} 58'$ sur le plan de l'écliptique, et la longitude du nœud ascendant est $74^{\circ} 36'$ pour l'équinoxe 1866, 5, d'après Spœker.

Une tache sera définie par sa longitude ψ'' et sa latitude θ'' par rapport à l'équateur, la longitude étant comptée à partir du nœud ascendant sur l'écliptique; par suite ψ'' variera proportionnellement au temps, augmentant de 2π en $25^d 4^h 29^m$, tandis que θ'' restera fixe.

Pretons pour plan fondamental l'écliptique, et appelons i et \mathcal{D} l'inclinaison et la longitude du nœud ascendant de l'équateur solaire, précédemment indiquées. λ sera la longitude du Soleil, tandis que sa latitude est nulle. Par suite les formules (1) donnent en remplaçant θ , et ψ , par j et f :

$$\begin{cases} \cos j \sin f = \cos i \sin (\lambda - \mathcal{D}), & \cos j \sin S = \sin i \cos (\lambda - \mathcal{D}), \\ \cos j \cos f = \cos (\lambda - \mathcal{D}), & \cos j \cos S = \cos i, \\ \sin j = -\sin i \sin (\lambda - \mathcal{D}). \end{cases}$$

Quant aux formules (2), elles donnent, en faisant $h=1$ et $\frac{r''}{r} = h$ (cette quantité est sensiblement constante, et r égale au demi-diamètre apparent du Soleil):

$$\begin{cases} \rho \sin (\chi - S) = -h \sin (\psi'' - f) \cos \theta'', \\ \rho \cos (\chi - S) = -h [\sin j \cos (\psi'' - f) \cos \theta'' - \cos j \sin \theta'']. \end{cases}$$

L'angle i est petit; en négligeant son carré, on a

$$S = i \cos (\lambda - \mathcal{D}), \quad j = -i \sin (\lambda - \mathcal{D}), \quad f = \lambda - \mathcal{D},$$

et par suite

$$\begin{cases} \rho \sin (\chi - S) = -h \cos \theta'' \sin (\psi'' - \lambda + \mathcal{D}), \\ \rho \cos (\chi - S) = h \sin \theta'' + h i \cos \theta'' \sin (\lambda - \mathcal{D}) \cos (\psi'' - \lambda + \mathcal{D}); \end{cases}$$

avec une approximation déjà grande.

La longitude du Soleil est égale à la Valeur de \mathcal{D} au commencement de Juin. Par suite on voit par les formules précédentes : 1° que l'angle S est petit et varie de i à $-i$ de Juin à décembre, de $-i$ à i de Décembre à Juin; 2° que pour $\psi'' = \lambda - \mathcal{D} + \frac{\pi}{2}$ ou $\psi'' = \lambda - \mathcal{D} + \frac{3\pi}{2}$, on a $\rho = h$, et $\chi - S = \theta'' - \pi/2$ ou $\chi - S = \pi/2 - \theta''$;

3° que pour $\psi'' = \lambda - \mathcal{D} + \pi$, on peut prendre $\chi = S$ et $\rho = h \sin \theta'' - h i \cos \theta'' \sin (\lambda - \mathcal{D})$, en n'acquiesçant pas ρ à être positif, ainsi qu'il est légitime.

Si maintenant on observe que les taches paraissent au bord oriental pour disparaître au bord occidental, il en résulte que pendant le temps d'apparition d'une tache ψ'' varie de $\lambda - \mathcal{D} + \frac{\pi}{2}$ à $\lambda - \mathcal{D} + \frac{3\pi}{2}$. Si on négligeait i , la trajectoire apparente de la tache serait une corde perpendiculaire à la direction définie par l'angle S ; mais si on tient compte de i , on voit que cette trajectoire est légèrement incurvée vers le Sud de Juin à Décembre, et vers le Nord de Décembre à Juin: en effet, pour $\psi'' = \lambda - \mathcal{D} + \pi$, la valeur de ρ est plus petite dans le premier cas, plus grande dans le second, que la valeur $h \sin \theta''$ qui correspond à l'hypoténuse de $i = 0$.

Enfin, on voit que la période du mouvement apparent des taches est celle de l'argument $\psi'' - \lambda + \mathcal{D}$, c'est-à-dire 27 $\frac{1}{3}$ environ.

Remarquons en terminant que la même méthode s'appliquerait à l'étude du mouvement apparent des points de la surface de la Lune: sans qu'il soit nécessaire de développer les formules, on voit bien qu'à cause des conditions spéciales du mouvement de la Lune sur elle-même, un point fixe de la surface lunaire paraîtra s'écarter d'une position moyenne d'une quantité fort petite correspondant à la libration déjà étudiée.

Chapitre XV

Chapitre XV

Éclipses

Classification des éclipses. — Un astre quelconque est éclipsé partiellement ou totalement — pour un observateur déterminé, lorsqu'il cesse d'être visible partiellement ou totalement pour cet observateur, alors qu'il devrait l'être dans les conditions normales.

Ce phénomène peut se produire de deux façons absolument distinctes : 1° l'astre, n'étant pas lumineux par lui-même, cesse d'être visible parce qu'il cesse d'être éclairé ; 2° l'astre cesse d'éclairer, parce qu'entre lui et l'observateur s'interpose un corps, qui peut d'ailleurs être obscur ou brillant. Les éclipses de la première catégorie sont indépendantes de la position de l'observateur, et sont visibles de tous les points pour lesquels l'astre est au-dessus de l'horizon ; tout au contraire, les circonstances d'une éclipse de la seconde catégorie peuvent subir de profondes modifications suivant la position de l'observateur à la surface de la Terre.

Dans la première catégorie, il faut distinguer spécialement les éclipses de Lune et les éclipses des Satellites de Jupiter : dans un cas comme dans l'autre, la Lune ou le Satellite cesse d'être éclairé en pénétrant dans l'ombre projetée par la Terre ou Jupiter.

Dans la seconde catégorie rentrent les éclipses de Soleil, les passages d'une planète inférieure, Mercure ou Vénus, sur le disque du Soleil, les occultations d'étoiles (ou de planètes) par la Lune ou par les planètes.

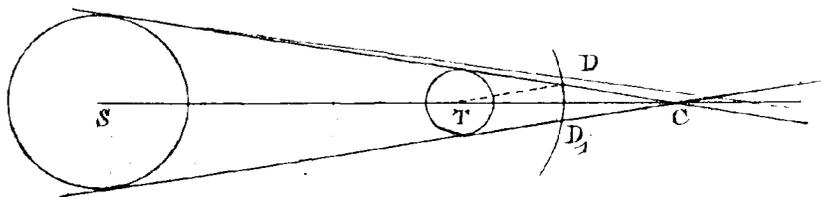
On peut encore rattacher à cette catégorie les phénomènes intéressants qui se produisent dans le système de Jupiter (ou d'une autre planète) : occultation d'un satellite par la planète, passage d'un satellite sur le disque de la planète, passage de l'ombre projetée par un satellite sur le disque de la planète.

Dans ce qui suit, nous n'étudierons que les éclipses de Lune et de Soleil (indépendamment de ce

phénomènes physiques qui les accompagnent), les occultations d'étoiles par la Lune et les passages de Mercure et de Vénus sur le disque du Soleil : ce sont les phénomènes les plus intéressants, en dehors de ceux du système de Jupiter, dont on ne peut guère parler sans faire appel à la Mécanique Céleste.

Eclipses de Lune. — Dans cette théorie, nous regarderons le Soleil, la Terre et la Lune comme sphériques, p et p' seront les demi-diamètres apparents géocentriques à un instant donné de la Lune et du Soleil, ω et ω' seront leurs parallaxes horizontales, non pas équatoriales, mais relatives à la latitude de 45° , de façon qu'elles correspondent à une valeur moyenne du rayon de la Terre. Pour obtenir ω et ω' , il suffit d'ailleurs de multiplier les parallaxes horizontales équatoriales ω_0 et ω'_0 par le rayon de la Terre à la latitude de 45° (le rayon équatorial a étant pris pour unité); le logarithme de ce facteur est $T. 99926$, d'après le chapitre II, et son influence sur ω' est négligeable. Remarquons de plus que l'on devra avoir soin de prendre pour p et p' les demi-diamètres apparents corrigés de l'irradiation, ainsi que nous l'avons indiqué au chapitre précédent.

Ceci posé considérons la Terre T éclairée par le Soleil S , et appelons d la distance des centres, p et p' les rayons linéaires de la Terre et du Soleil. L'ombre projetée par la Terre est limitée par un cône de révolution, de sommet C , circonscrit extérieurement



à la Terre et au Soleil, et tout point situé dans la partie de ce cône comprise entre la Terre et le sommet C ne reçoit aucun rayon du Soleil. C'est précisément dans cette région que peut pénétrer la Lune, et non au-delà du sommet C : on a en effet

$$TC = \frac{\rho d}{\rho' - \rho} = \frac{\rho}{\sin \rho' - \sin \omega'}$$

et cette valeur dépasse de beaucoup la distance maxima de la Terre à la Lune

On décrit alors de T comme centre une sphère ayant pour rayon la distance π de la Terre à la Lune, et cherchons le demi-diamètre apparent géocentrique, S , de la portion de cette sphère DD_1 , contenue dans le cône d'ombre, c'est-à-dire l'angle CTD . Si f est le demi-angle au sommet du cône d'ombre, on a immédiatement

$$S = \omega - f,$$

car l'angle extérieur D du triangle CTD est égal à ω .

D'autre part, la construction connue de la tangente commune extérieure à deux cercles donne.

$$\sin f = \frac{\rho' - \rho}{d} = \sin \rho' - \sin \omega';$$

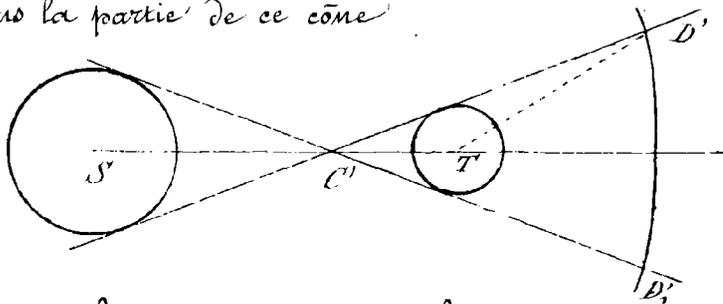
on peut écrire alors avec une approximation très suffisante

$$f = \rho' - \omega',$$

et par suite

$$S = \omega + \omega' - \rho'.$$

On peut envisager de même la pénombre projetée par la Terre, et limitée par le cône de sommet C' , circonscrit intérieurement à la Terre et au Soleil; tout point placé dans la partie de ce cône



située derrière la Terre, et non dans le cône C , ne sera éclairée que partiellement par le Soleil.

Le demi-diamètre apparent géocentrique S' de la portion $D'D_1$ de la sphère déjà considérée de rayon π contenue dans le cône de pénombre est égal ici à $\omega + \omega' + \rho'$.

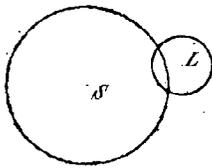
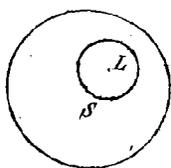
Dans ce qui précède, nous n'avons pas tenu compte

de l'influence de la réfraction des rayons solaires à travers l'atmosphère qui entoure la Terre : il est facile de voir que cette influence a pour effet de raccourcir considérablement le cône d'ombre, de sorte qu'en réalité, un point de la Lune qui est géométriquement éclipsé continue à être partiellement éclairé par le Soleil : il voit par réfraction à travers l'atmosphère terrestre une partie du Soleil. Il s'en suit que la Lune est encore visible quand elle est éclipsée : mais les rayons qui l'éclairent sont éteints en grande partie par la transparence incomplète des couches plus ou moins humides de l'air, qui absorbent surtout la nuance complémentaire du rouge ; aussi la lune apparaît-elle faiblement colorée en rouge dans les éclipses totales.

D'autre part, les basses couches de l'atmosphère éteignent complètement les rayons qui les traversent ; il en résulte que, pour mettre d'accord les observations avec la théorie, il faut augmenter légèrement les diamètres apparents β et β' : c'est ce qu'on fait en multipliant ces quantités par le facteur $1 + \frac{1}{50,8}$; les valeurs de S et de S' qui nous serviront par conséquent ainsi corrigées.

Enfin, il résulte de ces remarques qu'on ne peut observer les circonstances d'une éclipse de Lune avec une extrême précision, et qu'il est par suite illusoire de chercher une telle précision dans la prédiction de ces circonstances.

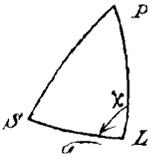
Si l'on considère la sphère céleste de centre T , l'étude des circonstances d'une éclipse de Lune revient simplement à l'étude de la position relative du disque apparent de la Lune L , et du disque invisible, mais dont nous avons déterminé les dimensions apparentes, déterminé dans le cône



d'ombre ou de pénombre par la sphère de centre T et de rayon r . En laissant de côté la pénombre qui se traiterait d'ailleurs de même,

et en appelant σ la distance angulaire du point L et du point S centre du disque d'ombre, il y a éclipse totale à un instant donné si l'on a $\sigma < S - \rho$; éclipse partielle si l'on a

$$S - \rho < \sigma < S + \rho.$$



Prends alors un système de coordonnées quelconques, équatoriales ou écliptiques, soit P le pôle du système et considérons le triangle sphérique PLS , où $LS = \sigma$, et où l'angle en L sera χ , de façon que χ soit l'angle de position de S par rapport à L , tel que nous l'avons toujours compté, de LP vers LS dans le sens direct; appelons ψ, θ ; les coordonnées géocentriques de la Lune, ψ', θ' celles du Soleil; les coordonnées de S seront $\pi + \psi', -\theta'$, et l'on aura:

$$\begin{cases} x = \sin \sigma \sin \chi = \cos \theta' \sin (\psi' - \psi), \\ y = \sin \sigma \cos \chi = -\cos \theta' \sin \theta' + \sin \theta' \cos \theta' \cos (\psi' - \psi) \\ \quad = -\sin (\theta + \theta') + 2 \sin \theta \cos \theta' \cos^2 \frac{\psi' - \psi}{2}. \end{cases}$$

Observons maintenant qu'une éclipse de Lune ne peut arriver que dans les environs d'une opposition, et prenons pour origine du temps t , un instant voisin de cette opposition. Pendant quelques heures avant et après cet instant, on peut regarder x et y comme variant d'une façon uniforme, et par suite les mettre sous la forme

$$\begin{cases} x = x_0 + x'_0 t, \\ y = y_0 + y'_0 t. \end{cases}$$

On calculera x_0, y_0 en calculant x et y pour l'origine du temps; quant à x'_0 et y'_0 on peut les obtenir d'une façon assez précise en procédant ainsi: considérons les deux époques t' et $-t'$ (t' sera par exemple 3 heures), et calculons les valeurs x_1, y_1, x_2, y_2 , de x, y pour ces deux époques; en appelant $x''_0, x'''_0, \dots, y''_0, y'''_0, \dots$ les dérivées successives de x, y pour l'époque 0, on a, d'après la formule de Taylor:

$$x_1 = x_0 + x'_0 t' + \frac{1}{2} x''_0 t'^2 + \dots,$$

$$x_2 = x_0 - x'_0 t' + \frac{1}{2} x''_0 t'^2 + \dots,$$

et par suite, en ne négligeant que des termes du troisième ordre,

$$x'_0 = \frac{x_1 - x_2}{2t'};$$

de la même façon

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_2}{2t'}$$

En faisant

$$\begin{cases} x_0 = m \sin M, & x'_0 = n \sin N, \\ y_0 = m \cos M, & y'_0 = n \cos N, \end{cases}$$

tout est ramené maintenant aux deux équations suivantes, que nous rencontrerons plus d'une fois dans la suite:

$$\begin{cases} \sin \sigma \sin \chi = m \sin M + n \sin N \cdot t, \\ \sin \sigma \cos \chi = m \cos M + n \cos N \cdot t. \end{cases}$$

Si χ et t y sont les inconnues, on a par des combinaisons évidentes:

$$\begin{cases} \sin(\chi - N) = \frac{m \sin(M - N)}{\sin \sigma} \\ t = -\frac{m}{n} \cos(M - N) + \frac{\sin \sigma \cos(\chi - N)}{n} \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{m}{n} \frac{\sin(M - \chi)}{\sin(\chi - N)}; \end{cases}$$

on a ainsi deux solutions, car l'angle $\chi - N$ a deux valeurs supplémentaires, la moyenne arithmétique des deux valeurs de t est d'ailleurs $-\frac{m}{n} \cos(M - N)$.

Les quantités S et s restent péniblement constantes pendant la durée de l'éclipse; on les calculera donc pour l'époque 0, et en faisant successivement $\sigma = S + s$ ou $\sigma = S - s$, on aura immédiatement le commencement et la fin de l'éclipse partielle ou de l'éclipse totale. Le milieu de l'éclipse correspond à l'époque $t = -\frac{m}{n} \cos(M - N)$; c'est le moment de la plus grande phaseⁿ, et du minimum de la distance σ , minimum déterminé par la relation

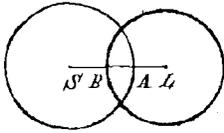
$$\sin \sigma = |m \sin(M - N)|,$$

puisque alors $\cos(\chi - N) = 0$.

L'angle χ , au moment du commencement ou de la fin de l'éclipse partielle ou totale, a une signification géométrique simple; à l'un de ces moments la Lune et le disque d'ombre sont tangents, et l'angle χ est

l'angle de position du point de contact par rapport au centre de la Lune.

À un instant donné, la distance LS étant σ , et l'éclipse étant partielle, la grandeur de l'éclipse est le rapport de la partie éclipsée AB du diamètre de la Lune dirigée suivant SL au diamètre total de la Lune; c'est à-dire



$$g = \frac{S + \rho - \sigma}{2\rho};$$

on conserve cette expression pour définir la grandeur de l'éclipse à un instant quelconque, et la grandeur proprement dite de l'éclipse est celle qui correspond au minimum de la distance σ .

Supposons que l'on emploie les coordonnées écliptiques $\lambda, \beta, \lambda', \beta'$; on peut faire $\beta' = 0$, de sorte que

$$x = \sin(\lambda' - \lambda), \quad y = \sin \beta \cos(\lambda' - \lambda);$$

prenons encore comme origine du temps le moment même de l'opposition en longitude; et posons β_0 la latitude de la Lune à ce moment; on a

$$x_0 = 0, \quad y_0 = -\sin \beta_0,$$

et par suite

$$M = 0 \quad m = -\sin \beta_0.$$

En marquant par l'indice 0 les dérivées relatives à l'origine du temps, on a aussi immédiatement:

$$x'_0 = \left[\frac{d(\lambda - \lambda')}{dt} \right]_0, \quad y'_0 = -\cos \beta_0 \left[\frac{d\beta}{dt} \right]_0.$$

Si d'ailleurs i et \mathcal{D} sont l'inclinaison et la longitude du nœud ascendant de l'orbite de la Lune, on a

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} i \sin(\lambda - \mathcal{D}),$$

d'où en négligeant les variations de i et de \mathcal{D} .

$$\sec^2 \beta_0 \left[\frac{d\beta}{dt} \right]_0 = \operatorname{tg} i \cos(\lambda_0 - \mathcal{D}) \left[\frac{d\lambda}{dt} \right]_0;$$

en remarquant que β_0 est toujours très petit, et que $\lambda_0 - \mathcal{D}$ est voisin aussi de 0 ou de π , on a suivant les cas, d'une façon approchée,

$$y'_0 = \mp \operatorname{tgi} \left[\frac{d\lambda}{dt} \right]_0,$$

et par suite

$$\operatorname{cotg} N = \mp \operatorname{tgi} \left[\frac{d\lambda}{d(\lambda - \lambda')} \right]_0.$$

Le minimum de la distance σ a alors pour valeur $|m \sin N|$ ou $|\sin \beta_0 \sin N|$; en comparant ce minimum facile à calculer, à $S + \rho$ et $S - \rho$, on verra tout de suite si l'éclipse a lieu et si elle est partielle ou totale; mais, en général, pour calculer les circonstances de l'éclipse, on emploie les coordonnées équatoriales, fournies plus facilement par les éphémérides.

Les lieux terrestres qui voient à un instant donné une éclipse de Lune sont ceux pour lesquels la Lune est au-dessous de l'horizon: on les détermine donc immédiatement.

Eclipses de Soleil. — Les éclipses de Soleil, les occultations

d'étoiles par la Lune, les passages de Mercure et Vénus sur le Soleil sont des phénomènes tous de même nature; pour passer des éclipses de Soleil aux occultations, il suffit de remplacer le Soleil par une étoile; pour passer des éclipses de Soleil aux passages, il faut remplacer la Lune par la planète.

Ces phénomènes peuvent être observés avec une très grande précision; leur théorie doit donc être faite d'une façon rigoureuse; assez complexe dans le cas des éclipses et des occultations, à cause de la grandeur de la parallaxe lunaire, elle se simplifie notablement dans le cas des passages, et l'on a avantage à traiter directement ce cas, sans le rattacher à la théorie générale.

Occupons-nous d'abord des éclipses de Soleil. Nous supposons la Lune et le Soleil rigoureusement sphériques, de centres SL et S , leurs rayons linéaires étant R et R' ; l'unité de longueur sera d'ailleurs toujours le rayon équatorial terrestre. A l'instant t les demi-diamètres apparents géocentriques et les parallaxes horizontales équatoriales de la Lune et du Soleil seront respectivement β, β' , α, α' ; de sorte que si π et π' sont les distances géocentriques de la Lune et du Soleil, on a les relations:

$$\kappa = \frac{1}{\sin \varpi} = \frac{R}{\sin \rho} \quad , \quad \kappa' = \frac{1}{\sin \varpi'} = \frac{R'}{\sin \rho'}$$

Toujours à l'instant t , l'ascension droite et la déclinaison géocentriques apparentes de la Lune et du Soleil seront $\alpha, \delta, \alpha', \delta'$; rien ne sera plus simple d'ailleurs que de substituer les coordonnées écliptiques aux coordonnées équatoriales.

Un lieu M de la Terre, où l'on suppose l'observateur, sera défini par ses coordonnées géographiques. Sa longitude L sera comptée, à partir du méridien originel, positivement vers l'Ouest, comme toujours; au lieu de la latitude φ , on même de la latitude géocentrique φ' , il sera préférable d'employer l'angle auxiliaire ψ , qui nous a déjà servi au Chapitre II, et tel que l'on ait

$$(2) \quad \operatorname{tg} \psi = (1 - \alpha) \operatorname{tg} \varphi,$$

et désignant l'aplatissement (sans confusion possible avec le ρ déjà donné à cette lettre.) Si alors h désigne l'altitude de M , on sait que les coordonnées de M rapportées aux axes de la section méridienne correspondante sont avec une exactitude plus que suffisante :

$$(1+h) \cos \psi, \quad (1+h) (1-\alpha) \sin \psi.$$

Il faut observer maintenant que ce qui nous importe, ce sont les apparences que présentent l'un par rapport à l'autre le Soleil et la Lune, au point M , il faut donc tenir compte de la réfraction. Or après ce qui a été dit au Chapitre VI (page 73), on voit que ces apparences seront les mêmes que celles que l'on observerait en un certain point M' en ne tenant compte de la réfraction; ce point M' est sur la verticale de M et a pour altitude $h+h'$, h' ayant pour valeur

$$\frac{n_0 \sin \zeta_0}{\sin \zeta_1} - 1,$$

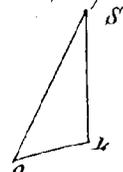
en conservant les notations du passage rappelé.

Si par exemple pour préciser, la Lune et le Soleil paraissent en contact en M , en vertu de la réfraction

ils paraissent aussi en contact en M' , abstraction faite de la réfraction ; et pour calculer h' , on remarquera que n_0 est l'indice de l'air en M , que ζ_1 est la distance zénithale vraie du point de contact de la Lune et du Soleil, vu de M' , enfin que ζ_0 est la distance zénithale apparente de ce même point de contact vu de M , et par suite est égale à $\zeta_1 - R$, où R désigne la réfraction astronomique relative à ζ_0 .

En conséquence et afin de pouvoir faire abstraction dans ce qui suit de la réfraction, on substitue M' à M , ce qui revient à supposer h augmentée de h' . Nous conserverons donc les expressions déjà données des coordonnées de M , mais h se composera de deux parties, la vraie altitude de M (nulle pour un point de l'ellipsoïde terrestre) d'une part, et d'autre part l'altitude fictive h' d'ailleurs négligeable, sauf dans le voisinage de l'horizon.

Pour pouvoir étudier plus facilement la position relative de la Lune et du Soleil, vu du point M , il convient de choisir des axes de coordonnées particuliers, variables d'ailleurs avec l'époque t . L'origine de ces axes sera le centre O de la Terre ; l'axe Oz sera parallèle à la direction LS , qui joint les centres de la Lune et du Soleil ; si maintenant OP est la direction de l'axe du monde, l'axe Oy sera dans le plan OPz , du côté du Nord, c'est-à-dire faisant avec OP un angle aigu ; enfin l'axe Ox déterminera avec Oz et Oy un trièdre trirectangle de sens direct.



Déterminons d'abord l'ascension droite a et la déclinaison d de la direction Oz ou LS ; en appelant q la distance LS , la projection du contour OLS donne :

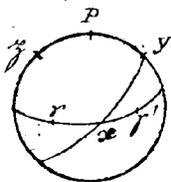
$$\begin{aligned} q \cos a \cos d &= r' \cos \alpha' \cos \delta' - r \cos \alpha \cos \delta, \\ q \sin a \cos d &= r' \sin \alpha' \cos \delta' - r \sin \alpha \cos \delta, \\ q \sin d &= r' \sin \delta' - r \sin \delta ; \end{aligned}$$

ce sont les formules des problèmes de parallaxe ; par suite, on peut écrire facilement les formules rigoureuses correspondantes, en faisant le changement de notations nécessaire. Mais le rapport $\frac{r}{r'}$ est petit ($\frac{1}{400}$ environ), de plus aux environs d'une éclipse, les différences $\alpha - \alpha'$ et $\delta - \delta'$ sont nécessairement petites ; les formules différentielles

(13) Du Chapitre IV, donnent alors avec une exactitude très suffisante, après quelques nouvelles simplifications évidentes :

$$(3) \begin{cases} a = \alpha' - \frac{\pi}{\pi'} (\alpha - \alpha'), \\ d = \delta' - \frac{\pi}{\pi'} (\delta - \delta'), \\ q = \pi' - \pi. \end{cases}$$

Considérons maintenant les éléments qui définissent la position du système d'axes $Ox y z$ par rapport au système $Ox' y' z'$, γ étant l'équinoxe, P le pôle, γ' le point à 90° de γ dans l'équateur. En les appelant i, σ, σ' , comme au Chapitre IV, on a d'après la figure :



$$i = \frac{\pi}{2} - d, \quad \sigma = \frac{\pi}{2} + a, \quad \sigma' = 0.$$

Si alors x, y, z sont les coordonnées de L par rapport aux axes $Ox y z$, on a par les formules (1) du Chapitre IV :

$$(4) \begin{cases} x = \pi \cos \delta \sin (\alpha - a), \\ y = \pi [\cos d \sin \delta - \sin d \cos \delta \cos (\alpha - a)], \\ z = \pi [\sin d \sin \delta + \cos d \cos \delta \cos (\alpha - a)]. \end{cases}$$

Les coordonnées de S seront $x, y, z' = z + q$.

Enfin, cherchons les coordonnées du lieu d'observation M , point ξ, η, ζ , par rapport aux mêmes axes; si θ est le temps sidéral sur le méridien origine, l'ascension droite de M est $\theta - L$; introduisons au lieu de θ l'angle horaire H de la direction Oz ou $L S$ pour le méridien origine; on a $\theta = H + a$, et par suite l'ascension droite de M est $H + a - L$. Il vient donc immédiatement :

$$(5) \begin{cases} \xi = (1+h) \cos \psi \sin (H-L), \\ \eta = (1+h) [(1-\alpha) \cos d \sin \psi - \sin d \cos \psi \cos (H-L)], \\ \zeta = (1+h) [(1-\alpha) \sin d \sin \psi + \cos d \cos \psi \cos (H-L)], \end{cases}$$

car la déclinaison de la direction OM est la latitude géocentrique φ' , et si ρ est la distance OM , on a :

$$\rho \cos \varphi' = (1+h) \cos \psi, \quad \rho \sin \varphi' = (1+h)(1-\alpha) \sin \psi.$$

De même, φ étant la latitude vraie, on voit que les cosinus directeurs de la verticale vraie en M sont :

$$(6) \begin{cases} \lambda = \cos \varphi \sin (H-L), \\ \mu = \cos d \sin \varphi - \sin d \cos \varphi \cos (H-L), \\ \nu = \sin d \sin \varphi + \cos d \cos \varphi \cos (H-L). \end{cases}$$

Envisageons actuellement les disques du Soleil et de la Lune, tels qu'on les voit du point M projetés sur la sphère céleste, du centre L et S. On doit distinguer quatre dispositions distinctes :

- La Lune et le Soleil sont extérieurs : il n'y a pas éclipse,
- la Lune et le Soleil sont sécants ; il y a éclipse partielle ;
- le Soleil est intérieur à la Lune ; il y a éclipse totale ;
- la Lune est intérieure au Soleil ; il y a éclipse annulaire.

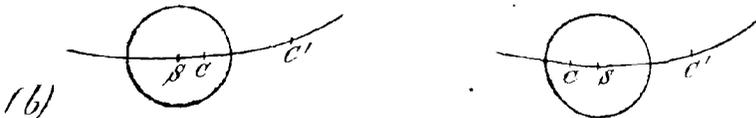
On désigne par σ et σ' les demi-diamètres apparents des deux astres, vus de M, par α la distance angulaire de leurs centres.

Soit C un des points du bord de la Lune situés sur la ligne des centres LS ; décrivons de S comme centre un cercle passant par C, et posons $k\sigma'$ son demi-diamètre apparent, que nous prendrons positif ou négatif suivant que ce cercle est tangent extérieurement ou intérieurement à la Lune. Le nombre k a deux valeurs, qui fixent complètement les apparences de la Lune et du Soleil vus de M.

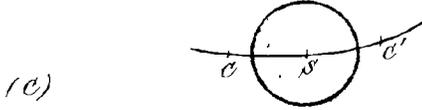
Dans le cas (a), l'une de ces valeurs est ≥ 1 , l'autre ≤ -1 ;



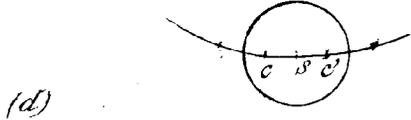
dans le cas (b), l'une de ces valeurs est comprise entre 1 et -1, l'autre est ≤ -1 ;



dans le cas (c), ces deux valeurs sont ± 1 ;



dans le cas (d), ces deux valeurs sont comprises entre ± 1 , l'une d'elles étant nécessairement négative.



Enfin, ajoutons que, si les deux valeurs de k coïncident, les points L et S sont confondus : l'éclipse est alors centrale.

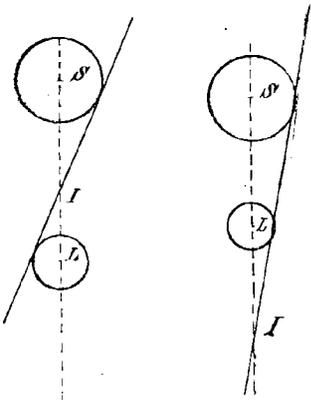
Cherchons l'équation qui détermine les nombres k . Considérons $k\sigma$ comme le demi-diamètre apparent d'une sphère concentrique au Soleil, dont le rayon linéaire serait kR : cette hypothèse est légitime à cause de la petitesse de σ ; et d'ailleurs elle est rigoureuse dans les cas limites, qui sont aussi les plus intéressants, c'est-à-dire lorsque la Lune et le Soleil paraissent en contact.

Il est clair alors que du point M on voit la Lune tangente au Soleil fictif que nous venons de définir, extérieurement ou intérieurement suivant que k est positif ou négatif. En d'autres termes, le point M appartient au cône circonscrit intérieurement ou extérieurement à ce Soleil fictif et à la Lune suivant que k est positif.

Cherchons l'équation de ce cône par rapport aux axes $Oxyz$; en écrivant que cette équation est

vérifiée par les coordonnées ξ, η, ζ de M , nous aurons la relation cherchée. Représentons la section de la figure par le plan MLS , en distinguant les deux cas qui correspondent à k positif ou négatif. La cote du sommet I du cône est toujours égale à

$$\zeta + \frac{Rq}{R + kR} ;$$



Si f désigne le demi-angle au sommet, on peut toujours écrire aussi, d'après la construction de la tangente commune à deux cercles,

$$(7) \quad \sin f = \frac{R + k R'}{g},$$

en conservant, ce qui est permis, de prendre f , positif ou négatif, suivant que le second membre est positif ou négatif.

L'équation cherchée est alors, comme on peut,

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \operatorname{tg}^2 f \left(\xi - \zeta + \frac{Rg}{R + k R'} \right)^2.$$

En se servant de la valeur de $\sin f$, et posant

$$(8) \quad u = \xi \operatorname{tg} f + R \sec f.$$

$$(9) \quad l = u - \zeta \operatorname{tg} f,$$

on écrit la relation fondamentale précédente sous la forme

$$(10) \quad (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = l^2.$$

En éliminant f, u, l , entre les équations (7), (8), (9) (10), on obtient bien une équation du second degré en k .

Pour vérifier l'équation (10) on peut en outre introduire une nouvelle variable Q et poser

$$(11) \quad x - \xi = l \sin Q, \quad y - \eta = l \cos Q.$$

Si C est le point de contact de la Lune et du Soleil fictif qui correspond à la racine k , la direction MC coïncide avec la direction MI ou bien avec la direction opposée suivant que la côte du point I est supérieure ou inférieure à celle de M , c'est-à-dire que $\frac{l}{\operatorname{tg} f}$ est positif ou négatif; d'ailleurs les cosinus directeurs de MI sont évidemment $\pm \sin Q \sin f, \pm \sin Q \cos f, \pm \cos f$ suivant que $\frac{l}{\sin f}$ est positif ou négatif; donc $\cos f$ étant toujours positif, les cosinus directeurs de la direction MC sont toujours

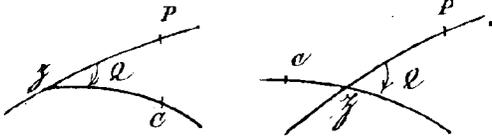
$$\sin f \sin Q, \sin f \cos Q, \cos f.$$

Si ξ_1 désigne alors la distance zénithale vraie de

La direction MC , distance qui nous est nécessaire pour tenir compte de la réfraction dans l'observation de cette direction, on a :

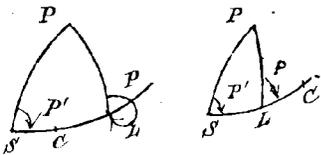
$$(12) \quad \cos \xi_1 = \sin f (\lambda \sin Q + \mu \cos Q) + \nu \cos f.$$

La signification physique de l'angle Q est facile à trouver ; l'angle



de position du point C par rapport au point ξ , et relatif au pôle P , compté dans le sens rétrograde

(celui des coordonnées horaires) de ξ P vers ξ C , est évidemment égal à Q ou à $\pi + Q$ suivant que f est positif ou négatif. Si l'on remarque alors que le point S est toujours extrêmement voisin de ξ , on peut dire, avec une approximation suffisante que, si h n'est pas très voisin de zéro, l'angle de position P' du point C par rapport au centre du Soleil, compté dans le sens des coordonnées horaires, a pour valeur Q ou $\pi + Q$ suivant que f est positif ou négatif. La connaissance de cet angle est importante, surtout pour la pratique de l'observation des contacts extérieurs. On peut ajouter, la Lune et le Soleil étant très voisins, que l'angle de position P du point C par rapport au centre de la Lune, compté dans le même sens, est lui-même égal, d'une façon approchée, à $\pi + P'$ ou P' suivant que h est positif ou négatif, puisque dans le premier cas C est entre L et S , dans le second C est en dehors de L S ; finalement P est égal à $\pi + Q$ ou à Q suivant que h f est positif ou négatif.



Rendons-nous compte de la grandeur des quantités f, u, l . La distance q étant très voisine de r' , on a sensiblement

$$\sin f = \frac{\omega'}{\omega} \rho + h \rho';$$

donc, h ne dépassant guère 1 en valeur absolue, puisque ρ et ρ' sont toujours voisins, f est assez petit pour qu'on puisse faire $\sin f = \tan f = f$, $\cos f = 1$.

Affectons alors de l'indice 1 ou 2 les quantités f, u, l , suivant qu'elles se rapportent à l'hypothèse $h = 1$ ou $h = -1$; f, u, l seront des fonctions linéaires de

k , et l'on pourra écrire.

$$f = \frac{f_1 + f_2}{2} + \frac{f_1 - f_2}{2} k, \quad u = \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_1 - u_2}{2} k,$$

$$l = \frac{l_1 + l_2}{2} + \frac{l_1 - l_2}{2} k.$$

Comme on le voit f_1 est voisin de ρ' , f_2 est voisin de $-\rho'$ et f de $k\rho'$.

Remarquons que ξ est voisin de π ou bien $\frac{R}{\rho}$; u_1 est donc égal d'une façon approchée à

$$R \left(1 + \frac{\delta'}{\rho}\right) \text{ et } u_2 \text{ à } R \left(1 - \frac{\delta'}{\rho}\right),$$

de sorte que $u_1 + u_2$ est très probablement égal à $2R$. D'une façon moins approchée, mais suffisante pour se rendre compte des faits, on peut dire que u_1 est voisin de $2R$, u_2 voisin de zéro.

On peut répéter la même chose pour l_1 et l_2 qui ne diffèrent de u_1 et u_2 que par le changement de ξ en $\xi - \zeta$; en effet ζ est petit par rapport à ξ .

L'équation qui détermine les valeurs de k peut s'écrire d'après ce qui précède:

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \left(\frac{l_1 + l_2}{2} + \frac{l_1 - l_2}{2} k \right)^2,$$

appelons L la quantité positive $\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$; on en déduit

$$k \frac{l_1 - l_2}{2} = - \frac{l_1 + l_2}{2} \pm L,$$

et, puisque $l_1 - l_2$ est positif, la plus grande des deux valeurs de k , soit k_0 , correspond au signe + dans le second membre.

Faisons

$$(13) \quad g = \frac{1 - k_0}{2} = \frac{l_1 - L}{l_1 - l_2};$$

cette quantité g est la grandeur de l'éclipse au temps t pour le lieu M ; g caractérise la phase de l'éclipse.

Il est facile d'expliquer cette définition; l'éclipse étant supposée partielle, le seul point C situé sur le Soleil correspond à k_0 , et la partie éclipisée du diamètre du Soleil dirigé suivant SL a pour valeur

$\sigma'(1 - k_0)$: g est donc le rapport de cette partie au diamètre total du Soleil.

Lorsque le Soleil et la Lune sont tangents extérieurement et que C est leur point de contact, on a $k = 1$, d'où $L = l_1$; la grandeur est nulle. Si le Soleil et la Lune sont tangents intérieurement et que C soit leur point de contact, on a $k = -1$ et L est égal à la valeur absolue de l_2 ; si donc l_2 est positif, $k_0 = -1$, l'éclipse est totale, et $g = 1$, si au contraire l_2 est négatif, k_0 est > -1 , l'éclipse est annulaire, et la grandeur

$$g = \frac{l_1 + l_2}{l_1 - l_2} \text{ est } < 1.$$

Comme on a très pensiblement $l_1 + l_2 = 2R$, on peut, si l'on n'a pas besoin d'une grande précision dans le calcul de g , y remplacer l_2 par $2R - l_1$, d'où encore

$$(13 \text{ bis}) \quad g = \frac{l_1 - L}{2(l_1 - R)}.$$

La grandeur proprement dite de l'éclipse au point M est le maximum de g , quand le temps varie : elle correspond à la plus grande phase.

La grandeur de l'éclipse générale, est le maximum de g quand on fait varier à la fois le temps et le lieu.

On exprime encore quelquefois, suivant une ancienne habitude, la grandeur g en doigts, c'est-à-dire en douzièmes ; la phase est de cinq doigts, si

$$g = \frac{5}{12}.$$

Les différentes formules que nous venons d'établir renferment toute la théorie des éclipses de Soleil. Pour les utiliser, on calculera d'abord pour un certain nombre d'époques équidistantes, également réparties avant et après le moment de la conjonction de la Lune et du Soleil (car il ne peut y avoir éclipse qu'aux environs de ce moment), les valeurs de $x, y, H, d, f, l_1, l_2, u_1, u_2$. On pourra alors, par simple interpolation

avoir les valeurs de ces mêmes quantités, et aussi de leurs dérivées par rapport au temps, pour une époque quelconque; on remarquera d'ailleurs que ces quantités varient très sensiblement en raison directe du temps, que d varie beaucoup moins vite que x, y et H , et que f_1, f_2, u_1, u_2 sont presque constants.

Supposons alors qu'il s'agisse de déterminer avec précision les circonstances d'une éclipse en un lieu donné. Il faut donc déterminer l'époque exacte pour laquelle h a une valeur donnée: si l'agit des contacts extérieurs par exemple, c'est-à-dire du commencement ou de la fin de l'éclipse partielle, on fait $h = 1$: si l'agit des contacts intérieurs, c'est-à-dire du commencement ou de la fin de l'éclipse totale, ou annulaire, on fait $h = -1$. Il faut d'abord pour résoudre ce problème, savoir calculer ξ, η, ζ et leurs dérivées pour une époque donnée. Le calcul de ξ, η, ζ se fait par les formules (5), où l'on connaît H et d d'après ce qui précède: il reste à connaître h . L'observation portant sur le point de contact C qui correspond à h , h est une fonction de ζ , toujours petite, facile à réduire en table, et il suffit de prendre pour ζ , une valeur approchée. En remarquant que f est très petit, et que ν est très voisin de ζ , on prendra donc $\cos \zeta_1 = \zeta$.

Si l'on marque par un accent la dérivée par rapport au temps, les dérivées ξ', η', ζ' sont faciles à calculer d'après (5). Ce seront des fonctions linéaires de h', H', d' et l'on voit sans peine que l'on peut écrire:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi' = \frac{h'}{1+h} \xi + H' (-\eta \sin d + \zeta \cos d), \\ \eta' = \frac{h'}{1+h} \eta + H' \xi \sin d - d' \zeta, \\ \zeta' = \frac{h'}{1+h} \zeta - H' \xi \cos d + d' \eta. \end{array} \right.$$

H' et d' sont connus d'après ce qui a été dit; il reste donc à déterminer $\frac{h'}{1+h}$ ou $\frac{1}{1+h} \frac{dh}{d\zeta_1} \cdot \frac{d\zeta_1}{dt}$. Le

facteur $\frac{1}{1+h} \frac{dh}{d\zeta_1}$ est une fonction de ζ_1 facile à

réduire en table, et qu'on calculera avec la valeur approchée de ξ , indiquée plus haut, quant à $\frac{d\xi}{dt}$, c'est d'une façon suffisamment approchée $\frac{\xi'}{\sin \xi}$. Cette formule semble devenir illusoire si ξ est voisin de $\frac{\pi}{2}$; mais il ne faut pas oublier qu'il n'y a lieu de tenir compte de la réfraction que dans le voisinage de l'horizon.

Enfin, il est facile maintenant de calculer l pour une époque quelconque, et sa dérivée l' , toujours très petite. Ceci posé, prenons pour origine du temps un instant voisin de la conjonction de la Lune et du Soleil; pendant un certain temps avant et après cet instant, on peut considérer d'une façon approchée, x, y, ξ, η, l comme variant d'une façon uniforme, et par suite les mettre sous la forme:

$$x = x_0 + x'_0 t, \quad y = y_0 + y'_0 t, \dots \dots \dots$$

x_0, y_0, \dots pour les valeurs de x, y, \dots pour l'origine du temps; x'_0, y'_0, \dots sont les valeurs de x', y', \dots pour le même instant: toutes ces quantités sont donc faciles à calculer.

Posons $x_0 - \xi_0 = m \sin M, \quad y_0 - \eta_0 = m \cos M,$

$$x'_0 - \xi'_0 = n \sin N, \quad y'_0 - \eta'_0 = n \cos N,$$

et négligeons l'_0 . Les équations (1) deviennent:

$$\begin{cases} m \sin M + n \sin N t = l_0 \sin Q, \\ m \cos M + n \cos N t = l_0 \cos Q, \end{cases}$$

et donnent, comme nous l'avons déjà vu:

$$\begin{cases} \sin(Q-N) = \frac{m \sin(M-N)}{l_0}, \\ t = -\frac{m}{n} \cos(M-N) \mp \frac{l_0 \cos(Q-N)}{n} = \frac{m}{n} \frac{\sin(M-Q)}{\sin(Q-N)}. \end{cases}$$

On obtient ainsi deux valeurs de t correspondant aux deux moments où h a la valeur donnée. Ce sont des valeurs approchées: en les prenant successivement comme origine du temps, on recommencera le calcul de la même façon; mais cette fois, parmi les deux valeurs de t que l'on obtiendra par chaque calcul, on ne conservera que celle qui correspond à l'époque dont on cherche à approcher, c'est-à-dire celle qui est voisine de zéro.

On fera encore de nouvelles approximations, s'il est nécessaire.

Il peut arriver que la valeur absolue de l_0 soit inférieure à celle de $m \sin (M-N)$, de sorte que les valeurs de t sont alors imaginaires : ceci ne veut pas nécessairement dire que le problème est alors impossible, puisqu'on n'a qu'une solution approchée ; dans ce cas, on recommencera le premier calcul en prenant pour origine du temps l'époque déterminée par

$$t = -\frac{m}{n} \cos (M-N).$$

Supposons l'époque exacte qui correspond à une valeur de k déterminée, ainsi que l'angle θ correspondant ; la connaissance de cet angle fournira, comme nous l'avons vu, en général, l'angle de position du point C par rapport au centre du Soleil ; quant à la grandeur de l'éclipse en ce moment, elle sera donnée par la formule (13) ou (13 bis), où l'on prendra pour L la valeur absolue de l .

Enfin pour que la direction MC soit visible, il faudra que ζ_1 , qui est facile à calculer avec précision, si c'est nécessaire, soit inférieure à $\frac{\pi}{2} + R_0, R_0$ désignant la réfraction horizontale, puisqu'il faut que ζ_2 soit inférieure à $\frac{\pi}{2}$.

Proposons-nous encore de déterminer l'instant de la plus grande phase et la grandeur de l'éclipse en M .

La plus grande phase a lieu lorsque l est le plus petit en valeur absolue ; notre premier calcul montre que ceci a lieu d'une façon approchée pour l_0 égal en valeur absolue à $m \sin (M-N)$, c'est-à-dire pour l'époque $t = -\frac{m}{n} \cos (M-N)$. On recommencera alors le calcul en prenant cette époque pour nouvelle origine du temps ; et ainsi de suite. On aura ainsi finalement l'époque de la plus grande phase, et si m, M, N correspondent à cette époque, la grandeur proprement dite de l'éclipse sera fournie par la formule (13) ou (13 bis), où l'on prendra pour L la valeur absolue de $m \sin (M-N)$.

Il sera d'ailleurs avantageux de commencer par ce calcul, si l'on trouve une grandeur négative, c'est qu'il

n'y a pas éclipse au lieu considéré; si l'on trouve une grandeur positive et < 1 , il y a éclipse partielle ou annulaire suivant que la valeur correspondante de l_2 est plus grande ou plus petite que $-L$; si enfin on trouve une grandeur > 1 , il y a éclipse totale. On est ainsi tout de suite renseigné sur les circonstances principales de l'éclipse.

Le problème le plus important, mais aussi le plus délicat, de la théorie des éclipses, est celui de la prédiction de l'éclipse générale; il consiste à déterminer l'ensemble des points de la surface de la Terre qui peuvent voir effectivement l'éclipse partielle, ou bien l'éclipse totale ou annulaire, ou plus généralement une totaoc de grandeur donnée: ce problème est résolu à l'avance pour chaque éclipse dans les éphémérides, et des cartes convenablement dressées montrent tout de suite quelles seront les circonstances principales de l'éclipse en un lieu donné.

Pour qu'en un lieu donné M , on puisse voir au temps t une phase de grandeur au moins égale à g , il faut d'abord que l'équation en k

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = l^2$$

ait des deux racines inférieures à la quantité k_0 égale à $1 - 2g$, d'après ce qui a été dit précédemment. Si l_0 est la valeur de l qui correspond à k_0 , on doit donc avoir

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 < l_0^2,$$

et en outre, la demi-somme des deux valeurs de k étant $-\frac{l_1 + l_2}{l_1 - l_2}$, on doit avoir encore $k_0 > -\frac{l_1 + l_2}{l_1 - l_2}$.

De plus, il y a une condition de visibilité; il faut, par exemple, que si C désigne le point de contact qui correspond à la plus grande des racines k , la distance zénithale ξ_1 de la direction MC soit inférieure à $\frac{\pi}{2} + R_0$, R_0 désignant la réfraction horizontale.

Considérons d'abord le cas où la grandeur donnée g n'est pas très voisine de l'unité, et ait par conséquent k_0 est notablement supérieur à -1 , de sorte que la condition $k_0 > -\frac{l_1 + l_2}{l_1 - l_2}$ est remplie d'elle-même;

puisque l_2 est petit par rapport à l_1 . Dans ce cas, l'éclipse qui correspond à g ne peut être que partielle, et il n'y a pas lieu de déterminer avec une exactitude précise les limites de l'ensemble (E) des points qui voient au temps t une phase de grandeur égale au moins à g .

Nous le pouvons en conséquence simplifier notablement le problème dans ce cas, que nous allons maintenant étudier.

Nous négligerons tout d'abord la réfraction et l'aplatissement, de sorte que ξ, η, ζ , se réduisent à λ, μ, ν , alors la condition de visibilité devient $\cos \zeta > 0$, et si on néglige f dans l'expression de $\cos \zeta$, il reste simplement $\zeta > 0$.

$$\text{On a } u_0 = \frac{u_1 + u_2}{2} + k_0 \frac{u_1 - u_2}{2},$$

et l'on voit par suite que, dans les hypothèses faites, u_0 est positif et n'est pas très petit; d'autre part

$$l_0 = u_0 - \zeta \operatorname{tg} f_0;$$

comme $\zeta \operatorname{tg} f_0$ est très petit (car on a toujours $\zeta < 1$), on peut sans grand inconvénient réduire l_0 à u_0 , et ce sera d'autant plus légitime que ζ sera plus petit.

Les conditions qui définissent l'ensemble (E) se réduisent ainsi à

$$\zeta > 0, (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 < u_0^2.$$

Pour simplifier encore davantage, nous supposons que x, y, H varient d'une façon uniforme, dans les valeurs de ξ, η, ζ , nous supposons λ constant, et de même dans celle de u_0 , nous supposons u_1 et u_2 constants.

Choisissons alors une origine voisine de la conjonction, et appelons x_0, y_0, H_0 les valeurs correspondantes de x, y, H ; nous prendrons toujours pour λ, u_1, u_2 et pour les dérivées x', y', H' leurs valeurs initiales, et l'on aura ainsi

$$x = x_0 + x't, \quad y = y_0 + y't, \quad H = H_0 + H't.$$

Les dérivées ξ', η', ζ' de ξ, η, ζ seront données par les formules

$$\begin{cases} \xi' = H' (-\eta \sin d + \zeta \cos d), \\ \eta' = H' \sin d \xi'', \\ \zeta' = -H' \cos d \xi. \end{cases}$$

Pour simplifier les calculs nous ferons dans ce qui suit

$$\xi = \cos \beta \sin \gamma, \quad \eta = \cos \beta \cos \gamma, \quad \zeta = \sin \beta,$$

β étant compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$: β, γ sont les coordonnées sphériques du point M par rapport aux axes $Oxy\zeta$. On en déduit φ et L par les formules

$$\begin{cases} \cos \varphi \sin (H-L) = \cos \beta \sin \gamma, \\ \cos \varphi \cos (H-L) = -\sin d \cos \beta \cos \gamma + \cos d \sin \beta, \\ \sin \varphi = \cos d \cos \beta \cos \gamma + \sin d \sin \beta. \end{cases}$$

Il nous allons choisir aussi l'origine du temps d'une façon particulière; on a

$x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2 + 2(x_0 x' + y_0 y')t + (x'^2 + y'^2)t^2$;
par suite $x^2 + y^2$ est minimum pour $t = -\frac{x_0 x' + y_0 y'}{x'^2 + y'^2}$;
c'est cette époque qui sera maintenant l'origine du temps, de sorte que si nous faisons

$$\begin{cases} x' = n \sin N, \\ y' = n \cos N, \end{cases}$$

nous pourrions poser aussi

$$\begin{cases} x_0 = m \cos N, \\ y_0 = -m \sin N. \end{cases}$$

Rendons-nous compte de ce que sont n et N . En négligeant la variation de π , remarquons que $d - a$ et $\delta - d$ sont petits, et que a et d sont très voisins de d' et δ' , on a évidemment d'après les formules (4).

$$\begin{aligned} x' &= \pi \cos \delta \frac{d(d-d')}{dt}, \\ y' &= \pi \frac{d(\delta-\delta')}{dt}; \end{aligned}$$

on voit par là que x' est toujours positif, et nous

conviendrons de prendre $n > 0$, $\sin N > 0$; le mouvement relatif de la Lune et du Soleil étant sensiblement plus grand en ascension droite qu'en déclinaison, et $\cos \delta$ restant voisin de 1, on voit encore que l'angle N ne s'écartera pas de plus de 30° d'un angle droit, de sorte que $\sin N$ est plus grand que $0,85$.

À une époque quelconque, nous ferons encore

$$\begin{cases} x = m \cos N + n \sin N \cdot t = g \sin G, \\ y = -m \sin N + n \cos N \cdot t = g \cos G, \end{cases}$$

et nous prendrons toujours g positif.

Nous allons étudier spécialement l'ensemble (E) des points qui peuvent voir l'éclipse au temps t , et la variation de cet ensemble avec t : il suffit pour cela de faire $k_0 = 1$, d'où $u_0 = u$. Ce que nous allons dire pourra d'ailleurs être répété pour une autre valeur de k_0 .

L'ensemble (E) est défini par les deux conditions

$$\xi > 0, (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 < u^2.$$

La première exprime que le point M est situé par celui des deux hémisphères déterminés dans la Terre par le plan xOy , qui tourne sa convexité vers le point ξ : nous dirons plus simplement l'hémisphère supérieur, et nous appellerons H le grand cercle qui le limite, situé dans $xOxy$.

La seconde condition exprime que le point M est situé à l'intérieur du cylindre de révolution qui a pour axe la ligne LS et pour rayon u ; la distance de l'axe au point O est d'ailleurs g .

Trois cas sont alors à distinguer:

a) Le cylindre ne coupe pas la Terre, c'est-à-dire que l'on a

$$g > 1 + u;$$

l'ensemble (E) n'existe pas.

b) Le cylindre coupe la Terre suivant une seule courbe fermée L , symétrique par rapport au plan des xy , et coupant ce plan en deux points K_1 et K_2 . On a ici,

$$1 - u < g < 1 + u.$$

L'ensemble (E) est formé par les points situés à l'intérieur de la courbe L , et au-dessus de xOy ; il est

limité par une portion du grand cercle H et par une portion de la courbe L , ces deux portions étant limitées elles-mêmes aux points K_1 et K_2 .

O). Le cylindre coupe la terre suivant deux courbes fermées L et L' , symétriques par rapport à xOy , et telles que L , par exemple, est située complètement au-dessus de xOy . On a alors :

et l'ensemble (E) est formé par les points situés à l'intérieur de L .
 1°. Considérons les deux équations $g = 1 \pm u_1$ qui correspondent aux cas limites, et cherchons à quelles époques elles peuvent être vérifiées. On doit avoir :

$$\begin{cases} m \cos N + n \sin N.t = (1 \pm u_1) \sin G, \\ m \sin N + n \cos N.t = (1 \pm u_1) \cos G, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \sin(G-N) = \frac{m}{1 \pm u_1}, \\ t = \frac{1 \pm u_1}{n} \cos(G-N) \end{cases}$$

Appelons μ la valeur absolue de m , il y a encore lieu de distinguer trois cas :

1°) On a $\mu > 1 + u_1$. Alors g est toujours $> 1 + u_1$, il n'y a éclipse pour aucun lieu de la terre, à aucune époque.

2°) On a $1 + u_1 > \mu > 1 - u_1$. Les équations précédentes déterminent deux époques $-t_1$ et $+t_1$ ($t_1 > 0$) pour lesquelles $g = 1 + u_1$; il n'y a pas d'époque telle que $g = 1 - u_1$.

On est dans le cas (a) pour $t < -t_1$ ou $t > t_1$; dans le cas (b) pour $-t_1 < t < t_1$.

3°) On a $\mu < 1 - u_1$. Les époques t_1 et $-t_1$ subsistent; mais de plus on a deux autres époques, intermédiaires t_2 et $-t_2$ ($t_2 > 0$), pour lesquelles $g = 1 - u_1$.

On est dans le cas (a) pour $t < -t_1$ ou $t > t_1$; dans le cas (b) pour $-t_1 < t < -t_2$, ou $t_2 < t < t_1$; dans le cas (c) pour $-t_2 < t < t_2$.

Dans ces deux derniers cas, l'éclipse générale commence à l'époque $-t_1$ et finit à l'époque $+t_1$; ces époques correspondent au premier et au dernier contact, car le cylindre est alors tangent extérieurement à la Terre. L'ensemble (E) se réduit alors à un seul point du grand cercle H pour lequel on a manifestement $\gamma = G$, $\beta = 0$, G ayant la valeur convenable déduite des équations ci-dessus.

Dans le dernier cas, les époques t_2 et $-t_2$ correspondent à des contacts intérieurs du cylindre et de la Terre; ces points de contact, déterminés comme les précédents, sont des points doubles de l'intersection du cylindre et de la Terre.

On voit que la condition de possibilité de l'éclipse est $\mu \leq 1 + u_1$. Pour faciliter la précision de cette possibilité, nous allons, mettre cette condition sous une forme plus simple. Employons au lieu des coordonnées équatoriales $\alpha, \delta, \alpha', \delta'$ les coordonnées écliptiques $\lambda, \beta, \lambda', \beta'$, ce qui ne change rien aux raisonnements; prenons comme origine du temps le moment même de la conjonction en longitude, et confondons les points γ et δ ; la latitude du Soleil est nulle; soit β_0 la latitude initiale de la Lune. On a :

$$x_0 = 0, \quad y_0 = r \sin \beta_0,$$

et comme plus haut

$$x' = r \frac{d(\lambda - \lambda')}{dt}, \quad y' = r \frac{d\beta}{dt};$$

faisant :

$$\operatorname{tg} N' = \frac{d(\lambda - \lambda')}{d\beta};$$

on trouve facilement

$$\mu = r \left| \sin \beta_0 \sin N' \right|.$$

D'ailleurs, en raisonnant comme à propos des éclipses de Lune, on a encore :

$$\operatorname{cotg} N' = \pm \operatorname{tg} i \frac{d\lambda}{d(\lambda - \lambda')},$$

suivant que $\lambda - \lambda'$ est voisin de 0 ou de π , et si l'on voit que N' est fort voisin de $\frac{\pi}{2}$ en valeur absolue.

On a d'autre part, très sensiblement, comme nous avons vu;

$$u_1 = R \left(1 + \frac{s'}{s} \right) = \frac{r}{w} (s + s'),$$

et comme $\frac{r}{w} \approx \pi$, il vient finalement pour condition de possibilité de l'éclipse.

$$\left| \sin \beta_0 \sin N' \right| \leq \pi + s + s'$$

Revenons à la détermination de l'ensemble (E). Pour obtenir un point utile de la courbe L, il suffit de trouver des valeurs β, γ vérifiant l'équation

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = u_1^2,$$

β étant compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Cette équation s'écrit :

$$(g \sin G - \cos \beta \sin \gamma)^2 + (g \cos G - \cos \beta \cos \gamma)^2 = u_1^2,$$

et donne

$$\cos(\gamma - G) = \frac{\cos^2 \beta + g^2 - u_1^2}{2g \cos \beta}.$$

On peut donc prendre pour paramètre $\cos \beta$, et pour chaque valeur de $\cos \beta$, on a deux valeurs de γ , d'où deux points utiles de la courbe L .

On s'assure sans peine que dans le cas (c) on doit faire varier $\cos \beta$ entre $u_1 + g$, et la valeur absolue de $u_1 - g$; $\cos \beta$ n'est jamais égal à 1; les points limites K_1 et K_2 n'existent pas.

Dans le cas (b) on doit faire varier $\cos \beta$ entre 1 et la valeur absolue de $u_1 - g$. Pour $\cos \beta = 1$, on obtient les points limites K_1 et K_2 .

Dans ce même cas la limite de l'ensemble (E) comprend encore la partie du grand cercle H comprise entre K_1 et K_2 . Pour les points de cette limite, $\beta = 0$, et l'on doit faire varier γ entre les valeurs γ_1 et γ_2 qui correspondent à K_1 et K_2 ; ajoutons, pour préciser, que γ doit prendre en particulier la valeur G .

Il est aisé, d'après cela, de définir l'ensemble (E) à chaque instant. Mais il reste d'importantes questions à résoudre.

En un point M de la courbe L , on voit le soleil et la Lune tangents extérieurement : est-ce le commencement ou la fin de l'éclipse ? En un point M de la portion utile du grand cercle H , on voit le point Z ou plus simplement, le soleil dans l'horizon : est-il à son lever ou à son coucher ? Il est nécessaire d'être fixé sur ces points.

Commençons par la seconde question, de beaucoup la plus simple. Il est clair que le soleil est à son lever ou à son coucher suivant qu'en ce point la distance zénithale du point Z est décroissante ou croissante avec le temps, c'est-à-dire suivant que la dérivée Z' est positive ou négative. Or on a :

$$Z' = -H' \cos d \quad Z'' = -H' \cos d \cos \beta \sin \gamma;$$

$H' \cos d \cos \beta$ étant positif, le soleil sera à son lever

ou à son coucher suivant que $\sin \gamma$ sera négatif ou positif.

Il peut arriver que $\sin \gamma$ soit nul en un point H_1 , une fois seulement d'ailleurs. Comme β est nul aussi, les coordonnées du point H_1 sont faciles à déterminer :

pour $d > 0, \gamma = 0$, on a $\varphi = \frac{\pi}{2} - d, H-L = \pi$;

pour $d > 0, \gamma = \pi$, on a $\varphi = d - \frac{\pi}{2}, H-L = 0$;

pour $d < 0, \gamma = 0$, on a $\varphi = \frac{\pi}{2} + d, H-L = 0$;

pour $d < 0, \gamma = \pi$, on a $\varphi = -\frac{\pi}{2} - d, H-L = \pi$.

En un tel point, le soleil ne fait que raser l'horizon : son lever coïncide avec son coucher.

Remarquons que, d'après la façon dont est déterminé H_1 , c'est un point où le grand cercle H , variable avec t , touche son enveloppe.

Cette enveloppe se compose de deux parallèles terrestres, le premier de latitude $\pm \frac{\pi}{2} - d$ suivant que d est positif ou négatif, que nous appellerons le parallèle de jour perpétuel, parce qu'à son intérieur le soleil est toujours au-dessus de l'horizon ; le second, de latitude $\mp \frac{\pi}{2} + d$ qui sera, pour une raison analogue, le parallèle de nuit perpétuelle.

Cherchons quand le point H_1 existe utilement.

Faisons d'abord l'hypothèse $\gamma = 0$. On a pour ce point $\xi = 0, \eta = 1$, et la condition d'existence de H_1 est par suite :

$$x^2 + (y-1)^2 < u_1^2.$$

L'équation en t : $x^2 + (y-1)^2 - u_1^2 = 0$ peut avoir deux racines t_3 et t_4 ($t_3 < t_4$) ; l'inégalité précédente est alors vérifiée pour $t_3 < t < t_4$. Aux limites le point H_1 est confondu avec l'un des points limites K_1, K_2 .

On vérifie l'équation ci-dessus en faisant :

$$\begin{cases} m \cos N + n \sin N.t = u_1 \sin Q, \\ -1 - m \sin N + n \cos N.t = u_1 \cos Q, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \sin(Q-N) = \frac{m + \sin N}{u_1}, \\ t = \frac{\cos N + u_1 \cos(Q-N)}{n}. \end{cases}$$

Si m est positif, ces équations n'ont pas de solution, car d'après des remarques déjà faites, on a

$u_1 < \sin N$, et a fortiori $u_1 < m + \sin N$.

Si m est négatif, ces équations ont des solutions si l'on a :

$$\mu > \sin N - u_1 \quad \text{et} \quad \mu < u_1 + \sin N.$$

Faisons maintenant l'hypothèse $\gamma = \pi$ de sorte que $\eta = -1$. On a de même

$$\alpha^2 + (\gamma + 1)^2 < u_1^2,$$

et cette inégalité est vérifiée, si l'équation $x^2 + (\gamma + 1)^2 = u_1^2 = 0$ a deux racines t_3 et t_4 ($t_3 < t_4$), et si l'on a $t_3 < t_4$. Pour calculer t_3 et t_4 , on trouve de même :

$$\begin{cases} \sin(Q - N) = \frac{m - \sin N}{u_1}, \\ t = \frac{-\cos N + u_1 \cos(Q - N)}{u_1}. \end{cases}$$

Si m est négatif, il n'y a pas de solutions. Si m est positif, il y a des solutions sous les mêmes conditions que plus haut.

En réunissant ces résultats à ceux obtenus ci-dessus, on voit que si H existe, il est sur le parallèle de nuit perpétuelle, si l'on a $m d > 0$, et alors $L = H$; il est au contraire sur le parallèle de jour perpétuel, si l'on a $m d < 0$, et alors $L = \pi + H$.

Étudions maintenant la seconde question. En un point M de la courbe L , l'éclipse est à son commencement, ou à sa fin, et il faut savoir lequel des deux. Il est clair que ce sera le commencement ou la fin, suivant que la quantité $(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$ est décroissante ou croissante avec le temps, c'est-à-dire suivant que sa dérivée est négative ou positive. Il faudra donc étudier le signe de cette quantité :

$$p = (x - \xi)(x - \xi') + (y - \eta)(y - \eta').$$

L'éclipse commencera pour $p < 0$, finira pour $p > 0$.

Il peut arriver que p soit nul en un ou plusieurs points L_1 de la partie utile de L . En un tel point, la Lune ne fait que raser le bord du Soleil; le commencement de l'éclipse est aussi sa fin. Les points L_1 sont d'ailleurs parmi les points où la courbe L variable avec le temps touche son enveloppe.

Il est important de déterminer les points L_1 , quand ils existent.

D'une manière générale pour avoir sans peine le signe de p , posons :

$$x - \xi = u, \sin Q, \quad y - \eta = u, \cos Q;$$

$$\text{on a } \xi' = H'(-\eta \sin d + \zeta \cos d) = H' \sin d (-y + u, \cos Q) + H' \cos d \zeta,$$

$$-\eta' = H' \sin d \xi = H' \sin d (\alpha - u, \sin Q);$$

par suite il vient :

$$\frac{P}{u_1} = \sin Q (\alpha' + H'y \sin d) + \cos Q (y' - H'x \sin d) - H'\zeta \cos d \sin Q.$$

Faisons

$$\begin{cases} -y' + H'x \sin d = j \sin J, \\ \alpha' + H'y \sin d = j \cos J, \\ H' \cos d = i; \end{cases}$$

il vient encore

$$\frac{P}{u_1} = j \sin(Q - J) - i \zeta \sin Q,$$

forme qui nous sera commode.

Nous prendrons $j > 0$; il est facile alors de s'assurer que $\cos J > 0$ et que l'angle J n'est pas très grand en valeur absolue.

Déterminons maintenant les points U_1 . Pour un tel point on a $p = 0$ et par suite :

$$j \sin(Q - J) - i \zeta \sin Q = 0.$$

De plus on doit avoir $0 < \zeta < 1$. Si l'on fait $\zeta = 0$, cette équation donne $Q = J$, ou $Q = \pi + J$; si l'on fait $\zeta = 1$, on a :

$$\frac{\sin(Q - J)}{\sin Q} = \frac{i}{j},$$

d'où

$$\operatorname{tg}(Q - \frac{J}{2}) = \frac{j+i}{j-i} \operatorname{tg} \frac{J}{2};$$

si χ est l'angle aigu positif ou négatif admettant le second membre pour tangente, on a donc $Q = \frac{J}{2} + \chi$ ou $Q = \pi + \frac{J}{2} + \chi$.

Nous devons conclure de ces remarques que l'angle Q qui définit un point U_1 est compris entre deux limites J et $\frac{J}{2} + \chi$ ou $\pi + J$ et $\pi + \frac{J}{2} + \chi$, limites qui sont assez rapprochées pratiquement pour que l'on puisse instituer un calcul d'approximations successives. On choisira à cet effet une première valeur de Q entre les limites obtenues et on en déduira ξ et η , et par suite ζ , si l'on a $\xi^2 + \eta^2 < 1$. Avec cette valeur approchée de ζ , on recommencera le calcul, en déterminant Q par la formule :

$$\operatorname{tg} \left(Q - \frac{J}{2} \right) = \frac{j + i\xi}{j - i\xi} \operatorname{tg} \frac{J}{2},$$

et ainsi de suite.

On voit qu'il peut exister deux points L_1 , et ces points commenceront ou cesseront évidemment d'exister quand on aura $\xi = 0$ et par suite $Q = J$, ou $Q = \pi + J$; un tel point coïncidera avec l'un des points limites K_1 et K_2 .

Cherchons à quelles époques il en peut être ainsi. On a alors :

$$(x - y u_1 \sin J)^2 + (y - x u_1 \cos J)^2 = 1,$$

suivant que $Q = J$, ou $Q = \pi + J$; en effet $\xi^2 + \eta^2 = 1$.

Ceci s'écrit :

$$x^2 + y^2 + u_1^2 - 1 = \pm 2u_1 (x \sin J + y \cos J)$$

$$\text{ou bien } (x^2 + y^2 + u_1^2 - 1)^2 - 4u_1^2 (x \sin J + y \cos J)^2 = 0.$$

En remplaçant x, y, x', y' par leurs valeurs et faisant $i' = H^2 \sin d$, on a

$$x^2 + y^2 = m^2 + n^2 t^2$$

$$j \sin J = -(n - i'm) \cos N + i' \sin N nt,$$

$$j \cos J = (n - i'm) \sin N + i' \cos N nt,$$

$$j^2 = (n - i'm)^2 + i'^2 n^2 t^2$$

$$xj \sin J + yj \cos J = -m(n - i'm) + i'n^2 t^2;$$

l'équation précédente devient donc en faisant $n^2 t^2 = X$:

$$(m^2 + u_1^2 - 1 + X)^2 [(n - i'm)^2 + i'^2 X] - 4u_1^2 [-m(n - i'm) + i'X]^2 = 0.$$

C'est une équation du troisième degré en X , dont les racines positives seules peuvent convenir; il ne peut d'ailleurs y en avoir plus de deux; on effectue l'équation s'écrit :

$$i'^2 X^3 + [(n - i'm)^2 + 2i'^2(m^2 - u_1^2 - 1)] X^2 + \dots = 0,$$

et i' étant évidemment petit, les coefficients de X^3 et X^2 sont de même signe, ce qui permet au plus deux variations au premier membre.

Écrivons l'équation sous la forme :

$$i'^2 X / (m^2 + u_1^2 - 1 + X)^2 + \left\{ X(n - i'm + 2u_1 i') + (n - i'm) \{ (m - u_1)^2 - 1 \} \right\} \\ \times \left\{ X(n - i'm - 2u_1 i') + (n - i'm) \{ (m + u_1)^2 - 1 \} \right\} = 0;$$

à cause de la petitesse de i' , il est clair que l'on a des valeurs approchées des deux racines possibles en égalant à zéro les deux facteurs qui composent le second terme; par suite si l'on a $\mu > 1 + u_1$, il n'y

apasse solution, ainsi qu'il était évident a priori, si l'on a $1 + u_1 > \mu > 1 - u_1$, il y a une valeur de X positive; si l'on a $\mu < 1 - u_1$, on a deux valeurs positives de X ; ces résultats ne sont pas seulement approchés, mais rigoureux, puisque la condition d'une racine nulle pour l'équation est exactement $\mu = 1 + u_1$, ou $\mu = 1 - u_1$. Ceci acquis, voici comment on pourra commodément calculer les valeurs de t , et les points limités L_1 correspondants.

Faisons d'abord l'hypothèse $Q = J$; on a $\xi = \sin \gamma$, $\eta = \cos \gamma$ et par suite

$$\begin{cases} \sin \gamma = x - u_1 \sin J, \\ \cos \gamma = y - u_1 \cos J, \end{cases}$$

ce qui peut s'écrire

$$\begin{cases} \sin \gamma = \left(m + \frac{u_1}{j} (n - i'm)\right) \cos N + \left(1 - \frac{u_1 i'}{j}\right) nt \sin N, \\ \cos \gamma = -\left(m + \frac{u_1}{j} (n - i'm)\right) \sin N + \left(1 - \frac{u_1 i'}{j}\right) nt \cos N, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \sin(\gamma - N) = m + \frac{u_1}{j} (n - i'm), \\ \left(1 - \frac{u_1 i'}{j}\right) nt = \cos(\gamma - N). \end{cases}$$

La quantité j varie fort peu, de sorte qu'on aura des résultats suffisamment approchés en prenant pour j sa valeur moyenne précédemment égale à $n - im$ au surplus on pourra ensuite recommencer le calcul en partant des résultats de cette première approximation. Si m est positif, ces équations ont des solutions $-t_2, +t_2$ ($t_2 > 0$) pour $\mu < 1 - u_1$; si m est négatif, il suffit d'avoir $\mu < 1 + u_1$.

Si maintenant on suppose $Q = \pi + J$, on a les mêmes équations où u_1 est changé de signe. Si m est positif, on a des solutions $-t'_2, +t'_2$ ($t'_2 > 0$) pour $\mu < 1 + u_1$; si m est négatif, pour $\mu < 1 - u_1$.

Il est évident maintenant que si l'on veut déterminer les différentes régions de la Terre qui peuvent voir, quelque soit l'instant, soit l'éclipse entière soit une partie seulement de l'éclipse, ces différentes régions seront délimitées 1° par la courbe K , lieu des points limités K_1 et K_2 ; 2° par la courbe H_0 , lieu

des points H_1 , et enveloppe utile du grand cercle H ; 3° par la ou les courbes L_0 , lieu des points L_1 et enveloppe utile de la courbe L .

Tous avons vu, ce qu'était H_0 , il est facile aussi de tracer L_0 ; si l'on a $1+u_1 > \mu > 1-u_1$, cette courbe se compose d'un seul trait continu, évidemment dénué de points doubles, d'après la nature même des phénomènes, et limite aux points L_1 , qui correspondent aux époques t_2 et $-t_2$ ou t'_2 et $-t'_2$ suivant que m est négatif ou positif; si l'on a $\mu < 1-u_1$, la courbe L_0 se compose de deux pareils traits, sans points doubles, et ne se coupant pas, limités aux points qui correspondent aux époques t_2 et $-t_2$ d'une part et t'_2 et $-t'_2$ d'autre part.

Étudions de plus près maintenant la courbe K . Nous avons vu plus haut comment on en pourrait déterminer les points en fonction du temps t ; mais il peut être préférable de prendre pour paramètre l'angle γ tel que $\xi = \sin \gamma$, $\eta = \cos \gamma$, (puisque $\xi = 0$), ou bien l'angle Q tel que:

$$\begin{cases} \alpha = \xi = u_1 \sin Q, \\ \eta - \eta = u_1 \cos Q; \end{cases}$$

on a alors

$$\begin{cases} m \cos N + n \sin N t - \sin \gamma = u_1 \sin Q, \\ -m \sin N + n \cos N t - \cos \gamma = u_1 \cos Q; \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} m = \sin(\gamma - N) + u_1 \sin(Q - N), \\ nt = \cos(\gamma - N) + u_1 \cos(Q - N). \end{cases}$$

On exprime ainsi Q et ensuite t en fonction de γ , ou bien γ et t en fonction de Q .

Quand on a $1+u_1 > \mu > 1-u_1$, la courbe K se compose évidemment d'une seule courbe fermée, car t varie d'une façon continue de $-t_2$ à t_2 .

Les limites de γ et Q sont faciles à trouver. Si m est positif, on a

$$\mu - u_1 < \sin(\gamma - N) < 1,$$

$$\frac{\mu - 1}{u_1} < \sin(Q - N) < 1;$$

si m est négatif, on a

$$-1 < \sin(\gamma - N) < u_1 - \mu,$$

$$-1 < \sin(Q - N) < \frac{1 - \mu}{u_1};$$

les valeurs de γ comme celles de Q forment une série continue.

Quand on a $\mu < 1 - u_1$, la courbe K se compose de deux courbes fermées, car t varie d'une façon continue de $-t_1$ à $-t_2$, puis de t_2 à t_1 . Dans ce cas Q prend toutes les valeurs possibles sur chacune de ces courbes, mais on a, pour $m > 0$

$$\mu - u_1 < \sin(\gamma - N) < \mu + u_1,$$

pour $m < 0$

$$-\mu - u_1 < \sin(\gamma - N) < -\mu + u_1;$$

les valeurs de γ forment deux séries continues distinctes, correspondant aux deux parties distinctes de K .

Calculons les dérivées des coordonnées géographiques φ et L d'un point de K par rapport au temps. D'après la valeur générale de ξ , on a

$$\frac{d\xi}{dt} = \cos \varphi \cos(H - L) \left(H' - \frac{dL}{dt} \right) - \sin \varphi \sin(H - L) \frac{d\varphi}{dt},$$

ce qui devient ici

$$\frac{d\xi}{dt} = \cos \gamma \left[\sin d \left(H' - \frac{dL}{dt} \right) + \frac{\cos d \sin \gamma}{\cos \varphi} \frac{d\varphi}{dt} \right];$$

D'autre part

$$\frac{d\xi}{dt} = \cos \gamma \frac{d\gamma}{dt};$$

$$\text{Donc } \frac{d\gamma}{dt} = \sin d \left(\frac{dL}{dt} - H' \right) - \frac{\cos d \sin \gamma}{\cos \varphi} \frac{d\varphi}{dt};$$

la relation $\sin \varphi = \cos d \cos \gamma$

Donne ensuite $\cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} = -\cos d \sin \gamma \frac{d\gamma}{dt}$;

pour trouver une troisième relation entre $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{dL}{dt}$ et $\frac{d\gamma}{dt}$, remarquons que l'on a

$$\begin{cases} x - \sin \gamma = u, \sin Q, \\ y - \cos \gamma = u, \cos Q, \end{cases}$$

et par suite

$$\sin Q \left(x' - \cos \gamma \frac{d\gamma}{dt} \right) + \cos Q \left(y' + \sin \gamma \frac{d\gamma}{dt} \right) = 0;$$

remplaçons $\frac{d\gamma}{dt}$ par sa valeur, mais dans les termes qui contiennent H' remplaçons encore $\cos \gamma$ par $y - u$, $\cos Q$, $\sin \gamma$ par $x - u$, $\sin Q$; il vient, en se pouvant des valeurs de j et J :

$$j \sin (Q - J) - \sin (Q - \gamma) \left(\sin d \frac{dL}{dt} - \frac{\cos d \sin \gamma}{\cos \varphi} \frac{d\varphi}{dt} \right) = 0.$$

Finalement, on obtient alors:

$$\begin{cases} \frac{d\gamma}{dt} = \frac{j \sin (Q - J)}{\sin (Q - \gamma)} - H' \sin d, \\ \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\cos d \sin \gamma}{\cos \varphi} \frac{d\gamma}{dt}, \\ \sin d \frac{dL}{dt} = \frac{j \sin (Q - J)}{\sin (Q - \gamma)} - \frac{\cos^2 d \sin^2 \gamma}{\cos^2 \varphi} \frac{d\gamma}{dt}. \end{cases}$$

On pourra ainsi suivre facilement les variations de φ et L . Remarquons que $\frac{d\varphi}{dt}$ et $\frac{dL}{dt}$ ne deviennent infinies que pour $\sin (Q - \gamma) = 0$: mais alors, on est au moment d'un contact, et φ comme L ont deux valeurs confondues.

Il est clair que la courbe K est susceptible d'avoir des points doubles; on peut exprimer en effet que pour deux valeurs différentes de t on trouve les mêmes valeurs de φ et L . Pour déterminer dans quels cas on aura des points doubles, cherchons les cas limites dans lesquels on a un point de rebroussement: il faut alors, comme

on peut, avoir simultanément $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dt}{dt} = 0$. D'après les formules précédentes, ceci arrive pour $\sin \gamma = 0$ avec $\sin(Q - J) = 0$; le point de rebroussement est donc aussi un des points limites H_1 , et un des points limites L_1 . L'équation $\sin(Q - J) = 0$ s'écrit immédiatement, en remplaçant $\sin J$ et $\cos J$ par leurs valeurs.

$$i' n t \sin(Q - N) + (n - i' m) \cos(Q - N) = 0;$$

D'autre part, si m est positif, on a, d'après ce qui a été dit sur les points limites H_1 :

$$\begin{cases} u, \sin(Q - N) = m - \sin N, \\ u, \cos(Q - N) = n t + \cos N; \end{cases}$$

combinant ces équations avec la précédente, il vient

$$n t = \frac{-(n - i' m) \cos N}{n - i' \sin N},$$

$$u, \cos(Q - N) = \frac{i' \cos N}{n - i' \sin N} (m - \sin N);$$

posons

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{n - i' \sin N}{i' \cos N},$$

et prenons χ voisin de 90° ; on peut écrire

$$\begin{cases} u, \sin \chi \sin(Q - N) = (m - \sin N) \sin \chi, \\ u, \sin \chi \cos(Q - N) = (m - \sin N) \cos \chi; \end{cases}$$

la condition de possibilité du problème est par suite

$$m - \sin N = \pm u, \sin \chi,$$

$$\text{ou} \quad \mu = \sin N \pm u, \sin \chi;$$

avec le signe +, on a $Q - N = \chi$; avec le signe -, $Q - N = \pi + \chi$.

Si l'on avait m négatif, on trouverait de même:

$$n t = \frac{n - i' m}{n + i' \sin N} \cos N;$$

puis faisant:

$$\operatorname{tg} \chi' = \frac{n + i' \sin N}{-i' \cos N},$$

et prenant χ' voisin de 90° , on aura

$$\begin{cases} u, \sin \chi' \sin (Q-N) = (m + \sin N) \sin \chi', \\ u, \sin \chi' \cos (Q-N) = (m + \sin N) \cos \chi'; \end{cases}$$

d'où la condition de possibilité

$$\mu = \sin N \pm u, \sin \chi';$$

avec le signe $+$, on a $Q-N = \pi + \chi'$; avec le signe $-$, $Q-N = \chi'$.

La courbe K peut encore avoir un point double, mais d'une façon accidentelle, et non plus régulière; c'est dans le cas limite où l'on a $\mu = 1 - u_1$. En effet, alors, on voit que $\frac{d\varphi}{dt}$ et $\frac{d\psi}{dt}$ se présentent sous forme indéterminée, quand on a $t=0$, d'où, en supposant m positif, $\gamma = \frac{\pi}{2} + N$, $Q = \lambda - \frac{\pi}{2} + N$; le point correspondant est donc singulier pour K . Pour préciser ce qu'il en est, supposons t infiniment petit, et faisons.

$$\gamma = \frac{\pi}{2} + N + \gamma', \quad Q = -\frac{\pi}{2} + N + Q',$$

γ' et Q' étant aussi infiniment petits. Les deux équations fondamentales qui définissent K deviennent alors

$$m = 1 - \frac{\gamma'^2}{2} + \dots - u, \left(1 - \frac{Q'^2}{2} + \dots\right),$$

$$nt = -\gamma' + \dots + u, (Q' + \dots),$$

et comme ici $m = 1 - u_1$, on a

$$\gamma'^2 = u, Q'^2,$$

d'où $nt = \gamma'(-1 \pm \sqrt{u})$,

la dérivée $\frac{d\gamma}{dt}$ a donc deux valeurs distinctes, et par suite la courbe K a un point double ordinaire.

Il est facile maintenant de classer et de caractériser les divers cas qui peuvent se présenter dans l'étude de l'éclipse générale. Nous supposerons m positif; la discussion dans le cas de m négatif serait toute semblable.

1°. On a $1 + u_1 > \mu > \sin N + u_1$. La courbe K est une courbe formée sans point double; il n'y a pas de

courbe H_0 ; il y a une courbe L_0 se raccordant tangentielllement avec K en ses extrémités.

2° On a $\sin N + u, > \mu > \sin N - u, \sin \chi$. Tout se passe comme ci-dessus, mais la courbe H_0 existe et se raccorde avec K en ses extrémités.

3° On a $\sin N + u, \sin \chi > \mu > 1 - u$. La courbe K est ici une courbe fermée à point double ; la courbe H_0 existe, ainsi qu'une courbe L_0 .

4° On a $1 - u, > \mu > \sin N - u, \sin \chi$.

Alors K se compose de deux courbes fermées dont l'une a un point double et se raccorde avec H_0 en ses extrémités ; il y a deux courbes L_0 se raccordant avec chacune des parties de K en une extrémité.

5° On a $\sin N - u, \sin \chi > \mu > \sin N - u$.

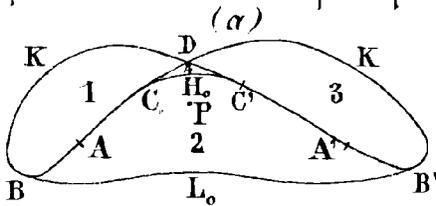
Tout se passe comme dans le dernier cas étudié, mais K n'a pas de point double.

6° On a $\mu < \sin N - u$. K se compose de deux courbes fermées se raccordant avec les deux courbes L_0 ; H_0 n'existe pas.

Nous avons supposé dans cette discussion que l'on avait $1 - u, > \sin N - u, \sin \chi$; il est facile de vérifier qu'il en est ainsi.

L'étude des cas limites sera immédiate.

Guidé par les indications générales que nous venons de développer, il sera aisé, dans chaque cas particulier, de dresser la carte de l'éclipse et de caractériser chacune des régions qui déterminent les courbes K, H_0, L_0 , ainsi que leurs limites. Voici, comme exemples, les dispositions que l'on rencontre le plus fréquemment.

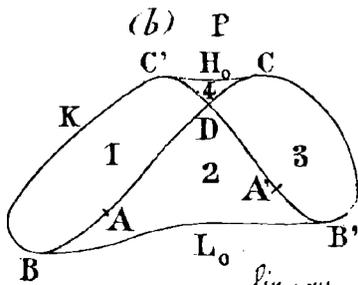


Dans la figure (a), P est le pôle Nord, la courbe K a un point double en D ; elle se raccorde en C, C' avec H_0 ou le parallèle de jour perpétuel ; en B, B' , avec l'unique courbe L_0 ; A est le premier contact, A' le dernier contact, la marche générale de l'éclipse est de l'Ouest vers l'Est, de A vers A' .

Sur l'arc BAC , on voit le commencement de l'éclipse au lever du soleil ; sur l'arc CDB' , on voit le

commencement au coucher ; sur l'arc $B'A'C'$, la fin au coucher ; sur l'arc $C'DB$, la fin au lever. Sur la limite australe de l'éclipse L_0 , on voit la Lune raser simplement le Soleil ; sur l'arc CC' de H_0 , on voit le Soleil éclipse raser l'horizon.

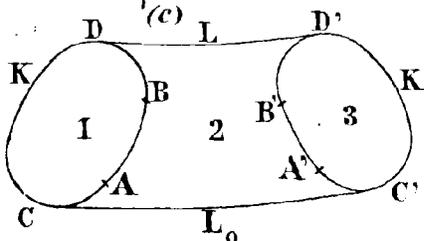
Dans la région 1, on voit la fin de l'éclipse, mais non le commencement ; dans la région 3, on voit le commencement, mais non la fin. Dans la région 2, on voit l'éclipse entière ; dans la région 4, on voit le commencement et la fin de l'éclipse, mais on ne voit pas toute l'éclipse, car la nuit a lieu entre le commencement et la fin. Au point double D , on voit l'éclipse commencer au coucher du Soleil, et finir à son lever.



Dans la figure (b), P est le pôle Nord, mais H_0 est le parallèle de nuit perpétuelle sur l'arc BDC on voit le commencement de l'éclipse au lever du Soleil ; sur CB' , le commencement au coucher ; sur $B'DC'$, la fin au coucher ; sur CB , la fin au lever.

Les régions 1, 2, 3 sont caractérisées comme plus haut ; mais dans la région 4, on ne voit ni le commencement ni la fin de l'éclipse, mais on voit une partie de l'éclipse, car le jour a lieu entre le commencement et la fin. Au point double D , on voit l'éclipse commencer au lever du Soleil et finir à son coucher.

On aurait des dispositions analogues en prenant pour P le pôle Sud.



Dans la figure (c), K se compose de deux courbes fermées sans point double, H_0 n'existe pas ; il y a deux courbes L_0 . A et A' sont le premier et le dernier contact. B et B'

les contacts intérieurs.

Sans insister davantage, disons que les régions 1, 2, 3 sont caractérisées comme plus haut.

Dans le même ordre d'idées, on peut résoudre bien d'autres questions relatives à la prédiction générale de l'éclipse ; déterminer par exemple les points pour lesquels

la plus grande phase a lieu dans l'horizon, ou encore à midi vrai (ou minuit); etc. mais nous n'insisterons pas sur ces problèmes qui n'ont rien d'essentiel, et qui ne peuvent plus présenter aucune difficulté.

Il nous reste une importante question à traiter: c'est la détermination des points qui peuvent voir l'éclipse totale ou annulaire, lorsque celle-ci a lieu. Remarquons tout d'abord qu'il peut bien en être ainsi sans que l'éclipse soit centrale; car le cône circonscrit extérieurement au Soleil et à la Lune peut bien couper la Terre sans que son axe LS rencontre lui-même la Terre; mais alors l'éclipse totale ou annulaire ne sera visible que d'une très petite partie de la Terre, et sa durée sera fort courte. Nous nous contenterons donc d'examiner le cas où l'éclipse est centrale, et nous déterminerons simplement la ligne de centralité, c'est-à-dire le lieu géométrique des points qui voient l'éclipse centrale. La connaissance de cette ligne suffira pour la détermination approchée des points qui peuvent voir l'éclipse totale ou annulaire, car l'ensemble de ces points forme évidemment une zone fort étroite de part et d'autre de la ligne de centralité; au surplus, il serait facile de déterminer rigoureusement cette zone, qui est limitée par l'enveloppe de la courbe d'intersection avec la Terre du cône d'ombre circonscrit extérieurement à la Lune et au Soleil: il suffirait d'appliquer les principes analogues à ceux qui nous ont servi dans la précédente étude.

Comme il y a intérêt à déterminer la ligne de centralité avec précision, nous ne négligerons ici que la réfraction. Pour un point M de cette ligne, on a les conditions

$$\xi = x, \quad \eta = y.$$

Faisons alors

$$\sin d = p \sin D, \quad (1-\alpha) \cos d = p \cos D,$$

de sorte que p et D sont des fonctions du temps, faciles à réduire en tables et à interpoler. Posons aussi:

$$x = \cos \beta \sin \gamma, \quad \frac{y}{p} = \cos \beta \cos \gamma,$$

$\cos \beta$ étant positif. Dans ces conditions on a, d'après les valeurs générales de ξ, η :

$$\begin{cases} \xi = \cos \psi \sin (H-L) = \cos \beta \sin \gamma, \\ \frac{\eta}{p} = \cos D \sin \psi - \sin D \cos \psi \cos (H-L) = \cos \beta \cos \gamma; \end{cases}$$

on peut donc encore écrire

$$\sin D \sin \psi + \cos D \cos \psi \cos (H-L) = \pm \sin \beta,$$

et l'on a par suite, pour déterminer le lieu cherché, les équations

$$\begin{cases} \cos \psi \sin (H-L) = \cos \beta \sin \gamma, \\ \cos \psi \cos (H-L) = -\sin D \cos \beta \cos \gamma \pm \cos D \sin \beta, \\ \sin \psi = \cos D \cos \beta \cos \gamma \pm \sin D \sin \beta. \end{cases}$$

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit, comme on le voit, que l'on puisse déterminer l'angle β , c'est-à-dire que l'on ait

$$x^2 + \frac{y^2}{p^2} < 1.$$

En confondant p avec 1, la condition approchée de l'éclipse centrale est donc $\mu < 1$, ainsi qu'il était évident a priori.

Sous la condition indiquée, il y a deux solutions; mais une seule convient, si l'on veut que l'éclipse soit visible; c'est évidemment celle qui correspond à la plus grande valeur de ζ . Or, on a

$$\zeta = \left(1 - \alpha \frac{1}{1-\alpha}\right) p \sin D \cos D \cos \beta \cos \gamma \pm \left((1-\alpha) \sin^2 D + \frac{1}{1-\alpha} \cos^2 D\right) p \sin \beta,$$

par suite, p étant choisi positif, il faut prendre le signe +.

Les points limites de la ligne de centralité correspondent à $\sin \beta = 0$, ou bien

$$x^2 + \frac{y^2}{p^2} = 1.$$

Les quantités x et $\frac{y}{p}$ varient d'une façon sensiblement uniforme; prenons donc une origine du temps voisine de la conjonction, et appelons $x_0, \left(\frac{y}{p}\right)_0, x'_0, \left(\frac{y}{p}\right)'_0$, les valeurs initiales de x et $\frac{y}{p}$, ainsi que de leurs dérivées.

$$\text{Posons de plus } x_0 = m \sin M, \quad x'_0 = n \sin N,$$

$$\left(\frac{y}{p}\right)_0 = m \cos M, \quad \left(\frac{y}{p}\right)'_0 = n \cos N;$$

on aura les époques qui correspondent aux limites de la ligne de centralité en faisant

$$\begin{cases} m \sin M + n \sin N \cdot t = \sin \gamma, \\ m \cos M + n \cos N \cdot t = \cos \gamma, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \sin(\gamma - N) = m \sin(M - N), \\ t = -\frac{m}{n} \cos(M - N) + \frac{\cos(\gamma - N)}{n} = \frac{m}{n} \frac{\sin(M - \gamma)}{\sin(\gamma - N)}. \end{cases}$$

On pourra faire, s'il est nécessaire, de nouvelles approximations.

Occultations d'étoiles par la Lune — La théorie de l'occultation d'une étoile par la Lune est identique à celle d'une éclipse de Soleil, mais plus simple. Il suffit de supposer la distance r infinie et par suite, R restant fixe, le demi-diamètre apparent s nul. Gardant alors toutes les notations précédentes, on voit d'abord que la direction Oz sera la direction même de l'étoile, de sorte que $a = \alpha$, $d = \delta$; et ces quantités seront constantes.

Il n'y a pas lieu ici de parler de phase, car les seuls phénomènes observables sont l'immersion de l'étoile et son émersion, c'est-à-dire le commencement et la fin de l'occultation. La condition pour que d'un point M , on voie l'un de ces phénomènes au temps t est évidemment que ce point soit situé sur le cylindre circonscrit à la Lune parallèlement à Oz ; en d'autres termes, on doit avoir

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = R^2,$$

c'est-à-dire que l'on doit toujours faire $l = R$.

En faisant

$$x - \xi = R \sin Q, \quad y - \eta = R \cos Q,$$

l'angle de position de l'étoile par rapport au centre de la Lune, compte comme on a dit plus haut, est toujours $\pi + Q$.

Le calcul des époques de l'immersion et de l'émersion pour un lieu donné se fera comme pour l'éclipse du Soleil.

La prédiction générale de l'occultation sera toute

semblable à celle d'une éclipse de Soleil ; il faudra seulement faire $u_1 = R$. La condition d'existence de l'occultation sera $\mu < 1 + R$.

Passages de Mercure et de Venus sur le Soleil.

Ces phénomènes sont encore identiques aux éclipses de Soleil : il suffit de remplacer la Lune par la planète. Mais comme nous l'avons déjà dit, on doit profiter de la petitesse des parallaxes des deux astres pour simplifier la théorie.

Nous garderons aux lettres les mêmes significations que dans le cas des éclipses de Soleil, la planète V remplaçant la Lune L .

Si P est le pôle, considérons le triangle PSV , vu du centre de la Terre à l'époque t , et dans ce triangle faisons $SV = \sigma$, $PSV = \chi'$, $PVS = \pi - \chi$; χ' est compté de PS vers SV dans le sens direct, et est l'angle de position de V par rapport à S , compté dans le sens des coordonnées équatoriales ; de même χ est compté dans le sens direct, de PV vers la direction SV .

Pour plus de symétrie, employons les formules de Delambre, qui donnent

$$\begin{cases} \sin \frac{\sigma}{2} \sin \frac{\chi + \chi'}{2} = \cos \frac{\delta + \delta'}{2} \sin \frac{\alpha - \alpha'}{2}, \\ \sin \frac{\sigma}{2} \cos \frac{\chi + \chi'}{2} = \sin \frac{\delta - \delta'}{2} \cos \frac{\alpha - \alpha'}{2}. \end{cases}$$

Posons

$$\frac{\chi + \chi'}{2} = \varrho, \quad \frac{\alpha + \alpha'}{2} = \alpha_1, \quad \frac{\alpha - \alpha'}{2} = \alpha_2, \quad \frac{\delta + \delta'}{2} = \delta_1, \quad \frac{\delta - \delta'}{2} = \delta_2;$$

on aura pour exprimer que la distance géocentrique des centres S et V du Soleil et de la Lune est σ , les équations.

$$\begin{cases} \sin \frac{\sigma}{2} \sin \varrho = -\cos \delta_1 \sin \alpha_2, \\ \sin \frac{\sigma}{2} \cos \varrho = \sin \delta_2 \cos \alpha_2; \end{cases}$$

et ϱ sera d'une façon suffisamment approchée χ .

Si l'on fait $x = -\cos \delta_1 \sin \alpha_2$, $y = \sin \delta_2 \cos \alpha_2$,

ces quantités varient d'une façon uniforme pendant la durée du passage ; si donc on choisit une origine du temps voisine de la conjonction du Soleil et de la planète, et que l'on appelle x_0, y_0, x'_0, y'_0 les valeurs initiales de x, y et de leurs dérivées, toujours faciles à calculer, on aura

$$x = x_0 + x'_0 t, \quad y = y_0 + y'_0 t;$$

et en faisant

$$\begin{cases} x_0 = m \sin M, & x'_0 = n \sin N, \\ y_0 = m \cos M, & y'_0 = n \cos N, \end{cases}$$

on aura

$$\begin{cases} \sin \frac{\sigma}{2} \sin Q = m \sin M + n \sin N \cdot t, \\ \sin \frac{\sigma}{2} \cos Q = m \cos M + n \cos N \cdot t; \end{cases}$$

d'où, σ étant donné,

$$\begin{cases} \sin \frac{\sigma}{2} \sin (Q - N) = m \sin (M - N), \\ n t = -m \cos (M - N) + \sin \frac{\sigma}{2} \cos (Q - N). \end{cases}$$

On aura ainsi une époque t correspondant à une valeur donnée de σ , et l'angle Q , qui lui est adjoint.

Considérons maintenant un lieu M de la Terre, de latitude φ et de longitude L ; φ' sera la latitude géocentrique et ρ la distance au centre de la Terre. Résolvons le même problème pour ce lieu; il faut évidemment remplacer $\alpha, \alpha', \delta, \delta'$ par $\alpha + d\alpha, \alpha' + d\alpha', \delta + d\delta, \delta' + d\delta'$, en appelant $d\alpha, d\alpha', d\delta, d\delta'$ les corrections de parallaxe; comme ces corrections sont très petites, nous pourrions les considérer comme des différentielles, et en appelant toujours t et Q , les valeurs précédemment déterminées, nous prendrions les véritables valeurs des inconnues sous la forme

$$t + dt, \quad Q + dQ;$$

de plus pour calculer $d\alpha, d\alpha', \dots$ nous donnerons à α, α', \dots leurs valeurs à l'époque t , qui sont connues

Appelons dx , dy , les accroissements de x et y dus à la parallaxe; on aura donc

$$\begin{cases} \sin \frac{\sigma}{2} \cos Q \, dQ = n \sin N \, dt + dx, \\ -\sin \frac{\sigma}{2} \sin Q \, dQ = n \cos N \, dt + dy, \end{cases}$$

D'où

$$n \cos(Q-N) \, dt = -dx \cdot \sin Q - dy \cos Q.$$

Il est inutile de calculer dQ , car on n'a besoin que d'une valeur approchée de Q .

Tout revient donc à calculer dx et dy .

$$\text{On a } d\alpha = \omega \cdot A, \quad d\delta = \omega \cdot B,$$

$$d\alpha' = \omega' \cdot A', \quad d\delta' = \omega' \cdot B',$$

A et B étant des fonctions de α et δ , qui deviennent A' et B' pour α' et δ' .

On a $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha' = \alpha_1 - \alpha_2$, $\delta = \delta_1 + \delta_2$, $\delta' = \delta_1 - \delta_2$; si donc A_1 et B_1 sont les valeurs de A et B pour α_1 et δ_1 , on a

$$\begin{cases} A = A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} \alpha_2 + \frac{\partial A_1}{\partial \delta_1} \delta_2 + \dots, \\ A' = A_1 - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} \alpha_2 - \frac{\partial A_1}{\partial \delta_1} \delta_2 + \dots, \\ B = B_1 + \frac{\partial B_1}{\partial \alpha_1} \alpha_2 + \frac{\partial B_1}{\partial \delta_1} \delta_2 + \dots, \\ B' = B_1 - \frac{\partial B_1}{\partial \alpha_1} \alpha_2 - \frac{\partial B_1}{\partial \delta_1} \delta_2 + \dots; \end{cases}$$

d'où l'on a $dx = -\cos \delta_1 \cos \alpha_2 \, d\alpha_2 + \sin \delta_1 \sin \alpha_2 \, d\delta_2$,

$$dy = -\sin \delta_1 \sin \alpha_2 \, d\alpha_2 + \cos \delta_1 \cos \alpha_2 \, d\delta_2;$$

remarquons que α_2 et δ_2 sont petits; en négligeant les produits des parallaxes par les termes du second ordre en α_2 et δ_2 , il vient

$$\begin{cases} dx = -\frac{\omega - \omega'}{2} \cdot A_1 \cos \delta_1 + \frac{\omega + \omega'}{2} \left[(B_1 \sin \delta_1 - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} \cos \delta_1) \alpha_2 - \frac{\partial A_1}{\partial \delta_1} \cos \delta_1 \cdot \delta_2 \right], \end{cases}$$

$$\left\{ dy = \frac{\bar{\omega} - \bar{\omega}'}{2} B_1 + \frac{\bar{\omega} + \bar{\omega}'}{2} \left(\frac{\partial B_1}{\partial \alpha_1} \alpha_2 + \frac{\partial B_1}{\partial \delta_1} \delta_2 \right) \right.$$

Les formules de la parallaxe donnent, en appelant θ le temps sidéral du méridien origine correspondant à l'époque t ,

$$\left\{ \begin{aligned} A_1 \cos \delta_1 &= -\rho \cos \varphi' \sin(\theta - L - \alpha_1), \\ B_1 &= \rho \cos \varphi' \sin \delta_1 \cos(\theta - L - \alpha_1) \\ &\quad - \rho \sin \varphi' \cos \delta_1; \end{aligned} \right.$$

on en déduit

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial B_1}{\partial \alpha_1} &= -\frac{\partial A_1}{\partial \delta_1} \cos^2 \delta_1, \\ \frac{\partial B_1}{\partial \delta_1} &= \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} - B_1 \operatorname{tg} \delta_1 = \rho \cos \varphi' \cos \delta_1 \cos(\theta - L - \alpha_1) \\ &\quad + \rho \sin \varphi' \sin \delta_1; \end{aligned} \right.$$

remarquons alors que l'on a avec la même exactitude

$$\alpha_2 \cos \delta_1 = -\sin \frac{\sigma}{2} \sin Q, \quad \delta_2 = \sin \frac{\sigma}{2} \cos Q,$$

on a finalement

$$\begin{aligned} n \cos(Q - N) dt &= \frac{\bar{\omega} - \bar{\omega}'}{2} \left[\rho \cos \varphi' \left(-\sin Q \sin(\theta - L - \alpha_1) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \cos Q \sin \delta_1 \cos(\theta - L - \alpha_1) \right) + \rho \sin \varphi' \cos Q \cos \delta_1 \right] \\ &\quad - \frac{\bar{\omega} + \bar{\omega}'}{2} \sin \frac{\sigma}{2} \left(\rho \cos \varphi' \cos \delta_1 \cos(\theta - L - \alpha_1) \right. \\ &\quad \left. + \rho \sin \varphi' \sin \delta_1 \right). \end{aligned}$$

Pour calculer facilement cette formule, faisons

$$\left\{ \begin{aligned} f \sin F &= \frac{\bar{\omega} + \bar{\omega}'}{\bar{\omega} - \bar{\omega}'} \sin \frac{\sigma}{2}, \\ f \cos F &= \cos Q; \end{aligned} \right.$$

puis

$$\left\{ \begin{aligned} g \sin G &= \sin Q, \\ g \cos G &= f \sin(\delta_1 + F); \end{aligned} \right.$$

on a alors

$$n \cos(Q - N) dt = \frac{\bar{\omega} - \bar{\omega}'}{2} \left\{ \rho \sin \varphi' f \cos(\delta_1 + F) - \rho \cos \varphi' g \cos(G + \alpha_1) \right\},$$

formule qui permettra de passer facilement de la prévision du passage pour le centre de la Terre à celle pour un lieu quelconque.

Pour avoir les contacts extérieurs, on fera $\sigma = \rho' + \rho$; pour les contacts intérieurs, on fera $\sigma = \rho' - \rho$; ceci est légitime car ρ et ρ' ne sont affectés par la parallaxe que d'une façon insensible.

Quelle est la condition de possibilité du passage ?
Il faut

$$|m \sin (M-N)| < \frac{\rho' + \rho}{2}$$

Employons les coordonnées écliptiques, de sorte que la latitude β' est nulle; prenons comme origine du temps le moment même de la conjonction en longitude, et soit β_0 la latitude de la planète à ce moment. On a alors $x_0 = 0$, $y_0 = \sin \frac{\beta_0}{2}$, d'où $M = 0$, $m = \left| \sin \frac{\beta_0}{2} \right|$.

On a de plus

$$x'_0 = -\frac{1}{2} \cos \frac{\beta_0}{2} \frac{d(\lambda - \lambda')}{dt}, \quad y'_0 = \frac{1}{2} \cos \frac{\beta_0}{2} \frac{d\beta}{dt},$$

d'où

$$\cotg N = -\frac{d\beta}{d(\lambda - \lambda')};$$

N est voisin de 90° , et on peut prendre pour condition approchée

$$|\beta_0| < \rho',$$

en négligeant ρ .

La latitude géocentrique β_0 est donc petite. Appelons b la latitude héliocentrique de la planète; r et r' étant toujours les distances géocentriques de la planète et du Soleil, la distance ρ du Soleil à la planète vaut très probablement $r' - r$, et l'on a l'égalité évidente

$$r \sin \beta_0 = \rho \sin b,$$

d'où

$$b = \beta_0 \frac{r' - r}{\rho}$$

Il faut donc avoir pour que le passage ait lieu

$$|b| < \rho' \left(\frac{r'}{\rho} - 1 \right),$$

au moins d'une façon approchée.

La planète sera donc dans le voisinage de l'un de

des nœuds, et le Soleil aura une longitude voisine de celle du nœud ascendant ou descendant de la planète.

Pour Vénus, par suite, les passages auront lieu dans les environs du 8 Décembre (nœud ascendant) ou du 6 Juin (nœud descendant). Comme $\frac{r}{R}$ est presque constant à cause du peu d'excentricité des orbites de la Terre et de Vénus, ces deux circonstances offrent des chances égales. Les passages de Décembre ont pour dates, entre 1600 et 2100 : 1639, 1874, 1882 ; ceux de Juin, 1761, 1769, 2004, 2012 :

Pour Mercure les passages ont lieu vers le 9 Novembre (nœud ascendant) ou vers le 7 Mai (nœud descendant) ; mais la grandeur de l'excentricité de Mercure rend les passages de Mai moins fréquents : en effet, p est plus petit sensiblement en Novembre qu'en mai, et la limite supérieure de $|b|$ est plus grande dans le premier cas que dans le second. Les passages de Novembre ont pour dates 1894, 1907, 1914, 1927, 1940 ; ceux de Mai, 1891, 1924, 1937,

Table des Matières.

	pages
Chapitre I. Trigonométrie sphérique	1
— II. La Terre	22
— III. Coordonnées astronomiques. Temps	30
— IV. Changement de coordonnées	39
— V. Mouvement diurne	50
— VI. Réfraction astronomique	57
— VII. Parallaxe	85
— VIII. Aberration	99
— IX. Notions de mécanique céleste	108
— X. Précession et Nutation	126
— XI. Positions apparentes des astres	139
— XII. Mouvement du Soleil. Temps	145
— XIII. Mouvement géocentrique des planètes	154
— XIV. Mouvement de la Lune et des satellites	162
— XV. Eclipses	174

A LA MÊME LIBRAIRIE

- DUHEM (P.).** — Les sources des Théories physiques. Les origines de la Statique. 2 vol., chaque, 1905-1906 . . . 10 fr. » »
- CHWOLSON (O. D.).** — Traité de Physique, trad. Ed. DAVAUX. 4 vol. grand in-8, se vendant séparément. Tome I, fasc. I. Introduction, Mécanique, Méthodes et Instruments de mesure. 420 pages, avec figures, 1906 16 fr. » »
- Tome I, fasc. II. L'état gazeux des corps, avec 60 figures dans le texte 6 fr. » »
- Tome II, fasc. I. Emission et Absorption de l'énergie rayonnante. Vitesse de propagation. Réflexion et réfraction, avec 105 figures 6 fr. » »
- Tome II, fasc. II. L'indice de réfraction. Dispersion et transformations de l'énergie rayonnante, avec 157 figures, 1906 10 fr. » »
- DUHEM (P.).** — Thermodynamique et Chimie. 1902, grand in-8, 500 pages et figures. 15 fr. » »
- KCENIGS (G.).** — Leçons de Cinématique théorique, avec notes de MM. DARBOUX et COSSERAT. Grand in-8, 500 pages, 1897 15 fr. » »
- GOUSAT (E.).** — Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. 2 volumes grand in-8, 1896-98 18 fr. » »
- Van't HOFF (J.-H.).** — La Chimie Physique et ses applications. Huit conférences faites à Chicago à l'occasion du Centenaire de la fondation de l'Université; trad. par J. CORVISY. 1903 3 fr. 50
- BRILLOUIN (M.).** — Leçons professées au Collège de France, sur la propagation de l'Électricité, Histoire et théorie. 400 pages. Nombreuses figures et planches, grand in-8. 1903. 15 fr. » »
- HADAMARD (J.J.).** — Leçons professées au Collège de France sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique, grand in-8, 400 pages, figures. 1903 18 fr. » »
- DUHEM (P.).** — L'Évolution de la Mécanique, in-8, 350 pages. 1903 5 fr. » »
- TANNERY (J.).** — Introduction à la Théorie des fonctions d'une variable. 2^e édition en 2 volumes. Tome I, 1904 14 fr. » »
- MACH (E.).** — La Mécanique, Exposé historique et critique de son développement. Trad. sur la 4^e édit. par Ed. BERTRAND (avec introduction de Em. PICARD). 500 pages avec figures et portraits, 1904 15 fr. » »
- HENRI (V.).** — Cours de Chimie physique avec applications à la biologie et à la chimie (Cours libre professé à la Faculté des Sciences). Le premier fascicule (Chap. I-XVI) a paru. Prix de souscription à l'ouvrage complet (environ 800 pages), 1906 18 fr. » »
- ROUSE BALL (W.).** — Histoire des Mathématiques. Traduction FREUND: 2 vol. grand in-8. Tome I (De l'antiquité à Huygens). 400 pages, 1906 12 fr. » »
- SWARTS (Fr.).** — Cours de Chimie organique de l'Université de Gand. 1906. Grand in-8, 700 pages 15 fr. » »
- MAILLARD.** — Cours d'Astronomie de l'Université de Lausanne. Tome I, 1906 7 fr. 50
- GRUEY (L.-J.).** — Exercices astronomiques, grand in-8, 346 p., 22 pl. gravées 15 fr. » »
- D'ABBADIE (A.).** — Géodésie d'Éthiopie ou triangulation d'une partie de la Haute-Éthiopie, publié par R. Radau. Grand in-4 de 504 pages, avec 11 cartes et 10 planches 30 fr. » »
- LAME (G.).** — Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie. Réimpression fac-similé (1903) de ce rarissime ouvrage 5 fr. » »

SAINT-AMAND, CHEZ, — IMPRIMERIE DUSSENE