

Q 13506

3

ŒUVRES  
COMPLÈTES  
DE LAPLACE,

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

PAR

MM. LES SECRÉTAIRES PERPÉTUELS.

TOME TROISIÈME.

48

10 prunelle



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE  
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,  
SUCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,  
Quai des Augustins, 55.

M DCCC LXXVIII







- ATLAS DES ANNALES DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS.** 1<sup>re</sup>, 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup>, 4<sup>e</sup>, 5<sup>e</sup>, 6<sup>e</sup>, 7<sup>e</sup>, 8<sup>e</sup> et 9<sup>e</sup> Li  
VRAISONS, comprenant 54 cartes écliptiques.  
Chaque livraison, composée de 6 cartes, se vend séparément. 12 fr.
- ATLAS MÉTÉOROLOGIQUE DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS,** publié avec le concours de l'Association scientifique de France. Tome VIII, année 1876. Un volume in-folio oblong de texte, et un Atlas même format contenant 56 cartes; 1877. 20 fr.  
Pour les Atlas des années précédentes, voir le Catalogue général.
- BABINET,** Membre de l'Institut (Académie des Sciences). — Études et Lectures sur les Sciences d'observation et leurs applications pratiques. 8 vol. in-12.  
Chaque Volume se vend séparément. 2 fr. 50 c.
- BABINET,** Membre de l'Institut, et **HOUSEL,** Professeur de Mathématiques. — Calculs pratiques appliqués aux Sciences d'observation. In-8, avec 75 figures dans le texte; 1857. 6 fr.
- BACHET,** sieur de **MÉZIRIAC.** — Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres. 4<sup>e</sup> éd., revue, simplifiée et augmentée par A. Labosne. Petit in-8, caractères elzéviens, titre en deux couleurs; 1879.  
Tirage sur papier vélin..... 6 fr.  
Tirage sur papier vergé..... 8 fr.
- BADUREAU (A.),** Ingénieur des Mines. — Géométrie. Mémoire sur les figures isocèles. (Extrait du Journal de l'École Polytechnique, XLIX<sup>e</sup> Cahier). Grand in-4; 1881. 3 fr.
- BELLANGER (C.-A.),** Professeur d'Hydrographie. — Petit Catéchisme de Machine à vapeur, à l'usage des candidats aux grades de la marine de commerce et de toutes les personnes qui veulent acquérir sur ce sujet des connaissances élémentaires. 3<sup>e</sup> édition. Petit in-8, avec Atlas de 6 planches. 3 fr.
- BERNOUILLI (P.-M.-N.).** — La Règle à Calcul expliquée, ou Guide du Calculateur à l'aide de la Règle logarithmique à tiroir. Fort volume in-12 avec pl. 5 fr.
- BERNOUILLI (P.-M.-N.).** — Guide du Meunier et du Constructeur de Moulins. 1<sup>re</sup> Partie : Construction des moulins. 2<sup>e</sup> Partie : Meunerie. 2 vol. in-8 de 916 pages, avec 22 planches contenant 638 figures; 1863. 12 fr.
- BERRY (C.),** Lieutenant de vaisseau. — Théorie complète des occultations, à l'usage spécial des officiers de Marine et des astronomes. Publication approuvée par le Bureau des Longitudes, et autorisée par le Ministre de la Marine. In-4, avec figures; 1880. 6 fr.
- BERTHELOT (M.),** Membre de l'Institut, Président de la Commission des substances explosives. — Sur la force des matières explosives, d'après la Thermo-chimie. 2 beaux vol. gr. in-8 avec figures; 1883. 30 fr.  
Cet Ouvrage contient le résultat des expériences faites par l'auteur depuis treize ans. Il les a groupées à l'aide d'une théorie générale, fondée sur la seule connaissance des métamorphoses chimiques et des chaleurs de formation des composés qui y concourent. On y trouve la mesure de toutes ces quantités de chaleur, l'étude de l'onde explosive, celle de la fixation électrique de l'azote, la classification des explosifs et l'examen spécial des plus importants; l'histoire de l'origine de la poudre, suivie par des Tables et des Index développés, termine l'Ouvrage.
- BERTHELOT (M.),** Membre de l'Institut, **COULIER,** Pharmacien principal de l'armée, et **D'ALMEIDA,** Professeur de Physique au Lycée Henri IV. — Vérification de l'aréomètre de Baumé. In-8; 1873. 2 fr.
- BERTHELOT (M.).** — Leçons sur les Méthodes générales de synthèse en Chimie organique. In-8; 1864. 8 fr.
- BERTRAND (J.),** Membre de l'Institut. — Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral.  
CALCUL DIFFÉRENTIEL. In-4; 1864..... (Rare).  
CALCUL INTÉGRAL (*Intégrales définies et indéfinies*). In-4 de 720 p.; avec 88 fig. dans le texte; 1870... (Rare).  
Le troisième et dernier Volume, CALCUL INTÉGRAL (*Équations différentielles*), est en préparation.
- BIEHLER,** Directeur des Études à l'École préparatoire du Collège Stanislas. — Sur la théorie des Équations (Thèse d'Algèbre). In-4; 1879. 5 fr.
- BIEHLER.** — Sur les équations linéaires. In-8; 1880. 1 fr. 25 c.
- BIEHLER (Ch.).** — Théorie des points singuliers dans les courbes algébriques. In-8, avec fig.; 1882. 1 fr. 75 c.
- BIEHLER (Ch.).** — Sur la construction d'une courbe algébrique autour d'un de ses points. In-8; 1883. 1 fr.
- BILLET,** Professeur de Physique à la Faculté des Sciences de Dijon. — Traité d'Optique physique. 2 forts vol. in-8, avec 14 pl. composées de 337 fig.; 1858-1859. 15 fr.
- BIOT,** Membre de l'Académie des Sciences. — Traité élémentaire d'Astronomie physique. 3<sup>e</sup> édition, corrigée et augmentée. 5 vol. in-8, avec 94 planches; 1857. 40 fr.
- BJERKNES,** professeur à Christiania. — Phénomènes hydrodynamiques inversement analogues à ceux de l'électricité et du magnétisme. (Compte rendu par BERTIN). In-8, avec figures; 1882. 1 fr.
- BLAS (G.),** Professeur à l'Université de Louvain, et **MIEST,** Ingénieur. — Essai d'application de l'électrolyse à la Métallurgie, avec un procédé nouveau pour le traitement électrolytique des minerais sulfurés et l'extraction des métaux et du soufre. Grand in-8; 1882. 2 fr.
- BLÉTRY (Frères).** — Manuel de l'Inventeur. 4<sup>e</sup> édit. In-12. 1 fr.
- BOILEAU (P.),** Correspondant de l'Institut. — Notions nouvelles d'Hydraulique, concernant principalement les tuyaux de conduite, les canaux et les rivières. 2<sup>e</sup> édit., revue et augmentée par l'Auteur. In-4; 1881. 8 fr. 50 c.
- BONNAMI (H.),** Conducteur des Ponts et Chaussées. — Manuel de l'opérateur au tachéomètre, suivi d'une Note sur l'emploi de l'instrument dans l'application des tracés. In-8, avec 19 figures dans le texte; 1883. 3 fr.
- BORDAS-DEMOULIN.** — Le Cartésianisme, ou la véritable rénovation des Sciences, Ouvrage couronné par l'Institut; suivi de la *Théorie de la substance* et de celle de *l'infini*. 2<sup>e</sup> édition. In-8; 1874. 8 fr.
- BOSET,** Professeur de Mathématiques supérieures à l'Athénée royal de Namur. — Traité de Géométrie analytique à deux dimensions, précédé des *Éléments de la Trigonométrie rectiligne et sphérique*. In-8<sup>e</sup>, avec 322 figures dans le texte; 1878. 12 fr.
- BOSET.** — Traité élémentaire d'Algèbre. In-8; 1880. 7 fr. 50 c.
- BOUCHARLAT (J.-L.).** — Théorie des courbes et des surfaces du second ordre, ou Traité complet d'application de l'Algèbre à la Géométrie. 3<sup>e</sup> édition, revue, corrigée et augmentée de Notes et des Principes de la Trigonométrie rectiligne. In-8, avec pl.; 1875. 8 fr.
- BOUCHARLAT (J.-L.).** — Éléments de Calcul différentiel et de Calcul intégral. 8<sup>e</sup> édition, revue et annotée par Laurent, Répétiteur à l'École Polytechnique. In-8, avec planches; 1881. 8 fr.
- BOUCHARLAT (J.-L.).** — Éléments de Mécanique. 4<sup>e</sup> édition. 1 volume in-8, avec 10 planches; 1861. 8 fr.
- BOUR (Edm.),** Ingénieur des Mines. — Cours de Méca-



- nique et Machines, professé à l'École Polytechnique. *Cinématique*. In-8, avec Atlas de 30 planches in-4 gravées sur cuivre; 1865. 10 fr.
- Statique et travail des forces dans les machines à l'état de mouvement uniforme*, publié par *Phillips*, Professeur de Mécanique à l'École Polytechnique, avec la collaboration de *Collignon* et *Kretz*. In-8, avec Atlas de 8 planches contenant 106 figures; 1868. 6 fr.
- Dynamique et Hydraulique*, avec 125 figures dans le texte; 1874. 7 fr. 50 c.
- BOURDAIS** (Jules), Ingénieur. — *Traité pratique de la résistance des matériaux appliquée à la construction des ponts, des bâtiments, des machines*, précédé de *Notions sommaires d'Analyse et de Mécanique*, suivi de *Tables numériques* donnant les moments d'inertie de plus de 500 sections de poutres différentes. In-8, avec planches. 6 fr.
- BOURDON**, ancien Examinateur d'admission à l'École Polytechnique. — *Éléments d'Arithmétique*. 36<sup>e</sup> édit. In-8; 1878. (*Adopté par l'Université.*) 4 fr.
- BOURDON**. — *Application de l'Algèbre à la Géométrie*, comprenant la Géométrie analytique à deux et à trois dimensions. 9<sup>e</sup> édit., revue et annotée par *Darboux*. In-8, avec pl.; 1880. (*Adopté par l'Université.*) 9 fr.
- BOURDON**. — *Éléments d'Algèbre*, avec Notes de *Prouhet*. 15<sup>e</sup> éd. In-8; 1877. (*Adopté par l'Univ.*) 8 fr.
- BOURDON**. — *Trigonométrie rectiligne et sphérique*. 2<sup>e</sup> éd., revue et annotée par *Brisse*. In-8, avec figures dans le texte; 1877. (*Adopté par l'Université.*) 3 fr.
- BOUSSINGAULT**, Membre de l'Institut. — *Agronomie, Chimie agricole et Physiologie*. 2<sup>e</sup> édition. 6 volumes in-8, avec planches sur cuivre et figures dans le texte; 1860-1861-1864-1868-1874-1878-1884. 32 fr.
- Chacun des tomes III et IV se vend séparément.* 5 fr.
- Les tomes V, VI et VII se vendent séparément.* 6 fr.
- Le tome VIII est sous presse.*
- BOUSSINGAULT**. — *Études sur la transformation du fer en acier par la cémentation*. In-8; 1875. 4 fr.
- BOUTY**, Professeur de Physique au Lycée Saint-Louis. — *Théorie des Phénomènes électriques (Théorie du potentiel)*. In-8, avec figures dans le texte et une planche; 1878. 2 fr. 50 c.
- BOUTY**. — *Notes sur les progrès récents de la Physique*. In-8, avec 58 belles figures; 1882. 1 fr. 50 c.
- BRAHY** (Ed.), Docteur ès Sciences physiques et mathématiques. — *Exercices méthodiques de Calcul différentiel*. 1 vol. in-8; 1867. 4 fr.
- BREITHOF** (N.), Professeur à l'Université de Louvain, Membre des Académies royales des Sciences de Madrid, de Lisbonne, etc. — *Traité de Géométrie descriptive*. 2<sup>e</sup> édition, 3 volumes grand in-8, avec trois Atlas.
- Chaque Volume se vend séparément :*
- TOME I.** — *Projections diédriques et projections cotées. Point, Droite et Plan. Rabattements. Rotations. Changements de plan de projection. Nombreux problèmes et exercices.* Grand in-8, avec Atlas in-4 de 32 planches. 2<sup>e</sup> édition; 1880-1881. 9 fr.
- TOME II.** — *Surfaces courbes. Génération et représentation. Plans tangents. Sections planes. Intersections. Surfaces de raccordement. Surfaces canaux. Nombreux problèmes et exercices. Recueil de questions et d'épreuves proposées dans les concours d'admission aux Grandes Ecoles nationales de France.* Grand in-8 de 333 pages, avec Atlas in-4 de 42 planches. 2<sup>e</sup> édition; 1883. 12 fr.
- Les tomes I et II sont à l'usage des candidats à l'École Polytechnique, à l'École Centrale, aux élèves de ces Ecoles, aux élèves des Universités, des Ecoles des Beaux-Arts, des Collèges et Athénées.
- TOME III.** — *Projections axonométriques. Projections obliques et Projections centrales. Point, Droite et Plan. Rabattements. Nombreux problèmes et exercices.* (À l'usage des élèves des Ecoles Polytechniques, des Ecoles supérieures des Arts et Manufactures, des Ecoles Normales des Sciences, etc.). Grand in-8, avec Atlas in-8 de 30 planches. 2<sup>e</sup> édition; 1883. 9 fr.
- BREITHOF** (N.). — *Applications de Géométrie descriptive.*
- TOME I.** — *Les perspectives rapides. Représentation des corps et des surfaces. Perspective des ombres. Nombreuses applications.* (À l'usage des élèves des Ecoles Polytechniques, des Ecoles des Arts et Manufactures, etc.). Grand in-4, lithographié, avec 75 figures dans le texte; 1879. 5 fr.
- TOME II.** — *Perspective linéaire.* (*Sous presse.*)
- BREITHOF** (N.). — *Traité de perspective cavalière.* — Méthode conventionnelle de dessin présentant les avantages de la perspective linéaire et ceux de la méthode des projections orthogonales, à l'usage des Officiers du génie, des Ingénieurs, Architectes, Conducteurs de travaux, Chefs d'atelier, Appareilleurs, Tailleurs de pierre, etc.; des Académies et Ecoles de dessin, Ecoles industrielles, Ecoles des Arts et Métiers, etc. Grand in-8, avec Atlas de 8 planches in-4; 1881. 3 fr. 75 c.
- BRENET** (Michel). — *Histoire de la symphonie à orchestre, depuis ses origines jusqu'à Beethoven inclusivement* (Ouvrage couronné par la Société des Compositeurs de musique). Petit in-8, caractères elzéviens, titre en deux couleurs; 1882. 3 fr.
- BRESSE**, Membre de l'Institut, Professeur de Mécanique à l'École des Ponts et Chaussées. — *Cours de Mécanique appliquée* professé à l'École des Ponts et Chaussées.
- I<sup>re</sup> PARTIE :** *Résistance des matériaux et stabilité des constructions.* In-8, avec figures dans le texte. 3<sup>e</sup> édition, revue et beaucoup augmentée; 1880. 13 fr.
- II<sup>e</sup> PARTIE :** *Hydraulique.* In-8, avec figures dans le texte et une planche. 3<sup>e</sup> édition; 1879. 10 fr.
- III<sup>e</sup> PARTIE :** *Calcul des moments de flexion dans une poutre à plusieurs travées solidaires.* In-8, avec figures dans le texte et Atlas in-folio de 24 planches sur cuivre; 1865. 16 fr.
- Chaque Partie se vend séparément.*
- BREWER** (D<sup>r</sup>). — *La Clef de la Science, ou Explication vraie des faits et des phénomènes des sciences physiques.* 6<sup>e</sup> édition, revue, transformée et considérablement augmentée, par l'Abbé *Moigno*. In-18 jésus, VIII-704 p.; 1881. 4 fr. 50 c.
- BRIOT** (Ch.), Professeur à la Faculté des Sciences de Paris. — *Théorie des fonctions abéliennes.* Un beau volume in-4; 1879. 15 fr.
- BRIOT** (Ch.). — *Essais sur la Théorie mathématique de la Lumière.* In-8, avec fig. dans le texte; 1864. 4 fr.
- BRIOT** (Ch.). — *Théorie mécanique de la chaleur.* 2<sup>e</sup> édition, publiée par *MASCART*, Professeur au Collège de France, Directeur du Bureau central météorologique. In-8, avec fig. dans le texte; 1883. 7 fr. 50 c.
- BRIOT** (Ch.) et **BOUQUET**. — *Théorie des fonctions elliptiques.* 2<sup>e</sup> édition. In-4, avec figures; 1875. 30 fr.
- BRISSE** (Ch.), Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Fontanes, Professeur de Géométrie descriptive à l'École des Beaux-Arts, Répétiteur de Géométrie descriptive et de Stéréotomie à l'École Polytechnique. — *Cours de Géométrie descriptive.*
- I<sup>re</sup> PARTIE**, à l'usage des élèves des classes de Mathé-



matiques élémentaires. Grand in-8, avec figures dans le texte; 1882. 5 fr.

II<sup>e</sup> PARTIE, à l'usage des élèves des classes de Mathématiques spéciales. Grand in-8, avec nombreuses figures dans le texte et planches d'épures. (*Sous presse.*)

BRISSE (Ch.). — Cours de Géométrie descriptive, à l'usage des candidats à l'École de Saint-Cyr. Grand in-8, avec figures dans le texte. (*Sous presse.*)

BRISSE (Ch.). — Cours de Géométrie descriptive, professé à l'École des Beaux-Arts. Grand in-8, avec figures dans le texte; 1882. 5 fr.

BROCH (D<sup>r</sup> O.-J.), Professeur de Mathématiques à l'Université royale de Christiania. — Traité élémentaire des fonctions elliptiques. In-8; 1867. 6 fr.

BROCH (D<sup>r</sup> O.-J.). — Table des Carrés des nombres, arrangée d'après la méthode des Tables de logarithmes. In-4. Édition stéréotypée; tirage de 1881. 2 fr.

BROCH (D<sup>r</sup> O.-J.). — Tableau des Carrés. 50 c.

BROWN (Henry-T.). — Cinq cent et sept mouvements mécaniques. Traduit de l'anglais par HENRI STEVART, ingénieur. Petit in-4<sup>e</sup> cartonné percaline, avec 507 fig. dans le texte; 1880. 3 fr.

BUFFETEAU (Th.). — Exposé sommaire de la situation des chemins de fer devant l'État, le Commerce et l'Industrie. Grand in-8; 1882. 3 fr.

**BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES**, rédigé par Darboux, Hoüel et Tannery, avec la collaboration de André, Battaglini, Beltrami, Bougaïef, Brocard, Günther, Harnack, Laisant, Lampe, Lespault, Mansion, Radau, Rayet, Weyr, etc., sous la direction de la Commission des Hautes Etudes. (Membres : Bouquet, Darboux, Hermite, J.-A. Serret, Tisserand, Philippon secrétaire.) II<sup>e</sup> SÉRIE. Tome VIII (en deux Parties); 1884.

Ce Bulletin mensuel, fondé en 1870, a formé par an, jusqu'en 1872, un volume grand in-8 (Tomes I, II, III). — A partir de cette époque, jusqu'en décembre 1876, le Journal s'est composé de 2 volumes grand in-8 par an (1 volume par semestre, avec Tables). Les Tomes I à XI, 1870 à 1876, composent la I<sup>re</sup> SÉRIE.

La II<sup>e</sup> SÉRIE, qui a commencé en janvier 1877, continue à paraître chaque année en deux Parties ayant une pagination spéciale et pouvant se relier séparément. La première Partie contient : 1<sup>o</sup> Comptes rendus de Livres et Analyses de Mémoires; 2<sup>o</sup> Traductions de Mémoires importants et peu répandus, Réimpression d'Ouvrages rares et Mélanges scientifiques. La deuxième Partie contient : Revue des Publications périodiques et académiques.

Les abonnements sont annuels et partent de janvier.

Prix pour un an (12 numéros) :

Paris..... 18 fr.  
Départements et Union postale..... 20 fr.  
Autres pays..... 24 fr.

La 1<sup>re</sup> Série, Tomes I à XI, 1870 à 1876, se vend 90 fr. Chaque année de cette 1<sup>re</sup> Série se vend séparément. 15 fr.

**BULLETIN ASTRONOMIQUE**, publié sous les auspices de l'Observatoire de Paris, par F. Tisserand, membre de l'Institut, avec la collaboration de G. Bigourdan, O. Callandreau et R. Radau.

Les abonnements sont annuels et partent de janvier.

Prix pour un an (12 numéros) :

Paris..... 16 fr.  
Départements et Union postale..... 18 fr.  
Autres pays..... 20 fr.

In-4<sup>e</sup> carré; DD.

**BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ INTERNATIONALE DES ELECTRICIENS.**

Ce BULLETIN paraît chaque année, en dix ou douze numéros, formant un beau volume de 30 feuilles environ, grand in-8 Jésus.

Les abonnements sont annuels et partent de janvier.

Prix pour un an :

Paris..... 25 fr.  
Départements et Union postale. 27 fr.  
Autres pays..... 30 fr.

Prix du numéro : 2 fr. 50 c.

**BUREAU CENTRAL MÉTÉOROLOGIQUE DE FRANCE.** — Instructions météorologiques, suivies de Tables diverses pour la réduction des observations. 2<sup>e</sup> édition In-8, avec belles figures dans le texte; 1881. 2 fr. 50 c.

**BUREAU INTERNATIONAL DES POIDS ET MESURES: Procès-verbaux des Séances.** In-8 :

ANNÉES 1875-1876. 2 fr.  
ANNÉES 1877 à 1882. Chaque année. 5 fr.

Travaux et Mémoires du Bureau international des Poids et Mesures, publiés par le Directeur du Bureau. Grand in-4.

Tome I, avec figures dans le texte et 2 planches 1881. 30 fr.

Tome II, avec figures dans le texte et 3 planches; 1883. 30 fr.

CABANIÉ, Charpentier, Professeur du Trait de Charpente, de Mathématiques, etc. — Charpente générale théorique et pratique. 2 volumes in-folio avec planches. 2<sup>e</sup> édition. (*Port non compris.*) 50 fr.

On vend séparément : le tome I<sup>er</sup>, Bois droit. 25 fr.  
le tome II, Bois croche. 25 fr.

CAHOURS (Auguste), Professeur à l'École Polytechnique. — Traité de Chimie générale élémentaire. Leçons professées à l'École Centrale des Arts et Manufactures et à l'École Polytechnique. (*Autorisé par décision ministérielle.*)

Chimie inorganique. 4<sup>e</sup> édition. 3 volumes in-18 Jésus avec plus de 200 figures et 8 planches; 1878. 15 fr.

Chaque Volume se vend séparément. 6 fr.

Chimie organique. 3<sup>e</sup> édition, 3 volumes in-18 Jésus avec figures; 1874-1875. 15 fr.

Chaque Volume se vend séparément. 6 fr.

CAMPOU (de), Professeur au Collège Rollin. — Théorie des quantités négatives. In-8, avec figures; 1879. 1 fr. 50 c.

CARNOT. — Réflexions sur la métaphysique du Calcul infinitésimal. 5<sup>e</sup> édition. In-8; 1882. 4 fr.

CARNOT (Sadi), ancien Élève de l'École Polytechnique. — Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance. In-4, suivi d'une Notice biographique sur Sadi Carnot, par CARNOT, Sénateur, et de Notes inédites de Sadi Carnot sur les Mathématiques, la Physique et autres sujets. 2<sup>e</sup> édition, contenant un beau portrait de Sadi Carnot et un fac-simile; 1878. 6 fr.

CARNOY, Professeur à l'Université de Louvain. — Cours de Géométrie analytique. 2 volumes grand in-8, avec figures dans le texte.

On vend séparément :

Géométrie plane; 3<sup>e</sup> édition, 1880. 10 fr.

Géométrie de l'espace; 3<sup>e</sup> édition, 1882. 11 fr.

CARVALLO (Jules), Ancien élève de l'École Polytechnique. — Théorie des nombres parfaits. (Dédié aux élèves de Mathématiques spéciales). In-8; 1883. 1 fr.

CATALAN (E.), ancien Élève de l'École Polytechnique. — Manuel des Candidats à l'École Polytechnique.



Tome I : Algèbre, Trigonométrie, Géométrie analytique à deux dimensions. In-8, avec 167 fig.; 1857. 5 fr.

Tome II : Géométrie analytique à trois dimensions. Mécanique. In-8 avec 139 fig. dans le texte; 1858. 4 fr. Chaque Volume se vend séparément.

CATALAN (E.). — *Traité élémentaire des Séries*. Grand in-8, avec figures; 1860. 5 fr.

CATALAN (E.). — *Cours d'Analyse de l'Université de Liège. Algèbre, Calcul différentiel, 1<sup>re</sup> Partie du Calcul intégral*. 2<sup>e</sup> édition, revue et augmentée. In-8, avec figures dans le texte; 1879. 12 fr.

CAUCHY (A.). — *Œuvres complètes d'Augustin Cauchy*, publiées sous la direction scientifique de l'ACADÉMIE DES SCIENCES et sous les auspices du MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE, avec le concours de *Valson* et *Collet*, docteurs ès sciences. 26 volumes in-4.

I<sup>re</sup> Série. — MÉMOIRES, NOTES ET ARTICLES EXTRAITS DES RECUEILS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES. 11 volumes in-4.

II<sup>e</sup> Série. — MÉMOIRES EXTRAITS DE DIVERS RECUEILS, OUVRAGES CLASSIQUES, MÉMOIRES PUBLIÉS EN CORPS D'OUVRAGE, MÉMOIRES PUBLIÉS SÉPARÉMENT. 15 volumes in-4.

VOLUMES PARUS (I<sup>re</sup> Série).

Tome I, 1882 (*Théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant, d'une profondeur indéfinie*. — *Mémoire sur les intégrales définies*.) 25 fr.

Tome IV, 1884 (*Extraits des Comptes rendus de l'Académie des Sciences*.) 25 fr.

SOUSCRIPTION.

Le Tome V (prix 25 fr.), qui paraîtra en Janvier 1885, est mis en souscription. Le prix de ce Tome est réduit, pour les souscripteurs qui feront leur versement avant le 31 août 1884, à 20 fr.

(Les anciens souscripteurs, qui désirent continuer leur souscription sans avoir à se préoccuper des dates d'apparition des divers Tomes de la Collection, n'auront qu'à envoyer, lorsqu'ils recevront un Volume, la somme de 20 fr. pour leur souscription au Volume suivant; et celui-ci leur sera expédié franco dès son apparition.)

Il vient d'être décidé que les Tomes de la II<sup>e</sup> Série se publieront concurremment avec ceux de la I<sup>re</sup> Série. Le premier volume des *Anciens Exercices de Mathématiques* (Tome VI de la II<sup>e</sup> Série) sera prochainement mis en souscription.

EXTRAIT DE L'AVERTISSEMENT.

« L'Académie des Sciences a décidé la publication des *Œuvres de Cauchy* et l'a confiée aux Membres de la Section de Géométrie. Cette publication comprendra, dans une première Série, les Mémoires extraits des Recueils de l'Académie, et, dans une seconde Série, les Mémoires publiés dans divers Recueils, les Leçons de l'École Polytechnique, l'Analyse algébrique, les anciens et les nouveaux Exercices d'Analyse et de Physique mathématique, enfin les Mémoires séparés.

» Pour répondre à un désir souvent exprimé, l'Académie a voulu publier immédiatement, à la suite du présent Volume, les articles insérés dans les *Comptes rendus* de 1836 à 1857, que leur dispersion rend si difficiles à retrouver, et dont la réunion fera comme une œuvre nouvelle où revivra le génie du grand Géomètre et qui ajoutera encore à l'éclat de son nom. Leur reproduction sera faite en suivant l'ordre chronologique, sans notes ni commentaires, mais après avoir été revue avec le plus grand soin, pour les corrections indispensables, par les Membres de la Section de Géométrie, auxquels ont été adjoints MM. *Valson* et *Collet*...

» En entreprenant cette publication des *Œuvres de Cauchy*, l'Académie n'a pas été guidée seulement par le désir de faire une œuvre utile à la Science; elle a pensé rendre, à l'un de ses plus illustres Membres, un hommage qui témoignerait mieux que tout monument funèbre de son respect pour sa mémoire.... »

*Nota.* — Les volumes ne sont pas publiés d'après leur

classement numérique; on suit l'ordre qui paraît intéresser le plus les lecteurs. La *Table détaillée* des volumes qui composeront les deux Séries est envoyée sur demande.

CAUCHY (le Baron Aug.), Membre de l'Académie des Sciences. — *Sa Vie et ses Travaux*, par *Valson*, Professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble, avec une Préface de M. *Hermitte*, Membre de l'Académie des Sciences. 2 vol. in-8; 1868. 8 fr.

CAVAIGNAC (G.), Député. — *L'État et les tarifs de chemins de fer*. Grand in-8; 1882. 1 fr. 25 c.

CAZIN, Docteur ès Sciences, ancien Professeur au Lycée Fontanes, et ANGOT, Agrégé de l'Université, Docteur ès Sciences. — *Traité théorique et pratique des piles électriques. Mesure des constantes des piles. Unités électriques. Description et usage des différentes espèces de piles*. In-8, avec 105 belles figures dans le texte; 1881. 7 fr. 50 c.

CHARLON (H.). — *Théorie mathématique des Opérations financières*. 2<sup>e</sup> édition. Grand in-8, avec Tables numériques relatives aux emprunts par obligations, Tables numériques relatives aux calculs d'intérêts composés et d'annuités, et Tables logarithmiques de Fedor Thoman relatives aux calculs d'intérêts composés et d'annuités; 1878. 12 fr. 50 c.

CHARLON (H.). — *Théorie élémentaire des Opérations financières*. Grand in-8, avec Tables; 1880. 6 fr. 50 c.

CHASLES. — *Traité des Sections coniques*, faisant suite au *Traité de Géométrie supérieure. Première Partie*. In-8, avec 5 planches gravées sur cuivre, et contenant 133 figures; 1865. 9 fr.

CHASLES. — *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la Géométrie moderne*, suivi d'un *Mémoire de Géométrie sur deux principes généraux de la Science, la Dualité et l'Homographie*. Seconde édition, conforme à la première. Un beau volume in-4 de 850 pages; 1875. (Rare.)

CHASLES. — *Traité de Géométrie supérieure*. Deuxième édition. Un beau volume grand in-8, avec 12 planches; 1880. 24 fr.

CHAVANNES (R.). — *Théorie élémentaire des machines magnéto-électriques et dynamo-électriques. Étude des rendements et de la construction de ces machines*. In-8, avec 2 planches; 1881. 1 fr. 75 c.

CHEVALLIER et MÜNTZ. — *Problèmes de Mathématiques*, avec leurs solutions développées, à l'usage des Candidats au Baccalauréat ès Sciences et aux Écoles du Gouvernement. In-8, lithographié; 1872. 4 fr.

CHEVALLIER et MÜNTZ. — *Problèmes de Physique*, avec leurs solutions développées, à l'usage des Candidats au Baccalauréat ès Sciences et aux Écoles du Gouvernement. 2<sup>e</sup> édition. In-8; 1884. (Sous presse.)

CHEVILLARD, Professeur à l'École des Beaux-Arts. — *Leçons nouvelles de Perspective*. 2<sup>e</sup> édit. In-8, avec Atlas in-4 de 32 planches gravées sur acier; 1878. 12 fr.

CHEVREUL (E.-E.), Membre de l'Institut. — *De la Baguette divinatoire, du Pendule dit explorateur et des Tables tournantes*. In-8; 1854. 3 fr.

CHOQUET, Docteur ès Sciences. — *Traité d'Algèbre*. (Autorisé.) In-8; 1856. 7 fr. 50 c.

CHORON (L.), Ingénieur des Ponts et Chaussées. — *Étude sur le régime général des chemins de fer*. Grand in-8; 1881. 3 fr.

CLAUSEL, Ingénieur des constructions navales. — *Étude*



- sur le rivetage; formules générales permettant de déterminer les proportions rationnelles des joints rivés. Applications diverses et Calculs numériques. 1 volume lithographié, grand in-4° de viii-131 pages, avec figures et 13 Tableaux; 1882. 15 fr.
- CLAUSIUS (R.)**, Professeur à l'Université de Bonn, Correspondant de l'Institut de France. — De la fonction potentielle et du potentiel; traduit de l'allemand, sur la 2<sup>e</sup> édition, par F. Folie. In-8; 1870. 4 fr.
- GLEBSCH (Alfred)**. — Leçons sur la Géométrie, recueillies et complétées par Ferdinand Lindemann, Professeur à l'Université de Fribourg en Brisgau, et traduites par Adolphe Benoist, Docteur en droit. 3 vol. grand in-8°, avec figures dans le texte; 1879-1880-1883.
- TOME I. — *Traité des sections coniques et Introduction à la théorie des formes algébriques.* 12 fr.
- TOME II. — *Courbes algébriques en général et courbes du troisième ordre.* 14 fr.
- TOME III. — *Intégrales abéliennes et Connexes.* 16 fr.
- COLLIN (J.)**. — Traité d'Algèbre élémentaire, à l'usage des candidats au Baccalauréat ès Sciences et aux Écoles du Gouvernement. In-8°; 1882. 5 fr.
- COMBEROUSSE (Charles de)**, Ingénieur, Professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures, et au Conservatoire des Arts et Métiers. — Cours de Mathématiques, à l'usage des Candidats à l'École Polytechnique, à l'École Normale supérieure et à l'École centrale des Arts et Manufactures. 5 vol. in-8, avec fig. dans le texte et planches.
- Chaque Volume se vend séparément :
- TOME 1<sup>er</sup>. — *Arithmétique et Algèbre élémentaire* (avec 38 figures dans le texte). 3<sup>e</sup> édition; 1884. 10 fr.
- On vend à part :
- |                      |       |
|----------------------|-------|
| Arithmétique.        | 4 fr. |
| Algèbre élémentaire. | 6 fr. |
- TOME II. — *Géométrie élémentaire, plane et dans l'espace; Trigonométrie rectiligne et sphérique*, avec 499 figures dans le texte. 2<sup>e</sup> édition; 1882. 12 fr.
- On vend à part :
- |   |       |
|---|-------|
| Géométrie élémentaire, plane et dans l'espace.  | 7 fr. |
| Trigonométrie rectiligne et sphérique, suivie de Tables des valeurs des lignes trigonométriques naturelles. | 5 fr. |
- TOME III. — *Algèbre supérieure*. 2<sup>e</sup> édition. (Sous presse.)
- TOME IV. — *Géométrie analytique, plane et dans l'espace. Éléments de Géométrie descriptive*. 2<sup>e</sup> édit. (Sous presse.)
- TOME V. — *Éléments de Géométrie supérieure, Notions sur la résolution des problèmes*. 2<sup>e</sup> édition. (En préparation.)
- COMBEROUSSE (Ch. de)**, Ingénieur civil, Professeur de Mécanique à l'École Centrale, Ancien Élève et Membre du Conseil de l'École. — Histoire de l'École Centrale des Arts et Manufactures, depuis sa fondation jusqu'à ce jour. Un beau volume grand in-8, orné de 4 planches à l'eau-forte, tirées sur chine; 1879. 12 fr.
- COMMINES DE MARSILLY (de)**. — Recherches mathématiques sur les lois fondamentales du monde physique. In-8; 1865. 1 fr. 50.
- COMMINES DE MARSILLY (de)**. — Recherches mathématiques sur les lois de la matière. In-4; 1868. 9 fr.
- COMMINES DE MARSILLY (de)**, Ancien Élève de l'École Polytechnique. — Les lois de la matière. Essais de Mécanique moléculaire. In-4; 1884. 9 fr.
- COMOY**, Inspecteur général des Ponts et Chaussées en retraite, Commandeur de la Légion d'honneur. — Étude pratique sur les marées fluviales, et notamment sur le mascaret; Application aux travaux de la partie maritime des fleuves. Vol. grand in-8, avec figures dans le texte et Atlas de 10 planches; 1881. 15 fr.
- COMPAGNON (P.-F.)**, ancien Professeur de l'Université.
- *Éléments de Géométrie*. Cet Ouvrage est surtout destiné aux jeunes gens qui se préparent aux Ecoles du Gouvernement. 2<sup>e</sup> édit. In-8, avec fig.; 1876.
- |           |             |
|-----------|-------------|
| Broché.   | 7 fr.       |
| Cartonné. | 7 fr. 75 c. |
- COMPAGNON (P.-F.)**. — Abrégé des Éléments de Géométrie. Cet Ouvrage s'adresse particulièrement aux Éèves des différentes classes de Lettres et aux candidats au Baccalauréat ès Lettres et ès Sciences, ou aux Élèves de l'Enseignement secondaire spécial. 2<sup>e</sup> édition. In-8, avec figures; 1876. (Autorisé par le Conseil supérieur de l'Enseignement secondaire spécial.)
- |           |             |
|-----------|-------------|
| Broché.   | 4 fr. 50 c. |
| Cartonné. | 5 fr. 25 c. |
- COMPAGNON (P.-F.)**. — Questions proposées sur les Éléments de Géométrie, divisées en Livres, Chapitres et paragraphes, et contenant quelques indications *Sur la manière de résoudre certaines questions*. In-8, avec figures dans le texte; 1877. 5 fr.
- COMPOSITIONS** données aux examens de licence ès Sciences mathématiques. Grand in-8; 1884. 1 fr. 50 c.
- CONNAISSANCE DES TEMPS** ou des mouvements célestes à l'usage des Astronomes et des Navigateurs, publiée par le Bureau des Longitudes pour l'an 1885. Grand in-8 de plus de 850 pages, avec cartes.
- |                |             |
|----------------|-------------|
| Prix : Broché. | 4 fr. »     |
| Cartonné.      | 4 fr. 75 c. |
- Pour recevoir l'Ouvrage franco dans les pays de l'Union postale, ajouter 1 fr.
- Depuis le Volume pour l'an 1879, la *Connaissance des Temps* ne contient plus d'Additions, et son prix a été abaissé à 4 fr. Les Mémoires qui composaient autrefois les *Additions* sont publiés dans les *Annales du Bureau des Longitudes* et de l'Observatoire astronomique de Montsouris. (Voir *Annales*.)
- CONSOLIN (B.)**, Professeur du Cours de Voilerie à Brest. — Manuel du Voilier, revu et publié par ordre du Ministre de la Marine. Grand in-8 sur Jésus, de 528 pages et 11 planches; 1859. 12 fr.
- CONSOLIN (B.)**. — Méthode pratique de la Coupe des voiles des navires et embarcations, suivie de Tables graphiques. In-12, avec 3 planches; 1863. 3 fr.
- CONSOLIN (B.)**. — L'Art de voiler les embarcations, suivi d'un Aide-Mémoire de Voilerie. In-12, avec une grande planche; 1866. 2 fr.
- CORNAGLIA**, Ingénieur en chef du Génie civil italien. — De la propagation verticale des ondes dans les liquides. In-4, avec fig. dans le texte; 1882. 2 fr. 50 c.
- COSSON**, Membre de l'Institut. — Sur le projet de création en Algérie et en Tunisie d'une mer intérieure. In-4, avec carte; 1882. 2 fr. 50
- COURTIN**, Ingénieur en chef au chemin de fer de l'État, Professeur à l'École des Mines de Mons. — Éléments de la Théorie mécanique de la Chaleur, contenant les formules nouvelles pour le calcul des machines à air chaud, des machines à air comprimé et des machines à vapeur. In-8° de 166 pages et un Tableau hors texte; 1882. 6 fr.
- CREMONA et BELTRAMI**. — *Collectanea mathematica*, nunc primum edita cura et studio L. Cremona et E. Beltrami, in memoriam Dominici Chelini. Un beau volume in-8, avec un portrait de Chelini et un fac-simile du testament inédit de Nicolò Tartaglia; 1881. 25 fr.
- CROOKES (William)**. — Sur la viscosité des gaz très raréfiés. In-8, avec fig. dans le texte; 1882. 2 fr.
- CROULLEBOIS**, Professeur à la Faculté des Sciences de Besançon. — Théorie des lentilles épaisses. *Interpré-*



- tation géométrique et Exposition analytique des résultats de Gauss.* In-8; 1882. 3 fr. 50 c.
- CULLEY (R.-S.).** — Manuel de Télégraphie pratique. Traduit de l'anglais (7<sup>e</sup> édition), et augmenté de *Notes sur les appareils Breguet, Hughes, Meyer et Baudot, sur les transmissions pneumatiques et téléphoniques*, par HENRI BERGER, ancien Elève de l'École Polytechnique, Directeur-Ingénieur des lignes télégraphiques, et PAUL BARDONNAUT, ancien Elève de l'École Polytechnique, Directeur des postes et des télégraphes. Un beau volume grand in-8, avec plus de 200 figures dans le texte et 7 planches; 1882. Broché. 18 fr. Cartonné à l'anglaise. 20 fr.
- DARBOUX,** Maître de conférences à l'École Normale supérieure. — *Mémoire sur l'équilibre astatique et sur l'effet que peuvent produire des forces de grandeurs et de directions constantes appliquées en des points déterminés d'un corps solide quand ce corps change de position dans l'espace.* Grand in-8; 1877. 3 fr.
- DARBOUX,** Professeur à la Sorbonne. — *Sur le problème de Pfaff.* Grand in-8; 1882. 2 fr.
- DARBOUX.** — *Sur les différentielles des fonctions de plusieurs variables indépendantes.* Grand in-8; 1882. 1 fr. 50 c.
- DARCY.** — *Recherches expérimentales relatives au mouvement des eaux dans les tuyaux.* In-4, avec 12 planches; 1857. 15 fr.
- DAUGE (F.),** Professeur ordinaire à la Faculté des Sciences de Gand. — *Leçons de Méthodologie mathématique.* — Grand in-4, lithographie; 1883. 12 fr.
- DAVANNE.** — *Les Progrès de la Photographie.* Résumé comprenant les perfectionnements apportés aux divers procédés photographiques pour les épreuves négatives et les épreuves positives, les nouveaux modes de tirage des épreuves positives par les impressions aux poudres colorées et par les impressions aux encres grasses. In-8<sup>e</sup>; 1877. 6 fr. 50 c.
- DECANTE,** Lieutenant de vaisseau. — *Tables du cadran solaire azimutal pour tous les points situés entre les cercles polaires. Variation automatique. Détermination instantanée du relèvement vrai. Contrôle de la route.* 2 vol. in-8; 1882. 5 fr. Cet Ouvrage a été approuvé par le Comité hydrographique et autorisé par le Ministre de la Marine et des Colonies.
- DECHARME.** — *Formes vibratoires des bulles de liquide glycérique.* In-8, avec figures dans le texte; 1880. 1 fr. 50 c.
- DELAISTRE (L.),** Professeur de Dessin général. — *Cours complet de Dessin linéaire, gradué et progressif, contenant la Géométrie pratique, élémentaire et descriptive; l'Arpentage, le Levé des Plans et le Nivellement; le Tracé des Cartes géographiques, des Notions sur l'architecture; le Dessin industriel; la Perspective linéaire et aérienne; le Tracé des ombres et l'étude du Lavis.* Atlas cartonné, in-4 oblong, contenant 60 planches et 70 pages de texte. 3<sup>e</sup> édit., revue et corrigée; 1880. 15 fr. *Ouvrage donné en prix, par la Société d'Encouragement pour l'Industrie nationale, aux CONTREMAÎTRES des Etablissements industriels, et choisi par le Ministre de l'Instruction publique pour les Bibliothèques scolaires.*
- DELAMBRE,** Membre de l'Institut. — *Traité complet d'Astronomie théorique et pratique.* 3 vol. in-4, avec planches; 1814. 40 fr.
- DELAMBRE.** — *Histoire de l'Astronomie ancienne.* 2 vol. in-4 avec planches; 1817. 25 fr.
- DELAMBRE.** — *Histoire de l'Astronomie du moyen âge.* 1 vol. in-4, avec planches; 1819. (Rare.)
- DELAMBRE.** — *Histoire de l'Astronomie moderne.* 2 vol. in-4, avec planches; 1821. 30 fr.
- DELAMBRE.** — *Histoire de l'Astronomie au XVIII<sup>e</sup> siècle;* publiée par Mathieu, Membre de l'Académie des Sciences. In-4, avec planches; 1827. 20 fr.
- DELISLE (A.),** Examinateur pour l'admission à l'École Navale, et GERONO, Professeur de Mathématiques. — *Géométrie analytique.* In-8, avec planches; 1854. 5 fr.
- DELISLE et GERONO.** — *Éléments de Trigonométrie rectiligne et sphérique.* 7<sup>e</sup> édition. In-8, avec planches; 1876. 3 fr. 50 c.
- DENFER,** chef des travaux graphiques de l'École Centrale des Arts et Manufactures. — *Album de Serrurerie, conforme au Cours de Constructions civiles professé à l'École Centrale par E. MULLER, et contenant l'emploi du fer dans la maçonnerie et dans la charpente en bois, la charpente en fer, les ferrements des menuiseries en bois, la menuiserie en fer, les grosses fontes et articles divers de quincaillerie.* Gr. in-4, contenant 100 belles planches lith.; 1872. 13 fr.
- DE SELLE,** Professeur à l'École Centrale. — *Cours de Minéralogie et de Géologie.* 2 forts vol. grand in-8<sup>e</sup>. TOME I. — *Phénomènes actuels, Minéralogie.* Grand in 8, avec Atlas de 147 planches; 1878. 25 fr. TOME II. — *Géologie.* (Sous presse.)
- D'ÉTROYAT (Ad.).** — *De la carène du navire et de l'Échelle de solidité.* In-4, avec 5 planches; 1865. 4 fr.
- DEVILLEZ (A.),** Directeur et Professeur de constructions civiles à l'École provinciale d'Industrie et des Mines du Hainaut. — *Éléments de constructions civiles. Art de bâtir. Composition des édifices. Vade-mecum de construction, à l'usage de l'entrepreneur, du constructeur et du propriétaire qui veut faire bâtir ou restaurer ses propriétés.* 4<sup>e</sup> tirage, 2 vol. in-8, dont un Atlas de 214 dessins; 1882. 16 fr.
- DIEN et FLAMMARION.** — *Atlas céleste, comprenant toutes les Cartes de l'ancien Atlas de Ch. Dien, rectifié, augmenté et enrichi de 5 Cartes nouvelles relatives aux principaux objets d'études astronomiques, par C. Flammarion, avec une Instruction détaillée pour les diverses Cartes de l'Atlas.* In-folio, cartonné avec luxe, de 31 planches gravées sur cuivre, dont 4 doubles. 4<sup>e</sup> édition; 1883. Prix { En feuilles, dans une couverture imprimée... 40 fr. Cartonné avec luxe, toile pleine... 45 fr.
- Les Cartes composant cet Atlas sont les suivantes :
- A. Constellations de l'hémisphère céleste boréal (*Carte double*).
  - B. Constellations de l'hémisphère céleste austral (*Carte double*).
  1. Petite Ourse, Dragon, Céphée, Cassiopee, Persée.
  2. Andromède, Cassiopee, Persée, Triangle.
  3. Girafe, Cocher, Lynx, Télescope.
  4. Grande Ourse, Petit Lion.
  5. Chevelure de Bérénice, Léviérs, Bouvier, Couronne boréale.
  6. Dragon, Carré d'Hercule, Lyre, Cercle mural.
  7. Hercule, Ophiuchus, Serpent, Taureau de Poniatowski, Écu de Sobieski.
  8. Cygne, Léopard, Céphée.
  9. Aigle et Antinoüs, Dauphin, Petit Cheval, Renard, Oie, Flèche Pégase.
  10. Bélier, Taureau (Pliéades, Hyades, Mouche).
  11. Gémeaux, Cancer, Petit Chien.
  12. Lion, Sextant, Tête de l'Hydre.
  13. Vierge.
  14. Balance, Serpent, Hydro.
  15. Scorpion, Ophiuchus, Serpent, Loup.
  16. Sagittaire, Couronne australe.
  17. Capricorne, Verseau, Poisson austral.
  18. Poissons, Carré de Pégase.
  19. Baleine, Atelier du Sculpteur.
  20. Éridan, Lièvre, Colombe, Harpe, Sceptre, Laboratoire.
  21. Orion, Licorne.
  22. Grand Chien, Navire, Boussole.
  23. Hyde, Coupe, Corbeau, Sextant, Chat.
  24. Constellations voisines du pôle austral (*Carte double*).
  25. Mouvements propres séculaires des étoiles (*Carte double*).
  26. Carte générale des étoiles multiples, montrant leur distribution dans le Ciel (*Carte double*).
  27. Étoiles multiples en mouvement relatif certain.
  28. Orbites d'étoiles doubles et groupes d'étoiles les plus curieux du Ciel.
  29. Les plus belles nébuleuses du Ciel (1).

(1) Pour recevoir franco, par poste, dans tous les pays de l'Union



- On vend séparément un Fascicule contenant:  
 Les 5 *Cartes nouvelles*, n<sup>os</sup> 25 à 29 de l'Atlas céleste, par G. Flammarion. Ces Cartes sont renfermées dans une couverture imprimée, avec l'Instruction composée pour la nouvelle édition de l'Atlas. 15 fr.
- DISLERE.** — La Guerre d'escadre et la Guerre de côtes. (*Les nouveaux navires de combat.*) Un beau volume grand in-8, avec nombreuses figures, gravées sur bois, dans le texte. 2<sup>e</sup> édition, augmentée d'un Appendice par GUICHARD, Ingénieur de la marine; 1883. 7 fr.
- DISLERE.** — Exposé sommaire des expériences faites à Amsterdam sur la résistance des carènes. Grand in-8<sup>e</sup>, avec 5 planches; 1878. 2 fr. 50 c.
- DISLERE.** — Note sur la résistance des murailles cuirassées. Grand in-8; 1877. 0 fr. 75 c.
- DOCUMENTS** relatifs à la division décimale des angles et du temps; Notes de MM. d'Abbadie, J. Houël, R. Wolf et Yvon Villarceau, extraites des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. In-4<sup>o</sup>; 1883. 1 fr. 50 c.
- DORMOY (Émile).** — Théorie mathématique du jeu de baccarat, avec une Préface par *Francisque Sarcey*. Grand in-8; 1875. 5 fr.
- DORMOY (Émile).** — Théorie mathématique des assurances sur la vie. Deux volumes grand in-8; 1878. 20 fr.  
*Chaque volume se vend séparément.* 10 fr.
- DORMOY (Émile).** — Traité du jeu de la bouillotte, avec une Préface par *Francisque Sarcey*. Grand in-8; 1880. 1 fr. 75 c.
- DOSTOR (G.),** Docteur ès Sciences, Professeur honoraire à la Faculté des Sciences de l'Institut catholique de Paris. — *Éléments de la théorie des déterminants*, avec application à l'Algèbre, la Trigonométrie et la Géométrie analytique dans le plan et dans l'espace, à l'usage des classes de Mathématiques spéciales. 2<sup>e</sup> éd. In-8; 1883. 8 fr.
- DOSTOR (G.).** — Théorie générale des Polygones étoilés. In-4; 1881. 2 fr.
- DUBOIS,** Examinateur hydrographe de la Marine. — Les passages de Vénus sur le disque solaire, considérés au point de vue de la détermination de la distance du Soleil à la Terre. In-18 Jésus, avec figures. 3 fr. 50
- DUBRUNFAUT.** — Mémoire sur la saccharification des féculs. In-8; 1882. 5 fr.
- DUBRUNFAUT.** — Le Sucre dans ses rapports avec la Science, l'Agriculture, l'Industrie, le Commerce, l'Économie publique et administrative, ou *Études faites depuis 1866 sur la question des Sucres*. Deux vol. in-8. 10 fr.  
*On vend séparément :*  
 TOME I; 1873..... 5 fr.  
 TOME II; 1878..... 5 fr.
- DUBRUNFAUT.** — L'Osmose et ses Applications industrielles ou Méthodes d'analyse nouvelle appliquées à l'épuration des sucs et sirops. In-8; 1873. 5 fr.
- DUCOM.** — Cours complet d'observations nautiques, avec les notions nécessaires au Pilotage et au Cabotage, augmenté de la puissance des effets des ouragans, typhons, tornados des régions tropicales. 3<sup>e</sup> éd.; 1858. 1 vol. in-8. 12 fr.
- DUGUET (Ch.),** Capitaine d'Artillerie. — Déformation des corps solides. Limite d'élasticité et résistance à la rupture. In-8, avec 103 figures dans le texte; 1881. 6 fr.
- DUHAMEL,** Membre de l'Institut. — *Éléments de Calcul infinitésimal*. 3<sup>e</sup> éd., revue et annotée par J. Bertrand, Membre de l'Institut. 2 vol. in-8, avec planches; 1874-1876. 15 fr.
- DUHAMEL.** — Des Méthodes dans les sciences de raisonnement. 5 vol. in-8. 27 fr. 50 c.  
 I<sup>re</sup> PARTIE : *Des Méthodes communes à toutes les sciences de raisonnement*. 2<sup>e</sup> édition. In-8; 1875. 2 fr. 50 c.  
 II<sup>e</sup> PARTIE : *Application des Méthodes à la science des nombres et à la science de l'étendue*. 2<sup>e</sup> édition. In-8; 1877. 7 fr. 50 c.  
 III<sup>e</sup> PARTIE : *Application de la science des nombres à la science de l'étendue*. 2<sup>e</sup> éd. In-8, avec fig.; 1882. 7 fr. 50 c.  
 IV<sup>e</sup> PARTIE : *Application des Méthodes générales à la science des forces*. In-8, avec figures; 1870. 7 fr. 50 c.  
 V<sup>e</sup> PARTIE : *Essai d'une application des Méthodes à la science de l'homme moral*. 2<sup>e</sup> éd. In-8; 1873. 2 fr. 50 c.
- DULOS (Pascal),** Professeur de Mécanique à l'École d'Arts et Métiers et à l'École des Sciences d'Angers. — *Cours de Mécanique*, à l'usage des Écoles d'Arts et Métiers et de l'enseignement spécial des Lycées. 5 vol. in-8, avec belles figures gravées sur bois dans le texte; 1875-1876-1877-1879-1882. (*Ouvrage honoré d'une souscription des Ministères de l'Instruction publique, de l'Agriculture et des Travaux publics.*) 37 fr. 50 c.  
*On vend séparément :*  
 TOME I : *Composition des forces. — Équilibre de corps solides. — Centre de gravité. — Machines simples. — Ponts suspendus. — Travail des forces. — Principe des forces vives. — Moments d'inertie. — Force centrifuge. — Pendule simple et composé. — Centre de percussion. — Régulateur à force centrifuge. — Pendule balistique.* 7 fr. 50.  
 TOME II : *Résistances nuisibles ou passives. — Frottement. — Application aux machines. — Roideur des cordes. — Application du théorème des forces vives à l'établissement des machines. — Théorie du volant. — Résistance des matériaux.* 7 fr. 50 c.  
 TOME III : *Hydraulique. — Écoulement des fluides. — Jaugeage des cours d'eau. — Établissement des canaux à régime constant. — Récepteurs hydrauliques. — Travail des pompes. — Béliet hydraulique. — Vis d'Archimède. — Moulins à vent.* 7 fr. 50 c.  
 TOME IV : *Thermodynamique. — Machines à vapeur. — Principaux types de machines à vapeur. — Chaudières à vapeur. — Machines à air chaud et à gaz. — Calcul des volants. — Appareils dynamométriques.* 9 fr. 50 c.  
 TOME V. — *Distribution de la vapeur dans les cylindres. — Mouvement des tiroirs. — Distributions simples. — Distributions à deux tiroirs. — Diagrammes rectangulaires. — Diagrammes polaires. — Application aux détentes les plus usuelles.* 5 fr. 50 c.
- DUMAS,** Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences. — *Études sur le Phylloxera et sur les Sulfocarbonates*. In-8, avec planche; 1876. 3 fr.
- DUMAS,** Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences. — *Leçons sur la Philosophie chimique* professées au Collège de France en 1836, recueillies par Bineau. 2<sup>e</sup> édition. In-8; 1878. 7 fr.
- DU MONCEL (Th.),** Ingénieur électricien de l'Administration des Lignes télégraphiques. — *Traité théorique et pratique de Télégraphie électrique*, à l'usage des employés télégraphistes, des ingénieurs, des constructeurs et des inventeurs. Vol. in-8 de 642 pages, avec 156 figures dans le texte et 3 planches sur cuivre; imprimé sur carré fin satiné; 1864. 10 fr.
- DU MONCEL (Th.).** — Exposé des Applications de l'Électricité. *Technologie électrique*. 3<sup>e</sup> édition, entièrement

postale, l'ATLAS en feuilles, soigneusement enroulé et enveloppé, ajouter 2 fr.

Les dimensions (0<sup>m</sup>,50 sur 0<sup>m</sup>,35) de l'ATLAS cartonné ne permettant pas de l'expédier par la poste, cet Atlas cartonné, dont le poids est de 2 kg,9, sera envoyé aux frais du destinataire, soit par messageries grande vitesse, soit par tout autre mode indiqué.

In-4<sup>o</sup> carré; DD.

I..



- refondue; 5 volumes grand in-8 cartonnés, avec nombreuses figures et planches; 1872-1878. 72 fr.  
On vend séparément :  
TOME V : 672 pages, 3 pl. et 169 fig. Cartonné. 16 fr.  
Broché... 14 fr.
- DU MONCEL (Th.).** — Détermination des éléments de construction des Électro-aimants, suivant les applications auxquelles on veut les soumettre. 2<sup>e</sup> édition. In-18; 1882. 2 fr.
- DUPLAIS (ainé).** — Traité de la fabrication des liqueurs et de la distillation des alcools, suivi du *Traité de la fabrication des eaux et boissons gazeuses*. 4<sup>e</sup> édition, revue et augmentée par Duplais jeune. 2 vol. in-8, avec 15 planches. 2<sup>e</sup> tirage; 1882. 16 fr.
- DUPRÉ (Ath.),** Doyen de la Faculté des Sciences de Rennes. — *Théorie mécanique de la Chaleur*. In-8, avec figures dans le texte; 1869. 8 fr.
- DUPUY DE LOME,** Membre de l'Institut. — *L'Aérostat à hélice*. Note sur l'aérostas construit pour le compte de l'État. In-4, avec 9 grandes planches gravées sur acier; 1872. 6 fr. 50 c.
- DURUTTE (le Comte G.),** Compositeur, ancien Élève de l'École Polytechnique. — *Esthétique musicale. Résumé élémentaire de la Technique harmonique et Complément de cette Technique*, suivi de l'*Exposé de la loi de l'enchaînement dans la mélodie, dans l'harmonie et dans leur concours*, et précédé d'une *Lettre de Ch. Gounod, Membre de l'Institut*. Un beau volume in-8; 1876. 10 fr.
- EBELMEN.** — Chimie, Céramique, Géologie, Métallurgie. Ouvrage revu et corrigé par Salvétat. 3 forts vol. in-8, avec fig. dans le texte (2<sup>e</sup> tirage); 1861. 15 fr.
- ÉCOLE CENTRALE.** — Cinquantième Anniversaire de la fondation de l'École Centrale des Arts et Manufactures. *Compte rendu de la fête des 20 et 21 juin 1879*. Grand in-8; 1879. 3 fr.
- ÉCOLE CENTRALE.** — Portefeuille des travaux de vacances des élèves, publiés par la Direction de l'École. Année 1881. Un Volume de texte in-8, et un Atlas de 50 planches in-folio; 1882. 25 fr.  
Les 6 années antérieures (1875-1880), dont il ne reste que quelques exemplaires, se vendent séparément. 25 fr.  
La collection complète des 7 années 1875-1881. 140 fr.  
Cette collection sur la *Mécanique*, la *Construction*, la *Métallurgie* et la *Chimie industrielle* a été réunie par la Direction de l'École Centrale dans le but de fournir à ses Ingénieurs des renseignements et des modèles pour l'établissement de leurs projets. Elle donne, par ses plans cotés et ses textes explicatifs, une grande quantité de documents puisés aux sources mêmes, dans les grands chantiers et dans les usines les plus importantes. Aussi, cette collection, qui n'avait pas été mise jusqu'à ce jour à la disposition du public, est-elle appelée à rendre de sérieux services aux Ingénieurs, aux Constructeurs et aux Directeurs d'usines. La Table des planches est envoyée franco sur demande.
- ENDRÈS (E.),** Inspecteur général honoraire des Ponts et Chaussées. — *Manuel du Conducteur des Ponts et Chaussées*, d'après le dernier Programme officiel des examens. Ouvrage indispensable aux Conducteurs et Employés secondaires des Ponts et Chaussées et des Compagnies de Chemins de fer, aux Gardes-Mines, aux Gardes et Sous-Officiers de l'Artillerie et du Génie, aux Agents voyers et à tous les Candidats à ces emplois. 6<sup>e</sup> édition, conforme au Programme du 7 septembre 1880. 3 volumes in-8. 27 fr.  
On vend séparément :  
TOME I<sup>er</sup>, *Partie théorique*, avec 386 figures dans le texte; et TOME II, *Partie pratique*, avec 301 figures dans le texte et 4 planches d'instruments dessinés et gravés d'après les meilleurs modèles. 2 vol. in-8; 1880. 18 fr.
- TOME III, *Applications*. Ce dernier volume est consacré à l'Exposition des doctrines spéciales qui se rattachent à l'Art de l'ingénieur en général et au service des Ponts et Chaussées en particulier. In-8, avec 236 figures dans le texte; 1881. 9 fr.
- ERMEL.** — Voir Fernique.
- EVERETT,** Professeur de Philosophie naturelle au Queen's College de Belfast. — *Unités et constantes physiques*. Ouvrage traduit de l'anglais par Jules RAYNAUD, Docteur ès sciences, Professeur à l'École supérieure de Télégraphie, avec le concours de Thévenin, de la Touanne et Massin, sous-ingénieurs des télégraphes. In-18 Jésus; 1882. 4 fr.
- EXPÉRIENCES** faites à l'Exposition d'électricité par Allard, Le Blanc, Joubert, Potier et Tresca. — *Méthodes d'observations*. — *Machines et lampes à courant continu, à courants alternatifs*. — *Bougies électriques*. — *Lampe à incandescence*. — *Accumulateur*. — *Transport électrique du travail*. — *Machines diverses*. In-8 avec planches; 1883. 3 fr.
- FAA DE BRUNO (le Chevalier Fr.),** Docteur ès Sciences, Professeur de Mathématiques à l'Université de Turin. — *Théorie des formes binaires*. Un fort volume in-8; 1876. 16 fr.
- FAA DE BRUNO (le Chevalier Fr.)** — *Traité élémentaire du Calcul des Erreurs, avec des Tables stéréotypées*. Ouvrage utile à ceux qui cultivent les Sciences d'observation. In-8; 1869. 4 fr.
- FAA DE BRUNO (le Chevalier Fr.)** — *Théorie générale de l'élimination*. Grand in-8; 1859. 3 fr. 50 c.
- FABRE (C.)** — *Aide-Mémoire de Photographie pour 1884*, 9<sup>e</sup> année. In-8, avec spécimen.  
Prix : Broché. 1 fr. 75 c.  
Cartonné. 2 fr. 25 c.  
Les volumes des années précédentes de l'*Aide-Mémoire*, sauf 1879, 1880, 1881 et 1883 se vendent aux mêmes prix.
- FATON (le P.)** — *Traité d'Arithmétique théorique et pratique*, en rapport avec les nouveaux Programmes d'enseignement, terminé par une petite Table de Logarithmes. Chaque théorie est suivie d'un choix d'Exercices gradués de calcul et d'un grand nombre de Problèmes. 10<sup>e</sup> édition, revue et corrigée. In-12; 1884. (*Autorisé par décision ministérielle*.) Broché. 2 fr. 75 c.  
Cartonné. 3 fr. 10 c.
- FATON (le P.)** — *Premiers éléments d'Arithmétique*. 7<sup>e</sup> édition. In-12; 1881. Broché. 1 fr. 50 c.  
Cartonné. 1 fr. 85 c.
- FAURE (H.),** Chef d'escadron d'Artillerie — *Théorie des indices*. In-8; 1878. 5 fr.
- FAVARO (Antonio),** Professeur à l'Université royale de Padoue. — *Leçons de Statique graphique*, traduites de l'italien par PAUL TERRIER, Ingénieur des Arts et Manufactures. 3 beaux volumes grand in-8, avec nombreuses figures, se vendant séparément :  
I<sup>re</sup> PARTIE : *Géométrie de position*; 1879. 7 fr.  
II<sup>e</sup> PARTIE : *Calcul graphique*. (Sous presse.)  
III<sup>e</sup> PARTIE : *Statique graphique*; Théorie et applications. (Sous presse.)
- FAYE (H.),** Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes. — *Cours d'Astronomie nautique*. In-8, avec figures dans le texte; 1880. 10 fr.
- FAYE (H.)** — *Cours d'Astronomie de l'École Polytechnique*. 2 beaux volumes grand in-8 avec nombreuses figures et Cartes dans le texte.



- I<sup>re</sup> PARTIE : *Astronomie sphérique. — Géodésie et Géographie mathématique*; 1881. 12 fr. 50 c.
- II<sup>e</sup> PARTIE : *Astronomie solaire. — Théorie de la Lune. — Navigation*; 1883. 14 fr.
- FERNIQUE (A.)**, Chef des travaux graphiques, Répétiteur du Cours de construction de machines à l'École centrale des Arts et Manufactures. — *Album d'Éléments et organes de machines*, composé et dessiné d'après le Cours professé par *F. Ermel*, et suivi de planches relatives aux machines soufflantes, d'après des documents fournis par *Jordan*. 2<sup>e</sup> édition, revue et corrigée. Portefeuille oblong contenant 19 planches de texte explicatif ou Tableaux, et 102 planches de dessins cotés; 1882. 16 fr.
- FINANCE (Ch.)**, Professeur au collège de Saint-Dié. — *Arithmétique*, à l'usage des Élèves des Écoles normales primaires, des Collèges, des Lycées et des Pensions, comprenant les matières exigées pour le brevet d'instituteur et pour l'admission aux Écoles des Arts et Métiers. Nouvelle édition. In-12, 1874. 2 fr. 50 c.
- FINANCE (Ch.)**. — *Arithmétique* à l'usage des écoles primaires, des classes élémentaires des collèges, des lycées et des pensions. Nouvelle éd. In-18 cartonné; 1875. 1 fr.
- FLAMMARION (Camille)**, Astronome. — *Catalogue des Étoiles doubles et multiples en mouvement relatif certain*, comprenant toutes les observations faites sur chaque couple depuis sa découverte et les résultats conclus de l'étude des mouvements. Grand in-8; 1878. 8 fr.
- FLAMMARION (Camille)**. — *Études et Lectures sur l'Astronomie*. In-12 avec fig. et cartes; tomes I à IX; 1867 à 1880.  
Chaque volume se vend séparément. 2 fr. 50 c.
- FLAMMARION (Camille)**. — *L'Astronomie*, Revue mensuelle d'Astronomie populaire, de Météorologie et de Physique du globe, donnant l'exposé permanent des découvertes et des progrès réalisés dans la connaissance de l'Univers; publiée par CAMILLE FLAMMARION, avec le concours des principaux Astronomes français et étrangers. La Revue paraît le 1<sup>er</sup> de chaque mois, par numéros de 40 pages, avec nombreuses figures. Elle est publiée annuellement en volume, à la fin de chaque année.
- PRIX DE L'ABONNEMENT :  
Paris : 12 fr. — Départements : 13 fr. — Étranger : 14 fr.  
Prix du numéro : 1 fr. 20 c.
- PRIX DES ANNÉES PARUES :  
Tome I<sup>er</sup>, 1882 (10 n<sup>os</sup>, avec 134 figures). — Broché. 10 fr.  
Relié avec luxe. 14 fr.  
Tome II, 1883 (12 n<sup>os</sup>, avec 172 figures). — Broché. 12 fr.  
Relié avec luxe. 16 fr.
- La Revue a pour but de tenir tous les amis de la Science au courant des découvertes et des progrès réalisés dans l'étude générale de l'Univers. Elle donne, au jour le jour, le tableau vivant des conquêtes rapides et grandioses de la plus belle et de la plus vaste des Sciences, l'état du ciel et les observations les plus intéressantes à faire, soit à l'œil nu, soit à l'aide d'instruments de moyenne puissance. Chaque numéro est illustré de nombreuses figures explicatives sur les grands phénomènes célestes. Absolument correcte au point de vue scientifique, la Revue est néanmoins populaire, et ses rédacteurs suivent la voie de M. Camille Flammarion qui a toujours su présenter la Science sous une forme agréable; aussi peut-on dire que sa lecture est aussi intéressante pour les gens du monde que pour les savants. Cette publication forme la suite naturelle de *l'Astronomie populaire et des Étoiles*.  
Un numéro est envoyé gratuitement, comme spécimen.
- FLAMMARION (Camille)**. — *Astronomie populaire. Description générale du Ciel*. Un volume grand in-8, illustré de 300 figures, planches en chromolithographie, Cartes célestes, etc.; 1881. (Ouvrage couronné par l'Académie française, et adopté par le Ministre de l'Instruction publique pour les Bibliothèques populaires.)  
Broché : 12 fr. — Cartonné : 16 fr. — Relié : 17 fr.
- FLAMMARION (Camille)**. — *Les étoiles et les curiosités du ciel. Description complète du ciel visible à l'œil nu et des objets célestes les plus faciles à observer*. Un volume grand in-8, illustré de 400 gravures, chromolithographies, Cartes célestes, etc.; 1882.  
Broché : 10 fr. — Cartonné : 14 fr. — Relié : 15 fr.
- FLYE SAINTE-MARIE**, Capitaine d'Artillerie. — *Études analytiques sur la théorie des parallèles*. In-8, avec 8 planches; 1871. 5 fr.
- FONVIELLE (W. de)**. — *La Prévision du temps*. In-18 Jésus; 1878. 1 fr. 50 c.
- FOUCAULT (Léon)**, Membre de l'Institut. — *Recueil des travaux scientifiques de Léon Foucault*, publié par M<sup>me</sup> V<sup>e</sup> FOUCAULT, sa mère, mis en ordre par GABRIEL, Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur agrégé de Physique à la Faculté de Médecine de Paris, et précédé d'une Notice sur les Œuvres de L. Foucault, par J. BERTRAND, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences. Un beau volume in-4, avec un Atlas de même format contenant 19 planches sur cuivre; 1878. 30 fr.
- FRANŒEUR (L.-B.)**. — *Uranographie ou Traité élémentaire d'Astronomie*, à l'usage des personnes peu versées dans les Mathématiques, des Géographes, des Marins, des Ingénieurs, accompagné de planisphères. 6<sup>e</sup> édit. 1 vol. in-8. avec pl.; 1853. 10 fr.
- FRANŒEUR (L.-B.)**. — *Traité de Géodésie*, comprenant la Topographie, l'Arpentage, le Nivellement, la Géométrie terrestre et astronomique, la Construction des Cartes, la Navigation; augmenté de Notes sur la mesure des bases, par *Hossard*, et d'une Note sur la méthode et les instruments d'observation employés dans les grandes opérations géodésiques ayant pour but la mesure des arcs de méridien et de parallèle terrestres, par le Colonel *Perrier*, Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes. 6<sup>e</sup> édition. In-8, avec figures dans le texte et 11 planches; 1879. 12 fr.
- FRENET (F.)**. — *Recueil d'Exercices sur le Calcul infinitésimal*. Ouvrage destiné aux Candidats à l'École Polytechnique et à l'École Normale, aux Élèves de ces Écoles et aux personnes qui se préparent à la licence ès Sciences mathématiques. 4<sup>e</sup> édition. In-8, avec figures dans le texte; 1882. 8 fr.
- FREYCINET (Charles de)**, Sénateur, Ingénieur en chef des Mines. — *De l'Analyse infinitésimale. Étude sur la métaphysique du haut calcul*. 2<sup>e</sup> édition, revue et corrigée par l'Auteur. In-8, avec fig.; 1881. 6 fr.
- FREYCINET (Charles de)**, Chef de l'exploitation des chemins de fer du Midi. — *Des Pentes économiques en Chemins de Fer. Recherches sur les dépenses des rampes*. In-8; 1861. 6 fr.
- GALEZOWSKI (Joseph)**. — *Tables des annuités*, calculées d'après la méthode logarithmique de *Féodor Thoman* et précédées d'une instruction sur l'emploi de cette méthode. In-8; 1880. 2 fr.
- GALOPIN-SCHAUB**, Docteur ès sciences. — *Théorie des approximations numériques. Notions de calcul approximatif*. In-12; 1884. 1 fr. 50 c.
- GARRIGOU-LAGRANGE**. — *Observation sur le mouvement et le choc des systèmes invariables*. Grand in-8; 1883. 1 fr.
- GÉRARDIN (H.)**, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées. — *Théorie des moteurs hydrauliques*. Applica-



- tion et travaux exécutés pour l'alimentation du canal de l'Aisne à la Marne par les machines. In-8, avec Atlas in-folio raisin de 25 planches; 1872. 20 fr.
- GERMAIN (M<sup>lle</sup> Sophie).** — Mémoire sur l'emploi de l'épaisseur dans la théorie des surfaces élastiques. Mémoire posthume. In-4; 1880. 3 fr.
- GILBERT (Ph.),** professeur à l'Université catholique de Louvain. — Cours de Mécanique analytique. *Partie élémentaire.* 2<sup>e</sup> édit. Grand in-8, avec fig.; 1882. 9 fr. 50 c.
- GILBERT (Ph.)** — Cours d'Analyse infinitésimale. *Partie élémentaire.* 2<sup>e</sup> édition. Grand in-8; 1878. 9 fr. 50 c.
- GILBERT (Ph.)** — Preuves mécaniques de la rotation de la Terre. Grand in-8; 1883. 1 fr. 50 c.
- GILBERT (Ph.)** — Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes du mouvement relatif. In-8, avec figures; 1883. 3 fr. 50 c.
- GINOT-DESROIS (M<sup>lle</sup>).** — Planisphère mobile, au moyen duquel on peut apprendre l'Astronomie seul et sans le secours des Mathématiques. 7<sup>e</sup> éd., 1847; sur carton. 4 fr.
- GINOT-DESROIS (M<sup>lle</sup>).** — Planisphère astronomique ou Calendrier astronomique perpétuel, donnant le quantième des mois, les jours de la semaine, les phases de la Lune, la place du Soleil dans l'écliptique pour un jour donné, le lever, le passage au méridien, le coucher de ces astres et des étoiles, ainsi que les principales éclipses de Soleil visibles à Paris depuis 1858 jusqu'en 1874, dans l'ordre de leur grandeur et dimension. 2<sup>e</sup> éd., 1861; sur carton, avec une brochure in-8 donnant la description et les usages du Calendrier perpétuel. 5 fr.
- GIRARD (Aimé),** Professeur de Chimie industrielle au Conservatoire des Arts et Métiers. — Mémoire sur l'hydrocellulose et ses dérivés. In-8, avec une belle planche en héliogravure; 1881. 2 fr. 50 c.
- GIRARD (Aimé),** Professeur de Chimie industrielle au Conservatoire des Arts et Métiers. — La fabrication de la bière (Rapport au jury de l'Exposition universelle de Vienne). Grand in-8; 1876. 1 fr. 50 c.
- GIRARD (L.-D.),** Ingénieur civil. — Hydraulique. Utilisation de la force vive de l'eau appliquée à l'industrie. — Critique de la théorie connue et exposé d'une théorie nouvelle. In-4, avec Atlas de 13 planches; 1863. 8 fr.
- GIRARD (L.-D.)** — Chemin de fer glissant, nouveau système de locomotion à propulsion hydraulique. In-4, avec Atlas de 6 planches in-plano; 1864. 8 fr.
- GIRARD (L.-D.)** — Élévation d'eau pour l'alimentation des villes et distribution de force à domicile.  
N<sup>o</sup> 1. Grand in-4, avec fig. dans le texte; 1868. 3 fr.  
N<sup>o</sup> 2. Grand in-4 (Texte seul); 1869. 2 fr. 50 c.  
*Le prospectus détaillé des Ouvrages de L.-D. GIRARD est envoyé aux personnes qui en font la demande par lettre affranchie. (La librairie Gauthier-Villars vient d'acquiescer la propriété de tous les ouvrages de L.-D. Girard, et en a diminué les prix de vente.)*
- GRAËFF (A.),** Ancien Vice-Président du Conseil général des Ponts et Chaussées. — *Traité d'Hydraulique*, précédé d'une introduction sur les principes généraux de la Mécanique.  
Tome I. — Partie théorique; 1882.  
Tome II. — Partie pratique; 1882.  
Tome III. — Notes, tables numériques et planches; 1883.  
3 beaux volumes grand in-8; 1882-1883. Broché. 50 fr.  
Relié demi-chagrin. 62 fr.
- L'Auteur, après avoir fait l'historique des progrès de la Science de l'Hydraulique, et passé en revue les principes généraux de la Mécanique sur lesquels il devra s'appuyer, divise le premier volume (*Théorie*) en deux parties: l'une traitant le mouvement permanent ou à débit constant, le seul dont on s'occupe dans l'ancienne Hydraulique, et l'autre le mouvement non permanent ou à débit variable qui constitue l'Hydraulique nouvelle. La même division a été adoptée pour le Tome II. Dans le Tome III ont été placés des Notes et un Recueil de Tables numériques pour les calculs de l'Hydraulique. Cet important Ouvrage devra être consulté par tous les Ingénieurs et les Géomètres s'occupant d'Hydraulique.
- GUÉBARD (A.),** Docteur en médecine, Préparateur de Physique à la Faculté de Médecine de Paris. — Effets des variations de la pression extérieure sur l'organisme. In-4<sup>o</sup>, avec 31 figures dans le texte; 1883. (Thèse.) 5 fr.
- GRANDEAU (L.) et TROOST (L.)** — *Traité pratique d'analyse chimique*, par F. WÖHLER, Associé étranger de l'Institut de France. Édition française, publiée avec le concours de l'Auteur. 1 volume in-18 Jésus, avec 76 figures dans le texte et une planche; 1866. 4 fr. 50 c.
- HABICH,** Directeur de l'École des Constructions civiles et des Mines, à Lima. — Études cinématiques. In-8, avec figures dans le texte; 1879. 4 fr.
- HALLAUER (O.)** — Expériences sur le rendement des moteurs à vapeur, faites sur les machines Woolf verticales à balancier, sur les machines Woolf horizontales et sur les machines verticales Compound de la Marine française. Grand in-8, avec 4 planches; 1878. 3 fr.
- HALLAUER (O.)** — Étude expérimentale comparée sur les moteurs à un et à deux cylindres. *Influence de la détente.* Grand in-8; 1879. 2 fr. 50 c.
- HALLAUER (O.)** — Analyses expérimentales comparées sur les machines fixes et les machines marines. Grand in-8; 1880. 2 fr. 50 c.
- HALLAUER (O.)** — Étude critique sur les essais de moteurs à vapeur. Grand in-8; 1881. 1 fr. 25 c.
- HALLAUER (O.)** — Moteurs à vapeur. — Étude pratique sur l'échappement et la compression de la vapeur dans les machines. Grand in-8; 1883. 1 fr. 50
- HALLAUER (O.)** — Voir Hirn et Hallauer.
- HALPHEN,** Répétiteur à l'École Polytechnique. — Sur les invariants différentiels. In-4; 1878. 3 fr.
- HARNACK (Axel).** — Théorie de la série de Fourier. Grand in-8; 1883. 2 fr.
- HATON DE LA GOUPILLIÈRE (J.-N.)** — *Traité des Mécanismes*, renfermant la théorie géométrique des organes et celle des résistances passives. In-8, avec 16 pl. gravées sur cuivre; 1864. 10 fr.
- HENRY (Charles),** Bibliothécaire à la Bibliothèque de l'Université de France. — Les deux plus anciens traités d'Algorithme et de Géométrie. Grand in-4; 1882. (Extrait du *Bulletin des Sciences mathém. et astron.*) 2 fr.
- HERMITE (Ch.),** Membre de l'Institut. — Cours d'Analyse de l'École Polytechnique. PREMIÈRE PARTIE, contenant le Calcul différentiel et les Premiers principes du Calcul intégral. In-8, avec fig. dans le texte; 1873. 14 fr.  
La II<sup>e</sup> PARTIE contiendra la fin du Calcul intégral.
- HERMITE (Ch.)** — Sur la fonction exponentielle. In-4; 1874. 2 fr. 50 c.
- HIRN (G.-A.),** Correspondant de l'Institut. — *Théorie mécanique de la Chaleur.* Première Partie et seconde Partie.  
I<sup>re</sup> PARTIE. — Exposition analytique et expérimentale de la Théorie mécanique de la Chaleur. 3<sup>e</sup> édition, entièrement refondue. In-8, grand raisin, avec figures dans le texte.  
Tome I; 1875. 12 fr.  
Tome II; 1876. 12 fr.



II<sup>e</sup> PARTIE (formant Ouvrage séparé). — *Conséquences philosophiques et métaphysiques de la Thermodynamique*. Analyse élémentaire de l'Univers. In-8, grand raisin; 1868. 10 fr.

HIRN (G.-A.). — Mémoire sur la Thermodynamique. In-8, avec 2 planches; 1867. 5 fr.

HIRN (G.-A.). — Note sur les variations de la capacité calorifique de l'eau, vers le maximum de densité. In-4; 1870. 1 fr.

HIRN (G.-A.). — Mémoire sur les conditions d'équilibre et sur la nature probable des anneaux de Saturne. In-4, avec planches; 1872. 4 fr.

HIRN (G.-A.). — Mémoire sur les propriétés optiques de la flamme des corps en combustion et sur la température du Soleil. In-8; 1873. 1 fr. 25 c.

HIRN (G.-A.). — Théorie analytique élémentaire du Planimètre Amsler. Grand in-8, avec planches; 1875. 2 fr. 50 c.

HIRN (G.-A.). — La Musique et l'Acoustique. *Aperçu général sur leur rapport et sur leurs dissemblances* (Extrait de la *Revue d'Alsace*). Grand in-8; 1878. 2 fr. 50 c.

HIRN (G.-A.). — Étude sur une classe particulière de tourbillons, qui se manifestent, sous de certaines conditions spéciales, dans les liquides. Analogie entre le mécanisme de ces tourbillons et celui des trombes. In-8, avec 3 planches; 1878. 2 fr. 50 c.

HIRN (G.-A.). — Réflexions critiques sur les expériences concernant la chaleur humaine. In-4; 1879. 75 c.

HIRN (G.-A.). — Notice sur la mesure des quantités d'électricité. In-4; 1879. 60 c.

HIRN (G.-A.). — Explication d'un paradoxe d'Hydrodynamique. Grand in-8; 1881. 1 fr.

HIRN (G.-A.). — Recherches expérimentales sur la relation qui existe entre la résistance de l'air et sa température. *Conséquences physiques et philosophiques qui découlent de ces expériences*. Grand in-4, avec 4 planches; 1882. 6 fr.

HIRN (G.-A.). — Remarques relatives à une critique de M. G. Zeuner. In-4; 1883. 60 c.

HIRN (G.-A.). — La conservation de l'énergie solaire. *Réponse à une Notice critique de M. Siemens*. In-4; 1883. 60 c.

HIRN (G.-A.). — Actinomètre totaliseur absolu. In-4; 1884. 60 c.

HIRN (G.-A.) et HALLAUER (O.). — Thermodynamique appliquée. Réfutation d'une critique de M. G. Zeuner, concernant les travaux des ingénieurs alsaciens sur les machines à vapeur. Grand in-8; 1882. 2 fr.

— Réfutation d'une seconde critique de M. G. Zeuner. Grand in-8; 1883. 2 fr.

HOMMEY, Capitaine de frégate en retraite. — Tables d'angles horaires. 2 vol. grand in-8 en tableaux. 15 fr.

HOÜEL (J.), Professeur de Mathématiques à la Faculté des Sciences de Bordeaux. — Cours de Calcul infinitésimal. Quatre beaux volumes grand in-8, avec figures dans le texte; 1878-1879-1880-1881.

On vend séparément :

Tome I.....	15 fr.
Tome II.....	15 fr.
Tome III.....	10 fr.
Tome IV.....	10 fr.

HOÜEL (J.). — Tables de Logarithmes à cinq décimales, pour les nombres et les lignes trigonométriques, suivies des Logarithmes d'addition et de soustraction In-4<sup>o</sup> carré; DD.

ou Logarithmes de Gauss et de diverses Tables usuelles. Nouvelle édition, revue et augmentée. Grand in-8; 1884. (*Autorisé par décision ministérielle.*) 2 fr.

HOÜEL (J.). — Recueil de formules et de Tables numériques. 3<sup>e</sup> édit., grand in-8; 1884. 4 fr. 50 c.

HOÜEL (J.). — Essai critique sur les principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire ou Commentaire sur les XXXII premières propositions des Éléments d'Euclide. In-8, avec fig. 2<sup>e</sup> édit.; 1883. 2 fr. 50 c.

HOÜEL (J.). — Sur le développement de la fonction perturbatrice, suivant la forme adoptée par Hansen dans la théorie des petites planètes. In-8; 1875. 3 fr.

HOÜEL (J.). — Considérations élémentaires sur la généralisation successive de l'idée de quantité dans l'Analyse mathématique, suivies de *Remarques sur l'enseignement de la Trigonométrie*. Grand in-8; 1883. 2 fr.

HOUEAU (J.-C.), Directeur de l'Observatoire de Bruxelles. — *Vade-mecum de l'Astronome*. Grand in-8, de 1172 pages; 1882. 25 fr.

IMBARD. — De la Mesure du Temps, et Description de la Méridienne verticale portative du Temps vrai et du Temps moyen pour régler les pendules et les montres, etc. 2<sup>e</sup> édition. In-18, avec pl.; 1857. 1 fr.

INSTITUT DE FRANCE. — Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences. Ces Comptes rendus paraissent régulièrement tous les dimanches, en un cahier de 32 à 40 pages, quelquefois de 80 à 120. L'abonnement est annuel, et part du 1<sup>er</sup> janvier.

*Prix de l'abonnement pour un an :*

Pour Paris.	20 fr.	Pour les départements.	30 fr.
		Pour l'Union postale.	34 fr.

La Collection complète, de 1835 à 1883, forme 97 volumes in-4. 727 fr. 50 c.

Chaque année, sauf 1844, 1845, 1870, 1873, 1874, 1875 et 1878 à 1883, se vend séparément. 15 fr.

— Table générale des Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences, par ordre de matières et par ordre alphabétique de noms d'auteurs. 2 volumes in-4, savoir :

Tables des tomes I à XXXI (1835-1850). In-4,	1853.
	15 fr.
Tables des tomes XXXII à LXI (1851-1865). In-4,	1870.
	15 fr.

— Supplément aux Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences. Tomes I et II, 1856 et 1861, séparément. 15 fr.

INSTITUT DE FRANCE. — Mémoires de l'Académie des Sciences. In-4; tomes I à XLII; 1816 à 1883. Chaque Volume, à l'exception des Tomes ci-après indiqués, se vend séparément. 15 fr.

Le Tome XXXIII, avec Atlas, se vend séparément. 25 fr.

Les Tomes VI et XXI ne se vendent pas séparément.

— Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences, et imprimés par son ordre, 2<sup>e</sup> série. In-4, tomes I à XXVII; 1827-1879. Chaque volume, à l'exception des tomes I à IX, se vend séparément. 15 fr.

— Tables générales des Travaux contenus dans les Mémoires de l'Académie des Sciences et dans les Mémoires présentés par divers savants, publiés par les Secrétaires perpétuels. Ces Tables générales comprennent pour chacune des Collections (*Mémoires de l'Académie et Mémoires présentés par divers savants*) les Tables par volumes, par noms d'auteurs et par ordre de matières. 2 volumes in-4, savoir :

*Tables générales des travaux contenus dans les Mémoires de l'Académie.* 1<sup>re</sup> Série, tomes I à XIV (an VI-1815), et 2<sup>e</sup> Série, tomes I à XL (1816-1878); 1881. 6 fr.

I...



*Tables générales des travaux contenus dans les Mémoires présentés par divers Savants à l'Académie.* 1<sup>re</sup> Série, tomes I et II (1806-1811), et II<sup>e</sup> Série, tomes I à XXV (1827-1877); 1881. 2 fr. 50 c.

**INSTITUT DE FRANCE.** — Recueil de Mémoires, Rapports et Documents relatifs à l'observation du passage de Vénus sur le Soleil, en 1874.

Tome I. — 1<sup>re</sup> PARTIE. *Procès-verbaux des séances tenues par la Commission.* In-4; 1877. 12 fr. 50 c.

— 2<sup>e</sup> PARTIE, avec SUPPLÉMENT. *Mémoires divers.* In-4, avec 7 planches, dont 3 en chromolithographie; 1876. 12 fr. 50 c.

Tome II. — 1<sup>re</sup> PARTIE. *Mission de Pékin.* Rapport de M. Fleurbaey. — *Mission de Saint-Paul* (Astronomie). Rapport de M. Mouchez. In-4, avec 26 planches, dont 13 chromolith. et 2 phototypies; 1878. 25 fr.

— 2<sup>e</sup> PARTIE. *Mission de Saint-Paul* (Météorologie, Géologie, etc.). Rapports de M. le Dr Rochefort et de M. Ch. Vélain. — *Mission du Japon.* Rapports de MM. Janssen, Tisserand, Delacroix et Picard. — *Mission de Saïgon.* Rapport de M. Héraud. — *Mission de Nouméa.* Rapport de M. André. In-4, avec figures dans le texte, et 36 planches, dont 5 chromolith. et 8 phototypies; 1880. 25 fr.

Tome III. — 1<sup>re</sup> PARTIE. *Mission de l'île Campbell.* Rapport de M. Bouquet de la Grye. In-4 avec 6 pl.; 1882. 12 fr. 50 c.

— 2<sup>e</sup> PARTIE. *Mission de l'île Campbell. Histoire naturelle.* Rapport de M. H. Filhol. In-4. (Sous presse.)

— 3<sup>e</sup> PARTIE. *Mesures des plaques photographiques,* publiées sous la direction de M. Fizeau, par MM. Cornu, Baille, Mercadier, Gariel et Angot. In-4 avec 2 pl.; 1882. 12 fr. 50 c.

**INSTITUT DE FRANCE.** — Mémoires relatifs à la nouvelle maladie de la vigne, présentés par divers savants à l'Académie des Sciences. (Voir, pour le détail de ces Mémoires, le CATALOGUE GÉNÉRAL, ou le PROSPECTUS SPÉCIAL qui est envoyé sur demande.)

La Librairie Gauthier-Villars a seule, depuis le 1<sup>er</sup> janvier 1877, le dépôt des diverses publications de l'Académie des Sciences.

**INSTRUCTION** sur les paratonnerres. Voir POUILLET et GAY-LUSSAC.

**JACQUIER**, Professeur de l'Université, Membre du Conseil supérieur de l'Instruction publique. — *Problèmes de Physique, de Mécanique, de Cosmographie et de Chimie*, à l'usage des Candidats aux Baccalauréats ès Sciences, au Baccalauréat de l'Enseignement spécial et aux Écoles du Gouvernement. In-8, avec figures dans le texte; 1884.

**JAMIN (J.)**, Membre de l'Institut, Professeur de Physique à l'École Polytechnique, et BOUTY, professeur au Lycée Saint-Louis. — *Cours de Physique de l'École Polytechnique*. 3<sup>e</sup> édition, augmentée et entièrement refondue. 4 forts vol. in-8 de 3560 pages, avec 1450 fig. dans le texte et 13 planches sur acier, dont 2 en couleur; 1878-1883. (Autorisé par décision ministérielle.) Prix de l'Ouvrage complet, en 4 volumes. 67 fr.

On vend séparément :

TOME I. — 15 fr.

(\*) 1<sup>er</sup> fascicule. — *Instruments de mesure. Hydrostatique*; avec 148 fig. dans le texte et 1 planche. 5 fr.

2<sup>e</sup> fascicule. — *Actions moléculaires*; avec 91 figures dans le texte. 4 fr.

3<sup>e</sup> fascicule. — *Gravitation universelle. Électricité statique*; avec 110 fig. dans le texte et 1 planche. 6 fr.

TOME II. — CHALEUR. — 12 fr.

(\*) 1<sup>er</sup> fascicule. — *Thermométrie. Dilatations*; avec 84 figures dans le texte. 5 fr.

2<sup>e</sup> fascicule. — *Calorimétrie. Théorie mécanique de*

*la chaleur. Conductibilité*; avec 89 fig. dans le texte et 2 planches. 7 fr.

TOME III. — ACOUSTIQUE; OPTIQUE. — 20 fr.

1<sup>er</sup> fascicule. — *Acoustique*; avec 122 figures dans le texte. 4 fr.

(\*) 2<sup>e</sup> fascicule. — *Optique géométrique*; avec 139 fig. dans le texte et 3 planches. 4 fr.

3<sup>e</sup> fascicule. — *Étude des radiations lumineuses, chimiques et calorifiques. Optique physique*; avec 226 fig. dans le texte et 5 planches, dont 2 planches de spectres en couleur. 12 fr.

TOME IV. — ÉLECTRICITÉ DYNAMIQUE; MAGNÉTISME. — 20 fr.

1<sup>er</sup> fascicule. — *La pile. Phénomènes électrothermiques et électrochimiques*; avec 154 figures dans le texte et 1 planche. 6 fr.

2<sup>e</sup> fascicule. — *Les aimants. Magnétisme. Electromagnétisme. Induction*; avec 230 fig. dans le texte. 9 fr.

3<sup>e</sup> fascicule. — *Applications de l'électricité. Complément sur les principales découvertes faites pendant la publication de l'ouvrage. Table générale par noms d'auteurs, et Table générale des matières par ordre alphabétique*; avec 55 fig. dans le texte. 5 fr.

(\*) Le 1<sup>er</sup> fascicule du Tome I, le 1<sup>er</sup> fascicule du Tome II et le 2<sup>e</sup> fascicule du Tome III correspondent à l'ancien programme des examens pour l'admission à l'École Polytechnique, et présentent encore aujourd'hui la partie de la Physique qui mérite d'être étudiée avec le plus de soin pour la préparation aux examens. Les élèves de Mathématiques spéciales qui posséderont ces trois fascicules auront ainsi entre les mains le commencement d'un grand Traité qu'ils pourront compléter ultérieurement, si, poursuivant l'étude de la Physique, ils se préparent à la Licence ou entrent dans une des grandes Écoles du Gouvernement.

**JAMIN.** — Appendice au Cours de Physique de l'École Polytechnique: *Thermométrie, Dilatation, Optique géométrique, Problèmes et Solutions*; rédigé conformément au nouveau programme d'admission à l'École Polytechnique. In-8 de VIII-214 pages, avec 132 belles figures dans le texte; 1879. 3 fr. 50 c.

**JAMIN (J.)**. — *Petit Traité de Physique*, à l'usage des Établissements d'Instruction, des aspirants aux Baccalauréats et des candidats aux Écoles du Gouvernement. Nouveau tirage, augmenté de *Notes sur les progrès récents de la Physique*, par BOUTY. In-8, avec 746 figures dans le texte et un spectre; 1882. 9 fr.

**JONQUIÈRES (E. de)**, Lieutenant de vaisseau. — *Mélanges de Géométrie pure*. In-8, avec planches; 1856. 5 fr.

**JORDAN (Camille)**, Ingénieur des Mines. — *Traité des Substitutions et des Équations algébriques*. In-4; 1870.

**JORDAN (Camille)**, Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique. — *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*. 3 volumes in-8, avec figures dans le texte, se vendant séparément :

TOME I. — CALCUL DIFFÉRENTIEL; 1882. 11 fr.

TOME II. — CALCUL INTÉGRAL (*Intégrales définies et indéfinies*); 1883. 12 fr.

TOME III. — CALCUL INTÉGRAL (*Équations différentielles. — Calcul des variations. — Développement divers. — Problèmes*). (Sous presse.)

**JOUBERT (le P.)**, Professeur à l'École Sainte-Geneviève. — *Sur les équations qui se rencontrent dans la théorie de la transformation des fonctions elliptiques*. In-4; 1876. 5 fr.

**JOUBERT (J.)**, Professeur de Physique au Collège Rollin. — *Étude sur les machines magnéto-électriques*. In-4; 1881. 2 fr. 50 c.

**JOUFFRET (E.)**, Chef d'escadron d'Artillerie. — *Intro-*



duction à la Théorie de l'énergie. Petit in-8; 1883. 3 fr. 50 c.

**JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE**, publié par le Conseil d'instruction de cet établissement. 53 cahiers in-4, avec fig. et pl. 1000 fr.

Le LIII<sup>e</sup> Cahier, qui vient de paraître, se vend 12 fr.

Il contient : Solution de quelques questions se rapportant aux ponts suspendus; par *H. Resal*. — Développement sur un point de la théorie de la rotation des corps solides; par *H. Resal*. — Sur la loi de Dulong et Petit; par *J. Moutier*. — Sur une famille de courbes que l'on rencontre dans les transmissions de mouvement et sur leur application dans les machines; par *H. Léauté*. — Quelques développements sur les équations différentielles linéaires à coefficients constants et sur la théorie des fractions rationnelles; par *Picquet*. — Mémoire sur les surfaces enveloppes de sphères; par *Léon Lecornu*. — Sur les raies telluriques qu'on observe dans le spectre solaire au voisinage des raies D; par *A. Cornu*. — Exposition analytique de la théorie des surfaces; par *Ch. Brisse*.

*Le LIV<sup>e</sup> Cahier est sous presse.*

**JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES**, ou Recueil mensuel de Mémoires sur les diverses parties des Mathématiques, fondé en 1836 et publié jusqu'en 1874 par *J. Liouville*. — A partir de 1875, le *Journal de Mathématiques* est publié par *H. Resal*, Membre de l'Institut, avec la collaboration de plusieurs savants (\*).

1<sup>re</sup> Série, 20 volumes in-4, années 1836 à 1855 (au lieu de 600 francs). 400 fr.

Chaque volume pris séparément (au lieu de 30 fr.) 25 fr.

2<sup>e</sup> Série, 19 volumes in-4, année 1856 à 1874 (au lieu de 570 fr.) 380 fr.

Chaque volume pris séparément, au lieu de 30 fr., 25 fr.

La 3<sup>e</sup> Série, commencée en 1875, continue de paraître chaque mois par cahier de 32 à 48 pages. L'abonnement est annuel, et part du 1<sup>er</sup> janvier.

*Prix de l'abonnement pour un an :*

Paris.....	30 fr.
Départements et Union postale.....	35 fr.
Autres pays.....	40 fr.
— Table générale des 20 volumes composant la 1 <sup>re</sup> Série. In-4.	3 fr. 50 c.
— Table générale des 19 volumes composant la 2 <sup>e</sup> Série. In-4.	3 fr. 50 c.

**JOURNAL DE PHYSIQUE THÉORIQUE ET APPLIQUÉE**, fondé par *d'Almeida* et publié par MM. *E. Bouty*, *A. Cornu*, *E. Mascart*, *A. Potier*, avec la collaboration de plusieurs savants. Grand in-8, mensuel. 2<sup>e</sup> Série, t. III.

Paris et Union postale.....	14 fr.
Autres pays.....	15 fr.

**JULIEN (Stanislas)**, Membre de l'Institut. — Histoire et Fabrication de la Porcelaine chinoise. Ouvrage traduit du chinois, accompagné de Notes et Additions par *Salvétat*, et augmenté d'un Mémoire sur la Porcelaine du Japon. Grand in-8, avec 14 pl., figures gravées sur bois, et une carte de la Chine; 1856. 6 fr.

**JULLIEN (A.)**, Licencié ès Sciences mathématiques et physiques. — Méthode nouvelle pour l'enseignement de la Géométrie descriptive (Perspective et Reliefs). La Méthode se compose d'un Cours élémentaire et d'une Collection de Reliefs, qui se vendent séparément, savoir :

Cours élémentaire de Géométrie descriptive, conforme au programme du Baccalauréat ès Sciences. 3<sup>e</sup> édition. In-18 Jésus avec figures et 143 planches intercalées dans le texte; 1882. Cartonné. 3 fr. 50 c.

(\* On peut se procurer l'une des Séries ou les deux Séries au moyen de paiements mensuels de 40 fr.

Collection de Reliefs à pièces mobiles se rapportant aux questions principales du Cours élémentaire :  
*Petite boîte*, comprenant 30 reliefs, avec 118 pièces métalliques pour monter les reliefs. (*Port non compris.*) 10 fr.  
*Grande boîte*, comprenant les mêmes reliefs tout montés. (*Port non compris.*) 15 fr.

**KIAËS**, Chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique et ancien Élève de cette École. — **Arithmétique élémentaire**, approuvée par le Ministre de la Guerre pour l'enseignement des caporaux et sapeurs dans les Écoles régim. du Génie. 2<sup>e</sup> édit. In-12 cart.; 1874. 1 fr. 20 c.

**KIAËS**. — **Traité d'Arithmétique**, approuvé par le Ministre de la Guerre pour l'enseignement des sous-officiers dans les Écoles régim. du Génie, 2<sup>e</sup> édit. In-12; 1884.  
 Broché. 2 fr. 75 c.  
 Cartonné. 3 fr. 10 c.

**LABOSNE**. — **Instruction sur la Règle à calcul**, contenant les applications de cet instrument au calcul des expressions numériques, à la résolution des équations du deuxième et du troisième degré, et aux principales questions de Trigonométrie. In-8; 1872. 2 fr.

**LACOMBE**. — **Nouveau manuel de l'escompteur**, du banquier, du capitaliste et du financier, ou **Nouvelles Tables de calculs d'intérêts simples**, avec le calendrier de l'escompteur. Nouvelle édition, précédée d'une *Instruction sur les Calculs d'intérêts et l'usage des Tables*, par *LAAS D'AGUEN*, éditeur des Tables de Violeine, et terminée par un Exposé des lois sur les intérêts, les rentes, les effets de commerce, les chèques, etc., par *B., Docteur en Droit*. Un fort vol. in-18 Jésus, 1877. 6 fr.

**LACROIX**. — **Éléments de Géométrie**, suivis de *Notions sur les courbes usuelles*. 2<sup>e</sup> édition, revue par *Prouhet*. In-8, avec 220 figures dans le texte; 1884. (*Autorisé par décision ministérielle.*) 4 fr.

**LACROIX**. — **Éléments d'Algèbre**. 2<sup>e</sup> édit., revue par *Prouhet*. In-8; 1879. 6 fr.

**LACROIX**. — **Complément des Éléments d'Algèbre**. 7<sup>e</sup> édition. In-8; 1863. 4 fr.

**LACROIX**. — **Traité élémentaire de Trigonométrie rectiligne et sphérique**, et d'Application de l'Algèbre à la Géométrie. In-8, avec planches; 1863. 11<sup>e</sup> édition, revue et corrigée. 4 fr.

**LACROIX**. — **Introduction à la connaissance de la sphère**. 4<sup>e</sup> édition. In-18, avec planches; 1872. *Ouvrage choisi par S. Exc. le Ministre de l'Instruction publique pour les Bibliothèques scolaires.* 1 fr. 25 c.

**LACROIX**. — **Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral**. 9<sup>e</sup> édition, revue et augmentée de Notes par *Hermite* et *J.-A. Serret*, Membres de l'Institut. 2 vol. in-8 avec pl.; 1881. 15 fr.

**LACROIX**. — **Traité élémentaire du Calcul des Probabilités**. 4<sup>e</sup> édition. In-8, avec planches; 1864. 5 fr.

**LACROIX**. — **Introduction à la Géographie mathématique et critique et à la Géographie physique**. In-8, avec planches; 1847. 7 fr.

**LA GOURNERIE (de)**, Membre de l'Institut. — **Traité de Géométrie descriptive**. In-4, publié en trois Parties avec Atlas; 1873-1880-1864. 30 fr.

Chaque Partie se vend séparément. 10 fr.

La I<sup>re</sup> PARTIE (2<sup>e</sup> édition) contient tout ce qui est exigé pour l'admission à l'École Polytechnique. Elle est suivie d'un *Supplément contenant la solution de deux problèmes et des figures cavalières pour l'explication des constructions les plus difficiles.*

La II<sup>e</sup> PARTIE (2<sup>e</sup> édition) et la III<sup>e</sup> PARTIE sont le développement du *Cours de Géométrie descriptive* professé à l'École Polytechnique.



- LA GOURNERIE (de).** — Traité de Perspective linéaire. In-4, avec Atlas de 40 planches in-folio dont 8 doubles. 2<sup>e</sup> édition, entièrement revue; 1884. 25 fr.
- LA GOURNERIE (de).** — Recherches sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques, avec des Notes par Arthur Cayley. In-8; 1867. 6 fr.
- LA GOURNERIE (de).** — Études économiques sur l'exploitation des chemins de fer. Grand in-8; 1880. 4 fr. 50 c.
- LAGRANGE.** — Mécanique analytique. 3<sup>e</sup> édition, revue, corrigée et annotée par J. Bertrand. 2 vol. in-4; 1855. (Rare.)
- LAGRANGE.** — Œuvres complètes de Lagrange, publiées par les soins de Serret, Membre de l'Institut, sous les auspices du MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE. In-4, avec un beau portrait de Lagrange, gravé sur cuivre par Ach. Martinet.
- La I<sup>re</sup> Série comprend tous les Mémoires imprimés dans les Recueils des Académies de Turin, de Berlin et de Paris, ainsi que les Pièces diverses publiées séparément. Cette Série forme 7 volumes (Tomes I à VII; 1867-1877), qui se vendent séparément. 30 fr.
- La II<sup>e</sup> Série, qui est en cours de publication, se compose de 7 vol., qui renferment les Ouvrages didactiques, la Correspondance et les Mémoires inédits; savoir :
- Tome VIII : Résolution des équations numériques; 1879. 18 fr.
- Tome IX : Théorie des fonctions analytiques; 1881. 18 fr.
- Tome X : Leçons sur le calcul des fonctions; 1884. 18 fr.
- Tome XI : Mécanique analytique (1<sup>re</sup> PARTIE). (Sous pr.)
- Tome XII : Mécanique analytique (2<sup>e</sup> PARTIE). (Sous pr.)
- Tome XIII : Correspondance inédite de Lagrange et d'Alembert, publiée d'après les manuscrits autographes et annotée par LUDOVIC LALANNE. In-4; 1882. 15 fr.
- Tome XIV : Correspondance avec divers Savants, et Mémoires inédits. In-4. (Sous presse.)
- Le tome XIII contient des Lettres inédites qui sont publiées d'après les manuscrits autographes de d'Alembert et de Lagrange conservés à la Bibliothèque de l'Institut de France. Dans le Tome XIV, on donnera, entre autres, la Correspondance inédite de Lagrange avec Condorcet, Euler, Laplace, etc. Il sera précédé d'une Notice destinée à compléter celle que l'on doit à Delambre, et qui a été reproduite en tête du premier Volume de la Collection.
- LAGUERRE.** — Notes sur la résolution des équations numériques. In-8; 1880. 2 fr.
- LAISANT (G.-A.),** Député, Docteur ès Sciences, ancien Elève de l'École Polytechnique. — Introduction à la méthode des quaternions. In-8, avec fig.; 1881. 6 fr.
- LALANDE.** — Tables de Logarithmes pour les Nombres et les Sinus à CINQ DÉCIMALES; revues par le baron Reynaud. Nouvelle édition, augmentée de Formules pour la Résolution des Triangles, par Bailleul, typographe. In-18; 1881. (Autorisé par décision du Ministre de l'Instruction publique.) 2 fr.
- Cartonné. 2 fr. 40 c.
- LALANDE.** — Tables de Logarithmes, étendues à SEPT DÉCIMALES, par F.-C.-M. Marie, précédées d'une Instruction par le baron Reynaud. Nouvelle édition, augmentée de Formules pour la Résolution des Triangles, par Bailleul, typographe. In-12; 1883. 3 fr. 50 c.
- Cartonné. 3 fr. 90 c.
- LAMÉ (G.),** Membre de l'Institut. — Leçons sur les fonctions inverses des transcendentes et les Surfaces isothermes. In-8, avec figures dans le texte; 1857. 5 fr.
- LAMÉ (G.).** — Leçons sur les Coordonnées curvilignes et leurs diverses applications. In-8, avec figures dans le texte; 1859. 5 fr.
- LAMÉ (G.).** — Leçons sur la Théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. 2<sup>e</sup> édition. In-8, avec pl.; 1866. (Rare.) 25 fr.
- LAMÉ (G.).** — Leçons sur la théorie analytique de la chaleur. In-8, avec fig. dans le texte; 1861. 6 fr. 50 c.
- LANGLOIS (Marcellin),** Professeur de Physique au Collège de Châteaudun. — Du mouvement atomique. Rotation des atomes sur des surfaces moléculaires sphériques. (Dédié à M. Wurtz.)
- I<sup>re</sup> PARTIE. — Thermodynamique. Grand in-8; 1881. 2 fr.
- II<sup>e</sup> PARTIE. — Thermodynamique. Acoustique. Mouvement électrique. Phénomènes chimiques. Grand in-8; 1883. 4 fr.
- LAPLACE.** — Œuvres complètes de Laplace, publiées sous les auspices de l'ACADÉMIE DES SCIENCES, par les Secrétaires perpétuels, avec le concours de Puisseux, Membre de l'Institut, et de J. Hoüel, professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux. Nouvelle édition, avec un beau portrait de Laplace, gravé sur cuivre par Tony Goutière. In-4; 1878-1888.
- Extrait de l'Avertissement.
- « L'Académie, sur le Rapport de la Section d'Astronomie et de la Commission administrative, après avoir pris connaissance des conditions dans lesquelles devait s'accomplir le travail et des soins dont il était entouré, a décidé, dans sa séance du 16 juillet 1877, que la nouvelle édition serait publiée sous ses auspices et sous sa responsabilité. »
- Les éditions précédentes, qui sont devenues très rares, ne contenaient que 7 volumes, savoir: *Traité de Mécanique céleste* (5 volumes), *Exposition du système du Monde* et *Théorie analytique des probabilités*. La nouvelle édition comprendra de plus 6 volumes renfermant tous les autres Mémoires de Laplace, dont la dissémination dans de nombreux Recueils académiques et périodiques rendait jusqu'à ce jour l'étude si difficile.
- TRAITÉ DE MÉCANIQUE CÉLESTE. TOMES I à V (1878-1882).
- Tirage sur papier vergé, au chiffre de Laplace; 5 vol. in-4. 90 fr.
- Tirage sur papier de Hollande, au chiffre de Laplace (à petit nombre); 5 vol. in-4. 120 fr.
- Les volumes du *Traité de Mécanique céleste* ne se vendent plus séparément, sauf le tome V (papier vergé, au chiffre de Laplace) dont le prix est de 20 fr.
- EXPOSITION DU SYSTÈME DU MONDE. TOME VI (1884).
- Tirage sur papier vergé, au chiffre de Laplace. 20 fr.
- Tirage sur papier de Hollande, au chiffre de Laplace. 25 fr.
- Le Tome VII (*Théorie des probabilités*) est sous presse.
- LAPLACE.** — Essai philosophique sur les Probabilités. 6<sup>e</sup> édition. In-8; 1840. 5 fr.
- LAPLACE.** — Précis de l'Histoire de l'Astronomie. 2<sup>e</sup> édition. In-8; 1863. 3 fr.
- LAQUIÈRE,** ancien Elève de l'École Polytechnique. — Géométrie de l'Échiquier; Solution régulière du problème d'Euler sur la marche du cavalier; Considérations numériques sur une série de solutions semi-régulières. Grand in-8; 1880. 2 fr.
- LAQUIÈRE,** ancien élève de l'École Polytechnique. — Loi des hasards, ou Loi fondamentale de la théorie des probabilités appliquée aux Sciences expérimentales. Grand in-8; 1882. 1 fr. 50 c.
- L'ASTRONOMIE.** — Revue mensuelle. (Voir FLAMMARION.)
- LAURENT (A.),** Correspondant de l'Institut. — Méthode de Chimie, précédée d'un Avis au Lecteur, par Biot. In-8, avec figures; 1854. 8 fr.
- LAURENT (H.),** Répétiteur à l'École Polytechnique. — Traité d'Algèbre, à l'usage des Candidats aux Ecoles du



- Gouvernement. 3<sup>e</sup> édition, revue et mise en harmonie avec les derniers Programmes. 3 vol. in-8.
- I<sup>re</sup> Partie : ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE, à l'usage des *Classes de Mathématiques élémentaires*. In-8; 1879. 4 fr.
- II<sup>e</sup> Partie : ANALYSE ALGÈBRE, à l'usage des *Classes de Mathématiques spéciales*. In-8; 1881. 4 fr.
- III<sup>e</sup> Partie : THÉORIE DES ÉQUATIONS, à l'usage des *Classes de Mathématiques spéciales*. In-8; 1881. 4 fr.
- LAURENT (H.). — Théorie élémentaire des Fonctions elliptiques. In-8, avec fig. dans le texte; 1882. 3 fr. 50 c.
- LAURENT (H.). — Traité de Mécanique rationnelle à l'usage des Candidats à l'Agrégation et à la Licence. 2<sup>e</sup> édit. 2 vol. in-8 avec figures; 1878. 12 fr.
- LAURENT (H.). — Traité du Calcul des Probabilités. In-8; 1873. 7 fr. 50 c.
- LAURENT (H.). — Théorie des résidus. In-8; 1866. 4 fr.
- LÉAUTÉ (H.). Docteur ès Sciences, Ingénieur des Manufactures de l'État. — Théorie générale des transmissions par câbles métalliques. — *Règles pratiques*. In-4, avec figures dans le texte; 1882. 10 fr.
- LE COINTE (I.-L.-A.). — Solutions développées de 300 Problèmes qui ont été proposés dans les compositions mathématiques pour l'admission au grade de Bachelier ès Sciences dans diverses Facultés de France. In-8, avec figures dans le texte; 1865. 6 fr.
- LECOINTRE (E.), Ingénieur de la Marine en retraite, officier de la Légion d'honneur. — La Campagne de Moïse pour la sortie d'Égypte, avec Préface de l'Abbé Moigno, relative à un projet de recherche de l'armée de Pharaon engloutie dans la mer Rouge. In-8, avec une carte de l'Isthme de Suez; 1883. 2 fr. 50 c.
- LECOQ DE BOISBAUDRAN. — Spectres lumineux, Spectres prismatiques et en longueurs d'onde, destinés aux recherches de Chimie minérale. Grand in-8, avec atlas contenant 29 belles planches sur acier; 1874. 20 fr.
- LEFÈBRE DE FOURCY, Examineur pour l'admission à l'École Polytechnique. — *Leçons d'Algèbre*. 9<sup>e</sup> édition. In-8; 1880. 7 fr. 50 c.
- LEFÈBRE DE FOURCY. — *Leçons d'Algèbre à l'usage des classes de Mathématiques élémentaires*; 1870. 4 fr. 50 c.
- LEFÈBRE DE FOURCY. — *Éléments de Trigonométrie*, contenant la Trigonométrie rectiligne, la Trigonométrie sphérique et quelques applications à l'Algèbre. 12<sup>e</sup> édition. In-8, avec planche; 1879. 2 fr.
- LEFÈBRE DE FOURCY. — *Leçons de Géométrie analytique*, comprenant la Trigonométrie rectiligne et sphérique, les lignes et les surfaces des deux premiers ordres. 9<sup>e</sup> édition. In-8, avec planches; 1871. 7 fr. 50 c.
- LEFÈBRE DE FOURCY. — *Traité de Géométrie descriptive*, précédé d'une Introduction qui renferme la Théorie du plan et de la ligne droite considérée dans l'espace. 8<sup>e</sup> édition. 2 vol. in-8, dont un composé de 32 planches; 1881. 10 fr.
- LEFÈVRE. — *Abrégé du nouveau traité de l'Arpentage*, ou Guide pratique et mémoratif de l'Arpenteur, particulièrement destiné aux personnes qui n'ont point étudié la Géométrie. Gros volume in-12, avec 18 pl., dont une coloriée. 7 fr.
- LEFORT (F.), Inspecteur général des Ponts et Chaussées. — *Sur les bases des calculs de stabilité des ponts à tabliers métalliques*. Ouvrage approuvé par l'Académie des Sciences et honoré d'une souscription du Ministre des Travaux publics. In-4, avec 4 grandes planches; 1876. 4 fr.
- LEFORT (F.). — *Tables des surfaces de déblai et de remblai, des largesurs d'emprise et des longueurs des talus, relatives à un chemin de fer à deux voies ou à une Route de 10 mètres de largeur entre fossés, pour des cotes sur l'axe de 0<sup>m</sup> à 15<sup>m</sup> et pour des déclivités sur le profil transversal de 0<sup>m</sup> à 0<sup>m</sup>,25. Gr. in-8 jés.; 1861. 3 fr.*
- MÊMES TABLES relatives à une *Route de 8 mètres*. Grand in-8 sur jésus; 1863. 3 fr.
- MÊMES TABLES relatives à un chemin de fer à une voie ou à une *Route de 6 mètres*, etc. Grand in-8 sur jésus; 1862. 3 fr.
- LEHAGRE, Chef de bataillon du Génie. — *Cours de Topographie*, professé à l'École d'application de l'Artillerie et du Génie. Grand in-8 jésus :
- I<sup>re</sup> PARTIE : *Instruments et procédés de Lever (Planimétrie, Altimétrie, Dessin topographique)*. 2<sup>e</sup> édition, revue, corrigée et augmentée. Avec 312 figures dans le texte; 1881. 15 fr.
- II<sup>e</sup> PARTIE : *Méthodes de Levers (Levers à grande échelle; Levers d'une grande étendue; Levers de reconnaissance)*. Avec 9 modèles de carnets pour les différents levers, et 22 grandes planches, dont 3 en couleur; 2<sup>e</sup> édition. (Sous presse.)
- III<sup>e</sup> PARTIE : *Opérations trigonométriques; Lever de la triangulation; Nivellement*. Avec 12 modèles de carnets pour l'enregistrement des observations, 8 types de calculs de triangulation et 12 grandes planches; 1880. 12 fr.
- LEMONNIER, Docteur ès sciences, Prof. au Lycée Henri IV. — *Mémoire sur l'élimination*. In-4; 1879. 6 fr.
- LEONELLI. — *Supplément logarithmique, précédé d'une NOTICE SUR L'AUTEUR*, par J. Hoüel, Professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences de Bordeaux. 2<sup>e</sup> édition. In-8; 1876. 4 fr.
- LEPRIEUR, Trésorier de l'École Polytechnique. — *Répertoire de l'École Polytechnique de 1855 à 1865*, faisant suite au *Répertoire de Marielle*. In-8; 1867. 3 fr.
- LEROY (G.-F.-A.), ancien Professeur à l'École Polytechnique et à l'École Normale supérieure. — *Traité de Géométrie descriptive*, suivi de la *Méthode des plans cotés* et de la *Théorie des engrenages cylindriques et coniques*. 11<sup>e</sup> édition, revue et annotée par Martelet. In-4, avec Atlas de 71 pl.; 1881. 16 fr.
- LEROY (G.-F.-A.). — *Traité de Stéréotomie*, comprenant les Applications de la Géométrie descriptive à la Théorie des Ombres, la Perspective linéaire, la Gnomonique, la Coupe des Pierres et la Charpente. 9<sup>e</sup> édition, revue et annotée par E. Martelet, ancien élève de l'École Polytechnique, professeur de Géométrie descriptive à l'École centrale des Arts et Manufactures. In-4, avec Atlas de 74 pl. in-folio; 1883. 26 fr.
- LE TELLIER (le D<sup>r</sup>). — *Nouveau système de Sténo-graphie*. In-8 raisin, avec 37 pl.; 1869. 2 fr. 50 c.
- LEVY (Maurice), Ingénieur des Ponts et Chaussées, Docteur ès Sciences. — *La Statique graphique et ses Applications aux Constructions*. Un beau volume grand in-8, avec un Atlas même format, comprenant 24 planches doubles; 1874. (Rare.)
- LEVY (Maurice). — *Unités électriques*. In-8; 1882. 1 fr. 50 c.
- LIAGRE (J.-B.-J.), Lieutenant-Général, Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale de Belgique. — *Calcul des probabilités et Théorie des erreurs*, avec des applications aux Sciences d'observation en général et à la Géodésie en particulier. 2<sup>e</sup> édition, revue par le capitaine C. Peny, professeur à l'École militaire. In-8; 1879. 10 fr.
- LIONNET (E.), Agrégé de l'Université, examinateur suppléant d'admission à l'École Navale. — *Éléments d'Arithmétique*. 3<sup>e</sup> édition. In-8; 1857. (Autorisé par l'Université.) 4 fr.



- LIONNET (E.)**. — Algèbre élémentaire. 3<sup>e</sup> édition. In-8; 1868. 4 fr.
- LŒWY (M.)**. — Éphémérides des étoiles de culmination lunaire et de longitude. Publication du Bureau des Longitudes. In-4 en tableaux :
- Année 1883..... 3 fr.  
Année 1884..... 3 fr.
- LONCHAMPT (A.)**. — Recueil des principaux Problèmes posés dans les examens pour l'École Polytechnique et pour l'École Centrale des Arts et Manufactures, ainsi que dans les conférences des Écoles préparatoires les plus importantes de Paris. Énoncés et Solutions. 1 volume lithographié, grand in-8 jésus; 1865. 8 fr.
- LONCHAMPT (A.)**, Préparateur aux baccalauréats ès Lettres et ès Sciences, et aux Écoles du Gouvernement.
- Recueil de Problèmes tirés des compositions données à la Sorbonne, de 1853 à 1875-1876, pour les Baccalauréats ès Sciences, suivis des compositions de Mathématiques élémentaires, de Physique, de Chimie et de Sciences naturelles, données aux Concours généraux de 1846 à 1875-1876, et de types d'examens du baccalauréat ès Lettres et des baccalauréats ès Sciences. 2<sup>e</sup> édition. In-18 jésus, avec fig. dans le texte et planches; 1876-1877 :
- I<sup>re</sup> PARTIE : Arithmétique. — Algèbre. — Trigonométrie.  
Questions. 1 fr. »  
Solutions. 1 fr. 80 c.
- II<sup>e</sup> PARTIE : Géométrie.  
Questions. 1 fr. »  
Atlas. 60 c.  
Solutions. 2 fr. 80 c.
- III<sup>e</sup> PARTIE : Approximations numériques (THÉORIE ET APPLICATIONS). — Maxima et minima (THÉORIE ET QUESTIONS). — Courbes usuelles, Géométrie descriptive, Cosmographie, Mécanique. Théorie et Questions. 1 fr. 50 c.  
Solutions. 1 fr. 50 c.
- IV<sup>e</sup> PARTIE : Physique. — Chimie. (Les Solutions sont précédées d'un Précis sur la résolution des Problèmes de Physique, par H. BERTOT, ancien Élève de l'École Polytechnique).  
Questions. 1 fr. »  
Solutions. 2 fr. 50 c.
- LOOMIS (Elias)**, Professeur de Philosophie naturelle à l'Yale College (Etats-Unis). — Mémoires de Météorologie dynamique; exposé des résultats de la discussion des Cartes du temps des Etats-Unis ainsi que d'autres documents. Traduit de l'anglais par H. Brocard, ancien élève de l'École Polytechnique, Capitaine du génie. Grand in-8, avec figures et 18 planches; 1880. 3 fr.
- LOVE (G.-H.)**. — Étude sur la constitution moléculaire des corps, sur les lois des volumes moléculaires, des chaleurs spécifiques et des dilatations; précédée d'une Introduction sur la définition de la Loi et celle de la Force. In-8, avec 2 pl.; 1883. 5 fr.
- LOYAU (Achille)**, Ingénieur des Arts et Manufactures. — Album de charpentes en bois, renfermant différents types de planchers, pans de bois, combles, échafaudages, ponts provisoires, etc. Grand in-4, contenant 120 planches de dessins cotés; 1873. 25 fr.
- LUCAS (Édouard)**, Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis. — Récréations mathématiques.
- Tome I. — Les Traversées. — Les Ponts. — Les Labyrinthes. — Les Reines. — Le Solitaire. — La Numération. — Le Baguenaudier. — Le Taquin; 1882.
- Tome II. — Qui perd gagne. — Les Dominos. — Les Marelles. — Le Parquet. — Le Casse-tête. — Les Jeux de demoiselles. — Le Jeu icosien d'Hamilton. 1883.
- Deux vol. petit in-8, caractères elzéviens, titres en deux couleurs; chaque volume se vend séparément :
- Tirage sur papier vélin. 7 fr. 50 c.  
Tirage sur papier hollandais. 12 fr. »
- MADAMET**, Ingénieur de la Marine, Sous-directeur de l'École d'application du Génie maritime. — Résistance des matériaux. Notions générales. — Traction. — Compression. — Glissement. Grand in-8, avec 4 planches; 1881. 3 fr.
- MADAMET**. — Traité et Aide-Mémoire des déviations des compas. 1 vol. grand in-8, suivi de Tables numériques, et d'un Atlas du même format contenant 16 pl.; 1882. 10 fr.
- MAINDRON (E.)**. — Les fondations de prix à l'Académie des Sciences. LES LAURÉATS DE L'ACADÉMIE (1714-1880). In-4; 1881. 8 fr.
- MAHISTRE**, Professeur à la Faculté de Lille. — L'art de tracer les Cadrans solaires, à l'usage des Instituteurs et des personnes qui savent manier la règle et le compas. (Approuvé par le Conseil de l'Instruction publique.) 4<sup>e</sup> édit. In-18, avec fig. dans le texte; 1884. 1 fr. 25 c.
- MAHISTRE**. — Cours de Mécanique appliquée. In-8, avec 211 figures dans le texte; 1858. 8 fr.
- MANNHEIM (A.)**, Lieutenant-Colonel d'Artillerie, Professeur à l'École Polytechnique. — Cours de Géométrie descriptive de l'École Polytechnique, comprenant les ÉLÉMENTS DE LA GÉOMÉTRIE CINÉMATIQUE. Grand in-8, illustré de 249 figures dans le texte; 1880. 17 fr.
- MANNHEIM (A.)**. — Premiers éléments de la Géométrie descriptive. In-8<sup>e</sup>; 1882. 1 fr. 25 c.
- MANSION (P.)**. — Éléments de la théorie des déterminants, avec de nombreux exercices. 4<sup>e</sup> éd. In-8; 1883. 3 fr.
- MANSION (P.)**, Professeur à l'Université de Gand. Introduction à la Théorie des Déterminants, avec de nombreux exercices à l'usage des Établissements d'Instruction moyenne. 2<sup>e</sup> édition. In-8; 1882. 1 fr.
- MANSION (P.)**. — Précis de la Théorie des fonctions hyperboliques. Grand in-8; 1884. 1 fr.
- MARIE**. — Géométrie stéréographique, ou Relief des polyèdres, pour faciliter l'étude des corps, avec 25 planches gravées et découpées de manière à reconstituer les polyèdres. In-8. 5 fr.
- MARIE (Maximilien)**, Répétiteur de Mécanique et Examinateur d'admission à l'École Polytechnique. — Histoire des Sciences mathématiques et physiques. Petit in-8, caractères elzéviens, titre en deux couleurs.
- TOME I. — 1<sup>re</sup> Période. De Thalès à Aristarque. — 2<sup>e</sup> Période. D'Aristarque à Hipparque. — 3<sup>e</sup> Période. D'Hipparque à Diophante; 1883. 6 fr.
- TOME II. — 4<sup>e</sup> Période. De Diophante à Copernic. — 5<sup>e</sup> Période. De Copernic à Viète; 1883. 6 fr.
- TOME III. — 6<sup>e</sup> Période. De Viète à Copernic. — 7<sup>e</sup> Période. De Kepler à Descartes; 1883. 6 fr.
- TOME IV. — 8<sup>e</sup> Période. De Descartes à Cavalieri. — 9<sup>e</sup> Période. De Cavalieri à Huygens. 6 fr.
- Les autres périodes paraîtront successivement, en 2 ou 3 vol. analogues aux tomes précédents (Huygens à Newton, Newton à Euler, Euler à Lagrange, Lagrange à Laplace, Laplace à Fourier, Fourier à Arago, Arago à Abel et aux géomètres contemporains).
- MARIE (Maximilien)**. — Théorie des fonctions des variables imaginaires. 3 volumes grand in-8, de 280 à 300 pages; 1874-1875-1876. 20 fr.  
Chaque volume se vend séparément 8 fr.
- MARIELLE**. — Répertoire de l'École Polytechnique depuis l'époque de sa création en 1794 jusqu'en 1855 inclusivement. (Voir LEPRIEUR, page 17, pour la suite du Répertoire.) In-8; 1855. 5 fr.
- MARINE A L'EXPOSITION UNIVERSELLE DE 1878 (La)**. — Ouvrage publié par ordre de M. le Ministre de la Marine et des Colonies. 2 beaux volumes grand in-8, avec 102 figures dans le texte, et 2 Atlas in-plano contenant 161 planches; 1879. 80 fr.



- MARRE (A.).** — Le Triparty en la Science des nombres, par maistre Nicolas Chuquet, Parisien, publié d'après le manuscrit, fonds français, n° 1346 de la Bibliothèque Nationale de Paris, et précédé d'une Notice. Extrait du *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche*, t. XIII. In-4°; 1881. Rome. 18 fr.
- MARRE (A.).** — Problèmes numériques faisant suite et servant d'application au Triparty en la Science des nombres de Nicolas Chuquet, Parisien. In-4; 1881. Rome. 3 fr.
- MARTIN (Adolphe),** Docteur ès Sciences. — Sur une méthode d'autocollimation directe des objectifs astronomiques et son application à la mesure des indices de réfraction des verres qui les composent; Remarques sur l'emploi du sphéromètre. In-4; 1880. 1 fr. 25 c.
- MASCART.** — Voir Moureaux.
- MASTAING (de),** Professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures. — Cours de Mécanique appliquée à la résistance des matériaux. Leçons professées à l'École Centrale de 1862 à 1872 par de Mastaing et rédigées par Courtès-Lapeyrat, Ingénieur des Arts et Manufactures, répétiteur du Cours. Grand in-8, avec nombreuses figures dans le texte et planche; 1874. 15 fr.
- MATHÉSIIS, Recueil mathématique à l'usage des Ecoles spéciales et des Etablissements d'instruction moyenne,** publié par P. Mansion et J. Neuberg. Grand in-8, mensuel. T. IV; 1884. Paris, France et Etranger: 9 fr.
- MATHIEU (Émile),** Professeur à la Faculté des Sciences de Nancy. — Théorie de la capillarité. In-4; 1883. 10 fr.
- MATHIEU (Émile).** — Dynamique analytique. In-4; 1878. 15 fr.
- MATHIEU (Émile).** — Cours de Physique mathématique. In-4; 1873. 15 fr.
- MAXWELL (James Clerk).** — Traité élémentaire d'Electricité, précédé d'une Notice sur ses travaux en Electricité, par William Garnett. Traduit de l'anglais par Gustave RICHARD, Ingénieur civil des Mines. In-8, avec figures dans le texte; 1884.
- MEISSAS (N.).** — Tables pour servir aux Études et à l'exécution des chemins de fer, ainsi que dans tous les travaux où l'on fait usage du cercle et de la mesure des angles. 2<sup>e</sup> édition; 1867. Broché. 8 fr. Cartonné. 9 fr.
- MELSENS, Membre de l'Académie Royale des Sciences, de Belgique.** — Balistique expérimentale. Expériences sur le passage des projectiles à travers les milieux résistants, sur l'écoulement des solides et sur la résistance de l'air au mouvement des projectiles. Grand in-8, avec 1 planche; 1882. 1 fr. 25 c.
- MÉMORIAL DE L'ARTILLERIE,** rédigé par les soins du Comité de l'Artillerie. Volume in-8, avec Atlas cartonné de 24 planches (n° VIII); 1867. 12 fr. Ce volume contient l'histoire des modifications successives introduites dans l'organisation du personnel et dans le matériel de l'Artillerie, par suite de l'adoption des bouches à feu rayées.
- MÉMORIAL DE L'OFFICIER DU GÉNIE,** rédigé par les soins du Comité des Fortifications, avec l'approbation du Ministre de la Guerre. In-8, avec planches et nombreuses figures dans le texte. Chaque volume, à partir du N° 21, se vend séparément. 7 fr. 50 c. Les N°s 21 (1873), 22 (1874), 23 (1874), 24 (1875), 25 (1876), sont en vente. Le N° 26 est sous presse. Pour recevoir franco, ajouter 70 c. par volume.
- MILNE EDWARDS, Membre de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences,** Président de l'Association scientifique de France. — Nouvelles Causeries scientifiques, ou Notes adressées aux Membres de l'Association à l'occasion de l'Exposition internationale de 1878. In-8; 1880. (Se vend au profit de l'Association.) 6 fr.
- MIQUEL (P.),** Docteur ès Sciences, Docteur en médecine, Attaché à l'Observatoire de Montsouris. — Les Organismes vivants de l'atmosphère. Étude sur les semences aériennes des moisissures et des bactéries, sur les procédés usités pour récolter, compter et cultiver ces deux classes de microbes et sur l'application de ces recherches à l'hygiène générale des villes et des asiles hospitaliers. Un beau volume grand in-8, avec 86 figures dans le texte et 2 planches en taille-douce; 1883. 9 fr. 50 c. Quelques exemplaires pour bibliophiles ont été tirés sur papier vélin, format in-4. 20 fr.
- MOIGNO (l'Abbé).** — Leçons de Mécanique analytique, rédigées principalement d'après les méthodes d'Augustin Cauchy et étendues aux travaux les plus récents. Statique. In-8, avec planches; 1868. 12 fr.
- MOIGNO (l'Abbé).** — Calcul des Variations, rédigé en collaboration avec LINDELÖF. In-8; 1861. 6 fr.
- MOIGNO (l'Abbé).** — Actualités scientifiques. Volumes in-18 jésus, ou petit in-8 se vendant séparément :  
PREMIÈRE SÉRIE.
- 1° Analyse spectrale des Corps célestes; par Hugues. (Sous presse.)
  - 2° Calorescence. — Influence des couleurs; par Tyndall. 1 fr. 50 c.
  - 3° La Matière et la Force; par Tyndall. 1 fr. 50 c.
  - 4° Impossibilité du nombre actuellement infini. — La Science dans ses rapports avec la Foi; par l'abbé Moigno. 1 fr.
  - 5° Sept Leçons de Physique générale; par A. Cauchy. 1 fr. 50 c.
  - 6° Physique moléculaire; par l'Abbé Moigno. (Épuisé.)
  - 7° Chaleur et Froid; par Tyndall. (Sous presse.)
  - 8° Sur la radiation; par Tyndall. 1 fr. 25 c.
  - 9° Sur la force de combinaison des atomes; par Hofmann. 1 fr. 25 c.
  - 10° Faraday inventeur; par Tyndall. 2 fr.
  - 11° Saccharimétrie optique, chimique et mélassimétrique; par l'Abbé Moigno. 3 fr. 50 c.
  - 12° La Science anglaise, son bilan en 1868 (réunion à Norwich); par l'Abbé Moigno. 2 fr. 50 c.
  - 13° Mélanges de Physique et de Chimie pures et appliquées; par Frankland, Graham, Macquorn-Rankine, Perkin, Sainte-Claire Deville, Tyndall. 3 fr. 50 c.
  - 14° Les Aliments; par Letheby. 3 fr.
  - 15° Constitution de la Matière; par le P. Leray. (Épuisé.)
  - 16° Esquisse historique de la Théorie dynamique de la Chaleur; par Tait. 3 fr. 50 c.
  - 17° Théorie du Vélocipède. — Sur les lois de l'écoulement de la vapeur; par Macquorn-Rankine. 1 fr. 25 c.
  - 18° Les Métamorphoses chimiques du Carbone; par Odling. 2 fr.
  - 19° Programme d'un cours en sept leçons sur les phénomènes et les théories électriques; par Tyndall. 1 fr. 50 c.
  - 20° Géologie des Alpes et du tunnel des Alpes; par Elie de Beaumont et Sismonda. 2 fr.
  - 21° La Science anglaise, son bilan en 1869 (réunion à Exeter). 3 fr. 50 c.
  - 22° La Lumière; par Tyndall. 2 fr.
  - 23° Les agents explosifs modernes et leurs applications; par l'Abbé Moigno. 2 fr.



- 24° Religion et Patrie, vengées de la fausse science et de l'envie haineuse; par l'Abbé Moigno. 1 fr. 50 c.
- 25° Éléments de Thermodynamique; par J. Moutier. (Epuisé.)
- 26° Sur la force de la Poudre et des matières explosibles; par Berthelot. 3 fr. 50 c.
- 27° Sursaturation des solutions gazeuses; par Tomlinson. 2 fr.
- 28° Optique moléculaire. Effets de précipitation, de décomposition, d'illumination produits par la lumière; par l'Abbé Moigno. 2 fr. 50 c.
- 29° L'Architecture du monde des atomes, avec 100 fig. dans le texte; par Gaudin. 5 fr.
- 30° Étude sur les éclairs, avec figures dans le texte; par P. Perrin. 2 fr. 50 c.
- 31° Manuel pratique militaire des chemins de fer, avec nomb. fig.; par le capitaine Issalène. 2 fr. 50 c.
- 32° Instruction sur les Paratonnerres; par Pouillet et Gay-Lussac; avec 58 fig. et planche. 2 fr. 50 c.
- 33° Tables barométriques et hypsométriques pour le calcul des hauteurs, précédées d'une Instruction; par R. Radau. (Nouveau tirage.) 1 fr. 25 c.
- 34° Les passages de Vénus sur le disque solaire, avec figures; par Edm. Dubois. 3 fr. 50 c.
- 35° Manuel élémentaire de Photographie au collodion humide, avec figures; par Dumoulin. 1 fr. 50
- 36° Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres; par Bachet, sieur de Méziriac. 4<sup>e</sup> éd., revue par Labosne. Un joli vol., petit in-8 elzévir, titre en deux couleurs. 6 fr.
- 37° La Chaleur considérée comme un mode de mouvement; par Tyndall. 2<sup>e</sup> édition française, avec nombreuses figures; 1881. 2<sup>e</sup> tirage. 8 fr.
- 38° L'Astronomie pratique et les Observatoires en Europe et en Amérique, depuis le milieu du XVIII<sup>e</sup> siècle jusqu'à nos jours; par André et Rayet, astronomes, et Angot, professeur de Physique au Lycée Fontanes; avec belles figures dans le texte et planches en couleur.
- I<sup>re</sup> PARTIE : Angleterre. 4 fr. 50 c.
- II<sup>e</sup> PARTIE : Ecosse, Irlande et Colonies anglaises. 4 fr. 50 c.
- III<sup>e</sup> PARTIE : Amérique du Nord. 4 fr. 50 c.
- IV<sup>e</sup> PARTIE : Amérique du Sud, et Météorologie américaine. 3 fr.
- V<sup>e</sup> PARTIE : Italie. 4 fr. 50 c.
- 39° Méthodes chimiques pour la recherche des falsifications, l'essai, l'analyse des matières fertilisantes; par Ferdinand Jean. (Epuisé.)
- 40° Premières Leçons de Photographie, avec figures; par Perrot de Chaumeux. 1 fr. 50 c.
- 41° Les Mines dans la guerre de campagne. — Exposé des divers procédés d'inflammation des mines et des pétards de rupture. — Emploi de préparations pyrotechniques et emploi de l'électricité, avec 51 fig. dans le texte; par le capit. Picardat. 2 fr. 50 c.
- 42° Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques, par R. ARGAND. 2<sup>e</sup> édition, précédée d'une préface par J. Hoüel. 5 fr.
- 43° Essai sur les piles, par A. Callaud. 2<sup>e</sup> édition, avec 2 planches. (Ouvrage couronné par la Société des Sciences de Lille.) 2 fr. 50 c.
- 44° Matière et Éther; Indication d'une méthode pour établir les propriétés de l'Éther, par Kretz, Ingénieur en chef des Manufactures de l'État. 1 fr. 50 c.
- 45° L'Unité dynamique des forces et des phénomènes de la nature, ou l'Atome tourbillon; par F. Marco, Professeur au Lycée Cavour, à Turin. 2 fr. 50 c.
- 46° Physique et Physique du Globe. Divers Mémoires de Tyndall, Carpenter, Ramsay, Raphaël de Rossi, Félix Plateau. Traduit par l'Abbé Moigno. 2 fr. 50 c.
- 47° La grande pyramide, pharaonique de nom, humanitaire de fait; ses merveilles, ses mystères et ses enseignements; par Piazzi Smyth, Astronome royal d'Écosse. Traduit de l'anglais par l'Abbé Moigno. (Epuisé.)
- 48° La Foi et la Science; par l'Abbé Moigno. 3 fr.
- 49° Les insuccès en Photographie; causes et remèdes, suivis de la retouche des clichés et du gélatinage des épreuves; par Cordier. 4<sup>e</sup> éd. 1 fr. 75 c.
- 50° La Photolithographie, son origine, ses procédés, ses applications; par C. Fortier. Petit in-8, orné de planches, fleurons, culs-de-lampe, etc., obtenus au moyen de la Photolithographie. 3 fr. 50 c.
- 51° Procédé au Collodion sec; par F. Boivin. 2<sup>e</sup> éd., augmentée des formulaires de Th. Sutton, des tirages aux poudres inertes (procédé au charbon), ainsi que de notions pratiques sur la Photolithographie, l'électrogravure et l'impression à l'encre grasse. 1 fr. 50 c.
- 52° Les Pandynamomètres de torsion et de flexion. Théorie et application; avec 2 grandes planches, par G.-A. Hirn. 2 fr.
- 53° Notice sur les Aréomètres employés dans l'industrie, le commerce et les sciences, avec figures dans le texte; par Baserga, constructeur d'instruments. 1 fr. 50 c.
- 54° Manuel du Magnanier, application des théories de PASTEUR à l'éducation des vers à soie; par L. Roman. Un beau volume, avec nombreuses figures ombrées dans le texte et 6 planches en couleur. 4 fr. 50 c.
- 55° Les Couleurs reproduites en Photographie; Historique, théorie et pratique; par Eug. Dumoulin. 1 fr. 50 c.
- 56° Progrès récents de l'Astronomie stellaire; par R. Radau. 1 fr. 50 c.
- 57° Les Observatoires de montagne (avec figures dans le texte); par R. Radau. 1 fr. 50 c.
- 58° Les poussières de l'air, avec figures dans le texte et 4 planches; par Gaston Tissandier. 2 fr. 25 c.
- 59° Traité pratique de Photographie au charbon, complété par la description de divers Procédés d'impressions inaltérables (Photochromie et tirages photomécaniques); par Léon Vidal. 3<sup>e</sup> éd., avec une pl. spécimen de Photochromie et 2 pl. spécimens d'impressions à l'encre grasse. 4 fr. 50 c.
- 60° Le procédé au gélatino-bromure, suivi d'une Note de MILSON Sur les clichés portatifs et de la traduction des Notices de R. KENNETT et Rév. H.-G. PALMER, avec fig.; par H. Odagir. 1 fr. 50 c.
- 61° La Science des nombres d'après la tradition des siècles; Explication de la table de Pythagore, par l'Abbé Marchand. 3 fr.
- 62° La Lumière et les climats; par R. Radau. 1 fr. 75 c.
- 63° Les Radiations chimiques du Soleil; par R. Radau. 1 fr. 50 c.
- 64° L'Actinométrie; par R. Radau. 2 fr.
- 65° Traité pratique complet d'impressions photographiques aux encres grasses, de phototypographie et de photogravure; par Moock. 2<sup>e</sup> éd. 3 fr.
- 66° La Spectroscopie, avec nombreuses gravures dans le texte; par Cazin. 2 fr. 75 c.
- 67° Formulaire pratique de la Photographie aux sels d'argent; par Huberson. 1 fr. 50 c.
- 68° Leçons sur l'Électricité, par Tyndall; traduit de l'anglais par Francisque Michel. 2 fr. 75 c.
- 69° Traité élémentaire et pratique de Photographie au charbon; par Aubert. 2<sup>e</sup> éd. 1 fr. 50 c.
- 70° La prévision du temps; par W. de Fonville. 1 fr. 50 c.
- 71° La Photographie et ses applications scientifiques; par R. Radau. 1 fr. 75 c.
- 72° L'Ozone; ce qu'il est, ses propriétés physiques et chimiques, son existence et son rôle dans la nature; par l'Abbé Moigno. 3 fr. 50 c.



- 73° Les Microbes organisés; leur rôle dans la fermentation, la putréfaction et la contagion; Mémoires de Tyndall et Pasteur; par l'Abbé Moigno. 3 fr. 50 c.
- 74° Le R. P. Secchi sa Vie, son Observatoire, ses Travaux, ses Écrits; ses titres à la gloire, ses grands Ouvrages; par l'Abbé Moigno; avec un portrait et 3 planches. 3 fr. 50 c.
- 75° Cartes du temps et Avertissements de tempêtes, par Robert H. Scott. Traduit de l'anglais par Zurcher et Margollé. Petit in-8, avec 2 planches et nombreuses figures. 4 fr. 50 c.
- 76° La Photographie appliquée à l'Archéologie: Reproduction des Monuments, Oeuvres d'art, Mobiliers, Inscriptions, Manuscrits; par E. Trutat, avec cinq photolithographies. 3 fr.
- 77° La Photographie des peintres, des voyageurs et des touristes. Nouveau procédé sur papier huilé, simplifiant le bagage et facilitant toutes les opérations, avec indication de la manière de construire soi-même la plupart des instruments nécessaires; par Pélégry; avec un spécimen. 1 fr. 75 c.
- 78° Comment on observe les nuages pour prévoir le temps; par André Poëy. Petit in-8, avec 17 planches chromolithographiques. 4 fr. 50 c.
- 79° Traité pratique de Phototypie ou Impression à l'encre grasse sur couche de gélatine; par Léon Vidal; avec belles figures dans le texte et spécimens. 8 fr.
- 80° Observations météorologiques en ballon; Résumé de vingt-cinq ascensions aérostatiques; par Gaston Tissandier; avec fig. 1 fr. 50 c.
- 81° Précis de Microphotographie, par G. Huberson; avec figures dans le texte et une planche en photogravure. 2 fr.
- 82° Constitution intérieure de la Terre; par R. Radau. 1 fr. 50 c.
- 83° Le rôle des vents dans les climats chauds; la pression barométrique et les climats des hautes régions; par R. Radau. 1 fr. 50 c.
- 84° La Photographie sur plaque sèche. — Emulsion au coton-poudre avec bain d'argent; par Fabre. 1 fr. 75 c.
- 85° La machine de Gramme. — Sa théorie et ses applications, avec figures; par Antoine Bréguet. 2 fr.
- 86° Traité d'analyse chimique complète des potasses brutes et des potasses raffinées; par Berth. 1 fr. 50 c.
- 87° La Météorologie appliquée à la prévision du temps. Leçon faite à l'École supérieure de Télégraphie, par E. Mascart; recueillie par Moureaux, météorologiste au Bureau central; avec 16 planches en couleur. 2 fr.
- 88° Traité pratique de la retouche des clichés photographiques, suivi d'une méthode très détaillée d'émaillage et de formules et procédés divers; par Piquépé; avec 2 photoglyphies. 4 fr. 50 c.
- 89° Notions élémentaires d'analyses chimique qualitative; par Th. Swarts; avec figures. 1 fr. 50 c.
- 90° Le gaz et l'électricité comme agent de chauffage, par le Dr Siemens. Traduit de l'anglais par Gustave Richard, avec figures. 1 fr. 50 c.
- 91° Traité pratique de Photoglyptie; par Léon Vidal. Avec nombreuses figures dans le texte et 2 planches photoglyphiques. 7 fr.
- 92° Les agents explosifs appliqués dans l'industrie; par Abel. Traduit de l'anglais par Gustave Richard. 1 fr. 50 c.
- 93° Récréations mathématiques; par Ed. Lucas. Deux jolis volumes, petit in-8 elzévir, titres en deux couleurs. Chaque volume se vend séparément. 7 fr. 50 c.
- 94° Les courants atmosphériques d'après les nuages. au point de vue de la prévision du temps; par André Poëy; 1882. 2 fr.
- 95° Histoire de la symphonie à orchestre; par Michel Brenet. Un joli volume, petit in-8 elzévir, titre en deux couleurs; 1882. 3 fr.
- 96° Éléments de construction de machines; par Cauthorn Unwin. Traduit sur la 2<sup>e</sup> édition anglaise par Bocquet, et suivi d'un Appendice par Léauté, avec 237 fig. dans le texte; 1882. Broché. 7 fr. Cart. à l'anglaise. 8 fr.
- 97° Nouvelle théorie du Soleil; conservation de l'énergie solaire; par C.-W. Siemens. — Reconcentration de l'énergie de l'Univers; par Macquorn Rankine. Traduit de l'anglais par G. Richard; 1882. 1 fr.
- 98° Détermination des éléments de construction des électro-aimants; par du Moncel, membre de l'Institut. 2<sup>e</sup> édition; 1882. 2 fr.
- 99° Traité élémentaire du microscope; par E. Trutat, Conservateur du musée d'Histoire naturelle de Toulouse. Un joli volume petit in-8, avec 171 figures dans le texte; 1882. 8 fr. Cartonné à l'anglaise. 9 fr.
- 100° Unités et constantes physiques; par Everett. Ouvrage traduit de l'anglais par Jules Reynaud, avec le concours de Thévenin, de la Touanne et Massin. In-18 jésus; 1882. 4 fr.
- 101° Traité des impressions photographiques; par Poitevin, suivi d'Appendices par Léon Vidal. 2<sup>e</sup> édition, avec un portrait photographique de Poitevin; 1883. 5 fr.
- 102° Introduction à la théorie de l'énergie; par Joffret, Chef d'escadron d'artillerie. Petit in-8; 1883. 3 fr. 50 c.
- 103° La Météorologie nouvelle et la prévision du temps, par Radau; 1883. 1 fr. 75 c.
- 104° Les vêtements et les habitations dans leurs rapports avec l'atmosphère, par Radau; 1883. 1 fr. 75 c.
- 105° La Platinotypie, Nouveau procédé photographique aux sels de platine; par Pizzighelli et Hübl. Traduit de l'allemand par Henry Gauthier-Villars; 1883. 3 fr. 50 c.

## DEUXIÈME SÉRIE.

La Science illustrée. — L'enseignement de tous.

- 1° L'Art des projections, avec 103 figures; par l'Abbé Moigno. 2 fr. 50 c.
- 2° Photomicrographie en 100 tableaux pour projections; texte explicatif avec 29 figures dans le texte; par Girard. 1 fr. 50 c.
- 3° Les Accidents, secours en l'absence de l'homme de l'art, avec 36 figures dans le texte; par Smée. 1 fr. 25 c.
- 4° L'Anatomie et l'Histologie, enseignées par les projections lumineuses; par le Dr Le Bon. 1 fr.
- 5° Manuel de Mnémotechnie, Application à l'histoire; par l'Abbé Moigno. 3 fr.
- 6° Le latin pour tous; par l'Abbé Moigno. 2 fr.
- 7° Les Sciences, les Industries, les Arts enseignés et illustrés par quatre mille cinq cents photographies sur verres. — Catalogue des tableaux et appareils; par l'Abbé Moigno. 1 fr. 50 c.

MOIGNO (l'Abbé). — Voir Lecointre, Campagne de Moïse.

MOLLET (J.). — Gnomonique graphique, ou Méthode facile pour tracer les cadrans solaires sur toutes sortes de Plans, en ne faisant usage que de la règle et du compas. 7<sup>e</sup> édit. In-8, avec pl.; 1884. 3 fr. 50 c.

MONCKHOVEN (Dr V.). — Traité général de Photographie, suivi d'un chapitre spécial sur le gélatino-bromure d'argent. Septième édition. Grand in-8, avec planches et figures intercalées dans le texte; 1880. 16 fr.

MOUCHOT. — La chaleur solaire et ses applications industrielles. — Deuxième édition, revue et considérablement augmentée. In-8, avec figures; 1879. 6 fr.



- MOUREAUX (Th.)**, Météorologiste au Bureau central. — *La Météorologie appliquée à la prévision du temps.* Leçon faite à l'École supérieure de Télégraphie par *E. Mascart*, Directeur du Bureau central météorologique de France, recueillie par *Th. Moureaux*. In-18 avec 16 planches en couleur; 1881. 2 fr.
- MOUREY**. — *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires.* (Dédié aux amis de l'évidence.) 2<sup>e</sup> édition. In-12, avec figures dans le texte; 1861. 2 fr. 50 c.
- NAUDIER**, Docteur en droit, conseiller de préfecture de l'Aube. — *Traité théorique et pratique de la Législation et de la Jurisprudence des Mines, des Minières et des Carrières.* In-8; 1877. 10 fr.
- NAUDIN (Laurent)**, Chimiste. — *Désinfection des alcools mauvais goût par l'électrolyse des flegmes.* 2<sup>e</sup> édition. In-18 Jésus, avec figures; 1883. 1 fr. 50 c.
- NEVEU et HENRY**, Ingénieurs de forges. — *Traité pratique du laminage du fer.* In-8, avec 10 Tableaux et un Atlas cartonné de 117 planches; 1881. 40 fr.
- NORMAND (J.-A.)**. — *Navigation stellaire.* In-4; 1883. 3 fr.
- NOURY**. — *Tarifs d'après le système métrique décimal pour cuber les bois carrés en grume ou ronds, et tous les corps solides quelconques, ainsi que les colis ou ballots, etc.* 3<sup>e</sup> édition. In-8; 1877. (*Approuvé par les Ministres de l'Intérieur et de la Marine.*) 4 fr.
- NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES.** Journal des Candidats aux Écoles Polytechnique et Normale, rédigé par *Gerono* et *Brisse*. (Publication fondée en 1842 par *Gerono* et *Terquem*, et continuée par *Gerono*, *Prouhet* et *Bourget*.) (1)
- 1<sup>re</sup> Série, 20 vol. in-8, années 1842 à 1861. 300 fr.  
Les tomes I à VII, X et XVI à XX (1842-1848, 1851 et 1857 à 1861) ne se vendent pas séparément. Les autres tomes de la 1<sup>re</sup> Série se vendent séparément. 15 fr.
- 2<sup>e</sup> Série, 20 vol. in-8, années 1862 à 1881. 300 fr.  
Les tomes I à III et V à VIII (1862 à 1864 et 1866 à 1869) de la 2<sup>e</sup> Série ne se vendent pas séparément. Les autres tomes se vendent séparément. 15 fr.
- La 3<sup>e</sup> Série, commencée en 1882, continue de paraître chaque mois par cahier de 48 pages.  
Les abonnements sont annuels et partent de janvier.  
*Prix pour un an (12 numéros) :*
- |                                    |        |
|------------------------------------|--------|
| Paris.....                         | 15 fr. |
| Départements et Union postale..... | 17 fr. |
| Autres pays.....                   | 20 fr. |
- OGER (F.)**, Professeur d'Histoire et de Géographie, Maître de Conférences au Collège Sainte-Barbe. — *Géographie de la France et Géographie générale, physique, militaire, historique, politique, administrative et statistique, rédigée conformément au Programme officiel, à l'usage des Candidats aux Écoles du Gouvernement et aux Aspirants aux Baccalauréats ès Lettres et ès Sciences.* 8<sup>e</sup> édition. In-8; 1883. 3 fr.  
*Cet Ouvrage correspond à l'Atlas de Géographie générale du même Auteur.*
- OGER (F.)**. — *Atlas de Géographie.*  
*Atlas de Géographie générale* à l'usage des Lycées, des Collèges, des Institutions préparatoires aux Écoles du gouvernement et de tous les établissements d'Instruction publique. 12<sup>e</sup> édition. In-plano cartonné, contenant 33 Cartes coloriées; 1883. 14 fr.  
*Atlas géographique et historique* à l'usage de la classe de QUATRIÈME. 3<sup>e</sup> édition. In-plano cartonné contenant 16 cartes coloriées; 1882. 8 fr. 50 c.  
*Atlas géographique et historique* à l'usage de la classe de CINQUIÈME. In-plano cartonné, contenant 18 cartes coloriées; 1875. 8 fr. 50 c.  
*Atlas géographique et historique* à l'usage de la classe de SIXIÈME. In-plano cartonné, contenant 10 cartes coloriées; 1875. 6 fr.  
*Atlas géographique et historique* à l'usage des CLASSES ÉLÉMENTAIRES (7<sup>e</sup>, 8<sup>e</sup> et 9<sup>e</sup>). In-plano cartonné, contenant 13 cartes coloriées; 1875. 6 fr.
- OGER (F.)**. — *Cours d'Histoire générale à l'usage des Lycées, des établissements d'Instruction publique, des candidats aux Écoles du Gouvernement et aux baccalauréats, rédigé conformément aux programmes officiels. Classes de troisième, seconde, philosophie.*  
I. *Histoire de l'Europe depuis l'invasion des Barbares jusqu'au XIV<sup>e</sup> siècle.* 2<sup>e</sup> édition. In-8; 1875. 3 fr. 50 c.  
II. *Histoire de l'Europe depuis le XIV<sup>e</sup> jusqu'au milieu du XVII<sup>e</sup> siècle.* 2<sup>e</sup> édition. In-8; 1875. 3 fr. 50 c.  
III. *Histoire de l'Europe de 1610 à 1848.* 3<sup>e</sup> édition; 1875. 6 fr. 50 c.  
— *Histoire de l'Europe de 1848 à 1875.* In-8; 1882. (Appendice au Tome III.) 1 fr.  
IV. *Histoire de l'Europe de 1610 à 1815 (Cours de Rhétorique).* 2<sup>e</sup> édition. In-8; 1875. 7 fr. 50 c.
- ORTOLAN (J.-A.)**, mécanicien en chef de la marine. — *Mémorial du mécanicien d'usine et de navigation. Calculs d'application; Tables et tableaux de résultats pour la construction, les essais et la conduite des machines à vapeur.* In-18 de 520 pages, avec plus de 200 figures dans le texte; 1878. Broché. 4 fr. 50 c.  
Cartonné. 5 fr. 50 c.
- PARIS (Vice-Amiral)**, Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, Conservateur du Musée de Marine. — *Souvenirs de Marine. — Collections de plans ou dessins de navires et de bateaux anciens et modernes, existants ou disparus, avec les éléments nécessaires à leur construction.* Un bel album relié de 60 pl. in-folio; 1882. 25 fr.
- PASQUIER (Ernest)**, Professeur à l'Université de Louvain. — *Étude des machines à vapeur, principalement basée sur les expériences de Hirn et Hallauer.* Grand in-8; 1883. 5 fr.
- PASTEUR (L.)**. — *Études sur la maladie des Vers à soie; moyen pratique assuré de la combattre et d'en prévenir le retour.* Deux beaux volumes grand in-8, avec figures dans le texte et 37 planches; 1870. 20 fr.
- PASTEUR (L.)**. — *Études sur la Bière; ses maladies, causes qui les provoquent, procédé pour la rendre inaltérable, avec une THÉORIE NOUVELLE DE LA FERMENTATION.* Grand in-8, avec 85 figures dans le texte et 13 planches gravées; 1876. 20 fr.
- PASTEUR (L.)**. — *Examen critique d'un écrit posthume de Claude Bernard sur la fermentation.* In-8; 1879. 5 fr.
- PEIGNÉ (M.-A.)**. — *Conversion des mesures, monnaies et poids de tous les pays étrangers en mesures, monnaies et poids de la France.* In-18 Jésus; 1867. 2 fr. 50 c.
- PEREIRE (Eugène)**. — *Tables de l'intérêt composé, des annuités et des rentes viagères.* 3<sup>e</sup> édit., augmentée de 8 Tableaux graphiques. In-4; 1882. 10 fr.
- PERRODIL (GROS de)**, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées. — *Résistance des matériaux. — Résistance des voûtes et arcs métalliques employés dans la construction des ponts.* In-8, avec 2 grandes planches; 1879. 7 fr. 50 c.
- PERROTIN**, Directeur de l'Observatoire de Nice. — *Visite à divers Observatoires de l'Europe.* In-8; 1881. 2 fr. 50 c.
- PETERSEN (Julius)**, Membre de l'Académie royale danoise des Sciences, professeur à l'École royale polytech-

(1) On peut se procurer l'une des Séries ou les deux Séries, au moyen de paiements mensuels de 30 fr.



- nique de Copenhague. — Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques, avec application à plus de 400 problèmes. Traduit par O. CHEMIS, Ingénieur des Ponts et Chaussées. Petit in-8, avec figures; 1880. 4 fr.
- PETIT (F.). — Traité d'Astronomie pour les gens du monde, avec des *Notes complémentaires* pour les Candidats au Baccalauréat, aux Écoles spéciales et à la Licence ès Sciences mathématiques. 2 volumes in-18 jésus, avec 286 figures dans le texte et une Carte céleste; 1866. 7 fr.
- PIARRON DE MONDÉSIR, Ingénieur des Ponts et Chaussées. — Dialogues sur la Mécanique; *Méthode nouvelle* pour l'enseignement de cette Science, résultats scientifiques nouveaux. In-8, avec figures; 1870. 6 fr.
- PICART (A.), Docteur ès sciences Mathématiques. — Introduction aux principes mathématiques des lois générales du monde physique. In-8; 1882. 3 fr. 50 c.
- PIZZIGHELLI et HÜBL. — La Platinotypie. *Exposé théorique et pratique d'un procédé photographique aux sels de platine permettant d'obtenir rapidement des épreuves inaltérables.* Traduit de l'allemand par Henry Gauthier-Villars. In-8; 1883. 3 fr. 50 c.
- PLATEAU (J.), Correspondant de l'Institut de France, Professeur à l'Université de Gand. — Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires. 2 vol. grand in-8, d'environ 950 pages, avec figures dans le texte; 1873. 15 fr.
- POËY (André), Fondateur de l'Observatoire physique et météorologique de la Havane. — Comment on observe les nuages pour prévoir le temps. 3<sup>e</sup> édition, revue et augmentée. Petit in-8, contenant 17 planches chromolithographiques et 3 planches sur bois; 1879. 4 fr. 50 c.
- POËY (André). — Les courants atmosphériques d'après les nuages. *Observation de ces courants en vue de la prévision du temps.* Petit in-8; 1882. 2 fr.
- POINSOT. — Éléments de Statique, précédés d'une *Notice sur Poinsot*, par J. BERTRAND, Membre de l'Institut. 12<sup>e</sup> édition; 1877. 6 fr.
- POITEVIN (A.). — Traité des impressions photographiques, suivi d'Appendices relatifs aux procédés de Photographie négative et positive sur gélatine, d'Héliogravure, d'Hélioplastie, de Photolithographie, de Phototypie, de tirage au charbon, d'impressions aux sels de fer, etc., par LEON VIDAL. 2<sup>e</sup> édition, entièrement revue et complétée. In-18 jésus, avec un portrait phototypique de Poitevin; 1883. 5 fr.
- PONCELET, Membre de l'Institut. — Applications d'Analyse et de Géométrie qui ont servi de principal fondement au Traité des Propriétés projectives des figures, suivies d'Additions par Mannheim et Moutard, anciens Élèves de l'École Polytechnique. 2 vol. in-8, avec figures dans le texte; 1864. 20 fr.  
Chaque volume se vend séparément. 10 fr.
- PONCELET. — Traité des Propriétés projectives des figures. Ouvrage utile à ceux qui s'occupent des applications de la Géométrie descriptive et d'opérations géométriques sur le terrain. 2<sup>e</sup> édition; 1865-1866. 2 beaux volumes in-4 d'environ 450 pages chacun, avec de nombreuses planches gravées sur cuivre. 40 fr.  
Le second volume se vend séparément. 20 fr.
- PONCELET. — Introduction à la Mécanique industrielle, physique ou expérimentale. 3<sup>e</sup> édit., publiée par Kretz, ingénieur en chef, inspecteur des manufactures de l'État. In-8 de 757 pages, avec 3 pl.; 1870. 12 fr.
- PONCELET. — Cours de Mécanique appliquée aux Machines; publié par Kretz. 2 volumes in-8.
- 1<sup>re</sup> PARTIE: *Machines en mouvement, Régulateurs et transmissions, Résistances passives*, avec 117 figures dans le texte et 2 planches; 1874. 12 fr.
- 2<sup>e</sup> PARTIE: *Mouvement des fluides, Moteurs, Ponts-Levis*, avec 111 figures; 1876. 12 fr.
- PORUMBARU, Ingénieur des Mines, Licencié ès sciences. Étude géologique des environs de Craiova, parcours Bucovatzu-Cretzeschi. In-4 raisin, avec 10 planches photolithographiées; 1881. 10 fr.
- POUILLET et GAY-LUSSAC. — Instruction sur les paratonnerres, adoptée par l'Académie des Sciences. In-18 jésus, avec 58 figures dans le texte et une planche; 1874. 2 fr. 50 c.
- PRÉFECTURE DE LA SEINE. — Assainissement de la Seine. Épuration et utilisation des eaux d'égout. 4 beaux volumes in-8 jésus, avec 17 planches, dont 10 en chromolithographie; 1876-1877. 26 fr.  
On vend séparément:  
Les 3 premiers volumes (*Documents administratifs. — Enquête. — Annexes*). 20 fr.  
Le 4<sup>e</sup> volume (*Documents anglais*). 6 fr.
- PRESLE (de), ancien élève de l'École Polytechnique. — Traité de Mécanique rationnelle. In-8, avec 95 fig.; 1869. 5 fr.
- PUISEUX (V.), Membre de l'Institut. — Mémoire sur l'accélération séculaire du mouvement de la Lune. (Extrait des *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*.) In-4; 1873. 5 fr.
- PUISSANT. — Traité de Géodésie, ou Exposition des Méthodes trigonométriques et astronomiques, applicables soit à la mesure de la Terre, soit à la confection du canevas des cartes et des plans topographiques. 3<sup>e</sup> édit. 2 vol. in-4, avec 13 pl.; 1842. (*Rare.*) 80 fr.
- RADAU (R.). — Étude sur les formules d'approximation qui servent à calculer la valeur numérique d'une intégrale définie. In-4; 1881. 3 fr.
- RADAU (R.). — Travaux concernant le problème des trois corps et la théorie des perturbations. Grand in-8; 1881. 1 fr. 50 c.
- RADAU (R.). — Recherches sur la Théorie des Réfractions astronomiques. In-4; 1882. 5 fr.
- REGNAULT (J.-J.) — Traité de Géométrie pratique et d'Arpentage, comprenant les Opérations graphiques et de nombreuses Applications aux Travaux de toute nature, à l'usage des Écoles professionnelles, des Écoles normales primaires, des employés des Ponts et Chaussées, des Agents voyers, etc. 2<sup>e</sup> édition, revue et augmentée. In-8, avec 14 pl.; 1860. 5 fr.
- REGNAULT (J.-J.). — Cours pratique d'Arpentage, à l'usage des Instituteurs, des Élèves des Écoles primaires, des Propriétaires et des Cultivateurs. In-18 jésus, avec figures dans le texte. 2<sup>e</sup> édition; 1870. 1 fr. 50 c.
- RESAL (H.), Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique et à l'École des Mines. — Physique mathématique. *Électrostatique, Capillarité, Chaleur, Électricité, Magnétisme, Élasticité.* In-4; 1884. 15 fr.
- RESAL (H.). — Traité de Mécanique générale, comprenant les *Leçons professées à l'École Polytechnique et à l'École des Mines.* 6 vol. in-8, se vendant séparément:  
MÉCANIQUE RATIONNELLE.  
TOME I : *Cinématique. — Théorèmes généraux de la Mécanique. — De l'équilibre et du mouvement des corps solides.* In-8, avec 66 fig. dans le texte; 1873. 9 fr. 50 c.  
TOME II : *Frottement. — Équilibre intérieur des corps. — Théorie mathématique de la poussée des terres. — Équilibre et mouvements vibratoires des corps isotropes. — Hydrostatique. — Hydrodynamique. — Hydraulique.*



- *Thermodynamique*, suivie de la *Théorie des armes à feu*. In-8, avec 56 figures dans le texte; 1874. 9 fr. 50 c.
- MÉCANIQUE APPLIQUÉE (moteurs et machines).
- TOME III : *Des machines considérées au point de vue des transformations de mouvement et de la transformation du travail des forces. — Application de la Mécanique à l'Horlogerie*. In-8, avec 213 belles figures dans le texte; 1875. 11 fr.
- TOME IV : *Moteurs animés. — De l'eau et du vent considérés comme moteurs. — Machines hydrauliques et élévatoires. — Machines à vapeur, à air chaud et à gaz*. In-8, avec 200 belles figures dans le texte, levées et dessinées d'après les meilleurs types; 1876. 15 fr.
- CONSTRUCTION.
- TOME V : *Résistance des matériaux. — Constructions en bois. — Maçonneries. — Fondations. — Murs de soutènement. — Réservoirs*. In-8, avec 308 belles figures dans le texte, levées et dessinées d'après les meilleurs types; 1880. 12 fr. 50 c.
- TOME VI : *Voûtes droites et biaisées, en dôme, etc. — Ponts en bois. — Planchers et combles en fer. — Ponts suspendus. — Ponts-levis. — Cheminées. — Fondations de machines industrielles. — Amélioration des cours d'eau. — Substruction des chemins de fer. — Navigation intérieure. — Ports de mer*. In-8, avec 519 fig. et 5 pl. chromolithographiques; 1881. 15 fr.
- RESAL (H.). — *Traité élémentaire de Mécanique céleste*. In-8, avec planche; 1865. (Rare.)
- RESAL (H.). — *Traité de Cinématique pure*. In-8, avec 78 figures dans le texte; 1862. 6 fr.
- RESAL (H.). — *Éléments de Mécanique*, rédigés d'après les Leçons de Mécanique physique professées à la Faculté des Sciences de Paris par Poncelet. Nouvelle édition, revue et corrigée. In-8, avec planches; 1862. 4 fr. 50 c.
- ROCHE (E.), Correspondant de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences de Montpellier. — *Mémoire sur l'état intérieur du globe terrestre*. In-4; 1881. 2 fr. 50 c.
- ROMAN (L.). — *Manuel du Magnanier. Application des théories de Pasteur à l'éducation des vers à soie*. Un beau volume in-18 Jésus, avec nombreuses figures dans le texte et 6 planches en couleur; 1876. 4 fr. 50 c.
- ROUCHÉ (Eugène), Professeur à l'École Centrale, Examineur de sortie à l'École Polytechnique, etc., et COMBEROUSSE (Charles de), Professeur à l'École Centrale et au Conservatoire des Arts et Métiers, etc. — *Traité de Géométrie conforme aux Programmes officiels*, renferment un très grand nombre d'Exercices et plusieurs Appendices consacrés à l'exposition des PRINCIPALES MÉTHODES DE LA GÉOMÉTRIE MODERNE. 5<sup>e</sup> édition, revue et notablement augmentée. In-8 de XLIX 966 pages, avec 616 figures dans le texte, et 1095 questions proposées; 1883. 16 fr.
- Prix de chaque Partie :
- I<sup>re</sup> PARTIE. — *Géométrie plane*. 7 fr.
- II<sup>e</sup> PARTIE. — *Géométrie de l'espace; Courbes et Surfaces usuelles*. 9 fr.
- ROUCHÉ (Eugène) et COMBEROUSSE (Charles de). — *Éléments de Géométrie*, entièrement conformes aux derniers programmes d'enseignement des classes de troisième, de seconde, de rhétorique et de philosophie, suivis d'un Complément à l'usage des Élèves de Mathématiques élémentaires et de Mathématiques spéciales, et de *Notions sur le Lever des plans, l'Arpentage et le Nivellement*. 3<sup>e</sup> édit., revue et augmentée. In-8 de XXXV-540 pages, avec 464 figures dans le texte et 543 questions proposées et exercices; 1881. 6 fr.
- Ces nouveaux *Éléments de Géométrie* (qu'il ne faut pas confondre avec le *Traité de Géométrie* des mêmes auteurs) sont entièrement conformes aux derniers programmes officiels. Ils renferment toutes les parties de la Géométrie enseignées successivement dans les établissements d'instruction publique, depuis la classe de troisième jusqu'à celle de Mathématiques spéciales inclusivement, et sont destinés aux élèves appelés à suivre ces différents Cours.
- ROUCHÉ (Eugène). — *Éléments d'Algèbre*, à l'usage des Candidats au Baccalauréat ès Sciences et aux Écoles spéciales. (Rédigés conformément aux Programmes.) In-8, avec figures dans le texte; 1857. 4 fr.
- SACHSE (Arnold). — *Essai historique sur la représentation d'une fonction arbitraire d'une seule variable par une série trigonométrique*. Grand in-8; 1880. 2 fr. 50 c.
- SAINT-EDME, Professeur de Sciences physiques aux Écoles municipales d'Auteuil, Lavoisier, Turgot, et à l'École supérieure du Commerce. — *L'Électricité appliquée aux Arts mécaniques, à la Marine, au Théâtre*. In-8, avec belles fig. dans le texte; 1871. 4 fr.
- SAINT-GERMAIN (de), Professeur de Mécanique à la Faculté des Sciences de Caen, ancien Maître de Conférences à l'École des Hautes Études de Paris. — *Recueil d'Exercices sur la Mécanique rationnelle*, à l'usage des candidats à la Licence et à l'Aggrégation des Sciences mathématiques. In-8, avec figures dans le texte; 1877. 8 fr. 50 c.
- SALMON (G.), Professeur au Collège de la Trinité, à Dublin. — *Traité de Géométrie analytique à deux dimensions (Sections coniques)*; traduit de l'anglais par H. Resal et Vaucheret. 2<sup>e</sup> édition française, publiée d'après la 6<sup>e</sup> édition anglaise, par Vaucheret, ancien Élève de l'École Polytechnique, Lieutenant-Colonel d'Artillerie, Professeur à l'École supérieure de Guerre. In-8; 1884. 12 fr.
- SALMON (G.). — *Traité de Géométrie analytique (Courbes planes)*, destiné à faire suite au *Traité des Sections coniques*. Traduit de l'anglais, sur la 3<sup>e</sup> édition, par O. Chemin, Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École des Ponts et Chaussées, et augmenté d'une *Étude sur les points singuliers des courbes algébriques planes* par G. Halphen. In-8; 1884. 12 fr.
- SALMON (G.). — *Traité de Géométrie analytique à trois dimensions*. Traduit de l'anglais, sur la quatrième édition, par O. Chemin, Ingénieur des Ponts et Chaussées.
- I<sup>re</sup> PARTIE : *Lignes et surfaces du 1<sup>er</sup> et du 2<sup>e</sup> ordre*. In-8, avec figures dans le texte; 1882. 7 fr.
- II<sup>e</sup> PARTIE : *Théorie générale des lignes et surfaces courbes*. In-8, avec fig. dans le texte. (Sous presse.)
- SALVERT (Vicomte de), Docteur ès sciences, Professeur à la Faculté libre des Sciences de Lille. — *Mémoire sur la théorie de la courbure des surfaces*. Grand in-8; 1881. 3 fr. 50 c.
- SALVERT (Vicomte de). — *Mémoire sur les Ombilics coniques*. Grand in-8; 1883. 2 fr. 50 c.
- SALVERT (Vicomte de). — *Étude sur le mouvement permanent des fluides*. In-4; 1874. (Thèse de Mécanique). 3 fr.
- SALVÉTAT (A.), Chef des travaux chimiques à la Manufacture de Sèvres. — *Leçons de Céramique*, professées à l'École Centrale des Arts et Manufactures. 2 vol. in-18, avec 479 figures dans le texte; 1857. 12 fr.
- SALVÉTAT (A.). — *Album du cours de Technologie chimique (Céramique. — Couleur, Blanchiment, Teinture et impressions. — Métallurgie)*. Portefeuille in-4, cartonné de 70 planches doubles; 1874. 25 fr.
- SARRAU (Émile), Ingénieur en chef des Poudres et Salpêtres. — *Recherches théoriques sur le chargement des bouches à feu*, précédées de deux *Mémoires sur une formule monôme des vitesses dans les armes et*



- sur une formule de la pression maximum. Grand in-8; 1882. 2 fr. 50 c.
- SARRAU et VIEILLE.** — Étude sur l'emploi des manomètres à écrasement pour la mesure des pressions développées par les substances explosibles. Grand in-8; 1883. 2 fr.
- SCHENTJES (H.)**, Docteur ès sciences physiques et mathématiques, Professeur à l'Athénée royal de Gand. — Les Grandeurs électriques et leurs unités. 2<sup>e</sup> édition, revue et augmentée. Grand in-8; 1884. 4 fr.
- SCHRÖN (L.)**. — Tables de Logarithmes à sept décimales pour les nombres depuis 1 jusqu'à 108 000, et pour les fonctions trigonométriques de 10 en 10 secondes; et Table d'Interpolation pour le calcul des parties proportionnelles; précédées d'une Introduction par J. Houël. 2 beaux volumes grand in-8 Jésus. Paris; 1883.
- |   | PRIX :  |           |       |
|---|---------|-----------|-------|
|   | Broché. | Cartonné. |       |
| Tables de Logarithmes.....  | 8 fr.   | 9 fr.     | 75 c. |
| Table d'interpolation.....  | 2       | 3         | 25    |
| Tables de Logarithmes et Table d'interpolation réunies en un seul volume..... | 10      | 11        | 75    |
- SCOTT (Robert-H.)**, Directeur du Service météorologique de l'Angleterre. — Cartes du temps et avertissements de tempêtes. Ouvrage traduit de l'anglais par MM. Zurcher et Margollé. Petit in-8, avec nombreuses figures et 2 planches en couleur; 1879. 4 fr. 50 c.
- SECCHI (le P. A.)**, Directeur de l'Observatoire du Collège Romain, Correspondant de l'Institut de France. Le Soleil. 2<sup>e</sup> édition. Deux beaux volumes grand in-8, avec Atlas; 1875-1877. 30 fr.
- On vend séparément :
- I<sup>re</sup> PARTIE. Un volume grand in-8, avec 150 figures dans le texte et un atlas comprenant 6 grandes planches gravées sur acier (I. Spectre ordinaire du Soleil et Spectre d'absorption atmosphérique. — II. Spectre de diffraction, d'après la photographie de M. HENRY DRAPER. — III, IV, V et VI. Spectre normal du Soleil, d'après ANGSTRÖM, et Spectre normal du Soleil, portion ultra-violette, par M. A. CORNU); 1875. 18 fr.
- II<sup>e</sup> PARTIE. Un beau volume grand in-8, avec nombreuses figures dans le texte, et 13 planches, dont 12 en couleur (I à VIII. Protubérances solaires. — IX. Type de tache du Soleil. — X et XI. Nébuleuses, etc. — XII et XIII. Spectres stellaires); 1877. 18 fr.
- SERRET (J.-A.)**, Membre de l'Institut. — Traité d'Arithmétique, à l'usage des candidats au Baccalauréat ès Sciences et aux Ecoles spéciales. 7<sup>e</sup> édition, revue et mise en harmonie avec les derniers Programmes officiels par J.-A. Serret et par Ch. de Comberousse, Professeur de Cinématique à l'École Centrale et de Mathématiques spéciales au Collège Chaptal. In-8; 1883 (Autorisé par décision ministérielle.)
- |           |             |
|-----------|-------------|
| Broché.   | 4 fr. 50 c. |
| Cartonné. | 5 fr. 25 c. |
- SERRET (J.-A.)**. — Traité de Trigonométrie. 6<sup>e</sup> édition, revue et augmentée. In-8 avec fig. dans le texte; 1880. (Autorisé par décision ministérielle.) 4 fr.
- SERRET (J.-A.)**. Cours d'Algèbre supérieure. 5<sup>e</sup> édition. 2 forts volumes in-8 avec figures. (Sous presse.)
- SERRET (J.-A.)**. Cours de Calcul différentiel et intégral. 2<sup>e</sup> édit. 2 forts vol. in-8, avec fig.; 1878-1880. 24 fr.
- SERRET (Paul)**. — Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure. In-8, avec 67 figures dans le texte; 1860. 8 fr.
- SERRET (Paul)**. — Géométrie de Direction. APPLICATIONS

DES COORDONNÉES POLYÉDRIQUES. Propriété de dix points de l'ellipsoïde, de neuf points d'une courbe gauche du quatrième ordre, de huit points d'une cubique gauche. In-8, avec figures dans le texte; 1869. 10 fr.

**SOCIÉTÉ FRANÇAISE DE PHYSIQUE.** — Collection de Mémoires sur la Physique, publiés par la Société française de Physique.

Tome I. — Mémoires de Coulomb (publiés par les soins de M. Potier). Un beau volume grand in-8, avec figures et planches; 1884. 12 fr.

Tome II. — Mémoires sur l'Électrostatique (publiés par les soins de M. Joubert). Grand in-8. (Sous presse.)

**SONGAYLO (E.)**, Examinateur d'admission à l'École centrale des Arts et Manufactures, Chef de travaux graphiques et Répétiteur à la même École. Professeur au collège Chaptal et à l'École Monge. — Traité de Géométrie descriptive. Un volume in-4 de vi-440 pages, et un Atlas, même format, de 72 planches; 1882. 35 fr.

**SOUCHON (Abel)**, Membre adjoint au Bureau des Longitudes, attaché à la rédaction de la *Connaissance des Temps*. — Traité d'Astronomie pratique, comprenant l'exposition du calcul des éphémérides astronomiques et nautiques, d'après les méthodes en usage dans la composition de la *Connaissance des Temps* et du *Nautical Almanac*, avec une Introduction historique et de nombreuses notes. Grand in-8, avec figures; 1883. 15 fr.

**SPARRE (le comte Magnus de)**, Capitaine d'Artillerie. — Sur la détermination géométrique de quelques infiniment petits. Grand in-8, avec figures dans le texte; 1875. 1 fr. 50 c.

**SPARRE (le comte Magnus de)**. — Mouvement des projectiles oblongs dans le cas du tir de plein fouet. Grand in-8, avec 3 planches; 1875. 3 fr.

**STURM**, Membre de l'Institut. — Cours d'Analyse de l'École Polytechnique, publié, d'après le vœu de l'auteur, par Prouhet. 7<sup>e</sup> édition, suivie de la Théorie élémentaire des Fonctions elliptiques, par H. Laurent, répétiteur à l'École Polytechnique. 2 vol. in-8, avec figures dans le texte; 1884. 14 fr.

**STURM**. — Cours de Mécanique de l'École Polytechnique, publié, d'après le vœu de l'auteur, par E. Prouhet. 5<sup>e</sup> édition, revue et annotée par de Saint-Germain, Professeur à la Faculté des Sciences de Caen. 2 volumes in-8, avec 189 figures dans le texte; 1883. 14 fr.

**TAIT (P.-G.)**, Professeur de Sciences physiques à l'Université d'Édimbourg. — Traité élémentaire des Quaternions. Traduit sur la 2<sup>e</sup> édition anglaise, avec *Additions de l'Auteur et Notes du Traducteur*, par G. PLARR, Docteur ès Sciences mathématiques. Deux beaux volumes grand in-8, avec figures dans le texte, se vendant séparément.

I<sup>re</sup> Partie : Théorie. Applications géométriques; 1882. 7 fr. 50 c.

II<sup>e</sup> Partie : Géométrie des courbes et des surfaces. Cinématique. Applications à la Physique; 1884. 7 fr. 50 c.

**TARNIER**, Inspecteur de l'Instruction primaire à Paris. — Éléments de Géométrie pratique, conformes au programme de l'enseignement secondaire spécial (année préparatoire, Sciences) à l'usage des Ecoles primaires et des divers établissements scolaires. In-8, avec figures dans le texte, accompagné d'un Atlas in-folio contenant 1 planche typographique et 7 belles planches coloriées gravées sur acier; 1872. Prix du texte broché, avec l'Atlas en feuilles dans une couverture imprimée. 6 fr.

Prix du texte cartonné et de l'Atlas cartonné sur onglets. 8 fr. 75 c.



## On vend séparément :

- Le texte, broché, 2 fr. 50 c.; cartonné, 3 fr. 25 c.  
L'Atlas, en feuilles, 3 fr. 50 c.; cart. sur ongl., 5 fr. 50 c.
- THIERRY fils.** — Méthode graphique et géométrique, ou le Dessin linéaire appliqué aux arts en général, et en particulier à la projection des ombres, à la pratique de la coupe des pierres, à la perspective linéaire et aux cinq ordres d'Architecture. 2<sup>e</sup> éd., revue et corrigée par C.-F.-M. Marie. Grand in-8 oblong, avec 50 planches; 1846. (Ouvrage choisi par le Ministère de l'Instruction publique pour les Bibliothèques scolaires.) 6 fr.
- THOMAN (Féodor).** — Théorie des intérêts composés et des annuités, suivie de Tables logarithmiques. Ouvrage traduit de l'anglais par l'Abbé Bouchard, et précédé d'une préface de J. Bertrand, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences. (Cette édition française renferme plusieurs Tables inédites de Féodor Thoman.) Grand in-8; 1878. 10 fr.
- TIMMERMANS,** Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Gand. — Traité de Mécanique rationnelle. 2<sup>e</sup> édit. Grand in-8; 1862. 9 fr.
- TISSERAND,** Correspondant de l'Institut, Directeur de l'Observatoire de Toulouse, ancien Maître de Conférences à l'École des Hautes Études de Paris. — Recueil complémentaire d'Exercices sur le Calcul infinitésimal, à l'usage des candidats à la Licence et à l'Aggrégation des Sciences mathématiques. (Cet Ouvrage forme une suite naturelle à l'excellent Recueil d'Exercices de FRENET.) In-8, avec figures dans le texte; 1877. 7 fr. 50 c.
- TISSOT (A.),** Examineur d'admission à l'École Polytechnique. — Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des Cartes géographiques, suivi d'un Complément et de Tableaux numériques relatifs à la déformation produite par les divers systèmes de projection. In-8; 1881. 9 fr.
- TRESCA.** — Voir Expériences faites à l'Exposition d'Electricité, page 10.
- TRUTAT (E.),** Conservateur du Musée d'Histoire naturelle de Toulouse. — Traité élémentaire du microscope. Un joli volume petit in-8, avec 171 figures dans le texte; 1882. Broché. 8 fr. Cartonné. 9 fr.
- TYNDALL (John).** — La Chaleur, considérée comme un mode de mouvement. 2<sup>e</sup> édition française traduite sur la 4<sup>e</sup> édition anglaise, par l'Abbé Moigno. Un fort volume in-18 jésus, avec figures; 1881. (2<sup>e</sup> tirage.) 8 fr.
- TYNDALL (John).** — Leçons sur l'Électricité, professées en 1875-1876 à l'Institut royal; Ouvrage traduit de l'anglais par Francisque Michel. In-18, avec 58 figures dans le texte; 1878. 2 fr. 75 c.
- TZAUT et MORF,** Professeurs à l'École industrielle cantonale à Lausanne. — Exercices et Problèmes d'Algèbre (Première Série); Recueil gradué renfermant plus de 3800 Exercices sur l'Algèbre élémentaire jusqu'aux équations du premier degré inclusivement. In-12; 1877. 3 fr. — Réponses aux Exercices et Problèmes de la première Série. In-12; 1877. 2 fr.
- TZAUT (S.).** — Exercices et problèmes d'Algèbre (Deuxième série); Recueil gradué renfermant plus de 6200 exercices sur l'Algèbre élémentaire, depuis les équations du premier degré exclusivement jusqu'au binôme de Newton et aux déterminants inclusivement. In-12; 1881. 3 fr. 50 c. — Réponses aux Exercices et Problèmes de la deuxième Série. In-12; 1881. 3 fr. 75 c.
- UNWIN (W.-Cauthorne),** Professeur de Mécanique au Collège Royal Indien des Ingénieurs civils. — Éléments de construction de machines, ou Introduction aux principes qui régissent les dispositions et les proportions des organes des machines, contenant une collection de formules pour les constructeurs de machines. Traduit de l'anglais, avec l'approbation de l'Auteur, sur la deuxième édition, par Bocquet, ancien Elève de l'École Centrale, Chef des travaux à l'École municipale d'apprentis de la Villette (Paris); et augmenté d'un Appendice sur les transmissions par les câbles métalliques, sur le tracé des engrenages et sur les régulateurs; par LÉAUTÉ, Répétiteur du cours de Mécanique à l'École Polytechnique. In-18 jésus, illustré de 237 figures dans le texte; 1882. Broché. 7 fr. Cartonné à l'anglaise. 8 fr.
- VALÉRIUS (B.),** Docteur ès Sciences. — Traité théorique et pratique de la fabrication du fer et de l'acier, accompagné d'un Exposé des améliorations dont elle est susceptible, principalement en Belgique. — 2<sup>e</sup> édition originale française, publiée d'après le manuscrit de l'Auteur, et augmentée de plusieurs articles par H. VALÉRIUS, Professeur à l'Université de Gand. Un volume grand in-8, de 880 pages, texte compacte, avec un Atlas in-folio de 45 planches gravées (dont deux doubles); 1875. 75 fr.
- VALÉRIUS (H.),** Professeur à l'Université de Gand. — Les applications de la Chaleur, avec un exposé des meilleurs systèmes de chauffage et de ventilation. 3<sup>e</sup> édition. Grand in-8, avec 122 figures dans le texte et 14 planches; 1879. 18 fr.
- VALLÈS (F.),** Inspecteur général des Ponts et Chaussées. — Des formes imaginaires en Algèbre. I<sup>re</sup> PARTIE : Leur interprétation en abstrait et en concret. In-8; 1869. 5 fr. II<sup>e</sup> PARTIE : Intervention de ces formes dans les équations des cinq premiers degrés. Grand in-8, lithographié; 1873. 6 fr. III<sup>e</sup> PARTIE : Représentation à l'aide de ces formes des directions dans l'espace. In-8; 1876. 5 fr.
- VASSAL** (le major Vladimir), ancien Ingénieur. — Nouvelles Tables donnant avec cinq décimales les logarithmes vulgaires et naturels des nombres de 1 à 10 800, et des fonctions circulaires et hyperboliques pour tous les degrés du quart de cercle de minute en minute. Un beau vol. in-4<sup>e</sup>; 1872. 12 fr.
- VÉLAIN (Ch.),** Docteur ès Sciences, Maître de Conférences à la Sorbonne. — Les Volcans. Grand in-8, avec nombreuses figures dans le texte; 1884.
- VIDAL (l'Abbé).** — L'Art de tracer les cadrans solaires par le calcul, et le mètre à la main, mis à la portée des ouvriers et de ceux qui ne savent faire que l'addition et la soustraction. In-8, avec 2 planches; 1875. 2 fr. 50 c.
- VIELLE (J.),** Inspecteur général de l'Instruction publique. — Éléments de Mécanique, rédigés conformément au Progr. du nouveau plan d'études des Lycées. 4<sup>e</sup> édit.; 1 vol. in-8, avec 146 fig. dans le texte; 1882. 4 fr. 50 c.
- VINCENT,** Répétiteur de Chimie industrielle à l'École Centrale. — Carbonisation des bois en vases clos et utilisation des produits dérivés. Grand in-8, avec belles figures gravées sur bois; 1873. 5 fr.
- VIOLEINE (A.-P.).** — Nouvelles Tables pour les calculs d'Intérêts composés, d'Annuités et d'Amortissement. 3<sup>e</sup> édition, revue et augmentée par Laas d'Aguen, gendre de l'Auteur. In-4; 1881. 15 fr.
- VIOLLE,** Professeur à la Faculté de Lyon. — Sur la radiation solaire. In-8; 1879. 2 fr.
- WEIERSTRASS.** — Remarques sur quelques points de la théorie des fonctions analytiques. Traduction publiée avec l'autorisation de l'auteur, par J. TANNERY. Grand in-8; 1882. 1 fr. 50 c.
- WEIERSTRASS.** — Recherches sur les fonctions 2<sup>es</sup> fois







CHAPTER I  
The first part of the history of the United States of America is the history of the thirteen original states. These states were the result of the separation of the colonies from Great Britain in 1776.

CHAPTER II  
The second part of the history of the United States of America is the history of the expansion of the territory. This expansion was the result of the Louisiana Purchase in 1803 and the Mexican War in 1846.

CHAPTER III  
The third part of the history of the United States of America is the history of the Civil War. This war was fought between 1861 and 1865 and was the result of the struggle for the abolition of slavery.

CHAPTER IV  
The fourth part of the history of the United States of America is the history of the Reconstruction period. This period was the result of the struggle for the rights of the freed slaves and the rebuilding of the South after the Civil War.

CHAPTER V  
The fifth part of the history of the United States of America is the history of the Gilded Age. This period was the result of the rapid industrialization and the accumulation of wealth by a few individuals.

CHAPTER VI  
The sixth part of the history of the United States of America is the history of the Progressive Era. This era was the result of the movement for social and political reform in the late 19th and early 20th centuries.

CHAPTER VII  
The seventh part of the history of the United States of America is the history of the World War period. This period was the result of the United States' involvement in World War I and World War II.

CHAPTER VIII  
The eighth part of the history of the United States of America is the history of the Cold War period. This period was the result of the tension between the United States and the Soviet Union from 1945 to 1991.

CHAPTER IX  
The ninth part of the history of the United States of America is the history of the Vietnam War. This war was fought between 1955 and 1975 and was the result of the United States' involvement in the conflict in Vietnam.

CHAPTER X  
The tenth part of the history of the United States of America is the history of the Watergate scandal. This scandal was the result of the cover-up of the involvement of the President and his staff in the 1972 election.

CHAPTER XI  
The eleventh part of the history of the United States of America is the history of the Iran-Contra affair. This affair was the result of the illegal sale of arms to Iran and the funding of the Contras in Nicaragua.

CHAPTER XII  
The twelfth part of the history of the United States of America is the history of the Gulf War. This war was fought between 1990 and 1991 and was the result of the United States' involvement in the conflict in the Persian Gulf.

CHAPTER XIII  
The thirteenth part of the history of the United States of America is the history of the Clinton administration. This administration was the result of the election of Bill Clinton in 1992 and was characterized by the Lewinsky scandal.

CHAPTER XIV  
The fourteenth part of the history of the United States of America is the history of the Bush administration. This administration was the result of the election of George W. Bush in 2001 and was characterized by the War on Terror.

CHAPTER XV  
The fifteenth part of the history of the United States of America is the history of the Obama administration. This administration was the result of the election of Barack Obama in 2008 and was characterized by the economic crisis and the withdrawal from Iraq.

CHAPTER XVI  
The sixteenth part of the history of the United States of America is the history of the Trump administration. This administration was the result of the election of Donald Trump in 2016 and was characterized by the trade wars and the impeachment.

CHAPTER XVII  
The seventeenth part of the history of the United States of America is the history of the Biden administration. This administration was the result of the election of Joe Biden in 2020 and was characterized by the withdrawal from Afghanistan and the economic recovery.

CHAPTER XVIII  
The eighteenth part of the history of the United States of America is the history of the current events. This part covers the most recent developments in the history of the United States of America.

CHAPTER XIX  
The nineteenth part of the history of the United States of America is the history of the future. This part covers the predictions and expectations for the future of the United States of America.

CHAPTER XX  
The twentieth part of the history of the United States of America is the history of the legacy. This part covers the lasting impact and influence of the United States of America on the world.

CHAPTER XXI  
The twenty-first part of the history of the United States of America is the history of the conclusion. This part covers the final thoughts and reflections on the history of the United States of America.



Q13301

ŒUVRES

COMPLÈTES

DE LAPLACE,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

ŒUVRES

COMPLÈTES

DE LAPLACE.

PARIS,

GAILLARD-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSOR DE MALLAT-BACHELIER.

COUR DES MATHÉMATIQUES, 55

M DCCCLXXVIII



*Table des pages*

1	203
2	3
3	1045







Q 13506

# ŒUVRES COMPLÈTES DE LAPLACE,

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES  
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,  
PAR  
MM. LES SECRÉTAIRES PERPÉTUELS.

TOME TROISIÈME.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

M DCCC LXXVIII

*Excha des part*

BIBLIOTHEQUE DE L'USTL	
Cote	509
Niv.	3
Sallo	MAG



Q132083

ŒUVRES

COMPLÈTES

DE LAPLACE

PARIS

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

M. DES SECRÉTAIRES PERPETUELS



TOME TROISIÈME



PARIS

Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DE BUREAU DES LONGITUDES

SUCCESSEUR DE MAILLET-BACHILLIER

Quai des Augustins, 25

M DCCCXXVIII




**TRAITÉ**  
DE  
**MÉCANIQUE CÉLESTE,**

PAR P. S. LAPLACE,

Membre de l'Institut national de France, et du Bureau  
des Longitudes.

**TOME TROISIÈME.**

---

DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET.

A PARIS,

Chez J. B. M. DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques,  
quai des Augustins.

---

AN XI.



TRAITÉ

ou

MECANIQUE CÉLESTE.

PAR P. S. LAPLACE.

Membre de l'Institut national de France, et du Bureau  
des Longitudes.

TOME TROISIÈME.

DE L'IMPRIMERIE DE CRAPPELLET.

A PARIS.

Chez A. B. M. DUPRAT, Libraire pour les Mémoires de l'Académie,  
rue des Anjouins.

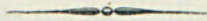
AN XI



A

# BONAPARTE,

DE L'INSTITUT NATIONAL.



CITOYEN PREMIER CONSUL,

Vous m'avez permis de vous dédier cet Ouvrage. Il m'est doux et honorable de l'offrir au Héros pacificateur de l'Europe, à qui la France doit sa prospérité, sa grandeur et la plus brillante époque de sa gloire; au Protecteur éclairé des Sciences, qui, formé par elles, voit dans leur étude la source des plus nobles jouissances, et dans leurs progrès le perfectionnement de tous



les arts utiles et des institutions sociales. Puisse cet Ouvrage, consacré à la plus sublime des Sciences naturelles, être un monument durable de la reconnaissance que votre accueil et les bienfaits du Gouvernement inspirent à ceux qui les cultivent ! De toutes les vérités qu'il renferme, l'expression de ce sentiment sera toujours pour moi la plus précieuse.

Salut et respect,

LAPLACE.



---

## PRÉFACE.

---

Nous avons donné, dans la première Partie de cet Ouvrage, les principes généraux de l'équilibre et du mouvement de la matière. Leur application aux mouvements célestes nous a conduit, sans hypothèses et par une série de raisonnements géométriques, à la loi de la gravitation universelle, dont la pesanteur et les mouvements des projectiles sur la Terre ne sont que des cas particuliers. En considérant ensuite un système de corps soumis à cette grande loi de la nature, nous sommes parvenu, au moyen d'une analyse singulière, aux expressions générales de leurs mouvements, de leurs figures et des oscillations des fluides qui les recouvrent; expressions d'où l'on a vu découler tous les phénomènes observés du flux et du reflux de la mer, de la variation des degrés et de la pesanteur à la surface terrestre, de la précession des équinoxes, de la libration de la Lune, de la figure et de la rotation des anneaux de Saturne, et de leur permanence dans le plan de son équateur. Nous en avons déduit les principales inégalités des planètes, et spécialement celles de Jupiter et de Saturne, dont la période embrasse plus de neuf cents années, et qui, n'offrant aux observateurs que des anomalies dont ils ignoraient les lois et la cause, ont paru longtemps faire exception de la théorie de la pesanteur : plus approfondie, elle les a fait connaître, et maintenant ces inégalités en sont une des preuves les plus frappantes. Nous avons développé les variations des éléments du système planétaire qui ne se rétablissent qu'après un très-grand nombre de siècles. Au milieu de tous ces changements, nous

*b.*



avons reconnu la constance des moyens mouvements et des distances moyennes des corps de ce système, que la nature semble avoir disposé primitivement pour une éternelle durée, par les mêmes vues qu'elle nous paraît suivre si admirablement sur la Terre, pour la conservation des individus et la perpétuité des espèces. Par cela seul que ces mouvements sont dirigés dans le même sens et dans des plans peu différents, les orbites des planètes et des satellites doivent toujours être à peu près circulaires et peu inclinées les uns aux autres. Ainsi la variation de l'obliquité de l'écliptique à l'équateur, renfermée constamment dans d'étroites limites, ne produira jamais un printemps perpétuel sur la Terre. Nous avons prouvé que l'attraction du sphéroïde terrestre, ramenant sans cesse vers son centre l'hémisphère que la Lune nous présente, transporte au mouvement de rotation de ce satellite les grandes variations séculaires de son mouvement de révolution, et dérobe pour toujours l'autre hémisphère à nos regards. Enfin, nous avons démontré, sur les mouvements des trois premiers satellites de Jupiter, ce théorème remarquable, savoir, qu'en vertu de leur action mutuelle, la longitude moyenne du premier, vu du centre de Jupiter, moins trois fois celle du second, plus deux fois celle du troisième, est exactement et constamment égale à deux angles droits, en sorte qu'ils ne peuvent jamais être à la fois éclipsés. Il nous reste à considérer particulièrement les perturbations du mouvement des planètes et des comètes autour du Soleil, de la Lune autour de la Terre, et des satellites autour des planètes qu'ils accompagnent. C'est l'objet de la seconde Partie de cet Ouvrage, spécialement consacrée à la perfection des Tables astronomiques.

Les Tables ont suivi les progrès de la Science qui leur sert de base, et ces progrès ont d'abord été d'une extrême lenteur. Pendant très-longtemps, on ne considéra que les mouvements apparents des astres : cet intervalle, dont l'origine se perd dans la plus haute antiquité, et qui fut proprement l'enfance de l'Astronomie, comprend les travaux d'Hipparque et de Ptolémée, et ceux des Indiens, des Arabes et des Perses. Le système de Ptolémée, qu'ils ont successivement adopté, n'est, au fond, qu'une manière de représenter les apparences célestes,



et sous ce rapport, il fut utile à la Science. Telle est la faiblesse de l'esprit humain, qu'il a souvent besoin de s'aider d'hypothèses, pour lier les faits entre eux. En bornant les hypothèses à cet usage, en évitant de leur attribuer une réalité qu'elles n'ont point, et en les rectifiant sans cesse par de nouvelles observations, on parvient enfin aux véritables causes, ou du moins aux lois des phénomènes. L'histoire de la Philosophie nous offre plus d'un exemple des avantages que peuvent ainsi procurer les hypothèses, et des erreurs auxquelles on s'expose en les réalisant. Vers le milieu du xvi<sup>e</sup> siècle, Copernic, en démêlant dans les apparences les mouvements réels de la Terre autour du Soleil et sur elle-même, montra sous un nouveau point de vue l'univers, et changea la face de l'Astronomie. Un concours inouï de découvertes a rendu mémorable à jamais dans l'histoire des sciences le siècle suivant, d'ailleurs illustré par tant de chefs-d'œuvre en littérature et dans les beaux-arts. Kepler reconnut les lois du mouvement elliptique des planètes; le télescope, trouvé par le plus heureux des hasards et perfectionné aussitôt par Galilée, lui fit voir dans les cieux de nouvelles inégalités et de nouveaux mondes; l'application que fit Huyghens du pendule aux horloges, et celle des lunettes au quart de cercle, en donnant des mesures précises des angles et de la durée, rendirent sensibles les plus petites inégalités des mouvements célestes. En même temps que l'observation offrait à l'esprit humain de nouveaux phénomènes, il créa, pour les expliquer et les soumettre au calcul, de nouveaux instruments de la pensée. Néper inventa les logarithmes; l'Analyse des courbes et la Dynamique prirent naissance dans les mains de Descartes et de Galilée; Newton découvrit le Calcul différentiel, décomposa la lumière et s'éleva au principe général de la pesanteur. Dans le siècle qui vient de s'écouler, les successeurs de ce grand homme ont achevé l'édifice dont il avait posé les fondements. Ils ont perfectionné l'Analyse infinitésimale, inventé le Calcul aux différences partielles infiniment petites et finies, et réduit en formules la Mécanique entière. En appliquant ces découvertes à la loi de la pesanteur, ils ont ramené à cette loi tous les phénomènes célestes, et donné aux théories



et aux Tables astronomiques une précision inespérée dont on est surtout redevable aux travaux des géomètres français, et aux prix proposés par l'Académie des Sciences. Si l'on joint à ces découvertes celles de Bradley sur l'aberration des étoiles et sur la nutation de l'axe terrestre; les mesures multipliées des degrés et du pendule, opérations dont la France a donné l'exemple en envoyant des académiciens au nord, à l'équateur et dans l'hémisphère austral, pour y observer la grandeur de ces degrés et l'intensité de la pesanteur; l'arc du méridien compris entre Dunkerque et Barceloné, déterminé par des opérations très-précises, et servant de base au système métrique le plus naturel et le plus simple; les nombreux voyages entrepris pour connaître les diverses parties du globe, et pour observer les passages de Vénus sur le Soleil; la détermination exacte des dimensions du Système solaire, fruit de ces voyages; la planète Uranus, ses satellites, et deux nouveaux satellites de Saturne, reconnus par Herschel; enfin, si l'on réunit à toutes ces découvertes l'invention admirable des instruments à réflexion, si utiles à la mer, et celles des lunettes achromatiques, du cercle répétiteur et des montres marines, le dernier siècle, envisagé sous le rapport des progrès de l'esprit humain dans les sciences mathématiques, paraîtra digne de celui qui l'a précédé. Le siècle où nous entrons a commencé sous les auspices les plus favorables à l'Astronomie. Son premier jour a été remarquable par la découverte de la planète Cérès, suivie presque aussitôt de celle de la planète Pallas, dont la moyenne distance au Soleil est à très-peu près la même. La proximité de ces deux corps, d'une extrême petitesse, à Jupiter, et la grandeur des excentricités et des inclinaisons de leurs orbites entrelacées, produisent dans leurs mouvements des inégalités considérables, qui répandront un nouveau jour sur la théorie des attractions célestes, et donneront lieu de la perfectionner encore.

C'est principalement dans les applications de l'Analyse au Système du monde que se manifeste la puissance de ce merveilleux instrument, sans lequel il eût été impossible de pénétrer un mécanisme aussi compliqué dans ses effets qu'il est simple dans sa cause. Le géomètre em-



brasse maintenant dans ses formules l'ensemble du système planétaire et de ses variations successives; il remonte par la pensée aux divers états qu'il a subis dans les temps les plus reculés, et redescend à tous ceux que les temps à venir développeront aux observateurs. Il voit ce sublime spectacle, dont la période embrasse des millions d'années, se renouveler en peu de siècles dans le système des satellites de Jupiter, par la promptitude de leurs révolutions, et produire de singuliers phénomènes, entrevus par les astronomes, mais trop composés ou trop lents pour qu'ils en aient pu déterminer les lois. La théorie de la pesanteur, devenue, par tant d'applications, un moyen de découvertes aussi certain que l'observation elle-même, lui a fait connaître plusieurs inégalités nouvelles, et prédire le retour de la comète de 1759, dont l'action de Jupiter et de Saturne rend les révolutions très-inégales. Par ce moyen, il a su tirer des observations, comme d'une mine féconde, un grand nombre d'éléments importants et délicats, qui, sans l'Analyse, y resteraient éternellement cachés. Telles sont les valeurs respectives des masses du Soleil, des planètes et des satellites, déterminées par les révolutions de ces différents corps et par le développement de leurs inégalités périodiques et séculaires; la vitesse de la lumière et l'ellipticité de Jupiter, données par les éclipses de ses satellites, avec plus de précision que par l'observation directe; la rotation et l'aplatissement d'Uranus et de Saturne, conclus de la position dans un même plan des différents corps qui circulent autour de ces deux planètes. Telles sont encore les parallaxes du Soleil et de la Lune, et la figure même de la Terre, déduites des inégalités lunaires; car on verra dans la suite que la Lune, par ses mouvements, décèle à l'Astronomie perfectionnée la petite ellipticité du sphéroïde terrestre, dont elle fit connaître la rondeur aux premiers astronomes par ses éclipses. Enfin, par une combinaison heureuse de l'Analyse avec les observations, cet astre, qui semble avoir été donné à la Terre pour l'éclairer pendant les nuits, devient encore le guide le plus assuré du navigateur, qu'il garantit des dangers auxquels il fut exposé longtemps par les erreurs de son estime. La perfection de la théorie et des Tables lunaires, à laquelle



il doit ce précieux avantage et celui de fixer avec exactitude la position des objets qui s'offrent à sa vue, est le fruit des travaux des géomètres et des astronomes, depuis plus d'un demi-siècle; elle réunit tout ce qui peut donner du prix aux découvertes : la grandeur et l'utilité de l'objet, la fécondité des résultats et le mérite de la difficulté vaincue. C'est ainsi que les théories les plus abstraites, en se répandant par de nombreuses applications, sur la nature et sur les arts, sont devenues d'inépuisables sources de biens et de jouissances pour celui même qui les ignore.



---

# TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES DANS LE TROISIÈME VOLUME.

	Pages
DÉDICACE.....	VII
PRÉFACE.....	IX

## SECONDE PARTIE.

THÉORIES PARTICULIÈRES DES MOUVEMENTS CÉLESTES.

---

### LIVRE VI.

THÉORIE DES MOUVEMENTS PLANÉTAIRES.

OBJET DE CETTE THÉORIE.....	1
CHAPITRE I. — <i>Formules des inégalités planétaires dépendantes des carrés et des puissances supérieures des excentricités et des inclinaisons des orbites.....</i>	5
INÉGALITÉS DÉPENDANTES DE LA SECONDE DIMENSION DES EXCENTRICITÉS ET DES INCLINAISONS.....	5
Forme des termes qui les produisent. Influence qu'ont sur elles les rapports des moyens mouvements, à raison des petits diviseurs qu'ils peuvent introduire. Préparations des équations différentielles pour les divers cas que présente, à cet égard, le système solaire. N <sup>os</sup> 1 et 2.....	5 et 9
Considérations par lesquelles on distingue les plus sensibles de ces inégalités. N <sup>o</sup> 3...	10
Développements des termes qui en résultent dans les expressions du rayon vecteur, de la longitude et de la latitude de la planète troublée. N <sup>os</sup> 4, 5 et 6.....	11, 13 et 18
INÉGALITÉS DÉPENDANTES DES DIMENSIONS SUPÉRIEURES DES EXCENTRICITÉS ET DES INCLINAISONS.....	20
Forme des termes qui les produisent. N <sup>o</sup> 7.....	20
Examen des cas où elles deviennent sensibles. Ils sont dus aux rapports presque commensurables des moyens mouvements; applications à la théorie de Jupiter et de Saturne pour les termes de la troisième dimension. N <sup>o</sup> 8.....	23
Inégalités dépendantes de la cinquième dimension. Sont sensibles dans la théorie de Jupiter et de Saturne. Leur calcul pour ces planètes. N <sup>o</sup> 9.....	27
Inégalités dépendantes de la troisième dimension, qui deviennent sensibles dans la théorie de Mercure troublé par la Terre. N <sup>o</sup> 10.....	31



	Pages
Les inégalités dépendantes de la seconde dimension, qui affectent le mouvement en latitude de la planète troublée, en introduisent d'analogues dans le mouvement de la planète perturbatrice. Ce sont les seules inégalités en latitude qui soient sensibles dans le système planétaire, parmi celles qui dépendent du produit des excentricités et des inclinaisons. N° 11.....	33
CHAPITRE II. — <i>Inégalités dépendantes du carré de la force perturbatrice</i> .....	35
Développements de leurs expressions analytiques données dans les n° 63 et 69 du Livre II. Elles résultent de l'influence que les inégalités à longue période ont sur les termes dépendants du carré des masses perturbatrices. Les variations des excentricités et des périhélies peuvent introduire de semblables inégalités dans les moyens mouvements; mais on prouve que les termes dont ces inégalités se composent s'entre-détruisent d'eux-mêmes, d'où il suit que les moyens mouvements et les grands axes n'éprouvent aucune altération par l'effet des termes dont il s'agit. N° 12.....	35
Variations des excentricités, des périhélies, des nœuds et des inclinaisons, dues à la seconde puissance des masses perturbatrices. N° 13 et 14.....	38 et 41
Ces variations n'altèrent point les relations trouvées dans le Livre II entre les éléments des orbites. N° 15.....	42
Examen des termes de l'ordre du carré des masses perturbatrices, qui ont une influence sensible sur les grandes inégalités de Jupiter et de Saturne. N° 16.....	48
Corrections qu'il faut introduire dans les moyens mouvements de ces deux planètes, en vertu de leurs grandes inégalités. N° 17.....	55
Les coefficients des inégalités des planètes varient à raison des variations séculaires des éléments des orbites. Manière d'y avoir égard. N° 18.....	56
CHAPITRE III. — <i>Des perturbations dues à l'ellipticité du Soleil</i> .....	59
Cette ellipticité donne à la planète un mouvement direct dans son périhélie, et aux nœuds de l'orbite sur le plan de l'équateur solaire, un mouvement rétrograde égal au précédent. Ces inégalités s'affaiblissent rapidement à mesure que la distance au Soleil augmente; elles ne sont sensibles que pour Mercure. L'ellipticité du Soleil n'influant ni sur l'excentricité de l'orbite, ni sur son inclinaison, ne peut altérer la stabilité du système planétaire. N° 18 bis.....	59
CHAPITRE IV. — <i>Des perturbations du mouvement des planètes par l'action de leurs satellites</i> .....	62
Ces perturbations se déterminent par les théorèmes du n° 40 du Livre II. Leur grandeur dépend des masses des satellites par rapport à celle de la planète, et de leurs elongations vues du Soleil. Elles ne sont sensibles que dans la théorie de la Terre troublée par la Lune. N° 19.....	62
CHAPITRE V. — <i>Considérations sur la partie elliptique du rayon vecteur et du mouvement des planètes</i> . N° 20.....	64
CHAPITRE VI. — <i>Valeurs numériques des quantités qui entrent dans les expressions des inégalités planétaires</i> .....	66
Valeurs des masses des planètes. Considérations d'après lesquelles elles ont été calculées. N° 21.....	66



TABLE DES MATIÈRES.

XVII

	Pages
Table des éléments planétaires. N° 22.....	69
Calcul numérique des formules données dans le n° 49 du Livre II. N° 23.....	71
CHAPITRE VII. — <i>Expressions numériques des variations séculaires des éléments des orbites planétaires. Nos 24 à 26.....</i>	
	91, 93 et 98
CHAPITRE VIII. — <i>Théorie de Mercure.....</i>	
	100
Examen de la limite jusqu'à laquelle les approximations doivent s'étendre dans l'évaluation du rayon vecteur. Valeurs numériques des inégalités sensibles qui affectent la longitude et le rayon vecteur. Elles sont produites par l'action de Vénus, de la Terre et de Jupiter.	
Inégalités indépendantes des excentricités.	
Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités.	
Inégalités dépendantes de la seconde dimension des excentricités et des inclinaisons des orbites.	
Inégalités dépendantes de la troisième dimension de ces mêmes quantités.	
Les inégalités en latitude sont insensibles et au-dessous d'un quart de seconde. N° 27..	100
CHAPITRE IX. — <i>Théorie de Vénus.....</i>	
	104
Examen de la limite jusqu'à laquelle les approximations doivent s'étendre dans l'évaluation du rayon vecteur. Valeurs numériques des inégalités sensibles qui affectent la longitude et le rayon vecteur. Les planètes qui les produisent sont la Terre, Mars, Jupiter et Saturne.	
Inégalités indépendantes des excentricités.	
Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités.	
Inégalités dépendantes de la seconde dimension des excentricités et des inclinaisons des orbites.	
Inégalités dépendantes de la troisième dimension de ces mêmes quantités.	
Inégalités en latitude. Elles sont dues à l'action de Mars et de Jupiter. N° 28.....	104
CHAPITRE X. — <i>Théorie du mouvement de la Terre.....</i>	
	108
Examen de la limite jusqu'à laquelle les approximations doivent s'étendre dans l'évaluation du rayon vecteur. Valeurs numériques des inégalités sensibles qui affectent la longitude et le rayon vecteur terrestre. Les planètes qui les produisent sont Vénus, Mars, Jupiter et Saturne.	
Inégalités indépendantes des excentricités.	
Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités.	
Inégalités dépendantes de la seconde dimension des excentricités et des inclinaisons des orbites.	
Inégalités dépendantes de la troisième dimension de ces mêmes quantités.	
Inégalités du mouvement de la Terre en latitude. Elles sont produites par l'action de Vénus et de Jupiter. N° 29.....	108
Inégalités du mouvement de la Terre produites par l'action de la Lune. N° 30.....	112
Des variations séculaires de l'orbe terrestre, de l'équateur et de la longueur de l'année.	
L'action du Soleil et de la Lune influe considérablement sur leurs valeurs. Détermi-	

c.



	Pages
nation de l'époque à laquelle le grand axe de l'orbe terrestre coïncidait avec la ligne des équinoxes, et de celle à laquelle ces deux lignes étaient perpendiculaires l'une à l'autre. N° 31.....	114
 CHAPITRE XI. — <i>Théorie de Mars</i> .....	120
Examen de la limite jusqu'à laquelle les approximations doivent s'étendre dans l'évaluation du rayon vecteur. Valeurs numériques des inégalités sensibles qui affectent la longitude et le rayon vecteur. Les planètes qui les produisent sont Vénus, la Terre, Jupiter et Saturne.	
Inégalités indépendantes des excentricités.	
Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités.	
Inégalités dépendantes de la seconde dimension des excentricités et des inclinaisons des orbites.	
Les inégalités en latitude sont très-peu sensibles. Celle qui l'est le plus résulte de l'action de Jupiter. N° 32.....	120
 CHAPITRE XII. — <i>Théorie de Jupiter</i> .....	125
Examen de la limite jusqu'à laquelle les approximations doivent s'étendre dans l'évaluation du rayon vecteur. Valeurs numériques des inégalités sensibles qui affectent la longitude et le rayon vecteur. Les planètes qui les produisent sont la Terre, Saturne et Uranus, mais principalement Saturne.	
Inégalités indépendantes des excentricités.	
Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités. Elles sont assez considérables pour qu'il soit nécessaire d'avoir égard à la variation de leurs coefficients.	
Inégalités dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons. Sont produites par la seule action de Saturne.	
Inégalités dépendantes des troisième et cinquième dimensions des excentricités et des inclinaisons, ainsi que du carré de la force perturbatrice. Ces dernières, qui sont dues aux inégalités à longues périodes, influent considérablement sur les variations séculaires des éléments elliptiques. Grande inégalité du moyen mouvement. Elle est produite par l'action de Saturne. N° 33.....	125
Inégalités en latitude. Ont pour cause l'action de Saturne. N° 34.....	139
 CHAPITRE XIII. — <i>Théorie de Saturne</i> .....	141
Examen du degré auquel les approximations doivent s'étendre dans l'évaluation du rayon vecteur. Valeurs numériques des inégalités sensibles qui affectent la longitude et le rayon vecteur. Les planètes qui les produisent sont Jupiter et Uranus.	
Inégalités indépendantes des excentricités.	
Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités.	
Inégalités dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons.	
Inégalités dépendantes de la troisième et cinquième dimension des excentricités et des inclinaisons, ainsi que du carré de la force perturbatrice. Grande inégalité de Saturne. C'est la réaction de celle de Jupiter. N° 35.....	141
Inégalités en latitude. Sont produites par l'action de Jupiter et d'Uranus. N° 36.....	150



## TABLE DES MATIÈRES.

XIX

	Pages
CHAPITRE XIV. — <i>Théorie d'Uranus</i> .....	152
Examen du degré auquel les approximations doivent s'étendre dans l'évaluation du rayon vecteur. Valeurs numériques des inégalités sensibles qui affectent la longitude et le rayon vecteur. Elles sont dues à l'action de Jupiter et de Saturne.	
Inégalités indépendantes des excentricités.	
Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités.	
Inégalités dépendantes de la seconde dimension des excentricités et des inclinaisons.	
Inégalités dépendantes de la troisième dimension des excentricités et des inclinaisons.	
Il n'y en a qu'une seule produite par l'action de Saturne. N° 37.....	152
Inégalités en latitude. Sont produites par l'action de Jupiter et de Saturne. N° 38.....	154
CHAPITRE XV. — <i>De quelques équations de condition qui existent entre les inégalités planétaires, et qui peuvent servir à les vérifier.</i> N°s 39, 40, 41, 42 et 43.....	155, 158, 160, 161 et 164
CHAPITRE XVI. — <i>Sur les masses des planètes et de la Lune</i> .....	166
Réflexions sur les valeurs données à ces masses dans le n° 21. Nouvelle détermination de celles de Vénus et de Mars. Discussion de celle de la Lune par la comparaison des divers phénomènes qui peuvent la déterminer, tels que les observations des marées, l'équation lunaire des Tables du Soleil, la nutation de l'axe terrestre et la parallaxe de la Lune. Il en résulte que cette masse est un peu moindre que ne l'indiquent les marées observées à Brest. N° 44.....	166
CHAPITRE XVII. — <i>Sur la formation des Tables astronomiques, et sur le plan invariable du système planétaire.</i> N°s 45 et 46.....	172 et 173
CHAPITRE XVIII. — <i>De l'action des étoiles sur le système planétaire</i> .....	174
Le grand éloignement de ces astres rend leur action insensible. Réflexions sur la comparaison des formules précédentes avec les observations. N° 47.....	174

## LIVRE VII.

### THÉORIE DE LA LUNE.

Exposé de cette théorie; ses difficultés particulières. Considérations par lesquelles on doit y diriger les approximations. Comment on peut en conclure plusieurs éléments importants pour la théorie du système du monde, et entre autres l'aplatissement de la Terre, qui s'obtient ainsi avec plus d'exactitude que par les observations directes.	180
CHAPITRE I. — <i>Intégration des équations différentielles du mouvement lunaire</i> .....	193
Équations différentielles de ce mouvement données dans le n° 15 du Livre II. Manière d'avoir égard, dans les calculs, à la non-sphéricité de la Lune et de la Terre. N° 1..	193
Développements des quantités qui entrent dans les équations différentielles, en supposant ces deux corps sphériques. N° 2.....	195



	Pages
L'écliptique, dans son mouvement séculaire, emporte l'orbite de la Lune, de manière que l'inclinaison moyenne de cette orbite sur elle reste toujours la même. Cette circonstance, indiquée par l'analyse, simplifie les calculs, en ce qu'elle permet de prendre pour plan fixe de projection celui de l'écliptique. N° 3.....	196
Recherche de la partie elliptique des mouvements de la Lune et de la Terre. N° 4.....	199
Principes relatifs aux degrés de petitesse des quantités qui entrent dans les expressions des coordonnées de la Lune. Examen de l'influence que les intégrations successives peuvent avoir sur les différents termes dont elles sont composées. Indication des termes du rayon vecteur qui produisent l'évection et l'équation annuelle. N° 5.....	201
Usage de ces considérations. Développements de l'équation différentielle qui donne le rayon vecteur, en n'ayant égard qu'à la première puissance de la force perturbatrice. N°s 6 et 7.....	204 et 212
Recherche des termes de l'ordre du carré et des puissances supérieures des masses perturbatrices qui acquièrent une influence sensible par les intégrations. Il est nécessaire d'avoir égard aux perturbations du mouvement de la Terre par la Lune. N° 8.....	214
Réunion de ces termes aux précédents. Développement complet de l'équation différentielle qui donne le rayon vecteur. N° 9.....	223
Intégration de cette équation. Inégalités qui en résultent. Expression du mouvement du périhélie lunaire.	
La variabilité de l'excentricité de l'orbite terrestre introduit une inégalité séculaire dans la constante de la parallaxe lunaire; mais cette inégalité est insensible.	
La même cause donne une inégalité séculaire dans le mouvement du périhélie lunaire; ce qui est conforme aux observations. Expression analytique de cette inégalité.	
L'excentricité de l'orbite lunaire est assujettie à une variation séculaire analogue à celle de la parallaxe, et pareillement insensible. N° 10.....	226
Développement de l'équation différentielle qui donne la latitude, en n'ayant d'abord égard qu'à la première puissance des forces perturbatrices. N° 11.....	231
Recherche des termes de l'ordre du carré de ces forces qui acquièrent une influence sensible sur l'expression de la latitude. N° 12.....	234
Réunion de ces termes aux précédents, et développement complet de l'équation différentielle qui donne la latitude. N° 13.....	236
Intégration de cette équation. Inégalités qui en résultent. Expression du mouvement rétrograde des nœuds.	
La variabilité de l'excentricité de l'orbite terrestre introduit dans ce mouvement une inégalité séculaire. Expression analytique de cette inégalité. Son rapport avec celle du périhélie.	
L'inclinaison de l'orbite lunaire à l'écliptique vraie est pareillement variable en vertu de la même cause; mais cette variation est insensible. N° 14.....	237
Développement de l'équation différentielle qui donne le temps ou la longitude moyenne en fonction de la longitude vraie. Intégration de cette équation. Inégalités qui en résultent. N° 15.....	240
La longitude moyenne éprouve aussi un changement séculaire résultant de la variabilité de l'excentricité de l'orbite terrestre; expression de cette inégalité. Rapports analytiques des équations séculaires des moyens mouvements de la Lune, de son périhélie et de ses nœuds.	
Détermination numérique des divers coefficients qui entrent dans les formules précédentes, et développement numérique de l'expression de la longitude moyenne. Les perturbations de l'orbite terrestre par la Lune se réfléchissent à cette dernière par le moyen du Soleil, et elles s'affaiblissent par cette transmission. Valeur numérique du	



TABLE DES MATIÈRES.

XXI

	Pages
mouvement du péri­gée et de son équation séculaire. Cette équation a un signe contraire à celle du moyen mouvement. Expression numérique du mouvement des nœuds et de son équation séculaire. Cette équation a aussi un signe contraire à celle du moyen mouvement; d'où il suit que les mouvements des nœuds et du péri­gée se ralentissent quand celui de la Lune s'accélère. Rapports numériques de ces trois équations séculaires. Équation séculaire de l'anomalie moyenne. N° 16.....	245
Inégalités les plus sensibles du quatrième ordre qui entrent dans l'expression de la longitude moyenne. N° 17.....	252
Expression numérique de la latitude. N° 18.....	262
Expression numérique de la parallaxe lunaire. N° 19.....	263
 CHAPITRE II. — <i>Des inégalités lunaires dues à la non-sphéricité de la Terre et de la Lune</i> .....	 266
La non-sphéricité de la Terre ne produit, dans la latitude de la Lune, qu'une seule inégalité sensible. On peut représenter cet effet, en supposant que l'orbite de la Lune, au lieu de se mouvoir sur le plan de l'écliptique avec une inclinaison constante, se meut avec la même condition sur un plan passant toujours par les équinoxes entre l'écliptique et l'équateur. Cette inégalité est très-propre à faire connaître l'aplatissement de la Terre. Elle est la réaction de la nutation de l'axe terrestre sur le sphéroïde lunaire, et il y aurait équilibre autour du centre de gravité de la Terre en vertu des forces qui produisent ces deux inégalités, si toutes les molécules de la Terre et de la Lune étaient fixement liées entre elles, la Lune compensant la petitesse des forces qui l'animent par la longueur du levier auquel elle est attachée.	
La non-sphéricité de la Terre n'influe sur le rayon vecteur de la Lune que d'une manière insensible; la longitude de la Lune n'éprouve de la part de la même cause qu'une seule inégalité appréciable. Le mouvement du péri­gée et celui du nœud n'en reçoivent que de très-petites augmentations. N° 20.....	266
La non-sphéricité de la Lune n'introduit dans son mouvement que des inégalités insensibles. N° 21.....	276
 CHAPITRE III. — <i>Des inégalités de la Lune dues à l'action des planètes</i> .....	 280
Ces inégalités sont de deux sortes : les unes sont dues à l'action directe des planètes sur le mouvement de la Lune; les autres résultent des perturbations que les planètes font éprouver au rayon vecteur terrestre. Perturbations qui se réfléchissent à la Lune par le moyen du Soleil, en s'agrandissant par les intégrations qui leur donnent de petits diviseurs. Détermination de ces inégalités pour Vénus, Mars et Jupiter. La variabilité des excentricités des orbites planétaires introduit, dans la longitude moyenne de la Lune, des équations séculaires analogues à celle que produit la variation de l'excentricité de l'orbite terrestre, réfléchi à la Lune par le moyen du Soleil; mais elles sont tout à fait insensibles par rapport à cette dernière. Ainsi l'action indirecte des planètes sur la Lune, transmise par le moyen du Soleil, l'emporte beaucoup à cet égard sur leur action directe. N° 22.....	280
 CHAPITRE IV. — <i>Comparaison de la théorie précédente avec les observations</i> .....	 292
Valeurs numériques de l'inégalité séculaire du moyen mouvement de la Lune, de celles du mouvement du péri­gée et du nœud de l'orbite lunaire. Considérations qui confirment leur exactitude. N° 23.....	292



	Pages
Inégalités périodiques du mouvement lunaire en longitude. Accord des coefficients donnés par la théorie avec ceux des Tables lunaires de Mason et de Bürg. Une de ces inégalités dépend de la parallaxe du Soleil. En déterminant son coefficient d'après les observations, on en déduit la valeur de cette parallaxe, telle que la donnent les passages de Vénus. Une autre de ces inégalités dépend de l'aplatissement de la Terre. La valeur de son coefficient, déterminée d'après les Tables de Mason et de Bürg, indique que la Terre est moins aplatie que dans le cas de l'homogénéité, et que son aplatissement est $\frac{1}{305}$ . N° 24.....	293
Inégalités du mouvement de la Lune en latitude. Accord des coefficients donnés par la théorie avec ceux des Tables de Mason et de Bürg. Une de ces inégalités dépend de l'aplatissement de la Terre. Son coefficient, déterminé d'après les observations, donne le même aplatissement que l'inégalité en longitude qui dépend du même élément. Ainsi ces deux résultats s'accordent à montrer que la Terre est moins aplatie que dans le cas de l'homogénéité. N° 25.....	302
Expression numérique de la parallaxe horizontale de la Lune. Son accord avec les Tables de Mason et de Bürg. N° 26.....	305
 CHAPITRE V. — <i>Sur une inégalité à longue période qui paraît exister dans le mouvement de la Lune</i> .....	
	308
L'action du Soleil sur la Lune produit, dans le mouvement de ce satellite, une inégalité dont l'argument est le double de la longitude du nœud de l'orbite lunaire, plus la longitude de son périégée, moins trois fois la longitude du périégée du Soleil. La considération de la non-sphéricité de la Terre peut encore introduire dans le mouvement de la Lune deux autres inégalités, dont la période est à très-peu près la même que celle de la précédente, et qui, vu la position actuelle du périégée solaire, se confondent à peu près avec elle. Ces trois inégalités sont très-difficiles à déterminer par l'analyse : les deux dernières semblent devoir être insensibles. N° 27.....	308
La première est évidemment indiquée par les observations. Détermination de son coefficient. N° 28.....	312
 CHAPITRE VI. — <i>Des variations séculaires des mouvements de la Lune et de la Terre, qui peuvent être produites par la résistance d'un fluide éthéré répandu autour du Soleil</i> .....	
	315
La résistance de l'éther ne produit d'équation séculaire que dans le moyen mouvement de la Lune, elle n'en produit aucune sensible dans les mouvements du périégée et des nœuds. N° 29.....	315
L'équation séculaire du moyen mouvement de la Terre, produite par la résistance de l'éther, est environ cent fois plus petite que l'équation correspondante du moyen mouvement de la Lune. N° 30.....	321
SUPPLÉMENT.....	325



# TRAITÉ

DE

# MÉCANIQUE CÉLESTE.

---

## SECONDE PARTIE.

THÉORIES PARTICULIÈRES DES MOUVEMENTS CÉLESTES.

---

### LIVRE VI.

THÉORIE DES MOUVEMENTS PLANÉTAIRES.

---

Les mouvements des planètes sont sensiblement troublés par leur attraction mutuelle : il importe de déterminer exactement les inégalités qui en résultent, soit pour vérifier la loi de la pesanteur universelle, soit pour perfectionner les Tables astronomiques, soit enfin pour reconnaître si des causes étrangères au système planétaire ne viennent point altérer sa constitution et ses mouvements. Je me propose ici d'appliquer aux corps de ce système les méthodes et les formules générales présentées dans la Première Partie de cet Ouvrage. Je n'ai développé, dans le Livre II, que les inégalités indépendantes des excentricités et des inclinaisons des orbites, et celles qui ne dépendent que de leur première puissance; mais il est souvent indispensable d'étendre



les approximations jusqu'aux carrés et aux puissances supérieures de ces quantités, et même de considérer les termes dépendants du carré de la force perturbatrice. Je commence par exposer les formules de ces inégalités; en substituant ensuite, dans ces formules et dans celles du Livre II, les nombres relatifs à chaque planète, je donne les expressions numériques de son rayon vecteur et de son mouvement tant en longitude qu'en latitude. Bouvard a bien voulu faire le calcul de ces substitutions, et le zèle avec lequel il s'est livré à ce pénible travail lui mérite la reconnaissance des Astronomes. Divers Géomètres ont déjà calculé la plupart des inégalités planétaires : leurs résultats ont servi de vérification à ceux de Bouvard, et, lorsqu'il a trouvé des différences, il a remonté à la source de l'erreur pour s'assurer de l'exactitude de ses calculs. Enfin il a revu avec un soin particulier le calcul des inégalités qui n'avaient point encore été déterminées, et quelques équations de condition qui ont lieu entre ces inégalités m'ont fourni les moyens d'en vérifier plusieurs. Malgré toutes ces précautions, il peut s'être glissé dans les résultats suivants des erreurs, presque inévitables dans un aussi long travail; mais j'ai lieu de penser qu'elles ne portent que sur des quantités insensibles, et qu'elles ne nuiront point à la justesse des Tables fondées sur ces résultats, qui, par leur importance dans l'Astronomie planétaire dont ils sont la base, méritent d'être vérifiés avec les soins que l'on a mis dans le calcul des Tables de logarithmes et de sinus.

Les Théories de Mercure, Vénus, la Terre et Mars n'offrent que des inégalités périodiques peu considérables; elles sont cependant très-sensibles par les observations modernes, qu'elles représentent avec une exactitude remarquable. Le développement des inégalités séculaires de ces planètes et de la Lune fera connaître exactement leurs masses, dont la véritable valeur est la seule chose que leurs théories laissent encore à désirer. C'est principalement dans les mouvements de Jupiter et de Saturne, les deux plus grands corps du système planétaire, que l'attraction mutuelle des planètes est sensible. Leurs moyens mouvements sont presque commensurables, en sorte que cinq



fois celui de Saturne est à très-peu près égal à deux fois celui de Jupiter : les inégalités considérables qui naissent de ce rapport, et dont on ignorait les lois et la cause, ont paru longtemps faire exception à la loi de la pesanteur universelle, et maintenant elles en sont une des preuves les plus frappantes. Il est extrêmement curieux de voir avec quelle précision les deux principales inégalités de ces planètes, dont la période embrasse plus de neuf cents années, satisfont aux observations anciennes et modernes; les siècles à venir, en les développant, mettront de plus en plus cet accord en évidence. Pour en faciliter la comparaison aux Astronomes, j'ai porté l'approximation jusqu'aux termes dépendants du carré de la force perturbatrice, ce qui me fait espérer que les valeurs que je leur assigne s'éloigneront fort peu de celles que l'on trouvera par une longue suite d'observations continuées pendant une période entière. Ces inégalités ont sur les variations séculaires des orbites de Jupiter et de Saturne une grande influence, dont je développe les expressions analytique et numérique. Enfin la planète Uranus est assujettie à des inégalités sensibles, que je détermine, et que les observations confirment.

Le premier jour de ce siècle est remarquable par la découverte d'une planète, dont l'orbite est situé entre ceux de Jupiter et de Mars, et à laquelle on a donné le nom de *Cérés*. Elle ne paraît que comme une étoile de la 8<sup>e</sup> ou 9<sup>e</sup> grandeur; son excessive petitesse rend donc insensible son action sur le système planétaire; mais elle doit éprouver de la part des autres planètes, et principalement de Jupiter et de Saturne, des perturbations considérables qu'il importe de déterminer. C'est ce que je me propose de faire dans la suite de cet Ouvrage, lorsque l'observation aura fait connaître avec une approximation suffisante les éléments de son orbite.

Il n'y a pas encore trois siècles que Copernic introduisit le premier, dans les Tables astronomiques, le mouvement des planètes autour du Soleil; environ un siècle après, Kepler y fit entrer les lois du mouvement elliptique, qu'il avait reconnues par l'observation, et qui ont conduit Newton à la découverte de la gravitation universelle. Depuis



ces trois époques mémorables dans l'histoire des sciences, les progrès de l'Analyse infinitésimale nous ont mis à portée de soumettre au calcul les nombreuses inégalités des planètes qui naissent de leur attraction réciproque, et par ce moyen les Tables ont acquis une précision inattendue. J'ose croire que les résultats suivants leur donneront une précision plus grande encore.



## CHAPITRE PREMIER.

FORMULES DES INÉGALITÉS PLANÉTAIRES DÉPENDANTES DES CARRÉS ET DES PUISSANCES  
SUPÉRIEURES DES EXCENTRICITÉS ET DES INCLINAISONS DES ORBITES.

*Des inégalités dépendantes des carrés et des produits des excentricités  
et des inclinaisons.*

1. Pour déterminer ces inégalités, je reprends l'équation du n° 46 du Livre II,

$$0 = \frac{d^2.r \delta r}{dt^2} + \frac{\mu.r \delta r}{r^3} + 2f dR + r \frac{\partial R}{\partial r}.$$

On a, par les nos 20 et 22 du même Livre,

$$\frac{\mu}{a^3} = n^2,$$

$$r = a \left[ 1 + \frac{1}{2} e^2 - e \cos(nt + \varepsilon - \varpi) - \frac{1}{2} e^2 \cos(2nt + 2\varepsilon - 2\varpi) \right];$$

l'équation différentielle précédente devient ainsi

$$0 = \frac{d^2.r \delta r}{dt^2} + n^2.r \delta r + 3n^2 a \delta r [e \cos(nt + \varepsilon - \varpi) + e^2 \cos(2nt + 2\varepsilon - 2\varpi)] \\ + 2f dR + r \frac{\partial R}{\partial r}.$$

Maintenant tous les termes de l'expression de R dépendants du carré et des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites peuvent être ramenés à l'une ou à l'autre de ces deux formes

$$M \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + K],$$

$$N \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + L],$$

$i$  étant susceptible de toutes les valeurs entières positives et négatives,



en y comprenant zéro. Considérons d'abord la première forme. Elle donne dans  $2 \int dR + r \frac{\partial R}{\partial r}$  la fonction

$$\left( \frac{2(2-i)n}{in'+(2-i)n} M + a \frac{\partial M}{\partial a} \right) \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + K].$$

On a vu, dans le Livre II, que la partie de  $\frac{\partial r}{a}$  qui dépend des angles

$$i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \quad \text{et} \quad i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon$$

est de cette forme

$$F \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + eG \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi] \\ + e' H \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi'];$$

la fonction

$$3n^2 a \delta r [e \cos(nt + \varepsilon - \varpi) + e^2 \cos(2nt + 2\varepsilon - 2\varpi)]$$

produira donc la suivante

$$\frac{3}{2} n^2 a^2 \left\{ \begin{array}{l} (F + G) e^2 \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - 2\varpi] \\ + H e e' \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - \varpi - \varpi'] \end{array} \right\};$$

ainsi, en n'ayant égard qu'aux termes dépendants de l'angle

$$i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt,$$

et en observant que, si l'on fait  $\mu = 1$ , ce qui revient à prendre pour unité de masse celle du Soleil, en négligeant la masse de la planète, on a  $n^2 a^3 = 1$ ; l'équation différentielle en  $r \delta r$  devient

$$0 = \frac{d^2 \cdot r \delta r}{dt^2} + n^2 \cdot r \delta r + \frac{3}{2} n^2 a^2 \left\{ \begin{array}{l} (F + G) e^2 \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - 2\varpi] \\ + H e e' \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - \varpi - \varpi'] \end{array} \right\} \\ + n^2 a^2 \left( \frac{2(2-i)n}{in'+(2-i)n} aM + a^2 \frac{\partial M}{\partial a} \right) \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + K],$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$(A) \quad \frac{r \delta r}{a^2} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{2} n^2 \left\{ \begin{array}{l} (F + G) e^2 \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - 2\varpi] \\ + H e e' \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - \varpi - \varpi'] \end{array} \right\} \\ + \left( \frac{2(2-i)n}{in'+(2-i)n} aM + a^2 \frac{\partial M}{\partial a} \right) n^2 \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + K] \end{array} \right\}}{[in'+(3+i)n][in'+(1-i)n]}.$$



Si cette expression de  $\frac{r\delta r}{a^2}$  est considérable, et si l'un des diviseurs  $in' + (3 - i)n$ ,  $in' + (1 - i)n$  est très-petit, comme cela a lieu dans la théorie de Jupiter troublé par Saturne, lorsque l'on suppose  $i = 5$ ,  $2n$  étant à très-peu près égal à  $5n'$ , la variabilité des éléments des orbites a une influence sensible sur cette expression; il importe donc d'y avoir égard. Pour cela, nous mettrons l'équation différentielle en  $r\delta r$  sous cette forme

$$0 = \frac{d^2 \cdot r\delta r}{dt^2} + n^2 r\delta r + n^2 a^2 P \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon] \\ + n^2 a^2 P' \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon].$$

En l'intégrant et négligeant les termes dépendants des différences secondes et supérieures de P et de P', nous aurons

$$(B) \left\{ \begin{array}{l} \frac{r\delta r}{a^2} = \frac{n^2}{[in' + (3 - i)n][in' + (1 - i)n]} \\ \times \left\{ \begin{array}{l} \left[ P + \frac{2[i(n' - n) + 2n] \frac{dP'}{dt}}{[in' + (3 - i)n][in' + (1 - i)n]} \right] \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon] \\ + \left[ P' - \frac{2[i(n' - n) + 2n] \frac{dP}{dt}}{[in' + (3 - i)n][in' + (1 - i)n]} \right] \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon] \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

La formule (Y) du n° 46 du Livre II deviendra, en y faisant  $\mu = 1$ ,

$$(C) \delta v = \frac{\left\{ \begin{array}{l} \frac{2d(r\delta r)}{a^2 \cdot n dt} - \frac{1}{2} \left\{ (F + G) e^2 \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - 2\varpi] \right. \\ \left. + H e e' \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - \varpi - \varpi'] \right\} \\ + \left[ \frac{(6 - 3i)n^2}{[in' + (2 - i)n]^2} aM + \frac{2na^2 \frac{\partial M}{\partial a}}{in' + (2 - i)n} \right] \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + K] \end{array} \right\}}{\sqrt{1 - e^2}}$$

En donnant à  $i$  toutes les valeurs entières positives et négatives, en y comprenant zéro, on aura toutes les inégalités dans lesquelles le coefficient de  $nt$  surpasse ou est surpassé par celui de  $n't$  de deux unités.

Si le coefficient  $in' + (2 - i)n$  est très-petit, et si cette inégalité est très-sensible, comme cela a lieu dans la théorie d'Uranus troublé par Saturne, alors on mettra la partie de R, dépendante de l'angle



$i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon$  sous la forme suivante

$$Q \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon] \\ + Q' \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon],$$

et l'on aura

$$3a \int n dt dR = \frac{(6-3i)n^2 a}{[in' + (2-i)n]^2} \left( Q + \frac{2 \frac{dQ'}{dt}}{in' + (2-i)n} \right) \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon] \\ - \frac{(6-3i)n^2 a}{[in' + (2-i)n]^2} \left( Q' - \frac{2 \frac{dQ}{dt}}{in' + (2-i)n} \right) \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon].$$

La formule (Y) du n° 46 du Livre II donnera ainsi

$$(D) \left\{ \begin{aligned} \delta v &= \frac{2d(r\delta r)}{a^2 n dt} - \frac{1}{2} \left\{ (F+G)e^2 \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - 2\varpi] \right. \\ &\quad \left. + H e e' \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - \varpi - \varpi'] \right\} \\ &+ \left[ \frac{(6-3i)n^2}{[in' + (2-i)n]^2} \left( aQ + \frac{2a \frac{dQ'}{dt}}{in' + (2-i)n} \right) + \frac{2na^2 \frac{\partial Q}{\partial a}}{in' + (2-i)n} \right] \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon] \\ &- \left[ \frac{(6-3i)n^2}{[in' + (2-i)n]^2} \left( aQ' - \frac{2a \frac{dQ}{dt}}{in' + (2-i)n} \right) + \frac{2na^2 \frac{\partial Q'}{\partial a}}{in' + (2-i)n} \right] \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon]. \end{aligned} \right.$$

Je supprime, pour plus d'exactitude, le diviseur  $\sqrt{1-e^2}$  dans cette expression de  $\delta v$ , parce que ce diviseur n'affecte point, comme on l'a vu dans le n° 65 du Livre II, la partie de cette expression qui a pour diviseur le carré de  $in' + (2-i)n$ , et, dans le cas présent, cette partie est beaucoup plus grande que les autres. De plus, en vertu du même numéro, il faut appliquer cette partie de  $\delta v$  au moyen mouvement de la planète  $m$ , et, comme elle est à fort peu près égale à l'inégalité entière dépendante de l'angle  $i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon$ , on peut appliquer cette inégalité entière au moyen mouvement de  $m$ .

On aura les valeurs de  $\frac{dP}{dt}$ ,  $\frac{dP'}{dt}$ ,  $\frac{dQ}{dt}$  et  $\frac{dQ'}{dt}$  en différentiant les expressions de  $P$ ,  $P'$ ,  $Q$ ,  $Q'$  par rapport aux excentricités et aux inclinaisons des orbites, aux positions de leurs périhélie et de leurs nœuds, et en substituant, au lieu des différences de ces quantités, leurs valeurs. Mais on aura plus simplement ces valeurs de  $\frac{dP}{dt}$ , etc.



de la manière suivante. On déterminera la valeur de P pour une époque éloignée de deux cents ans de la première époque à laquelle on fixe l'origine du temps  $t$ . En nommant P, cette valeur et T l'intervalle de deux cents années, on aura

$$T \frac{dP}{dt} = P_1 - P.$$

On aura par le même procédé les valeurs de  $\frac{dP'}{dt}$ ,  $\frac{dQ}{dt}$ ,  $\frac{dQ'}{dt}$ .

Pour conclure l'expression de  $\frac{\partial r}{a}$  de celle de  $\frac{r \partial r}{a^2}$ , nous désignerons par  $\frac{\partial_1 r}{a}$  la partie de  $\frac{\partial r}{a}$  qui dépend de l'angle  $i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon$ , et nous aurons

$$\frac{r \partial r}{a^2} = \frac{r}{a} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial_1 r}{a} + F \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)] + eG \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi] \\ + e' H \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi'] \end{array} \right\},$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} \frac{\partial_1 r}{a} = \frac{r \partial r}{a^2} + \frac{1}{4}(F + 2G) e^2 \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - 2\varpi] \\ + \frac{1}{2} e e' H \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - \varpi - \varpi']. \end{aligned}$$

2. En considérant de la même manière les termes dépendants de l'angle  $i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$ , et supposant que l'on ait, en ne portant l'approximation que jusqu'aux premières puissances des excentricités,

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{a} = F \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + eG \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi] \\ + eG' \cos[-i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi] \\ + e' H \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi'] \\ + e' H' \cos[-i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi'], \end{aligned}$$

$i$  étant ici positif, on aura

$$(E) \quad \frac{r \partial r}{a^2} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{2} n^2 \left[ \begin{array}{l} (G + G') e^2 \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \\ + H e e' \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + \varpi - \varpi'] \\ + H' e e' \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) - \varpi + \varpi'] \end{array} \right] \\ + n^2 \left( a^2 \frac{\partial N}{\partial a} - \frac{2n}{n' - n} a N \right) \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + L] \end{array} \right\}}{[in' - (i+1)n][in' - (i-1)n]},$$



$$(F) \quad \delta v = \frac{\left\{ \begin{aligned} & \frac{2d(r\delta r)}{a^2 n dt} + \frac{1}{2} \left[ \begin{aligned} & (G - G') e^2 \sin i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \\ & + H e e' \sin [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + \varpi - \varpi'] \\ & - H' e e' \sin [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) - \varpi + \varpi'] \end{aligned} \right] \\ & + \left( \frac{2n}{in' - in} a^2 \frac{\partial N}{\partial a} - \frac{3n^2 i}{(in' - in)^2} a N \right) \sin [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + L] \end{aligned} \right\}}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

Si l'on désigne par  $\frac{\delta_1 r}{a}$  la partie qui dépend à la fois des carrés des excentricités et des inclinaisons des orbites, et de l'angle  $i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$ , on aura

$$\begin{aligned} \frac{\delta_1 r}{a} = & \frac{r \delta r}{a^2} + \frac{1}{2} (G + G' - F) e^2 \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \\ & + \frac{1}{2} H e e' \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + \varpi - \varpi'] \\ & + \frac{1}{2} H' e e' \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) - \varpi + \varpi']. \end{aligned}$$

Dans ces trois expressions,  $i$  doit être supposé positif.

3. Le grand nombre des inégalités dépendantes des carrés des excentricités et des inclinaisons ne permet pas de les calculer toutes; on se dirigera dans leur choix par les considérations suivantes : 1<sup>o</sup> si la quantité  $in' + (2 - i)n$  diffère peu de  $\pm n$ , alors l'un ou l'autre des diviseurs  $in' + (3 - i)n$  et  $in' + (1 - i)n$  de la formule (A) du n<sup>o</sup> 1 est peu considérable, et par là cette formule peut acquérir une valeur sensible; 2<sup>o</sup> si la quantité  $in' + (2 - i)n$  est peu considérable, les termes de la formule (C) du même numéro qui ont cette quantité pour diviseur peuvent devenir sensibles; 3<sup>o</sup> si la quantité  $i(n' - n)$  diffère peu de  $\pm n$ , l'un ou l'autre des diviseurs  $in' - (i + 1)n$  et  $in' - (i - 1)n$  de la formule (E) du numéro précédent est peu considérable, et par là cette formule peut acquérir une valeur sensible; 4<sup>o</sup> enfin, si la quantité  $i(n' - n)$  est peu considérable, les termes de la formule (F) du numéro précédent qui ont ce diviseur peuvent devenir sensibles. Il faut donc calculer avec soin toutes les inégalités assujetties à l'une de ces quatre conditions.



4. Les quantités F, G, G', H, H' sont déterminées par les approximations développées dans le Livre II : nous allons déterminer M et N. Pour cela, reprenons la valeur de R du n° 46 du Livre II,

$$R = \frac{m'(xx' + \gamma y' + zz')}{r'^3} - \frac{m'}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}},$$

$r'$  étant ici le rayon vecteur de  $m'$ . Prenons pour plan fixe celui de l'orbite primitive de  $m$ , et pour ligne des abscisses  $x$  la ligne des nœuds de l'orbite de  $m'$  avec ce plan. Si l'on nomme  $\nu$  l'angle formé par  $r$  et par cette ligne,  $\nu'$  l'angle formé par cette même ligne et par  $r'$ , et  $\gamma$  la tangente de l'inclinaison respective des deux orbites, on aura

$$\begin{aligned} x &= r \cos \nu, & y &= r \sin \nu & z &= 0, \\ x' &= r' \cos \nu', & y' &= \frac{r' \sin \nu'}{\sqrt{1 + \gamma^2}}, & z' &= \frac{r' \gamma \sin \nu'}{\sqrt{1 + \gamma^2}}, \end{aligned}$$

ce qui donne, en négligeant la quatrième puissance de  $\gamma$ ,

$$\begin{aligned} R &= \frac{m'r}{r'^2} \cos(\nu' - \nu) - \frac{m'\gamma^2}{4} \frac{r}{r'^2} [\cos(\nu' - \nu) - \cos(\nu' + \nu)] \\ &\quad - \frac{m'}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos(\nu' - \nu) + r'^2}} + \frac{m'\gamma^2 rr' [\cos(\nu' - \nu) - \cos(\nu' + \nu)]}{4 [r^2 - 2rr' \cos(\nu' - \nu) + r'^2]^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Supposons, comme dans le n° 48 du Livre II,

$$\begin{aligned} \frac{a}{a'^2} \cos(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) - [a^2 - 2aa' \cos(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + a'^2]^{-\frac{1}{2}} \\ = \frac{1}{2} \Sigma A^{(i)} \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon), \end{aligned}$$

$$[a^2 - 2aa' \cos(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + a'^2]^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \Sigma B^{(i)} \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon),$$

et représentons  $M \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + K]$  par

$$\begin{aligned} &M^{(0)} e^2 \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - 2\varpi] \\ &+ M^{(1)} e e' \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - \varpi - \varpi'] \\ &+ M^{(2)} e'^2 \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - 2\varpi'] \\ &+ M^{(3)} \gamma^2 \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - 2\Pi], \end{aligned}$$

$\Pi$  étant la longitude du nœud ascendant de l'orbite de  $m'$  sur celle de  $m$ , comptée de la ligne où l'on fixe l'origine de  $nt + \varepsilon$ . On a, par



le n° 22 du Livre II,

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2}e^2 - e \cos(nt + \varepsilon - \varpi) - \frac{1}{2}e^2 \cos(2nt + 2\varepsilon - 2\varpi),$$

$$v = nt + \varepsilon - \Pi + 2e \sin(nt + \varepsilon - \varpi) + \frac{5}{4}e^2 \sin(2nt + 2\varepsilon - 2\varpi),$$

ce qui donne les valeurs de  $\frac{r'}{a'}$  et de  $v'$ , en marquant d'un trait les quantités  $n$ ,  $\varepsilon$  et  $e$ . On a ensuite, par le n° 48 du même Livre, le produit de  $\Sigma \Lambda^{(i)} \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)]$  par le sinus ou le cosinus d'un angle quelconque  $ft + I$  égal à

$$\Sigma \Lambda^{(i)} \frac{\sin}{\cos} [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + ft + I].$$

De là il est facile de conclure

$$\begin{aligned} M^{(0)} &= \frac{m'}{8} \left[ i(4i - 5) \Lambda^{(i)} + 2(2i - 1) a \frac{\partial \Lambda^{(i)}}{\partial a} + a^2 \frac{\partial^2 \Lambda^{(i)}}{\partial a^2} \right], \\ M^{(1)} &= -\frac{m'}{4} \left[ 4(i-1)^2 \Lambda^{(i-1)} + 2(i-1) a \frac{\partial \Lambda^{(i-1)}}{\partial a} - 2(i-1) a' \frac{\partial \Lambda^{(i-1)}}{\partial a'} - aa' \frac{\partial^2 \Lambda^{(i-1)}}{\partial a \partial a'} \right], \\ M^{(2)} &= \frac{m'}{8} \left[ (i-2)(4i-3) \Lambda^{(i-2)} - 2(2i-3) a' \frac{\partial \Lambda^{(i-2)}}{\partial a'} + a'^2 \frac{\partial^2 \Lambda^{(i-2)}}{\partial a'^2} \right], \\ M^{(3)} &= -\frac{m'}{8} aa' B^{(i-1)}, \end{aligned}$$

et dans le cas de  $i = 1$ ,

$$M^{(3)} = \frac{m'}{4} \frac{a}{a'^2} - \frac{m'}{8} aa' B^{(0)}.$$

Représentons  $N \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + L]$  par les termes suivants

$$\begin{aligned} &N^{(0)} \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \\ &+ N^{(1)} ee' \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + \varpi - \varpi'] \\ &+ N^{(2)} ee' \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) - \varpi + \varpi']; \end{aligned}$$

nous aurons

$$\begin{aligned} N^{(0)} &= -\frac{m'}{4} \left[ (e^2 + e'^2) \left( 4i^2 \Lambda^{(i)} - 2a \frac{\partial \Lambda^{(i)}}{\partial a} - a^2 \frac{\partial^2 \Lambda^{(i)}}{\partial a^2} \right) - \frac{\gamma^2}{2} aa' (B^{(i-1)} + B^{(i+1)}) \right], \\ N^{(1)} &= \frac{m'}{4} \left[ 4(i-1)^2 \Lambda^{(i-1)} - 2(i-1) a \frac{\partial \Lambda^{(i-1)}}{\partial a} - 2(i-1) a' \frac{\partial \Lambda^{(i-1)}}{\partial a'} + aa' \frac{\partial^2 \Lambda^{(i-1)}}{\partial a \partial a'} \right], \\ N^{(2)} &= \frac{m'}{4} \left[ 4(i+1)^2 \Lambda^{(i+1)} + 2(i+1) a \frac{\partial \Lambda^{(i+1)}}{\partial a} + 2(i+1) a' \frac{\partial \Lambda^{(i+1)}}{\partial a'} + aa' \frac{\partial^2 \Lambda^{(i+1)}}{\partial a \partial a'} \right], \end{aligned}$$



$i$  étant supposé positif et plus grand que zéro dans ces trois dernières expressions. Dans le cas de  $i = 1$ , il faut ajouter à  $N^{(0)}$  le terme

$$-\frac{m'\gamma^2}{4} \frac{a}{a'^2}.$$

Il est plus commode pour les calculs numériques de n'avoir dans les formules que les différences relatives à l'une ou à l'autre des deux quantités  $a$  et  $a'$ . On trouve alors, par le n° 49 du Livre II,

$$M^{(1)} = -\frac{m'}{4} \left[ (2i-2)(2i-1)\Lambda^{(i-1)} + 2(2i-1)a \frac{\partial \Lambda^{(i-1)}}{\partial a} + a^2 \frac{\partial^2 \Lambda^{(i-1)}}{\partial a^2} \right],$$

$$M^{(2)} = \frac{m'}{8} \left[ (4i^2 - 7i + 2)\Lambda^{(i-2)} + 2(2i-1)a \frac{\partial \Lambda^{(i-2)}}{\partial a} + a^2 \frac{\partial^2 \Lambda^{(i-2)}}{\partial a^2} \right],$$

$$N^{(1)} = \frac{m'}{4} \left[ (2i-2)(2i-1)\Lambda^{(i-1)} - 2a \frac{\partial \Lambda^{(i-1)}}{\partial a} - a^2 \frac{\partial^2 \Lambda^{(i-1)}}{\partial a^2} \right],$$

$$N^{(2)} = \frac{m'}{4} \left[ (2i+2)(2i+1)\Lambda^{(i+1)} - 2a \frac{\partial \Lambda^{(i+1)}}{\partial a} - a^2 \frac{\partial^2 \Lambda^{(i+1)}}{\partial a^2} \right].$$

5. Le cas de  $i = 0$  mérite une attention particulière. Reprenons la formule (T) du n° 46 du Livre II, et considérons d'abord le terme  $\frac{d(2rd\delta r + dr\delta r)}{r^2 dv}$  de l'expression de  $d\delta v$  donnée par cette formule. On a, par le n° 53 du même Livre, et en n'ayant égard qu'aux termes affectés de l'arc de cercle  $nt$ ,

$$\frac{r}{a} = 1 - h \sin(nt + \varepsilon) - l \cos(nt + \varepsilon),$$

$$\frac{\delta r}{a} = \frac{m'}{2} (lC + l'D)nt \sin(nt + \varepsilon) - \frac{m'}{2} (hC + h'D)nt \cos(nt + \varepsilon),$$

ce qui donne, en ne considérant que les termes dépendants des carrés et des produits de  $h, l, h', l'$ , et indépendants des sinus et cosinus de  $nt + \varepsilon$  et de ses multiples,

$$d(2rd\delta r + dr\delta r) = -\frac{m'n^2 a^2 dt^2}{4} [(h^2 + l^2)C + (hh' + ll')D].$$

On a ensuite, par les nos 19 et 20 du Livre II,  $r^2 dv = a^2 n dt \sqrt{1 - e^2}$ ;



on aura donc

$$\frac{d(2rd\delta r + dr\delta r)}{r^2 d\nu} = -\frac{m'ndt}{4} [(h^2 + l^2)C + (hh' + ll')D].$$

On a, par le n° 55 du Livre II,

$$(0, 1) = -\frac{m'nC}{2}, \quad \boxed{0, 1} = \frac{m'nD}{2},$$

partant,

$$\frac{d(2rd\delta r + dr\delta r)}{r^2 d\nu} = \frac{1}{2} dt [(0, 1)(h^2 + l^2) - \boxed{0, 1}(hh' + ll')].$$

Considérons ensuite le terme  $\frac{3dt^2 f \delta dR}{r^2 d\nu}$  de la même formule (T). Si l'on n'a égard qu'aux quantités séculaires dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites, on aura, par l'analyse du numéro précédent,

$$\begin{aligned} \delta R = & \frac{m'}{8} (h^2 + l^2) \left( 2a \frac{\partial \Lambda^{(0)}}{\partial a} + a^2 \frac{\partial^2 \Lambda^{(0)}}{\partial a^2} \right) \\ & + \frac{m'}{8} (h'^2 + l'^2) \left( 2a' \frac{\partial \Lambda^{(0)}}{\partial a'} + a'^2 \frac{\partial^2 \Lambda^{(0)}}{\partial a'^2} \right) \\ & + \frac{m'}{4} (hh' + ll') \left( 4\Lambda^{(1)} + 2a \frac{\partial \Lambda^{(1)}}{\partial a} + 2a' \frac{\partial \Lambda^{(1)}}{\partial a'} + aa' \frac{\partial^2 \Lambda^{(1)}}{\partial a \partial a'} \right) \\ & + \frac{m'}{8} aa' B^{(1)} [(p' - p)^2 + (q' - q)^2], \end{aligned}$$

$p, p', q, q'$  exprimant les mêmes choses que dans le n° 51 du Livre II. De là il est facile de conclure, par les nos 55 et 59 du Livre II,

$$\begin{aligned} an \delta R = & -\frac{1}{2} (0, 1)(h^2 + l^2 + h'^2 + l'^2) + \boxed{0, 1}(hh' + ll') \\ & + \frac{1}{2} (0, 1)[(p' - p)^2 + (q' - q)^2], \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} an d \delta R = & dh[-(0, 1)h + \boxed{0, 1}h'] + dl[-(0, 1)l + \boxed{0, 1}l'] \\ & + (0, 1)dp(p - p') + (0, 1)dq(q - q'). \end{aligned}$$

Le second membre de cette équation devient nul, en vertu des équations



tions (A) et (C) des n<sup>os</sup> 55 et 59 du Livre II; on a donc

$$and \delta R = 0,$$

d'où l'on tire, en observant que  $n^2 a^3 = 1$ ,

$$\frac{3 dt \int dt d \delta R}{r^2 dv} = \frac{3 m' g dt}{n a^2 \sqrt{1 - e^2}},$$

$m'g$  étant une constante arbitraire ajoutée à l'intégrale  $\int d \delta R$ .

Il nous reste à considérer la fonction  $\frac{dt^2(2r\delta R' + R'\delta r)}{r^2 dv}$ , qui entre dans l'expression de  $d\delta v$ , donnée par la formule (T) du n<sup>o</sup> 46 du Livre II. En négligeant le carré de la force perturbatrice, cette fonction

se réduit à  $\frac{2\delta(rR') dt^2}{r^2 dv}$ , ou, par le numéro cité, à  $\frac{2a^2 \frac{\partial \delta R}{\partial a} n dt}{\sqrt{1 - e^2}}$ . Cette

quantité produit d'abord le terme  $\frac{m' n dt \cdot a^2 \frac{\partial A^{(0)}}{\partial a}}{\sqrt{1 - e^2}}$ , qui, ajouté à celui-ci  $\frac{3 m' g dt}{n a^2 \sqrt{1 - e^2}}$ , égal à  $\frac{3 m' a g n dt}{\sqrt{1 - e^2}}$  à cause de  $n^2 a^3 = 1$ , le détruit, parce que

$g = -\frac{1}{3} a \frac{\partial A^{(0)}}{\partial a}$ , par le n<sup>o</sup> 50 du Livre II. Reprenant ensuite l'expression précédente de  $\delta R$ , nous observerons que la fonction

$$\frac{m'}{8} a a' B^{(1)} [(p' - p)^2 + (q' - q)^2] + \dots$$

est égale à une constante indépendante du temps  $t$ , puisque sa différentielle est nulle en vertu des équations (C) du n<sup>o</sup> 59 du Livre II; et, si l'on ne considère que les deux planètes  $m$  et  $m'$ , comme nous le ferons dans ce qui va suivre,  $(p' - p)^2 + (q' - q)^2$  est, en vertu des mêmes équations, une quantité indépendante du temps; la fonction

précédente ne peut donc produire dans  $\frac{2 n dt \cdot a^2 \frac{\partial \delta R}{\partial a}}{\sqrt{1 - e^2}}$  qu'une quantité

pareillement indépendante du temps, et que l'on peut ainsi négliger, puisqu'elle peut être supposée se confondre avec la valeur de  $n dt$ . On aura donc, en faisant disparaître les différences partielles de  $A^{(0)}$  et



de  $\Lambda^{(1)}$  en  $a'$ , au moyen de leurs valeurs données dans le n° 49 du Livre II,

$$2n dt \cdot a^2 \frac{\partial \delta R}{\partial a} = \frac{m'n dt}{2} (h^2 + l^2 + h'^2 + l'^2) \left( a^2 \frac{\partial \Lambda^{(0)}}{\partial a} + 2a^3 \frac{\partial^2 \Lambda^{(0)}}{\partial a^2} + \frac{1}{2} a^4 \frac{\partial^3 \Lambda^{(0)}}{\partial a^3} \right) \\ - m'n dt (hh' + ll') \left( 2a^3 \frac{\partial^2 \Lambda^{(1)}}{\partial a^2} + \frac{1}{2} a^4 \frac{\partial^3 \Lambda^{(1)}}{\partial a^3} \right).$$

Si l'on rassemble ces différents termes, on aura

$$d\delta v = \frac{m'n dt}{8} (h^2 + l^2) \left( 2a^2 \frac{\partial \Lambda^{(0)}}{\partial a} + 7a^3 \frac{\partial^2 \Lambda^{(0)}}{\partial a^2} + 2a^4 \frac{\partial^3 \Lambda^{(0)}}{\partial a^3} \right) \\ + \frac{m'n dt}{4} (h'^2 + l'^2) \left( 2a^2 \frac{\partial \Lambda^{(0)}}{\partial a} + 4a^3 \frac{\partial^2 \Lambda^{(0)}}{\partial a^2} + a^4 \frac{\partial^3 \Lambda^{(0)}}{\partial a^3} \right) \\ - \frac{m'n dt}{8} (hh' + ll') \left( 2a \Lambda^{(1)} - 2a^2 \frac{\partial \Lambda^{(1)}}{\partial a} + 15a^3 \frac{\partial^2 \Lambda^{(1)}}{\partial a^2} + 4a^4 \frac{\partial^3 \Lambda^{(1)}}{\partial a^3} \right).$$

On pourra, dans cette expression, négliger les termes indépendants du temps  $t$ . Il est facile d'en conclure l'expression de  $d\delta v'$ , en changeant ce qui est relatif à  $m$  dans ce qui est relatif à  $m'$ , et réciproquement, et en observant que, quoique la valeur de  $\Lambda^{(1)}$  relative à l'action de  $m'$  sur  $m$  soit, par le n° 49 du Livre II, différente de sa valeur relative à l'action de  $m$  sur  $m'$ , cependant on peut, dans l'expression précédente, employer indifféremment l'une ou l'autre valeur. Mais on obtiendra plus facilement  $d\delta v'$  par la considération suivante. Si l'on ajoute la valeur de  $d\delta v$  multipliée par  $m\sqrt{a}$  à la valeur de  $d\delta v'$  multipliée par  $m'\sqrt{a'}$ , on aura, en substituant au lieu des différences partielles de  $\Lambda^{(0)}$  et de  $\Lambda^{(1)}$  en  $a'$  leurs différences partielles en  $a$ ,

$$m\sqrt{a} \cdot d\delta v + m'\sqrt{a'} \cdot d\delta v' = - \frac{3mm' dt}{4} (h^2 + l^2 + h'^2 + l'^2) \left( a \frac{\partial \Lambda^{(0)}}{\partial a} + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 \Lambda^{(0)}}{\partial a^2} \right) \\ - \frac{3mm' dt}{2} (hh' + ll') \left( \Lambda^{(1)} - a \frac{\partial \Lambda^{(1)}}{\partial a} - \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 \Lambda^{(1)}}{\partial a^2} \right).$$

Si l'on ne considère que deux planètes  $m$  et  $m'$ , la différentielle du second membre de cette équation est nulle en vertu des équations (A) du n° 55 du Livre II; on a donc, en ne considérant que les quantités pé-



riodiques séculaires,

$$0 = m\sqrt{a} \cdot d\delta v + m'\sqrt{a'} \cdot d\delta v',$$

ce qui donne immédiatement  $\delta v'$  lorsque l'on a déterminé  $\delta v$ .

La valeur de  $d\delta v$  est relative à l'angle compris entre les deux rayons vecteurs  $r$  et  $r + dr$ . Pour avoir sa valeur relative à un plan fixe, nous observerons que, par le n° 46 du Livre II, si l'on nomme  $d\nu$ , la projection de  $d\nu$  sur ce plan, on a, en négligeant la quatrième puissance de l'inclinaison de l'orbite,

$$d\nu = d\nu \left( 1 + \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2} \frac{ds^2}{d\nu^2} \right).$$

On a, par le n° 53 du Livre II,

$$s = q \sin(nt + \varepsilon) - p \cos(nt + \varepsilon) + \dots,$$

ce qui donne

$$ds = \left( nq - \frac{dp}{dt} \right) dt \cos(nt + \varepsilon) + \left( np + \frac{dq}{dt} \right) dt \sin(nt + \varepsilon) + \dots;$$

on aura donc, en négligeant les quantités périodiques dépendantes de  $nt$ , et en observant que  $d\nu = n dt$ , à très-peu près,

$$d\nu = d\nu + \frac{q dp - p dq}{2};$$

ainsi, pour avoir la valeur de  $d\delta v$ , il faut ajouter à la valeur précédente de  $d\delta v$  la quantité  $\frac{q dp - p dq}{2}$ .

Si l'on ne considère que deux planètes  $m$  et  $m'$ , on aura, par le n° 59 du Livre II,

$$(q dp - p dq) m \sqrt{a} + (q' dp' - p' dq') m' \sqrt{a'} = - \frac{mm' dt}{4} aa' B^{(1)} [(p' - p)^2 + (q' - q)^2],$$

et le second membre de cette équation est égal à  $dt$  multiplié par une constante; en n'ayant donc égard qu'aux quantités périodiques séculaires, on aura

$$0 = m\sqrt{a} \cdot d\delta v + m'\sqrt{a'} \cdot d\delta v',$$

$\delta v$ , et  $\delta v'$ , étant relatifs au plan fixe.



6. Considérons maintenant les inégalités du mouvement en latitude dépendantes des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites; reprenons la troisième des équations (P) du n° 46 du Livre II,

$$0 = \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Prenons pour plan fixe celui de l'orbite primitive de  $m$ , ce qui permet de supposer  $z$  nul dans  $\frac{\partial R}{\partial z}$ . On aura, par le n° 4, et observant que  $z' = r's'$ ,

$$\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{m's'}{r'^2} - \frac{m'r's'}{[r^2 - 2rr' \cos(\nu' - \nu) + r'^2]^{\frac{3}{2}}};$$

l'équation différentielle en  $z$  deviendra ainsi

$$0 = \frac{d^2 z}{dt^2} + n^2 z [1 + 3e \cos(nt + \varepsilon - \varpi)] + \frac{m'n^2 a^3 s'}{r'^2} - \frac{m'n^2 a^3 r's'}{[r^2 - 2rr' \cos(\nu' - \nu) + r'^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Représentons par

$$M \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + K] + N \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + L]$$

la partie de

$$\frac{m's'}{r'^2} - \frac{m'r's'}{[r^2 - 2rr' \cos(\nu' - \nu) + r'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

dépendante des angles  $i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt$  et  $i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$ , et supposons qu'en n'ayant égard qu'aux inégalités de  $z$  dépendantes de la simple inclinaison des orbites, la partie de  $z$  relative à l'angle  $i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt$  soit

$$\gamma a F \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \Pi];$$

on aura, en ne conservant que les termes dépendants des produits des excentricités et des inclinaisons,

$$0 = \frac{d^2 z}{dt^2} + n^2 z + \frac{3}{2} n^2 e \gamma a F \left\{ \begin{array}{l} \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - \varpi - \Pi] \\ + \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + \varpi - \Pi] \end{array} \right\} \\ + n^2 a^3 M \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + K] \\ + n^2 a^3 N \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + L],$$



d'où l'on tire, en intégrant,

$$z = \frac{\frac{3}{2}n^2 e \gamma a F \sin [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - \varpi - \Pi] + n^2 a^3 M \sin [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + K]}{[in' - (i-1)n][in' - (i-3)n]} + \frac{\frac{3}{2}n^2 e \gamma a F \sin [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + \varpi - \Pi] + n^2 a^3 N \sin [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + L]}{[in' - (i+1)n][in' - (i-1)n]}.$$

On aura la latitude  $s$ , en observant que

$$s = \frac{z}{r} = \frac{z}{a} [1 + e \cos(nt + \varepsilon - \varpi)];$$

on aura donc  $s$ , en divisant l'expression précédente de  $z$  par  $a$ , et en lui ajoutant la quantité

$$\frac{1}{2}e\gamma F \sin [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - \varpi - \Pi] + \frac{1}{2}e\gamma F \sin [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + \varpi - \Pi].$$

Il ne s'agit plus que de déterminer  $M$  et  $N$ , ce qui sera facile, en suivant l'analyse du n° 4. Mais nous nous dispenserons de suivre ce calcul, parce que les inégalités de cet ordre en latitude sont insensibles, excepté relativement à Jupiter et à Saturne, à cause de la commensurabilité très-approchée de leurs moyens mouvements, et nous donnerons dans le n° 10 un moyen très-simple de déterminer ces dernières inégalités.

Si l'on rapporte le mouvement de  $m$  sur un plan fixe très-peu incliné à celui de son orbite primitive, en nommant  $\varphi$  l'inclinaison de cette orbite sur ce plan et  $\theta$  la longitude de son nœud ascendant, la réduction du mouvement sur l'orbite à ce plan sera, par le n° 22 du Livre II,

$$- \frac{1}{4} \tan^2 \varphi \sin(2v, - 2\theta) - \tan \varphi \cdot \delta s \cos(v, - \theta),$$

$v$ , étant le mouvement  $v$  rapporté au plan fixe. Ainsi le mouvement en latitude introduit dans le mouvement en longitude sur l'écliptique des inégalités dépendantes des carrés et des puissances supérieures des excentricités et des inclinaisons des orbites. Mais ces inégalités sont insensibles, excepté pour Jupiter et Saturne.



En ne considérant que les quantités séculaires, et observant que

$$\operatorname{tang} \varphi \sin \theta = p, \quad \operatorname{tang} \varphi \cos \theta = q,$$

on aura

$$\partial s = t \frac{dq}{dt} \sin(nt + \varepsilon) - t \frac{dp}{dt} \cos(nt + \varepsilon).$$

Le terme  $-\operatorname{tang} \varphi \cdot \delta s \cos(\nu, -\theta)$  donnera ainsi le suivant  $\frac{t(q \frac{dp}{dt} - p \frac{dq}{dt})}{2}$ , en sorte que l'on aura

$$\nu, = \nu + t \frac{q \frac{dp}{dt} - p \frac{dq}{dt}}{2},$$

ce qui est conforme à ce que nous avons trouvé dans le numéro précédent.

*Des inégalités dépendantes des cubes et des produits de trois dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites, et de leurs puissances supérieures.*

7. Les inégalités dépendantes des cubes et des produits de trois dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites sont susceptibles de ces deux formes

$$M \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + K],$$

$$N \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + L].$$

On peut les déterminer par l'analyse dont nous avons fait usage dans les numéros précédents; mais, comme elles ne deviennent très-sensibles qu'autant qu'elles croissent avec une extrême lenteur, cette considération simplifie leur calcul. Reprenons la formule (Y) du n° 46 du Livre II : on peut y négliger le terme  $\frac{2d(r \partial r)}{a^2 n dt}$ , qui est alors insensible, à cause de la petitesse du coefficient de  $t$  dans les inégalités dont il s'agit. Cette formule devient ainsi

$$\partial v = - \frac{dr \partial r}{a^2 n dt} + 3a f f n dt dR + 2 \int n dt \cdot a^2 \frac{\partial R}{\partial a},$$



le diviseur  $\sqrt{1 - e^2}$  de cette formule devant être supprimé pour plus d'exactitude, par le n° 54 du Livre II. Il faut de plus, par ce même numéro, appliquer, dans la partie elliptique du mouvement de  $m$ , ces inégalités au moyen mouvement de cette planète. Cela posé, si l'on suppose

$$R = m' P \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + 3\varepsilon] \\ + m' P' \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + 3\varepsilon],$$

ce qui comprend tous les termes de  $R$  dans lesquels le coefficient de  $nt$  surpasse ou est surpassé de trois unités par celui de  $n't$ , on aura, par le n° 65 du Livre II,

$$3a \int \int n dt dR = \frac{3(3-i)m'n^2 a}{[i(n'-n) + 3n]^2} \\ \times \left\{ \begin{aligned} & \left[ P' + \frac{2dP}{[i(n'-n) + 3n]dt} - \frac{3d^2P'}{[i(n'-n) + 3n]^2 dt^2} \right] \sin [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + 3\varepsilon] \\ & - \left[ P - \frac{2dP'}{[i(n'-n) + 3n]dt} - \frac{3d^2P}{[i(n'-n) + 3n]^2 dt^2} \right] \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + 3\varepsilon] \end{aligned} \right\}.$$

On aura ensuite

$$2 \int n dt . a^2 \frac{\partial R}{\partial a} = - \frac{2m'n}{i(n'-n) + 3n} \left\{ \begin{aligned} & a^2 \frac{\partial P}{\partial a} \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + 3\varepsilon] \\ & - a^2 \frac{\partial P'}{\partial a} \sin [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + 3\varepsilon] \end{aligned} \right\}.$$

Supposons enfin qu'en n'ayant égard qu'à l'angle

$$i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon,$$

on ait

$$\frac{r \delta r}{a^2} = H \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon + \Lambda],$$

$H$  étant déterminé par ce qui précède, et étant affecté du très-petit diviseur  $i(n' - n) + 3n$ ; le terme  $-\frac{dr \delta r}{a^2 n dt}$  donnera celui-ci

$$-\frac{eH}{2} \sin [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + 3\varepsilon - \varpi + \Lambda].$$

On aura ainsi, en ne considérant que les termes qui ont  $i(n' - n) + 3n$



pour diviseur,

$$\begin{aligned} \delta v = & \frac{3(3-i)m'n^2}{[i(n'-n)+3n]^2} \left\{ \left[ aP' + \frac{2adP}{[i(n'-n)+3n]dt} - \frac{3ad^2P'}{[i(n'-n)+3n]^2 dt^2} \right] \sin [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + 3\varepsilon] \right. \\ & \left. - \left[ aP - \frac{2adP'}{[i(n'-n)+3n]dt} - \frac{3ad^2P}{[i(n'-n)+3n]^2 dt^2} \right] \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + 3\varepsilon] \right\} \\ & - \frac{2m'n}{i(n'-n)+3n} \left[ a^2 \frac{\partial P}{\partial a} \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + 3\varepsilon] - a^2 \frac{\partial P'}{\partial a} \sin [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + 3\varepsilon] \right] \\ & - \frac{eH}{2} \sin [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + 3\varepsilon - \varpi + \Lambda]. \end{aligned}$$

L'équation différentielle

$$0 = \frac{d^2(r\delta r)}{dt^2} + \frac{\mu \cdot r\delta r}{r^3} + 2 \int dR + r \frac{\partial R}{\partial r}$$

donne, en ne considérant que les termes qui ont  $i(n'-n) + 3n$  pour diviseur,

$$\begin{aligned} \frac{r\delta r}{a^2} = & \frac{2(i-3)m'n}{i(n'-n)+3n} \left\{ aP \sin [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + 3\varepsilon] \right. \\ & \left. + aP' \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + 3\varepsilon] \right\} \\ & - \frac{3}{2} eH \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + 3\varepsilon - \varpi + \Lambda] \\ & + \frac{1}{2} eH \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon + \varpi + \Lambda]. \end{aligned}$$

En réunissant cette équation à celle-ci

$$\frac{r\delta r}{a^2} = H \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon + \Lambda],$$

on en tirera

$$\begin{aligned} \frac{\delta r}{a} = & H \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon + \Lambda] \\ & - eH \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + 3\varepsilon - \varpi + \Lambda] \\ & + eH \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon + \varpi + \Lambda] \\ & + \frac{2(i-3)m'n}{i(n'-n)+3n} \left\{ aP \sin [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + 3\varepsilon] \right. \\ & \left. + aP' \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + 3\varepsilon] \right\}. \end{aligned}$$

Cette valeur de  $\frac{\delta r}{a}$  introduit dans  $\delta v$  une inégalité dépendante de l'angle  $i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon$ , et qui a pour diviseur  $i(n'-n) + 3n$ .



Pour la déterminer, nous reprendrons l'expression de  $\delta v$  donnée par la formule (Y) du n° 46 du Livre II. La partie  $\frac{2r d\delta r + dr \delta r}{a^2 n dt}$  de cette expression produit dans  $\delta v$  le terme

$$\frac{2}{3} e H \sin [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon + \varpi + \Lambda].$$

C'est le seul de ce genre qui ait  $i(n' - n) + 3n$  pour diviseur. L'inégalité de  $\delta v$  dépendante de l'angle  $i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon$  est à très-peu près, par le n° 1, en n'ayant égard qu'aux termes qui ont  $i(n' - n) + 3n$  pour diviseur,

$$2 H \sin [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon + \Lambda].$$

En désignant donc cette inégalité par

$$K \sin [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon + B],$$

on a dans  $\delta v$  l'inégalité

$$\frac{2}{3} e K \sin [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon + \varpi + B].$$

8. C'est principalement dans la théorie de Jupiter et de Saturne que ces diverses inégalités sont sensibles. En supposant  $i = 5$ , la fonction  $i(n' - n) + 3n$  devient  $5n' - 2n$ , et cette dernière quantité est très-petite, en vertu du rapport qui existe entre les moyens mouvements de ces deux planètes, ce qui donne aux inégalités correspondantes de  $\delta r$  et de  $\delta v$  de grandes valeurs. Pour les déterminer, reprenons l'expression de R donnée dans le n° 4. La partie

$$\frac{m' r}{r'^2} \cos(\nu' - \nu) - \frac{m'}{4} \gamma^2 \frac{r}{r'^2} [\cos(\nu' - \nu) - \cos(\nu' + \nu)] + \frac{\frac{m'}{4} \gamma^2 r r' \cos(\nu' - \nu)}{[r^2 - 2 r r' \cos(\nu' - \nu) + r'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

ne produit aucun terme de l'ordre des cubes des excentricités, et dépendant de l'angle  $5n't - 2nt$ ; il ne peut donc en résulter que de la partie

$$\frac{m'}{\sqrt{r^2 - 2 r r' \cos(\nu' - \nu) + r'^2}} - \frac{\frac{m'}{4} \gamma^2 r r' \cos(\nu' + \nu)}{[r^2 - 2 r r' \cos(\nu' - \nu) + r'^2]^{\frac{3}{2}}}$$



et alors les valeurs de P et de P' sont les mêmes, lorsque l'on considère l'action de  $m'$  sur  $m$  et celle de  $m$  sur  $m'$ . Déterminons ces valeurs.

On a, par le n° 22 du Livre II, en ne portant la précision que jusqu'aux troisièmes puissances des excentricités inclusivement,

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2}e^2 - (e - \frac{3}{8}e^3) \cos(nt + \varepsilon - \varpi) - \frac{1}{2}e^2 \cos(2nt + 2\varepsilon - 2\varpi) - \frac{3}{8}e^3 \cos(3nt + 3\varepsilon - 3\varpi),$$

$$v = nt + \varepsilon + (2e - \frac{1}{4}e^3) \sin(nt + \varepsilon - \varpi) + \frac{5}{4}e^2 \sin(2nt + 2\varepsilon - 2\varpi) + \frac{13}{12}e^3 \sin(3nt + 3\varepsilon - 3\varpi).$$

Cela posé, si l'on développe R suivant les termes dépendants de l'angle  $5n't - 2nt$ , on aura une expression de cette forme

$$\begin{aligned} R = & \mathbf{M}^{(0)} e'^3 \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 3\varpi') \\ & + \mathbf{M}^{(1)} e'^2 e \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 2\varpi' - \varpi) \\ & + \mathbf{M}^{(2)} e' e^2 \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi' - 2\varpi) \\ & + \mathbf{M}^{(3)} e^3 \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 3\varpi) \\ & + \mathbf{M}^{(4)} e' \gamma^2 \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi' - 2\Pi) \\ & + \mathbf{M}^{(5)} e \gamma^2 \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi' - 2\Pi), \end{aligned}$$

et l'on trouvera, après toutes les réductions,

$$a' \mathbf{M}^{(0)} = - \frac{m'}{48} \left( 389 b_{\frac{1}{2}}^{(2)} + 201 \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} + 27 \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} + \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3} \right),$$

$$a' \mathbf{M}^{(1)} = \frac{m'}{16} \left( 402 b_{\frac{1}{2}}^{(3)} + 193 \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} + 26 \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} + \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3} \right),$$

$$a' \mathbf{M}^{(2)} = - \frac{m'}{16} \left( 396 b_{\frac{1}{2}}^{(4)} + 184 \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha} + 25 \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2} + \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^3} \right),$$

$$a' \mathbf{M}^{(3)} = \frac{m'}{48} \left( 380 b_{\frac{1}{2}}^{(5)} + 174 \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha} + 24 \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^2} + \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^3} \right),$$

$$a' \mathbf{M}^{(4)} = - \frac{m' \alpha}{16} \left( 10 b_{\frac{3}{2}}^{(3)} + \alpha \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha} \right),$$

$$a' \mathbf{M}^{(5)} = \frac{m' \alpha}{16} \left( 7 b_{\frac{3}{2}}^{(4)} + \alpha \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha} \right).$$



De là on tire

$$\begin{aligned} m'a'P &= a'M^{(0)}e'^3 \sin 3\varpi' + a'M^{(1)}e'^2e \sin(2\varpi' + \varpi) \\ &+ a'M^{(2)}e'e^2 \sin(\varpi' + 2\varpi) + a'M^{(3)}e^3 \sin 3\varpi \\ &+ a'M^{(4)}e'\gamma^2 \sin(2\Pi + \varpi') + a'M^{(5)}e\gamma^2 \sin(2\Pi + \varpi). \end{aligned}$$

On aura  $m'a'P'$ , en changeant dans cette expression de  $m'a'P$  les sinus en cosinus, et il sera facile de conclure les valeurs de  $aP$  et de  $aP'$ , en multipliant celles de  $a'P$  et de  $a'P'$  par  $\frac{a}{a'}$  ou par  $\alpha$ . On aura ensuite, en faisant  $i = 5$  dans les expressions de  $\delta v$  et de  $\frac{\delta r}{a}$  du numéro précédent,

$$\begin{aligned} \delta v &= -\frac{6m'n^2}{(5n'-2n)^2} \left\{ \left( aP' + \frac{2adP}{(5n'-2n)dt} - \frac{3ad^2P'}{(5n'-2n)^2 dt^2} \right) \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right. \\ &\quad \left. - \left( aP - \frac{2adP'}{(5n'-2n)dt} - \frac{3ad^2P}{(5n'-2n)^2 dt^2} \right) \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right\} \\ &\quad - \frac{2m'n}{5n'-2n} \left[ a^2 \frac{\partial P}{\partial a} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) - a^2 \frac{\partial P'}{\partial a} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right] \\ &\quad - \frac{eH}{2} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi + A) \\ &\quad + \frac{5}{4}eK \sin(5n't - 4nt + 5\varepsilon' - 4\varepsilon + \varpi + B), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta r}{a} &= H \cos(5n't - 3nt + 5\varepsilon' - 3\varepsilon + A) - eH \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi + A) \\ &\quad + eH \cos(5n't - 4nt + 5\varepsilon' - 4\varepsilon + \varpi + A) \\ &\quad + \frac{4m'n}{5n'-2n} [aP \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) + aP' \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon)]. \end{aligned}$$

En supposant  $i = -2$ , et changeant ce qui est relatif à  $m$  dans ce qui est relatif à  $m'$ , et réciproquement, on aura

$$\begin{aligned} \delta v' &= \frac{15mn'^2}{(5n'-2n)^2} \left\{ \left( a'P' + \frac{2a'dP}{(5n'-2n)dt} - \frac{3a'd^2P'}{(5n'-2n)^2 dt^2} \right) \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right. \\ &\quad \left. - \left( a'P - \frac{2a'dP'}{(5n'-2n)dt} - \frac{3a'd^2P}{(5n'-2n)^2 dt^2} \right) \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right\} \\ &\quad - \frac{2mn'}{5n'-2n} \left[ a'^2 \frac{\partial P}{\partial a'} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) - a'^2 \frac{\partial P'}{\partial a'} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right] \\ &\quad - \frac{e'H'}{2} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi' + A') \\ &\quad + \frac{5}{4}e'K' \sin(3n't - 2nt + 3\varepsilon' - 2\varepsilon + \varpi' + B'), \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{\delta r'}{a'} = & H' \cos(4n't - 2nt + 4\varepsilon' - 2\varepsilon + A') - e' H' \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi' + A') \\ & + e' H' \cos(3n't - 2nt + 3\varepsilon' - 2\varepsilon + \varpi' + A') \\ & - \frac{10mn'}{5n' - 2n} [a' P \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) + a' P' \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon)], \end{aligned}$$

$H' \cos(4n't - 2nt + 4\varepsilon' - 2\varepsilon + A')$  étant la partie de  $\frac{r' \delta r'}{a'^2}$  dépendante de l'angle  $4n't - 2nt$ , et  $K' \sin(4n't - 2nt + 4\varepsilon' - 2\varepsilon + B')$  étant la partie de  $\delta \varphi'$  relative au même angle. Dans ces diverses inégalités, nous rapportons, pour plus de simplicité, l'origine des angles à l'intersection commune des deux orbites de Jupiter et de Saturne, comme nous l'avons fait dans le développement de l'expression de R du n° 4, et comme nous le ferons dans le numéro suivant. Nous ne conserverons ainsi que pour l'analogie l'angle  $\Pi$ , qu'il faut alors supposer nul.

On déterminera de la manière suivante les différences  $\frac{dP}{dt}$ ,  $\frac{d^2P}{dt^2}$ ,  $\frac{dP'}{dt}$ ,  $\frac{d^2P'}{dt^2}$ . On calculera, pour l'époque de 1750 et pour une époque plus éloignée de deux cents années juliennes, c'est-à-dire pour 1950, les valeurs de  $\frac{de}{dt}$ ,  $\frac{d\varpi}{dt}$ ,  $\frac{de'}{dt}$ ,  $\frac{d\varpi'}{dt}$ ,  $\frac{d\gamma}{dt}$ ,  $\frac{d\Pi}{dt}$ . Soient  $\frac{de_t}{dt}$ ,  $\frac{d\varpi_t}{dt}$ ,  $\frac{de'_t}{dt}$ , ... ces valeurs pour la seconde de ces époques; on aura, en supposant que  $t$  exprime un nombre d'années juliennes,

$$\frac{de_t}{dt} = \frac{de}{dt} + 200 \frac{d^2e}{dt^2},$$

les différences  $de$  et  $d^2e$  dans le second membre de cette équation étant relatives à 1750. L'expression de  $e$  pour un temps quelconque  $t$  est, en négligeant le cube de  $t$  et ses puissances supérieures,

$$e + t \frac{de}{dt} + \frac{t^2}{2} \frac{d^2e}{dt^2},$$

$e$ ,  $\frac{de}{dt}$ ,  $\frac{d^2e}{dt^2}$  se rapportant à l'époque de 1750. Cette expression peut s'étendre à mille ou douze cents ans avant et après cette époque. On



aura de la même manière les expressions de  $\varpi$ ,  $e'$ ,  $\varpi'$ ,  $\gamma$  et  $\Pi$ . On calculera par leur moyen les valeurs de  $P$  correspondantes aux trois époques de 1750, 2250 et 2750. Soient  $P$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  ces valeurs; l'expression générale de  $P$  étant

$$P + t \frac{dP}{dt} + \frac{t^2}{2} \frac{d^2P}{dt^2},$$

on aura, en faisant successivement  $t = 500$ ,  $t = 1000$ ,

$$P + 500 \frac{dP}{dt} + 250000 \cdot \frac{1}{2} \frac{d^2P}{dt^2} = P_1,$$

$$P + 1000 \frac{dP}{dt} + 1000000 \cdot \frac{1}{2} \frac{d^2P}{dt^2} = P_2,$$

ce qui donne

$$\frac{dP}{dt} = \frac{4P_1 - 3P - P_2}{1000}, \quad \frac{d^2P}{dt^2} = \frac{P_2 - 2P_1 + P}{250000}.$$

9. Les termes dépendants des cinquièmes puissances des excentricités peuvent avoir une influence sensible sur les deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne; mais le calcul en est pénible par son excessive longueur. Son importance a déterminé Burckhardt, très-habile astronome, à l'entreprendre. Il a discuté avec une scrupuleuse attention tous les termes de cet ordre qui dépendent de l'angle  $5n't - 2nt$ , en se permettant seulement de négliger les produits des excentricités par la quatrième puissance de l'inclinaison mutuelle des orbites, ce qui ne peut, en effet, produire que des quantités insensibles. L'expression de  $R$  du n° 4 est relative à l'action de  $m'$  sur  $m$ : la partie de cette expression qui a le plus d'influence sur cette inégalité est le produit de  $m'$  par le facteur

$$-\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos(\nu' - \nu) + r'^2}} + \frac{\frac{\gamma^2}{4} rr' [\cos(\nu' - \nu) - \cos(\nu' + \nu)]}{[r^2 - 2rr' \cos(\nu' - \nu) + r'^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Ce facteur est le même pour les deux planètes; en le développant et en ne considérant que les produits des excentricités et des inclinaisons,



relatifs à l'angle  $5n't - 2nt$ , on a une fonction de cette forme

$$(0) \quad \left\{ \begin{array}{l} N^{(0)} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 4\varpi' + \varpi) \\ + N^{(1)} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 3\varpi') \\ + N^{(2)} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 2\varpi' - \varpi) \\ + N^{(3)} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi' - 2\varpi) \\ + N^{(4)} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 3\varpi) \\ + N^{(5)} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon + \varpi' - 4\varpi) \\ + N^{(6)} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 2\varpi' + \varpi - 2\Pi) \\ + N^{(7)} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi' - 2\Pi) \\ + N^{(8)} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi - 2\Pi) \\ + N^{(9)} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon + \varpi' - 2\varpi - 2\Pi), \end{array} \right.$$

et l'on trouve (\*)

$$a'N^{(0)} = \frac{e'^4 e}{768} \left\{ \begin{array}{l} 3138 b_{\frac{1}{2}}^{(1)} - 13\alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} - 1556\alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} - 438\alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^3} \\ - 38\alpha^4 \frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^4} - \alpha^5 \frac{d^5 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^5} \end{array} \right\},$$

(\*) Les valeurs de  $a'N^{(0)}$ ,  $a'N^{(1)}$ , ...,  $a'N^{(9)}$  données dans le texte sont inexactes. D'abord, ainsi que l'Auteur en a averti dans le Supplément au tome III, elles doivent toutes être prises avec des signes contraires, aussi bien que les nombres  $-\frac{3125ze'^4e}{768}$  et  $-\frac{500e'^4e}{768\alpha^2}$  de la page 31. Mais il y a plus : même après ce changement, les expressions de  $a'N^{(7)}$  et de  $a'N^{(8)}$  sont encore fautives ; les valeurs exactes de ces quantités sont en effet

$$a'N^{(7)} = \frac{e'\gamma^2}{128} \left\{ \begin{array}{l} (280e^2 + 810e'^2)\alpha b_{\frac{3}{2}}^{(3)} - (60e^2 - 23e'^2)\alpha^2 \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha} \\ - (32e^2 + 18e'^2)\alpha^3 \frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} - (2e^2 + e'^2)\alpha^4 \frac{d^3 b_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3} \end{array} \right\},$$

$$a'N^{(8)} = \frac{e'\gamma^2}{128} \left\{ \begin{array}{l} -(150e^2 + 1372e'^2)\alpha b_{\frac{3}{2}}^{(4)} - (2e^2 + 132e'^2)\alpha^2 \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha} \\ + (11e^2 + 26e'^2)\alpha^3 \frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2} + (e^2 + 2e'^2)\alpha^4 \frac{d^3 b_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha^3} \end{array} \right\}.$$

V. P.



$$a'N^{(1)} = \frac{e'^3}{768} \left\{ \begin{aligned} & - (20267e'^2 + 24896e^2) b_{\frac{1}{2}}^{(2)} - (7223e'^2 + 8144e^2) \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx} \\ & + (1094e'^2 + 3692e^2) \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^2} + (482e'^2 + 1436e^2) \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^3} \\ & + (41e'^2 + 140e^2) \alpha^4 \frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^4} + (e'^2 + 4e^2) \alpha^5 \frac{d^5 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^5} \end{aligned} \right\}$$

$$- \frac{e'^3 \gamma^2}{384} \left\{ \begin{aligned} & 590 \alpha \left( b_{\frac{3}{2}}^{(1)} + b_{\frac{3}{2}}^{(3)} \right) + 255 \alpha^2 \left( \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(1)}}{dx} + \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{dx} \right) \\ & + 30 \alpha^3 \left( \frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(1)}}{dx^2} + \frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{dx^2} \right) + \alpha^4 \left( \frac{d^3 b_{\frac{3}{2}}^{(1)}}{dx^3} + \frac{d^3 b_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{dx^3} \right) \end{aligned} \right\},$$

$$a'N^{(2)} = - \frac{e'^2 e}{768} \left\{ \begin{aligned} & - (109392e'^2 + 53064e^2) b_{\frac{1}{2}}^{(3)} - (42368e'^2 + 23436e^2) \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx} \\ & + (1064e'^2 + 2088e^2) \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx^2} + (1572e'^2 + 1710e^2) \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx^3} \\ & + (152e'^2 + 192e^2) \alpha^4 \frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx^4} + (4e'^2 + 6e^2) \alpha^5 \frac{d^5 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx^5} \end{aligned} \right\}$$

$$+ \frac{e'^2 e \gamma^2}{128} \left\{ \begin{aligned} & 595 \alpha \left( b_{\frac{3}{2}}^{(2)} + b_{\frac{3}{2}}^{(4)} \right) + 245 \alpha^2 \left( \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{dx} + \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{dx} \right) \\ & + 29 \alpha^3 \left( \frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{dx^2} + \frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{dx^2} \right) + \alpha^4 \left( \frac{d^3 b_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{dx^3} + \frac{d^3 b_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{dx^3} \right) \end{aligned} \right\},$$

$$a'N^{(3)} = \frac{e' e^2}{768} \left\{ \begin{aligned} & - (42912e^2 + 199848e'^2) b_{\frac{1}{2}}^{(4)} - (21728e^2 + 82032e'^2) \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx} \\ & - (640e^2 + 2970e'^2) \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx^2} + (864e^2 + 1854e'^2) \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx^3} \\ & + (116e^2 + 210e'^2) \alpha^4 \frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx^4} + (4e^2 + 6e'^2) \alpha^5 \frac{d^5 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx^5} \end{aligned} \right\}$$

$$- \frac{e' e^2 \gamma^2}{128} \left\{ \begin{aligned} & 580 \alpha \left( b_{\frac{3}{2}}^{(3)} + b_{\frac{3}{2}}^{(5)} \right) + 234 \alpha^2 \left( \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{dx} + \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(5)}}{dx} \right) \\ & + 28 \alpha^3 \left( \frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{dx^2} + \frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(5)}}{dx^2} \right) + \alpha^4 \left( \frac{d^3 b_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{dx^3} + \frac{d^3 b_{\frac{3}{2}}^{(5)}}{dx^3} \right) \end{aligned} \right\},$$



$$\begin{aligned}
a' N^{(4)} &= -\frac{e^3}{768} \left\{ \begin{aligned} &-(11840e^2 + 152000e'2) b_{\frac{1}{2}}^{(5)} - (6560e^2 + 65168e'2) \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha} \\ &-(592e^2 + 4720e'2) \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^2} + (152e^2 + 920e'2) \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^3} \\ &+(26e^2 + 128e'2) \alpha^4 \frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^4} + (e^2 + 4e'2) \alpha^5 \frac{d^5 b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^5} \end{aligned} \right\} \\
&+ \frac{e^3 \gamma^2}{384} \left\{ \begin{aligned} &554\alpha \left( b_{\frac{3}{2}}^{(4)} + b_{\frac{3}{2}}^{(6)} \right) + 222\alpha^2 \left( \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha} + \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(6)}}{d\alpha} \right) \\ &+ 27\alpha^3 \left( \frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2} + \frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(6)}}{d\alpha^2} \right) + \alpha^4 \left( \frac{d^3 b_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha^3} + \frac{d^3 b_{\frac{3}{2}}^{(6)}}{d\alpha^3} \right) \end{aligned} \right\}, \\
a' N^{(5)} &= -\frac{e'e^4}{768} \left\{ \begin{aligned} &41448b_{\frac{1}{2}}^{(6)} + 18392\alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha} + 1780\alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha^2} \\ &- 156\alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha^3} - 29\alpha^4 \frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha^4} - \alpha^5 \frac{d^5 b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha^5} \end{aligned} \right\}, \\
a' N^{(6)} &= -\frac{e'2e\gamma^2}{128} \left\{ \begin{aligned} &-85\alpha b_{\frac{3}{2}}^{(2)} + 85\alpha^2 \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{d\alpha} + 21\alpha^3 \frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} + \alpha^4 \frac{d^3 b_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3} \end{aligned} \right\}, \\
a' N^{(7)} &= -\frac{e'\gamma^2}{128} \left\{ \begin{aligned} &(56e^2 + 842e'2) \alpha b_{\frac{3}{2}}^{(3)} + (4e^2 + 87e'2) \alpha^2 \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha} \\ &-(16e^2 + 2e'2) \alpha^3 \frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} - (2e^2 + e'2) \alpha^4 \frac{d^3 b_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3} \end{aligned} \right\}, \\
a' N^{(8)} &= -\frac{e\gamma^2}{128} \left\{ \begin{aligned} &-(174e^2 + 196e'2) \alpha b_{\frac{3}{2}}^{(4)} - (50e^2 + 180e'2) \alpha^2 \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha} \\ &+(14e'2 - e^2) \alpha^3 \frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2} + (2e'2 + e^2) \alpha^4 \frac{d^3 b_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha^3} \end{aligned} \right\}, \\
a' N^{(9)} &= -\frac{e'e^2\gamma^2}{128} \left\{ \begin{aligned} &580\alpha b_{\frac{3}{2}}^{(5)} + 86\alpha^2 \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(5)}}{d\alpha} - 8\alpha^3 \frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(5)}}{d\alpha^2} - \alpha^4 \frac{d^3 b_{\frac{3}{2}}^{(5)}}{d\alpha^3} \end{aligned} \right\}.
\end{aligned}$$

Lorsque l'on considère l'action de  $m'$  sur  $m$ , il faut, par le n° 4, augmenter, dans  $a' N^{(0)}$ ,  $b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$  de  $-\frac{a}{a'}$  ou de  $-\alpha$ , ce qui augmente  $a' N^{(0)}$  de



$-\frac{3125\alpha e'^4 e}{768}$ . Lorsque l'on considère l'action de  $m$  sur  $m'$ , il faut augmenter  $b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$  de  $-\frac{1}{\alpha^2}$ , ce qui augmente  $a'N^{(0)}$  de  $-\frac{500e'^4 e}{768\alpha^2}$ . Cela posé, on multipliera les valeurs précédentes de  $a'N^{(0)}$ ,  $a'N^{(1)}$ , ... par  $m'$ , et l'on décomposera chacun des cosinus qu'elles multiplient dans la fonction (0) en sinus et cosinus de  $5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon$ , ce qui donne à cette fonction la forme suivante

$$m'a'P \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \\ + m'a'P' \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon).$$

On multipliera pareillement par  $m$  les valeurs de  $a'N^{(0)}$ ,  $a'N^{(1)}$ , ..., relatives à l'action de  $m$  sur  $m'$ , et l'on décomposera les cosinus de la fonction (0) en sinus et cosinus de  $5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon$ , ce qui lui donnera la forme suivante

$$ma'P_p \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \\ + ma'P'_p \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon).$$

On substituera donc successivement ces valeurs dans les expressions de  $\delta\varphi$  et de  $\delta\varphi'$  du numéro précédent, et l'on pourra négliger leurs différences secondes, à cause de la petitesse de ces quantités. On aura ainsi les parties des inégalités de Jupiter et de Saturne relatives à l'angle  $5n't - 2nt$  et dépendantes des cinquièmes puissances des excentricités et des inclinaisons des orbites.

On peut observer ici qu'en vertu du rapport qui existe entre les moyens mouvements de Jupiter et de Saturne, on a  $3125\alpha^3 = 500$ . En effet,  $\alpha^3 = \frac{n'^2}{n^2}$ , et, de plus,  $5n'$  est à fort peu près égal à  $2n$ , ce qui donne  $\frac{n'^2}{n^2} = \frac{4}{25}$ . De là il suit que la valeur de  $a'N^{(0)}$  est la même, soit que l'on considère l'action de  $m'$  sur  $m$ , soit que l'on considère l'action de  $m$  sur  $m'$ . Ainsi, l'on peut conclure la partie précédente de  $\delta\varphi'$  de la partie correspondante de  $\delta\varphi$ , en multipliant celle-ci par  $-\frac{5mn'^2}{2m'n^2} \frac{a'}{a}$ .

10. Dans la théorie de Mercure troublé par la Terre, il faut considérer l'inégalité dépendante de l'angle  $nt - 4n't$ , parce que le moyen



mouvement de Mercure est à très-peu près quadruple de celui de la Terre. En supposant que  $m$  soit Mercure et  $m'$  la Terre, on aura l'inégalité dont il s'agit, en faisant  $i = 4$  dans l'expression de  $\delta v$  du n° 7. Vu l'extrême petitesse de cette inégalité, on peut négliger les termes qui n'ont point  $(n - 4n')^2$  pour diviseur, et ceux qui dépendent de  $\frac{dP}{dt}$  et  $\frac{dP'}{dt}$ . On aura ainsi

$$\delta v = \frac{3m'n^2}{(n - 4n')^2} [aP' \sin(nt - 4n't + \varepsilon - 4\varepsilon') + aP \cos(nt - 4n't + \varepsilon - 4\varepsilon')].$$

On déterminera facilement  $P$  et  $P'$  de cette manière. On calculera, par la formule (A) du n° 1, la valeur de  $\frac{r\delta r}{a^2}$  correspondante à l'angle  $4n't - 2nt$ , ce qui revient à faire  $i = 4$  dans cette formule. On aura ainsi une valeur de  $\frac{r\delta r}{a^2}$  de cette forme

$$\begin{aligned} & L e^2 \cos(4n't - 2nt + 4\varepsilon' - 2\varepsilon - 2\varpi) \\ & + L^{(1)} e e' \cos(4n't - 2nt + 4\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi - \varpi') \\ & + L^{(2)} e'^2 \cos(4n't - 2nt + 4\varepsilon' - 2\varepsilon - 2\varpi') \\ & + L^{(3)} \gamma^2 \cos(4n't - 2nt + 4\varepsilon' - 2\varepsilon - 2\Pi). \end{aligned}$$

On observera ensuite que cette valeur de  $\frac{r\delta r}{a^2}$  résulte des variations de l'excentricité et du périhélie dépendantes de  $nt - 4n't$  dans l'expression elliptique de  $\frac{1}{2} \frac{r^2}{a^2}$  : cette expression contient le terme  $-e \cos(nt + \varepsilon - \varpi)$ , dont la variation est

$$- \delta e \cdot \cos(nt + \varepsilon - \varpi) - e \delta \varpi \cdot \sin(nt + \varepsilon - \varpi),$$

$\delta e$  et  $\delta \varpi$  étant les variations de  $e$  et de  $\varpi$  dépendantes de  $nt - 4n't$ .  
On a, par le n° 69 du Livre II,

$$\begin{aligned} \delta e &= \frac{m'an}{n - 4n'} \left[ \frac{\partial P}{\partial e} \sin(4n't - nt + 4\varepsilon' - \varepsilon) + \frac{\partial P'}{\partial e} \cos(4n't - nt + 4\varepsilon' - \varepsilon) \right], \\ e \delta \varpi &= - \frac{m'an}{n - 4n'} \left[ \frac{\partial P}{\partial e} \cos(4n't - nt + 4\varepsilon' - \varepsilon) - \frac{\partial P'}{\partial e} \sin(4n't - nt + 4\varepsilon' - \varepsilon) \right]. \end{aligned}$$



La variation de  $-e \cos(nt + \varepsilon - \varpi)$  devient ainsi

$$\frac{m'an}{n-4n'} \left[ \frac{\partial P}{\partial e} \sin(2nt - 4n't + 2\varepsilon - 4\varepsilon' - \varpi) - \frac{\partial P'}{\partial e} \cos(2nt - 4n't + 2\varepsilon - 4\varepsilon' - \varpi) \right].$$

Cette fonction est identique avec l'expression précédente de  $\frac{r \delta r}{a^2}$ ; en changeant donc, dans l'une et dans l'autre,  $2nt + 2\varepsilon$  dans  $nt + \varepsilon + \varpi + \frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$  étant la demi-circonférence, on aura

$$\begin{aligned} & \frac{m'an}{n-4n'} \left[ \frac{\partial P}{\partial e} \cos(nt - 4n't + \varepsilon - 4\varepsilon') + \frac{\partial P'}{\partial e} \sin(nt - 4n't + \varepsilon - 4\varepsilon') \right] \\ & = L e^2 \sin(4n't - nt + 4\varepsilon' - \varepsilon - 3\varpi) \\ & + L^{(1)} e e' \sin(4n't - nt + 4\varepsilon' - \varepsilon - \varpi' - 2\varpi) \\ & + L^{(2)} e'^2 \sin(4n't - nt + 4\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi' - \varpi) \\ & + L^{(3)} \gamma^2 \sin(4n't - nt + 4\varepsilon' - \varepsilon - \varpi - 2\Pi). \end{aligned}$$

Si l'on intègre cette équation par rapport à  $e$ , et qu'ensuite on la multiplie par  $\frac{3n}{n-4n'}$ , on aura

$$\delta v = \frac{3n}{n-4n'} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{3} L e^3 \sin(4n't - nt + 4\varepsilon' - \varepsilon - 3\varpi) \\ & + \frac{1}{2} L^{(1)} e^2 e' \sin(4n't - nt + 4\varepsilon' - \varepsilon - \varpi' - 2\varpi) \\ & + L^{(2)} e e'^2 \sin(4n't - nt + 4\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi' - \varpi) \\ & + L^{(3)} e \gamma^2 \sin(4n't - nt + 4\varepsilon' - \varepsilon - \varpi - 2\Pi) \end{aligned} \right\}.$$

Dans cette intégration, on néglige les termes de  $P$  et de  $P'$  dépendants de  $e^3$  et de  $e'\gamma^2$ ; mais l'excentricité de l'orbite de la Terre est si peu considérable relativement à celle de Mercure, et l'inégalité dont il s'agit est si petite, que l'on peut les omettre sans erreur sensible.

11. Il résulte du n° 71 du Livre II que les termes

$$\begin{aligned} & M^{(4)} e' \gamma^2 \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 2\Pi - \varpi') \\ & + M^{(5)} e \gamma^2 \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 2\Pi - \varpi) \end{aligned}$$

du développement de  $R$ , donné dans le n° 8, produisent, dans la valeur de  $s$  ou dans le mouvement de  $m$  en latitude, l'inégalité

$$-\frac{2an}{5n' - 2n} \left[ \begin{aligned} & e' \gamma M^{(4)} \sin(5n't - 3nt + 5\varepsilon' - 3\varepsilon - \Pi - \varpi') \\ & + e \gamma M^{(5)} \sin(5n't - 3nt + 5\varepsilon' - 3\varepsilon - \Pi - \varpi) \end{aligned} \right].$$



Pareillement, les mêmes termes produisent, dans la valeur de  $s'$  ou dans le mouvement de  $m'$  en latitude, l'inégalité

$$\frac{2a'n'}{5n' - 2n} \frac{m}{m'} \left[ \begin{array}{l} e'\gamma M^{(4)} \sin(4n't - 2nt + 4\varepsilon' - 2\varepsilon - \Pi - \varpi') \\ + e\gamma M^{(5)} \sin(4n't - 2nt + 4\varepsilon' - 2\varepsilon - \Pi - \varpi) \end{array} \right],$$

$\Pi$  étant, comme dans l'inégalité précédente de  $s$ , la longitude du nœud ascendant de l'orbite de  $m'$  sur celle de  $m$ . Ce sont les seules inégalités sensibles en latitude du système planétaire dépendantes du produit des excentricités et des inclinaisons des orbites.

On a vu, dans le n° 6, que la valeur de  $\delta s$  introduit dans le mouvement de  $m$ , réduit au plan fixe, le terme  $-\text{tang } \varphi \delta s \cos(\nu, -\theta)$ ; en substituant dans ce terme l'inégalité précédente de  $s$ , on aura un terme dépendant de  $5n't - 2nt$ , qui doit s'ajouter à la grande inégalité du mouvement de  $m$ ; mais ce terme est insensible pour Jupiter et Saturne.



## CHAPITRE II.

DES INÉGALITÉS DÉPENDANTES DU CARRÉ DE LA FORCE PERTURBATRICE.

12. Les grandes inégalités que nous venons de déterminer en produisent de sensibles, dépendantes du carré de la force perturbatrice; nous en avons donné les expressions analytiques dans les nos 65 et 69 du Livre II. Il résulte du n° 65 du même Livre que, si l'on désigne par  $\bar{H} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon + \bar{A})$  la grande inégalité de Jupiter, on aura

$$-\frac{\bar{H}^2}{8} \frac{2m'\sqrt{a'} + 5m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}} \cdot \sin 2(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon + \bar{A})$$

pour l'inégalité correspondante de Jupiter, dépendante du carré de la force perturbatrice; cette inégalité s'ajoute, comme celle dont elle dérive, au moyen mouvement de la planète.

Pareillement, si l'on désigne par  $-\bar{H}' \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon + \bar{A}')$  la grande inégalité de Saturne, on aura

$$\frac{\bar{H}'^2}{8} \frac{2m'\sqrt{a'} + 5m\sqrt{a}}{m\sqrt{a}} \cdot \sin 2(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon + \bar{A}')$$

pour l'inégalité correspondante de Saturne, et qui doit être ajoutée au moyen mouvement de cette planète.

Les variations des excentricités et des périhélies peuvent introduire de semblables inégalités dans les moyens mouvements des deux planètes. Pour les déterminer, nous observerons que l'on a, en n'ayant égard qu'aux cubes et aux produits de trois dimensions des excentri-



cités et des inclinaisons des orbites,

$$3a \int \int n dt dR = -6am' \int \int n^2 dt^2 \left[ \begin{array}{l} P \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \\ - P' \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \end{array} \right],$$

ce qui donne dans  $3a \int \int n dt dR$  la quantité

$$(X) \quad -6am' \int \int n^2 dt^2 \left[ \begin{array}{l} \delta e \left[ \frac{\partial P}{\partial e} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) - \frac{\partial P'}{\partial e} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right] \\ + \delta \varpi \left[ \frac{\partial P}{\partial \varpi} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) - \frac{\partial P'}{\partial \varpi} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right] \\ + \delta e' \left[ \frac{\partial P}{\partial e'} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) - \frac{\partial P'}{\partial e'} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right] \\ + \delta \varpi' \left[ \frac{\partial P}{\partial \varpi'} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) - \frac{\partial P'}{\partial \varpi'} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right] \\ + \delta \gamma \left[ \frac{\partial P}{\partial \gamma} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) - \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right] \\ + \delta \Pi \left[ \frac{\partial P}{\partial \Pi} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) - \frac{\partial P'}{\partial \Pi} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right] \end{array} \right],$$

$\delta e$ ,  $\delta \varpi$ ,  $\delta e'$ ,  $\delta \varpi'$ ,  $\delta \gamma$ ,  $\delta \Pi$  étant les parties de  $e$ ,  $\varpi$ ,  $e'$ ,  $\varpi'$ ,  $\gamma$ ,  $\Pi$  qui dépendent de l'angle  $5n't - 2nt$ . On a, par le n° 8,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \varpi} &= e \frac{\partial P'}{\partial e}, & \frac{\partial P'}{\partial \varpi} &= -e \frac{\partial P}{\partial e}, \\ \frac{\partial P}{\partial \varpi'} &= e' \frac{\partial P'}{\partial e'}, & \frac{\partial P'}{\partial \varpi'} &= -e' \frac{\partial P}{\partial e'}, \\ \frac{\partial P}{\partial \Pi} &= \gamma \frac{\partial P'}{\partial \gamma}, & \frac{\partial P'}{\partial \Pi} &= -\gamma \frac{\partial P}{\partial \gamma}. \end{aligned}$$

De plus, on a, par le n° 69 du Livre II,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial e} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) - \frac{\partial P'}{\partial e} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) &= \frac{5n' - 2n}{m'an} e \delta \varpi, \\ \frac{\partial P}{\partial e} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) + \frac{\partial P'}{\partial e} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) &= -\frac{5n' - 2n}{m'an} \delta e; \end{aligned}$$

on a pareillement

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial e'} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) - \frac{\partial P'}{\partial e'} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) &= \frac{5n' - 2n}{ma'n'} e' \delta \varpi', \\ \frac{\partial P}{\partial e'} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) + \frac{\partial P'}{\partial e'} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) &= -\frac{5n' - 2n}{ma'n'} \delta e'. \end{aligned}$$



Pour avoir les valeurs de  $\delta\gamma$  et de  $\delta\Pi$ , nous observerons que la latitude  $s$  de  $m$  au-dessus de l'orbite primitive de  $m'$  est  $-\gamma \sin(\nu - \Pi)$ , ce qui donne

$$-\delta s = \delta\gamma \sin(\nu - \Pi) - \gamma \delta\Pi \cos(\nu - \Pi);$$

or on a, par le n° 71 du Livre II,

$$\delta s = \frac{m'an}{5n' - 2n} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial \gamma} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \nu + \Pi) \\ - \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \nu + \Pi) \end{array} \right\}$$

En comparant cette expression à la précédente, on aura

$$\begin{aligned} \delta\gamma &= -\frac{m'an}{5n' - 2n} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial \gamma} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \\ + \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \end{array} \right\}, \\ \gamma \delta\Pi &= \frac{m'an}{5n' - 2n} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial \gamma} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \\ - \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$\gamma$  exprimant l'inclinaison respective des deux orbites l'une sur l'autre, et  $\Pi$  étant la longitude du nœud ascendant de l'orbite de  $m'$  sur celle de  $m$ . Ces quantités varient encore par l'action de  $m$  sur  $m'$ ; en nommant  $\delta_1\gamma$  et  $\delta_1\Pi$  ces dernières variations, et représentant par  $\delta_\nu\gamma$  et  $\delta_\nu\Pi$  les variations précédentes dues à l'action de  $m'$  sur  $m$ , on aura

$$\begin{aligned} \delta\gamma &= \delta_1\gamma + \delta_\nu\gamma, & \delta\Pi &= \delta_1\Pi + \delta_\nu\Pi, \\ \delta_1\gamma &= \frac{ma'n'}{m'an} \delta_\nu\gamma, & \delta_1\Pi &= \frac{ma'n'}{m'an} \delta_\nu\Pi. \end{aligned}$$

Cela posé, si l'on substitue ces diverses quantités dans la fonction (X), on trouve qu'elle se réduit à zéro. Les variations des excentricités, des périhélies, des nœuds et des inclinaisons des orbites, correspondantes aux deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne, n'introduisent donc dans le moyen mouvement de Jupiter et dans le grand axe de son orbite, considérée comme une ellipse variable, aucune inégalité sensible dépendante du carré de la force perturbatrice, et il est visible



que cela a encore lieu pour le moyen mouvement de Saturne et pour le grand axe de son orbite.

13. Considérons présentement les variations des excentricités et des périhélie. Nous avons donné, dans le n° 69 du Livre II, les expressions des accroissements de  $\frac{de}{dt}$ ,  $\frac{d\omega}{dt}$ ,  $\frac{de'}{dt}$ ,  $\frac{d\omega'}{dt}$ , dus aux deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne, et nous avons observé dans le même numéro que les variations de  $e$ ,  $\omega$ ,  $e'$ ,  $\omega'$ , relatives à l'angle  $5n't - 2nt$ , introduisent dans ces expressions des variations semblables à celles qu'y produisent les deux grandes inégalités. En appliquant ces considérations à Jupiter et à Saturne, et désignant par  $\delta e$  et  $\delta\omega$  les variations dues au carré de la force perturbatrice, on trouve

$$\begin{aligned} \delta e = & -\frac{3m'^2 a^2 n^3}{(5n' - 2n)^2} \frac{5m\sqrt{a} + 2m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}} \left\{ \left( P \frac{\partial P'}{\partial e} - P' \frac{\partial P}{\partial e} \right) t + \frac{P \frac{\partial P'}{\partial e} + P' \frac{\partial P}{\partial e}}{2(5n' - 2n)} \cdot \sin 2(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right. \\ & \left. + \frac{P' \frac{\partial P'}{\partial e} - P \frac{\partial P}{\partial e}}{2(5n' - 2n)} \cdot \cos 2(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right\} \\ & + \frac{m'^2 a^2 n^2}{5n' - 2n} \left\{ \left( \frac{\partial P'}{\partial e} \frac{\partial^2 P}{\partial e^2} - \frac{\partial P}{\partial e} \frac{\partial^2 P'}{\partial e^2} + \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P}{\partial e \partial \gamma} - \frac{\partial P}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P'}{\partial e \partial \gamma} \right) t + \frac{\left( \frac{\partial P'}{\partial e} \right)^2 - \left( \frac{\partial P}{\partial e} \right)^2}{4e(5n' - 2n)} \cdot \cos 2(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right. \\ & \left. - \frac{\frac{\partial P}{\partial e} \frac{\partial P'}{\partial e}}{2e(5n' - 2n)} \cdot \sin 2(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right\} \\ & + \frac{mm'aa'nn't}{5n' - 2n} \left( \frac{\partial P'}{\partial e'} \frac{\partial^2 P}{\partial e \partial e'} - \frac{\partial P}{\partial e'} \frac{\partial^2 P'}{\partial e \partial e'} + \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P}{\partial e \partial \gamma} - \frac{\partial P}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P'}{\partial e \partial \gamma} \right), \\ \delta\omega = & \frac{3m'^2 a^2 n^3}{(5n' - 2n)^2 e} \frac{5m\sqrt{a} + 2m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}} \left\{ \left( P \frac{\partial P'}{\partial e} + P' \frac{\partial P}{\partial e} \right) t + \frac{P \frac{\partial P'}{\partial e} - P' \frac{\partial P}{\partial e}}{2(5n' - 2n)} \cdot \sin 2(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right. \\ & \left. + \frac{P' \frac{\partial P'}{\partial e} + P \frac{\partial P}{\partial e}}{2(5n' - 2n)} \cdot \cos 2(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right\} \\ & + \frac{m'^2 a^2 n^2}{(5n' - 2n)e} \left\{ \left( \frac{\partial P'}{\partial e} \frac{\partial^2 P}{\partial e^2} + \frac{\partial P}{\partial e} \frac{\partial^2 P'}{\partial e^2} + \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P}{\partial e \partial \gamma} + \frac{\partial P}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P'}{\partial e \partial \gamma} \right) t + \frac{\left( \frac{\partial P'}{\partial e} \right)^2 - \left( \frac{\partial P}{\partial e} \right)^2}{2e(5n' - 2n)} \cdot \sin 2(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right. \\ & \left. + \frac{\frac{\partial P}{\partial e} \frac{\partial P'}{\partial e}}{e(5n' - 2n)} \cdot \cos 2(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right\} \\ & + \frac{mm'aa'nn't}{(5n' - 2n)e} \left( \frac{\partial P}{\partial e'} \frac{\partial^2 P}{\partial e \partial e'} + \frac{\partial P'}{\partial e} \frac{\partial^2 P'}{\partial e \partial e'} + \frac{\partial P}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P}{\partial e \partial \gamma} + \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P'}{\partial e \partial \gamma} \right). \end{aligned}$$



Les parties de ces expressions, proportionnelles au temps  $t$ , donnent les variations séculaires de l'excentricité et du périhélie dues au carré de la force perturbatrice. Pour avoir les termes périodiques dépendants de ce carré, considérons le terme  $2e \sin(nt + \varepsilon - \varpi)$  de l'expression elliptique de la longitude vraie. Si l'on désigne par  $\delta e$  et par  $\delta \varpi$  les variations de  $e$  et de  $\varpi$  dépendantes de l'angle  $5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon$ , et qui sont dues à la première puissance de la force perturbatrice, et par  $\delta'e$  et  $\delta'\varpi$  les variations précédentes de  $e$  et de  $\varpi$  dépendantes du double de cet angle; si l'on désigne ensuite par  $\delta\varepsilon$  la somme des deux inégalités de  $m$ , l'une dépendante de  $5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon$ , et l'autre dépendante du double de cet angle, le terme  $2e \sin(nt + \varepsilon - \varpi)$  devient

$$(2e + 2\delta e + 2\delta'e) \sin(nt + \varepsilon + \delta\varepsilon - \varpi - \delta\varpi - \delta'\varpi),$$

et par conséquent, en négligeant le cube de la force perturbatrice, il se développe dans les termes suivants

$$\begin{aligned} & 2e \sin(nt + \varepsilon + \delta\varepsilon - \varpi) \\ & + 2\delta e \sin(nt + \varepsilon - \varpi) - 2e \delta\varpi \cos(nt + \varepsilon - \varpi) \\ & + [2\delta'e + 2e \delta\varpi \delta\varepsilon - e(\delta\varpi)^2] \sin(nt + \varepsilon - \varpi) \\ & - [2e \delta'\varpi + 2\delta e \delta\varpi - 2\delta\varepsilon \delta e] \cos(nt + \varepsilon - \varpi). \end{aligned}$$

Le terme  $2e \sin(nt + \varepsilon + \delta\varepsilon - \varpi)$  est celui que l'on obtient en augmentant, comme nous le prescrivons, dans la partie elliptique, le moyen mouvement  $nt$ , de  $\delta\varepsilon$ ; les deux termes

$$2\delta e \sin(nt + \varepsilon - \varpi) - 2e \delta\varpi \cos(nt + \varepsilon - \varpi)$$

forment l'inégalité dépendante de l'angle  $3nt - 5n't + 3\varepsilon - 5\varepsilon'$ , que donnent les formules du n° 1. Si l'on substitue ensuite dans les autres termes, au lieu de  $\delta e$  et  $\delta\varpi$ , leurs valeurs données par le n° 69 du Livre II, et au lieu de  $\delta'e$  et  $\delta'\varpi$  leurs valeurs données par ce qui précède, leur somme donnera, en négligeant les termes dépendants du sinus et du cosinus de  $nt + \varepsilon$ , parce qu'ils se confondent avec l'équa-



tion du centre,

$$-\frac{3m'^2 a^2 n^3}{(5n' - 2n)^3} \frac{5m\sqrt{a} + 4m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}} \left( P \frac{\partial P'}{\partial e} + P' \frac{\partial P}{\partial e} \right) \cos(5nt - 10n't + 5\varepsilon - 10\varepsilon' - \varpi)$$

$$-\frac{3m'^2 a^2 n^3}{(5n' - 2n)^3} \frac{5m\sqrt{a} + 4m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}} \left( P' \frac{\partial P'}{\partial e} - P \frac{\partial P}{\partial e} \right) \sin(5nt - 10n't + 5\varepsilon - 10\varepsilon' - \varpi).$$

Cette inégalité peut être mise sous la forme suivante : si l'on représente par  $K \sin(5n't - 3nt + 5\varepsilon' - 3\varepsilon + B)$  l'inégalité de  $m$  dépendante de  $3nt - 5n't + 3\varepsilon - 5\varepsilon'$ , et par  $\bar{H} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon + \bar{A})$  la grande inégalité, l'inégalité précédente sera, par le n° 69 du Livre II,

$$\frac{1}{4} \frac{5m\sqrt{a} + 4m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}} \bar{H} K \sin(5nt - 10n't + 5\varepsilon - 10\varepsilon' - B - \bar{A}).$$

On trouvera pareillement, en n'ayant égard qu'aux variations séculaires dépendantes du carré de la force perturbatrice,

$$\delta e' = -\frac{3m^2 a^3 n^3 t}{(5n' - 2n)^2 a'} \frac{5m\sqrt{a} + 2m'\sqrt{a'}}{m\sqrt{a}} \left( P \frac{\partial P'}{\partial e'} - P' \frac{\partial P}{\partial e'} \right)$$

$$+ \frac{m^2 a'^2 n'^2 t}{5n' - 2n} \left( \frac{\partial P'}{\partial e'} \frac{\partial^2 P}{\partial e'^2} - \frac{\partial P}{\partial e'} \frac{\partial^2 P'}{\partial e'^2} + \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P}{\partial e' \partial \gamma} - \frac{\partial P}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P'}{\partial e' \partial \gamma} \right)$$

$$+ \frac{mm'aa'nn't}{5n' - 2n} \left( \frac{\partial P'}{\partial e} \frac{\partial^2 P}{\partial e \partial e'} - \frac{\partial P}{\partial e} \frac{\partial^2 P'}{\partial e \partial e'} + \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P}{\partial e' \partial \gamma} - \frac{\partial P}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P'}{\partial e' \partial \gamma} \right),$$

$$\delta \varpi' = \frac{3m^2 a^3 n^3 t}{(5n' - 2n)^2 a' e'} \frac{5m\sqrt{a} + 2m'\sqrt{a'}}{m\sqrt{a}} \left( P \frac{\partial P}{\partial e'} + P' \frac{\partial P'}{\partial e'} \right)$$

$$+ \frac{m^2 a'^2 n'^2 t}{(5n' - 2n) e'} \left( \frac{\partial P}{\partial e'} \frac{\partial^2 P}{\partial e'^2} + \frac{\partial P'}{\partial e'} \frac{\partial^2 P'}{\partial e'^2} + \frac{\partial P}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P}{\partial e' \partial \gamma} + \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P'}{\partial e' \partial \gamma} \right)$$

$$+ \frac{mm'aa'nn't}{(5n' - 2n) e'} \left( \frac{\partial P}{\partial e} \frac{\partial^2 P}{\partial e \partial e'} + \frac{\partial P'}{\partial e} \frac{\partial^2 P'}{\partial e \partial e'} + \frac{\partial P}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P}{\partial e' \partial \gamma} + \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P'}{\partial e' \partial \gamma} \right).$$

On trouve encore que le mouvement de  $m'$  en longitude est affecté de l'inégalité

$$-\frac{3m^2 a^3 n^3}{(5n' - 2n)^3 a'} \frac{3m\sqrt{a} + 2m'\sqrt{a'}}{m\sqrt{a}} \left\{ \begin{aligned} & \left( P \frac{\partial P'}{\partial e'} + P' \frac{\partial P}{\partial e'} \right) \cos(4nt - 9n't + 4\varepsilon - 9\varepsilon' - \varpi') \\ & + \left( P' \frac{\partial P'}{\partial e'} - P \frac{\partial P}{\partial e'} \right) \sin(4nt - 9n't + 4\varepsilon - 9\varepsilon' - \varpi') \end{aligned} \right\}.$$



Si l'on désigne par

$$K' \sin(4n't - 2nt + 4\varepsilon' - 2\varepsilon + B')$$

l'inégalité de  $m'$  dépendante de  $2nt - 4n't + 2\varepsilon - 4\varepsilon'$ , et par

$$- \overline{H'} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon + \overline{A'})$$

la grande inégalité de  $m'$ , on aura, pour son inégalité dépendante de  $4nt - 9n't + 4\varepsilon - 9\varepsilon'$ ,

$$\frac{1}{4} \frac{3m\sqrt{a} + 2m'\sqrt{a'}}{m\sqrt{a}} \overline{H'} K' \sin(4nt - 9n't + 4\varepsilon - 9\varepsilon' - B' - \overline{A'}).$$

14. Les nœuds et les inclinaisons des orbites de Jupiter et de Saturne sont assujettis à des variations analogues aux précédentes. Pour les déterminer, nous observerons que,  $\varphi$  et  $\varphi'$  étant les inclinaisons des orbites sur un plan fixe, et  $\theta$  et  $\theta'$  étant les longitudes de leurs nœuds ascendants, on a, par le n° 60 du Livre II, à cause de la petitesse de  $\varphi$  et de  $\varphi'$ ,

$$\varphi' \sin \theta' - \varphi \sin \theta = \gamma \sin \Pi,$$

$$\varphi' \cos \theta' - \varphi \cos \theta = \gamma \cos \Pi.$$

On a de plus, par le n° 12,

$$\partial(\varphi' \sin \theta') = - \frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}} \partial(\varphi \sin \theta),$$

$$\partial(\varphi' \cos \theta') = - \frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}} \partial(\varphi \cos \theta).$$

De ces quatre équations on tire les suivantes

$$\partial\varphi = \frac{-m'\sqrt{a'}}{m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'}} [\partial\gamma \cos(\Pi - \theta) - \gamma \partial\Pi \sin(\Pi - \theta)],$$

$$\varphi \partial\theta = \frac{-m'\sqrt{a'}}{m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'}} [\partial\gamma \sin(\Pi - \theta) + \gamma \partial\Pi \cos(\Pi - \theta)],$$

$$\partial\varphi' = \frac{m\sqrt{a}}{m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'}} [\partial\gamma \cos(\Pi - \theta') - \gamma \partial\Pi \sin(\Pi - \theta')],$$

$$\varphi' \partial\theta' = \frac{m\sqrt{a}}{m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'}} [\partial\gamma \sin(\Pi - \theta') + \gamma \partial\Pi \cos(\Pi - \theta')].$$



Les variations de  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi'$  et  $\theta'$  dépendent ainsi des variations de  $\gamma$  et de  $\Pi$ . On a, par le n° 12,

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}} m'an \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial \gamma} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \\ - \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \end{array} \right\},$$

$$\gamma \frac{d\Pi}{dt} = -\frac{m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}} m'an \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial \gamma} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \\ + \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \end{array} \right\}.$$

De là on tire, en négligeant les quantités périodiques dont l'effet est insensible, et en observant que

$$\frac{\partial P'}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P}{\partial \gamma^2} - \frac{\partial P}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P'}{\partial \gamma^2} = 0,$$

$$\begin{aligned} \delta\gamma = & -\frac{3m'^2 a^2 n^3}{(5n' - 2n)^2} \frac{m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}} \frac{5m\sqrt{a} + 2m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}} t \left( P \frac{\partial P'}{\partial \gamma} - P' \frac{\partial P}{\partial \gamma} \right) \\ & + \frac{m'^2 a^2 n^2}{5n' - 2n} \frac{m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}} t \left( \frac{\partial P'}{\partial e} \frac{\partial^2 P}{\partial e \partial \gamma} - \frac{\partial P}{\partial e} \frac{\partial^2 P'}{\partial e \partial \gamma} \right) \\ & + \frac{mm'aa'nn'}{5n' - 2n} \frac{m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}} t \left( \frac{\partial P'}{\partial e'} \frac{\partial^2 P}{\partial e' \partial \gamma} - \frac{\partial P}{\partial e'} \frac{\partial^2 P'}{\partial e' \partial \gamma} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & \frac{3m'^2 a^2 n^3}{\gamma(5n' - 2n)^2} \frac{m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}} \frac{5m\sqrt{a} + 2m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}} t \left( P \frac{\partial P}{\partial \gamma} + P' \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \right) \\ & + \frac{m'^2 a^2 n^2}{\gamma(5n' - 2n)} \frac{m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}} t \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial e} \frac{\partial^2 P}{\partial e \partial \gamma} + \frac{\partial P'}{\partial e} \frac{\partial^2 P'}{\partial e \partial \gamma} \\ + \frac{\partial P}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P}{\partial \gamma^2} + \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P'}{\partial \gamma^2} \end{array} \right\} \\ & + \frac{mm'aa'nn'}{\gamma(5n' - 2n)} \frac{m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}} t \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial e'} \frac{\partial^2 P}{\partial e' \partial \gamma} + \frac{\partial P'}{\partial e'} \frac{\partial^2 P'}{\partial e' \partial \gamma} \\ + \frac{\partial P}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P}{\partial \gamma^2} + \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P'}{\partial \gamma^2} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

15. Si l'on voulait déterminer pour un temps quelconque les éléments des orbites planétaires, il faudrait intégrer les équations différentielles (A) et (C) des nos 55 et 59 du Livre II, par la méthode ex-



posée dans le n° 56 du même Livre; mais l'ignorance où nous sommes encore sur les valeurs des masses de plusieurs planètes rend inutile à l'Astronomie ce calcul, dans lequel il devient indispensable de faire entrer les variations séculaires dépendantes du carré de la force perturbatrice, que nous venons de déterminer, et qui sont très-sensibles pour Jupiter et Saturne. Ces variations augmentent les valeurs de  $\frac{dh^{iv}}{dt}$ ,  $\frac{dl^{iv}}{dt}$ ,  $\frac{dp^{iv}}{dt}$ ,  $\frac{dq^{iv}}{dt}$ ,  $\frac{dh^{iv}}{dt}$ , ..., relatives à ces deux planètes, respectivement des quantités

$$\frac{h^{iv} \delta e^{iv}}{e^{iv} t} + \frac{l^{iv} \delta \varpi^{iv}}{t}, \quad \frac{l^{iv} \delta e^{iv}}{e^{iv} t} - \frac{h^{iv} \delta \varpi^{iv}}{t}, \quad \frac{p^{iv} \delta \varphi^{iv}}{\varphi^{iv} t} + \frac{q^{iv} \delta \theta^{iv}}{t}, \quad \dots,$$

en ne considérant dans  $\delta e^{iv}$ ,  $\delta \varpi^{iv}$ , ... que les quantités proportionnelles au temps  $t$ , déterminées dans les numéros précédents. On substituera dans ces dernières quantités, au lieu de  $e^{iv}$ ,  $\sin \varpi^{iv}$ ,  $\cos \varpi^{iv}$ , ..., leurs valeurs en  $h^{iv}$ ,  $l^{iv}$ , ...; les équations différentielles (A) du n° 55 du Livre II cesseront d'être linéaires; mais il sera facile de les intégrer par les méthodes connues d'approximation, lorsque la suite des siècles aura fait connaître les vraies valeurs des masses planétaires. Dans l'état actuel de l'Astronomie, il suffit d'avoir les variations séculaires des éléments des orbites, en séries ordonnées par rapport aux puissances du temps, en ne portant l'approximation que jusqu'à la seconde puissance.

On a vu, dans les nos 57 et 59 du Livre II, que l'état du système planétaire est stable, c'est-à-dire que les orbites de ce système restent toujours très-peu excentriques et très-peu inclinées les unes aux autres. Nous avons déduit ce résultat important du Système du monde de l'équation trouvée dans le n° 61 du Livre II

$$\text{const.} = (e^2 + \varphi^2) m \sqrt{a} + (e'^2 + \varphi'^2) m' \sqrt{a'} + \dots$$

En effet, le second membre de cette équation est très-petit dans l'état actuel de ce Système; il le sera donc toujours, ce qui exige que les excentricités et les inclinaisons des orbites soient toujours peu consi-



dérables. Nous allons faire voir ici que la différentielle de l'équation précédente

$$0 = (e de + \varphi d\varphi) m \sqrt{a} + (e' de' + \varphi' d\varphi') m' \sqrt{a'} + \dots$$

subsiste, en ayant même égard aux variations séculaires des éléments des orbites, déterminées dans les numéros précédents, d'où il suit que ces variations n'altèrent point la stabilité du système planétaire. Pour cela, il suffit de prouver qu'en représentant par  $m$  Jupiter, par  $m'$  Saturne, et par  $\delta e$ ,  $\delta e'$ ,  $\delta\varphi$ ,  $\delta\varphi'$  les variations séculaires de  $e$ ,  $e'$ ,  $\varphi$ ,  $\varphi'$ , données par ce qui précède, on a

$$0 = (e \delta e + \varphi \delta\varphi) m \sqrt{a} + (e' \delta e' + \varphi' \delta\varphi') m' \sqrt{a'}.$$

En substituant dans la fonction  $\varphi \delta\varphi \cdot m \sqrt{a} + \varphi' \delta\varphi' \cdot m' \sqrt{a'}$ , au lieu de  $\varphi$ ,  $\delta\varphi$ ,  $\varphi'$ ,  $\delta\varphi'$ , leurs valeurs données dans le numéro précédent, elle devient

$$\frac{mm' \sqrt{aa'}}{m \sqrt{a} + m' \sqrt{a'}} \gamma \delta\gamma,$$

ce qui change l'équation précédente dans celle-ci

$$0 = e \delta e \cdot m \sqrt{a} + e' \delta e' \cdot m' \sqrt{a'} + \frac{mm' \sqrt{aa'}}{m \sqrt{a} + m' \sqrt{a'}} \gamma \delta\gamma.$$

Considérons d'abord le premier terme de l'expression de  $\delta e$  du n° 13. Ce terme devient, en observant que  $n^2 a^3 = 1$ ,

$$-\frac{3m'(5m\sqrt{a} + 2m'\sqrt{a'})}{a\sqrt{a'}(5n' - 2n)^2} nt \left( P \frac{\partial P'}{\partial e} - P' \frac{\partial P}{\partial e} \right).$$

Considérons ensuite le premier terme de l'expression de  $\delta e'$  du même numéro,

$$-\frac{3m(5m\sqrt{a} + 2m'\sqrt{a'})}{a'\sqrt{a}(5n' - 2n)^2} nt \left( P \frac{\partial P'}{\partial e'} - P' \frac{\partial P}{\partial e'} \right).$$

Considérons enfin le premier terme de l'expression de  $\delta\gamma$  du numéro



précédent

$$-\frac{3m'(5m\sqrt{a}+2m'\sqrt{a'})}{a\sqrt{a'}(5n'-2n)^2} \frac{m\sqrt{a}+m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}} nt \left( P \frac{\partial P'}{\partial \gamma} - P' \frac{\partial P}{\partial \gamma} \right).$$

On aura, en n'ayant égard qu'à ces termes,

$$e \delta e . m \sqrt{a} + e' \delta e' . m' \sqrt{a'} + \frac{mm' \sqrt{aa'}}{m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'}} \gamma \delta \gamma$$

$$= -\frac{3mm'(5m\sqrt{a}+2m'\sqrt{a'})}{(5n'-2n)^2 \sqrt{aa'}} nt \left\{ \begin{array}{l} P \left( e \frac{\partial P'}{\partial e} + e' \frac{\partial P'}{\partial e'} + \gamma \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \right) \\ -P' \left( e \frac{\partial P}{\partial e} + e' \frac{\partial P}{\partial e'} + \gamma \frac{\partial P}{\partial \gamma} \right) \end{array} \right\};$$

or P et P' étant des fonctions homogènes en e, e' et γ, de la troisième dimension, on a

$$e \frac{\partial P}{\partial e} + e' \frac{\partial P}{\partial e'} + \gamma \frac{\partial P}{\partial \gamma} = 3P,$$

$$e \frac{\partial P'}{\partial e} + e' \frac{\partial P'}{\partial e'} + \gamma \frac{\partial P'}{\partial \gamma} = 3P';$$

on a donc

$$0 = e \delta e . m \sqrt{a} + e' \delta e' . m' \sqrt{a'} + \frac{mm' \sqrt{aa'}}{m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'}} \gamma \delta \gamma.$$

Considérons ensuite le terme de δe,

$$\frac{m'^2 t}{a(5n'-2n)} \left( \frac{\partial P'}{\partial e} \frac{\partial^2 P}{\partial e^2} - \frac{\partial P}{\partial e} \frac{\partial^2 P'}{\partial e'^2} + \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P}{\partial e \partial \gamma} - \frac{\partial P}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P'}{\partial e' \partial \gamma} \right);$$

le terme de δe',

$$\frac{mm' t}{\sqrt{aa'}(5n'-2n)} \left( \frac{\partial P'}{\partial e} \frac{\partial^2 P}{\partial e \partial e'} - \frac{\partial P}{\partial e} \frac{\partial^2 P'}{\partial e' \partial e'} + \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P}{\partial e' \partial \gamma} - \frac{\partial P}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P'}{\partial e' \partial \gamma} \right);$$

enfin le terme de δγ,

$$\frac{m'^2 t}{a(5n'-2n)} \frac{m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}} \left( \frac{\partial P'}{\partial e} \frac{\partial^2 P}{\partial e \partial \gamma} - \frac{\partial P}{\partial e} \frac{\partial^2 P'}{\partial e' \partial \gamma} \right);$$



on aura, en n'ayant égard qu'à ces termes et observant que l'on a

$$0 = \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P}{\partial \gamma^2} - \frac{\partial P}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P'}{\partial \gamma^2},$$

$$e \delta e . m \sqrt{a} + e' \delta e' . m' \sqrt{a'} + \frac{mm' \sqrt{aa'}}{m \sqrt{a} + m' \sqrt{a'}} \gamma \delta \gamma$$

$$= \frac{m'^2 m t}{(5n' - 2n) \sqrt{a}} \left( \begin{array}{l} \frac{\partial P'}{\partial e} \left( e \frac{\partial^2 P}{\partial e^2} + e' \frac{\partial^2 P}{\partial e \partial e'} + \gamma \frac{\partial^2 P}{\partial e \partial \gamma} \right) \\ - \frac{\partial P}{\partial e} \left( e \frac{\partial^2 P'}{\partial e^2} + e' \frac{\partial^2 P'}{\partial e \partial e'} + \gamma \frac{\partial^2 P'}{\partial e \partial \gamma} \right) \\ + \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \left( e \frac{\partial^2 P}{\partial e \partial \gamma} + e' \frac{\partial^2 P}{\partial e' \partial \gamma} + \gamma \frac{\partial^2 P}{\partial \gamma^2} \right) \\ - \frac{\partial P}{\partial \gamma} \left( e \frac{\partial^2 P'}{\partial e \partial \gamma} + e' \frac{\partial^2 P'}{\partial e' \partial \gamma} + \gamma \frac{\partial^2 P'}{\partial \gamma^2} \right) \end{array} \right).$$

$\frac{\partial P}{\partial e}$  et  $\frac{\partial P'}{\partial e}$  sont homogènes en  $e$ ,  $e'$  et  $\gamma$ , de la seconde dimension, ce qui donne

$$e \frac{\partial^2 P}{\partial e^2} + e' \frac{\partial^2 P}{\partial e \partial e'} + \gamma \frac{\partial^2 P}{\partial e \partial \gamma} = 2 \frac{\partial P}{\partial e},$$

$$e \frac{\partial^2 P'}{\partial e^2} + e' \frac{\partial^2 P'}{\partial e \partial e'} + \gamma \frac{\partial^2 P'}{\partial e \partial \gamma} = 2 \frac{\partial P'}{\partial e};$$

de plus,  $\frac{\partial P}{\partial \gamma}$  et  $\frac{\partial P'}{\partial \gamma}$  sont homogènes en  $e$ ,  $e'$  et  $\gamma$ , de la seconde dimension, ce qui donne

$$e \frac{\partial^2 P}{\partial e \partial \gamma} + e' \frac{\partial^2 P}{\partial e' \partial \gamma} + \gamma \frac{\partial^2 P}{\partial \gamma^2} = 2 \frac{\partial P}{\partial \gamma},$$

$$e \frac{\partial^2 P'}{\partial e \partial \gamma} + e' \frac{\partial^2 P'}{\partial e' \partial \gamma} + \gamma \frac{\partial^2 P'}{\partial \gamma^2} = 2 \frac{\partial P'}{\partial \gamma};$$

on a donc encore, en n'ayant égard qu'à ces termes,

$$0 = e \delta e . m \sqrt{a} + e' \delta e' . m' \sqrt{a'} + \frac{mm' \sqrt{aa'}}{m \sqrt{a} + m' \sqrt{a'}} \gamma \delta \gamma.$$

Considérons enfin le terme de  $\delta e$ ,

$$\frac{mm' t}{(5n' - 2n) \sqrt{aa'}} \left( \frac{\partial P'}{\partial e'} \frac{\partial^2 P}{\partial e \partial e'} - \frac{\partial P}{\partial e'} \frac{\partial^2 P'}{\partial e \partial e'} + \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P}{\partial e \partial \gamma} - \frac{\partial P}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P'}{\partial e \partial \gamma} \right);$$



le terme de  $\delta e'$ ,

$$\frac{m^2 t}{(5n' - 2n) a'} \left( \frac{\partial P'}{\partial e'} \frac{\partial^2 P}{\partial e'^2} - \frac{\partial P}{\partial e'} \frac{\partial^2 P'}{\partial e'^2} + \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P}{\partial e' \partial \gamma} - \frac{\partial P}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 P'}{\partial e' \partial \gamma} \right),$$

et le terme de  $\delta \gamma$ ,

$$\frac{mm'}{(5n' - 2n) \sqrt{aa'}} \frac{m \sqrt{a} + m' \sqrt{a'}}{m' \sqrt{a'}} t \left( \frac{\partial P'}{\partial e'} \frac{\partial^2 P}{\partial e' \partial \gamma} - \frac{\partial P}{\partial e'} \frac{\partial^2 P'}{\partial e' \partial \gamma} \right);$$

on aura encore, en n'ayant égard qu'à ces termes,

$$0 = e \delta e \cdot m \sqrt{a} + e' \delta e' \cdot m' \sqrt{a'} + \frac{mm' \sqrt{aa'}}{m \sqrt{a} + m' \sqrt{a'}} \gamma \delta \gamma.$$

Cette équation a donc lieu généralement, en ayant même égard aux termes dépendants du carré de la force perturbatrice.

La détermination du plan invariable, donnée dans le n° 62 du Livre II, est fondée sur les trois équations

$$\begin{aligned} c &= m \sqrt{a(1-e^2)} \cos \varphi + m' \sqrt{a'(1-e'^2)} \cos \varphi' + \dots, \\ c' &= m \sqrt{a(1-e^2)} \sin \varphi \sin \theta + m' \sqrt{a'(1-e'^2)} \sin \varphi' \sin \theta' + \dots, \\ c'' &= m \sqrt{a(1-e^2)} \sin \varphi \cos \theta + m' \sqrt{a'(1-e'^2)} \sin \varphi' \cos \theta' + \dots, \end{aligned}$$

$a, a', \dots$  étant constants par le n° 12, en ayant même égard au carré de la force perturbatrice; la première de ces équations donne, en négligeant les produits de quatre dimensions de  $e, e', \dots, \varphi, \varphi', \dots$ ,

$$\text{const.} = (e^2 + \varphi^2) m \sqrt{a} + (e'^2 + \varphi'^2) m' \sqrt{a'} + \dots,$$

et l'on vient de voir que les termes dépendants du carré de la force perturbatrice n'altèrent point l'exactitude de cette équation. La seconde des trois équations précédentes donne, en négligeant les produits de trois dimensions de  $e, e', \dots, \varphi, \varphi', \dots$ ,

$$0 = \delta(\varphi \sin \theta) m \sqrt{a} + \delta(\varphi' \sin \theta') m' \sqrt{a'} + \dots;$$

or, en ayant même égard aux termes dépendants du carré de la force



perturbatrice, cette équation a lieu par le n° 14; l'équation

$$c' = m \sqrt{a(1-e^2)} \sin \varphi \sin \theta + m' \sqrt{a'(1-e'^2)} \sin \varphi' \sin \theta' + \dots$$

n'est donc point altérée par ces termes, et l'on trouve de la même manière que cela a également lieu pour l'équation

$$c'' = m \sqrt{a(1-e^2)} \sin \varphi \cos \theta + m' \sqrt{a'(1-e'^2)} \sin \varphi' \cos \theta' + \dots;$$

ainsi le plan invariable déterminé par le n° 62 du Livre II reste toujours invariable, en ayant même égard au carré de la force perturbatrice.

16. Les termes dépendants de ce carré peuvent avoir une influence sensible sur les deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne; nous allons déterminer les plus considérables. On a vu dans le n° 5 que l'expression de R ou de  $\delta R$  renferme la fonction

$$\begin{aligned} & \frac{m'}{8} (e^2 + e'^2) \left( 2a \frac{\partial \Lambda^{(0)}}{\partial a} + a^2 \frac{\partial^2 \Lambda^{(0)}}{\partial a^2} \right) \\ & + \frac{m'}{4} ee' \cos(\varpi' - \varpi) \left( 4\Lambda^{(1)} + 2a \frac{\partial \Lambda^{(1)}}{\partial a} + 2a' \frac{\partial \Lambda^{(1)}}{\partial a'} + aa' \frac{\partial^2 \Lambda^{(1)}}{\partial a \partial a'} \right) \\ & + \frac{m'}{8} aa' B^{(1)} \gamma^2. \end{aligned}$$

En y faisant croître  $e$ ,  $e'$ ,  $\varpi$ ,  $\varpi'$  et  $\gamma$  de leurs variations dépendantes de l'angle  $5n't - 2nt$ , on aura dans R un terme dépendant du même angle, et qui, à raison du diviseur  $5n' - 2n$ , qui affecte ces variations, paraît devoir être sensible. Mais on doit observer que ce diviseur disparaît dans  $dR$ , parce que, la caractéristique différentielle  $d$  se rapportant aux seules coordonnées de  $m$ , elle se rapporte aux variations de  $e$  et de  $\varpi$ , et par conséquent elle introduit le multiplicateur  $5n' - 2n$ ; or on a vu que la grande inégalité de  $m$  dépend principalement du terme  $3a \int n dt dR$ ; les inégalités du rayon vecteur et de la longitude, qui dépendent des variations des excentricités et des péri-



héliques relatives à l'angle  $5n't - 2nt$ , ont donc très-peu d'influence sur les deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne.

On verra dans la suite que les inégalités les plus sensibles de ces deux planètes, dépendantes des simples excentricités des orbites, sont relatives à l'angle  $nt - 2n't$ . Nommons  $F \cos(nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + A)$  le terme de  $\frac{\partial r}{a}$  qui dépend de cet angle, et  $E \sin(nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + B)$  le terme de  $\delta v$  dépendant du même angle. Soient

$$F' \cos(nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + A') \quad \text{et} \quad E' \sin(nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + B')$$

les termes correspondants de  $\frac{\partial r'}{a'}$  et de  $\delta v'$ . Supposons que R soit relatif à Saturne troublé par Jupiter; en le développant par rapport aux carrés et aux produits des excentricités et des inclinaisons des orbites, et en ne considérant que l'angle  $3n't - nt$ , on aura, par le n° 4, une fonction de cette forme

$$\begin{aligned} & M^{(0)} e'^2 \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi') \\ & + M^{(1)} e e' \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - \varpi - \varpi') \\ & + M^{(2)} e^2 \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi) \\ & + M^{(3)} \gamma^2 \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\Pi). \end{aligned}$$

Le premier terme  $M^{(0)} e'^2 \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi')$  résulte du développement de  $A^{(1)} \cos(\varphi' - \varphi)$  dans l'expression de R. Il faut augmenter, dans ce dernier terme,  $r$  de  $\delta r$ ,  $r'$  de  $\delta r'$ ,  $\varphi$  de  $\delta \varphi$ , et  $\varphi'$  de  $\delta \varphi'$ , ce qui revient à augmenter, dans son développement,  $a$  de  $\delta a$ ,  $a'$  de  $\delta a'$ , et  $n't - nt$  de  $\delta \varphi' - \delta \varphi$ . Ce premier terme donne alors les suivants

$$\begin{aligned} & - M^{(0)} e'^2 (\delta \varphi' - \delta \varphi) \sin(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi') \\ & + a \frac{\partial M^{(0)}}{\partial a} e'^2 \frac{\delta r}{a} \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi') \\ & + a' \frac{\partial M^{(0)}}{\partial a'} e'^2 \frac{\delta r'}{a'} \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi'), \end{aligned}$$



d'où résultent, dans R, les termes

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}M^{(0)}e'^2E'\cos(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-2\varpi'-B') \\ & +\frac{1}{2}M^{(0)}e'^2E\cos(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-2\varpi'-B) \\ & +\frac{1}{2}a'\frac{\partial M^{(0)}}{\partial a'}e'^2F'\cos(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-2\varpi'-A') \\ & +\frac{1}{2}a\frac{\partial M^{(0)}}{\partial a}e'^2F\cos(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-2\varpi'-A). \end{aligned}$$

Désignons par  $d'R$  la différentielle de R, prise en ne faisant varier que les coordonnées de  $m'$ . Dans les termes multipliés par  $E'$  et  $F'$ , la partie  $5n't - nt$  de l'angle  $5n't - 2nt$  est relative à ces coordonnées. Dans les termes multipliés par  $E$  et  $F$ , la partie  $3n't$  du même angle leur est relative; on a donc, en n'ayant égard qu'aux termes précédents de R,

$$\begin{aligned} a'd'R &= \frac{1}{2}(5n'-n)dt.a'M^{(0)}E'e'^2\sin(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-2\varpi'-B') \\ & -\frac{1}{2}(5n'-n)dt.a'^2\frac{\partial M^{(0)}}{\partial a'}F'e'^2\sin(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-2\varpi'-A') \\ & -\frac{3}{2}n'dt.a'M^{(0)}Ee'^2\sin(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-2\varpi'-B) \\ & -\frac{3}{2}n'dt.aa'\frac{\partial M^{(0)}}{\partial a}Fe'^2\sin(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-2\varpi'-A). \end{aligned}$$

Le terme  $M^{(1)}ee'\cos(3n't-nt+3\varepsilon'-\varepsilon-\varpi-\varpi')$  résulte du développement de  $A^{(2)}\cos(2v'-2v)$  dans l'expression de R; il faut donc faire varier, dans ce terme,  $a$  de  $\delta r$ ,  $a'$  de  $\delta r'$ , et  $2n't - 2nt$  de  $2\delta v' - 2\delta v$ , ce qui donne les termes suivants

$$\begin{aligned} & -2M^{(1)}ee'(\delta v' - \delta v)\sin(3n't-nt+3\varepsilon'-\varepsilon-\varpi-\varpi') \\ & +a\frac{\partial M^{(1)}}{\partial a}ee'\frac{\delta r}{a}\cos(3n't-nt+3\varepsilon'-\varepsilon-\varpi-\varpi') \\ & +a'\frac{\partial M^{(1)}}{\partial a'}ee'\frac{\delta r'}{a'}\cos(3n't-nt+3\varepsilon'-\varepsilon-\varpi-\varpi'); \end{aligned}$$



la partie de  $a'$  d'R relative à ce terme sera donc

$$\begin{aligned} & (5n' - n) dt. a' M^{(1)} E' ee' \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi - \varpi' - B') \\ & - \frac{1}{2}(5n' - n) dt. a'^2 \frac{\partial M^{(1)}}{\partial a'} F' ee' \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi - \varpi' - A') \\ & - 3n' dt. a' M^{(1)} Eee' \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi - \varpi' - B) \\ & - \frac{3}{2} n' dt. aa' \frac{\partial M^{(1)}}{\partial a} F ee' \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi - \varpi' - A). \end{aligned}$$

Le terme  $M^{(2)} e^2 \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi)$  résulte du développement de  $A^{(3)} \cos(3\nu' - 3\nu)$  dans l'expression de R; il faut donc faire varier, dans ce terme,  $a$  de  $\delta r$ ,  $a'$  de  $\delta r'$ , et  $3n't - 3nt$  de  $3\delta\nu' - 3\delta\nu$ , ce qui donne les suivants

$$\begin{aligned} & - 3M^{(2)} e^2 (\delta\nu' - \delta\nu) \sin(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi) \\ & + a \frac{\partial M^{(2)}}{\partial a} e^2 \frac{\delta r}{a} \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi) \\ & + a' \frac{\partial M^{(2)}}{\partial a'} e^2 \frac{\delta r'}{a'} \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi); \end{aligned}$$

la partie de  $a'$  d'R relative à ce terme sera donc

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2}(5n' - n) dt. a' M^{(2)} E' e^2 \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 2\varpi - B') \\ & - \frac{1}{2}(5n' - n) dt. a'^2 \frac{\partial M^{(2)}}{\partial a'} F' e^2 \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 2\varpi - A') \\ & - \frac{9}{2} n' dt. a' M^{(2)} E e^2 \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 2\varpi - B) \\ & - \frac{3}{2} n' dt. aa' \frac{\partial M^{(2)}}{\partial a} F e^2 \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 2\varpi - A). \end{aligned}$$

Enfin, le terme  $M^{(3)} \gamma^2 \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\Pi)$  résulte du terme multiplié par  $\gamma^2 \cos(3\nu' - \nu)$  dans l'expression de R; il faut donc y faire varier  $a$  de  $\delta r$ ,  $a'$  de  $\delta r'$ ,  $3n't$  de  $3\delta\nu'$ , et  $nt$  de  $\delta\nu$ , ce qui donne les suivants

$$\begin{aligned} & - M^{(3)} \gamma^2 (3\delta\nu' - \delta\nu) \sin(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\Pi) \\ & + a \frac{\partial M^{(3)}}{\partial a} \gamma^2 \frac{\delta r}{a} \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\Pi) \\ & + a' \frac{\partial M^{(3)}}{\partial a'} \gamma^2 \frac{\delta r'}{a'} \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\Pi), \end{aligned}$$



d'où résultent, dans  $a'$  d' $R$ , les termes suivants

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2}(5n' - n) dt. a' M^{(3)} E' \gamma^2 \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 2\Pi - B') \\ & - \frac{1}{2}(5n' - n) dt. a'^2 \frac{\partial M^{(3)}}{\partial a'} F' \gamma^2 \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 2\Pi - A') \\ & - \frac{3}{2}n' dt. a' M^{(3)} E' \gamma^2 \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 2\Pi - B) \\ & - \frac{3}{2}n' dt. a a' \frac{\partial M^{(3)}}{\partial a} F' \gamma^2 \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 2\Pi - A). \end{aligned}$$

Les inégalités les plus sensibles dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites, et qui n'ont point  $5n' - 2n$  pour diviseur, ou qui ne dépendent point des variations des éléments, relatives à l'angle  $5n't - 2nt$ , se rapportent à l'angle  $3n't - nt$ .

Soit  $G \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon + C)$  la partie de  $\frac{\partial r}{a}$  qui dépend de cet angle; soit  $H \sin(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon + D)$  la partie de  $\delta v$  qui dépend du même angle. Soient pareillement  $G' \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon + C')$  et  $H' \sin(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon + D')$  les parties de  $\frac{\partial r'}{a'}$  et de  $\delta v'$  relatives au même angle. L'expression de  $R$ , développée par rapport aux puissances simples des excentricités, renferme les deux termes suivants

$$\begin{aligned} & N^{(0)} e \cos(nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + \varpi) \\ & + N^{(1)} e' \cos(nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + \varpi'). \end{aligned}$$

Le premier de ces termes résulte du développement de  $A^{(2)} \cos(2v' - 2v)$  dans l'expression de  $R$ ; il faut donc augmenter, dans ce développement,  $a$  de  $\delta r$ ,  $a'$  de  $\delta r'$ , et  $2n't - 2nt$  de  $2\delta v' - 2\delta v$ , ce qui donne les termes suivants

$$\begin{aligned} & 2N^{(0)} e (\delta v' - \delta v) \sin(nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + \varpi) \\ & + a \frac{\partial N^{(0)}}{\partial a} e \frac{\partial r}{a} \cos(nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + \varpi) \\ & + a' \frac{\partial N^{(0)}}{\partial a'} e \frac{\partial r'}{a'} \cos(nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + \varpi); \end{aligned}$$



d'où résultent, dans R, les termes suivants

$$\begin{aligned} & N^{(0)} H' e \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi + D') \\ & - N^{(0)} H e \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi + D) \\ & + \frac{1}{2} a' \frac{\partial N^{(0)}}{\partial a'} G' e \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi + C') \\ & + \frac{1}{2} a \frac{\partial N^{(0)}}{\partial a} G e \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi + C). \end{aligned}$$

Pour avoir la partie correspondante de d'R, il faut, dans les termes multipliés par H' et G', faire varier l'angle  $5n't - nt$ , et, dans les termes multipliés par H et G, ne faire varier que  $2n't$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} a' d'R = & - (5n' - n) dt. a' N^{(0)} H' e \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi + D') \\ & - \frac{1}{2} (5n' - n) dt. a'^2 \frac{\partial N^{(0)}}{\partial a'} G' e \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi + C') \\ & + 2n' dt. a' N^{(0)} H e \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi + D) \\ & - n' dt. aa' \frac{\partial N^{(0)}}{\partial a} G e \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi + C). \end{aligned}$$

Le terme  $N^{(1)} e' \cos(nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + \varpi')$  résulte du développement de  $A^{(1)} \cos(\varphi' - \varphi)$  dans R; il faut donc faire varier, dans ce terme,  $a$  de  $\delta r$ ,  $a'$  de  $\delta r'$ , et  $n't - nt$  de  $\delta \varphi' - \delta \varphi$ , ce qui donne les suivants

$$\begin{aligned} & N^{(1)} e' (\delta \varphi' - \delta \varphi) \sin(nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + \varpi') \\ & + a \frac{\partial N^{(1)}}{\partial a} e' \frac{\delta r}{a} \cos(nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + \varpi') \\ & + a' \frac{\partial N^{(1)}}{\partial a'} e' \frac{\delta r'}{a'} \cos(nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + \varpi'). \end{aligned}$$

La partie de  $a' d'R$  relative à ces termes sera donc

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} (5n' - n) dt. a' N^{(1)} H' e' \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi' + D') \\ & - \frac{1}{2} (5n' - n) dt. a'^2 \frac{\partial N^{(1)}}{\partial a'} G' e' \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi' + C') \\ & + n' dt. a' N^{(1)} H e' \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi' + D) \\ & - n' dt. aa' \frac{\partial N^{(1)}}{\partial a} G e' \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi' + C). \end{aligned}$$



Les valeurs de  $M^{(0)}$ ,  $M^{(1)}$ ,  $M^{(2)}$ ,  $M^{(3)}$  sont déterminées par les formules du n° 4, en y changeant ce qui est relatif à  $m$  dans ce qui est relatif à  $m'$ , et réciproquement. Les valeurs de  $N^{(0)}$  et  $N^{(1)}$  seront déterminées par les équations

$$a' N^{(0)} = -2ma' A^{(2)} - \frac{1}{2} m a a' \frac{\partial A^{(2)}}{\partial a},$$

$$a' N^{(1)} = m a' A^{(1)} - \frac{1}{2} m a' a'^2 \frac{\partial A^{(1)}}{\partial a'}.$$

En réunissant toutes ces expressions partielles de  $a' d'R$ , on aura un terme de cette forme

$$m n' I dt \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 0).$$

Le terme  $3a' \int f n' dt d'R$  de l'expression de  $\delta v'$  donnera ainsi

$$- \frac{3n'^2 I m}{(5n' - 2n)^2} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 0).$$

C'est le terme le plus sensible de la grande inégalité de Saturne dépendant du carré de la force perturbatrice.

Si l'expression de  $R$ , divisée par la masse perturbatrice, était la même pour Jupiter et pour Saturne, on aurait, par le n° 65 du Livre II, l'inégalité correspondante de Jupiter, en multipliant la précédente par  $-\frac{m' \sqrt{a'}}{m \sqrt{a}}$ ; mais la valeur de  $A^{(1)}$  n'est pas la même pour les deux planètes, et par conséquent les termes

$$M^{(0)} e'^2 \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi') \quad \text{et} \quad N^{(1)} e' \cos(nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + \varpi'),$$

divisés par les masses perturbatrices, sont différents pour chacune d'elles. Mais il résulte du n° 65 du Livre II qu'en n'ayant égard qu'aux termes qui ont  $(5n' - 2n)^2$  pour diviseur, on a, dans ce cas,

$$m \int dR, + m' \int d'R = 0,$$

$R$ , étant ce que devient  $R$  relativement à Jupiter, et la caractéristique différentielle  $d$  se rapportant aux coordonnées de Jupiter; d'où il suit



que l'inégalité de Jupiter qui correspond à la précédente est

$$\frac{3m'n'^2 \sqrt{\frac{a'}{a}}}{(5n' - 2n)^2} \text{I} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 0).$$

17. Dans les inégalités de Jupiter et de Saturne, dans lesquelles le coefficient de  $t$  n'est pas  $5n' - 2n$  et ne diffère pas de cette quantité du coefficient  $n$  pour Jupiter ou du coefficient  $n'$  pour Saturne, il faut augmenter  $nt$  et  $n't$  de leurs grandes inégalités dépendantes de  $5n't - 2nt$ . En effet, on a vu que ces grandes inégalités doivent être ajoutées aux moyens mouvements dans les formules du mouvement elliptique; elles doivent donc être ajoutées aux mêmes quantités dans le développement de  $R$ . Soit  $H \cos(i'n't - int + A)$  un terme quelconque de ce développement, et  $L \sin(i'n't - int + B)$  l'inégalité correspondante de Jupiter. En augmentant  $nt$  et  $n't$  de leurs grandes inégalités dans le terme  $H \cos(i'n't - int + A)$ , il en résultera un terme de la forme  $qH \cos[i'n't - int \pm (5n't - 2nt) + A + E]$ . Maintenant, la suite des opérations qui lient  $H$  à  $L$  donne aux parties de  $H$  les diviseurs  $(i'n' - in)^2$ ,  $i'n' - in$ ,  $i'n' - in \pm n$ . La même suite d'opérations donnera à l'inégalité correspondante aux parties de  $qH \cos[i'n't - int \pm (5n't - 2nt) + A + E]$  les diviseurs  $[i'n' - in \pm (5n' - 2n)]^2$ ,  $i'n' - in \pm (5n' - 2n)$ ,  $i'n' - in \pm (5n' - 2n) \pm n$ . Si  $i'n' - in$  ou  $i'n' - in \pm n$  ne sont pas très-petits de l'ordre  $5n' - 2n$ , on peut négliger  $5n' - 2n$  dans ces derniers diviseurs, et alors l'inégalité correspondante à

$$qH \cos[i'n't - int \pm (5n't - 2nt) + A + E]$$

sera

$$qL \sin[i'n't - int \pm (5n't - 2nt) + B + E];$$

ce qui revient à augmenter, dans  $L \sin(i'n't - int + B)$ ,  $nt$  et  $n't$  des grandes inégalités.

Il faut pareillement augmenter, dans les termes dépendants des simples excentricités, les quantités  $e$ ,  $e'$ ,  $\varpi$ ,  $\varpi'$  de leurs variations dépendantes de l'angle  $5n't - 2nt$ ; mais on s'assurera facilement qu'il n'en résulte que des inégalités insensibles.



18. Les coefficients des inégalités des planètes varient à raison des variations séculaires des éléments des orbites. On peut y avoir égard de la manière suivante : on mettra d'abord l'inégalité relative à un angle quelconque  $i'n't - int$  sous cette forme

$$P \sin(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon) + P' \cos(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon).$$

On déterminera les valeurs de  $P$  et de  $P'$  pour l'époque de 1750; en faisant ensuite

$$\text{tang } \Lambda = \frac{P'}{P}, \quad L = \sqrt{P^2 + P'^2},$$

le signe de  $\sin \Lambda$  étant le même que celui de  $P'$ , et son cosinus étant du même signe que  $P$ , l'inégalité dont il s'agit sera

$$L \sin(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon + \Lambda).$$

On déterminera les valeurs de  $P$  et de  $P'$  pour 1950, en ayant égard aux variations séculaires des éléments des orbites, et l'on aura ainsi pour cette inégalité, en 1950,

$$(L + \delta L) \sin(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon + \Lambda + \delta \Lambda);$$

en exprimant donc par  $t$  le nombre des années juliennes écoulées depuis 1750, l'inégalité précédente, relative au temps  $t$ , prendra cette forme

$$\left( L + \frac{t \delta L}{200} \right) \sin \left( i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon + \Lambda + \frac{t \delta \Lambda}{200} \right).$$

Sous cette forme, elle pourra s'étendre plusieurs siècles avant et après 1750; mais ce calcul ne doit avoir lieu que pour les inégalités un peu considérables.

Relativement aux deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne, il sera utile de porter l'approximation jusqu'au carré du temps, dans la partie qui a pour diviseur  $(5n' - 2n)^2$ . Cette partie de l'expression de  $\delta v$  est, par le n° 8,

$$\frac{6m'n^2}{(5n' - 2n)^2} \left\{ \begin{aligned} & \left[ aP' + \frac{2a dP}{(5n' - 2n) dt} - \frac{3a d^2P'}{(5n' - 2n)^2 dt^2} \right] \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \\ & - \left[ aP - \frac{2a dP'}{(5n' - 2n) dt} - \frac{3a d^2P}{(5n' - 2n)^2 dt^2} \right] \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \end{aligned} \right\};$$



les valeurs de P, P' et de leurs différences étant relatives à un temps quelconque  $t$ . En les développant en séries ordonnées par rapport aux puissances du temps, et en ne conservant que sa seconde puissance et les différences premières et secondes de P et de P', la quantité précédente devient

$$\frac{6m'n^2}{(5n'-2n)^2} \left\{ \begin{array}{l} \left\{ aP' + \frac{2a dP}{(5n'-2n)dt} - \frac{3a d^2P'}{(5n'-2n)^2 dt^2} \right. \\ \left. + t \left[ a \frac{dP'}{dt} + \frac{2a d^2P}{(5n'-2n)dt^2} \right] + \frac{1}{2} t^2 a \frac{d^2P'}{dt^2} \right\} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \\ - \left\{ aP - \frac{2a dP'}{(5n'-2n)dt} - \frac{3a d^2P}{(5n'-2n)^2 dt^2} \right. \\ \left. + t \left[ a \frac{dP}{dt} - \frac{2a d^2P'}{(5n'-2n)dt^2} \right] + \frac{1}{2} t^2 a \frac{d^2P}{dt^2} \right\} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \end{array} \right\};$$

les valeurs de P, P' et de leurs différences étant ici relatives à l'époque de 1750, et déterminées par la méthode du n° 8; les autres parties de la grande inégalité de  $m$  étant peu considérables, il suffira d'avoir égard, par ce qui précède, à la première puissance du temps. Cette grande inégalité prendra ainsi la forme suivante

$$\begin{aligned} & (A + Bt + Ct^2) \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \\ & + (A' + B't + C't^2) \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon). \end{aligned}$$

On donnera à la grande inégalité de  $m'$  la même forme sous laquelle il sera facile de réduire en Tables ces inégalités.

Si l'on veut réduire l'inégalité précédente à un seul terme, on la calculera pour les trois époques de 1750, 2250 et 2750. Soit  $\mathcal{C} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon + \Lambda)$  cette grande inégalité pour 1750; soient  $\mathcal{C}_u, \Lambda_u, \mathcal{C}_v, \Lambda_v$  ce que deviennent  $\mathcal{C}$  et  $\Lambda$  aux époques de 2250 et de 2750. Cette inégalité relative à un temps quelconque  $t$  sera

$$\left( \mathcal{C} + t \frac{d\mathcal{C}}{dt} + \frac{1}{2} t^2 \frac{d^2\mathcal{C}}{dt^2} \right) \sin \left( 5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon + \Lambda + t \frac{d\Lambda}{dt} + \frac{1}{2} t^2 \frac{d^2\Lambda}{dt^2} \right),$$

les différences de  $\mathcal{C}$  et de  $\Lambda$  se rapportant ici à l'époque de 1750. On



aura ensuite, par le n° 8,

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{4\epsilon_1 - 3\epsilon - \epsilon_2}{1000}, \quad \frac{d^2\epsilon}{dt^2} = \frac{\epsilon_2 - 2\epsilon_1 + \epsilon}{250000},$$

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{4\Lambda_1 - 3\Lambda - \Lambda_2}{1000}, \quad \frac{d^2\Lambda}{dt^2} = \frac{\Lambda_2 - 2\Lambda_1 + \Lambda}{250000}.$$

Conformément à la remarque que nous avons faite dans le n° 1, ces deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne doivent être respectivement appliquées à leurs moyens mouvements.



## CHAPITRE III.

DES PERTURBATIONS PLANÉTAIRES DUES A L'ELLIPTICITÉ DU SOLEIL.

18<sup>bis</sup>. Le Soleil étant doué d'un mouvement de rotation, sa figure ne doit pas être exactement sphérique. Nous allons déterminer l'influence de son ellipticité sur les mouvements des planètes. Si l'on nomme  $\rho$  cette ellipticité,  $q$  le rapport de la force centrifuge à la pesanteur, à l'équateur solaire, et  $\mu$  la déclinaison d'une planète  $m$  relativement à cet équateur; si, de plus, on prend pour unité la masse du Soleil, et que l'on nomme  $D$  son demi-diamètre, il résulte du n° 35 du Livre III que l'ellipticité du Soleil ajoute à la fonction  $R$  du n° 46 du Livre II la quantité

$$\left(\rho - \frac{1}{2}q\right) \frac{D^2}{r^3} \left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right);$$

l'équation différentielle en  $r \delta r$  du n° 46 du Livre II deviendra donc, en n'ayant égard qu'à cette partie de  $R$ , en négligeant le carré de  $\mu$  et en observant qu'ici  $\int dR = g + R$ ,  $g$  étant une arbitraire,

$$0 = \frac{d^2 \cdot r \delta r}{dt^2} + \frac{n^2 a^3 \cdot r \delta r}{r^3} + 2g + \frac{\left(\rho - \frac{1}{2}q\right) D^2}{3r^3}.$$

Pour déterminer la constante  $g$ , nous observerons que la formule (Y) du n° 46 du Livre II donne, dans  $\delta v$ , la quantité

$$3angt + \left(\rho - \frac{1}{2}q\right) \frac{D^2}{a^2} nt.$$

$nt$  exprimant le moyen mouvement de la planète, cette quantité doit être nulle; on a donc

$$g = - \frac{\left(\rho - \frac{1}{2}q\right) D^2}{3a^3},$$



et par conséquent l'équation différentielle en  $r \delta r$  devient, en observant que  $n^2 a^3 = 1$ , et négligeant le carré de  $e$ ,

$$0 = \frac{d^2 \cdot r \delta r}{dt^2} + n^2 r \delta r [1 + 3e \cos(nt + \varepsilon - \varpi)] - \frac{2(\rho - \frac{1}{2}q)}{3} n^2 D^2 \\ + \frac{(\rho - \frac{1}{2}q)}{3} n^2 D^2 [1 + 3e \cos(nt + \varepsilon - \varpi)],$$

ce qui donne, en intégrant,

$$\frac{r \delta r}{a^2} = \frac{1}{3} (\rho - \frac{1}{2}q) \frac{D^2}{a^2} [1 - 3ent \sin(nt + \varepsilon - \varpi)].$$

La partie elliptique de  $\frac{r^2}{a^2}$  est  $1 - 2e \cos(nt + \varepsilon - \varpi)$ ; en y faisant donc varier  $\varpi$  de  $\delta \varpi$ , on aura

$$\frac{r \delta r}{a^2} = -e \delta \varpi \sin(nt + \varepsilon - \varpi).$$

Si l'on compare cette expression de  $\frac{r \delta r}{a^2}$  à la précédente, on aura

$$\delta \varpi = (\rho - \frac{1}{2}q) \frac{D^2}{a^2} nt = (\rho - \frac{1}{2}q) \frac{D^2 t}{a^2};$$

l'effet le plus sensible de l'ellipticité du Soleil sur le mouvement de la planète dans son orbite est donc un mouvement direct dans son périhélie; mais, ce mouvement étant réciproque à la racine carrée de la septième puissance du grand axe de l'ellipse planétaire, on voit qu'il ne peut être sensible que pour Mercure.

Pour avoir l'effet de l'ellipticité du Soleil sur la position de l'orbite, reprenons la troisième des équations (P) du n° 46 du Livre II. Cette équation peut être mise sous la forme suivante

$$0 = \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{n^2 a^3 z}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Prenons pour plan fixe celui de l'équateur solaire, ce qui donne



$\mu^2 = \frac{z^2}{r^2}$ . En observant ensuite que  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , on aura

$$\frac{\partial R}{\partial z} = 3(\rho - \frac{1}{2}q) \frac{n^2 D^2}{a^2} z;$$

l'équation différentielle précédente devient ainsi

$$0 = \frac{d^2 z}{dt^2} + n^2 z \left[ 1 - \frac{3 \partial r}{a} + 3(\rho - \frac{1}{2}q) \frac{D^2}{a^2} \right];$$

or on a, par ce qui précède,

$$\frac{\partial r}{a} = \frac{1}{3}(\rho - \frac{1}{2}q) \frac{D^2}{a^2};$$

on a donc

$$0 = \frac{d^2 z}{dt^2} + n^2 z \left[ 1 + 2(\rho - \frac{1}{2}q) \frac{D^2}{a^2} \right],$$

ce qui donne, en intégrant,

$$z = a\varphi \sin \left\{ nt \left[ 1 + (\rho - \frac{1}{2}q) \frac{D^2}{a^2} \right] - \theta \right\},$$

$\varphi$  étant l'inclinaison de l'orbite à l'équateur solaire, et  $\theta$  étant une constante arbitraire. Ainsi les nœuds de l'orbite sur cet équateur ont un mouvement rétrograde égal au mouvement direct du périhélie, et qui, par conséquent, ne peut être sensible que pour Mercure. On voit en même temps que, l'ellipticité du Soleil n'ayant aucune influence ni sur l'excentricité de l'orbe de la planète ni sur son inclinaison à l'équateur solaire, elle ne peut pas altérer la stabilité du système planétaire.



## CHAPITRE IV.

DES PERTURBATIONS DU MOUVEMENT DES PLANÈTES, PRODUITES PAR L'ACTION  
DE LEURS SATELLITES.

19. Les théorèmes du n° 10 du Livre II offrent un moyen aussi simple qu'exact pour déterminer les perturbations des planètes dues à l'action de leurs satellites. On a vu, dans le numéro cité, que le centre commun de gravité de la planète et de ses satellites décrit à très-peu près une orbite elliptique autour du Soleil. En considérant cet orbite comme étant l'ellipse même de la planète, la position respective des satellites entre eux et par rapport au Soleil donnera celle de la planète par rapport au centre commun de gravité, et par conséquent les perturbations que la planète éprouve de la part de ses satellites. Soient  $M$  la masse de la planète,  $R$  le rayon vecteur du centre commun de gravité,  $U$  l'angle que ce rayon fait avec une droite invariable prise sur l'orbite de ce centre, et d'où l'on compte les longitudes. Soient  $m, m', \dots$  les masses des satellites;  $r, r', \dots$  leurs rayons vecteurs;  $v, v', \dots$  leurs longitudes vraies;  $s, s', \dots$  leurs latitudes au-dessus de l'orbite du centre commun de gravité. Enfin soient  $X, Y, Z$  les coordonnées rectangles de la planète, en supposant leur origine au centre commun de gravité et prenant le rayon  $R$  pour l'axe des  $X$ ,  $Z$  étant la coordonnée perpendiculaire au plan de l'orbite de ce centre. On aura à très-peu près, par la propriété du centre de gravité et en observant que les masses des satellites sont très-petites par rapport à celle de la planète,

$$0 = MX + mr \cos(v - U) + m'r' \cos(v' - U) + \dots,$$

$$0 = MY + mr \sin(v - U) + m'r' \sin(v' - U) + \dots,$$

$$0 = MZ + mrs + m'r's' + \dots$$



La perturbation du rayon vecteur est à très-peu près égale à X, et par conséquent à

$$-\frac{m}{M} r \cos(\nu - U) - \frac{m'}{M} r' \cos(\nu' - U) - \dots$$

La perturbation du mouvement de la planète en longitude est à très-peu près  $\frac{Y}{R}$ , et par conséquent égale à

$$-\frac{m}{M} \frac{r}{R} \sin(\nu - U) - \frac{m'}{M} \frac{r'}{R} \sin(\nu' - U) - \dots$$

Enfin, la perturbation du mouvement de la planète en latitude est à très-peu près  $\frac{Z}{R}$ , et par conséquent égale à

$$-\frac{m}{M} \frac{rs}{R} - \frac{m'}{M} \frac{r's'}{R} - \dots$$

Ces diverses perturbations ne sont sensibles que pour la Terre troublée par la Lune; les masses des satellites de Jupiter sont si petites par rapport à celle de la planète, et leurs éloignations vues du Soleil sont si peu considérables que ces perturbations sont insensibles. Il y a tout lieu de croire que cela a également lieu pour Saturne et Uranus.



## CHAPITRE V.

CONSIDÉRATIONS SUR LA PARTIE ELLIPTIQUE DU RAYON VECTEUR  
ET DU MOUVEMENT DES PLANÈTES.

20. Nous avons déterminé, dans le Chapitre VI du Livre II, les arbitraires de manière que le moyen mouvement et l'équation du centre ne reçussent aucun changement par l'action mutuelle des planètes; or on a, dans l'hypothèse elliptique,  $\frac{1+m}{a^3} = n^2$ , la masse du Soleil étant prise pour unité, ce qui donne

$$a = n^{-\frac{2}{3}}(1 + \frac{1}{3}m);$$

tel est donc le grand axe dont on doit faire usage dans la partie elliptique du rayon vecteur.

Si, comme nous le ferons dans la suite, on suppose

$$a = n^{-\frac{2}{3}}, \quad a' = n'^{-\frac{2}{3}}, \quad \dots,$$

il faudra, dans le calcul de la partie elliptique du rayon vecteur, augmenter respectivement  $a, a', \dots$  des quantités  $\frac{1}{3}ma, \frac{1}{3}m'a', \dots$ ; mais cette augmentation n'est sensible que pour Jupiter et Saturne.

On appliquera ensuite au rayon vecteur les corrections données par les formules du n° 50 du Livre II et par les numéros précédents. Ces corrections contiennent les deux termes

$$-m'afe \cos(nt + \varepsilon - \varpi), \quad -m'af'e' \cos(nt + \varepsilon - \varpi'),$$



$f$  et  $f'$  étant déterminés par les deux équations suivantes

$$f = \frac{2}{3}a^2 \frac{\partial A^{(0)}}{\partial a} + \frac{1}{4}a^3 \frac{\partial^2 A^{(0)}}{\partial a^2},$$

$$f' = \frac{1}{4} \left( aA^{(1)} - a^2 \frac{\partial A^{(1)}}{\partial a} - a^3 \frac{\partial^2 A^{(1)}}{\partial a^2} \right),$$

équations données par le n° 50 du Livre II. La partie précédente du rayon vecteur peut être réunie dans une même Table avec la partie elliptique de ce rayon.



## CHAPITRE VI.

VALEURS NUMÉRIQUES DES DIVERSES QUANTITÉS QUI ENTRENT DANS LES EXPRESSIONS  
DES INÉGALITÉS PLANÉTAIRES.

21. Pour réduire en nombres les formules exposées dans le Livre II  
et dans les Chapitres précédents, on est parti des données suivantes :

*Masses des planètes, celle du Soleil étant prise pour unité.*

Mercure.....	$m = \frac{1}{2025810},$
Vénus.....	$m' = \frac{1}{383130},$
La Terre.....	$m'' = \frac{1}{329630},$
Mars.....	$m''' = \frac{1}{1846082},$
Jupiter.....	$m^{iv} = \frac{1}{1067,09},$
Saturne.....	$m^v = \frac{1}{3359,40},$
Uranus.....	$m^{vi} = \frac{1}{19504}.$

De toutes ces masses, celle de Jupiter est la mieux connue; je l'ai conclue de l'équation suivante, qui résulte du n° 25 du Livre II. Si l'on nomme  $T$  la révolution sidérale d'une planète  $m$ ,  $T'$  celle d'un de ses satellites, dont  $q$  est le sinus de l'angle sous lequel le rayon moyen de son orbite est vu du centre du Soleil à la moyenne distance de la



planète à ce centre; la masse de la planète, celle du Soleil étant prise pour unité, est

$$\frac{q^3 \left(\frac{T}{T'}\right)^2}{1 - q^3 \left(\frac{T}{T'}\right)^2}.$$

On a, relativement au quatrième satellite,

$$q = \sin 1530'', 38,$$

$$T = 4332^j, 602208,$$

$$T' = 16^j, 6890,$$

d'où l'on tire

$$m = \frac{1}{1067,09}.$$

La masse de Saturne a été conclue de la même manière, en supposant la révolution sidérale de son sixième satellite égale à  $15^j, 9453$ , et l'angle sous lequel le rayon moyen de l'orbe de ce satellite est vu du Soleil, dans les distances moyennes de Saturne, égal à  $552'', 47$ . La masse d'Uranus a pareillement été conclue en supposant, conformément aux observations d'Herschel, la durée de la révolution sidérale de son quatrième satellite égale à  $13^j, 4559$ , et le rayon moyen de l'orbe de ce satellite, vu du Soleil, dans la moyenne distance d'Uranus, égal à  $136'', 512$ . Mais les plus grandes élongations de ces satellites à leurs planètes respectives ne sont pas aussi certaines que celle du quatrième satellite de Jupiter. Leur observation mérite toute l'attention des astronomes.

La masse de la Terre a été déterminée de cette manière. Si l'on prend pour unité la moyenne distance de la Terre au Soleil, l'arc décrit par la Terre dans une seconde de temps sera le rapport de la circonférence au rayon, divisé par le nombre des secondes de l'année sidérale, ou par  $36525638'', 4$ . En divisant le carré de cet arc par le diamètre, on aura  $\frac{1479565}{10^{20}}$  pour son sinus verse : c'est la quantité dont la Terre tombe vers le Soleil pendant une seconde, en vertu de son mouvement relatif



autour de cet astre. Sur le parallèle terrestre dont le carré du sinus de latitude est  $\frac{1}{3}$ , l'attraction de la Terre fait tomber les corps dans une seconde de  $3^m,66553$ . Pour réduire cette attraction à la moyenne distance de la Terre au Soleil, il faut la multiplier par le carré du sinus de la parallaxe solaire, et diviser le produit par le nombre de mètres que renferme cette distance; or le rayon terrestre sur le parallèle que nous considérons est de  $6369374$  mètres; en divisant donc ce nombre par le sinus de la parallaxe solaire, supposée égale à  $27'',2$ , on aura le rayon moyen de l'orbe terrestre exprimé en mètres; d'où il suit que l'effet de l'attraction de la Terre, à la moyenne distance de cette planète au Soleil, est égal au produit de la fraction  $\frac{3,66553}{6369374}$  par le cube du sinus de  $27'',2$ ; il est par conséquent égal à  $\frac{4,48855}{10^{20}}$ . En retranchant cette fraction de  $\frac{1479565}{10^{20}}$ , on aura  $\frac{1479560,5}{10^{20}}$  pour l'effet de l'attraction du Soleil à la même distance; les masses du Soleil et de la Terre sont donc dans le rapport des nombres  $1479560,5$  et  $4,4885$ , d'où il suit que la masse de la Terre est  $\frac{1}{329630}$ . Si la parallaxe du Soleil est un peu différente de celle que nous avons admise, la valeur de la masse de la Terre doit varier comme le cube de cette parallaxe, comparé à celui de  $27'',2$ .

J'ai conclu la masse de Vénus des formules, que je donnerai dans la suite, de la diminution séculaire de l'obliquité de l'écliptique à l'équateur, en supposant cette diminution égale à  $154'',30$ . C'est, en effet, celle qui résulte des observations qui me paraissent mériter le plus de confiance. Quant aux masses de Mercure et de Mars, j'ai supposé, d'après les observations, les diamètres moyens de Mercure, Mars et Jupiter, vus à la moyenne distance de la Terre au Soleil, respectivement de  $21'',60$ ,  $35'',19$  et  $626'',04$ . Ces diamètres donneraient leurs masses, celle de Jupiter étant connue, si l'on connaissait la loi de leurs densités; or, en comparant les masses de la Terre, de Jupiter et de Saturne à leurs volumes, on trouve que la densité de ces trois planètes est à peu près en raison inverse de leurs moyennes distances au Soleil; j'ai donc adopté la même hypothèse relativement aux trois planètes



Mercure, Mars et Jupiter, d'où résultent les valeurs précédentes des masses de Mercure et de Mars. L'irradiation et les autres difficultés qu'offre l'observation des diamètres planétaires, jointes à l'incertitude de l'hypothèse adoptée sur la loi de leurs densités, rend ces valeurs d'autant plus incertaines, que cette hypothèse s'éloigne de la vérité, relativement aux masses de Vénus et d'Uranus. Heureusement Mercure et Mars n'ont qu'une très-petite influence sur le système planétaire, et il sera facile de corriger les résultats suivants qu'elles affectent, lorsque le développement des inégalités séculaires aura fait connaître exactement leurs masses.

22. *Moyens mouvements sidéraux des planètes, pour une année julienne de  $365\frac{1}{4}$ , ou valeurs de  $n, n', \dots$*

Mercure.....	$n = 16608076,50,$
Vénus.....	$n' = 6501980,00,$
La Terre.....	$n'' = 3999930,09,$
Mars.....	$n''' = 2126701,00,$
Jupiter.....	$n^{iv} = 337210,78,$
Saturne.....	$n^v = 135792,34,$
Uranus.....	$n^{vi} = 47606,62.$

En employant pour  $n, n', \dots$  ces valeurs, le temps  $t$  désigne un nombre d'années juliennes. De là, en prenant pour unité la moyenne distance du Soleil à la Terre, on a conclu, par la loi de Kepler, les distances suivantes des planètes au Soleil :

*Distances moyennes des planètes au Soleil, ou demi-grands axes de leurs orbites.*

Mercure.....	$a = 0,38709812,$
Vénus.....	$a' = 0,72333230,$
La Terre.....	$a'' = 1,00000000,$
Mars.....	$a''' = 1,52369352,$
Jupiter.....	$a^{iv} = 5,20116636,$
Saturne.....	$a^v = 9,53787090,$
Uranus.....	$a^{vi} = 19,18330500.$

L'action mutuelle des planètes altère un peu ces moyennes distances; nous déterminerons, dans la suite, ces altérations.



*Rapports des excentricités aux moyennes distances,  
ou valeurs de  $e, e', \dots$ , pour 1750.*

Mercure.....	$e = 0,20551320,$
Vénus.....	$e' = 0,00688405,$
La Terre.....	$e'' = 0,01681395,$
Mars.....	$e''' = 0,09308767,$
Jupiter.....	$e^{IV} = 0,04807670,$
Saturne.....	$e^V = 0,05622460,$
Uranus.....	$e^{VI} = 0,04669950.$

*Longitudes des périhélie en 1750, ou valeurs de  $\varpi, \varpi', \dots$*

Mercure.....	$\varpi = 81,7401,$
Vénus.....	$\varpi' = 142,1241,$
La Terre.....	$\varpi'' = 109,5790,$
Mars.....	$\varpi''' = 368,3037,$
Jupiter.....	$\varpi^{IV} = 11,5012,$
Saturne.....	$\varpi^V = 97,9466,$
Uranus.....	$\varpi^{VI} = 185,1262.$

*Inclinaisons des orbites à l'écliptique en 1750, ou valeurs de  $\varphi, \varphi', \dots$*

Mercure.....	$\varphi = 7,7778,$
Vénus.....	$\varphi' = 3,7701,$
Mars.....	$\varphi''' = 2,0556,$
Jupiter.....	$\varphi^{IV} = 1,4636,$
Saturne.....	$\varphi^V = 2,7762,$
Uranus.....	$\varphi^{VI} = 0,8596,$

*Longitudes des nœuds ascendants sur l'écliptique de 1750,  
ou valeurs de  $\theta, \theta', \dots$*

Mercure.....	$\theta = 50,3836,$
Vénus.....	$\theta' = 82,7093,$
Mars.....	$\theta''' = 52,9376,$
Jupiter.....	$\theta^{IV} = 108,7846,$
Saturne.....	$\theta^V = 123,8960,$
Uranus.....	$\theta^{VI} = 80,7015.$

Toutes ces longitudes sont comptées de l'équinoxe moyen du printemps, à l'époque du 31 décembre 1749, à midi, temps moyen à



Paris. On doit observer ici que l'on entend par *longitude du périhélie* la distance du périhélie au nœud ascendant, comptée sur l'orbite, plus la longitude du nœud.

23. On a obtenu les résultats suivants par les formules du n° 49 du Livre II :

MERCURE ET VÉNUS.

$$\alpha = \frac{a}{a'} = 0,53516076,$$

d'où l'on a conclu

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,145969210,$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,515245873.$$

Ensuite,

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,1721751,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0,6057052,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,2465877,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0,1107665,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0,0520855,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(5)} = 0,0251378,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(6)} = 0,0123166,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(7)} = 0,0060633,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(8)} = 0,0029287;$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(9)} = 0,0012758;$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 0,780206,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 1,457891,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 1,070071,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 0,691487,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 0,423818,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha} = 0,252376,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha} = 0,147708,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{d\alpha} = 0,085953,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(8)}}{d\alpha} = 0,050726,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 2,756285,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 2,426165,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 3,395022,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} = 3,381072,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2} = 2,826559,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^2} = 2,137906,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha^2} = 1,511016,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{d\alpha^2} = 1,014134.$$



$$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx^3} = 11,308703, \quad \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx^3} = 12,064245, \quad \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^3} = 11,983424,$$

$$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx^3} = 14,584366, \quad \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx^3} = 16,067040, \quad \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{dx^3} = 15,617274,$$

$$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{dx^3} = 13,720218;$$

$$\frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^4} = 69,60594, \quad \frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx^4} = 82,36773, \quad \frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx^4} = 92,72610,$$

$$\frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{dx^4} = 105,33962;$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 4,214154, \quad b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 3,035376, \quad b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 1,950536,$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(3)} = 1,192372, \quad b_{\frac{3}{2}}^{(4)} = 0,708667, \quad b_{\frac{3}{2}}^{(5)} = 0,413762,$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(6)} = 0,238807;$$

$$\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{dx} = 12,50630, \quad \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{dx} = 9,76666, \quad \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{dx} = 7,08399,$$

$$\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(5)}}{dx} = 4,88781;$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{dx^2} = 78,09476, \quad \frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{dx^2} = 67,14764.$$

## MERCURE ET LA TERRE.

$$\alpha = \frac{a}{a''} = 0,38709812,$$

d'où l'on a conclu

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,07565247,$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,37970591.$$



Ensuite,

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,081980, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0,411140, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,120178,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0,038900, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0,013202, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(5)} = 0,004603,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(6)} = 0,001629, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(7)} = 0,000573, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(8)} = 0,000177;$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 0,464378, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 1,199633, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 0,665739,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 0,316756, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 0,141792, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha} = 0,061433,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha} = 0,026130, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{d\alpha} = 0,011153;$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 1,672199, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 1,220775, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 2,235935,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} = 1,852364, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2} = 1,197245, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^2} = 0,670874;$$

$$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3} = 5,49232, \quad \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3} = 5,45663, \quad \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^3} = 6,51373;$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 2,871833, \quad b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 1,576062, \quad b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 0,747619,$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(3)} = 0,334212, \quad b_{\frac{3}{2}}^{(4)} = 0,153779;$$

$$\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 3,05535.$$

MERCURE ET MARS.

$$\alpha = \frac{a}{a''} = 0,25405312,$$

d'où l'on a conclu

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,03240384,$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,25198657.$$



Ensuite,

$$\begin{aligned}
 b_{\frac{1}{2}}^{(0)} &= 2,033500, & b_{\frac{1}{2}}^{(1)} &= 0,260462, & b_{\frac{1}{2}}^{(2)} &= 0,049765, \\
 b_{\frac{1}{2}}^{(3)} &= 0,010546, & b_{\frac{1}{2}}^{(4)} &= 0,002331, & b_{\frac{1}{2}}^{(5)} &= 0,000538; \\
 \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} &= 0,273829, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} &= 1,077839, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} &= 0,402980, \\
 \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} &= 0,127139, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha} &= 0,037781; \\
 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} &= 1,244725, & \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} &= 0,656780, & \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} &= 1,778641, \\
 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} &= 1,050458; \\
 b_{\frac{3}{2}}^{(0)} &= 2,322536, & b_{\frac{3}{2}}^{(1)} &= 0,863876, & b_{\frac{3}{2}}^{(2)} &= 0,272085.
 \end{aligned}$$

MERCURE ET JUPITER.

$$\alpha = \frac{a}{a^{iv}} = 0,07442555,$$

d'où l'on a conclu

$$\begin{aligned}
 b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} &= 2,00277053, \\
 b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} &= -0,07437397.
 \end{aligned}$$

En déterminant, au moyen de ces équations et des formules du n° 49 du Livre II, les valeurs de  $b_{\frac{1}{2}}^{(0)}$ ,  $b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$ , ..., on a reconnu qu'elles deviennent de plus en plus inexactes, ce qui a lieu dans tous les cas où  $\alpha$  est peu considérable, parce que alors ces valeurs sont les différences de nombres qui diffèrent très-peu entre eux; en sorte qu'il faudrait avoir ces nombres avec une très-grande précision, pour déterminer exactement ces différences, ce qui exigerait l'usage des Tables de logarithmes à dix ou douze décimales. Pour obvier à cet inconvénient,



il faut recourir à la valeur de  $b_s^{(i)}$  en séries : on trouve, par le numéro cité,

$$b_s^{(i)} = 2 \frac{s(s+1)(s+2)\dots(s+i-1)}{1.2.3\dots i} \alpha^i \left( 1 + \frac{s}{1} \frac{s+i}{i+1} \alpha^2 + \frac{s(s+1)}{1.2} \frac{(s+i)(s+i+1)}{(i+1)(i+2)} \alpha^4 + \frac{s(s+1)(s+2)}{1.2.3} \frac{(s+i)(s+i+1)(s+i+2)}{(i+1)(i+2)(i+3)} \alpha^6 + \dots \right).$$

Cette valeur de  $b_s^{(i)}$  est ici très-convergente, à cause de la petitesse de  $\alpha$  : c'est par son moyen que l'on a déterminé les valeurs de  $b_{\frac{1}{2}}^{(0)}$ ,  $b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$ , ...,  $b_{\frac{3}{2}}^{(0)}$ , ..., dans tous les cas où  $\alpha$  est peu considérable. On a trouvé de cette manière, pour Mercure et Jupiter,

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,002778, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0,074581, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,004164,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0,000258, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0,000017;$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 0,074891, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 1,006269, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 0,111380,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 0,010428;$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 1,018876, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 0,171781, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 1,499780;$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 2,025143, \quad b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 0,225613, \quad b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 0,020984.$$

MERCURE ET SATURNE.

$$\alpha = \frac{a}{a^v} = 0,04058547,$$

d'où l'on a conclu

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,00082368,$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,04057711.$$



Ensuite,

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,000823, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0,040610, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,001236,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0,000042, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0,000001;$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dz} = 0,040662, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dz} = 1,001841, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dz} = 0,060919,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dz} = 0,003085;$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dz^2} = 1,003904, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dz^2} = 0,091840, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dz^2} = 1,469188.$$

#### MERCURE ET URANUS.

$$\alpha = \frac{a}{a'} = 0,02017895,$$

d'où l'on a conclu

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,00020360,$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,02017792.$$

Ensuite,

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,000182, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0,020183, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,000306;$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dz} = 0,020196, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dz} = 1,000913.$$

#### VÉNUS ET LA TERRE.

$$\alpha = \frac{a'}{a''} = 0,72333230,$$

d'où l'on a conclu

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,27159162,$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,67226315.$$



Ensuite,

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,386343, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0,942413, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,527589,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0,323359, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0,206811, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(5)} = 0,135616,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(6)} = 0,090412, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(7)} = 0,061101, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(8)} = 0,041731;$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx} = 1,643709, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx} = 2,272414, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx} = 2,069770,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx} = 1,738781, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx} = 1,407491, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{dx} = 1,113704,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{dx} = 0,867147, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{dx} = 0,668830;$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx^2} = 7,719923, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx^2} = 7,531096, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^2} = 8,558595,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx^2} = 9,112527, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx^2} = 9,107400, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{dx^2} = 8,634030,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{dx^2} = 7,842733;$$

$$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx^3} = 56,55335, \quad \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx^3} = 57,35721, \quad \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^3} = 58,19633,$$

$$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx^3} = 62,87646, \quad \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx^3} = 66,32409, \quad \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{dx^3} = 70,54326;$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 9,992539, \quad b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 8,871894, \quad b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 7,386580,$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(3)} = 5,953940, \quad b_{\frac{3}{2}}^{(4)} = 4,704321, \quad b_{\frac{3}{2}}^{(5)} = 3,652052;$$

$$\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{dx} = 56,65440, \quad \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{dx} = 50,90290.$$



## VÉNUS ET MARS.

$$\alpha = \frac{a'}{a''} = 0,47472320,$$

d'où l'on a conclu

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,11436649,$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,46094390.$$

Ensuite,

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,129668, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0,521624, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,187726,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0,074675, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0,031127, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(5)} = 0,013337,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(6)} = 0,005829;$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 0,631752, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 1,330781, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 0,884106,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 0,510976, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 0,279002, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha} = 0,147606;$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 2,192778, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 1,815836, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 2,795574,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} = 2,628516, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2} = 2,004429;$$

$$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^3} = 7,65440, \quad \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^3} = 8,45655, \quad \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3} = 8,17676,$$

$$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3} = 10,66513;$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 3,523572, \quad b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 2,304481, \quad b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 1,325959,$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(3)} = 0,722687;$$

$$\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 8,47521.$$



## VÉNUS ET JUPITER.

$$\alpha = \frac{a'}{a^{iv}} = 0,13907116,$$

d'où l'on a conclu

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,00968215,$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,13873412.$$

Ensuite,

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,009778,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0,140092,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,014623,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0,001695,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0,000206,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(5)} = 0,000026;$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 0,142160,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 1,022206,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 0,212046,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 0,036783,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 0,006111;$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 1,067532,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 0,325869,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 1,575190,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} = 0,533951;$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 2,089736,$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 0,432801,$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 0,075054.$$

## VÉNUS ET SATURNE.

$$\alpha = \frac{a'}{a^v} = 0,07583790,$$

d'où l'on a conclu

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,00287673,$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,07578334.$$



Ensuite,

$$\begin{aligned}
 b_{\frac{1}{2}}^{(0)} &= 2,002886, & b_{\frac{1}{2}}^{(1)} &= 0,076002, & b_{\frac{1}{2}}^{(2)} &= 0,004323, \\
 b_{\frac{1}{2}}^{(3)} &= 0,000273, & b_{\frac{1}{2}}^{(4)} &= 0,000018; \\
 \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} &= 0,076331, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} &= 1,006490, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} &= 0,114267, \\
 \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} &= 0,011085; \\
 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} &= 1,019629, & \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} &= 0,172510, & \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} &= 1,419950; \\
 b_{\frac{3}{2}}^{(0)} &= 2,026116, & b_{\frac{3}{2}}^{(1)} &= 0,229988, & b_{\frac{3}{2}}^{(2)} &= 0,021791.
 \end{aligned}$$

#### VÉNUS ET URANUS.

$$\alpha = \frac{a'}{a^{v_1}} = 0,03770634,$$

d'où l'on a conclu

$$\begin{aligned}
 b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} &= 2,00071095, \\
 b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} &= -0,03769964.
 \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
 b_{\frac{1}{2}}^{(0)} &= 2,000712, & b_{\frac{1}{2}}^{(1)} &= 0,037725, & b_{\frac{1}{2}}^{(2)} &= 0,001067, \\
 b_{\frac{1}{2}}^{(3)} &= 0,000034; \\
 \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} &= 0,716690, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} &= 1,000829, & \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} &= 0,056634.
 \end{aligned}$$

#### LA TERRE ET MARS.

$$\alpha = \frac{\alpha''}{\alpha'''} = 0,65630030,$$

d'où l'on a conclu

$$\begin{aligned}
 b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} &= 2,22192172, \\
 b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} &= -0,61874262.
 \end{aligned}$$



Ensuite,

$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,291132,$	$b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0,804563,$	$b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,405584,$
$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0,224598,$	$b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0,129973,$	$b_{\frac{1}{2}}^{(5)} = 0,077170,$
$b_{\frac{1}{2}}^{(6)} = 0,046595,$	$b_{\frac{1}{2}}^{(7)} = 0,028480,$	$b_{\frac{1}{2}}^{(8)} = 0,017565;$
$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx} = 1,228078,$	$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx} = 1,871211,$	$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx} = 1,601236,$
$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx} = 1,240990,$	$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx} = 0,920710,$	$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{dx} = 0,666207,$
$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{dx} = 0,473942,$	$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{dx} = 0,333444;$	
$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx^2} = 4,985108,$	$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx^2} = 4,744671,$	$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^2} = 5,731111,$
$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx^2} = 6,057860,$	$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx^2} = 5,776483,$	$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{dx^2} = 5,141993,$
$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{dx^2} = 4,388001;$		
$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx^3} = 29,03400,$	$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx^3} = 29,78930,$	$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^3} = 30,18848,$
$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx^3} = 33,29381,$	$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx^3} = 36,32093,$	$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{dx^3} = 37,23908;$
$b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 6,856336,$	$b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 5,727893,$	$b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 4,404530,$
$b_{\frac{3}{2}}^{(3)} = 3,255964,$	$b_{\frac{3}{2}}^{(4)} = 2,351254,$	$b_{\frac{3}{2}}^{(5)} = 1,671668,$
$b_{\frac{3}{2}}^{(6)} = 1,174650;$		
$\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{dx} = 31,80897,$	$\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{dx} = 32,26285,$	$\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(5)}}{dx} = 18,25867.$



## LA TERRE ET JUPITER.

$$\alpha = \frac{a''}{a^v} = 0,19226461,$$

d'où l'on a conclu

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,01852593,$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,19137205.$$

Ensuite,

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,018885,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0,195003,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,028195,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0,004516,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0,000779,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(5)} = 0,000132,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(6)} = 0,000023;$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx} = 0,200586,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx} = 1,043204,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx} = 0,297995,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx} = 0,070932,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dx} = 0,016369,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{dx} = 0,003448;$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx^2} = 1,132355,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx^2} = 0,466165,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^2} = 1,628667,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dx^2} = 0,746681;$$

$$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dx^3} = 1,472714,$$

$$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dx^3} = 2,874986,$$

$$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dx^3} = 1,418830;$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 2,176460,$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 0,619063,$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 0,148198,$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(3)} = 0,032439.$$

## LA TERRE ET SATURNE.

$$\alpha = \frac{a''}{a^v} = 0,10484520,$$



d'où l'on a conclu

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,00550004,$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,10470094.$$

Ensuite,

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,005535, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0,105283, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,008282,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0,000724, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0,000066;$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 0,106155, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 1,012536, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 0,158723,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 0,020779;$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 1,037816, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 0,246193, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 1,526303;$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 2,050321, \quad b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 0,321144, \quad b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 0,041977.$$

LA TERRE ET URANUS.

$$\alpha = \frac{a''}{a^{v_1}} = 0,05212866,$$

d'où l'on a conclu

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,00135893,$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,05211095.$$

Ensuite,

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,001355, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0,052182, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,002040,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0,000089;$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 0,052288, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 1,003060, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 0,078449.$$



## MARS ET JUPITER.

$$\alpha = \frac{a^m}{a^{v'}} = 0,29295212,$$

d'où l'on a conclu

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,04314576,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,28977479.$$

Ensuite,

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,045112, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0,302922, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,066812,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0,016357, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0,004192, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(5)} = 0,001109,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(6)} = 0,000297, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(7)} = 0,000081;$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 0,324004, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 1,105998, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 0,473717,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 0,172096, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 0,058420, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha} = 0,019258,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha} = 0,006173;$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 1,338759, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 0,794557, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 1,871538,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} = 1,258858, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2} = 0,623184;$$

$$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^3} = 2,69358, \quad \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^3} = 3,77722, \quad \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3} = 2,91068,$$

$$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3} = 5,47068;$$



$$b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 2,444762, \quad b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 1,040206, \quad b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 0,376693,$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(3)} = 0,127942;$$

$$\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 3,48815, \quad \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 4,80540, \quad \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 2,99684.$$

## MARS ET SATURNE.

$$\alpha = \frac{\alpha'''}{\alpha'} = 0,15975187,$$

d'où l'on a conclu

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,01278081,$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,15924060.$$

Ensuite,

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,012945, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0,161305, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,019347,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0,002577, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0,000360, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(5)} = 0,000052;$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 0,164463, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 1,029493, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 0,244843,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 0,048740, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 0,009065;$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 1,090095, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 0,379322, \quad \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 1,596248,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} = 0,620632;$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 2,119585, \quad b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 0,503071, \quad b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 0,100136.$$



## MARS ET URANUS.

$$\alpha = \frac{a'''}{a^{v'}} = 0,07942807,$$

d'où l'on a conclu

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,00315565,$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,07936538.$$

Ensuite,

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,003167, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0,079617, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,004746,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0,000314, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0,000022;$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 0,079995, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 1,007144, \quad \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 0,119822,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 0,011982.$$

## JUPITER ET SATURNE.

$$\alpha = \frac{a^{iv}}{a^v} = 0,54531725,$$

d'où l'on a conclu

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,15168241,$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,52421272.$$

Ensuite,

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,1802348, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0,6206406, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,2576379,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0,1179750, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0,0565522, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(5)} = 0,0278360,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(6)} = 0,0139345, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(7)} = 0,0070481, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(8)} = 0,0035837,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(9)} = 0,0018056, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(10)} = 0,0008632, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(11)} = 0,0003223;$$



$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dz} = 0,808789,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dz} = 1,483154,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dz} = 1,105160,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dz} = 0,726550,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dz} = 0,453285,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{dz} = 0,274717,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{dz} = 0,163506,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{dz} = 0,096019,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(8)}}{dz} = 0,056171,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(9)}}{dz} = 0,033083,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(10)}}{dz} = 0,020265;$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dz^2} = 2,875229,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dz^2} = 2,552788,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dz^2} = 3,521040,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dz^2} = 3,533622,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dz^2} = 2,995647,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{dz^2} = 2,302428,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{dz^2} = 1,664586,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{dz^2} = 1,144377,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(8)}}{dz^2} = 0,760603,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(9)}}{dz^2} = 0,485135;$$

$$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dz^3} = 12,128630,$$

$$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dz^3} = 12,878804,$$

$$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dz^3} = 12,832050,$$

$$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dz^3} = 15,454850,$$

$$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dz^3} = 17,058155,$$

$$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{dz^3} = 16,655445,$$

$$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{dz^3} = 14,958762,$$

$$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{dz^3} = 12,234874,$$

$$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(8)}}{dz^3} = 9,566420;$$

$$\frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{dz^4} = 84,40159,$$

$$\frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{dz^4} = 83,94825,$$

$$\frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{dz^4} = 87,3027,$$

$$\frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{dz^4} = 89,8615,$$

$$\frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{dz^4} = 101,3809,$$

$$\frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{dz^4} = 113,5238,$$

$$\frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{dz^4} = 118,6607,$$

$$\frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{dz^4} = 115,9588;$$



$\frac{d^5 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^5} = 747,480,$	$\frac{d^5 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^5} = 753,417,$	$\frac{d^5 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^5} = 761,843,$
$\frac{d^5 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^5} = 785,884,$	$\frac{d^5 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^5} = 819,180,$	$\frac{d^5 b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^5} = 884,505,$
$\frac{d^5 b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha^5} = 912,301;$		
$b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 4,358387,$	$b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 3,185493,$	$b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 2,082131,$
$b_{\frac{3}{2}}^{(3)} = 1,295672,$	$b_{\frac{3}{2}}^{(4)} = 0,784084,$	$b_{\frac{3}{2}}^{(5)} = 0,466047,$
$b_{\frac{3}{2}}^{(6)} = 0,273629,$	$b_{\frac{3}{2}}^{(7)} = 0,158799,$	$b_{\frac{3}{2}}^{(8)} = 0,092290,$
$b_{\frac{3}{2}}^{(9)} = 0,053922;$		
$\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 14,681324,$	$\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 15,239657,$	$\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 13,416026,$
$\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 10,598611,$	$\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 7,802247,$	$\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(5)}}{d\alpha} = 5,470398,$
$\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(6)}}{d\alpha} = 3,710043,$	$\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(7)}}{d\alpha} = 2,426079,$	$\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(8)}}{d\alpha} = 1,563695;$
$\frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 96,68536,$	$\frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 94,91701,$	$\frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 93,19282,$
$\frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} = 86,90215,$	$\frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2} = 75,08115,$	$\frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(5)}}{d\alpha^2} = 61,10155,$
$\frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(6)}}{d\alpha^2} = 47,48185,$	$\frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(7)}}{d\alpha^2} = 35,74355;$	
$\frac{d^3 b_{\frac{3}{2}}^{(0)}}{d\alpha^3} = 830,0586,$	$\frac{d^3 b_{\frac{3}{2}}^{(1)}}{d\alpha^3} = 830,1580,$	$\frac{d^3 b_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3} = 810,1045,$
$\frac{d^3 b_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3} = 785,5855,$	$\frac{d^3 b_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha^3} = 740,6775,$	$\frac{d^3 b_{\frac{3}{2}}^{(5)}}{d\alpha^3} = 666,4080,$
$\frac{d^3 b_{\frac{3}{2}}^{(6)}}{d\alpha^3} = 574,9115.$		



JUPITER ET URANUS.

$$\alpha = \frac{a^{1v}}{a^{v1}} = 0,27112980,$$

d'où l'on a conclu

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,03692776,$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,26861497.$$

Ensuite,

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,038359,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0,278966,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,056906,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0,012879,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0,003058,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(5)} = 0,000745,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(6)} = 0,000185;$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 0,295410,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 1,089551,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 0,433630,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 0,145398,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 0,045930,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha} = 0,015410;$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 1,283434,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 0,714932,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 1,815451,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} = 1,133359;$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 2,372983,$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 0,938794,$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 0,315186,$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(3)} = 0,099260.$$

SATURNE ET URANUS.

$$\alpha = \frac{a^v}{a^{v1}} = 0,49719638,$$

d'où l'on a conclu

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,12564287,$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,48131675.$$



Ensuite,

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,144440,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0,086834,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(6)} = 0,007728,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 0,683055,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 0,572896,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha} = 0,098799,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 2,377102,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} = 2,881218,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha^2} = 1,067430;$$

$$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^3} = 8,798999,$$

$$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3} = 11,904140,$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 3,750905,$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(3)} = 0,872105,$$

$$\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 9,75656,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0,552007,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(7)} = 0,037909,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(10)} = 0,003522,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 1,373806,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{d\alpha} = 0,327198,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(10)}}{d\alpha} = 0,053642;$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2} = 2,017767,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{d\alpha^2} = 2,278077,$$

$$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^3} = 9,578267,$$

$$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{d\alpha^3} = 12,988670,$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 2,547992,$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(4)} = 0,482564,$$

$$\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 7,24097,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,208313,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(5)} = 0,016990,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(8)} = 0,001547;$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 0,949128,$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha} = 0,181370,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 2,992245,$$

$$\frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^2} = 1,616470,$$

$$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3} = 9,425450,$$

$$\frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^3} = 12,135721;$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 1,530452,$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(5)} = 0,262146;$$

$$\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 4,95052.$$





CHAPITRE VII.

EXPRESSIONS NUMÉRIQUES DES VARIATIONS SÉCULAIRES DES ÉLÉMENTS  
DES ORBITES PLANÉTAIRES.

24. Nous allons présentement donner les valeurs numériques des variations séculaires des éléments des orbites planétaires. Reprenons pour cela les variations différentielles des excentricités, des périhélies, des inclinaisons et des nœuds des orbites, données dans les nos 58 et 60 du Livre II. Pour les réduire en nombres, il faut d'abord déterminer les valeurs numériques des quantités  $(0, 1)$ ,  $\boxed{0, 1}$ , .... On a d'abord calculé les valeurs de  $(0, 1)$  et  $\boxed{0, 1}$ , au moyen des formules suivantes, données dans le n° 55 du Livre II,

$$(0, 1) = -\frac{3m'n\alpha^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{4(1-\alpha^2)^2}, \quad \boxed{0, 1} = -\frac{3m'n\alpha \left[ (1+\alpha^2) b_{\frac{1}{2}}^{(1)} + \frac{1}{2}\alpha b_{\frac{1}{2}}^{(0)} \right]}{2(1-\alpha^2)^2}.$$

On en a conclu les valeurs de  $(1, 0)$  et  $\boxed{1, 0}$ , au moyen des équations suivantes, trouvées dans le même numéro,

$$(1, 0) = \frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}} (0, 1), \quad \boxed{1, 0} = \frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}} \boxed{0, 1}.$$

On a obtenu de cette manière les résultats suivants réduits en secondes, et dans lesquels les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 se rapportent respectivement à Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne et Uranus. On a multiplié les masses précédentes des planètes respectivement par les facteurs indéterminés  $1 + \mu$ ,  $1 + \mu'$ ,  $1 + \mu''$ , ..., afin



de pouvoir corriger immédiatement ces résultats, quand on aura les corrections des masses.

$(0, 1) = (1 + \mu') \cdot 9'', 421152,$	$\boxed{0, 1} = (1 + \mu') \cdot 6'', 053725,$
$(0, 2) = (1 + \mu'') \cdot 2'', 974746,$	$\boxed{0, 2} = (1 + \mu'') \cdot 1'', 411096,$
$(0, 3) = (1 + \mu''') \cdot 0'', 125403,$	$\boxed{0, 3} = (1 + \mu''') \cdot 0'', 039496,$
$(0, 4) = (1 + \mu^{iv}) \cdot 4'', 862570,$	$\boxed{0, 4} = (1 + \mu^{iv}) \cdot 0'', 451633,$
$(0, 5) = (1 + \mu^v) \cdot 0'', 248641,$	$\boxed{0, 5} = (1 + \mu^v) \cdot 0'', 012610,$
$(0, 6) = (1 + \mu^{vi}) \cdot 0'', 005252,$	$\boxed{0, 6} = (1 + \mu^{vi}) \cdot 0'', 000129;$
$(1, 0) = (1 + \mu) \cdot 1'', 303450,$	$\boxed{1, 0} = (1 + \mu) \cdot 0'', 837553,$
$(1, 2) = (1 + \mu'') \cdot 22'', 889753,$	$\boxed{1, 2} = (1 + \mu'') \cdot 19'', 058562,$
$(1, 3) = (1 + \mu''') \cdot 0'', 457288,$	$\boxed{1, 3} = (1 + \mu''') \cdot 0'', 263124,$
$(1, 4) = (1 + \mu^{iv}) \cdot 12'', 750512,$	$\boxed{1, 4} = (1 + \mu^{iv}) \cdot 2'', 211195,$
$(1, 5) = (1 + \mu^v) \cdot 0'', 640032,$	$\boxed{1, 5} = (1 + \mu^v) \cdot 0'', 060621,$
$(1, 6) = (1 + \mu^{vi}) \cdot 0'', 013439,$	$\boxed{1, 6} = (1 + \mu^{vi}) \cdot 0'', 000634;$
$(2, 0) = (1 + \mu) \cdot 0'', 301154,$	$\boxed{2, 0} = (1 + \mu) \cdot 0'', 142855,$
$(2, 1) = (1 + \mu') \cdot 16'', 749060,$	$\boxed{2, 1} = (1 + \mu') \cdot 13'', 945671,$
$(2, 3) = (1 + \mu''') \cdot 1'', 336417,$	$\boxed{2, 3} = (1 + \mu''') \cdot 1'', 027656,$
$(2, 4) = (1 + \mu^{iv}) \cdot 21'', 444015,$	$\boxed{2, 4} = (1 + \mu^{iv}) \cdot 5'', 129740,$
$(2, 5) = (1 + \mu^v) \cdot 1'', 050745,$	$\boxed{2, 5} = (1 + \mu^v) \cdot 0'', 137390,$
$(2, 6) = (1 + \mu^{vi}) \cdot 0'', 021899,$	$\boxed{2, 6} = (1 + \mu^{vi}) \cdot 0'', 001428;$
$(3, 0) = (1 + \mu) \cdot 0'', 057600,$	$\boxed{3, 0} = (1 + \mu) \cdot 0'', 018142,$
$(3, 1) = (1 + \mu') \cdot 1'', 518147,$	$\boxed{3, 1} = (1 + \mu') \cdot 0'', 873545,$
$(3, 2) = (1 + \mu'') \cdot 6'', 063413,$	$\boxed{3, 2} = (1 + \mu'') \cdot 4'', 662522,$
$(3, 4) = (1 + \mu^{iv}) \cdot 44'', 479510,$	$\boxed{3, 4} = (1 + \mu^{iv}) \cdot 16'', 108309,$
$(3, 5) = (1 + \mu^v) \cdot 2'', 031918,$	$\boxed{3, 5} = (1 + \mu^v) \cdot 0'', 404446,$
$(3, 6) = (1 + \mu^{vi}) \cdot 0'', 041468,$	$\boxed{3, 6} = (1 + \mu^{vi}) \cdot 0'', 004114;$



$(4, 0) = (1 + \mu) \cdot 0'', 000699,$	$\boxed{4, 0} = (1 + \mu) \cdot 0'', 000065,$
$(4, 1) = (1 + \mu') \cdot 0'', 013244,$	$\boxed{4, 1} = (1 + \mu') \cdot 0'', 002297,$
$(4, 2) = (1 + \mu'') \cdot 0'', 030439,$	$\boxed{4, 2} = (1 + \mu'') \cdot 0'', 007281,$
$(4, 3) = (1 + \mu''') \cdot 0'', 013916,$	$\boxed{4, 3} = (1 + \mu''') \cdot 0'', 005040,$
$(4, 5) = (1 + \mu^v) \cdot 23'', 771411,$	$\boxed{4, 5} = (1 + \mu^v) \cdot 15'', 537640,$
$(4, 6) = (1 + \mu^{vi}) \cdot 0'', 298294,$	$\boxed{4, 6} = (1 + \mu^{vi}) \cdot 0'', 100143;$
$(5, 0) = (1 + \mu) \cdot 0'', 000083,$	$\boxed{5, 0} = (1 + \mu) \cdot 0'', 000004,$
$(5, 1) = (1 + \mu') \cdot 0'', 001545,$	$\boxed{5, 1} = (1 + \mu') \cdot 0'', 000146,$
$(5, 2) = (1 + \mu'') \cdot 0'', 003467,$	$\boxed{5, 2} = (1 + \mu'') \cdot 0'', 000454,$
$(5, 3) = (1 + \mu''') \cdot 0'', 001478,$	$\boxed{5, 3} = (1 + \mu''') \cdot 0'', 000294,$
$(5, 4) = (1 + \mu^{iv}) \cdot 55'', 263722,$	$\boxed{5, 4} = (1 + \mu^{iv}) \cdot 36'', 121899,$
$(5, 6) = (1 + \mu^{vi}) \cdot 1'', 096340,$	$\boxed{5, 6} = (1 + \mu^{vi}) \cdot 0'', 658505;$
$(6, 0) = (1 + \mu) \cdot 0'', 000007,$	$\boxed{6, 0} = (1 + \mu) \cdot 0'', 000000,$
$(6, 1) = (1 + \mu') \cdot 0'', 000133,$	$\boxed{6, 1} = (1 + \mu') \cdot 0'', 000007,$
$(6, 2) = (1 + \mu'') \cdot 0'', 000296,$	$\boxed{6, 2} = (1 + \mu'') \cdot 0'', 000019,$
$(6, 3) = (1 + \mu''') \cdot 0'', 000124,$	$\boxed{6, 3} = (1 + \mu''') \cdot 0'', 000012,$
$(6, 4) = (1 + \mu^{iv}) \cdot 2'', 838932,$	$\boxed{6, 4} = (1 + \mu^{iv}) \cdot 0'', 953096,$
$(6, 5) = (1 + \mu^v) \cdot 4'', 488196,$	$\boxed{6, 5} = (1 + \mu^v) \cdot 2'', 695783.$

25. Au moyen de ces valeurs et des formules données dans les nos 58 et 60 du Livre II, on a conclu les résultats suivants, dans lesquels  $\frac{d\varpi}{dt}$  exprime le mouvement sidéral du périhélie en longitude, à l'époque de 1750, et pendant une année de  $365\frac{1}{4}$ ;  $\frac{2de}{dt}$  est la variation annuelle de l'équation du centre, ou du double de l'excentricité, à la même époque;  $\frac{d\varphi}{dt}$  est la variation annuelle de l'inclinaison de l'orbite à l'écliptique fixe de 1750;  $\frac{d\varphi'}{dt}$  est la variation annuelle de l'inclinaison



de l'orbite à l'écliptique vraie;  $\frac{d\theta}{dt}$  est le mouvement annuel et sidéral du nœud ascendant de l'orbite sur l'écliptique fixe de 1750;  $\frac{d\theta_1}{dt}$  est le mouvement annuel et sidéral du même nœud sur l'écliptique vraie.

## MERCURE.

$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{dt} &= 17'',367383 + 9'',302569.\mu' + 2'',870161.\mu'' + 0'',129151.\mu''' \\ &\quad + 4'',814947.\mu^{iv} + 0'',245303.\mu^v + 0'',005252.\mu^{vi}, \\ 2\frac{de}{dt} &= 0'',042252 + 0'',067742.\mu' + 0'',020096.\mu'' - 0'',007190.\mu''' \\ &\quad - 0'',038766.\mu^{iv} + 0'',000358.\mu^v + 0'',000012.\mu^{vi}, \\ \frac{d\phi}{dt} &= -0'',370349 - 0'',271453.\mu' - 0'',000162.\mu'' - 0'',088777.\mu^{iv} \\ &\quad - 0'',009924.\mu^v - 0'',000033.\mu^{vi}, \\ \frac{d\phi_1}{dt} &= 0'',547557 + 0'',211140.\mu' + 0'',001569.\mu'' + 0'',302730.\mu^{iv} \\ &\quad + 0'',032015.\mu^v + 0'',000103.\mu^{vi}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= -13'',040106 - 5'',446264.\mu' - 2'',974745.\mu'' - 0'',092442.\mu''' \\ &\quad - 4'',308989.\mu^{iv} - 0'',212929.\mu^v - 0'',004737.\mu^{vi}, \\ \frac{d\theta_1}{dt} &= -23'',354327 - 0'',301154.\mu' - 12'',513661.\mu'' - 2'',974745.\mu''' \\ &\quad - 0'',443748.\mu^{iv} - 6'',750288.\mu^v - 0'',363854.\mu^{vi} \\ &\quad - 0'',006877.\mu^{vii}.\end{aligned}$$

## VÉNUS.

$$\begin{aligned}\frac{d\omega'}{dt} &= -7'',231874 - 13'',318446.\mu' - 17'',761229.\mu'' + 3'',715362.\mu''' \\ &\quad + 19'',863664.\mu^{iv} + 0'',258684.\mu^v + 0'',010091.\mu^{vi}, \\ 2\frac{de'}{dt} &= -0'',804218 - 0'',279256.\mu' - 0'',312252.\mu'' - 0'',019686.\mu''' \\ &\quad - 0'',188714.\mu^{iv} - 0'',004348.\mu^v + 0'',000038.\mu^{vi}, \\ \frac{d\phi'}{dt} &= -0'',049228 + 0'',077777.\mu' + 0'',006658.\mu'' - 0'',116834.\mu^{iv} \\ &\quad - 0'',016835.\mu^v + 0'',000006.\mu^{vi}, \\ \frac{d\phi_1'}{dt} &= 0'',137464 + 0'',059807.\mu' - 0'',012801.\mu'' + 0'',079659.\mu^{iv} \\ &\quad + 0'',010803.\mu^v - 0'',000004.\mu^{vi},\end{aligned}$$



$$\frac{d\theta'}{dt} = -30'',558630 + 1'',055720.\mu - 22'',889753.\mu'' - 0'',234914.\mu''' \\ - 8'',215138.\mu^{iv} - 0'',264164.\mu^v - 0'',010381.\mu^{vi},$$

$$\frac{d\theta'_i}{dt} = -56'',752351 + 0'',510648.\mu - 16'',749053.\mu' - 22'',889753.\mu'' \\ - 0'',884798.\mu''' - 15'',842800.\mu^{iv} - 0'',881230.\mu^v \\ - 0'',015365.\mu^{vi}.$$

## LA TERRE.

$$\frac{d\omega''}{dt} = 36'',881443 - 1'',280628.\mu + 11'',769371.\mu' + 4'',772107.\mu'' \\ + 21'',001210.\mu^{iv} + 0'',598970.\mu^v + 0'',020413.\mu^{vi},$$

$$2 \frac{de''}{dt} = - 0'',579130 - 0'',024866.\mu + 0'',093936.\mu' - 0'',152500.\mu'' \\ - 0'',493018.\mu^{iv} - 0'',002806.\mu^v + 0'',000124.\mu^{vi}.$$

## MARS.

$$\frac{d\omega'''}{dt} = 48'',386296 + 0'',049209.\mu + 1'',577303.\mu' + 6'',571974.\mu'' \\ + 38'',002750.\mu^{iv} + 2'',141598.\mu^v + 0'',043462.\mu^{vi},$$

$$2 \frac{de'''}{dt} = 1'',149806 + 0'',007292.\mu + 0'',004832.\mu' + 0'',124976.\mu'' \\ + 0'',972168.\mu^{iv} + 0'',040638.\mu^v - 0'',000100.\mu^{vi},$$

$$\frac{d\varphi'''}{dt} = - 0'',906791 + 0'',000284.\mu - 0'',040575.\mu' - 0'',786665.\mu'' \\ - 0'',079599.\mu^v - 0'',000236.\mu^{vi},$$

$$\frac{d\varphi'_i}{dt} = - 0'',040074 - 0'',001199.\mu + 0'',407078.\mu' - 0'',407404.\mu'' \\ - 0'',038437.\mu^v - 0'',000112.\mu^{vi},$$

$$\frac{d\theta'''}{dt} = -30'',025415 + 0'',161185.\mu + 0'',969343.\mu' - 6'',063413.\mu'' \\ - 24'',244144.\mu^{iv} - 0'',822630.\mu^v - 0'',025756.\mu^{vi},$$

$$\frac{d\theta'_i}{dt} = -70'',338499 + 0'',982701.\mu - 26'',474072.\mu' - 6'',063413.\mu'' \\ - 1'',336417.\mu''' - 33'',999862.\mu^{iv} - 1'',447980.\mu^v \\ - 0'',034054.\mu^{vi}.$$



## JUPITER.

$$\frac{d\omega^{IV}}{dt} = 20'',369659 + 0'',000574.\mu + 0'',013364.\mu' + 0'',030362.\mu'' \\ + 0'',006319.\mu''' + 19'',931701.\mu^{IV} + 0'',387339.\mu^{V},$$

$$2\frac{de^{IV}}{dt} = 1'',711168 - 0'',000024.\mu + 0'',000028.\mu' + 0'',000244.\mu'' \\ - 0'',000588.\mu''' + 1'',707742.\mu^{IV} + 0'',003766.\mu^{V},$$

$$\frac{d\varphi^{IV}}{dt} = -0'',241174 + 0'',000068.\mu + 0'',000313.\mu' + 0'',000346.\mu'' \\ - 0'',243621.\mu^{IV} + 0'',001720.\mu^{V},$$

$$\frac{d\varphi_1^{IV}}{dt} = -0'',688820 - 0'',029292.\mu - 0'',395414.\mu' - 0'',032856.\mu'' \\ - 0'',232852.\mu^{IV} + 0'',001594.\mu^{V},$$

$$\frac{d\theta^{IV}}{dt} = 19'',926792 + 0'',001570.\mu + 0'',018076.\mu' - 0'',030439.\mu'' \\ - 0'',001423.\mu''' + 20'',078923.\mu^{IV} - 0'',139915.\mu^{V},$$

$$\frac{d\theta_1^{IV}}{dt} = -45'',257336 - 0'',976008.\mu - 39'',594863.\mu' - 0'',030439.\mu'' \\ - 1'',201089.\mu''' - 21'',444015.\mu^{IV} + 18'',140621.\mu^{V} \\ - 0'',151543.\mu^{VI}.$$

## SATURNE.

$$\frac{d\omega^V}{dt} = 49'',730637 + 0'',000068.\mu + 0'',001531.\mu' + 0'',003334.\mu'' \\ + 0'',001697.\mu''' + 48'',737068.\mu^{IV} + 0'',986939.\mu^{V},$$

$$2\frac{de^V}{dt} = -3'',334597 - 0'',000000.\mu + 0'',000001.\mu' + 0'',000002.\mu'' \\ - 0'',000048.\mu''' - 3'',394812.\mu^{IV} + 0'',060260.\mu^{V},$$

$$\frac{d\varphi^V}{dt} = 0'',307841 + 0'',000009.\mu + 0'',000055.\mu' + 0'',000043.\mu'' \\ + 0'',298443.\mu^{IV} + 0'',009291.\mu^{V},$$

$$\frac{d\varphi_1^V}{dt} = -0'',479290 - 0'',033813.\mu - 0'',598513.\mu' - 0'',038709.\mu'' \\ + 0'',182639.\mu^{IV} + 0'',009106.\mu^{V},$$

$$\frac{d\theta^V}{dt} = -27'',794110 + 0'',000011.\mu + 0'',000130.\mu' - 0'',003467.\mu'' \\ - 0'',000996.\mu''' - 26'',957559.\mu^{IV} - 0'',832229.\mu^{V},$$

$$\frac{d\theta_1^V}{dt} = -58'',770060 - 0'',342473.\mu - 18'',158175.\mu' - 0'',003467.\mu'' \\ - 0'',436463.\mu''' - 37'',941234.\mu^{IV} - 1'',050744.\mu^{V} \\ - 0'',837504.\mu^{VI}.$$



URANUS.

$$\begin{aligned} \frac{d\omega^{VI}}{dt} &= 7'',576700 + 0'',000008.\mu + 0'',000132.\mu' + 0'',000293.\mu'' \\ &\quad + 0'',000147.\mu''' + 3'',737130.\mu^{IV} + 3'',838990.\mu^V, \\ \frac{de^{VI}}{dt} &= - 0'',333901 - 0'',000000.\mu - 0'',000000.\mu' - 0'',000000.\mu'' \\ &\quad + 0'',000001.\mu''' - 0'',036890.\mu^{IV} - 0'',297012.\mu^V, \\ \frac{d\varphi^{VI}}{dt} &= - 0'',150807 + 0'',000000.\mu + 0'',000000.\mu' + 0'',000001.\mu'' \\ &\quad - 0'',027888.\mu^{IV} - 0'',122920.\mu^V, \\ \frac{d\psi^{VI}}{dt} &= - 0'',084754 - 0'',016951.\mu + 0'',031312.\mu' - 0'',018232.\mu'' \\ &\quad + 0'',182767.\mu^{IV} - 0'',094142.\mu^V, \\ \frac{d\theta^{VI}}{dt} &= 8'',336037 + 0'',000051.\mu + 0'',000450.\mu' - 0'',000296.\mu'' \\ &\quad + 0'',000144.\mu''' + 1'',532043.\mu^{IV} + 6'',803645.\mu^V, \\ \frac{d\delta^{VI}}{dt} &= -106'',183322 - 2'',433693.\mu - 73'',505817.\mu' - 0'',000296.\mu'' \\ &\quad - 2'',897429.\mu''' - 31'',484265.\mu^{IV} + 4'',160079.\mu^V \\ &\quad - 0'',021901.\mu^{VI}. \end{aligned}$$

Je n'ai point compris dans les formules précédentes les variations de l'orbite terrestre; on les déterminera par les équations

$$\text{tang } \varphi'' \sin \theta'' = p'', \quad \text{tang } \varphi'' \cos \theta'' = q''.$$

Quant aux valeurs de  $p''$  et de  $q''$ , on les déterminera par les formules du n° 59 du Livre II, et l'on aura, en prenant pour plan fixe l'écliptique de 1750,

$$p'' = t \frac{dp''}{dt} + \frac{t^2}{2} \frac{d^2p''}{dt^2} + \dots,$$

$$q'' = t \frac{dq''}{dt} + \frac{t^2}{2} \frac{d^2q''}{dt^2} + \dots,$$

$t$  exprimant le nombre des années juliennes écoulées depuis 1750, et les valeurs de  $\frac{dp''}{dt}$ ,  $\frac{dq''}{dt}$ ,  $\frac{d^2p''}{dt^2}$ , ... se rapportant à cette époque. On pourra ne considérer que la première puissance de  $t$  dans ces deux séries, lorsque  $t$  n'excédera pas 300; et lorsqu'il ne surpassera pas



1000 ou 1200, on pourra rejeter les puissances supérieures au carré, ce qui est permis, même relativement aux observations les plus anciennes, vu leur imperfection. On trouve, par les formules citées,

$$\begin{aligned} \frac{dp''}{dt} &= 0'',236792 + 0'',025989.\mu + 0'',266408.\mu' + 0'',029082.\mu'' \\ &\quad - 0'',067966.\mu^{1v} - 0'',016809.\mu^v + 0'',000088.\mu^{v1}, \\ \frac{dq''}{dt} &= -1'',546156 - 0'',026304.\mu - 0'',956638.\mu' - 0'',031898.\mu'' \\ &\quad - 0'',488376.\mu^{1v} - 0'',042658.\mu^v - 0'',000282.\mu^{v1}. \end{aligned}$$

26. On a vu, dans le Chapitre III, que l'ellipticité du Soleil produit dans les périhélies des orbes planétaires un léger mouvement égal à

$$\left(\rho - \frac{1}{2}q\right) \frac{D^2}{a^2} nt.$$

Considérons ce mouvement par rapport à Mercure.  $q$  est le rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur solaire; soit  $mt$  le mouvement angulaire de rotation du Soleil; la force centrifuge à l'équateur solaire sera  $m^2D$ . Si l'on exprime par  $S$  la masse du Soleil, on aura  $\frac{S}{a''^3} = n''^2$ , ou  $S = n''^2 a''^3$ , ce qui donne la pesanteur  $\frac{S}{D^2}$  à l'équateur solaire égale à  $\frac{n''^2 a''^3}{D^2}$ ; on a donc

$$q = \frac{m^2}{n''^2} \frac{D^3}{a''^3}.$$

La durée de la rotation du Soleil est, suivant les observations, à très-peu près égale à  $25^j, 417$ . La durée de la révolution sidérale de la Terre est de  $365^j, 256$ , d'où l'on tire

$$\frac{m}{n''} = \frac{365,256}{25,417}.$$

Le demi-diamètre apparent du Soleil, dans sa moyenne distance, est de  $2968''$ , ce qui donne

$$\frac{D}{a''} = \sin 2968'';$$

on a donc

$$q = 0,000209268.$$



Dans le cas de l'homogénéité du Soleil, on a, par le n° 24 du Livre III,  $\rho = \frac{5}{4}q$ ; le mouvement du périhélie de Mercure, produit par l'ellipticité du Soleil, est donc alors égal à

$$\frac{3}{4} q \frac{D^2}{a^2} nt,$$

et par conséquent à

$$\frac{3}{4} q (\sin 2968'')^2 \left(\frac{a''}{a}\right)^2 nt.$$

En substituant, pour  $a$ ,  $a''$  et  $n$ , leurs valeurs données dans le Chapitre V, cette quantité devient  $0'',037810.t$ . Elle augmente la valeur précédente de  $\frac{d\omega}{dt}$  de la quantité  $0'',037810$ . Cette quantité presque insensible devient plus petite encore si, comme il y a tout lieu de le croire, le Soleil est formé de couches dont la densité croît de la surface au centre; on peut donc la négliger pour Mercure, et à plus forte raison pour les autres planètes. Les variations des nœuds et des inclinaisons des orbites, dépendantes de la même cause, peuvent être également négligées.



## CHAPITRE VIII.

## THÉORIE DE MERCURE.

27. Les inégalités de toutes les planètes, indépendantes des excentricités, et celles qui ne dépendent que de leurs premières puissances ont été calculées par les formules du n° 50 du Livre II. On a d'abord déterminé les valeurs de  $A^{(0)}$ ,  $A^{(1)}$ , ... et de leurs différences par les formules du n° 49 du même Livre; ensuite on a obtenu les résultats suivants, dans lesquels j'ai omis les perturbations du rayon vecteur dont l'effet sur la longitude géocentrique de la planète est au-dessous d'une seconde. Pour déterminer la limite qu'une inégalité du rayon vecteur doit atteindre pour produire une seconde sur la longitude géocentrique de Mercure, nous observerons que, si l'on nomme  $V$  cette longitude, et si l'on fait  $\frac{r}{r''} = \alpha$ , on a, pour la variation  $\delta V$  correspondante à  $\delta r$ ,

$$\delta V = - \frac{\delta r}{r''} \frac{\sin(\nu - \nu'')}{1 - 2\alpha \cos(\nu - \nu'') + \alpha^2}.$$

Le maximum de la fonction

$$\frac{\sin(\nu - \nu'')}{1 - 2\alpha \cos(\nu - \nu'') + \alpha^2}$$

correspond à

$$\cos(\nu - \nu'') = \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2},$$

ce qui donne  $\frac{1}{1 - \alpha^2}$  pour ce maximum; on a donc alors

$$\delta r = - r'' (1 - \alpha^2) \delta V.$$



Si l'on suppose  $\delta V = \pm 1''$ , et si l'on prend pour  $r$  et  $r''$  les moyennes distances de Mercure et de la Terre au Soleil, on aura, par ce qui précède,  $r'' = 1$ ,  $\alpha = 0,38709812$ , d'où l'on tire

$$\delta r = \mp 0,000001335;$$

on peut donc négliger toutes les inégalités du rayon vecteur de Mercure dont le coefficient est au-dessous de  $\pm 0,000001$ . Parmi les inégalités du mouvement en longitude, nous ne rapporterons que celles dont le coefficient est au-dessus d'un quart de seconde, excepté les inégalités qui dépendent de la simple distance angulaire de la planète, et qui peuvent être réduites dans une même Table avec des inégalités plus considérables.

*Inégalités de Mercure indépendantes des excentricités.*

$$\begin{aligned} \delta v = & (1 + \mu') \left\{ \begin{array}{l} 2'', 044299. \sin (n' t - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \\ - 4'', 497255. \sin 2 (n' t - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \\ - 0'', 395294. \sin 3 (n' t - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \\ - 0'', 090322. \sin 4 (n' t - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \\ - 0'', 027485. \sin 5 (n' t - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \end{array} \right\} \\ & + (1 + \mu'') \left\{ \begin{array}{l} 0'', 622493. \sin (n'' t - nt + \varepsilon'' - \varepsilon) \\ - 0'', 511250. \sin 2 (n'' t - nt + \varepsilon'' - \varepsilon) \\ - 0'', 052163. \sin 3 (n'' t - nt + \varepsilon'' - \varepsilon) \\ - 0'', 009652. \sin 4 (n'' t - nt + \varepsilon'' - \varepsilon) \end{array} \right\} \\ & + (1 + \mu''') \left\{ \begin{array}{l} 1'', 757209. \sin (n''' t - nt + \varepsilon''' - \varepsilon) \\ - 0'', 365384. \sin 2 (n''' t - nt + \varepsilon''' - \varepsilon) \\ - 0'', 009624. \sin 3 (n''' t - nt + \varepsilon''' - \varepsilon) \end{array} \right\}, \\ \delta r = & - (1 + \mu') \left\{ \begin{array}{l} 0,000000376 \\ - 0,0000004094. \cos (n' t - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \\ + 0,0000015545. \cos 2 (n' t - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \\ + 0,0000001702. \cos 3 (n' t - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \\ + 0,0000000437. \cos 4 (n' t - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \end{array} \right\}. \end{aligned}$$



*Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités.*

$$\begin{aligned}
\partial v = & (1 + \mu') \left\{ \begin{array}{l} 0'', 911114. \sin(n't + \varepsilon' - \varpi) \\ -12'', 440900. \sin(2n't - nt + 2\varepsilon' - \varepsilon - \varpi) \\ -5'', 204241. \sin(3n't - 2nt + 3\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi) \\ + 0'', 290090. \sin(3n't - 2nt + 3\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi) \\ + 0'', 907384. \sin(4n't - 3nt + 4\varepsilon' - 3\varepsilon - \varpi) \\ - 0'', 545742. \sin(2nt - n't + 2\varepsilon - \varepsilon' - \varpi) \\ + 1'', 217550. \sin(3nt - 2n't + 3\varepsilon - 2\varepsilon' - \varpi) \end{array} \right\} \\
& + (1 + \mu'') \left\{ \begin{array}{l} 0'', 294499. \sin(n''t + \varepsilon'' - \varpi) \\ - 1'', 425025. \sin(2n''t - nt + 2\varepsilon'' - \varepsilon - \varpi) \\ + 0'', 753543. \sin(3n''t - 2nt + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon - \varpi) \end{array} \right\} \\
& + (1 + \mu^{iv}) \left\{ \begin{array}{l} 0'', 729463. \sin(n^{iv}t + \varepsilon^{iv} - \varpi) \\ - 1'', 765962. \sin(n^{iv}t + \varepsilon^{iv} - \varpi^{iv}) \\ - 10'', 119405. \sin(2n^{iv}t - nt + 2\varepsilon^{iv} - \varepsilon - \varpi) \end{array} \right\} \\
& - (1 + \mu^v) \left\{ \begin{array}{l} 0'', 259774. \sin(n^vt + \varepsilon^v - \varpi^v) \\ + 1'', 220658. \sin(2n^vt - nt + 2\varepsilon^v - \varepsilon - \varpi) \end{array} \right\}, \\
\partial r = & - (1 + \mu') \cdot 0,0000013482. \cos(3n't - 2nt + 3\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi) \\
& - (1 + \mu^{iv}) \cdot 0,0000029625. \cos(2n^{iv}t - nt + 2\varepsilon^{iv} - \varepsilon - \varpi).
\end{aligned}$$

*Inégalités dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites.*

Ces inégalités ont été calculées par les formules des nos 1, 2 et 4. Le double du mouvement de Mercure diffère très-peu de cinq fois le mouvement de Vénus, en sorte que  $5(n' - n) + 2n$  est à très-peu près égal à  $-n$ ; il faut donc, par le n° 3, considérer l'inégalité dépendante de  $3nt - 5n't$ . L'angle  $3n't - nt$  croît avec assez de lenteur pour avoir égard à l'inégalité qui en dépend. Pareillement, le mouvement de Mercure étant égal à très-peu près à quatre fois celui de la Terre,  $4(n'' - n) + 2n$  diffère peu de  $-n$ ; il faut donc, par le n° 3, consi-



dérer l'inégalité dépendante de  $2nt - 4n''t$ . On trouve ainsi

$$\begin{aligned} \delta v = & -(1 + \mu') \left\{ \begin{array}{l} 5'', 217417. \sin(3nt - 5n't + 3\varepsilon - 5\varepsilon' - 48^\circ, 1210) \\ + 1'', 844641. \sin(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon + 45^\circ, 1219) \end{array} \right\} \\ & - (1 + \mu''). 0'', 813190. \sin(2nt - 4n''t + 2\varepsilon - 4\varepsilon'' - 45^\circ, 7735), \\ \delta r = & (1 + \mu'). 0, 0000016056. \cos(3nt - 5n't + 3\varepsilon - 5\varepsilon' - 47^\circ, 7420). \end{aligned}$$

*Inégalités dépendantes des cubes et des produits de trois dimensions  
des excentricités et des inclinaisons des orbites.*

La première de ces inégalités dépend de l'angle  $2nt - 5n't$ ; elle a été calculée par les formules du n° 7. La seconde dépend de l'angle  $nt - 4n''t$ ; elle a été calculée suivant la méthode du n° 10. On a trouvé ainsi

$$\begin{aligned} \delta v = & -(1 + \mu'). 26'', 184460. \sin(2nt - 5n't + 2\varepsilon - 5\varepsilon' + 33^\circ, 5852) \\ & - (1 + \mu''). 2'', 131517. \sin(nt - 4n''t + \varepsilon - 4\varepsilon'' + 21^\circ, 1522). \end{aligned}$$

Les inégalités du mouvement de Mercure en latitude ont été calculées par les formules du n° 51 du Livre II. Comme elles sont insensibles et au-dessous d'un quart de seconde, je crois inutile de les rapporter ici.



## CHAPITRE IX.

## THÉORIE DE VÉNUS.

28. Si l'on fait  $\frac{r'}{r''} = \alpha$ , et si l'on nomme  $V'$  la longitude géocentrique de Vénus, l'équation

$$\delta r = -r''(1 - \alpha^2)\delta V,$$

donnée dans le numéro précédent, deviendra, relativement à cette planète,

$$\delta r' = -r''(1 - \alpha^2)\delta V'.$$

En prenant pour  $r'$  et  $r''$  les moyennes distances de Vénus et de la Terre au Soleil, on a, par le n° 23,  $\alpha = 0,72333230$ ; en faisant donc  $\delta V' = \pm 1''$ , on aura

$$\delta r' = \mp 0,0000007489.$$

On peut ainsi négliger les inégalités du rayon vecteur dont le coefficient est au-dessous de 0,0000007. Nous négligerons les inégalités du mouvement en longitude au-dessous d'un quart de seconde.

*Inégalités de Vénus indépendantes des excentricités.*

$$\delta v' = (1 + \mu'') \left\{ \begin{array}{l} 15'',481270. \sin (n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') \\ + 35'',260470. \sin 2(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') \\ - 22'',388478. \sin 3(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') \\ - 3'',261481. \sin 4(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') \\ - 1'',067587. \sin 5(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') \\ - 0'',448709. \sin 6(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') \\ - 0'',215203. \sin 7(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') \\ - 0'',111751. \sin 8(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') \end{array} \right.$$



$$\begin{aligned}
 & + (1 + \mu''') \left\{ \begin{array}{l} 0'', 246629. \sin (n''' t - n' t + \varepsilon''' - \varepsilon') \\ - 0'', 327119. \sin 2 (n''' t - n' t + \varepsilon''' - \varepsilon') \\ - 0'', 033497. \sin 3 (n''' t - n' t + \varepsilon''' - \varepsilon') \\ - 0'', 007196. \sin 4 (n''' t - n' t + \varepsilon''' - \varepsilon') \end{array} \right\} \\
 & + (1 + \mu^{1v}) \left\{ \begin{array}{l} 8'', 923260. \sin (n^{1v} t - n' t + \varepsilon^{1v} - \varepsilon') \\ - 2'', 708716. \sin 2 (n^{1v} t - n' t + \varepsilon^{1v} - \varepsilon') \\ - 0'', 123561. \sin 3 (n^{1v} t - n' t + \varepsilon^{1v} - \varepsilon') \\ - 0'', 008501. \sin 4 (n^{1v} t - n' t + \varepsilon^{1v} - \varepsilon') \end{array} \right\} \\
 & + (1 + \mu^v) \left\{ \begin{array}{l} 0'', 587881. \sin (n^v t - n' t + \varepsilon^v - \varepsilon') \\ - 0'', 123022. \sin 2 (n^v t - n' t + \varepsilon^v - \varepsilon') \\ - 0'', 004031. \sin 3 (n^v t - n' t + \varepsilon^v - \varepsilon') \end{array} \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta r' = & (1 + \mu'') \left\{ \begin{array}{l} - 0, 0000003145 \\ + 0, 0000038362. \cos (n'' t - n' t + \varepsilon'' - \varepsilon') \\ + 0, 0000165050. \cos 2 (n'' t - n' t + \varepsilon'' - \varepsilon') \\ - 0, 0000140155. \cos 3 (n'' t - n' t + \varepsilon'' - \varepsilon') \\ - 0, 0000024255. \cos 4 (n'' t - n' t + \varepsilon'' - \varepsilon') \\ - 0, 0000008873. \cos 5 (n'' t - n' t + \varepsilon'' - \varepsilon') \\ - 0, 0000004021. \cos 6 (n'' t - n' t + \varepsilon'' - \varepsilon') \\ - 0, 0000002033. \cos 7 (n'' t - n' t + \varepsilon'' - \varepsilon') \\ - 0, 0000001094. \cos 8 (n'' t - n' t + \varepsilon'' - \varepsilon') \end{array} \right\} \\
 & + (1 + \mu^{1v}) \left\{ \begin{array}{l} - 0, 0000003106 \\ + 0, 0000048903. \cos (n^{1v} t - n' t + \varepsilon^{1v} - \varepsilon') \\ - 0, 0000021911. \cos 2 (n^{1v} t - n' t + \varepsilon^{1v} - \varepsilon') \\ - 0, 0000001155. \cos 3 (n^{1v} t - n' t + \varepsilon^{1v} - \varepsilon') \\ - 0, 0000000098. \cos 4 (n^{1v} t - n' t + \varepsilon^{1v} - \varepsilon') \end{array} \right\}.
 \end{aligned}$$

*Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités.*

$$\begin{aligned}
 \delta v = & (1 + \mu) \cdot 2'', 472014. \sin (2 n' t - n t + 2 \varepsilon' - \varepsilon - \varpi) \\
 & + (1 + \mu'') \left\{ \begin{array}{l} 0'', 225944. \sin (n'' t + \varepsilon'' - \varpi') \\ - 0'', 394198. \sin (n'' t + \varepsilon'' - \varpi'') \\ + 0'', 503442. \sin (2 n'' t - n' t + 2 \varepsilon'' - \varepsilon' - \varpi') \\ - 0'', 350134. \sin (2 n'' t - n' t + 2 \varepsilon'' - \varepsilon' - \varpi'') \\ - 4'', 782561. \sin (3 n'' t - 2 n' t + 3 \varepsilon'' - 2 \varepsilon' - \varpi') \\ + 14'', 710902. \sin (3 n'' t - 2 n' t + 3 \varepsilon'' - 2 \varepsilon' - \varpi'') \\ - 0'', 924314. \sin (4 n'' t - 3 n' t + 4 \varepsilon'' - 3 \varepsilon' - \varpi') \\ + 2'', 924841. \sin (4 n'' t - 3 n' t + 4 \varepsilon'' - 3 \varepsilon' - \varpi'') \\ - 2'', 135011. \sin (5 n'' t - 4 n' t + 5 \varepsilon'' - 4 \varepsilon' - \varpi') \\ + 6'', 779405. \sin (5 n'' t - 4 n' t + 5 \varepsilon'' - 4 \varepsilon' - \varpi'') \\ + 0'', 328502. \sin (3 n' t - 2 n'' t + 3 \varepsilon' - 2 \varepsilon'' - \varpi') \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& - (1 + \mu''') \cdot 3,372700 \cdot \sin(3n'''t - 2n't + 3\varepsilon''' - 2\varepsilon' - \varpi''') \\
& + (1 + \mu^{iv}) \left\{ \begin{array}{l} - 4'', 641646 \cdot \sin(n^{iv}t + \varepsilon^{iv} - \varpi^{iv}) \\ - 0'', 991075 \cdot \sin(2n^{iv}t - n't + 2\varepsilon^{iv} - \varepsilon' - \varpi^{iv}) \\ + 0'', 717378 \cdot \sin(2n^{iv}t - n't + 2\varepsilon^{iv} - \varepsilon' - \varpi^{iv}) \\ - 0'', 504538 \cdot \sin(3n^{iv}t - 2n't + 3\varepsilon^{iv} - 2\varepsilon' - \varpi^{iv}) \end{array} \right\} \\
& - (1 + \mu^v) \cdot 0'', 675132 \cdot \sin(n^vt + \varepsilon^v - \varpi^v),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta r' = & + (1 + \mu) \cdot 0,0000008831 \cdot \cos(2n't - nt + 2\varepsilon' - \varepsilon - \varpi) \\
& + (1 + \mu'') \left\{ \begin{array}{l} 0,0000016482 \cdot \cos(3n''t - 2n't + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon' - \varpi'') \\ - 0,0000011406 \cdot \cos(5n''t - 4n't + 5\varepsilon'' - 4\varepsilon' - \varpi'') \\ + 0,0000036421 \cdot \cos(5n''t - 4n't + 5\varepsilon'' - 4\varepsilon' - \varpi'') \end{array} \right\} \\
& - (1 + \mu''') \cdot 0,0000019404 \cdot \cos(3n'''t - 2n't + 3\varepsilon''' - 2\varepsilon' - \varpi''').
\end{aligned}$$

*Inégalités dépendantes des carrés et des produits de deux dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites.*

$$\begin{aligned}
\delta v' = & - (1 + \mu) \cdot 1'', 029617 \cdot \sin(4n't - 2nt + 4\varepsilon' - 2\varepsilon - 43^\circ, 8980) \\
& - (1 + \mu'') \left\{ \begin{array}{l} 4'', 645172 \cdot \sin(5n''t - 3n't + 5\varepsilon'' - 3\varepsilon' + 23^\circ, 2302) \\ + 0'', 275774 \cdot \sin(4n''t - 2n't + 4\varepsilon'' - 2\varepsilon' + 29^\circ, 9358) \end{array} \right\} \\
& + (1 + \mu''') \cdot 6'', 202706 \cdot \sin(3n'''t - n't + 3\varepsilon''' - \varepsilon' + 73^\circ, 2065).
\end{aligned}$$

En vertu des rapports qui existent entre les moyens mouvements de Mercure, Vénus, la Terre et Mars, les quantités  $2n - 5n'$ ,  $5n'' - 3n'$  et  $n' - 3n'''$  sont très-petites par rapport à  $n'$ ; ainsi, par le n° 3, les inégalités précédentes paraissent être les seules de l'ordre des carrés des excentricités qui puissent être sensibles.

*Inégalités dépendantes des cubes et des produits de trois dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites.*

$$\delta v' = (1 + \mu) \cdot 3'', 656920 \cdot \sin(2nt - 5n't + 2\varepsilon - 5\varepsilon' + 33^\circ, 5852).$$



*Inégalités du mouvement de Vénus en latitude.*

Les formules du n° 51 donnent

$$\delta s' = - (1 + \mu'') \left\{ \begin{array}{l} 0'',385197. \sin (n'' t + \varepsilon'' - \theta') \\ + 0'',280655. \sin (2n'' t - n' t + 2\varepsilon'' - \varepsilon' - \theta') \\ + 0'',226675. \sin (3n'' t - 2n' t + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon' - \theta') \\ + 0'',251485. \sin (4n'' t - 3n' t + 4\varepsilon'' - 3\varepsilon' - \theta') \\ + 0'',964615. \sin (5n'' t - 4n' t + 5\varepsilon'' - 4\varepsilon' - \theta') \\ - 0'',241108. \sin (2n' t - n'' t + 2\varepsilon' - \varepsilon'' - \theta') \end{array} \right\}$$

$$- (1 + \mu'''). \quad 0'',458953. \sin (3n''' t - 2n' t + 3\varepsilon''' - 2\varepsilon' - \Pi''')$$

$$+ (1 + \mu^{iv}). \quad 0'',498190. \sin (2n^{iv} t - n' t + 2\varepsilon^{iv} - \varepsilon' - \Pi^{iv}),$$

$\Pi'''$  étant ici la longitude du nœud ascendant de l'orbite de Mars sur celle de Vénus, et  $\Pi^{iv}$  étant la longitude du nœud ascendant de l'orbite de Jupiter sur celle de Vénus.



## CHAPITRE X.

## THÉORIE DU MOUVEMENT DE LA TERRE.

29.  $V'$  étant la longitude géocentrique de Vénus, et  $\alpha$  étant supposé égal à  $\frac{r'}{r''}$ ,  $V'$  sera fonction de  $\alpha$  et de  $\varphi' - \varphi''$ ; on aura donc, par le n° 27,

$$\delta V' = - \frac{\delta \alpha \sin(\varphi' - \varphi'')}{1 - 2\alpha \cos(\varphi' - \varphi'') + \alpha^2},$$

ce qui donne, par le même numéro, lorsque  $\delta V'$  est à son maximum,

$$\delta V' = - \frac{\delta \alpha}{1 - \alpha^2}.$$

En ne faisant varier que  $r''$  dans  $\delta \alpha$ , on a  $\delta \alpha = - \frac{\alpha \delta r''}{r''}$ ; partant

$$\delta r'' = r'' \frac{1 - \alpha^2}{\alpha} \delta V'.$$

En supposant  $\delta V' = \pm 1''$ , et prenant pour  $r'$  et  $r''$  les moyennes distances de Vénus et de la Terre au Soleil, on aura

$$\delta r'' = \pm 0,000001035.$$

Si l'on nomme  $V'''$  la longitude géocentrique de Mars, et si l'on fait  $\frac{r''}{r'''} = \alpha$ , on aura, par le n° 27,

$$\delta r'' = r''' (1 - \alpha^2) \delta V''';$$

en prenant pour  $r''$  et  $r'''$  les moyennes distances de la Terre et de Mars au Soleil, on a

$$\alpha = 0,65630030,$$

$$r''' = 1,52369352.$$

En supposant donc  $\delta V''' = \pm 1''$ , on aura

$$\delta r'' = \pm 0,000001363;$$



on peut donc négliger les inégalités de  $\delta r''$  dont le coefficient est au-dessous de  $\pm 0,000001$ . Nous négligerons les inégalités du mouvement de la Terre en longitude, au-dessous d'un quart de seconde.

*Inégalités de la Terre indépendantes des excentricités.*

$$\begin{aligned} \delta v'' = & (1 + \mu') \left\{ \begin{aligned} & 16'', 329870. \sin (n' t - n'' t + \varepsilon' - \varepsilon'') \\ & - 18'', 567565. \sin 2 (n' t - n'' t + \varepsilon' - \varepsilon'') \\ & - 2'', 294582. \sin 3 (n' t - n'' t + \varepsilon' - \varepsilon'') \\ & - 0'', 695799. \sin 4 (n' t - n'' t + \varepsilon' - \varepsilon'') \\ & - 0'', 281511. \sin 5 (n' t - n'' t + \varepsilon' - \varepsilon'') \\ & - 0'', 132113. \sin 6 (n' t - n'' t + \varepsilon' - \varepsilon'') \\ & - 0'', 067984. \sin 7 (n' t - n'' t + \varepsilon' - \varepsilon'') \\ & - 0'', 037202. \sin 8 (n' t - n'' t + \varepsilon' - \varepsilon'') \end{aligned} \right\} \\ & + (1 + \mu'') \left\{ \begin{aligned} & 1'', 318563. \sin (n''' t - n'' t + \varepsilon''' - \varepsilon'') \\ & + 10'', 750115. \sin 2 (n''' t - n'' t + \varepsilon''' - \varepsilon'') \\ & - 0'', 664350. \sin 3 (n''' t - n'' t + \varepsilon''' - \varepsilon'') \\ & - 0'', 145130. \sin 4 (n''' t - n'' t + \varepsilon''' - \varepsilon'') \\ & - 0'', 048984. \sin 5 (n''' t - n'' t + \varepsilon''' - \varepsilon'') \\ & - 0'', 019931. \sin 6 (n''' t - n'' t + \varepsilon''' - \varepsilon'') \\ & - 0'', 009022. \sin 7 (n''' t - n'' t + \varepsilon''' - \varepsilon'') \end{aligned} \right\} \\ & + (1 + \mu^{IV}) \left\{ \begin{aligned} & 21'', 787201. \sin (n^{IV} t - n'' t + \varepsilon^{IV} - \varepsilon'') \\ & - 8'', 253880. \sin 2 (n^{IV} t - n'' t + \varepsilon^{IV} - \varepsilon'') \\ & - 0'', 517808. \sin 3 (n^{IV} t - n'' t + \varepsilon^{IV} - \varepsilon'') \\ & - 0'', 051076. \sin 4 (n^{IV} t - n'' t + \varepsilon^{IV} - \varepsilon'') \end{aligned} \right\} \\ & + (1 + \mu^V) \left\{ \begin{aligned} & 1'', 356204. \sin (n^V t - n'' t + \varepsilon^V - \varepsilon'') \\ & - 0'', 342623. \sin 2 (n^V t - n'' t + \varepsilon^V - \varepsilon'') \\ & - 0'', 012792. \sin 3 (n^V t - n'' t + \varepsilon^V - \varepsilon'') \end{aligned} \right\}, \\ \delta r'' = & (1 + \mu') \left\{ \begin{aligned} & 0,0000015553 \\ & - 0,0000060012. \cos (n' t - n'' t + \varepsilon' - \varepsilon'') \\ & + 0,0000171431. \cos 2 (n' t - n'' t + \varepsilon' - \varepsilon'') \\ & + 0,0000027072. \cos 3 (n' t - n'' t + \varepsilon' - \varepsilon'') \\ & + 0,0000009358. \cos 4 (n' t - n'' t + \varepsilon' - \varepsilon'') \\ & + 0,0000004086. \cos 5 (n' t - n'' t + \varepsilon' - \varepsilon'') \\ & + 0,0000002008. \cos 6 (n' t - n'' t + \varepsilon' - \varepsilon'') \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + (1 + \mu''') \left\{ \begin{array}{l} - 0,000000478 \\ + 0,0000005487 \cdot \cos (n''' t - n'' t + \varepsilon''' - \varepsilon'') \\ + 0,0000080620 \cdot \cos 2 (n''' t - n'' t + \varepsilon''' - \varepsilon'') \\ - 0,000006475 \cdot \cos 3 (n''' t - n'' t + \varepsilon''' - \varepsilon'') \\ - 0,000001643 \cdot \cos 4 (n''' t - n'' t + \varepsilon''' - \varepsilon'') \end{array} \right\} \\
& + (1 + \mu^{iv}) \left\{ \begin{array}{l} - 0,0000011581 \\ + 0,0000159384 \cdot \cos (n^{iv} t - n'' t + \varepsilon^{iv} - \varepsilon'') \\ - 0,0000090986 \cdot \cos 2 (n^{iv} t - n'' t + \varepsilon^{iv} - \varepsilon'') \\ - 0,000006550 \cdot \cos 3 (n^{iv} t - n'' t + \varepsilon^{iv} - \varepsilon'') \\ - 0,000000704 \cdot \cos 4 (n^{iv} t - n'' t + \varepsilon^{iv} - \varepsilon'') \end{array} \right\} \\
& + (1 + \mu^v) \left\{ \begin{array}{l} - 0,000000580 \\ + 0,0000010337 \cdot \cos (n^v t - n'' t + \varepsilon^v - \varepsilon'') \\ - 0,000003859 \cdot \cos 2 (n^v t - n'' t + \varepsilon^v - \varepsilon'') \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

*Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités.*

$$\begin{aligned}
\delta v'' = & (1 + \mu') \left\{ \begin{array}{l} 0'', 234290 \cdot \sin (n' t + \varepsilon' - \varpi'') \\ - 0'', 400233 \cdot \sin (2 n' t - n'' t + 2 \varepsilon' - \varepsilon'' - \varpi'') \\ + 0'', 448083 \cdot \sin (2 n'' t - n' t + 2 \varepsilon'' - \varepsilon' - \varpi'') \\ - 0'', 521547 \cdot \sin (2 n'' t - n' t + 2 \varepsilon'' - \varepsilon' - \varpi'') \\ - 1'', 318247 \cdot \sin (3 n'' t - 2 n' t + 3 \varepsilon'' - 2 \varepsilon' - \varpi'') \\ + 3'', 661696 \cdot \sin (3 n'' t - 2 n' t + 3 \varepsilon'' - 2 \varepsilon' - \varpi'') \\ - 7'', 231346 \cdot \sin (4 n'' t - 3 n' t + 4 \varepsilon'' - 3 \varepsilon' - \varpi'') \\ + 2'', 229704 \cdot \sin (4 n'' t - 3 n' t + 4 \varepsilon'' - 3 \varepsilon' - \varpi'') \\ + 0'', 667802 \cdot \sin (5 n'' t - 4 n' t + 5 \varepsilon'' - 4 \varepsilon' - \varpi'') \end{array} \right\} \\
& + (1 + \mu''') \left\{ \begin{array}{l} - 3'', 381490 \cdot \sin (2 n''' t - n'' t + 2 \varepsilon''' - \varepsilon'' - \varpi'') \\ + 6'', 597711 \cdot \sin (2 n''' t - n'' t + 2 \varepsilon''' - \varepsilon'' - \varpi'') \\ - 0'', 269754 \cdot \sin (3 n''' t - 2 n'' t + 3 \varepsilon''' - 2 \varepsilon'' - \varpi'') \\ + 2'', 043057 \cdot \sin (3 n''' t - 2 n'' t + 3 \varepsilon''' - 2 \varepsilon'' - \varpi'') \\ - 0'', 320240 \cdot \sin (4 n''' t - 3 n'' t + 4 \varepsilon''' - 3 \varepsilon'' - \varpi'') \\ + 2'', 491082 \cdot \sin (4 n''' t - 3 n'' t + 4 \varepsilon''' - 3 \varepsilon'' - \varpi'') \\ - 0'', 416405 \cdot \sin (5 n''' t - 4 n'' t + 5 \varepsilon''' - 4 \varepsilon'' - \varpi'') \end{array} \right\} \\
& + (1 + \mu^{iv}) \left\{ \begin{array}{l} 0'', 932384 \cdot \sin (n^{iv} t + \varepsilon^{iv} - \varpi'') \\ - 7'', 839149 \cdot \sin (n^{iv} t + \varepsilon^{iv} - \varpi^{iv}) \\ - 4'', 605075 \cdot \sin (2 n^{iv} t - n'' t + 2 \varepsilon^{iv} - \varepsilon'' - \varpi'') \\ + 1'', 871601 \cdot \sin (2 n^{iv} t - n'' t + 2 \varepsilon^{iv} - \varepsilon'' - \varpi^{iv}) \\ - 1'', 677049 \cdot \sin (3 n^{iv} t - 2 n'' t + 3 \varepsilon^{iv} - 2 \varepsilon'' - \varpi^{iv}) \\ - 0'', 459646 \cdot \sin (2 n'' t - n^{iv} t + 2 \varepsilon'' - \varepsilon^{iv} - \varpi'') \\ - 0'', 289022 \cdot \sin (2 n'' t - n^{iv} t + 2 \varepsilon'' - \varepsilon^{iv} - \varpi^{iv}) \end{array} \right\}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + (1 + \mu^v) \left\{ \begin{array}{l} - 1'', 110867. \sin(n^v t + \varepsilon^v - \varpi^v) \\ - 0'', 468371. \sin(2n^v t - n'' t + 2\varepsilon^v - \varepsilon'' - \varpi'') \end{array} \right\}, \\
 \delta r'' = & (1 + \mu') \left\{ \begin{array}{l} - 0, 0000030439. \cos(3n'' t - 2n' t + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon' - \varpi'') \\ - 0, 0000049815. \cos(4n'' t - 3n' t + 4\varepsilon'' - 3\varepsilon' - \varpi'') \\ + 0, 0000015895. \cos(4n'' t - 3n' t + 4\varepsilon'' - 3\varepsilon' - \varpi') \end{array} \right\} \\
 & + (1 + \mu''') \cdot 0, 0000017707. \cos(4n''' t - 3n'' t + 4\varepsilon''' - 3\varepsilon'' - \varpi''') \\
 & + (1 + \mu^{iv}) \left\{ \begin{array}{l} - 0, 0000030410. \cos(2n^{iv} t - n'' t + 2\varepsilon^{iv} - \varepsilon'' - \varpi^{iv}) \\ + 0, 0000012652. \cos(2n^{iv} t - n'' t + 2\varepsilon^{iv} - \varepsilon'' - \varpi^{iv}) \\ - 0, 0000018101. \cos(3n^{iv} t - 2n'' t + 3\varepsilon^{iv} - 2\varepsilon'' - \varpi^{iv}) \end{array} \right\}.
 \end{aligned}$$

*Inégalités dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites.*

$$\begin{aligned}
 \delta v'' = & (1 + \mu'). 3'', 473997. \sin(5n'' t - 3n' t + 5\varepsilon'' - 3\varepsilon' + 23^\circ, 3759) \\
 & + (1 + \mu''') \left\{ \begin{array}{l} 3'', 067702. \sin(4n''' t - 2n'' t + 4\varepsilon''' - 2\varepsilon'' + 75^\circ, 3506) \\ + 1'', 085790. \sin(5n''' t - 3n'' t + 5\varepsilon''' - 3\varepsilon'' + 76^\circ, 0214) \end{array} \right\}.
 \end{aligned}$$

En vertu des rapports qui existent entre les moyens mouvements de Vénus, la Terre et Mars,  $5n'' - 3n'$  et  $4n''' - 2n''$  sont de petits coefficients, en sorte que, par le n° 3, les deux premières de ces inégalités sont les seules de cet ordre qui doivent être sensibles. On a cependant calculé la troisième, parce que  $3n'' - 5n'''$  n'étant à peu près que le tiers de  $n''$ , il était utile de s'assurer que cette inégalité n'acquiert par cette considération qu'une valeur très-peu sensible.

*Inégalités dépendantes du cube et des produits de trois dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites.*

$$\delta v'' = (1 + \mu). 0'', 215787. \sin(nt - 4n'' t + \varepsilon - 4\varepsilon'' + 21^\circ, 1522).$$

*Inégalités périodiques du mouvement de la Terre en latitude.*

On a trouvé, par les formules du n° 51 du Livre II,

$$\begin{aligned}
 \delta s'' = & (1 + \mu') \left\{ \begin{array}{l} 0'', 306112. \sin(2n'' t - n' t + 2\varepsilon'' - \varepsilon' - \theta') \\ + 0'', 723012. \sin(4n'' t - 3n' t + 4\varepsilon'' - 3\varepsilon' - \theta') \end{array} \right\} \\
 & + (1 + \mu^{iv}). 0'', 508343. \sin(2n^{iv} t - n'' t + 2\varepsilon^{iv} - \varepsilon'' - \theta^{iv}).
 \end{aligned}$$



*Inégalités de la Terre dépendantes de l'action de la Lune.*

30. Si l'on nomme  $U$  la longitude de la Lune vue du centre de la Terre, et  $\nu''$  la longitude de la Terre vue du centre du Soleil; si l'on nomme encore  $R$  le rayon vecteur de la Lune, et  $r''$  celui de la Terre; enfin, si l'on désigne par  $m$  et  $M$  les masses de la Lune et de la Terre, et par  $s$  la latitude de la Lune; on a vu, dans le Chapitre IV, que l'inégalité du mouvement de la Terre en longitude, produite par l'action de la Lune, est

$$-\frac{m}{M} \frac{R}{r''} \sin(U - \nu'').$$

L'inégalité du rayon vecteur de la Terre est

$$-\frac{m}{M} R \cos(U - \nu''),$$

et l'inégalité du mouvement de la Terre en latitude est

$$-\frac{m}{M} \frac{R}{r''} s.$$

Il faut, pour plus d'exactitude, substituer  $\frac{m}{M+m}$  au lieu de  $\frac{m}{M}$  dans les expressions de ces trois inégalités.

Nous supposerons, conformément aux phénomènes des marées (Livre IV, nos 31 et 35),

$$\frac{m}{R^3} = \frac{3S}{r''^3},$$

$S$  étant la masse du Soleil. Or on a, par la théorie des forces centrales,

$$\frac{M+m}{R^3} = n_t^2, \quad \frac{S}{r''^3} = n''^2,$$

$n_t, t$  étant le moyen mouvement de la Lune; on a donc

$$\frac{m}{M+m} = \frac{3n''^2}{n_t^2}.$$



Suivant les observations,  $\frac{n''}{n'} = 0,0748013$ , ce qui donne

$$\frac{m}{M+m} = \frac{1}{59,6},$$

et, par conséquent,

$$\frac{m}{M} = \frac{1}{58,6}.$$

Nous supposerons ensuite la parallaxe horizontale du Soleil égale à  $27'',2$ , et la parallaxe moyenne horizontale de la Lune égale à  $10661''$ , d'où l'on tire

$$\frac{R}{r''} = \frac{27,2}{10661},$$

et conséquemment

$$\delta v'' = -27'',2524 \cdot \sin(U - v''),$$

$$\delta r'' = -0,000042808 \cdot \cos(U - v'').$$

En prenant ensuite pour  $s$  la plus grande inégalité de la Lune en latitude, que nous supposerons égale à  $57231'' \cdot \sin(U - \theta)$ ,  $U - \theta$  étant la distance de la Lune à son nœud ascendant, on aura

$$-2'',4499 \cdot \sin(U - \theta)$$

pour l'inégalité du mouvement de la Terre en latitude; il faut l'ajouter à la valeur précédente de  $\delta s''$  pour avoir la valeur entière de  $\delta s''$ . Cette valeur entière, prise avec un signe contraire, donne les inégalités du mouvement apparent du Soleil en latitude. Elle influe sur l'obliquité de l'écliptique, conclue de l'observation des hauteurs du Soleil vers les solstices : elle influe encore sur le moment de l'équinoxe, conclu des observations du Soleil vers les équinoxes, et sur l'ascension droite et la déclinaison des étoiles, déterminées par leur comparaison avec le Soleil. Vu la précision des observations modernes, il est nécessaire d'y avoir égard. Il est facile de voir que la déclinaison apparente du Soleil en est augmentée de la quantité

$$\frac{\delta s'' \cdot \cos(\text{obliquité de l'écliptique})}{\cos(\text{déclinaison du Soleil})},$$



et que son ascension droite apparente en est augmentée de la quantité

$$\frac{\delta s'' \cdot \sin(\text{obliquité de l'écliptique}) \cdot \cos(\text{ascension droite du Soleil})}{\cos(\text{déclinaison du Soleil})};$$

il faut donc diminuer de ces quantités les déclinaisons et les ascensions droites observées du Soleil, pour avoir celles qu'on observerait si la Terre ne quittait point le plan de l'écliptique.

*Des variations séculaires de l'orbe terrestre, de l'équateur et de la longueur de l'année.*

31. Nous avons donné, dans le n° 26, les variations séculaires des éléments de l'orbe terrestre; mais l'influence de ces variations sur les phénomènes les plus importants de l'Astronomie nous engage à les déterminer avec plus de précision, en ayant égard au carré du temps.  $t$  exprimant un nombre quelconque d'années juliennes écoulées depuis 1750, on a trouvé, par la méthode du n° 58 du Livre II, et en adoptant les valeurs des masses des planètes données dans le n° 21, le coefficient de l'équation du centre de l'orbite terrestre égal à

$$2E - t \cdot 0'',579130 - t^2 \cdot 0'',0000207446,$$

$2E$  étant ce coefficient au commencement de 1750, où  $t$  est nul. On a trouvé pareillement la longitude sidérale du périhélie de l'orbe terrestre égale à

$$\varpi'' + t \cdot 36'',881443 + t^2 \cdot 0'',0002454382.$$

Enfin, les valeurs de  $p''$  et de  $q''$ , pour un temps quelconque  $t$ , ont été trouvées respectivement égales à

$$\begin{aligned} & t \cdot 0'',236793 + t^2 \cdot 0'',0000665275, \\ & - t \cdot 1'',546156 + t^2 \cdot 0'',0000208253. \end{aligned}$$

Nous avons présenté dans les nos 6 et 7 du livre V les formules de la précession des équinoxes et de l'inclinaison de l'équateur soit à une écliptique fixe, soit à l'écliptique vraie; mais ces formules supposent



que la valeur de  $p''$  est sous la forme  $\Sigma c \sin(gt + \epsilon)$ , et que  $q''$  est sous la forme  $\Sigma c \cos(gt + \epsilon)$ . On a vu, dans le n° 59 du Livre II, que les expressions finies de  $p''$  et de  $q''$  se présentent sous ces formes, et l'on peut déterminer, par la méthode exposée dans le n° 56 du même Livre, les valeurs de  $c$ ,  $g$ ,  $\epsilon$ , etc.; mais cela suppose les masses des planètes exactement connues, et l'on a vu l'incertitude qui existe encore à cet égard. Ainsi, au lieu de faire le calcul pénible que cette méthode exige, il est préférable de le simplifier en n'étendant les résultats qu'à mille ou douze cents ans avant et après l'époque de 1750, ce qui suffit aux besoins de l'Astronomie. On pourra facilement recommencer ces calculs à mesure que le développement des variations séculaires fera mieux connaître les masses des planètes. Donnons aux valeurs de  $p''$  et de  $q''$  les formes suivantes, comprises dans celles-ci,  $\Sigma c \sin(gt + \epsilon)$ ,  $\Sigma c \cos(gt + \epsilon)$ ,

$$c \sin \epsilon - c \cos \epsilon \sin gt - c \sin \epsilon \sin \left( g't + \frac{\pi}{2} \right),$$

$$c \cos \epsilon - c \cos \epsilon \cos gt - c \sin \epsilon \cos \left( g't + \frac{\pi}{2} \right),$$

$\pi$  étant la demi-circonférence dont le rayon est l'unité. Si l'on développe ces deux fonctions par rapport aux puissances du temps  $t$ , on aura, en les comparant aux séries précédentes,

$$\begin{aligned} cg \cos \epsilon &= - 0'', 236793, & cg' \sin \epsilon &= - 1'', 546156, \\ cg^2 \cos \epsilon &= 0'', 0000416506, & cg'^2 \sin \epsilon &= 0'', 0001330550, \end{aligned}$$

d'où il est facile de conclure

$$\begin{aligned} g &= - 111'', 978, & g' &= - 54'', 7845. \\ c \sin \epsilon &= 17967'', 0, & c \cos \epsilon &= 1346'', 21. \end{aligned}$$

Maintenant on a vu, dans le n° 6 du Livre V, que la précession  $\psi$  des équinoxes par rapport à l'écliptique fixe de 1750 est, en ne considérant que les variations séculaires,

$$u + \zeta + \Sigma \left[ \left( \frac{l}{f} - 1 \right) \operatorname{tang} h + \operatorname{cot} h \right] \frac{lc}{f} \sin(ft + \epsilon).$$



Pour avoir  $\Sigma c \sin(ft + \epsilon)$ , il faut, par le n° 5 du même Livre, augmenter, dans  $\Sigma c \sin(gt + \epsilon)$ , l'angle  $gt + \epsilon$  de  $lt$ , ce qui donne  $f = g + l$ ; on aura ainsi

$$\Sigma c \sin(ft + \epsilon) = c \sin(lt + \epsilon) - c \cos \epsilon \sin(gt + lt) - c \sin \epsilon \sin\left(g't + lt + \frac{\pi}{2}\right);$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} \psi = lt + \zeta + c \coth h \sin(lt + \epsilon) - \frac{l}{l+g} c \cos \epsilon \left( \coth h - \frac{g}{l+g} \tanh h \right) \sin(gt + lt) \\ - \frac{l}{l+g'} c \sin \epsilon \left( \coth h - \frac{g'}{l+g'} \tanh h \right) \sin\left(g't + lt + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

En nommant ensuite  $V$  l'inclinaison de l'équateur à l'écliptique fixe de 1750, on aura, par le n° 6 du Livre V,

$$V = h - \Sigma \frac{lc}{f} \cos(ft + \epsilon).$$

Pour avoir  $\Sigma c \cos(ft + \epsilon)$ , il faut, par le n° 5 du même Livre, augmenter, dans  $\Sigma c \cos(gt + \epsilon)$ , l'angle  $gt + \epsilon$  de  $lt$ ; on aura ainsi

$$\Sigma c \cos(ft + \epsilon) = c \cos(lt + \epsilon) - c \cos \epsilon \cos(gt + lt) - c \sin \epsilon \cos\left(g't + lt + \frac{\pi}{2}\right);$$

partant,

$$\begin{aligned} V = h - c \cos(lt + \epsilon) + \frac{l}{l+g} c \cos \epsilon \cos(gt + lt) \\ + \frac{l}{l+g'} c \sin \epsilon \cos\left(g't + lt + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

$\psi$  exprimant la précession des équinoxes par rapport à l'écliptique vraie, et  $V$  étant l'inclinaison de l'équateur à cette écliptique, on trouvera, par le n° 7 du Livre V,

$$\begin{aligned} \psi' = lt + \zeta + \frac{g}{l+g} c \cos \epsilon \left( \coth h + \frac{l}{l+g} \tanh h \right) \sin(gt + lt) \\ + \frac{g'}{l+g'} c \sin \epsilon \left( \coth h + \frac{l}{l+g'} \tanh h \right) \sin\left(g't + lt + \frac{\pi}{2}\right), \\ V' = h - \frac{g}{l+g} c \cos \epsilon \cos(gt + lt) - \frac{g'}{l+g'} c \sin \epsilon \cos\left(g't + lt + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$



L'expression de  $\psi'$  donne

$$\begin{aligned} \frac{d\psi'}{dt} = & l + cg \cos \epsilon \left( \coth h + \frac{l}{l+g} \operatorname{tang} h \right) \cos(gt + lt) \\ & + cg' \sin \epsilon \left( \coth h + \frac{l}{l+g'} \operatorname{tang} h \right) \cos \left( g't + lt + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

En retranchant de cette valeur de  $\frac{d\psi'}{dt}$ , lorsque  $t$  est nul, sa valeur à une autre époque, la différence réduite en temps, en raison de la circonférence pour une année tropique, donnera l'accroissement de l'année tropique depuis 1750. On voit, par cette formule et par la différentiation de l'expression générale de  $\psi'$  donnée dans le n° 7 du Livre V, que l'action du Soleil et de la Lune change considérablement la loi de la variation de la longueur de l'année. Dans les hypothèses les plus vraisemblables sur les masses des planètes, l'étendue entière de cette variation, ainsi que l'étendue entière de la variation de l'obliquité de l'écliptique à l'équateur, sont réduites à peu près au quart de la valeur qu'elles auraient sans cette action.

Suivant les observations, on a, en 1750,  $\frac{d\psi'}{dt} = 154'',63$ ; mais, par ce qui précède, on a, à cette époque,

$$\frac{d\psi'}{dt} = l + cg \cos \epsilon \left( \coth h + \frac{l}{l+g} \operatorname{tang} h \right);$$

on a donc

$$l + cg \cos \epsilon \left( \coth h + \frac{l}{l+g} \operatorname{tang} h \right) = 154'',63,$$

équation dans laquelle on peut, en négligeant le carré de  $c$ , substituer pour  $h$  l'obliquité de l'écliptique à l'équateur en 1750. Cette obliquité, suivant les observations, était alors égale à  $26^{\circ},0796$ , d'où l'on tire

$$l = 155'',542.$$

On a ensuite, en 1750,

$$V' = h - \frac{g}{l+g} c \cos \epsilon,$$

ce qui donne

$$h = 26^{\circ},0796 - 3460'',3.$$



Au moyen de ces valeurs, on trouve

$$\psi = t.155'',542 + 2^{\circ},92883 + 42118'',3.\sin(t.155'',542 + 95^{\circ},2389) \\ - 71289'',2.\cos(t.100'',757) - 16521'',1.\sin(t.43'',564),$$

$$V = 26^{\circ},0796 - 3460'',3 - 18017'',4.\cos(t.155'',542 + 95^{\circ},2389) \\ + 4806'',5.\cos(t.43'',564) - 27736'',3.\sin(t.100'',757),$$

$$\psi' = t.155'',542 + 2^{\circ},92883 - 29288'',3.\cos(t.100'',757) \\ - 13374'',2.\sin(t.43'',564),$$

$$V' = 26^{\circ},0796 - 3460'',3.[1 - \cos(t.43'',564)] - 9769'',2.\sin(t.100'',757).$$

On pourra, par ces expressions, déterminer la précession des équinoxes et l'obliquité de l'écliptique dans l'intervalle de mille ou douze cents ans avant et après l'époque de 1750, en observant de faire  $t$  négatif pour les temps antérieurs à cette époque; on pourra même les étendre aux observations d'Hipparque, vu leur imperfection.

La valeur précédente de  $\psi'$  donne, pour l'accroissement de l'année tropique à partir de 1750,

$$- 0^{\circ},000083569.[1 - \cos(t.43'',564)] - 0^{\circ},00042327.\sin(t.100'',757);$$

d'où il suit qu'au temps d'Hipparque, ou 128 ans avant l'ère chrétienne, l'année tropique était de 12'',326 plus longue qu'en 1750; l'obliquité de l'écliptique était plus grande alors de 2832'',27.

Une époque astronomique remarquable est celle où le grand axe de l'orbe terrestre coïncidait avec la ligne des équinoxes; car alors l'équinoxe vrai et l'équinoxe moyen étaient réunis. Je trouve par les formules précédentes que ce phénomène a eu lieu vers l'an 4004 avant l'ère chrétienne, époque où la plupart de nos chronologistes placent la création du monde, et qui, sous ce point de vue, peut être considérée comme une époque astronomique. En effet, on a pour ce temps  $t = -5754$ , et l'expression précédente de  $\psi'$  donne

$$\psi' = -87^{\circ},8530;$$

c'est la longitude de l'équinoxe fixe de 1750 par rapport à l'équinoxe



d'alors. L'expression précédente de  $\varpi''$  donne, pour la longitude du périhélie de l'orbite terrestre ou de l'apogée solaire, comptée de l'équinoxe fixe de 1750,

$$\varpi'' = 89^{\circ}, 1700.$$

Cette longitude, par rapport à l'équinoxe de l'année 4004 avant l'ère chrétienne, était donc  $1^{\circ}, 3170$ , d'où il suit que l'instant où la longitude de l'apogée solaire, comptée de l'équinoxe mobile, était nulle, précède d'environ 69 ans l'époque où l'on fixe la création du monde. Cette différence paraîtra bien petite, si l'on considère l'inexactitude des expressions précédentes de  $\psi'$  et de  $\varpi''$ , lorsqu'on les rapporte à un temps aussi éloigné, et l'incertitude qui subsiste encore, soit relativement au mouvement des équinoxes, soit à l'égard des valeurs que nous supposons aux masses des planètes.

Une autre époque astronomique remarquable est celle où le grand axe de l'orbite terrestre était perpendiculaire à la ligne des équinoxes; car alors le solstice vrai et le solstice moyen étaient réunis. Cette seconde époque est beaucoup plus rapprochée de nous, et remonte à peu près à l'année 1250. Si l'on suppose, en effet,  $t = -500$ , les formules précédentes donnent  $100^{\circ}, 0189$  pour la longitude de l'apogée solaire, comptée de l'équinoxe mobile; ainsi, l'instant où cette longitude était de  $100^{\circ}$  répond à fort peu près au commencement de 1249. L'incertitude des éléments du calcul en laisse une, au moins d'une année, sur ce résultat.



## CHAPITRE XI.

## THÉORIE DE MARS.

32. On a par le n° 29, dans le cas du maximum de  $\delta V'''$ ,

$$\delta \alpha = (1 - \alpha^2) \delta V''',$$

$\alpha$  étant égal à  $\frac{r''}{r'''} \cdot$  Si l'on ne fait varier que  $r'''$  dans  $\alpha$ , on aura

$$\delta r''' = - \frac{r'''^2}{r''} (1 - \alpha^2) \delta V'''.$$

En prenant pour  $r''$  et  $r'''$  les moyennes distances de la Terre et de Mars au Soleil, et supposant  $\delta V''' = \pm 1''$ , on aura

$$\delta r''' = \mp 0,000002076;$$

on peut donc négliger les inégalités du rayon vecteur  $r'''$  dont les coefficients sont au-dessous de  $\pm 0,000002$ . Nous négligerons les inégalités du mouvement de Mars en longitude au-dessous d'un quart de seconde.

*Inégalités de Mars indépendantes des excentricités.*

$$\delta v''' = (1 + \mu') \left\{ \begin{array}{l} 0'',644302 \cdot \sin (n't - n'''t + \varepsilon' - \varepsilon''') \\ - 0'',076897 \cdot \sin 2(n't - n'''t + \varepsilon' - \varepsilon''') \\ - 0'',015431 \cdot \sin 3(n't - n'''t + \varepsilon' - \varepsilon''') \\ - 0'',004222 \cdot \sin 4(n't - n'''t + \varepsilon' - \varepsilon''') \end{array} \right\}$$



$$\begin{aligned}
 & + (1 + \mu''') \left\{ \begin{array}{l} 21'', 570470. \sin (n''t - n'''t + \varepsilon'' - \varepsilon''') \\ - 2'', 989780. \sin 2(n''t - n'''t + \varepsilon'' - \varepsilon''') \\ - 0'', 564852. \sin 3(n''t - n'''t + \varepsilon'' - \varepsilon''') \\ - 0'', 179760. \sin 4(n''t - n'''t + \varepsilon'' - \varepsilon''') \\ - 0'', 071294. \sin 5(n''t - n'''t + \varepsilon'' - \varepsilon''') \\ - 0'', 031909. \sin 6(n''t - n'''t + \varepsilon'' - \varepsilon''') \\ - 0'', 015408. \sin 7(n''t - n'''t + \varepsilon'' - \varepsilon''') \end{array} \right\} \\
 & + (1 + \mu^{iv}) \left\{ \begin{array}{l} 75'', 434700. \sin (n^{iv}t - n'''t + \varepsilon^{iv} - \varepsilon''') \\ - 41'', 969330. \sin 2(n^{iv}t - n'''t + \varepsilon^{iv} - \varepsilon''') \\ - 3'', 642865. \sin 3(n^{iv}t - n'''t + \varepsilon^{iv} - \varepsilon''') \\ - 0'', 533236. \sin 4(n^{iv}t - n'''t + \varepsilon^{iv} - \varepsilon''') \\ - 0'', 102363. \sin 5(n^{iv}t - n'''t + \varepsilon^{iv} - \varepsilon''') \\ - 0'', 041427. \sin 6(n^{iv}t - n'''t + \varepsilon^{iv} - \varepsilon''') \end{array} \right\} \\
 & + (1 + \mu^v) \left\{ \begin{array}{l} 4'', 147390. \sin (n^vt - n'''t + \varepsilon^v - \varepsilon''') \\ - 1'', 369345. \sin 2(n^vt - n'''t + \varepsilon^v - \varepsilon''') \\ - 0'', 071260. \sin 3(n^vt - n'''t + \varepsilon^v - \varepsilon''') \\ - 0'', 005799. \sin 4(n^vt - n'''t + \varepsilon^v - \varepsilon''') \end{array} \right\} \\
 \delta r''' = & (1 + \mu') \left\{ \begin{array}{l} 0, 0000016104 \\ + 0, 0000021947. \cos (n't - n'''t + \varepsilon' - \varepsilon''') \\ + 0, 0000001972. \cos 2(n't - n'''t + \varepsilon' - \varepsilon''') \\ + 0, 0000000418. \cos 3(n't - n'''t + \varepsilon' - \varepsilon''') \end{array} \right\} \\
 & + (1 + \mu'') \left\{ \begin{array}{l} 0, 0000023860 \\ - 0, 0000187564. \cos (n''t - n'''t + \varepsilon'' - \varepsilon''') \\ + 0, 0000052387. \cos 2(n''t - n'''t + \varepsilon'' - \varepsilon''') \\ + 0, 0000011969. \cos 3(n''t - n'''t + \varepsilon'' - \varepsilon''') \\ + 0, 0000004169. \cos 4(n''t - n'''t + \varepsilon'' - \varepsilon''') \\ + 0, 0000001733. \cos 5(n''t - n'''t + \varepsilon'' - \varepsilon''') \\ + 0, 0000000796. \cos 6(n''t - n'''t + \varepsilon'' - \varepsilon''') \end{array} \right\} \\
 & + (1 + \mu^{iv}) \left\{ \begin{array}{l} - 0, 0000066174 \\ + 0, 0000784371. \cos (n^{iv}t - n'''t + \varepsilon^{iv} - \varepsilon''') \\ - 0, 0000679436. \cos 2(n^{iv}t - n'''t + \varepsilon^{iv} - \varepsilon''') \\ - 0, 0000069390. \cos 3(n^{iv}t - n'''t + \varepsilon^{iv} - \varepsilon''') \\ - 0, 0000010930. \cos 4(n^{iv}t - n'''t + \varepsilon^{iv} - \varepsilon''') \\ - 0, 0000002004. \cos 5(n^{iv}t - n'''t + \varepsilon^{iv} - \varepsilon''') \\ - 0, 0000000520. \cos 6(n^{iv}t - n'''t + \varepsilon^{iv} - \varepsilon''') \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$



$$+(1+\mu^v) \left\{ \begin{array}{l} -0,0000003173 \\ +0,0000047062 \cdot \cos(n^v t - n''' t + \varepsilon^v - \varepsilon''') \\ -0,0000023275 \cdot \cos 2(n^v t - n''' t + \varepsilon^v - \varepsilon''') \\ -0,0000001399 \cdot \cos 3(n^v t - n''' t + \varepsilon^v - \varepsilon''') \\ -0,0000000125 \cdot \cos 4(n^v t - n''' t + \varepsilon^v - \varepsilon''') \end{array} \right\}.$$

*Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités.*

$$\delta v''' = (1+\mu') \left\{ \begin{array}{l} 3'', 341189 \cdot \sin(2n''' t - n' t + 2\varepsilon''' - \varepsilon' - \varpi''') \\ - 0'', 779586 \cdot \sin(2n''' t - n' t + 2\varepsilon''' - \varepsilon' - \varpi''') \end{array} \right\}$$

$$+(1+\mu'') \left\{ \begin{array}{l} 2'', 156325 \cdot \sin(n'' + \varepsilon'' - \varpi'') \\ - 0'', 415215 \cdot \sin(2n'' t - n'' t + 2\varepsilon'' - \varepsilon'' - \varpi'') \\ - 31'', 218207 \cdot \sin(2n'' t - n'' t + 2\varepsilon'' - \varepsilon'' - \varpi'') \\ + 15'', 811920 \cdot \sin(2n'' t - n'' t + 2\varepsilon'' - \varepsilon'' - \varpi'') \\ - 20'', 111960 \cdot \sin(3n'' t - 2n'' t + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon'' - \varpi'') \\ + 2'', 611122 \cdot \sin(3n'' t - 2n'' t + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon'' - \varpi'') \\ + 2'', 091815 \cdot \sin(4n'' t - 3n'' t + 4\varepsilon'' - 3\varepsilon'' - \varpi'') \\ - 0'', 244306 \cdot \sin(4n'' t - 3n'' t + 4\varepsilon'' - 3\varepsilon'' - \varpi'') \\ + 0'', 370141 \cdot \sin(5n'' t - 4n'' t + 5\varepsilon'' - 4\varepsilon'' - \varpi'') \end{array} \right\}$$

$$+(1+\mu''') \left\{ \begin{array}{l} 16'', 945362 \cdot \sin(n''' t + \varepsilon''' - \varpi''') \\ - 16'', 564830 \cdot \sin(n''' t + \varepsilon''' - \varpi''') \\ - 72'', 692383 \cdot \sin(2n''' t - n''' t + 2\varepsilon''' - \varepsilon''' - \varpi''') \\ + 8'', 003396 \cdot \sin(2n''' t - n''' t + 2\varepsilon''' - \varepsilon''' - \varpi''') \\ + 7'', 088590 \cdot \sin(3n''' t - 2n''' t + 3\varepsilon''' - 2\varepsilon''' - \varpi''') \\ - 11'', 015046 \cdot \sin(3n''' t - 2n''' t + 3\varepsilon''' - 2\varepsilon''' - \varpi''') \\ + 0'', 679471 \cdot \sin(4n''' t - 3n''' t + 4\varepsilon''' - 3\varepsilon''' - \varpi''') \\ - 1'', 088395 \cdot \sin(4n''' t - 3n''' t + 4\varepsilon''' - 3\varepsilon''' - \varpi''') \\ - 8'', 853862 \cdot \sin(2n''' t - n''' t + 2\varepsilon''' - \varepsilon''' - \varpi''') \\ - 0'', 631233 \cdot \sin(2n''' t - n''' t + 2\varepsilon''' - \varepsilon''' - \varpi''') \\ + 5'', 719628 \cdot \sin(3n''' t - 2n''' t + 3\varepsilon''' - 2\varepsilon''' - \varpi''') \\ + 0'', 611530 \cdot \sin(4n''' t - 3n''' t + 4\varepsilon''' - 3\varepsilon''' - \varpi''') \end{array} \right\}$$

$$+(1+\mu^v) \left\{ \begin{array}{l} 0'', 443697 \cdot \sin(n^v t + \varepsilon^v - \varpi^v) \\ - 2'', 151005 \cdot \sin(n^v t + \varepsilon^v - \varpi^v) \\ - 5'', 549601 \cdot \sin(2n^v t - n^v t + 2\varepsilon^v - \varepsilon^v - \varpi^v) \\ + 0'', 407952 \cdot \sin(2n^v t - n^v t + 2\varepsilon^v - \varepsilon^v - \varpi^v) \\ - 0'', 309401 \cdot \sin(3n^v t - 2n^v t + 3\varepsilon^v - 2\varepsilon^v - \varpi^v) \\ - 0'', 483901 \cdot \sin(2n^v t - n^v t + 2\varepsilon^v - \varepsilon^v - \varpi^v) \end{array} \right\}$$



$$\delta r''' = (1 + \mu') \left\{ \begin{array}{l} 0,0000044700 \cdot \cos(2n'''t - n't + 2\varepsilon''' - \varepsilon' - \varpi''') \\ - 0,0000009713 \cdot \cos(2n'''t - n't + 2\varepsilon''' - \varepsilon' - \varpi''') \end{array} \right\}$$

$$+ (1 + \mu'') \left\{ \begin{array}{l} - 0,0000022865 \cdot \cos(n''t + \varepsilon'' - \varpi'') \\ + 0,0000086337 \cdot \cos(2n''t - n''t + 2\varepsilon'' - \varepsilon'' - \varpi'') \\ - 0,0000031269 \cdot \cos(2n''t - n''t + 2\varepsilon'' - \varepsilon'' - \varpi'') \\ - 0,0000200331 \cdot \cos(3n''t - 2n''t + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon'' - \varpi'') \\ + 0,0000025454 \cdot \cos(3n''t - 2n''t + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon'' - \varpi'') \\ + 0,0000030863 \cdot \cos(4n''t - 3n''t + 4\varepsilon'' - 3\varepsilon'' - \varpi'') \\ + 0,0000040239 \cdot \cos(4n''t - 3n''t + 4\varepsilon'' - 3\varepsilon'' - \varpi'') \end{array} \right\}$$

$$+ (1 + \mu^{iv}) \left\{ \begin{array}{l} 0,0000035825 \cdot \cos(n^{iv}t + \varepsilon^{iv} - \varpi^{iv}) \\ - 0,0000107986 \cdot \cos(n^{iv}t + \varepsilon^{iv} - \varpi^{iv}) \\ + 0,0000031431 \cdot \cos(n^{iv}t + \varepsilon^{iv} - \varpi^{iv}) \\ - 0,0000599470 \cdot \cos(2n^{iv}t - n^{iv}t + 2\varepsilon^{iv} - \varepsilon^{iv} - \varpi^{iv}) \\ + 0,0000069892 \cdot \cos(2n^{iv}t - n^{iv}t + 2\varepsilon^{iv} - \varepsilon^{iv} - \varpi^{iv}) \\ + 0,0000114352 \cdot \cos(3n^{iv}t - 2n^{iv}t + 3\varepsilon^{iv} - 2\varepsilon^{iv} - \varpi^{iv}) \\ - 0,0000169741 \cdot \cos(3n^{iv}t - 2n^{iv}t + 3\varepsilon^{iv} - 2\varepsilon^{iv} - \varpi^{iv}) \\ - 0,0000020307 \cdot \cos(4n^{iv}t - 3n^{iv}t + 4\varepsilon^{iv} - 3\varepsilon^{iv} - \varpi^{iv}) \\ + 0,0000087307 \cdot \cos(2n^{iv}t - n^{iv}t + 2\varepsilon^{iv} - \varepsilon^{iv} - \varpi^{iv}) \\ - 0,0000063983 \cdot \cos(3n^{iv}t - 2n^{iv}t + 3\varepsilon^{iv} - 2\varepsilon^{iv} - \varpi^{iv}) \end{array} \right\}$$

$$- (1 + \mu^v) \cdot 0,0000061906 \cdot \cos(2n^vt - n^vt + 2\varepsilon^v - \varepsilon^v - \varpi^v).$$

*Inégalités dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites.*

$$\delta v''' = - (1 + \mu') \cdot 21'', 295121 \cdot \sin(3n'''t - n't + 3\varepsilon''' - \varepsilon' + 72^\circ, 7083)$$

$$- (1 + \mu'') \left\{ \begin{array}{l} 4'', 365840 \cdot \sin(3n''t - n''t + 3\varepsilon'' - \varepsilon'' + 81^\circ, 3318) \\ + 13'', 490441 \cdot \sin(4n''t - 2n''t + 4\varepsilon'' - 2\varepsilon'' + 75^\circ, 3518) \\ + 8'', 228086 \cdot \sin(5n''t - 3n''t + 5\varepsilon'' - 3\varepsilon'' + 75^\circ, 9814) \end{array} \right\}$$

$$+ (1 + \mu^{iv}) \left\{ \begin{array}{l} - 1'', 428330 \cdot \sin(n^{iv}t + n^{iv}t + \varepsilon^{iv} + \varepsilon^{iv} - 59^\circ, 0333) \\ - 4'', 457166 \cdot \sin(2n^{iv}t + 2\varepsilon^{iv} + 66^\circ, 7969) \\ + 3'', 998174 \cdot \sin(n^{iv}t - n^{iv}t + \varepsilon^{iv} - \varepsilon^{iv} + 60^\circ, 7691) \end{array} \right\}.$$

La dernière de ces inégalités peut être réunie à l'inégalité indépendante des excentricités

$$(1 + \mu^{iv}) \cdot 75'', 434700 \cdot \sin(n^{iv}t - n^{iv}t + \varepsilon^{iv} - \varepsilon^{iv});$$



leur somme donne l'inégalité

$$\begin{aligned}
 & (1 + \mu^{iv}). 77'', 813921. \sin(n^{iv}t - n'''t + \varepsilon^{iv} - \varepsilon''' + 2^\circ, 6702). \\
 \delta r''' = & -(1 + \mu'). 0, 0000023461. \cos(3n'''t - n''t + 3\varepsilon''' - \varepsilon'' + 71^\circ, 9904) \\
 & + (1 + \mu'') \left\{ \begin{array}{l} 0, 0000050403. \cos(3n'''t - n''t + 3\varepsilon''' - \varepsilon'' + 80^\circ, 8704) \\ + 0, 0000070248. \cos(4n'''t - 2n''t + 4\varepsilon''' - 2\varepsilon'' - 65^\circ, 4042) \\ - 0, 0000075032. \cos(5n'''t - 3n''t + 5\varepsilon''' - 3\varepsilon'' + 76^\circ, 0641) \end{array} \right\} \\
 & + (1 + \mu^{iv}) \left\{ \begin{array}{l} 0, 0000080002. \cos(2n^{iv}t + 2\varepsilon^{iv} + 66^\circ, 9975) \\ + 0, 0000041488. \cos(n^{iv}t - n'''t + \varepsilon^{iv} - \varepsilon''' + 65^\circ, 7214) \end{array} \right\}.
 \end{aligned}$$

La dernière de ces inégalités peut être réunie à l'inégalité indépendante des excentricités

$$(1 + \mu^{iv}). 0, 0000784371. \cos(n^{iv}t - n'''t + \varepsilon^{iv} - \varepsilon''');$$

leur somme donne l'inégalité

$$(1 + \mu^{iv}). 0, 0000806432. \cos(n^{iv}t - n'''t + \varepsilon^{iv} - \varepsilon''' + 2^\circ, 8133).$$

Les inégalités du mouvement de Mars en latitude sont très-peu sensibles. En désignant par  $\Pi^{iv}$  la longitude du nœud ascendant de l'orbite de Jupiter sur celle de Mars, on trouve

$$\delta s'' = (1 + \mu^{iv}) \left\{ \begin{array}{l} 0'', 291339. \sin(n^{iv}t + \varepsilon^{iv} - \Pi^{iv}) \\ + 1'', 244657. \sin(2n^{iv}t - n'''t + 2\varepsilon^{iv} - \varepsilon''' - \Pi^{iv}) \end{array} \right\}.$$



## CHAPITRE XII.

## THÉORIE DE JUPITER.

33. L'attraction réciproque des planètes entre elles et sur le Soleil est principalement sensible dans la théorie de Jupiter et de Saturne, et nous allons en voir naître les plus grandes inégalités du système planétaire. L'équation

$$\delta r''' = - \frac{r'''^2}{r''} (1 - \alpha^2) \delta V''',$$

trouvée dans le numéro précédent relativement à Mars, devient, pour Jupiter,

$$\delta r^{iv} = - \frac{r^{iv2}}{r''} (1 - \alpha^2) \delta V^{iv}.$$

Si l'on prend pour  $r''$  et  $r^{iv}$  les moyennes distances de la Terre et de Jupiter au Soleil, et si l'on suppose  $\delta V^{iv} = \pm 1''$ , on aura

$$\delta r^{iv} = \mp 0,0000409225;$$

on peut ainsi négliger les inégalités de  $\delta r^{iv}$  au-dessous de  $\mp 0,000041$ . Nous négligerons les inégalités du mouvement de Jupiter en longitude et en latitude au-dessous d'un quart de seconde.

*Inégalités de Jupiter indépendantes des excentricités.*

$$\delta \varphi^{iv} = (1 + \mu'') \left\{ \begin{array}{l} 0'', 372941. \sin (n''t - n^{iv}t + \varepsilon'' - \varepsilon^{iv}) \\ - 0'', 000266. \sin 2(n''t - n^{iv}t + \varepsilon'' - \varepsilon^{iv}) \end{array} \right\}$$



$$\begin{aligned}
& + (1 + \mu^v) \left\{ \begin{array}{l} 255'', 591700. \sin (n^v t - n^{iv} t + \varepsilon^v - \varepsilon^{iv}) \\ - 630'', 883870. \sin 2 (n^v t - n^{iv} t + \varepsilon^v - \varepsilon^{iv}) \\ - 52'', 690013. \sin 3 (n^v t - n^{iv} t + \varepsilon^v - \varepsilon^{iv}) \\ - 12'', 118299. \sin 4 (n^v t - n^{iv} t + \varepsilon^v - \varepsilon^{iv}) \\ - 3'', 736337. \sin 5 (n^v t - n^{iv} t + \varepsilon^v - \varepsilon^{iv}) \\ - 1'', 322283. \sin 6 (n^v t - n^{iv} t + \varepsilon^v - \varepsilon^{iv}) \\ - 0'', 527541. \sin 7 (n^v t - n^{iv} t + \varepsilon^v - \varepsilon^{iv}) \\ - 0'', 234833. \sin 8 (n^v t - n^{iv} t + \varepsilon^v - \varepsilon^{iv}) \\ - 0'', 127385. \sin 9 (n^v t - n^{iv} t + \varepsilon^v - \varepsilon^{iv}) \end{array} \right\} \\
& + (1 + \mu^{vi}) \left\{ \begin{array}{l} 3'', 246102. \sin (n^{vi} t - n^{iv} t + \varepsilon^{vi} - \varepsilon^{iv}) \\ - 1'', 318815. \sin 2 (n^{vi} t - n^{iv} t + \varepsilon^{vi} - \varepsilon^{iv}) \\ - 0'', 136065. \sin 3 (n^{vi} t - n^{iv} t + \varepsilon^{vi} - \varepsilon^{iv}) \\ - 0'', 018447. \sin 4 (n^{vi} t - n^{iv} t + \varepsilon^{vi} - \varepsilon^{iv}) \end{array} \right\} \\
\delta r^{iv} = & (1 + \mu^v) \left\{ \begin{array}{l} - 0,0000620586 \\ + 0,0006768760. \cos (n^v t - n^{iv} t + \varepsilon^v - \varepsilon^{iv}) \\ - 0,0028966200. \cos 2 (n^v t - n^{iv} t + \varepsilon^v - \varepsilon^{iv}) \\ - 0,0003021367. \cos 3 (n^v t - n^{iv} t + \varepsilon^v - \varepsilon^{iv}) \\ - 0,0000782514. \cos 4 (n^v t - n^{iv} t + \varepsilon^v - \varepsilon^{iv}) \\ - 0,0000258952. \cos 5 (n^v t - n^{iv} t + \varepsilon^v - \varepsilon^{iv}) \\ - 0,0000094779. \cos 6 (n^v t - n^{iv} t + \varepsilon^v - \varepsilon^{iv}) \\ - 0,0000037560. \cos 7 (n^v t - n^{iv} t + \varepsilon^v - \varepsilon^{iv}) \\ - 0,0000014781. \cos 8 (n^v t - n^{iv} t + \varepsilon^v - \varepsilon^{iv}) \\ - 0,0000004799. \cos 9 (n^v t - n^{iv} t + \varepsilon^v - \varepsilon^{iv}) \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

*Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités.*

Plusieurs de ces inégalités étant considérables, il importe d'avoir les variations de leurs coefficients : nous allons donner celles des coefficients qui surpassent cent secondes dans l'expression de  $\delta e^{iv}$ . Les coefficients des inégalités dépendantes de  $\varpi^{iv}$  ont  $e^{iv}$  pour multiplicateur; en nommant donc  $Ae^{iv}$  l'un de ces coefficients, sa variation sera  $Ae^{iv} \frac{\delta e^{iv}}{e^{iv}}$ , et l'on verra dans la suite qu'en ayant égard aux quantités dépendantes du carré de la force perturbatrice, et dont nous avons donné les expressions analytiques dans le n° 13, on a

$$\delta e^{iv} = t. 1'', 016936.$$



Pareillement, les coefficients des inégalités dépendantes de  $\varpi^v$  ont  $e^v$  pour multiplicateur; en nommant donc  $Be^v$  l'un de ces coefficients, sa variation sera  $Be^v \frac{\partial e^v}{e^v}$ , et l'on verra dans la suite que

$$\delta e^v = -t.1'',984469.$$

Cela posé, on trouve

$$\delta v^{1v} = (1 + \mu^v) \left\{ \begin{array}{l} 26'',569412. \sin(n^v t + \varepsilon^v - \varpi^{1v}) \\ - 29'',914770. \sin(n^v t + \varepsilon^v - \varpi^v) \\ - (427'',078201 + t.0'',0141929). \sin(2n^v t - n^{1v} t + 2\varepsilon^v - \varepsilon^{1v} - \varpi^{1v}) \\ + (174'',796601 - t.0'',0096906). \sin(2n^v t - n^{1v} t + 2\varepsilon^v - \varepsilon^{1v} - \varpi^v) \\ - (137'',224760 + t.0'',0045603). \sin(3n^v t - 2n^{1v} t + 3\varepsilon^v - 2\varepsilon^{1v} - \varpi^{1v}) \\ + (262'',168424 - t.0'',0145351). \sin(3n^v t - 2n^{1v} t + 3\varepsilon^v - 2\varepsilon^{1v} - \varpi^v) \\ + 24'',460840. \sin(4n^v t - 3n^{1v} t + 4\varepsilon^v - 3\varepsilon^{1v} - \varpi^{1v}) \\ - 48'',239570. \sin(4n^v t - 3n^{1v} t + 4\varepsilon^v - 3\varepsilon^{1v} - \varpi^v) \\ + 3'',233695. \sin(5n^v t - 4n^{1v} t + 5\varepsilon^v - 4\varepsilon^{1v} - \varpi^{1v}) \\ - 8'',585382. \sin(5n^v t - 4n^{1v} t + 5\varepsilon^v - 4\varepsilon^{1v} - \varpi^v) \\ + 1'',256948. \sin(6n^v t - 5n^{1v} t + 6\varepsilon^v - 5\varepsilon^{1v} - \varpi^{1v}) \\ - 2'',818833. \sin(6n^v t - 5n^{1v} t + 6\varepsilon^v - 5\varepsilon^{1v} - \varpi^v) \\ + 0'',460731. \sin(7n^v t - 6n^{1v} t + 7\varepsilon^v - 6\varepsilon^{1v} - \varpi^{1v}) \\ - 1'',004913. \sin(7n^v t - 6n^{1v} t + 7\varepsilon^v - 6\varepsilon^{1v} - \varpi^v) \\ - 16'',074450. \sin(2n^{1v} t - n^v t + 2\varepsilon^{1v} - \varepsilon^v - \varpi^{1v}) \\ - 1'',758450. \sin(2n^{1v} t - n^v t + 2\varepsilon^{1v} - \varepsilon^v - \varpi^v) \\ + 39'',742746. \sin(3n^{1v} t - 2n^v t + 3\varepsilon^{1v} - 2\varepsilon^v - \varpi^{1v}) \\ - 1'',087650. \sin(3n^{1v} t - 2n^v t + 3\varepsilon^{1v} - 2\varepsilon^v - \varpi^v) \\ + 3'',973709. \sin(4n^{1v} t - 3n^v t + 4\varepsilon^{1v} - 3\varepsilon^v - \varpi^{1v}) \\ - 0'',533617. \sin(4n^{1v} t - 3n^v t + 4\varepsilon^{1v} - 3\varepsilon^v - \varpi^v) \\ + 1'',100702. \sin(5n^{1v} t - 4n^v t + 5\varepsilon^{1v} - 4\varepsilon^v - \varpi^{1v}) \\ - 0'',256755. \sin(5n^{1v} t - 4n^v t + 5\varepsilon^{1v} - 4\varepsilon^v - \varpi^v) \\ \\ + (1 + \mu^{1v}) \left\{ \begin{array}{l} 0'',381191. \sin(n^{1v} t + \varepsilon^{1v} - \varpi^{1v}) \\ - 0'',726050. \sin(n^{1v} t + \varepsilon^{1v} - \varpi^v) \\ - 1'',645307. \sin(2n^{1v} t - n^{1v} t + 2\varepsilon^{1v} - \varepsilon^{1v} - \varpi^{1v}) \\ + 0'',316891. \sin(2n^{1v} t - n^{1v} t + 2\varepsilon^{1v} - \varepsilon^{1v} - \varpi^v) \\ - 0'',394947. \sin(3n^{1v} t - 2n^{1v} t + 3\varepsilon^{1v} - 2\varepsilon^{1v} - \varpi^{1v}) \end{array} \right. \end{array} \right.$$



$$\delta r^{1v} = (1 + \mu^v) \left\{ \begin{array}{l} 0,0000206111 \cdot \cos(n^{1v}t + \varepsilon^{1v} - \varpi^{1v}) \\ - 0,0000795246 \cdot \cos(n^v t + \varepsilon^v - \varpi^{1v}) \\ + 0,0000492096 \cdot \cos(n^v t + \varepsilon^v - \varpi^v) \\ - 0,0002922130 \cdot \cos(2n^v t - n^{1v}t + 2\varepsilon^v - \varepsilon^{1v} - \varpi^{1v}) \\ + 0,0001688085 \cdot \cos(2n^v t - n^{1v}t + 2\varepsilon^v - \varepsilon^{1v} - \varpi^v) \\ - 0,0004584483 \cdot \cos(3n^v t - 2n^{1v}t + 3\varepsilon^v - 2\varepsilon^{1v} - \varpi^{1v}) \\ + 0,0009047822 \cdot \cos(3n^v t - 2n^{1v}t + 3\varepsilon^v - 2\varepsilon^{1v} - \varpi^v) \\ + 0,0001259429 \cdot \cos(4n^v t - 3n^{1v}t + 4\varepsilon^v - 3\varepsilon^{1v} - \varpi^{1v}) \\ - 0,0002424413 \cdot \cos(4n^v t - 3n^{1v}t + 4\varepsilon^v - 3\varepsilon^{1v} - \varpi^v) \\ + 0,0000268383 \cdot \cos(5n^v t - 4n^{1v}t + 5\varepsilon^v - 4\varepsilon^{1v} - \varpi^{1v}) \\ - 0,0000516048 \cdot \cos(5n^v t - 4n^{1v}t + 5\varepsilon^v - 4\varepsilon^{1v} - \varpi^v) \\ + 0,0000579151 \cdot \cos(2n^{1v}t - n^v t + 2\varepsilon^{1v} - \varepsilon^v - \varpi^{1v}) \\ - 0,0001346530 \cdot \cos(3n^{1v}t - 2n^v t + 3\varepsilon^{1v} - 2\varepsilon^v - \varpi^{1v}) \end{array} \right\}.$$

*Inégalités dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons (\*).*

$$\delta \nu^{1v} = (1 + \mu^v) \left\{ \begin{array}{l} 3'', 097780 \cdot \sin(n^v t + n^{1v}t + \varepsilon^v + \varepsilon^{1v} + 50^\circ, 5438) \\ - 17'', 218232 \cdot \sin(2n^v t + 2\varepsilon^v + 17^\circ, 7111) \\ + 36'', 185942 \cdot \sin(3n^v t - n^{1v}t + 3\varepsilon^v - \varepsilon^{1v} + 88^\circ, 5148) \\ - 55'', 787912 \cdot \sin(4n^v t - 2n^{1v}t + 4\varepsilon^v - 2\varepsilon^{1v} - 63^\circ, 5635) \\ + (522'', 425601 - t \cdot 0'', 013202) \cdot \sin \left( \begin{array}{l} 3n^{1v}t - 5n^v t + 3\varepsilon^{1v} - 5\varepsilon^v \\ + 61^\circ, 8669 + t \cdot 155'', 89 \end{array} \right) \\ + 5'', 083765 \cdot \sin(6n^v t - 4n^{1v}t + 6\varepsilon^v - 4\varepsilon^{1v} - 60^\circ, 4778) \\ + 7'', 643221 \cdot \sin(n^v t - n^{1v}t + \varepsilon^v - \varepsilon^{1v} + 48^\circ, 0929) \\ - 19'', 407399 \cdot \sin(2n^v t - 2n^{1v}t + 2\varepsilon^v - 2\varepsilon^{1v} + 47^\circ, 4210) \end{array} \right\}.$$

Ces deux dernières inégalités, réunies aux deux suivantes,

$$(1 + \mu^v) [255'', 591700 \cdot \sin(n^v t - n^{1v}t + \varepsilon^v - \varepsilon^{1v}) - 630'', 883870 \cdot \sin 2(n^v t - n^{1v}t + \varepsilon^v - \varepsilon^{1v})]$$

que nous avons trouvées précédemment, et qui sont indépendantes des excentricités, donnent celles-ci

$$(1 + \mu^v) \left\{ \begin{array}{l} - 261'', 200420 \cdot \sin(n^{1v}t - n^v t + \varepsilon^{1v} - \varepsilon^v - 1^\circ, 2756) \\ + 645'', 364888 \cdot \sin(2n^{1v}t - 2n^v t + 2\varepsilon^{1v} - 2\varepsilon^v - 1^\circ, 2957) \end{array} \right\}.$$

(\*) La valeur de  $\delta \nu^{1v}$  a été reproduite conformément à l'édition originale. Dans la deuxième édition, dont le tome III porte le millésime de 1839 et a été imprimé par conséquent après la mort de l'Auteur, l'angle  $+ 50^\circ, 5438$ , qui figure à la première ligne de  $\delta \nu^{1v}$ , est remplacé par  $+ 74^\circ, 5200$ ; au lieu du coefficient  $- 55'', 787912$  de la quatrième ligne, on lit  $- 54'', 787912$ ; enfin, dans cette même ligne, l'angle  $- 63^\circ, 5635$  est changé en  $- 64^\circ, 2284$ .



On a ensuite

$$\delta r^{iv} = (1 + \mu^v) \left\{ \begin{array}{l} 0,0000822415 \cdot \cos(2n^v t + 2\varepsilon^v + 12^\circ, 2392) \\ + 0,0000226252 \cdot \cos(3n^v t - n^{iv} t + 3\varepsilon^v - \varepsilon^{iv} - 24^\circ, 2093) \\ - 0,0001010533 \cdot \cos(4n^v t - 2n^{iv} t + 4\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv} - 56^\circ, 7419) \\ - (0,0021114502 - t \cdot 0,00000005323) \cdot \cos \left( \begin{array}{l} 3n^{iv} t - 5n^v t + 3\varepsilon^{iv} - 5\varepsilon^v \\ + 61^\circ, 7749 + t \cdot 155'', 60 \end{array} \right) \\ - 0,0000652204 \cdot \cos(2n^v t - 2n^{iv} t + 2\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv} + 60^\circ, 1641) \end{array} \right\}$$

En réunissant la dernière de ces inégalités à la suivante,

$$- (1 + \mu^v) \cdot 0,0028966200 \cdot \cos 2(n^v t - n^{iv} t + \varepsilon^v - \varepsilon^{iv}),$$

que nous avons trouvée précédemment, et qui est indépendante des excentricités, on a celle-ci,

$$- (1 + \mu^v) \cdot 0,0029251892 \cdot \cos(2n^{iv} t - 2n^v t + 2\varepsilon^{iv} - 2\varepsilon^v - 1^\circ, 1506).$$

Les inégalités précédentes de  $\delta r^{iv}$  ont été calculées par les formules (A), (C), (E) et (F) des nos 1 et 2, à l'exception de l'inégalité dépendante de l'angle  $3n^{iv} t - 5n^v t$ ;  $5n^v - 2n^{iv}$  étant un coefficient très-petit en vertu du rapport qui existe entre les moyens mouvements de Jupiter et de Saturne, l'angle  $3n^{iv} t - 5n^v t$  diffère très-peu de  $n^{iv} t$ ; on a donc fait usage, pour calculer cette inégalité, des formules (B) et (C) du n° 1 et de la méthode du n° 18.

*Inégalités dépendantes du cube et des produits de trois et de cinq dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites, ainsi que du carré de la force perturbatrice.*

La grande inégalité de Jupiter a été calculée par les formules des nos 7, 8, 9, 13, 14, 15, 16 et 17. On a trouvé, par le n° 8,

$$a^v M^{(0)} = -5,2439100 \cdot m^v,$$

$$a^v M^{(1)} = 9,6074688 \cdot m^v,$$

$$a^v M^{(2)} = -5,8070750 \cdot m^v,$$

$$a^v M^{(3)} = 1,1620283 \cdot m^v,$$

$$a^v M^{(4)} = -0,6385781 \cdot m^v,$$

$$a^v M^{(5)} = 0,3320740 \cdot m^v.$$



De là on a conclu, pour 1750,

$$a^v P = 0,0001093026,$$

$$a^v P' = -0,0010230972.$$

On a déterminé ces valeurs pour 2250 et pour 2750. Pour cela, il a été nécessaire de déterminer les valeurs de  $e^{1v}$ ,  $e^v$ ,  $\varpi^{1v}$ ,  $\varpi^v$ ,  $\gamma$  et  $\Pi$  en séries ordonnées par rapport aux puissances du temps, en portant la précision jusqu'au carré du temps. On a d'abord calculé, par les formules du n° 13, les variations séculaires de  $\delta e^{1v}$ ,  $\delta e^v$ ,  $\delta \varpi^{1v}$  et  $\delta \varpi^v$  dépendantes du carré de la force perturbatrice, et l'on a trouvé pour ces variations

$$\delta e^{1v} = t. 0'',161352,$$

$$\delta \varpi^{1v} = t. 1'',089325,$$

$$\delta e^v = -t. 0'',317171,$$

$$\delta \varpi^v = t. 10'',008401.$$

Les coefficients de  $t$ , dans ces expressions, sont les parties de  $\frac{de^{1v}}{dt}$ ,  $\frac{d\varpi^{1v}}{dt}$ ,  $\frac{de^v}{dt}$ ,  $\frac{d\varpi^v}{dt}$  dépendantes du carré de la force perturbatrice; il faut les ajouter aux valeurs des mêmes quantités déterminées dans le n° 25, ce qui donne, pour ces valeurs entières en 1750,

$$\frac{de^{1v}}{dt} = 1'',016936,$$

$$\frac{d\varpi^{1v}}{dt} = 21'',459284,$$

$$\frac{de^v}{dt} = -1'',984469,$$

$$\frac{d\varpi^v}{dt} = 59'',739037.$$

On a déterminé, par le même procédé, ces valeurs pour 1950, et l'on



a trouvé, pour cette époque,

$$\frac{de^{1v}}{dt} = 1'',006705,$$

$$\frac{d\varpi^{1v}}{dt} = 21'',769069,$$

$$\frac{de^v}{dt} = -2'',001540,$$

$$\frac{d\varpi^v}{dt} = 59'',952898.$$

De là on a conclu, par le n° 8, les expressions suivantes de  $e^{1v}$ ,  $\varpi^{1v}$ ,  $e^v$ ,  $\varpi^v$ , pour un temps quelconque  $t$ ,

$$e^{1v} = e^{1v} + t. 1'',016936 - t^2.0'',0000255775,$$

$$\varpi^{1v} = \varpi^{1v} + t.21'',459284 + t^2.0'',0007744625,$$

$$e^v = e^v - t. 1'',984469 - t^2.0'',0000426775,$$

$$\varpi^v = \varpi^v + t.59'',739037 + t^2.0'',0005346525,$$

les valeurs de  $e^{1v}$ ,  $\varpi^{1v}$ ,  $e^v$ ,  $\varpi^v$  dans les seconds membres de ces équations étant celles de 1750.

On a déterminé les valeurs de  $\gamma$  et de  $\Pi$  au moyen des équations

$$\varphi^v \sin \theta^v - \varphi^{1v} \sin \theta^{1v} = \gamma \sin \Pi,$$

$$\varphi^v \cos \theta^v - \varphi^{1v} \cos \theta^{1v} = \gamma \cos \Pi.$$

Ensuite on a déterminé les valeurs de  $\frac{d\gamma}{dt}$  et de  $\frac{d\Pi}{dt}$  au moyen des différentielles de ces équations, en y substituant, pour  $\frac{d\varphi^{1v}}{dt}$ ,  $\frac{d\varphi^v}{dt}$ ,  $\frac{d\theta^{1v}}{dt}$ ,  $\frac{d\theta^v}{dt}$ , leurs valeurs données dans le n° 25. On a trouvé de cette manière, pour 1750,

$$\gamma = 1^{\circ},3982, \quad \Pi = 139^{\circ},7142,$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -0'',000326. \quad \frac{d\Pi}{dt} = -80'',537447,$$

Les formules du n° 14 donnent, pour les variations séculaires de  $\gamma$  et de  $\Pi$  dépendantes du carré de la force perturbatrice,

$$\delta\gamma = t.0'',000568, \quad \delta\Pi = -t.0'',023552.$$



En ajoutant les coefficients de  $t$  dans ces équations aux valeurs précédentes de  $\frac{d\gamma}{dt}$  et de  $\frac{d\Pi}{dt}$ , on aura, pour les valeurs complètes de ces quantités en 1750,

$$\frac{d\gamma}{dt} = 0'',000242, \quad \frac{d\Pi}{dt} = -80'',560999.$$

On a trouvé par le même procédé, pour 1950,

$$\frac{d\gamma}{dt} = -0'',004589, \quad \frac{d\Pi}{dt} = -81'',487827.$$

De là on a conclu, par le n° 8, pour un temps quelconque  $t$ ,

$$\gamma = \gamma + t. 0'',000242 - t^2.0'',0000120775,$$

$$\Pi = \Pi - t.80'',560999 - t^2.0'',0023170701,$$

les valeurs de  $\gamma$  et de  $\Pi$ , dans les seconds membres de ces équations, étant celles de 1750. Cela posé, on a trouvé, pour 2250,

$$a^v P = -0,000080189,$$

$$a^v P' = -0,001006510,$$

et pour 2750,

$$a^v P = -0,000260997,$$

$$a^v P' = -0,000954603,$$

d'où l'on a conclu, par le n° 8,

$$a^v \frac{dP}{dt} = -0,000000387666,$$

$$a^v \frac{dP'}{dt} = -0,000000002145,$$

$$a^v \frac{d^2 P}{dt^2} = 0,00000000034734,$$

$$a^v \frac{d^2 P'}{dt^2} = 0,000000000141280.$$



La partie de  $\delta v^{1v}$  donnée dans le n° 18,

$$\frac{6m^v n^{1v^2}}{(5n^v - 2n^{1v})^2} \left\{ \begin{aligned} & \left[ a^{1v} P' + \frac{2a^{1v} dP}{(5n^v - 2n^{1v}) dt} - \frac{3a^{1v} d^2 P'}{(5n^v - 2n^{1v})^2 dt^2} \right. \\ & \left. + t \left( a^{1v} \frac{dP'}{dt} + \frac{2a^{1v} d^2 P}{(5n^v - 2n^{1v}) dt^2} \right) + \frac{1}{2} t^2 a^{1v} \frac{d^2 P'}{dt^2} \right] \sin(5n^v t - 2n^{1v} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{1v}) \\ & - \left[ a^{1v} P - \frac{2a^{1v} dP'}{(5n^v - 2n^{1v}) dt} - \frac{3a^{1v} d^2 P}{(5n^v - 2n^{1v})^2 dt^2} \right. \\ & \left. + t \left( a^{1v} \frac{dP}{dt} - \frac{2a^{1v} d^2 P'}{(5n^v - 2n^{1v}) dt^2} \right) + \frac{1}{2} t^2 a^{1v} \frac{d^2 P}{dt^2} \right] \cos(5n^v t - 2n^{1v} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{1v}) \end{aligned} \right\}$$

devient ainsi, en la réduisant en nombres,

$$(3900'', 616270 - t. 0'', 025982 - t^2. 0'', 000059403) \sin(5n^v t - 2n^{1v} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{1v}) \\ + (368'', 910343 - t. 1'', 461994 + t^2. 0'', 000242476) \cos(5n^v t - 2n^{1v} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{1v}).$$

La grande inégalité de Jupiter se compose de plusieurs autres parties : elle renferme encore, par le n° 8, la fonction

$$\frac{2m^v n^{1v}}{5n^v - 2n^{1v}} \left[ \begin{aligned} & a^{1v^2} \frac{\partial P}{\partial a^{1v}} \cos(5n^v t - 2n^{1v} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{1v}) \\ & - a^{1v^2} \frac{\partial P'}{\partial a^{1v}} \sin(5n^v t - 2n^{1v} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{1v}) \end{aligned} \right]$$

Pour la réduire en nombres, il faut calculer les valeurs de  $a^{v^2} \frac{\partial M^{(0)}}{\partial a^{1v}}$ ,  $a^{v^2} \frac{\partial M^{(1)}}{\partial a^{1v}}$ , .... On a trouvé

$$a^{v^2} \frac{\partial M^{(0)}}{\partial a^{1v}} = -26,46390. m^v,$$

$$a^{v^2} \frac{\partial M^{(1)}}{\partial a^{1v}} = 65,75870. m^v,$$

$$a^{v^2} \frac{\partial M^{(2)}}{\partial a^{1v}} = -50,22714. m^v,$$

$$a^{v^2} \frac{\partial M^{(3)}}{\partial a^{1v}} = 12,14696. m^v,$$

$$a^{v^2} \frac{\partial M^{(4)}}{\partial a^{1v}} = -6,75963. m^v,$$

$$a^{v^2} \frac{\partial M^{(5)}}{\partial a^{1v}} = 4,13173. m^v.$$



On a conclu de ces valeurs celles de  $a^{v^2} \frac{\partial M^{(0)}}{\partial a^v}$ ,  $a^{v^2} \frac{\partial M^{(1)}}{\partial a^v}$ , ..., qui sont nécessaires dans la théorie de Saturne, au moyen de l'équation générale

$$a^v \frac{\partial M^{(i)}}{\partial a^v} + a^{iv} \frac{\partial M^{(i)}}{\partial a^{iv}} = -M^{(i)}.$$

On a trouvé ensuite, pour 1750,

$$\begin{aligned} & - \frac{2m^v n^{iv}}{5n^v - 2n^{iv}} \left[ \begin{array}{l} a^{iv^2} \frac{\partial P}{\partial a^{iv}} \cos(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}) \\ - a^{iv^2} \frac{\partial P'}{\partial a^{iv}} \sin(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}) \end{array} \right] \\ & = -53''.175501. \sin(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}) \\ & \quad + 16''.543260. \cos(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}), \end{aligned}$$

et pour 1950, on a trouvé cette fonction égale à

$$\begin{aligned} & -51''.965436. \sin(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}) \\ & + 19''.906909. \cos(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}), \end{aligned}$$

d'où l'on a conclu la valeur de cette fonction, pour un temps quelconque  $t$ , égale à

$$\begin{aligned} & - (53''.175501 - t.0''.0060503) \sin(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}) \\ & + (16''.543260 + t.0''.0168182) \cos(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}). \end{aligned}$$

La grande inégalité de Jupiter renferme encore, par le n° 8, le terme

$$- \frac{e^{iv} H}{2} \sin(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv} - \varpi^{iv} + \Lambda);$$

ce terme, en 1750, était égal à

$$\begin{aligned} & 2''.531758. \sin(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}) \\ & - 5''.672724. \cos(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}), \end{aligned}$$



et en 1950 il sera égal à

$$2'', 165507 \cdot \sin(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}) \\ - 5'', 681970 \cdot \cos(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}),$$

d'où l'on a conclu, pour un temps quelconque  $t$ , ce terme égal à

$$(2'', 531758 - t \cdot 0'', 0018310) \sin(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}) \\ - (5'', 672724 + t \cdot 0'', 0000460) \cos(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}).$$

Pour déterminer la partie de la grande inégalité de Jupiter dépendante des produits de cinq dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites, on a déterminé, par le n° 9, les valeurs de  $N^{(0)}$ ,  $N^{(1)}$ , ... pour les deux époques de 1750 et de 1950, et l'on a trouvé (\*) :

En 1750.	En 1950.
$a^v N^{(0)} = -0,00000135044,$	$a^v N^{(0)} = -0,00000129983,$
$a^v N^{(1)} = -0,00000789719,$	$a^v N^{(1)} = -0,00000754771,$
$a^v N^{(2)} = 0,0000198552,$	$a^v N^{(2)} = 0,0000196012,$
$a^v N^{(3)} = -0,0000175127,$	$a^v N^{(3)} = -0,0000172415,$
$a^v N^{(4)} = 0,0000066540,$	$a^v N^{(4)} = 0,0000066551,$
$a^v N^{(5)} = -0,0000009277,$	$a^v N^{(5)} = -0,0000009408,$
$a^v N^{(6)} = -0,0000003618,$	$a^v N^{(6)} = -0,0000003562,$
$a^v N^{(7)} = -0,0000003643,$	$a^v N^{(7)} = -0,0000003460,$
$a^v N^{(8)} = 0,0000001720,$	$a^v N^{(8)} = 0,000001712,$
$a^v N^{(9)} = -0,0000000730;$	$a^v N^{(9)} = -0,0000000732.$

De là on a conclu l'inégalité correspondante relative à Saturne, que nous donnerons ci-après, et, en la multipliant par le facteur  $-\frac{m^v \sqrt{a^v}}{m^{iv} \sqrt{a^{iv}}}$ ,

(\*) Ces valeurs de  $a^v N^{(0)}$ ,  $a^v N^{(1)}$ , ... sont celles qui figurent dans l'édition originale. Dans la deuxième édition, les valeurs de  $a^v N^{(7)}$  et de  $a^v N^{(8)}$  sont différentes; on y lit, pour 1750,

$$a^v N^{(7)} = -0,0000002616, \quad a^v N^{(8)} = 0,0000006855,$$

et, pour 1950,

$$a^v N^{(7)} = -0,0000002275, \quad a^v N^{(8)} = 0,0000066675.$$

Voir, au sujet des erreurs dont ces quantités sont affectées, la note de la page 28.



on a obtenu l'inégalité suivante de Jupiter (\*),

$$(38'',692571 - t.0'',005418) \sin(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}) \\ - (25'',064701 + t.0'',015076) \cos(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}).$$

Enfin on a déterminé, par le n° 16, la partie sensible de la grande inégalité de Saturne dépendante du carré de la force perturbatrice, et l'on en a conclu celle de Jupiter, en la multipliant par  $-\frac{m^v \sqrt{a^v}}{m^{iv} \sqrt{a^{iv}}}$ , ce qui donne pour cette dernière inégalité

$$(5'',066862 - t.0'',0144693) \sin(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}) \\ - (56'',981339 + t.0'',0046755) \cos(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}).$$

Maintenant, si l'on rassemble ces diverses parties de la grande inégalité de Jupiter, on aura, pour sa valeur entière,

$$(1 + \mu^v) \left\{ (3893'',731960 - t.0'',041650 - t^2.0'',000059403) \sin(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}) \right. \\ \left. + (297'',734839 - t.1'',464973 + t^2.0'',00024248) \cos(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}) \right\}.$$

En réduisant ces deux termes en un seul par la méthode du n° 17, on aura

$$(1 + \mu^v) (3905'',098090 - t.0'',114476 + t^2.0'',000113175) \sin \left( \begin{array}{l} 5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv} + 4'',8583 \\ - t.239'',669 + t^2.0'',038830 \end{array} \right).$$

Cette inégalité peut avoir besoin de correction, soit à raison du coefficient  $\mu^v$  ou de la masse de Saturne, soit à raison du diviseur  $(5n^v - 2n^{iv})^2$ ; une suite nombreuse d'observations lèvera ces légères incertitudes. Il faut, comme on l'a vu dans le n° 17, appliquer cette grande inégalité au moyen mouvement de Jupiter.

Le carré de la force perturbatrice produit encore, par le n° 12, l'inégalité

$$-\frac{\bar{H}^2}{8} \frac{(2m^v \sqrt{a^v} + 5m^{iv} \sqrt{a^{iv}})}{m^v \sqrt{a^v}} \sin(\text{double argument de la grande inégalité}),$$

ce qui donne

$$-40'',860794 \cdot \sin(\text{double argument de la grande inégalité}).$$

(\*) Voir à la fin du volume, n° 5 du Supplément, la correction indiquée par l'Auteur. — Voir aussi la note de la page précédente.



Il faut encore appliquer au moyen mouvement de Jupiter cette inégalité à longue période.

L'inégalité

$$\frac{1}{4} \frac{(5m^{1v} \sqrt{a^{1v}} + 4m^v \sqrt{a^v})}{m^v \sqrt{a^v}} \overline{\text{HK}} \sin(5n^{1v}t - 10n^vt + 5\varepsilon^{1v} - 10\varepsilon^v - \text{B} - \overline{\text{A}}),$$

trouvée dans le n° 13, donne, en la réduisant en nombres,

$$= 12'', 422071. \sin(5n^{1v}t - 10n^vt + 5\varepsilon^{1v} - 10\varepsilon^v + 57^\circ, 0725).$$

On a encore, par le n° 8, l'inégalité

$$\frac{5}{4} e^{1v} \text{K} \sin(5n^vt - 4n^{1v}t + 5\varepsilon^v - 4\varepsilon^{1v} + \varpi^{1v} + \text{B}).$$

Cette inégalité, réduite en nombres, donne

$$31'', 125493. \sin(4n^{1v}t - 5n^vt + 4\varepsilon^{1v} - 5\varepsilon^v + 50^\circ, 4025);$$

en la réunissant aux deux inégalités

$$\begin{aligned} & 3'', 387695. \sin(5n^vt - 4n^{1v}t + 5\varepsilon^v - 4\varepsilon^{1v} - \varpi^{1v}), \\ & - 8'', 585382. \sin(5n^vt - 4n^{1v}t + 5\varepsilon^v - 4\varepsilon^{1v} - \varpi^v), \end{aligned}$$

que nous avons trouvées précédemment, on aura l'inégalité

$$(1 + \mu^v). 35'', 512932. \sin(4n^{1v}t - 5n^vt + 4\varepsilon^{1v} - 5\varepsilon^v + 64^\circ, 4555).$$

On a vu, dans le n° 5, que l'expression de  $d\delta v^{1v}$  renferme une inégalité séculaire dépendante de l'équation (\*)

$$\begin{aligned} \frac{d\delta v^{1v}}{dt} &= \frac{m^v n^{1v}}{8} (h^{1v^2} + l^{1v^2}) \left( 2a^{1v^2} \frac{\partial \Lambda^{(0)}}{\partial a^{1v}} + 7a^{1v^3} \frac{\partial^2 \Lambda^{(0)}}{\partial a^{1v^2}} + 2a^{1v^4} \frac{\partial^3 \Lambda^{(0)}}{\partial a^{1v^3}} \right) \\ &+ \frac{m^v n^{1v}}{4} (h^{v^2} + l^{v^2}) \left( 2a^{1v^2} \frac{\partial \Lambda^{(0)}}{\partial a^{1v}} + 4a^{1v^3} \frac{\partial^2 \Lambda^{(0)}}{\partial a^{1v^2}} + a^{1v^4} \frac{\partial^3 \Lambda^{(0)}}{\partial a^{1v^3}} \right) \\ &- \frac{m^v n^{1v}}{8} (h^{1v} h^v + l^{1v} l^v) \left( 2a^{1v} \Lambda^{(1)} - 2a^{1v^2} \frac{\partial \Lambda^{(1)}}{\partial a^{1v}} + 15a^{1v^3} \frac{\partial^2 \Lambda^{(1)}}{\partial a^{1v^2}} + 4a^{1v^4} \frac{\partial^3 \Lambda^{(1)}}{\partial a^{1v^3}} \right), \end{aligned}$$

(\*) D'après l'errata placé à la fin du tome V de l'édition du Gouvernement, cette inégalité doit être affectée du signe  $-$ . La correction est donnée comme ayant été indiquée par l'Auteur.



d'où l'on a conclu

$$\frac{d\delta v^{1v}}{dt} = -73'',9016.t.e^{1v^2} - 85'',7873.t.e^{v^2} + 132'',4989.t.e^{1v}e^v \cos(\varpi^v - \varpi^{1v}).$$

On peut, dans le second membre de cette équation, négliger la partie constante, qui se confond avec le moyen mouvement de Jupiter, et alors on a

$$\begin{aligned} \frac{d\delta v^{1v}}{dt} = & -73'',9016.t.t.e^{1v} \frac{de^{1v}}{dt} - 85'',7873.t.t.e^v \frac{de^v}{dt} \\ & + 132'',4989.t \left[ \left( e^{1v} \frac{de^v}{dt} + e^v \frac{de^{1v}}{dt} \right) \cos(\varpi^v - \varpi^{1v}) - e^{1v}e^v \frac{d\varpi^v - d\varpi^{1v}}{dt} \sin(\varpi^v - \varpi^{1v}) \right]. \end{aligned}$$

En substituant, pour  $\frac{de^{1v}}{dt}$ ,  $\frac{de^v}{dt}$ ,  $\frac{d\varpi^{1v}}{dt}$ ,  $\frac{d\varpi^v}{dt}$ , leurs valeurs données par ce qui précède, et intégrant, on a

$$\delta v^{1v} = -t^2.0,000020066.$$

Cette inégalité est insensible dans l'intervalle de mille ou douze cents ans, et même par rapport aux observations les plus anciennes qui nous soient parvenues; on peut donc la négliger.

Il nous reste à considérer le rayon vecteur de Jupiter. On a vu, dans le n° 8, que les termes dépendants du cube des excentricités ajoutent à son expression la quantité

$$\begin{aligned} & -a^{1v}e^{1v}H \cos(5n^v t - 2n^{1v}t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{1v} - \varpi^{1v} + \Lambda) \\ & + a^{1v}e^{1v}H \cos(4n^{1v}t - 5n^v t + 4\varepsilon^{1v} - 5\varepsilon^v - \varpi^{1v} - \Lambda) \\ & + \frac{4m^v n^{1v} a^{1v^2}}{5n^v - 2n^{1v}} \left\{ P \sin(5n^v t - 2n^{1v}t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{1v}) \right\} \\ & + P' \cos(5n^v t - 2n^{1v}t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{1v}) \left\{ \right\} \end{aligned}$$

En réduisant cette fonction en nombres, on trouve

$$\delta r^{1v} = (1 + \mu^v) \left\{ \begin{aligned} & -0,0003042733 \cdot \cos(5n^v t - 2n^{1v}t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{1v} - 13^\circ, 4966) \\ & + 0,0001001860 \cdot \cos(4n^{1v}t - 5n^v t + 4\varepsilon^{1v} - 5\varepsilon^v + 50^\circ, 3108) \end{aligned} \right\}$$



La dernière de ces inégalités, réunie à celles-ci,

$$(1 + \mu^v) \left\{ \begin{array}{l} 0,0000268383 \cdot \cos(5n^v t - 4n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 4\varepsilon^{iv} - \varpi^{iv}) \\ - 0,0000516048 \cdot \cos(5n^v t - 4n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 4\varepsilon^{iv} - \varpi^v) \end{array} \right\},$$

donne la suivante,

$$\delta r^{iv} = (1 + \mu^v) \cdot 0,0000983161 \cdot \cos(4n^{iv} t - 5n^v t + 4\varepsilon^{iv} - 5\varepsilon^v - 15^\circ,9874).$$

Le demi-grand axe  $a^{iv}$  dont on doit faire usage pour calculer la partie elliptique du rayon vecteur doit, par le n° 20, être augmenté de la quantité  $\frac{1}{3} a^{iv} m^{iv}$ ; en la réunissant à la valeur de  $a^{iv}$  du n° 21, on trouve

$$a^{iv} = 5,20279108.$$

*Inégalités du mouvement de Jupiter en latitude.*

34. Il résulte du n° 14 que les termes dépendants du carré de la force perturbatrice ajoutent à la valeur de  $\frac{d\varphi^{iv}}{dt}$  la quantité

$$\frac{-m^v \sqrt{a^v}}{m^{iv} \sqrt{a^{iv}} + m^v \sqrt{a^v}} \left[ \frac{\partial \gamma}{t} \cos(\Pi - \theta^{iv}) - \gamma \frac{\partial \Pi}{t} \sin(\Pi - \theta^{iv}) \right],$$

et à la valeur de  $\frac{d\theta^{iv}}{dt}$  la quantité

$$\frac{-m^v \sqrt{a^v}}{(m^{iv} \sqrt{a^{iv}} + m^v \sqrt{a^v}) \varphi} \left[ \frac{\partial \gamma}{t} \sin(\Pi - \theta^{iv}) + \gamma \frac{\partial \Pi}{t} \cos(\Pi - \theta^{iv}) \right],$$

$\delta \gamma$  et  $\delta \Pi$  étant déterminés par le numéro cité. La première de ces fonctions, réduite en nombres, est égale à

$$- 0'',000224;$$

elle doit être ajoutée aux valeurs de  $\frac{d\varphi^{iv}}{dt}$  et  $\frac{d\theta^{iv}}{dt}$  du n° 15. La seconde fonction, réduite en nombres, est égale à

$$0'',002504;$$



elle doit être ajoutée aux valeurs de  $\frac{d\theta^{1v}}{dt}$  et  $\frac{d\theta_1^{1v}}{dt}$  du n° 25; on aura ainsi

$$\frac{d\varphi^{1v}}{dt} = -0'',241398,$$

$$\frac{d\varphi_1^{1v}}{dt} = -0'',689044,$$

$$\frac{d\theta^{1v}}{dt} = 19'',929296,$$

$$\frac{d\theta_1^{1v}}{dt} = -45'',254832.$$

On trouve ensuite, par les formules du n° 51 du Livre II,

$$\delta s^{1v} = (1 + \mu^v) \left\{ \begin{array}{l} 1'',742154 \cdot \sin(n^v t + \varepsilon^v - \Pi^{1v}) \\ + 2'',049156 \cdot \sin(2n^v t - n^{1v} t + 2\varepsilon^v - \varepsilon^{1v} - \Pi^{1v}) \\ + 3'',456117 \cdot \sin(3n^v t - 2n^{1v} t + 3\varepsilon^v - 2\varepsilon^{1v} - \Pi^{1v}) \\ - 0'',862291 \cdot \sin(4n^v t - 3n^{1v} t + 4\varepsilon^v - 3\varepsilon^{1v} - \Pi^{1v}) \\ - 0'',830647 \cdot \sin(2n^{1v} t - n^v t + 2\varepsilon^{1v} - \varepsilon^v - \Pi^{1v}) \end{array} \right\},$$

$\Pi^{1v}$ , dans cette formule, étant la longitude du nœud ascendant de l'orbite de Saturne sur celle de Jupiter. Enfin on a, par le n° 11, l'inégalité

$$\delta s^{1v} = 12'',165680 \cdot \sin(3n^{1v} t - 5n^v t + 3\varepsilon^{1v} - 5\varepsilon^v + 66^\circ,1219).$$



CHAPITRE XIII.

THÉORIE DE SATURNE.

35. L'équation

$$\delta r^{IV} = - \frac{r^{IV^2}}{r''} (1 - \alpha^2) \delta V^{IV},$$

trouvée dans le n° 33 relativement à Jupiter, devient, pour Saturne,

$$\delta r^V = - \frac{r^{V^2}}{r''} (1 - \alpha^2) \delta V^V.$$

Si l'on prend, pour  $r''$  et  $r^V$ , les moyennes distances de la Terre et de Saturne au Soleil, et si l'on suppose  $\delta V^V = \pm 1''$ , on aura

$$\delta r^V = \mp 0,000141326.$$

On peut ainsi négliger les inégalités de  $\delta r^V$  au-dessous de  $\mp 0,000141$ . Nous négligerons les inégalités du mouvement de Saturne en longitude et en latitude, au-dessous d'un quart de seconde.

*Inégalités de Saturne indépendantes des excentricités.*

$$\delta v^V = (1 + \mu^{IV}) \left\{ \begin{array}{l} 9'',742382. \sin (n^{IV} t - n^V t + \varepsilon^{IV} - \varepsilon^V) \\ - 97'',202867. \sin 2 (n^{IV} t - n^V t + \varepsilon^{IV} - \varepsilon^V) \\ - 20'',265220. \sin 3 (n^{IV} t - n^V t + \varepsilon^{IV} - \varepsilon^V) \\ - 6'',067124. \sin 4 (n^{IV} t - n^V t + \varepsilon^{IV} - \varepsilon^V) \\ - 2'',151379. \sin 5 (n^{IV} t - n^V t + \varepsilon^{IV} - \varepsilon^V) \\ - 0'',835768. \sin 6 (n^{IV} t - n^V t + \varepsilon^{IV} - \varepsilon^V) \\ - 0'',358923. \sin 7 (n^{IV} t - n^V t + \varepsilon^{IV} - \varepsilon^V) \\ - 0'',173227. \sin 8 (n^{IV} t - n^V t + \varepsilon^{IV} - \varepsilon^V) \\ - 0'',105239. \sin 9 (n^{IV} t - n^V t + \varepsilon^{IV} - \varepsilon^V) \end{array} \right.$$



$$+ (1 + \mu^{v'}) \left\{ \begin{array}{l} 28'', 544040. \sin (n^{v'} t - n^v t + \varepsilon^{v'} - \varepsilon^v) \\ - 44'', 604670. \sin 2 (n^{v'} t - n^v t + \varepsilon^{v'} - \varepsilon^v) \\ - 4'', 404816. \sin 3 (n^{v'} t - n^v t + \varepsilon^{v'} - \varepsilon^v) \\ - 0'', 972099. \sin 4 (n^{v'} t - n^v t + \varepsilon^{v'} - \varepsilon^v) \\ - 0'', 279908. \sin 5 (n^{v'} t - n^v t + \varepsilon^{v'} - \varepsilon^v) \\ - 0'', 146432. \sin 6 (n^{v'} t - n^v t + \varepsilon^{v'} - \varepsilon^v) \\ - 0'', 032980. \sin 7 (n^{v'} t - n^v t + \varepsilon^{v'} - \varepsilon^v) \\ - 0'', 012166. \sin 8 (n^{v'} t - n^v t + \varepsilon^{v'} - \varepsilon^v) \end{array} \right\},$$

$$\delta r^v = (1 + \mu^{v'}) \left\{ \begin{array}{l} 0, 0039077763 \\ + 0, 0081538400. \cos (n^{v'} t - n^v t + \varepsilon^{v'} - \varepsilon^v) \\ + 0, 0013838330. \cos 2 (n^{v'} t - n^v t + \varepsilon^{v'} - \varepsilon^v) \\ + 0, 0003200673. \cos 3 (n^{v'} t - n^v t + \varepsilon^{v'} - \varepsilon^v) \\ + 0, 0000992632. \cos 4 (n^{v'} t - n^v t + \varepsilon^{v'} - \varepsilon^v) \\ + 0, 0000355919. \cos 5 (n^{v'} t - n^v t + \varepsilon^{v'} - \varepsilon^v) \\ + 0, 0000135999. \cos 6 (n^{v'} t - n^v t + \varepsilon^{v'} - \varepsilon^v) \\ + 0, 0000055135. \cos 7 (n^{v'} t - n^v t + \varepsilon^{v'} - \varepsilon^v) \\ + 0, 0000021631. \cos 8 (n^{v'} t - n^v t + \varepsilon^{v'} - \varepsilon^v) \\ + 0, 0000006436. \cos 9 (n^{v'} t - n^v t + \varepsilon^{v'} - \varepsilon^v) \end{array} \right\}$$

$$+ (1 + \mu^{v'}) \left\{ \begin{array}{l} - 0, 0000137622 \\ + 0, 0001491217. \cos (n^v t - n^{v'} t + \varepsilon^v - \varepsilon^{v'}) \\ - 0, 0003949916. \cos 2 (n^v t - n^{v'} t + \varepsilon^v - \varepsilon^{v'}) \\ - 0, 0000480303. \cos 3 (n^v t - n^{v'} t + \varepsilon^v - \varepsilon^{v'}) \\ - 0, 0000118201. \cos 4 (n^v t - n^{v'} t + \varepsilon^v - \varepsilon^{v'}) \\ - 0, 0000036280. \cos 5 (n^v t - n^{v'} t + \varepsilon^v - \varepsilon^{v'}) \\ - 0, 0000012501. \cos 6 (n^v t - n^{v'} t + \varepsilon^v - \varepsilon^{v'}) \end{array} \right\}.$$

*Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités.*

On a eu égard, comme on l'a fait dans le n° 33 relativement à Jupiter, aux variations séculaires des coefficients des inégalités qui surpassent



cent secondes, et l'on a trouvé

$$\delta_0^v = (1 + \mu^{1v}) \left\{ \begin{array}{l} - 35'', 523202. \sin(n^{1v}t + \varepsilon^{1v} - \varpi^v) \\ + 3'', 882844. \sin(n^{1v}t + \varepsilon^{1v} - \varpi^{1v}) \\ - 6'', 371723. \sin(2n^{1v}t - n^{1v}t + 2\varepsilon^{1v} - \varepsilon^v - \varpi^v) \\ + 8'', 249634. \sin(2n^{1v}t - n^{1v}t + 2\varepsilon^{1v} - \varepsilon^v - \varpi^{1v}) \\ - 0'', 902132. \sin(3n^{1v}t - 2n^{1v}t + 3\varepsilon^{1v} - 2\varepsilon^v - \varpi^v) \\ - 0'', 688862. \sin(3n^{1v}t - 2n^{1v}t + 3\varepsilon^{1v} - 2\varepsilon^v - \varpi^{1v}) \\ - 0'', 279731. \sin(4n^{1v}t - 3n^{1v}t + 4\varepsilon^{1v} - 3\varepsilon^v - \varpi^{1v}) \\ - (561'', 940390 - t. 0'', 0312021) \sin(2n^{1v}t - n^{1v}t + 2\varepsilon^{1v} - \varepsilon^{1v} - \varpi^v) \\ + (1287'', 215250 + t. 0'', 0427691) \sin(2n^{1v}t - n^{1v}t + 2\varepsilon^{1v} - \varepsilon^{1v} - \varpi^{1v}) \\ + (105'', 992675 - t. 0'', 0058853) \sin(3n^{1v}t - 2n^{1v}t + 3\varepsilon^{1v} - 2\varepsilon^{1v} - \varpi^v) \\ - 54'', 488162. \sin(3n^{1v}t - 2n^{1v}t + 3\varepsilon^v - 2\varepsilon^{1v} - \varpi^{1v}) \\ + 14'', 799631. \sin(4n^{1v}t - 3n^{1v}t + 4\varepsilon^v - 3\varepsilon^{1v} - \varpi^v) \\ - 7'', 516699. \sin(4n^{1v}t - 3n^{1v}t + 4\varepsilon^v - 3\varepsilon^{1v} - \varpi^{1v}) \\ + 4'', 301273. \sin(5n^{1v}t - 4n^{1v}t + 5\varepsilon^v - 4\varepsilon^{1v} - \varpi^v) \\ - 2'', 171142. \sin(5n^{1v}t - 4n^{1v}t + 5\varepsilon^v - 4\varepsilon^{1v} - \varpi^{1v}) \\ + 1'', 657904. \sin(6n^{1v}t - 5n^{1v}t + 6\varepsilon^v - 5\varepsilon^{1v} - \varpi^v) \\ - 0'', 791698. \sin(6n^{1v}t - 5n^{1v}t + 6\varepsilon^v - 5\varepsilon^{1v} - \varpi^{1v}) \\ + 0'', 667270. \sin(7n^{1v}t - 6n^{1v}t + 7\varepsilon^v - 6\varepsilon^{1v} - \varpi^v) \\ - 0'', 331301. \sin(7n^{1v}t - 6n^{1v}t + 7\varepsilon^v - 6\varepsilon^{1v} - \varpi^{1v}) \end{array} \right.$$

$$+ (1 + \mu^{1v}) \left\{ \begin{array}{l} 3'', 525920. \sin(n^{1v}t + \varepsilon^{1v} - \varpi^v) \\ - 3'', 122367. \sin(n^{1v}t + \varepsilon^{1v} - \varpi^{1v}) \\ - 30'', 968721. \sin(2n^{1v}t - n^{1v}t + 2\varepsilon^{1v} - \varepsilon^v - \varpi^v) \\ + 8'', 537570. \sin(2n^{1v}t - n^{1v}t + 2\varepsilon^{1v} - \varepsilon^v - \varpi^{1v}) \\ - 52'', 272469. \sin(3n^{1v}t - 2n^{1v}t + 3\varepsilon^{1v} - 2\varepsilon^v - \varpi^v) \\ + 77'', 633790. \sin(3n^{1v}t - 2n^{1v}t + 3\varepsilon^{1v} - 2\varepsilon^v - \varpi^{1v}) \\ + 1'', 726346. \sin(4n^{1v}t - 3n^{1v}t + 4\varepsilon^{1v} - 3\varepsilon^v - \varpi^v) \\ - 2'', 340202. \sin(4n^{1v}t - 3n^{1v}t + 4\varepsilon^{1v} - 3\varepsilon^v - \varpi^{1v}) \\ - 0'', 579410. \sin(5n^{1v}t - 4n^{1v}t + 5\varepsilon^{1v} - 4\varepsilon^v - \varpi^{1v}) \\ - 2'', 079683. \sin(2n^{1v}t - n^{1v}t + 2\varepsilon^v - \varepsilon^{1v} - \varpi^v) \\ + 4'', 696226. \sin(3n^{1v}t - 2n^{1v}t + 3\varepsilon^v - 2\varepsilon^{1v} - \varpi^v) \\ + 0'', 468213. \sin(4n^{1v}t - 3n^{1v}t + 4\varepsilon^v - 3\varepsilon^{1v} - \varpi^v) \end{array} \right.$$

$$\delta_1^v = (1 + \mu^{1v}) \left\{ \begin{array}{l} - 0, 0003422170. \cos(n^{1v}t + \varepsilon^v - \varpi^{1v}) \\ - 0, 0020775935. \cos(2n^{1v}t - n^{1v}t + 2\varepsilon^v - \varepsilon^{1v} - \varpi^v) \\ + 0, 0053861750. \cos(2n^{1v}t - n^{1v}t + 2\varepsilon^v - \varepsilon^{1v} - \varpi^{1v}) \\ + 0, 0011594872. \cos(3n^{1v}t - 2n^{1v}t + 3\varepsilon^v - 2\varepsilon^{1v} - \varpi^v) \\ - 0, 0006217670. \cos(3n^{1v}t - 2n^{1v}t + 3\varepsilon^v - 2\varepsilon^{1v} - \varpi^{1v}) \\ + 0, 0002117893. \cos(4n^{1v}t - 3n^{1v}t + 4\varepsilon^v - 3\varepsilon^{1v} - \varpi^v) \end{array} \right.$$



$$+ (1 + \mu^{v'}) \left\{ \begin{array}{l} - 0,0003750767 \cdot \cos(3n^{v'}t - 2n^vt + 3\varepsilon^{v'} - 2\varepsilon^v - \varpi^v) \\ + 0,0005605490 \cdot \cos(3n^{v'}t - 2n^vt + 3\varepsilon^{v'} - 2\varepsilon^v - \varpi^{v'}) \end{array} \right\}.$$

*Inégalités dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites.*

$$\begin{aligned} \delta v^v = (1 + \mu^{v'}) \left\{ \begin{array}{l} - (169'', 283424 - t \cdot 0'', 001117) \sin \left( \begin{array}{l} 3n^{v'}t - n^{v'}t + 3\varepsilon^v - \varepsilon^{v'} \\ + 94^\circ, 0139 - t \cdot 106'', 635 \end{array} \right) \\ + 88'', 045398 \cdot \sin(n^{v'}t - n^vt + \varepsilon^{v'} - \varepsilon^v + 93^\circ, 6429) \\ - (2066'', 920900 - t \cdot 0'', 047745) \sin \left( \begin{array}{l} 2n^{v'}t - 4n^vt + 2\varepsilon^{v'} - 4\varepsilon^v \\ + 62^\circ, 4250 + t \cdot 152'', 77 \end{array} \right) \\ - 9'', 061090 \cdot \sin(5n^vt - 3n^{v'}t + 5\varepsilon^v - 3\varepsilon^{v'} - 63^\circ, 5025) \end{array} \right\} \\ + (1 + \mu^{v'}) \left\{ \begin{array}{l} 5'', 936888 \cdot \sin(3n^{v'}t - 3n^vt + 3\varepsilon^{v'} - 3\varepsilon^v - 75^\circ, 4576) \\ + 95'', 757344 \cdot \sin(3n^{v'}t - n^vt + 3\varepsilon^{v'} - \varepsilon^v - 95^\circ, 0779) \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

En réunissant les inégalités dépendantes de  $n^{v'}t - n^vt$  et de  $3n^vt - 3n^{v'}t$  avec celles qui sont indépendantes des excentricités, on a pour leurs sommes

$$\begin{aligned} & (1 + \mu^{v'}) \cdot 89'', 404702 \cdot \sin(n^{v'}t - n^vt + \varepsilon^{v'} - \varepsilon^v + 86^\circ, 7262) \\ & - (1 + \mu^{v'}) \cdot 5'', 914481 \cdot \sin(3n^{v'}t - 3n^vt + 3\varepsilon^{v'} - 3\varepsilon^v + 76^\circ, 0577). \end{aligned}$$

On a ensuite

$$\delta r^v = (1 + \mu^{v'}) \left\{ \begin{array}{l} - 0,0011710805 \cdot \cos(3n^vt - n^{v'}t + 3\varepsilon^v - \varepsilon^{v'} - 100^\circ, 2330) \\ - 0,0005621901 \cdot \cos(n^{v'}t - n^vt + \varepsilon^{v'} - \varepsilon^v + 92^\circ, 7139) \\ + (0,0151990624 - t \cdot 0,0000003370) \cos \left( \begin{array}{l} 2n^{v'}t - 4n^vt + 2\varepsilon^{v'} - 4\varepsilon^v \\ + 62^\circ, 2324 + t \cdot 151'', 36 \end{array} \right) \end{array} \right\}.$$

L'inégalité du rayon vecteur dépendante de  $n^{v'}t - n^vt$ , réunie à son analogue indépendante des excentricités, donne

$$(1 + \mu^{v'}) \cdot 0,0081090035 \cdot \cos(n^vt - n^{v'}t + \varepsilon^v - \varepsilon^{v'} - 4^\circ, 3997).$$

$5n^v - 2n^{v'}$  étant très-petit, l'inégalité dépendante de  $2n^{v'}t - 4n^vt$  a été calculée par les formules (B) et (C) du n° 1.  $3n^{v'} - n^v$  étant fort petit, l'inégalité dépendante de  $3n^{v'}t - n^vt$  a été calculée par les for-



mules (A) et (D) du même numéro. Elle doit, pour plus d'exactitude, être appliquée au moyen mouvement de Saturne, à cause de la longueur de sa période

*Inégalités dépendantes des cubes et des produits de trois et de cinq dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites, et du carré de la force perturbatrice (\*)*.

La partie la plus considérable de la grande inégalité de Saturne est celle qui a pour diviseur  $(5n^v - 2n^{iv})^2$ , et qui dépend de P et de P'. Elle a été conclue de la grande inégalité de Jupiter, en multipliant cette dernière partie par le facteur  $-\frac{15m^{iv}n^v a^v}{6m^v n^{iv^2} a^{iv}}$ , conformément au n° 8, ce qui donne, pour cette partie de l'inégalité de Saturne,

$$\begin{aligned} & - (9129'', 190020 - t.0'', 0608061 - t^2.0'', 00013903) \sin(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}) \\ & - (863'', 415400 - t.3'', 4217230 + t^2.0'', 00056750) \cos(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}). \end{aligned}$$

La grande inégalité de Saturne se compose de plusieurs autres parties : elle renferme, par le n° 8, la fonction

$$-\frac{2m^{iv}n^v}{5n^v - 2n^{iv}} \left[ \begin{array}{l} a^{v^2} \frac{\partial P}{\partial a^v} \cos(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}) \\ - a^{v^3} \frac{\partial P'}{\partial a^v} \sin(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}) \end{array} \right].$$

En réduisant cette fonction en nombres, on a trouvé, pour 1750,

$$\begin{aligned} & 160'', 922811. \sin(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}) \\ & - 34'', 800640. \cos(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}), \end{aligned}$$

et pour 1950,

$$\begin{aligned} & 158'', 002590. \sin(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}) \\ & - 46'', 240842. \cos(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}), \end{aligned}$$

(\*) On croit devoir rappeler que les valeurs attribuées dans le texte aux inégalités dépendantes des produits de cinq dimensions des excentricités et des inclinaisons sont inexactes. Voir les notes des pages 28, 135 et 136, ainsi que le Supplément au tome III. V. P.



d'où l'on tire la valeur de cette fonction, pour un temps quelconque  $t$ , égale à

$$(160'', 922811 - t.0'', 0146011) \sin(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}) \\ - (34'', 800640 + t.0'', 0572010) \cos(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}).$$

La grande inégalité de Saturne renferme encore, par le n° 8, le terme

$$- \frac{e^v H'}{2} \sin(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv} - \varpi^v + A').$$

Ce terme, en 1750, était égal à

$$23'', 315711. \sin(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}) \\ + 16'', 423734. \cos(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}),$$

et en 1950 il sera égal à

$$23'', 800290. \sin(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}) \\ + 14'', 894510. \cos(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}),$$

ce qui donne, pour le temps  $t$ , l'inégalité

$$(23'', 315711 + t.0'', 002423) \sin(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}) \\ + (16'', 423734 - t.0'', 007646) \cos(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}).$$

La partie de la grande inégalité de Saturne dépendante des produits de cinq dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites est, par les nos 8 et 18,

$$\frac{15 m^{iv} n^{v2}}{(5n^v - 2n^{iv})^2} \left\{ \begin{array}{l} \left( a^v P' + \frac{2a^v dP'}{(5n^v - 2n^{iv}) dt} + ta^v \frac{dP'}{dt} \right) \sin(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}) \\ - \left( a^v P - \frac{2a^v dP'}{(5n^v - 2n^{iv}) dt} + ta^v \frac{dP'}{dt} \right) \cos(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}) \end{array} \right\},$$

en désignant par  $P$ , et  $P'$ , les coefficients de  $m^{iv} \sin(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv})$  et de  $m^{iv} \cos(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv})$  du développement de  $R$ , dépendants des produits de cinq dimensions des excentricités et des inclinaisons. On a trouvé, pour 1750,

$$a^v P, = -0,0000068376,$$

$$a^v P', = -0,0000100087,$$



et pour 1950,

$$a^v P_t = -0,0000077132,$$

$$a^v P'_t = -0,0000096940;$$

par conséquent,

$$a^v \frac{dP_t}{dt} = -0,0000000043780,$$

$$a^v \frac{dP'_t}{dt} = 0,0000000015735,$$

ce qui donne, pour la fonction précédente réduite en nombres,

$$\begin{aligned} & - (89'', 952440 - t. 0'', 012596) \sin(5n^v t - 2n^{1v} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{1v}) \\ & + (58'', 270353 + t. 0'', 035048) \cos(5n^v t - 2n^{1v} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{1v}). \end{aligned}$$

Enfin on a déterminé, par le n° 16, la partie sensible de la grande inégalité de Saturne dépendante du carré de la force perturbatrice, et l'on a trouvé pour cette partie, en 1750,

$$\begin{aligned} & - 11'', 779433. \sin(5n^v t - 2n^{1v} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{1v}) \\ & + 132'', 470121. \cos(5n^v t - 2n^{1v} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{1v}), \end{aligned}$$

et en 1950,

$$\begin{aligned} & - 5'', 051766. \sin(5n^v t - 2n^{1v} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{1v}) \\ & + 134'', 644093. \cos(5n^v t - 2n^{1v} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{1v}), \end{aligned}$$

ce qui donne, pour le temps  $t$ , cette partie égale à

$$\begin{aligned} & - ( 11'', 779433 - t. 0'', 0336383) \sin(5n^v t - 2n^{1v} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{1v}) \\ & + (132'', 470121 + t. 0'', 0108698) \cos(5n^v t - 2n^{1v} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{1v}). \end{aligned}$$

Maintenant, si l'on rassemble ces diverses parties de la grande inégalité de Saturne, on aura, pour sa valeur entière, que l'on doit appliquer au moyen mouvement de cette planète,

$$-(1 + \mu^{1v}) \left\{ \begin{aligned} & (9046'', 683471 - t. 0'', 0948628 - t^2. 0'', 00013903) \sin(5n^v t - 2n^{1v} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{1v}) \\ & + ( 689'', 051830 - t. 3'', 4027934 + t^2. 0'', 00056750) \cos(5n^v t - 2n^{1v} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{1v}) \end{aligned} \right\}.$$

En réduisant ces deux termes en un seul par la méthode du n° 17, on



aura

$$-(1 + \mu^{1v}) (9072'', 888420 - t.0'', 2624193 + t^2.0'', 00025990) \sin \begin{pmatrix} 5n^v t - 2n^{1v} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{1v} + 4^\circ, 8395 \\ -t.239'', 597 + t^2.0'', 039122 \end{pmatrix}.$$

Le carré de la force perturbatrice produit encore, par le n° 12, l'inégalité

$$\frac{\overline{H'}^2}{8} \frac{2m^v \sqrt{a^v} + 5m^{1v} \sqrt{a^{1v}}}{m^{1v} \sqrt{a^{1v}}} \sin(\text{double argument de la grande inégalité}),$$

ce qui donne

$$(94'', 719002 - t.0'', 005320) \sin(\text{double argument de la grande inégalité}).$$

Il faut encore appliquer cette inégalité au moyen mouvement de Saturne.

L'inégalité

$$\frac{1}{4} \frac{3m^{1v} \sqrt{a^{1v}} + 2m^v \sqrt{a^v}}{m^{1v} \sqrt{a^{1v}}} \overline{H'} K' \sin(4n^{1v} t - 9n^v t + 4\varepsilon^{1v} - 9\varepsilon^v - B' - \overline{A'}),$$

trouvée dans le n° 13, devient, en la réduisant en nombres,

$$+ 25'', 507770. \sin(4n^{1v} t - 9n^v t + 4\varepsilon^{1v} - 9\varepsilon^v + 57^\circ, 5885).$$

On a encore, par le n° 8, l'inégalité

$$\frac{5}{4} e^v K' \sin(3n^v t - 2n^{1v} t + 3\varepsilon^v - 2\varepsilon^{1v} + \varpi^v + B').$$

Cette inégalité, réduite en nombres, était, en 1750, égale à

$$145'', 417101. \sin(2n^{1v} t - 3n^v t + 2\varepsilon^{1v} - 3\varepsilon^v + 164^\circ, 5950);$$

en 1950, elle sera

$$142'', 923362. \sin(2n^{1v} t - 3n^v t + 2\varepsilon^{1v} - 3\varepsilon^v + 166^\circ, 3197);$$

sa valeur pour un temps quelconque  $t$  est donc

$$(145'', 417101 - t.0'', 0124687) \sin \begin{pmatrix} 2n^{1v} t - 3n^v t + 2\varepsilon^{1v} - 3\varepsilon^v \\ + 164^\circ, 5950 + t.86'', 23 \end{pmatrix}.$$



En réunissant cette inégalité à celles-ci,

$$\begin{aligned} & (105'',992675 - t.0'',005914) \sin(3n^v t - 2n^{iv} t + 3\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv} - \varpi^v) \\ & - 54'',488162. \sin(3n^v t - 2n^{iv} t + 3\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv} - \varpi^v), \end{aligned}$$

que nous avons trouvées précédemment, on aura pour leur somme l'inégalité

$$- (75'',837202 - t.0'',013555) \sin \left( \begin{array}{l} 2n^{iv} t - 3n^v t + 2\varepsilon^{iv} - 3\varepsilon^v \\ + 16^\circ,4503 - t.38'',23 \end{array} \right).$$

On a vu dans le n° 5 que le moyen mouvement de Saturne est assujéti à une équation séculaire correspondante à celle que nous avons trouvée dans le n° 33, pour Jupiter, égale à

$$- t^2.0'',0000020066.$$

L'équation séculaire de Saturne est ainsi, par le n° 5, égale à

$$\frac{m^{iv} \sqrt{a^{iv}}}{m^v \sqrt{a^v}} t^2.0'',0000020066,$$

et par conséquent égale à

$$t^2.0'',000004665.$$

Cette inégalité peut être négligée sans erreur sensible.

Il nous reste à considérer le rayon vecteur de Saturne. On a vu, dans le n° 8, que les termes dépendants du cube des excentricités ajoutent à l'expression du rayon vecteur de Saturne la quantité

$$\begin{aligned} & - a^v e^v H' \cos(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv} - \varpi^v - A') \\ & + a^v e^v H' \cos(3n^v t - 2n^{iv} t + 3\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv} + \varpi^v + A') \\ & - \frac{10 m^{iv} n^v a^v}{5n^v - 2n^{iv}} \left[ \begin{array}{l} P \sin(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}) \\ + P' \cos(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}) \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Cette fonction, réduite en nombres, donne

$$\delta r^v = (1 + \mu^{iv}) \left[ \begin{array}{l} 0,00351994565. \cos(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv} + 14^\circ,4782) \\ - 0,0008553506. \cos(2n^{iv} t - 3n^v t + 2\varepsilon^{iv} - 3\varepsilon^v + 39^\circ,7988) \end{array} \right].$$

En réunissant la dernière de ces deux inégalités à celles-ci, que nous



avons trouvées précédemment, dépendantes des simples excentricités,

$$(1 + \mu^{iv}) \left[ \begin{array}{l} 0,0011594872 \cdot \cos(3n^v t - 2n^{iv} t + 3\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv} - \varpi^v) \\ -0,0006217670 \cdot \cos(3n^v t - 2n^{iv} t + 3\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv} - \varpi^v) \end{array} \right],$$

on a

$$\delta r^v = -(1 + \mu^{iv}) \cdot 0,0013806201 \cdot \cos(2n^{iv} t - 3n^v t + 2\varepsilon^{iv} - 3\varepsilon^v - 25^\circ,9130).$$

Le demi-grand axe  $a^v$ , dont on doit faire usage pour calculer la partie elliptique du rayon vecteur, doit, par le n° 20, être augmenté de la quantité  $\frac{1}{3} a^v m^v$ ; en la réunissant à la valeur de  $a^v$  du n° 21, on trouve

$$a^v = 9,53881757.$$

*Inégalités du mouvement de Saturne en latitude.*

36. Les formules du n° 51 du Livre II donnent

$$\delta s^v = (1 + \mu^{iv}) \left\{ \begin{array}{l} 5'',516537 \cdot \sin(n^{iv} t + \varepsilon^{iv} - \Pi^v) \\ -0'',772161 \cdot \sin(2n^{iv} t - n^v t + 2\varepsilon^{iv} - \varepsilon^v - \Pi^v) \\ -0'',259092 \cdot \sin(3n^{iv} t - 2n^v t + 3\varepsilon^{iv} - 2\varepsilon^v - \Pi^v) \\ +9'',702232 \cdot \sin(2n^v t - n^{iv} t + 2\varepsilon^v - \varepsilon^{iv} - \Pi^v) \\ -1'',613780 \cdot \sin(3n^v t - 2n^{iv} t + 3\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv} - \Pi^v) \\ -0'',256736 \cdot \sin(4n^v t - 3n^{iv} t + 4\varepsilon^v - 3\varepsilon^{iv} - \Pi^v) \end{array} \right\} \\ + (1 + \mu^{vi}) \left\{ \begin{array}{l} 0'',261948 \cdot \sin(n^{vi} t + \varepsilon^{vi} - \Pi^{vi}) \\ +0'',377170 \cdot \sin(2n^{vi} t - n^v t + 2\varepsilon^{vi} - \varepsilon^v - \Pi^{vi}) \\ +2'',046267 \cdot \sin(3n^{vi} t - 2n^v t + 3\varepsilon^{vi} - 2\varepsilon^v - \Pi^{vi}) \end{array} \right\},$$

$\Pi^v$  étant la longitude du nœud de l'orbite de Jupiter sur celle de Saturne, et  $\Pi^{vi}$  étant la longitude du nœud de l'orbite d'Uranus sur celle de Saturne. Enfin on a, par le n° 10, l'inégalité

$$\delta s^v = -28'',282713 \cdot \sin(2n^{iv} t - 4n^v t + 2\varepsilon^{iv} - 4\varepsilon^v + 66^\circ,1219).$$

Il résulte du n° 14 que les termes dépendants du carré de la force perturbatrice ajoutent à la valeur de  $\frac{d\varphi^v}{dt}$  la quantité

$$\frac{m^{iv} \sqrt{a^{iv}}}{m^{iv} \sqrt{a^{iv}} + m^v \sqrt{a^v}} \left[ \frac{\partial \gamma}{\partial t} \cos(\Pi - \theta^v) - \frac{\gamma \partial \Pi}{\partial t} \sin(\Pi - \theta^v) \right],$$



et à la valeur de  $\frac{d\theta^v}{dt}$  la quantité

$$\frac{m^{1v} \sqrt{a^{1v}}}{m^{1v} \sqrt{a^{1v}} + m^v \sqrt{a^v}} \left[ \frac{\delta\gamma}{t} \sin(\Pi - \theta^v) + \frac{\gamma \delta\Pi}{t} \cos(\Pi - \theta^v) \right],$$

$\delta\gamma$  et  $\delta\Pi$  étant déterminés par le numéro cité. La première de ces fonctions, réduite en nombres, est égale à

$$0'',000474;$$

elle doit être ajoutée aux valeurs de  $\frac{d\varphi^v}{dt}$  et de  $\frac{d\varphi'_i}{dt}$  du n° 25. La seconde fonction, réduite en nombres, est égale à

$$-0'',005780;$$

elle doit être ajoutée aux valeurs de  $\frac{d\theta^v}{dt}$  et de  $\frac{d\theta'_i}{dt}$  du n° 25. On aura ainsi

$$\frac{d\varphi^v}{dt} = 0'',308315,$$

$$\frac{d\varphi'_i}{dt} = -0'',478816,$$

$$\frac{d\theta^v}{dt} = -27'',799890,$$

$$\frac{d\theta'_i}{dt} = -58'',775840.$$





## CHAPITRE XIV.

## THÉORIE D'URANUS.

## 37. L'équation

$$\delta r^v = - \frac{r^{v2}}{r''} (1 - \alpha^2) \delta V^v,$$

trouvée dans le n° 35, relativement à Saturne, devient, pour Uranus,

$$\delta r^{v1} = - \frac{r^{v12}}{r''} (1 - \alpha^2) \delta V^{v1}.$$

Si l'on prend pour  $r''$  et  $r^{v1}$  les moyennes distances de la Terre et d'Uranus au Soleil, et si l'on suppose  $\delta V^{v1} = \pm r''$ , on aura

$$\delta r^{v1} = \mp 0,00057648;$$

on peut ainsi négliger les inégalités de  $\delta r^{v1}$  au-dessous de  $\mp 0,00057$ . Nous négligerons les inégalités du mouvement d'Uranus en longitude et en latitude au-dessous d'un quart de seconde.

*Inégalités d'Uranus, indépendantes des excentricités.*

$$\delta v^{v1} = (1 + \mu^{v1}) \left\{ \begin{array}{l} 161'', 438440. \sin (n^{v1} t - n^{v1} t + \varepsilon^{v1} - \varepsilon^{v1}) \\ - 0'', 587550. \sin 2(n^{v1} t - n^{v1} t + \varepsilon^{v1} - \varepsilon^{v1}) \\ - 0'', 080319. \sin 3(n^{v1} t - n^{v1} t + \varepsilon^{v1} - \varepsilon^{v1}) \\ - 0'', 011090. \sin 4(n^{v1} t - n^{v1} t + \varepsilon^{v1} - \varepsilon^{v1}) \\ - 0'', 002371. \sin 5(n^{v1} t - n^{v1} t + \varepsilon^{v1} - \varepsilon^{v1}) \end{array} \right\}$$



$$\begin{aligned}
 & + (1 + \mu^v) \left\{ \begin{aligned} & 65'', 961045. \sin (n^v t - n^{v'} t + \varepsilon^v - \varepsilon^{v'}) \\ & - 13'', 027691. \sin 2 (n^v t - n^{v'} t + \varepsilon^v - \varepsilon^{v'}) \\ & - 2'', 660850. \sin 3 (n^v t - n^{v'} t + \varepsilon^v - \varepsilon^{v'}) \\ & - 0'', 754350. \sin 4 (n^v t - n^{v'} t + \varepsilon^v - \varepsilon^{v'}) \\ & - 0'', 247564. \sin 5 (n^v t - n^{v'} t + \varepsilon^v - \varepsilon^{v'}) \\ & - 0'', 089294. \sin 6 (n^v t - n^{v'} t + \varepsilon^v - \varepsilon^{v'}) \\ & - 0'', 033731. \sin 7 (n^v t - n^{v'} t + \varepsilon^v - \varepsilon^{v'}) \\ & - 0'', 012801. \sin 8 (n^v t - n^{v'} t + \varepsilon^v - \varepsilon^{v'}) \end{aligned} \right\}, \\
 \delta r^{v'} = (1 + \mu^{v'}) & \left\{ \begin{aligned} & 0, 0063473160 \\ & + 0, 0048914790. \cos (n^{v'} t - n^{v''} t + \varepsilon^{v'} - \varepsilon^{v''}) \\ & + 0, 0000236184. \cos 2 (n^{v'} t - n^{v''} t + \varepsilon^{v'} - \varepsilon^{v''}) \\ & + 0, 0000030669. \cos 3 (n^{v'} t - n^{v''} t + \varepsilon^{v'} - \varepsilon^{v''}) \\ & + 0, 0000005044. \cos 4 (n^{v'} t - n^{v''} t + \varepsilon^{v'} - \varepsilon^{v''}) \end{aligned} \right\} \\
 & + (1 + \mu^v) \left\{ \begin{aligned} & 0, 0023641285 \\ & + 0, 0035433901. \cos (n^v t - n^{v'} t + \varepsilon^v - \varepsilon^{v'}) \\ & + 0, 0004061682. \cos 2 (n^v t - n^{v'} t + \varepsilon^v - \varepsilon^{v'}) \\ & + 0, 0000889425. \cos 3 (n^v t - n^{v'} t + \varepsilon^v - \varepsilon^{v'}) \\ & + 0, 0000255870. \cos 4 (n^v t - n^{v'} t + \varepsilon^v - \varepsilon^{v'}) \end{aligned} \right\}.
 \end{aligned}$$

*Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités.*

$$\begin{aligned}
 \delta v^{v'} = (1 + \mu^{v'}) & \left\{ \begin{aligned} & - 3'', 807443. \sin (n^{v'} t + \varepsilon^{v'} - \varpi^{v'}) \\ & + 3'', 887493. \sin (2 n^{v'} t - n^{v''} t + 2 \varepsilon^{v'} - \varepsilon^{v''} - \varpi^{v'}) \\ & - 11'', 224270. \sin (2 n^{v''} t - n^{v'} t + 2 \varepsilon^{v''} - \varepsilon^{v'} - \varpi^{v'}) \\ & - 0'', 685175. \sin (2 n^{v''} t - n^{v'} t + 2 \varepsilon^{v''} - \varepsilon^{v'} - \varpi^{v'}) \end{aligned} \right\} \\
 & + (1 + \mu^v) \left\{ \begin{aligned} & - 4'', 328267. \sin (n^v t + \varepsilon^v - \varpi^v) \\ & + 0'', 663139. \sin (n^v t + \varepsilon^v - \varpi^v) \\ & - 0'', 678358. \sin (2 n^v t - n^{v'} t + 2 \varepsilon^v - \varepsilon^{v'} - \varpi^v) \\ & + 2'', 712230. \sin (2 n^v t - n^{v'} t + 2 \varepsilon^v - \varepsilon^{v'} - \varpi^v) \\ & - (135'', 961650 - t. 0'', 000761) \sin (2 n^{v'} t - n^v t + 2 \varepsilon^{v'} - \varepsilon^v - \varpi^{v'}) \\ & + (462'', 369642 - t. 0'', 025635) \sin (2 n^{v'} t - n^v t + 2 \varepsilon^{v'} - \varepsilon^v - \varpi^v) \\ & + 7'', 673429. \sin (3 n^{v'} t - 2 n^v t + 3 \varepsilon^{v'} - 2 \varepsilon^v - \varpi^{v'}) \\ & - 5'', 069294. \sin (3 n^{v'} t - 2 n^v t + 3 \varepsilon^{v'} - 2 \varepsilon^v - \varpi^v) \\ & + 1'', 304718. \sin (4 n^{v'} t - 3 n^v t + 4 \varepsilon^{v'} - 3 \varepsilon^v - \varpi^{v'}) \\ & - 0'', 869752. \sin (4 n^{v'} t - 3 n^v t + 4 \varepsilon^{v'} - 3 \varepsilon^v - \varpi^v) \\ & + 0'', 390410. \sin (5 n^{v'} t - 4 n^v t + 5 \varepsilon^{v'} - 4 \varepsilon^v - \varpi^{v'}) \end{aligned} \right\}, \\
 \delta r^{v'} = (1 + \mu^v) & \left\{ \begin{aligned} & - 0, 0016092001. \cos (2 n^{v'} t - n^v t + 2 \varepsilon^{v'} - \varepsilon^v - \varpi^{v'}) \\ & + 0, 0061835858. \cos (2 n^{v'} t - n^v t + 2 \varepsilon^{v'} - \varepsilon^v - \varpi^v) \end{aligned} \right\}.
 \end{aligned}$$



*Inégalités dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites.*

$$\delta v^{v'} = (1 + \mu^v) \left[ \begin{array}{l} - (408'', 978001 - t. 0'', 0448163) \sin \left( \begin{array}{l} 3n^{v'}t - n^v t + 3\varepsilon^{v'} - \varepsilon^v \\ - 98^\circ, 1313 - t. 53'', 40 \end{array} \right) \\ + 5'', 288440. \sin(4n^{v'}t - 2n^v t + 4\varepsilon^{v'} - 2\varepsilon^v - 42^\circ, 8685) \\ + 25'', 864683. \sin(n^v t - n^{v'}t + \varepsilon^v - \varepsilon^{v'} + 98^\circ, 3271) \end{array} \right]$$

La dernière de ces inégalités, réunie à sa correspondante qui est indépendante des excentricités, donne la suivante :

$$(1 + \mu^v) \cdot 71'', 470002. \sin(n^v t - n^{v'}t + \varepsilon^v - \varepsilon^{v'} + 23^\circ 5385).$$

On a ensuite

$$\delta r^{v'} = - (1 + \mu^v) \cdot 0, 0007553840. \cos(3n^{v'}t - n^v t + 3\varepsilon^{v'} - \varepsilon^v + 83^\circ, 3463).$$

*Inégalité dépendante des cubes et des produits de trois dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites.*

$$\delta v^{v'} = - (1 + \mu^v) \cdot 2'', 977432. \sin(5n^{v'}t - 2n^v t + 5\varepsilon^{v'} - 2\varepsilon^v - 75^\circ, 9911).$$

*Inégalités du mouvement d'Uranus en latitude.*

38. Les formules du n° 51 du Livre II donnent

$$\delta s^{v'} = (1 + \mu^{v'}) \cdot 1'', 970350. \sin(n^{v'}t + \varepsilon^{v'} - \Pi^{v'}) \\ + (1 + \mu^v) \cdot \left[ \begin{array}{l} 2'', 826360. \sin(n^v t + \varepsilon^v - \Pi^v) \\ + 9'', 015592. \sin(2n^{v'}t - n^v t + 2\varepsilon^{v'} - \varepsilon^v - \Pi^v) \end{array} \right],$$

$\Pi^{v'}$  étant ici la longitude du nœud ascendant de l'orbite de Jupiter sur celle d'Uranus, et  $\Pi^v$  étant la longitude du nœud ascendant de l'orbite de Saturne sur celle d'Uranus.



## CHAPITRE XV.

DE QUELQUES ÉQUATIONS DE CONDITION QUI EXISTENT ENTRE LES INÉGALITÉS PLANÉTAIRES, ET QUI PEUVENT SERVIR À LES VÉRIFIER.

39. Les inégalités à longues périodes, produites par les perturbations réciproques de deux planètes  $m$  et  $m'$ , sont à peu près, par le n° 65 du Livre II, dans le rapport de  $m'\sqrt{a'}$  à  $-m\sqrt{a}$ , en sorte que, pour avoir les perturbations de ce genre correspondantes, dans le mouvement de  $m'$ , à celles du mouvement de  $m$ , il suffit de multiplier celles-ci par  $-\frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}}$ . Ce résultat est d'autant plus exact, qu'en vertu du rapport qui existe entre les moyens mouvements des deux planètes, la période de ces inégalités est plus grande par rapport aux durées de leurs révolutions. Nous allons, au moyen de ce théorème, vérifier plusieurs des inégalités précédentes.

L'action de la Terre sur Vénus produit, par le n° 28, dans le mouvement de Vénus, les deux inégalités dont la période est d'environ quatre années,

$$\begin{aligned} & - 4'', 782561. \sin(3n''t - 2n't + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon' - \varpi') \\ & + 14'', 710902. \sin(3n''t - 2n't + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon' - \varpi''). \end{aligned}$$

En les multipliant par  $-\frac{m'\sqrt{a'}}{m''\sqrt{a''}}$ , on a, pour les inégalités correspondantes de la Terre,

$$\begin{aligned} & 3'', 4995. \sin(3n''t - 2n't + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon' - \varpi') \\ & - 10'', 7644. \sin(3n''t - 2n't + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon' - \varpi''). \end{aligned}$$



Le calcul direct a donné, par le n° 29, pour ces inégalités,

$$3'', 661696. \sin(3n''t - 2n't + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon' - \varpi') \\ - 11'', 318247. \sin(3n''t - 2n't + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon' - \varpi''),$$

ce qui diffère peu des inégalités précédentes.

L'action de la Terre sur Vénus produit encore, par le n° 28, l'inégalité suivante, dont la période est d'environ huit ans :

$$- 4'', 645172. \sin(5n''t - 3n't + 5\varepsilon'' - 3\varepsilon' + 23^\circ, 2302).$$

En la multipliant par  $-\frac{m' \sqrt{a'}}{m'' \sqrt{a''}}$ , on a, pour l'inégalité correspondante de la Terre,

$$3'', 399002. \sin(5n''t - 3n't + 5\varepsilon'' - 3\varepsilon' + 23^\circ, 2302),$$

et le calcul direct a donné, par le n° 29,

$$3'', 473997. \sin(5n''t - 3n't + 5\varepsilon'' - 3\varepsilon' + 23^\circ, 3759).$$

Mars éprouve, par l'action de Vénus, comme on l'a vu par le n° 32, l'inégalité à longue période

$$- 21'', 295121. \sin(3n'''t - n't + 3\varepsilon''' - \varepsilon' + 72^\circ, 7083).$$

En la multipliant par  $-\frac{m''' \sqrt{a'''} }{m' \sqrt{a'}}$ , on a

$$6'', 4144. \sin(3n'''t - n't + 3\varepsilon''' - \varepsilon' + 72^\circ, 7083).$$

Le calcul direct donne, par le n° 28,

$$6'', 202706. \sin(3n'''t - n't + 3\varepsilon''' - \varepsilon' + 73^\circ, 2065),$$

ce qui diffère peu de l'inégalité précédente.

Mars éprouve, par le n° 32, de la part de la Terre, les deux inégalités suivantes, dont la période est d'environ seize ans :

$$- 31'', 218207. \sin(2n'''t - n''t + 2\varepsilon''' - \varepsilon'' - \varpi''') \\ + 15'', 811920. \sin(2n'''t - n''t + 2\varepsilon''' - \varepsilon'' - \varpi'').$$



En les multipliant par  $-\frac{m''' \sqrt{a''}}{m'' \sqrt{a''}}$ , on a, pour les inégalités correspondantes de la Terre,

$$\begin{aligned} & 6'', 8807 \cdot \sin(2n'''t - n''t + 2\varepsilon''' - \varepsilon'' - \varpi''') \\ & - 3'', 4851 \cdot \sin(2n'''t - n''t + 2\varepsilon''' - \varepsilon'' - \varpi'''). \end{aligned}$$

Le calcul direct donne, par le n° 29,

$$\begin{aligned} & 6'', 597711 \cdot \sin(2n'''t - n''t + 2\varepsilon''' - \varepsilon'' - \varpi''') \\ & - 3'', 381490 \cdot \sin(2n'''t - n''t + 2\varepsilon''' - \varepsilon'' - \varpi'''), \end{aligned}$$

ce qui diffère peu des précédentes.

Mars éprouve encore, de la part de la Terre, par le n° 32, l'inégalité à longue période

$$- 13'', 490441 \cdot \sin(4n'''t - 2n''t + 4\varepsilon''' - 2\varepsilon'' + 75^\circ, 3518).$$

En la multipliant par  $-\frac{m''' \sqrt{a''}}{m'' \sqrt{a''}}$ , on a, pour l'inégalité correspondante de la Terre,

$$2'', 9734 \cdot \sin(4n'''t - 2n''t + 4\varepsilon''' - 2\varepsilon'' + 75^\circ, 3518),$$

ce qui diffère peu de l'inégalité

$$3'', 067702 \cdot \sin(4n'''t - 2n''t + 4\varepsilon''' - 2\varepsilon'' + 75^\circ, 3506),$$

trouvée dans le n° 29.

Les deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne sont encore à peu près l'une à l'autre dans le rapport de  $-m^v \sqrt{a^v}$  à  $m^{iv} \sqrt{a^{iv}}$ , comme il est facile de s'en convaincre.

Enfin Uranus éprouve de la part de Saturne, par le n° 37, l'inégalité à longue période

$$- 408'', 978001 \cdot \sin(3n^{vi}t - n^vt + 3\varepsilon^{vi} - \varepsilon^v - 98^\circ, 1313).$$

En la multipliant par  $-\frac{m^{vi} \sqrt{a^{iv}}}{m^v \sqrt{a^v}}$ , on a, dans le mouvement de Sa-



turne, l'inégalité

$$99'', 900. \sin(3n^{\nu}t - n^{\nu}t + 3\varepsilon^{\nu} - \varepsilon^{\nu} - 98^{\circ}, 1313),$$

ce qui diffère peu de l'inégalité

$$95'', 334222. \sin(3n^{\nu}t - n^{\nu}t + 3\varepsilon^{\nu} - \varepsilon^{\nu} - 97^{\circ}, 1319),$$

donnée dans le n° 35 (\*).

40. Considérons, dans le développement de R, le terme de la forme

$$m' M^{(1)} e e' \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - \varpi - \varpi'],$$

et supposons que  $i(n' - n) + 2n$  soit fort petit par rapport à  $n$  et à  $n'$ ; ce terme produira, par le n° 69 du Livre II, dans l'excentricité  $e$  de l'orbite de la planète  $m$ , considérée comme une ellipse variable, l'inégalité

$$- \frac{m' a n}{i(n' - n) + 2n} M^{(1)} e' \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - \varpi - \varpi'],$$

et dans la position  $\varpi$  du périhélie l'inégalité

$$- \frac{m' a n}{i(n' - n) + 2n} M^{(1)} \frac{e'}{e} \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - \varpi - \varpi'].$$

Nommons  $\delta e$  la première de ces inégalités, et  $\delta \varpi$  la seconde. L'expression de  $\nu$  contient le terme  $2e \sin(nt + \varepsilon - \varpi)$ , et par conséquent l'inégalité

$$2\delta e \sin(nt + \varepsilon - \varpi) - 2e \delta \varpi \cos(nt + \varepsilon - \varpi),$$

ce qui donne dans  $\nu$  l'inégalité

$$\frac{2m' a n}{i(n' - n) + 2n} M^{(1)} e' \sin[(i - 1)(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + n't + \varepsilon' - \varpi'].$$

(\*) L'inégalité donnée dans le n° 33 (voir page 144) est

$$95'', 757344 \sin(3n^{\nu}t - n^{\nu}t + 3\varepsilon^{\nu} - \varepsilon^{\nu} - 95^{\circ}, 0779),$$

valeur un peu différente de celle qui est rapportée ici.

V. P.



Il résulte du n° 65 du Livre II que, dans le cas de  $i(n' - n) + 2n$  très-petit, l'expression de  $R'$  relative à l'action de  $m$  sur  $m'$  renferme encore à très-peu près le terme

$$mM^{(1)}ee'\cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - \varpi - \varpi'];$$

puisque, en n'ayant égard qu'aux deux termes de ce genre dans  $R$  et  $R'$ , on a, par le numéro cité, à très-peu près

$$m \int dR + m' \int d'R' = 0,$$

on a donc dans  $\varphi'$  l'inégalité

$$\frac{2ma'n'}{i(n' - n) + 2n} M^{(1)}e \sin[(i - 1)(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi].$$

Ces deux inégalités de  $\varphi$  et de  $\varphi'$  sont dans le rapport de  $m'e'\sqrt{a'}$  à  $me\sqrt{a}$ , en sorte que la seconde se conclut de la première, en multipliant le coefficient de celle-ci par  $\frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}} \frac{e}{e'}$ .

$5n'' - 3n'$  étant peu considérable par rapport à  $n'$  et même à  $n''$ , on a dans  $\varphi'$ , en supposant  $i = 5$ , une inégalité dépendante de l'argument  $5n''t - 4n't + 5\varepsilon'' - 4\varepsilon' - \varpi''$ , et dans  $\varphi''$  une inégalité dépendante de l'argument  $4n''t - 3n't + 4\varepsilon'' - 3\varepsilon' - \varpi'$ . La première de ces inégalités est, par le n° 28,

$$6'', 779405. \sin(5n''t - 4n't + 5\varepsilon'' - 4\varepsilon' - \varpi'').$$

En multipliant son coefficient par  $\frac{m'\sqrt{a'}}{m''\sqrt{a''}} \frac{e'}{e''}$ , on a pour la Terre l'inégalité

$$2'', 0310. \sin(4n''t - 3n't + 4\varepsilon'' - 3\varepsilon' - \varpi');$$

le calcul direct donne, par le n° 29, l'inégalité

$$2'', 229704. \sin(4n''t - 3n't + 4\varepsilon'' - 3\varepsilon' - \varpi'),$$

ce qui diffère peu de la précédente.

Pareillement,  $4n''' - 2n''$  est assez petit relativement à  $n''$ , et même



à  $n''$ . En supposant  $i = 4$ , on a dans  $v''$  une inégalité dépendante de l'argument  $4n''t - 3n't + 4\varepsilon'' - 3\varepsilon' - \varpi''$ , et dans  $v'''$  une inégalité dépendante de l'argument  $3n''t - 2n't + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon' - \varpi''$ . La première de ces inégalités est, par le n° 29,

$$2'',491082.\sin(4n''t - 3n't + 4\varepsilon'' - 3\varepsilon' - \varpi'').$$

En multipliant son coefficient par  $\frac{m''\sqrt{a''}}{m'''\sqrt{a''}}\frac{e''}{e''}$ , on a pour Mars l'inégalité

$$2'',0415.\sin(3n''t - 2n't + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon' - \varpi'').$$

Le calcul direct donne, par le n° 32,

$$2'',611123.\sin(3n''t - 2n't + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon' - \varpi'');$$

la différence est dans les limites de celle que l'on peut supposer, d'après le rapport de  $4n'' - 2n''$  à  $n''$ , qui est à peu près celui de 1 à 4.

41. Il résulte encore du n° 71 du Livre II que, si  $i(n' - n) + 2n$  est très-petit par rapport à  $n'$ , l'inégalité de  $m$  en latitude, dépendante de  $(i - 1)(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + n't + \varepsilon'$ , est à l'inégalité de  $m'$  en latitude, dépendante de  $(i - 1)(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon$ , dans le rapport de  $m'\sqrt{a'}$  à  $-m\sqrt{a}$ .

En supposant  $i = 5$ , on a, par le n° 28, dans le mouvement de Vénus en latitude, l'inégalité

$$-0'',964615.\sin(5n''t - 4n't + 5\varepsilon'' - 4\varepsilon' - \theta').$$

En multipliant son coefficient par  $-\frac{m'\sqrt{a'}}{m''\sqrt{a''}}$ , on a, dans le mouvement de la Terre en latitude, l'inégalité

$$0'',705835.\sin(4n''t - 3n't + 4\varepsilon'' - 3\varepsilon' - \theta').$$

Le calcul direct donne, par le n° 29, l'inégalité

$$0'',723012.\sin(4n''t - 3n't + 4\varepsilon'' - 3\varepsilon' - \theta'),$$

ce qui diffère peu de la précédente.



$3n^{v'} - n^v$  est peu considérable par rapport à  $n^{v'}$ ; en faisant donc  $i = 3$ , on a dans  $\delta s^v$  une inégalité dépendante de  $3n^{v'}t - 2n^vt + 3\varepsilon^{v'} - 2\varepsilon^v$ , et dans  $\delta s^{v'}$  une inégalité dépendante de  $2n^{v'}t - n^vt + 2\varepsilon^{v'} - \varepsilon^v$ . La première de ces inégalités est, par le n° 36,

$$2'', 046267. \sin(3n^{v'}t - 2n^vt + 3\varepsilon^{v'} - 2\varepsilon^v - \Pi^{v'}),$$

$\Pi^{v'}$  étant la longitude du nœud ascendant de l'orbite d'Uranus sur celle de Saturne. En multipliant le coefficient de cette inégalité par

$$-\frac{m^v \sqrt{a^v}}{m^{v'} \sqrt{a^{v'}}}, \text{ on a dans } \delta s^{v'} \text{ l'inégalité}$$

$$-8'', 3772. \sin(2n^{v'}t - n^vt + 2\varepsilon^{v'} - \varepsilon^v - \Pi^{v'}),$$

et, par le n° 38, cette inégalité est

$$-9'', 015592. \sin(2n^{v'}t - n^vt + 2\varepsilon^{v'} - \varepsilon^v - \Pi^{v'}),$$

ce qui diffère peu de la précédente.

42. Il suit du n° 69 du Livre II que,  $i'n' - in$  étant supposé très-petit relativement à  $n$  et à  $n'$ , si l'on représente par

$$m' P \sin(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon) + m' P' \cos(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon)$$

la partie du développement de R qui dépend de l'angle

$$i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon,$$

il en résulte dans  $\delta v$  l'inégalité

$$-\frac{2m'an}{i'n' - in} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial e} \cos(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - nt - \varepsilon + \varpi) \\ - \frac{\partial P'}{\partial e} \sin(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - nt - \varepsilon + \varpi) \end{array} \right\},$$

et dans  $\delta v'$  l'inégalité

$$-\frac{2ma'n'}{i'n' - in} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial e'} \cos(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - n't - \varepsilon' + \varpi') \\ - \frac{\partial P'}{\partial e'} \sin(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - n't - \varepsilon' + \varpi') \end{array} \right\}.$$



Il suit encore du n° 71 du Livre II que les mêmes termes de R donnent dans  $\delta s$  l'inégalité

$$\frac{m'an}{i'n' - in} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial \gamma} \cos(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - nt - \varepsilon + \Pi) \\ - \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \sin(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - nt - \varepsilon + \Pi) \end{array} \right\},$$

$\gamma$  étant la tangente de l'inclinaison respective des orbites de  $m$  et de  $m'$ , et  $\Pi$  étant la longitude du nœud ascendant de l'orbite de  $m'$  sur celle de  $m$ .

Si l'on augmente l'argument de l'inégalité de  $\delta v$  de  $nt + \varepsilon - \varpi$ , et que l'on multiplie son coefficient par  $e$ ; si l'on augmente l'argument de l'inégalité de  $\delta v'$  de  $n't + \varepsilon' - \varpi'$ , et que l'on multiplie son coefficient par  $\frac{m'\sqrt{a'}}{m\sqrt{a}} e'$ ; enfin si l'on augmente l'argument de l'inégalité de  $\delta s$  de  $nt + \varepsilon - \Pi$ , et si l'on multiplie son coefficient par  $-2\gamma$ , la somme de ces trois inégalités sera

$$-\frac{2m'an}{i'n' - in} \left\{ \begin{array}{l} \left( e \frac{\partial P}{\partial e} + e' \frac{\partial P}{\partial e'} + \gamma \frac{\partial P}{\partial \gamma} \right) \cos(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon) \\ - \left( e \frac{\partial P'}{\partial e} + e' \frac{\partial P'}{\partial e'} + \gamma \frac{\partial P'}{\partial \gamma} \right) \sin(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon) \end{array} \right\};$$

or  $P$  et  $P'$  sont des fonctions homogènes en  $e$ ,  $e'$  et  $\gamma$  de la dimension  $i' - i$ ,  $i'$  étant supposé plus grand que  $i$ ; la fonction précédente est ainsi égale à

$$-\frac{2m'an(i' - i)}{i'n' - in} \left[ \begin{array}{l} P \cos(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon) \\ - P' \sin(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon) \end{array} \right].$$

Maintenant on a, par le n° 69 du Livre II, dans  $\delta v$ , l'inégalité

$$\frac{3m'an^2 i}{(i'n' - in)^2} \left[ \begin{array}{l} P \cos(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon) \\ - P' \sin(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon) \end{array} \right].$$

D'où il suit que, si l'on représente par

$$K \sin(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - nt - \varepsilon + O)$$

l'inégalité de  $\delta v$  dépendante de l'angle  $i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - nt - \varepsilon$ ;



si l'on représente par

$$K' \sin(i'n't - int + i'\epsilon' - i\epsilon - n't - \epsilon' + O')$$

l'inégalité de  $\delta v$  dépendante de l'angle  $i'n't - int + i'\epsilon' - i\epsilon - n't - \epsilon'$  ;  
 enfin, si l'on représente par

$$K'' \sin(i'n't - int + i'\epsilon' - i\epsilon - nt - \epsilon + O'')$$

l'inégalité de  $\delta s$  dépendante de l'angle  $i'n't - int + i'\epsilon' - i\epsilon - nt - \epsilon$ ,  
 on a

$$\begin{aligned} & eK \sin(i'n't - int + i'\epsilon' - i\epsilon - \varpi + O) \\ & + \frac{m' \sqrt{a'}}{m \sqrt{a}} e' K' \sin(i'n't - int + i'\epsilon' - i\epsilon - \varpi' + O') \\ & - 2\gamma K'' \sin(i'n't - int + i'\epsilon' - i\epsilon - \Pi + O'') \\ & = - \frac{2(i' - i)}{3i} H \frac{i'n' - in}{n} \sin(i'n't - int + i'\epsilon' - i\epsilon + Q), \end{aligned}$$

$H \sin(i'n't - int + i'\epsilon' - i\epsilon + Q)$  étant l'inégalité de  $\delta v$  dépendante de  
 l'angle  $i'n't - int + i'\epsilon' - i\epsilon$ .

$5n' - 2n$  étant fort petit par rapport à  $n'$ , on a, par le n° 27, dans  $\delta v$   
 l'inégalité

$$5'', 217417. \sin(5n't - 3nt + 5\epsilon' - 3\epsilon + 48^\circ, 1210).$$

L'inégalité de  $\delta s$  dépendante de  $5n't - 3nt + 5\epsilon' - 3\epsilon$  est insensible.  
 On a ensuite, par le n° 28, dans  $\delta v'$  l'inégalité

$$- 1'', 029617. \sin(4n't - 2nt + 4\epsilon' - 2\epsilon - 43^\circ, 8980).$$

Enfin on a, par le n° 27, dans  $\delta v$  l'inégalité

$$26'', 184460. \sin(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon - 33^\circ, 5852).$$

Ici  $i' = 5$ , et  $i = 2$ ; on a donc, par ce qui précède, l'équation de con-  
 dition

$$\begin{aligned} & 5'', 217417. e \sin(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon - \varpi + 48^\circ, 1210) \\ & - 1'', 029617. e' \frac{m' \sqrt{a'}}{m \sqrt{a}} \sin(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon - \varpi' - 43^\circ, 8980) \\ & = - 26'', 184460. \frac{5n' - 2n}{n} \sin(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon - 33^\circ, 5852). \end{aligned}$$



Le premier membre de cette équation donne

$$1'', 11035. \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 31^\circ, 6212).$$

Le second membre donne

$$1'', 1135. \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 33^\circ, 5852);$$

la différence est insensible.

On pourrait vérifier par les théorèmes précédents plusieurs des inégalités respectives de Jupiter et de Saturne; mais, comme toutes les inégalités de ces deux planètes ont été vérifiées plusieurs fois, et avec beaucoup de soin, par divers calculateurs, cette dernière vérification devient inutile.

43. L'inégalité de  $m$ , produite par l'action de  $m'$  et dépendante de l'argument  $n't + \varepsilon' - \varpi'$ , est, par les nos 50 et 55 du Livre II, égale à

$$\frac{-4n^2}{n'(n^2 - n'^2)} \cdot (0, 1) \cdot e' \sin(n't + \varepsilon' - \varpi').$$

L'inégalité de  $m'$ , produite par l'action de  $m$  et dépendante de l'argument  $nt + \varepsilon - \varpi$ , est

$$\frac{4n'^2}{n(n^2 - n'^2)} \cdot (1, 0) \cdot e \sin(nt + \varepsilon - \varpi).$$

Les coefficients de ces deux inégalités sont donc dans le rapport de  $-(0, 1) \cdot n^3 e'$  à  $(1, 0) \cdot n'^3 e$ ; or on a, par le n° 55 du Livre II,

$$(1, 0) = (0, 1) \cdot \frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}};$$

en nommant donc  $Q$  le coefficient de la première inégalité, le coefficient de la seconde sera

$$-\frac{ma^5}{m'a'^5} \frac{e}{e'} Q.$$

Les inégalités de ce genre ont été vérifiées, soit au moyen de cette équation de condition, soit au moyen de l'expression précédente de  $Q$ .



Ainsi l'action de Jupiter produit par le n° 29, dans la Terre, l'inégalité sensible

$$- 7'',839149. \sin(n^{1v}t + \varepsilon^{1v} - \varpi^{1v}).$$

Cette inégalité, par ce qui précède, est

$$\frac{-4n''^2}{n^{1v}(n''^2 - n^{1v^2})} \cdot (2,4). e^{1v} \sin(n^{1v}t + \varepsilon^{1v} - \varpi^{1v}).$$

Or on a, par le n° 24,  $(2,4) = 21'',444015$ ; en substituant dans cette formule cette valeur, et celles de  $n''$ ,  $n^{1v}$  et  $e^{1v}$ , données dans le n° 22, et multipliant le résultat par l'arc égal au rayon, on trouve

$$- 7'',8397. \sin(n^{1v}t + \varepsilon^{1v} - \varpi^{1v}).$$

L'action d'Uranus sur Saturne produit, par le n° 35, dans le mouvement de Saturne, l'inégalité

$$- 3'',122367. \sin(n^{v1}t + \varepsilon^{v1} - \varpi^{v1}).$$

En multipliant son coefficient par  $-\frac{m^v a^{v5}}{m^{v1} a^{v15}} \frac{e^v}{e^{v1}}$ , on a dans Uranus l'inégalité

$$0'',663124. \sin(n^v t + \varepsilon^v - \varpi^v),$$

et le calcul direct a donné, dans le n° 35,

$$0'',663139. \sin(n^v t + \varepsilon^v - \varpi^v).$$



## CHAPITRE XVI.

SUR LES MASSES DES PLANÈTES ET DE LA LUNE.

44. Un des objets les plus importants de la théorie des planètes est la détermination de leurs masses. On a vu, dans le n° 21, l'incertitude qui subsiste encore à cet égard. Le moyen le plus exact de lever cette incertitude sera le développement de leurs inégalités séculaires; mais, en attendant que la suite des siècles ait fait connaître avec précision ces inégalités, on peut faire usage des inégalités périodiques déterminées par un grand nombre d'observations. Delambre a discuté, sous ce point de vue, les nombreuses observations du Soleil de Bradley et de Maskelyne; il a déterminé, par ce moyen, le maximum des inégalités produites par les actions de Vénus, de Mars et de la Lune. L'ensemble des observations de Bradley et de Maskelyne lui a donné le maximum de l'action de Vénus, plus grand que celui qui correspond à la masse que nous avons supposée précédemment à cette planète, dans le rapport de 1,0743 à l'unité, ce qui donne la masse de Vénus  $\frac{1}{35663_2}$  de celle du Soleil. Les observations de Bradley et de Maskelyne, considérées séparément, donnent à très-peu près le même résultat, qui, par conséquent, n'est pas susceptible d'une erreur égale au quinzième de sa valeur.

De là il suit incontestablement que la diminution séculaire de l'obliquité de l'écliptique est fort approchante de 154". Pour l'abaisser, comme l'ont fait quelques Astronomes, à 105", il faudrait diminuer de moitié la masse de Vénus, et cela est évidemment incompatible avec



les observations des inégalités périodiques que cette planète produit dans le mouvement de la Terre. Les bonnes observations modernes de l'obliquité de l'écliptique sont trop rapprochées pour déterminer cet élément avec exactitude. Les observations des Arabes paraissent avoir été faites avec beaucoup de soin : ces observateurs, qui n'ont rien changé au système de Ptolémée, se sont attachés spécialement à perfectionner leurs instruments et leurs observations, qui donnent une diminution séculaire de l'obliquité de l'écliptique très-peu différente de 154". Cette diminution résulte encore des observations de Cocheou-king, faites à la Chine, au moyen d'un grand gnomon, et qui, par leur précision, me paraissent mériter beaucoup de confiance.

Delambre a encore déterminé, par un grand nombre d'observations, le maximum de l'action de Mars sur le mouvement de la Terre. Il a trouvé que cette action est plus petite que celle qui correspond à la masse que j'ai supposée à cette planète, dans le rapport de 0,725 à l'unité, ce qui donne la masse de Mars  $\frac{1}{2546320}$  de celle du Soleil.

Cette valeur est un peu moins précise que celle de la masse de Vénus, parce que son effet est moindre; mais les données d'après lesquelles nous avons déterminé la masse de Mars étant fort hypothétiques, il importait de connaître l'erreur qui peut en résulter dans la théorie du Soleil; et, comme les observations de Bradley et de Maskelyne, prises soit ensemble, soit séparément, concourent à indiquer une diminution dans la masse de Mars, il faut diminuer les inégalités précédentes qu'elle produit dans le mouvement de la Terre, dans le rapport de 0,725 à l'unité.

Ces changements dans les masses de Vénus et de Mars en produisent de sensibles dans les variations séculaires des éléments de l'orbe terrestre; on trouve alors la longitude du périhélie égale à

$$\varpi'' + t.36'',443578 + t^2.0'',0002520005;$$

le coefficient de l'équation du centre de l'orbe terrestre devient

$$2E - t.0'',530224 - t^2.0'',0000210474.$$



Enfin les valeurs de  $p''$  et de  $q''$ , données dans le n° 30, deviennent

$$\begin{aligned} & t.0'',248589 + t^2.0'',0000713376, \\ & - t.1'',608463 + t^2.0'',0000219740; \end{aligned}$$

d'où il suit, par le même numéro, que la diminution séculaire de l'obliquité de l'écliptique est, dans ce siècle, égale à  $160'',85$ . En partant de ces nouvelles données, on trouve, par les formules du n° 31,

$$\begin{aligned} \psi &= t.155'',5927 + 3'',11019 + 42556'',2.\sin(t.155'',5927 + 95'',0733) \\ &\quad - 73530'',8.\cos(t.99'',1227) - 17572'',4.\sin(t.43'',0446), \\ V &= 26'',0796 - 3676'',6 - 18187'',6.\cos(t.155'',5927 + 95'',0733) \\ &\quad - 28463'',6.\sin(t.99'',1227) + 5082'',7.\cos(t.43'',0446), \\ \psi' &= t.155'',5927 + 3'',11019 - 3'',11019.\cos(t.99'',1227) \\ &\quad - 14282'',3.\sin(t.43'',0446), \\ V' &= 26'',0796 - 3676'',6.[1 - \cos(t.43'',0446)] - 10330'',4.\sin(t.99'',1227). \end{aligned}$$

L'accroissement de l'année tropique, à partir de 1750, est alors égal à

$$- 0^j,000086354.[1 - \cos(t.43'',0446)] - 0^j,000442198.\sin(t.99'',1227);$$

d'où il suit qu'au temps d'Hipparque, l'année tropique était de  $12'',6769$  plus longue qu'en 1750. L'obliquité de l'écliptique était plus grande alors de  $2948'',2$ . Enfin, le grand axe de l'orbe solaire a coïncidé avec la ligne des équinoxes, dans l'année 4089 avant notre ère; il lui a été perpendiculaire en 1248.

J'ai déterminé la masse de la Lune par les observations des marées dans le port de Brest. Quoique ces observations laissent beaucoup à désirer encore, cependant elles donnent avec assez de précision le rapport de l'action de la Lune à celle du Soleil sur les marées de ce port. Mais j'ai observé, dans le n° 18 du Livre IV, que les circonstances locales peuvent influer très-sensiblement sur ce rapport, et par conséquent sur la valeur qui en résulte pour la masse de la Lune. J'ai indiqué dans le même Livre divers moyens pour reconnaître cette influence; mais ils exigent des observations très-précises des marées, et celles qui ont été faites à Brest présentent encore assez d'incertitude pour faire



craindre une erreur au moins d'un huitième sur la valeur de la masse de la Lune. Les observations des marées équinoxiales et solsticiales semblent même indiquer dans l'action de la Lune sur ces marées une augmentation d'un dixième, due aux circonstances locales, ce qui diminuerait d'un dixième la valeur que j'ai assignée à la masse de la Lune. Il paraît, en effet, par divers phénomènes astronomiques, que cette valeur est un peu trop grande.

Le premier de ces phénomènes est l'équation lunaire des Tables du Soleil. J'ai trouvé, dans le n° 29 du Livre VI,  $27'',2524$  pour le coefficient de cette équation, en supposant la parallaxe du Soleil égale à  $27'',2$ . Il serait  $26'',4714$  si la parallaxe du Soleil était  $26'',4205$ , telle que je l'ai conclue de la théorie de la Lune, comme on le verra dans le Livre suivant. Delambre a déterminé ce coefficient par la comparaison d'un très-grand nombre d'observations, et il l'a trouvé égal à  $23'',148$ ; ce qui, en admettant la seconde de ces parallaxes du Soleil, que plusieurs astronomes ont conclue du dernier passage de Vénus sur le Soleil, donne la masse de la Lune  $\frac{1}{69,2}$  de celle de la Terre.

Le second phénomène astronomique est la nutation de l'axe terrestre. J'ai trouvé, dans le n° 13 du Livre V, le coefficient de l'inégalité de cette nutation égal à  $31'',036$ , en supposant la masse de la Lune, divisée par le cube de sa moyenne distance à la Terre, triple de la masse du Soleil, divisée par le cube de la moyenne distance de la Terre au Soleil, ce qui suppose la masse de la Lune  $\frac{1}{58,6}$  de celle de la Terre. Maskelyne a trouvé, par la comparaison de toutes les observations de Bradley sur la nutation, le coefficient de cette inégalité égal à  $29'',475$ ; ce résultat donne la masse de la Lune  $\frac{1}{71,0}$  de celle de la Terre.

Enfin, le troisième phénomène astronomique est la parallaxe de la Lune. On verra, dans le Livre suivant, que la constante de l'expression de cette parallaxe, en fonction de la longitude vraie de la Lune, est  $10580'',3$ , en supposant la masse de la Lune  $\frac{1}{58,6}$  de celle de la Terre.



Bürg, qui a déterminé cette constante par un très-grand nombre d'observations de la Lune, l'a trouvée égale à  $10592''$ ,  $71$ , et l'on verra, par les formules que nous donnerons dans le Livre suivant, que ce résultat correspond à une masse de la Lune  $\frac{1}{74,2}$  de celle de la Terre. Il paraît donc, par l'ensemble de ces trois phénomènes, qu'il faut diminuer un peu la masse de la Lune qui résulte des phénomènes des marées observées à Brest, et qu'ainsi l'action de la Lune sur les marées de ce port est sensiblement augmentée par les circonstances locales; car les observations multipliées soit des hauteurs, soit des intervalles des marées, ne permettent pas de supposer cette action sensiblement plus petite que le triple de l'action du Soleil.

La valeur la plus vraisemblable de la masse de la Lune, qui me paraît résulter des divers phénomènes, est  $\frac{1}{68,5}$  de celle de la Terre. En employant cette valeur, on trouve  $23''$ ,  $370$  pour le coefficient de l'équation lunaire des Tables du Soleil, et  $10589''$ ,  $13$  pour la constante de l'expression de la parallaxe de la Lune. On trouve encore

$$29''$$
,  $779 \cdot \cos(\text{longitude du nœud de la Lune})$

pour l'inégalité de la nutation, et

$$-55''$$
,  $648 \cdot \sin(\text{longitude du nœud de la Lune})$

pour l'inégalité de la précession des équinoxes. Le rapport de l'action de la Lune à celle du Soleil sur la mer est alors égal à  $2,566$ ; ainsi, les observations des marées dans le port de Brest ayant donné  $3$  pour ce rapport, il paraît qu'il est augmenté par les circonstances locales, dans la raison de  $3$  à  $2,566$ . Des observations ultérieures et très-précises fixeront invariablement ces divers résultats, sur lesquels il ne reste plus que très-peu d'incertitude.

La masse de Jupiter paraît bien déterminée. Celle de Saturne présente encore quelque incertitude, et il est bien à désirer qu'on la fasse disparaître par l'observation des plus grandes élongations de ses deux



derniers satellites, déterminées dans deux points opposés des orbites, afin d'avoir égard à l'ellipticité de ces orbites. On pourra encore employer pour cet objet la grande inégalité de Jupiter, lorsque les moyens mouvements de Jupiter et de Saturne seront bien connus, car ils ont une influence très-sensible sur le diviseur  $(5n^x - 2n^{xv})^2$  qui affecte cette inégalité. Il me paraît vraisemblable qu'il faut augmenter d'une ou deux secondes le moyen mouvement annuel que j'ai assigné à Jupiter, et diminuer à peu près de la même quantité celui que j'ai assigné à Saturne. Les inégalités périodiques de Jupiter et d'Uranus produites par l'action de Saturne offrent encore un moyen assez exact pour déterminer la masse de cette dernière planète.

La valeur que j'ai assignée à la masse d'Uranus dépend de la plus grande élongation de ses satellites, observée par Herschel. Ces élongations doivent être vérifiées avec un soin particulier.

Quant à la masse de Mercure, les inégalités qu'elle produit dans le mouvement de Vénus peuvent servir à la vérifier. Heureusement, son influence sur le système planétaire étant très-petite, l'erreur qui peut exister encore sur la valeur de cette masse est presque insensible.





## CHAPITRE XVII.

SUR LA FORMATION DES TABLES ASTRONOMIQUES, ET SUR LE PLAN INVARIABLE  
DU SYSTÈME PLANÉTAIRE.

45. Nous allons présentement indiquer la méthode dont on doit faire usage dans la formation des Tables astronomiques. Quoique nous ayons donné les inégalités, tant en longitude qu'en latitude, qui ne sont que d'un quart de seconde, cependant, les observations les plus parfaites ne comportant point ce degré de précision, on peut simplifier les calculs en négligeant les inégalités au-dessous d'une seconde. On formera, au moyen d'un grand nombre d'observations choisies et disposées d'une manière avantageuse, le même nombre d'équations de condition entre les corrections des éléments elliptiques de chaque planète. Ces éléments étant déjà connus à très-peu près, leurs corrections sont assez petites pour que l'on puisse en négliger les carrés et les puissances supérieures, ce qui rend les équations de condition linéaires. On ajoutera ensemble toutes les équations dans lesquelles le coefficient de la même inconnue est considérable, de manière que leurs sommes donnent autant d'équations que d'inconnues; en éliminant ensuite, on déterminera chaque inconnue. On pourra même déterminer par ce moyen les corrections dont les masses supposées aux planètes sont susceptibles. Si les valeurs numériques des inégalités planétaires sont exactement calculées, ce dont on s'assurera en vérifiant avec soin les résultats précédents, alors on pourra, à chaque observation nouvelle, former une nouvelle équation de condition; en éliminant ensuite, tous les dix ans, les corrections fournies par ces équations et par toutes les précédentes,



on corrigera sans cesse les éléments des Tables, et l'on parviendra ainsi à des Tables de plus en plus exactes, pourvu toutefois que les comètes ne viennent point altérer ces éléments; mais il y a tout lieu de croire que leur action sur le système planétaire est insensible.

46. Nous avons déterminé, dans le n° 62 du Livre II, le plan invariable à l'égard duquel la somme des produits de la masse de chaque planète par l'aire que son rayon vecteur, projeté sur ce plan, décrit autour du Soleil est un maximum. Si l'on nomme  $\gamma$  l'inclinaison de ce plan à l'écliptique fixe de 1750, et  $\Pi$  la longitude de son nœud ascendant sur ce plan, on a, par le numéro cité,

$$\text{tang} \gamma \sin \Pi = \frac{\Sigma m \sqrt{a(1-e^2)} \cdot \sin \varphi \sin \theta}{\Sigma m \sqrt{a(1-e^2)} \cdot \cos \varphi},$$

$$\text{tang} \gamma \cos \Pi = \frac{\Sigma m \sqrt{a(1-e^2)} \cdot \sin \varphi \cos \theta}{\Sigma m \sqrt{a(1-e^2)} \cdot \cos \varphi},$$

le signe intégral  $\Sigma$  aux différences finies embrassant tous les termes semblables relatifs à chaque planète. Si l'on fait usage des valeurs de  $m$ ,  $a$ ,  $e$ ,  $\varphi$  et  $\theta$ , données pour chacune d'elles dans le n° 22, on trouve, par ces formules,

$$\gamma = 1^{\circ}, 7689,$$

$$\Pi = 114^{\circ}, 3979.$$

En substituant ensuite pour  $e$ ,  $\varphi$  et  $\theta$  leurs valeurs relatives à l'époque de 1950, on a

$$\gamma = 1^{\circ}, 7689,$$

$$\Pi = 114^{\circ}, 3934,$$

ce qui diffère très-peu des valeurs précédentes, et ce qui fournit une confirmation des variations trouvées précédemment pour les inclinaisons et les nœuds des orbés planétaires.



## CHAPITRE XVIII.

DE L'ACTION DES ÉTOILES SUR LE SYSTÈME PLANÉTAIRE (\*).

47. Pour compléter la théorie des perturbations du système planétaire, il nous reste à considérer celles que ce système éprouve de la part des comètes et des étoiles. Mais, vu l'ignorance où nous sommes des éléments des orbites de la plupart des comètes, et même de l'existence de celles qui, ayant une grande distance périhélie, se dérobent à nos regards et cependant peuvent agir sur les planètes éloignées, il n'est pas possible de déterminer leur action. Heureusement, il y a plusieurs raisons de croire que les masses des comètes sont très-petites, et qu'ainsi leur action est insensible; nous nous bornerons donc ici à considérer l'action des étoiles.

Reprenons pour cet objet les formules (X), (Y) et (Z) du n° 46 du Livre II,

$$(X) \quad \delta r = \frac{a \cos v \int n \, dt r \sin v \left( 2 \int f \, dR + r \frac{\partial R}{\partial r} \right) - a \sin v \int n \, dt r \cos v \left( 2 \int f \, dR + r \frac{\partial R}{\partial r} \right)}{\mu \sqrt{1 - e^2}},$$

$$(Y) \quad \delta v = \frac{\frac{2r \, d\delta r + dr \, \delta r}{a^2 n \, dt} + \frac{3a}{\mu} \int f n \, dt \, dR + \frac{2a}{\mu} \int n \, dt r \frac{\partial R}{\partial r}}{\sqrt{1 - e^2}},$$

$$(Z) \quad \delta s = \frac{a \cos v \int n \, dt r \sin v \frac{\partial R}{\partial z} - a \sin v \int n \, dt r \cos v \frac{\partial R}{\partial z}}{\mu \sqrt{1 - e^2}}.$$

Désignons par  $m'$  la masse d'une étoile; par  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  ses trois coordon-

(\*) Il y a, dans les formules de ce Chapitre, quelques erreurs qui ont été signalées par Laplace lui-même, dans un Mémoire faisant partie des *Additions à la Connaissance des Temps pour 1829*. Il aurait fallu, pour les corriger, remanier entièrement les calculs de l'Auteur; on a cru devoir respecter le texte original. V. P.



nées rectangles, rapportées au centre de gravité du Soleil, et par  $r'$  sa distance à ce centre,  $x, y, z$  étant les trois coordonnées de la planète  $m$ , et  $r$  étant sa distance au Soleil. On aura, par le n° 46 du Livre II,

$$R = \frac{m'(xx' + yy' + zz')}{r'^3} - \frac{m'}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}}.$$

En développant le second membre de cette équation suivant les puissances descendantes de  $r'$ , on aura

$$R = -\frac{m'}{r'} + \frac{m'r^2}{2r'^3} - \frac{3}{2}m' \frac{(xx' + yy' + zz' - \frac{1}{2}r^2)^2}{r'^5} + \dots$$

Prenons pour plan fixe celui de l'orbite primitive de la planète; nous aurons, en négligeant le carré de  $z$ ,

$$x = r \cos v, \quad y = r \sin v, \quad z = rs.$$

Nommons ensuite  $l$  la latitude de l'étoile  $m'$ , et  $U$  sa longitude; nous aurons

$$x' = r' \cos l \cos U, \quad y' = r' \cos l \sin U, \quad z' = r' \sin l,$$

d'où l'on tire, en négligeant les puissances descendantes de  $r'$  au-dessus de  $r'^3$ ,

$$R = -\frac{m'}{r'} + \frac{m'r^2}{4r'^3} [2 - 3 \cos^2 l - 3 \cos^2 l \cos(2v - 2U) - 6s \sin 2l \cos(v - U)].$$

Maintenant,  $r', l$  et  $U$  varient d'une manière presque insensible, si l'on désigne par  $R$ , la partie de  $R$  divisée par  $r'^3$ , on a, en négligeant le carré de l'excentricité de l'orbite de  $m$ , et le terme dépendant de  $s$  et qui est de l'ordre des forces perturbatrices que  $m$  éprouve par l'action des planètes,

$$f dR = R, - \frac{m'a^2}{4r'^3} (2 - 3 \cos^2 l), \quad r \frac{\partial R}{\partial r} = 2R.$$

La formule (X) deviendra ainsi, en supposant  $\mu = 1$ , ce qui revient à très-peu près à prendre pour unité la masse du Soleil,

$$\partial r = 4a \cos v \int n dt r R, \sin v - 4a \sin v \int n dt r R, \cos v.$$



Substituons pour  $r$  sa valeur  $a[1 + e \cos(\nu - \varpi)]$  (\*), et pour  $ndt$  sa valeur  $d\nu[1 - 2e \cos(\nu - \varpi)]$ , et négligeons, sous le signe  $\int$ , les termes périodiques affectés de l'angle  $\nu$ ; nous aurons

$$ndt r R, \sin \nu = \frac{m' a^3 d\nu}{4 r'^3} \left[ \left(1 - \frac{3}{2} \cos^2 l\right) e \sin \varpi + \frac{3}{4} \cos^2 l \cdot e \sin(\varpi - 2U) \right],$$

$$ndt r R, \cos \nu = \frac{m' a^3 d\nu}{4 r'^3} \left[ \left(1 - \frac{3}{2} \cos^2 l\right) e \cos \varpi - \frac{3}{4} \cos^2 l \cdot e \cos(\varpi - 2U) \right],$$

ce qui donne, en regardant  $\varpi$ ,  $l$ ,  $r'$  et  $U$  comme constants à très-peu près,

$$\frac{\delta r}{a} = - \frac{m' a^3 \nu}{r'^3} \left[ \left(1 - \frac{3}{2} \cos^2 l\right) e \sin(\nu - \varpi) - \frac{3}{4} \cos^2 l \cdot e \sin(\nu + \varpi - 2U) \right].$$

Maintenant on a

$$\frac{\delta r}{a} = \delta e \cos(\nu - \varpi) + e \delta \varpi \sin(\nu - \varpi);$$

en comparant cette équation à la précédente, on aura

$$\delta e = \frac{3 m' a^3 \nu}{4 r'^3} \cos^2 l \cdot e \sin(2\varpi - 2U),$$

$$\delta \varpi = - \frac{m' a^3 \nu}{r'^3 e} \left[ 1 - \frac{3}{2} \cos^2 l - \frac{3}{4} \cos^2 l \cos(2\varpi - 2U) \right].$$

Ainsi l'action de l'étoile  $m'$  produit des variations séculaires dans l'excentricité et dans la longitude du périhélie de l'orbite de la planète  $m$ ; mais ces variations sont incomparablement plus petites que celles qui sont dues à l'action des autres planètes. En effet, si l'on suppose que  $m$  soit la Terre,  $r'$  ne peut pas, d'après les observations, être supposé plus petit que  $100000a$ , et alors le terme  $\frac{m' a^3 \nu}{r'^3}$  n'excède pas

$$m' t \cdot 0'', 00000004,$$

$t$  exprimant un nombre d'années juliennes, ce qui est incomparablement au-dessous de la variation séculaire de l'excentricité de l'orbe

(\*) La valeur de  $r$  est  $a[1 - e \cos(\nu - \varpi)]$ .



terrestre, résultante de l'action des planètes, et qui, par le n° 25, est égale à

$$- 1.0'', 289565,$$

à moins qu'on ne suppose à  $m'$  une valeur entièrement invraisemblable. De là nous pouvons conclure que l'action des étoiles n'a aucune influence sensible sur les variations séculaires des excentricités et des périhélics des orbes planétaires, et il est facile de voir, par le développement de la formule (Z), que leur action n'a pareillement aucune influence sur la position de ces orbes.

Examinons présentement leur influence sur le moyen mouvement des planètes. Pour cela, nous observerons que la formule (Y) donne, dans  $d\delta v$ , le terme  $4and t.R.$ , et par conséquent le terme

$$\frac{m'a^3}{r'^3} ndt(2 - 3\cos^2 l).$$

Supposons  $r'$  égal à  $r'_i(1 - \alpha t)$ , et  $l$  égal à  $l_i(1 - \epsilon t)$ ,  $r'_i$  et  $l_i$  étant les valeurs de  $r'$  et de  $l$  en 1750, ou lorsque  $t = 0$ ; on aura dans  $\delta v$  la variation

$$\frac{3m'a^3}{r_i'^3} (1 - \frac{3}{2}\cos^2 l_i) \alpha n t^2 - \frac{3m'a^3}{2r_i'^3} \sin 2l_i \cdot \epsilon n t^2.$$

Les observations ne donnent point la valeur de  $\alpha t$ , mais elles peuvent faire connaître celle de  $\epsilon t$ . En supposant, pour la Terre,  $\epsilon = 1''$  et  $r'_i = 100000.a$ , la quantité  $\frac{m'a^3}{r_i'^3} \epsilon n t^2$  devient, à très-peu près,

$$\frac{m' t^2 . 6'', 2831}{10^{15}},$$

quantité insensible depuis les observations les plus anciennes.

L'expression de  $d\delta v$  contient encore, par ce qui précède, les termes

$$- \frac{9}{2} . m'a^3 ndt . \int d \left[ \frac{s \sin 2l}{r'^3} \cos(v - U) \right] - \frac{6m'a^3 ndt}{r'^3} s \sin 2l \cos(v - U);$$

or on a

$$s = t \frac{dq}{dt} \sin v - t \frac{dp}{dt} \cos v,$$



ce qui donne, en négligeant les quantités multipliées par le sinus et le cosinus de l'angle  $\nu$ ,

$$\frac{s \sin 2l}{r'^3} \cos(\nu - U) = \frac{\sin 2l}{2r'^3} \left( t \frac{dq}{dt} \sin U - t \frac{dp}{dt} \cos U \right),$$

et par conséquent

$$d. \frac{s \sin 2l}{r'^3} \cos(\nu - U) = \frac{\sin 2l}{2r'^3} \left( \frac{dq}{dt} \sin U - \frac{dp}{dt} \cos U \right) dt,$$

d'où résulte, dans  $d\delta\nu$ , le terme

$$- \frac{21}{4} \frac{m'a^3}{r'^3} nt dt \sin 2l \left( \frac{dq}{dt} \sin U - \frac{dp}{dt} \cos U \right),$$

et par conséquent, dans  $\delta\nu$ , l'inégalité séculaire

$$- \frac{21}{8} \frac{m'a^3}{r'^3} nt^2 \sin 2l \left( \frac{dq}{dt} \sin U - \frac{dp}{dt} \cos U \right).$$

Nous avons donné, dans le n° 31, relativement à la Terre, les valeurs de  $\frac{dp''}{dt}$  et de  $\frac{dq''}{dt}$ . En les substituant dans la fonction précédente, on voit qu'elle est insensible depuis les observations les plus anciennes.

Il est facile de s'assurer que les résultats précédents ont encore lieu relativement aux planètes les plus distantes du Soleil; ainsi l'action des étoiles sur le système planétaire est, à raison de leur grande distance, totalement insensible.

Il reste présentement à comparer aux observations les formules des perturbations planétaires, exposées dans ce Livre, et principalement celles des deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne; mais cette comparaison exigerait de trop longs développements. Il me suffira de remarquer ici qu'avant la découverte de ces inégalités, les erreurs des meilleures tables s'élevaient à trente-cinq ou quarante minutes, et qu'elles n'excèdent pas maintenant une minute. Halley avait conclu de la comparaison des observations modernes, soit entre elles, soit aux observations anciennes, que le mouvement de Saturne se ralentit, et



que celui de Jupiter s'accélère de siècle en siècle. Lambert avait reconnu, par les observations modernes, que le mouvement de Saturne s'accélère présentement, et que celui de Jupiter se ralentit. Ces deux phénomènes, opposés en apparence, indiquaient dans les mouvements de ces deux planètes de grandes inégalités à longues périodes, dont il importait de connaître les lois et la cause. En soumettant à l'analyse leurs perturbations réciproques, je parvins aux deux principales inégalités exposées dans les Chapitres XII et XIII de ce Livre, et je vis que les phénomènes observés par Halley et Lambert en découlent naturellement, et qu'elles représentent avec une exactitude remarquable toutes les observations anciennes et modernes. Leur grandeur et la longueur de leurs périodes, qui embrassent plus de neuf cents ans, dépendent, comme on l'a vu, du rapport presque commensurable qui existe entre les moyens mouvements de Jupiter et de Saturne : ce rapport donne naissance à plusieurs autres inégalités considérables que j'ai déterminées, et qui ont donné aux Tables la précision dont elles jouissent maintenant. La même analyse, transportée à toutes les planètes, m'a fait découvrir dans leurs mouvements des inégalités très-sensibles, que l'observation a confirmées. J'ai lieu de croire que les formules précédentes, calculées avec un soin particulier, ajouteront une précision nouvelle aux Tables des mouvements du système planétaire.







---

## LIVRE VII.

### THÉORIE DE LA LUNE.

---

La théorie de la Lune a des difficultés qui lui sont propres, et qui résultent de la grandeur de ses nombreuses inégalités et du peu de convergence des séries qui les donnent. Si cet astre était plus près de la Terre, les inégalités de son mouvement seraient moindres et leurs approximations plus convergentes; mais à la distance où il se trouve, ces approximations dépendent d'une analyse très-compiquée, et ce n'est qu'avec une attention particulière et au moyen de considérations délicates que l'on peut déterminer l'influence des intégrations successives sur les différents termes de l'expression de la force perturbatrice. Le choix des coordonnées n'est point indifférent au succès des approximations : la force perturbatrice du Soleil dépend des sinus et cosinus des élongations de la Lune au Soleil et de ses multiples : leur réduction en sinus et cosinus d'angles dépendants des moyens mouvements du Soleil et de la Lune est pénible et peu convergente, à raison des grandes inégalités de la Lune; il y a donc de l'avantage à éviter cette réduction et à déterminer la longitude moyenne de la Lune, en fonction de sa longitude vraie, ce qui peut être utile dans plusieurs circonstances. On pourra ensuite, si on le juge convenable, déterminer avec précision, par le retour des séries, la longitude vraie en fonction de la longitude moyenne. C'est sous ce point de vue que je vais envisager la théorie de la Lune.

Pour ordonner les approximations, je distingue en divers ordres les inégalités et les termes qui les composent. Je considère comme quan-



tités du premier ordre le rapport du moyen mouvement du Soleil à celui de la Lune, les excentricités des orbes de la Lune et de la Terre, et l'inclinaison de l'orbe lunaire à l'écliptique. Ainsi, dans l'expression de la longitude moyenne en fonction de la longitude vraie, le principal terme de l'équation du centre de la Lune est du premier ordre; le second ordre comprend le second terme de cette équation, la réduction à l'écliptique et les trois grandes inégalités connues sous les noms de *variation*, d'*évection* et d'*équation annuelle*. Les inégalités du troisième ordre sont au nombre de quinze : les Tables actuelles les renferment toutes, ainsi que les inégalités les plus considérables du quatrième ordre, et c'est par là qu'elles représentent les observations avec une précision qu'il sera difficile de surpasser, et à laquelle la Géographie et l'Astronomie nautique sont principalement redevables de leurs progrès.

Mon objet, dans ce Livre, est de montrer dans la seule loi de la pesanteur universelle la source de toutes les inégalités du mouvement lunaire, et de me servir ensuite de cette loi comme moyen de découvertes pour perfectionner la théorie de ce mouvement, et pour en conclure plusieurs éléments importants du système du monde, tels que les équations séculaires de la Lune, sa parallaxe, celle du Soleil et l'aplatissement de la Terre. Un choix avantageux de coordonnées, des approximations bien conduites, et des calculs faits avec soin et vérifiés plusieurs fois doivent donner les mêmes résultats que l'observation, si la loi de la pesanteur en raison inverse du carré des distances est celle de la nature. Je me suis donc attaché à remplir ces conditions, qui exigent des considérations très-déliées, dont l'omission est la cause des discordances que présentent les théories connues de la Lune. C'est dans ces diverses considérations que consiste la vraie difficulté du problème. On peut aisément imaginer un grand nombre de moyens différents et nouveaux de le mettre en équation; mais la discussion de tous les termes qui, très-petits en eux-mêmes, acquièrent une valeur sensible par les intégrations successives, est ce qu'il offre de plus difficile et de plus important, lorsque l'on se propose de rapprocher la



théorie de l'observation, ce qui doit être le but principal de l'Analyse. J'ai déterminé toutes les inégalités du premier, du second et du troisième ordre, et les inégalités les plus considérables du quatrième, en portant la précision jusqu'aux quantités du quatrième ordre inclusivement, et en conservant celles du cinquième ordre qui se sont présentées d'elles-mêmes. Pour comparer ensuite mon analyse aux observations, j'ai considéré que les coefficients des Tables lunaires de Mason sont le résultat de la comparaison de la théorie de la pesanteur avec onze cent trente-sept observations de Bradley, faites dans l'intervalle de 1750 à 1760. Bürg, astronome distingué, vient de les rectifier au moyen de plus de trois mille observations de Maskelyne, depuis 1765 jusqu'en 1793. Les corrections qu'il y a faites sont peu considérables : il y a ajouté neuf équations indiquées par la théorie. Les Tables de ces deux astronomes sont disposées dans la même forme que celles de Mayer, dont elles sont des perfectionnements successifs; car on doit à cet astronome célèbre la justice d'observer non-seulement qu'il a formé le premier des Tables lunaires assez précises pour servir à la solution du problème des longitudes, mais encore que Mason et Bürg ont puisé dans sa théorie les moyens de perfectionner leurs Tables. On y fait dépendre les arguments les uns des autres pour en diminuer le nombre : je les ai réduites avec un soin particulier à la forme que j'ai adoptée dans ma théorie, c'est-à-dire en sinus et cosinus d'angles croissants proportionnellement à la longitude vraie de la Lune. En y comparant les coefficients de mes formules, j'ai eu la satisfaction de voir que la plus grande différence qui, dans la théorie de Mayer, l'une des plus exactes qui aient paru jusqu'à ce jour, s'élève à près de cent secondes, est ici réduite à trente relativement aux Tables de Mason, et au-dessous de vingt-six secondes relativement aux Tables de Bürg, qui sont encore plus précises. On diminuerait cette différence en ayant égard aux quantités du cinquième ordre, qui ont de l'influence, et que l'inspection des termes déjà calculés peut faire connaître : c'est ce que prouve le calcul de deux inégalités dans lesquelles j'ai porté l'approximation jusqu'aux quantités de cet ordre. Ma théorie se rapproche encore plus



des Tables à l'égard du mouvement en latitude : les approximations de ce mouvement sont plus simples et plus convergentes que celles du mouvement en longitude, et la plus grande différence entre les coefficients de mon analyse et ceux des Tables n'est que de six secondes, en sorte que l'on peut regarder cette partie des Tables comme étant donnée par la théorie elle-même. Quant à la troisième coordonnée de la Lune ou à sa parallaxe, on a préféré avec raison d'en former les Tables uniquement par la théorie, qui, vu la petitesse des inégalités de la parallaxe lunaire, doit les donner plus exactement que les observations. Les différences entre mes résultats sur cet objet et ceux des Tables sont donc celles qui existent entre ma théorie et celle de Mayer, suivie dans ce point par Mason et Bürg; elles sont si petites qu'elles méritent peu d'attention; mais, comme ma théorie se rapproche plus de l'observation que celle de Mayer, à l'égard du mouvement en longitude, j'ai lieu de penser qu'elle jouit du même avantage à l'égard des inégalités de la parallaxe.

Les mouvements du périée et des nœuds de l'orbe lunaire offrent encore un moyen de vérifier la loi de la pesanteur. Leur première approximation n'avait donné d'abord aux géomètres que la moitié du premier de ces mouvements, et Clairaut en avait conclu qu'il fallait modifier cette loi, en lui ajoutant un second terme; mais il fit ensuite l'importante remarque qu'une approximation ultérieure rapprochait la théorie de l'observation. Le mouvement conclu de mon analyse ne diffère pas du véritable de sa quatre-cent-quarantième partie : la différence n'est pas d'un trois-cent-cinquantième à l'égard du mouvement des nœuds.

De là il suit incontestablement que la loi de la gravitation universelle est l'unique cause des inégalités de la Lune, et, si l'on considère le grand nombre et l'étendue de ces inégalités et la proximité de ce satellite à la Terre, on jugera qu'il est de tous les corps célestes le plus propre à établir cette grande loi de la nature et la puissance de l'analyse, de ce merveilleux instrument sans lequel il eût été impossible à l'esprit humain de pénétrer dans une théorie aussi compliquée, et qui



peut être employé comme un moyen de découvertes aussi certain que l'observation elle-même.

Parmi les inégalités périodiques du mouvement lunaire en longitude, celle qui dépend de la simple distance angulaire de la Lune au Soleil est importante, en ce qu'elle répand un grand jour sur la parallaxe solaire. Je l'ai déterminée en ayant égard aux quantités du cinquième ordre, et même aux perturbations de la Terre par la Lune, ce qui est indispensable dans cette recherche épineuse. Bürg l'a trouvée de  $377''{,}71$  par la comparaison d'un très-grand nombre d'observations. En égalant ce résultat à celui de mon analyse, on a  $26''{,}4205$  pour la parallaxe moyenne du Soleil, la même que plusieurs astronomes ont conclue du dernier passage de Vénus sur cet astre.

Une inégalité non moins importante est celle qui dépend de la longitude du nœud de la Lune. L'observation l'avait indiquée à Mayer, et Mason l'avait fixée à  $23''{,}765$ ; mais, comme elle ne paraissait pas résulter de la théorie de la pesanteur, la plupart des astronomes la négligeaient. Cette théorie approfondie m'a fait voir qu'elle a pour cause l'aplatissement de la Terre. Bürg l'a trouvée, par un grand nombre d'observations de Maskelyne, égale à  $20''{,}987$ , ce qui répond à l'aplatissement  $\frac{1}{305,05}$ .

On peut encore déterminer cet aplatissement au moyen d'une inégalité du mouvement lunaire en latitude, que la théorie m'a fait connaître, et qui dépend du sinus de la longitude vraie de la Lune : elle est le résultat d'une nutation dans l'orbe lunaire, produite par l'action du sphéroïde terrestre, et correspondante à celle que la Lune produit dans notre équateur, de manière que l'une de ces nutations est la réaction de l'autre; et si toutes les molécules de la Terre et de la Lune étaient fixement liées entre elles par des droites inflexibles et sans masse, le système entier serait en équilibre autour du centre de gravité de la Terre, en vertu des forces qui produisent ces deux nutations, la force qui anime la Lune compensant sa petitesse par la longueur du levier auquel elle serait attachée. On peut représenter cette inégalité



en latitude, en concevant que l'orbe lunaire, au lieu de se mouvoir uniformément sur l'écliptique avec une inclinaison constante, se meut avec les mêmes conditions sur un plan très-peu incliné à l'écliptique, et passant constamment par les équinoxes, entre l'écliptique et l'équateur, phénomène que nous retrouverons d'une manière encore plus sensible dans la théorie des satellites de Jupiter. Ainsi, cette inégalité diminue l'inclinaison de l'orbite lunaire à l'écliptique lorsque le nœud ascendant de cette orbite coïncide avec l'équinoxe du printemps; elle l'augmente lorsque ce nœud coïncide avec l'équinoxe d'automne, ce qui, ayant eu lieu en 1755, a rendu trop grande l'inclinaison que Mason a déterminée par les observations de Bradley, de 1750 à 1760. En effet, Bürg, qui l'a déterminée par des observations faites dans un plus long intervalle, et en ayant égard à l'inégalité précédente, a trouvé une inclinaison plus petite de  $11'',42$ . Cet astronome a bien voulu, à ma prière, déterminer le coefficient de cette inégalité par un très-grand nombre d'observations, et il l'a trouvé égal à  $-24'',6914$ ; il en résulte  $\frac{1}{304,6}$  pour l'aplatissement de la Terre, le même à très-peu près que donne l'inégalité précédente du mouvement en longitude. Ainsi la Lune, par l'observation de ses mouvements, rend sensible à l'Astronomie perfectionnée l'ellipticité de la Terre, dont elle fit connaître la rondeur aux premiers astronomes par ses éclipses. Les expériences du pendule semblent indiquer un aplatissement un peu moindre, comme on l'a vu dans le Livre III : cette différence peut dépendre des termes par lesquels la Terre s'écarte de la figure elliptique, et qui, peu sensibles dans l'expression de la longueur du pendule, deviennent insensibles à la distance de la Lune.

Les deux inégalités précédentes méritent toute l'attention des observateurs, car elles ont sur les mesures géodésiques l'avantage de donner l'aplatissement de la Terre d'une manière moins dépendante des irrégularités de sa figure. Si la Terre était homogène, elles seraient beaucoup plus grandes que suivant les observations, qui concourent ainsi avec les phénomènes de la précession des équinoxes et de la variation



de la pesanteur à exclure l'homogénéité de la Terre. Il en résulte encore que la pesanteur de la Lune vers la Terre se compose des attractions de toutes les molécules de cette planète, ce qui fournit une nouvelle preuve de l'attraction de toutes les parties de la matière.

La théorie, combinée avec les expériences du pendule, les mesures géodésiques et les phénomènes des marées, donne la constante de l'expression de la parallaxe lunaire plus petite que suivant les Tables de Mason. Elle est très-peu différente de celle que Bûrg a déterminée par un grand nombre d'observations de la Lune, d'éclipses de Soleil et d'occultations d'étoiles par la Lune. Il suffit de diminuer un peu la masse de ce satellite, déterminée par les phénomènes des marées, pour faire coïncider cette constante avec le résultat de cet habile astronome, et cette diminution est indiquée par les observations de l'équation lunaire des Tables du Soleil et de la nutation de l'axe terrestre, ce qui semble prouver que, dans le port de Brest, le rapport de l'action de la Lune à celle du Soleil sur la mer est sensiblement augmenté par les circonstances locales. Des observations ultérieures de tous ces phénomènes lèveront cette légère incertitude.

L'un des plus intéressants résultats de la théorie de la pesanteur est la connaissance des inégalités séculaires de la Lune. Les anciennes éclipses indiquaient, dans son mouvement moyen, une accélération dont on a cherché longtemps et inutilement la cause. Enfin la théorie m'a fait connaître qu'elle dépend des variations séculaires de l'excentricité de l'orbe terrestre; que la même cause ralentit les moyens mouvements du périégée de la Lune et de ses nœuds quand celui de la Lune s'accélère, et que les équations séculaires des moyens mouvements de la Lune, de son périégée et de ses nœuds, sont constamment dans le rapport des nombres 1, 3 et 0,74. Les siècles à venir développeront ces grandes inégalités, qui sont périodiques comme les variations de l'excentricité de l'orbe terrestre, dont elles dépendent, et qui produiront un jour des variations au moins égales au quarantième de la circonférence dans le mouvement séculaire de la Lune, et au douzième de la circonférence dans celui de son périégée. Déjà les observations



les confirment avec une précision remarquable : leur découverte me fit juger qu'il fallait diminuer de quinze à seize minutes le mouvement séculaire actuel du périhélie lunaire, que les astronomes avaient conclu par la comparaison des observations modernes aux anciennes. Toutes les observations faites depuis un siècle ont mis hors de doute ce résultat de l'Analyse. On voit ici un exemple de la manière dont les phénomènes, en se développant, nous éclairent sur leurs véritables causes. Lorsque la seule accélération du moyen mouvement de la Lune était connue, on pouvait l'attribuer à la résistance de l'éther ou à la transmission successive de la gravité; mais l'Analyse nous montre que ces deux causes ne produisent aucune altération sensible dans les moyens mouvements des nœuds et du périhélie lunaire, ce qui suffirait pour les exclure, quand même la vraie cause serait encore ignorée. L'accord de la théorie avec les observations nous prouve que, si les moyens mouvements de la Lune sont altérés par des causes étrangères à l'action de la pesanteur, leur influence est très-petite, et jusqu'à présent insensible.

Cet accord établit d'une manière certaine la constance de la durée du jour, élément essentiel de toutes les théories astronomiques. Si cette durée surpassait maintenant d'un centième de seconde celle du temps d'Hipparque, la durée du siècle actuel serait plus grande qu'alors de  $365^{\text{h}}, 25$  : dans cet intervalle, la Lune décrit un arc de  $534^{\text{h}}, 6$ ; le moyen mouvement séculaire actuel de la Lune en paraîtrait donc augmenté de cette quantité, ce qui ajouterait  $13^{\text{h}}, 51$  à son équation séculaire, que je trouve, par la théorie, de  $31^{\text{h}}, 4248$  pour le premier siècle compté de 1750. Cette augmentation est incompatible avec les observations, qui ne permettent pas de supposer une équation séculaire plus grande de  $5^{\text{h}}$  que celle qui résulte de mon analyse; on peut donc affirmer que la durée du jour n'a pas varié d'un centième de seconde depuis Hipparque, ce qui confirme ce que j'ai trouvé *a priori* dans le n° 12 du Livre V par la discussion de toutes les causes qui peuvent l'altérer.

Pour ne rien omettre de ce qui peut influer sur le mouvement de la



Lune, j'ai considéré l'action directe des planètes sur ce satellite, et j'ai reconnu qu'elle est très-peu sensible. Mais le Soleil, en lui transmettant leur action sur les éléments de l'orbe terrestre, rend leur influence sur les mouvements lunaires très-remarquable, et beaucoup plus grande que sur ces éléments eux-mêmes; en sorte que la variation séculaire de l'excentricité de l'orbe terrestre est beaucoup plus sensible dans le mouvement de la Lune que dans celui de la Terre. C'est ainsi que l'action de la Lune sur la Terre, d'où résulte, dans le mouvement de cette planète, l'inégalité connue sous le nom d'*équation lunaire*, est, si je puis m'exprimer ainsi, réfléchie à la Lune par le moyen du Soleil, mais affaiblie à peu près dans le rapport de cinq à neuf. Cette considération nouvelle ajoute à l'action des planètes sur la Lune des termes plus considérables que ceux qui dépendent de leur action directe. Je développe les principales inégalités lunaires résultant des actions directes et indirectes des planètes sur la Lune; vu la précision à laquelle on a porté les Tables de la Lune, il serait utile d'y introduire ces inégalités.

La parallaxe de la Lune, l'excentricité et l'inclinaison de son orbite à l'écliptique vraie, et généralement les coefficients de toutes les inégalités lunaires sont pareillement assujettis à des variations séculaires; mais elles sont jusqu'à présent très-peu sensibles. C'est la raison pour laquelle on retrouve aujourd'hui la même inclinaison que Ptolémée avait conclue de ses observations, quoique l'obliquité de l'écliptique à l'équateur ait diminué sensiblement depuis cet astronome, en sorte que la variation séculaire de cette obliquité n'affecte que les déclinaisons de la Lune. Cependant, le coefficient de l'équation annuelle ayant pour facteur l'excentricité de l'orbe terrestre, sa variation est assez grande pour y avoir égard dans le calcul des anciennes éclipses.

Les nombreuses comparaisons que Bürg et Bouvard ont faites des Tables de Mason avec les observations lunaires de la fin du xvii<sup>e</sup> siècle par La Hire et Flamsteed, du milieu du xviii<sup>e</sup> par Bradley, et avec la suite non interrompue des observations de Maskelyne depuis Bradley jusqu'à ce jour, présentent un résultat auquel on était loin de s'at-



tendre. Les observations de La Hire et de Flamsteed, comparées à celles de Bradley, indiquent un mouvement séculaire plus grand de quinze à vingt secondes que celui des Tables lunaires insérées dans la troisième édition de l'*Astronomie* de Lalande, et qui, dans l'intervalle de cent années juliennes, excède un nombre entier de circonférence de  $342^{\circ}, 09629$  : les observations de Bradley, comparées aux dernières observations de Maskelyne, donnent au contraire un mouvement séculaire plus petit de cent cinquante secondes au moins. Enfin, les observations faites depuis quinze à vingt ans prouvent que cette diminution du mouvement de la Lune est maintenant croissante. De là résulte la nécessité de retoucher sans cesse aux époques des Tables, imperfection qu'il importe de faire disparaître. Elle indique évidemment l'existence d'une ou de plusieurs inégalités inconnues à longues périodes, que la théorie seule peut faire connaître. En l'examinant avec soin, je n'ai remarqué aucune inégalité semblable dépendante de l'action des planètes. S'il en existait une dans la rotation de la Terre, elle se manifesterait dans le moyen mouvement de la Lune, et pourrait y produire les anomalies observées; mais l'examen attentif de toutes les causes qui peuvent altérer la rotation de la Terre m'a convaincu de plus en plus que ses variations sont insensibles. Revenant donc à l'action du Soleil sur la Lune, j'ai reconnu que cette action produit une inégalité dont l'argument est le double de la longitude du nœud de l'orbite lunaire, plus la longitude de son périégée, moins trois fois la longitude du périégée du Soleil. Cette inégalité, dont la période est de 184 ans, dépend du produit de ces quatre quantités : le carré de l'inclinaison de l'orbe lunaire à l'écliptique, l'excentricité de cet orbe, le cube de l'excentricité de l'orbe solaire et le rapport de la parallaxe du Soleil à celle de la Lune; elle paraît ainsi devoir être insensible; mais les grands diviseurs qu'elle acquiert par les intégrations peuvent la rendre sensible, surtout si les termes les plus considérables dont elle se compose sont affectés du même signe. Il est très-difficile d'obtenir son coefficient par la théorie, à cause du grand nombre de ses termes et de l'extrême difficulté de les apprécier, difficulté beaucoup plus grande



encore qu'à l'égard des autres inégalités de la Lune; j'ai donc déterminé ce coefficient au moyen des observations faites depuis un siècle, et j'ai reconnu qu'il est égal à peu près à  $47''{,}51$ . Son introduction dans les Tables doit en changer les époques et le moyen mouvement. J'ai trouvé ainsi qu'il faut diminuer de  $98''{,}654$  le moyen mouvement séculaire des Tables de la troisième édition de l'*Astronomie* de Lalande, et j'en ai conclu la formule suivante, qui doit être appliquée à la longitude moyenne donnée par ces Tables, dont l'époque en 1750 est  $209^{\circ}, 20820$ ,

$$(- 39''{,}44 - 98''{,}654 \cdot i + 47''{,}51 \cdot \sin E),$$

$i$  étant le nombre des siècles écoulés depuis 1750,  $E$  étant le double de la longitude du nœud de l'orbite lunaire, plus la longitude de son périégée, moins trois fois la longitude du périégée du Soleil. Cette formule représente avec une précision remarquable les corrections des époques de ces Tables, déterminées par un très-grand nombre d'observations pour les six époques de 1691, 1756, 1766, 1779, 1789 et 1801; et comme la théorie, examinée avec la plus scrupuleuse attention, ne m'a point indiqué d'autres inégalités lunaires à longues périodes, il me paraît certain que les anomalies observées dans le moyen mouvement de la Lune dépendent de l'inégalité précédente; je ne balance donc point à la proposer aux astronomes comme le seul moyen de corriger ces anomalies.

On voit par cet exposé combien d'éléments intéressants et délicats l'Analyse a su tirer des observations de la Lune, et combien il importe de multiplier et de perfectionner ces observations, qui, par leur grand nombre et leur précision, mettront de plus en plus en évidence ces divers résultats de l'Analyse.

L'erreur des Tables formées d'après la théorie que je présente dans ce Livre ne s'élèverait à cent secondes que dans des cas fort rares; ces Tables donneraient donc, avec une exactitude suffisante, la longitude sur la mer. Il est très-facile de les réduire à la forme des Tables de Mayer; mais comme, dans le problème des longitudes, on se propose



de trouver le temps qui correspond à une longitude vraie observée de la Lune, il y a quelque avantage à réduire en Tables l'expression du temps en fonction de cette longitude. Vu l'extrême complication des approximations successives et la précision des observations modernes, la plupart des inégalités lunaires ont été jusqu'ici mieux déterminées par les observations que par l'Analyse. Ainsi, en empruntant de la théorie ce qu'elle donne avec exactitude et la forme de tous les arguments; en rectifiant ensuite, par la comparaison d'un très-grand nombre d'observations, ce qu'elle donne par des approximations qui laissent quelque incertitude, on doit parvenir à des Tables très-précises. C'est la méthode que Mayer et Mason ont employée avec succès, et, en dernier lieu, Bürg, en la suivant et s'aidant des nouveaux progrès de la théorie lunaire, vient de construire des Tables dont les plus grandes erreurs sont au-dessous de quarante secondes. Cependant il serait utile, pour la perfection des théories astronomiques, que toutes les Tables dérivassent du seul principe de la pesanteur universelle, en n'empruntant de l'observation que les données indispensables. J'ose croire que l'analyse suivante laisse peu de chose à faire pour procurer cet avantage aux Tables de la Lune, et qu'en portant plus loin encore les approximations, on y parviendra bientôt, du moins à l'égard des inégalités périodiques; car, quelque précision que l'on apporte dans les calculs, les mouvements des nœuds et du périégée seront toujours mieux déterminés par les observations.

---



## CHAPITRE PREMIER.

## INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU MOUVEMENT LUNAIRE.

1. Reprenons les équations différentielles (K) du n° 15 du Livre II, et donnons-leur la forme suivante

$$(L) \left\{ \begin{aligned} dt &= \frac{dv}{hu^2 \sqrt{1 + \frac{2}{h^2} \int \frac{\partial Q}{\partial v} \frac{dv}{u^2}}}, \\ 0 &= \left( \frac{d^2 u}{dv^2} + u \right) \left( 1 + \frac{2}{h^2} \int \frac{\partial Q}{\partial v} \frac{dv}{u^2} \right) + \frac{du}{h^2 u^2} \frac{\partial Q}{\partial v} - \frac{1}{h^2} \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{s}{h^2 u} \frac{\partial Q}{\partial s}, \\ 0 &= \left( \frac{d^2 s}{dv^2} + s \right) \left( 1 + \frac{2}{h^2} \int \frac{\partial Q}{\partial v} \frac{dv}{u^2} \right) + \frac{1}{h^2 u^2} \frac{ds}{dv} \frac{\partial Q}{\partial v} - \frac{s}{h^2 u} \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{1+s^2}{h^2 u^2} \frac{\partial Q}{\partial s}. \end{aligned} \right.$$

Dans ces équations,  $t$  exprime le temps, et l'on a

$$Q = \frac{M+m}{r} - \frac{m'(xx' + yy' + zz')}{r'^3} + \frac{m'}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}}.$$

$M$ ,  $m$  et  $m'$  sont les masses de la Terre, de la Lune et du Soleil;  $x$ ,  $y$ ,  $z$  sont les coordonnées de la Lune, rapportées au centre de gravité de la Terre et à une écliptique fixe;  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  sont les coordonnées du Soleil;  $r$  et  $r'$  sont les rayons vecteurs de la Lune et du Soleil;  $s$  est la tangente de la latitude de la Lune au-dessus du plan fixe;  $\frac{1}{u}$  est la projection de son rayon vecteur sur le même plan;  $v$  est l'angle fait par cette projection et par l'axe des  $x$ ; enfin  $h^2$  est une constante arbitraire dépendante principalement de la distance de la Lune à la Terre.

La valeur précédente de  $Q$  suppose la Terre et la Lune sphériques.



Pour avoir sa vraie valeur due à la non-sphéricité de ces corps, nous observerons que, par les propriétés du centre de gravité, il faut transporter au centre de gravité de la Lune : 1<sup>o</sup> toutes les forces dont chacune de ses molécules est animée par l'action des molécules de la Terre, et diviser leur somme par la masse entière de la Lune; 2<sup>o</sup> les forces dont le centre de gravité de la Terre est animé par l'action de la Lune, prises en sens contraire. Cela posé, il est facile de voir que,  $dM$  étant une molécule de la Terre, et  $dm$  une molécule de la Lune dont la distance à la molécule  $dM$  est  $f$ , on aura les forces dont le centre de gravité de la Lune est animé dans son mouvement relatif autour de la Terre, au moyen des différences partielles de la double intégrale

$$\frac{M+m}{Mm} \iint \frac{dM dm}{f},$$

prises par rapport aux coordonnées du centre de la Lune. Ainsi l'on doit substituer cette fonction à  $\frac{M+m}{r}$  dans l'expression précédente de Q. Si la Lune était sphérique, on pourrait, par le n<sup>o</sup> 12 du Livre II, supposer sa masse entière réunie à son centre de gravité; on aurait donc alors  $\iint \frac{dM dm}{f}$  égal à la masse  $m$  de la Lune, multipliée par la somme de toutes les molécules de la Terre, divisées par leurs distances respectives au centre de la Lune; en nommant ainsi V cette somme, on aurait

$$\iint \frac{dM dm}{f} = mV.$$

V serait égal à  $\frac{M}{r}$  si la Terre était sphérique; en désignant donc  $V - \frac{M}{r}$  par  $\delta V$ ,  $m\delta V$  sera la partie de l'intégrale  $\iint \frac{dM dm}{f}$  due à la non-sphéricité de la Terre. Si l'on nomme pareillement  $V'$  la somme des molécules de la Lune, divisées par leurs distances au centre de gravité de la Terre supposée sphérique, on aura

$$\iint \frac{dM dm}{f} = MV';$$



en désignant ainsi par  $\delta V$  la différence  $V - \frac{m}{r}$ ,  $M\delta V$  sera la partie de l'intégrale  $\iint \frac{dM dm}{f}$ , due à la non-sphéricité de la Lune; on aura donc, à très-peu près,

$$\frac{M+m}{Mm} \iint \frac{dM dm}{f} = \frac{M+m}{r} + (M+m) \left( \frac{\delta V}{M} + \frac{\delta V'}{m} \right).$$

Il faut, par conséquent, augmenter, dans l'expression précédente de Q,  $\frac{M+m}{r}$  de la quantité

$$(M+m) \left( \frac{\delta V}{M} + \frac{\delta V'}{m} \right),$$

pour avoir égard à la non-sphéricité de la Terre et de la Lune.

2. Supposons d'abord ces deux corps sphériques, et développons l'expression de Q en série. On a

$$\frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}} = \frac{1}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2xx' - 2yy' - 2zz'}}$$

Ce second membre, développé suivant les puissances descendantes de  $r'$ , devient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r'} + \frac{xx' + yy' + zz' - \frac{1}{2}r^2}{r'^3} + \frac{3}{2} \frac{(xx' + yy' + zz' - \frac{1}{2}r^2)^2}{r'^5} \\ & + \frac{5}{2} \frac{(xx' + yy' + zz' - \frac{1}{2}r^2)^3}{r'^7} + \dots \end{aligned}$$

Prenons pour unité de masse la somme  $M+m$  des masses de la Terre et de la Lune, et observons que

$$r = \frac{\sqrt{1+s^2}}{u},$$

$$x = \frac{\cos v}{u},$$

$$y = \frac{\sin v}{u},$$

$$z = \frac{s}{u}.$$



Marquons d'un trait pour le Soleil les quantités  $u$ ,  $s$  et  $\nu$  relatives à la Terre; nous aurons

$$Q = \frac{u}{\sqrt{1+s^2}} + \frac{m'u'}{\sqrt{1+s'^2}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{3}{2} \frac{[uu' \cos(\nu - \nu') + uu'ss' - \frac{1}{2}u'^2(1+s^2)]^2}{(1+s'^2)^2 \cdot u^3} \\ + \frac{5}{2} \frac{[uu' \cos(\nu - \nu') + uu'ss' - \frac{1}{2}u'^2(1+s^2)]^3}{(1+s'^2)^3 \cdot u^6} + \dots \\ - \frac{(1+s^2)u'^2}{2(1+s'^2)u^2} \end{array} \right\}.$$

La distance du Soleil à la Terre étant à très-peu près quatre cents fois plus grande que celle de la Lune,  $u'$  est très-petit relativement à  $u$ ; ainsi l'on peut, dans la théorie lunaire, négliger les termes de l'ordre  $u'^5$ . On peut encore simplifier les calculs en prenant pour plan de projection celui de l'écliptique. A la vérité, ce dernier plan n'est pas fixe; mais dans son mouvement séculaire il emporte l'orbite de la Lune, de manière que l'inclinaison moyenne de cette orbite sur lui reste constante, en sorte que les phénomènes dépendants de cette inclinaison respective sont toujours les mêmes.

3. Pour le faire voir, nous observerons que  $s'$  est, comme il résulte du n° 59 du Livre II, égal à une suite de termes de la forme  $k \sin(\nu' + it + \epsilon)$ ; nous la représenterons par

$$\Sigma k \sin(\nu' + it + \epsilon),$$

$i$  étant un coefficient extrêmement petit, dont nous négligerons le produit par  $m'u'^3$ . La valeur de  $s$  sera, en négligeant les quantités de l'ordre  $s^3$ , égale à  $\Sigma k \sin(\nu + it + \epsilon) + s$ ,  $s$ , étant la tangente de la latitude de la Lune au-dessus de l'écliptique vraie. Cela posé, on aura

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\nu} \frac{\partial Q}{\partial \nu} - us \frac{\partial Q}{\partial u} - (1+s^2) \frac{\partial Q}{\partial s} \\ = \frac{3m'u'^3}{u^2} \left[ \cos(\nu - \nu') - \frac{u'}{2u} + \frac{5u'}{2u} \cos^2(\nu - \nu') + \dots \right] \left[ s \cos(\nu - \nu') - \frac{ds}{d\nu} \sin(\nu - \nu') - s' \right]. \end{aligned}$$

En substituant dans le second membre de cette équation, au lieu de  $s$ ,



$\Sigma k \sin(\nu + i t + \varepsilon) + s$ , et au lieu de  $s'$ ,  $\Sigma k \sin(\nu' + i t + \varepsilon)$ , il devient

$$\frac{3 m' u'^3}{u^2} \left[ \cos(\nu - \nu') - \frac{u'}{2u} + \frac{5u'}{2u} \cos^2(\nu - \nu') + \dots \right] \left[ s, \cos(\nu - \nu') - \frac{ds_s}{d\nu} \sin(\nu - \nu') \right].$$

La troisième des équations (L) du n° 1 donne, par conséquent,

$$0 = \frac{d^2 s}{d\nu^2} + s + \frac{\frac{3}{2} m' u'^3 s_s + \dots}{u^4 \left( h^2 + 2 \int \frac{\partial Q}{\partial \nu} \frac{d\nu}{u^2} \right)},$$

ou

$$0 = \frac{d^2 s}{d\nu^2} + s + \frac{\frac{3}{2} m' u'^3 s_s}{h^2 u^4} + \dots$$

Si l'on néglige les excentricités et les inclinaisons des orbites, on a  $u = \frac{1}{a}$ ,  $u' = \frac{1}{a'}$ ,  $a'$  et  $a$  étant les moyennes distances du Soleil et de la Lune à la Terre; on verra dans le numéro suivant que  $h^2 = a$  à fort peu près; on aura donc

$$0 = \frac{d^2 s}{d\nu^2} + s + \frac{3}{2} m' \frac{a^3}{a'^3} s_s + \dots$$

Nommons  $mt$  le moyen mouvement du Soleil,  $m$  n'exprimant plus ici la masse de la Lune; on aura, par le n° 16 du Livre II,  $m^2 = \frac{m'}{a'^3}$ . Si l'on suppose ensuite que le temps  $t$  soit représenté par le moyen mouvement de la Lune, ce que l'on peut toujours faire, on aura  $\frac{1}{a^3} = 1$ ; partant,

$$0 = \frac{d^2 s}{d\nu^2} + s + \frac{3}{2} m^2 s_s + \dots$$

Substituons dans cette équation  $\Sigma k \sin(\nu + i t + \varepsilon) + s$ , au lieu de  $s$ , et observons que l'on peut ici changer  $i t$  dans  $i \nu$ ; on aura

$$0 = \frac{d^2 s_s}{d\nu^2} + (1 + \frac{3}{2} m^2) s_s + \Sigma k [1 - (i + 1)^2] \sin(\nu + i \nu + \varepsilon) + \dots,$$

ce qui donne, pour la partie de  $s$ , relative au mouvement séculaire de l'écliptique,

$$s_s = \frac{\Sigma (2i + i^2) k \sin(\nu + i \nu + \varepsilon)}{\frac{3}{2} m^2 - 2i - i^2}.$$



Cette dernière quantité est insensible; car,  $i\nu$  s'élevant au plus à cinquante secondes par année, et  $\frac{3}{4}m^2\nu$ , qui exprime à peu près, comme on le verra dans la suite, le mouvement rétrograde du nœud, surpassant  $20^\circ$ ,  $\frac{3}{2}m^2$  est au moins quatre mille fois plus grand que  $2i$ ; on peut donc négliger le terme

$$\Sigma k [1 - (i + 1)^2] \sin(\nu + i\nu + \varepsilon)$$

dans l'équation différentielle en  $s$ , et alors cette équation est indépendante de tout ce qui a rapport au mouvement séculaire de l'écliptique. L'inclinaison moyenne de l'orbite lunaire à l'écliptique vraie est une des arbitraires de l'intégrale de cette équation; on voit donc qu'à raison de la rapidité du mouvement des nœuds de la Lune, cette inclinaison est constante, et la latitude  $s$ , de la Lune au-dessus de l'écliptique vraie est la même que dans le cas où cette écliptique serait immobile; nous pourrons conséquemment supposer dans les recherches suivantes  $s' = 0$ , ce qui simplifiera les calculs.

Nous aurons de cette manière, en négligeant les quantités des ordres  $m'u^3s^4$  et  $m'u^5$ ,

$$Q = \frac{u}{\sqrt{1+s^2}} + m'u' + \frac{m'u'^3}{4u^2} [1 + 3 \cos(2\nu - 2\nu') - 2s^2] \\ + \frac{m'u'^4}{8u^3} [3(1 - 4s^2) \cos(\nu - \nu') + 5 \cos(3\nu - 3\nu')],$$

d'où l'on tire, en négligeant les quantités de l'ordre  $m'u'^4s^3$ ,

$$\frac{\partial Q}{\partial u} + \frac{s}{u} \frac{\partial Q}{\partial s} = \frac{1}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{m'u'^3}{2u^3} [1 + 3 \cos(2\nu - 2\nu')] \\ - \frac{3m'u'^4}{8u^4} [(3 - 4s^2) \cos(\nu - \nu') + 5 \cos(3\nu - 3\nu')],$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \nu} = -\frac{3m'u'^3}{2u^2} \sin(2\nu - 2\nu') - \frac{m'u'^4}{8u^3} [3(1 - 4s^2) \sin(\nu - \nu') + 15 \sin(3\nu - 3\nu')],$$

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = -\frac{us}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{m'u'^3s}{u^2} - \frac{3m'u'^4s}{u^3} \cos(\nu - \nu').$$



4. Pour intégrer les équations (L) du n° 1, nous observerons que, sans la force perturbatrice du Soleil, la Lune décrirait une ellipse dont le centre de la Terre occuperait un des foyers. On aurait alors, par le n° 16 du Livre II,

$$s = \gamma \sin(\nu - \theta),$$

$$u = \frac{1}{h^2(1 + \gamma^2)} [\sqrt{1 + s^2} + e \cos(\nu - \varpi)],$$

équations dans lesquelles  $\gamma$  est la tangente de l'inclinaison de l'orbite lunaire,  $\theta$  est la longitude de son nœud ascendant,  $e$  et  $\varpi$  sont deux arbitraires dépendantes principalement de l'excentricité de l'orbite et de la position du périhélie.  $\gamma$  et  $e$  sont des quantités fort petites; en négligeant la quatrième puissance de  $\gamma$ , on aura

$$u = \frac{1}{h^2(1 + \gamma^2)} [1 + \frac{1}{4}\gamma^2 + e \cos(\nu - \varpi) - \frac{1}{4}\gamma^2 \cos(2\nu - 2\theta)].$$

Cette valeur de  $u$  suppose l'ellipse lunaire immobile; mais on verra bientôt qu'en vertu de l'action du Soleil, les nœuds et le périhélie de cette ellipse sont en mouvement. Alors, en désignant par  $(1 - c)\nu$  le mouvement direct du périhélie, et par  $(g - 1)\nu$  le mouvement rétrograde des nœuds, on aura

$$s = \gamma \sin(g\nu - \theta),$$

$$u = \frac{1}{h^2(1 + \gamma^2)} [1 + \frac{1}{4}\gamma^2 + e \cos(c\nu - \varpi) - \frac{1}{4}\gamma^2 \cos(2g\nu - 2\theta)].$$

Si l'on substitue cette valeur de  $u$  dans l'expression de  $dt$  du n° 1, et si l'on observe qu'en négligeant l'attraction solaire,  $\frac{\partial Q}{\partial \nu}$  est nul, on aura

$$dt = h^3 d\nu \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{3}{2}(e^2 + \gamma^2) - 2e(1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{5}{4}\gamma^2) \cos(c\nu - \varpi) \\ + \frac{3}{2}e^2 \cos(2c\nu - 2\varpi) - e^3 \cos(3c\nu - 3\varpi) + \frac{1}{2}\gamma^2 \cos(2g\nu - 2\theta) \\ - \frac{3}{4}e\gamma^2 [\cos(2g\nu + c\nu - 2\theta - \varpi) + \cos(2g\nu - c\nu - 2\theta + \varpi)] \end{array} \right\},$$



ce qui donne, en intégrant,

$$\begin{aligned}
 t = \text{const.} + h^3 \nu (1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{3}{2}\gamma^2) - \frac{2h^3e}{c} (1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{5}{4}\gamma^2) \sin(cv - \varpi) \\
 + \frac{3h^3e^2}{4c} \sin(2cv - 2\varpi) - \frac{h^3e^3}{3c} \sin(3cv - 3\varpi) + \frac{h^3\gamma^2}{4g} \sin(2gv - 2\theta) \\
 - \frac{3h^3e\gamma^2}{4(2g+c)} \sin(2gv + cv - 2\theta - \varpi) - \frac{3h^3e\gamma^2}{4(2g-c)} \sin(2gv - cv - 2\theta + \varpi).
 \end{aligned}$$

Les coefficients de cette intégrale sont un peu modifiés par l'action du Soleil, comme on le verra dans la suite.

Dans l'hypothèse elliptique, le coefficient de  $\nu$  de cette expression est, par le n° 16 du Livre II, égal à  $a^{\frac{3}{2}}$ , ce qui donne

$$h^3 (1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{3}{2}\gamma^2) = a^{\frac{3}{2}},$$

$a$  étant le demi-grand axe de l'ellipse; on a donc alors

$$h = a^{\frac{1}{2}} (1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\gamma^2),$$

et par conséquent,

$$u = \frac{1}{a} [1 + e^2 + \frac{1}{4}\gamma^2 + e(1 + e^2) \cos(cv - \varpi) - \frac{1}{4}\gamma^2 \cos(2gv - 2\theta)].$$

En faisant ensuite  $n = a^{-\frac{3}{2}}$ , on aura

$$\begin{aligned}
 nt + \varepsilon = \nu - \frac{2e}{c} (1 - \frac{1}{4}\gamma^2) \sin(cv - \varpi) + \frac{3e^2}{4c} \sin(2cv - 2\varpi) \\
 - \frac{e^3}{3c} \sin(3cv - 3\varpi) + \frac{\gamma^2}{4g} \sin(2gv - 2\theta) \\
 - \frac{3e\gamma^2}{4(2g+c)} \sin(2gv + cv - 2\theta - \varpi) \\
 - \frac{3e\gamma^2}{4(2g-c)} \sin(2gv - cv - 2\theta + \varpi),
 \end{aligned}$$

$\varepsilon$  étant une arbitraire. Dans la substitution de  $nt + \varepsilon$ , on pourra supposer  $c$  et  $g$  égaux à l'unité, et négliger les quantités de l'ordre  $e^3$  ou  $e\gamma^2$  dans les coefficients des sinus. On aura ainsi, en conservant



le terme dépendant de  $\sin(2gv - cv - 2\theta + \varpi)$ , qui nous sera utile,

$$nt + \varepsilon = v - 2e \sin(cv - \varpi) + \frac{3}{4}e^2 \sin(2cv - 2\varpi) + \frac{1}{4}\gamma^2 \sin(2gv - 2\theta) - \frac{3}{4}e\gamma^2 \sin(2gv - cv - 2\theta + \varpi).$$

En marquant d'un trait pour le Soleil les quantités relatives à la Lune, et observant que  $\gamma' = 0$ , on aura

$$n't + \varepsilon' = v' - 2e' \sin(c'v' - \varpi') + \frac{3}{4}e'^2 \sin(2c'v' - 2\varpi'),$$

$$u' = \frac{1}{a'} [1 + e'^2 + e'(1 + e'^2) \cos(c'v' - \varpi')].$$

L'origine du temps  $t$  étant arbitraire, nous pouvons supposer  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  nuls, et alors, en faisant  $\frac{n'}{n} = m$ , la comparaison des valeurs de  $nt$  et de  $n't$  donnera

$$v' - 2e' \sin(c'v' - \varpi') + \frac{3}{4}e'^2 \sin(2c'v' - 2\varpi')$$

$$= mv - 2me \sin(cv - \varpi) + \frac{3}{4}me^2 \sin(2cv - 2\varpi)$$

$$+ \frac{1}{4}m\gamma^2 \sin(2gv - 2\theta) - \frac{3}{4}me\gamma^2 \sin(2gv - cv - 2\theta + \varpi),$$

d'où l'on tire, en observant que  $c'$  est extrêmement peu différent de l'unité,

$$v' = mv - 2me \sin(cv - \varpi) + \frac{3}{4}me^2 \sin(2cv - 2\varpi)$$

$$+ \frac{1}{4}m\gamma^2 \sin(2gv - 2\theta) - \frac{3}{4}me\gamma^2 \sin(2gv - cv - 2\theta + \varpi)$$

$$+ 2e'(1 - \frac{1}{8}e'^2) \sin(c'mv - \varpi') - 2mee' \sin(cv + c'mv - \varpi - \varpi')$$

$$- 2mee' \sin(cv - c'mv - \varpi + \varpi') + \frac{5}{4}e'^2 \sin(2c'mv - 2\varpi'),$$

$$u' = \frac{1}{a'} \left\{ \begin{aligned} &1 + e'(1 - \frac{1}{8}e'^2) \cos(c'mv - \varpi') + e'^2 \cos(2c'mv - 2\varpi') \\ &+ mee' \cos(cv - c'mv - \varpi + \varpi') - mee' \cos(cv + c'mv - \varpi - \varpi') \end{aligned} \right\}.$$

5. On substituera ces valeurs de  $u$ ,  $u'$ ,  $s$  et  $v'$  dans l'expression de  $Q$  et de ses différences partielles, que l'on développera ainsi en sinus et cosinus d'angles proportionnels à  $v$ ; mais il est nécessaire, pour ce développement, d'établir quelques principes relatifs au degré de petitesse des quantités qui entrent dans ces fonctions et à l'influence des intégrations successives sur leurs différents termes.



La valeur de  $m$  est à peu près égale à la fraction  $\frac{1}{13}$ ; nous la regarderons comme une quantité très-petite du premier ordre. Les excentricités des orbites du Soleil et de la Lune et l'inclinaison de l'orbite lunaire à l'écliptique sont à peu près du même degré de petitesse. Nous regarderons ainsi les carrés et les produits de ces quantités comme très-petits du second ordre; leurs cubes et leurs produits de trois dimensions, comme très-petits du troisième ordre, et ainsi de suite. La force perturbatrice du Soleil est de l'ordre  $\frac{m'u^3}{u^3}$ , et l'on a vu, dans le n° 3, que cette quantité est de l'ordre  $m^2$ , ou du second ordre. La fraction  $\frac{a}{a'}$  étant à peu près égale à  $\frac{1}{400}$ , elle peut être considérée comme étant du second ordre. Nous porterons d'abord les approximations jusqu'aux inégalités du troisième ordre inclusivement, et, dans le calcul de ces inégalités, nous aurons égard aux quantités du quatrième ordre; mais il faut une attention particulière pour ne laisser échapper dans les intégrales aucune quantité de cet ordre.

Le développement de la seconde des équations (L) du n° 1 lui donne la forme suivante

$$0 = \frac{d^2 u}{d\nu^2} + N^2 u + \Pi,$$

$N^2$  ne différant de l'unité que d'une quantité de l'ordre  $m^2$ , et  $\Pi$  étant une suite de cosinus de la forme  $k \cos(i\nu + \varepsilon)$ . La partie de  $u$  relative à ce cosinus est, par le n° 41 du Livre II, égale à

$$\frac{k}{i^2 - N^2} \cos(i\nu + \varepsilon);$$

or il est clair que, si  $i^2$  ne diffère de l'unité que d'une quantité de l'ordre  $m$ , le terme  $k \cos(i\nu + \varepsilon)$  acquiert par l'intégration un diviseur de cet ordre, et par conséquent il devient beaucoup plus considérable et de l'ordre  $r - 1$ , s'il est de l'ordre  $r$  dans l'équation différentielle. On verra dans la suite que c'est à cela qu'est due la grandeur de l'inégalité nommée *évection*.



Les termes dans lesquels  $i$  est fort petit, et qui ne se rapportent qu'au mouvement du Soleil, n'augmentent point par l'intégration dans la valeur de  $u$ ; mais il est visible, par la première des équations (L) du n° 1, que ces termes acquièrent le diviseur  $i$  par l'intégration, dans l'expression du temps  $t$ ; il faut donc faire une grande attention à ces termes. C'est de là que dépend la grandeur de l'équation nommée *équation annuelle*.

Les termes de la forme  $k dv \sin(iv + \varepsilon)$  de l'expression de  $\frac{\partial Q}{\partial v} \frac{dv}{u^2}$  acquièrent, par l'intégration de cette expression différentielle, un diviseur de l'ordre  $i$  dans la valeur de  $u$ ; d'où il semble que, dans l'expression du temps  $t$ , ils doivent acquérir un diviseur de l'ordre  $i^2$ , ce qui rendrait ces termes fort grands, lorsque  $i$  est très-petit; mais il est essentiel d'observer que cela n'est pas, et que, si l'on n'a égard qu'à la première puissance de la force perturbatrice, ces termes n'ont point, dans l'expression du temps, de diviseur de l'ordre  $i^2$ . Pour le faire voir, nous observerons que, par le Chapitre VIII du Livre II, l'expression de  $v$  en fonction du temps ne peut acquérir de diviseur de l'ordre  $i^2$  que par la fonction  $-3a \int n dt \int dQ$ , la différentielle  $dQ$  étant uniquement relative aux coordonnées de la Lune. Si  $Q$  contient un terme de la forme  $k \cos(it + \varepsilon)$ ,  $i$  étant fort petit, ce terme ne peut acquérir un diviseur de l'ordre  $i^2$  qu'autant que  $dQ$  n'acquiert point un multiplicateur de l'ordre  $i$ ; la partie de l'angle  $it$  relative à la Lune ne peut dépendre que des moyens mouvements de la Lune, de son périégée et de ses nœuds, lorsque l'on n'a point égard au carré de la force perturbatrice; cette partie, si  $i$  est fort petit, ne dépend point du moyen mouvement de la Lune; elle ne peut donc alors dépendre que des mouvements de son périégée et de ses nœuds. Dans ce cas,  $dQ$  acquiert un multiplicateur de l'ordre de ces mouvements, c'est-à-dire du second ordre, ce qui fait perdre au terme dont il s'agit son diviseur de l'ordre  $i^2$ . Les angles croissant avec lenteur n'ont donc, dans l'expression de la longitude vraie en fonction du temps, qu'un diviseur de l'ordre  $i$ ; il est aisé d'en conclure que cela a également



lieu dans l'expression du temps en fonction de la longitude vraie. Mais si l'on a égard au carré de la force perturbatrice, la partie de l'angle  $iz$  relative aux coordonnées de la Lune peut renfermer le moyen mouvement du Soleil, et alors la différentielle  $dQ$  n'acquiert qu'un multiplicateur du premier ordre ou de l'ordre de  $m$ . On pourra, d'après ces principes, juger de l'ordre auquel les divers termes des équations différentielles s'abaissent dans les expressions finies des coordonnées.

6. Développons, d'après ces considérations, les différents termes de la seconde des équations (L) du n° 1. Dans l'hypothèse elliptique, la partie constante de  $u$  serait  $\frac{1}{a}(1 + e^2 + \frac{1}{4}\gamma^2 + \mathcal{C})$ ,  $\mathcal{C}$  étant une fonction de la quatrième dimension en  $e$  et  $\gamma$ , et l'on aurait

$$h^2 = a(1 - e^2 - \gamma^2 + \mathcal{C}'),$$

$\mathcal{C}'$  étant pareillement une fonction de la quatrième dimension en  $e$  et  $\gamma$ . L'action du Soleil altère cette partie constante de  $u$ ; mais,  $a$  étant arbitraire, nous pouvons supposer que  $\frac{1}{a}(1 + e^2 + \frac{1}{4}\gamma^2 + \mathcal{C})$  représente toujours la partie constante de  $u$ . Dans ce cas, on n'aura plus  $h^2 = a(1 - e^2 - \gamma^2 + \mathcal{C}')$ ; nous ferons alors  $h^2 = a(1 - e^2 - \gamma^2 + \mathcal{C}'')$ ,  $a$ , étant une arbitraire qui, sans l'action du Soleil, coïnciderait avec  $a$ . Nous ferons ensuite  $\frac{m'a^3}{a'^3} = m^2$ . Cela posé, le terme  $\frac{m'u'^3}{2h^2u^3}$  de l'expression de  $-\frac{1}{h^2} \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{s}{h^2 u} \frac{\partial Q}{\partial s}$  deviendra, par son développement,

$$\frac{m^2}{2a} \left\{ \begin{array}{l} 1 + e^2 + \frac{1}{4}\gamma^2 + \frac{3}{2}e'^2 \\ - 3e(1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{2}e'^2) \cos(cv - \varpi) \\ + 3e'(1 + e^2 + \frac{1}{4}\gamma^2 + \frac{9}{8}e'^2) \cos(c'mv - \varpi') \\ - \frac{3}{2}(3 + 2m) ee' \cos(cv + c'mv - \varpi - \varpi') \\ - \frac{3}{2}(3 - 2m) ee' \cos(cv - c'mv - \varpi + \varpi') \\ + 3e^2 \cos(2cv - 2\varpi) \\ + \frac{3}{4}\gamma^2 \cos(2gv - 2\theta) \\ + \frac{9}{2}e'^2 \cos(2c'mv - 2\varpi') \\ - \frac{3}{2}e\gamma^2 \cos(2gv - cv - 2\theta + \varpi) \end{array} \right\}.$$



Pour développer le terme  $\frac{3m'u'^3}{2h^2u^3} \cos(2\nu - 2\nu')$  de l'expression de  $-\frac{1}{h^2} \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{s}{h^2u} \frac{\partial Q}{\partial s}$ , nous allons d'abord donner le développement de  $3m'u'^3 \cos(2\nu - 2\nu')$ . Ce terme développé devient

$$\frac{3m'}{a'^3} \left\{ \begin{aligned} & (1 - \frac{5}{2}e'^2 - 4m^2e^2) \cos(2\nu - 2m\nu) \\ & + \frac{7}{2}e' \cos(2\nu - 2m\nu - c'm\nu + \varpi') \\ & - \frac{1}{2}e' \cos(2\nu - 2m\nu + c'm\nu - \varpi') \\ & + 2me \cos(2\nu - 2m\nu + c\nu - \varpi) \\ & - 2me \cos(2\nu - 2m\nu - c\nu + \varpi) \\ & + \frac{17}{2}e'^2 \cos(2\nu - 2m\nu - 2c'm\nu + 2\varpi') \\ & - \frac{24}{2}mee' \cos(2\nu - 2m\nu - c\nu - c'm\nu + \varpi + \varpi') \\ & + \frac{24}{2}mee' \cos(2\nu - 2m\nu + c\nu - c'm\nu - \varpi + \varpi') \\ & - \frac{1}{2}mee' \cos(2\nu - 2m\nu + c\nu + c'm\nu - \varpi - \varpi') \\ & + \frac{1}{2}mee' \cos(2\nu - 2m\nu - c\nu + c'm\nu + \varpi - \varpi') \\ & + m \frac{3+8m}{4} e^2 \cos(2c\nu - 2\nu + 2m\nu - 2\varpi) \\ & - m \frac{3-8m}{4} e^2 \cos(2c\nu + 2\nu - 2m\nu - 2\varpi) \\ & + \frac{m\gamma^2}{4} \cos(2g\nu - 2\nu + 2m\nu - 2\theta) \\ & - \frac{m\gamma^2}{4} \cos(2g\nu + 2\nu - 2m\nu - 2\theta) \\ & - \frac{3me\gamma^2}{4} \cos(2\nu - 2m\nu - 2g\nu + c\nu + 2\theta - \varpi) \end{aligned} \right.$$

Il faut multiplier cette fonction par  $\frac{1}{2h^2u^3}$ , et l'on a ce facteur en faisant  $e'$  nul dans le développement précédent de  $\frac{m'u'^3}{2h^2u^3}$ , et en multipliant cette dernière quantité par  $\frac{a'^3}{m}$ ; on aura ainsi, à très-peu près,



en négligeant les quantités qui restent de l'ordre  $m^5$  après les intégrations,

$$\frac{3m'u^3}{2h^2u^3} \cos(2v - 2v') = \frac{3m^2}{2a} \left\{ \begin{aligned} & (1 + e^2 + \frac{1}{4}\gamma^2 - \frac{5}{2}e'^2) \cos(2v - 2mv) \\ & - \frac{3+4m}{2} e(1 + \frac{1}{2}e^2 - \frac{5}{2}e'^2) \cos(2v - 2mv - cv + \varpi) \\ & - \frac{3-4m}{2} e \cos(2v - 2mv + cv - \varpi) \\ & + \frac{7}{2}e' \cos(2v - 2mv - c'mv + \varpi') \\ & - \frac{1}{2}e' \cos(2v - 2mv + c'mv - \varpi') \\ & - \frac{21(1+2m)}{4} ee' \cos(2v - 2mv - cv - c'mv + \varpi + \varpi') \\ & - \frac{21(1-2m)}{4} ee' \cos(2v - 2mv + cv - c'mv - \varpi + \varpi') \\ & + \frac{3+2m}{4} ee' \cos(2v - 2mv - cv + c'mv + \varpi - \varpi') \\ & + \frac{3-2m}{4} ee' \cos(2v - 2mv + cv + c'mv - \varpi - \varpi') \\ & + \frac{17}{2}e'^2 \cos(2v - 2mv - 2c'mv + 2\varpi') \\ & + \frac{6+15m+8m^2}{4} e^2 \cos(2cv - 2v + 2mv - 2\varpi) \\ & + \frac{6-15m+8m^2}{4} e^2 \cos(2cv + 2v - 2mv - 2\varpi) \\ & + \frac{3+2m}{8} \gamma^2 \cos(2gv - 2v + 2mv - 2\theta) \\ & + \frac{3-2m}{8} \gamma^2 \cos(2gv + 2v - 2mv - 2\theta) \\ & - \frac{3(2+m)}{8} e\gamma^2 \cos(2v - 2mv - 2gv + cv + 2\theta - \varpi) \end{aligned} \right\}$$

Le terme  $\frac{9m'u^4}{8h^2u^4} \cos(v - v')$  de l'expression de  $-\frac{1}{h^2} \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{s}{h^2u} \frac{\partial Q}{\partial s}$



donne les suivants

$$\begin{aligned} & \frac{9m^2}{8a} (1 + 2e^2 + 2e'^2) \frac{a}{a'} \cos(\nu - m\nu) \\ & + \frac{9m^2}{8a} \frac{a}{a'} e' \cos(\nu - m\nu + c'm\nu - \varpi') \\ & + \frac{27m^2}{8a} \frac{a}{a'} e' \cos(\nu - m\nu - c'm\nu + \varpi'). \end{aligned}$$

$\frac{a}{a'}$  étant, par le numéro précédent, de l'ordre  $m^2$ , les deux premiers de ces termes deviennent de l'ordre  $m^3$  par les intégrations. L'inégalité dépendante de l'angle  $\nu - m\nu$  étant très-propre à faire connaître la parallaxe du Soleil, donnée par le rapport  $\frac{a}{a'}$ , il importe de la déterminer avec un soin particulier : je porterai, par cette raison, dans le calcul de cette inégalité, l'approximation jusqu'aux termes de l'ordre  $m^5$  inclusivement.

Développons maintenant le terme  $\frac{\partial Q}{\partial \nu} \frac{du}{h^2 u^2 d\nu}$  de la seconde des équations (L) du n° 1. Ce terme contient d'abord le suivant  $-\frac{3m'u'^3}{2h^2 u^3} \frac{du}{d\nu} \sin(2\nu - 2\nu')$ . On aura  $-\frac{3m'u'^3}{2h^2 u^3} \sin(2\nu - 2\nu')$ , en augmentant  $2\nu$  d'un angle droit dans le développement précédent de  $\frac{3m'u'^3}{2h^2 u^3} \cos(2\nu - 2\nu')$ . Il faut ensuite multiplier ce développement par  $\frac{du}{u d\nu}$  ou par

$$\begin{aligned} & -ce(1 + \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}\gamma^2) \sin(c\nu - \varpi) \\ & + \frac{1}{2}ce^2 \sin(2c\nu - 2\varpi) \\ & - \frac{1}{4}ce^3 \sin(3c\nu - 3\varpi) \\ & + \frac{1}{2}g\gamma^2 \sin(2g\nu - 2\theta) \\ & - \frac{1}{8}e\gamma^2 \sin(2g\nu - c\nu - 2\theta + \varpi). \end{aligned}$$



On aura ainsi

$$-\frac{3m'u'^3}{2h^2u^4} \frac{du}{dv} \sin(2v-2v') = \frac{3m^2}{4a} \left( \begin{aligned} & ce \left( 1 + \frac{2-19m}{4} e^2 - \frac{5}{2} e'^2 \right) \cos(2v-2mv-cv+\varpi) \\ & - ce \cos(2v-2mv+cv-\varpi) \\ & + \frac{7}{2} cee' \cos(2v-2mv-cv-c'mv+\varpi+\varpi') \\ & - \frac{7}{2} cee' \cos(2v-2mv+cv-c'mv-\varpi+\varpi') \\ & - \frac{1}{2} cee' \cos(2v-2mv-cv+c'mv+\varpi-\varpi') \\ & + \frac{1}{2} cee' \cos(2v-2mv+cv+c'mv-\varpi-\varpi') \\ & - 2c(1+m)e^2 \cos(2cv-2v+2mv-2\varpi) \\ & + 2c(1-m)e^2 \cos(2cv+2v-2mv-2\varpi) \\ & + 4mce^2 \cos(2v-2mv) \\ & - \frac{g}{2} \gamma^2 \cos(2gv-2v+2mv-2\theta) \\ & + \frac{g}{2} \gamma^2 \cos(2gv+2v-2mv-2\theta) \\ & + \frac{2-5m}{4} e\gamma^2 \cos(2v-2mv-2gv+cv+2\theta-\varpi) \end{aligned} \right)$$

Les termes

$$-\frac{m'u'^4}{8h^2u^5} [3 \sin(v-v') + 15 \sin(3v-3v')] \frac{du}{dv}$$

de l'expression de  $\frac{\partial Q}{\partial v} \frac{du}{h^2 u^2 dv}$  ne produisent aucune inégalité de troisième ordre dans les intégrales.

Développons enfin le terme  $\frac{2}{h^2} \int \frac{\partial Q}{\partial v} \frac{dv}{u^2}$ . Ce terme contient le suivant  $-\frac{3m'}{h^2} \int \frac{u'^3}{u^4} \sin(2v-2v')$ . Le développement précédent de  $\frac{3m'u'^3}{2h^2u^3} \cos(2v-2v')$  donne celui de  $-\frac{3m'u'^3}{h^2u^4} \sin(2v-2v')$ , en y augmentant  $2v$  d'un angle droit, et en multipliant par  $\frac{2}{u}$  ou par

$$2a \left( \begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} \gamma^2 \\ & - e \left( 1 - \frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{2} \gamma^2 \right) \cos(cv-\varpi) \\ & + \frac{1}{2} e^2 \cos(2cv-2\varpi) \\ & + \frac{1}{4} \gamma^2 \cos(2gv-2\theta) \\ & - \frac{1}{4} e\gamma^2 \cos(2gv-cv-2\theta+\varpi) \end{aligned} \right)$$



On aura ainsi

$$-\frac{3m'}{h^2} \int \frac{u'^3 dv}{u^4} \sin(2v - 2v')$$

$$= 3m^2 \frac{a}{a_1} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1 + 2e^2 - \frac{5}{2}e'^2}{2 - 2m} \cos(2v - 2mv) \\ & - \frac{2(1+m)}{2 - 2m - c} \left(1 + \frac{3}{4}e^2 - \frac{1}{4}\gamma^2 - \frac{5}{2}e'^2\right) e \cos(2v - 2mv - cv + \varpi) \\ & - \frac{2(1-m)}{2 - 2m + c} e \cos(2v - 2mv + cv - \varpi) \\ & + \frac{7e'}{2(2-3m)} \cos(2v - 2mv - c'mv + \varpi') \\ & - \frac{e'}{2(2-m)} \cos(2v - 2mv + c'mv - \varpi') \\ & - \frac{7(2+3m)ee'}{2(2-3m-c)} \cos(2v - 2mv - cv - c'mv + \varpi + \varpi') \\ & - \frac{7(2-3m)ee'}{2(2-3m+c)} \cos(2v - 2mv + cv - c'mv - \varpi + \varpi') \\ & + \frac{(2+m)ee'}{2(2-m-c)} \cos(2v - 2mv - cv + c'mv + \varpi - \varpi') \\ & + \frac{(2-m)ee'}{2(2-m+c)} \cos(2v - 2mv + cv + c'mv - \varpi - \varpi') \\ & - \frac{10 + 19m + 8m^2}{4(2c - 2 + 2m)} e^2 \cos(2cv - 2v + 2mv - 2\varpi) \\ & + \frac{10 - 19m + 8m^2}{4(2c + 2 - 2m)} e^2 \cos(2cv + 2v - 2mv - 2\varpi) \\ & - \frac{2+m}{4(2g - 2 + 2m)} \gamma^2 \cos(2gv - 2v + 2mv - 2\theta) \\ & + \frac{2-m}{4(2g + 2 - 2m)} \gamma^2 \cos(2gv + 2v - 2mv - 2\theta) \\ & + \frac{17e'^2}{2(2-4m)} \cos(2v - 2mv - 2c'mv + 2\varpi') \\ & - \frac{5+m}{4(2-2m-2g+c)} e\gamma^2 \cos(2v - 2mv - 2gv + cv + 2\theta - \varpi) \end{aligned} \right\}$$

Dans cette formule, les termes dépendants des angles  $2cv - 2v + 2mv - 2\varpi$  et  $2gv - 2v + 2mv - 2\theta$  ont des diviseurs de l'ordre  $m$ , et ils acquièrent



de nouveau ces diviseurs par l'intégration dans l'expression de la longitude moyenne de la Lune, ce qui les réduit au second ordre, et ce qui semble devoir donner de grandes valeurs aux inégalités relatives à ces angles. Mais on doit observer que, par le n° 5, les termes qui ont pour diviseur le carré du coefficient de  $v$  dans ces angles se détruisent à très-peu près dans l'expression de la longitude moyenne, en sorte que les inégalités dont il s'agit deviennent du troisième ordre, et conformes au résultat des observations, comme on le verra dans la suite. On peut se dispenser, par cette raison, de considérer, dans le calcul de ces inégalités, les quantités multipliées par  $e^4$ ,  $e^2\gamma^2$  et  $\gamma^4$ ; car les quantités du quatrième ordre qui en résultent après les intégrations se détruisent à très-peu près.

L'intégrale  $\frac{2}{h^2} \int \frac{\partial Q}{\partial v} \frac{dv}{u^2}$  contient encore le terme

$$-\frac{3m'}{4h^2} \int \frac{u'^4 dv}{u^5} \sin(v-v');$$

ce terme donne les suivants

$$\frac{3m^2}{4} \frac{a}{a'} \frac{a}{a'} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1 + \frac{7}{2}e^2 - \frac{1}{4}\gamma^2 + 2e'^2}{1-m} \cos(v-mv) \\ + e' \cos(v-mv + c'mv - \varpi') \\ + \frac{3e'}{1-2m} \cos(v-mv - c'mv + \varpi') \end{array} \right\};$$

les autres termes de la même intégrale peuvent être ici négligés. Cela posé, si l'on observe que l'expression de  $u$  du n° 4 donne

$$\frac{d^2u}{dv^2} + u = \frac{1}{a} \left\{ \begin{array}{l} 1 + e^2 + \frac{\gamma^2}{4} \\ + (1-e^2)e \cos(cv - \varpi) \\ + \frac{4g^2-1}{4} \gamma^2 \cos(2gv - 2\theta) \end{array} \right\},$$

le terme  $\left(\frac{d^2u}{dv^2} + u\right) \frac{2}{h^2} \int \frac{\partial Q}{\partial v} \frac{dv}{u^2}$  de la seconde des équations (L) du



n° 1 donnera, par son développement,

$$\begin{aligned}
 & \frac{1 + 3e^2 + \frac{\gamma^2}{4} - \frac{5}{2}e'^2}{2 - 2m} \cos(2\nu - 2m\nu) \\
 & + \left[ \frac{1 - c^2}{4(1 - m)} - \frac{2(1 + m)}{2 - 2m - c} \left( 1 + \frac{7}{4}e^2 - \frac{5}{2}e'^2 \right) \right] e \cos(2\nu - 2m\nu - c\nu + \varpi) \\
 & - \frac{2(1 - m)}{2 - 2m + c} e \cos(2\nu - 2m\nu + c\nu - \varpi) \\
 & + \frac{7e'}{2(2 - 3m)} \cos(2\nu - 2m\nu - c'm\nu + \varpi') \\
 & - \frac{e'}{2(2 - m)} \cos(2\nu - 2m\nu + c'm\nu - \varpi') \\
 & - \frac{7(2 + 3m)}{2(2 - 3m - c)} ee' \cos(2\nu - 2m\nu - c\nu - c'm\nu + \varpi + \varpi') \\
 & - \frac{7(2 - 3m)}{2(2 - 3m + c)} ee' \cos(2\nu - 2m\nu + c\nu - c'm\nu - \varpi + \varpi') \\
 & + \frac{2 + m}{2(2 - m - c)} ee' \cos(2\nu - 2m\nu - c\nu + c'm\nu + \varpi - \varpi') \\
 & + \frac{2 - m}{2(2 - m + c)} ee' \cos(2\nu - 2m\nu + c\nu + c'm\nu - \varpi - \varpi') \\
 & - \frac{10 + 19m + 8m^2}{4(2c - 2 + 2m)} e^2 \cos(2c\nu - 2\nu + 2m\nu - 2\varpi) \\
 & + \frac{10 - 19m + 8m^2}{4(2c + 2 - 2m)} e^2 \cos(2c\nu + 2\nu - 2m\nu - 2\varpi) \\
 & + \left[ \frac{4g^2 - 1}{16(1 - m)} - \frac{2 + m}{4(2g - 2 + 2m)} \right] \gamma^2 \cos(2g\nu - 2\nu + 2m\nu - 2\theta) \\
 & + \left[ \frac{4g^2 - 1}{16(1 - m)} + \frac{2 - m}{4(2g + 2 - 2m)} \right] \gamma^2 \cos(2g\nu + 2\nu - 2m\nu - 2\theta) \\
 & + \frac{17e'^2}{2(2 - 4m)} \cos(2\nu - 2m\nu - 2c'm\nu + 2\varpi') \\
 & - \left[ \frac{5 + m}{4(2 - 2m - 2g + c)} + \frac{3(1 - m)}{4(2 - 2m + c)} \right] e\gamma^2 \cos(2\nu - 2m\nu - 2g\nu + c\nu + 2\theta - \varpi) \\
 & + \frac{1 + \frac{9}{2}e^2 + 2e'^2}{4(1 - m)} \frac{a}{a'} \cos(\nu - m\nu) \\
 & + \frac{1}{4} \frac{a}{a'} e' \cos(\nu - m\nu + c'm\nu - \varpi') \\
 & + \frac{3}{4(1 - 2m)} \frac{a}{a'} e' \cos(\nu - m\nu - c'm\nu + \varpi')
 \end{aligned}$$



7. Le terme  $-\frac{1}{h^2(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}$  de l'expression de

$$-\frac{1}{h^2} \frac{\partial Q}{\partial u} = -\frac{s}{h^2 u} \frac{\partial Q}{\partial s}$$

devient, en négligeant les inégalités du quatrième ordre,

$$-\frac{1}{a} \left[ 1 + e^2 + \frac{\gamma^2}{4} + \frac{3}{4} \gamma^2 \left( 1 + e^2 - \frac{1}{4} \gamma^2 \right) \cos(2gv - 2\theta) + \mathcal{E}'' \right] + \frac{3s}{h^2} \frac{\delta s}{\delta s},$$

$\mathcal{E}''$  étant une fonction de la quatrième dimension en  $e$  et  $\gamma$ , et  $\delta s$  étant la partie de  $s$  due à l'action de la force perturbatrice. On verra ci-après que  $\delta s$  est de cette forme

$$\begin{aligned} \delta s = & B_1^{(0)} \gamma \sin(2v - 2mv - gv + \theta) \\ & + B_2^{(1)} \gamma \sin(2v - 2mv + gv - \theta) \\ & + B_2^{(2)} e \gamma \sin(gv + cv - \theta - \varpi) \\ & + B_2^{(3)} e \gamma \sin(gv - cv - \theta + \varpi) \\ & + B_2^{(4)} e \gamma \sin(2v - 2mv - gv + cv + \theta - \varpi) \\ & + B_2^{(5)} e \gamma \sin(2v - 2mv + gv - cv - \theta + \varpi) \\ & + B_2^{(6)} e \gamma \sin(2v - 2mv - gv - cv + \theta + \varpi) \\ & + B_1^{(7)} e' \gamma \sin(gv + c'mv - \theta - \varpi') \\ & + B_1^{(8)} e' \gamma \sin(gv - c'mv - \theta + \varpi') \\ & + B_1^{(9)} e' \gamma \sin(2v - 2mv - gv + c'mv + \theta - \varpi') \\ & + B_1^{(10)} e' \gamma \sin(2v - 2mv - gv - c'mv + \theta + \varpi') \\ & + B_0^{(11)} e^2 \gamma \sin(2cv - gv - 2\varpi + \theta) \\ & + B_1^{(12)} e^2 \gamma \sin(2v - 2mv - 2cv + gv + 2\varpi - \theta) \\ & + B_1^{(13)} e^2 \gamma \sin(2cv + gv - 2v + 2mv - 2\varpi - \theta) \\ & + B_2^{(14)} \frac{a}{a'} \gamma \sin(gv - v + mv - \theta) \\ & + B_2^{(15)} \frac{a}{a'} \gamma \sin(gv + v - mv - \theta). \end{aligned}$$

Les nombres placés au bas de la lettre B indiquent l'ordre de cette



lettre. Ainsi,  $B_1^{(0)}$  est du premier ordre,  $B_2^{(2)}$  est du second ordre, et  $B_0^{(4)}$  est fini. On peut observer que cela a lieu, suivant que le nombre qui multiplie l'angle  $\nu$ , dans le sinus correspondant, diffère de l'unité d'une quantité de l'ordre  $m$ , ou d'un nombre fini (c'est-à-dire de l'ordre zéro), ou d'une quantité de l'ordre  $m^2$ , parce que l'intégration fait acquérir à ces termes un diviseur du même ordre. On aura, cela posé,

$$\begin{aligned}
 \frac{3s \delta s}{h^2} = & -\frac{3}{2a_1} (B_1^{(0)} - B_2^{(1)}) \gamma^2 \cos(2\nu - 2m\nu) \\
 & + \frac{3}{2a_1} B_1^{(0)} \gamma^2 \cos(2\nu - 2m\nu - 2g\nu + 2\theta) \\
 & + \frac{3}{2a_1} (B_2^{(2)} + B_2^{(3)}) e \gamma^2 \cos(c\nu - \varpi) \\
 & - \frac{3}{2a_1} B_2^{(3)} e \gamma^2 \cos(2g\nu - c\nu - 2\theta + \varpi) \\
 & + \frac{3}{2a_1} B_2^{(4)} e \gamma^2 \cos(2\nu - 2m\nu - 2g\nu + c\nu + 2\theta - \varpi) \\
 & + \frac{3}{2a_1} (B_2^{(5)} - B_2^{(6)}) e \gamma^2 \cos(2\nu - 2m\nu - c\nu + \varpi) \\
 & + \frac{3}{2a_1} (B_1^{(7)} + B_1^{(8)}) e' \gamma^2 \cos(c'm\nu - \varpi') \\
 & - \frac{3}{2a_1} B_1^{(9)} e' \gamma^2 \cos(2\nu - 2m\nu + c'm\nu - \varpi') \\
 & - \frac{3}{2a_1} B_1^{(10)} e' \gamma^2 \cos(2\nu - 2m\nu - c'm\nu + \varpi') \\
 & - \frac{3}{2a_1} B_0^{(11)} e^2 \gamma^2 \cos(2c\nu - 2\varpi) \\
 & + \frac{3}{2a_1} (B_2^{(14)} + B_2^{(15)}) \frac{a}{a'} \gamma^2 \cos(\nu - m\nu).
 \end{aligned}$$

Si l'on réunit les différents termes que nous venons de développer, la seconde des équations (L) du n° 1 prendra cette forme

$$0 = \frac{d^2 u}{d\nu^2} + u + \text{II},$$

II étant une fonction rationnelle et entière de constantes, de sinus et



de cosinus d'angles proportionnels à  $\nu$ . Mais, comme nous nous proposons d'avoir égard à toutes les inégalités du troisième ordre et aux quantités du quatrième ordre qui les multiplient, il faut joindre aux termes précédents tous ceux qui, dépendant du carré de la force perturbatrice, deviennent de ces ordres par les intégrations. Analysons ces nouveaux termes.

8. Pour cela, supposons que  $\delta u$  soit la partie de  $u$  due à la force perturbatrice, et que l'on ait

$$\begin{aligned}
 a \delta u = & \Lambda_2^{(0)} \cos(2\nu - 2m\nu) \\
 & + \Lambda_1^{(1)} e \cos(2\nu - 2m\nu - c\nu + \varpi) \\
 & + \Lambda_2^{(2)} e \cos(2\nu - 2m\nu + c\nu - \varpi) \\
 & + \Lambda_2^{(3)} e' \cos(2\nu - 2m\nu + c'm\nu - \varpi') \\
 & + \Lambda_2^{(4)} e' \cos(2\nu - 2m\nu - c'm\nu + \varpi') \\
 & + \Lambda_2^{(5)} e' \cos(c'm\nu - \varpi') \\
 & + \Lambda_1^{(6)} ee' \cos(2\nu - 2m\nu - c\nu + c'm\nu + \varpi - \varpi') \\
 & + \Lambda_1^{(7)} ee' \cos(2\nu - 2m\nu - c\nu - c'm\nu + \varpi + \varpi') \\
 & + \Lambda_1^{(8)} ee' \cos(c\nu + c'm\nu - \varpi - \varpi') \\
 & + \Lambda_1^{(9)} ee' \cos(c\nu - c'm\nu - \varpi + \varpi') \\
 & + \Lambda_2^{(10)} e^2 \cos(2c\nu - 2\varpi) \\
 & + \Lambda_1^{(11)} e^2 \cos(2c\nu - 2\nu + 2m\nu - 2\varpi) \\
 & + \Lambda_2^{(12)} \gamma^2 \cos(2g\nu - 2\theta) \\
 & + \Lambda_1^{(13)} \gamma^2 \cos(2g\nu - 2\nu + 2m\nu - 2\theta) \\
 & + \Lambda_2^{(14)} e'^2 \cos(2c'm\nu - 2\varpi') \\
 & + \Lambda_0^{(15)} e\gamma^2 \cos(2g\nu - c\nu - 2\theta + \varpi) \\
 & + \Lambda_1^{(16)} e\gamma^2 \cos(2\nu - 2m\nu - 2g\nu + c\nu + 2\theta - \varpi) \\
 & + \Lambda_1^{(17)} \frac{a}{a'} \cos(\nu - m\nu) \\
 & + \Lambda_0^{(18)} \frac{a}{a'} e' \cos(\nu - m\nu + c'm\nu - \varpi') \\
 & + \Lambda_1^{(19)} \frac{a}{a'} e' \cos(\nu - m\nu - c'm\nu + \varpi').
 \end{aligned}$$

Les nombres 0, 1, 2, placés au bas de la lettre A, indiquent que la



quantité est de l'ordre zéro, ou de l'ordre  $m$ , ou de l'ordre  $m^2$ . Je ne considère ici que les inégalités du troisième ordre et celles qui, étant du quatrième, peuvent produire des quantités du quatrième ordre dans les coefficients des inégalités du troisième. Je porte l'approximation plus loin, relativement à l'inégalité dépendante de  $\cos(\nu - m\nu)$ .

Cela posé, le terme  $\frac{m'u'^3}{2h^2u^3}$  donne, par sa variation, le suivant

$-\frac{3m'u'^3 \delta u}{2h^2u^4}$ , et il en résulte la fonction

$$-\frac{3m^2(1+\frac{3}{2}e'^2)}{2a'} \left( \begin{array}{l} a \delta u \\ -2\Lambda_2^{(0)} e \cos(2\nu - 2m\nu - c\nu + \varpi) \\ -2\Lambda_1^{(1)} e^2 \cos(2\nu - 2m\nu - 2c\nu + 2\varpi) \\ +\frac{3}{2}\Lambda_1^{(1)} ee' \cos(2\nu - 2m\nu - c\nu + c'm\nu + \varpi - \varpi') \\ +\frac{3}{2}\Lambda_1^{(1)} ee' \cos(2\nu - 2m\nu - c\nu - c'm\nu + \varpi + \varpi') \\ +\frac{3}{2}(\Lambda_1^{(8)} + \Lambda_1^{(9)}) ee'^2 \cos(c\nu - \varpi) \\ +\frac{3}{2}\Lambda_1^{(17)} \frac{a}{a'} e' \cos(\nu - m\nu + c'm\nu - \varpi') \\ +\frac{3}{2}\Lambda_1^{(17)} \frac{a}{a'} e' \cos(\nu - m\nu - c'm\nu + \varpi') \\ +\frac{3}{2}\Lambda_0^{(18)} \frac{a}{a'} e'^2 \cos(\nu - m\nu) \end{array} \right).$$

$u'$  éprouve une variation, par la variation de  $\nu'$ , qui dépend du temps  $t$  et de ses inégalités en fonction de  $\nu$ ; mais ces inégalités sont multipliées par  $m$  dans l'expression de  $\nu'$ , et, de plus, par  $e'$  dans l'expression de  $u'$ ; on peut donc d'abord négliger ici, sans erreur sensible, la variation  $\delta u'$ . Nous aurons bientôt égard au terme de cette variation qui dépend de l'action de la Lune sur la Terre.

Le terme  $\frac{3m'u'^3}{2h^2u^3} \cos(2\nu - 2\nu')$  a pour variation

$$-\frac{9m'u'^3}{2h^2u^4} \delta u \cdot \cos(2\nu - 2\nu') + \frac{3m'u'^3}{h^2u^3} \delta \nu' \cdot \sin(2\nu - 2\nu').$$

Si l'on substitue, au lieu de  $\delta u$ , sa valeur précédente, on trouve que



le premier de ces deux termes donne la fonction

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & \Lambda_2^{(0)} \left(1 - \frac{5}{2} e'^2\right) \\
 & + \left(\Lambda_1^{(1)} - 4\Lambda_2^{(0)} + \Lambda_2^{(2)} - \frac{1}{2}\Lambda_1^{(6)} e'^2 + \frac{7}{2}\Lambda_1^{(7)} e'^2\right) e \left(1 - \frac{5}{2} e'^2\right) \cos(cv - \varpi) \\
 & + \left(3\Lambda_2^{(0)} + \Lambda_2^{(3)} + \Lambda_2^{(4)}\right) e' \cos(c'mv - \varpi') \\
 & + \left(\Lambda_1^{(6)} + \frac{7}{2}\Lambda_1^{(1)}\right) ee' \cos(cv - c'mv - \varpi + \varpi') \\
 & + \left(\Lambda_1^{(7)} - \frac{1}{2}\Lambda_1^{(1)}\right) ee' \cos(cv + c'mv - \varpi - \varpi') \\
 & + \Lambda_1^{(8)} ee' \cos(2v - 2mv - cv - c'mv + \varpi + \varpi') \\
 & + \Lambda_1^{(9)} ee' \cos(2v - 2mv - cv + c'mv + \varpi - \varpi') \\
 & + \left[\Lambda_1^{(16)} + \frac{2+m}{4}\Lambda_1^{(1)} - 2(1+m)\Lambda_1^{(13)}\right] e\gamma^2 \cos(2gv - cv - 2\theta + \varpi) \\
 & + \Lambda_0^{(15)} e\gamma^2 \cos(2v - 2mv - 2gv + cv + 2\theta - \varpi) \\
 & + \left(\Lambda_1^{(17)} - \frac{1}{2}\Lambda_0^{(18)} e'^2\right) \frac{a}{a'} \cos(v - mv) \\
 & + \left(\Lambda_1^{(19)} - \frac{1}{2}\Lambda_1^{(17)}\right) \frac{a}{a'} e' \cos(v - mv + c'mv - \varpi') \\
 & + \left(\Lambda_0^{(18)} + \frac{7}{2}\Lambda_1^{(17)}\right) \frac{a}{a'} e' \cos(v - mv - c'mv + \varpi')
 \end{aligned} \right\} \cdot
 \end{aligned}$$

$a \delta u$  contient un terme dépendant de  $\cos(3v - 3mv)$ , que nous avons négligé à cause de sa petitesse; mais, comme il peut influer sur le terme dépendant de  $\cos(v - mv)$ , nous aurons égard à cette influence. Pour cela, désignons-le par  $\lambda_2 \frac{a}{a'} \cos(3v - 3mv)$ ; la fonction  $-\frac{9m'u'^3}{2h^2u^4} \delta u \cdot \cos(2v - 2v')$  donnera le terme

$$-\frac{9m^2}{4a'} \lambda_2 \frac{a}{a'} \cos(v - mv).$$

Pour développer la variation  $\frac{3m'u'^3}{h^2u^3} \delta v' \cdot \sin(2v - 2v')$ , nous observerons que  $\delta v'$  contient, par le n° 4, les mêmes inégalités que l'expression de la longitude moyenne de la Lune en fonction de sa longitude vraie; mais elles y sont multipliées par la petite quantité  $m$ . Il suffit ici d'avoir égard aux termes dans lesquels le coefficient de  $v$  diffère peu de l'unité, et il est aisé de voir que, le terme  $e \cos(cv - \varpi)$  de l'expression de  $au$  donnant, par le n° 4, dans  $\delta v'$  le terme  $-2me \sin(cv - \varpi)$ , un terme quelconque de  $a \delta u$ , tel que  $k \cos(iv + \varepsilon)$ , dans lequel  $i$



diffère peu de l'unité, donne à fort peu près, dans  $\delta v'$ , le terme  $-2mk \sin(iv + \varepsilon)$ . On trouve ainsi que la variation précédente donne, par son développement, la fonction

$$-\frac{3m^2}{a'} \left\{ \begin{aligned} & m\Lambda_1^{(1)} e^{(1-\frac{5}{2}e'^2)} \cos(cv - \varpi) \\ & + \frac{3}{8} m\Lambda_1^{(1)} e\gamma^2 \cos(2gv - cv - 2\theta + \varpi) \\ & + m\Lambda_0^{(15)} e\gamma^2 \cos(2v - 2mv - 2gv + cv + 2\theta - \varpi) \\ & + m\Lambda_1^{(17)} \frac{a}{a'} \cos(v - mv) \\ & + m\Lambda_0^{(18)} \frac{a}{a'} e' \cos(v - mv - c'mv + \varpi') \end{aligned} \right\};$$

les autres termes de ce développement sont insensibles.

Les termes

$$\frac{3m'u^4}{8h^2u^4} [3 \cos(v - v') + 5 \cos(3v - 3v')]$$

de l'expression de

$$-\frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial Q}{\partial u} + \frac{s}{u} \frac{\partial Q}{\partial s} \right)$$

ont pour variation

$$-\frac{3m^2 a \delta u}{2a'} \frac{a}{a'} [3 \cos(v - mv) + 5 \cos(3v - 3mv)];$$

en substituant, pour  $a\delta u$ ,  $\Lambda_2^{(0)} \cos(2v - 2mv)$ , il en résulte le terme

$$-\frac{6m^2}{a'} \Lambda_2^{(0)} \frac{a}{a'} \cos(v - mv).$$

La variation du terme

$$-\frac{3m'u^3}{2h^2u^4} \frac{du}{dv} \sin(2v - 2v')$$

peut se réduire aux termes suivants

$$\begin{aligned} & \frac{6m'u^3}{h^2u^4} \frac{du}{dv} \frac{\delta u}{u} \sin(2v - 2v') - \frac{3m'u^3}{2h^2u^4} \frac{d\delta u}{dv} \sin(2v - 2v') \\ & + \frac{3m'u^3}{h^2u^4} \frac{\delta v'}{dv} \frac{du}{dv} \cos(2v - 2v'); \end{aligned}$$



ces termes, par leur développement, produisent la quantité

$$\frac{3m^2}{4a} \left[ \begin{aligned} & 2(1-m)\Lambda_2^{(0)}(1-\frac{5}{2}e'^2) \\ & + \left[ (2-2m-c)\Lambda_1^{(1)} + (2-2m+c)\Lambda_2^{(2)} - 8(1-m)\Lambda_2^{(0)} \right] e(1-\frac{5}{2}e'^2) \cos(cv-\varpi) \\ & + \left[ \frac{7}{2}(2-3m-c)\Lambda_1^{(7)}e'^2 - \frac{1}{2}(2-m-c)\Lambda_1^{(6)}e'^2 \right] e(1-\frac{5}{2}e'^2) \cos(cv-\varpi) \\ & + [6(1-m)\Lambda_2^{(0)} + (2-m)\Lambda_2^{(3)} + (2-3m)\Lambda_2^{(4)}] e' \cos(c'mv - \varpi') \\ & + [(2-3m-c)\Lambda_1^{(7)} - \frac{1}{2}(2-2m-c)\Lambda_1^{(1)}] ee' \cos(cv + c'mv - \varpi - \varpi') \\ & + [(2-m-c)\Lambda_1^{(6)} + \frac{7}{2}(2-2m-c)\Lambda_1^{(1)}] ee' \cos(cv - c'mv - \varpi + \varpi') \\ & + (c-m)\Lambda_1^{(9)} ee' \cos(2v - 2mv - cv + c'mv + \varpi - \varpi') \\ & + (c+m)\Lambda_1^{(8)} ee' \cos(2v - 2mv - cv - c'mv + \varpi + \varpi') \\ & + \left[ \frac{4g'+4+m-2c}{4} \Lambda_1^{(1)} - 2(1-2m)\Lambda_1^{(13)} \right] e\gamma^2 \cos(2gv - cv - 2\theta + \varpi) \\ & + \Lambda_0^{(15)} e\gamma^2 \cos(2v - 2mv - 2gv + cv + 2\theta - \varpi) \\ & + [(1-m)\Lambda_1^{(17)} - \frac{1}{2}\Lambda_0^{(18)}e'^2 + 3(1-m)\lambda_2] \frac{a}{a'} \cos(v - mv) \\ & + [(1-2m)\Lambda_1^{(19)} - \frac{1}{2}(1-m)\Lambda_1^{(17)}] \frac{a}{a'} e' \cos(v - mv + c'mv - \varpi') \\ & + [\Lambda_0^{(18)} + \frac{7}{2}(1-m)\Lambda_1^{(17)}] \frac{a}{a'} e' \cos(v - mv - c'mv + \varpi') \end{aligned} \right]$$

L'expression de  $\frac{\partial Q}{\partial v} \frac{du}{h^2 u^2 dv}$  renferme encore la variation

$$-\frac{m^2 a}{8a'} [3\sin(v - mv) + 15\sin(3v - 3mv)] \frac{a}{a'} \frac{d\delta u}{dv},$$

et il en résulte la quantité

$$\frac{9m^2}{4a'} (1-m)\Lambda_2^{(0)} \frac{a}{a'} \cos(v - mv).$$

La fonction

$$\left( \frac{d^2 u}{dv^2} + u \right) \frac{2}{h^2} \int \frac{\partial Q}{\partial v} \frac{dv}{u^2}$$

contient d'abord le terme

$$-\left( \frac{d^2 u}{dv^2} + u \right) \int \frac{3m'u'^3 dv}{h^2 u^4} \sin(2v - 2v');$$



sa variation est

$$\frac{12m'}{h^2 a} [1 + \frac{3}{4} \gamma^2 \cos(2g\nu - 2\theta)] \int \frac{u'^3 d\nu}{u^4} \left[ \frac{\delta u}{u} \sin(2\nu - 2\nu') + \frac{1}{2} \delta\nu' \cdot \cos(2\nu - 2\nu') \right] \\ - \left( \frac{d^2 \delta u}{d\nu^2} + \delta u \right) \int \frac{3m' u'^3 d\nu}{h^2 u^4} \sin(2\nu - 2\nu') - \frac{9m'}{h^2 a} \int \frac{u'^2 \delta u'}{u^4} d\nu \cdot \sin(2\nu - 2\nu').$$

Le développement de ces termes donne, en observant que  $c$  est à très-peu près  $1 - \frac{3}{2}m^2$ , et que  $g$  est à très-peu près  $1 + \frac{3}{4}m^2$ ,

$$- \frac{3m^2}{4a_1(1-m)} [4(1-m)^2 - 1] \Lambda_2^{(0)} (1 - \frac{5}{2}e'^2) \\ - \frac{3m^2}{a_1} \left\{ \begin{array}{l} \frac{7 + (2 - 2m - c)^2}{4(1-m)} \Lambda_4^{(1)} \\ - [4(1-m)^2 - 1] \left( \frac{1+m}{2-2m-c} + \frac{1-m}{2-2m+c} \right) \Lambda_2^{(0)} \\ - \Lambda_1^{(6)} e'^2 + 7\Lambda_1^{(7)} e'^2 \end{array} \right\} e^{(1 - \frac{5}{2}e'^2) \cos(c\nu - \varpi)} \\ + \left\{ \begin{array}{l} \frac{6m}{a_1} [4\Lambda_2^{(0)} + \Lambda_2^{(3)} - \Lambda_2^{(4)} - 10\Lambda_1^{(1)} e^2 + \frac{5}{2}(\Lambda_1^{(7)} - \Lambda_1^{(6)}) e^2] \\ - \frac{3m^2}{4a_1} [4(1-m)^2 - 1] \Lambda_2^{(0)} \left( \frac{7}{2-3m} - \frac{1}{2-m} \right) \\ - \frac{3m^2}{4a_1(1-m)} \{ [(2-m)^2 - 1] \Lambda_2^{(3)} + [(2-3m)^2 - 1] \Lambda_2^{(4)} \} \\ - \frac{3m^2}{a_1} (\frac{1}{2}C_2^{(6)} + C_2^{(9)} - C_2^{(10)}) \end{array} \right\} e' \cos(c'm\nu - \varpi') \\ - \frac{6m^2 \Lambda_1^{(8)}}{a_1(2-3m-c)} ee' \cos(2\nu - 2m\nu - c\nu - c'm\nu + \varpi + \varpi') \\ - \frac{6m^2 \Lambda_1^{(9)}}{a_1(2-m-c)} ee' \cos(2\nu - 2m\nu - c\nu + c'm\nu + \varpi - \varpi') \\ - \frac{6m^2}{a_1(c-m)} (\Lambda_1^{(6)} + \frac{7}{2}\Lambda_1^{(1)}) ee' \cos(c\nu - c'm\nu - \varpi + \varpi') \\ - \frac{6m^2}{a_1(c+m)} (\Lambda_1^{(7)} - \frac{1}{2}\Lambda_1^{(1)}) ee' \cos(c\nu + c'm\nu - \varpi - \varpi') \\ + \frac{6m^2 \Lambda_2^{(10)}}{a_1(2c-2+2m)} e^2 \cos(2c\nu - 2\nu + 2m\nu - 2\varpi) \\ + \frac{6m^2 \Lambda_2^{(12)}}{a_1(2g-2+2m)} \gamma^2 \cos(2g\nu - 2\nu + 2m\nu - 2\theta)$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{6m^2}{a_1} \left( 2A_1^{(13)} - A_1^{(16)} + \frac{7m}{8} A_1^{(1)} \right) e\gamma^2 \cos(2g\nu - c\nu - 2\theta + \varpi) \\
& - \frac{6m^2 A_0^{(15)}}{a_1(2-2m-2g+c)} e\gamma^2 \cos(2\nu - 2m\nu - 2g\nu + c\nu + 2\theta - \varpi) \\
& - \frac{3m^2}{2a_1(1-m)} \left\{ (4+3m)A_1^{(17)} - 2A_0^{(18)}e'^2 - \frac{9}{2}[1-(1-m)^2]\lambda_2 \right\} \frac{a}{a'} \cos(\nu - m\nu) \\
& + \frac{3m^2}{a_1} (A_1^{(17)} - 2A_1^{(19)}) \frac{a}{a'} e' \cos(\nu - m\nu + c'm\nu - \varpi') \\
& - \frac{6m^2}{a_1(1-2m)} (A_0^{(18)} + \frac{7}{2}A_1^{(17)}) \frac{a}{a'} e' \cos(\nu - m\nu - c'm\nu + \varpi').
\end{aligned}$$

On doit observer ici que  $C_2^{(6)} \sin(2\nu - 2m\nu)$  est l'inégalité dépendante de  $\sin(2\nu - 2m\nu)$  dans l'expression de la longitude moyenne de la Lune en fonction de sa longitude vraie;

$$C_2^{(9)} e' \sin(2\nu - 2m\nu + c'm\nu - \varpi') \quad \text{et} \quad C_2^{(10)} e' \sin(2\nu - 2m\nu - c'm\nu + \varpi')$$

sont les inégalités dépendantes des angles  $2\nu - 2m\nu + c'm\nu - \varpi'$  et  $2\nu - 2m\nu - c'm\nu + \varpi'$  dans la même expression. On peut observer encore que le terme

$$\frac{6m}{a_1} (4A_2^{(0)} + A_2^{(3)} - A_2^{(4)}) e' \cos(c'm\nu - \varpi')$$

paraît être de l'ordre  $m^4$ , ce qui produirait une quantité de l'ordre  $m^3$  dans l'expression de la longitude moyenne de la Lune; mais ce terme n'est véritablement que de l'ordre  $m^5$ ; car on verra, par les valeurs que nous donnerons ci-après de  $A_2^{(0)}$ ,  $A_2^{(3)}$  et  $A_2^{(4)}$ , que la fonction  $4A_2^{(0)} + A_2^{(3)} - A_2^{(4)}$  est de l'ordre  $m^3$ ; il n'en résulte donc qu'un terme de l'ordre  $m^4$  dans l'expression de la longitude moyenne. Nous le conservons ici, parce que nous nous sommes imposé la loi de conserver les termes de cet ordre dans le calcul des inégalités du troisième ordre.

Il est indispensable, par cette raison, dans le développement de  $-\frac{3m'u}{h^2} \int \frac{u'^3 d\nu}{u^4} \sin(2\nu - 2\nu')$ , de porter la précision jusqu'aux quantités de l'ordre  $\delta u^2$ ; il en résulte le terme

$$-\frac{30m'u}{h^2} \int \frac{u'^3 \delta u^2}{u^6} d\nu \sin(2\nu - 2\nu').$$



Ce terme produit le suivant

$$\frac{15 m^2}{2 a'} \frac{(\Lambda_1^{(1)})^2 e^2 \cos(2c\nu - 2\nu + 2m\nu - 2\omega)}{2c - 2 + 2m};$$

quoiqu'il ne soit que du cinquième ordre, cependant, comme il acquiert par l'intégration, dans l'expression de la longitude moyenne, le diviseur  $2c - 2 + 2m$ , il faut y avoir égard.

La fonction

$$\left(\frac{d^2 u}{d\nu^2} + u\right) \frac{2}{h^2} \int \frac{\partial Q}{\partial \nu} \frac{d\nu}{u^2}$$

donne celle-ci

$$- \left(\frac{d^2 u}{d\nu^2} + u\right) \frac{1}{h^2} \int \frac{m' u'^4 d\nu}{4 u^5} [3 \sin(\nu - \nu') + 15 \sin(3\nu - 3\nu')].$$

Sa variation produit les termes suivants

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{a'} \left(\frac{d^2 \delta u}{d\nu^2} + \delta u\right) \int \frac{m' u'^4 d\nu}{4 u^5} [3 \sin(\nu - \nu') + 15 \sin(3\nu - 3\nu')] \\ & + \frac{5 m^2}{4 a'} \frac{a}{a'} \int a \delta u d\nu [3 \sin(\nu - \nu') + 15 \sin(3\nu - 3\nu')], \end{aligned}$$

d'où résulte le terme

$$- \frac{m^2}{2 a' (1 - m)} [13 + 8(1 - m)^2] \Lambda_2^{(0)} \frac{a}{a'} \cos(\nu - m\nu).$$

On doit faire ici une observation importante relativement aux termes dépendants de  $\cos(\nu - m\nu)$ , et que nous nous proposons de déterminer avec exactitude. Les expressions du rayon de l'orbite du Soleil et de sa longitude contiennent des termes dépendants de l'angle  $\nu - m\nu$ , et qui résultent de l'action de la Lune sur la Terre; ces termes en produisent d'autres dans l'expression de  $u$  et de la longitude moyenne de la Lune, auxquels il est essentiel d'avoir égard. Pour cela, nous observerons qu'en vertu de l'action lunaire, le rayon vecteur du Soleil contient, par le Chapitre IV du Livre VI, le terme  $\frac{\mu}{u} \cos(\nu - \nu')$ ,  $\mu$  étant le rapport de la masse de la Lune à la somme



des masses de la Lune et de la Terre, ce qui donne dans  $u'$  le terme

$$-\frac{\mu u'^2}{u} \cos(\nu - \nu').$$

La longitude  $\nu'$  du Soleil contient encore, par le Chapitre cité, le terme

$$\frac{\mu u'}{u} \sin(\nu - \nu').$$

Cela posé, le terme  $\frac{m' u'^3}{2 h^2 u^3}$  contient le suivant

$$-\frac{3 m' \mu u'^4}{2 h^2 u^4} \cos(\nu - \nu').$$

Le terme

$$\frac{3 m' u'^3}{2 h^2 u^3} \cos(2\nu - 2\nu')$$

contient les deux suivants

$$-\frac{9 m' \mu u'^4}{2 h^2 u^4} \cos(\nu - \nu') \cos(2\nu - 2\nu') + \frac{6 m' \mu u'^4}{2 h^2 u^4} \sin(\nu - \nu') \sin(2\nu - 2\nu'),$$

ce qui donne le terme

$$-\frac{3 m' \mu u'^4}{4 h^2 u^4} \cos(\nu - \nu').$$

En le réunissant au précédent, on aura

$$-\frac{9 m' \mu u'^4}{4 h^2 u^4} \cos(\nu - \nu'),$$

d'où résultent les termes suivants

$$\begin{aligned} -\frac{9 m^2 \mu}{4 a'} \frac{a}{a'} \cos(\nu - m\nu) - \frac{9 m^2 \mu}{4 a'} \frac{a}{a'} e' \cos(\nu - m\nu + c'm\nu - \varpi') \\ - \frac{27 m^2 \mu}{4 a'} \frac{a}{a'} e' \cos(\nu - m\nu - c'm\nu + \varpi'). \end{aligned}$$

Le terme

$$-\frac{3 m'}{h^2} \int \frac{u'^3 dv}{u^4} \sin(2\nu - 2\nu')$$



donne pareillement les suivants

$$-\frac{3m^2\mu}{2(1-m)} \frac{a}{a'} \frac{a}{a'} \cos(\nu - m\nu) - \frac{3m^2\mu}{2} \frac{a}{a'} \frac{a}{a'} e' \cos(\nu - m\nu + c'm\nu - \varpi')$$

$$-\frac{9m^2\mu}{2(1-2m)} \frac{a}{a'} \frac{a}{a'} e' \cos(\nu - m\nu - c'm\nu + \varpi').$$

Il nous reste à considérer la partie du développement de  $-\frac{1}{h^2(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}$  qui dépend du carré de la force perturbatrice. Ce développement renferme la fonction  $\frac{3}{2a'} (\delta s)^2$ , ce qui produit les termes suivants

$$\frac{3}{4a'} (B_1^{(0)})^2 \gamma^2 + \frac{3}{2a'} (B_1^{(0)} + B_1^{(1)}) B_1^{(0)} e' \gamma^2 \cos(c'm\nu - \varpi')$$

$$+ \frac{3}{2a'} B_1^{(0)} B_2^{(5)} e' \gamma^2 \cos(2g\nu - c\nu - 2\theta + \varpi).$$

9. Rassemblons maintenant les divers termes que nous venons de développer. La seconde des équations (L) du n° 1 deviendra ainsi

$$(L') \quad 0 = \frac{d^2 u}{d\nu^2} + u - \frac{1}{a'} \left( 1 + e^2 + \frac{\gamma^2}{4} + \epsilon'' \right) + \frac{m^2}{2a'} \left( 1 + e^2 + \frac{\gamma^2}{4} + \frac{3}{2} e'^2 \right)$$

$$- \frac{3m^2}{4a'} \left( 4 - 3m - m^2 \right) \Lambda_2^{(0)} \left( 1 - \frac{5}{2} e'^2 \right) + \frac{3}{4a'} (B_1^{(0)})^2 \gamma^2$$

$$- \frac{3m^2}{4a'} \left\{ \begin{aligned} & 2 + e^2 + 3e'^2 - 2(B_2^{(2)} + B_2^{(3)}) \frac{\gamma^2}{m^2} + (1 + 2m - c) \Lambda_2^{(2)} \left( 1 - \frac{5}{2} e'^2 \right) \\ & - 4 \left\{ 1 + 2m + [4(1-m)^2 - 1] \left( \frac{1+m}{2-2m-c} + \frac{1-m}{2-2m+c} \right) \right\} \Lambda_2^{(0)} \left( 1 - \frac{5}{2} e'^2 \right) \\ & + \frac{(1+6m+c)(1-m) + 7 + (2-2m-c)^2}{1-m} \Lambda_1^{(1)} \left( 1 - \frac{5}{2} e'^2 \right) \\ & - \frac{1}{2} (9+m+c) \Lambda_1^{(6)} e'^2 + \frac{7}{2} (9+3m+c) \Lambda_1^{(7)} e'^2 \\ & + 3(\Lambda_1^{(8)} + \Lambda_1^{(9)}) e'^2 \end{aligned} \right\} e \cos(c\nu - \varpi)$$

$$+ \frac{3m^2}{2a'} \left\{ \begin{aligned} & 1 + (1+2m)e^2 + \frac{\gamma^2}{4} - \frac{5}{2} e'^2 \\ & + \frac{1+3e^2 + \frac{\gamma^2}{4} - \frac{5}{2} e'^2}{1-m} \\ & - \Lambda_2^{(0)} - (B_1^{(0)} - B_2^{(1)}) \frac{\gamma^2}{m^2} \end{aligned} \right\} \cos(2\nu - 2m\nu)$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{3m^2}{a_1} \left\{ \begin{aligned} & \frac{c}{4} \left[ 1 + \frac{e^2}{4} (2 - 19m) - \frac{5}{2} e'^2 \right] \\ & - \frac{3 + 4m}{4} \left( 1 + \frac{1}{2} e^2 - \frac{5}{2} e'^2 \right) + \frac{1 - c^2}{4(1 - m)} \\ & - \frac{2(1 + m)}{2 - 2m - c} \left( 1 + \frac{7}{4} e^2 - \frac{5}{2} e'^2 \right) \\ & - \frac{1}{2} (A_1^{(1)} - 2A_2^{(0)}) + \frac{1}{2} (B_2^{(5)} - B_2^{(6)}) \frac{\gamma^2}{m^2} \end{aligned} \right\} e \cos(2\nu - 2m\nu - c\nu + \varpi) \\
& - \frac{3m^2}{4a_1} \left( 3 + c - 4m + \frac{8(1 - m)}{2 - 2m + c} + 2A_2^{(2)} \right) e \cos(2\nu - 2m\nu + c\nu - \varpi) \\
& - \frac{3m^2}{4a_1} \left( \frac{4 - m}{2 - m} + 2B_1^{(9)} \frac{\gamma^2}{m^2} + 2A_2^{(3)} \right) e' \cos(2\nu - 2m\nu + c'm\nu - \varpi') \\
& + \frac{3m^2}{4a_1} \left( \frac{7(4 - 3m)}{2 - 3m} - 2B_1^{(10)} \frac{\gamma^2}{m^2} - 2A_2^{(4)} \right) e' \cos(2\nu - 2m\nu - c'm\nu + \varpi') \\
& + \left\{ \begin{aligned} & \left( 1 + e^2 + \frac{\gamma^2}{4} + \frac{9}{8} e'^2 + (B_1^{(7)} + B_1^{(8)}) \frac{\gamma^2}{m^2} - \frac{3}{2} (1 + 2m) A_2^{(0)} \right. \\ & \left. - \frac{2(1 - 2m)(3 - 2m)(3 - m)}{(2 - 3m)(2 - m)} A_2^{(0)} - 2A_2^{(3)} - (2 - 3m) A_2^{(4)} \right. \\ & \left. + (B_1^{(9)} + B_1^{(10)}) B_1^{(0)} \frac{\gamma^2}{m^2} - A_2^{(5)} - 11C_2^{(6)} - 2C_2^{(9)} + 2C_2^{(10)} \right) \\ & \left. + \frac{6m}{a_1} [4A_2^{(0)} + A_2^{(3)} - A_2^{(4)} - 10A_1^{(1)} e^2 + \frac{5}{2} (A_1^{(7)} - A_1^{(6)}) e^2] \right\} e' \cos(c'm\nu - \varpi') \\
& + \frac{3m^2}{2a_1} \left\{ \begin{aligned} & \left( \frac{3 + 2m - c}{4} + \frac{2 + m}{2 - m - c} - \frac{3}{2} A_1^{(1)} - A_1^{(6)} \right) \\ & - \left( \frac{3 + m - c}{2} + \frac{4}{2 - m - c} \right) A_1^{(9)} \end{aligned} \right\} ee' \cos(2\nu - 2m\nu - c\nu + c'm\nu + \varpi - \varpi') \\
& - \frac{3m^2}{2a_1} \left\{ \begin{aligned} & \left( \frac{7(3 + 6m - c)}{4} + \frac{7(2 + 3m)}{2 - 3m - c} + \frac{3}{2} A_1^{(1)} \right) \\ & + A_1^{(7)} + \left( \frac{3 - m - c}{2} + \frac{4}{2 - 3m - c} \right) A_1^{(8)} \end{aligned} \right\} ee' \cos(2\nu - 2m\nu - c\nu - c'm\nu + \varpi + \varpi') \\
& - \frac{3m^2}{2a_1} \left\{ \begin{aligned} & \frac{3 + 2m}{2} - \left( \frac{1 + 2m + c}{4} + \frac{2}{c + m} \right) A_1^{(1)} \\ & + A_1^{(8)} + \left( \frac{1 + 3m + c}{2} + \frac{4}{c + m} \right) A_1^{(7)} \end{aligned} \right\} ee' \cos(c\nu + c'm\nu - \varpi - \varpi') \\
& - \frac{3m^2}{2a_1} \left\{ \begin{aligned} & \frac{3 - 2m}{2} + A_1^{(9)} + 7 \left( \frac{1 + 2m + c}{4} + \frac{2}{c - m} \right) A_1^{(1)} \\ & + \left( \frac{1 + m + c}{2} + \frac{4}{c - m} \right) A_1^{(6)} \end{aligned} \right\} ee' \cos(c\nu - c'm\nu - \varpi + \varpi')
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \frac{3m^2}{2a_1} \left( 1 - B_0^{(11)} \frac{\gamma^2}{m^2} - A_2^{(10)} \right) e^2 \cos(2c\nu - 2\varpi) \\
 & + \frac{3m^2}{4a_1} \left\{ \frac{2 + 11m + 8m^2}{2} - \frac{10 + 19m + 8m^2}{2c - 2 + 2m} \right. \\
 & \quad \left. + 4A_1^{(1)} + \frac{8A_2^{(10)} + 10(A_1^{(1)})^2}{2c - 2 + 2m} - 2A_1^{(11)} \right\} e^2 \cos(2c\nu - 2\nu + 2m\nu - 2\varpi) \\
 & - \frac{3}{4a_1} \left( 1 + e^2 - \frac{\gamma^2}{4} - \frac{1}{2}m^2 + 2m^2 A_2^{(12)} \right) \gamma^2 \cos(2g\nu - 2\theta) \\
 & + \frac{3m^2}{4a_1} \left\{ \frac{3 + 2m - 2g}{4} + \frac{4g^2 - 1}{4(1-m)} - \frac{2 + m}{2g - 2 + 2m} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{2B_1^{(0)}}{m^2} - 2A_1^{(13)} + \frac{8A_2^{(12)}}{2g - 2 + 2m} \right\} \gamma^2 \cos(2g\nu - 2\nu + 2m\nu - 2\theta) \\
 & + \frac{3m^2}{2a_1} \left( \frac{3}{2} - A_2^{(14)} \right) e'^2 \cos(2c'm\nu - 2\varpi') \\
 & - \frac{3m^2}{2a_1} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{B_2^{(3)}}{m^2} + \frac{1+c-2g-10m}{4} A_1^{(1)} - (10+5m)A_1^{(13)} \right. \\
 & \quad \left. + (5+m)A_1^{(16)} - \frac{B_1^{(0)}B_2^{(5)}}{m^2} + A_0^{(15)} \right\} e\gamma^2 \cos(2g\nu - c\nu - 2\theta + \varpi) \\
 & - \frac{3m^2}{4a_1} \left\{ 1 + 2m + \frac{5+m}{1-2m} + \frac{3(1-m)}{3-2m} + 2A_1^{(16)} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{2B_2^{(4)}}{m^2} + \frac{10A_0^{(15)}}{1-2m} \right\} e\gamma^2 \cos(2\nu - 2m\nu - 2g\nu + c\nu + 2\theta - \varpi) \\
 & + \frac{m^2}{a_1} \left\{ \frac{\frac{9}{8}(1-2\mu)(1+2e^2+2e'^2) + \frac{3(1-2\mu)(1+\frac{9}{2}e^2+2e'^2)}{4(1-m)}}{36+21m-15m^2} A_1^{(17)} + \frac{3(1+m)}{2(1-m)} A_0^{(18)} e'^2 \right. \\
 & \quad \left. - \frac{57-38m}{4(1-m)} A_2^{(0)} + \frac{3}{2}(B_2^{(14)} + B_2^{(15)}) \frac{\gamma^2}{m^2} \right\} \frac{a}{a'} \cos(\nu - m\nu) \\
 & + \frac{3m^2}{2a_1} \left\{ \frac{5(1-2\mu)}{4} - A_0^{(18)} + \frac{4+m}{4} A_1^{(17)} \right. \\
 & \quad \left. - (5+m)A_1^{(19)} \right\} \frac{a}{a'} e' \cos(\nu - m\nu + c'm\nu - \varpi') \\
 & + \frac{3m^2}{2a_1(1-2m)} \left\{ \frac{15-18m}{4}(1-2\mu) - \frac{76-33m}{4} A_1^{(17)} \right. \\
 & \quad \left. - 5A_0^{(18)} - (1-2m)A_1^{(19)} \right\} \frac{a}{a'} e' \cos(\nu - m\nu - c'm\nu + \varpi')
 \end{aligned}$$

Je n'ai point eu égard aux termes multipliés par  $\lambda_2$ , parce qu'ils se détruisent réciproquement, aux quantités près de l'ordre  $m^7$ .



10. Pour intégrer cette équation différentielle, nous observerons qu'elle donne, en n'ayant égard qu'aux parties non périodiques,

$$u = \frac{1}{a'} \left( 1 + e^2 + \frac{\gamma^2}{4} + \mathcal{E}'' \right) - \frac{m^2}{2a'} \left( 1 + e^2 + \frac{\gamma^2}{4} + \frac{3}{2} e'^2 \right) + \frac{3m^2}{4a'} (4 - 3m - m^2) \Lambda_2^{(0)} (1 - \frac{5}{2} e'^2) - \frac{3}{4a'} (B_1^{(0)})^2 \gamma^2.$$

Nous avons désigné, dans le n° 6, cette quantité par  $\frac{1}{a} \left( 1 + e^2 + \frac{\gamma^2}{4} + \mathcal{E} \right)$ ; on aura donc, en observant que, sans l'action du Soleil, on aurait  $\frac{1}{a} = \frac{1}{a'}$ , et qu'ainsi l'on peut supposer  $\mathcal{E} = \mathcal{E}''$ ,

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a'} - \frac{m^2}{2a'} (1 + \frac{3}{2} e'^2) + \frac{3m^2}{4a'} (4 - 3m - m^2) \Lambda_2^{(0)} (1 - \frac{5}{2} e'^2) - \frac{3}{4a'} (B_1^{(0)})^2 \gamma^2.$$

L'action des planètes fait varier l'excentricité  $e'$  de l'orbe terrestre, sans altérer son demi-grand axe  $a'$ , comme on l'a vu dans le Livre II; la valeur de  $\frac{1}{a}$  subit donc des variations correspondantes, à raison du terme  $-\frac{3m^2 e'^2}{4a'}$  qu'elle contient, et, comme la constante de la parallaxe de la Lune est proportionnelle à  $\frac{1}{a}$ , on voit qu'elle doit éprouver une variation séculaire; mais on voit en même temps que cette variation sera toujours insensible.

Nous avons représenté précédemment par  $\frac{e}{a} (1 + e^2) \cos(cv - \varpi)$  la partie de  $u$  dépendante de  $\cos(cv - \varpi)$ . En la substituant dans l'équation différentielle précédente, en comparant ensuite les sinus et cosinus de  $cv - \varpi$ , et négligeant les quantités de l'ordre  $\frac{d^2 e}{dv^2}$ , ce qui est permis, vu la lenteur des variations séculaires de l'excentricité de l'orbe terrestre, on aura les deux équations

$$0 = \frac{e(1+e^2)}{a} \frac{d^2 \varpi}{dv^2} - 2 \left( c - \frac{d\varpi}{dv} \right) \frac{d \left( e \frac{1+e^2}{a} \right)}{dv},$$

$$0 = 1 - \left( c - \frac{d\varpi}{dv} \right)^2 - p - qe'^2,$$



la quantité  $-p - qe'^2$  étant supposée égale au coefficient de  $e \cos(cv - \varpi)$  dans l'équation différentielle (L') du numéro précédent, divisé par  $\frac{1+e^2}{a}$ , où l'on doit observer que les valeurs de  $A_2^{(0)}$ ,  $A_1^{(1)}$ ,  $B_2^{(2)}$  et  $B_2^{(3)}$  renferment déjà le facteur  $1 - \frac{5}{2}e'^2$ . La première de ces équations donne, en l'intégrant,

$$c - \frac{d\varpi}{dv} = \frac{ke^2(1+e^2)^2}{a^2},$$

$k$  étant une constante arbitraire. La seconde donne, en négligeant le carré de  $qe'^2$ ,

$$\frac{d\varpi}{dv} = c - \sqrt{1-p} + \frac{\frac{1}{2}qe'^2}{\sqrt{1-p}},$$

et par conséquent, si l'on regarde  $p$  et  $q$  comme constants, ce que l'on peut faire ici sans erreur sensible, on aura, en désignant  $\frac{q}{\sqrt{1-p}}$  par  $q'$ ,

$$\varpi = cv - v\sqrt{1-p} + \frac{1}{2}q'fe'^2 dv + \varepsilon,$$

$\varepsilon$  étant une arbitraire, ce qui donne

$$\cos(cv - \varpi) = \cos\left(v\sqrt{1-p} - \frac{q'}{2}fe'^2 dv - \varepsilon\right).$$

Il suit de là que, conformément aux observations, le périhélie lunaire a un mouvement égal à  $(1 - \sqrt{1-p})v + \frac{1}{2}q'fe'^2 dv$ .

Ce mouvement n'est pas uniforme, à raison de la variabilité de  $e'$ , et si l'on suppose qu'à partir d'une époque donnée, on représente  $e'$  par  $E' + fv + lv^2$ ,  $E'$  étant l'excentricité de l'orbe terrestre à la même époque, le mouvement du périhélie sera

$$(1 - \sqrt{1-p} + \frac{1}{2}q'E'^2)v + \frac{1}{2}q'E'fv^2 + \frac{1}{6}q'(2E'l + f^2)v^3.$$

Cette expression pourra servir pendant deux mille ans, soit avant, soit après l'époque. La partie

$$\frac{1}{2}q'E'fv^2 + \frac{1}{6}q'(2E'l + f^2)v^3$$



forme l'équation séculaire du mouvement du périhélie, qui maintenant se ralentit de siècle en siècle. La valeur de la constante  $c$  peut être supposée égale à  $\sqrt{1-p} - \frac{1}{2}q'E'^2$ ; l'angle  $\varpi$  est alors égal à la constante  $\varepsilon$ , plus à l'équation séculaire du mouvement du périhélie.

L'excentricité  $e$  de l'orbe lunaire est assujettie à une variation séculaire analogue à celle de la parallaxe, mais insensible comme elle, ces variations étant proportionnelles à  $\frac{d\varpi}{dv}$ , qui ne devient sensible que dans l'intégrale  $\int \frac{d\varpi}{dv} dv$ .

Si l'on représente par  $\frac{H}{a} \cos(iv + \varepsilon)$  un terme quelconque de l'équation (L'), et que l'on désigne par

$$P \cos(iv + \varepsilon) + Q \sin(iv + \varepsilon)$$

la partie correspondante de  $u$ , on aura, pour déterminer  $P$  et  $Q$ , les deux équations

$$0 = \left[ 1 - \left( i + \frac{d\varepsilon}{dv} \right)^2 \right] P + \frac{H}{a},$$

$$Q = \frac{2 \left( i + \frac{d\varepsilon}{dv} \right) \frac{dP}{dv} + P \frac{d^2\varepsilon}{dv^2}}{1 - \left( i + \frac{d\varepsilon}{dv} \right)^2}.$$

Les variations de  $\varepsilon$  et de  $P$  étant extrêmement lentes, et  $i$  étant très-grand relativement à  $\frac{d\varepsilon}{dv}$ , la valeur de  $Q$  est insensible, et l'on a

$$P = \frac{H}{a \left[ \left( i + \frac{d\varepsilon}{dv} \right)^2 - 1 \right]},$$

où l'on doit observer que,  $i + \frac{d\varepsilon}{dv}$  étant le coefficient de  $dv$  dans la différentielle de l'angle  $iv + \varepsilon$ , on peut supposer  $\varepsilon$  constant dans cet angle, pourvu que l'on prenne pour  $i$  le coefficient de  $v$  correspondant à l'époque pour laquelle on calcule. On déterminera ainsi les coefficients  $A_2^{(0)}$ ,  $A_1^{(1)}$ , ... de l'expression de  $a \delta u$ .



Relativement aux termes dans lesquels le coefficient de  $v$  ne diffère de l'unité que d'une quantité du second ordre, et qui dépendent des angles  $2gv - cv - 2\theta + \varpi$  et  $v - mv + c'mv - \varpi'$ , la considération des termes dépendants du cube de la force perturbatrice devient nécessaire; mais en portant, comme nous l'avons fait, l'approximation jusqu'aux quantités du quatrième ordre inclusivement, les termes dépendants du cube de la force perturbatrice qui peuvent devenir sensibles se trouvent compris dans les résultats précédents. Cela posé, si l'on substitue dans l'équation (L'), au lieu de  $u$ , la fonction

$$\frac{1}{a} \left\{ \begin{aligned} &1 + e^2 + \frac{\gamma^2}{4} + \varepsilon + e(1 + e^2) \cos(cv - \varpi) \\ & - \frac{1}{4} \gamma^2 \left( 1 + e^2 - \frac{\gamma^2}{4} \right) \cos(2gv - 2\theta) \end{aligned} \right\} + \delta u,$$

la comparaison des divers cosinus donnera les équations suivantes

$$0 = [1 - 4(1 - m)^2] \Lambda_2^{(0)} + \frac{3}{2} m^2 \frac{a}{a'} \left\{ \begin{aligned} &1 + (1 + 2m)e^2 + \frac{\gamma^2}{4} - \frac{5}{2} e'^2 \\ & + \frac{1 + 3e^2 + \frac{\gamma^2}{4} - \frac{5}{2} e'^2}{1 - m} \\ & - \Lambda_2^{(0)} - (B_1^{(0)} - B_2^{(1)}) \frac{\gamma^2}{m^2} \end{aligned} \right\},$$

$$0 = [1 - (2 - 2m - c)^2] \Lambda_1^{(1)} + 3m^2 \frac{a}{a'} \left\{ \begin{aligned} &\frac{c}{4} \left( 1 + \frac{2 - 19m}{4} e^2 - \frac{5}{2} e'^2 \right) \\ & - \frac{3 + 4m}{4} \left( 1 + \frac{1}{2} e^2 - \frac{5}{2} e'^2 \right) + \frac{1 - c^2}{4(1 - m)} \\ & - \frac{2(1 + m)}{2 - 2m - c} \left( 1 + \frac{7}{4} e^2 - \frac{5}{2} e'^2 \right) \\ & - \frac{1}{2} (\Lambda_1^{(1)} - 2\Lambda_2^{(0)}) + \frac{1}{2} (B_2^{(5)} - B_2^{(6)}) \frac{\gamma^2}{m^2} \end{aligned} \right\},$$

$$0 = [1 - (2 - 2m + c)^2] \Lambda_2^{(2)} - \frac{3}{4} m^2 \frac{a}{a'} \left( 3 + c - 4m + \frac{8(1 - m)}{2 - 2m + c} + 2\Lambda_2^{(2)} \right),$$

$$0 = [1 - (2 - m)^2] \Lambda_2^{(3)} - \frac{3}{4} m^2 \frac{a}{a'} \left( \frac{4 - m}{2 - m} + 2B_1^{(9)} \frac{\gamma^2}{m^2} + 2\Lambda_2^{(3)} \right),$$

$$0 = [1 - (2 - 3m)^2] \Lambda_2^{(4)} + \frac{3}{4} m^2 \frac{a}{a'} \left( \frac{7(4 - 3m)}{2 - 3m} - 2B_1^{(10)} \frac{\gamma^2}{m^2} - 2\Lambda_2^{(4)} \right),$$



$$0 = (1 - m^2) A_2^{(5)} + \frac{3m^2 a}{2} \left\{ \begin{aligned} & 1 + e^2 + \frac{\gamma^2}{4} + \frac{9}{8} e'^2 + (B_1^{(7)} + B_1^{(8)}) \frac{\gamma^2}{m^2} - \frac{3}{2} (1 + 2m) A_2^{(0)} \\ & - \frac{2(1-2m)(3-2m)(3-m)}{(2-3m)(2-m)} A_2^{(0)} - 2A_2^{(5)} - (2-3m) A_2^{(4)} \\ & + (B_1^{(9)} + B_1^{(10)}) B_1^{(0)} \frac{\gamma^2}{m^2} - A_2^{(5)} - 11 C_2^{(6)} - 2 C_2^{(9)} + 2 C_2^{(10)} \end{aligned} \right\}$$

$$+ 6m [4A_2^{(0)} + A_2^{(3)} - A_2^{(4)} - 10 A_1^{(1)} e^2 + \frac{5}{2} (A_1^{(7)} - A_1^{(6)}) e^2],$$

$$0 = [1 - (2 - m - c)^2] A_1^{(6)} + \frac{3}{2} m^2 \frac{a}{a'} \left\{ \begin{aligned} & \frac{3 + 2m - c}{4} + \frac{2 + m}{2 - m - c} - \frac{3}{2} A_1^{(1)} - A_1^{(6)} \\ & - \left( \frac{3 + m - c}{2} + \frac{4}{2 - m - c} \right) A_1^{(9)} \end{aligned} \right\}$$

$$0 = [1 - (2 - 3m - c)^2] A_1^{(7)} - \frac{3}{2} m^2 \frac{a}{a'} \left\{ \begin{aligned} & \frac{7(3 + 6m - c)}{4} + \frac{7(2 + 3m)}{2 - 3m - c} + \frac{3}{2} A_1^{(1)} \\ & + A_1^{(7)} + \left( \frac{3 - m - c}{2} + \frac{4}{2 - 3m - c} \right) A_1^{(8)} \end{aligned} \right\},$$

$$0 = [1 - (c + m)^2] A_1^{(8)} - \frac{3}{2} m^2 \frac{a}{a'} \left\{ \begin{aligned} & \frac{3 + 2m}{2} - \left( \frac{1 + 2m + c}{4} + \frac{2}{c + m} \right) A_1^{(1)} \\ & + A_1^{(8)} + \left( \frac{1 + 3m + c}{2} + \frac{4}{c + m} \right) A_1^{(7)} \end{aligned} \right\},$$

$$0 = [1 - (c - m)^2] A_1^{(9)} - \frac{3}{2} m^2 \frac{a}{a'} \left\{ \begin{aligned} & \frac{3 - 2m}{2} + A_1^{(9)} + 7 \left( \frac{1 + 2m + c}{4} + \frac{2}{c - m} \right) A_1^{(1)} \\ & + \left( \frac{1 + m + c}{2} + \frac{4}{c - m} \right) A_1^{(6)} \end{aligned} \right\},$$

$$0 = (1 - 4c^2) A_2^{(10)} + \frac{3}{2} m^2 \frac{a}{a'} \left( 1 - B_0^{(11)} \frac{\gamma^2}{m^2} - A_2^{(10)} \right),$$

$$0 = [1 - (2c - 2 + 2m)^2] A_1^{(11)} + \frac{3}{4} m^2 \frac{a}{a'} \left\{ \begin{aligned} & \frac{2 + 11m + 8m^2}{2} - \frac{10 + 19m + 8m^2}{2c - 2 + 2m} \\ & + 4A_1^{(1)} + \frac{8A_2^{(10)} + 10(A_1^{(1)})^2}{2c - 2 + 2m} - 2A_1^{(11)} \end{aligned} \right\},$$

$$0 = (1 - 4g^2) A_2^{(12)} + \frac{a}{a'} \left( g^2 - 1 - \frac{3}{4} \frac{a - a'}{a} + \frac{3}{8} m^2 - \frac{3}{2} m^2 A_2^{(12)} \right),$$

$$0 = [1 - (2g - 2 + 2m)^2] A_1^{(13)} + \frac{3}{4} m^2 \frac{a}{a'} \left\{ \begin{aligned} & \frac{3 + 2m - 2g}{4} + \frac{4g^2 - 1}{4(1 - m)} - \frac{2 + m}{2g - 2 + 2m} \\ & + \frac{2B_1^{(0)}}{m^2} - 2A_1^{(13)} + \frac{8A_2^{(12)}}{2g - 2 + 2m} \end{aligned} \right\},$$

$$0 = (1 - 4m^2) A_2^{(14)} + \frac{3}{2} m^2 \frac{a}{a'} \left( \frac{3}{2} - A_2^{(14)} \right),$$



$$0 = [1 - (2g - c)^2] A_0^{(45)} - \frac{3}{2} m^2 \frac{a}{a_1} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} + \frac{B_2^{(3)}}{m^2} + \frac{1+c-2g-10m}{4} A_1^{(4)} - (10+5m) A_1^{(43)} \\ & + (5+m) A_1^{(46)} - \frac{B_1^{(0)} B_2^{(5)}}{m^2} + A_0^{(45)} \end{aligned} \right\},$$

$$0 = [1 - (2 - 2m - 2g - c)^2] A_1^{(46)} - \frac{3}{4} m^2 \frac{a}{a_1} \left\{ \begin{aligned} & 1 + 2m + \frac{5+m}{1-2m} + \frac{3(1-m)}{3-2m} \\ & + 2 A_1^{(46)} - \frac{2 B_2^{(4)}}{m^2} + \frac{10 A_0^{(45)}}{1-2m} \end{aligned} \right\},$$

$$0 = [1 - (1-m)^2] A_1^{(47)} + m^2 \frac{a}{a_1} \left\{ \begin{aligned} & \frac{9}{8} (1-2\mu) (1+2e^2+2e'^2) \\ & + \frac{3(1-2\mu)}{4(1-m)} (1+\frac{9}{2}e^2+2e'^2) \\ & - \frac{36+21m-15m^2}{4(1-m)} A_1^{(47)} + \frac{3(1+m)}{2(1-m)} A_0^{(48)} e'^2 \\ & - \frac{57-38m}{4(1-m)} A_2^{(0)} + \frac{3}{2} (B_2^{(44)} + B_2^{(45)}) \frac{\gamma^2}{m^2} \end{aligned} \right\} (*),$$

$$0 = \frac{5(1-2\mu)}{4} A_0^{(48)} + \frac{4+m}{4} A_1^{(47)} - (5+m) A_1^{(49)},$$

$$0 = [1 - (1-2m)^2] A_1^{(49)} + \frac{3m^2}{2(1-2m)} \frac{a}{a_1} \left\{ \begin{aligned} & \frac{15-18m}{4} (1-2\mu) - \frac{76-33m}{4} A_1^{(47)} \\ & - 5 A_0^{(48)} - (1-2m) A_1^{(49)} \end{aligned} \right\}.$$

11. Considérons présentement la troisième des équations (L) du n° 1. La fonction

$$-\frac{s}{h^2 u} \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{1+s^2}{h^2 u^2} \frac{\partial Q}{\partial s}$$

devient

$$\frac{3m'u'^3 s}{2h^2 u^3} + \frac{3m'u'^3 s}{2h^2 u^4} \cos(2\nu - 2\nu') + \frac{3m'u'^4 s}{8h^2 u^3} \left[ \begin{aligned} & 11 \cos(\nu - \nu') \\ & + 5 \cos(3\nu - 3\nu') \end{aligned} \right];$$

développons ses différents termes. Le terme  $\frac{3m'u'^3 s}{2h^2 u^4}$  donne, par son

(\*) Cette équation a été reproduite conformément au texte de l'édition originale. Dans la deuxième édition (publiée après la mort de l'Auteur), la quantité  $1 + 2e^2 + 2e'^2$  est suivie du terme  $-\frac{2}{3}\gamma^2$ ; la quantité  $1 + \frac{9}{2}e^2 + 2e'^2$  est suivie du terme  $-2\gamma^2$ ; enfin, au lieu du facteur  $\frac{3(1+m)}{2(1-m)}$ , on lit  $\frac{9(1+m)}{2(1-m)}$ .



développement, la fonction

$$\frac{3}{2} m^2 \frac{a}{a'} \gamma \left\{ \begin{array}{l} (1 + 2e^2 - \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{3}{2}e'^2) \sin(gv - \theta) \\ - 2e \sin(gv + cv - \theta - \varpi) \\ - 2e \sin(gv - cv - \theta + \varpi) \\ + \frac{3}{2}e' \sin(gv + c'mv - \theta - \varpi') \\ + \frac{3}{2}e' \sin(gv - c'mv - \theta + \varpi') \\ - \frac{5}{2}e^2 \sin(2cv - gv - 2\varpi + \theta) \end{array} \right\}.$$

Le développement de  $\frac{3m'u'^3s}{2h^2u^4} \cos(2v - 2v')$  se réduit à multiplier le développement de  $\frac{3m'u'^3}{2h^2u^3} \cos(2v - 2v')$ , que nous avons donné dans le n° 6, par  $\frac{s}{u}$ , et l'on aura

$$\frac{3}{4} m^2 \frac{a}{a'} \gamma \left\{ \begin{array}{l} - \left( 1 + 2e^2 - \frac{2+m}{4}\gamma^2 - \frac{5}{2}e'^2 \right) \sin(2v - 2mv - gv + \theta) \\ + \sin(2v - 2mv + gv - \theta) \\ - 2(1+m)e \sin(2v - 2mv + gv - cv - \theta + \varpi) \\ - 2(1+m)e \sin(gv + cv - 2v + 2mv - \theta - \varpi) \\ + 2(1-m)e \sin(2v - 2mv - gv + cv + \theta - \varpi) \\ - 2(1-m)e \sin(gv + cv + 2v - 2mv - \theta - \varpi) \\ - \frac{7}{2}e' \sin(2v - 2mv - gv - c'mv + \theta + \varpi') \\ + \frac{7}{2}e' \sin(2v - 2mv + gv - c'mv - \theta + \varpi') \\ + \frac{1}{2}e' \sin(2v - 2mv - gv + c'mv + \theta - \varpi') \\ - \frac{1}{2}e' \sin(2v - 2mv + gv + c'mv - \theta - \varpi') \\ + \frac{10+19m+8m^2}{4} e^2 \left[ \begin{array}{l} \sin(2v - 2mv - 2cv + gv + 2\varpi - \theta) \\ + \sin(2cv + gv - 2v + 2mv - 2\varpi - \theta) \end{array} \right] \end{array} \right\}.$$

Le terme  $\frac{33m'u'^4s}{8h^2u^5} \cos(v - v')$  produit les suivants

$$\frac{33m^2}{16} \frac{a}{a'} \frac{a}{a'} \gamma [\sin(gv - v + mv - \theta) + \sin(gv + v - mv - \theta)].$$

Le terme dépendant de  $\cos(3v - 3v')$  est insensible; nous n'avons même eu égard aux deux précédents qu'à raison de leur petite influence sur l'argument de la longitude lunaire dépendant de  $v - mv$ .

La fonction  $\frac{1}{h^2u^2} \frac{ds}{dv} \frac{\partial Q}{\partial v}$ , que renferme la troisième des équations (L),



donne le terme suivant

$$-\frac{3m'u'^3}{2h^2u^4} g\gamma \cos(gv - \theta) \sin(2v - 2v').$$

On aura le développement de ce terme en augmentant, dans le développement de  $\frac{3m'u'^3s}{2h^2u^4} \cos(2v - 2v')$ , les angles  $gv$  et  $2v$  d'un angle droit et en le multipliant par  $g$ , ce qui donne

$$-\frac{3m^2}{4} \frac{a}{a'} g\gamma \left[ \begin{aligned} & \left[ 1 + 2e^2 - (2+m) \frac{\gamma^2}{4} - \frac{5}{2} e'^2 \right] \sin(2v - 2mv - gv + \theta) \\ & + \sin(2v - 2mv + gv - \theta) \\ & - 2(1+m)e \sin(2v - 2mv + gv - cv - \theta + \varpi) \\ & + 2(1+m)e \sin(gv + cv - 2v + 2mv - \theta - \varpi) \\ & - 2(1-m)e \sin(2v - 2mv - gv + cv + \theta - \varpi) \\ & - 2(1-m)e \sin(gv + cv + 2v - 2mv - \theta - \varpi) \\ & + \frac{7}{2} e' \sin(2v - 2mv - gv - c'mv + \theta + \varpi') \\ & + \frac{7}{2} e' \sin(2v - 2mv + gv - c'mv - \theta + \varpi') \\ & - \frac{1}{2} e' \sin(2v - 2mv - gv + c'mv + \theta - \varpi') \\ & - \frac{1}{2} e' \sin(2v - 2mv + gv + c'mv - \theta - \varpi') \\ & + \frac{10 + 19m + 8m^2}{4} e^2 \left[ \begin{aligned} & \sin(2v - 2mv - 2cv + gv + 2\varpi - \theta) \\ & - \sin(2cv + gv - 2v + 2mv - 2\varpi - \theta) \end{aligned} \right] \end{aligned} \right]$$

Les termes de la fonction  $\frac{1}{h^2 u^2} \frac{ds}{dv} \frac{\partial Q}{\partial v}$  qui dépendent de  $u'^4$  produisent les suivants

$$\frac{3m^2}{16} \frac{a}{a'} \frac{a}{a'} \gamma [\sin(gv - v + mv - \theta) - \sin(gv + v - mv - \theta)].$$

Le produit  $\left(\frac{d^2s}{dv^2} + s\right) \frac{2}{h^2} \int \frac{\partial Q}{\partial v} \frac{dv}{u^2}$ , que renferme la troisième des équations (L) du n° 1, se réduit à

$$\frac{2}{h^2} (1 - g^2) \gamma \sin(gv - \theta) \int \frac{\partial Q}{\partial v} \frac{dv}{u^2}.$$

$1 - g^2$  étant de l'ordre  $m^2$ , nous ne conserverons dans ce produit que le terme dépendant de  $\sin(2v - 2mv - gv + \theta)$ , et il résulte du



développement précédent de  $\frac{2}{h^2} \int \frac{\partial Q}{\partial v} \frac{dv}{u^2}$  que ce terme est égal à

$$\frac{3m^2(g^2-1)}{4(1-m)} \frac{a}{a_1} \gamma \sin(2v - 2mv - gv + \theta).$$

La troisième des équations (L) du n° 1 se réduit ainsi à la forme suivante

$$0 = \frac{d^2 s}{dv^2} + s + \Gamma,$$

$\Gamma$  étant la somme des termes que nous venons de considérer. Mais, pour plus d'exactitude, il faut lui ajouter les termes dépendants du carré de la force perturbatrice, et qui peuvent avoir une influence sensible.

12. Le terme  $\frac{3m'u'^3 s}{2h^2 u^4}$  donne, par sa variation, les deux suivants

$$\frac{3m'u'^3 \delta s}{2h^2 u^4} - \frac{6m'u'^3 s \delta u}{h^2 u^5},$$

et il en résulte la fonction

$$\begin{aligned} & \frac{3m^2}{2} \frac{a}{a_1} \delta s \\ & + \frac{9m^2}{4} \frac{a}{a_1} (B_1^{(7)} + B_1^{(8)}) e'^2 \gamma \sin(gv - \theta) \\ & + 3m^2 \frac{a}{a_1} (A_2^{(0)} - \frac{5}{2} A_1^{(1)} e^2) \gamma \sin(2v - 2mv - gv + \theta) \\ & - 3m^2 \frac{a}{a_1} B_1^{(0)} e \gamma \sin(2v - 2mv - gv + cv + \theta - \varpi) \\ & - 3m^2 \frac{a}{a_1} A_1^{(1)} e \gamma \sin(2v - 2mv + gv - cv - \theta + \varpi) \\ & + 3m^2 \frac{a}{a_1} (B_1^{(0)} - A_1^{(1)}) e \gamma \sin(gv + cv - 2v + 2mv - \theta - \varpi) \\ & + \frac{9m^2}{4} \frac{a}{a_1} B_1^{(0)} e' \gamma \left[ \begin{array}{l} \sin(2v - 2mv - gv + c'mv + \theta - \varpi') \\ + \sin(2v - 2mv - gv - c'mv + \theta + \varpi') \end{array} \right] \\ & + \frac{3m^2}{2} \frac{a}{a_1} (5A_1^{(1)} - 2A_1^{(11)} - \frac{5}{2} B_1^{(0)}) e^2 \gamma \sin(2cv + gv - 2v + 2mv - 2\varpi - \theta) \\ & + \frac{3m^2}{2} \frac{a}{a_1} (5A_1^{(1)} - 2A_1^{(11)}) e^2 \gamma \sin(2v - 2mv + gv - 2cv - \theta + 2\varpi). \end{aligned}$$



Le terme  $\frac{3m'u'^3s}{2h^2u^4} \cos(2v - 2v')$  donne, par sa variation, les suivants

$$\frac{3m'u'^3 \partial s}{2h^2u^4} \cos(2v - 2v') - \frac{6m'u'^3 s \partial u}{h^2u^5} \cos(2v - 2v') + \frac{3m'u'^3 s \partial v'}{h^2u^4} \sin(2v - 2v'),$$

et il en résulte la fonction

$$\begin{aligned} & - \frac{3m^2}{4} \frac{a}{a'} (B_1^{(0)} + 4A_2^{(0)} + \frac{7}{2}B_1^{(10)}e'^2 - \frac{1}{2}B_1^{(9)}e'^2) (1 - \frac{5}{2}e'^2) \gamma \sin(gv - \theta) \\ & + \frac{3m^2}{2} \frac{a}{a'} e\gamma \left\{ \begin{aligned} & [(1+m)B_1^{(0)} - A_1^{(1)}] \sin(gv - cv - \theta + \varpi) \\ & + [(1-m)B_1^{(0)} - A_1^{(1)}] \sin(gv + cv - \theta - \varpi) \end{aligned} \right\} \\ & - \frac{3m^2}{4} \frac{a}{a'} e'\gamma \left\{ \begin{aligned} & (B_1^{(9)} + \frac{7}{2}B_1^{(0)}) \sin(gv - c'mv - \theta + \varpi') \\ & + (B_1^{(10)} - \frac{1}{2}B_1^{(9)}) \sin(gv + c'mv - \theta - \varpi') \\ & + B_1^{(8)} \sin(2v - 2mv - gv + c'mv + \theta - \varpi') \\ & + B_1^{(7)} \sin(2v - 2mv - gv - c'mv + \theta + \varpi') \end{aligned} \right\} \\ & - \frac{3m^2}{4} \frac{a}{a'} e^2\gamma \left\{ \begin{aligned} & 5A_1^{(1)} - 2A_1^{(11)} + B_1^{(12)} \\ & - \frac{10 + 19m + 8m^2}{4} B_1^{(0)} \end{aligned} \right\} \sin(2cv - gv - 2\varpi + \theta) \\ & - \frac{3m^2}{4} \frac{a}{a'} B_0^{(11)} e^2\gamma \sin(2v - 2mv - 2cv + gv + 2\varpi - \theta). \end{aligned}$$

Le terme  $-\frac{3m'u'^3}{2h^2u^4} \frac{ds}{dv} \sin(2v - 2v')$  donne, par sa variation,

$$\begin{aligned} & - \frac{3m'u'^3}{2h^2u^4} \frac{d\delta s}{dv} \sin(2v - 2v') + \frac{6m'u'^3}{h^2u^5} \partial u \frac{ds}{dv} \sin(2v - 2v') \\ & + \frac{3m'u'^3}{h^2u^4} \frac{ds}{dv} \partial v' \cos(2v - 2v'). \end{aligned}$$

De là résulte la fonction

$$\begin{aligned} & - \frac{3m^2}{4} \frac{a}{a'} \left[ \begin{aligned} & (2 - 2m - g) B_1^{(0)} + \frac{7}{2}(2 - 3m - g) B_1^{(10)} e'^2 \\ & - \frac{1}{2}(2 - m - g) B_1^{(9)} e'^2 \end{aligned} \right] (1 - \frac{5}{2}e'^2) \gamma \sin(gv - \theta) \\ & + \frac{3m^2}{2} \frac{a}{a'} e\gamma \left\{ \begin{aligned} & [(1+m)(2 - 2m - g) B_1^{(0)} - A_1^{(1)}] \sin(gv - cv - \theta + \varpi) \\ & + [(1-m)(2 - 2m - g) B_1^{(0)} + A_1^{(1)}] \sin(gv + cv - \theta - \varpi) \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -\frac{3m^2}{4} \frac{a}{a'} e' \gamma \left\{ \begin{aligned} & \left[ \begin{aligned} & (2-m-g) B_1^{(9)} \\ & + \frac{1}{2}(2-2m-g) B_1^{(0)} \end{aligned} \right] \sin(gv - c'mv - \theta + \varpi') \\ & + \left[ \begin{aligned} & (2-3m-g) B_1^{(10)} \\ & - \frac{1}{2}(2-2m-g) B_1^{(0)} \end{aligned} \right] \sin(gv + c'mv - \theta - \varpi') \\ & + (g-m) B_1^{(8)} \sin(2v - 2mv - gv + c'mv + \theta - \varpi') \\ & + (g+m) B_1^{(7)} \sin(2v - 2mv - gv - c'mv + \theta + \varpi') \end{aligned} \right\} \\
& -\frac{3m^2}{4} \frac{a}{a'} e^2 \gamma \left\{ \begin{aligned} & \left( 5A_1^{(1)} - 2A_1^{(11)} + (2-2m-2c+g) B_1^{(12)} \right) \\ & - \frac{10+19m+8m^2}{4} (2-2m-g) B_1^{(0)} \end{aligned} \right\} \sin(2cv - gv - 2\varpi + \theta) \\
& -\frac{3m^2}{4} \frac{a}{a'} B_0^{(11)} e^2 \gamma \sin(2v - 2mv - 2cv + gv + 2\varpi - \theta).
\end{aligned}$$

Enfin la fonction  $\left(\frac{d^2s}{dv^2} + s\right) \frac{2}{h^2} \int \frac{\partial Q}{\partial v} \frac{dv}{u^2}$  donne, par sa variation, les termes

$$\frac{3m^2}{4} \frac{a}{a'} [(2-2m-g)^2 - 1] B_1^{(0)} (1 - \frac{5}{2} e'^2) \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{1-m} \gamma \sin(gv - \theta) \\ & + \frac{10+19m+8m^2}{2(2c-2+2m)} e^2 \gamma \sin(2cv - gv - 2\varpi + \theta) \end{aligned} \right\}.$$

Les termes dépendants du cube de la force perturbatrice sont insensibles.

13. En rassemblant tous ces termes, la troisième des équations (L) du n° 1 deviendra

$$\begin{aligned}
(L'') \quad 0 = \frac{d^2s}{dv^2} + s + \frac{3}{2} m^2 \frac{a}{a'} & \left\{ \begin{aligned} & \left( 1 + 2e^2 - \frac{1}{2} \gamma^2 + \frac{3}{2} e'^2 \right) \\ & - \frac{1}{2} \left[ \frac{(3-2m-g)(g+m)}{1-m} B_1^{(0)} + 4\Lambda_2^{(0)} \right] (1 - \frac{5}{2} e'^2) \\ & - \frac{7}{4} (3-3m-g) B_1^{(10)} e'^2 + \frac{1}{4} (3-m-g) B_1^{(9)} e'^2 \\ & + \frac{3}{2} (B_1^{(7)} + B_1^{(8)}) e'^2 \end{aligned} \right\} \gamma \sin(gv - \theta) \\
& - \frac{3}{4} m^2 \frac{a}{a'} \left\{ \begin{aligned} & (1+g) \left( 1 + 2e^2 - \frac{2+m}{4} \gamma^2 - \frac{5}{2} e'^2 \right) \\ & + \frac{1-g^2}{1-m} - 4\Lambda_2^{(0)} + 10\Lambda_1^{(1)} e^2 - 2B_1^{(0)} \end{aligned} \right\} \gamma \sin(2v - 2mv - gv + \theta) \\
& + \frac{3}{2} m^2 \frac{a}{a'} \left( \frac{1-g}{2} + B_2^{(1)} \right) \gamma \sin(2v - 2mv + gv - \theta)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \frac{3}{2} m^2 \frac{a}{a'} [B_2^{(2)} - 2 + (1-m)(3-2m-g) B_1^{(0)}] e \gamma \sin(gv + cv - \theta - \varpi) \\
 & + \frac{3}{2} m^2 \frac{a}{a'} [B_2^{(3)} - 2 - 2A_1^{(1)} + (1+m)(3-2m-g) B_1^{(0)}] e \gamma \sin(gv - cv - \theta + \varpi) \\
 & + \frac{3}{2} m^2 \frac{a}{a'} [(1+g)(1-m) - 2B_1^{(0)} + B_2^{(4)}] e \gamma \sin(2v - 2mv - gv + cv + \theta - \varpi) \\
 & + \frac{3}{2} m^2 \frac{a}{a'} [(g-1)(1+m) + B_2^{(5)} - 2A_1^{(1)}] e \gamma \sin(2v - 2mv + gv - cv - \theta + \varpi) \\
 & + \frac{3}{2} m^2 \frac{a}{a'} [(1+g)(1+m) + B_2^{(6)} + 2A_1^{(1)} - 2B_1^{(0)}] e \gamma \sin(2v - 2mv - gv - cv + \theta + \varpi) \\
 & + \frac{3}{4} m^2 \frac{a}{a'} [3 + 2B_1^{(7)} + \frac{1}{2}(3-2m-g) B_1^{(0)} - (3-3m-g) B_1^{(10)}] e' \gamma \sin(gv + c'mv - \theta - \varpi') \\
 & + \frac{3}{4} m^2 \frac{a}{a'} [3 + 2B_1^{(8)} - \frac{7}{2}(3-2m-g) B_1^{(0)} - (3-m-g) B_1^{(9)}] e' \gamma \sin(gv - c'mv - \theta + \varpi') \\
 & + \frac{3}{4} m^2 \frac{a}{a'} \left[ \frac{1+g}{2} + 2B_1^{(9)} + 3B_1^{(0)} - (1+g-m) B_1^{(8)} \right] e' \gamma \sin(2v - 2mv - gv + c'mv + \theta - \varpi') \\
 & + \frac{3}{4} m^2 \frac{a}{a'} [2B_1^{(10)} - \frac{7}{2}(1+g) + 3B_1^{(0)} - (1+g+m) B_1^{(7)}] e' \gamma \sin \left( \begin{matrix} 2v - 2mv - gv \\ - c'mv + \theta + \varpi' \end{matrix} \right) \\
 & + \frac{3}{4} m^2 \frac{a}{a'} \left\{ \begin{matrix} 2B_0^{(11)} - 5 - 10A_1^{(1)} + 4A_1^{(11)} - (3-2m-2c+g) B_1^{(12)} \\ + \left[ \frac{3-2m-g}{4} + \frac{(2-2m-g)^2-1}{2(2c+2m-2)} \right] \end{matrix} \right\} e^2 \gamma \sin(2cv - gv - 2\varpi + \theta) \\
 & \qquad \qquad \qquad \times (10 + 19m + 8m^2) B_1^{(0)} \\
 & + \frac{3}{4} m^2 \frac{a}{a'} \left\{ \begin{matrix} 2B_1^{(12)} + (1-g) \frac{10+19m+8m^2}{4} \\ + 10A_1^{(1)} - 4A_1^{(11)} - 2B_0^{(11)} \end{matrix} \right\} e^2 \gamma \sin(2v - 2mv - 2cv + gv + 2\varpi - \theta) \\
 & + \frac{3}{4} m^2 \frac{a}{a'} \left\{ \begin{matrix} \frac{10+19m+8m^2}{2} + 2B_1^{(13)} \\ + 10A_1^{(1)} - 4A_1^{(11)} - 5B_1^{(0)} \end{matrix} \right\} e^2 \gamma \sin(2cv + gv - 2v + 2mv - 2\varpi - \theta) \\
 & + \frac{3}{4} m^2 \frac{a}{a'} (3 + 2B_2^{(14)}) \frac{a}{a'} \gamma \sin(gv - v + mv - \theta) \\
 & + \frac{3}{4} m^2 \frac{a}{a'} \left( \frac{5}{2} + 2B_2^{(15)} \right) \frac{a}{a'} \gamma \sin(gv + v - mv - \theta).
 \end{aligned}$$

14. On doit faire, sur l'intégration de l'équation différentielle précédente, des remarques analogues à celles du n° 11. On considérera donc  $\gamma$  et  $\theta$  comme variables en vertu de la variation de l'excentricité de l'orbe terrestre; en substituant ensuite, pour  $s$ , la fonc-



tion  $\gamma \sin(gv - \theta) + \delta s$ , et comparant d'abord les sinus et cosinus de  $gv - \theta$ , on aura les équations

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma \frac{d^2 \theta}{dv^2} - 2 \frac{d\gamma}{dv} \left( g - \frac{d\theta}{dv} \right), \\ 0 &= \frac{d^2 \gamma}{dv^2} - \gamma \left[ \left( g - \frac{d\theta}{dv} \right)^2 - 1 \right] + (p'' + q'' e'^2) \gamma, \end{aligned}$$

$p'' + q'' e'^2$  désignant le coefficient de  $\gamma \sin(gv - \theta)$  dans l'équation différentielle ( $L''$ ) du numéro précédent, où l'on doit observer que  $B_1^{(0)}$  et  $A_2^{(0)}$  renferment déjà le facteur  $1 - \frac{5}{2} e'^2$ . La première de ces équations donne, en l'intégrant,

$$\frac{1}{g - \frac{d\theta}{dv}} = H \gamma^2,$$

$H$  étant une constante arbitraire. La seconde donne, en négligeant  $\frac{d^2 \gamma}{dv^2}$ , ainsi que le carré de  $q'' e'^2$ ,

$$\frac{d\theta}{dv} = g - \sqrt{1 + p''} - \frac{\frac{1}{2} q'' e'^2}{\sqrt{1 + p''}},$$

et par conséquent, si l'on regarde  $p''$  et  $q''$  comme constants, ce que l'on peut faire ici sans erreur sensible, on aura

$$\theta = gv - \sqrt{1 + p''} \cdot v - \frac{\frac{1}{2} q''}{\sqrt{1 + p''}} \int e'^2 dv + \lambda,$$

$\lambda$  étant une arbitraire, ce qui donne

$$\sin(gv - \theta) = \sin \left( \sqrt{1 + p''} \cdot v + \frac{\frac{1}{2} q''}{\sqrt{1 + p''}} \int e'^2 dv - \lambda \right).$$

d'où il suit que, conformément aux observations, les nœuds de l'orbite lunaire, sur l'écliptique vraie, ont un mouvement rétrograde égal à  $(\sqrt{1 + p''} - 1)v + \frac{\frac{1}{2} q''}{\sqrt{1 + p''}} \int e'^2 dv$ . Ce mouvement n'est pas uniforme, à raison de la variabilité de  $e'$ , et l'équation séculaire de la longitude



du nœud est à l'équation séculaire du périégée comme  $\frac{q''}{\sqrt{1+p''}}$  est à  $-\frac{q}{\sqrt{1+p}}$ .

La tangente  $\gamma$  de l'inclinaison de l'orbite lunaire à l'écliptique vraie est pareillement variable, puisqu'elle est égale à  $\left[ H \left( g - \frac{d\theta}{dv} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}$ ; mais il est aisé de voir que sa variation est insensible, et c'est la raison pour laquelle les observations les plus anciennes n'indiquent aucun changement dans cette inclinaison, quoique la position de l'écliptique ait varié sensiblement dans l'intervalle qui nous en sépare.

On aura ensuite les équations suivantes

$$\begin{aligned} 0 &= [1 - (2 - 2m - g)^2] B_1^{(0)} - \frac{3}{4} m^2 \frac{a}{a'} \left\{ \begin{aligned} &(1+g) \left( 1 + 2e^2 - \frac{2+m}{4} \gamma^2 - \frac{5}{2} e'^2 \right) \\ &+ \frac{1-g^2}{1-m} - 4A_2^{(0)} + 10A_1^{(4)} e^2 - 2B_1^{(0)} \end{aligned} \right\}, \\ 0 &= [1 - (2 - 2m + g)^2] B_2^{(1)} + \frac{3}{2} m^2 \frac{a}{a'} \left( \frac{1-g}{2} + B_2^{(1)} \right), \\ 0 &= [1 - (g+c)^2] B_2^{(2)} + \frac{3}{2} m^2 \frac{a}{a'} [B_2^{(2)} - 2 + (1-m)(3 - 2m - g) B_1^{(0)}], \\ 0 &= [1 - (g-c)^2] B_2^{(3)} + \frac{3}{2} m^2 \frac{a}{a'} [B_2^{(3)} - 2 - 2A_1^{(4)} + (1+m)(3 - 2m - g) B_1^{(0)}], \\ 0 &= [1 - (2 - 2m - g + c)^2] B_2^{(4)} + \frac{3}{2} m^2 \frac{a}{a'} [(1+g)(1-m) - 2B_1^{(0)} + B_2^{(4)}], \\ 0 &= [1 - (2 - 2m + g - c)^2] B_2^{(5)} + \frac{3}{2} m^2 \frac{a}{a'} [(g-1)(1+m) + B_2^{(5)} - 2A_1^{(4)}], \\ 0 &= [1 - (2 - 2m - g - c)^2] B_2^{(6)} + \frac{3}{2} m^2 \frac{a}{a'} [(1+g)(1+m) + B_2^{(6)} + 2A_1^{(4)} - 2B_1^{(0)}], \\ 0 &= [1 - (g+m)^2] B_1^{(7)} + \frac{3}{4} m^2 \frac{a}{a'} [3 + 2B_1^{(7)} + \frac{1}{2}(3 - 2m - g) B_1^{(0)} - (3 - 3m - g) B_1^{(40)}], \\ 0 &= [1 - (g-m)^2] B_1^{(8)} + \frac{3}{4} m^2 \frac{a}{a'} [3 + 2B_1^{(8)} - \frac{7}{2}(3 - 2m - g) B_1^{(0)} - (3 - m - g) B_1^{(9)}], \\ 0 &= [1 - (2 - m - g)^2] B_1^{(9)} + \frac{3}{4} m^2 \frac{a}{a'} \left[ \frac{1+g}{2} + 2B_1^{(9)} + 3B_1^{(0)} - (1+g-m) B_1^{(8)} \right], \\ 0 &= [1 - (2 - 3m - g)^2] B_1^{(40)} + \frac{3}{4} m^2 \frac{a}{a'} [2B_1^{(40)} - \frac{7}{2}(1+g) + 3B_1^{(0)} - (1+g+m) B_1^{(7)}], \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 0 &= [1 - (2c - g)^2] B_0^{(41)} + \frac{3}{4} m^2 \frac{a}{a_1} \left[ \begin{aligned} &2 B_0^{(41)} - 5 - 10 A_1^{(41)} + 4 A_1^{(41)} - (3 - 2m - 2c + g) B_1^{(42)} \\ &- (3 - 2m - g)(g + m - c) \frac{10 + 19m + 8m^2}{2(2c + 2m - 2)} B_1^{(0)} \end{aligned} \right], \\
 0 &= [1 - (2 - 2m - 2c + g)^2] B_1^{(42)} + \frac{3}{4} m^2 \frac{a}{a_1} \left[ \begin{aligned} &2 B_1^{(42)} + (1 - g) \frac{10 + 19m + 8m^2}{4} \\ &+ 10 A_1^{(41)} - 4 A_1^{(41)} - 2 B_0^{(41)} \end{aligned} \right], \\
 0 &= [1 - (2c + g - 2 + 2m)^2] B_1^{(43)} + \frac{3}{4} m^2 \frac{a}{a_1} \left[ \begin{aligned} &\frac{10 + 19m + 8m^2}{2} + 2 B_1^{(43)} \\ &+ 10 A_1^{(41)} - 4 A_1^{(41)} - 5 B_1^{(0)} \end{aligned} \right], \\
 0 &= [1 - (g + m - 1)^2] B_2^{(44)} + \frac{3}{4} m^2 \frac{a}{a_1} (3 + 2 B_2^{(44)}), \\
 0 &= [1 - (g + 1 - m)^2] B_2^{(45)} + \frac{3}{4} m^2 \frac{a}{a_1} \left( \frac{5}{2} + 2 B_2^{(45)} \right).
 \end{aligned}$$

15. Il nous reste présentement à déterminer la valeur du temps  $t$  en fonction de  $v$ . Pour cela, reprenons la première des équations (L) du n° 4,

$$dt = \frac{dv}{hu^2 \sqrt{1 + \frac{2}{h^2} \int \frac{\partial Q}{\partial v} \frac{dv}{u^2}}}.$$

Il faut, par le n° 6, y substituer, au lieu de  $u$ , la fonction

$$\frac{1}{a} \left[ \begin{aligned} &1 + e^2 + \frac{1}{4} \gamma^2 + \epsilon + e(1 + e^2) \cos(cv - \varpi) \\ &- \frac{1}{4} \gamma^2 (1 + e^2 - \frac{1}{4} \gamma^2) \cos(2gv - 2\theta) \end{aligned} \right] + \delta u.$$

On aura d'abord, en développant le facteur  $\frac{dv}{hu^2}$ , un terme indépendant de cosinus, et qui, par la nature du mouvement elliptique, doit être  $\frac{a^2 dv}{\sqrt{a_1}}$  (Livre II, n° 16); on aura ensuite

$$dt = \frac{a^2 dv}{\sqrt{a_1}} \left\{ \begin{aligned} &\left( \begin{aligned} &1 - 2e(1 - \frac{1}{4} \gamma^2) \cos(cv - \varpi) \\ &+ e^2(\frac{3}{2} + \frac{1}{4} e^2 - \frac{3}{4} \gamma^2) \cos(2cv - 2\varpi) \\ &+ \frac{1}{2} \gamma^2 (1 + \frac{3}{2} e^2 - \frac{1}{2} \gamma^2) \cos(2gv - 2\theta) - e^3 \cos(3cv - 3\varpi) \\ &- \frac{3}{4} e \gamma^2 [\cos(2gv - cv - 2\theta + \varpi) + \cos(2gv + cv - 2\theta - \varpi)] \end{aligned} \right) \left( \begin{aligned} &1 - \frac{1}{h^2} \int \frac{\partial Q}{\partial v} \frac{dv}{u^2} \\ &+ \frac{3}{2h^4} \left( \int \frac{\partial Q}{\partial v} \frac{dv}{u^2} \right)^2 \\ &- \dots \end{aligned} \right) \\ &- 2a \delta u \left[ \begin{aligned} &1 + \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} \gamma^2 - 3e \cos(cv - \varpi) + 3e^2 \cos(2cv - 2\varpi) \\ &+ \frac{3}{4} \gamma^2 \cos(2gv - 2\theta) - \frac{3}{2} e \gamma^2 \cos(2gv - cv - 2\theta + \varpi) \end{aligned} \right] \left[ \begin{aligned} &1 - \frac{1}{h^2} \int \frac{\partial Q}{\partial v} \frac{dv}{u^2} \\ &+ \dots \end{aligned} \right] \\ &+ 3a^2 (\delta u)^2 [1 - 4e \cos(cv - \varpi)] [1 - \dots] \end{aligned} \right\}.$$



La partie non périodique du second membre de cette équation est

$$\frac{a^2 dv}{\sqrt{a_1}} \left\{ 1 + \frac{27 m^4}{64(1-m)^2} + \frac{3 m^2 \Lambda_2^{(0)}}{4(1-m)} + \frac{3}{2} [(\Lambda_2^{(0)})^2 + (\Lambda_1^{(1)} e)^2] \right\}.$$

Le coefficient de  $dv$  dans cette fonction n'est pas rigoureusement constant. On a vu, dans le n° 10, que l'expression de  $\frac{1}{a}$  contient le terme  $-\frac{3m^2 e'^2}{4a_1}$ , ce qui donne dans  $a^2$  le terme  $\frac{3}{2} m^2 a_1^2 e'^2$ ; ainsi la quantité  $\frac{a^2 dv}{\sqrt{a_1}}$  contient le terme  $\frac{3}{2} a_1^{\frac{3}{2}} dv \cdot m^2 e'^2$ ; or on a, à très-peu près,  $a_1^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{n}$ ,  $m^2 = m^2$ ; l'expression du temps  $t$  contient donc le terme  $\frac{3m^2}{2n} \int e'^2 dv$ , et par conséquent la valeur de la longitude vraie de la Lune, en fonction de sa longitude moyenne, contient le terme  $-\frac{3}{2} m^2 \int e'^2 dv$ , ou  $-\frac{3}{2} m^2 \int n dt e'^2$ ; d'où il suit que les trois équations séculaires des longitudes moyennes de la Lune, de son périégée et de ses nœuds sont entre elles comme les trois quantités  $3m^2$ ,  $\frac{-q}{\sqrt{1-p}}$ ,  $\frac{q''}{\sqrt{1+p''}}$ .

A la vérité, les termes dépendants du carré de la force perturbatrice changent un peu cette valeur de l'équation séculaire de la longitude moyenne; mais il est aisé de voir que les termes de cet ordre, qui ont une influence très-sensible sur l'équation séculaire du périégée, n'en ont qu'une très-petite et insensible sur celle du moyen mouvement.

La partie non périodique de  $\frac{dv}{dt}$  est égale à  $\frac{1}{n}$ , et, si l'on néglige les quantités de l'ordre  $m^4$ , ce coefficient est  $\frac{a^2}{\sqrt{a_1}}$ . On a ensuite, par le n° 10,

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a_1} \left( 1 - \frac{1}{2} m^2 \right),$$

ce qui donne

$$\frac{a}{a_1} = 1 + \frac{1}{2} m^2, \quad \text{et} \quad \frac{a^2}{\sqrt{a_1}} = \frac{1}{n} = a_1^{\frac{3}{2}} \left( 1 + \frac{1}{4} m^2 \right).$$



On a de plus, par le n° 16 du Livre II,

$$n' = a'^{-\frac{3}{2}} \sqrt{m'};$$

partant

$$\frac{n'^2}{n^2} = m^2 = \frac{a^3 m'}{a'^3} \left(1 + \frac{1}{2} m^2\right) = m^2 \left(1 + \frac{1}{2} m^2\right),$$

d'où l'on tire

$$m^2 = m^2 \left(1 - \frac{1}{2} m^2\right), \quad m^2 \frac{a}{a'} = m^2.$$

Supposons maintenant que l'on ait

$$\begin{aligned} nt + \varepsilon = & v + \frac{3}{2} m^2 \int (e'^2 - E'^2) dv \\ & + C_0^{(0)} e \sin(cv - \varpi) \\ & + C_0^{(1)} e^2 \sin(2cv - 2\varpi) \\ & + C_0^{(2)} e^3 \sin(3cv - 3\varpi) \\ & + C_0^{(3)} \gamma^2 \sin(2gv - 2\theta) \\ & + C_0^{(4)} e \gamma^2 \sin(2gv - cv - 2\theta + \varpi) \\ & + C_0^{(5)} e \gamma^2 \sin(2gv + cv - 2\theta - \varpi) \\ & + C_2^{(6)} \sin(2v - 2mv) \\ & + C_1^{(7)} e \sin(2v - 2mv - cv + \varpi) \\ & + C_2^{(8)} e \sin(2v - 2mv + cv - \varpi) \\ & + C_2^{(9)} e' \sin(2v - 2mv + c'mv - \varpi') \\ & + C_2^{(10)} e' \sin(2v - 2mv - c'mv + \varpi') \\ & + C_1^{(11)} e' \sin(c'mv - \varpi') \\ & + C_1^{(12)} ee' \sin(2v - 2mv - cv + c'mv + \varpi - \varpi') \\ & + C_1^{(13)} ee' \sin(2v - 2mv - cv - c'mv + \varpi + \varpi') \\ & + C_1^{(14)} ee' \sin(cv + c'mv - \varpi - \varpi') \\ & + C_1^{(15)} ee' \sin(cv - c'mv - \varpi + \varpi') \\ & + C_1^{(16)} e^2 \sin(2cv - 2v + 2mv - 2\varpi) \\ & + C_1^{(17)} \gamma^2 \sin(2gv - 2v + 2mv - 2\theta) \\ & + C_1^{(18)} e'^2 \sin(2c'mv - 2\varpi') \\ & + C_1^{(19)} \frac{a}{a'} \sin(v - mv) \\ & + C_0^{(20)} \frac{a}{a'} e' \sin(v - mv + c'mv - \varpi'). \end{aligned}$$



On aura

$$C_0^{(0)} = \frac{-2(1 - \frac{1}{4}\gamma^2) + \frac{15m^2 A_1^{(1)}}{4(1-m)} + 3A_2^{(0)} A_1^{(1)}}{c},$$

$$C_0^{(1)} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{4}\gamma^2 - 2A_2^{(10)}}{2c},$$

$$C_0^{(2)} = -\frac{1}{3c},$$

$$C_0^{(3)} = \frac{\frac{1}{2}(1 + \frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2}\gamma^2) - 2A_2^{(12)} + 3A_0^{(15)}e^2}{2g},$$

$$C_0^{(4)} = \frac{-\frac{3}{4} - 2A_0^{(15)}}{2g - c},$$

$$C_0^{(5)} = -\frac{\frac{3}{4}}{2g + c},$$

$$C_2^{(6)} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} \frac{-3m^2(1 + 2e^2 - \frac{5}{2}e'^2)}{4(1-m)} - 3m^2e^2 \left( \frac{1+m}{2-2m-c} + \frac{1-m}{2-2m+c} \right) \\ - 2A_2^{(0)}(1 + \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}\gamma^2) + 3e^2 A_1^{(1)} + 3e^2 A_2^{(2)} \end{array} \right\}}{2 - 2m},$$

$$C_1^{(7)} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} \frac{3m^2(1 + 2e^2 - \frac{1}{4}\gamma^2 - \frac{5}{2}e'^2)}{4(1-m)} + \frac{3m^2(1+m)(1 + \frac{3}{4}e^2 - \frac{1}{4}\gamma^2 - \frac{5}{2}e'^2)}{2-2m-c} \\ - \frac{3m^2e^2(10 + 19m + 8m^2)}{8(2c - 2 + 2m)} - 2A_1^{(1)}(1 + \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}\gamma^2) + 3A_2^{(0)} + 3e^2 A_1^{(11)} \end{array} \right\}}{2 - 2m - c},$$

$$C_2^{(8)} = \frac{\frac{3m^2}{4(1-m)} + \frac{3m^2(1-m)}{2-2m+c} - 2A_2^{(2)} + 3A_2^{(0)} - 3A_1^{(1)}e^2}{2 - 2m + c},$$

$$C_2^{(9)} = \frac{\frac{3m^2}{4(2-m)} - 2A_2^{(3)} + 3A_1^{(6)}e^2}{2 - m},$$

$$C_2^{(10)} = \frac{-\frac{21m^2}{4(2-3m)} - 2A_2^{(4)} + 3A_1^{(7)}e^2}{2 - 3m},$$



$$C_1^{(11)} = \frac{\left\{ \begin{aligned} & -3m[4A_2^{(0)} + A_2^{(3)} - A_2^{(4)} - 10A_1^{(1)}e^2 + \frac{5}{2}(A_1^{(7)} - A_1^{(6)})e^2] \\ & + \left( \frac{3m^2 A_2^{(0)}}{4} + \frac{27m^4}{32(1-m)} \right) \left( \frac{7}{2-3m} - \frac{1}{2-m} \right) \\ & + \left( \frac{3m^2}{4(1-m)} + 3A_2^{(0)} \right) (A_2^{(3)} + A_2^{(4)}) - 2A_2^{(5)} \left( 1 + \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}\gamma^2 \right) \\ & + 3(A_1^{(8)} + A_1^{(9)})e^2 + 3A_1^{(1)}e^2(A_1^{(6)} + A_1^{(7)}) \\ & + \frac{3m^2}{4} (11C_2^{(6)} + 2C_2^{(9)} - 2C_2^{(10)}) \end{aligned} \right\}}{m},$$

$$C_1^{(12)} = \frac{-\frac{3m^2(2+m)}{4(2-m-c)} - \frac{3m^2}{4(2-m)} - 2A_1^{(6)} + 3A_2^{(3)}}{2-m-c},$$

$$C_1^{(13)} = \frac{\frac{21m^2(2+3m)}{4(2-3m-c)} + \frac{21m^2}{4(2-3m)} - 2A_1^{(7)} + 3A_2^{(4)}}{2-3m-c},$$

$$C_1^{(14)} = \frac{-2A_1^{(8)} + 3A_2^{(5)}}{c+m},$$

$$C_1^{(15)} = \frac{-2A_1^{(9)} + 3A_2^{(5)}}{c-m},$$

$$C_1^{(16)} = \frac{\left\{ \begin{aligned} & \frac{3m^2(10+19m+8m^2)}{8(2c-2+2m)} - \frac{3m^2(1+m)}{2-2m-c} - \frac{9m^2}{16(1-m)} \\ & - 3A_2^{(0)} + 3A_1^{(1)} - 2A_1^{(4)} - \frac{3m^2 \tilde{A}_2^{(10)} + \frac{15m^2}{4} (A_1^{(1)})^2}{2c-2+2m} \end{aligned} \right\}}{2c-2+2m}.$$

Cette valeur de  $C_1^{(16)}$  semble être de l'ordre zéro; car son numérateur renferme plusieurs termes de l'ordre  $m$ , et son diviseur est du même ordre. Mais on a vu, dans le n° 5, qu'en n'ayant égard qu'à la première puissance de la force perturbatrice, la valeur de  $C_1^{(16)}$  ne peut avoir pour diviseur le carré de  $2c - 2 + 2m$ ; il faut donc que l'ensemble de ces termes se détruise aux quantités près de l'ordre  $m$ : c'est en effet ce que le calcul confirme *a posteriori*. Il suit de là que, dans les valeurs de  $A_1^{(1)}$  et de  $A_1^{(4)}$  de l'expression de  $C_1^{(16)}$ , on doit rejeter les termes dépendants des carrés de  $e$ ,  $e'$  et  $\gamma$ . Chacun de ces termes introduit dans  $C_1^{(16)}$  des quantités de l'ordre  $e^2$ , tandis que leur ensemble n'y produit



qu'une quantité de l'ordre  $e^2m$ , que l'on peut conséquemment négliger; il y a donc de l'inconvénient à ne considérer qu'une partie de ces termes, et il est préférable de les négliger tous. C'est un de ces cas singuliers de l'analyse des approximations, dans lesquels on peut s'éloigner de la vérité, en considérant un plus grand nombre de termes.

On a ensuite

$$C_1^{(17)} = \frac{\frac{3m^2(2+m)}{8(2g-2+2m)} - \frac{3m^2}{16(1-m)} - 2A_1^{(13)} - \frac{3}{4}A_2^{(0)} - \frac{3m^2A_2^{(12)}}{2g-2+2m}}{2g-2+2m}.$$

On doit appliquer à cette valeur de  $C_1^{(17)}$  une remarque analogue à celle que nous venons de faire sur  $C_1^{(16)}$ . Enfin on a

$$C_1^{(18)} = -\frac{A_2^{(14)}}{m},$$

$$C_1^{(19)} = \frac{-3m^2}{8(1-m)} + \frac{3m^2(5+3m)}{4(1-m)} \frac{A_1^{(17)} - 2A_1^{(17)}(1+\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}\gamma^2) + 3A_2^{(0)}A_1^{(17)}}{1-m},$$

$$C_0^{(20)} = -2A_0^{(18)}.$$

16. Déterminons présentement les valeurs numériques de ces divers coefficients. Pour cela, nous remarquerons que les observations donnent

$$m = 0,0748013,$$

$$c = 0,99154801,$$

$$g = 1,00402175,$$

$$e' = 0,016814, \text{ à l'époque de } 1750,$$

$$\gamma = 0,0900807.$$

Suivant les observations, l'argument  $C_0^{(0)} e \sin(cv - \varpi)$  est à très-peu près égal à  $-69992'',3 \sin(cv - \varpi)$ . On a donné, dans le numéro précédent, la valeur analytique de  $C_0^{(0)}$ ; en y substituant, pour  $A_2^{(0)}$  et  $A_1^{(1)}$ , leurs valeurs qu'une première approximation m'a fait connaître, j'en ai conclu

$$e = 0,05487293.$$

Cette valeur a toute la précision nécessaire pour la détermination des



coefficients  $A_2^{(0)}$ ,  $A_1^{(1)}$ ,  $A_2^{(2)}$ , .... J'ai supposé, conformément aux phénomènes des marées, la masse de la Lune  $\frac{1}{58,7}$  de celle de la Terre. Cela posé, les équations entre ces coefficients, trouvées dans les nos 10 et 14, deviennent

$$\begin{aligned}
 A_2^{(0)} &= 0,00723508 - 0,00501814 \cdot (B_1^{(0)} - B_2^{(1)}), \\
 A_1^{(1)} &= 0,204044 - 0,0660894 \cdot A_2^{(0)} - 0,0480577 \cdot (B_2^{(5)} - B_2^{(6)}), \\
 A_2^{(2)} &= -0,00372953, \\
 A_2^{(3)} &= -0,00315160 - 0,00449610 \cdot B_1^{(9)}, \\
 A_2^{(4)} &= 0,0289026 - 0,00564793 \cdot B_1^{(10)}, \\
 A_1^{(6)} &= -0,193315 + 0,104996 \cdot A_1^{(1)} + 0,372796 \cdot A_1^{(9)}, \\
 A_1^{(7)} &= 0,538027 + 0,0334044 \cdot A_1^{(1)} + 0,135144 \cdot A_1^{(8)}, \\
 A_1^{(8)} &= -0,0908432 + 0,139071 \cdot A_1^{(1)} - 0,280299 \cdot A_1^{(7)}, \\
 A_1^{(9)} &= 0,0791193 + 1,055799 \cdot A_1^{(1)} + 0,270902 \cdot A_1^{(6)}, \\
 A_2^{(10)} &= 0,00285368 - 0,00415018 \cdot B_0^{(11)}, \\
 A_1^{(11)} &= 0,366100 - 0,0172338 \cdot A_1^{(1)} - 0,259744 \cdot A_2^{(10)} - 0,324680 \cdot (A_1^{(1)})^2, \\
 A_2^{(12)} &= 0,00265066, \\
 A_1^{(13)} &= 0,0523335 - 1,555935 \cdot B_1^{(0)} - 0,220276 \cdot A_2^{(12)}, \\
 A_2^{(14)} &= -0,0129890, \\
 A_0^{(15)} &= -0,1007403 + 0,0385084 \cdot A_1^{(1)} + 2,09016 \cdot A_1^{(13)} \\
 &\quad - 1,022473 \cdot A_1^{(6)} - 36,11032 \cdot (B_2^{(3)} - B_1^{(0)} B_2^{(5)}), \\
 A_1^{(16)} &= 0,114623 + 0,166591 \cdot A_0^{(15)} - 5,07811 \cdot B_2^{(4)}, \\
 A_1^{(17)} &= -0,121028 + 0,937593 \cdot A_2^{(0)} - 0,000031563 \cdot A_0^{(18)} \\
 &\quad - 0,139767 \cdot (B_2^{(14)} + B_2^{(15)}), \\
 A_0^{(18)} &= 1,208124 + 1,018700 \cdot A_1^{(17)} - 5,074801 \cdot A_1^{(19)}, \\
 A_1^{(19)} &= -0,121295 + 0,675879 \cdot A_1^{(17)} + 0,183834 \cdot A_0^{(18)}, \\
 B_1^{(0)} &= 0,0287031 - 0,0574772 \cdot A_2^{(0)} + 0,000432665 \cdot A_1^{(1)}, \\
 B_2^{(1)} &= -0,00000236395, \\
 B_2^{(2)} &= -0,00564433 + 0,0048210 \cdot B_1^{(0)}, \\
 B_2^{(3)} &= 0,0166486 + 0,0166486 \cdot A_1^{(1)} - 0,0165194 \cdot B_1^{(0)},
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
B_2^{(4)} &= 0,00656716 - 0,00708386 \cdot B_1^{(0)}, \\
B_2^{(5)} &= 0,0000147361 - 0,00681821 \cdot A_1^{(1)}, \\
B_2^{(6)} &= -0,0183098 - 0,0170013 \cdot (A_1^{(1)} - B_1^{(0)}), \\
B_1^{(7)} &= 0,0809777 + 0,0249192 \cdot B_1^{(0)} - 0,0478194 \cdot B_1^{(10)}, \\
B_1^{(8)} &= -0,0868568 + 0,187099 \cdot B_1^{(0)} + 0,0556224 \cdot B_1^{(9)}, \\
B_1^{(9)} &= -0,0263090 - 0,0787687 \cdot B_1^{(0)} + 0,0506541 \cdot B_1^{(8)}, \\
B_1^{(10)} &= 0,0712575 - 0,03047765 \cdot B_1^{(0)} + 0,0211192 \cdot B_1^{(7)}, \\
B_0^{(11)} &= 0,421270 + 0,842540 \cdot A_1^{(1)} - 0,337016 \cdot A_1^{(11)} + 0,586564 \cdot B_1^{(0)} \\
&\quad + 0,157666 \cdot B_1^{(12)}, \\
B_1^{(12)} &= 0,000194141 - 0,168403 \cdot A_1^{(1)} + 0,0673614 \cdot (A_1^{(11)} + \frac{1}{2} B_0^{(11)}), \\
B_1^{(13)} &= 0,0847889 + 0,147896 \cdot (A_1^{(1)} - \frac{1}{2} B_1^{(0)}) - 0,0591586 \cdot A_1^{(11)}, \\
B_2^{(14)} &= -0,0125619, \\
B_2^{(15)} &= 0,00386625.
\end{aligned}$$

J'ai conclu de ces équations les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
A_2^{(0)} &= 0,00709262, \\
A_1^{(1)} &= 0,202619, \\
A_2^{(2)} &= -0,00372953, \\
A_2^{(3)} &= -0,00300427, \\
A_2^{(4)} &= 0,0284957, \\
A_1^{(6)} &= -0,0698493, \\
A_1^{(7)} &= 0,516751, \\
A_1^{(8)} &= -0,207510, \\
A_1^{(9)} &= 0,274122, \\
A_2^{(10)} &= 0,00081065, \\
A_1^{(11)} &= 0,349068, \\
A_2^{(12)} &= 0,00265066, \\
A_1^{(13)} &= 0,0075875, \\
A_2^{(14)} &= -0,0129890,
\end{aligned}$$



$$A_0^{(15)} = -0,742373,$$

$$A_1^{(16)} = -0,041378,$$

$$A_1^{(17)} = -0,113197,$$

$$A_0^{(18)} = 1,08469,$$

$$A_1^{(19)} = 0,001601,$$

$$B_1^{(0)} = 0,0283831,$$

$$B_2^{(1)} = -0,00000236395,$$

$$B_2^{(2)} = -0,00550748,$$

$$B_2^{(3)} = 0,0195530,$$

$$B_2^{(4)} = 0,00636608,$$

$$B_2^{(5)} = -0,00136676,$$

$$B_2^{(6)} = -0,0212720,$$

$$B_1^{(7)} = 0,0782400,$$

$$B_1^{(8)} = -0,0833684,$$

$$B_1^{(9)} = -0,0327678,$$

$$B_1^{(10)} = 0,0720448,$$

$$B_0^{(11)} = 0,491954,$$

$$B_1^{(12)} = 0,0061023,$$

$$B_1^{(13)} = 0,0920621,$$

$$B_2^{(14)} = -0,0125619,$$

$$B_2^{(15)} = 0,00386625.$$

Au moyen de ces valeurs, j'ai rectifié la valeur de  $e$ , en faisant usage de l'équation

$$C_0^{(0)} e = -69992'',3.$$

L'expression de  $C_0^{(0)}$  trouvée dans le n° 15 donne

$$C_0^{(0)} = -2,003974,$$

d'où j'ai conclu

$$e = 0,05486281,$$



ce qui diffère très-peu de la valeur déjà employée. J'ai trouvé ensuite

$$C_0^{(1)} = 0,752886,$$

$$C_0^{(2)} = -0,336175,$$

$$C_0^{(3)} = 0,243118,$$

$$C_0^{(4)} = 0,722823,$$

$$C_0^{(5)} = -0,250034,$$

$$C_2^{(6)} = -0,00919876,$$

$$C_1^{(7)} = -0,414046,$$

$$C_2^{(8)} = 0,0129865,$$

$$C_2^{(9)} = 0,00392546,$$

$$C_2^{(10)} = -0,0387853,$$

$$A_2^{(5)} = -0,00571628,$$

$$C_1^{(11)} = 0,196755,$$

$$C_1^{(12)} = 0,127650,$$

$$C_1^{(13)} = -1,081734,$$

$$C_1^{(14)} = 0,373115,$$

$$C_1^{(15)} = -0,616738.$$

Il faut, par le numéro précédent, employer dans le calcul de  $C_1^{(16)}$  et de  $C_1^{(17)}$  les valeurs de  $A_1^{(1)}$ ,  $A_1^{(11)}$  et  $A_1^{(13)}$ , déterminées en n'ayant point égard aux carrés de l'excentricité et de l'inclinaison de l'orbite lunaire. J'ai trouvé ainsi les valeurs suivantes de  $A_1^{(1)}$ ,  $A_1^{(11)}$ ,  $A_1^{(13)}$  et  $B_1^{(0)}$  dont on doit faire usage dans ce calcul,

$$A_1^{(1)} = 0,201816,$$

$$A_1^{(11)} = 0,349187,$$

$$A_1^{(13)} = 0,0077734,$$

$$B_1^{(0)} = 0,0282636,$$

d'où l'on tire

$$C_1^{(16)} = 0,272377,$$

$$C_1^{(17)} = 0,033825.$$



On a ensuite

$$C_1^{(18)} = 0,173647,$$

$$C_1^{(19)} = 0,236616,$$

$$C_0^{(20)} = -2,16938.$$

Cela posé, l'expression de  $nt + \varepsilon$  du n° 15 devient, en réduisant en secondes ses coefficients,

$$\begin{aligned} nt + \varepsilon = & v + \frac{3}{2}m^2 \int (e'^2 - E'^2) dv \\ & - 69992'', 30. \sin(cv - \varpi) \\ & + 1442'', 66. \sin(2cv - 2\varpi) \\ & - 35'', 34. \sin(3cv - 3\varpi) \\ & + 1255'', 92. \sin(2gv - 2\theta) \\ & + 204'', 86. \sin(2gv - cv - 2\theta + \varpi) \\ & - 70'', 86. \sin(2gv + cv - 2\theta - \varpi) \\ & - 5856'', 11. \sin(2v - 2mv) \\ & - 14461'', 28. \sin(2v - 2mv - cv + \varpi) \\ & + 453'', 58. \sin(2v - 2mv + cv - \varpi) \\ & + 42'', 02. \sin(2v - 2mv + c'mv - \varpi') \\ & - 415'', 16. \sin(2v - 2mv - c'mv + \varpi') \\ & + 2106'', 09. \sin(c'mv - \varpi') \\ & + 74'', 96. \sin(2v - 2mv - cv + c'mv + \varpi - \varpi') \\ & - 635'', 26. \sin(2v - 2mv - cv - c'mv + \varpi + \varpi') \\ & + 219'', 11. \sin(cv + c'mv - \varpi - \varpi') \\ & - 362'', 18. \sin(cv - c'mv - \varpi + \varpi') \\ & + 521'', 91. \sin(2cv - 2v + 2mv - 2\varpi) \\ & + 174'', 74. \sin(2gv - 2v + 2mv - 2\theta) \\ & + 31'', 25. \sin(2c'mv - 2\varpi') \\ & + 376'', 586. (1+i). \sin(v - mv) \\ & - 58'', 053. (1+i). \sin(v - mv + c'mv - \varpi'). \end{aligned}$$

Les deux derniers termes ont été déterminés en supposant  $\frac{a}{a'} = \frac{1+i}{400}$ . Cette fraction dépend des parallaxes du Soleil et de la Lune; elle diffère très-peu de  $\frac{1}{400}$ ; mais, pour plus de généralité, nous l'affectons



du coefficient indéterminé  $1 + i$ , et en comparant le terme dépendant de  $\sin(\nu - m\nu)$  au résultat des observations, nous en concluons dans la suite la parallaxe solaire.

Il est facile de voir, par ce qui précède, que les perturbations de l'orbe terrestre par la Lune introduisent dans  $A_1^{(17)}$  la quantité  $0,25044 \cdot \mu$ , et par conséquent dans  $C_1^{(9)}$  la quantité  $-0,54139 \cdot \mu$ ; d'où résulte, dans l'expression de la longitude vraie de la Lune, l'inégalité  $0,54139 \cdot \mu \frac{a}{a'} \sin(\nu - m\nu)$ . L'action directe de la Lune sur la Terre produit, dans le mouvement de cette planète, l'inégalité  $\frac{a}{a'} \mu \sin(\nu - m\nu)$ ; cette action est donc réfléchiée à la Lune par le moyen du Soleil, mais affaiblie dans le rapport de  $0,54139$  à l'unité (\*).

L'expression précédente de  $n\iota + \varepsilon$  renferme les quantités  $c$  et  $g$ , et ces quantités dépendent de l'action du Soleil. Nous avons donné leurs valeurs analytiques dans les nos 10 et 14. En les réduisant en nombres, on trouve

$$\begin{aligned} c &= 0,991567, \\ g &= 1,0040105. \end{aligned}$$

Le mouvement  $(1 - c)\nu$  du périégée lunaire est donc, par la théorie précédente, égal à  $0,008433 \cdot \nu$ . Ce mouvement, par les observations, est égal à  $0,008452 \cdot \nu$ , ce qui ne diffère du précédent que de sa quatre cent quarante-cinquième partie.

Le mouvement du périégée est assujetti à une équation séculaire dont nous avons donné l'expression analytique dans le n° 10. En la réduisant en nombres, elle devient

$$3,00052 \cdot \frac{3}{2} m^2 f(e'^2 - E'^2) d\nu.$$

Elle a un signe contraire à l'équation séculaire du mouvement moyen, et elle est à fort peu près trois fois plus grande.

(\*) On a réimprimé cet alinéa conformément à l'édition originale. Dans la deuxième édition, les nombres  $0,25044$  et  $0,54139$  ont été remplacés respectivement par  $0,226384$  et  $0,452768$ , en conséquence du changement qu'on a fait subir dans la même édition à l'une des dernières formules du n° 10 (voir la note de la page 231); seulement, par suite d'une erreur typographique, ces deux nombres  $0,226384$  et  $0,452768$  ont été imprimés chacun à la place de l'autre dans le premier membre de phrase de l'alinéa.



Le mouvement rétrograde  $(g-1)v$  du nœud de l'orbite lunaire est, par la théorie précédente,  $0,0040105.v$ . Ce mouvement, par les observations, est égal à  $0,00402175.v$ , ce qui ne diffère pas du précédent de sa trois cent cinquantième partie.

Ce mouvement du nœud est assujéti à une équation séculaire dont nous avons donné l'expression analytique dans le n° 14. En la réduisant en nombres, elle devient

$$0,735452.\frac{3}{2}m^2 f(e'^2 - E'^2) dv.$$

Elle a un signe contraire à celle de la longitude moyenne de la Lune; d'où il suit que les mouvements des nœuds et du périégée se ralentissent quand celui de la Lune s'accélère, et les équations séculaires de ces trois mouvements sont constamment dans le rapport des nombres  $3,00052$ ,  $0,735452$  et  $1$ . On doit donc, dans l'expression précédente de  $nt + \varepsilon$ , substituer, au lieu des angles  $cv$  et  $gv$ , les quantités

$$\begin{aligned} cv &- 3,00052.\frac{3}{2}m^2 f(e'^2 - E'^2) dv, \\ gv &+ 0,735452.\frac{3}{2}m^2 f(e'^2 - E'^2) dv. \end{aligned}$$

L'équation séculaire de l'anomalie moyenne est ainsi

$$-4,00052.\frac{3}{2}m^2 f(e'^2 - E'^2) dv,$$

ou à très-peu près quadruple de celle du moyen mouvement.

17. Nous allons présentement déterminer quelques-unes des inégalités les plus sensibles du quatrième ordre. L'une de ces inégalités est relative à l'angle  $2v - 2mv - 2gv + cv + 2\theta - \varpi$ , et nous avons déterminé précédemment la partie de  $\alpha \delta u$  qui dépend du cosinus de cet angle. On trouve ensuite, par le n° 15, que l'expression de  $nt + \varepsilon$  renferme l'inégalité

$$\frac{3m^2(2+m)}{8(2g-2+2m)} - 2A_1^{(46)} + 3A_1^{(43)} \frac{e\gamma^2 \sin(2v - 2mv - 2gv + cv + 2\theta - \varpi)}{2 - 2m - 2g + c}.$$

Cette inégalité, réduite en nombres, devient

$$26'',77 \cdot \sin(2v - 2mv - 2gv + cv + 2\theta - \varpi).$$



Considérons encore l'inégalité relative à l'angle  $2c\nu + 2\nu - 2m\nu - 2\varpi$ . Si l'on rassemble tous les termes dépendants du cosinus de cet angle, que donne le développement de la seconde des équations (L) du n° 1, et que nous avons déterminés dans le n° 6, cette équation devient, en n'ayant égard qu'à ces termes,

$$0 = \frac{d^2u}{d\nu^2} + u + \frac{3m^2}{2a_1} \cdot \frac{(10 - 19m + 8m^2)(2 + c - m)}{4(c - m + 1)} e^2 \cos(2c\nu + 2\nu - 2m\nu - 2\varpi);$$

en nommant donc  $A_2^{(0)} e^2 \cos(2c\nu + 2\nu - 2m\nu - 2\varpi)$  le terme correspondant de  $a \delta u$ , on aura

$$A_2^{(0)} = \frac{\frac{3m^2}{2} (10 - 19m + 8m^2)(2 - m + c)}{4(c - m + 1)[4(c - m + 1)^2 - 1]}.$$

Si l'on nomme ensuite  $C_2^{(0)} e^2 \sin(2c\nu + 2\nu - 2m\nu - 2\varpi)$  le terme correspondant de l'expression de  $nt + \varepsilon$ , on trouve, par le n° 15,

$$C_2^{(0)} = \frac{\frac{-3m^2}{2} \cdot \frac{10 - 19m + 8m^2}{8(c - m + 1)} - \frac{3m^2(1 - m)}{2 - 2m + c} - \frac{9m^2}{16(1 - m)}}{2c - 2m + 2} - 2A_2^{(0)} + 3A_2^{(2)} - 3A_2^{(0)}.$$

En réduisant ces formules en nombres, on a

$$A_2^{(0)} = 0,00201041,$$

$$C_2^{(0)} = -0,0130618,$$

d'où résulte, dans  $nt + \varepsilon$ , l'inégalité

$$-25'',03 \sin(2c\nu + 2\nu - 2m\nu - 2\varpi).$$

L'expression de  $dt$  du n° 15 donne, dans  $nt + \varepsilon$ , le terme

$$\frac{3A_2^{(4)} ee' \sin(2\nu - 2m\nu + c\nu - c'm\nu - \varpi + \varpi')}{2 - 3m + c}.$$

Ce terme est sensible, à cause de la grandeur du coefficient  $A_2^{(4)}$ ; il est donc utile de considérer l'inégalité relative à l'argument  $2\nu - 2m\nu + c\nu - c'm\nu - \varpi + \varpi'$ . La seconde des équations (L) du



n° 1 donne, en n'ayant égard qu'à ces termes, que nous avons développés dans le n° 6,

$$0 = \frac{d^2 u}{dv^2} + u - \frac{m^2}{a_1} \cdot \frac{21(2-3m)(4-3m+c)}{4(2-3m+c)} ee' \cos(2v - 2mv + cv - c'mv - \varpi + \varpi').$$

Soit

$$\Lambda_2^{(1)} ee' \cos(2v - 2mv + cv - c'mv - \varpi + \varpi')$$

la partie de  $a\delta u$  dépendante de l'argument dont il s'agit; on aura

$$\Lambda_2^{(1)} = - \frac{21m^2(2-3m)(4-3m+c)}{4(2-3m+c)[(2-3m+c)^2-1]}.$$

Si l'on nomme ensuite

$$C_2^{(1)} ee' \sin(2v - 2mv + cv - c'mv - \varpi + \varpi')$$

la partie de  $nt + \epsilon$  relative au même argument, on trouve, par le n° 15,

$$C_2^{(1)} = \frac{\frac{21m^2(2-3m)}{4(2-3m+c)} + \frac{21m^2}{4(2-3m)}}{2-3m+c} = 2\Lambda_2^{(1)} + 3\Lambda_2^{(4)}.$$

En réduisant ces formules en nombres, on trouve

$$\Lambda_2^{(1)} = -0,0134975,$$

$$C_2^{(1)} = 0,0534480,$$

ce qui donne dans  $nt + \epsilon$  l'inégalité

$$31'', 39. \sin(2v - 2mv + cv - c'mv - \varpi + \varpi').$$

Les inégalités dépendantes des angles  $2cv - 2v + 2mv \pm c'mv - 2\varpi \mp \varpi'$  semblent devoir être sensibles par les grands diviseurs que les intégrations leur font acquérir; il importe donc de les déterminer avec soin. En suivant l'analyse exposée précédemment, et en n'ayant égard qu'aux quantités du quatrième ordre, si l'on représente la partie correspondante de  $a\delta u$  par

$$\Lambda_1^{(2)} e^2 e' \cos(2cv - 2v + 2mv + c'mv - 2\varpi - \varpi') \\ + \Lambda_1^{(3)} e^2 e' \cos(2cv - 2v + 2mv - c'mv - 2\varpi + \varpi'),$$



l'équation différentielle en  $u$  devient

$$0 = \frac{d^2 u}{d\nu^2} + u + \frac{3m^2}{a_1} \left[ \frac{7(2+11m+8m^2)}{16} - \frac{7(10+19m+8m^2)}{8(2c-2+3m)} \right] e^2 e' \cos \left( \begin{array}{l} 2c\nu - 2\nu + 2m\nu \\ + c'm\nu - 2\varpi - \varpi' \end{array} \right) \\ + \frac{3m^2}{a_1} \left[ \frac{10+19m+8m^2}{8(2c-2+m)} - \frac{2+11m+8m^2}{16} \right] e^2 e' \cos \left( \begin{array}{l} 2c\nu - 2\nu + 2m\nu \\ - c'm\nu - 2\varpi + \varpi' \end{array} \right);$$

on aura donc

$$A_1^{(2)} = \frac{-3m^2}{1 - \frac{3}{2}m^2 - (2c-2+3m)^2} \left[ \frac{7(2+11m+8m^2)}{16} - \frac{7(10+19m+8m^2) + 40A_1^{(8)}}{8(2c-2+3m)} \right], \\ A_1^{(3)} = \frac{-3m^2}{1 - \frac{3}{2}m^2 - (2c-2+m)^2} \left[ \frac{10+19m+8m^2 - 40A_1^{(9)}}{8(2c-2+m)} - \frac{2+11m+8m^2}{16} \right].$$

Si l'on désigne la partie correspondante de  $nt + \varepsilon$  par

$$C_1^{(2)} e^2 e' \cos(2c\nu - 2\nu + 2m\nu + c'm\nu - 2\varpi - \varpi') \\ + C_1^{(3)} e^2 e' \cos(2c\nu - 2\nu + 2m\nu - c'm\nu - 2\varpi + \varpi'),$$

on aura, par le n° 15,

$$C_1^{(2)} = \frac{\left\{ \frac{21m^2(10+19m+8m^2) + 120m^2 A_1^{(8)}}{16(2c-2+3m)} - \frac{21m^2(2+3m)}{4(2-3m-c)} - \frac{63m^2}{16(2-3m)} \right\}}{2c-2+3m}, \\ C_1^{(3)} = \frac{\left\{ \frac{-3m^2(10+19m+8m^2) + 120m^2 A_1^{(9)}}{16(2c-2+m)} + \frac{3m^2(2+m)}{4(2-m-c)} + \frac{9m^2}{16(2-m)} \right\}}{2c-2+m}.$$

En réduisant ces formules en nombres, on trouve

$$A_1^{(2)} = 0,744932, \\ A_1^{(3)} = -0,0153320, \\ C_1^{(2)} = 0,563137, \\ C_1^{(3)} = -0,0235572,$$



d'où résultent, dans  $nt + \varepsilon$ , les deux inégalités

$$\begin{aligned} & 18'', 15. \sin(2c\nu - 2\nu + 2m\nu + c'm\nu - 2\varpi - \varpi') \\ & - 0'', 76. \sin(2c\nu - 2\nu + 2m\nu - c'm\nu - 2\varpi + \varpi'). \end{aligned}$$

Les inégalités dépendantes des arguments  $2c\nu \pm c'm\nu - 2\varpi \mp \varpi'$  sont très-faciles à déterminer par la considération de l'expression de  $dt$  du n° 15. Cette expression donne, dans celle de  $nt + \varepsilon$ , les inégalités

$$\begin{aligned} & \frac{3\Lambda_1^{(8)}e^2e'}{2c+m} \sin(2c\nu + c'm\nu - 2\varpi - \varpi') \\ & + \frac{3\Lambda_1^{(9)}e^2e'}{2c-m} \sin(2c\nu - c'm\nu - 2\varpi + \varpi'), \end{aligned}$$

et il est aisé de voir que ce sont les seuls termes du quatrième ordre qui dépendent de ces arguments. En les réduisant en nombres, on a, dans  $nt + \varepsilon$ , les deux inégalités suivantes

$$\begin{aligned} & - 9'', 75. \sin(2c\nu + c'm\nu - 2\varpi - \varpi') \\ & + 13'', 89. \sin(2c\nu - c'm\nu - 2\varpi + \varpi'). \end{aligned}$$

Il est facile de voir, par l'expression de  $dt$  du n° 15, que l'inégalité dépendante de l'argument  $4\nu - 4m\nu - c\nu + \varpi$  doit être sensible. Pour la déterminer, nommons

$$\Lambda_3^{(4)}e \cos(4\nu - 4m\nu - c\nu + \varpi)$$

le terme correspondant de  $a\delta u$ . Il est clair qu'il ne peut en résulter de semblables dans l'équation différentielle en  $u$  que par la variation des termes de la seconde des équations (L) du n° 1, dus à la force perturbatrice. Nous avons développé ces variations dans le n° 8. La première est

$$-\frac{3m'u'^3}{2h^2u^4} \delta u,$$

et elle ne produit aucun terme du quatrième ordre dépendant de  $\cos(4\nu - 4m\nu - c\nu + \varpi)$ . La seconde variation est

$$-\frac{9m'u'^3}{2h^2u^4} \delta u. \cos(2\nu - 2\nu') + \frac{3m'u'^3}{h^2u^3} \delta\nu'. \sin(2\nu - 2\nu');$$



elle produit le terme

$$-\frac{3m^2}{4a_1} (3-4m) \Lambda_1^{(1)} e \cos(4v-4mv-cv+\varpi).$$

La troisième variation est

$$\frac{6m'u'^3}{h^2u^4} \frac{\delta u}{u} \frac{du}{dv} \sin(2v-2v') - \frac{3m'u'^3}{2h^2u^4} \frac{d\delta u}{dv} \sin(2v-2v') + \frac{3m'u'^3 \delta v'}{h^2u^4} \frac{du}{dv} \cos(2v-2v');$$

elle produit le terme

$$-\frac{3m^2}{4a_1} (2-2m-c) \Lambda_1^{(1)} e \cos(4v-4mv-cv+\varpi).$$

Enfin la quatrième variation est

$$\begin{aligned} & \frac{12m'}{h^2a} \left[ 1 + \frac{3}{4}\gamma^2 \cdot \cos(2gv-2\theta) \right] \int \frac{u'^3 dv}{u^4} \left[ \frac{\delta u}{u} \sin(2v-2v') + \frac{1}{2} \delta v' \cos(2v-2v') \right] \\ & - \left( \frac{d^2 \delta u}{dv^2} + \delta u \right) \int \frac{3m'u'^3 dv}{h^2u^4} \sin(2v-2v') - \frac{9m'}{h^2a} \int \frac{u'^2 \delta u'}{u^4} dv \cdot \sin(2v-2v'); \end{aligned}$$

elle produit le terme

$$-\frac{3m^2}{a_1} \frac{2-5m}{4-4m-c} \Lambda_1^{(1)} e \cos(4v-4mv-cv+\varpi).$$

L'équation différentielle en  $u$  deviendra donc, en n'ayant égard qu'à ces différents termes,

$$0 = \frac{d^2 u}{dv^2} + u - \frac{3m^2}{4a_1} \left( 5-6m-c + \frac{4(2-5m)}{4-4m-c} \right) \Lambda_1^{(1)} e \cos(4v-4mv-cv+\varpi).$$

En y substituant

$$\Lambda_3^{(4)} e \cos(4v-4mv-cv+\varpi)$$

pour  $a\delta u$ , on aura

$$\Lambda_3^{(4)} = \frac{-\frac{3m^2}{4} \left( 5-6m-c + \frac{4(2-5m)}{4-4m-c} \right) \Lambda_1^{(1)}}{(4-4m-c)^2 - 1}.$$

Si l'on nomme ensuite

$$C_3^{(4)} e \sin(4v-4mv-cv+\varpi)$$



le terme correspondant de  $nt + \varepsilon$ , on aura, par le n° 15,

$$C_3^{(4)} = \frac{\left( \frac{3m^2}{4(1-m)} + \frac{3m^2(1-m)}{4-4m-c} + 3A_2^{(0)} \right) A_1^{(1)} - 2A_3^{(4)}}{4-4m-c}.$$

En réduisant ces formules en nombres, on trouve

$$A_3^{(4)} = -0,000799351,$$

$$C_3^{(4)} = 0,00294934,$$

d'où résulte, dans l'expression de  $nt + \varepsilon$ , l'inégalité

$$103'',01. \sin(4v - 4mv - cv + \varpi).$$

L'inégalité dépendante de  $4v - 4mv - 2cv + 2\varpi$  peut encore être sensible : l'expression de  $ndt$  du n° 15 contient le terme

$$\frac{3}{2}(A_1^{(1)})^2 e^2 dv. \cos(4v - 4mv - 2cv + 2\varpi),$$

d'où résulte dans  $nt + \varepsilon$  le terme

$$\frac{3(A_1^{(1)})^2 e^2 \sin(4v - 4mv - 2cv + 2\varpi)}{2(4 - 4m - 2c)}.$$

Il est aisé de voir que c'est le seul terme du quatrième ordre, dépendant du même argument, qui entre dans l'expression de  $nt + \varepsilon$ . En le réduisant en secondes, il devient

$$68'',70. \sin(4v - 4mv - 2cv + 2\varpi).$$

On verra ci-après que les Tables de Mason et de Bürg s'accordent à ne donner que  $46''$  environ pour le coefficient de cette inégalité, ce qui semble indiquer que ce coefficient est bien déterminé par les observations. Ainsi la différence  $22''$ , qui existe entre leur résultat et celui de notre analyse, vient en grande partie des quantités du cinquième ordre, que nous avons négligées dans le calcul. Pour le prouver, et faire voir en même temps qu'une plus grande approximation diminue les différences entre la théorie et les observations, nous allons



déterminer ce coefficient, en ayant égard aux quantités du cinquième ordre.

Désignons par

$$A_3^{(5)} e^2 \cos(4v - 4mv - 2cv + 2\varpi)$$

le terme correspondant de  $a\delta u$ ; il est clair qu'il ne peut en résulter de semblables, dans l'équation différentielle en  $u$ , que par la variation des termes de la seconde des équations (L) du n° 1, dus à la force perturbatrice. Nous venons de donner les quatre variations de ces termes : la première ne produit aucun terme du cinquième ordre dépendant de  $\cos(4v - 4mv - 2cv + 2\varpi)$ . La seconde variation produit le terme

$$\frac{9m^2}{4a} (2A_1^{(1)} - A_1^{(11)}) e^2 \cos(4v - 4mv - 2cv + 2\varpi).$$

Les termes du cinquième ordre, dépendants de  $\cos(4v - 4mv - 2cv + 2\varpi)$ , et produits par la troisième variation, se détruisent mutuellement, aux quantités près du sixième ordre. Enfin, la quatrième variation produit le terme

$$\frac{3m^2}{2a} \left[ \frac{5A_1^{(1)} - 2A_1^{(11)}}{2 - 2m - c} + \frac{(1 - 2m)(3 - 2m)(10 + 19m + 8m^2)}{4(2c - 2 + 2m)} A_2^{(0)} + \frac{A_1^{(11)}}{2 - 2m} \right] e^2 \cos \left( \begin{array}{l} 4v - 4mv \\ -2cv + 2\varpi \end{array} \right).$$

L'équation différentielle en  $u$  devient donc, en n'ayant égard qu'à ces termes,

$$0 = \frac{d^2u}{dv^2} + u + \frac{3m^2}{2a} \left[ \begin{array}{l} 3A_1^{(1)} - \frac{3}{2}A_1^{(11)} + \frac{5A_1^{(1)} - 2A_1^{(11)}}{2 - 2m - c} + \frac{A_1^{(11)}}{2 - 2m} \\ + \frac{(1 - 2m)(3 - 2m)(10 + 19m + 8m^2)}{4(2c - 2 + 2m)} A_2^{(0)} \end{array} \right] e^2 \cos \left( \begin{array}{l} 4v - 4mv \\ -2cv + 2\varpi \end{array} \right).$$

En substituant  $A_3^{(5)} e^2 \cos(4v - 4mv - 2cv + 2\varpi)$  pour  $a\delta u$ , on aura

$$A_3^{(5)} = \frac{3m^2}{2} \frac{\left\{ \begin{array}{l} 3A_1^{(1)} - \frac{3}{2}A_1^{(11)} + \frac{5A_1^{(1)} - 2A_1^{(11)}}{2 - 2m - c} + \frac{A_1^{(11)}}{2 - 2m} \\ + \frac{(1 - 2m)(3 - 2m)(10 + 19m + 8m^2)}{4(2c - 2 + 2m)} A_2^{(0)} \end{array} \right\}}{(4 - 4m - 2c)^2 - 1}$$



Si l'on désigne ensuite par

$$C_2^{(5)} e^2 \sin(4\nu - 4m\nu - 2c\nu + 2\varpi)$$

le terme correspondant de  $nt + \varepsilon$ , on aura, par le n° 15,

$$C_2^{(5)} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} -\frac{3m^2(5A_1^{(4)} - 2A_1^{(4)})}{4(2-2m-c)} - \frac{27m^4}{64(1-m)} \frac{10+19m+8m^2}{2c-2+2m} - 2A_3^{(5)} \\ + 3A_3^{(4)} + \frac{3m^2}{4(1-m)} A_1^{(4)} - \frac{3m^2 A_1^{(4)}}{2-2m-c} - \frac{3m^2(10+19m+8m^2)}{8(2c-2+2m)} A_2^{(0)} \\ + \frac{3}{2}(A_1^{(4)})^2 + 3A_2^{(0)} A_1^{(4)} - 6A_1^{(4)} A_2^{(0)} \end{array} \right\}}{4-4m-2c} \quad (1).$$

En réduisant ces formules en nombres, on trouve

$$A_3^{(5)} = 0,00436374, \quad C_2^{(5)} = 0,0249067,$$

ce qui donne, dans  $nt + \varepsilon$ , l'inégalité

$$47'',71. \sin(4\nu - 4m\nu - 2c\nu + 2\varpi).$$

La différence entre ce résultat et celui des Tables est insensible, et l'on voit par ce calcul que, pour rapprocher entièrement la théorie de l'observation à l'égard de toutes les inégalités lunaires, il suffirait de porter l'approximation jusqu'aux quantités du cinquième ordre. Cela résulte encore du calcul de l'inégalité dépendante de  $\sin(\nu - m\nu)$ , dans lequel nous avons eu égard aux quantités de cet ordre; car on verra dans la suite que le résultat de notre analyse, comparé à celui des observations, donne à très-peu près la parallaxe du Soleil, que l'on a conclue des passages de Vénus sur cet astre.

L'inégalité dépendante de l'argument  $c\nu - \nu + m\nu - \varpi$  peut être sensible, à cause de la petitesse du coefficient de  $\nu$  dans cet argument. Pour la déterminer, désignons par

$$A_1^{(6)} \frac{a}{a'} e \cos(c\nu - \nu + m\nu - \varpi),$$

$$C_1^{(6)} \frac{a}{a'} e \sin(c\nu - \nu + m\nu - \varpi)$$

(1) Selon Bowditch, le diviseur de  $3m^2 A_1^{(4)}$  dans cette formule doit être  $4-4m-c$ , au lieu de  $2-2m-c$ . V. P.



les parties de  $a\delta u$  et de  $nt + \varepsilon$  qui dépendent de cet argument; on aura, en ayant égard aux perturbations de la Terre par la Lune,

$$\Lambda_1^{(6)} = \frac{-3m^2 \left( \frac{21 - 11c - 7m - 20\mu}{16} - 5\Lambda_1^{(47)} - \frac{5}{8}\Lambda_1^{(4)} \right)}{(c + m - 1) \left[ 1 - (c + m - 1)^2 - \frac{3}{2}m^2 \right]},$$

$$C_1^{(6)} = \frac{-\frac{3m^2}{2} \left( \frac{5 + 2m - 10\mu}{8} - 5\Lambda_1^{(47)} - \frac{5}{8}\Lambda_1^{(4)} \right)}{c + m - 1} - \frac{2\Lambda_1^{(6)} + 3\Lambda_1^{(47)} + 3\Lambda_1^{(4)}\Lambda_1^{(47)} + \frac{3m^2}{8(1-m)}}{c + m - 1},$$

d'où l'on tire

$$\Lambda_1^{(6)} = -0,260496,$$

$$C_1^{(6)} = -0,293763.$$

De là résulte dans  $nt + \varepsilon$  l'inégalité

$$-25'',65.(1+i)\sin(cv - v + mv - \varpi).$$

L'inégalité dépendante de l'argument  $v - mv + cv - \varpi$  est facile à déterminer par le n° 15; il est aisé de voir qu'elle est égale à

$$\frac{3\Lambda_1^{(47)}}{1+c-m} \frac{a}{a'} e \sin(v - mv + cv - \varpi),$$

et par conséquent égale à

$$-15'',47(1+i)\sin(v - mv + cv - \varpi).$$

En suivant les mêmes procédés, on déterminera les autres inégalités du quatrième ordre; mais, comme elles sont au-dessous des erreurs de nos approximations, il ne sera utile de les considérer par la théorie que lorsqu'on voudra porter l'approximation jusqu'aux quantités du cinquième ordre.

Maintenant, si l'on rassemble les inégalités du quatrième ordre que nous venons de déterminer, on aura

$$+ 26'',77.\sin(2v - 2mv - 2gv + cv + 2\theta - \varpi)$$

$$- 25'',03.\sin(2cv + 2v - 2mv - 2\varpi)$$

$$+ 31'',39.\sin(2v - 2mv + cv - c'mv - \varpi + \varpi')$$



$$\begin{aligned}
& + 18'', 15. \sin(2cv - 2v + 2mv + c'mv - 2\omega - \omega') \\
& - 0'', 76. \sin(2cv - 2v + 2mv - c'mv - 2\omega + \omega') \\
& - 9'', 75. \sin(2cv + c'mv - 2\omega - \omega') \\
& + 13'', 89. \sin(2cv - c'mv - 2\omega + \omega') \\
& + 103'', 01. \sin(4v - 4mv - cv + \omega) \\
& + 47'', 71. \sin(4v - 4mv - 2cv + 2\omega) \\
& - 25'', 65. (1+i). \sin(cv - v + mv - \omega) \\
& - 15'', 47. (1+i). \sin(v - mv + cv - \omega)
\end{aligned}$$

18. Considérons le mouvement de la Lune en latitude. Nous avons déterminé précédemment la tangente  $s$  de sa latitude; or l'expression de l'arc par la tangente  $s$  est  $s - \frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{5}s^5 - \dots$ ; ainsi la latitude de la Lune est à très-peu près

$$\begin{aligned}
& \gamma(1 - \frac{1}{4}\gamma^2) \sin(gv - \theta) + \delta s [1 - \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{1}{2}\gamma^2 \cos(2gv - 2\theta)] \\
& \quad + \frac{1}{12}\gamma^3 \sin(3gv - 3\theta);
\end{aligned}$$

d'où j'ai conclu, en employant la valeur précédente de  $\gamma$ , la latitude égale à

$$\begin{aligned}
& 57230'', 83. \sin(gv - \theta) \\
& + 38'', 78. \sin(3gv - 3\theta) \\
& + 1621'', 09. \sin(2v - 2mv - gv + \theta) \\
& + 3'', 52. \sin(2v - 2mv + gv - \theta) \\
& - 17'', 26. \sin(gv + cv - \theta - \omega) \\
& + 61'', 27. \sin(gv - cv - \theta + \omega) \\
& + 19'', 95. \sin(2v - 2mv - gv + cv + \theta - \omega) \\
& - 4'', 28. \sin(2v - 2mv + gv - cv - \theta + \omega) \\
& - 66'', 66. \sin(2v - 2mv - gv - cv + \theta + \omega) \\
& + 75'', 14. \sin(gv + c'mv - \theta - \omega') \\
& - 80'', 06. \sin(gv - c'mv - \theta + \omega') \\
& - 31'', 47. \sin(2v - 2mv - gv + c'mv + \theta - \omega') \\
& + 69'', 19. \sin(2v - 2mv - gv - c'mv + \theta + \omega') \\
& + 84'', 57. \sin(2cv - gv - 2\omega + \theta) \\
& + 15'', 83. \sin(2cv + gv - 2v + 2mv - 2\omega - \theta).
\end{aligned}$$



19. Il nous reste à déterminer la troisième coordonnée de la Lune ou sa parallaxe. Le sinus de la parallaxe horizontale de la Lune est égal à  $\frac{D}{r}$  ou à  $\frac{Du}{\sqrt{1+s^2}}$ ,  $D$  étant le rayon terrestre. Vu la petitesse de cette quantité, on peut la prendre pour l'expression de la parallaxe elle-même. En y substituant pour  $u$  sa valeur

$$\frac{1}{a} [1 + e^2 + \frac{1}{4}\gamma^2 + e(1 + e^2) \cos(cv - \varpi) - \frac{1}{4}\gamma^2 \cos(2gv - 2\theta)] + \delta u$$

et négligeant les termes de l'ordre  $\frac{D}{a} e^3$ , on aura la parallaxe égale à

$$\frac{D}{a} (1 + e^2) \left\{ 1 + e \left[ 1 - \frac{1}{4}\gamma^2 + \frac{1}{4}\gamma^2 \cos(2gv - 2\theta) \right] \cos(cv - \varpi) + a\delta u - s\delta s \right\}.$$

Pour déterminer  $\frac{D}{a}$ , nous observerons que l'on a, par le n° 10,

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a_1} 0,9973020,$$

et par le n° 15,

$$\frac{a^2}{\sqrt{a_1}} \cdot 1,0003084 = \frac{1}{n},$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{a} = \sqrt[3]{\frac{n^2 (1,0003084)^2}{0,9973020}}.$$

Soit  $2\varepsilon$  le double de l'espace que l'attraction terrestre ferait décrire dans le temps  $t$ , sur le parallèle dont le carré du sinus de latitude est  $\frac{1}{3}$ . Cette attraction est  $\frac{M}{D^2}$ , par le n° 35 du Livre III, la Terre  $M$  étant supposée elliptique. Mais on a fait précédemment

$$M + m = 1,$$

$m$  étant ici la masse de la Lune; on a donc

$$\frac{Mt^2}{(M + m)D^2} = 2\varepsilon;$$



partant

$$\frac{D}{a} = \sqrt[3]{\frac{M}{M+m} \frac{D}{2\varepsilon} \frac{n^2 t^2 (1,0003084)^2}{0,9973020}}.$$

Supposons  $t$  égal à une seconde, et nommons  $T$  le nombre des secondes d'une révolution sidérale de la Lune; on aura

$$n^2 = \frac{4\pi^2}{T^2},$$

$\pi$  étant le rapport de la demi-circonférence au rayon. Soit  $l$  la longueur du pendule à secondes, due à la gravité sur le parallèle que nous considérons; on aura, par le n° 15 du Livre I,

$$2\varepsilon = \pi^2 l,$$

ce qui donne

$$\frac{D}{a} = \sqrt[3]{\frac{M}{M+m} \frac{D}{l} \frac{(2,0006168)^2}{0,9973020 \cdot T^2}}.$$

La longueur du pendule à secondes sur le même parallèle est, par le n° 42 du Livre III, égale à  $0^m,740905$ ; il faut l'augmenter de sa 434<sup>e</sup> partie pour avoir la longueur qui aurait lieu sans la force centrifuge, ce qui donne

$$l = 0^m,742612.$$

La valeur de  $D$  est égale à  $6369374^m$ ; enfin on a, par les phénomènes des marées,

$$m = \frac{M}{58,6},$$

et les observations donnent

$$T = 2732166;$$

on aura ainsi

$$\frac{D}{a} = 0,01655101.$$

En évaluant en secondes le coefficient  $\frac{D}{a} (1 + e^2)$ , on le trouve égal à  $10568'',41$ . Cela posé, on trouve, pour l'expression de la parallaxe



de la Lune sur le parallèle dont il s'agit,

$$\begin{aligned}
 & 10568'',41 + 578'',63. \cos(cv - \varpi) \\
 & + 76'',18. \cos(2v - 2mv) \\
 & + 117'',49. \cos(2v - 2mv - cv + \varpi) \\
 & - 2'',16. \cos(2v - 2mv + cv - \varpi) \\
 & - 0'',53. \cos(2v - 2mv + c'mv - \varpi') \\
 & + 5'',06. \cos(2v - 2mv - c'mv + \varpi') \\
 & - 1'',03. \cos(c'mv - \varpi') \\
 & - 0'',68. \cos(2v - 2mv - cv + c'mv + \varpi - \varpi') \\
 & + 5'',04. \cos(2v - 2mv - cv - c'mv + \varpi + \varpi') \\
 & - 2'',02. \cos(cv + c'mv - \varpi - \varpi') \\
 & + 2'',67. \cos(cv - c'mv - \varpi + \varpi') \\
 & + 0'',03. \cos(2cv - 2\varpi) \\
 & + 11'',10. \cos(2cv - 2v + 2mv - 2\varpi) \\
 & + 0'',23. \cos(2gv - 2\theta) \\
 & - 0'',54. \cos(2gv - 2v + 2mv - 2\theta) \\
 & - 0'',04. \cos(2c'mv - 2\varpi') \\
 & - 2'',92. \cos(2gv - cv - 2\theta + \varpi) \\
 & - 0'',20. \cos(2v - 2mv - 2gv + cv + 2\theta - \varpi) \\
 & - 2'',99. (1 + i). \cos(v - mv) \\
 & + 0'',48. (1 + i). \cos(v - mv + c'mv - \varpi') \\
 & - 0'',13. \cos(2v - 2mv + cv - c'mv - \varpi + \varpi') \\
 & - 0'',46. \cos(4v - 4mv - cv + \varpi) \\
 & + 0'',14. \cos(4v - 4mv - 2cv + 2\varpi) \\
 & + 0'',40. \cos(2cv - 2v + 2mv + c'mv - 2\varpi - \varpi') \\
 & + 0'',07. \cos(2cv + 2v - 2mv - 2\varpi) \\
 & - 0'',38. (1 + i). \cos(cv - v + mv - \varpi).
 \end{aligned}$$



## CHAPITRE II.

DES INÉGALITÉS LUNAIRES DUES A LA NON-SPHÉRICITÉ DE LA TERRE  
ET DE LA LUNE.

20. Nous allons présentement considérer les termes dus à la non-sphéricité de la Terre et de la Lune. On a vu, dans le n° 1, que, pour y avoir égard, il suffit d'augmenter, dans l'expression de Q, la quantité  $\frac{M+m}{r}$  de

$$(M+m) \left( \frac{\partial V}{M} + \frac{\partial V'}{m} \right).$$

Si l'on nomme  $\alpha\rho$  l'ellipticité de la Terre, D son rayon moyen,  $\alpha\varphi$  le rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur, enfin  $\mu$  le sinus de la déclinaison de la Lune, on a, par le n° 35 du Livre III,

$$V = \frac{M}{r} + \left( \frac{1}{2}\alpha\varphi - \alpha\rho \right) \frac{D^2}{r^3} M \left( \mu^2 - \frac{1}{3} \right).$$

Si la Terre n'est pas elliptique, on a, par le n° 32 du Livre III,

$$V = \frac{M}{r} + \left[ \left( \frac{1}{2}\alpha\varphi - \alpha\rho \right) \left( \mu^2 - \frac{1}{3} \right) + \alpha h' (1 - \mu^2) \cos 2\varpi \right] M \frac{D^2}{r^3},$$

$\alpha\rho$  et  $\alpha h'$  étant des constantes dépendantes de la figure du sphéroïde terrestre, et  $\varpi$  étant l'angle formé par l'un des deux axes principaux de la Terre situés dans le plan de l'équateur, avec le méridien terrestre passant par le centre de la Lune. Il est facile de voir, par l'analyse suivante, que le terme dépendant de  $\cos 2\varpi$  n'a aucune influence sensible sur le mouvement lunaire, à cause de la rapidité avec laquelle l'angle  $\varpi$  varie, en sorte que la valeur de V dont on doit ici faire usage



est la même que dans l'hypothèse elliptique et d'une ellipticité égale à  $\alpha\rho$ ; mais, dans le cas général d'un sphéroïde quelconque,  $\alpha\rho$  n'exprime plus son aplatissement. On peut donc supposer, dans ce cas général, que la valeur de Q du n° 1 s'accroît, par la considération de la non-sphéricité de la Terre, de la fonction

$$\left(\frac{1}{2}\alpha\varphi - \alpha\rho\right) \frac{D^2}{r^3} \left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right),$$

M + m étant pris pour l'unité de masse.

Considérons d'abord la variation de l'orbite, ou le mouvement de la Lune en latitude, dépendant de cette cause. Si l'on nomme  $\lambda$  l'obliquité de l'écliptique sur l'équateur, et si l'on fixe l'origine de l'angle  $\nu$  à l'équinoxe du printemps d'une époque donnée, on aura, à très-peu près,

$$\mu = \sin\lambda \sqrt{1-s^2} \sin f\nu + s \cos\lambda,$$

$f\nu$  étant la longitude vraie de la Lune, rapportée à l'équinoxe mobile du printemps. Il faut ainsi ajouter à la valeur de Q la fonction

$$\left(\frac{1}{2}\alpha\varphi - \alpha\rho\right) \frac{D^2}{r^3} \left[\sin^2\lambda(1-s^2) \sin^2 f\nu + 2s \sin\lambda \cos\lambda \sin f\nu + s^2 \cos^2\lambda - \frac{1}{3}\right].$$

Cela posé, reprenons la troisième des équations (L) du n° 1. Nous avons développé, dans les nos 11, 12 et 13, les divers termes de cette équation dus à l'action du Soleil; il est facile de voir que la fonction précédente lui ajoute la quantité

$$\frac{2\left(\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi\right)}{h^2} D^2 u \sin\lambda \cos\lambda \sin f\nu + (g^2 - 1) H \sin f\nu,$$

$H \sin f\nu$  désignant l'inégalité de  $s$  dépendante de  $\sin f\nu$ . On peut d'ailleurs se convaincre aisément que cette quantité est la seule sensible qui résulte de cette fonction. En l'ajoutant à l'équation différentielle du n° 13, et observant que  $f-1$  est extrêmement petit par rapport à  $g-1$ , l'intégration donnera

$$H = \frac{2\left(\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi\right)}{1-g^2} \frac{D^2}{a^2} \sin\lambda \cos\lambda,$$



d'où résulte dans  $s$ , ou dans le mouvement de la Lune en latitude, l'inégalité

$$-\frac{\alpha\varphi - \frac{1}{2}\alpha\varphi}{g-1} \frac{D^2}{a^2} \sin\lambda \cos\lambda \sin fv.$$

C'est la seule inégalité sensible du mouvement lunaire en latitude, due à la non-sphéricité de la Terre. Cette inégalité revient évidemment à supposer que l'orbite de la Lune, au lieu de se mouvoir sur le plan de l'écliptique avec une inclinaison constante, se meut avec la même condition sur un plan passant constamment par les équinoxes, entre l'équateur et l'écliptique, et incliné à ce dernier plan, d'un angle égal à

$$\frac{\alpha\varphi - \frac{1}{2}\alpha\varphi}{g-1} \frac{D^2}{a^2} \sin\lambda \cos\lambda.$$

Nous avons trouvé précédemment

$$\frac{D}{a} = 0,01655101, \quad g-1 = 0,00402175;$$

on avait, en 1750,

$$\lambda = 26^{\circ},0796;$$

enfin  $\alpha\varphi = \frac{1}{289}$ ; en supposant donc  $\alpha\varphi = \frac{1}{334}$ , l'inégalité précédente devient

$$-20'',023 \cdot \sin fv.$$

Elle serait

$$-41'',470 \cdot \sin fv,$$

si l'aplatissement de la Terre était  $\frac{1}{230}$ , comme dans le cas de l'homogénéité de cette planète; cette inégalité, bien observée, est donc très-propre à faire connaître l'aplatissement de la Terre.

Considérons présentement les variations du rayon vecteur et de la longitude de la Lune, dues à la non-sphéricité de la Terre. Nous pouvons les déduire de la première et de la seconde des équations (L) du n° 1; mais il est plus exact et plus simple de faire usage des formules



du n° 46 du Livre II. Pour cela, nous supposons que, dans ce n° 46, la caractéristique différentielle  $\delta$  se rapporte à la quantité  $\frac{1}{2}\alpha\varphi - \alpha\rho$ . Nous observerons ensuite que la fonction R du même numéro est égale à ce que nous représentons ici par

$$-Q + \frac{1}{r},$$

et que  $rR'$  est égal à  $r \frac{\partial R}{\partial r}$ , ce qui change l'équation (S) du numéro cité dans la suivante

$$0 = \frac{d^2 \cdot r \delta r}{dt^2} + \frac{r \delta r}{r^3} + 2 f \delta dR + \delta \cdot r \frac{\partial R}{\partial r}.$$

R contient le terme

$$2(\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi) \frac{D^2}{r^3} \sin\lambda \cos\lambda \cdot s \sin f\nu,$$

et par conséquent celui-ci

$$(\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi) \frac{D^2}{r^3} \sin\lambda \cos\lambda \cdot \gamma \cos(g\nu - f\nu - \theta);$$

en supposant donc que  $\delta R$  représente ce terme,  $f\delta dR$  sera égal à ce même terme; car, la caractéristique différentielle  $d$  se rapportant aux seules coordonnées de la Lune, on aura, en n'ayant égard qu'au terme précédent,

$$f\delta dR = \delta R;$$

on aura ensuite

$$\delta \cdot r \frac{\partial R}{\partial r} = -3(\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi) \frac{D^2}{r^3} \sin\lambda \cos\lambda \cdot \gamma \cos(g\nu - f\nu - \theta).$$

Si l'on substitue ces valeurs de  $f\delta dR$  et de  $\delta \cdot r \frac{\partial R}{\partial r}$  dans l'équation différentielle précédente, on verra que l'expression  $\delta r$  contient un terme dépendant de  $\cos(g\nu - f\nu - \theta)$ , mais qui, n'ayant point  $g - 1$  pour diviseur, comme le terme correspondant de  $\delta s$ , est insensibile.



Il n'en est pas de même de l'expression de la longitude. La formule (T) du n° 46 du Livre II donne, dans  $d\delta\varphi$ , la fonction

$$\frac{3 dt^2 f \delta dR + 2 dt^2 \cdot \delta \cdot r \frac{\partial R}{\partial r}}{r^2 d\varphi}.$$

En y substituant pour  $\delta R$  le terme qu'il représente, on aura, dans  $d\delta\varphi$ , le terme

$$-\frac{3 dt^2 (\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi)}{r^2 d\varphi} \frac{D^2}{r^3} \sin\lambda \cos\lambda \cdot \gamma \cos(g\nu - f\nu - \theta).$$

Mais ce terme n'est pas le seul de ce genre qui entre dans l'expression de  $d\delta\varphi$ . L'action du Soleil donne, par le n° 3, dans Q, le terme

$$\frac{m' u'^3}{4 u^2} (1 - 2s^2).$$

En y substituant, pour  $u$ ,  $\frac{\sqrt{1+s^2}}{r}$ , on aura, dans R, le terme

$$-\frac{m' u'^3 r^2}{4} (1 - 3s^2),$$

ce qui donne, dans  $\delta R$ , le terme

$$\frac{3 m' u'^3 r^2}{2} s \delta s,$$

et par conséquent, dans la fonction  $3f\delta dR + 2\delta \cdot r \frac{\partial R}{\partial r}$ , le terme

$$\frac{21 m' u'^3 r^2}{2} s \delta s.$$

On a à très-peu près  $m' u'^3 r^3 = m^2$ , et, par le n° 13,  $g^2$  est à fort peu près égal à  $1 + \frac{3}{2}m^2$ , ce qui donne  $g$  égal à  $1 + \frac{3}{4}m^2$ ; le terme précédent devient ainsi

$$\frac{14(g-1)s\delta s}{r}.$$

En substituant, pour  $\delta s$ ,  $-\frac{\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi}{g-1} \frac{D^2}{r^2} \sin\lambda \cos\lambda \sin f\nu$ , et pour  $s$ ,



$\gamma \sin(gv - \theta)$ , on aura le terme

$$- \gamma (\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi) \frac{D^2}{r^3} \sin\lambda \cos\lambda \cdot \gamma \cos(gv - fv - \theta),$$

qui, ajouté au terme que nous venons de trouver pour  $3f\delta dR + 2\delta \cdot r \frac{\partial R}{\partial r}$ , donne dans  $d\delta v$  le terme

$$- \frac{10 dt^2 (\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi)}{r^2 dv} \frac{D^2}{r^3} \sin\lambda \cos\lambda \cdot \gamma \cos(gv - fv - \theta).$$

On peut, dans ce terme, substituer  $a$  pour  $r$ , et  $dv$  pour  $ndt$ ; en observant ensuite que  $n^2 a^3 = 1$ , il devient

$$- 10 dv (\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi) \frac{D^2}{a^2} \sin\lambda \cos\lambda \cdot \gamma \cos(gv - fv - \theta).$$

Cette valeur de  $d\delta v$  est, par le n° 46 du Livre II, relative à l'angle compris entre les deux rayons vecteurs consécutifs  $r$  et  $r + dr$ ; or, si l'on nomme  $dv$ , cet angle,  $dv$  représentant alors sa projection sur le plan de l'écliptique, on a, par le numéro cité,

$$dv = dv, \frac{\sqrt{(1+s^2)^2 - \frac{ds^2}{dv^2}}}{\sqrt{1+s^2}},$$

ou, à très-peu près,

$$dv = dv, \left( 1 + \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2} \frac{ds^2}{dv^2} \right).$$

En substituant, pour  $s$ ,

$$\gamma \sin(gv - \theta) - \frac{\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi}{g-1} \frac{D^2}{a^2} \sin\lambda \cos\lambda \sin fv,$$

on aura

$$dv = dv, \left[ 1 + \frac{1}{2} (\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi) \frac{D^2}{a^2} \gamma \sin\lambda \cos\lambda \cos(gv - fv - \theta) + \dots \right].$$

On voit donc que, pour avoir la valeur de  $d\delta v$ , relative à l'angle  $v$  formé par la projection du rayon vecteur  $r$  sur l'écliptique avec une



droite fixe, il faut ajouter à l'expression précédente de  $d\delta v$  le terme

$$\frac{1}{2} d v (\alpha \rho - \frac{1}{2} \alpha \varphi) \frac{D^2}{a^2} \sin \lambda \cos \lambda . \gamma \cos (g v - f v - \theta),$$

ce qui donne

$$d \delta v = - \frac{19}{2} d v (\alpha \rho - \frac{1}{2} \alpha \varphi) \frac{D^2}{a^2} \sin \lambda \cos \lambda . \gamma \cos (g v - f v - \theta),$$

et, en intégrant,

$$\delta v = - \frac{19}{2} \frac{\alpha \rho - \frac{1}{2} \alpha \varphi}{g - 1} \frac{D^2}{a^2} \sin \lambda \cos \lambda . \gamma \sin (g v - f v - \theta).$$

C'est la seule inégalité sensible du mouvement de la Lune en longitude, due à la non-sphéricité de la Terre. On doit observer que  $f v - g v + \theta$  exprime la longitude du nœud ascendant de l'orbite, comptée de l'équinoxe mobile du printemps. Il suit de là que l'expression de la longitude vraie en fonction de la longitude moyenne renferme l'inégalité

$$\frac{19}{2} \frac{\alpha \rho - \frac{1}{2} \alpha \varphi}{g - 1} \frac{D^2}{a^2} \sin \lambda \cos \lambda . \gamma \sin (\text{longitude du nœud ascendant}).$$

Le coefficient de cette inégalité est  $17'' , 135$ , si  $\rho = \frac{1}{334}$ ; il s'élève à  $35'' , 490$ , si  $\rho = \frac{1}{230}$ .

La non-sphéricité de la Terre influe encore sur les mouvements du périégée et des nœuds de l'orbite lunaire. En effet, la valeur de  $Q$  étant par là augmentée de la quantité

$$(\alpha \rho - \frac{1}{2} \alpha \varphi) (1 - \frac{3}{2} s^2) [\frac{1}{3} - (1 - s^2) \sin^2 \lambda \sin^2 f v - 2 s \sin \lambda \cos \lambda \sin f v - s^2 \cos^2 \lambda] D^2 u^3,$$

il en résulte, dans la seconde des équations (L) du n° 1, le terme

$$- \frac{(\alpha \rho - \frac{1}{2} \alpha \varphi) D^2 u^2}{h^2} (1 - \frac{3}{2} \sin^2 \lambda).$$

En y substituant pour  $u$  sa valeur approchée  $\frac{1}{a} [1 + e \cos (c v - \varpi)]$ , et observant que  $h^2$  est à très-peu près égal à  $a$ , on aura, dans l'équation



différentielle (L') du n° 9, les termes

$$-\frac{\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi}{a} \frac{D^2}{a^2} (1 - \frac{3}{2}\sin^2\lambda),$$

$$-\frac{2(\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi)}{a} \frac{D^2}{a^2} (1 - \frac{3}{2}\sin^2\lambda) e \cos(cv - \omega);$$

d'où il est facile de conclure que le mouvement du périhélie sera augmenté à très-peu près de la quantité

$$(\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi) \frac{D^2}{a^2} v (1 - \frac{3}{2}\sin^2\lambda).$$

Il est aisé de voir, en considérant la troisième des équations (L) du n° 1, que le mouvement rétrograde du nœud sera augmenté de la même quantité. En la réduisant en nombres, on trouve 0,00000026384*v*, ce qui est insensible.

Nous ferons ici une remarque intéressante sur l'inégalité précédente du mouvement de la Lune en latitude. Cette inégalité n'est que la réaction de la nutation de l'axe terrestre, observée par Bradley. Pour le démontrer, nommons  $\gamma$  l'inclinaison de l'orbite lunaire sur le plan dont nous avons parlé, et qui, passant constamment par les équinoxes, est incliné à l'écliptique d'un angle égal à

$$\frac{\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi}{g-1} \frac{D^2}{a^2} \sin\lambda \cos\lambda.$$

L'inclinaison de l'orbite lunaire à l'écliptique sera

$$\gamma - \frac{\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi}{g-1} \frac{D^2}{a^2} \sin\lambda \cos\lambda \cos(gv - fv - \theta);$$

or l'aire décrite par la Lune autour du centre de gravité de la Terre est  $\frac{1}{2}r^2 dv$ ; cette aire, projetée sur l'écliptique, est diminuée dans le rapport du cosinus de l'inclinaison de l'orbite lunaire à l'écliptique au rayon; elle est donc égale à

$$\frac{1}{2}r^2 dv \cos \left[ \gamma - \frac{\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi}{g-1} \frac{D^2}{a^2} \sin\lambda \cos\lambda \cos(gv - fv - \theta) \right].$$



Ainsi, l'expression de cette aire renferme l'inégalité

$$\frac{1}{2} r^2 d\nu \frac{\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi}{g-1} \frac{D^2}{a^2} \sin\lambda \cos\lambda \cdot \gamma \cos(g\nu - f\nu - \theta);$$

et comme on a  $r^2 d\nu = a^2 dt$  à fort peu près, en représentant par  $dt$  le moyen mouvement de la Lune, cette inégalité est égale à

$$\frac{1}{2} D^2 dt \frac{\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi}{g-1} \sin\lambda \cos\lambda \cdot \gamma \cos(g\nu - f\nu - \theta).$$

En la multipliant par la masse de la Lune, que nous exprimerons ici par  $L$ , et en la divisant par  $dt$ , le double de ce quotient sera le moment de la force de la Lune par rapport au centre de gravité de la Terre, et due à la non-sphéricité de cette planète, ce qui donne, pour ce moment,

$$(i) \quad LD^2 \frac{\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi}{g-1} \sin\lambda \cos\lambda \cdot \gamma \cos(g\nu - f\nu - \theta).$$

En vertu de l'égalité de l'action à la réaction, la même cause doit produire, dans les molécules de la Terre, un moment égal et contraire au précédent. Ce moment est indiqué par la nutation de l'axe terrestre : déterminons sa valeur par les formules du n° 6 du Livre V. On a vu, dans le numéro cité, que, si l'on représente par  $V$  l'obliquité de l'écliptique à l'équateur, l'action de la Lune sur la Terre produit, en vertu de la non-sphéricité de cette planète, un accroissement dans cet angle, égal à

$$\frac{l\lambda}{(1+\lambda)(g-1)} \gamma \cos(g\nu - f\nu - \theta),$$

$l$  et  $\lambda$  étant les mêmes que dans le numéro cité. L'élément du mouvement de rotation de la Terre étant supposé  $n dt$ , la somme des moments des forces qui animent chaque molécule de la Terre, multipliées par la masse de cette molécule, est égale à  $nC$ ,  $C$  étant le moment d'inertie de la Terre par rapport à son axe de rotation. Pour rapporter ce moment à l'écliptique, il faut le multiplier par le cosinus de son obliquité, ou par

$$\cos \left[ V + \frac{l\lambda}{(1+\lambda)(g-1)} \gamma \cos(g\nu - f\nu - \theta) \right];$$



on aura donc dans ce moment l'inégalité

$$-\frac{l\lambda nC \sin V}{(1+\lambda)(g-1)} \gamma \cos(gv - fv - \theta).$$

On a vu, dans le n° 6 du Livre V, que

$$l = \frac{3m^2}{4n} \frac{2C - A - B}{C} (1 + \lambda) \cos V,$$

*mt* exprimant le moyen mouvement de la Terre. De plus, par le n° 5 du même Livre,  $m^2\lambda = \frac{L}{a^3}$ , *a* étant la moyenne distance de la Lune à la Terre; et puisque nous représentons par *t* le moyen mouvement de la Lune, et par *M* la masse de la Terre, on a à fort peu près  $\frac{M}{a^3} = 1$ , ce qui donne

$$m^2\lambda = \frac{L}{M};$$

l'inégalité précédente devient ainsi

$$-\frac{3L}{4M} \frac{2C - A - B}{g-1} \sin V \cos V \cdot \gamma \cos(gv - fv - \theta).$$

Par le n° 2 du Livre V,

$$2C - A - B = \frac{4}{3}\pi(\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi)D^2\int\Pi R^2 dR,$$

$\rho$  étant l'aplatissement de la Terre, *D* son demi-diamètre, et *R* le rayon d'une de ses molécules, dont  $\Pi$  est la densité; enfin,  $\pi$  étant la demi-circonférence dont le rayon est l'unité. La masse *M* de la Terre est  $4\pi\int\Pi R^2 dR$ , ce qui donne pour l'inégalité précédente, en y changeant *V* en  $\lambda$  qui, dans la formule précédente (*i*), exprime l'obliquité de l'écliptique,

$$-LD^2 \frac{\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi}{g-1} \sin\lambda \cos\lambda \cdot \gamma \cos(gv - fv - \theta).$$

Cette formule est la formule (*i*), prise avec un signe contraire, d'où il suit que l'inégalité précédente du mouvement de la Lune en latitude est la réaction de la nutation de l'axe terrestre, et il y aurait équilibre



autour du centre de gravité de la Terre en vertu des forces qui produisent ces deux inégalités, si toutes les molécules de la Terre et de la Lune étaient fixement liées entre elles, la Lune compensant la petitesse des forces qui l'animent par la longueur du levier auquel elle serait attachée.

21. Pour avoir égard à la non-sphéricité de la Lune, nous observerons que, par le n° 1, elle introduit dans  $Q$  le terme  $(M + m) \frac{\delta V'}{m}$ , ou plus simplement  $\frac{\delta V'}{m}$ , parce que nous supposons  $M + m = 1$ . On a, par le n° 14 du Livre III,

$$\delta V' = \frac{4\alpha\pi}{5r^3} \int \rho d(a^5 Y^{(2)}),$$

l'intégrale étant prise depuis  $a = 0$  jusqu'à  $a$  égal au demi-diamètre de la Lune, que nous désignerons par  $a$ , et  $\rho$  étant ici la densité des couches de la Lune. On a, de plus,  $m = \frac{4}{3}\pi \int \rho d.a^3$ ; on a donc

$$(M + m) \frac{\delta V'}{m} = \frac{3\alpha \int \rho d(a^5 Y^{(2)})}{5r^3 \int \rho d.a^3}.$$

Pour déterminer  $\int \rho d(a^5 Y^{(2)})$ , nous observerons que l'on a, par le n° 32 du Livre III, pour  $Y^{(2)}$ , une expression de cette forme,

$$Y^{(2)} = h' \left( \frac{1}{3} - \mu^2 \right) + h'' \mu \sqrt{1 - \mu^2} \sin \varpi + h''' \mu \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varpi \\ + h^{iv} (1 - \mu^2) \sin 2\varpi + h^v (1 - \mu^2) \cos 2\varpi.$$

Ensuite les propriétés des axes de rotation donnent, par le n° 32 du Livre III,

$$0 = \int \rho d(a^5 h''), \quad 0 = \int \rho d(a^5 h'''), \quad 0 = \int \rho d(a^5 h^{iv}),$$

et par le n° 2 du Livre V, on a

$$2C - A - B = \frac{4}{3}\alpha\pi \int \rho d(a^5 h'), \\ B - A = \frac{4}{3}\alpha\pi \int \rho d(a^5 h^v).$$



Ainsi l'on a

$$(M + m) \frac{\delta V'}{m} = \frac{9}{16\pi} \frac{1}{r^3} \frac{1}{f\rho d \cdot a^3} [(2C - A - B) \left(\frac{1}{3} - \mu^2\right) + (B - A)(1 - \mu^2) \cos 2\varpi].$$

On a à très-peu près, par le n° 2 du Livre V,

$$C = \frac{8\pi}{15} \int \rho d \cdot a^5;$$

partant,

$$(M + m) \frac{\delta V'}{m} = \frac{3}{10} \frac{\int \rho d \cdot a^5}{\int \rho d \cdot a^3} \frac{1}{r^3} \left[ \frac{2C - A - B}{C} \left(\frac{1}{3} - \mu^2\right) + \frac{B - A}{C} (1 - \mu^2) \cos 2\varpi \right].$$

Dans cette dernière expression,  $\varpi$  est l'angle que le rayon mené du centre de la Terre à celui de la Lune fait avec l'axe principal de ce satellite dirigé vers cette planète;  $\mu$  est le sinus de la déclinaison de la Terre vue de la Lune, par rapport à l'équateur lunaire. Il est clair que, l'angle  $\nu$  croissant de  $d\nu$ , l'angle  $\varpi$  croit de  $d\nu$ ; on a donc

$$d \cdot \cos 2\varpi = -2 d\nu \sin 2\varpi,$$

la caractéristique différentielle  $d$  se rapportant aux seules coordonnées de la Lune; de plus, on a, par le n° 46 du Livre II,

$$R = -Q + \frac{1}{r};$$

la partie de  $dR$  relative à la non-sphéricité de la Lune, dans la formule (Y) du n° 46 du Livre II, est ainsi, en négligeant le carré de  $\mu$ ,

$$dR = \frac{3}{5r^3} \frac{\int \rho d \cdot a^5}{\int \rho d \cdot a^3} \frac{B - A}{C} d\nu \sin 2\varpi,$$

d'où résulte dans  $\delta\nu$ , ou dans la longitude vraie de la Lune, par la formule (Y) du n° 46 du Livre II, le terme

$$\frac{9}{5} \frac{\int \rho d \cdot a^5}{\int \rho d \cdot a^3} \frac{1}{r^2} \frac{B - A}{C} \iint d\nu^2 \sin 2\varpi.$$

L'angle  $\varpi$  est toujours très-petit, par le n° 16 du Livre V, en sorte



que l'on peut supposer  $\sin 2\varpi = 2\varpi$ . De plus, par ce même numéro,  $\varpi$  contient un terme de la forme

$$-K \sin \left( \nu \sqrt{3 \frac{B-A}{C}} + F \right).$$

Ce terme, pris avec un signe contraire, représente, par le n° 15 du Livre V, la libration réelle de la Lune. Comme il croît avec beaucoup de lenteur, il semble pouvoir devenir sensible par la double intégration : c'est le seul de l'expression de  $\varpi$  auquel il soit nécessaire d'avoir égard. Il produit dans  $\delta\nu$  le terme

$$\frac{6}{5} \frac{\int \rho d. a^5}{\int \rho d. a^3} \frac{K}{r^2} \sin \left( \nu \sqrt{3 \frac{B-A}{C}} + F \right).$$

La libration

$$K \sin \left( \nu \sqrt{3 \frac{B-A}{C}} + F \right)$$

étant insensible, on ne peut pas supposer qu'elle s'élève à un degré. De plus, le coefficient  $\frac{6}{5} \frac{1}{r^2} \frac{\int \rho d. a^5}{\int \rho d. a^3}$  est extrêmement petit. Si la Lune est homogène, il devient  $\frac{6}{5} \frac{a^2}{r^2}$ ; or  $\frac{a}{r}$  est le sinus du demi-diamètre apparent de la Lune; ainsi le produit de  $K$  par ce coefficient est entièrement insensible. Si la Lune n'est pas homogène, sa densité croît de la surface au centre; alors ce coefficient est moindre encore : d'où l'on doit conclure que l'inégalité précédente de la longitude de la Lune est insensible, et que la non-sphéricité de ce satellite ne produit aucune variation sensible dans son mouvement en longitude.

Quant à sa latitude, on doit observer que,  $\mu$  étant le sinus de la déclinaison de la Terre vue de la Lune, par rapport à l'équateur lunaire, et le nœud ascendant de l'orbite lunaire coïncidant toujours avec le nœud descendant de son équateur, on a

$$\mu^2 = [s + \lambda \sin(g\nu - \theta)]^2,$$

$\lambda$  étant ici l'inclinaison de l'équateur lunaire à l'écliptique, ce qui



donne

$$\mu \frac{\partial \mu}{\partial s} = s + \lambda \sin(gv - \theta) = \frac{\lambda + \gamma}{\gamma} s;$$

la non-sphéricité de la Lune ajoute donc à l'expression de  $-\frac{1}{h^2 u^2} \frac{\partial Q}{\partial s}$ , dans la troisième des équations (L) du n° 1, le terme

$$\frac{3}{5} \frac{f \rho d . a^5}{f \rho d . a^3} \frac{1}{r^2} \frac{\lambda + \gamma}{\gamma} s \left( \frac{2C - A - B}{C} + \frac{B - A}{C} \cos 2\varpi \right),$$

ou, à cause de  $\cos 2\varpi = 1$  à très-peu près, elle lui ajoute le terme

$$\frac{6}{5} \frac{f \rho d . a^5}{f \rho d . a^3} \frac{1}{r^2} \frac{\lambda + \gamma}{\gamma} \frac{C - A}{C} s.$$

Il est facile de voir, par le n° 14, que ce terme ajoute au mouvement du nœud la quantité

$$\frac{3}{5} \frac{f \rho d . a^5}{f \rho d . a^3} \frac{\nu}{r^2} \frac{\lambda + \gamma}{\gamma} \frac{C - A}{C}.$$

Par le n° 18 du Livre V,  $\frac{C - A}{C} = 0,000599$ , d'où il est facile de voir que la quantité précédente est insensible.

On trouve pareillement que la non-sphéricité de la Lune ajoute au terme  $-\frac{s}{h^2 u} \frac{\partial Q}{\partial u}$  de la troisième des équations (L) du n° 1, le terme

$$-\frac{3}{5} \frac{f \rho d . a^5}{f \rho d . a^3} \frac{1}{r^2} \frac{C - 2A + B}{C} s,$$

ce qui ajoute au mouvement du nœud le terme

$$-\frac{3}{10} \frac{f \rho d . a^5}{f \rho d . a^3} \frac{\nu}{r^2} \frac{C - 2A + B}{C},$$

quantité entièrement insensible.



## CHAPITRE III.

## DES INÉGALITÉS DE LA LUNE DUES A L'ACTION DES PLANÈTES.

22. Il nous reste à considérer l'action des planètes sur la Lune. Si l'on nomme P la masse d'une planète, X, Y, Z ses coordonnées rapportées au centre de la Terre, f sa distance à ce centre, il est visible, par le n° 1, que la valeur de Q sera augmentée, par l'action de P, de la quantité

$$-\frac{P(xX + yY + zZ)}{f^3} + \frac{P}{\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2}},$$

ou

$$\frac{P}{f} - \frac{\frac{1}{2}Pr^2}{f^3} + \frac{3}{2}P \frac{(Xx + Yy + Zz)^2}{f^5} + \dots$$

Soient X', Y', Z' les coordonnées de P, rapportées au centre du Soleil, x', y', z' étant celles de la Terre; on aura

$$X = X' - x', \quad Y = Y' - y', \quad Z = Z' - z',$$

ce qui change la fonction précédente dans celle-ci,

$$\frac{P}{f} - \frac{\frac{1}{2}Pr^2}{f^3} + \frac{3}{2}P \frac{(X'x + Y'y + Z'z - xx' - yy' - zz')^2}{f^5} + \dots$$

Prenons pour plan fixe celui de l'écliptique, ce qui rend z' nul, et nommons R le rayon vecteur de la planète P projeté sur ce plan, U l'angle formé par cette projection et par une droite fixe prise sur le même plan, et S la tangente de la latitude héliocentrique de P. Nommons encore r' le rayon vecteur de la Terre, ϕ' l'angle formé par ce rayon et par la droite fixe; on aura

$$f = \sqrt{R^2(1 + S^2) + r'^2 - 2Rr' \cos(U - \phi')}.$$



La partie de Q relative à l'action de P sur la Lune sera donc

$$\frac{P}{f} - \frac{\frac{1}{2}P(1+s^2)}{u^2 f^3} + \frac{3}{2}P \frac{[R \cos(\nu - U) - r' \cos(\nu - \nu') + R s S]^2}{u^2 f^5} + \dots,$$

ou, en négligeant le carré de S,

$$\begin{aligned} \frac{P}{f} + \frac{P(1-2s^2)}{4u^2 f^3} + 3P \cdot \frac{R^2 \cos(2\nu - 2U) + r'^2 \cos(2\nu - 2\nu') - 2Rr' \cos(2\nu - U - \nu')}{4u^2 f^5} \\ + 3P \cdot \frac{R s S [R \cos(\nu - U) - r' \cos(\nu - \nu')]}{u^2 f^5} + \dots \end{aligned}$$

Le terme  $\frac{P}{f}$  ne renfermant ni  $u$ , ni  $\nu$ , ni  $s$ , il n'entre point dans les équations (L) du n° 1. Le terme  $\frac{P}{4u^2 f^3}$  donne par son développement une fonction de la forme

$$\frac{P}{4u^2} \left[ \frac{1}{2} A^{(0)} + A^{(1)} \cos(U - \nu') + A^{(2)} \cos 2(U - \nu') + \dots \right].$$

Le terme  $-\frac{1}{h^2} \frac{\partial Q}{\partial u}$  de la seconde des équations (L) du n° 1 donne ainsi la fonction

$$\frac{P}{2h^2 u^3} \left[ \frac{1}{2} A^{(0)} + A^{(1)} \cos(U - \nu') + A^{(2)} \cos 2(U - \nu') + \dots \right].$$

De là il est facile de conclure, par les n°s 9 et 10, qu'il en résulte dans l'expression de  $au$  la fonction

$$-\frac{1}{2} P a^3 \left[ \frac{A^{(1)} \cos(i-m)\nu}{1 - \frac{3}{2}m^2 - (i-m)^2} + \frac{A^{(2)} \cos 2(i-m)\nu}{1 - \frac{3}{2}m^2 - 4(i-m)^2} + \frac{A^{(3)} \cos 3(i-m)\nu}{1 - \frac{3}{2}m^2 - 9(i-m)^2} + \dots \right],$$

$i$  étant le rapport du moyen mouvement de P à celui de la Lune. De là résulte, par le n° 15, dans  $ndt$  la fonction

$$P a^3 d\nu \left[ \frac{A^{(1)} \cos(i-m)\nu}{1 - \frac{3}{2}m^2 - (i-m)^2} + \frac{A^{(2)} \cos 2(i-m)\nu}{1 - \frac{3}{2}m^2 - 4(i-m)^2} + \frac{A^{(3)} \cos 3(i-m)\nu}{1 - \frac{3}{2}m^2 - 9(i-m)^2} + \dots \right],$$

et par conséquent dans  $nt + \varepsilon$  la fonction

$$\frac{P a^3}{i-m} \left[ \frac{A^{(1)} \sin(i-m)\nu}{1 - \frac{3}{2}m^2 - (i-m)^2} + \frac{\frac{1}{2} A^{(2)} \sin 2(i-m)\nu}{1 - \frac{3}{2}m^2 - 4(i-m)^2} + \frac{\frac{1}{3} A^{(3)} \sin 3(i-m)\nu}{1 - \frac{3}{2}m^2 - 9(i-m)^2} + \dots \right].$$



Or on a, par ce qui précède,  $\frac{m' a^3}{a'^3} = m^2$ ,  $m'$  étant la masse du Soleil; la fonction précédente devient ainsi

$$(A) \frac{\frac{P}{m'} m^2 a'^3}{i-m} \left[ \frac{\Lambda^{(1)} \sin(i-m)\nu}{1 - \frac{3}{2}m^2 - (i-m)^2} + \frac{\frac{4}{3}\Lambda^{(2)} \sin 2(i-m)\nu}{1 - \frac{3}{2}m^2 - 4(i-m)^2} + \frac{\frac{4}{3}\Lambda^{(3)} \sin 3(i-m)\nu}{1 - \frac{3}{2}m^2 - 9(i-m)^2} + \dots \right].$$

Dans le cas d'une planète inférieure à la Terre, on a, en nommant  $\alpha$  le rapport de la distance moyenne de la planète au Soleil, à celle du Soleil à la Terre, et conservant les dénominations du Chap. VI du Livre VI,

$$a'^3 \Lambda^{(1)} = b_{\frac{3}{2}}^{(1)}, \quad a'^3 \Lambda^{(2)} = b_{\frac{3}{2}}^{(2)}, \quad a'^3 \Lambda^{(3)} = b_{\frac{3}{2}}^{(3)}, \quad \dots,$$

ce qui change la fonction (A) dans celle-ci,

$$(B) \frac{\frac{P}{m'} m^2}{i-m} \left[ \frac{b_{\frac{3}{2}}^{(1)} \sin(i-m)\nu}{1 - \frac{3}{2}m^2 - (i-m)^2} + \frac{\frac{4}{3}b_{\frac{3}{2}}^{(2)} \sin 2(i-m)\nu}{1 - \frac{3}{2}m^2 - 4(i-m)^2} + \frac{\frac{4}{3}b_{\frac{3}{2}}^{(3)} \sin 3(i-m)\nu}{1 - \frac{3}{2}m^2 - 9(i-m)^2} + \dots \right],$$

dans laquelle on peut prendre pour  $(i-m)\nu$  la longitude moyenne de la planète, moins celle de la Terre.

Relativement à une planète supérieure,  $\alpha$  exprime le rapport de la moyenne distance de la Terre au Soleil, à celle de la planète; ainsi l'on a

$$a'^3 \Lambda^{(1)} = \alpha^3 b_{\frac{3}{2}}^{(1)}, \quad a'^3 \Lambda^{(2)} = \alpha^3 b_{\frac{3}{2}}^{(2)}, \quad a'^3 \Lambda^{(3)} = \alpha^3 b_{\frac{3}{2}}^{(3)}, \quad \dots,$$

ce qui change la fonction (A) dans celle-ci,

$$(C) \frac{\frac{P}{m'} m^2 \alpha^3}{i-m} \left[ \frac{b_{\frac{3}{2}}^{(1)} \sin(i-m)\nu}{1 - \frac{3}{2}m^2 - (i-m)^2} + \frac{\frac{4}{3}b_{\frac{3}{2}}^{(2)} \sin 2(i-m)\nu}{1 - \frac{3}{2}m^2 - 4(i-m)^2} + \frac{\frac{4}{3}b_{\frac{3}{2}}^{(3)} \sin 3(i-m)\nu}{1 - \frac{3}{2}m^2 - 9(i-m)^2} + \dots \right].$$

Ce sont les seuls termes sensibles qui peuvent résulter de l'action directe de la planète P sur la Lune.

Mais l'action du Soleil sur la Lune peut rendre sensibles, dans le mouvement de ce satellite, les perturbations du rayon vecteur de l'orbe terrestre dues à l'action de P sur la Terre, et y produire des



inégalités du même ordre que celles que nous venons de considérer.

Pour le faire voir, considérons le terme  $\frac{m' u'^3}{2h^2 u^3}$ , qui, par le n° 6, fait partie de la seconde des équations (L) du n° 1. Soit

$$\frac{P}{m'} K \cos(\mathcal{E}' n'' t - \mathcal{E} n' t + B)$$

un terme quelconque de  $\frac{\partial r'}{a}$ , résultant de l'action de P sur la Terre,  $n'' t$  exprimant le moyen mouvement de P, et  $n' t$  étant celui de la Terre; le terme correspondant de  $\frac{\delta u'}{u'}$  sera

$$- \frac{P}{m'} K \cos(\mathcal{E}' n'' t - \mathcal{E} n' t + B);$$

ainsi le terme  $\frac{m' u'^3}{2h^2 u^3}$  produit le suivant,

$$- \frac{3 P u'^3}{2 h^2 u^3} K \cos(\mathcal{E}' n'' t - \mathcal{E} n' t + B).$$

Si l'on ne considère que les inégalités de  $\frac{\partial r'}{a}$  indépendantes des excentricités des orbites, et qu'on les représente par la série

$$\frac{P}{m'} \left[ K^{(1)} \cos(n'' t - n' t + \varepsilon'' - \varepsilon') + K^{(2)} \cos 2(n'' t - n' t + \varepsilon'' - \varepsilon') + K^{(3)} \cos 3(n'' t - n' t + \varepsilon'' - \varepsilon') + \dots \right],$$

le terme  $\frac{m' u'^3}{2h^2 u^3}$  produira, dans le second membre de l'équation (L') du n° 9, la fonction

$$- \frac{3m^2}{2a} \frac{P}{m'} [K^{(1)} \cos(i-m)\nu + K^{(2)} \cos 2(i-m)\nu + K^{(3)} \cos 3(i-m)\nu + \dots],$$

d'où résulte dans  $a \delta u$  la fonction

$$\frac{3m^2}{2} \frac{P}{m'} \left[ \frac{K^{(1)} \cos(i-m)\nu}{1 - \frac{3}{2}m^2 - (i-m)^2} + \frac{K^{(2)} \cos 2(i-m)\nu}{1 - \frac{3}{2}m^2 - 4(i-m)^2} + \frac{K^{(3)} \cos 3(i-m)\nu}{1 - \frac{3}{2}m^2 - 9(i-m)^2} + \dots \right],$$

et par conséquent, par le n° 15, dans  $nt + \varepsilon$  la fonction

$$(D) - \frac{3m^2}{i-m} \frac{P}{m'} \left[ \frac{K^{(1)} \sin(i-m)\nu}{1 - \frac{3}{2}m^2 - (i-m)^2} + \frac{\frac{1}{2}K^{(2)} \sin 2(i-m)\nu}{1 - \frac{3}{2}m^2 - 4(i-m)^2} + \frac{\frac{1}{3}K^{(3)} \sin 3(i-m)\nu}{1 - \frac{3}{2}m^2 - 9(i-m)^2} + \dots \right],$$



fonction du même ordre que celle qui résulte de l'action directe des planètes sur la Lune. Nous allons déterminer ces diverses inégalités pour Vénus, Mars et Jupiter.

Relativement à Vénus, on a, par le n° 23 du Livre VI,

$$\alpha = 0,72333230,$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 9,992539,$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 8,871894,$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 7,386580,$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(3)} = 5,953940,$$

d'où l'on tire, par les formules du n° 49 du Livre II,

$$b_{\frac{5}{2}}^{(0)} = 85,77422,$$

$$b_{\frac{5}{2}}^{(1)} = 83,40760.$$

Les observations donnent

$$i - m = 0,0467900;$$

en supposant donc, comme dans le n° 22 du Livre VI,

$$\frac{P}{m'} = \frac{1}{383130},$$

la fonction (B), réduite en arcs de cercle, devient

$$+ 1'',781706. \sin (i - m)\nu$$

$$+ 0'',746665. \sin 2(i - m)\nu$$

$$+ 0'',405751. \sin 3(i - m)\nu$$

$$+ \dots\dots\dots$$

Ce que nous désignons ici par  $\frac{\delta r'}{a'}$  est désigné, dans le n° 29 du Livre VI, par  $\delta r''$ ; on a donc par ce numéro, en vertu de l'action de



Vénus,

$$\begin{aligned} \frac{\delta r'}{a'} &= 0,0000015553 \\ &- 0,0000060012 \cdot \cos (i - m) \nu \\ &+ 0,0000171431 \cdot \cos 2(i - m) \nu \\ &+ 0,0000027072 \cdot \cos 3(i - m) \nu \\ &+ \dots \end{aligned}$$

La fonction (D) réduite en arcs, devient ainsi

$$\begin{aligned} &+ 1'',385241 \cdot \sin (i - m) \nu \\ &- 1'',991770 \cdot \sin 2(i - m) \nu \\ &- 0'',212054 \cdot \sin 3(i - m) \nu \\ &+ \dots \end{aligned}$$

En la réunissant à la précédente, on a, pour les inégalités lunaires dues aux actions directe et indirecte de Vénus sur la Lune,

$$\begin{aligned} &+ 3'',166947 \cdot \sin (i - m) \nu \\ &- 1'',245105 \cdot \sin 2(i - m) \nu \\ &+ 0'',193697 \cdot \sin 3(i - m) \nu \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Il faut, par le n° 44 du Livre VI, augmenter ces inégalités dans le rapport de 1,0743 à l'unité.

Relativement à Mars, on a, par le n° 23 du Livre VI,

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,65630030, \\ b_{\frac{3}{2}}^{(0)} &= 6,856336, \\ b_{\frac{3}{2}}^{(1)} &= 5,727893, \\ b_{\frac{3}{2}}^{(2)} &= 4,404530, \\ b_{\frac{3}{2}}^{(3)} &= 3,255964, \\ &\dots \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} b_{\frac{5}{2}}^{(0)} &= 38,00346, \\ b_{\frac{5}{2}}^{(1)} &= 36,20013. \end{aligned}$$



Les observations donnent

$$i - m = -0,0350306;$$

en supposant donc, comme dans le n° 22 du Livre VI,

$$\frac{P}{m'} = \frac{1}{1846082},$$

la fonction (C) devient

$$\begin{aligned} & - 0'',090054. \sin (i - m)v \\ & - 0'',034753. \sin 2(i - m)v \\ & - 0'',017234. \sin 3(i - m)v \\ & - \dots \end{aligned}$$

On a ensuite, par le n° 29 du Livre VI, en vertu de l'action de Mars,

$$\begin{aligned} \frac{\delta r'}{a'} &= -0,000000478 \\ & + 0,000005487. \cos (i - m)v \\ & + 0,000080620. \cos 2(i - m)v \\ & - 0,000006475. \cos 3(i - m)v \\ & \dots \end{aligned}$$

La formule (D) réduite en arcs devient ainsi

$$\begin{aligned} & + 0'',169012. \sin (i - m)v \\ & + 1'',246244. \sin 2(i - m)v \\ & - 0'',067139. \sin 3(i - m)v \\ & \dots \end{aligned}$$

En la réunissant à la précédente, on a, pour les inégalités lunaires dues aux actions directe et indirecte de Mars sur la Lune,

$$\begin{aligned} & + 0'',078958. \sin (i - m)v \\ & + 1'',211491. \sin 2(i - m)v \\ & - 0'',084373. \sin 3(i - m)v \\ & \dots \end{aligned}$$



Il faut, par le n° 44 du Livre VI, diminuer ces inégalités dans le rapport de 0,725 à l'unité.

Relativement à Jupiter, on a, par le n° 23 du Livre VI,

$$\alpha = 0,19226461,$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 2,176460,$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 0,619063,$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 0,148198,$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(3)} = 0,032439,$$

.....

d'où l'on tire

$$b_{\frac{5}{2}}^{(0)} = 2,51906,$$

$$b_{\frac{5}{2}}^{(1)} = 1,13310.$$

Les observations donnent

$$i - m = -0,0684952;$$

en supposant donc, comme dans le n° 22 du Livre VI,

$$\frac{P}{m'} = \frac{1}{1067,09},$$

la fonction (C) devient

$$- 0'',217257. \sin (i - m)\nu$$

$$- 0'',026380. \sin 2(i - m)\nu$$

$$- 0'',003936. \sin 3(i - m)\nu$$

.....

On a, par le n° 29 du Livre VI, en vertu de l'action de Jupiter,

$$\frac{\partial r'}{a'} = -0,0000011581$$

$$+ 0,0000159384. \cos (i - m)\nu$$

$$- 0,0000090986. \cos 2(i - m)\nu$$

$$- 0,000006550. \cos 3(i - m)\nu$$

.....



La formule (D) réduite en arcs devient ainsi

$$\begin{aligned} &+ 2'',519556. \sin (i - m) \nu \\ &- 0'',729560. \sin 2(i - m) \nu \\ &- 0'',035879. \sin 3(i - m) \nu \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

En la réunissant à la précédente, on a, pour les inégalités lunaires dues aux actions directe et indirecte de Jupiter sur la Lune,

$$\begin{aligned} &+ 2'',302299. \sin (i - m) \nu \\ &- 0'',755940. \sin 2(i - m) \nu \\ &- 0'',039815. \sin 3(i - m) \nu \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Si l'on prend avec un signe contraire toutes ces inégalités résultantes de l'action des planètes sur la Lune, on aura les inégalités que cette action produit dans l'expression de la longitude vraie de la Lune; on pourra donc les réduire en Tables, en observant que  $(i - m)\nu$  peut être supposé égal à la longitude moyenne de la planète, moins celle de la Terre. Il serait utile de les employer dans les Tables de la Lune, vu la précision à laquelle ces Tables ont été portées.

Le terme  $\frac{PA^{(0)}}{4h^2u^3}$  de l'expression de  $-\frac{1}{h^2} \frac{\partial Q}{\partial u}$  donne, dans l'équation (L') du n° 9, le terme

$$-\frac{3Pa^2A^{(0)}}{4} e \cos(c\nu - \varpi);$$

d'où il est facile de conclure que la valeur de  $c$  est diminuée, par l'action d'une planète inférieure à la Terre, de la quantité

$$\frac{3}{8} \frac{P}{m'} m^2 b_{\frac{3}{2}}^{(0)},$$

et par l'action d'une planète supérieure, de la quantité

$$\frac{3}{8} \frac{P}{m'} m^2 \alpha^3 b_{\frac{3}{2}}^{(0)}.$$



Pareillement, le terme  $\frac{m' u'^3}{2 h^2 u^3}$  donne, dans l'équation (L') du n° 9, la quantité (1)

$$- \frac{9 m' u'^3}{2 h^2 u^3} \frac{\delta r'}{a'} e \cos(c v - \varpi),$$

$\frac{\delta r'}{a'}$  étant ici la partie constante des perturbations du rayon vecteur de l'orbe terrestre, donnée par le n° 29 du Livre VI; la valeur de  $c$  est donc par là diminuée de la quantité

$$\frac{9 m^2}{4} \frac{\delta r'}{a'}$$

Il est facile de s'assurer que toutes ces quantités sont insensibles.

Considérons présentement les perturbations du mouvement lunaire en latitude. La somme des termes

$$- \frac{s}{h^2 u} \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{1 + s^2}{h^2 u^2} \frac{\partial Q}{\partial s},$$

qui font partie de la troisième des équations (L) du n° 1, acquiert par l'action de P la quantité

$$\frac{3 P s}{2 h^2 u^4 f^3} + \frac{3 P R r' S \cos(v - v') - 3 P R^2 S \cos(v - U)}{h^2 u^4 f^5}.$$

Cette fonction contient, relativement à une planète inférieure, le terme

$$- \frac{3}{4} \alpha P \frac{a^3}{a'^3} \left( \alpha b_{\frac{5}{2}}^{(0)} - b_{\frac{5}{2}}^{(1)} \right) \lambda \sin(v - \theta),$$

$\lambda$  étant l'inclinaison de l'orbite de P à l'écliptique, et  $\theta$  étant la lon-

(1) Bowditch fait remarquer que cette quantité doit être affectée du signe + et non pas du signe -, d'où il suit que la valeur de  $c$  est augmentée et non pas diminuée de  $\frac{9 m^2}{4} \frac{\delta r'}{a'}$ .

Il y a lieu également de changer les signes des deux formules de l'alinéa suivant qui ont  $g - 1$  en dénominateur, ainsi que ceux des trois inégalités qui ont pour arguments  $v - \theta'$ ,  $v - \theta''$ ,  $v - \theta'''$ .



gitude de son nœud ascendant. Il en résulte dans  $s$ , pour une planète inférieure, l'inégalité

$$-\frac{\frac{3}{8}\alpha\frac{P}{m'}m^2\left(\alpha b_{\frac{5}{2}}^{(0)} - b_{\frac{5}{2}}^{(1)}\right)}{g-1}\lambda\sin(\nu-\theta);$$

pour une planète supérieure, cette inégalité devient

$$-\frac{\frac{3}{8}\alpha^3\frac{P}{m'}m^2\left(b_{\frac{5}{2}}^{(0)} - \alpha b_{\frac{5}{2}}^{(1)}\right)}{g-1}\lambda\sin(\nu-\theta).$$

En réduisant en nombres ces inégalités, on a, en employant les masses du n° 44 du Livre VI, relativement à Vénus,

$$+ 0'',853296.\sin(\nu-\theta');$$

relativement à Mars,

$$- 0'',016966.\sin(\nu-\theta''),$$

et relativement à Jupiter,

$$- 0'',117051.\sin(\nu-\theta'''),$$

$\theta'$ ,  $\theta''$  et  $\theta'''$  étant les longitudes des nœuds ascendants des orbites de Vénus, Mars et Jupiter.

Enfin il est aisé de voir que la valeur de  $g$  est augmentée, par l'action de P, de la quantité  $\frac{3}{8}\frac{P}{m'}m^2b_{\frac{3}{2}}^{(0)}$  relativement à une planète inférieure à la Terre, et de la quantité  $\frac{3}{8}\frac{P}{m'}m^2\alpha^3b_{\frac{3}{2}}^{(0)}$  relativement à une planète supérieure.

Le terme  $\frac{3m'u'^3s}{2h^2u^4}$ , qui, par le n° 11, fait partie de la troisième des équations (L) du n° 1, augmente encore la valeur de  $g$  de la quantité  $\frac{9m^2}{4}\frac{\partial r'}{a'}$ ,  $\frac{\partial r'}{a'}$  étant la partie constante des perturbations du rayon vecteur de l'orbe terrestre. Ainsi la valeur de  $g$  est augmentée par l'ac-



tion des planètes de la même quantité dont cette action diminue la valeur de  $c$ . Mais ces quantités sont insensibles.

L'action directe de P sur la Lune introduit dans l'équation (L') du n° 9 une quantité de la forme

$$M \frac{P}{m'} m^2 e'^2 + M' \frac{P}{m'} m^2 e' e'' + M'' \frac{P}{m'} m^2 e''^2,$$

$e''$  étant le rapport de l'excentricité au demi-grand axe dans l'orbite de P. Il en résulte dans la longitude moyenne de la Lune une équation séculaire, analogue à celle que nous avons trouvée dans le n° 15 égale à

$$\frac{3}{2} m^2 f(e'^2 - E'^2) dv.$$

Celle-ci résulte du développement du terme  $\frac{m' u'^3}{2 h^2 u^3}$ ; elle est incomparablement supérieure à la première, à cause du très-petit facteur  $\frac{P}{m'}$  qui multiplie cette première équation. Ainsi l'action indirecte de la planète P sur la Lune, transmise par le moyen du Soleil, l'emporte de beaucoup, à cet égard, sur son action directe, que l'on peut négliger ici sans erreur sensible.



## CHAPITRE IV.

COMPARAISON DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE AVEC LES OBSERVATIONS.

23. Considérons d'abord les moyens mouvements de la Lune, de son périégée et de ses nœuds. L'expression de la longitude moyenne de la Lune en fonction de sa longitude vraie renferme, par le n° 15, l'inégalité séculaire

$$\frac{3}{2} m^2 f(e'^2 - E'^2) dv;$$

par conséquent, l'expression de la longitude vraie en fonction de la longitude moyenne renferme l'inégalité séculaire

$$- \frac{3}{2} m^2 f(e'^2 - E'^2) n dt.$$

Si l'on représente par  $t$  le nombre des années juliennes écoulées depuis 1750, on a, par le n° 44 du Livre VI,

$$2e' = 2E' - t.0'',530224 - t^2.0'',0000210474;$$

d'où l'on conclut l'inégalité précédente égale à

$$31'',424757 \cdot i^2 + 0'',05721742 \cdot i^3,$$

$i$  étant le nombre des siècles écoulés depuis 1750. Les observations avaient fait reconnaître cette équation séculaire avant que la théorie de la pesanteur m'en eût expliqué la cause. Il est certain, par la comparaison d'un grand nombre d'éclipses observées par les Chaldéens, les Grecs et les Arabes, que le moyen mouvement de la Lune s'est accéléré depuis les temps anciens jusqu'à nos jours, et que son accélération est à très-peu près celle qui résulte de la formule précédente. C'est ce que Bouvard a mis hors de doute, par la discussion approfondie



die des éclipses anciennes déjà connues et de celles qu'il a extraites d'un manuscrit arabe d'Ibn Junis.

On a vu, dans le n° 16, que le mouvement sidéral du périégée lunaire, conclu de la théorie précédente, ne diffère du véritable que de sa cinq cent soixantième partie. Suivant cette théorie, ce mouvement est assujéti à une équation séculaire égale à  $-3,00052.k$ ,  $k$  étant celle du moyen mouvement de la Lune; en sorte que l'équation séculaire de l'anomalie est  $4,00052.k$ , ou à très-peu près quadruple de celle du moyen mouvement. La théorie de la pesanteur universelle m'a fait connaître cette équation, et j'en avais conclu que le mouvement du périégée lunaire se ralentit de siècle en siècle, et qu'il est maintenant plus petit d'environ quinze minutes par siècle qu'au temps d'Hipparque. Ce résultat de la théorie a été confirmé par la discussion des observations anciennes et modernes.

On a vu, dans le n° 16, que le mouvement sidéral du nœud de l'orbite lunaire sur l'écliptique vraie, conclu de l'analyse précédente, ne diffère pas du véritable de sa trois cent cinquantième partie. L'équation séculaire de la longitude du nœud est, par le même numéro, égale à  $0,735452.k$ . Les anciennes éclipses la confirment encore.

24. Considérons présentement les inégalités périodiques du mouvement lunaire en longitude. Pour comparer aux observations celles qui ont été trouvées précédemment par la théorie, j'ai regardé comme autant de résultats de l'observation les coefficients des dernières Tables lunaires de Mason et des nouvelles Tables de Bürg. Les coefficients des Tables de Mason ont été déterminés par la comparaison d'un très-grand nombre d'observations de Bradley; ceux des Tables de Bürg l'ont été au moyen de plus de trois mille observations de Maskelyne. Ces Tables sont disposées d'une manière assez commode pour les calculs, et qui diminue le nombre des arguments, en les faisant dépendre les uns des autres. Voici le procédé qui résulte de celles de Mason, pour avoir les équations de la longitude vraie de la Lune, procédé que j'ai développé en série de sinus d'angles croissant proportionnellement à  $v$ .



On forme d'abord les termes suivants, dans lesquels je compte les anomalies du périégée :

Coefficients des Tables de Bürg.	Coefficients des Tables de Mason.
- 2073",46	- 2063",58. sin (anom. moy. ☉)
- 18",52	- 27",47. sin (2anom. moy. ☉)
+ 166",36	+ 172",53. sin (2.long. moy. ☉ - 2.long. vraie ☉ + anom. moy. ☉)
+ 236",11	+ 232",41. sin (2.long. moy. ☉ - 2.long. vraie ☉ - anom. moy. ☉)
- 178",40	- 178",40. sin (2.long. moy. ☉ - 2.long. vraie ☉ + anom. moy. ☉)
+ 14905",87	+ 14902",47. sin (2.long. moy. ☉ - 2.long. vraie ☉ - anom. moy. ☉)
+ 109",26	+ 108",02. sin (4.long. moy. ☉ - 4.long. vraie ☉ - 2 anom. moy. ☉)
+ 384",57	+ 381",17. sin (2.long. moy. ☉ - 2.long. vraie ☉ - anom. moy. ☉ + anom. moy. ☉)
(M) + 146",91	+ 143",52. sin (2.long. moy. ☉ - 2.long. vraie ☉ - anom. moy. ☉ - anom. moy. ☉)
+ 121",30	+ 129",63. sin (anom. moy. ☉ - anom. moy. ☉)
- 66",05	- 70",06. sin (long. moy. ☉ - long. vraie ☉ - anom. moy. ☉)
- 180",86	- 177",16. sin (2.long. moy. ☉ - 2.long. vraie ☉ - 2.anom. moy. ☉)
+ 192",90	+ 186",42. sin (2.long. moy. du nœud de l'orbe lunaire - 2.long. vraie ☉)
+ 35",49	+ 52",47. sin (long. moy. ☉ - long. vraie ☉ + anom. moy. ☉)
+ 15",12	+ 9",57. sin (long. moy. ☉ - long. vraie ☉ - anom. moy. ☉)
- 14",20	- 11",42. sin (2.long. moy. ☉ - 2.long. vraie ☉ + 2.anom. moy. ☉)
- 32",72	- 38",27. sin (4.long. moy. ☉ - 4.long. vraie ☉ - anom. moy. ☉)



Coefficients des Tables de Bürg.	Coefficients des Tables de Mason.
- 19",75	- 19",44. sin ( 2. long. moy. ☾ - 2. long. moy. du nœud lunaire - 2. anom. moy. ☾ )
- 27",16	- 25",62. sin ( 2. long. moy. du nœud lunaire - 2. long. vraie ☉ + an. moy. ☾ )
+ 21",30	+ 16",36. sin ( 2. long. moy. du nœud lunaire - 2. long. vraie ☉ - an. moy. ☾ )
+ 20",987	+ 23",765. sin ( long. moy. du nœud lunaire )
+ 8",02	+ 0",00. sin ( 2. long. moy. ☾ - 2. long. vraie ☉ - 2. anom. moy. ☉ )
- 8",02	- 0",00. sin ( longit. moy. ☾ - long. vraie ☉ + anom. moy. ☾ )
(M) [Suite.] + 6",48	+ 0",00. sin ( 3. anom. moy. ☾ - 2. long. moy. ☾ + 2. long. vraie ☉ )
+ 6",79	+ 0",00. sin ( 2. long. moy. ☾ - 2. long. vraie ☉ + anom. moy. ☾ + anom. moy. ☉ )
+ 4",01	+ 0",00. sin ( 2. long. moy. ☾ - 2. long. vraie ☉ + anom. moy. ☾ - anom. moy. ☉ )
+ 3",39	+ 0",00. sin ( 4. long. moy. ☾ - 4. long. vraie ☉ - 3. anom. moy. ☾ )
+ 3",70	+ 0",00. sin ( 2. long. moy. ☾ - 2. long. vraie ☉ - 2. an. moy. ☾ + an. moy. ☉ )
+ 3",39	+ 0",00. sin ( long. moy. ☾ - long. vraie ☉ - anom. moy. ☾ + anom. moy. ☉ )

On ajoute la somme de tous ces termes à l'anomalie moyenne de la Lune, à laquelle on ajoute encore la fonction A donnée par l'équation

Sivant Bürg.	Sivant Mason.
A = - 4127",47	- 4018",52. sin ( anomalie moyenne ☉ )
- 33",95	- 43",21. sin ( 2. anomalie moyenne ☉ );

et l'on a l'anomalie corrigée de la Lune, au moyen de laquelle on



forme les termes suivants

	Bürg.	Mason.	
(N)	+ 70037",67	+ 70047",24.	sin( anom. corrig. ☉ )
	+ 2396",30	+ 2398",09.	sin( 2. anom. corrig. ☉ )
	+ 115",12	+ 114",75.	sin( 3. anom. corrig. ☉ )
	+ 6",17	+ 6",26.	sin( 4. anom. corrig. ☉ )

On ajoute la somme de tous les termes (M) et (N) à la longitude moyenne de la Lune, et l'on a une longitude corrigée au moyen de laquelle on forme les termes suivants

	Bürg.	Mason.	
(P)	- 376",85	- 359",26.	sin( long. corrig. ☉ - long. vraie ☉ )
	+ 6610",18	+ 6608",33.	sin( 2. long. corrig. ☉ - 2. long. vraie ☉ )
	+ 10",19	+ 16",05.	sin( 3. long. corrig. ☉ - 3. long. vraie ☉ )
	+ 22",53	+ 27",16.	sin( 4. long. corrig. ☉ - 4. long. vraie ☉ )

On réunit les termes (P) à la longitude vraie corrigée de la Lune, et l'on forme ainsi une seconde longitude corrigée à laquelle on ajoute le supplément du nœud, ou la circonférence moins la longitude du nœud; on lui ajoute encore la fonction B, que l'on détermine par l'équation

	Bürg.	Mason.	
B =	+ 1666",67	+ 1703",70.	sin( anom. moy. ☉ ).

On a ainsi la distance de la Lune au nœud corrigé. On soustrait du double de cette distance l'anomalie corrigée de la Lune, et l'on multiplie le sinus de cet argument par  $-260",49$ , suivant Bürg, et par  $-259",56$ , suivant Mason, ce qui donne une nouvelle inégalité que l'on ajoute aux inégalités (M), (N), (P). Enfin on ajoute cette même inégalité à la distance précédente de la Lune au nœud corrigé, pour former l'argument de latitude, et l'on multiplie le sinus du double de cet argument par  $-1255",56$ , suivant Bürg, et par  $-1258",34$ , suivant Mason, ce qui donne l'inégalité nommée *réduction à l'écliptique*, qui doit être ajoutée à toutes les inégalités précédentes, pour avoir la longitude de la Lune comptée de l'équinoxe moyen du printemps. Il



faut observer ici que les longitudes moyennes de la Lune et de son nœud, et son anomalie moyenne doivent être corrigées par leurs équations séculaires.

J'ai conclu de ce procédé l'expression suivante des inégalités périodiques de la longitude moyenne de la Lune, développée en fonction de sa longitude vraie comptée sur l'écliptique, ce qui exige une attention particulière pour n'omettre aucun terme sensible : j'ai négligé les inégalités au-dessous d'une seconde. Une partie des inégalités de cette expression résulte du développement seul de la formule que donne le procédé des Tables de Mason, que je viens d'exposer, en sorte qu'elles ne peuvent point être considérées dans ces Tables comme des résultats de l'observation. Pour les distinguer, j'ai marqué d'un astérisque celles que Mason a déterminées par la comparaison des observations de Bradley, et qui toutes ont été déterminées de nouveau par Bürg, au moyen d'un très-grand nombre d'observations de Maskelyne. Je donne d'abord la grande inégalité du premier ordre, ensuite les cinq inégalités du second ordre, puis les quinze inégalités du troisième ordre; ensuite toutes les inégalités du quatrième ordre et d'un ordre supérieur qui ont été comparées aux observations, enfin toutes les autres inégalités. Je place à côté les résultats de mon analyse, et leur excès sur les coefficients déduits des Tables de Mason. Dans une quatrième colonne, je donne l'excès des coefficients des nouvelles Tables de Bürg, réduites à la forme de ma théorie, sur ceux des Tables de Mason. Bürg ayant conservé à ses Tables la forme de celles de Mason, qui lui-même avait adopté celle des Tables de Mayer, il suffit, pour les réduire à la forme de ma théorie, d'appliquer aux coefficients des Tables de Mason ainsi réduites la différence, prise avec un signe contraire, des inégalités correspondantes dans les deux Tables primitives. Les fonctions A et B sont un peu différentes dans ces deux Tables; j'ai eu égard à cette différence. J'observerai sur cela qu'en introduisant dans les Tables primitives une inégalité pour la longitude, dépendante de  $\sin(\text{anom. moy. } \odot + \text{anom. moy. } \ominus)$ , et pour la latitude une inégalité dépendante de  $\sin(\text{arg. de lat. } + \text{anom. moy. } \odot)$ , et en chan-



geant convenablement les coefficients des inégalités dépendantes de  $\sin(\text{an. moy. } \odot - \text{an. moy. } \ominus)$ , et de  $\sin(\text{arg. de lat.} - \text{an. moy. } \odot)$ , on pourrait se dispenser d'introduire les fonctions A et B, ce qui donnerait aux Tables plus d'uniformité. Bürg a fait entrer dans ses Tables du mouvement en longitude huit inégalités nouvelles, qui ne sont données dans les Tables réduites de Mason que par leur développement : je les ai distinguées par un double astérisque. Enfin, il a comparé aux observations plusieurs inégalités qu'il a trouvées insensibles; en sorte que leurs coefficients donnés par le développement des Tables de Mason peuvent maintenant être considérés comme des résultats de l'observation : je les ai distingués par un triple astérisque. On pourra ainsi reconnaître les inégalités qui restent encore à comparer aux observations. Le peu de différence qui existe entre les deux Tables permet de conclure ainsi le développement de l'une d'elles du développement de l'autre, et l'on peut, par la méthode inverse, réduire les inégalités de ma théorie à la forme des Tables de Mayer.

Inégalités déduites des Tables de Mason.	Coefficients de ma théorie.	Excès de ces coefficients sur ceux déduits des Tables de Mason.	Excès des coefficients déduits des Tables de Bürg sur ceux déduits des Tables de Mason.
<i>Inégalités du premier ordre.</i>			
$-69992'', 30. \sin(cv - \varpi)^* \dots$	$-69992'', 30$	$+ 0'', 00$	$+ 9'', 57^{(1)}$
<i>Inégalités du second ordre.</i>			
$+ 1427'', 41. \sin(2cv - 2\varpi)^* \dots$	$+ 1442'', 66$	$+ 15'', 25$	$+ 1'', 79$
$- 5874'', 70. \sin(2v - 2mv)^* \dots$	$- 5856'', 11$	$+ 18'', 59$	$- 1'', 85$
$- 14449'', 19. \sin(2v - 2mv - cv + \varpi)^* \dots$	$- 14461'', 28$	$- 12'', 09$	$- 3'', 40$
$+ 2075'', 71. \sin(c'mv - \varpi')^* \dots$	$+ 2106'', 09$	$+ 30'', 38$	$+ 9'', 88$
$+ 1256'', 47. \sin(2gv - 2\theta)^* \dots$	$+ 1255'', 92$	$- 0'', 55$	$- 2'', 78$
<i>Inégalités du troisième ordre.</i>			
$- 33'', 19. \sin(3cv - 3\varpi)^* \dots$	$- 35'', 34$	$- 2'', 15$	$- 0'', 47$
$+ 188'', 67. \sin(2gv - cv - 2\theta + \varpi)^* \dots$	$+ 204'', 86$	$+ 16'', 19$	$+ 0'', 93$

(1) Le coefficient de cette inégalité est une des arbitraires de la théorie, et je pense qu'à cet égard il convient d'adopter le résultat de Bürg.



Inégalités déduites des Tables de Mason.	Coefficients de ma théorie.	Excès de ces coefficients sur ceux déduits des Tables de Mason.	Excès des coefficients déduits des Tables de Bürg sur ceux déduits des Tables de Mason.
- 69", 16. sin(2gv + cv - 2θ - τ)***	- 70", 86	- 1", 70	+ 0", 00
+ 450", 56 sin(2v - 2mv + cv - τ)*	+ 453", 58	+ 3", 02	+ 0", 00
+ 44", 77 sin(2v - 2mv + c'mv - τ')*	+ 42", 02	- 2", 75	+ 6", 17
- 421", 37. sin(2v - 2mv - c'mv + τ')*	- 415", 16	+ 6", 21	- 3", 70
+ 67", 11. sin(2v - 2mv - cv + c'mv + τ - τ')*	+ 74", 96	+ 7", 85	- 3", 40
- 635", 09. sin(2v - 2mv - cv - c'mv + τ + τ')*	- 635", 26	- 0", 17	- 3", 39
+ 211", 84. sin(cv + c'mv - τ - τ')*	+ 219", 11	+ 7", 27	+ 5", 96
- 360", 50. sin(cv - c'mv - τ + τ')*	- 362", 18	- 1", 68	+ 2", 37
+ 551", 31. sin(2cv - 2v + 2mv - 2τ)*	+ 521", 91	- 29", 40	- 3", 70
+ 172", 28. sin(2gv - 2v + 2mv - 2θ)*	+ 174", 74	+ 2", 46	+ 6", 48
+ 27", 47. sin(2c'mv - 2τ')*	+ 31", 25	+ 3", 78	- 8", 95
+ 360", 12. sin(v - mv)*	+ 376", 586. (1+i)		+ 17", 59
- 58", 50. sin(v - mv + c'mv - τ')*	- 58", 05. (1+i)		+ 16", 98

*Inégalités du quatrième ordre et d'un ordre supérieur, qui ont été comparées aux observations.*

- 1", 03. sin(4cv - 4τ)*			+ 0", 09
- 6", 10. sin(2gv - 2cv - 2θ + 2τ)*			+ 0", 31
+ 23", 765. sin(gv - v - θ)*	+ 17", 135	- 6", 63	- 2", 778
- 21", 67. sin(3v - 3mv)*			+ 5", 86
+ 17", 50. sin(4v - 4mv)*			+ 4", 63
+ 2", 38. sin(cv + 2c'mv - τ - 2τ')*			- 0", 51
- 2", 38. sin(cv - 2c'mv - τ + 2τ')*			+ 0", 51
- 27", 49. sin(2cv + 2v - 2mv - 2τ)*	- 25", 03	+ 1", 66	+ 2", 78
+ 89", 34. sin(4v - 4mv - cv + τ)*	+ 103", 01	+ 13", 67	+ 5", 55
+ 46", 79 sin(4v - 4mv - 2cv + 2τ)*	+ 47", 71	+ 0", 92	- 1", 24
- 52", 61. sin(cv - v + mv - τ)*	- 25", 65. (1+i)		+ 4", 01
- 3", 53. sin(v - mv - c'mv + τ')*			- 5", 55
+ 29", 45. sin(2v - 2mv - 2gv + cv + 2θ - τ)*	+ 26", 77	- 2", 68	+ 1", 54
+ 3", 73. sin(2gv + cv - 2v + 2mv - 2θ - τ)*			+ 4", 94
- 10", 87. sin(2v - 2mv - 2c'mv + 2τ)**			- 8", 02
- 18", 12. sin(cv + v - mv - τ)**	- 15", 47. (1+i)		+ 8", 02
+ 3", 08. sin(3cv - 2v + 2mv - 2τ)**			- 6", 48
+ 1", 82. sin(2v - 2mv + cv + c'mv - τ - τ')**			- 6", 79
+ 39", 38. sin(2v - 2mv + cv - c'mv - τ + τ')**	+ 31", 39	- 7", 99	- 4", 01



Inégalités déduites des Tables de Mason.	Coefficients de ma théorie.	Excès de ces coefficients sur ceux déduits des Tables de Mason.	Excès des coefficients déduits des Tables de Bürg sur ceux déduits des Tables de Mason
+ 2", 36. sin(4v - 4mv - 3cv + 3w)**.....	.....	.....	- 3", 39
+ 3", 04. sin(2cv - 2v + 2mv - c'mv - 2w + w')**...	- 0", 76	- 3", 80	+ 3", 70
+ 4", 05. sin(cv - v + mv - c'mv - w + w')**.....	.....	.....	+ 3", 39
+ 19", 72. sin(2cv - 2v + 2mv + c'mv - 2w - w')***...	+ 18", 15	- 1", 57	
- 3", 73. sin(4v - 4mv + cv - w)***			
+ 0", 56. sin(4cv - 4v + 4mv - 4w)***			
- 12", 06. sin(2v - 2mv + 2gv - 2w)***			
± 3", 36. sin(2gv ± c'mv - 2w ± w')***			
- 1", 03. sin(2gv + 2cv - 2v + 2mv - 2w - 2w)***			
± 6", 26. sin(2gv - 2v + 2mv ± c'mv - 2w ± w')***			

*Inégalités du quatrième ordre et d'un ordre supérieur, déduites des Tables de Mason, et qui n'ont point été comparées aux observations.*

Inégalités déduites des Tables de Mason.	Coefficients de ma théorie.	Excès de ces coefficients sur ceux déduits des Tables de Mason.
+ 15", 32. sin(2cv - c'mv - 2w + w').....	+ 13", 89	- 1", 43
- 8", 71. sin(2cv + c'mv - 2w - w').....	- 9", 75	- 1", 04
+ 14", 52. sin(4v - 4mv - cv - c'mv + w + w')		
- 13", 78. sin(2v - 2mv + 2gv - cv - 2w + w)		
- 1", 18. sin(2v - 2mv - 2gv + 2cv + 2w - 2w)		
+ 5", 99. sin(4v - 4mv - 2cv + c'mv + 2w - w')		
+ 4", 87. sin(4v - 4mv - 2cv - c'mv + 2w + w')		
- 3", 63. sin(3v - 3mv - cv + w)		
+ 2", 48. sin(4gv - 4w)		
+ 9", 36. sin(2v - 2mv - cv + 2c'mv + w - 2w')		
- 17", 88. sin(2v - 2mv - cv - 2c'mv + w + 2w')		
+ 1", 69. sin(4v - 4mv - 2gv - cv + 2w + w)		
- 1", 39. sin(4v - 4mv - c'mv + w')		
+ 2", 05. sin(6v - 6mv - 3cv + 3w)		
- 1", 20. sin(cv - v + mv + c'mv - w - w')		
+ 1", 03. sin(4v - 4mv + c'mv - w')		

On voit par ce tableau que la plus grande différence entre les coeffi-



cients des Tables de Mason et ceux de notre théorie n'est que de 30", et qu'elle n'est que de 26" entre notre théorie et les Tables de Bürg. On la ferait sans doute disparaître en portant plus loin encore les approximations; mais la comparaison précédente suffit pour établir incontestablement que la gravitation universelle est l'unique cause de toutes les inégalités de la Lune.

Deux de ces inégalités méritent, par leur importance, d'être déterminées avec un soin particulier. La première est celle que l'on a nommée *inégalité parallactique*, et dont l'argument est  $v - mv$ . Elle dépend de la parallaxe du Soleil. Je l'ai déterminée en portant l'approximation jusqu'aux quantités du cinquième ordre inclusivement; j'ai donc lieu de croire la valeur à laquelle je suis parvenu très-exacte. Suivant les Tables de Mason, réduites à la forme de ma théorie, cette inégalité est égale à 360",12; mais Bürg, qui vient de la déterminer par la comparaison d'un très-grand nombre d'observations, la trouve plus grande de 17",59, et par conséquent égale à 377",71. En égalant à ce dernier résultat le coefficient  $(1 + i) \cdot 376",586$ , donné par mon analyse, on a

$$1 + i = 1,002985,$$

partant

$$\frac{a}{a'} = \frac{1,002985}{400};$$

or la parallaxe solaire est  $\frac{D}{a}$  ou  $\frac{D}{a} \frac{a}{a'}$ : cette parallaxe est donc égale à

$$\frac{D}{a} \frac{1,002985}{400}.$$

En substituant pour  $\frac{D}{a}$  sa valeur 0,01655101, trouvée dans le n° 19, on a 26",4205 pour la parallaxe moyenne du Soleil, sur le parallèle dont le carré du sinus de la latitude est  $\frac{1}{3}$ , ce qui est à très-peu près celle que plusieurs astronomes ont conclue du dernier passage de Vénus sur le Soleil: la théorie de la Lune offre donc un moyen fort exact pour déterminer cette parallaxe.



La seconde inégalité est celle qui dépend de la longitude du nœud de l'orbite lunaire ou de l'argument  $g\nu - \nu - \theta$ . Son coefficient, suivant Mason, est  $23'',765$ ; mais Bürg, qui vient de le déterminer par un très-grand nombre d'observations, le réduit à  $20'',987$ . La théorie donne, par le n° 20,  $17'',135$ , en supposant l'aplatissement de la Terre  $\frac{1}{334}$ , et  $35'',490$ , en supposant cet aplatissement  $\frac{1}{230}$ ; d'où il est facile de conclure que la détermination de Bürg répond à  $\frac{1}{305,05}$  d'aplatissement. Cette inégalité est déterminée avec beaucoup de précision par la théorie : on n'a point à craindre à son égard l'incertitude que le peu de convergence des approximations laisse sur les coefficients de la plupart des inégalités lunaires; et comme elle est liée à l'aplatissement de la Terre, sa détermination exacte par les observations mérite toute l'attention des astronomes. Il résulte sans aucun doute, des valeurs que Mason et Bürg lui ont assignées, que la Terre est moins aplatie que dans le cas de l'homogénéité, ce qui est conforme à ce que nous avons trouvé, par d'autres phénomènes, dans les Livres III, IV et V.

25. Considérons présentement le mouvement de la Lune en latitude. On le détermine par les Tables de la manière suivante. Si l'on nomme *longitude corrigée* de la Lune la longitude moyenne à laquelle on applique toutes les inégalités, à l'exception de la réduction, la latitude de la Lune est égale à

Bürg.	Mason.
+57163'',03	+57174'',40. sin(arg. de lat.)
- 15'',43	- 13'',58. sin(3. arg. de lat.)
+ 1630'',86	+ 1630'',86. sin( $\begin{matrix} 2. \text{long. corr. } \odot - 2. \text{long. vraie } \odot \\ - \text{arg. de lat.} \end{matrix}$ )
- 9'',57	- 9'',57. sin(arg. de lat. - anom. moy. $\odot$ )
+ 54'',32	+ 54'',32. sin(arg. de lat. - anom. moy. $\odot$ )
+ 77'',47	+ 77'',47. sin(2. anom. moy. $\odot$ - arg. de lat.)
+ 5'',86	+ 5'',86. sin(3. anom. moy. $\odot$ - arg. de lat.)



Bürg.	Mason.
+ 27",78	+ 27",78. sin $\left( \begin{array}{l} 2.\text{long. corr. } \odot - 2.\text{long. vraie } \ominus \\ - \text{arg. de lat.} + \text{anom. moy. } \odot \end{array} \right)$
+ 11",42	+ 11",42. sin $\left( \begin{array}{l} 2.\text{long. corr. } \odot - 2.\text{long. vraie } \ominus \\ - \text{arg. de lat.} - \text{anom. moy. } \odot \end{array} \right)$
+ 6",79	+ 6",79. sin $\left( \begin{array}{l} 2.\text{long. corr. } \odot - 2.\text{long. vraie } \ominus \\ - \text{arg. de lat.} + \text{anom. moy. } \odot \end{array} \right)$
+ 49",07	+ 49",07. sin $\left( \begin{array}{l} \text{arg. de lat.} + \text{anom. moy. } \odot \\ - 2.\text{long. corr. } \odot + 2.\text{long. vr. } \odot \end{array} \right)$
+ 16",05	+ 16",05. sin $\left( \begin{array}{l} \text{arg. de lat.} + 2.\text{anom. moy. } \odot \\ - 2.\text{long. corr. } \odot + 2.\text{long. vr. } \odot \end{array} \right)$
- 24",6914	- 0",00. sin (long. corr. $\odot$ )

En réduisant ces formules en sinus d'angles croissant proportionnellement à  $\nu$ , j'ai obtenu les résultats suivants :

Tables de Mason.	Coefficients de ma théorie.	Excès de ces coefficients sur ceux déduits des Tables de Mason.	Excès des coefficients déduits des Tables de Bürg sur ceux déduits des Tables de Mason.
57234",37. sin( $gv - \theta$ )*.....	57230",83	- 3",54	- 11",37 <sup>(1)</sup>
+ 42",84. sin( $3gv - 3\theta$ )*.....	+ 38",78	- 4",06	- 1",85
+ 1627",13. sin( $2\nu - 2m\nu - g\nu + \theta$ )*.....	+ 1621",09	- 6",04	+ 0",00
+ 2",16. sin( $2\nu - 2m\nu + g\nu - \theta$ ).....	+ 3",52	+ 1",36	+ 0",00
- 12",64. sin( $g\nu + c\nu - \theta - \varpi$ )*.....	- 17",26	- 4",62	+ 0",00
+ 61",21. sin( $g\nu - c\nu - \theta + \varpi$ )*.....	+ 61",27	+ 0",06	+ 0",00
+ 66",86. sin( $g\nu + c\nu - 2\nu + 2m\nu - \theta - \varpi$ )*.....	+ 66",66	- 0",20	+ 0",00
- 2",61. sin( $2\nu - 2m\nu + g\nu - c\nu - \theta + \varpi$ ).....	- 4",28	- 1",67	+ 0",00
+ 18",44. sin( $2\nu - 2m\nu - g\nu + c\nu + \theta - \varpi$ )*.....	+ 19",95	+ 1",51	+ 0",00
+ 76",50. sin( $g\nu + c' m\nu - \theta - \varpi'$ )*.....	+ 75",14	- 1",36	- 1",66
- 86",07. sin( $g\nu - c' m\nu - \theta + \varpi'$ )*.....	- 80",06	+ 6",01	+ 1",66
- 29",21. sin( $2\nu - 2m\nu - g\nu + c' m\nu + \theta - \varpi'$ )*.....	- 31",47	- 2",26	- 0",00
+ 68",40. sin( $2\nu - 2m\nu - g\nu - c' m\nu + \theta + \varpi'$ )*.....	+ 69",19	+ 0",79	+ 0",00
+ 79",46. sin( $2c\nu - g\nu - 2\varpi + \theta$ )*.....	+ 84",57	+ 5",11	+ 0",00
+ 13",35. sin( $2c\nu + g\nu - 2\nu + 2m\nu - 2\varpi - \theta$ )*.....	+ 15",83	+ 2",48	+ 0",00
- 2",65. sin( $3c\nu - g\nu - 3\varpi + \theta$ )*.....	.....	.....	- 0",00
+ 3",22. sin( $3gv - 2\nu + 2m\nu - 3\theta$ ).....	.....	.....	+ 0",00

(1) Le coefficient de cette inégalité est une des arbitraires de la théorie, et le résultat de Bürg me paraît devoir être préféré.



Tables de Mason.	Coefficients de ma théorie.	Excès de ces coefficients sur ceux déduits des Tables de Mason.	Excès des coefficients déduits des Tables de Bürg sur ceux déduits des Tables de Mason.
+ 1", 13. sin(4v - 4mv - gv + θ) .. . . . . .	.....	.....	+ 0", 00
+ 1", 76. sin(3cv - gv - 2v + 2mv - 3ω + θ) .. . . . . .	.....	.....	+ 0", 00
± 1", 72. sin(cv + gv - 2v + 2mv ± c'mv - ω - θ ∓ ω')	.....	.....	+ 0", 00
∓ 1", 77. sin(2cv + gv - 2v + 2mv ± cv - 2ω - θ ∓ ω) .. . . . . .	.....	.....	.....
+ 2", 77. sin(4v - 4mv - gv - cv + θ + ω) .. . . . . .	.....	.....	+ 0", 00
- 0", 00. sin(long. vraie C)** .. . . . . .	- 20", 023	.....	- 24", 6914

Ici la théorie se rapproche encore plus de l'observation que relativement au mouvement de la Lune en longitude, ce qui vient de ce que les approximations de son mouvement en latitude sont plus simples, et par conséquent plus exactes. Je pense donc qu'il convient de former les Tables de ce mouvement par la théorie, afin de ramener autant qu'il est possible toute l'Astronomie au seul principe de la pesanteur universelle. L'inégalité  $- 20", 023. \sin(\text{long. vraie } C)$  n'existe point dans les Tables de Mason. C'est la théorie qui me l'a fait connaître, et toutes les observations la confirment d'une manière incontestable. Bürg l'a trouvée égale à  $- 24", 6914. \sin(\text{long. vraie } C)$ , par la comparaison d'un très-grand nombre d'observations de Maskelyne. Son coefficient est, par le n° 20, égal à  $- 20", 023$ , en supposant l'aplatissement de la Terre  $\frac{1}{334}$ ; il s'élèverait à  $41", 70$ , si cet aplatissement était  $\frac{1}{230}$ , comme dans le cas de l'homogénéité de cette planète; d'où il est facile de conclure que le coefficient  $- 24", 6914$  trouvé par Bürg répond à l'aplatissement  $\frac{1}{304,6}$ . Il est très-remarquable que cette inégalité conduite au même aplatissement, que l'inégalité du mouvement en longitude, dépendante du sinus de la longitude du nœud, que nous avons donnée dans le n° 20. Ces deux inégalités qui, par la lumière qu'elles répandent sur la figure de la Terre, méritent toute l'attention des observateurs, se réunissent pour exclure son homogénéité.



26. Il nous reste à considérer la parallaxe horizontale de la Lune. Voici l'expression de cette parallaxe à l'équateur, suivant les Tables de Bürg et de Mason.

Bürg.	Mason et Mayer.
+ 10558",64	+ 10590",74
— 0",93	— 0",93.cos(anom. moy. ☉)
+ 2",16	+ 2",16.cos(2.long. moy. ☾ — 2.long. vraie ☉ + anom. moy. ☉)
+ 2",47	+ 2",47.cos(2.long. moy. ☾ — 2.long. vraie ☉ — anom. moy. ☉)
— 0",31	— 0",31.cos(2.long. moy. ☾ — 2.long. vraie ☉ + anom. moy. ☾)
+ 115",12	+ 115",12.cos(2.long. moy. ☾ — 2.long. vraie ☉ — anom. moy. ☾)
+ 0",93	+ 0",93.cos(4.long. moy. ☾ — 4.long. vraie ☉ — 2.anom. moy. ☾)
+ 3",09	+ 3",09.cos(2.long. moy. ☾ — 2.long. vraie ☉ — anom. moy. ☾ + anom. moy. ☉)
+ 1",85	+ 1",85.cos(2.long. moy. ☾ — 2.long. vraie ☉ — anom. moy. ☾ — anom. moy. ☉)
+ 0",62	+ 0",62.cos(anom. moy. ☾ — anom. moy. ☉)
+ 0",62	+ 0",62.cos(long. moy. ☾ — long. vraie ☉ — anom. moy. ☾)
+ 6",17	+ 6",17.cos(2.long. moy. ☾ — 2.long. vraie ☉ — 2.anom. moy. ☾)
+ 1",23	+ 1",23.cos(2.long. moy. du nœud lunaire — 2.long. vraie ☉)
+ 578",09	+ 579",32.cos(anom. corr. ☾)
+ 30",86	+ 30",86.cos(2.anom. corr. ☾)
+ 0",62	+ 0",93.cos(3.anom. corr. ☾)
+ 80",25	+ 80",25.cos(2.long. corr. ☾ — 2.long. vraie ☉)
— 3",09	— 3",09.cos(long. corr. ☾ — long. vraie ☉)
+ 0",62	+ 0",62.cos(3.long. corr. ☾ — 3.long. vraie ☉)
— 2",47	— 2",47.cos(distance vraie de ☾ au nœud — anom. corr. ☾)

Pour avoir la parallaxe horizontale à une hauteur quelconque du pôle,



Bürg suppose l'ellipticité de la Terre  $\frac{1}{330}$ ; Mayer la suppose  $\frac{1}{230}$ . Je la supposerai, conformément à la détermination du numéro précédent,  $\frac{1}{305}$ . On multiplie ensuite les coefficients de cette Table par l'unité moins le produit de l'ellipticité de la Terre par le carré du sinus de la latitude. Cela posé, on a, pour la parallaxe horizontale de la Lune à l'équateur, réduite en cosinus d'angles croissant proportionnellement à l'angle  $\nu$ ,

Mason et Mayer.	Coefficients de ma théorie.	Excès de ces coefficients sur ceux des Tables de Mason.	Excès des coefficients de Bürg sur ceux de Mason.
+ 10624", 81* . . . . .	+ 10580", 03	- 44", 78	- 32", 10
+ 581", 66. cos( $\nu - \varpi$ ) . . . . .	+ 579", 26	- 2", 40	- 1", 23
- 1", 61. cos( $2\nu - 2\varpi$ ) . . . . .	+ 0", 03	+ 1", 64	+ 0", 00
- 0", 95. cos( $3\nu - 3\varpi$ ) . . . . .	.....	.....	+ 0", 00
+ 0", 30. cos( $4\nu - 4\varpi$ ) . . . . .	.....	.....	+ 0", 00
+ 74", 81. cos( $2\nu - 2m\nu$ ) . . . . .	+ 76", 18	+ 1", 37	+ 0", 00
+ 118", 55. cos( $2\nu - 2m\nu - \nu + \varpi$ ) . . . . .	+ 117", 62	- 0", 93	+ 0", 00
-- 3", 62. cos( $2\nu - 2m\nu + \nu - \varpi$ ) . . . . .	- 2", 16	+ 1", 46	+ 0", 00
-- 0", 54. cos( $2\nu - 2m\nu + c'm\nu - \varpi'$ ) . . . . .	- 0", 53	+ 0", 01	+ 0", 00
+ 5", 17. cos( $2\nu - 2m\nu - c'm\nu + \varpi'$ ) . . . . .	+ 5", 06	- 0", 11	+ 0", 00
- 0", 93. cos( $c'm\nu - \varpi'$ ) . . . . .	- 1", 03	- 0", 10	+ 0", 00
- 0", 28. cos( $2\nu - 2m\nu - \nu + c'm\nu + \varpi - \varpi'$ ) . . . . .	- 0", 68	- 0", 40	+ 0", 00
+ 5", 22. cos( $2\nu - 2m\nu - \nu - c'm\nu + \varpi + \varpi'$ ) . . . . .	+ 5", 04	- 0", 18	+ 0", 00
- 0", 89. cos( $\nu + c'm\nu - \varpi - \varpi'$ ) . . . . .	- 2", 02	- 1", 13	+ 0", 00
+ 1", 50. cos( $\nu - c'm\nu - \varpi + \varpi'$ ) . . . . .	+ 2", 67	+ 1", 17	+ 0", 00
+ 11", 93. cos( $2\nu - 2\nu + 2m\nu - 2\varpi$ ) . . . . .	+ 11", 10	- 0", 83	+ 0", 00
+ 1", 23. cos( $2g\nu - 2\nu + 2m\nu - 2\theta$ ) . . . . .	- 0", 58	- 1", 81	+ 0", 00
- 3", 09. cos( $\nu - m\nu$ ) . . . . .	- 2", 99. (1+i) . . . . .	.....	+ 0", 00
- 0", 22. cos( $4\nu - 4m\nu$ ) . . . . .	.....	.....	+ 0", 00
- 0", 20. cos( $4\nu - 4m\nu - 2\nu + 2\varpi$ ) . . . . .	+ 0", 14	+ 0", 34	+ 0", 00
- 0", 46. cos( $4\nu - 4m\nu - \nu + \varpi$ ) . . . . .	- 0", 46	+ 0", 00	+ 0", 00
- 0", 68. cos( $3\nu - 2\nu + 2m\nu - 3\varpi$ ) . . . . .	.....	.....	+ 0", 00
- 3", 04. cos( $2g\nu - \nu - 2\theta + \varpi$ ) . . . . .	- 2", 92	+ 0", 12	+ 0", 00
+ 0", 57. cos( $2g\nu + \nu - 2\theta - \varpi$ ) . . . . .	.....	.....	+ 0", 00
- 0", 62. cos( $\nu - \nu + m\nu - \varpi$ ) . . . . .	- 0", 38. (1+i) . . . . .	.....	+ 0", 00
- 0", 32. cos( $2\nu + 2\nu - 2m\nu - 2\varpi$ ) . . . . .	+ 0", 07	+ 0", 39	+ 0", 00



Les inégalités de la parallaxe des Tables de Mayer, Mason et Bürg sont dérivées de la théorie de Mayer, et l'on voit par le tableau précédent qu'il y a très-peu de différence entre les coefficients de ces inégalités et ceux de mon analyse; cependant j'ai lieu de croire ceux-ci plus exacts, puisque ma théorie représente mieux que celle de Mayer le mouvement de la Lune en longitude. C'est un point de pure analyse; car les observations ne seront jamais assez précises pour déterminer d'aussi petites différences. A l'égard de la constante de la parallaxe, Mayer et Bürg l'ont déterminée par les observations. Ce dernier astronome a principalement fait usage d'un très-grand nombre d'observations de Maskelyne, et il a trouvé cette constante plus petite que celle de Mayer de  $32'',10$ . J'ai déduit, dans le n° 19, cette constante des expériences sur la longueur du pendule à secondes et des mesures des degrés terrestres, et j'ai trouvé qu'il faut diminuer encore de  $12'',7$  la constante déterminée par Bürg. Cette différence dépend-elle des erreurs des observations, ou des éléments que j'ai employés dans mon calcul? C'est ce que la suite des observations fera connaître. Le seul élément qui me paraisse susceptible de quelque incertitude est la masse de la Lune. On a vu, dans le Chapitre XVI du Livre VI, que, pour faire coïncider le résultat de la théorie avec celui de Bürg, il faut diminuer la masse de la Lune et la réduire de  $\frac{1}{58,6}$  à  $\frac{1}{74,2}$ . Cette diminution paraît un peu trop forte d'après les phénomènes des marées et de la nutation de l'axe terrestre, et d'après l'équation lunaire des Tables du Soleil. Il paraît donc qu'il faut encore diminuer de deux ou trois secondes la constante de la parallaxe de la Lune, déterminée par cet astronome, qui, par la comparaison d'un très-grand nombre d'observations, a déjà diminué la constante adoptée par les autres astronomes, et s'est ainsi fort rapproché de sa véritable valeur.



## CHAPITRE V.

SUR UNE INÉGALITÉ A LONGUE PÉRIODE QUI PARAÎT EXISTER DANS LE MOUVEMENT  
DE LA LUNE.

27. Nous avons remarqué, dans le commencement de ce Livre, que le mouvement de la Lune, conclu par la comparaison des observations de Flamsteed et de Bradley, est sensiblement plus grand que celui qui résulte des observations de Bradley comparées aux observations de Maskelyne, et que les observations faites depuis quinze à vingt ans indiquent dans ce mouvement une diminution plus grande encore. Cela semble prouver qu'il existe dans la théorie de ce satellite une ou plusieurs inégalités à longues périodes, dont il est important de connaître la loi. En examinant avec la plus scrupuleuse attention cette théorie, on voit que l'action des planètes ne produit aucune inégalité semblable, comme on peut s'en convaincre par l'analyse exposée dans le n° 21; mais l'attraction du Soleil produit, dans l'expression de  $nt + \varepsilon$ , une inégalité proportionnelle au sinus de l'angle

$$3v - 3mv + 3c'mv - 2gv - cv + 2\theta + \varpi - 3\varpi'.$$

Les termes qui composent cette inégalité sont très-petits dans les équations différentielles; mais quelques-uns d'eux acquièrent par les intégrations successives le diviseur  $(3 - 3m + 3c'm - 2g - c)^2$ , et ce diviseur peut les rendre sensibles par son excessive petitesse. Pour déterminer ce diviseur, nous observerons que l'on a, par le n° 16,

$$3 - 2g - c = 0,00040849.$$

De plus, le mouvement annuel du périégée solaire étant, par le n° 25



du Livre VI, égal à  $36''$ ,  $881443$ , on a

$$1 - c' = 0,00000922035,$$

d'où l'on tire

$$3 - 3m + 3c'm - 2g - c = 0,00040642,$$

et par conséquent,

$$(3 - 3m + 3c'm - 2g - c)^2 = 0,0000016518.$$

A la vérité, on a vu, dans le n° 5, que le carré du coefficient de l'angle  $\varphi$  ne peut pas, en vertu des intégrations successives, être diviseur de l'inégalité correspondante, lorsque l'on n'a égard qu'à la première puissance de la force perturbatrice; mais cela cesse d'avoir lieu pour les termes dépendants du carré de cette force, et l'inégalité dépendante de  $3\varphi - 3m\varphi + 3c'm\varphi - 2g\varphi - c\varphi + 2\theta + \varpi - 3\varpi'$  ne peut résulter que de ces termes. Pour le faire voir considérons le terme  $3affndtdR$  de l'expression de  $\delta\varphi$ , donnée par la formule (Y) du n° 46 du Livre II; ce terme paraît être celui dont l'inégalité que nous considérons doit principalement dépendre. Le développement de R donne des termes de la forme

$$H \cos(3nt - 3n't + 3c'n't - 2gnt - cnt + 2\theta + \varpi - 3\varpi').$$

Si ces termes ne résultent que de la première puissance de la force perturbatrice,  $n't$  et  $c'n't$  se rapportent aux coordonnées du Soleil, et alors la différentielle  $dR$ , qui ne se rapporte qu'aux coordonnées de la Lune, devient

$$dR = -(3 - 2g - c)ndt.H \sin(3nt - 3n't + 3c'n't - 2gnt - cnt + 2\theta + \varpi - 3\varpi').$$

La double intégrale  $3affndtdR$  acquiert le diviseur

$$(3 - 3m + 3c'm - 2g - c)^2,$$

$m$  étant, par le n° 4, égal à  $\frac{n'}{n}$ ; mais elle a pour facteur  $3 - 2g - c$ , qui est à très-peu près égal à  $3 - 3m + 3c'm - 2g - c$ ; ainsi elle doit être considérée comme n'ayant que le diviseur  $3 - 3m + 3c'm - 2g - c$ , ce qui ne paraît pas suffire pour la rendre sensible. Si le terme précé-



dent de l'expression de R résulte du carré de la force perturbatrice, c'est-à-dire de la substitution des termes de  $r$  et de  $v$  dépendants de cette force, alors les coordonnées de la Lune renferment les angles  $n't$  et  $c'n't$ . Supposons, par exemple, que la partie  $-2n't$  de l'angle  $-3n't$  dans ce terme de R dépende des coordonnées de la Lune; on a dans ce cas

$$dR = -(3 - 2m - 2g - c) \\ \times H n dt \sin(3nt - 3n't + 3c'n't - 2gnt - cnt + 2\theta + \varpi - 3\varpi'),$$

et le terme  $3affndtdR$  donne, dans l'expression de la longitude de la Lune, le suivant,

$$\frac{3a(3 - 2m - 2g - c)n^2 H \sin(3nt - 3n't + 3c'n't - 2gnt - cnt + 2\theta + \varpi - 3\varpi')}{(3 - 3m + 3c'm - 2g - c)^2},$$

qui peut devenir sensible par l'extrême petitesse de son diviseur. Les termes de ce genre sont en très-grand nombre, et il est difficile de les déterminer avec exactitude; mais il suffit d'être averti de la possibilité de l'inégalité qui en résulte, pour suivre sous ce point de vue les observations. Cette inégalité doit être appliquée au moyen mouvement, et par conséquent à l'anomalie moyenne.

La théorie indique encore une inégalité dont la période est à très-peu près la même que celle de l'inégalité précédente, et qui dépend de l'aplatissement de la Terre. On a vu, dans le n° 20, que l'expression de Q contient le terme

$$\left(\frac{1}{2}\alpha\varphi - \alpha\rho\right) \frac{D^2}{r^3} \left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right);$$

or on a, par le même numéro,

$$\mu = s \cos \lambda + \sqrt{1 - s^2} \sin \lambda \sin f v;$$

de plus on a

$$r = \frac{\sqrt{1 + s^2}}{u},$$

ce qui donne dans Q ou dans  $-R$  la fonction

$$\left(\frac{1}{2}\alpha\varphi - \alpha\rho\right) \frac{D^2}{2} u^3 \left(1 - \frac{5}{2}s^2\right) \sin^2 \lambda \cos 2fv.$$



Cette fonction produit, par son développement, des termes dépendants de l'angle

$$2fnt + nt - n't + c'n't - 2gnt - cnt + 2\theta + \varpi - \varpi';$$

ils sont analogues à ceux que donne la fonction R relative à l'action du Soleil, et qui dépendent de l'angle

$$3nt - 3n't + 3c'n't - 2gnt - cnt + 2\theta + \varpi - 3\varpi';$$

le coefficient du temps  $t$  est à très-peu près le même dans ces deux angles, qui maintenant, vu la position du périhélie solaire, diffèrent peu de 200 degrés. Tous les termes de R se rapportant ici aux seules coordonnées de la Lune, si l'on représente par

$$K \sin(2fnt + nt - n't + c'n't - 2gnt - cnt + 2\theta + \varpi - \varpi')$$

le terme dépendant de l'angle précédent, que donne le développement de R, ce terme acquerra dans la différentielle  $dR$  le facteur

$$(2f + 1 - m + c'm - 2g - c)n,$$

et par conséquent il n'aura pour diviseur, dans la double intégrale  $3affndt dR$ , que la première puissance, et non le carré, de cette quantité; l'inégalité correspondante à ce terme ne paraît donc pas devoir être sensible.

Le terme de la forme  $Y^{(3)}$  qui, comme on l'a vu dans le Livre III, peut exister dans l'expression du rayon vecteur du sphéroïde terrestre, peut encore introduire, dans l'expression de la longitude vraie de la Lune, une inégalité dépendante du sinus de  $3fnt - 2gnt - cnt + 2\theta + \varpi$ , et qui maintenant se confond à peu près avec les deux précédentes. Si cette inégalité devenait sensible, il en résulterait de nouvelles lumières sur la figure de la Terre; mais quelques calculs que j'ai faits sur cet objet me portent à croire que cette inégalité est insensible, comme la précédente. La suite des siècles et de nouveaux progrès dans



l'analyse éclairciront ce point délicat et important de la théorie lunaire.

28. Nous allons maintenant établir par les observations l'existence de l'inégalité dépendante du sinus de l'angle

$$3nt - 3n't + 3c'n't - 2gnt - cnt + 2\theta + \varpi - 3\varpi'.$$

Cet angle est évidemment le double de la longitude du nœud de l'orbite lunaire, plus la longitude de son périégée, moins trois fois la longitude du périégée du Soleil; nous le désignerons par E, et nous allons faire voir que la loi des variations de sinE est la même que celle des anomalies observées dans le moyen mouvement de la Lune.

Les Tables lunaires insérées dans la troisième édition de l'*Astronomie* de Lalande supposent que, dans l'intervalle de cent années juliennes, le mouvement de la Lune par rapport aux équinoxes surpasse un nombre entier de circonférences, de  $342^{\circ},09629$ , et que l'époque de 1750 est de  $209^{\circ},20820$ . La correction de l'époque de ces Tables pour 1691 a été déterminée par Bouvard et Bürg, au moyen de plus de deux cents observations de La Hire et de Flamsteed; ils ont trouvé l'un et l'autre cette correction égale à  $-13'',58$ .

La correction de l'époque des mêmes Tables pour 1756 a été déterminée par Mason et Bouvard, au moyen d'un très-grand nombre d'observations de Bradley, et ils l'ont trouvée nulle. Ainsi, dans l'intervalle de 1691 à 1756, le moyen mouvement de la Lune a été de  $13'',58$  plus grand que par ces Tables, ce qui donne  $20'',9$  pour l'accroissement du moyen mouvement séculaire des mêmes Tables.

Bürg a trouvé, par un grand nombre d'observations de Maskelyne, la correction de l'époque de ces Tables égale à  $-9'',26$  pour 1766, et égale à  $-28'',09$  pour 1779.

Bouvard a trouvé, par un grand nombre d'observations de Maskelyne,  $-54'',32$  pour la correction de l'époque de ces Tables en 1789.

Enfin, par un nombre considérable d'observations faites à Greenwich, à Paris et à Gotha, on trouve  $-87'',96$  pour la correction des époques des mêmes Tables en 1801.



De là il suit que, depuis 1756 jusqu'à ce jour, le moyen mouvement de la Lune a diminué d'une manière sensible, et que cette diminution est maintenant croissante; car de 1756 à 1779, c'est-à-dire, dans un intervalle de vingt-trois ans, ce mouvement a été plus petit que par les Tables de 28",09; et de 1779 à 1801, c'est-à-dire, en vingt-deux ans, il a été plus petit de 59",97. L'époque de 1756, comparée à celle de 1779, donne 126" pour la diminution du mouvement séculaire des Tables, tandis que l'époque de 1756 à 1801 donne 172",5 pour cette diminution. L'ensemble des observations indique donc évidemment ces trois résultats : 1° un mouvement moyen plus grand que celui de ces Tables, depuis 1691 jusqu'en 1756; 2° un mouvement moyen plus petit, depuis 1756 jusqu'à ce jour; 3° une diminution de plus en plus rapide.

Ces résultats sont conformes à la marche de l'inégalité précédente; car, à l'époque de 1691, le sinus de E était négatif; il était positif en 1756; cette inégalité a donc augmenté, dans cet intervalle, le moyen mouvement de la Lune. En 1756, ce sinus était positif et vers son maximum, et depuis cette époque il a toujours été en diminuant; l'inégalité a donc diminué le moyen mouvement de la Lune. Enfin ce sinus était presque nul en 1801, et alors sa diminution est la plus grande; la diminution du moyen mouvement a dû par conséquent être plus considérable dans ces dernières années.

Déterminons présentement le coefficient de cette inégalité. Il est visible qu'elle doit produire un changement, soit dans l'époque des Tables pour 1750, soit dans le moyen mouvement séculaire de ces Tables. Nommons  $\epsilon$  la correction de l'époque des Tables en 1750,  $x$  la diminution de leur moyen mouvement séculaire, et  $y$  le coefficient de l'inégalité précédente. La formule de correction des époques des Tables sera, en nommant  $i$  le nombre des siècles écoulés depuis 1750,

$$\epsilon - xi + y \sin E.$$

Pour déterminer les trois inconnues  $\epsilon$ ,  $x$  et  $y$ , j'ai comparé cette formule aux trois époques de 1691, 1756 et 1801, déterminées par



les observations, ce qui m'a donné les trois équations suivantes :

$$\varepsilon + x.0,59 - y.0,63660 = -13'',58,$$

$$\varepsilon - x.0,06 + y.0,99898 = 0,$$

$$\varepsilon - x.0,51 + y.0,08199 = -87'',96.$$

Ces trois équations donnent

$$\varepsilon = -41'',54,$$

$$x = 98'',654,$$

$$y = 47'',51.$$

Au moyen de ces valeurs on trouve  $-13'',58$ ,  $+0'',00$ ,  $-11'',64$ ,  $-35'',03$ ,  $-57'',62$ , et  $-87'',96$ , pour les corrections des six époques de 1691, 1756, 1766, 1779, 1789 et 1801. La somme de ces six corrections est  $-205'',83$ , et la somme des six corrections déterminées par les observations est  $-193'',21$  : l'ensemble de ces corrections indique par conséquent qu'il faut augmenter de  $+2'',10$  la valeur précédente de  $\varepsilon$ , et alors la formule de correction des Tables devient

$$-39'',44 - 98'',654.i + 47'',51.\sin E.$$

En calculant par cette formule les corrections pour les six époques, on a

	Corrections des Tables par les observations.	Correction par la formule.	Excès de ces corrections sur les premières.
1691.....	$-13'',58$	$-11'',48$	$+2'',10$
1756.....	$+0'',00$	$+2'',10$	$+2'',10$
1766.....	$-9'',26$	$-9'',54$	$-0'',28$
1779.....	$-28'',09$	$-32'',93$	$-4'',84$
1789.....	$-54'',32$	$-55'',52$	$-1'',20$
1801.....	$-87'',96$	$-85'',86$	$+2'',10$

Les différences entre les résultats des observations et ceux de la formule sont dans les limites des erreurs dont ces derniers résultats sont susceptibles; elles peuvent dépendre en partie de la formule elle-même, que l'on rectifiera par de nouvelles observations.



## CHAPITRE VI.

DES VARIATIONS SÉCULAIRES DES MOUVEMENTS DE LA LUNE ET DE LA TERRE  
QUI PEUVENT ÊTRE PRODUITES PAR LA RÉSISTANCE D'UN FLUIDE ÉTHÉRÉ  
RÉPANDU AUTOUR DU SOLEIL.

29. Il est possible qu'il y ait autour du Soleil un fluide extrêmement rare qui altère les moyens mouvements des planètes et des satellites; il est donc intéressant de connaître son influence sur les mouvements de la Lune et de la Terre. Pour la déterminer, nommons  $x, y, z$  les coordonnées de la Lune, rapportées au centre de gravité de la Terre, et  $x', y', z'$  celles de la Terre, rapportées au centre du Soleil. La vitesse absolue de la Lune autour du Soleil sera

$$\frac{\sqrt{(dx' + dx)^2 + (dy' + dy)^2 + (dz' + dz)^2}}{dt}.$$

Supposons la résistance que la Lune éprouve égale au carré de cette vitesse, multiplié par un coefficient  $K$  qui dépend de la densité de l'éther, de la surface et de la densité de la Lune. En la décomposant parallèlement aux axes des  $x$ , des  $y$  et des  $z$ , elle produit les trois forces suivantes

$$\begin{aligned} & - \frac{K(dx' + dx)}{dt^2} \sqrt{(dx' + dx)^2 + (dy' + dy)^2 + (dz' + dz)^2}, \\ & - \frac{K(dy' + dy)}{dt^2} \sqrt{(dx' + dx)^2 + (dy' + dy)^2 + (dz' + dz)^2}, \\ & - \frac{K(dz' + dz)}{dt^2} \sqrt{(dx' + dx)^2 + (dy' + dy)^2 + (dz' + dz)^2}. \end{aligned}$$

Mais, la Terre étant supposée immobile dans la théorie lunaire, il



faut transporter en sens contraire à la Lune la résistance qu'elle éprouve, et qui, décomposée parallèlement aux mêmes axes, donne les trois forces

$$- K' \frac{dx'}{dt^2} \sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2},$$

$$- K' \frac{dy'}{dt^2} \sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2},$$

$$- K' \frac{dz'}{dt^2} \sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2},$$

$K'$  étant un coefficient différent de  $K$ , et qui dépend de la résistance éprouvée par la Terre. Ayant donc représenté par  $\frac{\partial Q}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial y}$  et  $\frac{\partial Q}{\partial z}$  les forces qui sollicitent la Lune parallèlement aux axes des  $x$ , des  $y$  et des  $z$ , on aura, en n'ayant égard qu'aux forces précédentes,

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} &= K' \frac{dx'}{dt^2} \sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2} \\ &\quad - K \frac{dx' + dx}{dt^2} \sqrt{(dx' + dx)^2 + (dy' + dy)^2 + (dz' + dz)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial y} &= K' \frac{dy'}{dt^2} \sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2} \\ &\quad - K \frac{dy' + dy}{dt^2} \sqrt{(dx' + dx)^2 + (dy' + dy)^2 + (dz' + dz)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial z} &= K' \frac{dz'}{dt^2} \sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2} \\ &\quad - K \frac{dz' + dz}{dt^2} \sqrt{(dx' + dx)^2 + (dy' + dy)^2 + (dz' + dz)^2}. \end{aligned}$$

Maintenant on a, en ne faisant varier que les coordonnées de la Lune,

$$dQ = dx \frac{\partial Q}{\partial x} + dy \frac{\partial Q}{\partial y} + dz \frac{\partial Q}{\partial z}.$$

En substituant pour  $x$ ,  $y$ ,  $z$  leurs valeurs  $\frac{\cos v}{u}$ ,  $\frac{\sin v}{u}$ ,  $\frac{s}{u}$ , données dans



le n° 2, on aura

$$\begin{aligned} dQ = & -\frac{du}{u^2} \left( \cos v \frac{\partial Q}{\partial x} + \sin v \frac{\partial Q}{\partial y} + s \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \\ & -\frac{dv}{u} \left( \sin v \frac{\partial Q}{\partial x} - \cos v \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \\ & +\frac{ds}{u} \frac{\partial Q}{\partial z}; \end{aligned}$$

or on a

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial u} du + \frac{\partial Q}{\partial v} dv + \frac{\partial Q}{\partial s} ds;$$

en comparant ces deux valeurs de  $dQ$ , on aura

$$\frac{\partial Q}{\partial u} = -\frac{1}{u^2} \left( \cos v \frac{\partial Q}{\partial x} + \sin v \frac{\partial Q}{\partial y} + s \frac{\partial Q}{\partial z} \right),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial v} = -\frac{1}{u} \left( \sin v \frac{\partial Q}{\partial x} - \cos v \frac{\partial Q}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = \frac{1}{u} \frac{\partial Q}{\partial z},$$

d'où l'on tire

$$-\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{s}{u} \frac{\partial Q}{\partial s} = \frac{1}{u^2} \left( \cos v \frac{\partial Q}{\partial x} + \sin v \frac{\partial Q}{\partial y} \right).$$

On a, par le n° 2,

$$x' = \frac{\cos v'}{u'}, \quad y' = \frac{\sin v'}{u'}, \quad z' = \frac{s'}{u'},$$

$v'$  étant ici la longitude de la Terre vue du Soleil. Si l'on prend pour plan fixe celui de l'écliptique en 1750, on pourra supposer  $s' = 0$ . Représentons par  $r'dq'$  le petit arc décrit par la Terre dans l'instant  $dt$ , et qui est égal à  $\sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}$ ; cet arc est à celui que la Lune décrit par son mouvement relatif autour de la Terre à très-peu près dans le rapport de  $\frac{a'm}{a}$  à l'unité, et par conséquent trente fois au moins plus considérable; on a donc, à fort peu près,

$$\sqrt{(dx' + dx)^2 + (dy' + dy)^2 + (dz' + dz)^2} = r'dq' + \frac{dx'dx}{r'dq'} + \frac{dy'dy}{r'dq'}.$$



Si l'on néglige l'excentricité de l'orbe terrestre, on a  $dq' = mdt$ , le temps  $t$  étant représenté par le moyen mouvement de la Lune. On a ensuite

$$\frac{dx'}{r'dq'} = -\sin v', \quad \frac{dy'}{r'dq'} = \cos v',$$

et par conséquent,

$$\sqrt{(dx' + dx)^2 + (dy' + dy)^2 + (dz' + dz)^2} = ma'dt - dx \sin v' + dy \cos v'.$$

De là il est facile de conclure

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(K - K')m^2 \sin v'}{u'^2} - \frac{3Km}{2u'} \frac{dx}{dt} + \frac{Km}{2u'} \frac{dx}{dt} \cos 2v' + \frac{Km}{2u'} \frac{dy}{dt} \sin 2v',$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{(K' - K)m^2 \cos v'}{u'^2} - \frac{3Km}{2u'} \frac{dy}{dt} + \frac{Km}{2u'} \frac{dx}{dt} \sin 2v' - \frac{Km}{2u'} \frac{dy}{dt} \cos 2v',$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = -\frac{Km}{u'} \frac{dz}{dt},$$

et par conséquent, en substituant pour  $x$  et  $y$  leurs valeurs, et négligeant le carré de l'excentricité de l'orbe lunaire,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{s}{u} \frac{dQ}{ds} &= \frac{(K' - K)m^2 \sin(v - v')}{u^2 u'^2} + \frac{3Km}{2u^4 u'} \frac{du}{dt} \\ &\quad - \frac{Km}{2u^3 u'} \frac{dv}{dt} \sin(2v - 2v') - \frac{Km}{2u^4 u'} \frac{du}{dt} \cos(2v - 2v'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial v} \frac{dv}{u^2} &= \frac{(K' - K)m^2 dv}{u'^2 u^3} \cos(v - v') - \frac{3Km}{2u' u^4} dv \frac{dv}{dt} \\ &\quad - \frac{Km}{2u' u^4} dv \frac{dv}{dt} \cos(2v - 2v') + \frac{Km}{2u' u^5} dv \frac{du}{dt} \sin(2v - 2v'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial v} \frac{du}{u^2 dv} &= \frac{(K' - K)m^2}{u'^2 u^3} \frac{du}{dv} \cos(v - v') - \frac{3Km}{2u' u^4} \frac{du}{dt} \\ &\quad - \frac{Km}{2u' u^4} \frac{du}{dt} \cos(2v - 2v'). \end{aligned}$$

La valeur de  $K$  n'est pas constante : si l'on suppose la densité de l'éther proportionnelle à une fonction de la distance au Soleil, en dési-



gnant par  $\varphi(u')$  cette fonction, elle sera, relativement à la Lune, pour laquelle  $u'$  devient  $u' - \frac{u'^2}{u} \cos(\nu - \nu')$ ,

$$\varphi(u') - \frac{u'^2}{u} \varphi'(u') \cos(\nu - \nu'),$$

$\varphi'(u')$  étant la différentielle de  $\varphi(u')$  divisée par  $du'$ ; ainsi l'on pourra supposer

$$K = H\varphi(u') - \frac{Hu'^2}{u} \varphi'(u') \cos(\nu - \nu').$$

Cela posé, si l'on néglige les quantités périodiques autres que les sinus et cosinus de  $c\nu - \varpi$ , on aura

$$\frac{\partial Q}{\partial \nu} \frac{d\nu}{u^2} = \frac{Hm^2 d\nu}{2u^4} \varphi'(u') - \frac{3Hm}{2u'u^4} \varphi(u') d\nu \frac{d\nu}{dt}.$$

En substituant  $\frac{1}{a} [1 + e \cos(c\nu - \varpi)]$  pour  $u$ , et  $d\nu [1 - 2e \cos(c\nu - \varpi)]$  pour  $dt$ , on aura

$$\int \frac{\partial Q}{\partial \nu} \frac{d\nu}{u^2} = -\frac{1}{2} Hma^4 \nu \left[ \frac{3\varphi(u')}{u'} - m\varphi'(u') \right] + Hma^4 \left[ \frac{3}{u'} \varphi(u') - 2m\varphi'(u') \right] e \sin(c\nu - \varpi).$$

On aura ensuite

$$-\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{s}{u} \frac{\partial Q}{\partial s} = -\frac{3}{2} Hma^3 \frac{\varphi(u')}{u'} e \sin(c\nu - \varpi),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \nu} \frac{du}{u^2 d\nu} = \frac{Hm}{2} a^3 \left[ \frac{3\varphi(u')}{u'} - m\varphi'(u') \right] e \sin(c\nu - \varpi).$$

Soit donc

$$\alpha = Hma^3 \left[ \frac{3\varphi(u')}{u'} - m\varphi'(u') \right],$$

$$\epsilon = Hma^3 \left[ \frac{6\varphi(u')}{u'} - \frac{3}{2} m\varphi'(u') \right];$$

il faudra ajouter au second membre de la seconde des équations (L) du



n° 1, et par conséquent au second membre de l'équation (L') du n° 9, la fonction

$$-\frac{\alpha v}{a} + 6 \frac{e}{a} \sin(cv - \varpi).$$

La valeur de  $\frac{1}{a}$  sera ainsi, par le n° 10, augmentée de la quantité  $\frac{\alpha v}{a}$ , et conséquemment la valeur de  $a$  sera diminuée de  $\alpha a v$ ; on aura ensuite à très-peu près, par le même numéro,

$$-\frac{2d}{dv} \frac{e}{a} + 6 \frac{e}{a} = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{e}{a} = \text{const.} (1 + \frac{1}{2} 6 v),$$

et, par conséquent,

$$e = \text{const.} [1 - (\alpha - \frac{1}{2} 6) v].$$

Le rapport de l'excentricité au demi-grand axe est donc assujetti, par la résistance de l'éther, à une équation séculaire; mais elle est insensible par rapport à l'accélération correspondante du moyen mouvement de la Lune, parce que cette dernière accélération est, comme on va le voir, multipliée par le carré de  $v$ . Cette résistance ne produit aucune équation séculaire dans le mouvement du périégée.

L'expression de  $dt$  du n° 15 donne, dans l'expression de  $t + \varepsilon$ , la fonction

$$-\frac{3}{4} \alpha v^2 + (5\alpha - 6) v e \sin(cv - \varpi).$$

En substituant, au lieu de  $v$ ,  $t + \varepsilon + 2e \sin(ct - \varpi)$ , on aura dans l'expression de  $v$  l'équation séculaire

$$\frac{3}{4} \alpha t^2 - (2\alpha - 6) t e \sin(ct - \varpi).$$

La résistance de l'éther produit donc, dans le moyen mouvement de la Lune, une équation séculaire qui accélère ce moyen mouvement, sans en produire aucune sur le mouvement du périégée.

On s'assurera de la même manière que la résistance de l'éther ne



produit aucune équation séculaire sensible ni dans le mouvement des nœuds, ni dans l'inclinaison de l'orbite lunaire à l'écliptique.

De là il suit que la résistance de l'éther ne peut être sensible que dans le moyen mouvement de la Lune. Les observations anciennes et modernes prouvent évidemment que les moyens mouvements de son périégée et de ses nœuds sont assujettis à des équations séculaires très-sensibles. Le mouvement séculaire du périégée, conclu par la comparaison des observations anciennes et modernes, est plus petit de quinze à seize minutes que celui qui résulte de la comparaison des observations faites depuis un siècle; ce phénomène incontestable indique donc une autre cause que la résistance de l'éther. On a vu précédemment qu'il dépend de la variation de l'excentricité de l'orbe terrestre, et comme les équations séculaires résultantes de cette variation satisfont exactement à l'ensemble de toutes les observations anciennes et modernes, on doit en conclure que l'accélération produite par la résistance d'un fluide éthéré, dans le moyen mouvement de la Lune, est jusqu'à présent insensible.

30. L'accélération produite par cette résistance dans le moyen mouvement de la Terre est beaucoup plus petite que l'accélération correspondante du moyen mouvement de la Lune. Pour le faire voir reprenons la formule (Y) du n° 46 du Livre II. Cette formule, appliquée à la Terre, donne dans l'expression de  $\delta v'$  le terme

$$-\frac{3a}{S} \iint d v' d' Q',$$

S étant la masse du Soleil, la somme des masses de la Terre et de la Lune étant prise pour unité;  $Q'$  correspondant pour la Terre à ce que nous avons désigné par  $Q$  pour la Lune; et la caractéristique différentielle  $d'$  se rapportant aux coordonnées du Soleil. On a

$$d' Q' = \frac{\partial Q'}{\partial x'} dx' + \frac{\partial Q'}{\partial y'} dy' + \frac{\partial Q'}{\partial z'} dz',$$

$\frac{\partial Q'}{\partial x'}$ ,  $\frac{\partial Q'}{\partial y'}$  et  $\frac{\partial Q'}{\partial z'}$  étant les forces dont la Terre est animée parallèlement



aux axes des  $x'$ , des  $y'$  et des  $z'$ , en vertu de la résistance de l'éther. Ces forces sont, par le numéro précédent, en négligeant l'excentricité de l'orbe terrestre, et en représentant l'élément  $dt$  du temps par la différentielle du moyen mouvement lunaire,

$$K'a'^2 m^2 \sin v', \quad -K'a'^2 m^2 \cos v', \quad -K'a'^2 m \frac{ds'}{dt};$$

en négligeant donc le carré de  $\frac{ds'}{dt}$ , on aura

$$d'Q' = -K'a'^3 m^3 dt,$$

ce qui donne

$$-\frac{3a'}{S} \iint d'Q' = \frac{3}{2} \frac{K'a'^4 m^4 t^2}{S}.$$

$K'$  doit être supposé égal à  $H' \varphi(u')$ ,  $H'$  étant une constante dépendante de la surface et de la masse de la Terre; ainsi l'équation séculaire produite par la résistance de l'éther, dans le moyen mouvement de la Terre, est

$$\frac{\frac{3}{2} H'a'^4 m^4 t^2 \varphi(u')}{S}.$$

L'accélération correspondante du moyen mouvement de la Lune est, par ce qui précède,

$$\frac{3}{4} H a^3 a' m t^2 \left[ 3\varphi(u') - \frac{m}{a} \varphi'(u') \right].$$

De plus, on a  $\frac{S a^3}{a'^3} = m^2$ ; l'accélération du moyen mouvement de la Lune est donc à l'accélération correspondante du moyen mouvement de la Terre comme l'unité est à

$$\frac{2 H' m \varphi(u')}{H \left[ 3\varphi(u') - \frac{m}{a} \varphi'(u') \right]},$$

et conséquemment, comme l'unité est à  $\frac{2}{3} \frac{H' m}{H}$ , en négligeant le terme

$$-\frac{m}{a} \varphi'(u').$$



Il est facile de voir que

$$\frac{H'}{H} = \frac{\text{masse de la Lune}}{\text{masse de la Terre}} \cdot \frac{\text{carré de la parallaxe lunaire}}{\text{carré du demi-diamètre apparent de la Lune}}$$

Les observations donnent

$$\text{demi-diamètre apparent de la Lune} = 2911'',$$

$$\text{parallaxe lunaire} = 10661'',$$

et, par le n° 44 du Livre VI, la masse de la Lune est  $\frac{1}{68,5}$  de celle de la Terre; on aura ainsi

$$\frac{H'}{H} = 0,195804,$$

d'où il suit que l'accélération du moyen mouvement de la Terre, produite par la résistance de l'éther, est égale à l'accélération correspondante du moyen mouvement de la Lune, multipliée par 0,0097642, ou environ cent fois plus petite que cette accélération.



Il est facile de voir que...  
H. ...  
H. ...

Les observations donnent...  
dans-d'autres opérations de la Livre VII

et par le n° 44 de la Livre VII...  
la Livre VII; on aura ainsi

On voit que l'opération de...  
dans le Livre VII...  
on en conclut que...

Il est facile de voir que...  
dans le Livre VII...  
on en conclut que...

Il est facile de voir que...  
dans le Livre VII...  
on en conclut que...



---

## SUPPLÉMENT

AU

# TRAITÉ DE MÉCANIQUE CÉLESTE

PRÉSENTÉ AU BUREAU DES LONGITUDES LE 17 AOUT 1808.

---

Mon objet, dans ce Supplément, est de perfectionner la théorie des perturbations planétaires, que j'ai présentée, dans les Livres V et VI de mon *Traité de Mécanique céleste*. En cherchant à donner aux expressions des éléments des orbites la forme la plus simple dont elles sont susceptibles, je suis parvenu à ne les faire dépendre que des différences partielles d'une même fonction, prises par rapport à ces éléments; et ce qui est remarquable, les coefficients de ces différences ne sont fonctions que des éléments eux-mêmes. Ces éléments sont les six arbitraires des trois équations différentielles du second ordre qui déterminent le mouvement de chaque planète. En regardant son orbite comme une ellipse variable à chaque instant, ils sont représentés : 1° par le demi-grand axe, dont dépend le moyen mouvement de la planète; 2° par l'époque de la longitude moyenne; 3° par l'excentricité de l'orbite; 4° par la longitude du périhélie; 5° par l'inclinaison de l'orbite à un plan fixe; 6° enfin, par la longitude de ses nœuds. M. Lagrange a donné depuis longtemps à l'expression différentielle du grand axe la forme dont je viens de parler, et il en a conclu d'une manière très-heureuse l'invariabilité des moyens mouvements, lorsque l'on n'a égard qu'à la première puissance des masses perturbatrices,



invariabilité que j'ai reconnue le premier, en ne rejetant que les quatrièmes puissances des excentricités et des inclinaisons, ce qui suffit aux besoins de l'Astronomie. J'ai donné, dans le Livre II de la *Mécanique céleste*, la même forme aux expressions différentielles de l'excentricité de l'orbite, de son inclinaison et de la longitude de ses nœuds. Il ne restait donc qu'à donner la même forme aux expressions différentielles des longitudes de l'époque et du périhélie : c'est ce que je fais ici.

Le principal avantage de cette forme des expressions différentielles des éléments est de donner leurs variations finies par le développement seul de la fonction que j'ai nommée R dans le Livre II de la *Mécanique céleste*. En réduisant cette fonction dans une série de cosinus d'angles croissant proportionnellement au temps, on obtient par la différentiation de chaque terme les termes correspondants des variations des éléments. Je m'étais attaché à remplir cette condition dans le Livre II de la *Mécanique céleste*; mais on y satisfait d'une manière encore plus générale et plus simple, au moyen des nouvelles expressions de ces variations. Elles ont de plus l'avantage de mettre en évidence le beau théorème auquel M. Poisson est parvenu sur l'invariabilité des moyens mouvements, en ayant égard au carré des masses perturbatrices. Dans le Livre VI de la *Mécanique céleste*, j'ai prouvé, au moyen d'expressions analogues, que cette uniformité n'est point altérée par les grandes inégalités de Jupiter et de Saturne, ce qui était d'autant plus important que j'ai fait voir, dans le même Livre, que ces grandes inégalités ont une influence considérable sur les variations séculaires des orbites de ces deux planètes. La substitution des nouvelles expressions dont je viens de parler montre que l'uniformité des moyens mouvements planétaires n'est troublée par aucune autre inégalité périodique ou séculaire. Ces expressions me conduisent encore à la solution la plus générale et la plus simple des variations séculaires des éléments des orbites planétaires. Enfin elles donnent avec une extrême facilité les deux inégalités du mouvement lunaire en longitude et en latitude, qui dépendent de l'aplatissement de la Terre, et



que j'ai déterminées dans le Chapitre II du Livre VII. Cette confirmation des résultats auxquels je suis parvenu sur cet objet me paraît intéressante en ce que leur comparaison avec les observations donne l'ellipticité de la Terre d'une manière au moins aussi précise que les mesures directes, avec lesquelles ils sont aussi bien d'accord qu'il est possible de l'espérer, vu les irrégularités de la surface de la Terre.

Dans la théorie des deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne, que j'ai donnée dans le Livre VII, j'ai eu égard aux cinquièmes puissances des excentricités et des inclinaisons des orbites. M. Burckhardt avait calculé les termes dépendants de ces puissances. Mais j'ai reconnu, depuis, que l'inégalité résultante de ces termes avait été prise avec un signe contraire. Je rectifie donc, à la fin de ces recherches, les formules des mouvements de Jupiter et de Saturne que j'ai présentées dans le Chapitre VIII du Livre X. Il en résulte un léger changement dans les moyens mouvements et les époques de ces deux planètes, et ce changement satisfait à l'observation qu'Ebn-Junis fit au Caire, en l'an 1007, de leur conjonction mutuelle, observation qui ne s'écarte plus des formules que d'une quantité beaucoup moindre que l'erreur dont elle est susceptible. Les observations anciennes citées par Ptolémée sont également représentées par mes formules. Cet accord prouve que les moyens mouvements des deux plus grosses planètes du système solaire sont maintenant bien connus, et n'ont point éprouvé, depuis Hipparque, d'altération sensible; il garantit pour longtemps l'exactitude des Tables que M. Bouvard a construites d'après ma théorie, et que le Bureau des Longitudes vient de publier.

Dans la même séance où j'ai présenté ces Recherches au Bureau des Longitudes, M. Lagrange lui a pareillement communiqué de savantes recherches qui ont rapport à leur objet. Il y parvient, par une analyse très-élégante, à exprimer la différence partielle de  $R$ , prise par rapport à chaque élément, par une fonction linéaire des différences infiniment petites de ces éléments, et dans laquelle les coefficients de ces différences ne sont fonctions que des éléments eux-mêmes. En déterminant, au moyen de ces expressions, les différences de chaque élément,



on doit, après les réductions convenables, retrouver les expressions très-simples auxquelles je suis parvenu, et qui, tirées de méthodes aussi différentes, seront par là confirmées.

1. Je reprends l'expression de  $e de$ , donnée dans le n° 67 du Livre II du *Traité de Mécanique céleste*. En faisant, pour simplifier,  $\mu = 1$ , elle devient

$$e de = a n dt \sqrt{1 - e^2} \frac{\partial R}{\partial v} - a(1 - e^2) dR.$$

Dans cette équation,  $t$  est le temps,  $nt$  est le moyen mouvement de la planète  $m$ ,  $a$  est le demi-grand axe de son orbite,  $e$  en est l'excentricité,  $v$  est la longitude vraie de la planète,  $R$  est une fonction des coordonnées des deux planètes  $m$  et  $m'$ , telle qu'en nommant  $x, y, z, x', y', z'$  ces coordonnées, on a

$$R = m' \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} - \frac{m'}{\rho},$$

$\rho$  étant la distance mutuelle des deux planètes, et par conséquent étant égal à  $\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$ ;  $r'$  est le rayon vecteur de la planète  $m'$ ,  $r$  étant celui de la planète  $m$ ; enfin la caractéristique différentielle  $d$  se rapporte aux seules coordonnées de la planète  $m$ .

J'observe que l'on a  $\frac{\partial R}{\partial v}$  en différentiant par rapport à  $nt$  l'expression de  $R$  développée en série d'angles proportionnels au temps  $t$ , en la divisant par  $ndt$ , et en ajoutant à cette différentielle ainsi divisée la différence partielle  $\frac{\partial R}{\partial \omega}$ ,  $\omega$  étant la longitude du périhélie de l'orbite de  $m$ . En effet, on ne doit point, dans la différence partielle de  $R$ , prise par rapport à  $v$ , avoir égard à l'angle  $nt$ , qu'introduit dans  $R$  soit le rayon vecteur  $r$  de la planète  $m$ , soit la partie périodique de l'expression elliptique de  $v$ , développée en série de sinus d'angles proportionnels au temps; or dans ces fonctions l'angle  $nt$  est toujours accompagné de l'angle  $-\omega$ , qui n'est introduit dans  $R$  que de cette manière;



en ajoutant donc à la différence partielle  $\frac{dR}{ndt}$  la différence partielle  $\frac{\partial R}{\partial \varpi}$ , on aura la valeur de  $\frac{\partial R}{\partial v}$ . L'expression précédente de  $e de$  donnera ainsi

$$de = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{e}(1-\sqrt{1-e^2})dR + \frac{a\sqrt{1-e^2}}{e}ndt\frac{\partial R}{\partial \varpi}.$$

On a ensuite, par le n° 3 du Livre IX de la *Mécanique céleste*,

$$d\varepsilon - d\varpi = -\frac{d\varpi(1-e\cos u)^2}{\sqrt{1-e^2}} - \frac{de\sin u(2-e^2-e\cos u)}{1-e^2};$$

$u$  est ici l'anomalie de l'excentrique, et  $\varepsilon$  est la longitude de l'époque. On peut mettre le second membre de l'équation précédente sous cette forme

$$-d\varpi\sqrt{1-e^2} + \frac{ed\varpi}{\sqrt{1-e^2}}(2\cos u - e - e\cos^2 u) - \frac{de\sin u}{1-e^2}(2-e^2-e\cos u).$$

L'anomalie  $u$  de l'excentrique est donnée en fonction de l'anomalie vraie  $v - \varpi$  au moyen des équations

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v-\varpi)} = a(1-e\cos u),$$

d'où l'on tire

$$\cos u = \frac{e + \cos(v-\varpi)}{1+e\cos(v-\varpi)},$$

$$\sin u = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin(v-\varpi)}{1+e\cos(v-\varpi)};$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} & \frac{ed\varpi}{\sqrt{1-e^2}}(2\cos u - e - e\cos^2 u) - \frac{de\sin u}{1-e^2}(2-e^2-e\cos u) \\ &= \sqrt{1-e^2} \frac{2\cos(v-\varpi) + e + e\cos^2(v-\varpi)}{[1+e\cos(v-\varpi)]^2} ed\varpi \\ & - \sqrt{1-e^2} \frac{2+e\cos(v-\varpi)}{[1+e\cos(v-\varpi)]^2} de\sin(v-\varpi). \end{aligned}$$

Substituant pour  $ed\varpi$  et  $de$  leurs valeurs données à la fin de la



page 373 du tome I de la *Mécanique céleste*, le second membre de cette équation se réduit à

$$2an dt \cdot r \frac{\partial R}{\partial r},$$

et comme on a  $r \frac{\partial R}{\partial r} = a \frac{\partial R}{\partial a}$ , il devient

$$2a^2 n dt \frac{\partial R}{\partial a};$$

l'expression précédente de  $d\varepsilon - d\varpi$  donne ainsi cette équation fort simple, que M. Poisson a trouvée le premier,

$$d\varepsilon = d\varpi(1 - \sqrt{1 - e^2}) + 2a^2 \frac{\partial R}{\partial a} n dt.$$

Si l'on rapporte, comme on l'a fait dans le Livre II de la *Mécanique céleste*, le mouvement de la planète  $m$  au plan de son orbite primitive, et que l'on fasse, comme dans le même ouvrage,

$$p = \text{tang } \varphi \sin \theta, \quad q = \text{tang } \varphi \cos \theta,$$

$\varphi$  étant l'inclinaison de l'orbite, et  $\theta$  étant la longitude de son nœud ascendant, on aura, par le n° 71 du Livre II,

$$dp = - \frac{dt}{\sqrt{a(1-e^2)}} \frac{\partial R}{\partial q},$$

$$dq = \frac{dt}{\sqrt{a(1-e^2)}} \frac{\partial R}{\partial p}.$$

Maintenant, on a, par le n° 44 du Livre II,

$$0 = \frac{\partial R}{\partial a} da + \frac{\partial R}{\partial e} de + \frac{\partial R}{\partial \varpi} d\varpi + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} d\varepsilon + \frac{\partial R}{\partial p} dp + \frac{\partial R}{\partial q} dq;$$

de plus, on a, par le n° 64 du même Livre,

$$da = - 2a^2 dR,$$

et  $\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} = \frac{dR}{n dt}$ , parce que l'angle  $nt$  est toujours accompagné de l'angle  $+\varepsilon$ ; en substituant donc, au lieu de  $da$ ,  $de$ ,  $d\varepsilon$ ,  $dp$  et  $dq$ , leurs va-



eurs précédentes, on aura cette équation très-simple,

$$d\varpi = -\frac{and t \sqrt{1-e^2}}{e} \frac{\partial R}{\partial e},$$

ce qui donne

$$d\varepsilon = -\frac{and t \sqrt{1-e^2}}{e} (1-\sqrt{1-e^2}) \frac{\partial R}{\partial e} + 2a^2 \frac{\partial R}{\partial a} n dt.$$

En réunissant ces diverses équations, on aura, en observant que  $n = a^{-\frac{3}{2}}$ ,

$$(1) \quad da = -2a^2 dR,$$

$$(2) \quad d\varepsilon = -\frac{and t \sqrt{1-e^2}}{e} (1-\sqrt{1-e^2}) \frac{\partial R}{\partial e} + 2a^2 \frac{\partial R}{\partial a} n dt,$$

$$(3) \quad de = \frac{a \sqrt{1-e^2}}{e} (1-\sqrt{1-e^2}) dR + \frac{a \sqrt{1-e^2}}{e} n dt \frac{\partial R}{\partial \varpi},$$

$$(4) \quad d\varpi = -\frac{and t \sqrt{1-e^2}}{e} \frac{\partial R}{\partial e},$$

$$(5) \quad dp = -\frac{and t}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial q},$$

$$(6) \quad dq = \frac{and t}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial p}.$$

On peut substituer dans ces équations, au lieu de  $dR$ ,  $n dt \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$ , et par là réduire les expressions précédentes à ne renfermer que des différences partielles des éléments; mais il est aussi simple de conserver la différentielle  $dR$ .

Dans le mouvement considéré comme elliptique, on doit rigoureusement substituer  $\int n dt$  au lieu de  $nt$ ; or  $n = a^{-\frac{3}{2}}$ ; on a donc, en nommant  $\zeta$  le moyen mouvement de la planète  $m$ ,

$$(7) \quad \zeta = \int n dt = 3 \int f a n dt dR.$$

2. Ces équations mettent en évidence le résultat auquel M. Poisson est parvenu, sur l'invariabilité des moyens mouvements planétaires, en ayant même égard au carré de la force perturbatrice. En désignant



par la caractéristique  $\delta$  les variations finies, on aura, en ne faisant varier dans  $R$  que ce qui est relatif à la planète  $m$ , et en observant

$$\text{que } \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{dR}{ndt},$$

$$\delta R = \frac{dR}{ndt} [\delta(fndt) + \delta z] + \frac{\partial R}{\partial a} \delta a + \frac{\partial R}{\partial e} \delta e + \frac{\partial R}{\partial \varpi} \delta \varpi + \frac{\partial R}{\partial p} \delta p + \frac{\partial R}{\partial q} \delta q.$$

En substituant, pour  $\delta a$ ,  $\delta e$ ,  $\delta \varpi$ , ..., les intégrales des valeurs précédentes de  $da$ ,  $de$ ,  $d\varpi$ , ..., on aura

$$\begin{aligned} \delta R = & \frac{dR}{ndt} \delta(fndt) + 2a^2 \left( \frac{dR}{ndt} fndt \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{\partial R}{\partial a} f dR \right) \\ & + \frac{a\sqrt{1-e^2}}{e} (1 - \sqrt{1-e^2}) \left( \frac{\partial R}{\partial e} f dR - \frac{dR}{ndt} fndt \frac{\partial R}{\partial e} \right) \\ & + \frac{a\sqrt{1-e^2}}{e} \left( \frac{\partial R}{\partial e} fndt \frac{\partial R}{\partial \varpi} - \frac{\partial R}{\partial \varpi} fndt \frac{\partial R}{\partial e} \right) \\ & + \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} \left( \frac{\partial R}{\partial q} fndt \frac{\partial R}{\partial p} - \frac{\partial R}{\partial p} fndt \frac{\partial R}{\partial q} \right). \end{aligned}$$

Pour avoir la valeur de  $d \left[ \delta R - \frac{dR}{ndt} \delta(fndt) \right]$ , donnée par cette équation, il faut différentier par rapport aux seules quantités relatives à la planète  $m$ . Pour avoir la différentielle relative aux éléments de cette planète, il suffit de supprimer les signes  $f$ , qui n'ont été introduits que par les intégrales des valeurs différentielles de ces éléments, et alors cette expression devient identiquement nulle; il suffit donc, pour avoir la différentielle  $d$  de la fonction  $\delta R - \frac{dR}{ndt} \delta(fndt)$ , de différentier par rapport à  $nt$  les quantités hors du signe  $f$ . L'expression de cette fonction est composée de termes de la forme  $MfNd t - NfMdt$ ,  $M$  et  $N$  pouvant se développer en cosinus de la forme  $k \cos(i'n't - int + A)$ ,  $i$  et  $i'$  étant des nombres quelconques entiers, positifs ou négatifs. Supposons que le cosinus précédent appartienne à  $M$ , et que  $k' \cos(i'n't - int + A')$  soit le terme correspondant de  $N$ . Il faut combiner ces deux termes ensemble, pour avoir des quantités non péri-



diques dans  $d(MfNdt - NfMdt)$ ; cette fonction devient alors

$$k \int \sin(i'n't - int + A) f k' dt \cos(i'n't - int + A') \\ - k' \int \sin(i'n't - int + A') f k dt \cos(i'n't - int + A),$$

fonction qui, en effectuant les intégrations, se réduit à zéro, ce qui est conforme à ce que j'ai démontré dans le n° 12 du Livre VI, relativement aux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne. L'expression de  $d\left(\delta R - \frac{dR}{ndt} \delta f n dt\right)$  est donc une fonction périodique.

L'expression de  $d\left(\frac{dR}{ndt} \delta f n dt\right)$  ne renferme que des quantités périodiques; car on a

$$d\left(\frac{dR}{ndt} \delta f n dt\right) = \frac{d^2 R}{ndt} \delta f n dt + \frac{dR}{ndt} dt \delta n.$$

Substituant pour  $\delta n$  sa valeur  $3fan dR$ , on aura

$$d\left(\frac{dR}{ndt} \delta f n dt\right) = 3an \frac{d^2 R}{ndt} \int f dR dt + 3an \frac{dR}{ndt} dt f dR.$$

On peut réunir dans un seul terme tous ceux du développement de  $R$  qui dépendent d'un même angle  $i'n't - int$ , et il devient de la forme  $k \cos(i'n't - int + A)$ . En le substituant pour  $R$  dans les fonctions  $\frac{d^2 R}{ndt} \int f dR dt$  et  $\frac{dR}{ndt} \int f dR$ , on voit qu'elles se réduisent à des sinus du double de l'angle  $i'n't - int + A$ ; ainsi la différentielle  $d\left(\frac{dR}{ndt} \delta f n dt\right)$  ne renferme que des quantités périodiques, d'où il suit que  $d\delta R$  ne renferme pareillement que des quantités périodiques, lorsque l'on ne fait varier dans  $\delta R$  que les quantités relatives à la planète  $m$ .

Pour avoir la valeur complète de  $d\delta R$ , il faut encore faire varier dans  $\delta R$  ce qui est relatif à la planète  $m'$ . Pour cela, nommons  $R'$  ce que devient  $R$  relativement à la planète  $m'$  troublée par l'action de  $m$ ; on aura

$$R' = \frac{m(xx' + yy' + zz')}{r^3} - \frac{m}{\rho};$$

ainsi

$$R = \frac{m'}{m} R' + m'(xx' + yy' + zz') \left( \frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r^3} \right).$$



La variation de  $R$  relative aux variations de ce qui se rapporte à la planète  $m'$  est donc égale à la variation du second membre de cette équation, relative aux variations des coordonnées de  $m'$ . Désignons par  $\delta'$  les variations qui se rapportent à ces coordonnées. On voit évidemment, par l'analyse précédente, que

$$\frac{m'}{m} \left( \delta' R' - \frac{d'R'}{n'dt} \delta' f n' dt \right)$$

se décompose en termes de la forme  $M f N dt - N f M dt$ . Pour avoir leur différentielle par rapport à la caractéristique  $d$ , il faut ne faire varier que les quantités hors du signe intégral, parce que les quantités enveloppées par le signe intégral sont relatives aux éléments de la planète  $m'$ . Soit donc  $k \cos(i' n' t - int + A)$  un terme de  $M$ , et  $k' \cos(i' n' t - int + A')$  le terme correspondant de  $N$ ; il faut combiner ces termes ensemble pour avoir des quantités non périodiques dans  $d(M f N dt - N f M dt)$ , et alors il est facile de voir que cette fonction différentielle n'en renferme point. On s'assurera facilement que  $d\left(\frac{d'R'}{n'dt} \delta' f n' dt\right)$  n'en contient aucune, par le même raisonnement qui nous a fait voir que  $d\left(\frac{dR}{ndt} \delta f n dt\right)$  ne renferme que des quantités périodiques; ainsi  $d\delta'R'$  ne contient que des quantités semblables.

Il nous reste à considérer la variation de

$$m'(xx' + yy' + zz') \left( \frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r^3} \right).$$

Nommons  $P$  cette fonction. On a, par le n° 46 du Livre II,

$$\frac{m'x}{r^3} = -\frac{m'}{M} \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{mm'}{M} \frac{x}{r^3} - \frac{m'}{M} \frac{\partial R}{\partial x},$$

$M$  étant la masse du Soleil. On a pareillement

$$\frac{m'x'}{r'^3} = -\frac{m'}{M} \frac{d^2x'}{dt^2} - \frac{m'^2}{M} \frac{x'}{r'^3} - \frac{m'}{M} \frac{\partial R'}{\partial x'}.$$

Les coordonnées  $y, z, y', z'$  fournissent des équations semblables, et



il est facile d'en conclure

$$P = \frac{m'}{M} \frac{d(x'dx - xdx' + y'dy - ydy' + z'dz - zdz')}{dt^2} + Q,$$

Q étant une fonction en  $x, y, z, x', y', z'$ , de l'ordre du carré des masses  $m$  et  $m'$ . Il est clair que, la variation

$$\frac{m'}{M} \frac{d\delta'(x'dx - xdx' + y'dy - ydy' + z'dz - zdz')}{dt^2}$$

étant une différence exacte, on aura  $\int d\delta'P$  en y changeant la caractéristique  $d$  en  $\delta$ , et alors il est visible qu'elle ne renferme dans l'ordre  $m$  que des quantités périodiques.

Le terme Q donnera dans  $\int dP$  celui-ci  $\int dQ$ . En n'ayant égard qu'aux quantités de l'ordre  $m^2$  dans  $dQ$ , il suffit de substituer dans Q, au lieu des coordonnées, leurs valeurs elliptiques, et alors  $\int dQ$  ne contient que des quantités périodiques. Ainsi  $\int d\delta'P$  ne renferme que de semblables quantités. Il suit de là que  $\int d\delta R$  ne contient dans l'ordre  $m'$  que des quantités périodiques, en faisant varier dans R les coordonnées des deux planètes  $m$  et  $m'$ .

S'il y a une troisième planète  $m''$ , elle ajoute à R la fonction

$$\frac{m''(xx'' + yy'' + zz'')}{r''^3} - \frac{m''}{\rho'},$$

$\rho'$  étant la distance de  $m''$  à  $m$ . La partie de R, relative à l'action de  $m'$  sur  $m$ , reçoit alors une variation dépendante de l'action de  $m''$  sur  $m'$ .

Cette partie de R est

$$\frac{m'(xx' + yy' + zz')}{r'^3} - \frac{m'}{\rho};$$

la variation des coordonnées  $x', y', z'$  par l'action de  $m''$  y produit des termes multipliés par  $m'm''$ , et qui sont fonctions des coordonnées elliptiques  $x, y, z$ , et des angles  $n't$  et  $n''t$ . Mais ces angles devant disparaître dans la partie non périodique de  $dR$ , et ne pouvant être détruits par l'angle  $nt$ , qu'introduisent les valeurs de  $x, y, z$ , il faut n'avoir égard, dans le développement de la variation de R, qu'aux termes in-



dépendants de  $n't$  et de  $n''t$ . Ces termes seront de la forme  $m'm''X$ ,  $X$  étant fonction des coordonnées de la planète  $m$ ; ils introduisent dans  $\int dR$  des termes de la forme  $m'm''\int dX$  ou  $m'm''X$ , qui ne peuvent donner que des quantités non périodiques de l'ordre  $m'm''$ , quantités que nous avons négligées dans  $\int dR$ .

Pareillement, la variation des coordonnées  $x, y, z$  par l'action de  $m''$  ne peut introduire dans la partie précédente de  $R$  que les angles  $nt$  et  $n''t$ ; il ne faut donc considérer dans cette partie que les termes indépendants de  $n't$ , et par conséquent de la forme  $m'm''X$ ,  $X$  étant fonction des seules coordonnées  $x, y, z$ , ce qui, comme on vient de le voir, ne peut produire que des quantités négligeables. Ainsi, en n'ayant égard qu'aux quantités non périodiques de l'ordre  $m$  dans  $\int dR$ , on peut supposer que  $m''$  est nul, lorsque l'on considère la partie de  $R$  relative à l'action de  $m'$  sur  $m$ , et l'on peut supposer  $m'$  nul lorsque l'on considère la partie de  $R$  relative à l'action de  $m''$  sur  $m$ : on vient de voir que, dans ces deux cas, la variation séculaire de  $\int dR$  est nulle. Cette variation est donc généralement nulle, lorsque l'on considère les actions réciproques de trois ou d'un nombre quelconque de planètes, si l'on n'a égard qu'aux carrés et aux produits des masses perturbatrices dans la valeur de  $dR$ .

Reprenons maintenant l'équation (7) du n° 1,

$$\zeta = 3 \iint a n d t d R.$$

Sa variation est

$$\delta \zeta = 3 a n \iint d t d \delta R + 3 a^2 \iint (n d t d R \int d R).$$

On vient de voir que  $d \delta R$  est nul, lorsque l'on n'a égard qu'aux quantités séculaires de l'ordre du carré des masses planétaires; on a vu pareillement que  $d R \int d R$  est nul, eu égard à ces quantités. En ne considérant donc que les quantités séculaires qui, par la double intégration, acquièrent un dénominateur de l'ordre du carré des masses planétaires, on voit que la variation  $\delta \zeta$  est nulle. Ainsi l'on peut assurer que cette variation, en ayant égard soit aux quantités séculaires, soit aux quantités périodiques, ne peut être que de l'ordre des masses perturbatrices; résultat important auquel M. Poisson est parvenu le premier.



3. Considérons deux planètes  $m$  et  $m'$ , en mouvement autour du Soleil, dont nous prendrons la masse pour unité. Nommons  $\nu$  la distance angulaire de la planète  $m$  à la ligne d'intersection des deux orbites,  $\nu'$  la distance angulaire de la planète  $m'$  à la même droite; nommons encore  $\gamma$  l'inclinaison mutuelle des orbites. En prenant pour plan des coordonnées l'orbite de  $m$ , et la ligne des nœuds des orbites pour origine des  $x$ , on aura

$$x = r \cos \nu, \quad y = r \sin \nu, \quad z = 0,$$

$$x' = r' \cos \nu', \quad y' = r' \sin \nu' \cos \gamma, \quad z' = r' \sin \nu' \sin \gamma,$$

ce qui donne, en faisant  $1 - \cos \gamma = 2 \sin^2 \frac{1}{2} \gamma = \epsilon$ ,

$$\begin{aligned} R &= \frac{m'(xx' + yy' + zz')}{r'^3} - \frac{m'}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}} \\ &= \frac{m'r}{r'^2} [\cos(\nu' - \nu) - \epsilon \sin \nu \sin \nu'] - \frac{m'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\nu' - \nu) + 2\epsilon rr' \sin \nu \sin \nu'}}; \end{aligned}$$

$R$ , sous cette forme, devient indépendant du plan auquel on a rapporté les coordonnées. En le développant en sinus et cosinus d'angles croissant proportionnellement au temps  $t$ , par la substitution des valeurs elliptiques de  $r, r', \nu, \nu'$ , il devient fonction des distances moyennes  $nt + \epsilon, n't + \epsilon'$  des planètes à la ligne des nœuds, des distances des périhélies à la même ligne, des demi-grands axes  $a$  et  $a'$ , des excentricités  $e$  et  $e'$ , et de  $\epsilon$  ou de l'inclinaison mutuelle des orbites,  $\epsilon$  étant très-petit et de l'ordre du carré de cette inclinaison. Sous cette forme,  $R$  ne renferme point explicitement les variables  $p$  et  $q$ ; mais on peut les y faire naître de la manière suivante.

Si, au lieu de rapporter les mouvements des planètes à leurs orbites, on les rapporte au plan fixe de l'orbite primitive de  $m$ , alors  $z$  ne sera point nul, et il sera égal à  $rs$ ,  $s$  étant le sinus de la latitude de  $m$  au-dessus de ce plan. En négligeant le carré des forces perturbatrices, on pourra négliger le carré de  $s$ ; on aura ainsi, au lieu de  $R$ , la fonction



suiivante, que nous désignerons par  $\bar{R}$ ,

$$\frac{m'r}{r'^2} [\cos(\nu' - \nu) - \epsilon \sin \nu \sin \nu' + s \sin \gamma \sin \nu']$$

$$\frac{m'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\nu' - \nu) + 2\epsilon rr' \sin \nu \sin \nu' - 2rr' s \sin \nu \sin \nu'}}$$

Retranchons de  $\nu$  et de  $\nu'$ , tant dans  $R$  que dans  $\bar{R}$ , la longitude  $\theta'$  du nœud de l'orbite de  $m'$  avec  $m$ , cette longitude étant comptée sur l'orbite de  $m$ , ce qui revient à changer les origines de  $\nu$  et de  $\nu'$ , et supposons

$$s = q \sin(\nu - \theta') - p \cos(\nu - \theta');$$

on aura

$$R = \frac{m'r}{r'^2} \left[ \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon\right) \cos(\nu' - \nu) + \frac{1}{2}\epsilon \cos(\nu' + \nu - 2\theta') \right]$$

$$\frac{m'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \left[ \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon\right) \cos(\nu' - \nu) + \frac{1}{2}\epsilon \cos(\nu' + \nu - 2\theta') \right]}}$$

$$\bar{R} = \frac{m'r}{r'^2} \left[ \begin{array}{l} \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}q \sin \gamma\right) \cos(\nu' - \nu) + \left(\frac{1}{2}\epsilon - \frac{1}{2}q \sin \gamma\right) \cos(\nu' + \nu - 2\theta') \\ - \frac{1}{2}p \sin \gamma \sin(\nu' - \nu) - \frac{1}{2}p \sin \gamma \sin(\nu' + \nu - 2\theta') \end{array} \right]$$

$$\frac{m'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \left[ \begin{array}{l} \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}q \sin \gamma\right) \cos(\nu' - \nu) + \left(\frac{1}{2}\epsilon - \frac{1}{2}q \sin \gamma\right) \cos(\nu' + \nu - 2\theta') \\ - \frac{1}{2}p \sin \gamma \sin(\nu' - \nu) - \frac{1}{2}p \sin \gamma \sin(\nu' + \nu - 2\theta') \end{array} \right]}}$$

Maintenant il est visible que l'on changera  $R$  dans  $\bar{R}$ , si l'on fait varier, dans  $R$ ,  $\epsilon$  de  $\delta\epsilon$ ,  $\nu$  de  $\delta\nu$ , et  $\theta'$  de  $\delta\theta'$ , de manière que l'on ait

$$\delta\epsilon = -q \sin \gamma,$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\epsilon\right) \delta\nu = \cos^2 \frac{1}{2}\gamma \delta\nu = -\frac{1}{2}p \sin \gamma,$$

$$\epsilon \delta\theta' - \frac{1}{2}\epsilon \delta\nu = -\frac{1}{2}p \sin \gamma.$$

On aura ainsi

$$\bar{R} = R - q \sin \gamma \frac{\partial R}{\partial \epsilon} - p \tan^2 \frac{1}{2}\gamma \frac{\partial R}{\partial \nu} - \frac{p}{\sin \gamma} \frac{\partial R}{\partial \theta'};$$

on a, par le n° 1,  $\frac{\partial R}{\partial \nu} = \frac{dR}{n dt} + \frac{\partial R}{\partial \omega}$ ; cela posé, les équations (5) et (6)



donneront les deux suivantes

$$(8) \quad dp = \frac{andt}{\sqrt{1-e^2}} \sin \gamma \frac{\partial R}{\partial \delta},$$

$$(9) \quad dq = -\frac{andt}{\sin \gamma \sqrt{1-e^2}} \left[ \frac{\partial R}{\partial \theta'} + \varepsilon \left( \frac{dR}{ndt} + \frac{\partial R}{\partial \varpi} \right) \right].$$

En réunissant ces équations aux équations (1), (2), (3), (4), (7) du n° 1, on aura, par la seule différentiation des termes du développement de R, les termes correspondants de chacun des éléments du mouvement de  $m$ , ce qui facilite extrêmement le calcul de ces différents termes. Soit

$$m'k \cos(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - g\varpi - g'\varpi' - 2g''\theta')$$

un des termes du développement de R; le terme correspondant du demi-grand axe sera

$$\frac{2m'a^2in}{i'n' - in} k \cos(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - g\varpi - g'\varpi' - 2g''\theta');$$

le terme correspondant du mouvement moyen sera

$$-\frac{3m'in^2}{(i'n' - in)^2} ak \sin(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - g\varpi - g'\varpi' - 2g''\theta');$$

le terme correspondant de l'époque sera

$$-\frac{m'na}{i'n' - in} \left[ (1 - \sqrt{1-e^2}) \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{\partial k}{\partial e} - 2a \frac{\partial k}{\partial a} \right] \sin(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - g\varpi - g'\varpi' - 2g''\theta');$$

le terme correspondant de l'excentricité sera

$$-\frac{m'n\sqrt{1-e^2}}{e} ak \frac{g+i(1-\sqrt{1-e^2})}{i'n' - in} \cos(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - g\varpi - g'\varpi' - 2g''\theta');$$

celui de la longitude du périhélie sera

$$-\frac{m'n\sqrt{1-e^2}}{e(i'n' - in)} a \frac{\partial k}{\partial e} \sin(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - g\varpi - g'\varpi' - 2g''\theta');$$



le terme correspondant de  $p$  sera

$$\frac{m'n \sin \gamma \cdot a}{\sqrt{1-e^2}(i'n'-in)} \frac{\partial k}{\partial \delta} \sin(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - g'\varpi - g'\varpi' - 2g''\theta');$$

enfin le terme correspondant de  $q$  sera

$$\frac{2m'nak}{(i'n'-in) \sin \gamma \sqrt{1-e^2}} [g'' + (i+g') \sin^2 \frac{1}{2} \gamma] \cos(i'n't - int - i'\varepsilon' - i\varepsilon - g'\varpi - g'\varpi' - 2g''\theta).$$

Ces résultats sont conformes à ceux que l'on a trouvés dans le Chapitre VIII du Livre II de la *Mécanique céleste*; mais ils ont sur eux l'avantage de s'étendre à toutes les puissances des excentricités et des inclinaisons.

On aura les variations séculaires des éléments de l'orbite de  $m$ , en réduisant  $R$  à sa partie non périodique, que nous désignerons par  $m'F$ . Alors  $dR$  est nul, ainsi que  $da$ , et l'on a

$$de = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{e} m'n dt \frac{\partial F}{\partial \varpi},$$

$$d\varpi = - \frac{am'n dt \sqrt{1-e^2}}{e} \frac{\partial F}{\partial e},$$

$$d\varepsilon = - \frac{am'n dt \sqrt{1-e^2}}{e} (1 - \sqrt{1-e^2}) \frac{\partial F}{\partial e} + 2a^2 \frac{\partial F}{\partial a} m'n dt,$$

$$dp = - \frac{am'n dt}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial F}{\partial q},$$

$$dq = \frac{am'n dt}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial F}{\partial p},$$

ou

$$dp = \frac{am'n dt}{\sqrt{1-e^2}} \sin \gamma \frac{\partial F}{\partial \delta},$$

$$dq = - \frac{am'n dt}{\sin \gamma \sqrt{1-e^2}} \left( \frac{\partial F}{\partial \theta'} + \delta \frac{\partial F}{\partial \varpi} \right).$$

On peut observer ici que,  $R$  étant égal à

$$m' \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} - \frac{m'}{\rho},$$



il est, aux quantités près de l'ordre  $m'^2$ , égal à

$$-m' \frac{x d^2 x' + \gamma d^2 \gamma' + z d^2 z'}{dt^2} - \frac{m'}{\rho};$$

sa partie non périodique ne dépend donc que de la partie non périodique de  $-\frac{m'}{\rho}$ ; F est donc égale à la partie non périodique de  $-\frac{1}{\rho}$ , développé en série de cosinus d'angles croissant proportionnellement au temps  $t$ , en sorte qu'il est le même pour les deux planètes. En faisant varier dans F les éléments de l'orbite de  $m$ , et substituant, pour  $\delta e$ ,  $\delta \omega$ ,  $\delta p$ ,  $\delta q$ , leurs valeurs données par les intégrales des équations différentielles précédentes, on voit que  $\delta F$  se réduit à zéro, et la même égalité a lieu relativement aux éléments de l'orbite de  $m'$ , ce que j'ai démontré dans le n° 5 du Livre VI de la *Mécanique céleste*, en ne portant l'approximation que jusqu'aux termes de l'ordre des quatrièmes puissances des excentricités exclusivement.

On a, par ce qui précède,

$$\delta \varepsilon = -q \sin \gamma, \quad \delta \theta' = -\frac{p}{\sin \gamma}.$$

Supposons que  $\delta \varepsilon$  et  $\delta \theta'$  croissent respectivement des quantités  $d\varepsilon$  et  $d\theta'$ ; on aura

$$d\varepsilon = -dq \sin \gamma, \quad d\theta' = -\frac{dp}{\sin \gamma};$$

substituant pour  $dp$  et  $dq$  leurs valeurs, on aura

$$d\theta' = -\frac{am'ndt}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon},$$

$$d\gamma = \frac{am'ndt}{\sin \gamma \sqrt{1-e^2}} \left( \frac{\partial F}{\partial \theta'} + \varepsilon \frac{\partial F}{\partial \omega} \right).$$

On a

$$\frac{\partial F}{\partial \theta'} = -\frac{\partial F}{\partial \omega} - \frac{\partial F}{\partial \omega'},$$

parce que, F étant développé en cosinus de la forme

$$H \cos(g\omega + g'\omega' + 2g''\theta'),$$



la somme  $g + g' + 2g''$  des coefficients des angles  $\varpi$ ,  $\varpi'$  et  $\theta'$  doit être nulle, pour que ce terme soit indépendant de l'origine arbitraire de ces angles. On a donc

$$d\gamma = - \frac{am'ndt}{\sin\gamma\sqrt{1-e^2}} \left[ (1-\epsilon) \frac{\partial F}{\partial \varpi} + \frac{\partial F}{\partial \varpi'} \right],$$

et par conséquent on a, en vertu des expressions précédentes de  $de$  et de  $de'$ ,

$$\frac{d\gamma \sin\gamma}{\cos\gamma} + \frac{ede}{1-e^2} + \frac{e'de'}{1-e'^2} = - \frac{a'mn'e\,de}{am'n \cos\gamma \sqrt{1-e^2} \sqrt{1-e'^2}} - \frac{am'ne'de'}{a'mn' \cos\gamma \sqrt{1-e^2} \sqrt{1-e'^2}}.$$

En multipliant cette équation par  $\cos\gamma \sqrt{1-e^2} \sqrt{1-e'^2}$ , et intégrant, on aura

$$2 \cos\gamma \sqrt{1-e^2} \sqrt{1-e'^2} = \text{const.} - \frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}} (1-e^2) - \frac{m'\sqrt{a'}}{m\sqrt{a}} (1-e'^2).$$

Faisons, pour abrégér,

$$\sqrt{a(1-e^2)} = f, \quad \sqrt{a'(1-e'^2)} = f';$$

nous aurons

$$\epsilon = \frac{(mf + m'f')^2 - c^2}{2mm'ff'}.$$

$c^2$  étant une constante arbitraire, indépendante des éléments.

La valeur précédente de  $d\theta'$  exprime le mouvement de l'intersection des deux orbites, produit par l'action de  $m'$  et rapporté à l'orbite de  $m$ . Concevons un plan intermédiaire entre ceux des deux orbites, et qui passe par leur intersection mutuelle. Nommons  $\varphi$  l'inclinaison de l'orbite de  $m$  à ce plan. Pour avoir le mouvement différentiel du nœud de l'orbite de  $m$  sur ce plan, produit par l'action de  $m'$ , il faut multiplier la valeur précédente de  $d\theta'$  par  $\frac{\sin\gamma}{\sin\varphi}$ . En nommant donc  $d\theta$  ce mouvement, on aura

$$d\theta = - \frac{m'dt}{f} \frac{\sin\gamma}{\sin\varphi} \frac{\partial F}{\partial \epsilon}.$$



En nommant  $\varphi'$  l'inclinaison de l'orbite de  $m'$  sur le même plan, on aura  $\varphi + \varphi' = \gamma$ , et

$$d'\theta = - \frac{m dt \sin \gamma}{f' \sin \varphi'} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon},$$

$d'\theta$  étant le mouvement du nœud de l'orbite de  $m'$  sur ce plan, et produit par l'action de  $m$  sur  $m'$ . Les deux mouvements  $d\theta$  et  $d'\theta$  seront égaux, et l'intersection des deux orbites restera sur le plan que nous venons de considérer, s'il partage l'angle  $\gamma$  de l'inclinaison mutuelle des orbites de manière que l'on ait

$$mf \sin \varphi = m'f' \sin \varphi'.$$

Ce résultat est le même que l'on a trouvé dans le n° 62 du Livre II de la *Mécanique céleste*, où l'on voit que le plan dont il s'agit est celui du maximum des aires, et que l'on a

$$c = mf \cos \varphi + m'f' \cos \varphi'.$$

Cette équation, combinée avec la précédente, donne l'intégrale trouvée ci-dessus,

$$\varepsilon = \frac{(mf + m'f')^2 - c^2}{2mm'ff'}.$$

Ces deux équations donnent encore les suivantes :

$$\sin \varphi = \frac{m'f' \sin \gamma}{c}, \quad \sin \varphi' = \frac{mf \sin \gamma}{c},$$

$$\cos \varphi = \frac{c^2 + m^2f^2 - m'^2f'^2}{2mfc}, \quad \cos \varphi' = \frac{c^2 + m'^2f'^2 - m^2f^2}{2m'f'c},$$

$$d\theta = - \frac{c dt}{ff'} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} = \frac{dt \sqrt{(mf + m'f')^2 - 2mm'ff'\varepsilon}}{ff'} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}.$$

Désignons par  $\varpi$ , et  $\varpi'$ , les distances des périhélies de  $m$  et de  $m'$  à la ligne d'intersection mutuelle des orbites; on aura  $d\varpi$ , en retranchant de la différentielle  $d\varpi$  le mouvement  $d\theta$  de cette intersection, rapporté à l'orbite de  $m$ ; et il est visible qu'il suffit pour cela de le multiplier par  $\cos \varphi$ ; or on a

$$d\theta \cos \varphi = - \frac{mf + m'f' - m'f'\varepsilon}{ff'} dt \frac{\partial F}{\partial \varepsilon};$$



on aura donc

$$e d\varpi_1 = -am'n dt \sqrt{1-e^2} \frac{\partial F}{\partial e} + \frac{mf + m'f' - m'f'\epsilon}{ff'} e dt \frac{\partial F}{\partial \epsilon},$$

$$ede = am'n dt \sqrt{1-e^2} \frac{\partial F}{\partial \varpi_1};$$

on aura pareillement

$$e' d\varpi'_1 = -a'mn' dt \sqrt{1-e'^2} \frac{\partial F}{\partial e'} + \frac{mf + m'f' - mf\epsilon}{ff'} e' dt \frac{\partial F}{\partial \epsilon},$$

$$e'de' = a'mn' dt \sqrt{1-e'^2} \frac{\partial F}{\partial \varpi'_1};$$

F est fonction de  $a, a', e, e', \varpi_1, \varpi'_1$  et  $\epsilon$ . Si l'on élimine, des seconds membres de ces équations,  $\epsilon$  au moyen de sa valeur

$$\epsilon = \frac{(mf + m'f')^2 - c^2}{2mm'ff'},$$

on aura quatre équations différentielles entre les quatre variables  $e, e', \varpi_1$  et  $\varpi'_1$ . On pourra même leur donner une forme plus simple encore, en faisant

$$h = e \sin \varpi_1, \quad l = e \cos \varpi_1,$$

$$h' = e' \sin \varpi'_1, \quad l' = e' \cos \varpi'_1,$$

ce qui les rend linéaires, lorsque l'on néglige les puissances supérieures des excentricités, et ce qui facilite leur intégration étendue par approximation à des puissances quelconques des excentricités. On n'aura ainsi que la position des orbites relative à la position variable de la ligne de leur intersection mutuelle. On aura ensuite leur inclinaison respective au moyen de la valeur précédente de  $\epsilon$ , et l'on en conclura leurs inclinaisons sur le plan du maximum des aires, au moyen des valeurs précédentes de  $\sin \varphi$  et de  $\sin \varphi'$ . Enfin on aura le mouvement de l'intersection des deux orbites sur ce plan, en intégrant l'expression précédente de  $d\theta$ . Telle est, si je ne me trompe, la solution la plus générale et la plus simple du problème des variations séculaires des éléments des orbites planétaires.



Reprenons l'équation

$$c^2 = (mf + m'f')^2 - 2mm'ff'\epsilon.$$

Si l'on néglige les quantités de l'ordre des quatrièmes puissances des excentricités et des inclinaisons, elle donnera

$$\text{const.} = m\sqrt{a}.e^2 + m'\sqrt{a'}.e'^2 + \frac{2mm'\sqrt{aa'}. \epsilon}{m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'}};$$

ainsi,  $a$  et  $a'$  étant, par ce qui précède, constants, même en ayant égard au carré de la force perturbatrice, on aura

$$0 = m\sqrt{a}.e\delta e + m'\sqrt{a'}.e'\delta e' + \frac{mm'\sqrt{aa'}. \gamma\delta\gamma}{m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'}},$$

équation à laquelle je suis parvenu dans le n° 15 du Livre VI, en n'ayant égard qu'aux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne. Il en résulte que le plan invariable, déterminé dans le n° 62 du Livre II, reste invariable, en ayant même égard au carré de la force perturbatrice.

4. On peut, au moyen des expressions différentielles des éléments, déterminer d'une manière fort simple l'influence de la figure de la Terre sur les mouvements de la Lune. On a vu, dans le Chapitre II du Livre VII, que cette action ajoute à la valeur de  $R$  la fonction

$$(\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi) \frac{D^2}{r^3} (\mu^2 - \frac{1}{3});$$

$\alpha\rho$  est l'aplatissement de la Terre,  $\alpha\varphi$  est le rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur,  $D$  est le rayon moyen du sphéroïde terrestre, et  $\mu$  est le sinus de la déclinaison de la Lune, sinus qui, par le numéro cité, est, à fort peu près,

$$\mu = \sqrt{1 - s^2} \sin\lambda \sin f\nu + s \cos\lambda,$$

ou exactement

$$\mu = \frac{\sin\lambda \sin f\nu + s \cos\lambda}{\sqrt{1 + s^2}},$$



$f\nu$  étant la longitude vraie de la Lune, comptée de l'équinoxe du printemps;  $\lambda$  étant l'obliquité de l'écliptique, et  $s$  étant la tangente de la latitude de la Lune.

La partie R, dépendante de l'action du Soleil, est de la forme  $r^2Q$ , en négligeant les termes qui, dépendant de la parallaxe du Soleil, sont très-petits. On aura ainsi, à fort peu près,

$$R = r^2Q + (\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi) \frac{D^2}{r^3} (\sin^2\lambda \sin^2f\nu + 2s \sin\lambda \cos\lambda \sin f\nu - \frac{1}{3}),$$

ce qui donne

$$2r \frac{\partial R}{\partial r} = 2a \frac{\partial R}{\partial a} = 4r^2Q - 6(\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi) \frac{D^2}{r^3} (\sin^2\lambda \sin^2f\nu + 2s \sin\lambda \cos\lambda \sin f\nu - \frac{1}{3}).$$

Ne considérons ici que les inégalités dépendantes de l'angle  $g\nu - f\nu$ ,  $g\nu$  étant ce que l'on nomme l'*argument de latitude*; en sorte que l'on a à fort peu près  $s = \gamma \sin g\nu$ ,  $\gamma$  étant l'inclinaison de l'orbite lunaire à l'écliptique. On aura ainsi

$$R = r^2Q + (\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi) \frac{D^2}{a^3} \sin\lambda \cos\lambda \cdot \gamma \cos(g\nu - f\nu),$$

$$2a^2 \frac{\partial R}{\partial a} = 4ar^2Q - 6(\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi) \frac{D^2}{a^2} \sin\lambda \cos\lambda \cdot \gamma \cos(g\nu - f\nu).$$

On a vu, dans le n° 1, que la variation de  $dR$  est nulle, en ayant même égard au carré de la force perturbatrice; le coefficient de  $\cos(g\nu - f\nu)$  dans R doit donc être nul. Désignons par la caractéristique  $\delta$ , placée devant une fonction, la partie de cette fonction qui dépend de l'aplatissement de la Terre; nous aurons

$$0 = \delta \cdot r^2Q + (\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi) \frac{D^2}{a^3} \sin\lambda \cos\lambda \cdot \gamma \cos(g\nu - f\nu),$$

d'où l'on tire

$$2\delta \cdot a^2 \frac{\partial R}{\partial a} = -10(\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi) \frac{D^2}{a^2} \sin\lambda \cos\lambda \cdot \gamma \cos(g\nu - f\nu).$$

Reprenons maintenant l'expression de  $d\varepsilon$  du n° 1,

$$d\varepsilon = - \frac{andt\sqrt{1-e^2}}{e} (1 - \sqrt{1-e^2}) \frac{\partial R}{\partial e} + 2a^2 \frac{\partial R}{\partial a} n dt.$$



Il est facile de voir que, si l'on néglige l'excentricité de l'orbite, on aura

$$d\varepsilon = 2a^2 \frac{\partial R}{\partial a} n dt,$$

et par conséquent, en n'ayant égard qu'au cosinus de l'angle  $g\nu - f\nu$ , et substituant  $d\nu$  pour  $n dt$ , on aura

$$d\varepsilon = -10(\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi) \frac{D^2}{a^2} \sin\lambda \cos\lambda \cdot \gamma d\nu \cos(g\nu - f\nu).$$

La valeur de  $d\varepsilon$  est ici rapportée au plan de l'orbite lunaire : pour la rapporter à l'écliptique, il faut, par le n° 5 du Livre VI, lui ajouter la quantité  $\frac{q dp - p dq}{2}$ . Déterminons présentement  $p$  et  $q$ .

L'équation

$$s = \gamma \sin g\nu$$

peut être mise sous cette forme

$$s = \gamma \cos(g-f)\nu \sin f\nu + \gamma \sin(g-f)\nu \cos f\nu;$$

en la comparant à celle-ci

$$s = q \sin f\nu - p \cos f\nu,$$

on aura

$$p = -\gamma \sin(g-f)\nu, \quad q = \gamma \cos(g-f)\nu,$$

ce qui donne

$$dp = -(g-f)q d\nu,$$

$$dq = (g-f)p d\nu.$$

La valeur de  $R$  renfermant le terme  $(\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi) \frac{D^2}{a^3} \sin\lambda \cos\lambda \cdot q$ , elle ajoute, par les équations (5) et (6) du n° 1, à la valeur de  $dp$  le terme

$$-(\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi) \frac{D^2}{a^2} \sin\lambda \cos\lambda \cdot d\nu;$$

on a ainsi les deux équations

$$dp = -(g-f)q d\nu - (\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi) \frac{D^2}{a^2} \sin\lambda \cos\lambda \cdot d\nu,$$

$$dq = (g-f)p d\nu.$$



Ces équations donnent, dans l'expression de  $q$ , le terme constant

$$-\frac{\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi}{g-f} \frac{D^2}{a^2} \sin\lambda \cos\lambda,$$

d'où résulte, dans la latitude  $s$ , l'inégalité

$$-\frac{\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi}{g-f} \frac{D^2}{a^2} \sin\lambda \cos\lambda \sin f\nu,$$

ce qui est conforme au résultat du Chapitre II du Livre VII.

Le terme constant de  $q$  donne, dans la fonction  $\frac{qdp - pdq}{2}$ , le terme

$$\frac{1}{2}(\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi) \frac{D^2}{a^2} \sin\lambda \cos\lambda \cdot \gamma \cos(g\nu - f\nu) d\nu;$$

en nommant donc  $d\varepsilon_1$  la valeur précédente de  $d\varepsilon$ , rapportée à l'écliptique, on aura

$$d\varepsilon_1 = -\frac{19}{2}(\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi) \frac{D^2}{a^2} \sin\lambda \cos\lambda \cdot \gamma \cos(g\nu - f\nu) d\nu,$$

ce qui donne dans  $\varepsilon_1$ , et, par conséquent, dans le mouvement de la Lune en longitude, l'inégalité

$$-\frac{19}{2} \frac{\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\varphi}{g-f} \frac{D^2}{a^2} \sin\lambda \cos\lambda \cdot \gamma \sin(g\nu - f\nu),$$

résultat entièrement conforme à celui du Chapitre II du Livre VII.

Enfin, la fonction  $R$  étant indéterminée, les expressions différentielles précédentes des éléments des orbites peuvent également servir à déterminer les variations qu'ils reçoivent, soit par la résistance de milieux éthérés, soit par l'impulsion de la lumière solaire, soit par les changements que la suite des temps peut apporter dans les masses du Soleil et des planètes. Il suffit pour cela de déterminer la fonction  $R$  qui en résulte, par les considérations exposées dans le Chapitre VII du Livre X.



*Sur les deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne* (1).

5. Dans la théorie de ces inégalités, exposée dans le Livre VI, j'ai eu égard aux cinquièmes puissances des excentricités et des inclinaisons des orbites. Mais j'ai reconnu que les valeurs de  $N^{(0)}$ ,  $N^{(1)}$ , ... du n° 7 du Livre VI, avaient été prises avec un signe contraire, et qu'ainsi la partie de ces inégalités dépendante de ces valeurs doit changer de signe. Il faut donc ajouter aux expressions des longitudes moyennes, que j'ai données dans le Chapitre VIII du Livre X, le double de cette partie prise avec un signe contraire. Cette partie, pour Jupiter, est, par le n° 33 du Livre VI,

$$(38'',692571 - t.0'',005418) \sin(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}) \\ - (25'',064701 + t.0'',015076) \cos(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}),$$

et pour Saturne, elle est, par le n° 35 du même Livre,

$$- (89'',952440 - t.0'',012596) \sin(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}) \\ + (58'',270353 + t.0'',035048) \cos(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}).$$

L'addition aux longitudes moyennes de Jupiter et de Saturne, du double de ces inégalités prises avec un signe contraire, ne doit changer que les moyens mouvements et les époques de ces deux planètes; elle ne peut altérer que d'une manière insensible les autres éléments elliptiques conclus des observations faites depuis 1750 jusqu'en 1800, parce que, dans cet intervalle, les variations de ces inégalités sont à fort peu près proportionnelles aux temps : on peut donc déterminer les corrections des moyens mouvements de manière qu'elles rendent le double de ces inégalités, affectées d'un signe contraire, nul en 1750 où  $t$  est nul, et en 1800 où  $t = 50$ . On trouve ainsi, en ayant égard

(1) On a reproduit sans aucun changement le texte original. (Voir les notes des pages 28, 135, 136 et 145.)



350 MÉCANIQUE CÉLESTE. — SUPPLÈMENT AU TOME III.

à la correction de la masse de Saturne, trouvée dans le Chapitre VIII du Livre X, qu'il faut ajouter à la longitude moyenne  $q^v$  de Jupiter, donnée dans le même Chapitre, la fonction

$$\begin{aligned} & 51'',98 + t.0'',4156 \\ & - (73'',58 - t.0'',01030) \sin(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}) \\ & + (47'',65 + t.0'',02870) \cos(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}), \end{aligned}$$

et à la longitude moyenne  $q^v$  de Saturne, donnée dans le même Chapitre, la fonction

$$\begin{aligned} & - 127'',13 - t.1'',0212 \\ & + (179'',952 - t.0'',025192) \sin(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}) \\ & - (116'',541 + t.0'',070196) \cos(5n^v t - 2n^{iv} t + 5\varepsilon^v - 2\varepsilon^{iv}). \end{aligned}$$

Ces corrections ont l'avantage de rapprocher les formules des mouvements de Jupiter et de Saturne, données dans le Chapitre cité, d'une observation très-précieuse d'Ebn-Junis, et qui, réduite au méridien de Paris, eut lieu le 31 octobre 1007, à  $0^h,16$ . Les formules citées donnent  $2251''$  pour l'excès de la longitude géocentrique de Saturne sur celle de Jupiter à cet instant, et l'astronome arabe la trouva, par son observation, de  $4444''$ ; la différence est  $2193''$ ; mais les corrections précédentes augmentent de  $1198''$  l'excès de la longitude de Jupiter sur celle de Saturne, et rapprochent conséquemment de cette quantité les formules, de l'observation, qui n'en diffère plus que de  $995''$ , ou d'environ cinq minutes sexagésimales; ce qui est bien inférieur à l'erreur dont cette observation est susceptible.



FIN DU TOME TROISIÈME.



---

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

---



202 MÉCANIQUE CÉLESTE — ÉPILOGUE AU TOME III

La correction de la masse de Saturne, trouvée dans le Chapitre VII de livre I, qu'il faut ajouter à la longitude moyenne  $g$  de Jupiter, donnée dans le même Chapitre, la fonction

$$\begin{aligned} & 37''.40 + 1.07 \sin 2n \\ & + (127''.58 - 1.07 \cos 2n) \sin n - 20'' \cos n + 32'' \cos 2n \\ & - (127''.58 - 1.07 \cos 2n) \sin n - 20'' \cos n + 32'' \cos 2n \end{aligned}$$

et à la longitude moyenne  $g$  de Saturne, donnée dans le même Chapitre, la fonction

$$\begin{aligned} & 107''.17 + 1.17 \sin 2n \\ & - (127''.58 - 1.07 \cos 2n) \sin n - 20'' \cos n + 32'' \cos 2n \\ & - (127''.58 - 1.07 \cos 2n) \sin n - 20'' \cos n + 32'' \cos 2n \end{aligned}$$

Ces corrections, ajoutées au long. de Saturne obtenues par les observations de Jupiter et de Saturne, données dans le Chapitre VII, dans observations contemporaines d'Elon Jansin, et qui ont été en parallèle de Paris, ont lieu le 20 octobre 1707, à 10 h. Les formules ci-dessus données sont pour l'usage de la longitude géographique de Saturne sur celle de Jupiter, et pour l'usage de l'observation de Saturne par son observation de Jupiter, la différence de longitude, entre les observations géocentriques moyennes de Jupiter et de Saturne, de Jupiter sur celle de Saturne, et supposent pour l'usage de l'observation de Saturne par son observation de Jupiter, qui n'est que de 10'', la distance cinq minutes sexagesimales, ce qui est bien différent de l'usage dont cette observation est susceptible.

FIN DU TOME TROISIÈME





