

Tome IV, volume 2.

Fascicule 1.

ENCYCLOPÉDIE
DES
SCIENTIQUES MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DES ACADÉMIES DES SCIENCES
DE GÖTTINGUE, DE LEIPZIG, DE MUNICH ET DE VIENNE
AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

ÉDITION FRANÇAISE

RÉDIGÉE ET PUBLIÉE D'APRÈS L'ÉDITION ALLEMANDE SOUS LA DIRECTION DE

JULES MOLK,

PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE NANCY.

ET POUR CE QUI CONCERNE LA MÉCANIQUE SOUS LA DIRECTION SCIENTIFIQUE DE

PAUL APPELL,

PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

TOME IV (DEUXIÈME VOLUME),

MÉCANIQUE GÉNÉRALE

RÉDIGÉ DANS L'ÉDITION ALLEMANDE SOUS LA DIRECTION DE

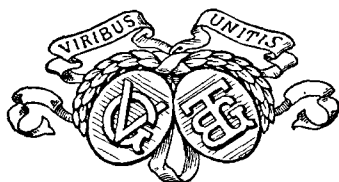
F. KLEIN

ET

C. H. MÜLLER

PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ
DE GÖTTINGUE

PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ TECHNIQUE
DE HANOVRE



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS

LEIPZIG,
B. G. TEUBNER

1912

(22 MAI)

Tome IV; deuxième volume; premier fascicule.

Sommaire.

	Pages
Fondements géométriques de la statique; exposé, d'après l'article allemand de H. E. Timerding-Brunswick, par Lucien Lévy-Paris	1
Géométrie des masses; exposé, d'après l'article allemand de G. Jung-Milan, par E. Carvallo-Paris	145
Cinématique; exposé, d'après l'article allemand de A. Schoenflies-Francfort, par G. Koenigs-Paris	211

Avis.

Dans l'édition française, on a cherché à reproduire dans leurs traits essentiels les articles de l'édition allemande; dans le mode d'exposition adopté, on a cependant largement tenu compte des traditions et des habitudes françaises.

Cette édition française offrira un caractère tout particulier par la collaboration de mathématiciens allemands et français. L'auteur de chaque article de l'édition allemande a, en effet, indiqué les modifications qu'il jugeait convenable d'introduire dans son article et, d'autre part, la rédaction française de chaque article a donné lieu à un échange de vues auquel ont pris part tous les intéressés; les additions dues plus particulièrement aux collaborateurs français sont mises entre deux astérisques. L'importance d'une telle collaboration, dont l'édition française de l'Encyclopédie offrira le premier exemple n'échappera à personne.

Fascicules sous presse:

- Tome I, vol. 1: **Groupes finis discontinus**, fin H. Burkhardt — H. Vogt). — **Additions et modifications**. — **Renseignements bibliographiques**. — **Index**.
- Tome I, vol. 2: **Invariants**, fin (F. Meyer — J. Drach).
- Tome I, vol. 3: **Applications de l'Analyse à la Théorie des nombres**, fin (P. Bachmann — J. Hadamard — E. Maillet). — **Corps algébriques** (D. Hilbert — H. Vogt).
- Tome I, vol. 4: **Économie politique mathématique**, fin (V. Pareto).
- Tome II, vol. 1: **Recherches contemporaines sur la théorie des fonctions d'une ou de plusieurs variables réelles** (E. Borel — L. Zoretti — P. Montel — M. Fréchet). — **Calcul différentiel** (A. Voss — J. Molk).
- Tome II, vol. 2: **Fonctions analytiques** (W. F. Osgood — P. Boutroux — J. Chazy).
- Tome II, vol. 3: **Fonctions sphérique**, fin (A. Wangerin — A. Lambert — P. Appell).
- Tome II, vol. 4: **Équations aux dérivées partielles** (E. von Weber — G. Floquet — E. Goursat).
- Tome II, vol. 6: **Calcul des variations** (A. Kneser — E. Zermelo — H. Hahn — M. Lecat).
- Tome III, vol. 1: **Notions de courbe et surface fin** (H. von Mangoldt — L. Zoretti). — **Méthodes analytiques et synthétiques** (G. Fano — S. Carrus).
- Tome III, vol. 2: **Géométrie projective** (A. Schoenflies — A. Tresse). — **Configurations** (E. Steinitz — E. Merlin).
- Tome III, vol. 3: **Coniques (fin)**. — **Faisceaux de coniques** (F. Dingeldey — E. Fabry).
- Tome III, vol. 4: **Quadriques** (O. Staude — A. Grévy).
- Tome IV, vol. 1: **Principes de la mécanique rationnelle** (A. Voss — E. Cosserat — F. Cosserat).
- Tome IV, vol. 2: **Cinématique**, fin (A. Schoenflies — G. Koenigs). — **Statique graphique** (L. Henneberg — H. Vergne).
- Tome IV, vol. 3: **Appareils physiques les plus simples** (Ph. Furtwängler — A. Guillet).
- Tome IV, vol. 5: **Analyse vectorielle** (M. Abraham — P. Langevin). — **Principes physiques de l'hydrodynamique** (A. E. H. Love — P. Appell — H. Beghin).
- Tome IV, vol. 6: **Balistique extérieure** (C. Cranz — E. Vallier).
- Tome IV, vol. 7: **Équations fondamentales de l'élasticité** (C. H. Müller — A. Timpe — L. Lecornu).
- Tome V, vol. 1: **Mesure** (C. Runge — Ch. Ed. Guillaume).
- Tome V, vol. 2: **Atomistique** (F. W. Hinrichsen — M. Joly — J. Roux).
- Tome V, vol. 3: **Principes physiques de l'électricité; action à distance** (R. Reiff — A. Sommerfeld — E. Rothé).
- Tome V, vol. 4: **Principes physiques de l'optique; anciennes théories** (A. Wangerin — C. Raveau).
- Tome VI, vol. 1: **Triangulation géodésique**. — **Mesure des bases et nivellement**. (P. Pizzetti — L. Noirel).
- Tome VII, vol. 1: **Coordonnées absolues et relatives** (E. Anding — H. Bourget). — **Réfraction** (A. Bemporad — P. Puiseux).

Tribune publique. 20.

448. [Tribune publique 16, n° 368 ligne 7] au lieu de *Stetson* lire *Stetson*; à la fin ajouter: 35^e 1910 1 p. 339 50, id. 36^e 1 11 2, p. 118 32 [Sur les déterminants de classe impaire uniformes; *Intermédiaire math.* 18 1911, p. 152 3, 2^e 8 283 4; Leçons sur la théorie des déterminants à n dimensions avec applications, Gand 1910; Abrégé de la théorie des déterminants à n dimensions, Gand 1911; *J. H. Braasch*, *Prog. H.* 1878, p. 1 17; *N. von Szűcs*, *Math. Naturw. Ber.* Ungarn 8 1889 0, éd. 189, p. 199 217; *Mathematikai és Természettudományi Értesítő* Budapest 8 1889 0, p. 220 37; *Th. de Donder*, *Atti IV congresso internazionale mat.* Roma 19 8, vol. 2, Rome 1909, p. 136 7; *A. de Gaspari*, *Giorn. mat.* 3) 1 (1910, p. 1 8 [1861, reimpr.].
449. [Tribune publique 17, n° 386 ajouter: Elle est reproduite dans *M. Lecat*, *Leçons sur la théorie des déterminants à n dimensions*, Gand 1910, manuscrit corrigée dans *M. Lecat*, *Abrégé de la théorie des déterminants à n dimensions*, Gand 1911 ou elle a donné lieu à certains développements ainsi que dans *M. Lecat*, *Ann. Soc. scient. Bruxelles* 35^e (1910 1), p. 339 50. Voir aussi [id. 36^e (1911 2, p. 120 1]; 1° généralisation des notions de permanent et de déterminant; 2° quelques applications nouvelles du principe de l'addition des tranches, particulièrement à l'étude des déterminants dont l'uniformité dépend de l'ordre. M. Lecat.
450. I₁ p. 87 lignes 3 et 2 en remontant] (I 2, 15 note 114) lire (Œuvres 1) 5, Paris 1885, p. 81; (1 2, Paris 1893, p. 46.
451. [I₁ p. 187 ligne 38] (I 3, 17 note 216 lire: Paris 1822. J. Molk.
452. [I₁ p. 551 ligne 7 en remontant] (I 8, 8 note 94. La locution „groupe primitif“ n'est pas due à *E. Netto*. Elle se trouve déjà chez *J. Petersen*, *De algebraiske Ligningers Theori*, Copenhague 1877; *Theorie der algebraischen Gleichungen*, Copenhague 1878, p. 284.
453. I₂ p. 243 ligne 33] (I 10, 9) ajouter: L'ensemble des nombres naturels ne constitue pas un *groupe* lorsqu'on combine ces nombres par additions et multiplications, quand on définit les groupes comme il a été fait I₁ p. 576; I 8, 13 [cf. *H. Weber*, *Lehrbuch der Algebra* 2, Brunswick 1899, p. 4] et comme il est d'usage de le faire dans les divers Traités qui ont été publiés sur la théorie des groupes.
454. [I₁ p. 10 ligne 23] (I 15, 6) ajouter: Ce système réduit de résidus (mod. m) forme un groupe relativement à la multiplication. *H. Weber* [*Lehrbuch der Algebra*, (2^e éd.) 2, Brunswick 1899 p. 60] dit de ce groupe qu'il constitue l'exemple le plus important connu d'un groupe abélien fini.
455. I₃ p. 13 ligne 2 en remontant] (I 15, 8 note 60) ajouter: Ce théorème est évidemment contenu comme cas particulier dans le suivant.

La somme Σ de tous les nombres incongrus qui appartiennent à un exposant quelconque donné qui divise $p - 1 \pmod{p^n}$ est congrue à zéro quand δ contient en facteur le carré d'un nombre premier au moins. Au contraire, cette somme Σ est congrue à ± 1 lorsque δ est le produit de nombres premiers distincts; suivant que le nombre de ces nombres premiers distincts est pair ou impair on a d'ailleurs $\Sigma \equiv +1$ ou $\Sigma \equiv -1$ [cf. *P. Bachmann*, *Niedere Zahlentheorie*, Leipzig 1902, p. 402].

456. [*I*, p. 13 ligne 23] (*I* 15, 8) ajouter: Soit P un nombre premier de la forme $2^n \cdot \mu + 1$ où μ est égal à 1 ou à un nombre premier impair. Il est toujours possible de décider rapidement si un nombre quelconque donné a est racine primitive de P . Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit en effet que a soit non-reste de P et que $a^{2^n} - 1$ ne soit pas divisible par P [cf. *P. L. Čebyšëv*, *Elemente der Zahlentheorie*, éd. allemande par *A. Schapira*, (2 éd.) Berlin 1902, p. 306; *G. Wertheim*, *Acta math.* 20 (1897), p. 145].
457. [*I*, p. 17 ligne 32] (*I* 15, 12 note 81) ajouter: *G. A. Miller*, *Bull. Amer. math. Soc.* 14 (1907 8), p. 356.
458. [*I*, p. 51 ligne 12] (*I* 15, 26) ajouter: *Th. Pepin* [*C. R. Acad. sc. Paris* 85 (1877), p. 329] a donné un critère complet permettant de reconnaître si un nombre de la forme $2^{2^n} + 1$ est premier ou non. Il a obtenu ce critère en généralisant des résultats dus à *E. Lucas*.

On voit aisément que tous les nombres de la forme $2^{2^n} + 1$ sont premiers relatifs. Cf. *P. Bachmann*, *Niedere Zahlentheorie* 2, Leipzig 1910, p. 94.

G. A. Miller.

459. [*I*, p. 74 ligne 5] (*I* 15, 36) ajouter: en gardant bien entendu les nombres 1, 2, 3, 4 dans cet ordre à la première ligne.
460. [*I*, p. 74 ligne 23] (*I* 15, 36) au lieu de: „on y remplace chaque élément (i, k) par le produit $(i \cdot k)$ des deux nombres qui constituent cet élément“ lire: on y supprime les virgules et que l'on y considère chaque élément comme un nombre.
461. [*I*, p. 315 ligne 14] (*I* 17, 41) au lieu de: $n > 3$, lire $n > 7$.

G. A. Miller.

462. [*I*, p. 495 ligne 3] (*I* 25, 4 note 5) ajouter: *W. Küttner*, *Die Witwen- und Waisenversicherung*, Berlin 1910. S. F. Diriwaechter.
463. [*I*, p. 501 ligne 10] (*I* 25, 6) [*Tribune publique* 19, n° 447] ajouter:

3°) *Calcul des primes et des réserves de primes*. On prend pour f la somme que l'assuré aurait dû payer si l'on avait connu la date de son décès. La prime, c'est-à-dire la somme qu'il a effectivement payée, est la valeur probable de f , quand on suppose que cette prime est payable en une seule fois et immédiatement. Les primes à terme (annuelles, semestrielles, ou autres) sont évaluées de façon que la valeur probable des sommes à payer soit la même de quelque façon que l'on procède; c'est dans cette règle que consiste ce qu'on appelle en matière d'assurances le principe de l'égalité des paiements de la compagnie et des paiements de l'assuré.

L'excès $A - B$ de la valeur A du capital constitué par les versements encore à effectuer à un certain instant par un groupe d'individus sur la valeur B des sommes à percevoir par ce même groupe d'individus, on titre ce qu'on appelle le capital de garantie [Deckungskapital] de ce groupe d'individus. Sa valeur probable est ce qu'on appelle la réserve mathématique du groupe à l'instant envisagé.

En s'appuyant sur ces définitions on démontre les deux théorèmes suivants qui permettent d'éviter d'appliquer la théorie des probabilités aux calculs à effectuer dans la pratique:

α) Si l'on imagine chaque individu i d'un groupe remplacé par l personnes de même âge que i , ayant contracté en même temps que i la même assurance et décédant conformément à la table de mortalité dont on fait usage, on constitue ce qu'on est convenu d'appeler un *groupe fictif*. La valeur du capital constitué par les versements du groupe fictif doit alors toujours être égale à la valeur totale des sommes versées à ce groupe fictif. [C'est là une autre forme du principe de l'égalité des paiements de la compagnie et des paiements de l'assuré].

β) La réserve mathématique d'une assurance déterminée est égale au quotient du capital de garantie [Deckungskapital] du groupe fictif correspondant, par le nombre l des personnes faisant encore partie de ce groupe fictif à l'instant t où l'on effectue les calculs. Le capital de garantie [Deckungskapital] du groupe fictif est égal à l'excès des sommes effectivement versées à t par le groupe fictif sur les sommes effectivement perçues depuis le commencement de l'assurance jusqu'à l'instant t par ce groupe fictif (d'où l'origine de la *méthode rétrospective*). Le même capital de garantie [Deckungskapital] est aussi égal à l'excès des sommes à percevoir depuis l'instant t jusqu'à la fin de l'assurance par le groupe fictif sur les sommes futures à verser à ce groupe fictif (d'où l'origine de la *méthode prospective*). La réserve mathématique d'un groupe est égale à la somme des réserves mathématiques des assurances particulières.

464. [I, p. 561 lignes 15 et 20 ainsi que p. 562] I 25, notes 153, 157) lire *G. Höckner* au lieu de *W. G. Höckner*. G. Bohlmann.
465. [I, p. 593 ligne 1] (I 26, 2 au lieu de „quantité“) lire: quantité et faire de la note 6 la suite et fin de la note 5.
466. [I, p. 634 lignes 22 et 27] I 26, 42) au lieu de „les quantités qui sont consommées“, lire „les quantités qui sont possédées“. V. Pareto.
467. [III, p. 72 ligne 5 en remontant] (III 17, 31 note 216 ajouter: *M. Stuyvaert* [Mathesis (2) 8 (1898), p. 117; Nouv. Ann. math. (4) 5 (1905), p. 455 70; Cinq études de géométrie analytique, Gand 1908, p. 137 8] a étudié la conique représentée par les équations paramétriques

$$ex_i = a_i t^2 + b_i t + c_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

et a remarqué qu'elle ne peut dégénérer qu'en une droite ou un point.

468. [III, p. 138 ligne 8] (III 17, 56). La construction de *C. Pelz* pour la courbure en un point d'une conique et celle de la courbure aux sommets p. 140 1) sont des cas particuliers d'un théorème de *A. Ribaucour* [Nouv. Ann. math. (2) 7 (1868), p. 172]. Ce dernier théorème a été généralisé par *Cl. Servais* [Mém. couronnés et autres mém. Acad. Belgique in 8°, 58 (1898 9), mém. n° 2, p. 37].
469. [III, p. 139 ligne 25 et p. 140 ligne 5] (III 17, 56). Les constructions de *K. H. Schellbach* et *J. Keill* sont des cas particuliers d'une construction de *Cl. Servais* [Nouv. Ann. math. 3) 11 (1892), p. 427].
470. [III, p. 142 ligne 21] (III 17, 56). Le théorème attribué à *M. d'Ocagne* est un des énoncés dont est susceptible la formule

$$k = \frac{2NP}{2P + N}$$

d e a *Fregier* [Ann. math. pures appl. 6 (1815/6), p. 232 ; dans cette formule k est la distance du point de la courbe au point de *Fregier*; P est le rayon de courbure; N est la corde normale. Cette formule a été généralisée par *Cl. Servais* [Bull. Acad. Belgique (3) 19 (1890 , p. 531].

471. [III₂ p. 143 ligne 9] (III 17, 56 note 499) ajouter: *Cl. Servais*, Acad. Belgique, classe des sc., Mém. in 8°, (2) 1 (1904 6), mém. n 4, p. 1 23.
472. [III₂ p. 145 l'gne 6] (III 17, 57 note 509 . Le théorème de *J. J. A. Mathieu* a été généralisé par *Cl. Servais* [Acad. Belgique, classe des sc., Mém. in 8°, 2) 1 (1904 6 , mém. n 4, p. 9]. Pour une propriété analogue cf. *A. Demoulin*, Mém. couronnes et autres mém. Acad. Belgique in 8 , 45 (1891), mém. n o, p. 9.
473. [III₂ p. 1 4 ligne 13 en remontant] III 17, 56 note 504) ajouter: *Cl. Servais*, Bull. Acad. Belgique 3 17 (1889), p. 377/84; Mém. couronnés et autres mém. Acad. Belgique in 8°, 58 1 98 9), mém. n° 2; Acad. Belgique, classe des sc., Mém. in 8°, (2) 1 (1904 6 , mém. n° 4; *A. Demoulin*, Mém. couronnés et autres mém. Acad. Belgique in 8 , 44 1891), mém. n 5, p. 8/15.
474. [III₂ p. 145 l'gne 9] (III 17, 57 note 510) ajouter: *Cl. Servais*, Bull. Acad. Belgique (3) 21 (1891), p. 587 94.
475. [III₂ p. 145 ligne 17] (III 17, 57 n te 512 ajouter: *J. Neuberg*, Revue de l'Instruction publique en Belgique 2 9 1866 , p. 367 70; Nouv. Correspondance math. 4 (187), p. 399; *L. Desnons*, Nouv. Ann math. 2) 12 (1873), p. 29; *Cl. Servais*, Math sis 2 7 (1897), p. 222.
476. [III₂ p. 146 ligne 11] II 17, 58). Les theoremes de *J. M. C. D hamel* et de *A. Mannheim* sont les corrélatifs d'un théorème de *M. Reiss* [Correspondance math. phys. de l'Observatoire de Bruxelles 3 (1837), p. 289] relatif aux courbures d'une courbe algébrique en des points de celle-ci situés en ligne droite

$$\sum R \sin^2 a = 0$$

Du théorème de *M. Reiss*, *Cl. Servais* [Bull. Acad. Belgique (3) 21 (1891), p. 591 2] a déduit la relation entre les courbures aux points d'une courbe algébrique situés sur un cercle.

477. [III₂ p 148 ligne 15] (III 17, 59 note 522) ajouter *Cl. Servais*, Mém. couronnés et autres mem. Acad. Belgique in 8°, 58 1898 9), mém. n° 2, p. 1/48.
478. [III₂ p. 149 ligne 9] (III 17, 60 note 525) ajouter *Cl. Servais*, Bull. Acad. Belgique 3) 23 1892), p. 249. **M. Stuyvaert.**

Toute rectification ou addition, se rapportant à l'édition française, adressée à **J. Molk**, 8 rue d'Alliance, Nancy, sera insérée, s'il y a lieu, avec mention du nom de son auteur dans la Tribune publique.

Nancy, le 29 avril 1912.

J. Molk.

IV 4. FONDEMENTS GEOMÉTRIQUES DE LA STATIQUE.

EXPOSÉ, D'APRÈS L'ARTICLE ALLEMAND DE H. E. TIMERDING (BRUNSWICK),
PAR LUCIEN LÉVY (PARIS).

Introduction¹⁾.

1. Objet de cet article. * La Mécanique et la Physique fournissent des exemples de quantités dont la détermination exige la connaissance de tout ou partie des éléments suivants: un point, une droite indéfinie passant par ce point, un sens choisi sur la droite et un nombre absolu auquel on donne, suivant les cas, le nom de longueur, d'intensité, ou d'amplitude de la quantité envisagée. Telles sont, pour ne citer que quelques exemples, les *forces*, les *vitesses*, les *accélérations*.

On appelle ces quantités des *quantités vectorielles*; on les représente géométriquement par des portions de droites orientées ou *vecteurs* [n° 3].

Dans cet article on ne s'occupera pas des *points masses*, c'est-à-dire des points géométriques affectés d'un nombre positif ou négatif: leur étude est réservée pour l'article IV 5. Par contre, on envisagera, outre les quantités vectorielles indiquées plus haut, d'autres quantités auxquelles on peut encore conserver la dénomination de vectorielles et qui impliquent la connaissance d'un plan, ou, au moins, d'une direction de plans, et d'un sens de rotation autour d'une normale à ce plan, comme les *moments* de forces données, les *vitesses angulaires de rotation*, les *moments magnétiques*.

Ces nouveaux éléments peuvent être représentés par des aires planes affectées d'un sens de parcours ou, comme on dit plus brièvement, par des *aires orientées*. Il y aura lieu d'examiner le lien qui

1) * La rédaction de l'édition française de l'Encyclopédie a cru devoir faire précéder l'exposé de l'article sur les fondements géométriques de la Statique d'une Introduction conforme au mode d'exposition des *Éléments* de la Mécanique rationnelle généralement adopté en France. Les astérisques indiquent ce qui, dans cette introduction, est entièrement dû à *Lucien Lévy* et à *Paul Appell*.*

existe entre ces aires planes orientées et les droites limitées orientées. Enfin on exposera les autres ressources, combinaisons de points, de droites ou de plans, qu'offre la géométrie pour représenter certains groupes de phénomènes mécaniques ou physiques.

Voici d'abord quelques théorèmes et définitions de géométrie élémentaire dont on fait constamment usage.*

2. **Segments sur un axe orienté.** *On appelle *axe orienté* ou simplement *axe* une droite indéfinie sur laquelle on a fixé un *sens positif*, $X'X$ par exemple; le sens opposé XX' est appelé *sens négatif* de l'axe²⁾.

On appelle *segment* la portion d'axe orienté (fig. 1) comprise entre deux points a et b de l'axe, pris dans un ordre déterminé a, b ; le premier point a est l'origine du segment, le deuxième b en est l'extrémité.

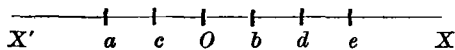


Fig. 1.

La *valeur algébrique* du segment défini par les points a (origine) et b (extrémité) est le nombre algébrique³⁾ \overline{ab} formé en prenant la valeur absolue de la longueur du segment mesurée avec une certaine unité et en la faisant précéder du signe $+$ ou du signe $-$ suivant qu'un mobile décrivant l'axe de a en b marche dans le sens positif ou dans le sens négatif de l'axe.

La notation \overline{ab} désigne donc ici un nombre positif ou négatif; si b coïncide avec a le nombre est nul.

D'après ces définitions, on a

$$\overline{ab} = -\overline{ba} \quad \text{ou} \quad \overline{ab} + \overline{ba} = 0.$$

Si l'on prend plusieurs points a, b, c, d, e sur un axe, on a

$$\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} + \overline{de} + \overline{ea} = 0.$$

Soit O une origine choisie sur l'axe; le nombre

$$\overline{Oa} = x$$

est l'*abscisse* du point a .

2) *Toute droite indéfinie peut ainsi être considérée comme la superposition de deux axes $X'X$ et XX' de sens opposés. E. N. Laguerre [Nouv. Ann. math. (3) 1 (1882), p. 542; Œuvres 2, Paris 1905, p. 608] s'est servi de la dénomination de *semi-droites* pour les axes orientés.*

3) *Nous désignons ici un *nombre* par deux lettres surmontées d'un trait. M. Chasles [Traité de géométrie supérieure, (1^{re} éd.) Paris 1852; (2^e éd.) Paris 1880] désigne par $\overline{ab}^2, \overline{ab}^3, \dots$ les puissances de la valeur algébrique du segment ab . Pour uniformiser cette notation, plusieurs auteurs contemporains ont désigné par \overline{ab} la valeur algébrique du segment ab lui-même [cf. E. Carvallo, Traité de mécanique, Paris 1893; P. Appell, Leçons de mécanique élémentaire, Paris 1909].*

Soient x et x' les abscisses de deux points a et b , la relation

$$\overline{ab} + \overline{bO} + \overline{Oa} = 0$$

donne la valeur algébrique

$$\overline{ab} = x' - x$$

du segment ab en fonction des abscisses des deux points a et b .*

3. Le vecteur. *On appelle *vecteur*⁴⁾ l'ensemble de deux points de l'espace A et B pris dans un ordre déterminé et de la portion de droite comprise entre eux⁵⁾. Le premier point A s'appelle l'*origine* ou le *point d'application* du vecteur, le second l'*extrémité*. Dans les figures, on indique quelquefois l'extrémité d'un vecteur par une flèche.

Un vecteur est donc défini par deux points A et B pris dans un certain ordre. On peut aussi le définir par les éléments suivants: 1°) *origine*, 2°) *direction*, 3°) *sens*, 4°) *longueur*.

L'*origine* a déjà été définie; c'est le premier point A ;

La *direction* du vecteur est la direction de la droite indéfinie qui porte le vecteur et qu'on appelle le *support du vecteur*;

Le *sens* du vecteur est le sens dans lequel un mobile allant de A en B parcourt le support considéré comme un axe orienté.

La *longueur*⁶⁾ R du vecteur est la distance de son origine et de son extrémité mesurée avec une certaine unité.

4) Le mot *vecteur*, du latin *vehere* „transporter“, d'où *radius vector* et plus brièvement *vector* a été proposé par *W. R. Hamilton*, *Cambr. Dublin math. J. 1* (1846), p. 54.

5) *J. R. Argand* [Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques, Paris 1806 (sans nom d'auteur); (2^e éd.) publ. par *G. J. Houël*, Paris 1874, p. 11] dit „ligne dirigée“.

Avant lui, *C. Wessel*, „Om directionens analytiske Betegning, et Forsøg, anvendt fornemmelig til plane og sphaeriske Polygons Opløsning“ [Nye Samling af det kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter (2) 5 (1799), p. 469/518 [1798]; traduit en français et publié sous le titre: Essai sur la représentation analytique de la direction, par *H. Valentiner*, *T. N. Thiele* et *H. G. Zeuthen*, Copenhague 1897, sous les auspices de l'Académie royale de Danemark] avait dit „ligne droite“, ou simplement „ligne“.

H. Grassmann [Die lineale Ausdehnungslehre, Leipzig 1844, p. 18 (n° 14); (2^e éd.) Leipzig 1878, p. 18; Werke 1², publ. par *F. Engel*, Leipzig 1894, p. 49] employait le mot „segment“ („Strecke“). Cf. Die Ausdehnungslehre, Berlin 1862, p. 142; Werke 1², publ. par *F. Engel*, Leipzig 1896, p. 148. Voir aussi *H. Grassmann junior*, Projektive Geometrie der Ebene 1, Leipzig 1909, p. 5.

6) **W. R. Hamilton* écrit TR (ce qui s'énonce *tenseur de R*), pour la longueur d'un vecteur R ; *H. Grassmann*, écrit $\sqrt{R^2}$.

*G. Bellavitis*⁷⁾ désigne par AB le vecteur et aussi sa longueur, la distinction se trouvant faite par le signe d'égalité¹¹⁾.

Les éléments 2^o) et 3^o), direction et sens, peuvent être réunis en un seul élément auquel on donne le nom d'*orientation du vecteur*. L'orientation d'un vecteur est, par définition, l'orientation de l'axe fixé sur le support du vecteur de façon que le vecteur y détermine un segment positif.

Quand le vecteur est situé sur un axe orienté (dont l'orientation peut d'ailleurs coïncider ou ne pas coïncider avec celle du vecteur), les deux derniers éléments, sens et grandeur, sont caractérisés par la valeur algébrique \overline{AB} du segment AB de l'axe support.

On représentera souvent un vecteur par la notation⁷⁾

$$AB,$$

en écrivant d'abord l'origine, puis l'extrémité.

Souvent aussi, on représentera un vecteur par une seule lettre surmontée d'une flèche. Ainsi R étant la longueur d'un vecteur, on représentera souvent ce vecteur par l'un ou l'autre des symboles

$$\vec{R}, \overrightarrow{R}, \vec{r} \text{ ou } \overrightarrow{R}.$$

Deux vecteurs A_1B_1 et A_2B_2 sont dits *équipollents*¹¹⁾ quand ils ont même longueur, qu'ils sont parallèles et de même sens.

Au lieu de dire que deux vecteurs sont équipollents on dit assez souvent qu'ils sont égaux; mais nous éviterons de le faire, cette façon de parler pouvant dans certains cas prêter à confusion.

La projection orthogonale d'un vecteur AB sur un plan est le vecteur qui a pour origine la projection de A et pour extrémité celle de B sur le plan. La longueur de cette projection est égale à

R. Gans [Einführung in die Vectoranalysis, Leipzig 1905, p. 5] emploie la notation $|R|$ de *K. Weierstrass*.

A. L. Cauchy [C. R. Acad. sc. Paris 29 (1849), p. 250; Œuvres (1) 11, Paris 1899, p. 152] écrit *mod R* ce qui s'énonce *module de R*.*

7) *Nous adoptons ici, pour désigner un vecteur, la notation la plus simple à énoncer, la plus commode pour l'impression et aussi la plus répandue aussi bien en France [*P. Appell*, Traité de mécanique rationnelle (3^e éd.) 1, Paris 1909, p. 3; *E. Rouché* et *Ch. de Comberousse*, Traité de géométrie, (7^e éd.) 1, Paris 1900, p. 216; *J. Tannery*, Deux leçons de cinématique, Ann. Ec. Norm. (3) 3 (1886), p. 43/80] qu'en Italie [*G. Bellavitis*, Sposizione del metodo delle equipollenze¹¹⁾, Annali delle science del regno Lombardo-Veneto (Padoue) 7 (1837), p. 243/61] ou en Allemagne [*A. F. Möbius*, Der barycentrische Calcul, Leipzig 1827; Werke 1, Leipzig 1885].

J. R. Argand [Essai⁶⁾, Paris 1806; (2^e éd.) Paris 1874] a employé la notation \overline{AB} , qui est encore d'un usage courant [Voir par ex. *G. Koenigs*, Leçons de cinématique, Paris 1897, p. 1].

D'autres notations ont été aussi employées, telles que $[AB]$ par *W. Schell* [Theorie der Bewegung und der Kräfte, (2^e éd.) 1, Leipzig 1879], ou encore (AB) .*

celle du vecteur AB multipliée par le cosinus de l'angle aigu que fait son support avec le plan.

La projection orthogonale d'un vecteur AB sur un axe $X'X$ est la valeur algébrique \overline{ab} du segment défini par les projections a et b des points A et B sur l'axe.

Quand on a orienté le support d'un vecteur AB , la projection orthogonale de AB sur l'axe $X'X$ s'obtient en multipliant la valeur algébrique \overline{AB} du segment AB de l'axe support, par le cosinus de l'angle de l'axe support avec l'axe $X'X$.*

4. Diverses catégories de vecteurs. *Suivant la nature des grandeurs physiques ou mécaniques représentées par des vecteurs, ceux-ci peuvent être divisés en trois catégories:

1°) Il peut se faire d'abord que deux vecteurs équipollents représentent l'un et l'autre la même grandeur physique ou mécanique. C'est ce qui a lieu, par exemple, pour les vecteurs représentant des axes de couples ou des vitesses de translation (dans l'espace), comme on le verra plus loin. Quand il en est ainsi, on dit que *les vecteurs ne sont pas localisés* ou encore qu'ils sont *libres*⁸⁾.

2°) Il peut arriver, ensuite, que la même grandeur physique soit représentée par deux vecteurs équipollents A_1B_1 et A_2B_2 à condition qu'ils soient portés par la même droite, tandis que deux vecteurs équipollents portés par deux droites différentes représentent des grandeurs physiques différentes. C'est ce qui a lieu, par exemple, pour les vecteurs qui représentent des forces appliquées à un corps solide.

8) *A. E. H. Love [Theoretical mechanics, an introductory treatise on the principles of dynamics, Cambridge 1897, p. 16; (2^e éd.) Cambridge 1906, p. 18] emploie les expressions *vector unlocalised*, *vector localised in a line*, *vector localised at a point* qu'on peut traduire par *vecteur libre*, *vecteur localisé sur une droite*, *vecteur lié à un point*.

H. Grassmann [Die Ausdehnungslehre, Berlin 1862, p. 163; Werke⁹⁾ 1², p. 165] emploie l'expression „Linienteile“ et la notation $[AB]$ qui se rattache à sa conception des produits combinatoires de points. Il disait auparavant [Die lineale Ausdehnungslehre, Leipzig 1844, voir surtout p. 197/205; Werke⁹⁾ 1¹, p. 188/201] „Liniengrösse“.

Récemment on a proposé les expressions *linienflüchtiger Vektor* traduite ici par *vecteur glissant* et *Stab* traduite ici par *bâton* [E. Buddé, Allgemeine Mechanik der Punkte und starren Systeme 2, Berlin 1890, p. 537; H. Grassmann junior, Schraubenrechnung und Nullsystem, Halle 1899]. La dernière dénomination est aussi employée par E. Study [Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903]; O. Mohr [Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik, Berlin 1905, p. 1/459] dit simplement *Strecke*, c'est-à-dire *segment*.

Les dénominations employées ici ont été adoptées par P. Appell dans la troisième édition de son *Traité de mécanique rationnelle* 1, Paris 1909 et par P. Appell et S. Dautheville, *Précis de mécanique*, Paris 1910.*

On dit alors que chacun des vecteurs considérés est *localisé sur une droite* ou qu'il est *glissant* sur une droite.

3°) Enfin, il peut arriver que la grandeur physique représentée soit telle que deux vecteurs distincts représentent deux grandeurs physiques distinctes, c'est-à-dire qu'un vecteur *ne puisse être séparé de son point d'application*. On dit alors que chaque vecteur est *localisé en un point* ou *lié à un point*. C'est ce qui a lieu par exemple pour le vecteur qui figure, à un instant donné, la vitesse d'un point mobile: on verra, en effet, que ce vecteur est *lié* au point.

Chacune de ces trois espèces de vecteurs est caractérisée par des nombres qui sont, en quelque sorte, leurs coordonnées⁹⁾.

Un vecteur peut dépendre de nombreuses variables: du temps, des coordonnées de son origine, de la vitesse de son origine, des coordonnées ou des vitesses d'autres points de l'espace et de bien d'autres quantités. Dans ce qui suit, nous considérerons les vecteurs en eux-mêmes, abstraction faite des variables dont ils dépendent.

Nous ne tiendrons pas compte des changements qu'ils peuvent subir et nous les regarderons comme des grandeurs constantes. Dès qu'on considère les vecteurs comme des grandeurs variables, généralement en fonction des coordonnées du point d'application, on entre dans une autre théorie à laquelle on a donné le nom d'*Analyse vectorielle*. [Cf. IV 9].*

5. **Coordonnées des vecteurs.** Soient x, y, z les coordonnées de l'origine A d'un vecteur AB ; x', y', z' les coordonnées de son extrémité B ; X, Y, Z les projections du vecteur AB sur les axes de coordonnées OX, OY, OZ .

En projetant le contour OAB successivement sur les axes on a immédiatement¹⁰⁾

$$X = x' - x,$$

$$Y = y' - y,$$

$$Z = z' - z.$$

9) *Il ne semble pas nécessaire de créer des symboles spéciaux pour distinguer les trois espèces de vecteurs, on du moins le besoin s'en fera si rarement sentir que dans chaque cas quelques mots suffiront pour éviter toute confusion. C'est ainsi qu'en général il suffira d'établir pour les vecteurs libres les propositions qui s'appliqueront ensuite d'elles-mêmes aux vecteurs glissants ou aux vecteurs liés.*

10) *A. L. Cauchy* [C. R. Acad. sc. Paris 36 (1853), p. 75; Œuvres (1) 11, Paris 1899, p. 443] envisage simultanément un *rayon vecteur* \bar{r} et ses *projections* $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ sur les axes; il écrit que le rayon vecteur est la somme de ses projections:

$$\bar{r} = \bar{x} + \bar{y} + \bar{z}.$$

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ sont ici les segments mesurés par les expressions x_i, y_j, z_k envisagées au n° 7.

L'expression de la longueur R du vecteur AB en résulte. Si le trièdre $OXYZ$ est *trirectangle*, ce qui est presque toujours le cas dans les applications, on a

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Toujours dans le cas d'un trièdre *trirectangle* $OXYZ$, on a, en désignant par α, β, γ les trois cosinus directeurs de l'axe orienté AB et par R la longueur du vecteur,

$$X = \alpha R, \quad Y = \beta R, \quad Z = \gamma R.$$

Le *seul invariant géométrique* d'un vecteur AB dans toute transformation de coordonnées est évidemment sa longueur; le *seul invariant analytique* de ce vecteur pour les transformations orthogonales est $X^2 + Y^2 + Z^2$; il en résulte que toute fonction de X, Y, Z qui est indépendante du choix des axes rectangulaires doit s'exprimer en fonction de

$$X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Un vecteur libre est défini analytiquement par les trois nombres *indépendants*

$$X, Y, Z;$$

on les nomme les *coordonnées* ou les *composantes* du vecteur libre.

Un vecteur glissant est défini par ses trois projections X, Y, Z , qu'on nomme encore ses composantes, et par un point de la droite à laquelle appartient le vecteur glissant; si x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées de ce point, la droite est donnée par ses équations

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y} = \frac{z - z_0}{Z},$$

qu'on peut écrire

$$yZ - zY = L,$$

$$zX - xZ = M,$$

$$xY - yX = N,$$

en posant

$$L = y_0Z - z_0Y,$$

$$M = z_0X - x_0Z,$$

$$N = x_0Y - y_0X.$$

On voit qu'un vecteur glissant est déterminé par six nombres

$$X, Y, Z, L, M, N$$

dont les trois premiers ne sont pas tous nuls et qui satisfont à l'identité

$$(1) \quad LX + MY + NZ = 0.$$

Comme on peut choisir arbitrairement cinq de ces nombres, un vecteur glissant a cinq coordonnées indépendantes. Au lieu de fixer

ces cinq coordonnées on préfère, pour des raisons de symétrie, conserver dans les calculs les six coordonnées X, Y, Z, L, M, N liés par la relation (1).

Un vecteur lié AB est défini analytiquement par les six nombres indépendants

$$x, y, z, X, Y, Z$$

ou, si l'on veut, par les six nombres

$$x, y, z, x', y', z'.$$

6. Vecteurs libres. Leur addition et soustraction. Lorsque deux vecteurs libres, A_1B_1, A_2B_2 , de longueurs P_1 et P_2 , sont *équipollents*¹¹⁾, nous écrivons

$$A_1B_1 = A_2B_2$$

ou

$$\vec{P}_1 = \vec{P}_2.$$

Si les axes de coordonnées sont transportés parallèlement à eux-mêmes, les valeurs des projections d'un vecteur sur ces trois axes ne varient pas. Dans une rotation des axes sans changement d'origine, les projections d'un vecteur subissent les mêmes transformations que les coordonnées d'un point. Dans un renversement des axes (voir n° 9), les projections d'un vecteur sur les trois axes changent de signe comme les coordonnées d'un point¹²⁾.

Deux vecteurs libres A_1B_1 et A_2B_2 ou \vec{P}_1 et \vec{P}_2 sont *égaux et opposés* quand ils sont égaux, parallèles et de sens contraires; on exprime ce fait en écrivant:

$$A_1B_1 = -A_2B_2 \quad \text{ou} \quad \vec{P}_1 = -\vec{P}_2.*$$

Inversement, trois quantités quelconques X, Y, Z jouissant des

11) *Le signe = pour l'égalité géométrique est presque universellement adopté. *G. Bellavitis* (?) [Annali delle scienze del regno Lombardo-Veneto (Padoue) 7 (1837), p. 243/61; trad. française par *C. A. Laisant*, Nouv. Ann. math. (2) 12 (1873), p. 101 et suiv.; (2) 13 (1874), p. 58 et suiv.; *C. A. Laisant*, Exposé de la méthode des équipollences, Paris 1874] employait le signe $\underline{=}$; pour désigner l'équipollence ou égalité géométrique, il écrivait

$$AB \underline{=} CD,$$

ce qu'il faut énoncer: AB équipollent à CD ; il se servait de la caractéristique „gr.“ pour désigner la longueur d'un vecteur (qu'il appelait „droite“). *A. F. Möbius* [Der baryc. Calcul (?), § 17; Werke 1, p. 39] se servait du signe \equiv pour désigner une équipollence; il a été peu suivi.*

12) Sur cette manière de caractériser les quantités géométriques par la façon dont elles se comportent dans les changements de coordonnées, voir *F. Klein*, Z. Math. Phys. 47 (1902), p. 237; Math. Ann. 62 (1906), p. 419.

trois propriétés que nous venons de citer peuvent être envisagées comme les trois projections d'un vecteur libre¹³).

Somme géométrique d'un nombre quelconque de vecteurs libres. Soient

$$A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$$

ou

$$\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$$

les vecteurs donnés.

Prenons un point quelconque A et, à partir de ce point, portons bout à bout des vecteurs équipollents aux vecteurs donnés: AC_1 équipollent à \vec{P}_1 , puis C_1C_2 équipollent à \vec{P}_2 , puis C_2C_3 équipollent à \vec{P}_3 , ..., enfin $C_{n-1}C_n$ équipollent à \vec{P}_n .

Le vecteur AC_n , fermant le contour ainsi obtenu, est la *somme géométrique* \vec{R} des vecteurs proposés; ces vecteurs sont les *composants*.

La figure $AC_1C_2 \dots C_n$ s'appelle le *polygone des vecteurs* ou *polygone de Varignon* (il est représenté fig. 2 pour $n = 4$).

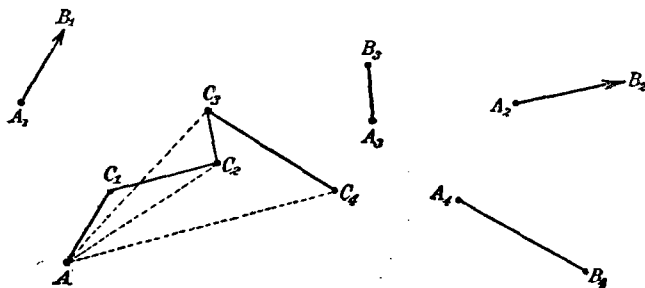


Fig. 2.

La somme géométrique d'un nombre quelconque de vecteurs libres est indépendante de l'ordre dans lequel on prend les vecteurs composants. Nous écrirons

$$\vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_n$$

pour exprimer que le vecteur \vec{R} est la somme géométrique des vecteurs donnés.

L'addition géométrique est, comme l'addition arithmétique ou l'addition algébrique, *commutative* (c'est-à-dire qu'on peut intervertir

13) Les règles concernant l'addition et la soustraction géométriques des vecteurs ont été données en premier lieu par G. Bellavitis⁷⁾, Annali delle scienze del regno Lombardo-Veneto (Padoue) 5 (1835), p. 244; trad. française par C. A. Laisant¹¹⁾.

l'ordre des termes) et associative, ce qu'exprime l'égalité géométrique

$$\vec{P}_1 + (\vec{P}_2 + \vec{P}_3) = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3$$

(cf. fig. 3). L'analogie de l'addition géométrique avec les autres opérations déjà appe-

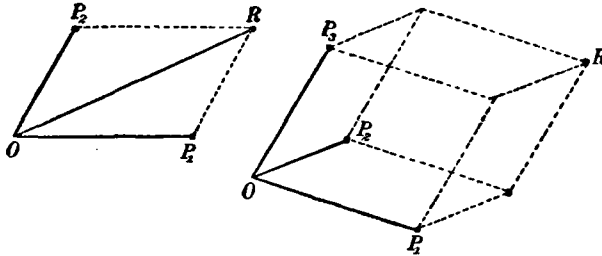


Fig. 3.

lées „additions“ est donc absolue et ainsi se justifie l'emploi des dénominations et des signes usités¹⁴⁾.

De l'addition, on passe à la multiplication par le

nombre entier n en supposant que les n vecteurs additionnés sont équipollents à l'un quelconque \vec{P} d'entre eux. Le résultat \vec{R} de cette addition s'appelle le produit du vecteur \vec{P} par le nombre n , et l'on écrit

$$\vec{R} = n\vec{P}.$$

On en déduit

$$\vec{P} = \frac{1}{n}\vec{R},$$

ce qui donne la division d'un vecteur par un nombre entier n . Il n'y a ensuite aucune difficulté pour s'élever à la notion du produit d'un vecteur par un nombre positif quelconque, entier, fractionnaire ou incommensurable.

On démontre aisément que la projection sur un axe quelconque de la somme géométrique d'un nombre quelconque de vecteurs est égale à la somme algébrique des projections de ces vecteurs sur le même axe. Soient alors

- X_1, Y_1, Z_1 les projections du vecteur A_1B_1 ou \vec{P}_1 ,
- X_2, Y_2, Z_2 les projections du vecteur A_2B_2 ou \vec{P}_2 ,
-

sur les axes; les projections de la somme géométrique \vec{R} auront pour expressions

$$\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + \dots + X_n, \\ Y &= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n, \\ Z &= Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n. \end{aligned}$$

14) * Dans le cas où les vecteurs représentent des forces, A. L. Cauchy [Exercices math. 1, Paris 1826, p. 121; Œuvres (2) 6, Paris 1887, p. 153] emploie l'expression de „force principale“ pour ce que nous appelons „somme géométrique“.*

On appelle *différence géométrique* de deux vecteurs \vec{P} et \vec{P}_1 le vecteur P_2 qui ajouté géométriquement à P_1 donne un vecteur équivalent à P . On désigne cette opération par le signe $-$ en sorte que l'égalité géométrique

$$\vec{P}_2 = \vec{P} - \vec{P}_1$$

revient à l'égalité géométrique

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2.$$

Il résulte des dernières formules que la différence géométrique de deux vecteurs, dont les projections sont respectivement X, Y, Z et X_1, Y_1, Z_1 , a pour projections sur les axes

$$X - X_1, \quad Y - Y_1, \quad Z - Z_1.$$

On construit aisément la différence géométrique $\vec{P} - \vec{P}_1$ en construisant la somme de \vec{P} et d'un vecteur égal et opposé à \vec{P}_1 .

7. Digression sur la notation de Grassmann et sur les quaternions. Soit O un point quelconque; un vecteur AB pourra toujours être considéré comme la différence géométrique de deux vecteurs $OB - OA$ et l'on pourra écrire

$$AB = OB - OA.$$

Le point O , pouvant être choisi arbitrairement, ne joue aucun rôle essentiel. Il est donc indiqué de supprimer la lettre O et d'écrire simplement

$$B - A$$

pour désigner le vecteur AB . Cette notation, qui coïncide avec celle dont *H. Grassmann* a fait usage, rend intuitives les égalités géométriques précédemment exposées. Ainsi, on voit immédiatement que l'égalité géométrique

$$AB + BA = 0$$

s'écrit

$$(B - A) + (A - B) = 0$$

et devient une identité si on la traite comme une égalité algébrique ordinaire. De même l'égalité géométrique entre trois points

$$AB + BC + CA = 0$$

s'écrit

$$(B - A) + (C - B) + (A - C) = 0$$

qui est encore une identité algébrique. La notation de *H. Grassmann* fait donc rentrer le calcul des grandeurs géométriques dans le

calcul algébrique. Par exemple l'équipollence

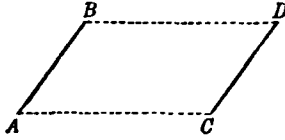


Fig. 4.

$$AB = CD$$

s'écrit dans la notation de *H. Grassmann*

$$B - A = D - C;$$

on en déduira immédiatement (fig. 4)

$$D - B = C - A$$

ou

$$BD = AC,$$

ce que les notations employées jusqu'ici ne permettaient pas de conclure immédiatement.

On est encore conduit à la notation de *H. Grassmann* de la façon suivante: appelons *addition* d'un point M et d'un vecteur \vec{u} une translation imprimée au point, de direction et de grandeur égale à \vec{u} et qui transforme le point M en un autre point M' . Ce point M' représente le résultat de l'addition et nous écrivons

$$M' = M + \vec{u};$$

d'où

$$\vec{u} = M' - M,$$

et nous retombons sur la notation de *H. Grassmann* qui apparaît ainsi comme indiquant une *opération effectuée sur les points*.

On comprend alors comment, à l'aide de toutes les conventions précédentes, un point P qui a pour coordonnées x, y, z est défini par l'égalité géométrique suivante, dans laquelle e_1, e_2, e_3 désignent des unités de longueurs portées sur les axes de coordonnées OX, OY, OZ :

$$P = O + e_1x + e_2y + e_3z.$$

Soit Q un second point ayant x', y', z' pour coordonnées; le vecteur PQ sera représenté par l'égalité géométrique

$$Q - P = e_1(x' - x) + e_2(y' - y) + e_3(z' - z).$$

*W. R. Hamilton*¹⁵⁾ utilise la même expression symbolique pour représenter un vecteur \vec{V} ; il écrit seulement i, j, k au lieu de e_1, e_2, e_3

$$\vec{V} = ix + jy + kz.$$

15) *Bien avant *H. Grassmann* et *W. R. Hamilton*, *C. Wessel* [Essai⁶⁾, p. 26] avait représenté un vecteur par

$$x + \eta y + \varepsilon z, \text{ avec les conditions } \eta^2 = -1, \varepsilon^2 = -1$$

et avait traité de la multiplication de ces vecteurs; mais les résultats qu'il a obtenus sont illusoire. Il lui a manqué de porter une unité imaginaire sur Ox pour avoir inventé le calcul des quaternions. On peut donc dire seulement qu'il reste, avant *J. R. Argand*, *W. R. Hamilton* et *H. Grassmann*, l'inventeur de la représentation des grandeurs géométriques impliquant une direction.

Pour arriver à la notion de multiplication des vecteurs, il définit d'abord la multiplication des vecteurs unités i, j, k par les relations

$$\begin{aligned} (1) \quad & ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j, \\ (2) \quad & i^2 = j^2 = k^2 = -1, \\ (3) \quad & ji = -ij, \quad kj = -jk, \quad ik = -ki. \end{aligned}$$

Considérons alors deux vecteurs OA ou \vec{V} , OA' ou \vec{V}' ayant pour origine commune l'origine O des coordonnées:

$$\begin{aligned} \vec{V} &= ix + jy + kz, \\ \vec{V}' &= ix' + jy' + kz'. \end{aligned}$$

Formons le produit des polynomes complexes situés dans les seconds membres en leur appliquant les règles de la multiplication algébrique ordinaire sous les réserves suivantes: l'ordre dans lequel les facteurs i, j, k se présentent ne devra jamais être interverti, mais les autres facteurs pourront être déplacés et de plus on appliquera les formules (1), (2) et (3). Désignons enfin par une simple juxtaposition cette opération sur les vecteurs \vec{V} et \vec{V}' ; on démontre que l'on a

$$\vec{V} \vec{V}' = -xx' - yy' - zz' + i(yz' - zy') + j(zx' - xz') + k(xy' - yx').$$

Cette expression est de la forme

$$K + iL + jM + kN,$$

dans laquelle K, L, M, N désignent des nombres réels.

Une telle expression s'appelle, d'après *W. R. Hamilton*¹⁶, un *quaternion*; K est la partie *scalaire* du quaternion; $iL + jM + kN$ est la partie *vectorielle* du quaternion.

Un quaternion dont la partie scalaire est nulle se réduit à un vecteur; un quaternion dont la partie vectorielle est nulle est un simple nombre réel.

Le produit de deux vecteurs se compose donc d'une partie scalaire

$$-xx' - yy' - zz'$$

et d'une partie vectorielle

$$i(yz' - zy') + j(zx' - xz') + k(xy' - yx')$$

Lorsqu'on intervertit l'ordre des facteurs \vec{V} et \vec{V}' la partie scalaire ne change pas; au contraire, la partie vectorielle change de signe en conservant sa valeur absolue.

¹⁶) *Proc. Irish Acad. (1) 2 (1840/4), p. 425; London Edinb. Dublin philos. mag. 25 (1844), p. 10.*

On vérifie sans peine que la partie vectorielle représente un vecteur dont la longueur est égale à l'aire du parallélogramme construit sur les deux vecteurs, dont la direction est celle de la perpendiculaire au plan du parallélogramme, et dont le sens est tel que pour un observateur dirigé dans ce sens le triangle OAA' ait une aire positive [n° 9].

Ce qui précède suffit pour faire comprendre la raison des définitions qui vont être données dans les deux numéros suivants¹⁷⁾.*

8. Produit intérieur ou scalaire de deux vecteurs. On appelle *produit scalaire* ou *produit intérieur* du vecteur \vec{P} par le vecteur \vec{P}' le nombre réel défini par produit de la longueur P de \vec{P} par la longueur P' de \vec{P}' et par le cosinus de l'angle α des deux vecteurs. Si l'on emploie, pour indiquer ce produit¹⁸⁾ la notation $\vec{P}|\vec{P}'$, on aura

17) *Pour plus de détails voir *W. R. Hamilton*, Lectures on quaternions, Dublin 1853; *P. G. Tait*, An elementary treatise on quaternions, Oxford 1867; (3^e éd.) Cambridge 1890; trad. par *G. Plarr* 1, Paris 1882; 2, Paris 1884; *H. Hankel*, Theorie der complexen Zahlensysteme, Leipzig 1867; *G. J. Houël* [Mém. Soc. sc. phys. nat. Bordeaux (2) 1 (1876), p. 40/144 [1874]; Éléments de la théorie des quaternions [Théorie élémentaire des quantités complexes, quatrième partie], Paris 1874.*

18) La notation du produit intérieur est loin d'être fixée.

H. Grassmann [Geometrische Analyse, mémoire couronné par la Société Jablonowski en 1846, éd. Leipzig 1847; Werke 1¹, Leipzig 1894, p. 345] écrit $a \times b$. Plus tard [Die Ausdehnungslehre, Berlin 1862, p. 107; Werke 2) 1², p. 112] il écrit $[u|v]$.

G. Peano [Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, Turin 1888, p. 114] écrit $u|v$; c'est la notation adoptée dans le texte. Plus tard *G. Peano* [Formulaire de mathématiques 2, Turin 1899, p. 156] ainsi que *C. Burali-Forti* et *R. Marcolongo* [Elementi di calcolo vettoriale, Bologne 1909, p. 31; trad. *S. Lattès*, Éléments du calcul vectoriel, Paris 1910] ont employé simplement le signe \times ; c'est la notation de *H. Résal* [Traité de cinématique pure, Paris 1862]. *J. Somov*, *O. Heaviside*, *A. Föppl*, *G. Ferraris* écrivent simplement $u \cdot v$.

J. W. Gibbs [Vector Analysis, New York et Londres 1902, p. 55] écrit $u \cdot v$ qu'il énonce „ u dot v “; il qualifie l'opération de „direct produit“. Le nom de produit scalaire avait été proposé par *O. Heaviside* [Electromagnetic theory 1, Londres 1894, p. 149; London Edinb. Dublin philos. mag. (5) 19 (1885), p. 401].

E. Carvallo a proposé le mot de *produit algébrique* plus heureux que celui de produit géométrique qu'emploie à tort *B. de Saint Venant* [C. R. Acad. sc. Paris 21 (1845), p. 620]. *E. Carvallo* appelle „produit superficiel“ ou „flux“ le parallélogramme orienté ou le parallélépipède orienté qui a pour côtés les deux ou les trois vecteurs donnés [Nouv. Ann. math. (4) 2 (1902), p. 433/42]; mais il n'a pas été suivi.

On trouve encore $(u \cdot v)$ [*H. A. Lorentz*, dans plusieurs articles du tome V de l'Encyclopédie], et aussi (u, v) [*O. Henrici* et *G. C. Turner*, Vectors and rotors, with applications, Londres 1903].

par définition

$$(1) \quad \vec{P} | \vec{P}' = PP' \cos \alpha;$$

ce produit est un nombre.

*On voit que ce produit conserve la même valeur lorsqu'on intervertit l'ordre des deux facteurs

$$\vec{P} | \vec{P}' = \vec{P}' | \vec{P};$$

les égalités suivantes, dans lesquelles m désigne un facteur numérique et $+$ le signe de l'addition géométrique, s'établissent sans peine:

$$m(\vec{P} | \vec{P}') = (m\vec{P}) | \vec{P}' = \vec{P} | (m\vec{P}'),$$

$$(\vec{P} + \vec{P}') | \vec{Q} = \vec{P} | \vec{Q} + \vec{P}' | \vec{Q}.$$

Les produits scalaires jouissent donc des principales propriétés des produits ordinaires; il y a cependant une différence importante: l'égalité

$$\vec{P} | \vec{P}' = 0$$

n'indique pas nécessairement que l'un des deux vecteurs soit nul; elle indique ou que l'un des vecteurs est nul ou que les deux vecteurs forment un angle droit.

Enfin la multiplication scalaire ne s'étend pas au delà de deux facteurs.

Soit \vec{i} un vecteur unitaire (dont la mesure est égale à $+1$) porté par un axe quelconque; $\vec{P} | \vec{i}$ sera la composante de \vec{P} suivant cet axe ou la projection du vecteur sur l'axe.

L'égalité (1) montre que le produit scalaire de deux vecteurs peut être considéré comme le produit ordinaire de la longueur d'un des vecteurs par la projection de l'autre sur le premier. Il en résulte immédiatement la formule suivante:

Soient \vec{S} la somme géométrique d'un certain nombre de vecteurs \vec{P}, \vec{Q}, \dots ; soit \vec{S}' celle des vecteurs $\vec{P}', \vec{Q}' \dots$ en nombre égal ou non au nombre des vecteurs qui composent la première somme; le produit scalaire des deux sommes sera égal à la somme algébrique des produits scalaires de tous les termes de la première somme par les termes de

L'usage des parenthèses a le grand inconvénient de compliquer l'emploi ultérieur des parenthèses prises avec leur signification ordinaire.

K. Heun représente le produit intérieur de u et de v par le symbole $\bar{u}\bar{v}$ qu'il énonce „ u in v “ [Lehrbuch der Mechanik 1, Leipzig 1906, p. 14]; il désigne [id. 1, p. 13] ce produit intérieur sous le nom de „Arbeitsprodukt“, afin de mettre en évidence le rôle fondamental qu'il joue dans l'évaluation du travail des forces.

la seconde

$$\vec{S}|\vec{S}' = (\vec{P} + \vec{Q} + \dots)|(\vec{P}' + \vec{Q}' + \dots) = \vec{P}|\vec{P}' + \vec{P}|\vec{Q}' + \dots,$$

la multiplication scalaire s'effectuant comme la multiplication algébrique.

En particulier, soient X, Y, Z les composantes parallèles aux axes du vecteur \vec{V} ; X', Y', Z' celles de \vec{V}' . On aura, si les axes de coordonnées sont rectangulaires,

$$\vec{V}|\vec{V}' = XX' + YY' + ZZ'.$$

Cette dernière égalité est d'un emploi continuel en mécanique.

Il en résulte que, toujours dans l'hypothèse d'axes de coordonnées rectangulaires, si l'on pose

$$\begin{aligned}\vec{V} &= e_1 X + e_2 Y + e_3 Z, \\ \vec{V}' &= e_1 X' + e_2 Y' + e_3 Z',\end{aligned}$$

les règles de la multiplication intérieure ou scalaire sont données par les formules suivantes:

$$\begin{aligned}e_1|e_1 &= e_2|e_2 = e_3|e_3 = 1, \\ e_2|e_3 &= e_3|e_1 = e_1|e_2 = 0, \\ e_3|e_2 &= e_1|e_3 = e_2|e_1 = 0.\end{aligned}$$

On voit que le produit intérieur ou scalaire de deux vecteurs n'est pas autre chose, au signe près, que la partie scalaire du produit des deux vecteurs défini au numéro 7. C'est ainsi que l'envisage *W. R. Hamilton*.*

9. Sens des rotations. Dans ce qui suivra on pourra supposer, lorsque besoin sera, les angles comptés de 0 à 2π dans le sens *direct*, c'est-à-dire dans le sens des arcs croissants en trigonométrie fixé dans chaque plan. Un plan dans lequel un certain sens de rotation est indiqué comme sens positif sera dit un *plan orienté*. Tel est par exemple un plan dans lequel sont donnés deux axes de coordonnées pris dans un ordre déterminé.

Soient Ox, Oy deux axes de coordonnées rectangulaires situés dans le plan II ; élevons au point O une *demi-droite* Oz (fig. 5) perpendiculaire sur le plan II , située par rapport à ce plan d'un côté tel qu'un observateur placé le long de Oz , la tête en z et les pieds en O , verrait qu'il faut faire tourner Ox de droite à gauche¹⁹⁾, pour

19) *A. L. Cauchy* [Exercices math. 1, Paris 1826, p. 74; Œuvres (2) 6, Paris 1887, p. 99] dit qu'on appelle *sens direct* celui qui va de Ox vers Oy par un angle droit et il ajoute: le sens direct est en général de droite à gauche, suivant la définition qu'il avait donnée auparavant [Exercices math. 1, p. 67; Œuvres (2) 6, p. 91] „se mouvoir en passant devant lui, de sa droite à sa gauche“.

l'amener sur Oy par une rotation d'un angle droit. Nous obtenons ainsi un trièdre trirectangle parfaitement déterminé parmi les huit trièdres que font entre elles les trois droites qui portent les axes Ox , Oy , Oz . Tout ensemble de points, borné ou non, rapporté à de pareils axes est dit *orienté*.

Si l'on remplace deux des demi-droites Ox , Oy , Oz par leurs prolongements Ox' , Oy' ou Oz' , on obtient trois nouveaux trièdres qui ont la même orientation que le premier.

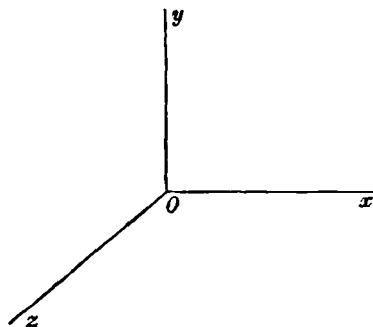


Fig. 5.

Au contraire, si, conservant deux des axes, on prend le symétrique du troisième par rapport à l'origine O , ou si l'on prend les symétriques des trois axes par rapport au même point, on obtient quatre trièdres dont l'orientation est *inverse* de la première, c'est-à-dire que pour le trièdre $Ox'y'z'$, par exemple la rotation d'un angle droit qui amènerait Ox' sur Oy' se ferait, pour un observateur placé les pieds en O et la tête en z' , de la gauche vers la droite (par devant), c'est-à-dire dans le sens des aiguilles d'une montre posée à terre, le cadran en l'air, aux pieds d'un observateur.

Le sens de la rotation pour ce nouveau trièdre est dit *rétrograde* ou *inverse*. Pour abrégé, on appelle souvent les trièdres orientés comme le premier trièdre $Oxyz$ des trièdres *directs*, et les trièdres orientés comme $Ox'y'z'$ des trièdres *inverses*; le remplacement d'un trièdre direct par un trièdre inverse, ou vice versa, s'appellera un *renversement* des axes. Ce renversement des axes sert souvent à distinguer des grandeurs qui restent invariantes pour toutes les autres transformations orthogonales²⁰).

Il convient d'ajouter que de nombreux auteurs²¹), en particulier

20) *F. Klein, Z. Math. Phys. 47 (1902), p. 237/65; réimpr. Math. Ann. 62 (1906), p. 419/48. Dans cet article, F. Klein appelle *Inversion* des coordonnées ce qu'on appelle ici „renversement des axes“.*

21) *Cf. G. Koenigs [Cinématique⁷], p. 95] et les cours autographiés de mécanique professés à l'Ecole polytechnique par E. Sarrau et L. Lecornu. Voir aussi P. Appell, Traité de mécanique rationnelle 1, Paris 1893, p. 55; (3^e éd.) 1, Paris 1909, p. 9; Cours de mécanique à l'usage des élèves de la classe de mathématiques spéciales, Paris 1905, p. 337. P. Appell emploie d'ailleurs l'expression *sens positif* au lieu de *sens direct*. Dans le texte les mots „sens positif“ ont une acception un peu différente de celle de sens direct.*

la plupart des auteurs français qui ont écrit des traités de géométrie analytique, appellent direct le sens que nous appelons ici rétrograde et inversement. Nous emploierons de préférence l'expression *sens positif* pour le sens dans lequel l'observateur placé suivant l'axe Oz voit s'effectuer la rotation d'un angle droit qui amène Ox sur Oy , *sens négatif* le sens contraire. Chacun sera libre de choisir le trièdre $Oxyz$ de façon à faire coïncider le sens positif, soit avec le sens direct défini plus haut qui est celui des astronomes, de la trigonométrie et de la géométrie analytique à deux dimensions, soit avec le sens direct de la géométrie analytique à trois dimensions.

Nous conviendrons toutefois que, quand le contraire n'est pas spécifié explicitement, *le sens positif sera celui de l'astronomie*.

L'orientation est alors telle qu'en étendant la main droite, le trièdre orientant l'espace peut être représenté par l'index Ox , le médium Oy et le pouce Oz (quelle que soit la position que l'on donne à la paume de la main); c'est ce qu'on appelle souvent la *règle du pouce*.

Il est évident que, si le sens est positif pour l'observateur Oz , la rotation d'un angle droit qui amène Oy sur Oz pour un observateur placé les pieds en O et la tête en x et la rotation d'un angle droit qui amène Oz sur Ox pour un observateur placé les pieds en O et la tête en y sont aussi positives.

Si l'on donne un système de coordonnées rectangulaires, on donne donc en même temps la manière dont on fait correspondre le sens positif d'une rotation au sens positif d'une translation. Cette correspondance sera la même que celle qui existe entre le sens positif de l'axe Oz et celui de la rotation qui amène l'axe Ox sur l'axe Oy par un quart de tour.

Nous pouvons maintenant définir facilement le *sens d'un vecteur* AB par rapport à un vecteur CD , ou le *sens d'un axe* $x'x$ par rapport à un axe $y'y$ qui ne le rencontre pas; ce second cas se ramène d'ailleurs au premier en portant dans le sens positif sur les deux axes des vecteurs AB et CD . Cela posé, concevons un trièdre de coordonnées ainsi placé: Oz' aura la direction et le sens de CD , O' coïncidant avec C ; $O'x'$ est dirigé de C vers A et $O'y'$ de C vers B . Si le trièdre $O'x'y'z'$ ainsi constitué a la même orientation²²⁾ que le trièdre de référence $Oxyz$, AB sera dans le sens positif par rapport à CD ; si l'orientation du trièdre $O'x'y'z'$ est inverse, AB sera dans

22) *Le mot „orientation“ a ici une signification un peu plus étendue que dans le texte précédent, mais qui se comprend d'elle-même.*

le sens négatif par rapport à CD . Dans le premier cas, AB est direct par rapport à CD ; dans le second, il est inverse. Il est essentiel de remarquer que si AB est direct par rapport à CD , réciproquement CD est direct par rapport à AB .*

10. Formules de transformation de coordonnées. Soient $Oxyz$ et $O'x'y'z'$ deux trièdres trirectangles ayant la même origine O .

Supposons que les cosinus directeurs du deuxième trièdre par rapport au premier, soient donnés par le tableau suivant

		Ox	Oy	Oz
Ox'		α	β	γ
Oy'		α'	β'	γ'
Oz'		α''	β''	γ''

Les formules de transformation seront

$$\begin{cases} x = \alpha x' + \beta y' + \gamma z', \\ y = \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z', \\ z = \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z', \end{cases}$$

et l'on a les relations connues

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1, \\ \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0, \\ \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0, \\ \alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma = 0, \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1, \\ \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1, \\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0, \\ \alpha'\beta' + \beta'\gamma' + \gamma'\alpha' = 0, \\ \alpha''\beta'' + \beta''\gamma'' + \gamma''\alpha'' = 0. \end{cases}$$

Si, de plus, les deux trièdres ont la même orientation, le déterminant Δ , défini par l'égalité

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix},$$

est égal à $+1$; si les trièdres de coordonnées ont des orientations contraires, Δ est égal à -1 .

Dans tous les cas, on a

$$\begin{aligned} \alpha\Delta &= \beta'\gamma'' - \gamma'\beta'', \\ \beta\Delta &= \gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'', \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

11. Triangles orientés. Cycles. *Pour donner un signe à l'aire d'un triangle situé dans un plan orienté on commence par faire correspondre à ce plan orienté un axe orienté que l'on choisit généralement perpendiculaire au plan orienté. Ceci posé, on suppose qu'un observateur ayant les pieds sur le plan du triangle, à l'intérieur du triangle, et dirigé suivant l'axe orienté correspondant au plan orienté, voit un mobile passer successivement par les trois sommets du triangle dans l'ordre où on les nomme. Si ce mobile tourne autour de l'observateur dans le sens positif, l'aire du triangle sera envisagée comme positive; si le sens est négatif, l'aire du triangle sera négative. On peut remarquer que si l'observateur a les pieds en O sur l'un des plans coordonnés il est traversé des pieds à la tête par l'axe orienté qui est perpendiculaire à ce plan.

Avec ces conventions l'aire d'un triangle situé dans le plan xOy et dont les sommets ont pour coordonnées rectangulaires

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$$

a toujours pour expression, en valeur absolue et en signe, le déterminant

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

qui est invariant dans toute transformation de coordonnées rectangulaires n'altérant pas l'orientation des axes. Ces conventions s'étendent sans peine aux aires planes²³⁾, limitées par des courbes quelconques²⁴⁾: pour une courbe plane dans le plan xOy l'aire a pour expression l'intégrale

$$\frac{1}{2} \int (x dy - y dx)$$

prise sur le contour dans le sens choisi.

Si l'on considère maintenant un triangle dans l'espace dont les sommets P_1, P_2, P_3 ont pour coordonnées

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3),$$

23) La première introduction de la notion d'aire positive ou négative suivant le sens du parcours sur le contour de l'aire est due à *A. F. Möbius* [Der baryc. Calcul⁷⁾, § 17; Werke 1, p. 39. Il a été suivi par *G. Bellavitis* [Annali delle scienze del regno Lombardo-Veneto (Padoue) 4 (1834), p. 256].

24) * Voir aussi *A. L. F. Meister*, Generalia de genesi figurarum planarum et independentibus earum affectionibus [Novi Commentarii Gott. 1 (1769/70), p. 144/80] et une lettre de *C. F. Gauss* à *H. W. M. Olbers* datée du 30 octobre 1825 [Werke 8, Göttingue (Leipzig), p. 398 [1900]] (Note de *P. Stäckel*)*.

le déterminant précédent représentera l'aire de la projection du triangle $P_1P_2P_3$ sur le plan des xy . Désignons-le par $\frac{1}{2}N$. Nous aurons deux expressions semblables $\frac{1}{2}L$, $\frac{1}{2}M$ pour les projections du triangle sur les plans yOz et zOx . L'aire du triangle $P_1P_2P_3$ s'exprimera, en valeur absolue, par le nombre

$$\frac{1}{2}G = \frac{1}{2}\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}.$$

On peut alors faire correspondre au triangle orienté le vecteur libre ayant pour projections L , M , N : ce vecteur est normal au plan du triangle du côté où l'observateur défini au commencement du n° 9 voit le triangle décrit dans le sens positif; sa longueur est la valeur absolue de l'aire.

En général, imaginons un plan dans lequel se trouve une courbe fermée décrite dans un certain sens. Si on calcule les trois intégrales

$$(1) \quad L = \int (ydz - zdy), \quad M = \int (zdx - xdz), \quad N = \int (xdy - ydx)$$

le long de la courbe, dans le sens choisi, ces intégrales représentent le double des valeurs algébriques des aires des projections de la courbe sur les trois plans de coordonnées, et l'aire elle-même a pour valeur absolue

$$\frac{1}{2}G = \frac{1}{2}\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}.$$

Le vecteur libre, de projections $\frac{1}{2}L$, $\frac{1}{2}M$, $\frac{1}{2}N$, est normal au plan du côté où devrait se trouver l'observateur pour voir le contour décrit dans le sens positif; sa longueur est $\frac{1}{2}G$.

Avec *E. Carvallo*²⁵), nous appellerons *cycle* un tel élément plan. Les quantités $\frac{1}{2}L$, $\frac{1}{2}M$, $\frac{1}{2}N$ sont les *composantes* du cycle. Cette notion est due essentiellement à *H. Grassmann*²⁶).

Nous distinguerons les cycles en cycles *liés* à un point, cycles *glissants* dans un plan et cycles *libres* où le cycle peut avoir une position quelconque dans son plan ou dans un plan parallèle.

25) *Nouv. Ann. math. (4) 2 (1902), p. 433; *E. N. Laguerre* désigne sous le nom de *cycle* une circonférence parcourue dans un sens déterminé [Nouv. Ann. math. (3) 1 (1882), p. 543; Œuvres 2, Paris 1905, p. 608].* *J. Clerk Maxwell* [Treatise on electricity and magnetism (1^{re} éd.) Londres 1873; (2^e éd.) 1, Londres 1881, p. 16; trad. par *G. Seligmann-Lui*, Traité d'électricité et de magnétisme 1, Paris 1885, p. 17] emploie le même mot pour un contour fermé. Ces sens voisins ne sauraient faire confusion avec celui du texte.

26) *H. Grassmann* [Die lineale Ausdehnungslehre, Leipzig 1844, p. 163; Werke⁶) 1¹, p. 189] emploie le mot „Plangrösse“ pour les parallélogrammes liés. Pour les autres, il dit „Flächenteil“ [Die Ausdehnungslehre, Berlin 1862; Werke⁶) 1²]. Pour les parallélogrammes liés, *H. Grassmann junior* [Punktrechnung und projektive Geometrie, Halle 1894, p. 7 et suiv.] emploie le mot „feuille“ (Blatt).

Plus généralement encore, on peut associer à un contour fermé gauche parcouru dans un sens donné, le vecteur libre \vec{G} dont les projections L, M, N sont définies par les équations (1).

12. Produit vectoriel. Soient deux vecteurs \vec{P} et \vec{P}' ; menons par un point O deux vecteurs équipollents OP et OP' , et construisons, sur ces deux vecteurs, le parallélogramme $OPQP'O$, Q étant le sommet opposé à O . On appelle *produit vectoriel* ou *produit extérieur* de \vec{P} par \vec{P}' le vecteur \vec{G} qui, d'après le numéro précédent, correspond au cycle $OPQP'O$ parcouru dans le sens des lettres. Ce vecteur \vec{G} est normal au plan du parallélogramme, du côté où un observateur debout sur le plan voit le cycle décrit dans le sens positif; il a pour grandeur la valeur absolue de l'aire du parallélogramme. Nous désignerons²⁷⁾ ce vecteur par la notation

$$\vec{G} = \vec{P} \times \vec{P}'.$$

On appelle, d'après *H. Grassmann*²⁸⁾, ce vecteur \vec{G} le *complément* (Ergänzung) du cycle défini par les deux vecteurs \vec{P} et \vec{P}' , c'est-à-dire par le parallélogramme $OPQP'O$.

Le produit vectoriel de \vec{P}' par \vec{P} est égal et opposé à celui de \vec{P} par \vec{P}' :

$$\vec{P}' \times \vec{P} = -\vec{P} \times \vec{P}'.$$

27) *A. L. Cauchy* [C. R. Acad. sc. Paris 36 (1853), p. 75; Œuvres (1) 11, Paris 1899, p. 443] emploie l'expression *produit angulaire*; *B. de Saint Venant* [C. R. Acad. sc. Paris 21 (1845), p. 620] désignait la même quantité sous le nom de *produit géométrique*, qui [cf. *B. de Saint Venant*¹⁸⁾] a aussi une autre acception. Pour désigner le produit extérieur, *H. Grassmann* écrit $[uv]$, *W. R. Hamilton* écrit Vuv , *H. A. Lorentz* et la plupart des auteurs allemands écrivent $[u \cdot v]$, *J. W. Gibbs* [Vector Analysis¹⁸⁾, p. 60 (leçons professées en 1899/1900)] écrit $u \times v$ et appelle cette expression „produit gauche“ (skew product); *O. Heaviside* [Electrical papers 2, Londres 1892, p. 5: Electromagnetic theory¹⁸⁾ 1, p. 157] écrit Vuv et emploie l'expression „produit vectoriel“; *C. Burali-Forti* et *R. Marcolongo* [Rend. Circ. mat. Palermo 24 (1907), p. 78; Calcolo vettoriale¹⁸⁾, p. 28; trad. *S. Lattès*, p. 28] ont proposé d'écrire $u \wedge v$.

28) Die Ausdehnungslehre, Berlin 1862, p. 210; Werke⁵⁾ 1², p. 211, 212.

E. W. Hyde, dans le „Directional calculus“, éd. à Boston en 1890, dit aussi „the complement“. *C. Burali-Forti* [Introduction à la géométrie différentielle suivant la méthode de H. Grassmann, Paris 1897, p. 27] dit „opération index“. *H. Fehr* [Application de la méthode vectorielle de Grassmann à la géométrie infinitésimale, Thèse, Paris 1899, p. 11] dit „index du bivecteur“; *K. Heun* [Mechanik¹⁸⁾ 1, p. 15] dit „Momentprodukt“ et écrit $u \vec{v}$ pour le produit vectoriel du vecteur \vec{u} par le vecteur \vec{v} .

En particulier le produit vectoriel d'un vecteur par lui-même est donc égal à zéro:

$$\vec{P} \times \vec{P} = 0.$$

Appelons X, Y, Z et X', Y', Z' les projections des deux vecteurs \vec{P} et \vec{P}' ; menons par l'origine O deux vecteurs équipollents OP et OP' : les points P et P' ont pour coordonnées respectives X, Y, Z et X', Y', Z' . Le vecteur

$$\vec{G} = \vec{P} \times \vec{P}'$$

est le double du vecteur représentatif du triangle orienté OPP' : les projections de \vec{G} sur les axes sont donc (d'après les formules du n° 5)

$$L = YZ' - ZY', \quad M = ZX' - XZ', \quad N = XY' - YX'.$$

*H. Grassmann*²⁹⁾ a déduit cette notion³⁰⁾ de celle des produits combinatoires (kombinatorisches Produkt) dont il est le créateur³¹⁾.

Considérons avec lui deux nombres complexes u et v formés à l'aide de trois unités³²⁾ indépendantes e_1, e_2, e_3 et de nombres réels $x_1, x_2, x_3, x_1', x_2', x_3'$

$$u = e_1 x_1 + e_2 x_2 + e_3 x_3,$$

$$v = e_1 x_1' + e_2 x_2' + e_3 x_3'.$$

Si l'on fait la multiplication ordinaire des polynômes u et v en conservant l'ordre des facteurs unitaires e_1, e_2, e_3 , on obtient une expression de la forme

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 e_k e_i x_k x_i'.$$

En convenant de choisir les trois unités indépendantes de façon que

$$e_1^2 = 0, \quad e_2^2 = 0, \quad e_3^2 = 0, \quad e_2 e_3 = -e_3 e_2, \quad e_3 e_1 = -e_1 e_3, \quad e_1 e_2 = -e_2 e_1$$

29) Die Ausdehnungslehre, Berlin 1862, p. 31/56; Werke⁶⁾ 1², p. 38/61.

30) *W. R. Hamilton* [On quaternions or a new system of imaginaries in algebra, Proc. Irish Acad. (1) 2 (1840/4), p. 424; cf. London Edinb. Dublin philos. mag. 25 (1844), p. 10] a introduit le produit vectoriel comme partie vectorielle du produit de deux quaternions.

31) Dans le cas de deux vecteurs situés dans un même plan, il existe une autre multiplication qui est la généralisation la plus adéquate de la multiplication arithmétique, qui se traduit par une construction géométrique simple et qui représente exactement la multiplication des imaginaires de la forme $x + iy$. C'est la plus anciennement connue [Cf. I 5, 2; I₁ p. 342]; on peut voir aussi [I 5, nos 15 à 20; I₁ p. 378 et suiv.] un exposé, dû à *E. Cartan*, des idées qui ont amené *H. Grassmann* aux notions introduites dans le texte.

32) C'est un cas particulier des clefs algébriques de *A. L. Cauchy* [C. R. Acad. sc. Paris 36 (1853), p. 70; Œuvres (1) 11, Paris 1899, p. 439].

l'expression obtenue pour uv est le *produit combinatoire* de u par v ; nous le désignerons^{32a)} par la notation

$$u \times v$$

en sorte que l'on a, par définition,

$$u \times v = e_2 e_3 (x_2 x_3' - x_3 x_2') + e_3 e_1 (x_3 x_1' - x_1 x_3') + e_1 e_2 (x_1 x_2' - x_2 x_1')$$

d'où résultent évidemment les égalités

$$u \times v = -v \times u$$

et

$$u \times u = 0.$$

Avec *H. Grassmann* nous représenterons e_1, e_2, e_3 par trois vecteurs unitaires orthogonaux deux à deux et de même origine O ; les produits $e_2 e_3, e_3 e_1, e_1 e_2$ seront représentés par des cycles ayant pour vecteurs associés respectifs les vecteurs unités e_1, e_2, e_3 ; enfin le produit $e_1 e_2 e_3$ sera représenté par le volume du parallélépipède construit sur $e_1 e_2 e_3$. Avec ces conventions u et v seront représentés par deux vecteurs OP, OP' d'origine O et le produit $u \times v$ par un cycle $OPQP'O$ (où Q est le quatrième sommet du parallélogramme construit sur OP, OP') dont le complément est le vecteur représentatif de

$$e_1 (x_2 x_3' - x_3 x_2') + e_2 (x_3 x_1' - x_1 x_3') + e_3 (x_1 x_2' - x_2 x_1');$$

ce dernier vecteur coïncide précisément avec ce que nous avons appelé le produit extérieur de \vec{P} par \vec{P}' .

Envisageons maintenant un troisième nombre complexe

$$w = e_1 x_1'' + e_2 x_2'' + e_3 x_3'',$$

représenté par le vecteur OP'' et désignons par

$$u \times v \times w$$

l'expression obtenue par multiplication des polynômes u, v, w en conservant l'ordre des facteurs e_1, e_2, e_3 et en convenant, d'une part de remplacer le produit de trois unités par zéro lorsque ce produit contient deux ou trois fois la même unité, d'autre part d'égaliser entre eux les six produits

$$+ e_1 e_2 e_3, \quad + e_2 e_3 e_1, \quad + e_3 e_1 e_2, \quad - e_2 e_1 e_3, \quad - e_3 e_2 e_1, \quad - e_1 e_3 e_2.$$

On peut appeler $u \times v \times w$ le *produit combinatoire* des trois nombres

32a) *En réalité *H. Grassmann* appelle *produit extérieur* de u par v ce que nous désignons ici par $u \times v$; il réserve le nom de produit combinatoire au produit dont les facteurs sont formés exclusivement d'unités; comme pour nous produit extérieur et produit vectoriel sont synonymes nous avons étendu le sens de la locution produit combinatoire afin de ne pas donner à celle de produit extérieur deux sens différents.*

complexes u, v, w . Il a pour expression

$$e_1 e_2 e_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \end{vmatrix};$$

c'est donc en grandeur et en signe, le volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs. Le développement de ce déterminant suivant l'une de ses lignes donne immédiatement la proposition suivante:

Le produit intérieur

$$\vec{P} | (\vec{P}' \times \vec{P}'')$$

du vecteur P par le produit vectoriel $\vec{P}' \times \vec{P}''$ de deux autres vecteurs est égal aux produits intérieurs

$$\vec{P}' | (\vec{P}'' \times \vec{P}), \text{ et } \vec{P}'' | (\vec{P} \times \vec{P}'),$$

la valeur commune de ces trois expressions étant égale à celle du produit combinatoire $u \times v \times w$ des trois nombres complexes u, v, w représentés par les vecteurs OP, OP', OP'' équipollents respectivement à $\vec{P}, \vec{P}', \vec{P}''$.

13. Vecteurs polaires et vecteurs axiaux. Il y a souvent lieu de distinguer nettement les uns des autres les vecteurs que nous avons introduits jusqu'ici. Tandis que certains vecteurs sont analogues à des rayons vecteurs issus d'un point, et que leurs composantes se comportent dans les transformations ou renversements des axes de coordonnées comme les coordonnées d'un point, notamment en changeant de signe si les axes sont renversés, d'autres vecteurs sont des invariants absolus dans tout le groupe de substitutions dont nous venons de parler; ils se comportent chacun comme l'axe d'une rotation de sens déterminé. Les projections de chacun de ces derniers vecteurs conservent leur signe et leur valeur absolue dans le renversement des axes.

On appelle *vecteurs polaires*³³⁾ les premiers, c'est-à-dire ceux dont

33) Les expressions de vecteurs „polaires“ et de vecteurs „axiaux“ sont dues à *W. Voigt*, *Compendium der theoretischen Physik* 2, Leipzig 1896, p. 418/801.

J. C. Maxwell [*Treatise on electricity and magnetism*²⁵⁾, (1^{re} éd.) n° 15; (2^e éd.) 1, p. 13; *Proc. London math. Soc.* 3 (1869/71), p. 224; *Papers* 2, Cambridge 1890, p. 257] emploie les termes de „longitudinal“ et „rotational“.

E. Wiechert [*Schriften phys.-ökon. Ges. Königsb.* 37 (1896), *Sitzgsb.* p. 6; *Ann. Phys. und Chemie*, Dritte Folge 59 (1896), p. 286] dit „Vectoren“ et „Rotoren“.

**P. Langevin* [cf. IV 16, 4] propose pour distinguer les deux espèces de vecteurs de noter les vecteurs polaires \vec{a} et les vecteurs axiaux \hat{a} . Voir en général cet article IV 16 au sujet des différentes propriétés des deux systèmes de vecteurs.*

les projections ont leurs signes altérés par un renversement de coordonnées; les autres sont dits *vecteurs axiaux*. Nous interprétons ces derniers comme des segments ayant non seulement une direction déterminée, mais étant aussi doués d'un sens de rotation. Ils sont intimement liés aux cycles que l'on peut en déduire en traçant, dans un plan normal à la direction du segment, une surface d'aire égale à la longueur du segment (l'unité de surface étant le carré construit sur l'unité de longueur). Dans toutes les transformations, le vecteur axial se comporte comme un cycle; en sorte que, au point de vue analytique, il est absolument identique au cycle.

Il convient d'examiner en détail l'effet des diverses transformations sur ces deux espèces de vecteurs.

Si l'on effectue un changement de coordonnées rectangulaires sans changement d'origine, les composantes des vecteurs polaires subissent les mêmes transformations homogènes que les coordonnées d'un point. Il en est de même des composantes des cycles ou vecteurs axiaux L, M, N à cause des relations données plus haut entre les nouveaux axes et les anciens. Une translation des axes parallèlement à eux-mêmes n'entraîne aucune modification ni dans les composantes du vecteur polaire, ni dans celles du cycle. Un renversement des axes change les signes des composantes d'un vecteur polaire, mais ne modifie en rien les composantes du cycle. C'est là un signe distinctif des composantes d'un cycle; on a ainsi une interprétation géométrique de tout système de trois grandeurs qui subissent les mêmes transformations que les coordonnées d'un point dans tout changement de coordonnées qui conserve l'orientation des axes, mais qui demeurent invariantes si l'on se borne à changer cette orientation.

*Les transformations de coordonnées qui laissent invariables les composantes d'un vecteur axial sont les rotations d'angle quelconque autour de la direction du vecteur, les inversions planes³⁴⁾ par rapport à un plan perpendiculaire à cette direction, et les renversements.

Le produit vectoriel de deux vecteurs axiaux ou de deux vecteurs polaires est un vecteur *axial*; le produit vectoriel d'un vecteur axial et d'un vecteur polaire est un vecteur *polaire*.

Enfin le produit vectoriel de trois vecteurs polaires est un vecteur polaire et le produit vectoriel de trois vecteurs axiaux est un vecteur axial.*

34) *On appelle ainsi les transformations par symétrie relativement à un plan [voir la note de G. Darboux dans G. Koenigs, Cinématique²⁾, p. 346].*

14. Points-masses. La considération des points-masses [cf. IV 5] introduits par *A. F. Möbius*³⁵⁾ dans la géométrie permet de résumer ce que nous avons dit jusqu'à présent. Soient x, y, z les coordonnées qui définissent la position d'un point-masse et μ sa masse, nous dirons que les coordonnées du point masse sont

$$\mu, \quad \xi = \mu x, \quad \eta = \mu y, \quad \zeta = \mu z,$$

dont on peut remarquer l'analogie avec ce qu'en géométrie analytique on appelle les coordonnées homogènes d'un point.

Supposons d'abord $\mu = 0$, et ξ, η, ζ non nulles. Les coordonnées cartésiennes x, y, z sont alors infinies et l'on obtient un point-masse d'une masse infiniment petite situé à une distance infiniment grande dans une direction donnée. Ce point-masse peut être d'une infinité de manières considéré comme différence de deux points-masses ordinaires qui auraient des masses égales:

$$\begin{aligned} \mu, \quad \xi = \mu x, \quad \eta = \mu y, \quad \zeta = \mu z, \\ \mu, \quad \xi' = \mu x', \quad \eta' = \mu y', \quad \zeta' = \mu z'. \end{aligned}$$

En effet les coordonnées du point-masse différence seront

$$0, \quad X = \xi - \xi' = \mu(x - x'), \quad Y = \eta - \eta' = \mu(y - y'), \quad Z = \zeta - \zeta' = \mu(z - z').$$

Ces points-masses sont identiques aux vecteurs.

Soit maintenant $\mu = 1$; on aura ce que *H. Grassmann* appelle un *point simple*. Les coordonnées d'un point simple sont donc

$$1, \quad x, \quad y, \quad z.$$

Or on sait que les composantes L, M, N d'un *cycle libre*, qui est le produit extérieur de deux vecteurs, sont les déterminants de la matrice

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

et que le produit extérieur de trois vecteurs a pour mesure la valeur algébrique du déterminant

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}.$$

Par analogie les points simples conduiront aux résultats suivants: les déterminants de la matrice à deux lignes

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

35) *On pourrait faire remonter cette introduction à *G. Ceva*, De lineis rectis se invicem secantibus, statica constructio, Milan 1678 [voir *M. Chasles*, Aperçu historique, (2^e éd.) Paris 1876, p. 294/6] (Note de *P. Stäckel*).*

seront les coordonnées X, Y, Z, L, M, N d'un *vecteur glissant*; ceux de la matrice à trois lignes

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x' & y' & z' \\ 1 & x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}$$

nous donneront les coordonnées d'un *cycle glissant*. Enfin le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x' & y' & z' \\ 1 & x'' & y'' & z'' \\ 1 & x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

représente le sextuple du volume, pris avec son signe, du tétraèdre qui a pour sommets les quatre points simples.

A chacune des six grandeurs (vecteurs ou cycles) que nous avons introduites correspond un type de sous-groupes du groupe des transformations orthogonales ou mouvements de l'espace qui ne les altèrent pas; on dit encore que ces grandeurs sont des *invariants* de ces sous-groupes. Ces sous-groupes sont les suivants:

α) *vecteurs polaires*:

1°) pour les *vecteurs libres* (polaires), le groupe des mouvements hélicoïdaux dont l'axe a la direction du vecteur, ces mouvements comprenant, comme cas particuliers, les translations parallèles à la direction du vecteur et les rotations autour d'un axe ayant la même direction;

2°) pour les *vecteurs glissants*, les mouvements hélicoïdaux dont l'axe est le support du vecteur;

3°) pour les *vecteurs liés* à un point, les rotations autour de l'axe qui porte le vecteur;

β) *vecteurs axiaux* ou *cycles*:

4°) pour les *cycles libres* (vecteurs axiaux), le groupe des transformations qui se composent d'une translation, d'une rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan du cycle et d'un retournement par symétrie relativement à un point quelconque de l'espace;

5°) pour les *cycles glissants*, toutes les translations parallèles au plan du cycle combinées avec les rotations dont l'axe est perpendiculaire au plan du cycle et avec les retournements par symétrie relatifs à un point de ce plan;

6°) pour les *cycles liés à un point*, on ne conserve que les rotations autour de la normale au plan menée par ce point et les symétries par rapport à ce point³⁶⁾.*

36) Voir *F. Klein*, Progr. Erlangen 1872; Math. Ann. 43 (1893), p. 63;

15. Grandeurs scalaires de première espèce et grandeurs scalaires de deuxième espèce. On appelle *scalaire*, en généralisant une expression déjà rencontrée et empruntée à la théorie des quaternions³⁷⁾, toute grandeur dont la détermination est fixée par un nombre, et par un nombre seulement, comme par exemple la densité, ou encore la température. Mais deux cas peuvent se présenter:

a) le nombre en question est indépendant du sens des axes de coordonnées; on dit alors qu'il est *scalaire de première espèce*³⁸⁾.

b) Le nombre qui définit la quantité considérée change de signe lorsque l'on renverse les axes de coordonnées: on dit alors qu'il est *scalaire de deuxième espèce*³⁹⁾.

Ainsi, la projection sur un axe du produit extérieur de trois vecteurs polaires est un scalaire de deuxième espèce.

Au contraire, la projection sur un axe du produit de trois vecteurs axiaux est un scalaire de première espèce.

16. Les moments. * On désigne par le mot *moments* des grandeurs obtenues en rattachant les vecteurs, par une figure ou un système géométrique, aux différents éléments: points, droites ou plans de l'espace.

Il convient de distinguer deux types différents de moments:

1°) *les moments scalaires* qui sont des nombres positifs, négatifs ou nuls.

2°) *les moments vectoriels* qui sont des grandeurs géométriques.

Ces derniers peuvent être soit des vecteurs polaires, soit des vecteurs axiaux ou des cycles.

Nous ne nous occuperons pas, dans cet article, de la notion de *moment par rapport à un plan*. Cette notion est usitée dans la théorie des vecteurs localisés en des points, ou vecteurs liés. Ces moments sont des vecteurs polaires (dont les longueurs sont des grandeurs scalaires) qui interviennent notamment dans la composition des forces

trad. par *H. Padé*, Ann. Ec. Norm. (3) 8 (1891), p. 87, 173 et par *G. Fano*, Ann. mat. pura appl. (2) 17 (1889/90), p. 307. Voir aussi *F. Klein*, Z. Math. Phys. 47 (1902), p. 237/65; réimpr. Math. Ann. 62 (1906), p. 419/48.

37) Cette locution est due à *W. R. Hamilton*, Proc. Irish Acad. (1) 3 (1845/7), p. 9 [1844]; Lectures on quaternions¹⁷⁾, p. 58; Elements of quaternions, Londres 1866, p. 10 (œuvre posthume); (2^e éd.) publ. par *Ch. J. Joly* 1, Londres 1899, p. 11; trad. allemande par *P. Glan* 1, Leipzig 1882, p. 14.

38) Cf. *F. Klein*, Z. Math. Phys. 47 (1902), p. 247.

39) *Au lieu des expressions du texte, *P. Langevin* [cf. IV 16, 2] emploie les suivantes: „scalaire“ et „pseudo-scalaire“. Il propose de distinguer typographiquement ces deux espèces de grandeurs en désignant les premières par une seule lettre α , les deuxièmes par une lettre α pointée en dessous.*

parallèles appliquées à un solide et dans la théorie des centres de gravité. Leur théorie sera exposée dans l'article II 5.*

17. Moment linéaire ou vectoriel d'un vecteur glissant par rapport à un point. *Considérons l'ensemble formé par un vecteur glissant AB et un point P ; quand le vecteur glisse sur un support, certains éléments de cet ensemble géométrique restent invariables: on les caractérise par un vecteur axial défini comme il suit. Le moment⁴⁰⁾ d'un vecteur glissant AB par rapport à un point P ⁴¹⁾ est un vecteur PQ lié au point P , sa longueur PQ est égale au produit de la longueur du vecteur AB par la distance de ce vecteur au point P , sa direction celle de la perpendiculaire au plan PAB ; enfin son sens est choisi de manière que le trièdre $PABQ$ ait la disposition directe dans l'espace orienté⁴²⁾, c'est-à-dire la même disposition que le trièdre qui oriente l'espace.*

Pratiquement il est souvent commode de déterminer le sens de PQ en assimilant AB à une force appliquée au point A d'un solide pouvant tourner autour de la perpendiculaire menée par P au plan PAB . Le sens du moment PQ est celui de l'observateur placé les pieds en P , la tête en Q , qui voit le corps tourner dans le sens direct sous l'action de la force AB . Nous dirons souvent, pour abrégé, que le sens de PQ est le sens de la rotation produite par AB .

*Nous dirons aussi que le vecteur AB est direct par rapport à PQ ; par là-même, PQ est direct par rapport à AB .

Le vecteur PQ n'est pas autre chose que le vecteur que nous avons appelé plus haut produit vectoriel de PA par PB .

40) *L'habitude de considérer le moment comme une grandeur vectorielle, introduite par *A. L. Cauchy* qui emploie l'expression *moment linéaire* [Exercices math. 1, Paris 1826, p. 66; Œuvres (2) 6, Paris 1887, p. 89; voir aussi C. R. Acad. sc. Paris 36 (1853), p. 75; Œuvres (1) 11, Paris 1899, p. 444], adoptée dans tous les cours de mathématiques spéciales, est aujourd'hui générale en France [voir par ex. *P. Appell*, Traité de mécanique rationnelle (1^{re} éd.) 1, Paris 1893, p. 5; (3^e éd.) 1, Paris 1909, p. 3; *G. Koenigs*, Cinématique³⁾, p. 17; *J. Tannery*⁷⁾, Ann. Ec. Norm. (3) 3 (1886), p. 43/80]. Il n'en a pas toujours été ainsi: c'est ainsi qu'en 1858 encore, *O. Bonnet* [Leçons de mécanique élémentaire, Paris 1858, p. 205] considérait les moments, soit par rapport à un point, soit par rapport à un axe, comme des nombres réels positifs ou négatifs. Au fond, il y a des moments scalaires et des moments vectoriels; le plus souvent on ne considère actuellement que les seconds.*

41) Le moment défini par ses composantes joue déjà un grand rôle dans *G. C. F. M. Riche de Prony* [Leçons de mécanique 1, Paris 1810, p. 67], qui indique [id. p. 82] *P. S. Laplace* comme le véritable créateur de la théorie des moments.

42) *On peut encore dire qu'un observateur dirigé suivant PQ voit le vecteur AB parcouru de A vers B dans le sens positif.*

Le moment vectoriel, par rapport à un point, d'un vecteur polaire est un vecteur axial. Le moment vectoriel, par rapport à un point, d'un vecteur axial est un vecteur polaire.

La longueur du moment s'exprime encore par le double de l'aire du triangle PAB , prise en valeur absolue⁴³). Le moment est nul si le vecteur AB est nul ou si sa distance au point P est nulle. On peut déplacer l'origine du vecteur AB sur sa direction ou le point P sur une parallèle à AB sans changer le moment.

Le moment de la somme géométrique de plusieurs vecteurs concourants, par rapport à un point P , est égal à la somme géométrique des moments des vecteurs composants par rapport au même point P .

Si le point P et les vecteurs envisagés sont dans un même plan, les vecteurs moments sont tous dirigés suivant la même droite et, si l'on a fixé un sens positif sur cette droite, ces moments devront être considérés comme positifs ou négatifs suivant qu'ils seront dirigés dans le sens positif ou en sens contraire; le théorème de la composition des vecteurs concourants prend alors la forme suivante dont l'énoncé équivaut à celui de *P. Varignon*⁴⁴): le moment de la résultante de plusieurs vecteurs concourants situés dans un même plan par rapport à un point P de leur plan est égal à la somme algébrique des moments de ces vecteurs par rapport au point P ⁴⁵). D'ailleurs, dans ce cas particulier, les moments par rapport à un point se confondent avec les moments par rapport à une droite normale au plan des vecteurs, moments qui vont être définis au paragraphe suivant.

Dans le cas où les supports des vecteurs glissants ne concourent pas en un point, il n'y a plus de théorème analogue. Mais on est souvent amené à considérer la somme géométrique des moments de ces vecteurs par rapport à un point O : c'est ce qu'on appelle le *moment résultant* du système de vecteurs par rapports au point O .*

18. Moment par rapport à un axe⁴⁶). Le moment d'un vecteur par rapport à un axe est la projection orthogonale, sur cet axe,

43) * Cette considération rattache le moment vectoriel à la théorie des cycles.*

44) * *P. Varignon*, Nouvelle mécanique ou statique 1, Paris 1725, p. 386 (édition posthume dont le projet a été donné en 1687).

P. Varignon (p. 304) s'excuse d'employer le mot „moment“ pour traduire *momentum* qui est consacré, dit-il, par l'usage. Il préférerait dire *force relative*, ou *force d'impression*, ou encore *action*.*

45) * Il est à remarquer ici que les moments considérés par *P. Varignon* ne sont plus de véritables vecteurs, mais des nombres réels, positifs ou négatifs, ou encore des moments scalaires de deuxième espèce. Un seul observateur normal au plan sert à fixer le signe des moments.*

du moment du vecteur pris par rapport à un point P quelconque de cet axe. Ce moment est indépendant du choix que l'on fait du point P sur l'axe. C'est aussi le moment de la projection orthogonale du vecteur sur un plan quelconque perpendiculaire à l'axe, par rapport à l'intersection de l'axe et du plan, ce dernier moment devant être considéré comme positif s'il est porté sur l'axe dans le sens positif et comme négatif dans le cas contraire.

Le moment par rapport à un axe est, comme on le voit, un *moment scalaire*.

Il est parfois commode de représenter ce moment scalaire par un segment situé sur l'axe (ou un vecteur glissant sur l'axe) par rapport auquel on prend le moment. Ce segment (vecteur), qui est mesuré sur l'axe envisagé par le moment scalaire, a un sens bien défini: en assimilant à une force le vecteur dont on prend le moment par rapport à l'axe, ce sens est donné par celui de la rotation autour de l'axe produite par la projection, sur un plan perpendiculaire à l'axe, de la force envisagée.

Soient x, y, z les coordonnées de l'origine d'un vecteur AB , X, Y, Z les composantes de ce vecteur suivant les axes coordonnés, L, M, N ses moments par rapport aux axes. Les expressions analytiques de ces moments seront

$$(1) \quad \begin{cases} L = yZ - zY, \\ M = zX - xZ, \\ N = xY - yX. \end{cases}$$

Le moment linéaire \vec{G} du même vecteur par rapport à l'origine des coordonnées a pour composantes suivant les axes les nombres L, M, N .

Par rapport à un autre point O' de l'espace, de coordonnées x', y', z' , le moment du vecteur AB aura pour composantes

$$\begin{aligned} L' &= L - (y'Z - z'Y), \\ M' &= M - (z'X - x'Z), \\ N' &= N - (x'Y - y'X), \end{aligned}$$

On peut traduire ces formules par le théorème suivant qui fait image:

Le moment d'un vecteur AB par rapport à un point quelconque O' est la somme géométrique du moment de AB par rapport à un

46) *P. S. Laplace [Mécanique céleste 1, Paris an VII, p. 13; Œuvres 1, Paris 1878, p. 15] définit la valeur absolue du moment d'une force par rapport à un axe. Il avait d'ailleurs été précédé par L. Euler, Nova Acta Acad. Petrop. 7 (1789), éd. 1793, p. 191/204 [1780].*

autre point O et du moment par rapport à O' d'un vecteur équipollent à AB appliqué en O .*

Expressions diverses du moment d'un vecteur par rapport à un axe.

Soient l la longueur d'un vecteur AB , θ l'angle de sa direction avec le sens positif de l'axe OU par rapport auquel on prend le moment, δ la plus courte distance du vecteur à cet axe. Le moment du vecteur AB aura pour expression

$$\pm l\delta \sin \theta,$$

où le signe $+$ correspond au cas où un mobile parcourant le vecteur AB de son origine A à son extrémité B tourne autour d'un observateur OU dans le sens positif. On dit alors que AB est *direct* par rapport à OU . Le signe $-$ correspond au cas contraire où l'on dit que AB est *inverse* par rapport à OU .

Le moment est nul si le vecteur est nul ou s'il est dans un même plan avec l'axe.

Portons sur l'axe OU dans le sens positif un vecteur A_1B_1 et considérons le tétraèdre qui a pour arêtes opposées AB et A_1B_1 ; désignons par

$$[AB, A_1B_1]$$

le volume de ce tétraèdre affecté du signe $+$ ou du signe $-$ suivant que AB sera direct ou inverse par rapport à A_1B_1 .

Le moment de AB par rapport à l'axe OU est alors égal en grandeur et en signe à

$$\frac{6}{l_1} [AB, A_1B_1],$$

si l_1 est la longueur du vecteur A_1B_1 . Il est clair que ce moment pourrait être représenté par la valeur algébrique du volume du parallélépipède qui aurait pour arêtes AB , AA_1 et AB_1 .*

19. Moment relatif de deux vecteurs. On appelle *moment relatif* de deux vecteurs A_1B_1 , A_2B_2 le nombre

$$6 [A_1B_1, A_2B_2] = 6 [A_2B_2, A_1B_1]$$

qui vient d'être défini.

Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées de A_1 ; X_1, Y_1, Z_1 les composantes de A_1B_1 ; x_2, y_2, z_2 les coordonnées de A_2 ; X_2, Y_2, Z_2 les composantes de A_2B_2 . Le moment relatif des deux vecteurs A_1B_1 , A_2B_2 a pour expression

$$M = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_1 + X_1 & y_1 + Y_1 & z_1 + Z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_2 + X_2 & y_2 + Y_2 & z_2 + Z_2 \end{vmatrix}$$

ou encore, en désignant par L_1, M_1, N_1 les moments de A_1B_1 , et par L_2, M_2, N_2 les moments de A_2B_2 par rapport aux axes coordonnés,

$$M = L_1 X_2 + M_1 Y_2 + N_1 Z_2 + L_2 X_1 + M_2 Y_1 + N_2 Z_1$$

ou enfin

$$M = (L_1 + L_2)(X_1 + X_2) + (M_1 + M_2)(Y_1 + Y_2) + (N_1 + N_2)(Z_1 + Z_2).$$

Il est clair que le moment d'un vecteur par rapport à un axe n'est pas autre chose que le moment relatif de ce vecteur et d'un *vecteur unitaire* porté par l'axe (on appelle *vecteur unitaire* un vecteur égal à l'unité de longueur et dirigé sur l'axe dans le sens positif de cet axe). Il est évident que le moment relatif de deux vecteurs reste invariable si les vecteurs glissent sur leurs supports.

On a quelquefois à considérer le *moment relatif de deux axes*: ce n'est autre chose que le moment relatif des deux vecteurs unitaires portés par ces axes. Si α, β, γ sont les cosinus directeurs du premier axe, λ, μ, ν les moments par rapport aux axes coordonnés du vecteur unitaire porté par cet axe, $\alpha', \beta', \gamma', \lambda', \mu', \nu'$, les quantités analogues relatives au second axe, le moment relatif des deux axes aura pour expression

$$\lambda\alpha' + \mu\beta' + \nu\gamma' + \lambda'\alpha + \mu'\beta + \nu'\gamma.$$

Nous terminerons ce qui concerne les moments par une remarque essentielle: les n^{os} 16 à 19 concernent des vecteurs glissants aussi bien que des vecteurs liés à leur point d'application.

20. Coordonnées d'un vecteur glissant. Coordonnées de la droite. Tandis qu'un vecteur libre est déterminé par trois nombres qui sont les projections du vecteur sur les trois axes, un vecteur glissant A_1A_2 est, comme on l'a déjà vu (n^o 6), défini par les six nombres

$$\begin{aligned} X &= x_2 - x_1, & L &= y_2 z_1 - z_2 y_1, \\ Y &= y_2 - y_1, & M &= z_2 x_1 - x_2 z_1, \\ Z &= z_2 - z_1, & N &= x_2 y_1 - y_2 x_1, \end{aligned}$$

où x_1, y_1, z_1 sont les coordonnées cartésiennes rectangulaires de l'origine A_1 et x_2, y_2, z_2 celles de l'extrémité A_2 du vecteur. On appelle ces six nombres les *coordonnées* du vecteur glissant; il existe entre elles la relation identique

$$LX + MY + NZ = 0,$$

qui montre qu'un vecteur glissant n'a que *cinq* coordonnées indépendantes. Ces six coordonnées⁴⁷⁾ d'un vecteur glissant sont formées d'une part par

47) Voir J. Plücker, Fundamental views regarding mechanics [Philos. Trans. London 156 (1866), p. 361; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 546].

les trois composantes X, Y, Z d'un vecteur polaire libre et d'autre part par les trois composantes L, M, N d'un vecteur axial lié à l'origine des coordonnées. Les trois premières ne sont pas altérées par une translation des axes; quant aux trois dernières, si l'on désigne leurs nouvelles valeurs par L', M', N' et par x_0, y_0, z_0 les coordonnées de la nouvelle origine, on aura les relations

$$\begin{aligned} L &= L' - y_0 Z + z_0 Y, \\ M &= M' - z_0 X + x_0 Z, \\ N &= N' - x_0 Y + y_0 X.* \end{aligned}$$

Une rotation des axes autour de l'origine des coordonnées fait subir aux six coordonnées les mêmes transformations qu'aux coordonnées d'un point. Le renversement des axes change le signe de X, Y, Z , mais ne modifie pas L, M, N . Le seul invariant est

$$X^2 + Y^2 + Z^2;$$

l'invariant $XL + YM + ZN$ est ici nul. Ces propriétés sont *caractéristiques* des vecteurs glissants.

Les rapports des six coordonnées d'un vecteur glissant déterminent la droite qui porte le vecteur; à ce point de vue ces six nombres, ou des nombres proportionnels, ont été désignés depuis *J. Plücker*⁴⁸⁾ et *A. Cayley*⁴⁹⁾ sous le nom de *coordonnées de la droite*.

Six nombres X, Y, Z, L, M, N tels que

$$XL + YM + ZN = 0$$

peuvent toujours être considérés comme les coordonnées d'une droite; les trois premiers sont proportionnels aux cosinus directeurs de la droite, les trois derniers aux cosinus directeurs du moment d'un vecteur quelconque porté par la droite par rapport à l'origine des coordonnées.

21. Addition des vecteurs glissants, concourants ou parallèles. Couples de Poinso. Si les droites l et l' qui portent deux vecteurs glissants se coupent à distance finie ou infinie, les coordonnées X, Y, Z, L, M, N et X', Y', Z', L', M', N' de ces deux vecteurs satisfont à la relation suivante, qui exprime que le moment relatif des deux vecteurs est nul,

$$XL' + YM' + ZN' + X'L + Y'M + Z'N = 0.$$

48) Proc. R. Soc. London 14 (1865), p. 53; Philos. Trans. London 155 (1865), p. 725; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, en partic. p. 525/41. Voir surtout *J. Plücker*, Neue Geometrie des Raumes, Leipzig 1869, p. 1 [1868]. L'idée des coordonnées de la droite se trouve, dès 1846, dans son System der Geometrie des Raumes, Düsseldorf 1846.

49) Quart. J. pure appl. math. 3 (1860), p. 225; 5 (1862), p. 81; Papers 4, Cambridge 1891, p. 446, 490.

On peut alors considérer les sommes des coordonnées correspondantes $X + X'$, $Y + Y'$, ... comme les six coordonnées d'un vecteur glissant et ce segment peut être considéré comme la *somme géométrique* des deux premiers. La droite qui porte ce nouveau segment passe par le point de concours P des droites l et l' et est située dans leur plan. Comme on peut donner aux deux segments la même origine P , on pourra les désigner par la notation PQ , PQ' ; leur somme sera désignée par PQ'' ; P , Q , Q'' , Q' seront les sommets d'un parallélogramme. Le vecteur glissant ainsi construit s'appelle la *résultante* des deux vecteurs donnés. On remarque immédiatement l'analogie avec la composition des vecteurs libres. Des vecteurs glissants concourants en nombre quelconque se composent en un vecteur glissant unique appelé *résultante* de ces vecteurs.

Lorsque les droites l_1 et l_2 qui portent deux vecteurs glissants P_1Q_1 et P_2Q_2 sont *parallèles*, on peut assimiler ces vecteurs à des segments affectés de signes: leur *somme* est un vecteur glissant PQ porté par une droite parallèle à l_1 et l_2 , située dans leur plan et qui partage leur distance en raison inverse des segments P_1Q_1 et P_2Q_2 pris avec leurs signes. Le sens du vecteur PQ est celui du plus long des vecteurs donnés. Il y a un cas d'exception: c'est celui où les vecteurs glissants donnés sont égaux en longueur et de sens contraires. Le vecteur résultant est alors rejeté à l'infini tandis que sa longueur est nulle. Il cesse donc d'être susceptible d'une représentation visible et l'on doit conserver la figure composée des deux vecteurs.

Nous appellerons l'ensemble de ces deux vecteurs, en considération de son rôle en statique, un *couple de Poinsot*⁵⁰⁾ ou simplement un *couple*. Nous l'étudierons plus loin [n^{os} 22 et 23].

En résumé, la somme d'un nombre quelconque de vecteurs glissants concourant en un point O est toujours un vecteur glissant qui concourt au même point O ; la longueur de ce vecteur peut d'ailleurs être nulle.

La somme d'un nombre quelconque de vecteurs parallèles est un vecteur parallèle aux premiers à moins qu'on ne se trouve dans le cas du couple: dans ce cas, soient X , Y , Z les sommes des projections sur les axes coordonnés des vecteurs dirigés dans un certain sens, X' , Y' , Z' celles qui correspondent aux vecteurs dirigés en sens contraire; on aura les conditions

$$X' = -X, \quad Y' = -Y, \quad Z' = -Z.$$

50) L. Poinsot, *Éléments de statique*, (1^{re} éd.) Paris an XII, p. 43.

E. Study [Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, p. 25] dit *Stäbepaar* pour *couple de Poinsot*.

22. Systèmes de vecteurs⁵¹). **Résultante de translation et moment résultant.** Considérons maintenant un nombre quelconque de vecteurs $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ appliqués aux points A_1, A_2, \dots, A_n , et soit O un point quelconque de l'espace.

On appelle *résultante générale* du système de vecteurs envisagés, ou *résultante de translation* de ce système de vecteurs, la somme géométrique des vecteurs OA_1, OA_2, \dots, OA_n équipollents à $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, menés par O . La résultante de translation est donc un vecteur libre.

On appelle *moment résultant* du système, *par rapport au point* O , la somme géométrique des moments des divers vecteurs \vec{F}_k par rapport au point O .

Soient X_k, Y_k, Z_k les projections de \vec{F}_k sur les axes coordonnés, dont nous supposons l'origine au point O , et soient L_k, M_k, N_k les moments de \vec{F}_k par rapport à ces trois axes.

Les projections de la résultante de translation \vec{R} auront pour expressions

$$X = \sum X_k, \quad Y = \sum Y_k, \quad Z = \sum Z_k;$$

celles du moment résultant relatif au point O seront

$$L = \sum L_k, \quad M = \sum M_k, \quad N = \sum N_k.$$

On appelle

$$X, Y, Z, L, M, N$$

les *coordonnées* du système de vecteurs.

La longueur R de la résultante générale est donnée par la formule

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2};$$

51) Dans son article allemand sur les fondements de la géométrie [Encyklopädie der math. Wiss. IV 2, p. 135] *H. E. Timerding* emploie le mot *Liniensummen* (somme de droites). Dans l'article français il a semblé préférable de ne pas donner au mot „somme“ cette extension et de s'en tenir au langage courant en France [Voir par ex. *P. Appell*, *Traité de mécanique rationnelle*, (3^e éd.) 1, Paris 1909, p. 17].

D'ailleurs, même en Allemagne, l'accord est loin d'être fait sur la nécessité de cette extension. Conformément au point de vue du texte français, *W. Schell* [Theorie der Bewegung und der Kräfte, Leipzig 1879/80] et *Otto Mohr*, dans de nombreux mémoires [parus pour la plupart dans le „Civilingenieur“ et réunis ensuite dans un volume intitulé: *Abh. techn. Mechanik* ⁹⁾] disent *Streckensystem*; *E. Budde* [Mechanik 2, Berlin 1891, p. 611] dit *Vektorensystem*, et ces deux mots se traduisent exactement par „système de vecteurs“. Au contraire, et dans l'ordre d'idées adopté dans le texte allemand par *H. E. Timerding*, le même auteur *E. Budde* [Mechanik 2, p. 568] dit aussi *heteraptische Summe* (somme hétérogène), et *E. Study* [Geometrie der Dynamen 1, Leipzig 1903, p. 25] dit *Stäbesumme* (somme de bâtons).

celle du moment résultant \vec{G} par

$$G = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}.$$

Par rapport à un autre point O' de l'espace, dont les coordonnées sont x', y', z' , le moment du vecteur \vec{F}_k a pour composantes

$$\begin{aligned} L'_k &= L_k - (y' Z_k - z' Y_k), & M'_k &= M_k - (z' X_k - x' Z_k), \\ N'_k &= N_k - (x' Y_k - y' X_k), \end{aligned}$$

et le moment résultant du système

$$L' = L - (y' Z - z' Y), \quad M' = M - (z' X - x' Z), \quad N' = N - (x' Y - y' X).$$

Ces formules montrent que le moment résultant \vec{G}' du système, par rapport à un point O' , est équipollent à la somme géométrique du moment résultant \vec{G} , par rapport à O , et du moment, par rapport à O' , de la résultante de translation \vec{R} du système appliquée au point O .

Elles montrent encore que l'expression

$$LX + MY + NZ = RG \cos(\mathbf{R}, \mathbf{G})$$

est indépendante du point O : c'est un invariant orthogonal du système de vecteurs.

Appliquons enfin ces formules à un couple. La résultante de translation d'un tel système étant nulle, un couple a même moment résultant par rapport à tout point O de l'espace. Ce moment résultant est, par suite, un vecteur libre: on l'appelle aussi le *moment vectoriel* ou plus simplement, le *moment* du couple. Pour le construire, on peut supposer que le point O appartient à l'un des vecteurs du couple; on voit alors immédiatement que le moment d'un couple est un vecteur dont la longueur est égale à la valeur absolue de l'aire du parallélogramme $ABA'B'$ formé par les deux vecteurs $AB, A'B'$ du couple et qui est dirigé perpendiculairement au plan du couple dans un sens tel que le moment pris pour un point intérieur à $ABA'B'$ soit direct par rapport à chacun des vecteurs du couple. Plus brièvement, le moment d'un couple est le vecteur qui correspond par la construction du n° 11 au couple envisagé comme cycle (le sens de parcours du parallélogramme $ABA'B'$ étant celui des vecteurs du couple).

On appelle *composantes* d'un couple les composantes L, M, N de son moment. D'après ce qui précède elles se comportent dans les transformations de coordonnées comme les composantes d'un vecteur axial.

On appelle *bras de levier* d'un couple la distance de ses deux vecteurs. Le moment d'un couple a donc pour valeur absolue le produit d'un des vecteurs du couple par son bras de levier.

On appelle quelquefois *axe* d'un couple ce que nous avons désigné sous le nom de moment de ce couple. Il semble préférable de réserver ce nom au véritable *axe* formé par une demi-droite quelconque normale au plan du couple dans le sens du moment du couple.

Revenant au cas général d'un système quelconque de vecteurs, on appelle *moment résultant*⁵³⁾ d'un système de vecteurs par rapport à un axe la projection sur cet axe du moment résultant du système par rapport à un point quelconque P pris sur cet axe. Ce moment est indépendant du choix du point P sur la droite envisagée. C'est aussi la somme algébrique des moments des vecteurs du système par rapport à cet axe.

C'est ce qu'expriment, pour les trois axes coordonnés, les égalités

$$L = \Sigma L_x, \quad M = \Sigma M_x, \quad N = \Sigma N_x$$

citées plus haut.

Les points pour lesquels le moment résultant a la même direction que la résultante de translation sont sur une ligne droite qu'on appelle *axe central*⁵⁴⁾ du système. Le moment résultant \vec{G} est minimisé pour les points de cet axe.

Si l'on prend les moments d'un système par rapport à tous les axes qui concourent en un point M , ceux de ces axes qui donnent un même moment forment un cône de révolution autour de l'axe MU sur lequel est situé le moment relatif au point M . Par rapport à l'axe MU le moment est maximisé.

Les axes de l'espace pour lesquels le moment a la même valeur forment un complexe du second ordre.

23. Systèmes équivalents. Réduction d'un système à une force et à un couple. *On dit que deux systèmes de vecteurs (S) et (S') sont *équivalents* s'ils ont par rapport à un point O donné de l'espace même résultante de translation et même moment résultant. Il résulte des formules relatives au changement d'origine données au n° 19 que les moments résultants des deux systèmes équivalents sont alors les mêmes par rapport à un point O quelconque de l'espace. Il suffit donc d'exprimer les conditions d'équivalence par rapport à l'origine des coordonnées.

Soient X, Y, Z, L, M, N les coordonnées du système (S) et X', Y', Z', L', M', N' celles du second système (S'); l'équivalence des deux

53) C'est ce que *A. L. Cauchy* [Exercices math. 1, Paris 1826, p. 121; Œuvres (2) 6, Paris 1887, p. 153] appelle le *moment linéaire principal*.

54) *L. Poinsot*, J. Ec. polyt. (1) cah. 13 (1806), p. 182.

systèmes se traduira par les six conditions nécessaires et suffisantes

$$\begin{aligned} X &= X', & Y &= Y', & Z &= Z', \\ L &= L', & M &= M', & N &= N'. \end{aligned}$$

Par exemple, deux couples de même moment sont équivalents. En d'autres termes, tous les couples situés dans des plans parallèles, tels que le produit d'un vecteur par le bras de levier ait la même valeur et pour lesquels le sens de parcours du parallélogramme construit sur les deux vecteurs est le même sont équivalents.

On voit donc que, au point de vue de l'équivalence, on peut remplacer un couple quelconque A par un autre A' ayant un bras de levier donné dans un plan Π parallèle au plan du premier couple. Le support de l'un des vecteurs de A' peut être pris arbitrairement dans le plan Π ; les vecteurs glissants qui forment A' sont alors complètement déterminés.

La théorie de l'équivalence et de la composition des couples a été établie directement et pour la première fois par *L. Poinsot* à l'aide d'une méthode purement géométrique; il en a déduit la réduction d'un système quelconque à un vecteur et à un couple. Cette réduction est une conséquence immédiate de la notion d'équivalence telle que nous l'avons donnée plus haut.

Considérons, en effet, un couple A dont le moment \vec{G} ait pour projections sur les axes les coordonnées L, M, N du système (S) ; le système formé par ce couple et par la résultante de translation \vec{R} du système (S) appliquée en O est évidemment équivalent au système (S) . Le couple A a pour moment le moment résultant du système (S) par rapport à l'origine; on l'appelle pour cette raison le *couple résultant du système relatif au point O* .*

Lorsqu'un système (S) est remplacé par un système équivalent formé d'un vecteur et d'un couple, on dit que le système est *réduit* à ce vecteur et à ce couple.

En ce qui concerne le couple, la réduction dépend du point O par rapport auquel on fait la réduction; si en effet ce point O change, le couple change, tandis que le vecteur unique, c'est-à-dire la résultante générale, n'est pas changée. Toutefois la projection du moment du couple sur la direction de la résultante générale reste invariante. C'est ce que nous avons dit en d'autres termes à la fin du n° 22. On peut aussi dire que le produit scalaire du moment résultant en un point et de la résultante générale est constant.

Trois cas particuliers intéressants sont à signaler:

1°) *La résultante générale est nulle.* Dans ce cas le système (S)

est équivalent à un couple; le couple résultant a le même moment pour tous les points de l'espace. Conditions:

$$X = 0, Y = 0, Z = 0 \text{ avec } L^2 + M^2 + N^2 > 0.$$

2°) *Le moment résultant minimisé est nul sans que la résultante générale le soit*, ou, ce qui revient au même, le moment du couple en un point est perpendiculaire à la résultante générale. Dans ce cas, le système de vecteurs (S) est équivalent à un vecteur unique. Conditions:

$$LX + MY + NZ = 0 \text{ avec } X^2 + Y^2 + Z^2 > 0.$$

3°) La résultante générale et le moment résultant par rapport à l'origine des coordonnées sont nuls l'un et l'autre. Le système (S) est équivalent à zéro, le zéro exprimant l'absence de tout vecteur. Conditions: $X = 0, Y = 0, Z = 0, L = 0, M = 0, N = 0$, ou, en remplaçant ces coordonnées par leurs valeurs [n° 22],

$$\begin{aligned} \sum X_k &= 0, & \sum Y_k &= 0, & \sum Z_k &= 0, \\ \sum L_k &= 0, & \sum M_k &= 0, & \sum N_k &= 0. \end{aligned}$$

24. Composition des couples. Soient A et A' deux couples donnés, \vec{G} et \vec{G}' leurs moments; on commence par leur donner un même bras de levier [n° 20] situé sur l'intersection de leurs plans. Il est alors facile de voir que leur ensemble est équivalent à un couple unique dont l'axe \vec{G}'' est la diagonale du parallélogramme qui a pour côtés \vec{G} et \vec{G}' ⁵⁵). La composition des couples est ainsi ramenée à celle des vecteurs libres: un système de couples en nombre quelconque est toujours équivalent à un couple unique dont le moment est la somme géométrique des moments des couples donnés.

25. Système de deux vecteurs équivalent à un système de vecteurs donné. Soit A le couple résultant relatif au point O d'un système de vecteurs donnés (S); envisageons deux vecteurs \vec{V}' et \vec{V} , dont le premier \vec{V}' soit appliqué en O , et qui forment ce couple A . Soit enfin \vec{R} la résultante de translation de (S) dont nous supposons l'origine au point O .

Les deux vecteurs \vec{R} et OV' se composent en un vecteur OU , et le système des deux vecteurs OU et O_1V , ou plus brièvement le système (\vec{U}, \vec{V}) , est équivalent au système donné (S). Le couple n'étant défini que par son moment peut être représenté

55) *L. Poinsot, Éléments de statique, Paris an XII, p. 60.*

par une infinité de systèmes de vecteurs tels que \vec{V}' , \vec{V} . De plus l'origine O des moments dans l'espace est arbitraire. Il y a donc une grande indétermination dans le nombre des systèmes de deux vecteurs \vec{U} , \vec{V} équivalents à un système (S) donné: comme il faut, pour déterminer un vecteur \vec{U} , six coordonnées X, Y, Z, L, M, N liées par une relation $LX + MY + NZ = 0$, nous aurons, entre les douze coordonnées des deux vecteurs \vec{U} et \vec{V} , outre la relation précédente et celle, analogue, qui concerne le second vecteur \vec{V} , les six équations qui expriment que le système (\vec{U}, \vec{V}) est équivalent au système (S) , soit en tout huit équations entre douze inconnues: il reste quatre arbitraires.

C'est ainsi [cf. n° 24] que l'on peut fixer arbitrairement l'axe de l'un des deux vecteurs; le sens et la longueur de ce vecteur ainsi que l'autre vecteur seront alors entièrement déterminés.

Ces systèmes de deux vecteurs jouissent de nombreuses propriétés sur lesquelles nous reviendrons plus loin.

Bornons-nous ici à observer que le système de deux vecteurs est équivalent à un vecteur unique si le moment relatif des deux vecteurs qui le composent est nul sans que leur résultante de translation le soit, et qu'il est équivalent à un couple si la résultante de translation de ces deux vecteurs est nulle, c'est-à-dire si ces deux vecteurs sont égaux, parallèles et de sens contraires.

26. Visseurs. On a vu, par ce qui précède, que tous les systèmes de deux vecteurs glissants qui ont par rapport à un point de l'espace même moment résultant et même résultante générale sont équivalents. Si l'on porte son attention spécialement sur le moment résultant \vec{G} et sur la résultante générale \vec{R} , on aperçoit une autre manière de caractériser tous les systèmes de vecteurs équivalents à un système donné. Bornons-nous ici au cas où les vecteurs du système sont polaires. On peut alors caractériser ce système en se donnant un vecteur polaire libre \vec{R} qui sera la résultante générale et un vecteur axial \vec{G} lié à un point O , qui sera le moment résultant par rapport à ce point O . On désignera l'ensemble de ces deux données sous le nom de *bivecteur* et on le représentera par le symbole [cf. n° 36]

$$\vec{R} + \vec{G},$$

que l'on énonce *le bivecteur* R, G .

Les six coordonnées d'un bivecteur sont celles X, Y, Z de la

résultante générale et celles L, M, N du moment résultant par rapport à trois axes coordonnés ayant pour origine le point O .

Parmi tous ces bivecteurs équivalents à un système de vecteurs donné, il en est un et un seul dont les deux éléments, qui sont des vecteurs glissants, sont portés par la même droite; ce bivecteur est appelé *visseur*. Son support est l'*axe central*⁵⁶⁾ [n° 22].

On est ainsi arrivé à un procédé bien simple pour représenter un ensemble de systèmes de vecteurs polaires glissants équivalents. Le visseur en est l'expression la plus réduite.

Lorsque le système de vecteurs envisagé est un système de vecteurs axiaux on voit de même que ce système est équivalent à un bivecteur

$$\hat{R} + \vec{G}$$

Ce cas sera étudié de plus près au n° 50 dans la théorie des *vis de Ball*.

Pour un système de vecteurs polaires, soit G_1 la *valeur algébrique* du moment résultant par rapport à un point de l'axe central estimée positivement dans le sens du vecteur \vec{R} ; posons $k = \frac{G_1}{R}$. Il est évident que, si X, Y, Z sont les projections de \vec{R} sur les axes de coordonnées, celles de \vec{G}_1 seront kX, kY, kZ . En remplaçant R et G_1 par leurs valeurs, on a l'égalité

$$(1) \quad k = \frac{LX + MY + NZ}{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Les équations de l'axe central par rapport à des axes de coordonnées quelconques se trouvent sans peine; il suffit d'écrire que le moment résultant \vec{G} en un point (x, y, z) a la même direction que la résultante générale, ce qui donne

$$(2) \quad \frac{L - yZ + zY}{X} = \frac{M - zX + xZ}{Y} = \frac{N - xY + yX}{Z}.$$

La valeur commune de ces rapports est k . Les équations (1) et (2) déterminent le visseur correspondant au système donné de vecteurs. Géométriquement, on obtient aisément la construction de l'axe central lorsqu'on connaît la résultante générale \vec{R} et le moment résultant \vec{G} par rapport à un point O donné. Soient OR et OG les vecteurs représentatifs de ces deux grandeurs: abaissons (fig. 6) du point G la perpendiculaire GH sur OR . Sur la perpendiculaire au plan OGH menée par le point O , prenons un point O' tel que le moment de la résultante R par rapport à ce point O' soit représenté en gran-

56) Cf. *L. Poinsot*, J. Ec. polyt. (1) cah. 13 (1806), p. 182.

deur, direction et sens par GH . Le point O' sera un point de l'axe central $O'U$.

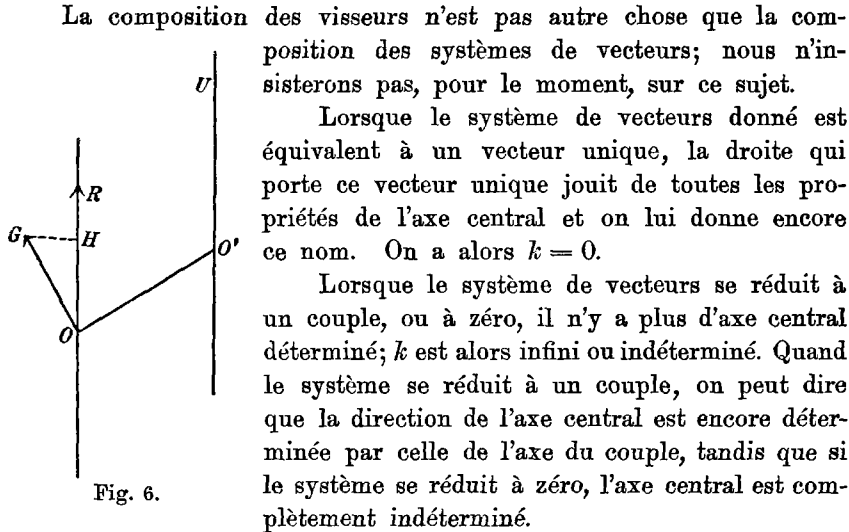


Fig. 6.

La composition des visseurs n'est pas autre chose que la composition des systèmes de vecteurs; nous n'insisterons pas, pour le moment, sur ce sujet.

Lorsque le système de vecteurs donné est équivalent à un vecteur unique, la droite qui porte ce vecteur unique jouit de toutes les propriétés de l'axe central et on lui donne encore ce nom. On a alors $k = 0$.

Lorsque le système de vecteurs se réduit à un couple, ou à zéro, il n'y a plus d'axe central déterminé; k est alors infini ou indéterminé. Quand le système se réduit à un couple, on peut dire que la direction de l'axe central est encore déterminée par celle de l'axe du couple, tandis que si le système se réduit à zéro, l'axe central est complètement indéterminé.

27. Distribution dans l'espace des systèmes de deux vecteurs équivalents à un système donné. Droites de moment nul. Nous supposons essentiellement que le système (S) de vecteurs donnés n'est réductible ni à une force unique, ni à un couple unique. Nous désignerons par \vec{U} et \vec{V} deux quelconques des vecteurs glissants dont le système peut remplacer le système (S) .

Cela posé, il est facile de démontrer qu'une droite quelconque (D) de l'espace peut toujours être prise pour support d'un des deux vecteurs \vec{U} , pourvu que le moment résultant du système (S) par rapport à (D) ne soit pas nul. Le problème est déterminé et admet toujours une solution et une seule, c'est-à-dire qu'étant donné le support de \vec{U} on peut trouver la longueur et le sens de \vec{U} ainsi que la position et la longueur de \vec{V} . On appelle *droites de moment nul* les droites par rapport auxquelles le moment résultant de (S) est nul: toutes les droites qui rencontrent les deux vecteurs \vec{U} et \vec{V} sont évidemment des droites de moment nul. Réciproquement toutes les droites (D) de moment nul rencontrent une infinité de systèmes de deux droites \vec{U} et \vec{V} : en effet, une telle droite (D) est, en chacun de ses points O , perpendiculaire au moment résultant du système (S) relatif à ce point O , c'est-à-dire que (D) se trouve dans le plan du couple résultant relatif au point O . Soient \vec{U} un des vecteurs de ce couple

ayant son origine en O , \vec{V} l'autre vecteur du couple; en composant \vec{U} avec la résultante de translation \vec{R} qui a son origine en O , on obtient un vecteur \vec{U} qui, avec \vec{V} , forme un système de deux vecteurs équivalent à (S) , et les supports de ces deux vecteurs sont rencontrés par (D) .

Toutes les droites de moment nul qui passent en un point O sont dans un même plan, celui du couple résultant relatif au point O . Le complexe des droites de moment nul est donc un complexe linéaire [cf. n° 26]; on appelle souvent ce complexe *le complexe de Chasles*. *Il a cependant été signalé avant *M. Chasles* par *G. Giorgini*⁵⁷⁾; *A. F. Möbius* l'appelle *Nullsystem*.

Soient X, Y, Z, L, M, N les coordonnées du système donné; x, y, z, l, m, n celles d'une droite (D) . La condition pour que (D) soit de moment nul s'écrit

$$lX + mY + nZ + Lx + My + Nz = 0.$$

Revenons aux systèmes (\vec{U}, \vec{V}) . *M. Chasles* a démontré à leur sujet deux théorèmes:

Théorème 1. Le volume du tétraèdre construit sur les deux vecteurs est constant quels que soient les deux vecteurs dont le système est équivalent au système donné⁵⁸⁾.

Théorème 2. Soit (d) la perpendiculaire commune aux supports (U) et (V) de deux vecteurs correspondants \vec{U} et \vec{V} ; cette perpendiculaire commune rencontre l'axe central et le rencontre à angle droit. Fixons l'axe des x sur cette perpendiculaire commune et fixons l'axe des z sur l'axe central compté positivement dans le sens de \vec{R} : l'axe Oy sera perpendiculaire aux deux premiers de manière à former un trièdre direct. Soient A et B les pieds de (d) sur (U) et sur (V) . Appelons δ_1 et δ_2 les abscisses des points A et B , φ_1 et φ_2 les angles que font avec l'axe central Oz les demi-droites parallèles aux vecteurs \vec{U} et \vec{V} dans le plan orienté Oyz .

En exprimant que la résultante générale du système (\vec{U}, \vec{V}) est parallèle à Oz , c'est-à-dire que la somme des projections des deux

57) *Sopra alcune proprietà de' piani de' momenti principali e delle coppie di forze equivalenti [Mem. mat. fis. Soc. ital. delle scienze (1) 20 (1828), math. p. 243/54 [décembre 1827]] (Texte et note de *G. Loria*)*.

58) Ce théorème a été publié par *J. D. Gergonne*, Ann. math. pures appl. 18 (1827/8), p. 372.

Voir aussi à ce sujet *A. F. Möbius* [J. reine angew. Math. 4 (1829), p. 179; Werke 3, Leipzig 1886, p. 499].

vecteurs sur Oy est nul, on a une première relation

$$(1) \quad U \sin \varphi_1 + V \sin \varphi_2 = 0.$$

Le moment résultant par rapport à O doit être dirigé suivant Oz ; or il est la somme géométrique des moments de \vec{U} et de \vec{V} qui font respectivement avec Oz les angles $\frac{\pi}{2} - \varphi_1$ et $\frac{\pi}{2} - \varphi_2$; d'où la deuxième relation⁵⁹⁾

$$(2) \quad U \delta_1 \cos \varphi_1 + V \delta_2 \cos \varphi_2 = 0.$$

En éliminant U et V entre ces deux équations, on obtient un théorème dû à *M. Chasles* et qui s'exprime par la relation

$$(3) \quad \delta_1 \operatorname{tang} \varphi_2 = \delta_2 \operatorname{tang} \varphi_1 = -k.$$

La valeur commune de ces deux expressions est égale au paramètre k changé de signe, comme on le verrait aisément en exprimant que la résultante générale et le moment résultant par rapport à l'origine, dirigés l'un et l'autre suivant Oz et estimés positivement suivant Oz , ont pour valeurs respectives les quantités données R et G_1 . Les équations (1), (2) et (3) jointes à $U \cos \varphi_2 = R$ permettent, lorsqu'on connaît le support de \vec{U} , c'est-à-dire δ_1 et φ_1 , de trouver δ_2 , φ_2 , U et V . C'est la solution du problème énoncé au commencement du numéro.

28. Moment relatif de deux systèmes de vecteurs. Soient (S) et (S') deux systèmes de vecteurs glissants et

$$X, Y, Z, L, M, N; \quad X', Y', Z', L', M', N'$$

leurs coordonnées. L'expression

$$XL + YM' + ZN' + X'L + Y'M + Z'N$$

est un invariant simultané des deux systèmes. On l'appelle le *moment relatif* des deux systèmes. Si $(P_1 Q_1, P_2 Q_2)$ est un quelconque des systèmes de deux vecteurs équivalents au système (S) et $(P_1' Q_1', P_2' Q_2')$ un quelconque des systèmes de deux vecteurs équivalents au système (S') , le moment relatif des deux systèmes (S) et (S') est égal⁶⁰⁾ au sextuple de la somme des volumes des quatre tétraèdres (chaque volume étant pris avec son signe)

$$[P_1 Q_1, P_1' Q_1'] + [P_1 Q_1, P_2' Q_2'] + [P_2 Q_2, P_1' Q_1'] + [P_2 Q_2, P_2' Q_2'].$$

⁵⁹⁾ Il est bien clair qu'il faudrait augmenter ces angles de π si δ_1 et δ_2 étaient négatifs.

⁶⁰⁾ Cf. *G. Battaglini*, Rendic. Accad. Napoli (1) 8 (1869), p. 87/97.

Le théorème d'après lequel la valeur de cette somme est toujours la même, quels que soient le système $(P_1 Q_1, P_2 Q_2)$ de deux vecteurs équivalent au système (S) , et le système $(P_1' Q_1', P_2' Q_2')$ de deux vecteurs équivalent au système (S') que l'on choisisse, résulte de ce que l'invariant en question peut s'écrire

$$(X + X')(L + L') + (Y + Y')(M + M') + (Z + Z')(N + N') \\ - (XL + YM + ZN) - (X'L' + Y'M' + Z'N');$$

or la première ligne de cette expression est un invariant du système de vecteurs formés par l'ensemble des deux systèmes donnés (S) et (S') tandis que le premier terme de la seconde ligne est un invariant de (S) et le second, un invariant de (S') .

On peut encore donner une autre expression du moment relatif des deux systèmes, qui mettra mieux en lumière son caractère d'invariance. Soient \vec{R} et \vec{R}' les résultantes générales des deux systèmes, δ et α la plus courte distance et l'angle des axes centraux, enfin k et k' les paramètres; le moment relatif a pour expression

$$RR'[(k + k') \cos \alpha \pm \delta \sin \alpha];$$

on prendra le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que le tétraèdre construit sur \vec{R} et \vec{R}' sera positif ou négatif.

Soient enfin $A_i B_i$ un vecteur quelconque du système (S) et $A_j B_j'$ un vecteur quelconque du système (S') ; le moment relatif des deux systèmes est encore le sextuple de la somme des volumes, pris avec leurs signes, des tétraèdres qui ont pour arêtes opposées un quelconque des vecteurs $A_i B_i$ et un quelconque des vecteurs $A_j B_j'$.

Si le moment relatif des deux systèmes est nul, on dit⁶¹⁾ que ces systèmes sont en *involution*⁶²⁾; la condition pour qu'il en soit ainsi est

$$(1) \quad (k + k') \cos \alpha \pm \delta \sin \alpha = 0.$$

On peut encore supposer les deux systèmes confondus; le moment relatif du système par rapport à lui-même, ce qu'on peut appeler *l'automoment* du système, a pour expression

$$2(LX + MY + NZ).$$

Si l'un des systèmes de vecteurs glissants est équivalent à un vecteur unique $P_1 Q_1$, les quatre tétraèdres du cas général se réduisent

61) D'après *F. Klein*, *Math. Ann.* 2 (1870), p. 201.

62) Voir aussi *R. S. Ball*, *The theory of screws*, (1^{re} éd.) Dublin 1876; (2^e éd.) *A treatise on the theory of screws*, Cambridge 1900, p. 26; *R. S. Ball* appelle *reciprocal (réciproques)* deux visseurs entre lesquels existe la relation (1).

à deux. Si la longueur de ce vecteur unique $P_1 Q_1$ est égale à 1, l'invariant envisagé, représenté par la somme

$$[P_1 Q_1, P_1' Q_1'] + [P_1 Q_1, P_2' Q_2']$$

des volumes des deux tétraèdres ayant pour arêtes opposées l'un $P_1 Q_1$ et $P_1' Q_1'$, l'autre $P_1 Q_1$ et $P_2' Q_2'$, se réduit au *moment du système de vecteurs glissants* (S') par rapport à l'axe (d) qui porte le vecteur-unitaire $P_1 Q_1$. Ce moment a aussi pour expression

$$\sum_{(i)} R_i \delta_i \sin \varphi_i,$$

où R_i est la longueur d'un quelconque des vecteurs du système (S'), φ_i l'angle que fait sa direction avec (d) et δ_i sa plus courte distance à (d); la somme est étendue à tous les vecteurs du système (S').

29. Des complexes linéaires. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ les coordonnées pluckériennes d'une droite AB (α, β, γ étant proportionnelles aux cosinus directeurs de la droite). Nous avons vu qu'il existe entre ces coordonnées l'identité

$$(1) \quad \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0.$$

S'il existe en outre entre ces coordonnées une relation linéaire et homogène telle que

$$(2) \quad a\alpha' + b\beta' + c\gamma' + a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = 0,$$

on dit que la droite fait partie d'un *complexe linéaire*. Les équations d'une droite du complexe

$$(3) \quad \begin{aligned} \beta z - \gamma y &= \alpha', \\ \gamma x - \alpha z &= \beta', \end{aligned}$$

d'où résulte immédiatement

$$\alpha y - \beta x = \gamma',$$

ne contiennent que trois paramètres. On peut, en effet, à l'aide des relations (1) et (2) exprimer β' par exemple au moyen de $\alpha', \alpha, \beta, \gamma$; les équations de la droite ne dépendent alors que de

$$\frac{\alpha}{\alpha'}, \frac{\beta}{\alpha'}, \frac{\gamma}{\alpha'}.$$

Si l'on assujettit la droite AB à passer par un point $P(x_0, y_0, z_0)$, elle décrira un cône qu'on appelle en général le cône du complexe et qui, dans le cas du complexe linéaire, dégénère en un plan qu'on appelle le *plan du complexe*. Son équation, qu'on obtient aisément, s'écrit

$$\begin{aligned} (a' + cy_0 - bz_0)(x - x_0) + (b' + az_0 - cx_0)(y - y_0) \\ + (c' + bx_0 - ay_0)(z - z_0) = 0. \end{aligned}$$

Si ce plan passe par une droite fixe quel que soit le point P , le complexe est dit *spécial*; la condition pour qu'il en soit ainsi est

$$(4) \quad aa' + bb' + cc' = 0;$$

le complexe est alors formé par l'ensemble des droites qui rencontrent la droite fixe.

Les considérations développées dans les numéros précédents fournissent une interprétation très simple de ces résultats ainsi que de ceux qui suivront.

Considérons $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ comme les coordonnées d'un vecteur glissant, que nous désignerons encore par AB , et a, b, c, a', b', c' comme les coordonnées d'un système quelconque (S) de vecteurs glissants. L'équation (2) exprime que la droite AB est de moment nul par rapport au système (S). La relation (4) est la condition nécessaire et suffisante pour que le système (S) se réduise à un vecteur unique; dans ce cas, l'équation (2) exprime que le support de ce vecteur unique rencontre AB .

Le fait que le plan du complexe peut être considéré comme un lieu de droites de moment nul a amené *A. F. Möbius* à l'appeler *le plan nul du point P*. Réciproquement, *A. F. Möbius* dit que P est *le point nul du plan*: ce point jouit de la propriété d'être situé sur toutes les droites de moment nul qui sont contenues dans le plan. Ainsi, à tout point P correspond un plan nul; à tout plan Π correspond un point nul.

Au lieu de „plan nul“ et de „point nul“, *M. Chasles* et, après lui, *A. Mannheim* ainsi que la plupart des auteurs français ont adopté les locutions de *plan focal du point P* et de *foyer P du plan II*. On emploie aussi quelquefois les expressions *pôle* et *plan polaire*⁶³).

Si un point P parcourt une droite (d), son plan focal tourne autour d'une autre droite (d'); si P parcourt la droite (d'), son plan

63) Dans la réduction d'un système de forces à deux forces dont les directions soient perpendiculaires entre elles, *G. Monge* [Traité élémentaire de statique, (1^{re} éd.) Paris 1786; (8^e éd.) Paris 1846, p. 43] donne pour la construction du foyer d'un plan le procédé suivant: qu'on prenne les points d'application de toutes les forces dans un même plan Π et qu'on décompose ces forces en deux, l'une normale au plan, l'autre située dans le plan; les composantes normales au plan ont une résultante dont le pied P est parfaitement déterminé quand le plan Π l'est. Ce point P est le foyer du plan. *E. Carvallo* [Nouv. Ann. math. (3) 12 (1893), p. 454] a retrouvé cette construction: son énoncé ne diffère pas au fond du précédent.

focal tourne autour de (\bar{d}) ; c'est pourquoi on dit que (\bar{d}) et (\bar{d}') sont deux droites conjuguées dans le complexe de Chasles. Sur deux droites conjuguées on peut toujours déterminer deux vecteurs formant un système équivalent au système donné, et inversement si le système $(PQ, P'Q')$ est équivalent à un système de vecteurs donnés, les supports de PQ et de $P'Q'$ sont deux droites conjuguées du complexe de Chasles du système de vecteurs donnés.

De même, si un plan tourne autour d'une de ses droites (\bar{d}) , son foyer décrit la droite conjuguée (\bar{d}') .

En particulier, si la droite (\bar{d}) est rejetée à l'infini c'est-à-dire si le plan Π se déplace parallèlement à lui-même, le lieu des foyers de ce plan est une droite (\bar{d}') dont la direction reste la même, quelle que soit la direction du plan Π . Corrélativement, la droite conjuguée de toute droite parallèle à (\bar{d}) est à l'infini.

Parmi toutes ces parallèles, il en est une remarquable: c'est le lieu des foyers des plans qui leur sont perpendiculaires: on l'appelle *l'axe central du complexe*. C'est aussi l'axe central du système de vecteurs auquel correspond le complexe envisagé; les droites parallèles dont il vient d'être question sont les droites qui portent les vecteurs qu'on a appelés „résultantes générales“. Ainsi la conjuguée (\bar{d}) d'une résultante générale est à l'infini; elle supporte un vecteur infiniment petit. On comprend ainsi à nouveau comment un couple a pu quelquefois être considéré comme un vecteur infiniment petit rejeté à l'infini⁶⁴⁾.*

30. Distribution hélicoïdale des plans du complexe et des moments résultants. A chaque plan du complexe correspond un moment résultant qui lui est perpendiculaire et dont l'origine est au foyer du plan. Étudier la distribution des plans focaux revient donc à étudier celle des moments résultants. Or le torseur est absolument symétrique par rapport à l'axe central, et le système de plans focaux n'est aucunement modifié lorsqu'on le déplace soit autour de l'axe central, soit parallèlement à l'axe central. Ces deux mouvements de rotation et de translation fournissent le groupe de mouvements pour lequel le complexe linéaire est invariant. On voit donc qu'il suffit d'étudier la distribution des moments résultants sur une demi-droite perpendiculaire à l'axe central et limitée à cet axe central.

Choisissons le trièdre $Oxyz$ qui oriente l'espace de façon que

64) Cette façon de parler a été employé notamment par K. (Ch.) Culmann.

+ Ox coïncide avec cette perpendiculaire à l'axe central et que + Oz coïncide avec la direction de la résultante générale appliquée au point O de l'axe central; soient alors x l'abscisse d'un point quelconque P de + Ox et φ la mesure, dans le plan orienté Oyz , de l'angle [cf. III 17, n° 3]

$$\sphericalangle (AM_A, OM_O),$$

où AM_A est le moment résultant relatif au point A et OM_O le moment résultant relatif au point O ; les nombres x et φ sont liés par la relation, due à *A. F. Möbius*⁶⁵,

$$x = k \operatorname{tang} \varphi,$$

dans laquelle k représente le paramètre du système de vecteurs. Cette relation se déduit immédiatement de la construction de l'axe central donnée au n° 26.

Supposons maintenant qu'un point P quelconque de l'axe Ox décrive sur un cylindre de révolution ayant pour axe Oz une hélice dont le pas réduit soit égal à k . A chaque point P de Ox correspondra une hélice dont le pas sera k . Toutes ces hélices sont tangentes aux moments résultants relatifs à tous les points de Ox ; ou encore, si l'on préfère, on concevra l'espace rempli de toutes les hélices de pas réduit k qui ont pour axe l'axe central: chaque plan du complexe de Chasles sera normal à l'hélice qui passe en son foyer. Soient F le foyer du plan Π , F' le point infiniment voisin de F sur l'hélice qui passe en F , $d\alpha$ l'angle des normales menées par F et F' au cylindre de révolution qui contient l'hélice; on sait que

$$FF'^2 = (x^2 + k^2)d\alpha^2,$$

x étant la distance de F à l'axe central. D'autre part le moment résultant \vec{G} relatif au point F a pour longueur

$$G = R\sqrt{x^2 + k^2},$$

\vec{R} étant la résultante générale. Du rapprochement des deux dernières égalités, il résulte que G est proportionnel à l'arc d'hélice infiniment petit FF' . Cet arc pourrait donc être pris aussi comme représentation du moment résultant en F .

Nous n'insisterons pas ici davantage sur l'analogie qui existe entre

65) Lehrbuch der Statik, Leipzig 1837 (n° 84); Werke 3, Leipzig 1886, p. 118. Cette formule se trouve aussi dans *L. Poinsot* [J. Ec. polyt. (1) cah. 13 (1806), p. 194] sur la composition des moments et des aires reproduit dans la 8^e édition de ses *Eléments de Statique*, Paris 1842, p. 362.

les moments résultants d'un système de vecteurs relatifs aux différents points de l'espace et les déplacements infiniment petits des points d'un solide invariable. Ce sera l'objet d'un autre chapitre.

31. Des droites de moment donné. Au lieu de chercher les droites de moment nul, on peut chercher les droites par rapport auxquelles le moment d'un système (S) de vecteurs donnés a une valeur constante g . On obtient ainsi un nouveau complexe déjà signalé au n° 22.

Considérons un point P quelconque de l'espace et soit Pz une droite quelconque passant par P . Le moment du système (S) par rapport à Pz sera la projection sur Pz du moment résultant G relatif au point P , c'est-à-dire qu'en désignant par α l'angle du vecteur G avec Pz on aura la relation

$$G \cos \alpha = g.$$

L'angle α est donc constant et les droites de moment g qui passent en P décrivent un cône de révolution dont l'axe est le support de G . Le complexe de ces droites est donc un complexe quadratique dont le cône est de révolution. La conique du complexe située dans un plan donné est une circonférence.

Le maximé de g est G au point P ; ainsi c'est par rapport au support du moment résultant relatif au point P que le système de vecteurs (S) a son moment maximé. Les droites qui portent les moments maximés par rapport aux différents points de l'espace forment un complexe quadratique.

Autres figures géométriques utiles en mécanique.

32. Objet de ce chapitre⁶⁶. *Il est clair que le mode de représentation des grandeurs vectorielles auquel nous nous sommes exclusivement tenu jusqu'à présent n'est pas le seul mode possible; il peut aussi y avoir intérêt à faire correspondre d'autres éléments géométriques à d'autres grandeurs mécaniques. C'est ainsi par exemple qu'à tous les systèmes équivalents de forces appliquées à un corps solide donné on fait correspondre les visseurs de *R. S. Ball*.*

Le vecteur glissant envisagé comme un ensemble de deux points pris dans un ordre déterminé peut être conçu comme le premier chaînon d'une suite de grandeurs formées par juxtaposition, dans un ordre déterminé, non seulement des points, mais de tous les éléments primitifs de l'espace.

66) *Ce chapitre a été rédigé par L. Lévy et revu par E. Study.*

**E. Study*⁶⁷⁾ a procédé à une recherche méthodique de ces grandeurs géométriques: le résultat de ses études est résumé dans le présent chapitre.*

*Présentées *a priori* comme elles vont l'être, les nouvelles figures paraissent peut-être d'abord un peu étranges et les opérations que l'on est amené à définir semblent très artificielles. Mais à celui qui commence la Mécanique la géométrie des vecteurs paraît tout aussi dénuée de caractère pratique et c'est seulement en avançant dans l'étude de cette science qu'il en voit tout l'intérêt dans les applications aux forces, aux vitesses, aux accélérations, aux rotations. Il en est de même ici où les figures envisagées dérivent immédiatement de l'examen des diverses substitutions qui équivalent à un déplacement hélicoïdal. Ce point de vue sera précisé dans le n° 49.*

Les deux principes suivants permettent de rapprocher quelque peu des grandeurs géométriques classiques les nouvelles grandeurs que nous allons introduire:

1°) En même temps que chaque figure on envisage toujours la figure corrélative. Ainsi en même temps que le vecteur glissant, c'est-à-dire le „bipoint“, on envisage aussi le „biplan“.

2°) On peut essayer de former *toutes* les combinaisons possibles des éléments de l'espace dont certaines combinaisons ont formé des figures utiles: on est ainsi amené, par exemple, à considérer le *moulinet*, comme ensemble d'un point et d'un plan.

Il convient d'observer qu'une des plus grandes sources de difficultés dans la construction d'une théorie qui s'appuie sur ces deux principes, ou sur des principes équivalents, provient de ce que le principe de dualité n'est pas applicable sans restriction dans l'espace euclidien. Il en résulte que certaines distinctions s'imposent qui entraînent une étude minutieuse des divers cas d'exception possibles. On est, par exemple, amené à distinguer les biplans en „biplans effectifs“ et en „pseudo biplans“.

C'est dans l'espace elliptique [cf. III 1] que le principe de dualité s'applique d'une façon parfaite. Aussi arrive-t-on très naturellement à envisager des grandeurs telles que le *vecteur glissant sphérique*, par exemple.

Quoique *E. Study*⁶⁸⁾ insiste lui-même sur le caractère essentiellement géométrique de ses généralisations, on est frappé de la grande

67) *Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903 (le premier fascicule a paru en 1901).*

68) *Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, p. 2.*

simplicité qu'introduisent plusieurs de ses constructions dans l'exposé des propositions de la mécanique. Ainsi il semble difficile de qualifier d'artificielle même en mécanique l'addition géométrique des moteurs, construction bien plus simple que toutes celles qui l'ont précédée en vue de la composition de rotations infinitésimales [cf. n° 39].

33. Définitions préliminaires. *On appelle *croix*⁶⁹⁾ *effective*, ou plus simplement *croix*, l'ensemble de deux droites l'une située à distance finie, l'autre rejetée à l'infini et qui est l'intersection des plans perpendiculaires à la première. Cette première droite est *l'axe principal* de la croix; la droite rejetée à l'infini en est *l'axe secondaire*. Si l'on se donne l'axe principal, la croix est entièrement déterminée. Il n'en est pas de même si l'on se donne seulement l'axe secondaire; dans ce cas on peut prendre l'axe principal arbitrairement parmi les perpendiculaires aux plans qui contiennent la droite donnée à l'infini. Nous dirons alors qu'on a une *pseudo-croix*. Le mot *croix* désignera par la suite tantôt une quelconque des deux espèces de croix (pseudo ou effective) tantôt une croix effective. Le lecteur ne s'y trompera pas. D'ailleurs nous ajouterons le mot effective toutes les fois que ce sera nécessaire.

On appelle *transversale* d'une croix toute droite qui rencontre ses deux axes; il est clair que si l'on envisage une pseudo-croix les transversales sont toutes les droites des plans qui contiennent l'axe donné à l'infini. Une croix effective a ∞^2 transversales, une pseudo-croix en a ∞^3 . Deux croix quelconques (au sens large du mot) ont toujours au moins une transversale commune: si ce sont des croix effectives, cette transversale est perpendiculaire à leurs axes principaux.

Deux droites distinctes déterminent toujours une croix dont elles sont des transversales.

La droite qui porte un vecteur glissant donné pourra toujours être considérée comme l'axe principal d'une croix effective. Cette croix sera dite le *support* du vecteur.

Le *support d'un couple*, au sens étroit du mot, sera la pseudo-croix dont l'axe secondaire est à l'infini dans le plan du couple; au sens large, ce sera toute croix effective dont l'axe principal porte le moment du couple.

Le *support d'un système de vecteurs* sera la croix dont l'axe prin-

69) *Voir n° 49 la correspondance du vocabulaire de *E. Study* avec le vocabulaire adopté ici.*

ticuliers, soit avec la droite qui porte la résultante unique si elle existe, soit avec l'axe de tout couple équivalent au système de vecteurs donné.

Considérons deux visseurs [n° 26] b, b' ; toute transversale commune à leurs supports sera aussi transversale du support de tout bivecteur de la forme

$$mb + m'b'.$$

34. Biplan. Règle du trapèze. *Le premier des nouveaux éléments que *E. Study* introduit pour représenter une quantité vectorielle est le *biplan*⁷⁰), système de deux plans pris dans un ordre déterminé et assujettis à ne pas être perpendiculaires l'un à l'autre. Le premier nommé, φ , s'appelle le *plan initial*, le second, χ , le *plan final* du biplan; ils constituent les deux *faces* du biplan. Nous emploierons la notation B_φ^χ . L'intersection des deux plans s'appellera *l'arête* du biplan; si elle est à distance finie (infinie) elle sera l'axe principal (secondaire) d'une croix qui sera, par définition, le *support du biplan*. Par extension, dans le cas de deux plans parallèles, toute croix effective dont l'axe principal est perpendiculaire à ces plans pourra encore être considérée comme support de ce biplan.

L'égalité de deux biplans

$$B_\varphi^\chi = B_{\varphi'}^{\chi'}$$

est caractérisée par ce fait qu'ils ont même support et que l'un d'eux peut se déduire de l'autre par une rotation autour de l'arête du biplan. Cette rotation devient naturellement une translation perpendiculaire aux faces du biplan si l'arête est à l'infini.

On appelle *ouverture du biplan* la tangente trigonométrique $\text{tg}(\varphi, \chi)$ de l'angle des deux plans; cette ouverture n'est jamais infinie. Si elle est différente de zéro, nous aurons un *biplan effectif*; si elle est nulle, un *pseudo-biplan*.

Occupons-nous des biplans effectifs. A tout biplan on peut associer un vecteur glissant ayant le même support et déterminé en outre par la condition que sa longueur soit égale à l'ouverture du biplan. L'*addition* des biplans est donc immédiatement rattachée à l'addition des vecteurs glissants. Mais elle peut aussi s'effectuer par la construction suivante:

Soient B_ω^φ et $B_\omega^{\varphi'}$ deux biplans effectifs dont les arêtes se coupent et qui par conséquent peuvent être amenés à avoir une face ω commune; l'axe principal coïncide avec le torseur correspondant, ou, dans les cas par-

70) *Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, p. 30.*

soient $o\xi$, $o\eta$ leurs arêtes (fig. 7). Menons par $o\xi$ et $o\eta$ deux plans φ' et ψ' respectivement perpendiculaires au plan initial ω . Le plan φ' coupe ψ suivant une droite $o\xi_1$, le plan ψ' coupe φ suivant $o\eta_1$; le plan $\xi_1 o\eta_1$, ou χ , forme avec ω le biplan cherché, ce que nous indiquerons ainsi

$$B_\omega^\chi = B_\omega^\varphi + B_\omega^\psi.$$

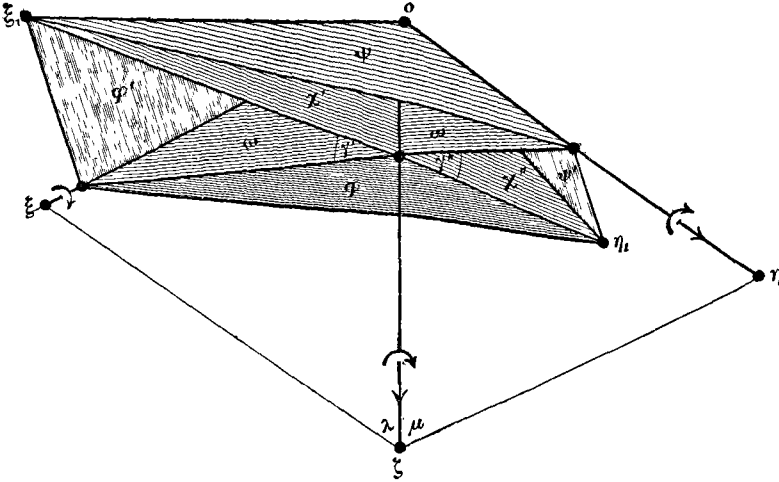


Fig. 7.

Le biplan B_ω^χ est la somme géométrique des deux biplans donnés. On démontre en effet que les ouvertures de ces trois biplans sont proportionnelles aux longueurs de $o\xi$, $o\xi_1$, $o\eta$, si l'on désigne par $o\xi$, $o\eta$ les vecteurs correspondants aux biplans donnés et par $o\xi$ la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs.

Remarque. Si on limite la figure par un plan perpendiculaire à $o\xi$ les trois biplans sont limités à un trapèze et à ses diagonales, d'où le nom de *trapèze des biplans* donné à cette figure.

Cas particuliers. 1. On a évidemment, B_ω^ω désignant un biplan véritable ou un pseudo-biplan,

$$B_\omega^\varphi + B_\omega^\omega = B_\omega^\varphi,$$

ce qui nous conduit à poser

$$B_\omega^\omega = 0.$$

Si les arêtes des deux biplans sont parallèles, la somme est un biplan dont l'ouverture est égale à la somme des ouvertures des biplans composants. Ce théorème s'étend, par définition, au cas in-

déterminé où les arêtes des biplans coïncident. On en conclut

$$B_{\omega}^{\varphi} + B_{\varphi}^{\omega} = 0,$$

$$B_{\omega}^{\psi} = m B_{\omega}^{\varphi} \quad \text{si} \quad \text{tg}(\omega, \psi) = m \text{tg}(\omega, \varphi),$$

m étant un nombre positif ou négatif.*

35. Les vecteurs glissants sphériques. *Considérons une sphère de rayon un. On appelle *vecteur glissant sphérique* un arc de grand cercle, s_{ξ}^{η} , qui a une origine ξ et une extrémité η , cet arc pouvant être arbitrairement déplacé sur son grand cercle. Deux arcs d'un même grand cercle qui ont même origine ξ et même extrémité η sont envisagés comme égaux; il en est de même de deux arcs qui ont même origine ξ et dont les extrémités η et η' sont diamétralement opposées sur la sphère. La *longueur* d'un pareil vecteur est donc seulement déterminée à un multiple de π près: nous supposons qu'elle n'est jamais un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$. Dans ces conditions, l'*ouverture* du vecteur, $\text{tg}(\xi, \eta)$ n'est jamais infinie.

L'*addition* des vecteurs sphériques se rattache à celle des vecteurs rectilignes d'une manière très simple.

Considérons (fig. 8) un parallélogramme de vecteurs $o'\xi_1\eta_1\xi_1$ tangent à la sphère en o' et projetons le obliquement sur la sphère à partir du centre o . Nous obtenons ainsi un quadrilatère sphérique $o'\xi_2\eta_2\xi_2$ dont la diagonale $o'\xi_2$ est la *somme géométrique* des vecteurs sphériques $o'\xi_2$, $o'\eta_2$. Le lecteur verra sans peine que cette addition sphérique peut s'effectuer sans sortir de la sphère; il lui suffira de remarquer que le plan du grand cercle $o\eta_2\xi_2$ passe par les extrémités du diamètre $\xi_2'\xi_2''$ qui est perpendiculaire à oo' dans le plan $oo'\xi_1$.

Il est facile, d'autre part, de rattacher l'addition des vecteurs sphériques à celle des biplans. Prenons, à cet effet, la figure polaire de la précédente⁷¹). Aux points $o', \xi_2, \xi_2', \eta_2, \eta_2', \xi_2$ correspondent les grands cercles, ou mieux les plans des grands cercles, $\omega, \varphi, \varphi', \psi, \psi', \chi$. L'arête du biplan B_{ω}^{φ} , par exemple, sera la perpendiculaire au plan $oo'\xi_2$ et son ouverture sera égale à $o'\xi_1$; de même pour les biplans B_{ω}^{ψ} et B_{ω}^{χ} . Si l'on porte sur ces arêtes à partir de o , et dans des sens convenablement choisis, des longueurs $o\xi, o\eta, o\xi$, respectivement égales à $o'\xi_1, o'\eta_1, o'\xi_1$, on aura construit, dans le plan perpendiculaire à oo' , un parallélogramme de vecteurs qui est égal au parallélogramme $o'\xi_1\eta_1\xi_1$: c'est, au fond, le même parallélogramme tourné

71) *Pour la définition des figures polaires, voir, par exemple, *E. Rouché et Ch. de Comberousse, Traité de Géométrie, (7^e éd.) 2, Paris 1900, p. 176.**

d'un angle droit dans son plan et transporté ensuite parallèlement à lui-même d'une quantité oo' .

On aperçoit maintenant d'une manière nette le lien entre la théorie des vecteurs sphériques et celle des biplans. Elles sont corré-

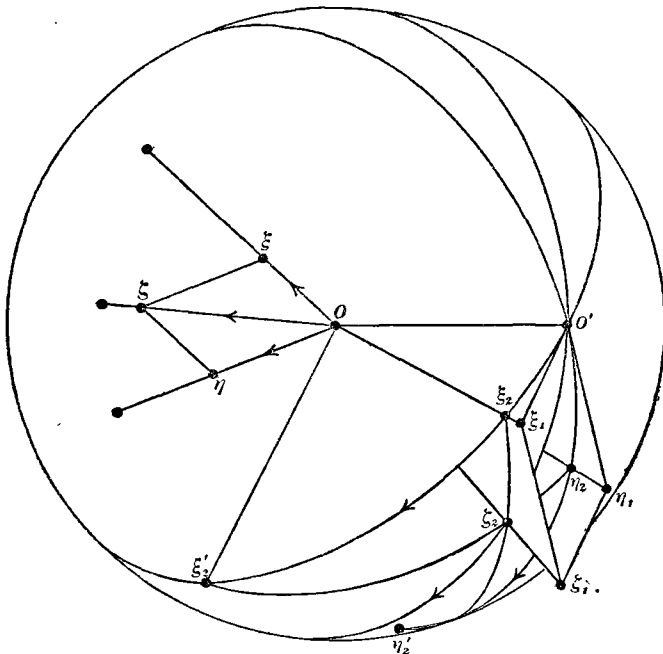


Fig. 8.

latives l'une de l'autre: au vecteur, système de deux points, correspond le biplan, système de deux plans.*

36. Biplans à faces parallèles. Systèmes de biplans. *L'addition de deux pseudo-biplans exige de nouvelles définitions. Nous associerons à un pareil biplan $B_\varphi^{\varphi'}$ le vecteur libre $V_\varphi^{\varphi'}$ qui a même support et dont la longueur est la distance des deux faces du pseudo-biplan. Cette longueur s'appellera l'*écartement* du pseudo-biplan. Pour *additionner* géométriquement deux pseudo-biplans $B_\varphi^{\varphi'}$, $B_\psi^{\psi'}$, on ajoutera, par définition, les vecteurs $V_\varphi^{\varphi'}$, $V_\psi^{\psi'}$ correspondants, ce qui donnera un vecteur V_X^X' auquel correspondra le pseudo-biplan B_X^X' cherché.

Le vecteur attaché à un pseudo-biplan peut être considéré aussi comme le moment d'un couple situé dans une des faces du biplan, et si l'on considère un couple comme un vecteur infiniment petit rejeté à l'infini le pseudo-biplan se présente bien comme cas limite du biplan effectif.

L'addition des biplans est maintenant complètement rattachée à celle des vecteurs ou des couples, et réciproquement.

Les systèmes de biplans se composeront et se réduiront alors comme les systèmes de vecteurs. Voici les théorèmes rapprochés l'un de l'autre.

Tout vecteur glissant est équivalent au système formé par un vecteur glissant dont l'origine est un point arbitrairement donné et par un couple. Les supports du vecteur et du couple ont leurs axes principaux perpendiculaires.

Un système de vecteurs glissants peut être réduit, et d'une seule manière, à un vecteur et à un couple dont les supports ont leurs axes principaux coïncidents [Voir n° 26].

Il pourra arriver, dans des cas particuliers, que le système de vecteurs soit équivalent à un vecteur glissant unique, ou à un couple, ou à zéro.

Revenant au cas général, où le système donné est réductible à un système de deux biplans B' et B'' dont l'un seulement est effectif tandis que l'autre est un pseudo-biplan, nous appellerons *support du système de biplans* donné le support commun de B' et de B'' , et nous dirons que le système est réduit à sa forme normale, que nous écrirons symboliquement

$$B' + B'' = B.$$

Nous énoncerons encore un théorème analogue à celui qui termine le n° 33: Si Δ est une transversale du support de deux systèmes de biplans B et B_1 , elle est encore transversale du support de tout biplan compris dans la formule

$$mB + m_1B_1,$$

où m et m_1 sont des nombres donnés, positifs ou négatifs.*

37. Les Moteurs⁷²⁾. **E. Study*⁷³⁾ appelle ainsi un système de deux droites D et Δ , prises dans un ordre déterminé et assujetties à

Tout biplan est équivalent au système formé par un biplan dont l'arête contient un point donné et par un pseudo-biplan. Les supports du biplan et du pseudo-biplan ont leurs axes principaux perpendiculaires.

Un système de biplans peut être réduit, et d'une seule manière, à un biplan et à un pseudo-biplan dont les supports, au sens large du mot, ont leurs axes principaux coïncidents.

le système de biplans soit équivalent à un biplan unique, ou à un pseudo-biplan, ou à zéro.

72) La décomposition d'un mouvement en deux *renversements* et le mode de composition des mouvements que l'on obtient en utilisant cette décomposition

la seule condition que *leur angle ne soit pas droit*. Le moteur s'indique par le symbole M_D^Δ . L'angle que fait la *droite initiale* D avec la *droite finale* Δ sera désigné par $\text{ang}(D, \Delta)$; il est déterminé en grandeur et en signe à un multiple de π pris. Nous appellerons *ouverture* du moteur la tangente de cet angle, $\text{tg ang}(D, \Delta)$; la *longueur* du moteur, $\text{dist}(D, \Delta)$ est la plus courte distance des deux droites, comptée positivement de D vers Δ . Ce dernier sens entraîne, suivant nos conventions, le sens positif de rotation autour de la perpendiculaire commune et par suite le sens dans lequel doit être compté positivement $\text{ang}(D, \Delta)$.

On appelle *rotateurs* les moteurs de longueur nulle, *translateurs* les moteurs d'ouverture nulle, c'est-à-dire ceux dont les deux droites sont parallèles. Le translateur peut encore être considéré comme cas limite d'un rotateur lorsque le point de concours des deux droites du rotateur s'éloigne à l'infini; seulement, dans le passage à la limite, la longueur qui était nulle devient brusquement finie.

L'égalité de deux moteurs

$$M_{D_1}^{\Delta_1} = M_{D_2}^{\Delta_2}$$

est défini par ce fait que deux renversements successifs d'un corps solide autour des droites D_1 et Δ_1 l'amènent à la même position que deux renversements successifs autour de D_2 et Δ_2 . En particulier

en renversements exposés par *G. H. Halphen* [Nouv. Ann. math. (3) 1 (1882), p. 296/9] est souvent utile; la théorie en sera développée au n° 45.

Le signe { } adopté dans le texte est dû à *H. Wiener* [Ber. Ges. Lpz 42 (1890), math. p. 13/23, 71/87].

La composition de rotations autour d'un point fixe, à l'aide de renversements convenablement choisis, se trouve déjà quant au fond dans *W. R. Hamilton*, comme on le verra dans l'article où sera exposée la théorie des quaternions.

Le caractère presque immédiat de ces constructions explique qu'elles ont été données, indépendamment de *G. H. Halphen*, par plusieurs géomètres, parmi lesquels on peut citer *W. Burnside*, *H. Wiener* et *G. Darboux* [Théorie des surfaces 4, Paris 1896, note V, p. 438/41]. *G. Darboux* [dans *G. Koenigs*, Cinématique, Paris 1897, p. 346 et suiv. (note II)] indique que la même méthode était déjà suivie, à son insu, par *P. Morin* [dans son Cours (non publié) professé à la Faculté des sciences de Rennes vers 1880]. A signaler aussi *W. Burnside* [Messenger math. (2) 19 (1889/90), p. 104/8; (2) 23 (1893/4), p. 19/22] et *E. Study* [Math. Ann. 39 (1891), p. 441/556] qui a généralisé cette théorie.

Sur l'usage des mots „moteur“ et „rotateur“, *E. Study* fait observer qu'il s'en sert quoiqu'ils aient déjà un autre sens, d'ailleurs mal défini, mais qu'il ne fait que suivre l'exemple de *W. K. Clifford* lui-même, le premier inventeur de ces mots.

73) Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, p. 51.

on doit considérer comme égaux tous les moteurs dont les deux droites initiale et finale sont identiques; il est naturel de considérer ces moteurs comme égaux à zéro et de poser

$$M_D^D = 0.$$

Le *support d'un moteur* est la croix qui a pour axe principal la perpendiculaire commune aux deux droites du moteur; dans le cas du translateur, c'est la pseudo-croix qui a pour axe principal une quelconque des perpendiculaires communes aux deux droites; ou, par extension, le support d'un translateur est une quelconque des croix effectives qui ont leur axe principal parallèle aux perpendiculaires communes précédentes. Un moteur nul a pour support une croix quelconque. Pour abrégé, nous appellerons les axes de ces supports *l'axe principal et l'axe secondaire du moteur* correspondant.

Tous les moteurs qui ont la même ouverture, différente de zéro, et qui peuvent être déduits les uns des autres par un déplacement hélicoïdal quelconque autour de leur axe principal, sont égaux entre eux.*

38. Correspondance entre les moteurs et les biplans ou les vecteurs glissants. *A tout système de biplans (ou de vecteurs glissants), ramené à la forme normale

$$B = B' + B'', \quad \vec{R} + \vec{G},$$

on peut associer un moteur parfaitement déterminé. Ce moteur *associé au système de biplans* aura le même support que B , pour ouverture celle du biplan effectif B' (la longueur de R) et pour longueur l'écartement du pseudo-biplan B'' (le moment du couple G). La droite initiale D du moteur M_D^Δ est située dans les plans initiaux des biplans B', B'' . La droite terminale Δ du même moteur est située dans les plans terminaux de ces mêmes biplans B', B'' . On voit sans peine comment il faut modifier ces énoncés dans le cas du rotateur ou du translateur.*

39. Addition géométrique des moteurs. *Considérons deux systèmes B et B_1 de biplans et les moteurs associés que nous pourrions amener à avoir la même droite initiale D , perpendiculaire commune des axes principaux des biplans donnés; soient $M_D^\Delta, M_{D_1}^{\Delta_1}$ ces deux moteurs. Composons les deux systèmes B et B_1 en un seul B_2 , et soit $M_{D_2}^{\Delta_2}$ le moteur associé à B_2 . Ce moteur sera appelé la *somme géométrique* des moteurs $M_D^\Delta, M_{D_1}^{\Delta_1}$ et l'on écrira

$$M_{D_2}^{\Delta_2} = M_D^\Delta + M_{D_1}^{\Delta_1}.$$

Voici deux constructions corrélatives pour obtenir Δ_2 : soient (fig. 9) trois droites D, Δ, Δ_1 dont la première ne soit perpendiculaire à aucune des deux autres, c'est à dire soient deux moteurs $M_D^\Delta, M_D^{\Delta_1}$.

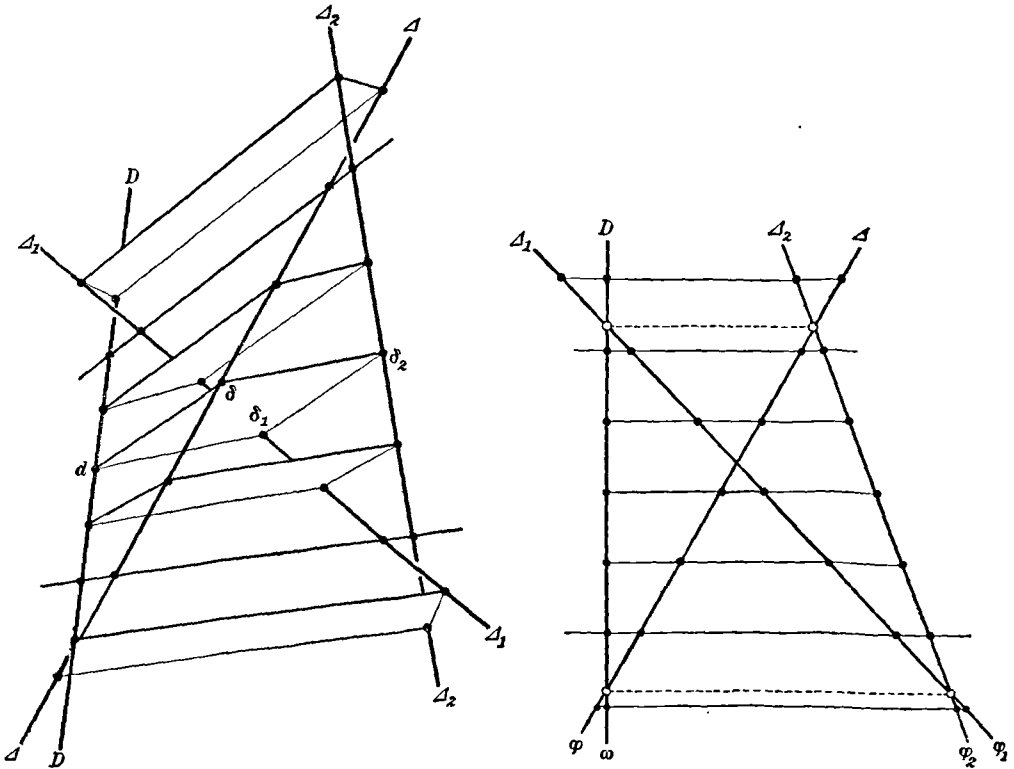


Fig. 9.

Coupons ces trois droites par un plan P perpendiculaire à D , et soient d, δ, δ_1 les points d'intersection de P avec les trois droites D, Δ, Δ_1 . Le quatrième sommet δ_2 du parallélogramme construit sur les vecteurs $d\delta, d\delta_1$ décrit une droite Δ_2 lorsque P se déplace parallèlement à lui-même.

Menons par ces trois droites des plans $\omega, \varphi, \varphi_1$ parallèles à une même perpendiculaire D' à D . Construisons le plan φ_2 qui forme avec ω un biplan égal à la somme des biplans $B_\omega^\varphi, B_\omega^{\varphi_1}$. Ce plan φ_2 pivote autour d'une droite fixe Δ_2 .

Le moteur $M_D^{\Delta_2}$ est la somme géométrique cherchée.

On appelle *produit* d'un moteur par un nombre c le moteur qui

a pour longueur et pour ouverture la longueur et l'ouverture du premier moteur multipliées par ce nombre c .

Considérons tous les moteurs compris dans la formule $c \cdot M_D^\Delta$ qui ont même support et même droite initiale; le lieu de leurs droites finales lorsque c varie est un parabololoïde hyperbolique équilatère.

Nous pouvons évidemment énoncer le théorème suivant qui exprime en d'autres termes celui que nous avons énoncé plus haut:

L'addition géométrique des biplans s'effectue en ajoutant géométriquement les moteurs associés, et vice versa. Il en est de même de la multiplication d'un biplan par c .

La méthode d'addition donnée ci-dessus s'applique dans tous les cas. On en déduit, par exemple, toutes les décompositions d'un moteur M_D^Δ en deux rotateurs.

Supposons maintenant que les moteurs M_D^Δ et M_D^Δ soient désignés plus simplement par les lettres M_1 et M_2 ; supposons de plus que ce ne soient pas des translateurs et que leurs axes principaux ne soient pas dans un même plan: le lieu géométrique des axes principaux du faisceau des moteurs compris dans la formule

$$c_1 M_1 + c_2 M_2,$$

où c_1 et c_2 sont deux paramètres variables, est la surface à laquelle *A. Cayley* a donné le nom de *cylindroïde*⁷⁴⁾ parce que les pieds des normales abaissées d'un point quelconque sur les génératrices se trou-

74) *G. Battaglini* [Rendic. Accad. Napoli (1) 8 (1869), p. 132] a trouvé le même résultat en cherchant le lieu des axes centraux de tous les dynamiques qui se composent de deux forces agissant suivant deux droites données. Cette génération du cylindroïde est évidemment un cas particulier de celle donnée dans le texte. Du reste le dernier procédé se rencontre, dans son essence, avec les considérations que *J. Plücker* [Neue Geometrie des Raumes, Leipzig 1869, p. 97 [1868]] a développées sur le cylindroïde, bien avant *G. Battaglini*. Seulement *J. Plücker* remplace les dynamiques par les complexes linéaires correspondants; il caractérise le cylindroïde comme conoïde, et en a construit un modèle; cette surface est souvent désignée sous le nom de *conoïde de Plücker* [cf. *A. Mannheim*, Principes et développements de géométrie cinématique, Paris 1894, p. 260 et suiv.].

* Dans une étude sur cette surface, *P. Appell* [Bull. Soc. math. France 28 (1900), p. 261] a démontré que le cylindroïde est la seule surface réglée réelle, en dehors du cylindre, pour laquelle le lieu des projections d'un point quelconque de l'espace sur les génératrices est une courbe plane. Voir aussi *R. Bricard* [Bull. Soc. math. France 29 (1901), p. 18] et *A. Demoulin* [id. p. 39].*

E. Study [Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, p. 320] désigne sous le nom de *chaîne* (Kette) à la fois le cylindroïde et le faisceau de plans et montre qu'une chaîne ainsi définie peut être envisagée comme une des figures fondamentales de la géométrie réglée (Liniengeometrie).

vent sur une courbe plane comme dans les cylindres; cette courbe plane est d'ailleurs une conique.

Pour écrire l'équation du cylindroïde, nous prendrons comme axe des z la droite D qui est transversale commune aux supports des moteurs M_1 et M_2 ; en choisissant ensuite convenablement l'orientation des axes ox et oy ainsi que l'origine des coordonnées⁷⁵⁾, on pourra mettre cette équation sous la forme⁷⁶⁾

$$z = \frac{2mxy}{x^2 + y^2}.$$

Tous les cylindroïdes sont semblables. Considérons une des génératrices du cylindroïde; c'est l'axe principal d'une famille de moteurs de la forme $\lambda \cdot M$, M étant un des moteurs du faisceau considéré. Les droites finales de ces moteurs sont tangentes à des hélices de même pas tracées sur des cylindres de révolution qui ont oz pour axe. Comme on peut imprimer à un moteur une rotation autour de son axe principal sans qu'il cesse d'être égal à lui-même, le pas de ces hélices est indéterminé; il est seulement le même pour tous les moteurs correspondants à un même axe principal. Nous allons retrouver les mêmes résultats par d'autres considérations. Décomposons le moteur M_i en un rotateur et en un translateur qui aient même support $M_i = M'_i + M''_i$; soit M'''_i un translateur de même support et qui ait pour écartement l'ouverture du rotateur M'_i , il est évident que, quelle que soit la valeur de λ , le moteur

$$c_1(M_1 + \lambda M'''_1) + c_2(M_2 + \lambda M'''_2)$$

aura même axe principal que le moteur

$$c_1 M_1 + c_2 M_2,$$

et nous avons maintenant une indéterminée nouvelle λ dans la génération du cylindroïde.

Nous reviendrons plus tard sur cette intéressante surface. Bornons-nous à en indiquer encore une propriété et un mode de génération particulièrement simple. La propriété dont nous voulons parler consiste en ce que le cylindroïde est aussi le lieu des supports des visseurs équivalents aux systèmes de deux vecteurs glissants dont l'un est donné tandis que l'autre a seulement un support donné.

Voici maintenant comment la surface peut être engendrée: posons

$$M_D^{\Delta_1} = c_1 M_D^{\Delta} + c_2 M_D^{\Delta_1};$$

75) Cf. *D. Padelletti*, Rendic. Accad. Napoli (1) 21 (1882), p. 39.*

76) Voir aussi *E. Study*, Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, p. 455, 456.

si c_1 et c_2 varient, les droites Δ_2 forment une congruence linéaire, c'est-à-dire qu'elles rencontrent deux droites fixes A et B , réelles ou imaginaires. Ces deux droites appartiennent au cylindroïde et leur perpendiculaire commune est l'axe de la surface. On peut se donner ces deux droites A et B , ce qui détermine leur normale commune D ; le cylindroïde sera le lieu des perpendiculaires communes à D et à l'une quelconque des droites de la congruence linéaire déterminée par A et B . Pour ce mode de génération, on peut partir d'une génératrice quelconque A' du cylindroïde et lui associer une autre génératrice B' ; les droites A' , B' vont ainsi par paires, elles sont deux à deux conjuguées. On peut encore simplifier en considérant toutes les droites d'un faisceau plan, dont le sommet est au point de contact d'un plan tangent; les perpendiculaires communes à ces droites et à l'axe décrivent le cylindroïde; leurs pieds sur les droites du faisceau décrivent une ellipse qui, avec la génératrice rectiligne contenue dans le plan tangent, constitue la section de la surface par ce plan⁷⁷⁾.*

40. Les moulinets. *A côté du vecteur glissant (bipoint) et du biplan, il y a lieu de considérer une nouvelle figure qui contient le même nombre de constantes arbitraires, celle qui se compose d'un point et d'un plan. Concevons la perpendiculaire abaissée du point sur le plan et imaginons le plan comme engendré par la rotation d'une perpendiculaire à cette droite menée par son pied, la figure nous apparaîtra comme une espèce de *moulinet* et c'est le nom que nous donnerons à l'ensemble d'un plan et d'un point, en ajoutant la condition que le plan ne contienne pas le point. Le moulinet sera *effectif* si le point et le plan sont à distance finie; ce sera un *pseudo-moulinet* dans le cas contraire.

Il s'agit maintenant d'établir un lien entre les moulinets et les vecteurs. L'idée la plus naturelle serait d'associer au moulinet un vecteur qui soit dirigé suivant la perpendiculaire au plan et qui ait pour longueur l' la longueur l de cette perpendiculaire comptée à partir du point. Mais cela ne servirait à rien. Nous établirons entre ces deux longueurs la relation

$$l' = \frac{1}{l}$$

qui définira la longueur du vecteur associé au moulinet.

77) *Voir pour le cylindroïde et son utilité pour la composition des dynames R. S. Ball, *Theory of screws*, Dublin 1876; *A treatise on the theory of screws*, Cambridge 1900, p. 19; *E. Study*, *Geometrie der Dynamen*, Leipzig 1903, p. 320, 345, 348, 366.*

Soit ξ ou η le point, φ ou ψ le plan; nous désignerons le moulinet par la notation Q_{ξ}^{φ} ou Q_{ψ}^{η} suivant que l'élément initial est le point ou le plan. Deux moulinets sont égaux lorsque les symétries par rapport à leurs éléments initiaux combinées avec les symétries par rapport à leurs éléments finaux équivalent au même demi-tour de vis, ce que, avec H. Wiener⁷²), nous indiquerons ainsi:

$$\begin{aligned} Q_{\xi_1}^{\varphi_1} &= Q_{\xi_2}^{\varphi_2} & \text{si } \{ \xi_1, \varphi_1 \} &= \{ \xi_2, \varphi_2 \}, \\ Q_{\psi_1}^{\eta_1} &= Q_{\psi_2}^{\eta_2} & \text{si } \{ \psi_1, \eta_1 \} &= \{ \psi_2, \eta_2 \}, \\ Q_{\xi}^{\varphi} &= Q_{\eta}^{\psi} & \text{si } \{ \xi, \varphi \} &= \{ \eta, \psi \}. \end{aligned}$$

Par suite un moulinet n'est pas altéré par une translation le long de sa droite qui est l'axe du déplacement hélicoïdal équivalent. Mais il n'est pas non plus altéré si l'on remplace l'un de ses éléments par son symétrique pris par rapport à l'autre élément et si en même

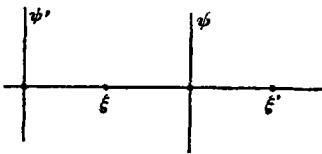


Fig. 10.

temps on renverse l'ordre des deux éléments. Désignons par exemple (fig. 10) par ξ' le point symétrique de ξ par rapport au plan ψ et par ψ' le plan symétrique de ψ par rapport au point ξ : on aura

$$Q_{\psi'}^{\xi} = Q_{\xi}^{\psi} = Q_{\psi}^{\xi'}.$$

On appelle *support du moulinet* la croix effective dont l'axe principal coïncide avec la droite du moulinet, *longueur du moulinet* la distance du point au plan ou du plan au point. Ainsi deux moulinets sont égaux lorsqu'ils ont même support et même longueur. Le moulinet nul est celui dont la longueur devient infinie, soit parce que, le plan restant fixe, le point s'est éloigné à l'infini dans une direction normale au plan, soit parce que le point restant fixe, le plan s'est éloigné à l'infini.*

41. Addition des moulinets. Prenons la figure transformée par polaires réciproques du parallélogramme des vecteurs relativement à une sphère de rayon *un* ayant pour centre l'origine commune *O* des vecteurs glissants à additionner. A chacun de ces deux vecteurs correspondra un moulinet (Q_0^{φ} et Q_0^{ψ}) ayant *O* pour point initial, et au vecteur résultant un moulinet Q_0^{χ} qui par définition sera la somme des deux moulinets composants, ce que nous indiquerons par l'égalité symbolique

$$Q_0^{\varphi} + Q_0^{\psi} = Q_0^{\chi}.$$

La construction directe se lit sur la figure 11.

Cette figure concerne deux moulinets qui ont un point initial *O* commun. On peut ramener à ce cas celui de deux moulinets dont les droites se rencontrent.

Dans le cas de deux moulinets à droites parallèles, on peut imprimer à l'un d'eux une translation qui amène les plans initiaux à coïncider. Soit ω le plan commun ξ et η les points finaux; la figure 12 montre comment s'effectue l'addition; Q_ω^ξ est la somme géométrique cherchée, ce qu'on exprime par l'égalité symbolique

$$Q_\omega^\xi + Q_\omega^\eta = Q_\omega^\zeta.$$

Soient l, l', l'' les longueurs de ces moulinets, on vérifie sans peine que

$$\frac{1}{l''} = \frac{1}{l} + \frac{1}{l'}.$$

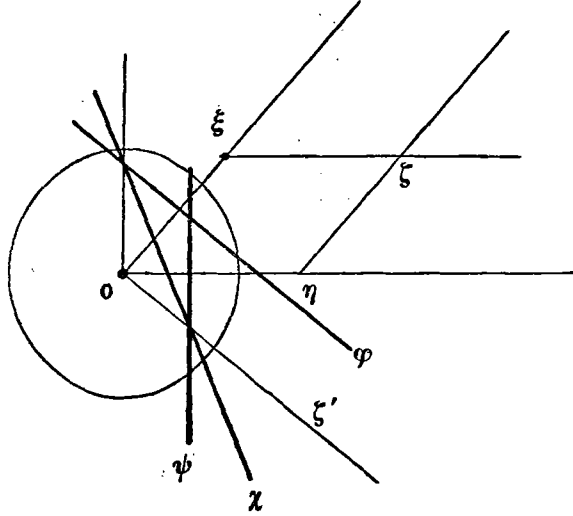


Fig. 11.

La construction

précédente tombe en défaut si les deux moulinets ont le même support, ou si, ayant des supports différents, leurs longueurs sont égales et de

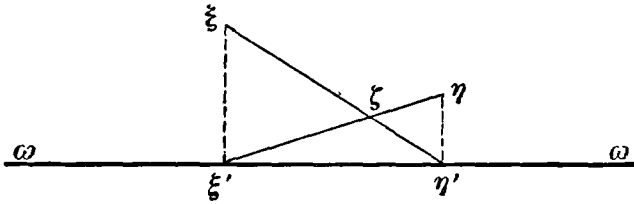


Fig. 12.

sens contraire; dans ce dernier cas, la somme géométrique est une quantité d'espèce nouvelle sur laquelle nous allons revenir. Dans le premier cas, la somme géométrique est un moulinet qui a le même support que les moulinets composants et dont la longueur a pour inverse la somme des inverses des longueurs des moulinets composants; c'est un cas limite du précédent.

Comme cas particulier, on a

$$Q_\xi^\varphi + Q_\varphi^\xi = 0;$$

enfin l'addition d'un moulinet nul à un autre moulinet n'altère pas ce moulinet.*

42. Les pseudo-moulinets. *Supposons maintenant que le point ξ du moulinet s'éloigne à l'infini dans une direction oblique au plan, le moulinet $Q_{\varphi}^{\xi} = Q_{\varphi}^{\xi'}$, dégénérera en un *pseudo-moulinet* qu'on peut représenter par la notation $q_{\omega}^{\xi} = q_{\omega}^{\xi'}$; seulement cette fois le point ξ est supposé à l'infini dans une direction donnée ξ , et ξ' représente la direction symétrique par rapport au plan ω . Si ces directions sont normales au plan, on retombe sur le moulinet nul déjà considéré.

Si l'on exclut le cas du moulinet nul, les droites parallèles aux directions ξ et ξ' peuvent être groupées dans les plans qui les projettent sur le plan ω ; ces plans projetants s'appelleront les *plans du pseudo-moulinet*. Une rotation ou une translation qui conserve ces plans n'altère pas, par définition, le pseudo-moulinet. Il en résulte la définition de l'égalité des pseudo-moulinets. Les normales aux plans du pseudo-moulinet sont les axes principaux d'une pseudo-croix que nous appellerons le *support du pseudo-moulinet*; dans un sens plus large, on pourra encore donner ce nom à toute croix effective dont l'axe principal sera un des axes précédents.

On appelle *ouverture d'un pseudo-moulinet* la tangente trigonométrique de l'angle λ dont il faut faire tourner le plan initial ω pour que, les „plans du pseudo-moulinet“ restant fixes, il vienne passer par le point final à l'infini ξ . Le sens positif de la rotation sera déterminé lorsqu'on aura orienté les normales au „plan du pseudo-moulinet“. Portons sur cette normale orientée et dans le sens positif un vecteur dont la longueur soit égale à $\cotg \lambda$, ce vecteur sera dit *appartenir* au pseudo-moulinet. L'égalité de deux pseudo-moulinets est alors définie par ce fait que le même vecteur libre leur appartient.

Le pseudo-moulinet se présente comme cas limite du moulinet véritable; le vecteur attaché à ce dernier devient infini, son inverse tend vers zéro et on peut le considérer comme correspondant à un couple dont le plan est le „plan du moulinet“. L'axe du couple situé dans le plan initial du moulinet a pour longueur l'inverse de l'ouverture du pseudo-moulinet. Un pseudo-moulinet et un couple associés ont même support et le même vecteur leur appartient.

Un pseudo-moulinet peut d'une infinité de manières être considéré comme somme géométrique de deux moulinets effectifs. Il suffit, pour s'en rendre compte, de supposer que dans la figure (12) les longueurs $\eta\eta'$, $\xi\xi'$ sont égales et portées de part et d'autre du plan ω . On

obtient ainsi la figure 13 et on peut écrire

$$q_{\omega}^{\xi} = Q_{\omega}^{\xi} + Q_{\omega}^{\eta}.$$

L'addition d'un pseudo-moulinet et d'un moulinet effectif ou de deux moulinets de sens contraires ayant des longueurs égales avec plan initial commun, n'offre plus de difficultés.

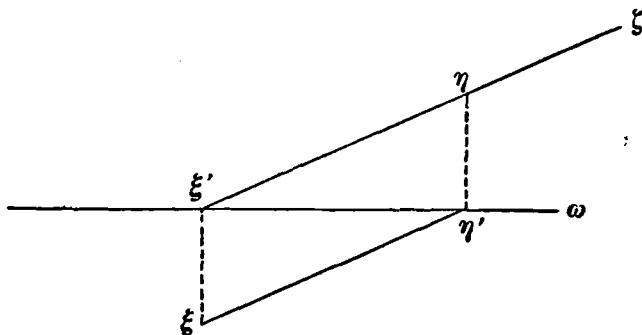


Fig. 13.

Il reste à examiner l'addition de deux pseudo-moulinets; *E. Study* y parvient en considérant un pseudo-moulinet comme défini par une droite et un point situés l'un et l'autre dans le plan de l'infini, ce qu'on peut appeler un *moulinet dans le plan de l'infini*. On ramène alors les deux moulinets à avoir soit la droite initiale commune, soit le point initial commun, et l'on n'a plus qu'à opérer dans le plan de l'infini comme s'il était à distance finie.

La multiplication géométrique par un nombre c d'un moulinet quelconque de support donné s'effectue en *divisant* sa longueur ou son ouverture par ce nombre.*

43. Systèmes de moulinets. *La réduction de ces systèmes s'opère en effectuant celle des systèmes de vecteurs glissants ou de biplans associés et réciproquement. En particulier tout système de moulinets est réductible d'une seule manière à un système de moulinets $Q' + Q''$, de même support; l'un Q' est un moulinet effectif, l'autre Q'' est un pseudo-moulinet. Le support commun à Q' et Q'' s'appelle le *support du système* de moulinets.*

44. Les impulseurs. *Nous avons associé à tout biplan un système de deux droites (moteur); les liens intimes qui existent entre les diverses figures étudiées jusqu'à présent montrent qu'on peut associer aussi bien à tout moulinet un système de deux droites. Seulement la définition des moteurs ne permet pas de passer à tous les cas limites. Pour ne pas exclure ces cas, *E. Study* définit un autre système

de deux droites qu'il nomme un *impulseur*: ce sont encore deux droites quelconques prises dans un ordre déterminé et soumises à la seule condition de n'être jamais situées dans un même plan. L'impulseur se confond donc en général avec un moteur; mais il demeure défini lorsque l'angle des deux droites est droit (*impulseur rectangle*) ou lorsque l'une des droites est rejetée à l'infini (*pseudo-impulseur*)⁷⁸. Nous grouperons ces deux cas particuliers sous le vocable *impulseurs spéciaux*. L'impulseur ne peut jamais être un rotateur, ni un translateur.

Si D est la droite initiale, Δ la droite finale, nous désignerons l'impulseur par la notation I_D^Δ .

Nous conserverons naturellement pour les impulseurs les expressions de support, de longueur, d'ouverture déjà employées pour les moteurs; l'égalité se définira comme pour les moteurs. La longueur et l'ouverture d'un impulseur ne sont jamais nulles, tandis que la longueur et l'ouverture d'un moteur ne sont jamais infinies.

Pour passer aux cas limites, on associe à l'impulseur un système de moulinets qui a le même support; si le système des moulinets (ou des vecteurs glissants associés) est mis sous la forme normale

$$Q' + Q'', \quad \vec{R} + \vec{G},$$

la longueur de l'impulseur associé est celle du moulinet effectif Q' (inverse de celle du vecteur R); son ouverture est celle du pseudo-moulinet Q'' (inverse de la valeur du moment du couple G).

Si dans les systèmes réduits ci-dessus le premier terme est nul, l'impulseur associé est un pseudo-impulseur. Si c'est le second terme qui s'annule, l'impulseur associé est un impulseur rectangle. Si les deux termes sont nuls, l'impulseur associé est nul par définition: on verrait aisément que dans ce cas les deux droites de l'impulseur ou mieux du pseudo-impulseur forment une croix proprement dite.*

45. Addition des impulseurs. Soient deux impulseurs I_D^Δ et $I_{D_1}^{\Delta_1}$ ayant une droite commune (fig. 14) D , c'est-à-dire soient trois droites D , Δ , Δ_1 dont la première ne coupe les deux autres ni à distance finie, ni à l'infini. Menons par D un plan variable φ qui coupe Δ en ξ , Δ_1 en η et soit ω le plan mené par D perpendiculairement à φ ; nous obtenons ainsi deux moulinets Q_ω^ξ , Q_ω^η . Soit Q_ω^ζ leur somme

$$Q_\omega^\zeta = Q_\omega^\xi + Q_\omega^\eta.$$

78) *E. Study* [Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, p. 80] emploie les dénominations de *torsor* pour impulseur rectangle et de *ejector* pour pseudo-impulseur. Dans la mécanique des corps déformables on emploie souvent le mot „torseur“ dans un autre sens beaucoup plus rapproché de sa signification vulgaire; quant au mot „pseudo-impulseur“, il s'impose par l'analogie avec les définitions antérieures.

Le point final ξ ainsi construit décrit une droite Δ_2 lorsque le plan φ pivote autour de D . Cette droite Δ_2 n'est pas dans un même plan avec D ; les deux droites D et Δ_2 forment donc un impulseur qui est par définition la somme des impulseurs donnés, ce qu'on écrit

$$\dot{I}_D^{\Delta_2} = \dot{I}_D^{\Delta_1} + \dot{I}_D^{\Delta_2}$$

Il en résulte, parce que deux impulseurs ont toujours au moins une transversale commune, l'addition d'un nombre quelconque d'impulseurs.

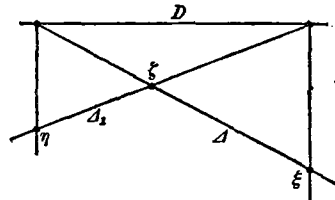


Fig. 14.

Définition: On multiplie un impulseur par un nombre m en *divisant* sa longueur et son ouverture par le nombre m . Il en résulte qu'en général l'impulseur $m \cdot I_D^{\Delta}$ est identique au moteur $\frac{1}{m} M_D^{\Delta}$.

46. Addition stéréométrique des moteurs. *Pour achever l'énumération des nouveaux éléments géométriques introduit par *E. Study* et des opérations qu'on peut effectuer sur ces éléments il faut encore définir une nouvelle opération que *E. Study* appelle *addition stéréométrique des moteurs* et qu'il indique par le signe plus surmonté d'un point $\dot{+}$; la soustraction stéréométrique sera indiquée par le signe $\dot{-}$.

Pour éviter toute confusion, *E. Study* désigne ici les moteurs par le symbole N_D^{Δ} au lieu de M_D^{Δ} .

On appelle *écartement* d'un moteur N_D^{Δ} le produit de sa longueur par le carré de son ouverture augmenté de l'unité, c'est-à-dire la quantité

$$\frac{\text{dist}(D, \Delta)}{\cos^2 \text{ang}(D, \Delta)}$$

L'écartement diffère de la longueur toutes les fois que le moteur n'est ni un rotateur, ni un translateur.

Désignons encore par

$$\widehat{D\Delta}$$

la perpendiculaire commune aux deux droites D et Δ . Elle est uniquement déterminée si D et Δ ne sont pas parallèles (ou si N_D^{Δ} n'est pas un translateur). Nous pouvons définir simplement l'addition stéréométrique de deux moteurs N_D^{Δ} , $N_D^{\Delta'}$, ramenés à avoir la même droite initiale D . La somme stéréométrique sera un nouveau moteur ayant la même droite initiale et que nous désignerons par le symbole $N_D^{\Delta \dot{+} \Delta'}$ de sorte qu'on aura

$$N_D^{\Delta \dot{+} \Delta'} = N_D^{\Delta} \dot{+} N_D^{\Delta'}$$

a) Nous supposons d'abord que les moteurs ne sont pas des translateurs et n'ont pas leurs supports parallèles. Le schema suivant

explique en quoi consiste l'addition stéréométrique: soit posé

$$\begin{aligned} \Delta' &= \widehat{D}\Delta, & \Delta_1' &= \widehat{D}\Delta_1, \\ \Delta'' &= \widehat{D}\Delta', & \Delta_1'' &= \widehat{D}\Delta_1', \\ \Delta''' &= \widehat{\Delta''}\Delta_1, & \Delta_1''' &= \widehat{\Delta_1''}\Delta; \end{aligned}$$

on aura

$$\Delta_2 = \widehat{\Delta'''}\Delta_1'.$$

L'addition stéréométrique est évidemment comme l'addition ordinaire commutative, c'est-à-dire qu'on a

$$N_D^\Delta + N_D^{\Delta_1} = N_D^{\Delta_1} + N_D^\Delta.$$

b) Si les deux moteurs sont des rotateurs, la droite est encore déterminée par la même construction, à condition d'ajouter que la

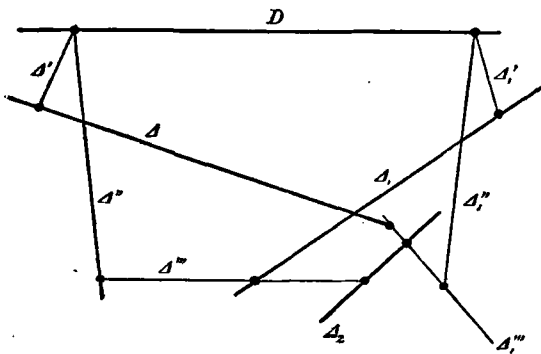


Fig. 15.

somme doit être aussi un rotateur ou un translateur quand les rotateurs ont leurs supports parallèles. Les constructions se font alors dans un même plan et l'on voit aisément que l'addition stéréométrique se réduit alors à l'addition géométrique.

c) Si un et un seul des moteurs donnés, $N_D^{\Delta_1}$ par exemple, est un translateur, la construction semble indéterminée; la droite Δ_2 est cependant bien déterminée.

d) Le résultat de la construction ne devient indéterminé que si Δ''' est parallèle à Δ_1''' . Dans ce cas, on peut déduire la détermination de Δ_2 d'une construction assez générale relative au cas où un et un seul des moteurs $N_D^{\Delta_1}$ est un translateur et où les supports ne sont pas parallèles. Il suffit en effet d'imprimer à la droite D une translation égale au vecteur du translateur. Cette construction subsiste si le vecteur du translateur est perpendiculaire au support du moteur N_D^Δ .

e) Cas de deux translateurs dont les supports ne sont pas parallèles. La construction du cas a) subsiste et se réduit à ceci: l'addition stéréométrique de deux translateurs s'effectue par l'addition géométrique de leurs vecteurs; elle se confond avec l'addition géométrique de ces translateurs.

f) Revenons au cas exclu dans le paragraphe d), celui où les supports du translateur et du moteur sont parallèles. Il faut alors entrer dans des explications un peu plus détaillées, avant de passer à la limite: nous nous bornerons à énoncer la conclusion à laquelle aboutit *E. Study*: si le moteur N_D^Δ est un translateur dont le vecteur V_D^Δ est porté par l'axe principal du moteur M_D^Δ , la somme stéréométrique des deux moteurs s'obtient en imprimant à la droite D une translation représentée par le vecteur $V_D^\Delta \cos^2 \text{ang}(D, \Delta)$.

g) La somme stéréométrique de deux moteurs qui ont le même support s'obtient en ajoutant leurs ouvertures et leurs écartements. Le support de la somme est le même que le support commun des deux moteurs composants.

La multiplication stéréométrique d'un moteur par un nombre m consiste à multiplier son ouverture et son écartement par m . Nous indiquerons cette multiplication par le signe \times ; le résultat sera donc

$$m \times N_D^\Delta.$$

Il résulte des explications précédentes que l'addition stéréométrique de deux moteurs pourra toujours s'effectuer sans décomposer ces moteurs, excepté si ces moteurs ont leurs supports parallèles. Dans ce cas, on les mettra sous la forme normale

$$N' \dot{+} N'',$$

où N' est un rotateur et N'' un translateur dont le support (au sens large du mot) coïncide avec celui de N' . Cette décomposition est toujours possible et d'une seule manière.*

47. Nouveaux liens entre les moteurs et les systèmes de vecteurs ou de biplans. *Pour distinguer ces nouveaux liens de ceux établis au n° 35, nous emploierons le mot *affilier* au lieu d'*associer* et nous énoncerons deux propositions:

a) A tout système de vecteurs, ou de biplans, ou de moulinets on peut *affilier* un moteur de même support parfaitement déterminé que nous appellerons le *moteur affilié au système*. Si le système est mis sous la forme normale

$$B' + B'', \quad \vec{R} + \vec{G},$$

l'ouverture du moteur *affilié* est égale à celle du biplan véritable B' ou à la longueur de la résultante générale R ; l'écartement de ce moteur est égal à celui du pseudo-biplan B'' ou au moment du couple G .

L'addition géométrique des systèmes de vecteurs glissants, ou de biplans, ou de moulinets, s'effectue par l'addition stéréométrique

des moteurs *affiliés*; le même lien entre la multiplication géométrique de ces systèmes par un nombre m et la multiplication stéréométrique des moteurs *affiliés* par ce même nombre.

La démonstration dans quelques-uns des cas particuliers qui peuvent se présenter est aisée. Il suffit pour y parvenir de décomposer stéréométriquement les moteurs donnés chacun en un rotateur et en un translateur de même support, et l'addition stéréométrique se réduit alors à l'addition géométrique.

Quant au cas général, la démonstration, se trouve dans l'ouvrage de *E. Study*⁷⁹⁾.*

48. Aperçu sur quelques applications du présent article. Rappel de quelques notions relatives au déplacement d'un corps solide. La géométrie des vecteurs trouve son application la plus adéquate dans la Statique: les théorèmes relatifs aux vecteurs glissants, par exemple, s'appliquent textuellement aux forces extérieures que s'exercent sur un solide invariable. Ces applications trouveront leur développement dans l'article consacré à la Statique.

Mais les nouvelles figures dont nous venons de parler peuvent trouver leur emploi en Cinématique.

On sait⁸⁰⁾ que tout déplacement d'une figure invariable est tangent à un déplacement hélicoïdal. L'étude des déplacements hélicoïdaux est donc la base de toutes les études relatives aux mouvements des solides invariables⁸¹⁾.

Le déplacement hélicoïdal d'un solide invariable est celui dans lequel tous les points du solide décrivent des hélices tracées sur des cylindres de révolution concentriques. Nous appellerons un pareil déplacement un *vissage* [cf. n° 50]; il peut être obtenu par une trans-

79) *Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, p. 94/8.*

80) Ce théorème a été donné en premier lieu par *G. Mozzi* dans un petit écrit, cité par *M. Chasles*, Discorso matematico sopra il rotamento momentaneo dei corpi, Naples 1763. Mais la démonstration de *G. Mozzi* n'est pas exacte. *A. L. Cauchy* [Exercices math. 2, Paris 1827, p. 87; Œuvres (2) 7, Paris 1889, p. 94] publia le même théorème avec une démonstration correcte, sans connaître le travail de *G. Mozzi*. La démonstration la plus simple de ce théorème que l'on connaisse est celle qui a été donnée par *H. Wiener* [Ber. Ges. Lpz 42 (1890), math. p. 22].

* Voir à ce sujet, *R. Marcolongo*, Bolletino bibl. storia mat. 8 (1905), p. 1/8 (Note de *G. Loria*).*

81) Afin d'éviter la monotonie, on emploiera ici le mot „mouvement“ dans le sens de „déplacement“; mais il est bien entendu que l'on ne fait pas intervenir le temps comme variable.

lation parallèle à l'axe précédée ou suivie d'une rotation. Le sens positif sur l'axe est arbitraire; mais celui des rotations en résulte, comme on l'a expliqué.

On appelle *glissement* ou amplitude de la translation la longueur, prise avec son signe, du chemin parcouru par un point du solide pendant la translation: nous la désignerons par la notation 2η ; l'angle de rotation sera représenté par 2θ , il n'est défini qu'à un multiple de 2π près; θ est donc défini à un multiple de π près.

Il faut six paramètres pour déterminer un vissage, savoir η , θ et les quatre paramètres qui définissent la position de l'axe.

Il est utile de distinguer plusieurs cas particuliers:

1°) Les *rotations*, déterminées par cinq paramètres (quatre pour l'axe, un pour l'angle de rotation): elles sont caractérisées par la condition

$$\eta = 0.$$

Une rotation équivaut et d'une ∞^1 de manières à la succession de deux *inversions planes*⁸²⁾; les plans de symétrie font entre eux l'angle θ .

Soient φ un plan, φ' la position qu'il occupe après la rotation, ω un des deux plans bissecteurs de φ et φ' : on pourra représenter la substitution S produite par la rotation de la manière suivante:

$$S = \{\varphi\} \{\omega\} = \{\varphi, \omega\}$$

ou encore

$$S = \{\omega\} \{\varphi'\} = \{\omega, \varphi'\},$$

le symbole $\{\varphi\}$ indiquant une inversion plane relativement au plan φ .

2°) Les *demi-tours de vis* (en nombre ∞^5). Ici

$$\theta \equiv \frac{\pi}{2} \text{ mod. } \pi.$$

Elles transforment involutivement les points à l'infini; les plans passant par l'axe ne changent pas de position, mais les figures qui y sont contenues sont déplacées.

Un demi-tour de vis équivaut d'une infinité de manières à la succession d'une inversion plane $\{\omega\}$ et d'une symétrie centrale $\{\xi'\}$, ou d'une symétrie centrale $\{\xi\}$ et d'une inversion plane $\{\omega\}$. Les deux centres de symétrie ξ et ξ' sont situés sur l'axe et symétriques par rapport au plan ω ; le segment $\overline{\xi\xi'}$ est égal au glissement 2η . Nous représenterons cette substitution par la notation

$$S = \{\xi, \omega\} = \{\omega, \xi'\}.$$

82) On appelle ainsi les transformations par symétrie relatives à des plans [*G. Darboux*, Théorie des surfaces 4, Paris 1896, p. 438]. En allemand „Spiegelungen an Ebenen“.

3°) *Les renversements* (en nombre ∞^4):

$$\eta = 0, \quad \theta \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.$$

Ils équivalent à deux inversions planes successives par rapport à deux plans rectangulaires, ou à la succession d'une inversion plane et d'une symétrie par rapport à un centre situé dans le plan de symétrie.

Un renversement peut être aussi considéré comme une transformation par symétrie relativement à l'axe du retournement. Il est déterminé par cet axe.

4°) *Les translations* (∞^3):

$$\theta \equiv 0 \pmod{\pi}.$$

Elles laissent immobiles tous les points de l'infini; elles équivalent à une succession de deux symétries centrales: la distance des centres de symétrie est la moitié de l'amplitude 2η de la translation.

Les translations peuvent être considérées comme des rotations autour d'un axe situé à l'infini dans un plan perpendiculaire à l'axe.

Une translation définie peut être considérée comme une torsion autour d'une quelconque des droites parallèles à la direction de la translation.

5°) *La transformation identique* qui laisse les figures géométriques en repos.

Si le déplacement est quelconque, et s'il n'est pas une translation, il est hélicoïdal autour d'un axe déterminé. Il peut toujours être remplacé par deux (∞^2) retournements autour de deux droites perpendiculaires à l'axe. Ces deux droites font entre elles un angle égal à la moitié de l'angle de rotation du premier mouvement et leur plus courte distance est égale à la moitié du glissement.

Dans le cas où le déplacement résultant est un demi-tour de vis, l'angle des axes des deux renversements composants est droit.

Si le déplacement est une translation, on peut le remplacer par deux renversements autour d'axes parallèles entre eux et perpendiculaires à la direction de la translation.

Le grand intérêt des remarques précédentes consiste, ainsi que l'a observé *G. H. Halphen*⁸³, en ce qu'on peut utiliser les renversements pour composer (superposer) deux déplacements quelconques. Soient D , D' les axes des vissages équivalents aux déplacements donnés, Δ leur perpendiculaire commune. On prendra Δ comme un des axes des renversements composants pour chacun des vissages donnés; soient alors Δ_1 l'axe associé à Δ dans le premier vissage, Δ_2 celui qui

83) Voir n° 37. Cf. *G. Darboux*, Théorie des surfaces⁶⁵) 4, p. 441.

est associé à Δ dans le second. La superposition de tous ces déplacements se réduit à deux renversements autour de Δ_1 et Δ_2' et par suite à une torsion autour de la perpendiculaire commune à Δ_1 et Δ_2 .

49. Lien entre les déplacements et les figures de Study. Voici maintenant les théorèmes que démontre *E. Study*.

A tout système de biplans est associé un vissage S qui n'est pas un demi-tour de vis. L'axe du vissage coïncide avec le support du système de biplans: si l'on décompose ce vissage en une rotation S' et une translation S'' parallèles à l'axe, et si l'on met en même temps le système de biplans sous la forme normale $B + B'$, le biplan véritable B a pour ouverture la tangente trigonométrique du demi-angle de rotation de S ou de S' , le pseudo-biplan B' a pour écartement la moitié du glissement η de S ou de S'' . En particulier à tout biplan véritable correspond une rotation, à tout pseudo-biplan une translation, au biplan nul la transformation identique.

Si maintenant on doit additionner des systèmes de biplans, à leur somme sera associée un vissage résultant des vissages associés aux systèmes de biplans composants. Nous désignerons cette opération sous le nom de *superposition linéaire* de déplacements. Voici comment on effectuera cette superposition dans le cas de deux mouvements.

Soit o le milieu de deux cordes $\xi\xi', \eta\eta'$ par rapport à deux déplacements qui ne sont pas des demi-tours de vis. Composons les vecteurs $o\xi', o\eta'$ par la règle du parallélogramme et soit $o\xi'$ le vecteur résultant; o est le milieu d'une corde $\xi\xi'$ dans un mouvement parfaitement déterminé⁸⁴).

Soit ω le plan bissecteur commun de deux biplans $B_\varphi^{\varphi'}, B_\psi^{\psi'}$ correspondants à deux déplacements qui ne sont pas des demi-tours de vis. Composons les biplans $B_\omega^{\varphi'}, B_\omega^{\psi'}$ par la règle du trapèze des biplans, nous obtenons un biplan $B_\omega^{\chi'}$ et ω est le plan bissecteur d'un biplan $B_\chi^{\chi'}$ associé à un mouvement parfaitement déterminé⁸⁵).

Ce mouvement déterminé n'est pas un demi-tour de vis; il est le résultat de la superposition linéaire des deux premiers mouvements.

*Décomposons⁸⁶) chacun de ces trois mouvements en deux renversements. On obtient ainsi trois moteurs

$$M_{\Delta}^{\Delta_1}, M_{\Delta}^{\Delta_2} \text{ et } M_{\Delta}^{\Delta_3};$$

84) Geometrie der Dynamen, Leipzig 1893, p. 43 et suiv.

85) *On verra plus loin pourquoi il convient de choisir pour effectuer les constructions indiquées plutôt $\xi', \eta', \zeta', \varphi', \psi', \chi'$ que $\xi, \eta, \zeta, \varphi, \psi, \chi$.*

86) *Le texte et les notes de cette dernière partie du n° 49 sont entièrement dus à *E. Study*, sauf le vocabulaire final qui a été établi par *L. Lévy*.*

les deux axes de renversement ne sont en aucun cas perpendiculaires l'un à l'autre (pour chacun des trois mouvements). Ces trois moteurs sont liés par la relation

$$M_{\Delta}^{\Lambda_1} + M_{\Delta}^{\Lambda_2} = M_{\Delta}^{\Lambda_3},$$

en sorte que les mouvements qui ne sont pas des demi-tours de vis se superposent d'une façon linéaire, c'est-à-dire telle que les moteurs qui leur correspondent s'ajoutent⁸⁷).

On peut appliquer les résultats obtenus à la *composition des mouvements infiniment petits* des solides rigides. On obtient ainsi les propositions suivantes:

Dans tout mouvement infiniment petit d'un solide rigide, chacun des points O du solide qui ne reste pas immobile se déplace dans une direction déterminée par une droite passant par O .

Si l'on mène dans cette direction un vecteur $O\xi'$ de longueur égale à celle de la vitesse actuelle du point O , et si l'on construit l'image ξ relativement à O de l'extrémité ξ' de ce vecteur, les points ξ et ξ' se correspondent dans un certain mouvement fini déterminé du solide rigide envisagé, qui n'est pas un demi-tour de vis.

Pour composer des mouvements infiniment petits d'un solide rigide il suffit de composer les mouvements finis correspondants comme on l'a vu plus haut suivant la *règle du parallélogramme* ou encore d'ajouter géométriquement les moteurs correspondants.

Dans tout mouvement infiniment petit d'un solide rigide, chacun des plans ω du solide qui ne reste pas immobile se déplace dans une rotation déterminée autour d'une droite située dans ω .

Si l'on mène par cette droite un second plan φ' tel que $\text{tg}(\omega, \varphi')$ soit, en grandeur et signe, égale à la vitesse angulaire de rotation actuelle des plan ω ⁸⁸), et si l'on construit l'image φ de φ' relativement à ω , les plans φ et φ' se correspondent dans un certain mouvement fini déterminé du solide rigide envisagé, qui n'est pas un demi-tour de vis.

Pour composer des mouvements infiniment petits d'un solide rigide il suffit de composer les mouvements finis correspondants comme on l'a vu plus haut suivant la *règle du trapèze* ou encore d'ajouter géométriquement les moteurs correspondants⁸⁹).

87) „Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, p. 43 et suiv. Au sujet des vecteurs $O\xi'$ et des biplans $\omega\varphi'$ voir Math. Ann. 39 (1891), p. 464 où l'on trouvera des renseignements bibliographiques.*

88) „Dans le cas particulier où le plan φ' est parallèle au plan ω , cette règle doit être quelque peu modifiée.*

89) „Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, p. 116 et suiv.*

Le système de constructions dont on vient d'exposer le principe n'est pas un système complet. A l'addition géométrique des impulseurs il faut encore faire correspondre une *superposition corrélatrice des mouvements*, et à l'addition stéréométrique des moteurs il faut de même faire correspondre une *superposition stéréométrique des mouvements*.

Cette superposition stéréométrique S' des mouvements, *mais non la superposition corrélatrice des mouvements*, peut, elle aussi, être appliquée à la composition⁹⁰⁾ des mouvements infiniment petits⁹¹⁾ d'un solide rigide⁹²⁾.*

* Nous terminons ce chapitre en proposant pour les locutions allemandes introduites par *E. Study* les locutions françaises correspondantes que voici:

Vocabulaire de *E. Study*.

Stab	Vecteur glissant
Vector	Vecteur libre
Keil (coïn)	Biplan
Quirl	Moulinet
Umwendung	Renversement
Umschraubung	Demi-tour de vis
Schraubung	Déplacement hélicoïdal, torsion
Drehung	Rotation
Schiebung	Translation
Sperrung	Ecartement
Speer	Droite orientée, axe, semi-droite
Speere syntaktisch	Semi-droites de même sens
Speere antitaktisch	Semi-droites de sens contraires
Motor	Moteur
Rotor	Rotateur
Translator	Translateur
Torsor	Impulseur rectangle
Ejector	Pseudo-impulseur

90) * *Geometrie der Dynamen*, Leipzig 1903, p. 85, 116 et suiv.*

91) * La connexion entre les systèmes de forces distribuées sur un solide rigide et les mouvements infiniment petits de ces solides, connexion sur laquelle repose une partie des recherches de *E. Study* dont on vient d'exposer le contenu est particulière à l'espace à trois dimensions [cf. *Geometrie der Dynamen*, Leipzig 1903, p. 119]. Elle n'est d'ailleurs pas spéciale à l'espace ordinaire euclidien. Dans un espace non-euclidien à trois dimensions on peut développer une théorie toute semblable qui, pour une courbure de l'espace positive (espace riemannien) est même plus simple que dans l'espace euclidien [*Geometrie der Dynamen*, p. 113 et suiv.]. On consultera aussi à ce sujet *S. Edwin Davis*, *Die geometrische Addition der Stäbe in der hyperbolischen Geometrie*, Diss. Greifswald 1904.*

92) * Un exposé *analytique* des résultats obtenus par *E. Study* est contenu dans la seconde partie de son *Traité* [*Geometrie der Dynamen*, Leipzig 1903, p. 122/226] dont la première partie (p. 1/121) a un caractère purement géométrique.*

Vis, vissages et visseurs de Ball.

50. Définitions. Notations⁹³). Le point de départ de la théorie de *R. S. Ball*⁹⁴) est dans les deux faits suivants:

1°) Un système de forces appliquées à un corps solide (pour lequel la somme géométrique des forces n'est pas nulle) peut être réduit d'une seule façon à une force et à un couple dont l'axe est parallèle à la direction de la force⁹⁵). Cet ensemble est appelé par *R. S. Ball* un visseur⁹⁶) [n° 26]. Un système de visseurs, appliqué à un solide, peut être réduit d'une seule façon à un visseur unique puisque ce système de visseurs est, en dernière analyse, un système de forces.

2°) On peut toujours, d'une seule façon, amener un corps solide d'une position à une autre (n'ayant pas la même orientation dans l'espace) par une rotation autour d'un axe déterminé et par une translation (ou un glissement) parallèle à cet axe. Cet ensemble est appelé par *R. S. Ball*⁹⁷) un *vissage*⁹⁸).

En particulier, dans le mouvement continu d'un solide l'état des vitesses à l'instant t est le même que si, pendant le temps infiniment petit dt , le corps tournait d'un angle $d\theta$ autour d'une droite et

93) *Les numéros 50 à 54 ont été rédigés par *P. Appell*.*

94) Les premières communications se trouvent: Quart. J. pure appl. math. 10 (1870), p. 220; Trans. Irish Acad. (Dublin) 25 (1875), p. 137 [1871]; Philos. Trans. London 164 (1874), p. 15. Pour tout ce qui a suivi voir *R. S. Ball*, A treatise on the theory of screws, (2^e éd.) Cambridge 1900, où l'on trouvera de nombreux renseignements bibliographiques.

95) *L. Poinsot*, Éléments de statique, (8^e éd.) Paris 1842, p. 79.

96) En anglais *wrench* (clef anglaise). Cf. Theory of screws⁹²), (1^{re} éd.) p. 4 (§ 4); (2^e éd.), p. 10 (§ 7). En allemand *Winder* [cf. *W. Fiedler*, Viertelj. Naturf. Ges. Zurich 21 (1876), p. 199]. *P. Appell* dit *torseur* au lieu de *visseur* [Traité de mécanique rationnelle (3^e éd.) 1, Paris 1909, p. 32]; *H. E. Timerding*⁹⁸) propose de dire „grandeur hélicoïdale de seconde espèce“ (Schraubengröße zweiter Art). Au sujet de l'emploi du mot *dynamie* par *J. Plücker* dans le sens de *visseur* voir plus loin n° 55.

97) *R. S. Ball*, Theory of screws⁹²), (2^e éd.) p. 7 (§ 3).

98) *R. S. Ball* dit *twist* pour *vissage*. En Allemagne, *W. Fiedler* [Viertelj. Naturf. Ges. Zurich 21 (1876), p. 199] dit *Windung*, mais *F. Klein* [Z. Math. Phys. 47 (1902), p. 243; Math. Ann. 62 (1906), p. 425] dit *Schraubung*. Cf. *H. E. Timerding*, Geometrie der Kräfte, Leipzig 1909, p. 81, 137. *H. E. Timerding* [Encyclopädie der math. Wiss. IV 2, 13] propose de dire „grandeur hélicoïdale de première espèce“ (Schraubengröße erster Art).

L'expression *twist* était déjà en usage avant que *R. S. Ball* ne l'ait employée [cf. par ex. *W. Thomson* et *P. G. Tait*, Treatise on natural philosophy, (1^{re} éd.) 1, Oxford 1867; *P. Appell* [Traité de mécanique rationnelle (1^{re} éd.) 1, Paris 1893, p. 27] traduit *twist* par *torsion* et emploie le mot *flèche* au lieu du mot paramètre.

glissait d'une longueur dl le long de cette droite, c'est-à-dire subissait un *vissage élémentaire*⁹⁹).

*La *vitesse instantanée de vissage*, ou *vissage instantané*, est l'ensemble formé par les deux vecteurs $\vec{\rho}$ et \vec{g} représentant l'un la vitesse angulaire instantanée de rotation $\frac{d\theta}{dt}$, l'autre la vitesse instantanée de glissement $\frac{dl}{dt}$.

Un système de vissages finis ou de vissages instantanés peut être remplacé, d'une seule façon, par un vissage fini ou instantané.

Le tableau suivant montre l'analogie et la différence entre le *visseur* et le *vissage*.

Visseur.	Vissage.
Vecteur <i>polaire</i> glissant associé à un vecteur <i>axial</i> libre qui lui est parallèle.	Vecteur <i>axial</i> glissant associé à un vecteur <i>polaire</i> libre qui lui est parallèle.*

51. Vis. De même qu'un vecteur glissant a pour support une droite déterminée, un visseur ou un vissage ont, d'après *R. S. Ball*, comme support commun une *droite déterminée affectée d'un coefficient linéaire positif ou négatif* que *R. S. Ball* nomme une *vis*¹⁰⁰.

*Pour comprendre la définition abstraite de la vis de *Ball*, imaginons une vis matérielle qui se meut dans un écrou¹⁰¹) fixe dans l'espace; tous les points de la vis décrivent des hélices circulaires dont l'axe commun est appelé *axe de la vis*.

Le *pas absolu*¹⁰²) de la vis est la longueur dont glisse un point de la vis situé sur l'axe quand celle-ci tourne d'un angle égal à l'unité d'angle (radian).*

99) Ces théorèmes sont dus en grande partie à *M. Chasles* [C. R. Acad. sc. Paris 16 (1843), p. 1420]. Sur les propriétés relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre cf. *A. Mannheim*, Géom. cinématique⁷⁴); *A. Schoenflies*, Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung, Leipzig 1886; trad. par *Ch. Speckel*, Géométrie du mouvement, Paris 1893; *G. Koenigs*, Cinématique⁷⁵); *E. Study*, Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903. Cf. IV 6.

100) En anglais *screw*. En allemand *Schraube*.

101) En anglais *nut*. En allemand *Schraubenmutter*.

102) En italien *passo*, en anglais *pitch*, en allemand *Parameter* d'après *F. Klein* [Z. Math. Phys. 47 (1902), p. 244; Math. Ann. 62 (1906), p. 426] ou *Pfeil* d'après *W. Fiedler* [Viertelj. Naturf. Ges. Zurich 21 (1876), p. 199] et *W. Schell* [Theorie der Bewegung und der Kräfte (2^e éd.) 2, Leipzig 1880, p. 212]; *W. Schell* dit *Axenparameter* pour vis; *H. E. Timerding* remarque que „*Parameteraxe*“ serait plutôt indiqué qu'*Axenparameter*. *P. Appell* [Mécanique rationnelle (3^e éd.) 1, Paris 1909, p. 32] dit *flèche* au lieu de paramètre

Encyclop. des scienc. mathémat. IV 2.

*Il peut exister, comme on sait, deux espèces de vis matérielles suivant le sens d'enroulement des spires. Pour les distinguer imaginons qu'on oriente l'axe de la vis et appelons α l'axe ainsi orienté: la vis sera dite *positive* ou *négative* suivant qu'en la faisant tourner autour de l'axe α dans le sens direct du n° 9 elle glisse dans le sens *positif* ou le sens *négatif* de l'axe α . Ce signe attribué à une vis est indépendant du sens choisi comme positif sur l'axe de la vis, car si la vis tourne dans des sens contraires dans l'érou, elle glisse aussi dans des sens contraires¹⁰³).

Les vis positives sont aussi appelées *dextrorsum* et les négatives *sinistrorsum*¹⁰⁴).

Les vis usuelles sont positives ou dextrorsum; en faisant tourner une vis usuelle dans le sens direct du n° 9 elle glisse dans le sens *positif* de l'axe.

Une vis peut être représentée par les deux éléments abstraits suivants qui constituent la *vis de Ball*:

1°) une droite indéfinie D , non orientée, qui coïncide avec l'axe de la vis;

2°) un coefficient k (dont la dimension est celle d'une longueur) égal au pas absolu de la vis précédé du signe $+$ ou du signe $-$ suivant que la vis est positive ou négative. Ce coefficient s'appelle le *pas*¹⁰⁴) ou le *paramètre* de la vis.

Si l'on oriente la droite D en la transformant en un axe orienté α quand la vis tourne d'un angle (positif ou négatif) $\Delta\theta$, son glissement le long de cet axe est mesuré par un segment g_α (positif ou négatif) donné par

$$g_\alpha = k \cdot \Delta\theta.*$$

52. Forme canonique d'un visseur. Soit un visseur constitué par une force \vec{H} (vecteur polaire glissant sur une droite D) et par un couple dont le moment \vec{G} (vecteur axial libre) est parallèle à la force et peut être placé sur la même droite D . Orientons cette droite de

103) Le mot rotation a deux sens suivant qu'on se borne à considérer les positions initiale et finale ou qu'on envisage le temps que le corps a mis à passer de la première à la seconde. Le mot vissage comporte la même ambiguïté. Mais les coordonnées du vissage doivent, lorsqu'elles se rencontrent dans le texte, être considérées une fois pour toutes comme des composantes de vitesse; et si le vissage signifie occasionnellement un déplacement infiniment petit, il convient par suite de diviser encore ses composantes par un temps dt très petit, qui d'ailleurs peut être pris pour unité.

104) *Les conventions faites à ce sujet varient avec les auteurs. Voir à ce sujet R. Alezais, Nouv. Ann. math. (4) 10 (1910), p. 289/302.*

façon à la transformer en un axe orienté α ; appelons F_α et G_α les valeurs algébriques des deux segments déterminés sur cet axe par les vecteurs \vec{F} et \vec{G} et considérons le rapport

$$k = \frac{G_\alpha}{F_\alpha}$$

qui est une longueur précédée du signe + ou du signe —. La vis d'axe D et de pas k est la vis qui porte le visseur; cette vis est positive ou négative suivant que \vec{F} et \vec{G} sont de même sens ou de sens contraires.

*Le visseur est alors défini par les éléments suivants:

1°) le vecteur polaire glissant \vec{F} dont la direction et le sens sont appelés direction et sens du visseur et dont la longueur F est appelée *amplitude* du visseur;

2°) le pas ou paramètre k de la vis ayant pour axe la droite portant le vecteur \vec{F} .*

On peut dire aussi que le visseur est défini par un *vecteur polaire glissant* auquel on adjoint un nombre k positif ou négatif, appelé *pas* ou *paramètre* du visseur; la valeur absolue de ce nombre dépend du choix de l'unité de longueur. Ces deux éléments étant donnés, le moment \vec{G} du couple est défini en grandeur, direction et sens par la relation écrite plus haut

$$G_\alpha = kF_\alpha.$$

Si l'on imagine un système de vecteurs polaires glissants (forces) équivalent à la force \vec{F} jointe au couple de moment parallèle \vec{G} , c'est-à-dire équivalent au visseur, le moment résultant de ce système par rapport à un point quelconque P de l'espace est la somme d'un vecteur équipollent à \vec{G} et du moment de \vec{F} par rapport à P . La somme des moments des vecteurs par rapport à un axe est la projection sur cet axe du moment résultant par rapport à un point quelconque P de l'axe. Les droites de moment nul forment un complexe linéaire dont l'équation contient uniquement le paramètre k du visseur: ce complexe est dit le *complexe linéaire attaché à la vis qui porte le visseur*¹⁰⁵).

53. Forme canonique d'un vissage. *Bornons-nous à un vissage instantané comme celui qui représente à un instant t les éléments du

105) Cette dépendance fait le principal objet d'un ouvrage de *J. Zančevskij*, Теорія вinta і применення його в механіці (Théorie des vis et son emploi en mécanique), Odessa 1889. Voir aussi une petite note de *K. Kupper*, Monatsh. Math. Phys. 1 (1890), p. 95.

mouvement hélicoïdal tangent au mouvement d'un solide. Ce vissage instantané est formé¹⁰⁶⁾ par l'ensemble d'une vitesse angulaire représentée par un vecteur axial glissant $\vec{\varrho}$ porté par l'axe instantané D et d'une vitesse de glissement parallèle \vec{g} , vecteur polaire libre, qu'on peut toujours supposer porté par la même droite. Si l'on choisit sur D un sens positif de façon à obtenir un axe orienté α , les deux vecteurs $\vec{\varrho}$ et \vec{g} déterminent sur cet axe des segments ϱ_α et g_α . Le rapport

$$k = \frac{g_\alpha}{\varrho_\alpha}$$

est un nombre positif ou négatif dont la valeur absolue dépend de l'unité de longueur choisie.

La vis d'axe D et de pas k est la vis qui porte le vissage; le pas k est positif ou négatif suivant que $\vec{\varrho}$ et \vec{g} sont de même sens ou de sens opposés.

Le vissage lui-même est défini par les éléments suivants:

1°) le vecteur axial glissant $\vec{\varrho}$, donnant la direction, le sens et l'amplitude du vissage;

2°) le *pas* ou *paramètre* k de la vis, ayant pour axe la droite indéfinie qui porte ce vecteur axial.

On dit aussi parfois que k est le *pas* ou le *paramètre du vissage*.

Ces deux éléments, vecteur axial glissant et pas k , étant donnés, le glissement \vec{g} est défini par la relation

$$g_\alpha = k\varrho_\alpha.$$

Soit un système de vecteurs axiaux glissants (rotations) équivalent au vecteur $\vec{\varrho}$ joint au couple de rotations de moment \vec{g} parallèle (translation); le moment résultant de ce système par rapport à un point P est la somme géométrique d'un vecteur équipollent à \vec{g} et du moment linéaire de $\vec{\varrho}$ par rapport à P . Ce moment résultant est la vitesse¹⁰⁷⁾ que posséderait le point P s'il était lié invariablement au corps solide animé du vissage instantané considéré. La somme des moments des vecteurs par rapport à un axe Δ est la projection sur cet axe de la vitesse d'un point quelconque de l'axe Δ . Les

106) Cf. *E. Study*, *Geometrie der Dynamen*, Leipzig 1903, p. 118 et *F. Klein* [*Z. Math. Phys.* 47 (1902), p. 244; *Math. Ann.* 62 (1906), p. 426] qui emploie les mots *Drehgeschwindigkeit* et *Translationsgeschwindigkeit*.

107) C'est *A. F. Möbius* [*J. reine angew. Math.* 18 (1838), p. 189; *Werke* 1, Leipzig 1885, p. 545] qui a donné le premier exposé méthodique de l'analogie que présentent les compositions des systèmes de vecteurs et celles des mouvements infiniment petits.

droites de moment nul forment un complexe linéaire dépendant uniquement de la vis de pas k et identique à celui que nous avons trouvé pour la même vis considérée comme support d'un visseur.

Nous pouvons comparer encore une fois le visseur et le vissage dans le tableau suivant:

<i>Visseur.</i>		<i>Vissage.</i>
Vecteur polaire glissant \vec{F} porté par une vis de pas k .		Vecteur axial glissant $\vec{\varrho}$ porté par une vis de pas k .

C'est en raison de ce rôle commun de la vis qu'on a introduit les locutions de *visseur* et de *vissage*.*

54. Expressions analytiques du visseur et du vissage.

1°) *Visseur*. Soient un système d'axes rectangulaires et un système de vecteurs polaires glissants (forces)

$$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_r, \dots, \vec{F}_n.$$

Désignons par

$$X, Y, Z$$

les sommes des projections de ces vecteurs sur chacun des trois axes et par

$$L, M, N$$

les sommes de leurs moments par rapport à chacun des axes. Ces six quantités définissent un visseur porté par l'axe central du système de vecteurs, ayant pour sens et pour amplitude le sens et la longueur du vecteur \vec{F} de projections X, Y, Z et pour *pas* ou *paramètre* la quantité

$$k = \frac{LX + MY + NZ}{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

2°) *Vissage*. Soit un déplacement hélicoïdal instantané d'un solide, défini par les coefficients

$$p, q, r$$

de la rotation instantanée $\vec{\varrho}$ et les projections

$$u, v, w$$

de la vitesse \vec{V} du point du solide situé à l'origine O . L'axe du vissage instantané se confond avec l'axe central du système de vecteurs glissants qui aurait pour somme géométrique $\vec{\varrho}$ et pour moment résultant par rapport à O le vecteur \vec{V} . Son sens et son amplitude sont le sens et la longueur de $\vec{\varrho}$; son paramètre k' est

$$k' = \frac{pu + qv + rw}{p^2 + q^2 + r^2}.$$

3°) *Invariant simultané d'un visseur et d'un vissage.* Imaginons que le corps solide soumis aux forces

$$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_r, \dots, \vec{F}_n$$

considérées ci-dessus, soit animé du vissage considéré. La somme

$$\mathfrak{C}_e$$

des travaux élémentaires des forces \vec{F}_r , pendant l'intervalle de temps dt a pour expression

$$\mathfrak{C}_e = (uX + vY + wZ + pL + qM + rN)dt.$$

La quantité entre parenthèses est un invariant simultané du visseur et du vissage.*

55. Différences analytiques du visseur et du vissage. Les expressions analytiques précédentes font ressortir au point de vue analytique les analogies et la différence signalées antérieurement [n^{os} 50 et 53] entre le visseur et le vissage.

F. Klein propose de faire ressortir les analogies en convenant d'appeler les visseurs aussi bien que les vissages des *grandeurs hélicoïdales* et de faire ressortir les différences en distinguant les grandeurs hélicoïdales en deux espèces: les déplacements ou *vissages* seront des *grandeurs hélicoïdales de première espèce*, les systèmes de forces ou *visseurs* des *grandeurs hélicoïdales de deuxième espèce*.

Au point de vue analytique, l'analogie aussi bien que la différence proviennent de l'effet que produit sur ces grandeurs un changement de coordonnées. D'une part

$$p, q, r; \quad u, v, w$$

subissent, ainsi que

$$X, Y, Z; \quad L, M, N,$$

dans les rotations du trièdre des coordonnées les mêmes changements que des coordonnées ordinaires x, y, z .

D'autre part, dans une translation des axes parallèlement à eux-mêmes, les quantités

$$p, q, r \quad \text{et} \quad X, Y, Z$$

ne changent pas; au contraire, si a, b, c désignent les coordonnées de la nouvelle origine,

$$u, v, w$$

se changent en

$$u - cq + br, \quad v - ar + cp, \quad w - bp + aq,$$

et les quantités

$$L, M, N$$

se changent en

$$L - cY + bZ, \quad M - aZ + cX, \quad N - bX + aY.$$

L'analogie s'est maintenue jusqu'ici; mais si nous changeons le sens des axes, les quantités

p, q, r, u, v, w

se changent en

$p, q, r, -u, -v, -w$

tandis que les quantités

X, Y, Z, L, M, N

se changent en¹⁰⁸⁾

$-X, -Y, -Z, L, M, N.$

L'invariant simultané

$$uX + vY + wZ + pL + qM + rN$$

est donc une grandeur scalaire de première espèce.

Les grandeurs hélicoïdales de première espèce ont leur application immédiate en cinématique¹⁰⁹⁾; celles de deuxième espèce ne jouent pas un rôle moins important en statique dans la théorie des systèmes de forces agissant sur un corps solide. C'est ce qui a fait donner à ces dernières par *J. Plücker*¹¹⁰⁾ le nom de *dynames*: une dyname est donc représentée par le visseur résultant d'un système de forces données agissant sur un corps solide. Le système de forces peut être remplacé, sans changer la dyname, par un système équivalent. En particulier un couple est une dyname dont le paramètre est infini, une force est une dyname dont le paramètre est nul.

56. Comparaison des théories de Ball et de Study. *Si l'on compare la théorie de *R. S. Ball* à celle de *E. Study* on observe tout d'abord que *R. S. Ball* laisse toujours systématiquement de côté tous les cas particuliers qui peuvent se présenter, tandis que *E. Study* s'y attache tout spécialement. Comme ce sont précisément ces cas particuliers dont l'étude présente les plus grandes difficultés, la théorie de *R. S. Ball* se présente sous une forme bien plus abordable pour le plus grand nombre des lecteurs. *R. S. Ball* est essentiellement préoccupé du désir de faire ressortir les idées générales qui se trouvent au fond

108) *F. Klein* [Z. Math. Phys. 47 (1902), p. 243; Math. Ann. 62 (1906), p. 425; voir aussi plus loin n° 74] fait de plus observer qu'un changement dans l'unité de temps produit un changement inversement proportionnel sur p, q, r, u, v, w sans altérer X, Y, Z, L, M, N , et que si, comme c'est le cas le plus fréquent, le système de vecteurs donné est un système de forces, un changement dans l'unité de force produit un changement proportionnel sur X, Y, Z, L, M, N , sans altérer p, q, r, u, v, w .

109) Voir ce qui a été dit à ce sujet au n° 50. Voir surtout l'article IV 6.

110) Fundamental views regarding mechanics, Philos. Trans. London 156 (1866), p. 361; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 548.

de la mécanique ordinaire; il est parvenu à projeter une nouvelle lumière sur une théorie, celle de la mécanique ordinaire, déjà développée par le travail de plusieurs siècles. La théorie de *R. S. Ball* pourrait être exposée sous une forme purement géométrique; les énoncés qu'on obtiendrait ainsi seraient susceptibles d'une double interprétation, l'une cinématique, l'autre statique. Dans la suite de cet article nous emploierons de préférence le langage de la cinématique. *E. Study* fonde une théorie nouvelle qui, malgré les faits communs qu'elle présente avec celle de *R. S. Ball*, a un tout autre but et un caractère spécial. Les éléments géométriques que *E. Study* envisage sont des créations de son esprit; il en développe la théorie avec toutes ses conséquences en envisageant tous les cas spéciaux. Les éléments envisagés par *R. S. Ball* sont tous réels; *E. Study* tient compte des éléments imaginaires.

Enfin au point de vue cinématique, *R. S. Ball* n'envisage que des *mouvements infiniment petits*; au contraire *E. Study* développe la théorie des *déplacements finis*.

Au fond la théorie de *R. S. Ball* est une théorie abstraite de la *mécanique physique*, celle de *E. Study* est un nouveau chapitre de la *mécanique rationnelle* ou même plutôt de la *géométrie*.*

57. **Les vis réciproques.** Soient k et k' les *pas* ou *paramètres* de deux vis, φ l'angle de leurs deux axes supposés orientés comme au n° 51, d leur plus courte distance; soient enfin ρ et ρ' les *amplitudes* de deux vissages instantanés appartenant à ces vis, c'est-à-dire les nombres qui mesurent $\vec{\rho}$ et $\vec{\rho}'$ sur les axes fixés sur leurs supports. Les deux vissages sont définis par leurs coordonnées $u, v, \dots, u', v', \dots$; l'invariant simultané de ces deux vissages satisfait à la relation

$$pu' + qv' + rw' + up' + vq' + wr' = \rho\rho'[(k + k')\cos\varphi - d\sin\varphi].$$

R. S. Ball appelle *coefficient virtuel* des deux vis le facteur entre crochets, qui est indépendant des amplitudes¹¹¹). C'est le moment relatif de deux vecteurs d'intensités 1 portés par les deux vis.

Lorsque ce coefficient s'annule, les deux vis sont dites *réciproques*; une vis est déterminée lorsqu'elle est réciproque de cinq vis données.

111) *F. Klein* [Math. Ann. 2 (1870), p. 201, 368] a présenté d'abord la formule du texte comme moment relatif de deux complexes linéaires de droites. Si ce moment s'évanouit, *F. Klein* dit que les complexes sont en involution. Ainsi des complexes linéaires en involution correspondent à des vis réciproques. En particulier *F. Klein* étudie les systèmes de six complexes deux à deux en involution; ceci correspond au système coréciproque de six vis introduit plus tard par *R. S. Ball*.

Quand les deux vis coïncident le coefficient virtuel se trouve être le double du paramètre de la vis unique.

58. Coordonnées-vis et leurs transformations linéaires les plus générales. Une vis est déterminée par les rapports de cinq des quantités p, q, r, u, v, w à la sixième. Au lieu de se donner ces rapports, on peut se donner cinq relations linéaires et homogènes entre les mêmes quantités.

*F. Klein*¹¹²⁾ avait développé ce sujet en se plaçant au point de vue de la théorie des complexes.

*R. S. Ball*¹¹³⁾ de son côté était arrivé aux mêmes résultats de la manière suivante qui est plus directe.

Un déplacement hélicoïdal ou *vissage*¹¹⁴⁾ arbitraire Ω peut être d'une façon unique remplacé par six vissages qui appartiennent à six vis données

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6.$$

R. S. Ball appelle les amplitudes de ces vissages,

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6,$$

les *composantes* du vissage Ω par rapport aux six vis données. Introduisons en outre les six vis

$$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5, \eta_6,$$

définies comme réciproques des six groupes obtenus en associant les six vis données cinq à cinq, où η_i désigne la réciproque commune des cinq vis autres que ω_i , et représentons par

$$[\omega_i \eta_i]$$

le coefficient virtuel des vis ω_i et η_i . Soit enfin ϱ l'amplitude du vissage Ω qui a pour vis ω ; on trouve pour expression de ses six composantes

$$\xi_i = \varrho \frac{[\omega \eta_i]}{[\omega_i \eta_i]} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Les rapports de ces composantes doivent être considérés comme les coordonnées générales de la vis ω qui appartient au vissage Ω ; les valeurs absolues des ξ déterminent le vissage lui-même¹¹⁵⁾. On désigne

112) *Math. Ann.* 2 (1870), p. 198.

113) Il faut remarquer que *R. S. Ball* pour se donner une vis ne se sert pas des rapports des coordonnées mais la considère comme un vissage d'intensité = 1 (le signe restant, bien entendu, à déterminer).

114) Il en est évidemment de même du visseur.

115) *R. S. Ball*, *Trans. Irish Acad. Dublin* 25 (1874), p. 259; *Theory of screws*, (1^{re} éd.) 1876, p. 34; (2^e éd.) 1900, p. 36 (chap. IV).

ce vissage par le symbole

$$\varrho \omega,$$

considérant par là-même la vis ω comme un vissage d'amplitude 1.

Considérons un second vissage $\varrho' \omega'$ d'amplitude ϱ' ; nous entendrons par

$$\varrho \omega + \varrho' \omega'$$

le vissage (instantané) déterminé d'une façon unique qui remplace [n° 50] l'ensemble des vissages $\varrho \omega$ et $\varrho' \omega'$; ses coordonnées sont les sommes

$$\xi_\mu + \xi'_\mu.$$

Le carré de l'amplitude ϱ est une forme quadratique des six coordonnées

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6.$$

Le coefficient virtuel de deux vis ω et ω' se présente sous la forme

$$[\omega \omega'] = \frac{1}{\varrho \varrho'} \sum_{\mu, \nu} [\omega_\mu \omega_\nu] \xi_\mu \xi'_\nu.$$

Le paramètre k de la vis ω sera

$$k = \frac{1}{2 \varrho^2} \sum_{(\mu, \nu)} [\omega_\mu \omega_\nu] \xi_\mu \xi_\nu.$$

Un cas particulièrement intéressant est celui où les six vis ω_μ coïncident avec les six vis η_μ . Dans ce cas la vis ω_μ sera réciproque à chacune des cinq vis

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$$

distinctes de ω_μ , et l'on aura donc

$$[\omega_\mu \omega_\nu] = 0$$

pour μ différent de ν .

Un pareil système de six vis est appelé par *R. S. Ball* un *système coréciproque*.

Le coefficient virtuel $[\omega_\mu \eta_\mu]$ a alors pour valeur le double du paramètre k_μ de la vis ω_μ , et l'on trouve pour coordonnées de la vis ω

$$\xi_\mu = \varrho \frac{[\omega \omega_\mu]}{2k_\mu} \quad (\mu = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Désignons par

$$\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, \xi'_4, \xi'_5, \xi'_6$$

les coordonnées d'un second vissage $\varrho' \omega'$; le coefficient virtuel des deux vis ω et ω' sera

$$[\omega \omega'] = \frac{2}{\varrho \varrho'} \sum_{\mu=1}^{\mu=6} k_\mu \xi_\mu \xi'_\mu,$$

et le paramètre k_ω d'une vis ω

$$k_\omega = \frac{1}{\rho^2} \sum_{\mu=1}^{\mu=6} k_\mu \xi_\mu^2.$$

Une vis se réduit à une ligne droite (axe de la rotation à laquelle se réduit le vissage correspondant) lorsque la forme quadratique

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=6} k_\mu \xi_\mu^2$$

de ses coordonnées s'évanouit; elle est dextrorsum ou sinistrorsum suivant le signe de cette forme¹¹⁶).

59. Systèmes linéaires de vissages et leur interprétation dans le cas des corps gênés. Dans la théorie de *R. S. Ball*, la considération des systèmes linéaires de vissages joue un rôle important. Voici la définition de ces systèmes:

Soient

$$w_1, w_2, \dots, w_n \quad (n < 6),$$

n vissages d'amplitude 1; par définition les vissages compris dans la formule

$$w = \rho_1 w_1 + \rho_2 w_2 + \dots + \rho_n w_n$$

forment un système linéaire du $n^{\text{ième}}$ degré, ou de dimension $n - 1$; w_1, w_2, \dots, w_n constituent une base du système, et les mêmes locutions s'appliquent aux vis servant de support aux vissages précédents.

Ce système peut aussi être déterminé par $6 - n$ équations linéaires entre les coordonnées des vissages; on peut d'ailleurs substituer à w_1, w_2, \dots, w_n toute autre base formée par n vissages du système assujettis à la seule condition d'être linéairement indépendants, c'est-à-dire non contenus dans un même système linéaire de degré $n - 1$. Si n vis appartiennent au même système linéaire de degré $n - 1$, elles peuvent être prises comme supports de n vissages instantanés dont la succession ramène le corps à sa position initiale.

A tout système linéaire de vissages *R. S. Ball* associe le système de droites (de dimension $n - 1$) formé par les axes des vis du système.

Considérons maintenant un solide assujetti à des liaisons bilatérales et soit V_1 une vis quelconque.

Deux cas peuvent se présenter suivant qu'en l'instant t les liaisons imposées au solide permettent, ou non, un vissage instantané w_1 ayant V_1 comme support; d'ailleurs il est clair que si w_1 est compatible avec les liaisons il en sera de même de $\rho_1 w_1$.

Il existe au moins une vis V_1 jouissant de cette propriété; s'il

116) Cf. *F. Klein*, Math. Ann. 2 (1870), p. 198.

n'en existe qu'une on dit que le solide possède *un degré de liberté* ou est à *liaisons complètes*. Si non, soit V_2 une autre vis servant de support à un vissage permis par les liaisons; on pourra communiquer au solide tout vissage de la forme $q_1 w_1 + q_2 w_2$. En procédant ainsi de proche en proche on voit qu'à tout système de liaisons imposées à un solide correspond à chaque instant un système linéaire S de vissages instantanés

$$q_1 w_1 + q_2 w_2 + \dots + q_n w_n$$

de degré $n < 6$ et tel qu'en cet instant tout vissage de ce système soit compatible avec les liaisons, à l'exclusion de tout autre vissage. On dit alors que le système *possède n degrés de liberté*, ou que le *déplacement du corps est à n paramètres*.

Les vissages réciproques de l'ensemble des vissages de S forment un système linéaire de degré $6 - n$ qu'on appelle *système réciproque* du premier. La considération de ce système permet à *R. S. Ball* d'énoncer d'une façon très simple les conditions d'équilibre d'un solide assujetti à des liaisons quelconques et soumis à l'action d'un visseur [cf. n° 73].

Pour terminer ce chapitre, nous étudierons les systèmes de vis de différents degrés. Rappelons encore une fois qu'avec *R. S. Ball* nous considérons seulement des déplacements infiniment petits.

60. Systèmes de vis du deuxième degré. Le cylindroïde¹¹⁷⁾.

Si un corps a deux degrés de liberté, chacun de ses points peut se déplacer dans un plan. Dans le cas général où les axes des vis du système n'appartiennent pas tous à un même plan, il y a exception pour les points de deux droites réelles et distinctes D et Δ . Les points de chacune de ces droites ne peuvent que tourner autour de l'autre. Tout déplacement possible du corps peut être envisagé comme réduit à deux rotations effectuées successivement autour des axes de rotation D et Δ .

Le plan dans lequel un point peut se mouvoir est normal à la droite qui, menée par le point, rencontre les deux droites D et Δ ¹¹⁸⁾.

Si l'on se donne la direction du mouvement pour un seul des points du corps non situé sur les axes de rotation, le mouvement est entièrement déterminé.

Les droites invariablement liées au solide et qui peuvent être

117) *H. E. Timerding*, Geometrie der Kräfte, Leipzig 1908, p. 164/203.

118) *J. Steiner*, Ber. Akad. Berlin 1855, p. 255; *C. F. Geiser*, J. reine angew. Math. 90 (1880), p. 43. Voir aussi *A. Mannheim*, Bull. Soc. philomatique Paris (6) fasc. 3 (1866), p. 80.

associées à une droite g du solide pour former avec g un système d'axes instantanés de rotation dans un des mouvements possibles sont les génératrices d'un hyperboloïde réglé faisant partie du même système de génératrices que g . Cet hyperboloïde contient les droites D et Δ dans le même système de génératrices. La droite g est donc sa propre conjuguée dans un des mouvements¹¹⁹⁾.

Si nous considérons le système linéaire de vis du second degré correspondant, système que nous appellerons un *faisceau* de vis (*Schraubenreihe*), les axes de ces vis sont les génératrices d'une surface réglée du troisième degré que nous avons étudiée au n° 39 sous le nom de *cylindroïde*.

Voici comment, au point de vue actuel, s'obtiendra l'équation réduite de cette surface:

Prenons comme axe des z la normale commune aux axes de deux des vis qui définissent le faisceau. Sauf dans certains cas particuliers, il est possible et d'une seule manière de choisir l'origine des coordonnées et les directions des axes Ox et Oy de manière que les coordonnées de tous les vissages appartenant au faisceau satisfassent aux équations

$$u = \alpha p, \quad v = \beta q, \quad w = 0, \quad r = 0.$$

où les constantes α et β ont les dimensions d'une longueur. C'est là la forme canonique des équations du faisceau.

Les coordonnées p, q du vissage peuvent être choisies arbitrairement; les quatre autres coordonnées en résultent d'après les équations ci-dessus. Les coordonnées p, q peuvent donc être regardées comme les paramètres qui définissent le mouvement instantané du corps en tenant compte des liaisons. L'énergie cinétique est une fonction homogène et quadratique de ces paramètres.

Les axes de toutes les vis du faisceau coupent l'axe Oz à angle droit; leur position est donnée par les équations

$$\frac{x}{y} = \frac{p}{q}, \quad z = \frac{2mpq}{p^2 + q^2},$$

en posant $m = -\frac{\alpha - \beta}{2}$, et le paramètre de la vis correspondante, par

$$k = \frac{\alpha p^2 + \beta q^2}{p^2 + q^2}.$$

Si l'on pose

$$\frac{p}{q} = \cot \omega,$$

on a aussi

$$\frac{x}{y} = \cot \omega,$$

119) A. Thévenet, Thèse, Paris 1886, p. 86. Voir l'article IV 6.

en sorte que ω mesure l'angle que fait l'axe de la vis avec le plan Oxz . On a alors, pour l'élévation z de l'axe de la vis au dessus du plan Oxy ,

$$z = m \sin 2\omega$$

et pour paramètre correspondant

$$k = k_0 - m \cos 2\omega,$$

en écrivant, pour abrégé,

$$k_0 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

Enfin, l'équation du cylindroïde sera

$$z(x^2 + y^2) = 2mxy.$$

On voit que la surface est du troisième ordre et que tous les cylindroïdes sont semblables. Les dimensions du cylindroïde ne dépendent que de la longueur m .

Si α et β sont de signes contraires, il existe deux valeurs de ω pour lesquelles k s'annule. Chacun des axes correspondants tourne sans glissement autour de l'autre dans tous les vissages faisant partie du faisceau; on trouve donc ainsi les axes fixes des deux couples de rotations auxquelles les vissages du faisceau peuvent se réduire dans ce cas-là. On peut d'ailleurs le caractériser en disant que le faisceau contient alors des vissages de deux espèces (positifs et négatifs), tandis que dans tout autre cas il ne contient que des vissages d'une seule espèce.

Le maximé et le minimé de k correspondent à

$$\omega = 0 \quad \text{et} \quad \omega = \frac{\pi}{2};$$

ces valeurs donnent des vis dont les axes sont Ox et Oy . Nous appellerons ces axes les *axes principaux* du cylindroïde.

A chaque vis du faisceau en correspond une seconde qui a le même paramètre k . Nous appellerons *génératrices conjuguées* les axes de ces deux vis. Elles font avec les axes principaux des angles égaux et de sens contraires et leurs pieds sur l'axe des z sont symétriques par rapport à l'origine des coordonnées.

Comme k_0 reste arbitraire pour un cylindroïde donné, on voit qu'à chaque cylindroïde appartient une infinité simple de faisceaux de vis. Les paramètres des vis de l'un quelconque de ces faisceaux se déduisent de ceux des vis de tout autre d'entre eux par l'addition d'une même constante.

La configuration du cylindroïde (fig. 16) se déduit clairement des équations données. Tout le cylindroïde est compris entre les deux plans parallèles à Oxy dont la distance à O est égale à m . L'axe des z est une ligne double; par chaque point de cette ligne double contenu entre

les deux plans limites passent deux autres génératrices de la surface. Le plan de ces deux génératrices est parallèle aux axes principaux.

Les deux plans limites contiennent deux génératrices confondues. Tout plan Π mené par la ligne double et qui fait avec le plan Ozx l'angle ω contient une génératrice rectiligne qui est parallèle au plan Oxy et dont la cote par rapport à ce plan est

$$z = m \sin 2\omega.$$

On peut facilement se rendre compte de la distribution des paramètres sur les diverses génératrices. Rapportons le plan Π à deux axes rectangulaires Ok, Oz et considérons le point P de ce plan dont les coordonnées sont:

$$k = k_0 - m \cos 2\omega$$

et

$$z = m \sin 2\omega.$$

Ce point P est situé sur la génératrice du cylindroïde contenue dans Π , à une distance de l'axe égale au paramètre de la génératrice. D'autre part il appartient à la circonférence

$$(k - k_0)^2 + z^2 = m^2.$$

Concevons maintenant que le point P décrive la circonférence avec une vitesse angulaire w tandis que le plan Π tourne autour de la droite double avec une vitesse angulaire $\frac{w}{2}$, de manière que le point P arrive sur les axes principaux au moment où le plan contient ces axes, la perpendiculaire PM abaissée de P sur la droite double décrira le cylindroïde. Cette élégante construction est due à *C. T. Lewis*¹²⁰.

La longueur PM représente le paramètre de la vis qui a pour axe la génératrice PM , d'où le nom *d'axe des paramètres* donné à la droite double du cylindroïde. Toute génératrice du cylindroïde a pour image un point du cercle appelé pour cette raison *cercle-image*¹²¹). Soient P et P_1 les images de deux génératrices γ et γ_1 .

120) Messenger math. 9 (1879), p. 7.

H. E. Timerding [Geometrie der Kräfte, Leipzig 1908, p. 170] emploie les mots *Parameterachse* et *Bildkreis*. Voir au sujet de cette représentation du cylindroïde, *R. S. Ball*, Theory of screws, (2^e éd.) Cambridge 1900, p. 45/61.

121) *R. S. Ball*, Proc. Irish Acad. Dublin (2) 4 (1883), p. 29; Royal Irish Academy, Cunningham Memoirs n^o 4 (1887), p. 1/44; Theory of screws, (2^e éd.) 1900, p. 46 (chapitre V).

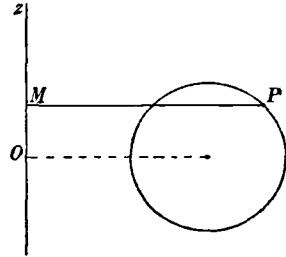


Fig. 16.

La plus courte distance de γ et γ_1 est mesurée par la longueur de la projection de PP_1 sur l'axe des paramètres tandis que l'angle de γ et γ_1 est égal à l'angle inscrit dans l'un des arcs PP_1 . La distance des deux perpendiculaires abaissées de deux points P et P_1 sur l'axe des paramètres mesure la plus courte distance des deux génératrices correspondantes du cylindroïde, tandis que l'angle de ces deux dernières est égal à l'angle que l'on obtient en joignant un point de la circonférence du cercle-image aux deux extrémités de l'arc PP_1 .

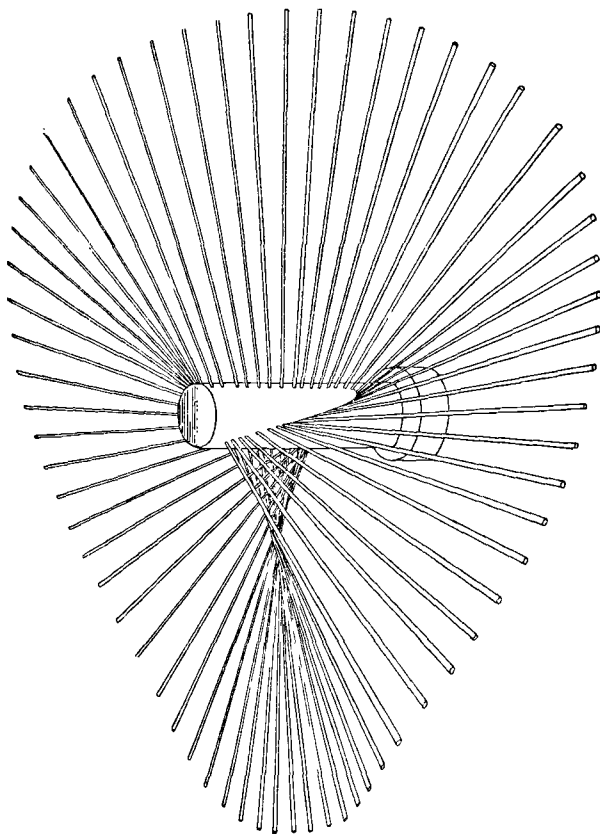


Fig. 17. Le cylindroïde.

La succession dans un ordre quelconque de trois vissages w_1, w_2, w_3 appartenant au faisceau de vis défini plus haut ramène le corps à sa première position quand l'amplitude de chacun de ces vissages est proportionnelle au sinus de l'angle des axes des deux autres vissages, ou, ce qui revient au même, si ces amplitudes sont proportionnelles

aux côtés du triangle qui a pour sommets, sur le cercle-image, les points représentatifs des axes des vissages.

Soit ρ_i l'amplitude du vissage w_i ($i = 1, 2, 3$), c'est-à-dire [n° 57] le nombre qui mesure $\vec{\rho}_i$ sur le support de w_i (considéré comme un axe dirigé); on a $p_i = \rho_i \cos \omega_i$, $q_i = \rho_i \sin \omega_i$, ω_i étant toujours l'angle de la direction positive du support de w_i avec Ox ; on a de plus [n° 60] $z_i = m \sin 2\omega_i$. Posons

$$d_1 = z_2 - z_3, \quad d_2 = z_3 - z_1, \quad d_3 = z_1 - z_2$$

de sorte que d_i mesure la distance des axes des vis autres que w_i ; posons aussi $\varphi_1 = \omega_2 - \omega_3$, $\varphi_2 = \omega_3 - \omega_1$, $\varphi_3 = \omega_1 - \omega_2$ et désignons par k_{ii} le paramètre de la vis qui supporte le vissage w_i et par $2k_{12}$ le coefficient virtuel des vis qui supportent w_1 et w_2 .*

On aura

$$\frac{\sin \varphi_1}{e_1} = \frac{\sin \varphi_2}{e_2} = \frac{\sin \varphi_3}{e_3}, \quad k_{33} = \frac{k_{11} e_1^2 + 2k_{12} e_1 e_2 + k_{22} e_2^2}{e_3^2},$$

et

$$-d_1 = \frac{e_1^2}{e_3^2} d_3 + \frac{e_1 e_2}{e_3^2} [d_3 \cos \varphi_3 + (k_{11} - k_{22}) \sin \varphi_3]$$

$$-d_2 = \frac{e_2^2}{e_3^2} d_3 + \frac{e_1 e_2}{e_3^2} [d_3 \cos \varphi_3 + (k_{22} - k_{11}) \sin \varphi_3]$$

équations compatibles avec la relation $d_1 + d_2 + d_3 = 0$. *On peut d'ailleurs remplacer les deux dernières formules par d'autres plus simples

$$d_1 = \frac{e_1}{e_3} [d_3 \cos \varphi_2 - (k_{11} - k_{22}) \sin \varphi_2],$$

$$d_2 = \frac{e_2}{e_3} [d_3 \cos \varphi_1 - (k_{22} - k_{11}) \sin \varphi_1].*$$

Ces théorèmes sont la généralisation due à *R. S. Ball* des propositions classiques de la théorie des vecteurs liés. Ils permettent, comme on voit, de décomposer un vissage arbitraire d'amplitude ρ appartenant à un faisceau de vissages en deux vissages quelconques du faisceau, par exemple en deux vissages d'amplitudes $\rho \cos \omega$ et $\rho \sin \omega$ supportés par deux vis dont les axes respectifs sont les axes principaux et qui ont été désignées par *R. S. Ball* sous le nom de *vis principales*¹²²). *Cette décomposition n'est d'ailleurs qu'un cas particulier de celle du n° 58¹²³.*

61. Systèmes de vis du troisième degré¹²⁴). Si un corps possède trois degrés de liberté, les coordonnées de ses points dépendent de

122) En anglais *principal screws* [*R. S. Ball, Theory of screws*⁶²], (2^e éd.) p. 21].

123) *E. Wölffing* et *E. Lampe* [*Archiv Math. Phys.* (3) 2 (1902), p. 228/9] ont réuni un grand nombre de renseignements bibliographiques concernant le cylindroïde.

124) *R. S. Ball, Trans. Irish Acad. (Dublin)* 25 (1875), p. 191 [1871]; 29 (1887/92), p. 247 [1888]; *Theory of screws*⁶³), (1^{re} éd.) p. 116/45; (2^e éd.) p. 170/217.

trois paramètres et un point quelconque du solide peut occuper une position arbitraire; en particulier ce point peut passer de sa position actuelle à une position quelconque infiniment voisine. Mais ce passage à la position voisine ne peut être obtenu que par un seul des déplacements possibles: si l'on fixe la direction dans laquelle un seul point se meut, le mouvement du corps est entièrement déterminé.

Les axes de coordonnées rectangulaires auxquels nous rapporterons le système peuvent être choisis, dans le cas général (c'est-à-dire exception faite de quelques dispositions particulières), de manière à être les axes de trois des vissages du système. Soient α, β, γ les paramètres des vis correspondantes; les coordonnées d'un vissage quelconque du système satisferont aux équations

$$u = \alpha p, \quad v = \beta q, \quad w = \gamma r.$$

Les coordonnées d'un vissage du système réciproque de vis, qui est également du troisième degré, vérifient les trois équations

$$u = -\alpha p, \quad v = -\beta q, \quad w = -\gamma r.$$

Les axes de toutes les vis du premier système auxquelles appartient un paramètre déterminé k sont sur une surface réglée du second ordre et constituent le premier système de génératrices de cette surface, tandis que les axes des vis du système réciproque ayant pour paramètre $-k$ constituent le second système de génératrices.

Cette surface réglée a pour équation

$$(k - \alpha)x^2 + (k - \beta)y^2 + (k - \gamma)z^2 + (k - \alpha)(k - \beta)(k - \gamma) = 0.$$

Faisons varier k ; l'équation précédente représentera un faisceau de surfaces coaxiales, concentriques et admettant les mêmes plans de sections circulaires. Il résulte immédiatement des équations ponctuelle et tangentielle de chacune de ces surfaces que, par un point arbitraire, passent trois axes de vis du système et qu'un plan arbitraire contient deux axes de vis.*

R. S. Ball distingue en particulier celle de ces surfaces qui correspond au paramètre $k=0$ et qu'il appelle *pitch quadric*¹²⁵⁾ [*surface-paramètre*]; nous dirons plutôt: *surface fondamentale*. Cette surface détermine complètement le système de vis; elle a pour équation:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \alpha \beta \gamma = 0.$$

125) *Theory of screws*⁶²⁾, (1^{re} éd.) p. 119; (2^e éd.) p. 172. La surface n'est pas autre chose que le lieu des droites communes aux complexes linéaires qui correspondent aux vis du système. L'étude de ce lieu avait été faite antérieurement par *J. Plücker*, *Neue Geometrie des Raumes*, Leipzig 1869, p. 130 [1868].

Chaque point de cette surface ne peut se déplacer que dans un plan.

On en déduit une représentation géométrique des liaisons imposées au solide en cet instant: soient en effet A, B, C trois points quelconques de la surface fondamentale Q n'appartenant pas tous trois à un même plan tangent de Q et soient $(a), (b), (c)$ les trois génératrices de Q passant respectivement par A, B, C et appartenant au système réciproque de vis. Pour définir les liaisons du solide il suffira d'assujettir A, B, C à ne pas quitter trois plans normaux respectivement à $(a), (b), (c)$. Réciproquement, si trois points d'un solide sont assujettis à rester dans trois plans, on connaît par cela même trois génératrices de la surface fondamentale Q et par suite la surface Q et le système de vis¹²⁶).

D'après les équations données précédemment pour les coordonnées des vis du système, le paramètre de l'une quelconque de ces vis a pour expression

$$k = \frac{\alpha p^2 + \beta q^2 + \gamma r^2}{p^2 + q^2 + r^2}.$$

Le paramètre k d'une vis du système dont l'axe a une direction donnée est donc lié au demi-diamètre d parallèle de la surface fondamentale par la relation

$$k = -\frac{\alpha\beta\gamma}{d^2},$$

tandis que, pour le système réciproque, le paramètre k' appartenant à l'axe parallèle sera

$$k' = \frac{\alpha\beta\gamma}{d^2},$$

c'est-à-dire égal et de signe contraire au premier, comme on devait s'y attendre [n° 57].

Les axes de deux vis réciproques du système sont parallèles à deux diamètres conjugués de la surface fondamentale.

Les axes de trois vis du système deux à deux réciproques seront parallèles à trois diamètres conjugués de la surface fondamentale; d'où cette conséquence: la somme des inverses des paramètres de trois vis du système deux à deux réciproques est constante. En particulier les axes principaux de la surface sont les axes de trois vis du système deux à deux réciproques, et de paramètres α, β, γ : *R. S. Ball* les nomme les *vis principales* du système.

*On désigne le centre de la surface fondamentale sous le nom de

126) *A. Mannheim*, J. Éc. polyt. (1) cah. 43 (1870), p. 93.

centre du système de vis et l'on dit aussi que le système est centré. On peut déterminer le centre d'un système centré, sans connaître la surface fondamentale par le procédé suivant: Soient V_1 et V_2 deux vis quelconques du système; leur perpendiculaire commune (p) appartient comme axe de vis au système réciproque et coupe à angle droit une infinité d'axes de vis du premier système. Ces axes sont les génératrices d'un cylindroïde dont (p) est la droite double. Parmi ces génératrices il y en a deux qui forment avec (p) un trièdre trirectangle; le plan de ces deux génératrices passe par un point indépendant de V_1 et V_2 ; ce point est précisément le centre du système.

Réciproquement les deux axes de vis du système de vis contenus dans un plan P mené par le centre du système sont rectangulaires.

Lorsque P tourne autour du centre, le point d'intersection des deux axes décrit une surface de Steiner. On sait que cette surface est du quatrième ordre et possède trois droites doubles concourantes; ici les trois droites doubles sont les trois axes principaux du système. Quant à la surface précédente elle a reçu le nom de *surface nodale* du système de vis.

De même, les pieds des perpendiculaires abaissées du centre du système de vis sur les axes des vis du système sont sur une surface de Steiner admettant les mêmes droites doubles que la précédente. On l'appelle la *surface podaire* du système.

L'équation de la surface nodale est

$$(\beta - \gamma)^2 y^2 z^2 + (\gamma - \alpha)^2 z^2 x^2 + (\alpha - \beta)^2 x^2 y^2 - (\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)(\alpha - \beta)xyz = 0;$$

l'équation de la surface podaire est

$$(\beta - \gamma)^2 y^2 z^2 + (\gamma - \alpha)^2 z^2 x^2 + (\alpha - \beta)^2 x^2 y^2 + (\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)(\alpha - \beta)xyz = 0.$$

On voit que la surface podaire du système réciproque d'un système (S) est la surface nodale de ce système (S); et qu'inversement la surface nodale d'un système réciproque d'un système (S) est la surface podaire du système (S)¹²⁷.

Les axes de vis du système (S) forment une congruence du troisième ordre et de la seconde classe: Chacun des axes touche la

127) Dans une lettre à *R. S. Ball*, *Ch. J. Joly* a généralisé ainsi ces propositions: le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque M sur les axes des vis d'un système est une *surface de Steiner* admettant pour droites doubles les axes des vis du système passant par M ; cette surface est également le lieu des intersections des axes du système réciproque contenu dans un plan variable passant par M [cf. *R. S. Ball*, *Theory of screws*⁶², (2^e éd.) p. 132, en note].

surface focale de la congruence en deux points et la coupe encore en deux points.

La surface focale est donc du sixième ordre; son équation est

$$(x^2 + y^2 + z^2 + \beta' \gamma' + \gamma' \alpha' + \alpha' \beta')^3 - \frac{27}{4} (\alpha' x^2 + \beta' y^2 + \gamma' z^2 + \alpha' \beta' \gamma')^2 = 0,$$

où l'on a posé

$$\alpha - \alpha' = \beta - \beta' = \gamma - \gamma' = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}.$$

La surface est de la quatrième classe et possède six points-coniques distribués deux à deux sur les axes principaux, mais dont deux seulement sont réels et ont pour coordonnées (dans l'hypothèse $\alpha > \beta > \gamma > 0$)

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= \pm \sqrt{-(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Elle possède, en outre, pour courbe triple l'ombilicale et pour ligne double la conique sphérique (Σ)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + \beta' \gamma' + \gamma' \alpha' + \alpha' \beta' = 0 \\ \alpha' x^2 + \beta' y^2 + \gamma' z^2 + \alpha' \beta' \gamma' = 0; \end{cases}$$

de plus les deux plans tangents en un point quelconque M de (Σ) aux deux nappes de la surface passant par (Σ) sont confondus et les trois axes de vis qui passent par M sont confondus.

La surface focale du système réciproque de (S) est la même que celle de (S). Les droites des deux congruences précédentes peuvent être représentées très simplement à l'aide des points d'un plan. *R. S. Ball*¹²⁸⁾ s'est servi de cette méthode pour étudier les systèmes de vis du troisième degré.*

62. Systèmes de vis du quatrième degré. Un système linéaire de vis du quatrième degré¹²⁹⁾ est toujours réciproque d'un faisceau de vis. La droite double du cylindroïde qui appartient à ce dernier faisceau jouit de la propriété que le corps, en vertu de ses quatre degrés de liberté, peut tourner autour de cette droite et se déplacer parallèlement à elle d'une manière quelconque; c'est la seule droite jouissant de cette propriété. On peut l'appeler *l'axe fondamental du système du quatrième degré*.

128) Au sujet de la congruence des axes, voir *E. Wälsch* [Sitzgsb. Akad. Wien 95 II (1887), p. 781], *Ch. J. Joly* [Trans. Irish Acad. (Dublin) 30 (1892/6), p. 597/9 [1894]], *E. Study* [Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, p. 460/512], *H. E. Imerring* [Geometrie der Kräfte, Leipzig 1908, p. 203 et suiv.].

129) *R. S. Ball*, *Theory of screws*⁶²⁾, (1^{re} éd.) p. 146; (2^e éd.) p. 219.

Les axes de tous les vissages qu'on peut imprimer au corps forment un complexe quadratique spécial de droites, qui a été étudié par *R. d'Emilio*¹³⁰). On trouve le même complexe en considérant toutes les droites qui rencontrent deux génératrices conjuguées [n° 60] du cylindroïde correspondant au faisceau de vis réciproque. Ce complexe quadratique se compose donc d'une infinité de congruences linéaires. Les vis qui appartiennent à l'une de ces congruences ont toutes le même paramètre et ce paramètre est égal et de signe contraire à celui des deux vis du faisceau réciproque qui ont pour axes les deux directrices de la congruence¹³¹). L'axe fondamental du système est rencontré par une double infinité de droites du complexe quadratique; par chacun de ses points passent des droites, en nombre simplement infini, situées dans deux plans menés par l'axe.

Choisissons comme axes des x et des y les axes des vis principales du faisceau réciproque, et soient α, β les paramètres de ces vis. Le système linéaire de vis du quatrième degré sera représenté par les deux équations

$$u = -\alpha p, \quad v = -\beta q;$$

l'équation du complexe quadratique sera

$$(\alpha - \beta)XY + LY - MX = 0,$$

où X, Y, Z, L, M, N désignent les coordonnées pluckériennes de la droite. La conique du complexe située dans un plan est une parabole; en d'autres termes, les droites infiniment éloignées font partie du complexe.

*Pour étudier de plus près le système de vis, on peut représenter les différentes vis du système par les points de l'espace. C'est ce qu'on fait de la manière la plus simple en posant

$$x = \frac{p}{w}, \quad y = \frac{q}{w}, \quad z = \frac{r}{w}.$$

Alors les points (x, y, z) qui correspondent aux vis du système pour lesquelles le paramètre a la valeur k seront situés sur le parabololoïde

$$(k + \alpha)x^2 + (k + \beta)y^2 + kz^2 = z.$$

En particulier les points qui correspondent aux vis de paramètre nul

130) *Atti Ist. Veneto* (6) 3 (1884/5), p. 1135.

131) Tandis qu'en général les droites du complexe quadratique qui passent en un point P se trouvent sur un véritable cône du second degré, ce cône se décompose en deux plans pour les points P d'une certaine surface du quatrième ordre que *F. Klein* appelle la *surface des singularités du complexe*. Pour le complexe spécial étudié par *R. d'Emilio*, cette surface se décompose dans le cylindroïde et dans le plan de l'infini.

se trouveront sur la surface

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = z$$

que nous appellerons encore *surface fondamentale*.

Pour les points (x, y, z) et (x', y', z') qui correspondent à deux vis *réciroques* du système on a la relation simple que voici:

$$\alpha x x' + \beta y y' = \frac{1}{2}(z + z'),$$

qui met en évidence que ces points sont conjugués par rapport à la surface fondamentale¹³².*

63. Systèmes de vis du cinquième degré. Les vis d'un système linéaire quelconque du *cinquième degré*¹³³) sont toutes réciroques d'une vis déterminée η . Chaque droite de l'espace peut être prise comme axe d'une vis θ du système.

Soient k_0 le paramètre de la vis η , d la plus courte distance des axes de θ et η , φ leur angle, k le paramètre de la vis θ : on a, en annulant le coefficient virtuel des deux vis¹³⁴),

$$k = d \operatorname{tang} \varphi - k_0.$$

A un paramètre k correspond un complexe linéaire de vis du système; le plan du complexe qui a pour foyer un point donné P contient la perpendiculaire abaissée du point P sur l'axe de la vis η . Soit φ son angle avec l'axe, d la distance de P à cet axe; on a

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{k + k_0}{d}.$$

W. Thomson et *P. G. Tait*¹³⁵) ont imaginé un mécanisme à l'aide

132) Cf. *H. E. Timerding*, *Geometrie der Kräfte*, Leipzig 1908, p. 226 et suiv.

133) *R. S. Ball*, *Theory of screws*⁶²), (1^{re} éd.) p. 161; (2^e éd.) p. 246.

134) Si l'on considère toutes les droites qui passent par un point fixe P situé à une distance h de η et si l'on porte sur ces droites à partir de P un segment égal à $k_0 + k$, le lieu de l'extrémité de ce segment est une surface du quatrième ordre. L'équation de cette surface s'obtient de la manière la plus simple si l'on prend comme origine des coordonnées le point P , pour axe des z une parallèle à l'axe de la vis η , et pour axe des y la perpendiculaire abaissée de P sur η . On a alors

$$d \operatorname{tang} \varphi = \frac{hx}{z},$$

et l'équation de la surface est

$$(x^2 + y^2 + z^2)z^2 = h^2x^2.$$

R. S. Ball [*Trans. Irish Acad. (Dublin)* 25 (1875), p. 157 [1871]] appelle cette surface *pecténoïde* [id. p. 168] à cause de sa ressemblance avec les coquilles appelée „peigne“. L'axe des y est une ligne double de la surface, et les deux coquilles se coupent suivant cette droite.

135) *Treatise on natural philosophy*, (2^e éd.) 1¹, Cambridge 1879, p. 155.

duquel on peut, de la manière la plus générale, communiquer à un corps cinq degrés de liberté. Ce mécanisme se compose simplement de deux joints de Cardan (dés de Hooke) reliés à une vis autour de laquelle le corps peut prendre un mouvement hélicoïdal.

64. Homographie dans les systèmes de vis. Les besoins de la mécanique des corps solides ont amené *R. S. Ball*¹³⁶⁾ à étudier encore d'une manière plus approfondie la géométrie des vis, considérées comme éléments d'un espace supérieur et, en particulier, à envisager la *géométrie projective de cet espace*. On peut s'en rendre compte de la manière suivante:

Considérons deux vis ω, ω' ; soient k et k' leurs paramètres, $[\omega, \omega']$ leur coefficient virtuel, (ω, ω') un angle défini par la formule¹³⁷⁾

$$\cos(\omega \omega') = \frac{[\omega, \omega']}{2\sqrt{kk'}}.$$

Appelons *rapport anharmonique* de quatre vis 1, 2, 3, 4 d'un faisceau prises dans cet ordre l'expression

$$\frac{\sin(1, 2) \cdot \sin(3, 4)}{\sin(1, 3) \cdot \sin(2, 4)}.$$

Nous dirons que deux faisceaux de vis sont *projectifs* lorsque le rapport anharmonique de quatre vis de l'un sera égal au rapport anharmonique des quatre vis correspondantes de l'autre. Deux systèmes quelconques de vis, d'égales dimensions, sont *reliés homographiquement* si les vis des deux systèmes se correspondent univoquement de manière que chaque faisceau de vis d'un système soit relié projectivement à un faisceau du second système. Il s'ensuit que les coordonnées des vis d'un système sont des fonctions linéaires et homogènes des coordonnées des vis de l'autre système: on en déduit l'expression analytique de la correspondance homographique.

Si l'on transforme homographiquement en lui-même l'ensemble de toutes les vis, il existe en général six vis que cette transformation n'altère pas et la transformation est complètement définie lorsque à sept vis non liées linéairement on fait correspondre sept vis données.

Considérons maintenant un *système quadratique de vis du cinquième degré* défini par une équation homogène du second degré

$$T = 0$$

entre les six coordonnées-vis ξ_μ . *R. S. Ball* appelle *vis polaires* par

¹³⁶⁾ Proc. Irish Acad. [Dublin] (2) 3 [science] (1877/83), p. 435 [1881]; Theory of screws⁹³⁾, (2^e éd.) p. 262.

¹³⁷⁾ Cf. *F. Klein*, Math. Ann. 5 (1872), p. 271.

rapport à ce système quadratique deux vis dont les coordonnées θ_μ et ξ_μ sont reliées par l'équation bilinéaire

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=6} \xi_\mu \frac{\partial T}{\partial \theta_\mu} = 0.$$

A toutes les vis ξ ainsi définies correspond une seule vis réciproque η . Si les vis fondamentales qui servent de support aux coordonnées ξ et θ forment un système coréciproque et si k_1, k_2, \dots sont leurs paramètres, les coordonnées η_μ de la vis η sont données par l'équation

$$H\eta_\mu = \frac{1}{k_\mu} \frac{\partial T}{\partial \theta_\mu} \quad (\mu = 1, 2, 3, 4, 5, 6),$$

où H désigne un facteur commun réel. Ce facteur est choisi de telle sorte que la vis η puisse être considérée comme un vissage d'amplitude égale à 1 [n° 58].

On obtient de cette manière une correspondance homographique particulière que *R. S. Ball* appelle *homographie chiasique*. Son caractère distinctif consiste en ce que, si deux vis η et η' correspondent à deux vis θ et θ' et si η et θ' sont réciproques, η' et θ le sont aussi. Soit η'', θ'' un troisième couple de vis correspondantes, on démontre aisément la formule

$$[\eta\theta'][\eta'\theta''][\eta''\theta] = [\eta\theta''][\eta'\theta][\eta''\theta'],$$

les crochets désignant toujours des coefficients virtuels¹³⁸). D'après cette équation, le crochet $[\eta'\theta]$ s'annule quand le crochet $[\eta\theta'] = 0$.

On peut, en général, sans que les vis fondamentales cessent d'être réciproques deux à deux, mettre l'expression fondamentale T sous la forme

$$T = \sum_{\mu=1}^{\mu=6} \alpha_\mu \eta_\mu^2.$$

138) C'est ce qu'on démontre par exemple de la façon suivante: partons de la forme canonique des équations données dans le texte pour cette homographie, et écrivons la même formule pour une nouvelle paire de vis correspondantes η' et θ'

$$H' \eta'_\mu = \frac{\alpha_\mu \theta'_\mu}{2k_\mu},$$

on tire de ces deux formules l'identité [cf. n° 58]

$$H[\eta\theta'] = \frac{2H}{\varrho\varrho'} \sum_{\mu=1}^{\mu=6} k_\mu \eta_\mu \theta'_\mu = \frac{2H'}{\varrho\varrho'} \sum_{\mu=1}^{\mu=6} k'_\mu \eta'_\mu \theta_\mu = H'[\eta'\theta].*$$

Adjoignons-y deux équations analogues fournies par l'introduction d'une troisième paire de vis η'', θ'' , et multiplions membre à membre les trois équations; nous obtenons alors la formule du texte.

On a alors

$$H\eta_{\mu} = \frac{\alpha_{\mu}\theta_{\mu}}{2k_{\mu}} \quad (\mu = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

et l'on voit ainsi que les vis qui se correspondent à elles-mêmes forment, dans le cas de l'homographie chiasmatique, un système coréci-proque. Si la forme quadratique T est une forme définie, les vis qui se correspondent à elles-mêmes sont réelles¹³⁹).

Caractères fondamentaux de la statique élémentaire.

65. L'idée de force en statique. L'origine de l'idée de force est étudiée dans l'article IV 1; nous rappellerons ici comment elle s'introduit en statique.

Lorsqu'on cherche à transporter un fardeau, à tendre un ressort, à maintenir un poids à la même hauteur ou un arc tendu, on constate que chaque fois il faut dépenser un certain effort musculaire. L'expérience nous apprend à distinguer ces efforts par leurs intensités, les directions dans lesquelles ils s'exercent et les points matériels sur lesquels ils sont appliqués. On va voir comment de cette notion d'effort, trop vague pour être utilisée dans les raisonnements, dérive la notion précise de force.

*Considérons un corps solide (C) qui, sous l'influence d'une cause quelconque tend à quitter sa position d'équilibre: tel est le cas d'un pendule électrique dans le voisinage duquel on approche un conducteur chargé. En un point A du solide (C) fixons l'une des extrémités d'un fil inextensible AD et tirons sur l'autre extrémité D du fil de façon à maintenir le solide (C) en équilibre; ce résultat exige la dépense d'un certain effort dont nous allons préciser la direction, le point d'application et l'intensité.

Tout d'abord, l'habitude nous apprend à localiser notre effort dans une direction plus ou moins bien définie mais en tous cas très voisine de celle du fil; il est donc naturel de prendre la direction AD du fil tendu, susceptible d'être repérée avec précision, comme direction de notre effort. Pour une raison analogue nous prendrons le point A comme point d'application de l'effort exercé sur le corps par l'intermédiaire du fil. Quant à l'intensité de cet effort il sera commode de l'évaluer de la façon suivante:

Plaçons en un point B du fil AD [fig. 18] une poulie très petite sur laquelle pourra passer le fil; elle le divisera en deux brins AB , BD dont le second pourra tourner autour de la poulie. Or, autant

¹³⁹) Cette théorie trouve son emploi dans la cinématique des solides [IV 6].

qu'on peut en juger approximativement, l'expérience montre que, quelle que soit la position du brin BD , il faut toujours dépenser un effort de la même intensité pour maintenir le corps (C) en équilibre: il est donc loisible de supposer le second brin BD dirigé suivant le nadir, et alors on peut maintenir le corps (C) en équilibre sans aucun effort, à condition de fixer à l'extrémité D du fil un corps pesant de poids P convenablement choisi. L'expérience montre d'ailleurs que le poids P est d'autant plus grand que l'effort exercé précédemment est plus considérable: il est donc naturel de prendre le poids P comme mesure précise de l'intensité de l'effort.

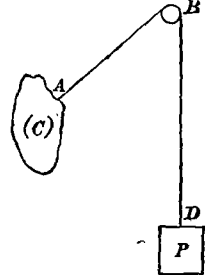


Fig. 18.

On peut encore maintenir l'équilibre du solide (C) en faisant agir d'autres causes qu'un effort musculaire: par exemple la tension d'un ressort ou d'un fil élastique, la compression d'un gaz, etc. Pour chacune de ces causes nous pourrions effectuer des mesures analogues à celles qui ont été faites pour l'effort musculaire.

Il se pourrait d'ailleurs que ces expériences soient quelquefois difficiles à réaliser; pourtant il nous suffit d'en concevoir la possibilité pour avoir le droit d'associer à tout effort musculaire, ou plus généralement, à toute cause susceptible du même effet, un point de l'espace, une direction et un nombre positif, autrement dit *un vecteur lié*.

Par définition, nous appellerons *force le vecteur lié* \vec{F} , d'origine A , dirigé suivant AB et de longueur P , et nous dirons qu'on a appliqué la force \vec{F} au point A .

D'après cette définition une force est une grandeur de même dimension qu'un poids (en particulier l'unité de force est l'unité de poids). Nous allons préciser les conséquences qui en résultent pour les coordonnées du vecteur \vec{F} .*

66. Coordonnées de la force. Soient x, y, z les coordonnées du point A ; x', y', z' celles du point B et l la longueur du vecteur AB ; les coordonnées de la force seront

$$X = \frac{P}{l}(x' - x), \quad Y = \frac{P}{l}(y' - y), \quad Z = \frac{P}{l}(z' - z),$$

$$L = \frac{P}{l}(yz' - zy'), \quad M = \frac{P}{l}(zx' - xz'), \quad N = \frac{P}{l}(xy' - yx').$$

Si l'on remplace les unités de longueur et de poids par des unités respectivement λ fois et μ fois plus petites, les coordonnées X, Y, Z seront multipliées par μ et les coordonnées L, M, N par $\lambda\mu$ tandis

que les coordonnées correspondantes du vecteur AB seront multipliées par λ et λ^2 .*

67. Le principe fondamental de la statique. Le parallélogramme des forces. *On vient de voir que la force \vec{F} fournit une représentation claire et précise de l'effort. Montrons maintenant le rôle que joue en statique la théorie des vecteurs appliquée aux forces.

Tout d'abord le principe fondamental de la statique s'énonce très simplement dans le langage de la géométrie des vecteurs.

Considérons un ensemble quelconque de points matériels sollicités à quitter leurs positions d'équilibre et supposons qu'il soit possible de maintenir l'équilibre de l'un de ces points A en appliquant en A deux forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 . On peut se demander (ce qui n'est pas évident a priori) s'il existe une force \vec{F} unique appliquée en A qui soit équivalente à l'ensemble des deux forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 , c'est-à-dire telle qu'on puisse supprimer \vec{F}_1 et \vec{F}_2 en adjoignant \vec{F} , sans détruire l'équilibre.

La réponse à cette question est donnée par le principe fondamental de la statique qui permet en outre de construire le vecteur \vec{F} .

Nous énoncerons ce principe, appelé aussi *règle du parallélogramme des forces*, de la façon suivante:

*Pour qu'une force soit équivalente à un système formé par deux forces \vec{F}_1 , \vec{F}_2 appliquées en un même point d'un système matériel, il faut et il suffit qu'elle coïncide avec la somme géométrique de ces deux forces.**

Plusieurs auteurs ont considéré ce principe comme une vérité expérimentale dont la vérification est aisée¹⁴⁰). C'est en se plaçant à ce point de vue que *P. Varignon*¹⁴¹) mettait la règle du parallélogramme à la base de la statique. Avant lui, *S. Stevin*¹⁴²) avait déjà remarqué

140) *Ch. N. Peaucellier* a construit pour cela un appareil qui se trouve au Conservatoire national des Arts et Métiers, à Paris.

141) Nouvelle mécanique⁴⁴) 1, Paris 1725. A la même époque plusieurs géomètres se sont occupés de cette même question. Ainsi *I. Newton* [Philos. naturalis principia math., Londres 1687, Axiomes, Corollaire 1, p. 13; (2^e éd.) Cambridge 1713, p. 13; éd. *S. Horsley* 2, Londres 1779, p. 15; éd. avec commentaires par *T. Le Seur* et *F. Jacquier* 1, Genève 1739, p. 24; trad. par *G. E. de Breteuil*, marquise du Châtelet 1, Paris 1759, p. 19] a donné l'origine cinétique de la loi du parallélogramme déduit du parallélogramme des mouvements et *B. Lamy* fit paraître un mémoire [Nouvelle manière de démontrer les principaux théorèmes des élémens des mécaniques, Paris 1687] où la même loi était établie. Voir *J. L. Lagrange*, Mécanique analytique (1^{re} éd.) 1, Paris 1788 (introduction); (2^e éd.) 1, Paris 1811; (3^e éd.) 1, Paris 1853, p. 10/7; Œuvres 11, Paris 1888, p. 11/9.

142) De Beghinselen der Weeghconst, Leyde 1586; Œuvres math., éd. *A. Givard*, Leyde 1634, p. 448/9.

qu'un point soumis à l'action de trois forces reste en équilibre, si ces trois forces sont dans un même plan et si, de plus, avec trois vecteurs équipollents à ces forces on peut former un triangle.

*Mais ce fait expérimental est au fond très complexe et les efforts des géomètres modernes ont eu pour objet de l'analyser et de réduire autant que possible l'emprunt fait à l'expérience. Les uns ont admis en s'appuyant sur des raisons de symétrie, que la résultante de deux forces d'intensités égales appliquées en un même point est située dans le plan de leurs supports et dirigée suivant la bissectrice de leur angle; ils ont ensuite essayé de démontrer sans nouvel appel à l'expérience la règle du parallélogramme¹⁴³).

D'autres ont postulé que deux forces appliquées en un même point peuvent être remplacées d'une seule manière par une seule force et ont alors établi, par des considérations de symétrie et en s'appuyant, à l'exemple de *Daviet de Foncenex*¹⁴⁴), sur les propriétés des équations fonctionnelles, la règle du parallélogramme.

Des démonstrations de ce genre ont été données par *A.F. Möbius*¹⁴⁵), *L. Poinsot*¹⁴⁶) et, après eux, par de nombreux géomètres.

*G. Darboux*¹⁴⁷) a, en quelque sorte, mis fin à ces recherches en analysant d'une manière précise et complète le caractère logique et mécanique que doit avoir chaque démonstration et les hypothèses sur lesquelles elle repose nécessairement. Il est également impossible de démontrer le principe par le raisonnement et par l'expérience. Comme les autres principes de la Mécanique et de la Physique, on l'admet parce que toutes les conséquences vérifiables qu'on peut en déduire ont été confirmées par l'expérience.*

68. Le corps solide. *Il résulte du principe fondamental que toute proposition obtenue dans la théorie des vecteurs possède une signification statique. Ainsi, pour qu'un système de forces appliquées en un point *A* d'un corps (*C*) soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme géométrique des forces soit nulle.

Par définition, le corps solide de la statique élémentaire est un

143) *La règle du parallélogramme des forces a été donnée au moyen-âge par *Léonard de Vinci*, comme l'a rappelé *P. Duhem* [Les origines de la statique, Paris 1905, p. 170/81; cf. *Bibl. math.* (3) 4 (1903), p. 338/43].*

144) **Misc. Taurinensia* (Mélanges de philos. et de math. Soc. Turin) 2 (1760/1), éd. 1762, math. p. 299/322.*

145) **Lehrbuch der Statik* 1, Leipzig 1837; *Werke* 3, Leipzig 1886, p. 43.*

146) *Éléments de statique, (1^{re} éd.) Paris an XII; (2^e éd.) Paris 1811, p. 31; (9^e éd.) Paris 1848, p. 35.*

147) **Bull. sc. math.* (1) 9 (1875), p. 281.*

système de points matériels dont les distances mutuelles sont assujetties à rester invariables. Bien entendu, un tel corps est une abstraction, tout corps se déformant plus ou moins sous l'action des forces qui lui sont appliquées, et l'étude de ces déformations constitue l'objet de la théorie de l'élasticité. Mais, pour les corps appelés solides dans le langage courant, ces déformations sont très petites et peuvent être négligées dans une première étude, à condition que les forces agissantes données ne soient pas trop grandes. On peut donc les assimiler sans erreur sensible au solide idéal défini plus haut. Ce solide idéal peut à volonté être envisagé comme fini ou indéfini.*

On admet comme évident le principe suivant: Deux forces d'intensités égales, appliquées en deux points quelconques du solide, mais assujetties à être directement opposées, se font équilibre. Il en résulte qu'une force appliquée en un point d'un solide est équivalente à toute autre force équipollente de même support, ce qui légitime l'expression: *appliquer une force à un solide*. On peut dire qu'une force appliquée à un solide de l'espace $Oxyz$ est un vecteur glissant de l'espace $Oxyz$.

Ce principe est pris quelquefois pour définition du corps solide; joint au principe fondamental il suffit à constituer la statique du solide, dont toutes les propositions sont les traductions en langage mécanique des propositions de la théorie des vecteurs glissants.

69. La loi du levier. Historiquement, c'est d'abord sous forme statique qu'ont été énoncées les propositions de la théorie des vecteurs, propositions dont les plus simples sont connues depuis très longtemps.

Ainsi la loi du levier, qui exprime la composition de deux forces parallèles, remonte à *Archimède*. On peut l'énoncer de la façon suivante:

Deux forces parallèles \vec{F}_1, \vec{F}_2 ne formant pas un couple sont statiquement équivalentes au vecteur \vec{F} somme de \vec{F}_1 et \vec{F}_2 ayant pour support la droite définie au n° 21. De la construction même de ce vecteur il résulte que les moments d'un point de la résultante par rapport aux deux composantes sont égaux et de signes contraires; nous trouvons ainsi un cas particulier du théorème de Varignon énoncé au n° 18. Ce cas particulier était déjà connu au moyen-âge [cf. IV 1].

Il y a un cas d'exception, c'est celui où les deux forces parallèles ont des intensités égales et des sens contraires; leur ensemble constitue alors un couple de Poinsot, ou simplement un couple [voir n°s 21 et 24].

*La loi du levier permet de traiter aisément le problème plus général de l'équilibre d'un solide soumis à l'action d'un nombre quel-

conque de forces parallèles. La solution de cette question trouve une application immédiate dans la détermination des centres de masses des solides homogènes [cf. IV 5, 2], qui est un des problèmes les plus importants de la statique et l'un des plus anciennement étudiés [cf. IV 1].*

70. Systèmes de forces quelconques. Leur réduction à deux forces rectangulaires. Ce n'est que beaucoup plus tard et dans un passé relativement récent que le problème de l'équilibre d'un corps solide a été résolu dans le cas où les forces sont quelconques et c'est *G. Monge*¹⁴⁸) qui en a donné la première solution.

Dans le langage de la théorie des vecteurs, la solution du problème précédent s'énonce très-simplement:

Pour qu'un solide soumis à l'action d'un système de forces quelconques soit en équilibre il faut et il suffit que les forces forment un système de vecteurs glissants équivalent à zéro. Autrement dit, pour que deux systèmes de forces, ou d'après une locution employée antérieurement, deux visseurs appliqués au solide, soient équivalents au point de vue statique [n° 67], il faut et il suffit que les visseurs soient équivalents au point de vue vectoriel.

*En particulier, tout système de vecteurs peut être réduit et d'une infinité de façons, à un système équivalent formé de deux vecteurs [n° 25], par exemple à un système de deux vecteurs rectangulaires. C'est précisément sous cette forme que *G. Monge* a effectué la réduction d'un système de forces. Il y est parvenu directement de la façon suivante:*

Soit Π un plan choisi arbitrairement sous la seule restriction qu'aucune des forces données ne lui soit parallèle. Il est loisible, d'après l'axiome du n° 68, de prendre le point d'application de chaque force dans le plan Π , ce qui permet de la décomposer en deux autres dont l'une est normale au plan Π et la seconde située dans ce plan; cette décomposition est toujours possible d'après le principe fondamental de la Statique [n° 67]. Or les forces normales au plan ont une résultante dont le pied P est parfaitement déterminé quand le plan Π l'est; de même les forces situées dans le plan Π ont en général une résultante unique \vec{p} (qui, exceptionnellement, peut être rejetée à l'infini). Ainsi le système de forces données est remplacé par deux forces l'une normale au plan, l'autre située dans le plan. A un plan donné Π , correspondent un point P et une droite (p') , support de la résultante \vec{p} . Le point P n'est pas autre chose que le foyer du plan dans le complexe linéaire attaché au système de forces

148) *Traité élémentaire de statique*, (1^{re} éd.) Paris 1786; (8^e éd.) Paris 1846.

donné [n° 27]. La droite (p') est souvent désignée sous le nom de *caractéristique* du plan; c'est la conjuguée par rapport au complexe [n° 29] de la normale au plan menée par le pôle du plan. On voit combien *G. Monge* a été près de la découverte des propriétés des complexes linéaires, sans cependant y avoir complètement abouti.

71. Réduction d'un système de forces à une résultante unique et à un couple. Le problème, ainsi résolu par *G. Monge*, était repris bientôt après par *L. Poinsot*¹⁴⁹⁾ qui obtenait des théorèmes très élégants en introduisant la célèbre notion de couple. Indiquons brièvement sa méthode:

En un point O choisi arbitrairement une fois pour toutes, appliquons une force \vec{F}'_i , équipollente à l'une quelconque \vec{F}_i des forces données et soit \vec{F}''_i la force égale et directement opposée à \vec{F}'_i . Le système donné est équivalent à l'ensemble des forces \vec{F}'_i appliquées en O et des couples (\vec{F}_i, \vec{F}''_i) ; les forces \vec{F}'_i se composent en une force unique \vec{R} qu'on appelle la *résultante de translation* et les couples (\vec{F}_i, \vec{F}''_i) en un couple unique de moment \vec{G} qui est le *couple résultant relatif au point O*. Enfin, *L. Poinsot* montre qu'on peut choisir le point O de telle sorte que le plan du couple soit perpendiculaire à la résultante de translation, autrement dit, de telle sorte que \vec{G} soit parallèle à \vec{R} . Le support de \vec{R} prend dans ce cas le nom d'*axe central du système* et jouit de propriétés indiquées précédemment [n°s 22, 27, 28, 29].

Analytiquement: Soient X, Y, Z les projections de \vec{R} sur trois axes de coordonnées rectangulaires, et L, M, N celles de \vec{G} ; les six quantités X, Y, Z, L, M, N sont les six *coordonnées* du visseur. Pour qu'un corps solide soumis à l'action d'un visseur soit en équilibre, il faut et il suffit que les six coordonnées du visseur soient identiquement nulles.

72. Généralisations des expressions analytiques des conditions d'équilibre. Plus généralement, on peut écrire les conditions d'équilibre d'un solide en employant un système de coordonnées tétraédriques quelconque. L'origine de cette extension remonte à un théorème de *A. F. Möbius*¹⁵⁰⁾ d'après lequel tout visseur peut être remplacé d'une façon unique par un système de six forces agissant suivant les arêtes d'un tétraèdre. Ce système de coordonnées a été employé fréquemment

149) *Éléments de statique*, (1^{re} éd.) Paris an XII; (11^e éd.) publ. par *J. Bertrand*, Paris 1873; (12^e éd.) Paris 1877.

150) *Lehrbuch der Statik* 1, Leipzig 1837; *Werke* 3, Leipzig 1886, p. 138/43.

par *G. Battaglini*¹⁵¹); **H. G. Zeuthen*¹⁵²) s'en est servi également. D'ailleurs le système des coordonnées tétraédriques n'est lui-même qu'un cas particulier du système des coordonnées-vis générales.*

*Nous avons déjà parlé de ce dernier système de coordonnées [n° 58]; son origine remonte au fond aux recherches de *J. J. Sylvester*¹⁵³) qui s'était proposé de trouver les conditions auxquelles doivent satisfaire n lignes droites [pour $n = 3, 4, 5, 6$] pour qu'elles puissent être prises comme supports de forces s'équilibrant sur un solide.*

Ces conditions peuvent être énoncées très simplement de la façon suivante: il faut et il suffit que les droites soient concourantes pour $n = 3$, qu'elles appartiennent à un même système de génératrices d'une quadrique pour $n = 4$, qu'elles appartiennent à une congruence linéaire pour $n = 5$ ou à un complexe linéaire pour $n = 6$.

Lorsque ces conditions sont satisfaites, *J. J. Sylvester* dit que les lignes droites sont *en involution* et, dans ce cas, les coordonnées de l'une quelconque des forces s'expriment linéairement en fonction des coordonnées correspondantes des $n - 1$ autres forces; en d'autres termes, son support appartient au système linéaire déterminé par les $n - 1$ autres supports.

Les résultats de *J. J. Sylvester* ont été généralisés par *G. Battaglini*¹⁵⁴) qui a appliqué la notion d'involution aux systèmes de visseurs, et par *W. Spottiswoode*¹⁵⁵) de la façon suivante: proposons-nous de diriger respectivement suivant n droites données ($n > 6$) n forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ formant un système équivalent à zéro. *Pour $n > 6$ les droites données ne sont assujetties à aucune condition; tout revient à calculer les rapports mutuels des intensités F_1, F_2, \dots, F_n des forces.* Soit alors (j) le produit de la plus courte distance des droites qui supportent \vec{F}_i et \vec{F}_j par le sinus de leur angle ou, si l'on veut, le *moment relatif* de ces deux droites, suivant l'expression de *A. Cayley*¹⁵⁶). On aura, pour $i = 1, 2, \dots, n$,

$$(1i)P_1 + (2i)P_2 + \dots + (i-1,i)P_{i-1} + (i+1,i)P_{i+1} + \dots + (n,i)P_n = 0;$$

151) *Rendic. Accad. Napoli (1) 8 (1869), p. 87/94; (1) 9 (1870), p. 89; Giorn. mat. (1) 10 (1872), p. 133, 207.*

152) *Math. Ann. 1 (1869), p. 432; *O. Mohr* [Der Civilingenieur 34 (1888), p. 691/736] a supposé en particulier que les trois arêtes partant du même sommet d'un tétraèdre sont deux à deux rectangulaires et qu'elles ont la même longueur.*

153) C. R. Acad. sc. Paris 52 (1861), p. 741, 815.

154) Atti Accad. sc. fis. mat. (Naples) (1) 4 (1869), mém. n° 14; Rendic. Accad. Napoli (1) 8 (1869), p. 166.

155) C. R. Acad. sc. Paris 66 (1868), p. 97.

156) C. R. Acad. sc. Paris 61 (1865), p. 829; Papers 5, Cambridge 1892, p. 540/1.

W. Spottiswoode en déduit qu'en appelant encore D le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} 0 & (12) & \dots & (1n) \\ (21) & 0 & \dots & (2n) \\ (31) & (32) & \dots & (3n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n1) & (n2) & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

et $D_{11}, D_{22}, \dots, D_{nn}$ les mineurs principaux de D , les rapports des intensités F_1, F_2, \dots, F_n des forces sont donnés par les égalités

$$F_1 : F_2 : \dots : F_n = \sqrt{D_{11}} : \sqrt{D_{22}} : \dots : \sqrt{D_{nn}},$$

où $D_{11}, D_{22}, \dots, D_{nn}$ désignent les mineurs principaux de D . Bien entendu une des intensités F_i demeure arbitraire.

*Le déterminant D est toujours nul pour $n > 6$ * Il doit être nul pour $n \leq 6$ afin que les n droites puissent être les supports de n forces en équilibre, ce qui coïncide avec un résultat antérieur de J. J. Sylvester¹⁵⁷).

Dans le cas de quatre forces, on retrouve le résultat de A. F. Möbius¹⁵⁸)

$$F_1 : F_2 : F_3 : F_4 = \sqrt{(23)(34)(42)} : \sqrt{(34)(41)(13)} : \sqrt{(41)(12)(24)} : \sqrt{(12)(23)(31)}$$

avec

$$\sqrt{(23)(14)} + \sqrt{(31)(24)} + \sqrt{(12)(34)} = 0;$$

on peut alors démontrer facilement le célèbre théorème de M. Chasles¹⁵⁹): si l'on répartit d'une manière quelconque les quatre forces en deux groupes de deux forces, les deux tétraèdres qui ont chacun pour arêtes opposées les deux forces d'un groupe ont le même volume¹⁶⁰).

73. Principe du travail virtuel. *Dans les problèmes de statique qui se présentent en pratique, il s'agit de rechercher les conditions d'équilibre d'un ou de plusieurs solides assujettis à des liaisons.*

*Les propositions précédentes permettent toujours d'exprimer les conditions d'équilibre (dans l'hypothèse bien entendu où les liaisons sont sans frottement), mais elles présentent l'inconvénient de faire

157) C. R. Acad. sc. Paris 52 (1861), p. 815; M. Chasles, id. 52 (1861), p. 745. 1042, 1094.

158) Lehrbuch der Statik 1, Leipzig 1837, § 103; Werke 3, Leipzig 1886, p. 149.

159) C'est le même théorème qu'au n° 27, à savoir que les deux systèmes formés l'un par deux quelconques des forces données et l'autre par deux forces égales et directement opposées aux deux autres sont équivalents.

160) Pour le contenu de ce paragraphe, cf. R. Sturm, Ann. mat. pura appl. (2) 7 (1875/6), p. 217; F. Zucchetti, Atti Accad. Torino 12 (1876/7), p. 44.

intervenir les réactions dans les équations d'équilibre; il en résulte que pour obtenir les conditions d'équilibre, il est nécessaire d'effectuer l'élimination de ces réactions entre les équations.*

On peut obtenir immédiatement les conditions d'équilibre cherchées, sans avoir à effectuer les éliminations précédentes, en appliquant le principe du travail virtuel que nous allons exposer.

*Soit (S) un corps solide libre ou assujéti à des liaisons sans frottement. Ces liaisons sont supposées bilatérales (c'est-à-dire exprimables uniquement par des égalités) et indépendantes du temps t . Donnons au corps solide (S) un déplacement virtuel, c'est-à-dire un déplacement infiniment petit compatible avec les liaisons et soit δt l'intervalle de temps infiniment court pendant lequel il s'effectue. Ce déplacement peut être assimilé à un vissage infiniment petit de coordonnées

$$u\delta t, v\delta t, w\delta t, p\delta t, q\delta t, r\delta t$$

par rapport à trois axes rectangulaires fixes OX, OY, OZ . Soit alors A_i un point quelconque du solide (S) auquel est appliquée la force \vec{F}_i ; ce point subit un déplacement infiniment petit qui peut être assimilé à un vecteur $\vec{\delta s}_i$ de longueur δs_i . On appelle travail virtuel de la force \vec{F}_i dans le déplacement $\vec{\delta s}_i$ le produit intérieur des deux vecteurs \vec{F}_i et $\vec{\delta s}_i$. Ce travail, que l'on représente par δW_i , a donc pour expression

$$F_i \delta s_i \cos \alpha_i,$$

en désignant par F_i l'intensité de la force \vec{F}_i et par α_i l'angle des directions des deux vecteurs \vec{F}_i et $\vec{\delta s}_i$.*

*Désignons encore par

$$X_i, Y_i, Z_i$$

les projections de \vec{F}_i sur les axes rectangulaires OX, OY, OZ , par

$$x_i, y_i, z_i$$

les coordonnées de A_i , et par

$$\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$$

les projections correspondantes de $\vec{\delta s}_i$; on aura

$$\delta W_i = X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i.*$$

Cela étant, faisons la somme

$$\delta W = \sum_{(i)} \delta W_i$$

des travaux effectués par toutes les forces \vec{F}_i agissant sur le solide (S),

et remarquons qu'on a

$$\begin{aligned}\delta x_i &= (u - ry_i + qz_i)\delta t, \\ \delta y_i &= (v - pz_i + rx_i)\delta t, \\ \delta z_i &= (w - qx_i + py_i)\delta t;\end{aligned}$$

il viendra¹⁶¹⁾

$$\begin{aligned}\delta W &= \sum_{(i)} (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) \\ &= [Xu + Yv + Zw + Lp + Mq + Nr]\delta t,\end{aligned}$$

en appelant X, Y, Z, L, M, N les coordonnées du visseur agissant sur le solide (S) .

Énonçons alors le principe du travail virtuel: pour que le solide (S) soit en équilibre dans la position (s) il faut et il suffit que l'on ait $\delta W = 0$ pour tout déplacement virtuel de (S) effectué à partir de la position (s) .

*Il est quelquefois utile d'avoir une expression géométrique de δW . Prenons l'axe du vissage virtuel pour axe des z ; soient

$$\delta \varphi = r \delta t$$

la rotation autour de Oz et

$$k \delta \varphi$$

la translation parallèle à Oz en lesquelles peut être décomposé² le vissage; soit enfin \vec{G} le moment vectoriel résultant par rapport à Oz du système de forces données et \vec{F} le vecteur obtenu en projetant sur Oz la résultante générale du système. On aura, en désignant par G et F les nombres qui mesurent \vec{G} et \vec{F} sur Oz ,

$$\delta W = (G + kF)\delta \varphi.*$$

Revenons maintenant à l'expression analytique du travail virtuel δW . Nous observerons tout d'abord qu'elle permet de retrouver immédiatement la règle de la composition des visseurs. En effet, si l'on fait agir simultanément sur un solide (S) deux visseurs de coordonnées respectives

$$X, Y, Z, L, M, N$$

et

$$X', Y', Z', L', M', N',$$

le travail virtuel effectué par l'ensemble de ces deux visseurs est

$$\begin{aligned}[(X + X')u + (Y + Y')v + (Z + Z')w + (L + L')p + (M + M')q \\ + (N + N')r]\delta t.\end{aligned}$$

— —

161) Cf. *A. F. Möbius*, Lehrbuch der Statik 1, Leipzig 1837, § 181; Werke 3, Leipzig 1886, p. 260; *F. Klein*, Math. Ann. 4 (1871), p. 403.

L'ensemble de ces deux visseurs est donc équivalent au visseur unique de coordonnées

$$X + X', Y + Y', Z + Z', L + L', M + M', N + N'.$$

De plus on voit que l'expression analytique de δW est symétrique par rapport aux coordonnées du visseur agissant sur (S) et du vissage initial imprimé à (S). Au facteur δt près c'est l'invariant simultané [n° 54] des systèmes

$$X, Y, Z, L, M, N$$

et

$$p, q, r, u, v, w.$$

L'équation

$$\delta W = 0$$

établit ainsi une correspondance remarquable entre un déplacement infiniment petit et un système de forces. Il faut observer d'ailleurs que les coordonnées associées dans cette correspondance sont, d'une part

$$X, Y, Z \text{ et } p, q, r,$$

d'autre part

$$L, M, N \text{ et } u, v, w;$$

autrement dit: à la résultante générale du système de forces correspond la rotation p, q, r et au couple résultant L, M, N correspond la translation u, v, w . Tout cela est bien conforme aux conclusions des n° 50 et 53; nous reviendrons d'ailleurs sur ce point.

La relation établie par l'équation

$$\delta W = 0$$

entre les déplacements infiniment petits et les systèmes de forces paraît avoir été signalée pour la première fois par *O. Rodrigues*¹⁶²).

Suivant une expression empruntée par *F. Klein* à la théorie des formes algébriques, c'est une relation de grandeurs *contragrédientes*. Cette relation prend une signification remarquable dans le langage de la théorie de *R. S. Ball*¹⁶³).

Soit (S) un solide libre ou soumis à des liaisons bilatérales qui lui laissent précisément n degrés de liberté (où $n < 6$) et soit (σ) le système linéaire (d'ordre n) de vissages infiniment petits qui peuvent être imprimés au solide (S) à partir d'une position quelconque (s) [n° 59].

162) *J. math. pures appl.* (1) 5 (1840), p. 436.

163) *Theory of screws*⁶²), (1^{re} éd.) p. 41, (2^e éd.) p. 64. Cf. *I. Somov*, *Račionálnaja Mehanika* 1, S^t Pétersbourg 1871; 2¹, S^t Pétersbourg 1872; 2² (posth.), S^t Pétersbourg 1877; trad. par *A. Ziwet*, *Theoretische Mechanik* 1, Leipzig 1878, p. 371, 390; *I. (J.) Somov*, *Bull. Acad. Pétersb.* (3) 18 (1873), col. 162.

Pour que (S) soit en équilibre dans la position (s) sous l'action d'un visseur σ' , il faut et il suffit que σ' appartienne au système (σ') réciproque de (σ). * Il en résulte donc qu'inversement, si le système de vissages compatibles avec les liaisons dans la position (s) est (σ'), le système de tous les visseurs en équilibre sur (S) est précisément (σ')*. Cette proposition très générale embrasse tous les cas particuliers traités par la statique élémentaire du solide et fournit une belle représentation mécanique des systèmes réciproques.

74. Le viriel. La somme des travaux virtuels effectués par toutes les forces d'un visseur ou, plus brièvement, le travail virtuel d'un visseur est la variation infiniment petite de l'expression¹⁶⁴)

$$V_0 = \sum_{i=1}^{i=n} (X_i x_i + Y_i y_i + Z_i z_i),$$

dans laquelle la force \vec{F}_i est supposée constante en grandeur et direction, et invariablement liée à son point d'application (x_i, y_i, z_i). On peut aussi écrire

$$V_0 = \sum_{i=1}^{i=n} F_i r_i \cos(\vec{F}_i, \vec{r}_i),$$

où r_i désigne la distance à l'origine du point (x_i, y_i, z_i).

L'expression V_0 s'appelle le *viriel* de forces d'après R. Clausius¹⁶⁵) qui s'est servi de cette notion pour déduire de la théorie cinétique des gaz le second principe de la Thermodynamique.

Avant lui F. Schweins¹⁶⁶) avait développé les propriétés essentielles du viriel qu'il étudia sous le nom de moment de déplacement (*Fliehmoment*).

Nous allons simplifier l'expression analytique du viriel.

D'abord pour calculer δV_0 il est loisible de substituer à V_0 toute autre expression n'en différant que par une constante par rapport aux coordonnées x_i, y_i, z_i , en particulier l'expression

$$V = \sum_{i=1}^{i=n} [X_i(x_i - \xi) + Y_i(y_i - \eta) + Z_i(z_i - \zeta)] = V_0 - [X\xi + Y\eta + Z\zeta],$$

164) Cf. J. L. Lagrange, Mécanique analytique, (2^e éd.) 1, Paris 1811, p. 66/73; Œuvres 11, Paris 1888, p. 69/76. Dans l'article IV 1 cette expression se rencontre avec le facteur $-\frac{1}{2}$.

165) C. R. Acad. sc. Paris 70 (1870), p. 1315. Cf. l'article IV 1.

166) J. reine angew. Math. 38 (1849), p. 77.

X, Y, Z désignant, comme précédemment, les composantes de la résultante générale \vec{R} que nous supposons d'abord différente de zéro. Nous appellerons cette quantité V le *viriel* au point ξ, η, ζ ; V_0 est alors le viriel à l'origine.

Cela étant, considérons ξ, η, ζ comme des coordonnées courantes; on voit que le viriel prend la même valeur pour tous les points d'un plan normal à la résultante générale ou, ce qui revient au même, à l'axe central. Il existe, en particulier, un plan pour lequel le viriel est nul; la trace de l'axe central sur ce plan a été appelée par *R. W. Hamilton*¹⁶⁷⁾ le *centre* du système de forces. Les coordonnées de ce point sont données par les équations

$$\begin{cases} R^2 x_0 = V_0 X + MZ - NY, \\ R^2 y_0 = V_0 Y + NX - LZ, \\ R^2 z_0 = V_0 Z + LY - MX, \end{cases}$$

où V_0 a la valeur donnée plus haut correspondant à $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0$ c'est-à-dire à l'origine des coordonnées.

Dans le cas où toutes les forces sont parallèles, ce centre coïncide avec le centre des distances proportionnelles.

Le viriel V étant nul au point x_0, y_0, z_0 , on a

$$V_0 = Xx_0 + Yy_0 + Zz_0$$

et le viriel V peut s'écrire sous la forme remarquablement simple

$$V = X(x_0 - \xi) + Y(y_0 - \eta) + Z(z_0 - \zeta);$$

autrement dit, le viriel V en tout point de l'espace est égal au viriel de la résultante de translation appliquée au centre de *W. R. Hamilton*. Pour tout point d'un plan normal à cette résultante et qui la coupe à une distance p du centre, le viriel a pour valeur

$$p \cdot R.$$

Supposons maintenant que la résultante générale soit nulle en sorte que le système soit statiquement équivalent à un couple; on a alors

$$X = 0, Y = 0, Z = 0, R = 0, L^2 + M^2 + N^2 > 0;$$

le viriel est constant pour tous les points de l'espace, et le centre de *W. R. Hamilton* est indéterminé; il est alors facile de trouver un couple dont les forces soient appliquées en des points A, B donnés arbitrairement (assujettis toutefois à la condition que \vec{AB} soit normal au mo-

167) Elements of quaternions³⁷⁾, p. 708, 9; (2^e éd.) 2, Londres 1901, p. 285 6; trad. *P. Glan* 2, Leipzig 1884, p. 346/7.

ment résultant du système) et tel en outre que son viriel soit égal à celui du système de forces donné. Il suffira pour cela de s'appuyer sur l'expression géométrique que prend alors V .

Soient \vec{F}, \vec{F}' deux forces d'intensité commune F formant un couple équivalent (au point de vue vectoriel) au système donné et appliquées respectivement aux points A et B ; appelons *bras de levier* du couple, l'un des vecteurs AB ou BA , le premier par exemple; soient enfin r la longueur du bras de levier et ω son angle avec la force \vec{F}' . Le viriel du couple est alors égal à $Fr \cos \omega$, et par suite le viriel V du système est donné par la formule

$$V = Rr \cos \omega,$$

équation qui donne $Q \cos \omega$.

En particulier si l'on a $V = 0$ et $L^2 + M^2 + N^2$ différent de zéro, le couple sera *orthogonal*, autrement dit le bras de levier sera normal aux forces du couple.

Retour au cas général. Revenons au cas général où $X^2 + Y^2 + Z^2$ et $L^2 + M^2 + N^2$ sont *positifs* (non nuls). On peut toujours substituer au système de forces ou au visseur correspondant un système formé par une force unique appliquée au centre de *W. R. Hamilton* et par un couple orthogonal situé dans un plan normal à cette force, et cela de telle sorte que le nouveau système ait même viriel que le système initial en un point quelconque de l'espace et lui soit équivalent au point de vue vectoriel. En effet l'ensemble constitué par la résultante de translation appliquée au centre de *W. R. Hamilton* et par un couple de moments L, M, N et de viriel nul (couple orthogonal) répond à la question.

Nous signalerons encore les rapports de la théorie précédente avec la théorie des quaternions de *W. R. Hamilton*. Soient

$$\vec{r}_i$$

le vecteur mené de l'origine des coordonnées au point d'application

$$(x_i, y_i, z_i)$$

de la force

$$\vec{F}_i;$$

la partie scalaire

$$Sq$$

du quaternion

$$q = \vec{r}_1 \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \vec{F}_3 + \vec{r}_4 \vec{F}_4$$

sera le viriel changé de signe du système donné, et la partie vectorielle

$$Vq$$

du même quaternion sera le moment résultant du système par rapport à l'origine.

Considérons, en particulier, le cas du couple. A tout couple correspond un quaternion

$$-V + Li + Mj + Nk,$$

L, M, N étant les composantes suivant les axes du moment du couple et V étant le viriel du couple.

Inversement, à tout quaternion

$$-V + Li + Mj + Nk$$

correspondent une infinité de couples assujettis à la condition d'avoir pour viriel V et pour moment le vecteur libre de projections L, M, N .

En particulier, soit \overrightarrow{AB} un vecteur normal à ce moment. Il existe un et un seul couple admettant le moment précédent, ayant V pour viriel et \overrightarrow{AB} pour bras de levier. On obtient alors une représentation géométrique remarquable de l'addition de deux quaternions quelconques

$$\begin{aligned} K + Li + Mj + Nk, \\ K' + L'i + M'j + N'k; \end{aligned}$$

construisons les couples correspondant à ces quaternions et admettant le même bras de levier \overrightarrow{AB} , nécessairement orthogonal aux directions

$$(L, M, N) \text{ et } (L', M', N'),$$

et composons les forces appliquées respectivement en A et en B . Le système résultant est encore un couple ayant le même bras de levier que les deux précédents et admettant pour quaternion correspondant la somme

$$K + K' + (L + L')i + (M + M')j + (N + N')k$$

des deux premiers¹⁶⁸).

75. Interprétations erronées de l'analogie entre les forces et les mouvements infiniment petits. Le rapprochement signalé précédemment [n° 73] entre les systèmes de forces et les déplacements infiniment petits n'a pas toujours été établi correctement. La source des erreurs d'interprétation commises réside dans l'hypothèse implicite d'une relation de cause à effet. Voici comment:

Soient

$$X, Y, Z, L, M, N$$

les coordonnées d'un système de percussions rapportées aux axes prin-

168) Cf. *K. Heun*, *Z. Math. Phys.* 47 (1902), p. 104, 25.

cipaux d'inertie d'un solide libre partant du repos à l'instant t ; soient

$$p, q, r, u, v, w$$

les coordonnées du vissage développé à cet instant t par ces percussions; on a les relations

$$X = \mu u, \quad Y = \mu v, \quad Z = \mu w, \quad L = \mu a^2 p, \quad M = \mu b^2 q, \quad N = \mu c^2 r$$

dans lesquelles μ est la masse totale du solide, a, b, c les demi-axes de l'ellipsoïde d'inertie. Il est visible qu'une percussion unique appliquée au centre de gravité du solide (origine du système de référence) imprime au corps libre une vitesse de translation dans la direction de la percussion et qu'un couple de percussions tend seulement à le faire tourner autour de ce centre de gravité. Faisons donc correspondre les percussions ou forces instantanées aux mouvements comme une cause à un effet, si tant est qu'une telle relation soit possible; la force correspondra à une translation, le couple à une rotation, ce qui est en contradiction avec les résultats des nos 50, 53, 73. L'analogie étudiée n'a donc rien à voir avec cet enchaînement de cause à effet qui doit être laissé à la cinétique [voir IV 8].

*J. Plücker*¹⁶⁹) commet précisément une faute de même ordre lorsqu'il interprète géométriquement l'analogie entre les forces et les rotations, en se bornant à remarquer que chaque force est déterminée par deux points de la droite qui la porte, dont la distance est proportionnelle à l'intensité de la force, de même qu'une rotation est déterminée par la connaissance de deux plans dont l'un doit être amené à coïncider avec l'autre. Il fait alors correspondre l'intersection des deux plans, comme axe du mouvement, à la droite qui joint les deux points, considérée comme ligne d'action de la force. Mais il eût au moins fallu ajouter que l'angle de rotation était infiniment petit; c'est ce que *J. Plücker* a omis de faire. On sait que le défaut métrique de cette dualité dans le domaine des grandeurs finies ne peut disparaître que si l'on fait intervenir la métrique générale projective, qui substitue à l'ombilicale une surface quelconque de seconde classe ou, en d'autres termes, remplace l'espace euclidien par un espace à courbure constante, positive ou négative [cf. III 1, n° 30].

La cinématique et la statique des corps solides, qui s'établissent sur ces bases, ont été indiquées par *F. Klein*¹⁷⁰) et développées par *F. Lindemann*¹⁷¹). De très nombreux travaux¹⁷²) sont venus plus tard

169) *Philos. Trans. London* 156 (1866), p. 361.

170) *Math. Ann.* 4 (1871), p. 403.

171) *Math. Ann.* 7 (1874), p. 56.

172) On en trouve l'indication dans *R. S. Ball, Theorie of screws*⁶²), (1^{re} éd.)

compléter ce premier résultat et ainsi l'erreur de *J. Plücker* est devenue la source de nombreuses et belles recherches parmi lesquelles il faut citer tout d'abord celles de *E. Study*¹⁷³).

IV. Astatique.

Introduction géométrique: Surfaces homofocales.

Les trois numéros suivants renferment des théorèmes de géométrie bien connus qui trouveront leur application dans la fin de cet article ainsi que dans l'article suivant IV 5 sur la géométrie des masses. Pour de plus amples détails et pour les indications bibliographiques on se reportera aux articles III 7 et III 22.

76. Équations tangentielles. Systèmes antipolaires. Soit

$$ux + vy + wz + h = 0$$

l'équation d'un plan (*II*); si l'on astreint les coordonnées u, v, w, h du plan (*II*) à vérifier une relation

$$\varphi(u, v, w, h) = 0,$$

homogène et du second degré en u, v, w, h , le plan (*II*) sera assujéti à envelopper une quadrique (*S*) qui peut dégénérer en une conique ou en un système de deux points distincts ou confondus; par définition l'équation

$$\varphi(u, v, w, h) = 0$$

est l'équation tangentielle de la quadrique (*S*) (dégénérée ou non).*

Si l'on a, par exemple,

$$\varphi = Au^2 + Bv^2 + Cw^2 - h^2,$$

la surface-enveloppe (*S*) est une quadrique à centre rapportée à ses axes

$$(1) \quad \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1,$$

dont l'équation tangentielle est

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 = h^2.$$

*Soit encore

$$\varphi = Au^2 + Bv^2 - h^2;$$

le plan de coordonnées tangentielles (u, v, w, h) sera tangent à la conique

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - 1 = 0, \quad z = 0.*$$

appendice 1, p. 177/92; (2^e éd) p. 510/39 (notes bibliographiques). *On trouve aussi un index bibliographique sur ce sujet dans *A. P. Kotelimikov*, Proektivnaja teorija vektorov [Izvēstija Kazanskago fiz.-mat.-Obščestva (Bull. Soc. phys.-math. Kazan) (2) 8 (1898), appendice des n^{os} 2, 3, 4 (avec pagination spéciale); (2) 9 (1899), appendice des n^{os} 1, 2 (avec suite de la pagination spéciale); (2) 9 (1899), n^o 3, p. 1/36.*

173) Voir, par exemple, *E. Study*, Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903.

Soit enfin

$$\varphi = u^2 + v^2 + w^2;$$

le plan de coordonnées tangentielles (u, v, w, h) sera tangent à l'ombilicale (γ) .

Toute relation

$$u' \frac{\partial \varphi}{\partial u} + v' \frac{\partial \varphi}{\partial v} + w' \frac{\partial \varphi}{\partial w} + h' \frac{\partial \varphi}{\partial h} = 0$$

entre les coordonnées tangentielles (u, v, w, h) et (u', v', w', h') de deux plans (II) et (II') signifie que les deux plans sont *conjugués* par rapport à (S) . Par exemple, si (S) se réduit à (γ) , les deux plans sont rectangulaires.

Supposons que les coefficients de φ soient réels, mais que (S) soit imaginaire. *On peut encore interpréter à l'aide d'éléments géométriques réels la relation entre les coordonnées de (II) et celles de (II') . En effet, soit O le centre de (S) , et soit (S') la quadrique réelle (dégénérée ou non) de centre O , homothétique à (S) , le rapport d'homothétie étant $i = \sqrt{-1}$; le plan (II) [ou (II')] est symétrique par rapport à O d'un plan (II_1) [ou (II_1')] conjugué de (II') [ou (II)] par rapport à (S') . Soit encore P le pôle de (II) par rapport à (S) ; P est le symétrique, par rapport à O , du pôle de (II) par rapport à (S') .*

On dit quelquefois que le point P et le plan (II) sont *antipolaires* par rapport à (S') . De même un triangle réel conjugué par rapport à (S) est dit *antipolaire* par rapport à (S') , etc.

77. Quadriques homofocales¹⁷⁴. Considérons l'équation

$$\varphi(u, v, w, h) + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0,$$

où φ est une forme quadratique en u, v, w, h et où λ désigne un paramètre variable. *Nous supposons d'abord que φ dépende effectivement de h ; par suite l'équation précédente représente un faisceau linéaire (tangentiel) de quadriques (Σ) qui comprend au moins une quadrique dégénérée, l'ombilicale (γ) .* Ces surfaces ont été appelées *homofocales*.

*La substitution de $\lambda + \lambda_0$ à λ permet de remplacer φ par

$$\varphi(u, v, w, h) + \lambda_0(u^2 + v^2 + w^2);$$

nous pouvons donc supposer que le discriminant de φ est nul; l'équation

$$\varphi(u, v, w, h) = 0$$

¹⁷⁴ Ch. Dupin, *Développements de géométrie*, Paris 1813, p. 269; J. P. M. Binet, *J. Ec. polyt.* (1) cah. 16 (1813), p. 58 et suiv.

représente alors une conique que nous supposons d'abord non dégénérée. Il y aura encore deux cas à distinguer suivant que cette conique possède ou non un centre à distance finie.*

a. Si la conique $\varphi = 0$ possède un centre unique à distance finie, on peut la rapporter à ses axes de symétrie; l'expression $u^2 + v^2 + w^2$ restant invariante (à un facteur près) dans tout déplacement des axes de coordonnées, on voit sans peine que l'équation tangentielle des surfaces (Σ) peut s'écrire

$$au^2 + bv^2 + cw^2 - h^2 + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0;$$

l'équation ponctuelle des mêmes surfaces homofocales est donc, pour λ différent de $-a, -b, -c$,

$$\frac{x^2}{a + \lambda} + \frac{y^2}{b + \lambda} + \frac{z^2}{c + \lambda} = 1.$$

Toutes ces surfaces ont même centre et mêmes axes.

Pour $\lambda = -a, -b, -c$ les surfaces (Σ) dégénèrent respectivement en trois coniques

$$x = 0, \quad \frac{y^2}{b - a} + \frac{z^2}{c - a} = 1,$$

$$y = 0, \quad \frac{z^2}{c - b} + \frac{x^2}{a - b} = 1,$$

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{a - c} + \frac{y^2}{b - c} = 1$$

situées dans les plans de coordonnées. Si l'on suppose, comme il est permis, $a > b > c$, la première de ces coniques est imaginaire, la seconde est une hyperbole et la troisième une ellipse. On les appelle les *courbes focales* du faisceau; chacune d'elles passe par deux foyers (réels ou imaginaires) de chacune des deux autres.

b. Supposons maintenant que la conique $\varphi = 0$ soit une parabole. En procédant comme dans le cas (a), on ramènera l'équation tangentielle des surfaces (Σ) à la forme

$$(a + \lambda)u^2 + (b + \lambda)v^2 + (c + \lambda)w^2 - 2uh = 0;$$

l'équation ponctuelle correspondante est, pour λ différent de $-b$ et de $-c$,

$$\frac{y^2}{b + \lambda} + \frac{z^2}{c + \lambda} - 2x - a - \lambda = 0.$$

Toutes ces surfaces sont des paraboloides admettant les mêmes plans principaux.

Pour $\lambda = -b$ et pour $\lambda = -c$, les surfaces (Σ) dégénèrent en deux paraboles réelles situées dans les plans $y = 0$ et $z = 0$: leur axe commun est Ox et chacune d'elles passe par le foyer de l'autre; on les appelle encore les *focales* du faisceau.

c. * Passons au cas où l'équation $\varphi = 0$ représente deux points A et B distincts (dont l'un au moins est nécessairement à distance finie). Les surfaces homofocales (Σ) se composent de quadriques de révolution autour de la droite AB ; leurs méridiennes admettront A et B pour foyers. Comme cas limite, si A et B viennent à se confondre, les surfaces (Σ) deviennent des sphères de centre A .*

d. Il nous reste à traiter le cas où φ ne dépend pas de h . Il est alors loisible de supposer que $\varphi = 0$ représente deux points, distincts ou confondus, du plan de l'infini. Si ces points sont distincts, l'équation

$$\varphi(u, v, w) + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$

peut être réduite à la forme

$$(a + \lambda)u^2 + (b + \lambda)v^2 + (c + \lambda)w^2 = 0 \quad (a > b > c),$$

qui représente, pour λ différent de $-a$, $-b$ et $-c$, des coniques (σ) infiniment éloignées, et pour λ égal à $-a$, $-b$ ou $-c$ trois couples de points (α_1, β_1) , (α_2, β_2) , (α_3, β_3) infiniment éloignés; un seul de ces couples est réel: c'est le couple (α_2, β_2) qu'on obtient en prenant $\lambda = -b$.

Soit O un point quelconque de l'espace. Les cônes (C) de sommet O passant par les coniques (σ) admettent les droites $O\alpha_i$ et $O\beta_i$ comme focales¹⁷⁵). Considérons en particulier les focales réelles $O\alpha_i$, $O\beta_i$ et soit Om une génératrice quelconque d'un des cônes (C). La somme des angles de Om avec $O\alpha$ et $O\beta$ est constante pour toutes les génératrices de (C) et, par suite, les plans $mO\alpha$ et $mO\beta$ font des angles égaux avec le plan tangent au cône le long de Om .

* Enfin dans le cas où $\varphi = 0$ représente un point double α du plan de l'infini, les cônes (C) sont de révolution autour de $O\alpha$.*

Revenons au cas (a) et soit P_0 un point arbitraire de coordonnées x_0, y_0, z_0 . L'équation

$$\frac{x_0^2}{a + \lambda} + \frac{y_0^2}{b + \lambda} + \frac{z_0^2}{c + \lambda} = 1$$

admettant toujours pour λ trois racines réelles, on en déduit immédiatement que par P_0 passent trois quadriques du faisceau homofocal (a) et l'on reconnaît aisément que ces trois surfaces sont un ellipsoïde, un hyperboloïde à une nappe et un hyperboloïde à deux nappes.

Ces trois quadriques se coupent deux à deux orthogonalement au point P_0 ; l'intersection (D) des plans tangents en P_0 à deux de ces surfaces (de paramètres λ_1 et λ_2) est normale à la troisième; les cosinus

175) Cf. L. I. Magnus, Ann. math. pures appl. 16 (1825/6), p. 33; M. Chasles, Sur les propriétés générales des cônes du second degré [Mém. Acad. Bruxelles 6 (1830) mém. n° 11 (d'après la table: n° 10), p. 1/58].

directeurs de (D) sont par conséquent proportionnels aux trois quantités

$$X = \frac{x_0}{a + \lambda_3}, \quad Y = \frac{y_0}{b + \lambda_3}, \quad Z = \frac{z_0}{c + \lambda_3}$$

dans lesquelles λ_3 est le paramètre de la troisième surface.

Les focales du faisceau servent de frontière aux trois types de quadriques contenues dans ce faisceau: ellipsoïde, hyperboloïde à une nappe, hyperboloïde à deux nappes. Faisons en effet varier λ de $+\infty$ à $-\infty$ dans l'équation

$$au^2 + bv^2 + cw^2 - h^2 + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0.$$

La surface représentée par cette équation commence alors par être un ellipsoïde dont les axes, d'abord infiniment grands, décroissent jusqu'à ce que la quadrique s'aplatisse et recouvre l'intérieur de l'ellipse focale qui correspond à $\lambda = c$. Si λ devient inférieur à c , la surface est un hyperboloïde à une nappe qui est d'abord (pour λ peu inférieur à c) extrêmement aplati, de façon à recouvrir la portion de plan extérieure à l'ellipse focale. Puis, λ continuant à décroître, l'hyperboloïde se déforme à son tour de manière à couvrir la portion de plan extérieure à l'hyperbole focale $\lambda = b$. Pour λ inférieur à b , on a un hyperboloïde à deux nappes qui, pour λ très voisin de b , réduit à la portion de plan intérieure à l'hyperbole focale, s'ouvre peu à peu de manière à recouvrir deux fois tout le plan $x = 0$. Enfin, pour $-\infty < \lambda < a$, la quadrique est imaginaire.

Les équations tangentielles du cône (C) , de sommet P_0 , circonscrit à la surface de paramètre λ sont

$$\begin{aligned} ux_0 + vy_0 + wz_0 + h &= 0, \\ (a + \lambda)u^2 + (b + \lambda)v^2 + (c + \lambda)w^2 &= (ux_0 + vy_0 + wz_0)^2. \end{aligned}$$

Tous les cônes (C) obtenus en faisant varier λ sont homofocaux; leurs plans principaux coïncident avec les plans tangents en P_0 aux trois quadriques du faisceau de paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et les focales de ces cônes coïncident avec celles des génératrices de ces surfaces qui passent par P_0 . En particulier les focales réelles de (C) appartiennent à l'hyperboloïde à une nappe qui passe par P_0 . Ces deux droites appelées aussi *axes focaux* jouissent de cette propriété que, si l'on fait passer par l'une d'elles deux plans rectangulaires quelconques, ces plans sont conjugués par rapport à toutes les quadriques du faisceau homofocal.

Lorsque P_0 est situé sur l'une des courbes focales du faisceau de surfaces (Σ) , les cônes (C) sont de révolution autour de la tangente en P_0 à la focale considérée. L'un de ces cônes étant celui qui passe par l'une des deux autres courbes focales, il en résulte que tout point

d'une des deux focales réelles est le sommet d'un cône de révolution passant par la seconde courbe focale réelle.

78. Le complexe des axes de Reye. On vérifie aisément que les coordonnées pluckériennes de la droite (D), normale menée par le point P_0 à la surface du système triple orthogonal qui correspond au paramètre λ_3 , satisfont aux relations

$$\frac{LX}{b-c} = \frac{MY}{c-a} = \frac{NZ}{a-b}.$$

En d'autres termes, l'équation du complexe (C) des normales aux surfaces homofocales (Σ) s'écrit

$$aLX + bMY + cNZ = 0.$$

On pourrait donner une autre définition du complexe (C) en remarquant que la droite (D) est le lieu des pôles, par rapport aux surfaces (Σ), d'un plan (Π) normal à (D) en P_0 . On peut encore considérer le complexe (C) comme formé par les normales abaissées de tous les points de l'espace P_0 sur leurs plans polaires par rapport à l'une quelconque (Σ_0) des quadriques homofocales (Σ). Enfin le complexe (C) coïncide avec le complexe des axes des sections planes de (Σ_0), étudié sous cette forme par *Th. Reye*¹⁷⁶); aussi, l'appelle-t-on souvent le *complexe de Reye*.

Astatique proprement dite.

79. Origines et but de l'astatique. *Soit $Oxyz$ un trièdre trirectangle mobile par rapport au trièdre trirectangle $Ox'y'z'$ que nous regarderons comme fixe. Dans certaines théories de la Physique, comme celles de la pesanteur et du magnétisme, on considère un corps solide (C) comme constitué par un très grand nombre de points matériels m_i , invariablement liés à $Oxyz$ et auxquels sont appliquées

176) Die Geometrie der Lage (1^{re} éd.) 2, Hanovre 1868; (4^e éd.) 2, Stuttgart (Leipzig) 1907, p. 214/22; trad. par *O. Chemin*, Géométrie de position, Paris 1882, p. 181/96; Ann. mat. pura appl. (2) 2 (1869), p. 1. Ce complexe a été entrevu par *J. P. M. Binet* [J. Ec. polyt. (1) cah. 16 (1813), p. 1/67] et par *M. Chasles* [Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, (1^{re} éd.): Mém. couronnés Acad. Bruxelles in 4^e, 11 (1837), p. 384 99; (2^e éd.) Paris 1875, p. 384/99; (3^e éd.) Paris 1889, p. 384/99] qui a montré notamment que les normales à un faisceau de quadriques homofocales issues d'un point M ou situées dans un plan (Π) engendrent un cône du second ordre de sommet M ou enveloppent une conique située dans (Π). Au fond on doit attribuer la découverte du complexe (C) à *A. M. Ampère* [Mém. Acad. sc. Institut France (2) 5 (1821/2), éd. Paris 1826, p. 86] qui en a trouvé les propriétés fondamentales [cf. *Th. Reye*, Geometrie der Lage (4^e éd.) 2, Stuttgart (Leipzig) 1907, p. 223/4].

des forces \vec{F}_i , de directions invariablement liées à $O'x'y'z'$ et d'intensités constantes, quelle que soit la position de $Oxyz$ par rapport à $O'x'y'z'$.*

Nous dirons pour abrégé que les forces \vec{F}_i forment un *système lié* (S).

* Pour chaque position du trièdre $Oxyz$ la théorie des vecteurs glissants apprend à remplacer le système des forces \vec{F}_i par un système réduit statiquement équivalent, mais elle se montre impuissante à faire connaître la loi de variation de ce système réduit suivant les positions de $Oxyz$.*

La solution de ce dernier problème a donné naissance à une branche importante de la statique qui a reçu le nom d'*astatique*, et dont l'origine remonte à *E. F. A. Minding*¹⁷⁷). Ses résultats ont été étendus par *A. F. Möbius*¹⁷⁸) et *M. Steichen*¹⁷⁹), puis par *O. J. Broch*¹⁸⁰) et *N. M. F. Moigno*¹⁸¹) qui ont donné, en outre, des applications à la théorie du magnétisme.

* Il faut réserver une place spéciale à un mémoire de *G. Darboux*¹⁸²) qui, tout en rectifiant des résultats antérieurs de *A. F. Möbius*, obtient par une voie simple, d'importantes propositions complètement nouvelles.*

Enfin on pourra consulter les Traités de *I. (J.) Somov*¹⁸³), de *E. J. Routh*¹⁸⁴) et de *H. E. Timerding*¹⁸⁵).*

80. Cas de l'espace à deux dimensions. * Supposons les forces dirigées parallèlement au plan $O'x'y'$, leurs points d'application étant dans le plan Oxy , et supposons que, dans le déplacement relatif des

177) *J. reine angew. Math.* 14 (1835), p. 289; 15 (1836), p. 27; *Handbuch der Differential- und Integralrechnung* 2 (Mechanik), Berlin 1838, p. 78 et suiv.

178) *Lehrbuch der Statik* 1, Leipzig 1837, chap. 8 et 9; *Werke* 3, Leipzig 1886, p. 185/247.

179) *J. reine angew. Math.* 38 (1849), p. 277.

180) *Lehrbuch der Mechanik*, Berlin 1854, p. 82, 134 et suiv.

181) *Leçons de mécanique analytique, Statique*, Paris 1868, p. 206/45.

182) *Mém. Soc. sc. phys. nat. Bordeaux* (2) 2 (1878), p. 1/65; *G. Darboux, Sur l'équilibre astatique* Paris 1877; cf. *Th. Despeyroux, Cours de mécanique* (édition revue et annotée par *G. Darboux*) 1, Paris 1884, p. 391.

Voir encore les citations se rapportant au mémoire précédent de *G. Darboux* dans *W. Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte*, (2^e éd.) 1, Leipzig 1879; 2, Leipzig 1880.

183) *Racionalinaja Mechanika* 1, S^t Pétersbourg 1871; 2¹, S^t Pétersbourg 1872; 2² (posth.) S^t Pétersbourg 1877; trad. par *A. Ziwet, Theoretische Mechanik* 2, Leipzig 1879, p. 355/407.

184) *Analytical statics* (2^e éd.) 2, Cambridge 1902.

185) *Geometrie der Kräfte*, Leipzig 1908, p. 266/86 (chap. 18).

trièdres $Oxyz$ et $O'x'y'z'$ les axes Oz et $O'z'$ restent constamment parallèles; la solution du problème précédent [n° 79], ainsi restreint à un espace à deux dimensions, résultera immédiatement d'une construction de *A. F. Möbius*¹⁸⁶).

Soient M_1, M_2, \dots, M_n les points d'application des forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$; soient M'_{12} l'intersection des forces \vec{F}_1, \vec{F}_2 ; soit enfin \vec{F}_{12} la résultante des deux forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 respectivement équipollentes à \vec{F}_1 et \vec{F}_2 et appliquées en M'_{12} . Le support de \vec{F}_{12} rencontre le cercle passant par M_1, M_2 et M'_{12} en un second point M_{12} ; soit \vec{F}_{12} la force équipollente à \vec{F}_{12} appliquée en M_{12} . Remplaçons les forces \vec{F}_1, \vec{F}_2 par la force \vec{F}_{12} ; répétons la construction précédente sur le système $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ et ainsi de suite. A la fin nous aurons remplacé le système donné par une force unique \vec{F} appliquée en un point M , et il est clair que, lorsque toutes les forces tournent dans un sens bien déterminé d'un même angle φ autour de leurs points d'application, le système reste statiquement équivalent à une force passant par M et que l'on déduit de \vec{F} en faisant tourner \vec{F} de l'angle φ autour de M .

81. Systèmes de forces parallèles. Avant d'exposer la théorie générale de l'astatique, nous traiterons un cas particulier très simple dont la solution nous sera bientôt utile.

Supposons que les forces \vec{F}_i soient toutes parallèles à une droite D sur laquelle nous choisirons un sens positif, et appelons F_i la valeur algébrique de la projection de \vec{F}_i sur la droite orientée D [n° 3]. Il résulte bien aisément¹⁸⁷) de la loi du levier [n° 69] que, pour $\sum_{(i)} F_i$ différent de zéro, le système des forces \vec{F}_i est statiquement équivalent, quelle que soit la position de $Oxyz$, à une force unique \vec{F} , parallèle à D , dont la projection sur la droite orientée D a pour valeur algébrique

$$R = \sum_{(i)} F_i$$

et appliquée au point m de coordonnées, par rapport à $Oxyz$,

$$x = \frac{1}{R} \sum_{(i)} F_i x_i, \quad y = \frac{1}{R} \sum_{(i)} F_i y_i, \quad z = \frac{1}{R} \sum_{(i)} F_i z_i,$$

x_i, y_i, z_i étant les coordonnées du point m_i par rapport aux axes $Oxyz$.

Le point m est appelé le *centre* du système de forces parallèles

186) Lehrbuch der Statik 1, Leipzig 1837, § 115; Werke 3, Leipzig 1886, p. 171.

187) *P. Varignon*, Hist. Acad. sc. Paris 1714, éd. 1717, M. p. 79.

donné. Sa position dans le trièdre $Oxyz$ ne dépend pas de la direction de D .

L'application aux systèmes pesants est immédiate. Le centre des forces parallèles prend alors le nom de *centre de gravité* du corps.

82. Équilibre astatique et équivalence astatique. Conservons les hypothèses et les notations du n° 79. L'équilibre du corps (C) sera dit *astatique* s'il est réalisé pour toutes les positions du trièdre $Oxyz$ par rapport au trièdre $O'x'y'z'$.

Soit \vec{F}_i'' la force ayant même intensité, même point d'application que \vec{F}_i et une direction opposée à celle de \vec{F}_i . Appelons (S'') le système des forces \vec{F}_i'' . Nous dirons que deux systèmes liés (S) et (S') sont *astatiquement équivalents* si le système formé par l'ensemble des forces de (S') et de (S'') maintient le solide (C) en équilibre astatique.

Si le corps est en équilibre statique pour une position déterminée du trièdre $Oxyz$, il le sera encore après toute translation du trièdre $Oxyz$ par rapport au trièdre $O'x'y'z'$; il est donc loisible de supposer que les origines O et O' de ces deux trièdres coïncident.

Pour simplifier le langage nous conviendrons de regarder inversement le trièdre $Oxyz$ comme fixe et le trièdre $O'x'y'z'$ comme mobile. En d'autres termes, au lieu de faire tourner le corps nous ferons tourner les forces autour de leurs points d'application en conservant leurs intensités et leurs angles mutuels.

Soient alors X_i, Y_i, Z_i les composantes de la force F_i du système (S) par rapport aux axes $Oxyz$; et soient x_i, y_i, z_i les coordonnées du point d'application m_i de F_i par rapport à ces axes. Formons les douze quantités

$$(1) \quad \begin{cases} X = \sum_{(i)} X_i; & X_x = \sum_{(i)} X_i x_i, & X_y = \sum_{(i)} X_i y_i, & X_z = \sum_{(i)} X_i z_i, \\ Y = \sum_{(i)} Y_i; & Y_x = \sum_{(i)} Y_i x_i, & Y_y = \sum_{(i)} Y_i y_i, & Y_z = \sum_{(i)} Y_i z_i, \\ Z = \sum_{(i)} Z_i; & Z_x = \sum_{(i)} Z_i x_i, & Z_y = \sum_{(i)} Z_i y_i, & Z_z = \sum_{(i)} Z_i z_i. \end{cases}$$

Deux systèmes liés sont astatiquement équivalents si ces douze quantités ont les mêmes valeurs pour les deux systèmes; ainsi le système de forces parallèles \vec{F}_i [n° 80] est astatiquement équivalent à la force \vec{F} .

Pour qu'un système soit en équilibre astatique, il faut et il suffit que ces douze quantités soient nulles: nous les appellerons les *coordonnées astatiques* du système des forces¹⁸⁸).

188) *E. J. Routh les appelle „the twelve elements“ (les douze éléments)

Observons que les différents termes des sommes qui définissent les coordonnées astatiques du système de forces sont les coordonnées astatiques des forces elles-mêmes. On obtiendra donc les coordonnées astatiques d'un système de forces en faisant les sommes algébriques des coordonnées astatiques de même nom des différentes forces du système.

Les coordonnées statiques, considérées jusqu'à présent, sont reliées aux précédentes de la façon suivante:

Les coordonnées statiques X, Y, Z , sont les mêmes que les coordonnées astatiques X, Y, Z ; on a ensuite les formules

$$L = Z_y - Y_z, \quad M = X_z - Z_x, \quad N = Y_x - X_y.$$

§3. **Couples liés**¹⁸⁹⁾. Par définition un *couple lié* est un système de deux forces parallèles, égales et de sens contraires, liées à des points d'application bien déterminés m_i, m_i' . *L'un quelconque des vecteurs $\vec{m_i m_i'}$ et $\vec{m_i' m_i}$, le premier par exemple pour préciser, est dit le *bras de levier astatique* du couple ou le *bras astatique du couple* [cf. n° 74].* Soient a, b, c les projections du bras $\vec{m_i m_i'}$ sur les axes de coordonnées, r sa longueur, X, Y, Z les composantes de la force appliquée en m_i' , R son intensité; les coordonnées astatiques du couple seront

$$\begin{aligned} 0; & aX, bX, cX \\ 0; & aY, bY, cY \\ 0; & aZ, bZ, cZ. \end{aligned}$$

Elles ne changent pas si R et r varient de telle sorte que leur produit Rr reste constant; ce produit s'appelle le *moment astatique du couple*. On peut ainsi concevoir un couple lié comme un force infiniment petite dont le point d'application s'est éloigné indéfiniment dans une direction bien définie, celle du bras de levier astatique.

Supposons que, moyennant une rotation du trièdre $Ox'y'z'$, les supports des forces du couple viennent à coïncider avec le support du bras de levier astatique que nous prendrons pour axe des x ; toutes les coordonnées astatiques du couple s'évanouissent, à l'exception de $X_x = Rr$. *Suivant que l'on a $X_x > 0$ ou $X_x < 0$ le couple est dit *stable* ou *instable*.*

Tout système de forces liées *parallèles* dont la résultante générale est nulle est astatiquement équivalent à un couple lié.

[Analytical statics, (1^{re} éd.) 2, Cambridge 1892, p. 171; (2^e éd.) 2, Cambridge 1902, p. 313.*

189) E. J. Routh, Analytical statics, (1^{re} éd.) 2, p. 165/7; (2^e éd.) 2, Cambridge 1902, p. 308/11.

Il est important d'observer qu'en général on ne peut trouver un couple lié astatiquement équivalent à l'ensemble de deux couples liés. Pour qu'un tel couple lié existe, il faut et il suffit que les forces ou les bras de levier astatiques des deux couples donnés soient parallèles à une même direction.*

84. Moment scalaire d'un système de forces liées par rapport à un plan. Soit toujours m_i le point d'application de la force liée \vec{F}_i et F_i son intensité. Par définition, nous appellerons *moment vectoriel de la force liée \vec{F}_i par rapport à un plan (II)* (invariablement lié aux axes $Oxyz$) le vecteur lié \vec{G}_i , d'origine m_i , de même direction et de même sens que \vec{F}_i et d'intensité

$$p_i F_i,$$

p_i étant le nombre positif qui mesure la distance de m_i à (II).

Nous appellerons l'intensité

$$G_i = p_i F_i$$

du vecteur \vec{G}_i le *moment scalaire de \vec{F}_i par rapport à (II)*. Cette notion a été introduite pour la première fois par *G. Monge*¹⁹⁰.

Enfin étant donné un système formé d'un nombre quelconque de forces liées \vec{F}_i nous appellerons *moment scalaire*, ou simplement *moment* du système de forces par rapport au plan (II), l'intensité R de la résultante générale \vec{R} des vecteurs \vec{G}_i définis précédemment.

Soit

$$ux + vy + wz + h = 0$$

l'équation du plan II; les composantes Ξ, H, Z de la résultante générale \vec{R} sont données par les égalités

$$(2) \quad \begin{cases} \Xi \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = X_x u + X_y v + X_z w + Xh, \\ H \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = Y_x u + Y_y v + Y_z w + Yh, \\ Z \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = Z_x u + Z_y v + Z_z w + Zh \end{cases}$$

et le moment scalaire M du système par rapport au plan (II) résultera de la formule

$$(3) \quad \begin{aligned} M^2(u^2 + v^2 + w^2) &= (X_x u + X_y v + X_z w + Xh)^2 \\ &+ (Y_x u + Y_y v + Y_z w + Yh)^2 \\ &+ (Z_x u + Z_y v + Z_z w + Zh)^2. \end{aligned}$$

*L'importance de la notion de moment scalaire d'un système de

190) *Traité élémentaire de statique*, (1^{re} éd.) Paris 1786; (2^e éd.) Paris an III, p. 39; (4^e éd.) Paris an IX, p. 41; (8^e éd.) Paris 1846, p. 51.

forces par rapport à un plan apparaîtra plus complètement dans l'article IV 5. Il est aisé de prévoir dès maintenant qu'elle jouera en astatique un rôle considérable. En effet le moment scalaire par rapport à un plan est un invariant du système dans tous les déplacements du trièdre $Oxyz$ par rapport au trièdre $Ox'y'z'$; on le voit immédiatement d'après la définition même du moment; on peut aussi le vérifier à l'aide des formules de changement des coordonnées.*

On peut dire encore: le moment scalaire par rapport à un plan conserve la même valeur si l'on suppose ce plan invariablement lié au corps et si l'on déplace d'une manière quelconque le corps tandis que les forces appliquées aux divers points du corps conservent chacune la même grandeur, la même direction et le même sens.

85. Réduction astatique d'un système de forces liées. Plan central. Point central. Pour effectuer la réduction astatique d'un système de forces liées, c'est-à-dire pour remplacer ce système par un nouveau système plus simple et astatiquement équivalent au premier, nous emploierons une méthode dont l'origine remonte à *G. C. F. M. Riche de Prony*¹⁹¹).

Nous décomposerons la force \vec{F}_i appliquée au point m_i en trois forces appliquées en m_i et parallèles respectivement aux trois arêtes d'un trièdre qu'on peut supposer trirectangle. Le système donné est ainsi remplacé par trois systèmes de forces parallèles: chacun d'eux est, en général, astatiquement équivalent à une force unique, appliquée en un point bien déterminé, et en définitive le système donné est remplacé par un système astatiquement équivalent formé de trois forces $\vec{F}, \vec{G}, \vec{H}$ dont les directions sont parallèles aux arêtes d'un trièdre trirectangle, d'ailleurs arbitraire, et qu'on pourrait appeler les *composantes liées* du système (relatives au trièdre choisi). Si ce trièdre coïncide avec le trièdre $Oxyz$, les intensités des composantes liées sont X, Y, Z et les coordonnées de leurs points d'application A_x, A_y, A_z sont

$$(4) \quad \begin{cases} x_x = \frac{X_x}{X}, & y_x = \frac{X_y}{X}, & z_x = \frac{X_z}{X}, \\ x_y = \frac{Y_x}{Y}, & y_y = \frac{Y_y}{Y}, & z_y = \frac{Y_z}{Y}, \\ x_z = \frac{Z_x}{Z}, & y_z = \frac{Z_y}{Z}, & z_z = \frac{Z_z}{Z}. \end{cases}$$

191) On peut très bien se rendre compte du contenu et de la forme de ces leçons en lisant l'ouvrage de *L. B. Francaeur*, *Traité de mécanique élémentaire* rédigé d'après les méthodes de R. de Prony, Paris an X, p. 65/77. Plus tard *G. C. F. M. Riche de Prony* a publié lui-même ses *Leçons de mécanique analytique* 1, Paris 1810; 2, Paris 1815.

On a ainsi une interprétation particulièrement simple des douze coordonnées astatiques du système.

Soit maintenant OS une direction donnée, de cosinus directeurs α, β, γ par rapport aux axes Ox, Oy, Oz , et soit \vec{f}_i la composante de \vec{F}_i parallèle à cette direction OS et d'origine m_i . Les coordonnées x, y, z du centre [n° 80] des forces \vec{f}_i ont les valeurs suivantes¹⁹²⁾:

$$(5) \quad \begin{cases} x = \frac{X_x \alpha + Y_x \beta + Z_x \gamma}{X \alpha + Y \beta + Z \gamma}, \\ y = \frac{X_y \alpha + Y_y \beta + Z_y \gamma}{X \alpha + Y \beta + Z \gamma}, \\ z = \frac{X_z \alpha + Y_z \beta + Z_z \gamma}{X \alpha + Y \beta + Z \gamma}. \end{cases}$$

Pendant la rotation du trièdre $Oxyz$ autour de O , les cosinus directeurs α, β, γ varient, et, si l'un au moins des déterminants à neuf éléments que l'on peut extraire de la matrice des coordonnées astatiques n'est pas nul,* le point x, y, z se meut dans le plan

$$(6) \quad \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ X & X_x & X_y & X_z \\ Y & Y_x & Y_y & Y_z \\ Z & Z_x & Z_y & Z_z \end{vmatrix} = 0$$

invariablement lié au trièdre $Oxyz$ et contenant évidemment les points A_x, A_y, A_z .

Ce plan a été appelé par *E. F. A. Minding*¹⁹³⁾ et *A. F. Möbius*¹⁹⁴⁾ le *plan central* du système de forces données. C'est en général le seul plan pour lequel le moment scalaire du système soit nul.

* Observons que les formules (5) établissent une correspondance homographique réelle (H) entre les points du plan de l'infini situés dans la direction α, β, γ et les points (x, y, z) du plan central. Par suite les trois points

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$$

du plan central qui correspondent aux trois arêtes de directions

$$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2), (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$$

d'un trièdre trirectangle sont les sommets d'un triangle conjugué par rapport à une conique imaginaire du plan central. Autrement dit, quelle que soit la réduction du système de forces liées à trois com-

192) Cf. *G. Darboux*, *Mém. Soc. sc. phys. nat. Bordeaux* (2) 2 (1878), p. 50.

193) *J. reine angew. Math.* 14 (1835), p. 289.

194) *J. reine angew. Math.* 16 (1837), p. 1/10; *Werke* 3, Leipzig 1886, p. 525/34; *Lehrbuch der Statik* 1, Leipzig 1837, § 145; *Werke* 3, Leipzig 1886, p. 217.

posantes liées normales entre elles deux à deux, les points d'application de ces trois composantes forment dans le plan central un triangle qui est antipolaire dans un système antipolaire déterminé¹⁹⁵) [n° 76]. Au centre réel (x_0, y_0, z_0) de la conique imaginaire (Γ) , la transformation (H) fait correspondre le point du plan de l'infini, conjugué de la droite

$$X\alpha + Y\beta + Z\gamma = 0$$

du plan de l'infini par rapport à l'ombilicale* ; ce point a pour coordonnées

$$(6) \quad \begin{cases} x_0 = \frac{X^2 x_X + Y^2 x_Y + Z^2 x_Z}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \\ y_0 = \frac{X^2 y_X + Y^2 y_Y + Z^2 y_Z}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \\ z_0 = \frac{X^2 z_X + Y^2 z_Y + Z^2 z_Z}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \end{cases}$$

où $x_X, x_Y, x_Z, y_X, y_Y, y_Z, z_X, z_Y, z_Z$ sont fournies par les formules (4). Si, dans chaque réduction des forces données à trois composantes normales deux à deux, on considère les points d'application de ces composantes comme des points matériels pesants, de poids proportionnels aux intensités respectives de ces composantes, le centre de gravité de ces trois points matériels coïncide avec le point (x_0, y_0, z_0) . Ce point a été appelé, d'après *E. F. A. Minding*¹⁹⁶), *point central* du système de forces. Il diffère du point central de *W. R. Hamilton* dont on a parlé au n° 74. Il diffère encore du point nommé de la même manière par *A. F. Möbius*¹⁹⁷) et qu'il définit de la façon suivante :

Considérons les projections sur le plan central des forces du système proposé et décomposons-les suivant des parallèles à deux directions données du plan central. Quelles que soient ces directions, les centres de ces systèmes de composantes parallèles sont toujours situés sur une même droite appelée *droite centrale* par *A. F. Möbius*. Si l'une des directions choisies est précisément celle de cette droite, le centre des composantes parallèles correspondantes est appelée *point central* par *A. F. Möbius* ; mais ce point n'est pas invariablement lié au solide comme le point central de *E. F. A. Minding*.

Revenons à la réduction astatique d'un système de forces liées. Il résulte de la méthode donnée précédemment que l'on peut remplacer

195) *G. Darboux*, Mém. Soc. sc. phys. nat. Bordeaux (2) 2 (1878), p. 54.

196) *J. reine angew. Math.* 14 (1835), p. 289.

197) *J. reine angew. Math.* 16 (1837), p. 1/10; Werke 3, Leipzig 1886, p. 525/34.

un système de forces liées par trois forces liées dont l'une est perpendiculaire au plan central, les deux autres étant dans ce plan et perpendiculaires entre elles.

On peut encore obtenir un système réduit plus simple de la manière suivante:

Un système quelconque de forces liées peut être remplacé par un système astatiquement équivalent formé d'une force unique appliquée au point central et de deux couples dont les forces sont rectangulaires, les directions des bras de levier étant conjuguées par rapport à la conique (Γ). En particulier on peut effectuer la réduction précédente de telle sorte que les bras de levier soient rectangulaires; mais alors on peut faire tourner le trièdre $Oxyz$ autour de O de façon à amener les deux forces de chaque couple dans les directions de leurs bras de levier respectifs, la force unique restant normale à ces deux bras. On peut donc [cf. n° 82] choisir les axes de coordonnées de telle sorte que toutes les coordonnées astatiques du système de forces soient nulles à l'exception de

$$X_x = P, \quad Y_y = Q, \quad Z = R.$$

86. Les faisceaux de quadriques homofocales enveloppées par les plans d'égal moment. Tous les plans pour lesquels le moment scalaire $\sqrt{\Xi^2 + H^2 + Z^2}$ d'un système donné a une valeur constante M enveloppent une surface du second degré (M) dont l'équation tangentielle est donnée par la formule (3) du n° 84, et lorsque M varie de zéro à l'infini, on obtient ainsi toutes les surfaces réelles d'un faisceau de quadriques homofocales¹⁹⁸). Prenons les axes de coordonnées définis au numéro 85 et pour lesquels toutes les coordonnées astatiques du système sont nulles, sauf $X_x = P$, $Y_y = Q$ et $Z = R$: l'équation tangentielle des quadriques précédentes devient

$$(M^2 - P^2)u^2 + (M^2 - Q^2)v^2 + M^2w^2 = R^2h^2;$$

l'équation ponctuelle correspondante est alors

$$\frac{x^2}{M^2 - P^2} + \frac{y^2}{M^2 - Q^2} + \frac{z^2}{M^2} = \frac{1}{R^2}.$$

Les axes de ce système de coordonnées coïncident donc avec les axes principaux des quadriques homofocales. Leur centre commun est le point central de *E. F. A. Minding*, le plan des xy est le plan

198) Les rapports de l'astatique avec la théorie des moments d'inertie, qui conduit également à une famille de quadriques homofocales, ont été étudiés par *D. Padelletti*, Rendic. Accad. Napoli (1) 22 (1883), p. 29. Cf. aussi *E. J. Routh*, Analytical statics (1^{re} éd.) 2, Cambridge 1892, p. 183/4; (2^e éd.) 2, Cambridge 1902, p. 326/7.

central de *E. F. A. Minding*. La focale imaginaire située dans ce plan et qui a pour équation dans ce plan

$$\frac{x^2}{P^2} + \frac{y^2}{Q^2} + \frac{1}{R^2} = 0$$

est enveloppée par les plans de moment nul, dont un seul est réel (si P , Q et R sont différents de zéro), le plan central. Cette focale coïncide précisément avec la conique (Γ) dont il a été question plus haut [n° 85].

Les plans de moment M qui passent par un point P_0 enveloppent un cône (C); lorsque M varie, on obtient un faisceau de cônes homofocaux. Si l'on porte sur les normales à ces plans, en P_0 (dans un sens arbitraire), l'inverse du moment correspondant, l'extrémité du vecteur ainsi construit décrit une quadrique, qui est en général un ellipsoïde appelé par *G. Darboux* l'*ellipsoïde central* du point P_0 ; les axes de cet ellipsoïde coïncident avec ceux des cônes homofocaux (C) de sommet P_0 ¹⁹⁹. Les axes des ellipsoïdes centraux relatifs à tous les points de l'espace forment le complexe des axes de *Reye* (C) correspondant à la famille de quadriques homofocales [n° 78].

Si l'on prend le point P_0 comme origine, l'équation de l'ellipsoïde central est

$$(X_x x + X_y y + X_z z)^2 + (Y_x x + Y_y y + Y_z z)^2 + (Z_x x + Z_y y + Z_z z)^2 = 1.$$

Il en résulte que lorsque le point P_0 est situé dans le plan central (et dans ce cas seulement) l'ellipsoïde central dégénère en un cylindre d'axe normal au plan central.

Par une droite quelconque g , on peut faire passer deux plans pour lesquels le moment scalaire a une valeur donnée M ; ce sont les deux plans tangents menés par g à la surface (M) du faisceau homofocal.

Lorsque M varie ces deux plans décrivent deux faisceaux en involution dont les plans doubles correspondent au maximé et au minimé de M pour les plans passant par la droite g . *Ces plans doubles sont rectangulaires et, par suite, sont bissecteurs des angles dièdres formés par un couple quelconque de plans de même moment.*

Dans un faisceau de plans parallèles, il existe toujours un et un seul plan par rapport auquel le moment est minimé; *c'est le plan du faisceau passant par le point central de *E. F. A. Minding*.*

87. Les axes statiques de Siacci. Le théorème de Minding. Un système de forces donné peut toujours être remplacé par un système astatiquement équivalent formé d'une force unique \vec{R} appliquée en un

199) Mém. Soc. sc. phys. nat. Bordeaux (2) 2 (1878), p. 14.

point arbitraire O , et de trois couples dont les bras, issus du point O , sont dirigés suivant les arêtes d'un trièdre trirectangle arbitraire. Les composantes de la force sont X, Y, Z , quel que soit le point O et le moment scalaire d'un des couples par rapport au plan qui contient les bras des deux autres est évidemment égal au moment du système donné par rapport au même plan. Supposons que les bras soient dirigés précisément suivant les axes de coordonnées; les coordonnées astatiques de l'un des trois couples seront

$$0; \quad X_x, 0, 0;$$

$$0; \quad Y_x, 0, 0;$$

$$0; \quad Z_x, 0, 0;$$

et de même pour les autres.

Considérons alors l'ellipsoïde central relatif au point O et faisons coïncider les bras des couples avec les axes principaux de cet ellipsoïde; dans ce cas, les directions des forces des trois couples sont deux à deux rectangulaires. Il en résulte que par une rotation convenable autour du point O (arbitrairement choisi) on pourra donner au corps une position telle que le système de forces qui agit sur lui soit statiquement équivalent à une résultante unique appliquée au point O . Une telle position du corps une fois trouvée, on en obtiendra trois autres symétriques de la première par rapport aux axes de l'ellipsoïde central. Il existe donc quatre axes de rotation permettant d'amener le solide de sa position primitive à ces quatre positions particulières; ces quatre axes ont été appelés par *F. Siacci*²⁰⁰) les *axes statiques* du point O . Le plan qui contient deux axes statiques est perpendiculaire au plan des deux autres.

Les supports (Δ) des quatre forces auxquelles le système donné devient statiquement équivalent dans les quatre positions définies précédemment sont les génératrices communes de deux cônes appartenant au faisceau de cônes homofocaux de sommet O : ce sont les cônes qui ont pour bases les deux focales réelles du faisceau de quadriques homofocales. Cette propriété constitue le *théorème de Minding*²⁰⁰); de nombreuses démonstrations en ont été données; en voici une particulièrement simple.

200) *Atti Accad. Torino* 17 (1881/2), p. 241. Cf. *E. Padova*, *Atti Ist. Veneto* (6) 1 (1882/3), p. 1243; *C. Segre*, *Mem. mat. fis. Soc. ital. delle scienze (della dei XL)* (3) 6 (1887), p. 35 [1884].

201) *E. F. A. Minding*, *J. reine angew. Math.* 15 (1836), p. 37/8. Cf. aussi *G. Chrystal*, *Trans. R. Soc. Edinb.* 29 (1878/80), p. 519; *P. G. Tait*, *id.* p. 675; *G. Plarr*, *Proc. R. Soc. Edinb.* 11 (1880/2), p. 528 [1882]; *A. Astor*, *Nouv. Ann. math.* (3) 7 (1888), p. 38.

Reprenons comme axes de coordonnées $Oxyz$ les axes de symétrie des quadriques homofocales et soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ les cosinus directeurs de Ox par rapport à $Ox'y'z'$ dans une position déterminée du trièdre $Ox'y'z'$. Pour que, dans cette position, le système des forces données soit (statiquement) équivalent à une force unique \vec{f} il faut et il suffit que l'on ait

$$(7) \quad \alpha_2 P - \beta_1 Q = 0.$$

D'autre part, les coordonnées de la trace du support \vec{f} sur le plan des yz sont

$$(8) \quad y = \frac{Q\alpha_2 - P\beta_1}{R\alpha_3}, \quad z = -\frac{P\gamma_1}{R\alpha_3}.$$

Or on peut éliminer $\alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \gamma_1$ entre les équations (7), (8) et l'équation

$$\alpha_2^2 + \alpha_3^2 = \beta_1^2 + \gamma_1^2$$

et l'on voit immédiatement que y et z satisfont à l'équation

$$\frac{y^2}{P^2 - Q^2} + \frac{z^2}{P^2} = \frac{1}{R^2}.$$

De même on verrait que la trace de \vec{f} sur le plan des zx se trouve sur l'autre focale réelle

$$-\frac{x^2}{P^2 - Q^2} + \frac{z^2}{Q^2} = \frac{1}{R^2}.$$

Supposons donc que la position relative des trièdres $Oxyz$ et $Ox'y'z'$ soit choisie de telle sorte que le système des forces \vec{F}_i admette une résultante unique \vec{F} ; l'ellipsoïde central relatif à chaque point m d'une des focales réelles est de révolution, son axe coïncidant avec la tangente (Δ) à cette focale au point m .

Faisons alors tourner chaque force \vec{F}_i d'un angle φ autour de la parallèle à (Δ) menée par m_i ; le système de forces restera équivalent à une force unique qui tournera en même temps d'un angle φ autour de (Δ) tandis que son support rencontrera constamment l'autre focale.

88. Généralisation du théorème de Minding par Darboux. Dans ce qui précède, on a considéré les positions particulières du système de forces mobiles pour lesquelles ce système est réductible à une force unique.

Supposons maintenant que la position relative des trièdres $Oxyz$ et $Ox'y'z'$ soit choisie au hasard; soit alors (H) l'axe central correspondant. Lorsque $Ox'y'z'$ se déplace par rapport à $Oxyz$ d'une façon arbitraire, (H) engendre un complexe quadratique étudié par G. Darboux²⁰²). Ce complexe contient évidemment la congruence des droites

202) Mém. Soc. sc. phys. nat. Bordeaux (2) 2 (1878), p. 40.

* Cf. L. F. Painvin, Nouv. Ann. math. (2) 11 (1872), p. 49, 97, 202, 289, 481, 529.*

assujetties à rencontrer les deux focales. Il peut être défini par la propriété suivante: par toute droite du complexe passent deux plans rectangulaires tangents respectivement aux deux focales réelles du faisceau de quadriques homofocales.

Les droites du complexe qui passent par un point donné quelconque de l'espace forment un cône du second degré. Si l'on mène par le sommet S de ce cône les plans normaux à ses génératrices ces plans enveloppent un autre cône qui est tangent à l'une des quadriques homofocales. Si l'on adjoint à ce dernier cône les deux cônes qui projettent du même point S les deux courbes focales des surfaces homofocales, les trois cônes envisagés seront enveloppés par les plans d'une infinité de trièdres trirectangles.

89. Axes principaux de la rotation. Tout axe d'une section plane d'une des quadriques homofocales est une des génératrices d'un des hyperboloïdes du faisceau [voir la fin du n° 77]; le moment scalaire du système de forces est le même par rapport à tous les plans passant par une de ces droites. Sur chacune d'elles, *A. F. Möbius*²⁰³) a découvert qu'il existe deux points A, B où sont appliqués deux forces statiquement équivalentes au système donné, cette équivalence subsistant lorsqu'on fait tourner le système autour de la droite AB ; en raison de cette propriété, *A. F. Möbius* appelle ces droites les *axes principaux de la rotation*.

90. Cas particuliers de coordonnées astatiques. Si un système lié satisfait à la condition (invariante par rapport aux changements d'axes) que ses trois coordonnées astatiques X, Y, Z soient nulles, on peut le réduire astatiquement à trois couples liés dont les bras appartiennent à un trièdre trirectangle arbitraire. La formule (3) du n° 84 qui donne l'expression du moment M par rapport au plan $ux + vy + wz + h = 0$ devient alors

$$\begin{aligned} (X_x u + X_y v + X_z w)^2 + (Y_x u + Y_y v + Y_z w)^2 + (Z_x u + Z_y v + Z_z w)^2 \\ = M^2(u^2 + v^2 + w^2); \end{aligned}$$

le moment conserve donc la même valeur pour tous les plans parallèles à un plan donné. Pour tout plan réel à distance finie le moment est, en général, différent de zéro; pour le plan de l'infini il est indéterminé. Les surfaces homofocales se réduisent ici à des coniques, situées à l'infini; considérons alors les cônes homofocaux (C) ayant pour bases les coniques et pour sommet un point arbitraire de l'espace [cas d du

203) Lehrbuch der Statik 1, Leipzig 1837, § 137 et suiv.; Werke 3, Berlin 1886, p. 207 et suiv.

n° 77]. Les axes principaux de ces faisceaux de cônes homofocaux portent les bras de trois couples astatiquement équivalents au système donné; les forces de ces couples ont en même temps des directions deux à deux rectangulaires²⁰⁴). On peut donc mettre généralement le solide en équilibre de quatre manières différentes, d'où ce théorème:

„Si un solide est en équilibre pour une position bien déterminée du trièdre $Oxyz$, il l'est encore (abstraction faite des translations) pour trois autres positions au moins de ce trièdre“.

C'est *G. Darboux*²⁰⁵) qui a découvert ce théorème, en démontrant par cela même l'inexactitude d'une proposition antérieure de *A. F. Möbius*²⁰⁶) d'après laquelle un solide est en équilibre astatique, s'il est en équilibre pour quatre positions du trièdre $Oxyz$.

Plus particulièrement, il peut arriver que le corps reste en équilibre si on lui imprime une rotation quelconque autour d'une droite de direction déterminée. *A. F. Möbius*²⁰⁷) appelle de telles droites des *axes d'équilibre*. Pour qu'un tel axe existe (et alors toutes les parallèles à cet axe sont aussi des axes d'équilibre), il faut et il suffit que le faisceau des cônes homofocaux (C) définis plus haut se réduise pour un point (et par suite pour tout point à distance finie) à un faisceau de cônes de révolution coaxiaux. La condition analytique est donnée par l'évanouissement du déterminant

$$\begin{vmatrix} -(Y_y + Z_z) & X_y & X_z \\ Y_x & -(Z_z + X_x) & Y_z \\ Z_x & Z_y & -(X_x + Y_y) \end{vmatrix}$$

qui est symétrique, la position initiale étant supposée d'équilibre. Les cosinus directeurs α, β, γ des axes d'équilibre par rapport à $Oxyz$ s'obtiennent à l'aide des relations

$$\begin{aligned} -(Y_y + Z_z)\alpha + X_y\beta + X_z\gamma &= 0, \\ Y_x\alpha - (Z_z + X_x)\beta + Y_z\gamma &= 0, \\ Z_x\alpha + Z_y\beta - (X_x + Y_y)\gamma &= 0. \end{aligned}$$

* On peut formuler ce résultat d'une autre manière en introduisant la quadrique dont l'équation est

$$X_x x^2 + Y_y y^2 + Z_z z^2 + 2 X_y xy + 2 Y_z yz + 2 Z_x zx = 1.$$

204) C'est la réduction déjà donnée [n° 48]: mais ici la résultante unique s'évanouit.

205) Mém. Soc. sc. phys. nat. Bordeaux (2) 2 (1878), p. 2, 20.

206) Lehrbuch der Statik 1, Leipzig 1837, § 134; Werke 3, Leipzig 1886, p. 198.

207) Lehrbuch der Statik 1, Leipzig 1837, § 131; Werke 3, Leipzig 1886, p. 193.

Pour déterminer les axes principaux de cette quadrique on a à résoudre l'équation du troisième degré

$$\begin{vmatrix} X_x - \varrho & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y - \varrho & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z - \varrho \end{vmatrix} = 0,$$

dont les trois racines sont toujours réelles. Si l'une de ces racines est égale à

$$X_x + Y_y + Z_z,$$

c'est-à-dire au viriel constant

$$\sum_{(i)} (X_i x_i + Y_i y_i + Z_i z_i)$$

du système, la condition analytique cherchée se réduit à celle trouvée plus haut. Mais alors la quadrique est bitangente à la sphère

$$(X_x + Y_y + Z_z)(x^2 + y^2 + z^2) = 1.$$

Si la quadrique considérée se réduit à un cylindre (K), l'équation du troisième degré doit avoir une racine nulle.*

L'annulation des coordonnées X , Y , Z et du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_x & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z \end{vmatrix}$$

exprime qu'il y a un faisceau de plans parallèles pour lesquels le moment M du système est nul. Ces plans sont alors normaux à l'un des axes communs de tous les cônes homofocaux (C) correspondant à tous les points de l'espace et en même temps à l'axe du cylindre (K) que nous venons de trouver.

Si ce cylindre se réduit à deux plans parallèles, et si par conséquent le déterminant Δ s'annule ainsi que tous ses premiers mineurs, le système de forces est astatiquement équivalent à un couple lié. Le moment M est alors nul pour tous les plans normaux à ces deux plans parallèles. Le moment M du système par rapport à un plan quelconque est égal au produit de l'intensité d'une des forces du couple par le nombre positif qui mesure la projection de son bras sur la normale au plan et s'annule pour les plans parallèles au bras lui-même; ce bras est donc perpendiculaire aux deux plans que nous venons de considérer. Les cônes homofocaux (C) sont des cônes de révolution dont l'axe est parallèle au bras du couple. En faisant tourner le corps d'un angle convenable autour d'une perpendiculaire quelconque au plan du couple, on peut mettre en équilibre le corps soumis à

l'action du couple et cet équilibre persistera si l'on fait tourner ensuite le corps d'un angle quelconque autour d'une parallèle au bras du couple²⁰⁸).

*Les deux résultats précédents sont d'ailleurs compris, comme cas particuliers dans les propositions suivantes, où X, Y, Z peuvent prendre des valeurs quelconques:

Pour que le système des forces soit astatiquement équivalent à deux forces \vec{F}_1, \vec{F}_2 appliquées respectivement en deux points P_1, P_2 , il faut et il suffit que les quatre déterminants

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} X & X_y & X_z \\ Y & Y_y & Y_z \\ Z & Z_y & Z_z \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} X_x & X & X_z \\ Y_x & Y & Y_z \\ Z_x & Z & Z_z \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} X_x & X_y & X \\ Y_x & Y_y & Y \\ Z_x & Z_y & Z \end{vmatrix}$$

et

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_x & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z \end{vmatrix}$$

que l'on peut extraire de la matrice des coordonnées astatiques soient tous les quatre nuls, l'un au moins des premiers mineurs de $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ et Δ n'étant pas nul. Le moment scalaire M du système est alors nul pour tous les plans passant par $P_1 P_2$.*

Pour que le système des forces soit astatiquement équivalent à une force unique \vec{F} appliquée en un point P , il faut et il suffit que tous les premiers mineurs de $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ et Δ soient nuls. Le moment scalaire M du système est alors nul pour tous les plans passant par P .

Dans les deux cas précédents il n'y a plus de plan central [n° 85].

208) *E. J. Routh*, *Analytical statics*, (2^e éd.) 2, Cambridge 1902, p. 352 5.

Cet article a été revu et mis au point par *R. Garnier* qui a, en particulier, rédigé à nouveau les n^{os} 12, 23, 59 à 61, 65 à 75 et 79 à 90.

IV 5. GÉOMÉTRIE DES MASSES.

EXPOSÉ, D'APRÈS L'ARTICLE ALLEMAND DE G. JUNG (MILAN),
PAR E. CARVALLO (PARIS).

Introduction.

1. La notion de système de masses. La *géométrie des masses*¹⁾ vient de l'idée de considérer les points de l'espace non pas purement et simplement, mais de les affecter de nombres appelés masses, à volonté positifs ou négatifs²⁾. La signification du mot masse est ici détournée de sa signification physique; les masses de la théorie

1) Le nom „géométrie des masses“ a été introduit pour la première fois par *J. N. Haton de la Goupillière* [Sur une théorie nouvelle de la géométrie des masses, Thèse, Paris 1857; *J. Éc. polyt.* (1) cah. 37 (1858), p. 35/96; cf. *Revue gén. sc.* 4 (1893), p. 337 et suiv.]; plus tard il a été accepté par quelques autres auteurs, par exemple *I. (J.) Somov* [Racionalínaja mehanika 1, S^t Pétersbourg 1871; 2¹, S^t Pétersbourg 1872; 2² (posth.), S^t Pétersbourg 1877; trad. par *A. Ziwet*, *Theoretische Mechanik* 2, Leipzig 1879, p. 1/107 (chapitre d'introduction à la statique et à la dynamique)] et *W. Schell* [Theorie der Bewegung und der Kräfte (2^e éd.) 1, Leipzig 1879, p. 72/143].

Abstraction faite du nom, on peut trouver la première idée d'une géométrie des masses dégagée de la mécanique, aussi bien qu'une cinématique ou géométrie du mouvement séparée de la mécanique, chez *L. N. M. Carnot* [Géométrie de position, Paris 1803, p. 336/8, 483; De la corrélation des figures de géométrie, Paris 1801, p. 158/9]. Plus tard *M. Chasles* [Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie (1^{re} éd.) Mémoires couronnés Acad. Bruxelles in 4^o, 11 (1837); (2^e éd.), Paris 1875, p. 105, 220/1, 397 et autres] a suivi la même idée.

La cinématique fut élevée par *A. M. Ampère*, qui fut suivi par la plupart des géomètres, à une discipline propre [cf. IV 6, 1]; la géométrie des masses ne l'est pas encore aujourd'hui, quoique déjà un matériel suffisant soit réuni pour cela.

2) L'expression „point affecté d'un coefficient“ est employée par *A. F. Möbius*, *Der barycentrische Calcul*, Leipzig 1827, p. 5 (§ 3); *Werke* 1, Leipzig 1885, p. 28.

H. Grassmann [Geometrische Analyse (mémoire couronné par la Société Jablonowski à Leipzig en 1846), Leipzig 1847; *Werke* 1¹, publ. par *F. Engel*, Leipzig 1894, p. 375] appelle les points masses des „grandeurs points“; voir aussi *W. Schell* [Theorie der Bewegung¹⁾], (2^e éd.) 1, p. 73] et *L. Cremona* [Elementi di calcolo grafico, Turin 1874, p. 59].

géométrique signifient en effet des nombres susceptibles d'une interprétation particulière à chaque application. C'est ainsi que dans l'étude des corps graves elles représentent des masses ou des poids proprement dits; mais dans la théorie des erreurs, par exemple, le mot poids est pris dans sa signification figurée. Ainsi les masses peuvent représenter des quantités d'électricité ou de magnétisme, des intensités lumineuses ou des quantités de chaleur, etc. Dans la démographie ce sont des nombres de personnes qui sont compris dans une même limite de temps ou d'espace, etc. En géométrie, les masses peuvent être représentées par des segments rectilignes de longueurs et de sens déterminés pris dans une direction arbitraire mais commune, chaque segment ayant pour origine le point masse correspondant³⁾.

Toutefois la signification principale de la géométrie des masses est celle de la mécanique. Car elle comprend tous les problèmes qui concernent la théorie des moments statiques et du centre de gravité, puis la théorie des moments d'inertie et de déviation.

Nous désignons un point masse par le symbole

$$\alpha A,$$

le facteur numérique α est la masse et le symbole A désigne la position du point.

Si $\alpha = 1$, on écrit seulement A , et le point est alors appelé point simple par *H. Grassmann*²⁾.

L'ensemble de n points masses

$$\alpha_i A_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

qu'on peut représenter par le symbole

$$(\alpha_i A_i)_n$$

ou simplement

$$(\alpha A),$$

s'appelle système de masses;

$$\mu = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i$$

3) De tels segments, de direction commune mais arbitraire, représentent des masses scalaires. Si l'on veut étendre la notation des α_i à des grandeurs orientées, on arrive à la notion des masses vectorielles $(\alpha_i A_i)$ qui seraient représentées par des vecteurs α_i , non parallèles, issus des A_i . Si l'on désigne les sommes géométriques (vectorielles) par le symbole $\Sigma_{\text{géom.}}$, la masse totale du système est donnée par le vecteur $\mu = \Sigma_{\text{géom.}} \alpha_i$ qui peut d'ailleurs être nul. Du reste la représentation des vecteurs qui sont attachés aux points simples de l'espace est liée de la façon la plus étroite à la théorie des systèmes de forces liées, qui est traitée dans l'article IV 4, n° 79 et suiv.; pour ce qui regarde l'idée des masses vectorielles, voir en particulier ce qui concerne l'équilibre astatique et l'équivalence astatique.

est la masse totale. Les points masses peuvent être en nombre infini et former un continuum. Dans ce cas, que nous traiterons au n° 23, les sommes discontinues Σ se changent en intégrales.

Moments linéaires. Le centre de gravité.

2. Moments polaires linéaires. Différentes espèces de points masses. Un système de masses étant donné, on peut attacher à chaque point de l'espace un vecteur déterminé de la façon suivante. Soient

$$x, y, z$$

les coordonnées du point considéré P ;

$$x_i, y_i, z_i$$

les coordonnées d'un point A_i du système, de masse α_i . Les composantes du vecteur attaché au point P sont par convention

$$(1) \quad \xi = \sum_{(i)} \alpha_i(x_i - x), \quad \eta = \sum_{(i)} \alpha_i(y_i - y), \quad \zeta = \sum_{(i)} \alpha_i(z_i - z).$$

Ce vecteur s'appelle le *moment polaire* du système de masses par rapport au point P pris comme pôle⁴). Soient

$$\xi', \eta', \zeta'$$

les composantes du moment polaire pour un autre point P' de coordonnées x', y', z' ; on a

$$(2) \quad \xi - \xi' = \mu(x' - x), \quad \eta - \eta' = \mu(y' - y), \quad \zeta - \zeta' = \mu(z' - z).$$

Si μ est différent de zéro, il existe un point unique S pour lequel le moment polaire s'annule. Ses coordonnées x_s, y_s, z_s sont données par les formules

$$(3) \quad \sum_{(i)} \alpha_i(x_i - x_s) = 0, \quad \sum_{(i)} \alpha_i(y_i - y_s) = 0, \quad \sum_{(i)} \alpha_i(z_i - z_s) = 0,$$

ou

$$(3a) \quad \mu x_s = \sum_{(i)} \alpha_i x_i, \quad \mu y_s = \sum_{(i)} \alpha_i y_i, \quad \mu z_s = \sum_{(i)} \alpha_i z_i.$$

Ce point s'appelle le *centre de gravité* du système de masses⁵).

4) Sur la dénomination de „moment polaire“ voir *W. Schell, Theorie der Bewegung* 1), (2^e éd.) 1, p. 74; *H. Grassmann* [Die lineale Ausdehnungslehre, Leipzig 1844; (2^e éd.) Leipzig 1878; Geom. Analyse²]; Werke 1¹, p. 161, 375] appelle moment polaire³⁸) d'un point masse „l'excès du point αA sur le pôle P “; p. 378 on trouve aussi le nom de „grandeur moyenne du point multiple carré αA “ [cf. n° 10, note 38], de façon que le moment polaire linéaire d'un système de masses est identique à la „grandeur moyenne“ de *H. Grassmann*.

5) Sous cette forme (3a), le centre de gravité a été introduit pour la

Il demeure inchangé si toutes les masses sont multipliées par un même nombre.

Les coordonnées x_s, y_s, z_s permettent de représenter les composantes du moment polaire pour un point quelconque P ainsi

$$(4) \quad \xi = \mu(x_s - x), \quad \eta = \mu(y_s - y), \quad \zeta = \mu(z_s - z).$$

Le moment polaire du système de masses est donc, pour tout pôle, égal au moment de la masse totale concentrée au centre de gravité. On en déduit le théorème suivant:

Pour obtenir le moment polaire d'un système de masses pour un pôle quelconque, il suffit de construire le vecteur qui va de ce pôle au centre de gravité et de le multiplier par μ .

Inversement, si l'on connaît le moment polaire pour un pôle P^6 , il en résulte une construction simple du centre de gravité⁷).

Si $\mu = 0$, les équations (3) sont généralement impossibles. Les équations (2) deviennent alors

$$\xi = \xi', \quad \eta = \eta', \quad \zeta = \zeta';$$

le moment polaire M est alors le même pour tout point de l'espace⁸). Désignons par \vec{q} ce vecteur. Si \vec{q} est différent de zéro, le système de masses est dit *système magnétique*⁹); le vecteur \vec{q} est l'axe du système magnétique¹⁰); on peut dire que le centre de gravité S du système est rejeté à l'infini dans la direction du vecteur \vec{q} .

première fois par *P. Varignon*, Hist. Acad. sc. Paris 1714, éd. 1717, M. p. 77. [Cf. IV 4, 21, 69, 81].

6) On trouve ce moment par la construction du vecteur PP' égal à la somme géométrique des segments $\alpha_i PA_i$.

7) *I. (J.) Somov* [Rationalnaja mechanika¹]; trad. *A. Ziwei*, *Mechanik* 2, p. 20] attribue cette construction du centre de gravité qui est indépendante des moments linéaires plans [cf. n° 3] à *B. de Saint Venant*; mais elle se trouve aussi pour un système de points simples dans *L. N. M. Carnot* [Corrélation des figures de géom.¹], p. 152/4, 158/9]; pour un système général (défini à la fin du n° 2) elle a été donnée par *G. Bellavitis*, *Sposizione del metodo delle equipollenze* [Mem. mat. fis. Soc. ital. delle scienze (1) 25 (1855), math. p. 225 (Modène) 1835]; trad. par *C. A. Laisant*, *Exposition de la méthode des équipollences*, Paris 1874], par *A. F. Möbius* [Elemente der Mechanik des Himmels, Leipzig 1843; Werke 4, Leipzig 1887, p. 124], puis par *H. Grassmann* [Die lineale Ausdehnungslehre⁴], § 24, 101; Werke 1¹, p. 72, 168] et enfin par *B. de Saint Venant* [C. R. Acad. sc. Paris 21 (1845), p. 623].

8) *H. Grassmann*, *Geom. Analyse*²); Werke 1¹, p. 375.

9) Le nom de „système magnétique“ est justifié par ce fait qu'un système de masses magnétiques représente un pareil système [*H. Grassmann*, *Die lineale Ausdehnungslehre*⁴], § 104; Werke 1¹, p. 170/2]; voir aussi *E. Beltrami* [Ann. mat. pura appl. (2) 10 (1830/2), p. 252; Opere 3, Milan 1911, p. 476]; cf. notes 40 et 55.

Mais il se peut que les équations (3) soient identiquement satisfaites, en sorte que non seulement μ soit nul mais qu'en outre le vecteur \vec{q} s'annule aussi. Alors le moment polaire est nul pour tout pôle de l'espace et tout point peut être regardé comme centre de gravité du système¹¹). Le système de masses s'appelle dans ce cas *système indifférent*.

Si toutes les masses ont le même signe, la masse totale a une valeur finie différente de zéro et l'on trouve toujours un centre de gravité déterminé à distance finie. Le système de masses s'appelle alors *système pesant* parce que des masses pesantes fournissent un exemple d'un tel système. La théorie des systèmes pesants se distingue de la théorie des systèmes généraux, principalement dans l'étude des moments quadratiques qu'on verra plus loin (ces moments sont nécessairement tous positifs dans les systèmes pesants, parce qu'on y suppose tous les α_i positifs).

Nous appellerons *système de masses général* un système dont la masse totale est différente de zéro, même si les masses données n'ont pas toutes le même signe.

3. Moments linéaires planaires. Moments statiques par rapport à un plan. On appelle *moment statique* d'un système de masses relativement à un plan π ¹²) ou *moment planaire linéaire* l'expression scalaire qu'on obtient en multipliant la masse de chaque point du système par la valeur algébrique de sa distance au plan π et en ajoutant les produits obtenus, la valeur algébrique de la distance d'un point à un plan étant la valeur absolue de la distance précédée du signe + ou du signe - suivant que le point est d'un côté ou de l'autre du plan. Soit

$$Ux + Vy + Wz = T$$

10) H. Grassmann, Die lineale Ausdehnungslehre⁴), § 102; Werke 1¹, p. 168/9; cf. note 55. H. Grassmann remarque ici (p. 189) que le vecteur \vec{q} représente un point éloigné à l'infini dans la direction du vecteur et qu'il apparaît comme la moyenne ou l'axe moyen des points masses.

Quelques auteurs appellent ce système „abarycentrique“ (schwerpunktslos), mais on doit entendre par là seulement l'absence de centre de gravité à distance finie [cf. H. Grassmann, Die lineale Ausdehnungslehre⁴), p. 144; Werke 1¹, p. 170]. Le centre de gravité demeure déterminé; seulement, dans ce cas, il est à l'infini. Voir aussi A. F. Möbius, Der baryc. Calcul²), p. 11 (§ 9); Werke 1, p. 33.

11) A. F. Möbius [Der baryc. Calcul²), p. 12 (§ 10); Werke 1, p. 34] dit: „le système n'a pas de centre de gravité“, mais on entend par là qu'il n'a pas un centre de gravité déterminé.

12) La notion de moment statique remonte à Archimède, ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν ἢ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων, prop. 6 et 7; Opera, éd. J. L. Heiberg 2, Leipzig 1881, p. 152/61.

l'équation du plan π , le moment statique du système de masses $(\alpha_i A_i)$ est

$$(5) \quad M = \frac{\sum \alpha_i (Ux_i + Vy_i + Wz_i - T)}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}}$$

ou, d'après (3a),

$$(5a) \quad M = \frac{\mu (Ux_s + Vy_s + Wz_s - T)}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}}.$$

Le moment statique d'un système de masses général est donc, pour tout plan de l'espace, le moment statique de la masse totale concentrée au centre de gravité; il est égal au produit de cette masse totale par la distance du centre de gravité au plan de référence¹³).

En particulier il est nul pour tous les plans qui passent par le centre de gravité; autrement dit, le centre de gravité S est l'enveloppe des plans pour lesquels le moment statique est nul.

Si le système est un système magnétique, on a $\mu = 0$ et q différent de zéro. Pour un plan quelconque de référence, le moment statique a donc son maximum q pour les plans perpendiculaires à la direction de l'axe q ; les plans parallèles à l'axe q du système donnent un moment nul [cf. n° 5].

Le moment statique d'un système indifférent est nul pour tous les plans de l'espace.

4. Projection d'un système de masses sur un plan. Système rectiligne. On appelle projection d'un point masse αA sur un plan π le point masse αA_0 qui a pour masse la masse α du point αA et pour position A_0 la projection du point A sur le plan π . En particulier le centre de projection peut être à l'infini. Dans ce cas la projection d'un système général donne lieu aux propositions suivantes:

1°) Le centre de gravité S_0 de la projection d'un système sur un plan π s'obtient en projetant le centre S du système donné sur le plan π . En particulier si le plan π passe par S , S_0 coïncide avec S ¹⁵).

13) A. F. Möbius [Der baryc. Calcul²], p. 5 (§ 3); Werke 1, p. 28] fonde sur cette propriété la définition du centre de gravité.

14) K. (Ch.) Culmann [Die graphische Statik (1^{re} éd.), Zurich 1866, p. 25; (2^e éd.) Zurich 1875, p. 86] emploie pour la projection sur la normale à un plan l'expression *antiprojection* sur le plan. Exemples: 1°) la hauteur d'une pyramide est l'antiprojection sur sa base de chacune des arêtes passant par son sommet; 2°) un des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle est l'antiprojection de l'hypoténuse sur l'autre côté de l'angle droit. Voir aussi L. Cremona, Calcolo grafico²), p. 26.

2°) Le moment polaire du système projeté sur π pour un point P_0 du plan π est un vecteur de ce plan. On l'obtient en projetant sur π le vecteur qui représente le moment polaire du système de l'espace pour le même point P_0 .

3°) Le moment statique du système plan pour une droite d_0 du plan π s'obtient en prenant le moment statique du système pour le plan mené par la droite d_0 perpendiculairement au plan π .

La projection orthogonale d'un système magnétique sur un plan quelconque forme encore un système magnétique dont l'axe est la projection du vecteur q sur le plan. Mais si le plan est perpendiculaire à l'axe du système de l'espace, le système projeté est un système indifférent.

Des propositions analogues peuvent être établies pour des systèmes rectilignes obtenus en projetant les points masses sur une droite.

5. Théorèmes sur le centre de gravité. Centre des moyennes distances. Les équations (3) du n° 2, qui définissent le centre de gravité comme le point pour lequel le moment polaire est nul, comportent l'interprétation géométrique suivante:

On peut avec les segments qui joignent le centre de gravité S à chacun des points du système multipliés respectivement par les masses α_i former les côtés d'un polygone fermé.

Inversement, qu'on prenne un polygone fermé quelconque parcouru dans un certain sens de circulation, puis qu'à partir d'un point S on mène les vecteurs \vec{SA}_i représentés par les côtés du polygone, le point S sera le centre de gravité des extrémités A_i de ces vecteurs.

Les équations (3a) du n° 2 peuvent être écrites symboliquement

$$(6) \quad \sum_{(i)} \alpha_i A_i = \mu S \quad \text{ou} \quad S = \frac{1}{\mu} \sum_{(i)} \alpha_i A_i.$$

15) Les rayons projetants sont liés par la relation

$$\sum_{(i)} \alpha_i A_i A_i^0 = \mu S S^0.$$

En d'autres termes, $S S^0$ peut être regardé comme le *vecteur moyen* des vecteurs $\alpha_i A_i A_i^0$. Si a_i est le pied de la perpendiculaire abaissée d'un point P quelconque de l'espace sur SA_i , on a

$$\sum_{(i)} \alpha_i S A_i \cdot S a_i = 0.$$

Pour le cas où $\alpha_i = 1$ pour chacun des indices i , voir *L. N. M. Carnot*, *Corrélation des figures de géom.*¹⁾, p. 161.

Le centre de gravité apparaît ainsi comme le *point moyen*¹⁶⁾ ou bien, si on l'affecte de la masse totale du système, comme *la somme*¹⁷⁾ des divers points du système.

Qu'on partage un système de masses général en systèmes partiels, qu'on prenne le centre de gravité de chaque système partiel muni de la masse totale du système partiel, qu'on prenne enfin le centre de gravité des points masses ainsi obtenus, on aura le centre de gravité du système donné. Si toutes les masses d'un système sont sur une droite ou dans un plan donné, le centre de gravité est sur cette droite ou dans ce plan.

En conséquence:

Si le système peut être divisé en parties telles que les centres de gravité partiels soient sur une même droite ou dans un même plan, cette droite ou ce plan passe par le centre de gravité du système total. On dit que c'est une droite de gravité ou un plan de gravité. On peut toujours diviser le système en deux ou en trois parties; cela fera connaître une droite ou un plan de gravité¹⁸⁾.

De là une méthode simple pour trouver dans bien des cas le centre de gravité d'un système donné [voir n° 24].

En particulier si toutes les masses du système sont égales à 1 les coordonnées du centre de gravité S sont

$$(7) \quad \begin{cases} x_s = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \\ y_s = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}, \\ z_s = \frac{z_1 + z_2 + \dots + z_n}{n}. \end{cases}$$

La distance du point S à un plan quelconque est donc la moyenne des distances de tous les points du système au même plan.

Pour cette raison, le centre de gravité est alors appelé *centre des moyennes distances*¹⁹⁾. Tout plan de symétrie ou axe du système des points A_i passe par le centre de gravité.

16) *H. Grassmann*, J. reine angew. Math. 24 (1842), p. 271; Werke 1¹, publ. par *F. Engel*, Leipzig 1894, p. 72, 618; cf. n° 5, note 19 et n° 7, notes 26 et 27.

17) *A. F. Möbius*, Der baryc. Calcul²⁾, p. 25 (§ 22); J. reine angew. Math. 28 (1844), p. 7/8; Werke 1, p. 44, 611; *H. Grassmann*, Geom. Analyse²⁾, § 15; Werke 1¹, p. 376; cf. n° 5, note 21.

18) Si μ_1 et μ_2 sont les masses des centres de gravité partiels S_1 et S_2 , on a $\mu_1 + \mu_2 = \mu$ et $\mu_1 SS_1 + \mu_2 SS_2 = 0$.

19) *L. N. M. Carnot*, Corrélation des figures de géom.¹⁾, p. 154. *J. V. Poncelet* J. reine angew. Math. 3 (1828), p. 213/72] envisage le centre des moyennes

Dans un système magnétique le centre de gravité est rejeté à l'infini dans la direction de l'axe [n° 2]. C'est le point S_∞ . Les propositions établies pour un système général se modifient alors ainsi:

L'enveloppe des plans de moment statique nul²⁰⁾ est le point S_∞ [n° 3] et le vecteur \vec{q} peut être regardé comme la somme des points masses $\alpha_i A_i$, au moyen de l'équation²¹⁾

$$\sum_{(i)} \alpha_i A_i = \vec{q}.$$

Si l'on partage un système magnétique en deux parties non magnétiques, la droite qui joint les centres de gravité des deux systèmes partiels est parallèle à la direction de l'axe du système magnétique.

Les masses des deux systèmes partiels sont alors égales et de signes contraires. Si l'on multiplie leur valeur absolue par la distance des deux centres de gravité, on obtient la longueur q de l'axe \vec{q} . En particulier, la direction de l'axe s'obtient en joignant un point quelconque du système au centre de gravité des autres; la ligne de jonction est égale à $-\frac{1}{\alpha_i} \vec{q}$, α_i étant la masse du point choisi. Si un système magnétique est formé de systèmes magnétiques partiels, l'axe du système total \vec{q} est la résultante des vecteurs \vec{q}_i qui correspondent aux systèmes partiels, ce que l'on peut représenter par l'équation

$$\sum_{(i)} \vec{q}_i = \vec{q}.$$

Dans un système indifférent tout point de l'espace est centre de gravité [n° 2]. La somme des n points $\alpha_i A_i$ est nulle.

Si l'on partage un système indifférent en deux systèmes partiels non indifférents, les deux centres de gravité coïncident. En particulier, tout point d'un système indifférent coïncide avec le centre de gravité du reste du système; réciproquement un système général devient un système indifférent si on lui ajoute, au centre de gravité, une masse égale à la masse totale du système changée de signe.

distances comme le centre de la moyenne harmonique relativement au plan de l'infini [cf. n° 11]; voir aussi *M. Chasles*, *Aperçu hist.*), (2^e éd.), p. 616, 713. *H. Grassmann* [*J. reine angew. Math.* 24 (1842), p. 271; *Werke* 2¹, publ. par *E. Study*, *G. Scheffers* et *F. Engel*, Leipzig 1894, p. 12] disait „moyenne harmonique par rapport à un plan“ au lieu de centre de moyenne harmonique et „moyenne des points“ au lieu de centre des moyennes distances.

20) *A. F. Möbius*, *Der baryc. Calcul* 2), p. 9/12 (§ 8, 9); *Werke* 1, p. 31/3.

21) *H. Grassmann*, *Geom. Analyse* 2), appendice III, § 20; *Werke* 1¹, p. 308; cf. n° 5, note 17.

6. Coordonnées barycentriques. Si le système de masses est formé seulement de deux points masses $\alpha_1 A_1$ et $\alpha_2 A_2$, nous pouvons choisir la droite $A_1 A_2$ pour axe des x . Alors les coordonnées y et z des points A_1, A_2 et du centre de gravité S sont nulles et la coordonnée x , a pour valeur

$$(8) \quad x_s = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Le point S partage le segment $A_1 A_2$ en parties inversement proportionnelles aux masses α_1 et α_2 ; il est à l'intérieur du segment ou à l'extérieur suivant que α_1 et α_2 sont de même signe ou de signes contraires²²⁾. Si l'on a

$$\alpha_2 = -\alpha_1,$$

S est à l'infini sur la droite $A_1 A_2$ [n° 2].

Pour abrégé, nous passons le cas de trois points masses. Soit un système composé de quatre masses

$$\alpha_1 A_1, \alpha_2 A_2, \alpha_3 A_3, \alpha_4 A_4.$$

Le centre de gravité S est sur chacune des trois droites qui vont du centre de gravité des deux masses placées aux extrémités d'une arête au point analogue de l'arête opposée; il partage chacune d'elles dans le rapport inverse des masses placées aux extrémités de cette droite. La distance du point S à l'une des faces du tétraèdre est à la hauteur correspondante, comme la masse α_r du sommet correspondant A_r est à la masse totale

$$\mu = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4.$$

Qu'on laisse maintenant fixes les quatre sommets A_1, A_2, A_3, A_4 et qu'on change seulement leurs masses $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, en laissant constante leur somme μ ; chaque quadruplet $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)$ définit un point S unique et inversement chaque point S définit un quadruplet unique $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)$.

Ces quatre valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ sont les *coordonnées barycentriques* du point S relativement au tétraèdre fondamental $A_1 A_2 A_3 A_4$ ²³⁾. Elles ont été introduites par *A. F. Möbius* et employées dans son Calcul barycentrique²⁾ en 1827. Ce sont les coordonnées homogènes introduites pour la première fois dans la géométrie analytique²⁴⁾. Les

22) Cette loi du levier remonte à *Archimède*. Cf. note 12 et l'article IV 1.

23) Elles sont proportionnelles aux tétraèdres qui ont pour sommet commun S et pour bases les quatre faces Δ_i qui sont opposées aux sommets A_i dans le tétraèdre fondamental.

24) Voir *H. R. Baltzer* dans *A. F. Möbius, Werke* 1, Leipzig 1885, préface p. IX, et ce que *H. Grassmann* [Die lineale Ausdehnungslehre⁴⁾, § 117; Werke 1¹, p. 193] appelle „barycentrisches Richtsystem“ de *A. F. Möbius*.

coordonnées tétraédriques de *J. Plücker*²⁵⁾ dérivent des coordonnées barycentriques en multipliant celles-ci par un facteur constant arbitraire.

7. Le système de masses envisagé comme un système de forces parallèles. Les propositions données dans les numéros précédents prennent une interprétation caractéristique quand on représente chaque masse α_i par un segment A_iB_i mené à partir du point A_i parallèlement à une direction u et dans un sens correspondant au signe de α_i . On arrive ainsi aux théorèmes connus de la statique des corps solides [voir IV 4, 81].

Dans le cas d'un *système de masses général*, c'est-à-dire tel que μ soit différent de zéro, on peut trouver un segment résultant SR ²⁶⁾ appliqué au centre de gravité S . Comme la direction u est arbitraire, si l'on fait tourner les segments A_iB_i d'un angle ψ autour des points A_i en les laissant parallèles, la résultante SR tourne du même angle autour de S .

Les segments A_iB_i peuvent être regardés comme des forces appliquées aux points A_i ; S est le centre des forces parallèles A_iB_i ²⁷⁾.

Si l'on prend toutes les masses égales à 1, les segments SA_i peuvent représenter un système de forces appliquées au point S et se faisant équilibre. Si, au point S , on applique n forces ne se faisant pas équilibre, leur résultante est le segment nSM obtenu en multipliant par n le segment qui a pour origine le point S et pour extrémité le centre des moyennes distances M des extrémités des segments qui représentent les forces.

Si l'on remplace un *système magnétique* par un système de forces parallèles, appliquées aux points masses et ayant pour intensités ces masses²⁸⁾, ces forces se font équilibre quand leur direction u coïncide avec la direction de l'axe du système magnétique; mais si la direction u fait avec celle de l'axe magnétique un angle ω , les forces forment un couple de moment $q \sin \omega$ ²⁹⁾. On peut prendre le bras de levier

25) *J. reine angew. Math.* 5 (1830), p. 1; *Wiss. Abh.* 1, Leipzig 1895, p. 124. Voir aussi *G. Bellavitis*, *Mem. mat. fis. Soc. ital. delle scienze* (1) 25 (1855), math. p. 225/309 [1835]; trad. *C. A. Laisant*, p. 90/1.

26) A cause de cette propriété du centre de gravité, *D. Chelini* [*Mem. Ist. Bologna* (2) 10 (1869/70), p. 343] le nomme *point résultant* du système des points $\alpha_i A_i$.

27) Voir *A. F. Möbius*, *Lehrbuch der Statik* 1, Leipzig 1837, § 105/6; *Werke* 3, Leipzig 1886, p. 151/5.

28) *A. F. Möbius*, *Statik*²⁷⁾ 1, § 107; *Werke* 3, p. 155/6; et aussi l'article IV 4, n° 83.

29) Le couple peut être envisagé comme une force infiniment petite ou de longueur nulle rejetée à l'infini. Voir l'article IV 4, n° 21. Sur la composition

du couple dans la direction de l'axe du système magnétique et lui donner une longueur arbitraire a ; dès lors les forces du couple ont pour intensité $\frac{q}{a}$ et tournent autour de leurs points d'application en même temps que les forces du système donné.

En particulier, on peut réduire le système de forces parallèles à un couple en réduisant à une force un certain nombre des forces du système, qui ne se réduisent pas à un couple, et en composant de même les autres forces du système. Les deux résultantes partielles forment alors le couple.

Si l'on remplace les masses d'un système *indifférent* par des forces parallèles, celles-ci sont en équilibre quelle que soit la direction u choisie pour ces forces²⁸).

8. Systèmes congruents et systèmes semblables. D'un système de masses on déduit un *système de masses congruent* par un simple déplacement dans l'espace. Par rapport au système, la position du centre de gravité demeure la même. Qu'on change le signe de la masse α_i du point $\alpha_i A_i'$ du second système, il formera avec le point masse $\alpha_i A_i$ du système primitif un système magnétique; tous les systèmes magnétiques ($i = 1, 2, \dots, n$) réunis forment encore un système magnétique qui comprend les deux systèmes congruents considérés. De là résulte [voir n° 4] l'équation remarquable³⁰)

$$\sum_{(i)} \alpha_i A_i A_i' = \mu S S',$$

où S et S' représentent les centres de gravité des systèmes congruents donnés, et où Σ désigne la somme géométrique des vecteurs.

D'un système de masses on peut déduire un autre système par une transformation homographique d'affinité (ou, en particulier, de similitude) de l'espace. La même transformation faite sur le centre de gravité du premier système l'amène sur le centre de gravité du second système³¹) [cf. n° 24].

Moments quadratiques. Le système antipolaire.

9. Les différentes espèces de moments quadratiques et leurs significations respectives. Le moment quadratique d'un système de

de telles forces dans le plan de l'infini voir *K. (Ch.) Culmann*, Graph. Statik¹⁴), (1^{re} éd.) p.106/18; (2^e éd.) p.160/74, 187/91, 219, 253; trad. par *G. Glasser, J. Jacquier* et *A. Valat*, Traité de statique graphique, Paris 1880, p.150/63, 177/81, 209, 243.

30) *A. F. Möbius*, Mechanik des Himmels⁷), § 76; Werke 4, p. 134. Il en déduit le théorème de la conservation du centre de gravité.

31) Pour les figures semblables, le théorème remonte à *Archimède*. Cf. IV 1.

masses par rapport à un point, à une droite ou à un plan est une expression scalaire; pour l'obtenir, on multiplie chaque masse par le carré de sa distance au point, à la droite ou au plan et on ajoute les produits. Les distances à la droite ou au plan peuvent être évaluées, soit suivant la perpendiculaire, soit suivant une direction oblique donnée. Les moments quadratiques sont aussi appelés *moments d'inertie* polaires J_p , axiaux J_a ou planaires J_π suivant qu'ils se rapportent à un point, une droite, ou un plan. On appelle *rayon de giration* un segment dont le carré multiplié par la masse totale du système reproduit le moment d'inertie. Le rayon de giration est, comme le moment d'inertie correspondant, *polaire* k_p , *axial* k_a ou *planaire* k_π ³²).

Choisissons dans l'espace un système de trois plans perpendiculaires quelconques ξ, η, ζ pour définir un système de coordonnées. Les moments d'inertie correspondants pour un système de masses (αA) sont donnés par les expressions

$$(9) \quad J_\xi = \sum_{(i)} \alpha_i x_i^2, \quad J_\eta = \sum_{(i)} \alpha_i y_i^2, \quad J_\zeta = \sum_{(i)} \alpha_i z_i^2.$$

Les moments d'inertie pour les axes x, y, z sont alors³³)

32) I. (J.) Somov [Račionalnaja mehanika¹]; trad. A. Ziwet, *Mechanik* 2, p. 531] adopte pour le moment d'inertie J_a l'expression employée par L. Euler de „moment d'inertie“; mais, contrairement à K. (Ch.) Culmann [Graph. Statik¹⁴], (1^{re} éd.), p. 160/80; Statique graphique²⁹), Paris 1880, p. 367], W. Schell [Theorie der Bewegung¹], (2^e éd.) 1, p. 100/5] et E. J. Routh [A treatise on the dynamics of a system of rigid bodies, (6^e éd.) 1, Londres 1897; trad. A. Schepp, *Die Dynamik der starren Körper* 1, Leipzig 1898, p. 2], il remplace la dénomination de J. P. M. Binet [J. Éc. polyt. (1) cah. 16 (1813), p. 42] „moment d'inertie par rapport à un plan“ par l'expression de „moment quadratique par rapport à un plan“. J. N. Haton de la Goupillière [J. Éc. polyt. (1) cah. 37 (1858), p. 73/6], appelle les moments d'inertie J_a, J_π, J_p respectivement „moment d'inertie, somme d'inertie, moment central d'inertie“; mais plus tard [Revue gén. sc. 4 (1893), p. 340] il emploie la dénomination que nous employons ici.

Déjà L. Euler [Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum, Rostock et Greifswald 1765, p. 166] avait (pour les masses pesantes) employé la quantité J_d sous la forme μk_d^2 . L. Poinsot [J. math. pures appl. (1) 16 (1851), p. 73] se rattachant à L. Euler introduisit pour la première fois la notion de rayon d'inertie k_d qu'il appelait „bras d'inertie autour de l'axe d “. J. N. Haton de la Goupillière (comme aussi J. Mac Cullagh) donne aux rayons d'inertie k_a, k_π et k_p respectivement les noms de „rayon de giration, module de giration, et rayon central de giration“. W. Schell [Theorie der Bewegung¹], (2^e éd.) 1, p. 78, 100], dit au contraire respectivement „rayon d'inertie, bras d'inertie et rayon polaire du moment quadratique“. I. (J.) Somov [Račionalnaja mehanika¹]; trad. A. Ziwet, *Mechanik* 2, p. 74] n'emploie aucun nom particulier pour k_π .

33) L. Euler, *Theoria motus*³²) p. 176/7.

$$(10) \quad \begin{cases} J_x = \sum_{(i)} \alpha_i (y_i^2 + z_i^2) = J_\eta + J_\zeta, \\ J_y = \sum_{(i)} \alpha_i (z_i^2 + x_i^2) = J_\zeta + J_\xi, \\ J_z = \sum_{(i)} \alpha_i (x_i^2 + y_i^2) = J_\xi + J_\eta. \end{cases}$$

Ainsi, pour obtenir le moment d'inertie J_a pour un axe quelconque a , il suffit d'ajouter les moments d'inertie par rapport à deux plans rectangulaires passant par l'axe.

Inversement, on a

$$(11) \quad J_\xi = \frac{1}{2}(J_y + J_z - J_x), \quad J_\eta = \frac{1}{2}(J_z + J_x - J_y), \quad J_\zeta = \frac{1}{2}(J_x + J_y - J_z).$$

Le moment polaire J_0 pour l'origine 0 des coordonnées est

$$(12) \quad J_0 = \sum_{(i)} \alpha_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = J_\xi + J_\eta + J_\zeta = \frac{1}{2}(J_x + J_y + J_z).$$

Le moment d'inertie J_p pour un point quelconque P est donc égal à la somme des moments d'inertie pour trois plans perpendiculaires passant par ce point; il est aussi égal à la demi-somme des moments d'inertie pour trois axes rectangulaires passant par ce point.

On peut aussi écrire

$$(13) \quad J_0 = J_\xi + J_x = J_\eta + J_y = J_\zeta + J_z$$

ou

$$J_\xi = J_0 - J_x, \quad J_\eta = J_0 - J_y, \quad J_\zeta = J_0 - J_z.$$

Ainsi pour trouver le moment d'inertie J_π pour un plan π , il suffit de prendre le moment d'inertie pour un point quelconque de ce plan et d'en retrancher le moment d'inertie par rapport à un axe mené par le point choisi perpendiculairement au plan donné.

Les moments d'inertie ne sont pas nécessairement positifs si les masses α_i peuvent être à volonté positives ou négatives, mais si l'on suppose le *système pesant* (ou plus généralement tous les $\alpha_i > 0$), les moments d'inertie sont essentiellement positifs. Par suite, le cas particulier des systèmes pesants conduit aux théorèmes suivants:

Si l'on prend trois axes rectangulaires passant par un point P , chaque moment d'inertie est plus petit que la somme des deux autres (équation 11); chacun d'eux est plus petit que le moment polaire par rapport au point P (équation 12). Le moment d'inertie par rapport à un plan est plus petit que le moment d'inertie par rapport à toute droite de ce plan (équation 10), plus petit aussi que le moment d'inertie pour tout point du plan (équation 13).

Aux moments quadratiques se rattachent aussi ce qu'on appelle les *moments de déviation*³⁴⁾, ou *produits d'inertie*, ou *moments centrifuges*³⁵⁾. On choisit deux plans quelconques ξ et η , on prend les distances x_i et y_i d'un point $(\alpha_i A_i)$ du système à ces deux plans parallèlement à des directions choisies, on multiplie leur produit $x_i y_i$ par la masse α_i correspondante et l'on fait la somme des produits obtenus. L'expression scalaire obtenue est le moment de déviation

$$(14) \quad D_{\xi, \eta} = \sum_{(i)} \alpha_i x_i y_i.$$

Si les deux plans coïncident, le moment de déviation coïncide visiblement avec le moment d'inertie planaire J_{π} du plan correspondant.

Si le moment de déviation est nul pour un couple de plans on dit avec *J. P. M. Binet*³⁶⁾ que les deux plans sont conjugués par rapport au système de masses. Un plan pour lequel le moment d'inertie J_{π} est nul est dit *autoconjugué*. Si trois plans sont conjugués deux à deux, ils forment un *trièdre conjugué de Binet*³⁶⁾; s'ils sont rectangulaires ils déterminent pour leur point commun P les *plans principaux et les axes principaux d'inertie*³⁷⁾, autrement dit le *trièdre principal d'inertie* correspondant. En général [voir n° 11, 2'; et nos 17, 18], à chaque point P correspond un seul trièdre principal d'inertie. Pour chacun des trois plans principaux ou des trois axes principaux, le point P s'appelle le *point principal*.

Nous appellerons A, B, C les trois moments planaires et A', B', C' les trois moments axiaux relatifs au trièdre principal d'inertie corres-

34) Pour la dénomination de moment de déviation et pour celle de produit d'inertie voir *E. J. Routh*, *Dynamics*³²⁾, (6° éd.) 1, p. 2; trad. *A. Schepp* 1, p. 2; *W. Schell*, *Theorie der Bewegung*¹⁾, (2° éd.) 1, p. 104. Ces deux auteurs renvoient d'ailleurs à *W. J. M. Rankine*, *A manual of applied mechanics*, Londres 1858; (5° éd.), Londres 1876; trad. par *A. Vialay*, *Manuel de mécanique appliquée*, Paris 1876.

35) Voir surtout *K. (Ch.) Culmann*, *Graph. Statik*¹⁴⁾, (2° éd.), p. 423 qui dit „Centrifugalmomente“; *Statik graphique*²⁹⁾, p. 392. Voir aussi *F. Müller-Breslau*, *Statik der Baukonstruktionen*, Leipzig 1887, p. 27; *O. Mohr*, *Der Civilingenieur* 33 (1887), p. 43. *D. Chelini*, *Memorie Ist. Bologna* (2) 10 (1869/70), p. 207] appelle le moment de déviation „moment complexe“ (*momento complesso*).

36) *J. P. M. Binet* [*J. Éc. polyt.* (1) cah. 16 (1813), p. 47] pour le système pesant.

37) D'après *L. Euler*, *Theoria motus*³²⁾, p. 175 „*axes principales* cujusque corporis sunt tres illi axes per ejus centrum inertiae transeuntes, quorum respectu momenta inertiae sunt vel *maxima* vel *minima*“ [cf. n° 21]. Pour la définition d'un *axe principal d'inertie pris isolément*, cf. n° 18. Pour un système pesant, la définition d'un tel axe *isolé* est donnée par *W. Thomson* [*Cambr. Dublin math. J.* 1 (1846), p. 127], qui la basait sur des considérations dynamiques.

pondant au centre de gravité; $a, b, c; a', b', c'$ les rayons de giration correspondants. En outre, pour les systèmes pesants, nous admettrons que ces quantités sont rangées par ordre de grandeur $a < b < c$ et par suite (équation 13) $a' > b' > c'$.

10. Moments polaires quadratiques. Le moment polaire quadratique d'un système de masses pour un point P de coordonnées x, y, z ³⁸⁾ est représenté par l'expression suivante:

$$(15) \quad J_p = \Sigma \alpha_i \{ (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2 \}.$$

Si l'on suppose que le système est un *système de masses général*, on peut introduire les coordonnées x_s, y_s, z_s du centre de gravité S , la formule (15) devient (form. 3a)

$$J_p = \Sigma \alpha_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - 2\mu (x_s x + y_s y + z_s z) + \mu (x^2 + y^2 + z^2).$$

En introduisant dans cette formule le moment pour le centre de gravité

$$(16) \quad J_p^{(s)} = \Sigma \alpha_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - \mu (x_s^2 + y_s^2 + z_s^2),$$

nous obtenons³⁹⁾

$$(17) \quad J_p = J_p^{(s)} + \mu [(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2] = J_p^{(s)} + \mu \overline{PS}^2.$$

Ainsi donc, suivant que la masse μ est positive ou négative, le moment polaire J_p atteint son minimé ou son maximé quand le pôle P est au centre de gravité S et il est le même pour tous les points P d'une même sphère quelconque de centre S .

Soit $k_p^{(s)}$ le rayon de giration du point S ; décrivons autour du point S comme centre une sphère K_s de diamètre $k_p^{(s)}$ et soit MN un diamètre de cette sphère; on a pour un point P quelconque de l'espace

$$(18) \quad \begin{cases} J_p = \frac{\mu}{2} (\overline{PM}^2 + \overline{PN}^2) & \text{si } \mu J_p^{(s)} > 0, \\ J_p = \mu \overline{PM} \cdot \overline{PN} \cdot \cos(\overline{MPN}) & \text{si } \mu J_p^{(s)} < 0. \end{cases}$$

38) *H. Grassmann* [Geom. Analyse³⁾, § 15; Werke 1¹, p. 375] appelle le moment quadratique polaire⁴⁾ d'un système de masses (αA) „l'excès du point multiple carré αA^2 sur le pôle P^4 “.

39) Les deux formules (17) et (19) sont dues, pour les systèmes pesants, à *J. L. Lagrange* [Nouv. Mém. Acad. Berlin 14 (1783), éd. 1785, p. 290/1; Œuvres 5, Paris 1870, p. 539/40]. *L. N. M. Carnot* [Corrélation des figures de géom.¹⁾, p. 155] en a donné diverses applications géométriques. Pour un système de masses quelconque, voir les travaux de *C. A. Laisant* [Bull. Soc. math. France 6 (1877/8), p. 193/4], de *G. Darboux* [id. 7 (1878/9), p. 7/12] et de *G. Jung* [id. 7 (1878/9), p. 132/8]. *J. N. Haton de la Goupillière* [Revue gén. sc. 4 (1893), p. 339] appelait le premier membre de la relation (19) „le moment absolu du système“.

Cette sphère K_s peut, d'après *H. Grassmann*⁴³, être employée pour représenter le système de masses au point de vue de ses moments polaires quadratiques. Si le signe de μ est celui de $J_p^{(s)}$, on peut imaginer la masse totale μ partagée également entre les deux extrémités M et N d'un diamètre quelconque ou bien uniformément répartie sur toute la sphère. Ce système réduit coïncide aussi avec le système donné pour tous les moments linéaires. Si μ et $J_p^{(s)}$ ont des signes contraires, la sphère K_s fournit par un diamètre quelconque MN le moment polaire quadratique pour un point P quelconque en multipliant par la masse μ le *produit intérieur* (ou *scalaire*) des segments \overline{PM} et \overline{PN} .

Formons le moment polaire relatif au point A_i , c'est $\sum_{(j)} \alpha_j \overline{A_i A_j}^2$; multiplions-le par α_i et ajoutons les résultats ainsi obtenus pour tous les points du système, nous aurons $2 \sum_{(i)} \sum_{(j)} \alpha_i \alpha_j \overline{A_i A_j}^2$. D'après l'équation (17), la moitié de cette expression a pour valeur⁴³

$$(19) \quad \sum_{(i)} \sum_{(j)} \alpha_i \alpha_j \overline{A_i A_j}^2 = \mu \sum_{(i)} \alpha_i \overline{S A_i}^2.$$

Dans la double somme de cette formule, on doit prendre pour les indices i et j les $\frac{1}{2}n(n-1)$ combinaisons binaires des nombres naturels $1, 2, \dots, n$. Si tous les points du système sont simples, l'équation (19) s'écrit

$$(20) \quad \sum_{(i)} \sum_{(j)} \overline{A_i A_j}^2 = n \sum_{(i)} \overline{S A_i}^2.$$

Considérons un système *magnétique* et désignons par A_1, A_2, A_3 les composantes de son axe \vec{q} , savoir

$$A_1 = \sum_{(i)} \alpha_i x_i, \quad A_2 = \sum_{(j)} \alpha_j y_j, \quad A_3 = \sum_{(i)} \alpha_i z_i.$$

Posons en outre

$$A_0 = \frac{1}{2} \sum_{(i)} \alpha_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2).$$

Le moment polaire quadratique pour le pôle $P(x, y, z)$ aura pour valeur

$$(21) \quad J_p = -2(A_1 x + A_2 y + A_3 z - A_0).$$

D'après cette formule, les points dont le moment est nul sont ceux du plan ξ_0 ⁴⁰ défini par l'équation

$$A_1 x + A_2 y + A_3 z - A_0 = 0.$$

40) Si les coefficients représentent des masses magnétiques, le plan ξ_0 coïncide avec le plan des masses.

Ce plan est normal à l'axe $\vec{q}(A_1, A_2, A_3)$ du système magnétique et tous les points d'un même plan quelconque parallèle à ξ_0 ont le même moment polaire. La valeur de ce moment s'obtient d'après (21) en multipliant la distance du plan considéré au plan ξ_0 par la grandeur

$$G = 2\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$$

où l'on reconnaît le double du vecteur \vec{q} . *H. Grassmann*⁴⁵⁾ a remarqué qu'on peut représenter le système magnétique au point de vue de ses moments polaires quadratiques par le plan ξ_0 muni du poids G . L'axe \vec{q} du système magnétique s'obtient alors en prenant le vecteur $\frac{1}{2}\vec{G}$ normal au plan ξ_0 . Enfin on a⁴¹⁾

$$(22) \quad q^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = \sum_{(i)} \sum_{(j)} \alpha_i \alpha_j \overline{A_i A_j}^2.$$

Pour un système indifférent, on a $q = 0$, c'est-à-dire

$$A_1 = A_2 = A_3 = 0;$$

le moment polaire a donc pour valeur

$$(23) \quad J_p = 2A_0;$$

il est le même pour tous les points de l'espace⁴²⁾. Enfin on a⁴³⁾

$$(24) \quad \sum_{(i)} \sum_{(j)} \alpha_i \alpha_j \overline{A_i A_j}^2 = 0.$$

cide avec le plan que *E. Beltrami* [Ann. mat. pura appl. (2) 10 (1880/2), p. 252; Opere 3, Milan 1911, p. 476] appelle plan central, tandis que la grandeur du vecteur \vec{q} donne alors le moment principal du système; voir aussi *F. P. Ruffini*, Rendic. Accad. Bologna (2) 3 (1898/9), p. 17 et suiv. D'après les dénominations de *H. Grassmann*, le plan ξ_0 avec son complément qui est un vecteur normal à ce plan, constitue une grandeur planaire intérieure (*innere Plangrösse*). Cf. IV 4, nos 7, 12, 16.

41) *G. Darboux* [Bull. Soc. math. France 7 (1878/9), p. 7/12]; *G. Jung* [id. 7 (1878/9), p. 132/8].

42) *A. F. Möbius* [J. reine angew. Math. 26 (1843), p. 26/31; Werke 1, Leipzig 1885, p. 583/8] a donné diverses applications géométriques de cette propriété.

43) Les moments polaires quadratiques coïncident avec les expressions que *H. Grassmann* appelle „grandeurs intérieures“. Ce qui est dit dans le texte éclaircit la classification que fait *H. Grassmann* des grandeurs intérieures en trois espèces [Geom. Analyse²], § 16 à 22; Werke 1¹, p. 376/94; voir aussi *A. F. Möbius*, dans *H. Grassmann*, Geom. Analyse², appendice (Anhang); *A. F. Möbius*, Werke 1, Leipzig 1885, p. 620/33] et rend compréhensibles les dénominations adoptées par *H. Grassmann* de „grandeurs sphériques“, „grandeurs planes intérieures“ et „produit de segments“. De cette façon cette classification des moments polaires quadratiques du système de masses est mise d'accord avec celle qui a été donnée au n° 2 [Voir *G. Jung*, Reale Ist. Lombardo Rendic. (2) 16 (1883), p. 616].

11. Moments planaires quadratiques et de déviation et leur relation avec le système antipolaire lié au système de masses. L'exposition qu'on va faire de la théorie des moments planaires quadratiques découle d'une construction géométrique simple qui fait correspondre à tout plan un point déterminé de l'espace.

Transformons le système de masses

$$(\alpha A)$$

en donnant à chaque point A_i une nouvelle masse α'_i égale au moment statique de $\alpha_i A_i$ par rapport à un plan donné π . Cherchons alors le centre de gravité du système transformé

$$((\alpha'_i A_i));$$

ce point est appelé par *K. (Ch.) Culmann*⁴⁴⁾ le *centre du second degré*⁴⁵⁾

44) Graph. Statik¹⁴⁾, (2^e éd.), p. 413; Statique graphique²⁹⁾, p. 386.

45) La relation polaire entre un plan π et son centre du second degré a été établie d'abord par des considérations de statique géométrique et pour le cas d'un système pesant par *L. Cremona* [Corso litogr. di statica grafica, Milan 1867/8, § 12, n° 92 et suiv.] puis par *O. Mohr* [Der Civilingenieur 33 (1887), p. 60] et *W. Ritter* [Revue polytechnique, Schweizer. Bauzeitung 11 (1888), p. 121]; pour un système de masses *quelconque* c'est *G. Jung* [Reale Ist. Lombardo, Rendic. (2) 8 (1875), p. 698/701; (2) 12 (1879), p. 169/79, 218/28, 535/6, en partic. § 10; Collectanea mathematica in memoriam Dominici Chelini, publ. par *L. Cremona* et *E. Beltrami*, Milan 1881, p. 11] qui a démontré la proposition et cela par des considérations de statique géométrique. *K. (Ch.) Culmann* [Graph. Statik¹⁴⁾, (1^{re} éd.), p. 170/2; Statique graphique²⁹⁾, p. 387] a déduit la même relation, pour un système pesant, par des considérations analytiques, en s'appuyant sur les propriétés de l'ellipsoïde central auxquelles il était parvenu analytiquement.

En même temps que *K. (Ch.) Culmann*, *M. Bresse* [Cours de mécanique appliquée, (2^e éd.) 1, Paris 1866, p. 30] étudiait cette polarité dans le plan et introduisait pour la première fois les dénominations „antipôle d'une droite“, „droite antipolaire“, etc. adoptées ensuite par *K. (Ch.) Culmann* [Graph. Statik¹⁴⁾, (2^e éd.) Zurich 1875] et étendues à l'espace (ces dénominations se justifient au n° 12).

Dans *Th. Reye* [Z. Math. Phys. 10 (1865), p. 440] on trouve déjà les dénominations „contre-pôle“ et „droite contre-polaire“; comme *K. (Ch.) Culmann*, *Th. Reye* procéda *analytiquement* dans le cas d'un système pesant; mais (p. 446) il démontra expressément que les points et leurs plans contre-polaires forment un système polaire par rapport à une surface imaginaire.

La même proposition se trouve aussi implicitement contenue dans *L. O. Hesse* [Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, (2^e éd.) Leipzig 1869, p. 352/63; (3^e éd.) revue et complétée par *S. Gundelfinger*, Leipzig 1876, p. 355/67] qui n'envisage que le cas d'un *système pesant* et suit une voie analytique.

Pour un système de masses *quelconque*, *Th. Reye* [J. reine angew. Math. 72 (1870), p. 293] a établi la proposition en question par des considérations de statique analytique; on voit bien en effet que le *système antipolaire* ne diffère pas du système polaire correspondant à la „figure imaginaire“ (imaginäres Bild) de *L. O. Hesse* et à la „seconde surface-nulle“ (zweite Nullfläche) [n° 26] de *Th. Reye*.

du système donné par rapport au plan donné π . Il joue pour les moments quadratiques un rôle entièrement analogue à celui du centre de gravité pour les moments linéaires; il coïncide avec lui quand le plan π s'éloigne indéfiniment; car, dans ce cas, les distances de tous les points A_i au plan de l'infini peuvent être regardées comme égales.

Commençons par quelques formules analytiques. Soient

$$Ux + Vy + Wz - T = 0$$

et

$$U'x + V'y + W'z - T' = 0$$

les équations de deux plans π et π' ; le moment de déviation correspondant pour le système de masses est donné par la formule

$$(25) \quad D_{\pi, \pi'} = \frac{\sum_{(i)} \alpha_i (Ux_i + Vy_i + Wz_i - T)(U'x_i + V'y_i + W'z_i - T')}{\sqrt{(U^2 + V^2 + W^2)(U'^2 + V'^2 + W'^2)}}.$$

Si π et π' sont deux plans conjugués de Binet on a [voir n° 9]

$$D_{\pi, \pi'} = 0$$

ou

$$(26) \quad \sum_{(i)} \alpha_i (Ux_i + Vy_i + Wz_i - T)(U'x_i + V'y_i + W'z_i - T') = 0.$$

Si les plans π et π' coïncident, on déduit de (25) pour le moment d'inertie planaire J_π

$$(27) \quad J_\pi = \frac{\sum \alpha_i (Ux_i + Vy_i + Wz_i - T)^2}{U^2 + V^2 + W^2}$$

ou, en désignant le numérateur par Φ ,

$$(27') \quad J_\pi = \frac{\Phi}{U^2 + V^2 + W^2}.$$

Si π est un plan autoconjugué dans le sens de Binet l'équation (26) fournit celle-ci

$$(28') \quad \Phi = \sum_{(i)} \alpha_i (Ux_i + Vy_i + Wz_i - T)^2 = 0.$$

Cette équation s'écrit sous la forme

$$(28) \quad \Phi = A_{11}U^2 + A_{22}V^2 + A_{33}W^2 + 2A_{23}VW + 2A_{31}WU + 2A_{12}UV - 2A_1UT - 2A_2VT - 2A_3WT + \mu T^2 = 0,$$

en posant

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{(i)} \alpha_i x_i^2 = A_{11}, \quad \sum_{(i)} \alpha_i y_i^2 = A_{22}, \quad \sum_{(i)} \alpha_i z_i^2 = A_{33}, \\ \sum_{(i)} \alpha_i y_i z_i = A_{23} = A_{32}, \quad \sum_{(i)} \alpha_i z_i x_i = A_{31} = A_{13}, \quad \sum_{(i)} \alpha_i x_i y_i = A_{12} = A_{21}, \end{array} \right.$$

$$(30) \quad \sum_{(i)} \alpha_i x_i = A_1, \quad \sum_{(i)} \alpha_i y_i = A_2, \quad \sum_{(i)} \alpha_i z_i = A_3.$$

Les équations (28), (28') et (26) sont susceptibles de diverses interprétations. D'abord la géométrie de l'espace donne les propositions connues que voici:

1°) L'équation (28)

$$\Phi = 0$$

représente la surface directrice d'un système polaire Σ , système des pôles et plans polaires par rapport à Φ ; ce système est réel, même quand la surface Φ est imaginaire. On l'appelle *système antipolaire* du système de masses donné.

2°) L'équation (26) donne en coordonnées tangentielles le pôle du plan π relativement à $\Phi = 0$, autrement dit l'antipôle P de π dans le système donné.

3°) π et π' sont des plans conjugués du système antipolaire [voir IV 4, 76]⁴⁵).

D'un autre côté, pour déduire du système primitif $(\alpha_i A_i)$ le système transformé $(\alpha'_i A'_i)$ correspondant au plan

$$\pi \equiv Ux + Vy + Wz - T = 0,$$

il faut, conformément à notre idée fondamentale, remplacer la masse α_i du point A_i du système donné par la nouvelle masse

$$\alpha'_i = \frac{\alpha_i(Ux_i + Vy_i + Wz_i - T)}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}}.$$

De cette transformation résultent les théorèmes suivants:

1°) La même équation (26) représente aussi, d'après notre définition du début, le centre du second degré $(U'V'W'T')$ du plan π ; en outre, d'après les formules (28) et (30), le centre de gravité du système de masses est aussi le centre du système antipolaire Σ , comme cela résulte de la remarque faite au début du n° 11.

2°) Tous les plans conjugués d'un plan π au sens de *J. P. M. Binet* (26) passent par son centre du second degré; donc tout trièdre conjugué de *J. P. M. Binet* est un trièdre polaire du système antipolaire Σ et réciproquement; comme à chaque point correspond en général un seul trièdre polaire *rectangulaire*, on trouve aussi pour chaque point un seul *trièdre principal* d'inertie. [Voir nos 9, 17 et 18].

3°) Le moment de déviation $D_{\pi, \pi'}$ de deux plans peut être regardé comme le moment statique du système transformé au moyen de l'un des deux plans π par rapport à l'autre plan π' ; de même, le moment d'inertie planaire J_{π} est aussi le moment statique du système transformé au moyen du plan π relativement au plan π lui-même⁴⁵).

Enfin il résulte de ce qui précède que:

1'') La surface $\Phi = 0$ est l'enveloppe des plans qui sont conjugués d'eux-mêmes au sens de Binet.

2'') Chacun de ces plans contient le centre correspondant du second degré.

3'') Pour chacun d'eux, le moment d'inertie correspondant J_π est nul⁴⁶⁾.

La nature de la surface $\Phi = 0$ dépend de la nature du système de masses choisi. Son centre, qu'il soit d'ailleurs à distance finie ou dans le plan de l'infini, coïncide toujours avec le centre de gravité S ou S_∞ du système de masses. Pour tout système pesant, la surface $\Phi = 0$ est imaginaire. Sur ce point voir plus loin n^{os} 12 et 13.

Désignons maintenant par S_π la distance du centre de gravité S à un plan π ne passant pas par S ; par p_π , la distance de l'antipôle au même plan. Ces distances doivent être mesurées suivant la même direction u , d'ailleurs arbitraire, que les distances des points masses $\alpha_i A_i$. Supposons le système donné général (où μ est différent de zéro) et observons que, dans ce cas, le système transformé a pour masse totale

$$\mu S_\pi = \frac{\sum \alpha_i (Ux_i + Vy_i + Wz_i - T)}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}}.$$

Dès lors les formules (3a) et les théorèmes ci-dessus conduisent pour un système général aux relations⁴⁷⁾

$$(31) \quad J_\pi = \mu S_\pi p_\pi \quad \text{et} \quad D_{\pi, \pi'} = \mu S_\pi p_{\pi'}.$$

Donc le moment d'inertie planaire pour un plan π ne passant pas par le centre de gravité s'obtient en multipliant la masse totale μ par la distance S_π de son centre de gravité et par la distance p_π de son antipôle au plan π . Puis, le moment de déviation pour un couple de plans (dont l'un au moins ne passe pas par le centre de gravité) s'obtient en multipliant la masse totale par la distance S_π du centre de gravité au plan π et par la distance $p_{\pi'}$ de l'antipôle du plan π au plan π' .

Pour un système magnétique, si l'on choisit la direction u parallèle à l'axe \vec{q} du système, on a les équations

$$(31') \quad J_\pi = q p_\pi \quad \text{et} \quad D_{\pi, \pi'} = q p_{\pi'},$$

où $p_{\pi'}$ désigne la distance au plan quelconque π' de l'antipôle du plan π et où q est la valeur scalaire de l'axe magnétique.

46) L. O. Hesse [Analyt. Geom. des Raumes⁴⁵⁾, (2^e éd.) p. 352 63; (3^e éd.), p. 355/67] pour les systèmes pesants.

47) Voir K. (Ch.) Culmann, Graph. Statik¹⁴⁾, (2^e éd.) Zurich 1875, p. 409; Statique graphique²⁹⁾, p. 382.

Soit maintenant un système de masses général, J_π et J_σ les moments d'inertie planaires de deux plans parallèles π et σ de distance p , le dernier σ passant par le centre de gravité S , nous aurons [voir la relation (9) et le n° 3] la relation analogue à (17)

$$(32) \quad J_\pi = J_\sigma + \mu p^2.$$

Comme $p = S_\pi$ les formules (31) et (32) donnent par soustraction

$$(33) \quad J_\sigma = \mu S_\pi(p_\pi - S_\pi) = \mu S_\pi p_\sigma,$$

en désignant par p_σ la distance de l'antipôle P du plan π au plan parallèle σ mené par le centre de gravité.

Si le plan π touche la surface $\Phi = 0$, on a $J_\pi = 0$ et alors on a [voir l'équation (38)]

$$(34) \quad J_\sigma = -\mu k^2,$$

où k est la distance du plan central σ au plan parallèle tangent à la surface $\Phi = 0$.

Soient π et π' deux plans quelconques et $\pi^{(s)}$ et $\pi'^{(s)}$ les plans parallèles menés par le centre de gravité; on a pour les moments de déviation correspondants $D_{\pi, \pi'}$ et $D_{\pi^{(s)}, \pi'^{(s)}}$ la relation analogue à (32)

$$(35) \quad D_{\pi, \pi'} = D_{\pi^{(s)}, \pi'^{(s)}} + \mu S_\pi S_{\pi'}^{48};$$

S_π et $S_{\pi'}$ y représentent les distances du centre de gravité S aux plans π et π' .

Si l'un de ces plans, π' par exemple, passe par S on a

$$S_{\pi'} = 0,$$

et par suite⁴⁸⁾

$$(35') \quad D_{\pi^{(s)}, \pi'^{(s)}} = D_{\pi, \pi'^{(s)}}.$$

Ainsi le moment de déviation relatif à deux plans passant par le centre de gravité ne change pas quand l'un d'eux ($\pi^{(s)}$) subit une translation parallèle

$$(\pi^{(s)} - \pi)^{48}.$$

Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer d'une façon analogue les théorèmes compris dans les formules (32) à (35).

12. Les surfaces centrales pour les moments quadratiques planaires et les moments de déviation. Soit

$$\Phi = 0$$

la surface directrice du système antipolaire pour un système de masses

48) *J. N. Haton de la Goupillière* [J. Éc. polyt. (1) cah. 37 (1858), p. 44] a démontré ce théorème pour des plans π et π' rectangulaires et dans le cas d'un système pesant.

donné. Nous appelons *surface centrale de Culmann* la surface

$$\Phi^{(c)} = 0$$

conjuguée de la surface $\Phi = 0$ ⁴⁹).

Prenons un système de masses général et choisissons pour axes les axes centraux [n° 9]; nous aurons

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 = A_3 = 0, \quad A_{23} = A_{31} = A_{12} = 0, \\ A_{11} = A, \quad A_{22} = B, \quad A_{33} = C. \end{aligned}$$

L'équation (28) prend la forme canonique

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi = AU^2 + BV^2 + CW^2 + \mu T^2 = 0 \\ \text{ou en coordonnées ponctuelles} \\ \Phi = \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} + \frac{1}{\mu} = 0. \end{array} \right.$$

L'équation de la *surface centrale de Culmann* est donc

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi^c = AU^2 + BV^2 + CW^2 - \mu T^2 = 0 \\ \text{ou} \\ \Phi^c = \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} - \frac{1}{\mu} = 0. \end{array} \right.$$

Soient π et π^c les plans polaires d'un point $P(x', y', z')$ par rapport aux surfaces Φ et Φ^c . La forme de leurs équations montre que ces plans sont symétriques par rapport au centre de gravité S ; et de même les pôles d'un plan quelconque par rapport aux deux surfaces sont symétriques par rapport à S . En particulier:

Si P est un point de la surface de Culmann elle-même, il est l'antipôle du plan qui touche la surface au point P_0 symétrique de P .

Φ^c est un hyperboloïde ou un ellipsoïde réel si Φ est un hyperboloïde ou un ellipsoïde imaginaire. Si Φ est un ellipsoïde réel, Φ^c est imaginaire.

Tout système pesant a un *ellipsoïde central de Culmann*⁵⁰) qui a pour formule

$$(37') \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

où a, b, c sont les rayons principaux d'inertie planaires (n° 9), de

49) Si l'on rapporte la surface du second ordre à centre à ses trois plans de symétrie (ou la surface parabolicoïde à ses deux plans de symétrie et au plan tangent au sommet), l'équation prend la *forme canonique*. Deux surfaces sont alors dites conjuguées si leurs équations canoniques rapportées aux mêmes axes ne diffèrent que par le signe du terme constant (lequel est nul dans le parabolicoïde).

50) Graph. Statik¹⁴), (1^{re} éd.) p. 164/6; (2^e éd.) p. 408/13; Statique graphique²⁹), p. 381/6. Voir aussi P. Ruffini, Memorie Ist. Bologna (4) 3 (1881/2), p. 9, 283.

façon que

$$A = \mu a^2, \quad B = \mu b^2, \quad C = \mu c^2.$$

Dans un *système magnétique* au contraire (où $\mu = 0$) l'équation (28) est satisfaite par le plan de l'infini

$$U = V = W = 0$$

et la surface Φ est tangente à ce plan; c'est donc un parabololoïde⁵¹); d'après la définition donnée dans la note 49, Φ coïncide alors avec la surface centrale de Culmann Φ^c .

Revenons à un *système de masses général*. Soit π un plan tangent de la surface centrale de Culmann Φ^c ; son antipôle est le point P de la surface qui est diamétralement opposé au point de contact. Soit k la perpendiculaire abaissée de S sur π , on a

$$S_\pi = P_\sigma = +k, \quad P_\pi = +2k$$

et par conséquent [voir les formules 33 et 31]

$$(38) \quad J_\sigma = \mu k^2, \quad J_\pi = 2J_\sigma.$$

Si donc σ est un plan central parallèle à un plan tangent π à la surface centrale de Culmann, le rayon d'inertie k_σ est égal à la distance du plan π au centre de gravité S ⁵²). En outre la valeur du moment d'inertie planaire pour le plan tangent à la surface centrale de Culmann est deux fois aussi grande que pour le centre de gravité.

Le signe des deux moments d'inertie est celui de la masse totale μ .

Soit maintenant M l'une des extrémités du diamètre conjugué de σ dans la surface centrale de Culmann. On démontre la proposition suivante:

Le moment d'inertie du système de masses pour le plan central σ est égal au moment d'inertie par rapport au même plan de la masse totale concentrée au point M .

Si l'on prend un second plan central σ' , on montre aussi que le moment de déviation du système pour σ et σ' est égal au moment de déviation de la masse totale μ concentrée au point M ⁵³).

Cette dernière partie du théorème résulte de la formule (31), en remplaçant d'abord [au moyen de l'équation (35)] le plan central σ par le plan parallèle tangent à Φ^c .

51) *Th. Reye*, *J. reine angew. Math.* 72 (1870), p. 298.

52) *K. (Ch.) Culmann*, *Graph. Statik*¹⁴), (1^{re} éd.) p. 166/7; (2^e éd.) p. 408/13, pour les systèmes dans l'espace; [(1^{re} éd.) p. 176/7; (2^e éd.) p. 403/8] pour les systèmes plans; *Statique graphique*²⁹), p. 381/5 pour l'espace et p. 377/81 pour les systèmes plans.

53) *K. (Ch.) Culmann*, *Graph. Statik*¹⁴), (2^e éd.) p. 401, 409; *Statique graphique*²⁹), p. 374, 382.

La surface centrale de Culmann a pour réciproque

$$(39) \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 - \mu = 0.$$

Avec *W. Schell* nous la désignerons par *surface centrale de Binet*.

Soit SM le demi-diamètre perpendiculaire au plan central σ ; on montre que la valeur réciproque du rayon d'inertie k_σ correspondant à ce plan est égal à SM .

Si le système donné est un *système pesant*, la surface est un ellipsoïde réel

$$(39') \quad a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - 1 = 0.$$

Dans ce cas l'ellipsoïde central de Binet est défini par le dernier théorème énoncé, lequel permet de construire la surface de la façon la plus simple.

Pour terminer, ajoutons encore ceci aux nos 11 et 12:

La totalité des plans de l'espace et de leurs centres correspondants du second degré relativement à un système de masses forme, comme nous l'avons vu, une correspondance polaire. C'est le système Σ que nous avons appelé *antipolaire* à cause des propriétés signalées au début de ce numéro. Ainsi *centre du second degré* et *antipôle* désignent un même objet. La polarité Σ peut être définie et construite aussi bien, soit par la surface Φ directrice de Σ , soit par la surface centrale de Culmann Φ^c . L'antipôle d'un plan π coïncide avec son pôle P par rapport à Φ et ce pôle P est symétrique (par rapport au centre de gravité S) du pôle P^c du plan π par rapport à Φ^c .

Cette relation d'un plan avec son antipôle paraît en général plus simple et plus directe par la considération du système antipolaire Σ , toujours réel, que par la surface centrale de Culmann. Toutefois cette surface, comme aussi la surface directrice Φ , présente un grand avantage pour la représentation des rayons d'inertie planaires.

13. Les surfaces homofocales de moment planaire constant. D'après les équations (27) et (27'), tous les plans pour lesquels le moment d'inertie J_π a la même valeur K satisfont à l'équation

$$(27'') \quad \Phi = K(U^2 + V^2 + W^2).$$

Les plans de moment d'inertie planaire constant enveloppent donc l'une des quadriques homofocales⁵⁴) à la surface $\Phi = 0$, directrice du système antipolaire Σ [IV 4, 77].

Ces surfaces homofocales s'appellent *surfaces de moment constant* du système de masses [voir n° 19].

54) Le théorème est dû à *J. P. M. Binet* [J. Éc. polyt. (1) cah. 16 (1813), p. 41/67 [1811]] pour les systèmes pesants.

Supposons maintenant que le système soit *général*, c'est-à-dire que μ soit différent de zéro. Les surfaces ont alors même centre et mêmes axes; leurs axes sont les axes centraux d'inertie. Prenons ces axes pour axes de coordonnées, les surfaces homofocales ont alors pour équation

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} AU^2 + BV^2 + CW^2 + \mu T^2 = K(U^2 + V^2 + W^2) \\ \text{ou en coordonnées ponctuelles} \\ \frac{x^2}{K-A} + \frac{y^2}{K-B} + \frac{z^2}{K-C} = \frac{1}{\mu}, \end{array} \right.$$

où la notation est celle du n° 12.

Soit k_π le rayon de gyration correspondant à J_π , l'équation (40) s'écrit encore

$$(40') \quad k_\pi^2 - a^2 + k_\pi^2 - b^2 + k_\pi^2 - c^2 = 1.$$

Si maintenant le système est *magnétique*, on a $\mu = 0$, tandis que q n'est pas nul; alors le centre de gravité s'éloigne à l'infini ainsi qu'un des trois plans principaux. La surface directrice $\Phi = 0$ n'ayant que deux plans de symétrie devient un parabolôide⁵¹⁾ dont l'équation rapportée à ces deux plans et au plan central⁴⁰⁾ comme plans de coordonnées⁵⁵⁾ prend la forme

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi = AU^2 + BV^2 + CW^2 - 2qWT = 0 \\ \text{ou en coordonnées ponctuelles} \\ \Phi = \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - \frac{C - 2qz}{q^2} = 0. \end{array} \right.$$

Dans cette équation, q désigne le moment linéaire principal du système, c'est-à-dire la valeur scalaire du vecteur \vec{q} .

Les surfaces de moment constant sont les parabolôides homofocaux à la surface $\Phi = 0$.

Pour un système de masses indifférent, on a encore $\mu = 0$ et en outre $A_1 = A_2 = A_3 = 0$; la surface $\Phi = 0$ peut être mise sous la forme

$$(42) \quad AU^2 + BV^2 + CW^2 = 0,$$

où A, B, C sont les moments d'inertie principaux planaires d'origine d'ailleurs quelconque. La surface directrice $\Phi = 0$ se réduit alors à une

55) Ces trois plans forment ce que *E. Beltrami* [Ann. mat. pura appl. (2) 10 (1880/2), p. 248; Opere 3, Milan 1911, p. 472] appelle le *trièdre central*; le sommet du trièdre est d'après *E. Beltrami* le „centre magnétique“ du système. Avec *W. Thomson* et *E. Beltrami* au lieu de vecteur libre q [cf. note 10] nous emploierons de préférence, pour désigner l'axe du parabolôide Φ , la dénomination d'„axe magnétique“.

conique rejetée à l'infini; le système antipolaire se réduit à un système antipolaire plan rejeté à l'infini et toutes les surfaces homofocales à $\Phi = 0$ sont des coniques rejetées à l'infini.

Le moment d'inertie planaire est donc le même pour des plans parallèles⁵⁶).

Nous renvoyons à l'article IV 4, n° 77 pour toutes ces propositions, que nous compléterons ici en précisant la signification mécanique du système des surfaces homofocales; toutefois nous nous bornerons au *système de masses général*, particulièrement au *système pesant*; nous prendrons donc pour base l'équation (40) ou, dans le cas du système pesant, l'équation (40').

Par tout point P passent, dans ce cas, trois surfaces homofocales réelles du système, un ellipsoïde, un hyperboloïde à une nappe et un hyperboloïde à deux nappes; ces trois surfaces se coupent orthogonalement en P . Les cônes circonscrits qu'on peut mener du point P aux surfaces homofocales forment eux mêmes une famille homofocale; leurs lignes focales communes (*axes focaux*) sont les deux génératrices issues du point P sur l'hyperboloïde à une nappe qui passe par ce point. Les plans de symétrie communs des cônes sont les plans tangents aux trois surfaces homofocales passant par P ; ils forment le trièdre polaire trirectangle correspondant au point P dans le système antipolaire. Réciproquement, tout plan est en général tangent à une et une seule des surfaces du système et il appartient donc à un et un seul trièdre polaire trirectangle.

La signification mécanique de ces relations est celle-ci: les cônes homofocaux de sommet P sont les enveloppes d'un plan de moment quadratique constant (40) passant par P [voir la fin du n° 16]; les plans tangents aux surfaces homofocales du point P forment le *trièdre principal d'inertie* pour ce point [voir n° 9]⁵⁷). Inversement, étant donné un plan π , construisons le point P où le plan π touche la surface correspondante du système homofocal, c'est le *point principal* de ce plan [voir n° 9].

Le même point P s'obtient comme pied de la perpendiculaire abaissée sur le plan π de l'antipôle de ce plan. En effet, d'après l'équation (36) les coordonnées de l'antipôle du plan U, V, W, T sont

$$\frac{AU}{\mu T}, \frac{BV}{\mu T}, \frac{CW}{\mu T},$$

tandis que les coordonnées du point de contact du plan avec la sur-

56) *Th. Reye*, J. reine angew. Math. 72 (1870), p. 302, 309/13.

57) La signification mécanique des axes focaux sera donnée au n° 15.

face (40) sont (en écrivant J_π au lieu de K)

$$\frac{(A - J_\pi)U}{\mu T}, \quad \frac{(B - J_\pi)V}{\mu T}, \quad \frac{(C - J_\pi)W}{\mu T}.$$

14. Moments quadratiques axiaux et surfaces centrales correspondantes, pour un système général. Pour trouver le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque d , on peut employer le théorème qui le donne comme la somme des moments d'inertie par rapport à deux plans rectangulaires quelconques passant par d . En particulier, si l'on choisit pour l'un des plans celui qui passe par le centre de gravité S , on déduit facilement de la règle précédente et des équations (10) et (32) une relation analogue à (17) et (32)⁵⁸:

$$(43) \quad J_d = J_d^{(s)} + \mu p^2,$$

où p est la distance du centre de gravité à d , et J_d et $J_d^{(s)}$ sont les moments d'inertie axiaux, par rapport à d d'abord, puis à la parallèle à d menée par le centre de gravité.

Pour représenter les rayons d'inertie pour des axes passant par le centre de gravité, on peut utiliser l'une des surfaces homofocales (40), savoir celle dont le paramètre K (c'est-à-dire ici J_π) a la valeur particulière $A + B + C$ ou

$$K = J_p^{(s)}.$$

L'équation (40) devient alors en effet

$$\frac{x^2}{B+C} + \frac{y^2}{C+A} + \frac{z^2}{A+B} - \frac{1}{\mu} = 0,$$

c'est-à-dire, à cause du n° 9, formule (10),

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{A'} + \frac{y^2}{B'} + \frac{z^2}{C'} - \frac{1}{\mu} = 0 \\ \text{ou en coordonnées tangentielles} \\ \Psi = A'U^2 + B'V^2 + C'W^2 - \mu T^2 = 0. \end{array} \right.$$

Elle représente conséquemment une surface $\Psi = 0$ homofocale du système antipolaire; c'est la surface pour laquelle les plans tangents ont pour moment d'inertie correspondant J_π la valeur $A + B + C$, c'est-à-dire que ces plans ont pour moment d'inertie le moment quadratique polaire correspondant au centre de gravité $J_p^{(s)}$. Cette surface $\Psi = 0$ est la *surface centrale de Mac Cullagh*. Elle est coaxiale à la surface centrale de Culmann; mais les demi-axes principaux de la surface de Culmann sont égaux aux rayons centraux principaux *planaires*; ce sont au contraire les rayons *axiaux* pour la surface de Mac Cullagh.

58) *L. Euler, Theoria motus*³², p. 168.

Pour un *système pesant* la surface de Mac Cullagh est naturellement aussi un ellipsoïde Ψ coaxial à l'ellipsoïde de Culmann:

$$(44') \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1;$$

les axes principaux des deux ellipsoïdes sont donc (n° 9) liés par les relations

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} a'^2 = b^2 + c^2, \quad b'^2 = c^2 + a^2, \quad c'^2 = a^2 + b^2, \\ \text{d'où l'on déduit inversement} \\ a^2 = \frac{1}{2}(b'^2 + c'^2 - a'^2), \quad b^2 = \frac{1}{2}(c'^2 + a'^2 - b'^2), \quad c^2 = \frac{1}{2}(a'^2 + b'^2 - c'^2). \end{array} \right.$$

Les formules (44) expriment que d'une façon tout à fait générale la distance du centre de gravité à un plan tangent de la surface Ψ est égale au rayon d'inertie pour la perpendiculaire au plan menée par le centre de gravité. D'un autre côté, la formule (43) enseigne que la distance SM du centre de gravité S à un point M de la surface Ψ est égale à l'un des rayons principaux d'inertie pour ce point M : la normale en M à Ψ est l'axe principal d'inertie correspondant.

Pour un *système pesant*, ces théorèmes se généralisent en ce sens que, pour avoir le rayon k_d d'inertie correspondant à un axe d quelconque de l'espace, il suffit alors de mener à Ψ un plan tangent perpendiculaire à d et de prendre l'intersection R de ce plan avec d ; la distance RS représente le rayon k_d . Dans ce cas Ψ est un ellipsoïde et la construction est toujours réelle; on peut en outre renverser les propositions précédentes et les utiliser à la définition et à la construction de l'ellipsoïde central de Mac Cullagh.

Si l'on rapporte le système homofocal (40) à la surface Ψ , ce système (40), pour un *système général* de masses, est représenté par l'équation

$$\frac{x^2}{A' + \lambda\mu} + \frac{y^2}{B' + \lambda\mu} + \frac{z^2}{C' + \lambda\mu} - \frac{1}{\mu} = 0,$$

où λ est lié au paramètre K (qui est ici égal à J_π) employé plus haut par la relation⁵⁹⁾

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} K - A = A' + \lambda\mu \quad (A' = B + C) \\ \text{ou} \\ \lambda = \frac{K - J_p^{(s)}}{\mu} = \frac{J_\pi - J_p^{(s)}}{\mu}. \end{array} \right.$$

La surface réciproque de la surface de Mac Cullagh est

$$(47) \quad A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 = \mu.$$

⁵⁹⁾ Voir I. (J.) Somov, *Račional'naja mehanika* 1); trad. A. Ziwet, *Mechanik* 2, p. 85.

Nous l'appellerons *surface centrale de Poinsot*. Pour un système pesant, où la surface est un ellipsoïde réel

$$(47') \quad a'^2 x^2 + b'^2 y^2 + c'^2 z^2 = 1,$$

elle a été introduite par *A. L. Cauchy* et *L. Poinsot*.

Chaque demi-diamètre de la surface centrale de Poinsot est égal à l'inverse du rayon d'inertie correspondant $k_a^{(6)}$. Pour un système pesant, la réciproque est vraie, et elle peut servir à la définition et à la construction de l'ellipsoïde central de Poinsot.

15. Moments de déviation des systèmes pesants, dans le cas particulier des plans rectangulaires. Dans la formule (14) du n° 9 posons

$$\mu d^2 = \pm D;$$

d est ce qu'on appelle le *rayon de déviation* du dièdre donné. Mais dans le présent numéro on s'occupera seulement des dièdres rectangulaires et de la valeur absolue du moment de déviation, le système sera supposé *pesant* et, en outre, μ positif.

Par une droite d faisons passer d'une part les couples de plans rectangulaires et d'autre part les couples conjugués par rapport au système de masses (dans le sens de *J. P. M. Binet*); on obtient ainsi deux involutions qui en général ont un seul couple commun (ν, ν') . Ce couple est rectangulaire et a un moment de déviation $D_{\nu, \nu'}$ nul; il forme ce qu'on appelle le *dièdre nul de l'axe $d^{(60)}$* .

Soit π, π' un autre couple de plans rectangulaires passant par d , θ l'angle $\widehat{\pi\nu}$, et posons

$$\mu k_{\pi, \pi'}^2 = D_{\pi, \pi'};$$

nous aurons

$$(48) \quad k_{\pi, \pi'}^2 = l^2 \sin 2\theta,$$

avec

$$(49) \quad l^2 = \frac{1}{2}(k_{\nu'}^2 - k_{\nu}^2).$$

Ainsi, le moment de déviation du couple de plans rectangulaires mobile autour de d atteint son maximum

$$\frac{1}{2}(J_{\nu} - J_{\nu'})$$

quand ces plans bissectent le dièdre nul; le rayon de déviation correspondant l a été nommé *paramètre de l'axe d* par *J. N. Haton de la Goupillière*.

60) *J. N. Haton de la Goupillière* [J. Éc. polyt. (1) cah. 37 (1858), p. 3], à qui l'on doit l'étude des moments de déviation, appelle les plans e, e' les *plans-nuls* de d . Voir aussi *L. N. F. Moigno*, Leçons de mécanique analytique, Statique, Paris 1868, p. 444/52.

Tout axe de déviation d est donc caractérisé par la position de son dièdre nul (e, e') et par la valeur de son paramètre l^{59}). Si l'on connaît ces éléments, la formule (48) permet de calculer le moment de déviation pour tout couple rectangulaire d'axe d , indépendamment des formules (31), (35), (35'). Pour déterminer le dièdre nul à l'aide du système homofocal (40) du n° 13, on cherche d'abord les deux surfaces du système qui sont tangentes à d et l'on mène les plans tangents aux points de contact. Si K et K' sont les paramètres des deux surfaces tangentes à d , le paramètre correspondant à d est

$$l = \sqrt{\frac{K - K'}{2u}}.$$

Si $l = 0$, le moment de déviation s'annule pour tout couple de plans rectangulaires passant par d ; ces couples de plans sont donc tous conjugués par rapport au système de masses. L'axe d est donc une génératrice d'un hyperboloïde à une nappe de la famille homofocale; c'est un axe focal du système de surfaces (ou du système antipolaire) [cf. n° 13]⁶¹). Réciproquement tout axe focal est un axe de déviation de paramètre nul, c'est un axe nul⁶²).

Soit P un point de d et τ l'angle que forme l'un des plans nuls de d avec chacun des plans df et df' déterminés par d et les axes focaux f et f' issus de P ; le paramètre l est proportionnel à $\sin \tau$ pour toutes les droites issues de P ⁶²) qui touchent la même surface de la famille homofocale.

En particulier, soit un point P et prenons sur une droite d issue de P un point G tel que PG soit égal à la valeur L du paramètre pour l'axe principal moyen d'inertie correspondant à P . On montre alors que les plans bissecteurs du couple df, df' forment le dièdre nul de l'axe d ; le paramètre correspondant est

$$l = \sqrt{pp'},$$

en appelant p et p' les distances du point G aux axes focaux f et f' .

Le théorème s'applique encore à un point P_∞ situé à l'infini, G étant alors un point quelconque de l'axe de déviation d ⁶⁰).

16. Les surfaces d'inertie d'un point quelconque. Choisissons le point donné pour origine O des coordonnées rectangulaires. Soient

61) Pour l'étude des axes de déviation et des moments de déviation normaux correspondants, la congruence des axes nuls joue le même rôle que le complexe d'inertie [voir n° 18] du système de masses pour l'étude des axes principaux d'inertie et les moments d'inertie correspondants.

62) J. N. Haton de la Goupillière [J. Éc. polyt. (1) cah. 37 (1858), p. 63] distingue les axes nuls passant par un point en axes focaux et axes singuliers suivant que le point P est à distance finie ou infinie.

$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ les moments d'inertie planaires, $\mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}$ les moments de déviation correspondants aux plans coordonnés. Ces six constantes suffisent pour calculer les moments d'inertie pour tous les plans et tous les rayons issus de O . Soit

$$Ux + Vy + Wz = 0$$

l'équation d'un plan passant par O et J_π son moment d'inertie; on a

$$(50) \quad \sum_{(i)} \alpha_i (Ux_i + Vy_i + Wz_i)^2 = J_\pi (U^2 + V^2 + W^2)$$

ou, sous une autre forme,

$$(51) \quad \mathcal{A}U^2 + \mathcal{B}V^2 + \mathcal{C}W^2 + 2\mathcal{D}VW + 2\mathcal{E}WU + 2\mathcal{F}UV = \mu T^2,$$

où T a l'expression tirée de l'équation⁶³)

$$(52) \quad \mu T^2 = J_\pi (U^2 + V^2 + W^2).$$

Soit maintenant la normale d menée par O au plan π , on a

$$J_d = J_0 - J_\pi \quad \text{et} \quad J_0 = \sum_{(i)} \alpha_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$$

et en portant ces expressions dans l'équation (50)

$$(50') \quad (\mathcal{B} + \mathcal{C})U^2 + (\mathcal{C} + \mathcal{A})V^2 + (\mathcal{A} + \mathcal{B})W^2 \\ - 2\mathcal{D}VW - 2\mathcal{E}WU - 2\mathcal{F}UV = J_d (U^2 + V^2 + W^2)$$

ou encore d'après (10)

$$(51') \quad \mathcal{A}'U^2 + \mathcal{B}'V^2 + \mathcal{C}'W^2 - 2\mathcal{D}'VW - 2\mathcal{E}'WU - 2\mathcal{F}'UV = \mu T^2,$$

$\mathcal{A}', \mathcal{B}', \mathcal{C}'$ désignant les moments d'inertie axiaux correspondants aux axes de coordonnées et T étant donné ici par l'équation⁶¹)

$$(52') \quad \mu T^2 = J_d (U^2 + V^2 + W^2).$$

En coordonnées tangentielles, les équations (51) et (51') représentent deux surfaces de deuxième classe. La première est la *surface d'inertie de K. (Ch.) Culmann*, la deuxième est celle de *J. Mac Cullagh* pour le point O . Les surfaces réciproques sont respectivement celle de *J. P. M. Binet* et celle de *L. Poinsot*.

A chaque point correspondent ainsi quatre surfaces d'inertie. Elles ont pour axes communs les axes principaux d'inertie de ce point ($\mathcal{D} = \mathcal{E} = \mathcal{F} = 0$). Elles coïncident respectivement avec les surfaces centrales de même nom, quand le point O vient au centre de gravité

63) Si dans (51') on porte la valeur de μT^2 tirée de (52'), et qu'on divise par $U^2 + V^2 + W^2$, on obtient la formule classique de Lagrange qui donne la valeur de J_d en fonction des six constantes ($\mathcal{A}', \mathcal{B}', \mathcal{C}', \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}$) et des cosinus directeurs de l'axe d . De même, les formules (51) et (52) conduisent à la formule de Binet pour J_π .

S du système. Elles admettent les mêmes propriétés, pour les moments quadratiques relatifs aux plans et aux rayons menés par O , que les surfaces centrales relativement aux plans centraux et aux droites centrales [voir nos 12 et 14].

Si l'on choisit pour axes coordonnés les axes principaux d'inertie ($\mathcal{D} = \mathcal{E} = \mathcal{F} = 0$), \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} et \mathcal{A}' , \mathcal{B}' , \mathcal{C}' deviennent les moments principaux d'inertie, *planaires* puis *axiaux* \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} et \mathfrak{A}' , \mathfrak{B}' , \mathfrak{C}' , relatifs au point O .

La représentation par les quatre surfaces d'inertie devient particulièrement importante quand le système est *pesant*. Dans ce cas, toutes les surfaces d'inertie sont des ellipsoïdes réels, en sorte qu'à tout point O sont associés quatre ellipsoïdes d'inertie coaxiaux: ce sont d'abord les ellipsoïdes de Culmann et de Mac Cullagh; leurs équations sont représentées par rapport aux axes principaux d'inertie du point O par

$$(53) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$(54) \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1,$$

où a , b , c et a' , b' , c' sont les rayons principaux d'inertie *planaires* et *axiaux* relatifs au point O ; ce sont en second lieu les ellipsoïdes de Binet et de Poinot qui sont les réciproques des précédents; ils ont pour équations

$$(55) \quad a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = 1,$$

$$(56) \quad a'^2 x^2 + b'^2 y^2 + c'^2 z^2 = 1.$$

D'ailleurs les mêmes théorèmes qui nous ont servi [nos 12 et 14] pour définir les surfaces centrales d'inertie peuvent servir à la définition et à la construction des ellipsoïdes d'inertie relatifs au point O .

On peut encore obtenir d'une autre façon l'ellipsoïde de Culmann Φ_0 relatif au point O . Cette surface peut être définie géométriquement par les deux conditions suivantes:

1°) ses axes principaux coïncident avec les axes principaux d'inertie du point O ;

2°) dans cette surface, le centre de gravité S du système est le pôle du plan ω , antipolaire de O^{64} .

Cette définition est en défaut dans le seul cas où le point O est en S ; dans ce cas on définit Φ_0 comme l'*ellipsoïde central de Culmann*

64) Cette définition se trouve dans *L. Cremona* [Statica grafica⁴⁵], p. 101/3 (n° 102)]. *K. (Ch.) Culmann*⁴⁶) détermine analytiquement la surface d'inertie dans sa statique graphique. Pour $\mu = 1$ et dans le cas d'un système pesant, la surface d'inertie est identique avec l'ellipsoïde donné pour la première fois par *J. P. M. Binet*.

Φ^0 . En dehors de ce cas spécial, voici comment la nouvelle définition permet de construire un point M quelconque de la surface Φ_0 .

Soit π un plan mené par O et OM le diamètre conjugué de π dans la surface Φ_0 , l'antipôle P de π est sur cette droite OM ; soit maintenant P' l'intersection de OM avec le plan central σ parallèle à π , on a

$$\overline{OM}^2 = OP \cdot OP'.$$

Dans cette relation OM , OP et OP' sont proportionnels à k_π , p_π et s_π . Jointe aux formules générales du n° 11, elle permet de démontrer que les théorèmes établis au n° 12 pour la surface centrale de Culmann s'appliquent à l'ellipsoïde Φ_0 du point O .

Jusqu'ici le point O était entièrement quelconque. Supposons maintenant que O soit sur les *courbes focales* du système antipolaire et que nous ayons affaire à un *système pesant*. Désignons les plans de symétrie du système par α , β , γ ; les moments d'inertie planaires correspondants sont A , B , C et nous supposons $A < B < C$ [voir n° 9]; l'ellipse focale est dans γ , l'hyperbole focale dans β . Pour chacun des plans tangents à l'une ou à l'autre de ces surfaces homofocales dégénérées le moment d'inertie a la même valeur, en outre le plan de la courbe doit être regardé comme tangent en tous les points de cette courbe; on voit donc que pour tout plan tangent à l'ellipse focale (γ) le moment d'inertie est C et pour tout plan tangent à l'hyperbole (β) le moment d'inertie est B . Les quatre ellipsoïdes d'inertie d'un point O d'une courbe focale sont donc de révolution; ils ont pour axe de révolution la tangente à la courbe focale au point O ⁶⁵).

Si l'ellipsoïde central de Culmann Φ_0 est de révolution ayant pour axe de révolution le petit axe $2a$, il existe sur cet axe à la distance $\sqrt{c^2 - a^2}$ du centre de gravité deux *foyers*⁶⁶) pour lesquels les trois moments principaux d'inertie sont égaux et les ellipsoïdes d'inertie deviennent des sphères⁶⁷).

Dans le faisceau mené par le point O , il existe en général ∞^1

65) Aux points de l'ellipse focale, le moment d'inertie planaire principal *minimé* est donc variable et a pour valeur $A' - A + \mu r^2$, aux points de l'hyperbole focale le moment *maximé* est variable et a pour valeur $B' - B + \mu r^2$, r désignant la distance du centre de gravité [J. P. M. Binet, J. Éc. polyt. (1) cah. 16 (1813), p. 61, 62]; J. N. Haton de la Goupillière [J. Éc. polyt. (1) cah. 37 (1858), p. 90/1] appelle les lignes focales *lignes de symétrie* et leurs points, *points de symétrie*.

66) J. N. Haton de la Goupillière appelle ces points „points de complète symétrie“.

67) J. P. M. Binet, J. Éc. polyt. (1) cah. 16 (1813), p. 63; S. D. Poisson, Traité de mécanique, (1^{re} éd.) 2, Paris 1811, p. 496/500.

plans π et ∞^1 droites d ayant un moment donné constant; les plans π enveloppent une des surfaces homofocales de la famille (40); je dis que les droites d décrivent le cône supplémentaire du cône enveloppé par les plans. En effet, la génératrice d étant perpendiculaire au plan π correspondant, on aura $J_d + J_\pi = J_0$, par suite J_d est bien constant quand J_π est constant⁶⁸).

17. Le trièdre principal d'inertie d'un point quelconque. Nous avons déjà donné au n° 13 la position du trièdre principal d'inertie d'un point O quelconque dans le système des surfaces homofocales de moment planaire constant. La détermination directe de ce trièdre et celle des moments principaux correspondants revient à la détermination des axes d'une surface du second degré en grandeur et position [cf. n° 16]. Nous donnons ici les formules complètes pour un système pesant, en les rattachant aux numéros précédents.

Les moments d'inertie planaires principaux \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} de O sont les trois racines K_1 , K_2 , K_3 de l'équation

$$(57) \quad K^3 - q_1 K^2 + q_2 K - q_3 = 0,$$

où l'on a posé

$$(58) \quad \begin{cases} q_1 = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}, \\ q_2 = \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{B}\mathfrak{C} + \mathfrak{C}\mathfrak{A} - \mathfrak{D}^2 - \mathfrak{E}^2 - \mathfrak{F}^2, \\ q_3 = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} + 2\mathfrak{D}\mathfrak{E}\mathfrak{F} - \mathfrak{A}\mathfrak{D}^2 - \mathfrak{B}\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{C}\mathfrak{F}^2; \end{cases}$$

les cosinus directeurs α_i , β_i , γ_i du plan principal correspondant à K_i sont donnés par les équations linéaires

$$(59) \quad \begin{cases} \mathfrak{A}\alpha_i + \mathfrak{F}\beta_i + \mathfrak{E}\gamma_i = K_i\alpha_i, \\ \mathfrak{F}\alpha_i + \mathfrak{B}\beta_i + \mathfrak{D}\gamma_i = K_i\beta_i, \\ \mathfrak{E}\alpha_i + \mathfrak{D}\beta_i + \mathfrak{C}\gamma_i = K_i\gamma_i, \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3).$$

De même, les moments axiaux principaux \mathfrak{A}' , \mathfrak{B}' , \mathfrak{C}' de O sont les trois racines H_1 , H_2 , H_3 de l'équation⁶⁹)

$$(57') \quad H^3 - q_1' H^2 + q_2' H - q_3' = 0,$$

68) Les cônes focaux $O(\beta)$ et $O(\gamma)$ sont particulièrement remarquables. On peut y rattacher la construction suivante de J. Mac Cullagh que R. Townsend [Camb. Dublin math. J. 2 (1847), p. 41] reproduit comme il suit:

Les génératrices communes aux deux cônes focaux forment les quatre arêtes bifocales d'un angle polyèdre ayant pour base un quadrangle. Celui-ci admet trois diagonales formant un triangle qui, avec le point O , définit un trièdre; c'est le trièdre principal du point O .

Voir aussi E. J. Routh, Dynamics³²); Dynamik 1, p. 46.

69) A. L. Cauchy [Exercices math. 2, Paris 1827, p. 98; Œuvres (2) 7, Paris 1889, p. 130] remarque que l'équation du troisième degré (57') a été trouvée par

où

$$(58') \quad \begin{cases} q_1' = \mathcal{A}' + \mathcal{B}' + \mathcal{C}', \\ q_2' = \mathcal{A}'\mathcal{B}' + \mathcal{B}'\mathcal{C}' + \mathcal{C}'\mathcal{A}' - \mathcal{D}^2 - \mathcal{E}^2 - \mathcal{F}^2, \\ q_3' = \mathcal{A}'\mathcal{B}'\mathcal{C}' - 2\mathcal{D}\mathcal{E}\mathcal{F} - \mathcal{A}'\mathcal{D}^2 - \mathcal{B}'\mathcal{E}^2 - \mathcal{C}'\mathcal{F}^2. \end{cases}$$

Les cosinus directeurs $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ des axes principaux d'inertie correspondants à H_i sont donnés par les équations linéaires

$$(59') \quad \begin{cases} \mathcal{A}'\alpha_i - \mathcal{F}'\beta_i - \mathcal{E}'\gamma_i = H_i\alpha_i \\ -\mathcal{F}'\alpha_i + \mathcal{B}'\beta_i - \mathcal{D}'\gamma_i = H_i\beta_i \\ -\mathcal{E}'\alpha_i - \mathcal{D}'\beta_i + \mathcal{C}'\gamma_i = H_i\gamma_i. \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3)$$

En outre les racines H et K sont liées par les relations

$$H_1 = K_2 + K_3, \quad H_2 = K_3 + K_1, \quad H_3 = K_1 + K_2,$$

de façon que l'on a

$$(60) \quad H_i + K_i = J_0 = \mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Par ces formules on peut non seulement déduire l'une de l'autre les équations (57) et (57'), mais encore obtenir la relation⁷⁰⁾

$$(61) \quad H_i = \mu(r^2 - \lambda_i) \quad (i = 1, 2, 3),$$

J. L. Lagrange dans ses recherches sur la rotation d'un corps solide sous la forme

$$(H - \mathcal{A}') (H - \mathcal{B}') (H - \mathcal{C}') - \mathcal{D}^2 (H - \mathcal{A}') - \mathcal{E}^2 (H - \mathcal{B}') - \mathcal{F}^2 (H - \mathcal{C}') + 2\mathcal{D}\mathcal{E}\mathcal{F} = 0,$$

où l'on a

$$\mathcal{A}' = \mathcal{B} + \mathcal{C}, \quad \mathcal{B}' = \mathcal{C} + \mathcal{A}, \quad \mathcal{C}' = \mathcal{A} + \mathcal{B}.$$

J. L. Lagrange avait aussi montré qu'elle a ses trois racines réelles „mais *M. Binet* a prouvé le premier que ces racines étaient précisément les moments d'inertie principaux“. *J. P. M. Binet* [J. Éc. polyt. (1) cah. 16 (1813), p. 51 [1811]] a découvert pour la première fois au moyen de l'équation (57) les axes principaux et les moments principaux d'inertie planaires. En formant l'équation dont les racines sont les sommes des racines deux à deux de l'équation (57) il a déterminé les moments principaux d'inertie axiaux; enfin il a montré comment on peut donner à l'équation la forme ci-dessus qui avait été obtenue par *J. L. Lagrange* [Mécanique analytique, (1^{re} éd.) Paris 1788, p. 397; (2^e éd.) 1, Paris 1811; (3^e éd.) publ. par *J. Bertrand* 2, Paris 1855, p. 218; Œuvres 12, Paris 1889, p. 237/8]. *W. Thomson* (lord *Kelvin*) a donné aux équations (57) et (57') une autre forme en introduisant les grandeurs $\frac{\mathcal{E}\mathcal{F}}{\mathcal{D}}, \frac{\mathcal{F}\mathcal{D}}{\mathcal{E}}, \frac{\mathcal{D}\mathcal{E}}{\mathcal{F}}$ [Cambr. Dublin math. J. 1 (1846), p. 199/200].

Soient α, β, γ les cosinus directeurs d'un axe d normal au plan π menés tous deux par O , relativement aux axes principaux de ce point, les moments d'inertie pour d et π sont

$$J_d = \mathfrak{A}\alpha^2 + \mathfrak{B}\beta^2 + \mathfrak{C}\gamma^2, \quad J_\pi = \mathfrak{A}\alpha^2 + \mathfrak{B}\beta^2 + \mathfrak{C}\gamma^2.$$

La première de ces formules est due à *L. Euler* [Theoria motus³²⁾, p. 176/7], la seconde à *J. P. M. Binet* [J. Éc. polyt. (1) cah. 16 (1813), p. 53/4 (1811)]; on les déduit aussi des formules (51) et (51') en y faisant $\mathcal{D} = \mathcal{E} = \mathcal{F} = 0$.

70) Voir *E. J. Routh*, Dynamics³³⁾; Dynamik 1, p. 43; *W. Schell*, Theorie der Bewegung²⁾ 1, p. 122.

où $r = SO$, et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les paramètres correspondants au point O , rapportés à l'ellipsoïde central Ψ de Mac Cullagh [voir n° 14].

Remarquons encore que les coefficients q_1, q_2, q_3 et q_1', q_2', q_3' invariants du point O sont liés par les formules suivantes:

$$(62) \quad q_1' = 2q_1, \quad q_2' = q_1^2 + q_2, \quad q_3' = q_1q_2 - q_3.$$

Si l'on donne, non plus les six constantes $\mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}$ et $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ (ou $\mathcal{A}', \mathcal{B}', \mathcal{C}'$), mais le trièdre central d'inertie et les moment centraux, on trouve les mêmes éléments pour le point O de la façon suivante:

Soient x, y, z les coordonnées du point O par rapport aux axes centraux principaux d'inertie; les moments principaux d'inertie planaires

$$\mathfrak{A} = \mu a^2, \quad \mathfrak{B} = \mu b^2, \quad \mathfrak{C} = \mu c^2$$

du point O sont, d'après le n° 13, les racines K_1, K_2, K_3 de l'équation du troisième degré (équation 40)

$$(63) \quad \frac{\mu x^2}{K-A} + \frac{\mu y^2}{K-B} + \frac{\mu z^2}{K-C} = 1,$$

de façon que l'on a⁷¹⁾

$$(64) \quad \mathfrak{A} = K_1, \quad \mathfrak{B} = K_2, \quad \mathfrak{C} = K_3.$$

Les cosinus directeurs a_i, b_i, c_i des plans principaux d'inertie correspondants, qui coïncident avec les plans tangents au point O aux trois surfaces homofocales (40) passant par ce point, sont donnés par la proportion

$$(65) \quad a_i : b_i : c_i = \frac{x}{K_i - A} : \frac{y}{K_i - B} : \frac{z}{K_i - C} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Le moment polaire d'inertie J_0 du point O est égal au coefficient de $-K^2$ dans l'équation (63); l'application de (10) donne aussitôt les moments principaux d'inertie axiaux

$$\mathfrak{A}' = \mu a'^2, \quad \mathfrak{B}' = \mu b'^2, \quad \mathfrak{C}' = \mu c'^2$$

du point O ⁷²⁾.

71) Pour obtenir les coordonnées x, y, z dont les moments principaux d'inertie planaires aient des valeurs données $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, il suffit d'employer les formules qui donnent les coordonnées cartésiennes d'un point en fonction de ses coordonnées elliptiques. On obtient huit points symétriques par rapport aux axes de coordonnées; les coordonnées de ces huit points satisfont aux équations

$$x = \sqrt{\frac{(\mathfrak{A}-A)(\mathfrak{B}-A)(\mathfrak{C}-A)}{(B-A)(C-A)\mu}}, \quad y = \sqrt{\frac{(\mathfrak{A}-B)(\mathfrak{B}-B)(\mathfrak{C}-B)}{(C-B)(A-B)\mu}},$$

$$z = \sqrt{\frac{(\mathfrak{A}-C)(\mathfrak{B}-C)(\mathfrak{C}-C)}{(A-C)(B-C)\mu}}.$$

Voir I. (J.) Somov, *Rациональная механика*¹⁾; trad. A. Ziwet, *Mechanik* 2, p. 89.

72) Les considérations de ce numéro et du précédent subsistent encore quand

Remarquons encore qu'ayant supposé $A < B < C$, on en conclut $A' > B' > C'$ [n° 9]. Donc pour un point quelconque les moments principaux d'inertie planaires \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} tombent entre les limites A , B , C , ∞ , et les moments axiaux \mathfrak{A}' , \mathfrak{B}' , \mathfrak{C}' entre les limites ∞ , A' , B' , C' ⁷³).

18. Le complexe d'inertie d'un système de masses. A chaque plan π correspond en général un point principal P [n° 9] pour lequel π est un plan principal d'inertie. A chaque point P correspondent en général trois axes principaux d'inertie qui forment un trièdre polaire rectangulaire du système antipolaire. Ce trièdre a trois arêtes et trois faces. Pour chacun de ces six éléments, P est le point principal [voir n° 9].

On démontre au contraire qu'une droite d n'est axe principal d'inertie pour l'un de ses points que si elle contient l'antipôle d'un des plans normaux à cette droite⁷⁷); elle est l'arête de l'angle droit d'un trièdre polaire rectangulaire ou, ce qui revient au même, d'un trièdre principal conjugué de *J. P. M. Binet* [voir nos 11 et 9].

Le point principal correspondant est l'intersection de ce plan avec d , et d est normale en ce point à l'une des surfaces homofocales qui passent par ce point.

On montre en outre que toute normale à une des surfaces homofocales est axe principal pour le pied de cette normale; ce pied est le point principal de la normale.

On peut encore dire⁷⁷) que la droite d n'est axe principal d'inertie que si elle coupe orthogonalement la droite antipolaire d' .

Mais cela équivaut à la définition que *Th. Reye* a établie pour les axes (géométriques) du système antipolaire. *Les axes de Reye sont donc d'une part, au point de vue géométrique*⁷⁴), *identiques aux normales aux surfaces homofocales, d'autre part, au point de vue mécanique, ils sont identiques aux axes principaux d'inertie du système de masses. Ainsi le complexe des axes de Reye (lié au système antipolaire) fournit la totalité des axes principaux d'inertie du système de masses [voir IV 4, 78].*

Les nombreuses propriétés des rayons d'un tel complexe⁹⁸) sont

le point O coïncide avec le centre de gravité S , de façon qu'on obtient ainsi, indépendamment de la surface $\Phi = 0$, une autre détermination analytique de la surface centrale de Culmann et des trois autres surfaces centrales attachées au système de masses.

73) *J. P. M. Binet*, *J. Éc. polyt.* (1) cah. 16 (1813), p. 58/9.

74) *Th. Reye*, *Geometrie der Lage* (3° éd.) 2, Leipzig 1892, p. 141, 152, 156.

donc autant de propriétés des axes principaux d'inertie. Ce complexe prend de là (comme le système antipolaire lui-même) dans l'étude des moments d'inertie une importance considérable. Nous l'appellerons *complexe d'inertie* du système de masses [voir n° 21]⁷⁵).

19. Surfaces de moments principaux planaires et axiaux.
La famille des complexes de moments axiaux constants. Toute surface $F(K)$ de la famille des surfaces homofocales (40) peut être définie comme le lieu des points pour lesquels un des moments principaux planaires J_π a la valeur constante K (car les points de contact sont principaux pour les plans tangents correspondants).

Considérons alors les lignes d'intersection de deux des surfaces homofocales $F(K)$ et $F(K')$ qui passent par le point O ; la tangente à cette ligne au point O est un axe principal d'inertie pour ce point O et en même temps le moment d'inertie correspondant

$$J_d = K + K'$$

est le même pour toutes les tangentes de ladite courbe d'intersection⁷⁶. En outre $K - K'$ est aussi le même, si bien que ces tangentes d peuvent être regardées aussi comme des axes de déviation de paramètre constant l [cf. n° 15].

Soient maintenant les normales à la surface homofocale $F(K)$ le long de la conique sphérique déterminée par l'intersection de $F(K)$ avec une sphère concentrique. Les points P de cette courbe étant également distants du centre S , les moments d'inertie polaires J_p sont égaux (équation 17); d'autre part les moments d'inertie planaires J_π pour les plans tangents à $F(K)$ sont aussi égaux. Donc les moments d'inertie axiaux

$$J_d = J_p - J_\pi$$

sont aussi égaux pour toutes les normales à $F(K)$ le long de la conique sphérique donnée et leur valeur est précisément⁷⁷)

$$J_d = A' + \overline{SP}^2 - K.$$

75) Le *complexe d'inertie* est aussi identique au complexe des axes de Reye déterminé par les axes de la surface centrale de Culmann; ses rayons sont donc aussi normaux aux surfaces homofocales de la surface de Culmann. Seulement le point principal h de cette normale ne coïncide plus avec le pied f de cette normale; mais le segment fh est partagé en son milieu par le plan central perpendiculaire à fh .

76) *J. P. M. Binet*, J. Éc. polyt. (1) cah. 16 (1813), p. 62.

77) Ce théorème est dû à *W. Thomson*; cf. *R. Townsend* [Cambr. Dublin math. J. 2 (1847), p. 19/42, 140/71, 241/51]. *R. Townsend* remarque que le théorème est applicable à la théorie des axes isochrones, c'est-à-dire des axes pour lesquels la masse du système soumise à la pesanteur donnerait des oscillations pendulaires

Dans le cas général, le lieu des points P pour lesquels un des moments principaux d'inertie *axiaux* J_a a une valeur constante H est une surface „biaxiale“ du quatrième ordre $\Delta(H)^{78}$; on obtient facilement son équation par la considération que l'axe d'inertie principal correspondant à P est normal à l'une des trois surfaces homofocales passant par le point P . Pour le plan tangent correspondant, on a

$$J_\pi = J_p - H;$$

d'un autre côté, d'après l'équation (17), on a

$$J_p = J_p^{(s)} + \mu(x^2 + y^2 + z^2)$$

et

$$J_p^{(s)} = A + B + C.$$

Pour cette valeur J_π du paramètre K , il résulte de (40) et de (63) l'équation

$$(66) \quad \Delta(H) = \frac{\mu x^2}{\mu(x^2 + y^2 + z^2) + A' - H} + \frac{\mu y^2}{\mu(x^2 + y^2 + z^2) + B' - H} + \frac{\mu z^2}{\mu(x^2 + y^2 + z^2) + C' - H} - 1 = 0,$$

qui représente la surface considérée⁷⁹.

Si $P(x, y, z)$ est un point quelconque de la surface et P_1 la projection orthogonale du centre de gravité S sur le plan tangent à la surface $\Delta(H)$ en P , PP_1 est l'axe principal d'inertie correspondant à P avec le moment d'inertie H^{80} .

Si l'on fait varier H de C' à $+\infty$, l'équation (66) représente une famille de surfaces⁸¹ qui se groupent en trois classes de surfaces en quelque sorte homofocales, suivant que H est entre C' et B' , entre B' et A' ou entre A' et $+\infty$. Chaque surface de la famille $\Delta(H)$, comme chaque surface de la famille $F(K)$, admet comme plans de symétrie les trois plans de symétrie du système antipolaire. Les points doubles de toutes les surfaces $\Delta(H)$ engendrent deux co-

de même durée. Les axes d'égal moment qui sont également distants du centre de gravité, sont manifestement isochrones.

78) *W. Thomson* [Cambr. Dublin math. J. 1 (1846), p. 203] appelle cette surface *surface d'égal moment (equimomental surface)*.

79) Cette équation permet aussi de trouver les moments d'inertie principaux axiaux d'un point quelconque (x, y, z) . L'équation est du troisième degré en H et ses racines H_1, H_2, H_3 donnent les valeurs cherchées [voir n° 17].

80) *W. Thomson* [Cambr. Dublin math. J. 1 (1846), p. 203]. Voir aussi *E. J. Routh*, *Dynamics*⁵²; *Dynamik* 1, p. 50.

81) *W. Thomson* [Cambr. Dublin math. J. 1 (1846), p. 203] appelle ces surfaces *surfaces conjuguées d'égal moment*.

riques⁸²); ce sont les coniques focales (β) et (γ) du système antipolaire [voir n° 16].

On considère en optique des surfaces de même caractère que $\Delta(H)$, ce sont les *surfaces d'onde de Fresnel*; seulement dans ces surfaces particulières, le lieu des points doubles est formé seulement de l'hyperbole focale. La surface d'onde de Fresnel pour les milieux biréfringents⁸³) est une surface $\Delta(H)$ de la troisième classe ($H > A'$). La totalité des droites d (axes principaux d'inertie ou non) pour lesquelles le moment d'inertie J_d a une valeur constante λ forme un *complexe quadratique de Painvin*⁸⁴) que nous désignerons par $(J_d)_\lambda$. Comme λ peut prendre ∞^1 valeurs, on pourra associer à tout système pesant, outre le complexe unique d'inertie, toute la famille des complexes $(J_d)_\lambda$. Si le paramètre λ prend la valeur particulière H , le complexe $(J_d)_H$ et le complexe d'inertie du système ont en commun une congruence dont les rayons sont tous les axes principaux d'inertie ayant pour moment d'inertie H . Les points principaux correspondants décrivent d'une part la surface focale de cette congruence et d'autre part la surface $\Delta(H)$. Les deux surfaces sont donc identiques et cela fournit une nouvelle génération de la surface $\Delta(H)$.

82) A. Clebsch, J. reine angew. Math. 57 (1860), p. 73.

83) On le sait, en optique, on construit cette surface du quatrième ordre ainsi: on fait les sections centrales d'un certain ellipsoïde et sur le diamètre normal à chaque section on porte les longueurs des deux demi-axes de la section. On connaît l'usage de cette surface d'onde pour des problèmes autres que ceux de l'optique. J. Mac Cullagh [Trans. Irish Acad. (Dublin) 17 (1837), p. 243] lui donne le nom général de *surface biaxiale*, d'une part à cause du mode de génération de la surface, et d'autre part „the name perhaps may appear the more appropriate, at is reminds us of the place which the surface holds in the optical theorie of biaxial crystals“.

Voir aussi R. Townsend [Cambr. Dublin math. J. 2 (1847), p. 24] qui considère de même cette surface et, partant du théorème de W. Thomson, établit, entre autres, la proposition suivante:

Tous les axes principaux d'inertie qui, pour les points auxquels ils correspondent, sont, en même temps, des axes de durée minimée d'oscillation décrivent une surface qui est justement la surface biaxiale de l'ellipsoïde de Mac Cullagh.

84) A. Demoulin [Bull. Soc. math. France 20 (1892), p. 130]. L'auteur (p. 131 en note) attribue toutefois le théorème à G. Fouret qui l'avait communiqué verbalement quelques années auparavant à la Société. Le complexe de L. F. Painvin [Nouv. Ann. math. (2) 11 (1872), p. 49, 97, 202, 481, 529] est un cas spécial du complexe de G. Battaglini [Rendic. Accad. Napoli (1) 5 (1866), p. 305]. Le premier est formé des droites d'intersection des couples de plans rectangulaires tangents à une surface du second ordre; le second est formé des droites telles que les plans tangents menés par cette droite à deux surfaces du second ordre forment un faisceau harmonique. Voir aussi F. Aschieri [Giorn. mat. (1) 8 (1870), p. 35, 37].

La famille des surfaces $\Delta(H)$ peut être définie comme la famille des surfaces focales de toutes les congruences qui sont communes au complexe d'inertie et à la famille des complexes $(J_a)_\lambda$.

20. Moments quadratiques pour les systèmes plans et rectilignes (généraux). Si tous les points masses sont dans un plan $\bar{\omega}$, le centre de gravité S du système est dans $\bar{\omega}$ [voir nos 4 et 5], ainsi que l'antipôle (centre du second degré) de tout autre plan de l'espace. Naturellement, le moment d'inertie $J_{\bar{\omega}}$ par rapport au plan $\bar{\omega}$ est nul. Par là la surface directrice Φ du système antipolaire devient, en portant dans (36) la valeur $C = J_{\bar{\omega}} = 0$, la conique représentée par

$$(36a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi = AU^2 + BV^2 + \mu T^2 = 0 \\ \text{ou} \\ \Phi = \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{1}{\mu} = 0; \end{array} \right.$$

le système antipolaire se réduit à un système plan situé dans le plan $\bar{\omega}(z = 0)$. Tous les plans passant par la même droite p de $\bar{\omega}$ ont donc le même centre du second degré P et par suite le point P peut dans ce cas être appelé centre du second degré ou *antipôle de la droite p* elle-même.

De cette façon, à chaque droite p du système plan est associé un centre du second degré (antipôle) qui est l'antipôle de tous les plans passant par cette droite et qui coïncide avec le pôle P de p par rapport à la conique directrice Φ .

La surface centrale de Culmann se réduit à la *conique centrale de Culmann*

$$(37a) \quad \Phi^c = \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - \frac{1}{\mu} = 0$$

et la surface centrale de Binet, à la courbe réciproque

$$Ax^2 + By^2 - \mu = 0.$$

Si Φ est une hyperbole, Φ^c est l'hyperbole conjuguée; si Φ est une ellipse réelle, la courbe centrale de Culmann est imaginaire et réciproquement.

Ainsi, par exemple toute surface plane limitée (ou toute courbe plane) définit dans son plan $\bar{\omega}$ un système antipolaire n'admettant pas de courbe directrice réelle, mais admettant une *ellipse centrale de Culmann*

$$(37'a) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

où a et b sont les rayons centraux d'inertie définis par la figure plane et μ est l'étendue de la surface plane (ou la longueur de la courbe).

Comme les moments linéaires et quadratiques pour les droites (et points) du plan $\bar{\omega}$ sont égaux aux moments linéaires et quadratiques par rapport aux plans menés par ces droites normalement à $\bar{\omega}$ (et aux droites normales à $\bar{\omega}$ menées par ces points), la courbe centrale de Culmann donne aussi une *représentation des moments quadratiques correspondants à ses diamètres*.

Par exemple, la distance du centre de gravité à une tangente à la conique est égale au rayon d'inertie pour le diamètre parallèle à cette tangente [n° 12, équation 38]⁵²); le moment d'inertie pour un diamètre σ de la conique de Culmann est égal au moment d'inertie, par rapport à ce diamètre, de la masse totale μ concentrée à l'extrémité M du diamètre conjugué de σ .

En outre, le moment de déviation pour les deux diamètres σ et σ' est égal au moment de déviation de la masse totale concentrée au point M ⁵³) [n° 11, éq. 35].

D'une façon générale, toutes les formules des n°s 11 et 12 s'appliquent au système plan, et il doit être entendu qu'elles s'appliquent aussi bien à tous les plans de l'espace qu'à leurs intersections avec $\bar{\omega}$. Par exemple, dans la formule [n° 11]

$$(31) \quad J_{\pi} = \mu s_{\pi} p_{\pi},$$

on peut aussi bien admettre que π représente un plan quelconque de l'espace ou bien la droite d'intersection de ce plan avec le plan $\bar{\omega}$ du système; s_{π} , p_{π} sont alors les distances correspondantes des points S et P soit au plan π , soit à la droite π [n° 11].

Les axes du plan $\bar{\omega}$ qui ont un même moment d'inertie, ainsi que les plans de moments constants perpendiculaires à $\bar{\omega}$, enveloppent l'une des courbes de la famille homofocale du système antipolaire, qui ont pour équation

$$\Phi = K(U^2 + V^2)$$

ou

$$(40a) \quad \frac{x^2}{K-A} + \frac{y^2}{K-B} = \frac{1}{\mu}.$$

Les foyers communs de la famille sont les foyers φ et φ' du système antipolaire et forment avec les foyers f et f' de la courbe centrale de Culmann les quatre sommets d'un carré.

Dans le plan $\bar{\omega}$ du système, tout point O est le centre d'une conique d'inertie de Culmann qui lui est associée, et dont l'équation, rapportée aux axes principaux d'inertie du point O , est l'équation (37a) où l'on remplace A et B par \mathfrak{A} et \mathfrak{B} , moments d'inertie principaux par rapport au point O . Ces axes sont les tangentes en O aux deux coniques du faisceau homofocal (40a) qui passent par ce point; ce

sont donc les deux bissectrices de l'angle des rayons vecteurs $\varphi O \varphi'$ et de son supplémentaire. Cette conique de centre O a les mêmes propriétés pour les moments d'inertie par rapport à ses diamètres que la conique centrale de Culmann par rapport à ses diamètres.

Si l'on considère un *système pesant plan*, qui en particulier peut être une surface homogène ou une ligne homogène, la courbe d'inertie correspondant à un point quelconque O du plan $\bar{\omega}$ est une ellipse. En particulier, les ellipses d'inertie pour les foyers φ et φ' du système sont des cercles dont le demi-diamètre est a , en supposant $a > b$ dans l'équation (37'a).

La *surface centrale de Mac Cullagh* (pour la représentation des rayons *axiaux* d'inertie correspondant au centre de gravité) est d'après le n° 14

$$(44a) \quad \Psi = \frac{x^2}{B} + \frac{y^2}{A} + \frac{z^2}{A+B} - \frac{1}{\mu} = 0$$

et le faisceau des surfaces homofocales de moment constant est d'après le n° 13

$$(40b) \quad \frac{x^2}{K-A} + \frac{y^2}{K-B} + \frac{z^2}{K} = \frac{1}{\mu};$$

cette équation conduit aussi directement à (44a) en remplaçant K par $A + B + C$ [n° 14], soit ici par $A + B$.

On voit en outre que la conique Φ , donnée par l'équation (40b) pour $K = C = 0$, est une des courbes focales de la famille: en effet, pour tous les plans qui passent par ses tangentes, le J_{π} correspondant est nul. La *surface centrale de Poinsot* est réciproque de celle (44a) de Mac Cullagh [n° 14]; c'est donc

$$Bx^2 + Ay^2 + (A + B)z^2 = \mu.$$

Pour tout point O du plan $\bar{\omega}$ on obtient les équations des quatre surfaces d'inertie qui lui sont associées, rapportées à leurs axes principaux, en ajoutant aux équations (37a) et (44a) leurs équations réciproques et remplaçant A et B par les moments d'inertie \mathfrak{A} et \mathfrak{B} qui correspondent au point O . Mais si O est un point extérieur au plan $\bar{\omega}$, les surfaces d'inertie correspondantes sont données par les équations (37), (39), (44) et (47), dans lesquelles A , B et C doivent être remplacés par \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} [nos 16 et 17].

Si le système de masses est *rectiligne*, disposé sur une ligne l , le système antipolaire se réduit à une involution ponctuelle $XX' \cdot S \infty$ sur l , dont les points doubles (ou éventuellement les points conjugués et symétriques par rapport au centre de gravité S) forment deux surfaces Φ (ou Φ^c) dégénérées en deux faisceaux; en tous cas chaque

point X de l est l'antipôle de tous les plans passant par le point conjugué X' et réciproquement.

Par exemple, le centre de gravité S d'un segment homogène AB est en son milieu; et si l'on prend sur lui le point A' de façon que $AA' = 2A'B$, S est le centre et A et A' deux éléments conjugués de l'involution ponctuelle déterminée sur la droite AB .

A l'aide de cette involution et des formules générales des n^{os} 11 et 12 valables ici, on peut calculer tous les moments quadratiques du segment AB .

21. Le développement historique de la théorie des moments et des surfaces d'inertie. L'existence des axes principaux d'inertie pour des systèmes pesants fut découverte par *J. A. de Segner*⁸⁵. Celui-ci démontra que par tout point P passent trois axes au moins pour lesquels le point P est point principal. Là-dessus, *L. Euler*⁸⁶ a donné les formules qui permettent de calculer le moment d'inertie d'une droite quelconque issue de P en fonction des moments d'inertie par rapport aux axes principaux du point P .

Ni *J. A. de Segner*, ni *L. Euler* ne considérèrent pourtant les autres axes principaux, qui passent par le point P , sans admettre ce point pour point principal; surtout ils ne s'occupèrent pas d'une façon générale de la distribution de ces axes dans l'espace.

Une extension essentielle de la théorie fut apportée par *J. P. M. Binet*⁸⁷ qui introduisit la notion plus générale de *trièdre d'axes conjugués* et étudia pour la première fois les moments d'inertie *planaires*. Il trouva la famille des surfaces homofocales et les propriétés de leurs lignes de courbure. Il montra que ces surfaces sont enveloppées par les plans pour lesquels le moment d'inertie est le même, et qu'elles sont décrites par les points pour lesquels un des moments principaux d'inertie correspondants a une valeur donnée. Il remarqua en outre que les coniques focales sont les lieux des points pour lesquels deux des moments principaux d'inertie sont égaux et il étudia, en même temps que *S. D. Poisson*⁸⁸, le cas particulier où les surfaces homofocales sont de révolution.

*A. M. Ampère*⁸⁹) réservait le nom d'axes principaux d'inertie

85) Specimen theoriae turbinum, Halle 1755. *Quelques années plus tôt, *L. Euler* [Scientia navalis 1, S^t Pétersbourg 1749, p. 76/7] avait indiqué comme hypothèse qu'un corps flottant quelconque a trois axes principaux d'inertie (Note de *G. Eneström*).*

86) Theoria motus⁸²), p. 177.

87) J. Éc. polyt. (1) cah. 16 (1813), p. 47 [1811].

88) Mécanique⁶⁷), (1^{re} éd.) 2, p. 496/500.

89) Mém. Acad. sc. Institut France (2) 5 (1821/2), éd. 1826, p. 86.

à ceux du centre de gravité et nommait les autres *axes permanents*. Il trouva que les axes permanents passant par un même point P sont sur un cône du second degré équilatère et que les points auxquels ils correspondent décrivent une courbe du cinquième ordre avec un point triple en P ; que si le point principal donné P correspond à un plan de symétrie, le cône se décompose en deux plans: le plan de symétrie lui-même et un plan normal; la courbe se décompose en un cercle⁹⁰⁾ et une courbe du troisième ordre située dans le plan de symétrie. Chacun de ces plans normaux est en même temps un plan normal en P à une conique d'une certaine famille de coniques homothétiques situées dans le plan de symétrie. Dans l'un des plans de symétrie sont situées deux familles homothétiques de cette espèce, dont la première renferme l'hyperbole focale du système antipolaire et la deuxième renferme l'hyperbole focale de la surface centrale de Culmann. Dans chacun des deux autres plans de symétrie au contraire se trouve une seule famille de courbes homothétiques, qui renferme respectivement l'ellipse focale du système antipolaire et l'ellipse focale de la surface centrale de Culmann⁹⁰⁾.

La théorie des surfaces homofocales et de leurs courbes focales fut reprise par *M. Chasles*⁹¹⁾ qui étudia surtout la distribution des normales à ces surfaces dans l'espace. Il donna entre autres ce théorème que les normales situées dans un même plan enveloppent en général une conique (antipolaire au cône d'Ampère), qui est même une parabole, comme l'a trouvé *R. Townsend*⁹²⁾; en outre *M. Chasles* apporta dans cette théorie un ordre systématique. Ses recherches, conduites au seul point de vue géométrique, trouvent une application immédiate à la théorie des axes principaux d'inertie; elles furent complétées par les travaux de *J. Mac Cullagh*⁹³⁾, *W. Thomson*⁹⁴⁾, *A. Cayley*⁹⁵⁾, *R. Townsend*⁹⁶⁾ et *J. N. Haton de la Goupillière*⁹⁷⁾.

Un autre pas d'une importance décisive fut fait par d'autres

90) Pour les points P de l'hyperbole focale et de l'ellipse focale du système antipolaire ce cercle se réduit à un point qui n'est autre que le point P lui-même. *A. M. Ampère* désigne ces deux coniques sous le nom d'*hyperbole principale* et d'*ellipse principale* [Mém. Acad. sc. Institut France (2) 5 (1821/2), éd. 1826, p. 139].

91) *Aperçu hist.*, (2^e éd.) p. 384 (Note XXXI).

92) *R. Townsend*, *Cambr. Dublin math. J.* 1 (1846), p. 209/27; 2 (1847), p. 19/42, 140/71, 241/51.

93) *J. Mac Cullagh*, *Trans. Irish Acad. (Dublin)* 22 (1849), p. 139 [1844].

94) *W. Thomson*, *Cambr. Dublin math. J.* 1 (1846), p. 127/33, 195/206.

95) *A. Cayley*, *Id.* 1 (1846), p. 207/8; *Papers* 1, Cambridge 1889, p. 253/4.

96) *Cambr. Dublin math. J.* 1 (1846), p. 209/27; 2 (1847), p. 19/42, 140/71, 241/51.

97) *J. Éc. polyt.* (1) cah. 37 (1858), p. 73/96.

recherches purement géométriques. *Th. Reye*⁹⁸) s'assimila les idées de *J. Plücker* sur la géométrie des droites et utilisa les matériaux déjà réunis. Matériaux riches, mais amassés sans idée systématique et d'un caractère moitié mécanique, moitié géométrique. Il étudia en 1868 pour la première fois le *complexe des axes* d'une surface du second degré et du système polaire correspondant et en donna une théorie complète. Plus tard, il définit le complexe des axes indépendamment de la surface du second degré, prise d'abord pour base, et montra que les surfaces homofocales et en outre toutes les surfaces qui leur sont concentriques et homothétiques fournissent le même complexe, etc. Mais comme le complexe de Reye, formé des axes du système antipolaire attaché à un système de masses, est, en même temps, le complexe d'inertie du système de masses, il permet de trouver tous les résultats connus antérieurement sur les axes principaux d'inertie comme de simples corollaires, et en outre une série de compléments importants et de nouveaux théorèmes; et cela non pas seulement pour les systèmes pesants, qui seuls avaient été étudiés par tous les auteurs cités antérieurement, mais aussi pour les systèmes de masses généraux.

Notons enfin la simplicité de la définition que nous avons donnée pour le *système antipolaire* attaché à un système de masses quelconque, en associant à tout plan π le centre de gravité du second degré correspondant à ce plan π [n° 11]; système qui, à son tour, détermine facilement les *surfaces homofocales* du second degré et le *complexe d'inertie*.

On peut donc désormais regarder comme rempli le souhait de *M. Chasles*⁹⁹) et de *A. Cayley*¹⁰⁰), de baser sur une idée fondamentale unique et simple toutes les propriétés des moments statiques et quadratiques et d'en déduire, par un développement logique et systématique, tous les théorèmes qui s'y rapportent.

Pour se guider au milieu des dénominations diverses employées dans les différentes publications concernant les surfaces d'inertie, on peut encore utiliser les données suivantes:

*J. P. M. Binet*¹⁰¹) avait pour la première fois représenté les moments d'inertie planaires correspondant à un point à l'aide d'un ellipsoïde, mais l'ellipsoïde employé par *J. P. M. Binet* n'est pas celui que nous avons désigné plus haut (d'après *W. Schell*) comme ellipsoïde

98) *Geom. der Lage*⁷⁴), (3^e éd.) 2, p. 138, 77.

99) *Aperçu hist.*¹), (2^e éd.) p. 397 et les notes des pages 220, 221.

100) *Report Brit. Assoc.* 32, Cambridge 1862, éd. Londres 1863, p. 227.

101) *J. Éc. polyt.* (1) cah. 16 (1813), p. 64 [1811].

de Binet; c'est un ellipsoïde semblable à l'ellipsoïde de Culmann, le rapport de similitude étant $\sqrt{\mu}:1$. *J. N. Haton de la Goupillière*¹⁰² était arrivé aussi au même ellipsoïde de Culmann.

L'ellipsoïde considéré par *J. P. M. Binet* a pour réciproque la surface appelée par *W. Thomson*¹⁰³ „the ordinary ellipsoid of construction“, par *A. Cayley*¹⁰⁴ „the comomental ellipsoid“ et par *I. (J.) Somov*¹⁰⁵ l'ellipsoïde fondamentale¹⁰⁶.

Comme l'avait fait *J. P. M. Binet* pour les moments planaires, *A. L. Cauchy*¹⁰⁷ représenta aussi les moments axiaux d'inertie d'un point par un ellipsoïde. L'ellipsoïde de Cauchy était désigné par *J. Mac Cullagh*¹⁰⁸, *W. Thomson*¹⁰⁹, *R. Townsend*¹¹⁰ et autres sous le nom de *the momental ellipsoid*; il est homothétique de celui que nous avons appelé (47') ellipsoïde de Poinsot¹¹¹. *L. Poinsot* l'appela „ellipsoïde central“ et le mit en valeur dans ses belles recherches sur la rotation des corps. L'ellipsoïde central \mathcal{P} de Mac Cullagh (44') a été introduit par *J. Mac Cullagh*¹¹² dès 1844 sous le nom de „the ellipsoid of gyration“ et employé par lui à l'étude de la rotation d'un corps; *W. Thomson*¹¹³ l'a retrouvé de son côté en 1846 sous le nom de „the central ellipsoid“ et *A. Clebsch* sous le nom de „das zweite Central-ellipsoid“. La surface analogue, pour un point quelconque, que nous avons appelée ellipsoïde d'inertie de Mac Cullagh, a été étudiée par *R. Townsend*¹¹⁴ et plus tard par *A. Clebsch*¹¹⁵.

22. Systèmes de masses quadratiquement équivalents. Deux systèmes de masses sont dits *équivalents* au point de vue de leurs

102) *J. Éc. polyt.* (1) cah. 37 (1858), p. 85.

103) *Cambr. Dublin math. J.* 1 (1846), p. 201, 202.

104) *Report Brit. Assoc.* 32, Cambridge 1862, éd. Londres 1863, p. 143.

105) *Račionálnaja mehanika*¹; trad. *A. Ziwet*, *Mechanik* 2, p. 79.

106) Voir aussi *D. Chelini*, *Mem. Ist. Bologna* (2) 5 (1865), p. 144 et suiv.; *F. P. Ruffini*, *Mem. Ist. Bologna* (4) 3 (1881/2), p. 25.

107) *Exercices math.* 2, Paris 1827, p. 93; (*Œuvres* (2) 7, Paris 1889, p. 127.

108) *Trans. Irish Acad. (Dublin)* 22 (1855), p. 139.

109) *Cambr. Dublin math. J.* 1 (1846), p. 127/33, 195/206.

110) *Id.* 1 (1846), p. 209/27; 2 (1847), p. 19/42, 140/71, 241/51.

111) *J. math. pures appl.* (1) 16 (1851), p. 74.

112) Cf. *S. Haughton*, *Account of prof. Mac Cullagh's lectures on the rotation of a solid body round a fixed point* [*Trans. Irish. Acad. (Dublin)* 22 (1855), p. 149].

113) *Cambr. Dublin math. J.* 1 (1846), p. 127/33, 195/206.

114) *Cambr. Dubl. math. J.* 1 (1846), p. 209/27; 2 (1847), p. 19/42, 140/71, 241/51.

115) *J. reine angew. Math.* 57 (1860), p. 73 [1859]. *A. Clebsch* paraît, comme *R. Townsend*, n'avoir pas eu connaissance des recherches de *J. Mac Cullagh*.

moments d'inertie¹¹⁶) si pour tous les plans de l'espace leurs moments d'inertie ont des valeurs égales¹¹⁷). Dans ce cas, les deux moments d'inertie ont aussi la même valeur pour tout point et pour tout axe et il en est de même des moments de déviation pour tout couple de plans.

D'après les formules (31) à (35), les conditions d'équivalence pour les systèmes généraux sont l'égalité des masses totales et la coïncidence des systèmes antipolaires. Si ces conditions sont remplies, il est facile de voir que les systèmes sont équivalents aussi au point de vue des moments statiques et qu'ils admettent le même centre de gravité, les mêmes surfaces homofocales et le même complexe d'inertie.

Tout système *non indifférent* équivaut à une sextuple infinité de quadruplets de points masses. Les points d'un tel quadruplet forment les sommets de l'un quelconque des tétraèdres antipolaires du système donné¹¹⁷). Soient h_1, h_2, h_3, h_4 les hauteurs du tétraèdre, s_1, s_2, s_3, s_4 les distances du centre de gravité à ses faces; les masses $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ des quatre sommets sont données par les équations

$$(67) \quad \mu_1 h_1 = \mu s_1, \quad \mu_2 h_2 = \mu s_2, \quad \mu_3 h_3 = \mu s_3, \quad \mu_4 h_4 = \mu s_4.$$

Pour un système *magnétique* (où $\mu = 0$, tandis que q est différent de zéro) il faut substituer à ces formules celles-ci

$$(67') \quad \mu_1 h_1 = \mu_2 h_2 = \mu_3 h_3 = \mu_4 h_4 = q,$$

où les hauteurs sont mesurées dans la direction de l'axe magnétique \vec{q} et où q est la valeur scalaire de cet axe comme dans (31').

Le système de masses *indifférent* équivaut au contraire à une infinité de quintuplets de points-masses, avec une masse totale nulle.

Pour un système *pesant*, il y a toujours une infinité de quadruplets équivalents dont les quatre points ont pour masse $\frac{\mu}{4}$. Les tétraèdres qui forment ces quadruplets sont circonscrits à un ellipsoïde Φ_1 et inscrits à un autre ellipsoïde Φ_2 . Ces deux ellipsoïdes sont

116) *Th. Reye*, J. reine angew. Math. 72 (1870), p. 300/1; *E. J. Routh*, Dynamics³²); Dynamik 1, p. 24. Abstraction faite de la dénomination, l'idée de l'équivalence des corps se trouve d'abord dans *J. P. M. Binet*, J. Éc. polyt. (1) cah. 16 (1813), p. 65/7 [1811], et plus tard chez *A. M. Legendre*, Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes 1, Paris 1825, p. 410 [1817]. Mais les premières réductions d'un corps à des groupes équivalents de points-masses ont été pour la première fois données par *J. J. Sylvester* [Quart. J. pure appl. math. 6 (1864), p. 131; Papers 2, Cambridge 1908, p. 339], *E. J. Routh* [Quart. J. pure appl. math. 6 (1864), p. 267/9] et *Th. Reye* [Z. Math. Phys. 10 (1865), p. 433].

117) *Th. Reye*, J. reine angew. Math. 72 (1870), p. 295/6; et déjà auparavant, pour les systèmes pesants [Z. Math. Phys. 10 (1865), p. 433]. La réduction du triangle à un système équivalent de trois points d'égale masse a été donnée pour la première fois par *E. J. Routh*, Quart. J. pure appl. math. 6 (1864), p. 267/9.

concentriques et homothétiques à l'ellipsoïde central de Culmann Φ^c . Il suffit de diviser et de multiplier les axes de Φ^c par $\sqrt{3}$ pour avoir respectivement les axes de Φ_1 et Φ_2 .

Tous ces tétraèdres ont un même volume qui est le volume maximé des tétraèdres que l'on peut inscrire dans l'ellipsoïde Φ_2 ¹¹⁸).

Tout système *pesant* peut en outre être réduit à un sextuplet équivalent de masses égales à $\frac{1}{6}\mu$, placées aux extrémités d'un triplet quelconque de diamètres conjugués de l'ellipsoïde Φ_2 .

Ces théorèmes peuvent être déduits, par une transformation homographique-affine de l'espace, des théorèmes analogues pour un système de masses dont la surface centrale est une sphère; par cette transformation, l'équivalence de deux systèmes n'est pas troublée¹¹⁹).

Remarquons qu'un système dont la surface centrale est une sphère de rayon a est équivalent à une masse sphérique homogène de rayon $a\sqrt{5}$; il en résulte que tout système de masses purement positives est équivalent à un ellipsoïde homogène. Cet ellipsoïde est concentrique et homothétique à l'ellipsoïde central de Culmann et s'en déduit en multipliant ses dimensions linéaires par $\sqrt{5}$. C'est l'ellipsoïde de Legendre¹²⁰).

L'ellipsoïde de Legendre pour un tétraèdre homogène de masse μ coïncide avec l'ellipsoïde de Culmann pour quatre masses égales à $\frac{\mu}{4}$ concentrées aux sommets du tétraèdre.

Tout système *pesant* est aussi équivalent à un tétraèdre homogène.

Considérons en effet un tel système et un quadruplet équivalent formé de quatre masses égales. Joignons le centre de gravité S à ces quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 et multiplions les segments obtenus par $\sqrt{5}$. Les quatre extrémités nouvelles A_1', A_2', A_3', A_4' forment les sommets d'un tétraèdre homogène équivalent au système donné. Cela montre en même temps comment on peut remplacer un tétraèdre homogène donné, de masse μ , par un système de quatre masses égales à $\frac{\mu}{4}$ ¹²¹).

118) Sur ces tétraèdres de volume maximé voir *J. Liouville*, *J. math. pures appl.* (1) 7 (1842), p. 190; *J. Steiner*, *J. reine angew. Math.* 30 (1846), p. 273/6; *Werke* 2, Berlin 1882, p. 345/8; *C. F. Geiser*, *Reale Ist. Lombardo Rendic.* (2) 1 (1868), p. 778/9.

119) *E. J. Routh*, *Dynamics*³²); *Dynamik* 1, p. 30.

120) *A. M. Legendre*, *Fonct. ellipt.*⁹⁹) 1, p. 410. Voir aussi *E. J. Routh*, *Dynamics*³²); *Dynamik* 1, p. 23.

121) Par là on voit encore comment un polyèdre homogène (ou un polygone et aussi une ligne polygonale homogène) peut être remplacé par un système équivalent de points isolés. Il suffit de partager d'abord le polyèdre en tétraèdres (ou le polygone en triangles, la ligne polygonale en ses côtés). De là (voir

Le tétraèdre est en outre équivalent¹²²⁾ à cinq masses; quatre de ces masses coïncident avec les sommets du tétraèdre et ont pour valeur $\frac{\mu}{20}$, et la cinquième, placée au centre de gravité, a pour valeur $\frac{4\mu}{5}$ ¹²³⁾.

Appendice à la théorie des moments linéaires et quadratiques.

23. Moments linéaires et quadratiques d'un système continu.

Le noyau d'une figure continue. Pour l'usage pratique, une importance particulière appartient au centre de gravité, aux moments linéaires et aux moments d'inertie des *corps continus* (ou des surfaces); ces éléments méritent pour cette raison une mention spéciale.

Les coefficients introduits plus haut [voir n° 11] sont définis par les intégrales suivantes étendues à tout le corps:

$$(68) \begin{cases} A_{11} = \int x^2 d\tau, & A_{22} = \int y^2 d\tau, & A_{33} = \int z^2 d\tau, \\ A_{23} = A_{32} = \int yz d\tau, & A_{31} = A_{13} = \int zx d\tau, & A_{12} = A_{21} = \int xy d\tau, \\ A_1 = \int x d\tau, & A_2 = \int y d\tau, & A_3 = \int z d\tau, & \mu = \int d\tau, \end{cases}$$

où $d\tau$ est la masse de l'élément du corps supposé homogène et μ la masse totale. Du reste les autres développements demeurent inchangés. Seulement une nouvelle notion s'ajoute qu'on ne rencontre pas dans un système de masses isolées, c'est la notion de *noyau*¹²⁴⁾.

aussi note 122) une méthode pour calculer les moments d'inertie de certains corps, de certaines surfaces ou lignes brisées.

122) Cette réduction du tétraèdre à un groupe équivalent de cinq masses a été donné pour la première fois par *J. J. Sylvester*, *Quart. J. pure appl. math.* 6 (1864), p. 130/3; *Papers* 2, p. 338/41.

123) D'autres exemples de telles réductions se trouvent dans *E. J. Routh*, *Dynamics*²³⁾; *Dynamik*, p. 24/32; *Th. Reye*, *Z. des Vereins deutscher Ingenieure* 19 (1875), p. 401/4; *R. Mehmke*, *Z. Math. Phys.* 29 (1884), p. 61.

124) *K. (Ch.) Culmann*, *Graph. Statik*¹⁴⁾, (1^{re} éd.) p. 174/7, 180/206; (2^e éd.), p. 415; *Statique graphique*²⁹⁾, p. 387 et, pour les figures planes, *M. Bresse*, *Mécanique appliquée*⁴⁹⁾, (2^e éd.) 1, p. 53. Contrairement à ce qu'avait fait *K. (Ch.) Culmann*, *M. Bresse* détermine directement le noyau de diverses figures simples, et à cet effet il s'appuie sur le théorème suivant découvert par lui:

Soit a la ligne d'intersection des bases non parallèles d'un corps cylindrique; la projection A du centre de gravité de ce corps, prise parallèlement aux génératrices, sur une base, coïncide avec l'antipôle de la ligne a relativement à cette base, pourvu qu'on regarde cette base comme un système plan homogène et continu.

La méthode de *M. Bresse* fut systématiquement utilisée par *G. Jung* dans ses cours sur la statique graphique professés à l'école polytechnique de Milan [cours qui ont été autographiés à plusieurs reprises à partir de 1886/7] pour effectuer la détermination du noyau et du système antipolaire relatifs à une série de figures planes.

On entend par *noyau* la surface fermée dont le contour est le lieu des antipôles de tous les plans qui touchent le corps, mais sans le traverser. Le noyau entoure le centre de gravité S , comme tout autre point dont le plan antipolaire ne traverse pas le corps. Soient V le volume du corps, P un point quelconque du noyau, π le plan antipolaire de P , r la distance du point P et v la distance du plan π au plan σ parallèle au plan π mené par le centre de gravité S . D'après la formule (33) du n° 11, le moment d'inertie du volume V par rapport au plan central σ sera

$$(69) \quad J = r v V, \quad \text{d'où} \quad \frac{J}{v} = r V.$$

On définit de même le noyau pour une surface plane, sauf que le volume est ici remplacé par l'aire F de la surface. Considérons la surface plane donnée comme la section droite d'une poutre rectiligne; soient alors f l'axe neutre de cette section droite, J_f le moment d'inertie correspondant et f' le diamètre conjugué à f dans le système antipolaire attaché à F ; la formule (69) devient ¹²⁵⁾

$$(69a) \quad v = \frac{J_f}{v} = F \cdot r.$$

Dans cette formule, v est la distance (mesurée parallèlement à f') du centre de gravité à la plus éloignée p des deux tangentes à la section parallèles à f , et $r = SP$ est le plus petit des deux segments interceptés sur f' par le noyau, P étant l'antipôle de p . Cette grandeur v , à cause de son emploi dans la résistance des matériaux, est appelée par *F. Reuleaux* le *module de résistance* de la section pour l'axe neutre f .

Le noyau fournit un moyen commode pour résoudre graphiquement les problèmes qui concernent les moments d'inertie et de déviation et les moments résistants ¹²⁶⁾.

Dans des figures homographiques par affinité, les systèmes antipolaires sont homographiques par affinité et les noyaux aussi. Donc du noyau d'un carré, d'un cercle et d'une sphère on déduit le noyau d'un parallélogramme, d'une ellipse, d'un ellipsoïde, etc. En particulier si les figures sont semblables, on a les formules.

$$J' = \lambda^n \cdot J, \quad v' = \lambda \cdot v, \quad \text{donc} \quad v' = \lambda^{n-1} \cdot v,$$

* 125) *W. Ritter*, Der Civilingenieur 22 (1876), p. 309; *G. Jung*, Reale Ist. Lombardo Rendic. (2) 9 (1876), p. 647; *A. Sayno*, id. (2) 9 (1876), p. 733.

126) *G. Jung*, Reale Ist. Lombardo Rendic. (2) 9 (1876), p. 600, 647; Report Brit. Assoc. 46, Glasgow 1876, éd. Londres 1877, p. 23/6; Amtlicher Bericht der 50. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in München vom 17 bis 22 September 1877, éd. Munich 1877, p. 98/100. Pour plus de détails, voir l'article IV 7.

où les lettres sans accent s'appliquent à la première figure et les lettres accentuées à la deuxième; enfin λ représente le rapport d'agrandissement linéaire et il faut faire $n = 5$ pour un corps, $n = 4$ pour une surface, et $n = 3$ pour une courbe.

Soit un système de masses composé de plusieurs corps 1, 2, ... n ayant pour densités uniformes $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$ et pour volumes V_1, V_2, \dots, V_n ; on trouve le centre de gravité S du système en concentrant au centre de gravité S_i de chacun des corps la masse totale de ce corps et en prenant le centre de gravité des n points obtenus. Soit en outre π un plan qui ne passe par aucun des centres de gravité S_i et S , et soient P_i les antipôles du plan π par rapport aux divers corps, joignons ces antipôles P_i aux centres de gravité correspondants S_i et désignons par $s_\pi^{(i)}$ et $p_\pi^{(i)}$ les distances de ces points S_i et P_i au plan π .

Si l'on donne alors au point P_i la masse $\varrho_i V_i s_\pi^{(i)}$, le centre de gravité des points masses obtenus est l'antipôle du plan π pour le système total [voir n° 11 et 5].

En outre [n° 11] le moment d'inertie pour le plan π est

$$(70) \quad J_\pi = \sum \varrho_i V_i s_\pi^{(i)} p_\pi^{(i)} = \mu s_\pi p_\pi;$$

$\mu = \sum \varrho_i V_i$ est la masse totale du système, s_π et p_π sont les distances normales des points S et P au plan π . Pour le plan σ mené par S parallèle à π , le moment d'inertie est

$$(70') \quad J_\sigma = \mu s_\pi (p_\pi - s_\pi) = \mu s_\pi p_\sigma.$$

Enfin, pour un plan π ne passant pas par le centre de gravité et un second plan π' entièrement quelconque, le moment de déviation $D_{\pi, \pi'}$ est [n° 11]

$$(71) \quad D_{\pi, \pi'} = \sum_{(i)} \varrho_i V_i s_\pi^{(i)} p_{\pi'}^{(i)} = \mu s_\pi p_{\pi'}$$

Les corps 1, 2, ... n peuvent naturellement être des parties d'un même corps; de là une méthode (procédé de *décomposition*) qui permet de réduire le calcul des moments d'inertie d'un corps à celui de corps plus simples composant le corps donné. La méthode s'applique aux surfaces et aux courbes [voir n° 24a].

24. Calcul effectif des moments linéaires et quadratiques pour les systèmes pesants. Nous allons donner quelques méthodes pour la détermination du centre de gravité, des moments quadratiques et du système antipolaire d'un système donné.

a) *Méthodes de substitution*: Un système pesant peut être remplacé par des systèmes plus simples soit par le procédé de décompo-

sition [voir la fin du n° 23 et le n° 5] soit par la réduction à un système quadratiquement équivalent [voir n° 22], ou enfin par les deux procédés simultanément¹²¹⁾. Dans l'un et l'autre cas, on peut poursuivre le calcul analytiquement ou graphiquement.

b) *Méthodes analytiques*, savoir:

α. Si l'on connaît le trièdre central principal d'inertie, la détermination de l'ellipsoïde central de Culmann [formules (37) et (37')] exige la détermination des trois constantes A, B, C . En désignant par ρ la densité en $P(x, y, z)$, et par $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ les aires des sections du système par trois plans menés par P parallèlement aux plans principaux d'inertie, on obtient les trois constantes cherchées au moyen des formules

$$A = \int \rho x^2 \Omega_x dx, \quad B = \int \rho y^2 \Omega_y dy, \quad C = \int \rho z^2 \Omega_z dz.$$

Les rayons de giration planaires correspondants s'en déduisent par les relations¹²⁷⁾

$$a^2 \mu = A, \quad b^2 \mu = B, \quad c^2 \mu = C.$$

L'ellipsoïde central de Culmann détermine alors d'une façon simple le système antipolaire qui, à son tour, donne les moments quadratiques J_p, J_π, J_a par rapport à tous les points, plans et droites de l'espace.

β. On procède de même quand on connaît, non plus le trièdre principal, mais un autre trièdre conjugué de Binet pour le centre de gravité, car les formules de l'ellipsoïde central de Culmann demeurent les mêmes. Les axes principaux centraux sont alors déterminés par les axes de l'ellipsoïde.

γ. Dans bien des cas on peut trouver un trièdre conjugué de Binet et le centre de gravité du système en se basant sur le théorème suivant:

Si une droite d contient les centres de gravité de toutes les sections parallèles à un plan central σ faites dans une figure homogène, la droite d contient le centre de gravité S de cette figure [n° 5] et d est le diamètre conjugué de σ dans le système antipolaire déterminé par le système¹²⁸⁾. Réciproquement, si σ est un plan diamétral pour toutes les cordes parallèles à la droite centrale g , σ est le plan diamétral conjugué de d dans le système antipolaire. En particulier, dans un système homogène, tout plan ou axe de symétrie est plan ou axe principal d'inertie.

Cela s'applique encore à un système non homogène, si les points symétriques ont la même densité.

127) Voir *W. Schell, Theorie der Bewegung*¹⁾, (2^e éd.) 1, p. 129/30.

128) Cf. *J. P. M. Binet, J. Éc. polyt.* (1) cah. 16 (1813), p. 65.

δ. Dans le cas général, l'application des formules (51') ou (51) exige la détermination de six constantes ($\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}$), mais il est rare qu'on puisse les trouver analytiquement. En particulier, si l'on désire le système antipolaire, on fera coïncider le point O avec le centre de gravité et l'on imaginera faite la substitution indiquée dans la note 63.

ε. Les moments d'inertie pour les couches minces et les surfaces peuvent se déduire par différentiation des moments d'inertie des volumes; de même les moments d'inertie des fines bandes de surfaces et des lignes se déduisent des moments d'inertie des surfaces¹²⁹).

La détermination analytique du centre de gravité s'obtient par l'application directe des formules (3a).

c) *Méthodes géométriques*: Outre les transformations semblable et homographique par affinité¹³⁰) [n^{os} 8 et 23], il est souvent avantageux pour faciliter la détermination des moments d'inertie d'employer la transformation par rayons vecteurs réciproques. On peut appliquer les théorèmes suivants:

Soient r et r' les rayons vecteurs de deux points correspondants des figures inverses relativement à un centre quelconque O (de façon que $rr' = \kappa^2 = \text{const.}$). Entre les densités ϱ et ϱ' aux points correspondants, établissons la relation

$$\varrho' = \varrho \left(\frac{\kappa}{r'} \right)^n,$$

où l'on fera $n = 10$, $n = 8$ ou $n = 6$ suivant que la figure est un volume, une surface ou une ligne. Les deux figures ont alors les mêmes axes principaux d'inertie relatifs à O et les mêmes moments d'inertie par rapport à toutes les droites passant par O .

Soient maintenant J_p et $J_{p'}$ les moments d'inertie polaires des deux systèmes inverses relativement aux deux points homologues P et P' . On prendra encore

$$\varrho' = \varrho \left(\frac{\kappa}{r'} \right)^n,$$

mais avec $n = 8$, 6 ou 4 suivant que le système est un volume, une

129) Voir *W. Schell*, *Theorie der Bewegung*¹⁾, (2^e éd.) 1, p. 142; *I. (J.) Somov*, *Račionalnaja mehanika*¹⁾; trad. *A. Ziwet*, *Mechanik* 2, p. 92.

130) Pour le problème direct (détermination du moment d'inertie d'une figure donnée) voir des exemples dans *W. Schell* [*Theorie der Bewegung*¹⁾, (2^e éd.) 1, p. 134 et suiv.]; pour le problème indirect (étant donné le moment d'inertie ou le module de résistance [n^o 23], construction de la figure sous d'autres conditions données) voir *G. Jung*, *Reale Ist. Lombardo Rendic.* (2) 9 (1876), p. 388/90, 514/8, 597/609; *Il Politecnico* 24 (1876), p. 421/34, 529/34; *Report. Brit. Assoc.* 46, Glasgow 1876, éd. Londres 1877, p. 21/3; *Assoc. fr. avanc. sc.* 5 (Clermont-Ferrand) 1876, p. 127/9 [*E. Collignon* avait proposé à *G. Jung* de traiter ce problème].

surface ou une ligne; c'est ce que faisait *W. Thomson*¹³¹). Avec cette nouvelle convention, on a

$$J_{P'} = \left(\frac{\kappa}{OP}\right)^2 \cdot J_P = \frac{OP'}{OP} \cdot J_P,$$

et le calcul du moment polaire pour un système résulte simplement de celui du système inverse.

d) *Méthodes graphiques*: Ce sont des méthodes d'approximation et leur principal avantage est leur grande généralité. Elles sont, pour les systèmes plans surtout, applicables à tous les problèmes où la présence de coefficients empiriques justifie l'approximation. La technique pose très souvent de tels problèmes. Voir à ce sujet l'article IV 7.

e) *Méthodes expérimentales*: Si le corps est irrégulier dans sa forme comme dans la distribution de sa densité, les méthodes précédentes sont en défaut. On est réduit alors à l'expérience:

On suspend le corps à un axe horizontal quelconque d' et on calcule le moment d'inertie J_d par rapport à la parallèle d à d' menée par le centre de gravité au moyen de la formule

$$J_d = \frac{p \delta t^2}{\pi^2} - \mu \delta^2.$$

Dans le second membre de cette formule, toutes les grandeurs peuvent être connues par l'expérience, ce sont la masse μ , le poids p , la distance δ du centre de gravité S à l'axe d' , la demi-durée d'oscillation t ¹³²), (π est le rapport de la longueur de la circonférence à son diamètre).

Mais on peut aussi attacher le corps à un pendule de masse connue et dont on a préalablement déterminé par observation le moment d'inertie par rapport à un axe horizontal.

Par une nouvelle expérience on détermine la durée d'oscillation du système total; on en conclut le moment d'inertie de ce système puis du système donné seulement, pourvu qu'on connaisse la masse de ce système donné¹³³).

En répétant l'expérience un nombre de fois suffisant, on détermine l'ellipsoïde central de Mac Cullagh au moyen des valeurs trouvées de $\frac{J_d}{\mu}$; les trois autres ellipsoïdes centraux en résultent.

* Citons également une méthode expérimentale donnée par *G. D. J. Haffner*¹³⁴) pour déterminer les balourds des roues des wagons.*

131) Voir *E. J. Routh, Dynamics*³²); *Dynamik* 1, p. 34.

132) Voir *R. Townsend, Cambr. Dublin math. J.* 2 (1847), p. 26; voir aussi *E. J. Routh, Dynamics*³²); *Dynamik* 1, p. 81.

133) Voir *E. J. Routh, Dynamics*³²); *Dynamik* 1, p. 81/2.

134) * Cf. *P. Appell, J. Éc. polyt. (2) cah. 9* (1904), p. 151/62.*

f) *Méthodes mécaniques*: On peut aussi se servir de divers appareils et instruments. Nous citerons seulement les trois exemples suivants:

*J. Amsler*¹³⁵⁾ construisit un planimètre, *Marcel Deprez*¹³⁶⁾ un intégromètre et *Br. Abdank-Abakanowicz*¹³⁷⁾ un intégraphe; ces instruments déterminent par voie mécanique non seulement les moments d'inertie de figures planes homogènes relativement à des droites quelconques de leur plan, mais aussi les moments linéaires, les aires et les centres de gravité¹³⁸⁾.

Moments supérieurs.

25. Définition générale des moments supérieurs. On appelle moment du $m^{\text{ième}}$ degré d'un système de masses¹³⁹⁾ pour un groupe de m plans, dont quelques-uns peuvent être confondus, l'expression

$$(72) \quad \mathfrak{M} = \sum_{(i)} \alpha_i p_{i1} p_{i2} \cdots p_{im},$$

où p_{ik} est la distance du $i^{\text{ième}}$ point au $k^{\text{ième}}$ plan et $m \geq 1$ ¹⁴⁰⁾. Ce moment n'est qu'un cas particulier du moment du système de masses pour une surface générale du $m^{\text{ième}}$ ordre¹⁴¹⁾. Celui-ci a pour expression

$$(73) \quad \mathfrak{M} = \sum_{(i)} \alpha_i F(x_i, y_i, z_i),$$

où $F(x, y, z) = 0$ est l'équation de la surface donnée.

Dans une direction déterminée, menons une transversale par chaque point A_i du système et soient $q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{im}$ les distances du point A_i aux m points d'intersection de la transversale avec la surface du $m^{\text{ième}}$ ordre; le moment précédent \mathfrak{M} sera proportionnel à l'expression

$$(74) \quad \sum_{(i)} \alpha_i q_{i1} q_{i2} \cdots q_{im}.$$

Soit alors φ_k l'angle formé par une direction arbitrairement

135) Viertelj. Naturf. Ges. Zürich 1 (1856), p. 41/70, 101/40; *K. (Ch.) Culmann* [Graph. Statik¹⁴⁾, (1^{re} éd.), p. 50/2; (2^e éd.) p. 467/75; Statique graphique²⁹⁾, p. 435/43] en donne une description détaillée.

136) *L'intégromètre de *Marcel Deprez* est décrit C. R. Acad. sc. Paris 73 (1871), p. 785/7; *E. Collignon* [Ann. Ponts et Chaussées (5) 3 (1872) premier semestre, p. 223/37] a publié une note descriptive sur cet intégromètre avec figures.*

137) Les intégraphes, la courbe intégrale et ses applications, Paris 1886.

138) *N. Žukovskij (Joukovski)* [Izvēstija Obščestva ljubitelej jestestvoznanija (C. R. de la Soc. des amateurs des sciences naturelles Moscou) 67 (1891), p. 415] a construit un appareil pour trouver les moments d'inertie d'un corps quelconque.

139) Nous omettons, dans cet article, les modifications que subit la théorie des moments supérieurs et de l'équivalence dans le cas des systèmes plans.

140) *Th. Reye*, J. reine angew. Math. 72 (1870), p. 306.

141) *Th. Reye*, id. 78 (1874), p. 98.

choisie avec la normale à l'un des m plans η_k , soit ϱ_{ik} la distance du point A_i au plan η_k évaluée suivant la direction choisie;

$$p_{ik} = \varrho_{ik} \cos \varphi_k$$

est la distance normale du point A_i au plan η_k . Le moment du système de masses par rapport au groupe de ces plans est

$$(75) \quad \mathfrak{M} = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \dots \cos \varphi_m \sum_{(i)} \alpha_i \varrho_{i1} \varrho_{i2} \dots \varrho_{im}.$$

Les distances p_{ik} sont données analytiquement par la formule

$$p_{ik} = \frac{U_k x_i + V_k y_i + W_k z_i - T_k}{\sqrt{U_k^2 + V_k^2 + W_k^2}},$$

où U_k, V_k, W_k, T_k sont les coordonnées homogènes du plan η_k . Si les m plans coïncident, le moment du $m^{\text{ième}}$ degré du système par rapport au plan η est

$$(76) \quad \mathfrak{M} = \sum \alpha_i \left(\frac{U x_i + V y_i + W z_i - T}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}} \right)^m.$$

Le moment peut être calculé pour tout plan de l'espace dès qu'on connaît le moment par rapport à un nombre de plans indépendants égal à

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = N(m) + 1.$$

26. Les surfaces nulles d'un système de masses. Les plans pour lesquels le moment du $m^{\text{ième}}$ degré a une valeur constante \mathfrak{M} enveloppent une surface algébrique dont l'équation en coordonnées homogènes est

$$(77) \quad \sum_{(i)} \alpha_i (U x_i + V y_i + W z_i - T)^m = \mathfrak{M} (U^2 + V^2 + W^2)^{\frac{m}{2}}$$

pour m pair,

$$(77') \quad \left\{ \sum_{(i)} \alpha_i (U x_i + V y_i + W z_i - T)^m \right\}^2 = \mathfrak{M}^2 (U^2 + V^2 + W^2)^m$$

pour m impair.

Pour m pair elle est de classe m , pour m impair de classe $2m$. Pour $\mathfrak{M} = 0$, on a toujours une surface de $m^{\text{ième}}$ classe¹⁴²⁾

$$(78) \quad \Phi^m = \sum_{(i)} \alpha_i (U x_i + V y_i + W z_i - T)^m = 0.$$

Cette surface est la $m^{\text{ième}}$ surface nulle du système.

Toutes les surfaces nulles sont indépendantes du choix des axes. Si l'on différentie l'équation de l'une d'elles par rapport à T , on voit

142) *Th. Reye, J. reine angew. Math.* 72 (1870). p. 296.

que la première polaire du plan de l'infini pour la $m^{\text{ième}}$ surface de moments est la $(m - 1)^{\text{ième}}$ surface nulle du système.

Ces diverses surfaces nulles peuvent recevoir un poids égal à la masse totale du système; pourvue de ce poids, la $m^{\text{ième}}$ surface-nulle détermine le système au point de vue des moments jusqu'au $m^{\text{ième}}$ ordre inclusivement.

Pour les moments statiques, la surface nulle se réduit à un point qui est le centre de gravité et ce point muni de la masse totale remplace en effet le système pour les moments statiques. Pour les moments quadratiques, la surface nulle est la surface directrice du système antipolaire et la surface conjuguée¹⁴³⁾ est la surface centrale de Culmann, etc.

De cette façon la surface de $m^{\text{ième}}$ classe munie d'un certain poids apparaît comme une simple généralisation du point masse. Nous pouvons l'appeler une *surface masse*. Une surface masse de $m^{\text{ième}}$ classe est alors l'équivalent complet d'une forme algébrique quaternaire du $m^{\text{ième}}$ degré. C'est ainsi qu'on peut rattacher toute la théorie des formes quaternaires algébriques à la géométrie des masses, comme l'a fait en particulier *Th. Reye*¹⁴³⁾.

27. Équivalence de degré supérieur. Indifférence de degré supérieur. Deux systèmes de masses sont dits *équivalents au $m^{\text{ième}}$ degré*¹⁴⁴⁾ si pour tout plan de l'espace leurs moments sont égaux jusqu'au $m^{\text{ième}}$ inclusivement. Dès lors les deux systèmes ont des moments égaux par rapport à toute surface de degré m au plus et en particulier pour tout système de plans en nombre au plus égal à m .

De tels systèmes ont les mêmes surfaces nulles jusqu'au $m^{\text{ième}}$ degré et les plans de moment constant ont la même enveloppe jusqu'au $m^{\text{ième}}$ moment.

Réciproquement, si deux systèmes ont la même $m^{\text{ième}}$ surface nulle et la même masse totale, ils sont équivalents au $m^{\text{ième}}$ degré.

Un système de masses est appelé *indifférent au $m^{\text{ième}}$ degré* si pour tout plan de l'espace ses moments s'annulent jusqu'au $m^{\text{ième}}$ inclusivement. Alors toutes les surfaces nulles sont indéterminées jusqu'à la $m^{\text{ième}}$ et l'équation (78) est une identité pour $m = 1, 2, \dots, m$. En outre, le moment du système est nul par rapport à toute surface

143) J. reine angew. Math. 72 (1870), p. 313, 319, 321; 78 (1874), p. 99/100, 114/22, 123/9.

144) *Th. Reye*, J. reine angew. Math. 72 (1870), p. 293; 78 (1874), p. 97. Quelques cas particuliers furent traités par *E. J. Routh*, Quart. J. pure appl. math. 21 (1886), p. 281/7. *S. Kantor* [Sitzgsb. Akad. München 26 (1896), p. 531] a étendu la théorie à l'hypermpace.

d'ordre au plus égal à m ou à tout groupe de plans en nombre au plus égal à m .

Si deux systèmes sont équivalents au $m^{\text{ième}}$ degré, l'un d'eux s'obtient en ajoutant à l'autre un système indifférent de $m^{\text{ième}}$ degré et l'on peut regarder un tel système indifférent comme la *différence* entre deux systèmes équivalents au $m^{\text{ième}}$ degré.

Soit un système de masses indifférent au $(m - 1)^{\text{ième}}$ degré et l'équation de la surface nulle correspondante de $m^{\text{ième}}$ degré

$$\Phi^m = 0,$$

développons cette équation suivant les puissances de T , tous les termes s'annulent sauf le terme indépendant de T . La $m^{\text{ième}}$ surface nulle se réduit donc à une courbe rejetée à l'infini et les moments du $m^{\text{ième}}$ degré du système sont égaux pour deux plans parallèles quelconques.

Deux systèmes de masses qui pour tout plan d'une même *gerbe* ont les mêmes moments de degré m et de degré inférieur sont équivalents au degré m pourvu qu'ils aient aussi même masse totale. Car dans le développement de l'équation $\Phi^m = 0$ pour les deux systèmes d'après les puissances de T , tous les termes coïncident et les deux systèmes ont par suite même surface nulle de $m^{\text{ième}}$ degré.

Soit

$$\mathfrak{M} = \sum_{(i)} \alpha_i p_i^m$$

l'expression du moment de degré m d'un système relativement au plan π ; pour un plan π' situé à la distance a de π , le moment sera

$$(79) \quad \mathfrak{M}' = \sum_{(i)} \alpha_i (p_i - a)^m.$$

Les racines de l'équation du $m^{\text{ième}}$ degré

$$(80) \quad \sum_{(i)} \alpha_i (p_i - a)^m = 0$$

sont les distances $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ du plan π aux plans parallèles tangents à la $m^{\text{ième}}$ surface nulle Φ_m^{145} . Le coefficient de a^{m-k} dans cette équation est le $k^{\text{ième}}$ moment du système pour le plan π . Le coefficient de a^m est la masse totale

$$\mu = \sum_{(i)} \alpha_i.$$

Les moments jusqu'au $m^{\text{ième}}$ degré inclusivement sont donc déterminés comme fonctions de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ par les relations entre les coefficients

145) *Th. Reye, J. reine angew. Math.* 72 (1870), p. 303.

et les racines d'une équation de $m^{\text{ième}}$ degré. Par exemple, pour trouver le $m^{\text{ième}}$ moment du système par rapport à un plan quelconque, il suffit de multiplier la masse totale par les distances du plan aux m plans parallèles tangents à la $m^{\text{ième}}$ surface nulle¹⁴⁶) etc.

Soit, dans un faisceau de plans quelconque, η un plan variable et π un plan fixe qui ne touche pas la $m^{\text{ième}}$ surface nulle; soient $\theta, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ les angles formés par π avec η et avec les m plans du faisceau, qui sont tangents à la $m^{\text{ième}}$ surface nulle. Soient enfin \mathfrak{M}_η et \mathfrak{M}_π les $m^{\text{ièmes}}$ moments du système pour η et π , on a¹⁴⁷)

$$(81) \quad \mathfrak{M}_\eta = \frac{\sin(\theta_1 - \theta) \sin(\theta_2 - \theta) \dots \sin(\theta_m - \theta)}{\sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_m} \cdot \mathfrak{M}_\pi.$$

Cette formule permet de calculer le moment pour tout plan η du faisceau quand on connaît \mathfrak{M}_π et les m plans tangents à la $m^{\text{ième}}$ surface nulle. Si la surface nulle est entièrement connue, on peut trouver le moment pour tout plan de l'espace en déplaçant l'axe du faisceau dans le plan fixe π .

28. Polarité et apolarité. Nous avons exposé plus haut une méthode qui permet de transformer un système de masses donné en un nouveau système à l'aide d'un plan quelconque π . On multiplie par exemple chaque masse α_i par une fonction linéaire ($\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i - p$) représentant la distance du point considéré au plan π [n° 11].

D'une façon analogue et plus générale on peut d'un système donné en déduire un autre (le *système transformé*) en remplaçant la masse α_i par la masse $\alpha_i F_k(x_i, y_i, z_i)$, où F_k est une fonction déterminée de degré k par rapport aux coordonnées x, y, z . La $s^{\text{ième}}$ surface nulle du nouveau système est représentée par l'équation

$$(82) \quad \sum_{(i)} \alpha_i F_k(x_i, y_i, z_i) (Ux_i + Yy_i + Wz_i - T)^s = 0.$$

Si l'on développe cette équation, le coefficient de $U^\lambda V^\mu W^\nu T^e$ est

$$\sum_{(i)} \alpha_i F_k(x_i, y_i, z_i) x_i^\lambda y_i^\mu z_i^\nu$$

et ce coefficient se compose linéairement de termes de la forme

$$\sum_{(i)} \alpha_i x_i^{\lambda+\mu+\nu} y_i^{m+\mu} z_i^{n+\nu}, \quad (l + m + n = k, \quad \lambda + \mu + \nu < s).$$

146) Si l'on a $\sum_{(i)} \alpha_i = 0$, l'une des racines α_i est infinie; Φ^m est tangente au plan de l'infini, et l'équation (80) se réduit à une équation du $(m - 1)^{\text{ième}}$ degré. Ce cas comporte donc une modification très évidente au théorème énoncé.

147) Th. Reye, J. reine angew. Math. 72 (1870), p. 304.

Ces expressions sont elles-mêmes coefficients dans l'équation de la $(k + s)^{\text{ième}}$ surface nulle du système donné, et elles apparaissent ici multipliées par les coefficients de l'équation

$$F_k(x, y, z) = 0.$$

La $s^{\text{ième}}$ surface nulle du nouveau système est donc déterminée sans ambiguïté par l'équation $F_k = 0$ et la $(k + s)^{\text{ième}}$ surface nulle du système primitif. *Th. Reye* l'appelle la $s^{\text{ième}}$ polaire de la surface du $k^{\text{ième}}$ ordre F_k^{148} relativement à la surface nulle de $(k + s)^{\text{ième}}$ classe. C'est elle-même une surface de $s^{\text{ième}}$ classe.

Pour $s = 1$, elle se réduit à un point dont les coordonnées sont données par les relations

$$(83) \quad \begin{cases} Mx_k = \sum_{(i)} \alpha_i x_i F_k(x_i, y_i, z_i), \\ My_k = \sum_{(i)} \alpha_i y_i F_k(x_i, y_i, z_i), \\ Mz_k = \sum_{(i)} \alpha_i z_i F_k(x_i, y_i, z_i), \\ M = \sum_{(i)} \alpha_i F_k(x_i, y_i, z_i). \end{cases}$$

On peut appeler ce point le *pôle* de la surface $F_k = 0$ pour le système donné.

Il peut maintenant arriver que l'équation (82) soit identiquement satisfaite, quand le système transformé est indifférent du $s^{\text{ième}}$ degré¹⁴⁹). Alors *Th. Reye* donne à la surface du $k^{\text{ième}}$ ordre

$$F_k = 0$$

le nom d'*apolaire* de la surface de $(k + s)^{\text{ième}}$ classe¹⁵⁰)

$$\Phi_{k+s} = 0.$$

29. Remplacement d'un système de masses par des points isolés au point de vue des moments du $m^{\text{ième}}$ degré. Tout système

148) La surface F_k peut d'ailleurs se décomposer en un groupe de k plans qui à leur tour peuvent être distincts ou confondus.

149) Pour que le système transformé ne soit pas indifférent au degré s , il suffit que le moment du système donné ne s'annule pas pour la surface F_k . Mais inversement l'hypothèse contraire ne suffit pas pour établir l'indifférence du système transformé. Mais celui-ci est à coup sûr indifférent au degré s si F_k passe par tous les points du système primitif ou par tous ceux d'un système qui lui est équivalent au degré $k + s$.

150) Sur les surfaces apolaires, voir *Th. Reye*, J. reine angew. Math. 78 (1874), p. 104/8; 79 (1875), p. 159/75.

de masses peut, au point de vue de ses moments du $m^{\text{ième}}$ degré, être remplacé par un groupe de points masses a_j en nombre

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = N(m) + 1.$$

Ces points d'ailleurs arbitraires doivent seulement ne pas se trouver sur une même surface du $m^{\text{ième}}$ ordre.

Le point a_j doit être affecté d'une masse μ_j telle que son moment par rapport à la surface de $m^{\text{ième}}$ ordre $F_m^{(j)}$, qui passe par les autres points en nombre $N(m)$, soit égal au moment du système donné pour la même surface. Cette masse μ_j est déterminée par l'équation¹⁵¹⁾

$$(84) \quad \mu_j F_m^{(j)}(x_j, y_j, z_j) = \sum_{(i)} \alpha_i F_m^{(i)}(x_i, y_i, z_i).$$

Un système de masses peut aussi être remplacé par des points en nombre inférieur à $N(m) + 1$ pourvu que la position de ces points soit convenablement choisie¹⁵²⁾. Le nombre minimé de points n'a pas encore été découvert pour m quelconque.

Pour $m = 1$, c'est-à-dire au point de vue des moments statiques, le système est équivalent en général à un point unique et déterminé; pour $m = 2$ on peut prendre en général, comme nous l'avons vu, un nombre minimé de quatre points¹⁵³⁾.

Au point de vue des moments du *troisième* degré¹⁵³⁾, le système peut généralement être remplacé par six masses avec quatre paramètres arbitraires, la droite de jonction de deux de ces points pouvant être choisie arbitrairement; *mais il y a une seule manière de remplacer le système par cinq points masses*¹⁵⁴⁾.

Au point de vue des moments du *quatrième* degré¹⁵⁵⁾ un système général peut être remplacé par *dix points* comportant cinq paramètres

151) *Th. Reye*, J. reine angew. Math. 78 (1874), p. 110. On voit manifestement de quelle façon on peut utiliser une pareille réduction pour le calcul des intégrales $\int z^n dS$, $\int F_m(x, y, z) dS$, où dS est l'élément d'un domaine donné. *E. J. Routh* [Quart. J. pure appl. math. 21 (1886), p. 281/7] applique ce procédé d'intégration à quelques cas particuliers qui se rapportent au centre de pression d'une surface plane et au centre de gravité d'un tétraèdre, quand la pression ou la densité de l'élément dS est représentée par la fonction entière F_m de la position du point [voir aussi *E. J. Routh*, Dynamics^{2e}]; Dynamik 1, p. 32/3].

152) *Th. Reye*, J. reine angew. Math. 72 (1870), p. 321/6.

153) *Th. Reye*, J. reine angew. Math. 72 (1870), p. 316/20; 78 (1874), p. 114/22.

154) Dans tous ces cas, en même temps que les points, les masses sont aussi déterminées.

155) *Th. Reye*, J. reine angew. Math. 78 (1874), p. 123/9.

qui demeurent arbitraires; l'un des points est complètement arbitraire; un autre point peut être pris arbitrairement sur une quadrique déterminée qui dépend du premier point; enfin les huit points restants occupent sur cette surface des positions déterminées.

Dans un cas particulier seulement, le système de masses peut, au point de vue des moments du quatrième ordre, être remplacé par un nombre de points inférieur à dix, savoir par neuf points dont l'un détermine les autres. Cela arrive quand la quatrième surface nulle du système forme une surface apolaire du deuxième degré.

Pour parler le langage algébrique, ces théorèmes ont pour objet de représenter une forme quaternaire par une somme de puissances de formes linéaires. A ce point de vue, se reporter à l'article I 11.

30. Le problème des valeurs limites de Čebyšëv¹⁵⁶). *P. L. Čebyšëv*¹⁵⁷) a donné pour la première fois une application des moments supérieurs au cas particulier d'une seule variable.

Pour une densité inconnue $f(x)$, on se donne les intégrales

$$\int_A^B f(x) dx, \int_A^B x f(x) dx, \int_A^B x^2 f(x) dx, \dots, \int_A^B x^m f(x) dx,$$

où l'on a $A < a$, et $B > b$, et l'on demande entre quelles limites on

peut alors prendre $\int_a^b f(x) dx$.

Ces limites sont toujours fournies par des distributions de masses telles que l'axe des x ne contienne seulement que des points isolés affectés de masses.

La première communication de *P. L. Čebyšëv*¹⁵⁸) consiste dans le problème suivant: étant donné la longueur, le poids, le centre de gravité et le moment principal d'inertie central d'une droite matérielle dont la densité est inconnue et peut changer d'un point à un autre, on veut

156) *Les noms russes sont transcrits conformément à la décision prise par la Commission internationale de bibliographie. On écrivait autrefois *Tchebycheff* ou *Tschebycheff* ou encore *Tchebycheff*.*

157) *J. math. pures appl.* (2) 3 (1858), p. 289/323; (2) 12 (1867), p. 177/84; (2) 19 (1874), p. 157/60; Œuvres 1, S^t Pétersbourg 1899, p. 687/94; 2, S^t Pétersbourg 1907, p. 183/5.

Voir aussi *P. L. Čebyšëv* [Mém. Acad. Pétersb. (7) 1 (1859), mém. n° 5, p. 1/81; *Acta math.* 9 (1886/7), p. 35/56; Œuvres 1, p. 387/469; 2, p. 421/40], comme aussi les travaux de ses élèves *G. Zolotarev* [*J. math. pures appl.* (2) 19 (1874), p. 161/88] et *A. A. Markov* [*Math. Ann.* 24 (1884), p. 172/80; *Acta math.* 9 (1886/7), p. 57/70].

158) *J. math. pures appl.* (2) 19 (1874), p. 159.

trouver les limites entre lesquelles peut se trouver le poids d'une partie de cette droite.

La solution de ce problème a été donnée par *P. L. Čebyšëv* sans démonstration; la démonstration a été fournie ensuite par *A. A. Markov*¹⁵⁹). Un exposé détaillé de ce sujet a été donné par *C. A. Possé*¹⁶⁰).

P. L. Čebyšëv a donné une généralisation analytique de la question; à la place des puissances de x , il introduit des fonctions

$$\Omega(x), \Omega_1(x), \dots, \Omega_m(x)$$

soumises à des restrictions particulières¹⁶¹).

159) Math. Ann. 24 (1884), p. 179.

160) Math. Ann. 26 (1886), p. 593/6; Sur quelques applications des fractions continues algébriques, S^t Pétersbourg 1886, préface p. IV à VI et p. 90/175 (chap. 5).

161) Ces questions posées et en partie résolues par *P. L. Čebyšëv* trouvent leur application particulière dans les recherches sur la distribution des masses dans l'intérieur de la terre. Pour plus de détails voir à ce sujet l'article du tome VI (géophysique) qui lui est consacré.

IV 6. CINÉMATIQUE.

EXPOSÉ, D'APRÈS L'ARTICLE ALLEMAND DE A. SCHOENFLIES (FRANCFORT S/M),
PAR G. KOENIGS (PARIS).

A. Mouvements finis.

1. Les types les plus simples de mouvements; les déplacements et les antidéplacements. La cinématique considère les lois du mouvement, indépendamment de la notion de forces et de toute conception dynamique. La séparation méthodique d'avec le reste de la mécanique remonte à A. M. Ampère¹⁾ 2).

Les mouvements continus les plus simples d'un corps sont la translation, la rotation et la torsion³⁾, c'est-à-dire le mouvement dans lequel un corps tourne autour d'un axe en glissant le long de cet axe simultanément et proportionnellement à la rotation⁴⁾.

1) Essai sur la philosophie des sciences, Paris 1814, p. 48. Voir aussi A. Transon, L'Institut (1) 38 (1870), p. 117. A. M. Ampère désirait que l'étude des mouvements et des vitesses précédât la théorie des machines. J. V. Poncelet dans un cours professé à la faculté des sciences de Paris en 1838 a commencé à exposer dans ce sens la théorie des machines.

2) La partie de la mécanique qui fait abstraction du cours du mouvement dans le temps et n'a égard qu'à la position occupée sous les yeux, en considérant ensuite la succession des figures mobiles, a reçu le nom de *géométrie du mouvement*. Elle a été créée par M. Chasles, et sa constitution ultérieure est principalement attachée au nom de A. Mannheim. Pour A. Mannheim du reste, le but principal des propositions et des résultats réside dans la théorie des courbes et des surfaces. G. Darboux [Leçons sur la théorie des surfaces 1, Paris 1887; 2, Paris 1889; 3, Paris 1894; 4, Paris 1896] et ses élèves ont aussi utilisé avec beaucoup de succès la cinématique dans cette partie de la géométrie. C'est dans le même sens que procède E. Cesàro [Lezioni di geometria intrinseca, Naples 1896; trad. par G. Kowalewski, Vorlesungen über natürliche Geometrie, Leipzig 1901].

3) Une rotation de l'angle α autour de l'axe a sera désignée par $\mathcal{C}(\alpha)$; une torsion d'angle α et de glissement τ selon l'axe a sera représentée par $\mathcal{C}(\alpha, \tau)$.

4) Ce sont en même temps les mouvements dont les trajectoires glissent sur elles-mêmes.

*Il est nécessaire d'établir ici une distinction qui fera mieux comprendre certains travaux modernes. La coexistence dans l'espace de deux positions d'un même corps constitue ce que l'on appelle un *déplacement*.*

C'est un fait très remarquable que la réalisation de tout déplacement, c'est-à-dire tout passage d'un corps d'une position à une autre, puisse être obtenue par le moyen de l'un des trois mouvements continus simples signalés plus haut.

Que tout déplacement d'un corps dont un point O est fixe puisse être réalisé par une rotation autour d'un axe a passant par O , fut une découverte de *L. Euler*⁵⁾.

Un plan τ se meut-il sur lui-même, chaque déplacement peut être obtenu par une rotation autour d'un point (centre de rotation O). La rotation devient une translation du moment où le point O se trouve rejeté à l'infini. Ce théorème fut donné pour la première fois par *M. Chasles*⁶⁾, auquel on doit aussi le théorème plus général d'après lequel le changement de position le plus général d'un corps peut être toujours réalisé par le moyen d'une certaine torsion $\mathcal{C}(\alpha, \tau)$ autour d'un axe déterminé. La torsion devient une rotation ou bien une translation chaque fois que la composante τ de la translation ou bien l'angle α de la rotation sont nuls. Le cas de $\alpha = 180^\circ$ a, par suite des recherches de *H. Wiener* [n° 2], atteint une importance théorique; il lui correspond un *renversement* si $\tau = 0$, et un *renversement-torsion* si τ n'est pas nul.

Il est convenable de lier la théorie des déplacements à la théorie de ces transformations de l'espace qui transforment des figures Σ en d'autres Σ' qui leur sont égales par réflexion et que nous désignerons sous le nom de *antidéplacements*⁷⁾.

On peut ajouter que ces mouvements sont aussi les seuls au cours desquels il existe des surfaces (surfaces prismatiques, surfaces rotoïdes ou de révolution, surfaces hélicoïdes selon les cas) qui glissent sur elles-mêmes. Cette remarque a une haute importance au point de vue de la réalisation pratique de ces mouvements, car elle permet d'en pratiquer le guidage dans des conditions spéciales de précision et de stabilité.

5) *Novi Comm. Acad. Petrop.* 20 (1775), éd. 1776, p. 202. Au lieu du mouvement autour d'un point O on peut aussi considérer le mouvement d'une sphère sur elle-même; pour celle-ci, la trace de l'axe a sur elle est le centre correspondant de rotation.

6) *Bull. sc. math. astr. phys. chim.* 14 (1830), p. 321, 324.

7) Voir *E. Study*, *Math. Ann.* 39 (1891), p. 441.

*Ce n'est pas sans quelques hésitations que nous introduisons ici ce néologisme de *antidéplacement* pour traduire le mot *Umliegung* du texte allemand. Il correspond bien à l'usage de la préfixe *anti* introduite dans des circonstances

*M. Chasles*⁸⁾ s'était déjà occupé d'elles. A la rigueur, il n'y a lieu de considérer les antidéplacements que dans le cas de figures à trois dimensions; on peut toutefois les considérer aussi dans un plan τ , si l'on s'impose que le plan ne sorte pas de lui-même.

Pour le passage correspondant de σ à $\bar{\sigma}$, dans le plan, il existe deux types simples d'antidéplacements. On peut transformer σ en $\bar{\sigma}$ par une réflexion sur une droite g ou bien par une réflexion sur la droite g , accompagnée d'une translation rectiligne suivant la droite g .

Pour le passage de Σ à $\bar{\Sigma}$, dans l'espace, il existe quatre types simples distincts. En premier lieu, la symétrie par rapport à un point O (inversion); la symétrie par réflexion sur un plan ε ; la réflexion sur un plan ε accompagnée d'une rotation autour d'un axe normal⁹⁾ (rotation réflexion); enfin une réflexion sur un plan, accompagnée d'une translation rectiligne suivant ce plan. Les trois premiers types sont précisément ceux qui interviennent lorsqu'un point de Σ reste fixe ainsi que *E. Hessel*¹⁰⁾ l'a remarqué.

Les propositions élémentaires qui précèdent ont une source plus profonde dans la théorie générale des plans ou des espaces projectifs [III 8]. Sur les trois points doubles des plans collinéaires, dans le cas particulier d'un déplacement d'un plan sur lui-même il y en a deux qui sont les points circulaires à l'infini et le troisième est le centre de rotation. Dans tous les déplacements d'un plan σ sur lui-même les points circulaires demeurent donc *fixes*.

De même deux espaces congruents ont en commun le cercle de l'infini et sur celui-ci deux points communs. Les plans passant par l'un ou l'autre de ces points et par l'axe du mouvement hélicoïdal constituent deux faces du tétraèdre commun, tandis que les deux autres faces coïncident avec le plan de l'infini compté deux fois.

Ces faits montrent immédiatement l'importance que présentent les points circulaires imaginaires et le cercle imaginaire à l'infini pour les courbes et les surfaces qui interviennent dans la cinématique, et qui reçoivent de ce fait un caractère particulier¹¹⁾.

analogues: antiparallèle, antihomologue. Le simple mot de *symétrie* ne suffirait pas puisque, dans le cas actuel, la symétrie se trouve compliquée d'un déplacement.*

8) C. R. Acad. sc. Paris 51 (1860), p. 905.

9) Lorsque l'angle de rotation est de 180° , on obtient une inversion. Tout axe issu de O peut alors être pris comme axe de rotation.

10) Voir *J. S. T. Gehler*, Physikal. Wörterbuch (nouv. éd.) 5², Leipzig 1830 (article „Krystallographie“); cf. V 9.

11) *A. Mannheim* [J. math. pures appl. (3) 1 (1875), p. 59] a découvert le premier ces caractères spéciaux aux *surfaces trajectoires*.

2. Composition des déplacements et des antidéplacements.

Quand une figure de l'espace subit un déplacement ou un antidéplacement \mathcal{A} et ensuite un second \mathcal{B} , on peut toujours effectuer le passage de la position initiale à la position finale par le moyen de l'une des opérations simples définies au n° 1. Cette opération *résultante* \mathcal{C} est toujours un déplacement et seulement alors, si \mathcal{A} aussi bien que \mathcal{B} sont tous deux des déplacements ou bien tous deux des antidéplacements. Si l'on effectue d'abord \mathcal{B} , puis \mathcal{A} , l'opération résultante \mathcal{C}_1 est en général différente de \mathcal{C} . Si $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1$, \mathcal{A} et \mathcal{B} sont *échangeables*¹²⁾. Cette désignation est liée à ce fait que l'on peut appliquer aux déplacements et aux antidéplacements les notations formelles de la multiplication. On écrit $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{C}$ et l'on appelle \mathcal{C} le produit de \mathcal{A} et de \mathcal{B} ; pour cette notion de produit *l'associativité* existe, mais non, en général *la commutativité*¹³⁾.

Les translations sont des vecteurs; leur composition s'effectue par l'addition géométrique de ces derniers [IV 4, 6].

Pour deux rotations $\mathcal{A}(\alpha)$ et $\mathcal{B}(\beta)$, dont les axes a et b se coupent en O , la rotation résultante $\mathcal{C}(\gamma)$ se détermine ainsi: construire l'axe c passant par O de façon que $\sphericalangle cab = \frac{1}{2}\alpha$ et $\sphericalangle cba = \frac{1}{2}\beta$, en ce cas $\sphericalangle acb = \frac{1}{2}(180^\circ - \gamma)$. Ce fait a trouvé son expression la plus simple dans cet énoncé de *W. R. Hamilton*¹⁴⁾: les rotations autour des axes a, b, c égales respectivement aux doubles des angles compris entre les plans du trièdre qu' ils forment ramènent l'espace à sa position primitive.

Les axes a, b sont-ils parallèles, alors c est aussi parallèle à a et à b et l'on a $\gamma = \alpha + \beta$; les positions relatives de a, b, c sont données par la règle d'Hamilton.

Si l'on a en outre $\alpha + \beta = 0$, \mathcal{A} et \mathcal{B} forment un *couple de rotations*. Le mouvement résultant est une translation \mathcal{C} dont la direction est rectangulaire avec a et b ¹⁵⁾. On peut donc remplacer toute rotation par une rotation d'égale amplitude angulaire autour d'un axe parallèle et par une translation rectiligne perpendiculaire à cet axe. De là résulte encore que tout déplacement hélicoïdal peut être remplacé

12) Dans les cas des opérations simples du n° 1, les composantes sont toujours échangeables.

13) Pour une exposition plus complète voir *H. Wiener*, Ber. Ges. Lpz. 42 (1890), math. p. 13/23, 71/87; voir aussi *A. Schoenflies*, Krystallsysteme und Krystallstruktur, Leipzig 1891, p. 31 et suiv.

14) Lectures on quaternions, Dublin 1853, §§ 217 et 344; voir aussi *A. F. Möbius*, Ber. Ges. Lpz. 11 (1859), math. p. 138.

15) Si AB est la distance de a et de b on a $\tau = 2AB \sin \frac{\alpha}{2}$.

par une translation et par une rotation d'angle égal autour d'un axe parallèle à celui du mouvement hélicoïdal, en sorte que se placent ici des propositions et des formules analogues à celles déjà rencontrées à propos des mouvements infiniment petits [IV 4, 49]; seulement ici la succession des mouvements n'est pas en général échangeable¹⁶).

La composition de deux mouvements hélicoïdaux trouve son expression la plus simple dans un théorème analogue à celui d'Hamilton. Soient a, b, c trois droites formant un système gauche, soient u, v, w leurs perpendiculaires communes; u coupe les droites b et c en U_b et U_c etc., on a alors ce résultat: Si autour des droites a, b, c s'effectuent les torsions $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, telles que

$$\alpha = 2(vw), \quad \beta = 2(wu), \quad \gamma = 2(uv)$$

$$\tau_\alpha = 2V_a W_a, \quad \tau_\beta = 2W_b U_b, \quad \tau_\gamma = 2U_c V_c$$

la figure Σ , par ces torsions successives, reprend sa position primitive. Ce théorème, sous cet énoncé, a été établi par *G. H. Halphen*¹⁷). Mais pour remonter à sa source la plus simple, ainsi qu'à celle du théorème d'Hamilton, il est nécessaire de faire mention d'une plus récente direction de recherches, dont l'utilisation méthodique en la présente matière a été inaugurée par *H. Wiener*¹⁸). L'idée première consiste à prendre comme opérations élémentaires les opérations de période 2, c'est-à-dire celles qui, appliquées deux fois de suite, ramènent l'espace à sa position première.

Il n'existe qu'un seul déplacement de cette espèce, à savoir le *renversement*. Parmi les antidéplacements il y en a deux, la réflexion (ou symétrie) relative à un point et celle relative à un plan. Chacune de ces opérations se trouve définie l'une par une droite, une autre par un point, la dernière par un plan¹⁹).

16) Ces théorèmes et les formules qui leur sont liées devraient leur origine à *O. Rodrigues* [J. math. pures appl. (1) 5 (1840), p. 392 et suiv.].

17) *Nouv. Ann. math.* (3) 1 (1882), p. 296. Voir aussi *W. Burnside* [Messenger of math. (2) 19 (1889/90), p. 104] qui a donné une démonstration susceptible de s'étendre aux mouvements non-euclidiens, et qui en a déduit la construction de la torsion résultante. Voir aussi pour cette construction *H. Wiener* [Ber. Ges. Lpz. 42 (1890), math. p. 76].

18) *Ber. Ges. Lpz.* 42 (1890), math. p. 245; 43 (1891), math. p. 424, 644.

*De son côté, *G. Darboux* avait utilisé les renversements dans son enseignement à la Faculté des sciences de Paris [cf. *Théorie des surfaces* *) 4, p. 433/41 (note V) et *G. Darboux*, dans *G. Koenigs*, *Leçons de cinématique*, Paris 1897, p. 346/51 (note II)].*

19) *H. Wiener* signale aussi le renversement comme étant une réflexion (symétrie) par rapport à une droite.

Un déplacement arbitraire ou un antidéplacement, peut être représenté par le produit de deux de ces opérations; en particulier, une torsion peut être regardée comme le produit de deux renversements [n° 5]. Sur cette circonstance repose l'ingénieuse méthode de *H. Wiener*. Les déplacements et les antidéplacements se rattachent donc à la classe de ces transformations qui peuvent être définies comme le produit de deux transformations involutives et donnent ainsi lieu à une interprétation des notions et des propositions qui se rapportent à ces transformations²⁰).

La composition des réflexions et des renversements donne lieu aux théorèmes suivants: Si J, J_1 sont des réflexions sur les points M et M_1 , l'opération JJ_1 est une translation τ et l'on a $\tau = 2MM_1$.

Si \mathcal{O} et \mathcal{O}_1 sont des réflexions sur les plans ε et ε_1 , l'opération $\mathcal{O}\mathcal{O}_1$ est une rotation $\mathcal{C}(\alpha)$ autour de la droite $a = (\varepsilon\varepsilon_1)$ et $\alpha = 2(\varepsilon\varepsilon_1)$;

Si \mathcal{U} et \mathcal{V} sont des renversements autour des droites u, v , l'opération $\mathcal{U}\mathcal{V}$ est une torsion $\mathcal{C}(a, \tau)$ autour de la perpendiculaire commune à u et à v et l'on a $\alpha = 2(uv)$, $\tau = 2UV$, où U, V sont les pieds de la perpendiculaire commune. De là résulte aussitôt le théorème de *G. H. Halphen*, par l'identité évidente

$$\mathcal{V}\mathcal{V} \cdot \mathcal{U}\mathcal{U} \cdot \mathcal{U}\mathcal{V} = 1$$

de même que le théorème d'*Hamilton* résulte de la formule

$$\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2 \cdot \mathcal{O}_2\mathcal{O}_3 \cdot \mathcal{O}_3\mathcal{O}_1 = 1.$$

où $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3$ sont des réflexions sur les plans du trièdre dont a, b, c sont les arêtes²¹).

On peut se demander de combien de manières un déplacement ou un antidéplacement peut être représenté par d'autres opérations et en particulier par des opérations involutives. Dans un cas particulier, *C. Moshhammer* et *H. Wiener* ont d'abord posé et résolu cette question²²). *E. Study*²³) a ensuite traité le problème d'une façon

20) Voir *H. Wiener*, Ber. Ges. Lpz. 43 (1891), math. p. 658.

21) Si l'on applique cette formule à des axes parallèles on est conduit au théorème de *C. Stephanos*, que trois positions quelconques données $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sur un plan σ peuvent être obtenues par réflexion sur trois droites g, g', g'' [Bull. Soc. philom. Paris (7) 6 (1881/2), p. 13]. Ce théorème fut le point de départ des recherches de *G. H. Halphen*; son propre théorème est l'extension de celui-ci au cas de l'espace.

22) Sitzgsb. Akad. Wien 73 II (1876), p. 143; Ber. Ges. Lpz. 42 (1890), math. p. 85. Le cas particulier concerne le passage d'une droite g à la position g_1 . Il y a ∞^2 vissages qui la permettent; leurs axes forment une congruence linéaire rectangulaire avec une droite u' . Un point P se trouve-t-il astreint à prendre une position P_1 , il y a ∞^1 vissages appropriés, dont les axes forment un cylindroïde etc. Voir IV 4, 60.

plus générale. Par exemple, un antidéplacement peut être représenté d'une ∞^3 de façons par trois réflexions, un mouvement en général d'une ∞^2 de façons par deux renversements et d'une ∞^4 de façons par deux rotations, d'une ∞^6 de façons par quatre réflexions sur des plans, etc. etc.

Les théorèmes concernant la composition des antidéplacements se déduisent de ce qui précède par la réduction des antidéplacements à leurs éléments²⁴).

3. Le Dualisme dans le Mouvement. Le caractère de relativité de la notion de mouvement fait que l'on peut tout aussi bien considérer le mouvement de Σ par rapport à Σ' ou le mouvement de Σ' par rapport à Σ ; cela dépend uniquement de la pensée que l'on a de se placer soi-même au cours du mouvement soit dans le système Σ soit dans le système Σ' . L'un des mouvements est dit inverse de l'autre.

C'est *M. Chasles*²⁵) qui, le premier, remarqua que si un point A de la figure plane σ décrit dans σ' une courbe a' , par contre, dans le mouvement inverse, la courbe a' passe constamment par le point A . *M. Chasles* lui-même a tiré un certain parti de ce dualisme et a fait ressortir sa signification technique. Le côté théorique a été développé particulièrement par *S. H. Aronhold*²⁶) et plus tard par *A. Schoenflies*²⁶).

En vertu de ce même principe, si un point A de σ tombe n fois sur une courbe c' , dans le mouvement inverse, c' passe n fois par A . De là résulte que: 1°) Si les trajectoires d'un mouvement plan sont de l'ordre n , les enveloppes des droites de l'autre mouvement sont de la $n^{\text{ème}}$ classe; 2°) Si dans l'un des mouvements la trajectoire de A possède un point d'inflexion, dans le mouvement inverse A est un point de rebroussement de l'enveloppe de la tangente inflexionnelle.

Des relations analogues existent pour le mouvement dans l'espace. Si A tombe n fois dans le plan α' , dans le mouvement inverse, le plan α' passe n fois par le point A ; de là résulte que: 1°) Si les figures engendrées par les points, droites ou plans dans le premier mouvement sont algébriques, il en est de même pour le mouvement inverse; 2°) Le degré des surfaces engendrées par les droites est le même dans les

23) *Math. Ann.* 39 (1891), p. 487 et suiv. Pour des mouvements particuliers, les théorèmes précédents subissent quelques modifications.

24) *E. Study*, *Math. Ann.* 39 (1891), p. 487; *H. Wiener*, *Ber. Ges. Lpz.* 43 (1891), math. p. 434; *A. Schoenflies*, *Krystallsysteme*¹³) p. 49, 341.

25) *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, (2^e éd.) Paris 1875, p. 408.

26) *S. H. Aronhold*, *Grundzüge der kinematischen Geometrie* [Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbflusses 51 (1872), p. 134]; *A. Schoenflies*, *C. R. Acad. sc. Paris* 101 (1885), p. 150/3.

deux mouvements; 3°) Le degré des trajectoires de l'un des mouvements est égal à la classe des surfaces développables engendrées par les plans dans l'autre. Si les trajectoires sont planes, les développables deviennent des cônes²⁷⁾.

Les courbes trajectoires et les développables trajectoires dans les deux mouvements sont généralement de nature différente²⁸⁾. Cependant pour tout mouvement d'un plan σ sur un autre σ' le théorème suivant est valable, à savoir que si un point A de σ décrit un cercle dans σ' de centre A' , A' de son côté décrit dans σ un cercle de centre A . De même, si un point A d'un corps Σ demeure sur une sphère solidaire d'un corps Σ' , le centre A' de cette sphère est sur une sphère de Σ de centre A . Cette réciprocité subsiste, si A dans n positions vient sur un cercle ou une sphère de centre A' , car alors A' vient aussi en n positions sur un cercle ou une sphère de centre A . Ce fait a une importance essentielle²⁹⁾ [n^{os} 4 et 5].

4. Plusieurs positions données du même plan ou du même faisceau. Deux positions d'une même figure plane dans son propre plan σ_1 et σ_2 entraînent l'existence d'un centre de rotation O [n^o 1]; de plus, à tout couple de points A_1, A_2 il correspond leur corde A_1A_2 , leur milieu A_m , et la perpendiculaire a^v en ce milieu; à deux positions d'une droite g_1, g_2 appartiennent les deux bissectrices g_h et g_l de leur angle. Les points A_m forment en général un système σ_m semblable au système σ ; les perpendiculaires a^v passent toutes par le point O et des droites g_h et g_l , les unes passent toutes par le point O , tandis que les autres forment un système semblable à σ ³⁰⁾. L'ensemble

27) *G. Darboux*, C. R. Acad. sc. Paris 92 (1881), p. 119. Voir aussi *G. Darboux* dans *G. Koenigs*, Cinématique¹⁸⁾, p. 352 [note III]. Des théorèmes analogues ont lieu dans le cas d'un degré de liberté égal à 2.

28) Il peut y avoir identité complète; comme pour la translation rectiligne, la rotation, la torsion.

* Cette question des mouvements identiques à leurs inverses a été posée par *G. Koenigs* [Interméd. math. 2 (1895), p. 22 (Question 473)]. La réponse donnée par *R. Bricard* [id. 3 (1896), p. 44] vise un cas particulier. Le problème se trouve traité avec sa généralité dans un mémoire de *G. Koenigs*, ayant pour titre: Les mouvements identiques à leurs inverses, qui paraîtra prochainement dans le Journal de l'École polytechnique.*

29) Si dans le mouvement autour d'un point fixe un point A décrit un grand cercle sur une sphère, alors, dans ce même mouvement, un cercle de la sphère passe par un point fixe.

30) *M. Chasles*, C. R. Acad. sc. Paris 51 (1860), p. 855. Les bissectrices ont été considérées pour la première fois par *E. Study*, Math. Ann. 39 (1891), p. 448. Si $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ sont les similitudes qui transforment respectivement A_1, A_2 en A_m , alors⁸⁾ g_1 et g_2 se transforment respectivement par $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ en g_h, g_l .

des cordes $A_1 A_2$ est à l'égard de σ à l'état de correspondance du second ordre. Si l'on passe de σ_1 à σ_2 par glissement ou par renversement, alors s'introduisent des exceptions³¹⁾. Les correspondances que nous mentionnons ici sont une source abondante de théorèmes particuliers qui le plus souvent ont été formulés par *M. Charles*³²⁾.

Trois positions $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ d'une même figure plane σ dans son plan entraînent 3 centres de rotation O_{12}, O_{13}, O_{23} et en outre, un système σ' formé des points de rencontre A' des perpendiculaires a' et a_1' à $A_1 A_2$ et $A_2 A_3$.

Le système σ' des points A' est à l'état de correspondance quadratique $\mathfrak{V}_i^{(2)}$ avec chaque système σ_i ³³⁾. Les points principaux sont dans σ' les points O_{ih} ; par surcroît, les points circulaires à l'infini, se correspondent à eux mêmes, en sorte que la correspondance $\mathfrak{V}_i^{(2)}$ présente un caractère spécial. Comme A' est le centre du cercle passant par A_1, A_2, A_3 , le point A [n° 3] se trouve être le centre du cercle passant par A_1', A_2', A_3' . Par suite les systèmes σ, σ' liés par la correspondance $\mathfrak{V}_i^{(2)}$ ont des rôles cinématiques interchangeables³⁴⁾. En conséquence, les théorèmes énoncés pour l'un s'appliquent à l'autre.

De la nature même de $\mathfrak{V}^{(2)}$ il résulte qu'à la droite de l'infini g_∞ de σ' il correspond dans σ un cercle w_2 passant par les points principaux; ce cercle passe aussi par le point de concours des hauteurs du triangle principal de σ' ³⁵⁾ et il est en même temps le lieu des points W tels que W_1, W_2, W_3 soient en ligne droite; toutes ces droites $W_1 W_2 W_3$ passant par un même point V' .

Si l'on considère, outre les positions $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, une quatrième σ_4 , on peut rechercher les points K tels que K_1, K_2, K_3, K_4 soient sur un même cercle. Ils forment³⁶⁾ une courbe focale k_3 passant aux points circulaires et par les points principaux. Conformément à la nature de la correspondance $\mathfrak{V}^{(2)}$, il lui correspond dans σ' une courbe k_3' qui a dans σ' la même signification cinématique. Il y a sur k_3 un

31) Voir *E. Study*, Math. Ann. 39 (1891), p. 447.

32) C. R. Acad. sc. Paris 51 (1860) et 52 (1861), notes déjà citées; Bull. Soc. math. France 6 (1877/8), p. 208 [1829]. Voir une rectification concernant l'un deux dans *V. Retali*, Memorie Ist. Bologna (5) 2 (1890/1), p. 585/9.

33) Voir *L. Burmester*, Der Civilingenieur 22 (1876), p. 598.

34) *A. Schoenflies*, Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung, Leipzig 1886, p. 12; trad. par *Ch. Speckel*, Géométrie du mouvement, Paris 1893, p. 13.

35) *L. Geisenheimer*, Z. Math. Phys. 24 (1879), p. 137.

36) *L. Burmester*, Der Civilingenieur 22 (1876), p. 598; 23 (1877), p. 227, 319. Les quatre positions définissent six pôles O_{ik} , dont la configuration a été étudiée par *L. Burmester*, Lehrbuch der Kinematik, Leipzig 1888, p. 616. k_3 est la courbe focale du quadrilatère formé par les O_{ik} .

point U tel que U_1, U_2, U_3, U_4 soient en ligne droite. C'est le point différent des O_{ik} , où se coupent la cubique k_3 et le cercle w_2 . *C. Rodenberg* a généralisé³⁷⁾ ce théorème pour le cas d'un nombre quelconque de positions. Il considère une courbe quelconque c' définie par m points et il détermine un point L de σ qui dans $(m + 1)$ positions ou davantage soit situé sur cette courbe.

Pour deux, trois ou un plus grand nombre de positions d'un faisceau, en entendant par là une figure ayant un point fixe, [n° 2] ou encore une surface sphérique qui se meut sur elle-même, il existe des théorèmes analogues. La nature par elle-même dualistique d'un faisceau, qui résulte de la polarité entre les rayons et les plans perpendiculaires, fait qu'il y a pour deux rayons donnés l_1 et l_2 deux lignes bissectrices et par suite deux plans normaux à celles-ci, ces plans sont liés avec les plans et les rayons, qui appartiennent à deux plans ε_1 et ε_2 du faisceau, par une dualité dépourvue de singularités³⁸⁾. Le cercle w_3 du plan est remplacé cependant dans le faisceau par deux cônes distincts. Il y a un cône K_2 qui correspond au plan normal à a dans la transformation quadrique $\mathfrak{Q}^{(2)}$, transformation qui se présente encore dans le cas du faisceau.

Ce cône n'est plus le lieu des rayons l pour lesquels l_1, l_2, l_3 tombent dans un plan; de tels rayons engendrent en effet un cône K_3 du 3^{ième} degré et par suite les plans π dont les positions π_1, π_2, π_3 passent par une même droite enveloppent un cône de la 3^{ième} classe³⁹⁾.

5. Plusieurs positions d'un même système dans l'espace. Aux propriétés géométriques de deux espaces congruents Σ_1 et Σ_2 , *M. Chasles*⁴⁰⁾ a consacré des recherches pénétrantes et fécondes et obtenu à leur sujet une abondance vraiment étonnante de théorèmes particuliers.

Si A_1 et A_2 sont deux points correspondants de Σ_1 et de Σ_2 , soient encore A_1A_2 leur corde, A_m son milieu, α le plan normal en A_m à A_1A_2 . Dans la position la plus générale de Σ_1 et Σ_2 le système Σ_m est en affinité avec Σ_1 et Σ_2 , tandis que Σ^v leur est réciproque. Le théorème fondamental qui domine la théorie consiste en ce que Σ_n et Σ^v forment un *Nullsystem* dont l'axe principal coïncide avec l'axe

37) Nachr. Ges. Gött. 1888, p. 176.

38) Explicitement par *E. Study*, Math. Ann. 39 (1891), p. 501.

39) *A. Schoenflies*, Geometrie der Bewegung³⁴⁾, p. 47 et suiv.

40) C. R. Acad. sc. Paris 51 (1860), p. 855, 905; 52 (1861), p. 77, 189, 487.

Un développement explicite de ces théorèmes a été donné par *Ch. Brisse*, J. math. pures appl. (2) 19 (1874), p. 221; (3) 1 (1875), p. 141; leur exposition analytique par *G. Battaglini*, Rendic. Accad. Napoli (1) 9 (1870), p. 142. Une exposition par la méthode vectorielle a été donnée par *J. Lüroth*, Z. Math. Phys. 43 (1898), p. 243.

de torsion⁴¹⁾. *E. Study* a considéré encore ici les plans bissecteurs de deux plans ε_1 et ε_2 et montré que l'un deux engendre un système Σ_w réciproque au système $\Sigma^{42)}$.

Les systèmes Σ_1 et Σ_2 conduisent au complexe tétraédral \mathcal{C}_2' formé des lignes de jonction des points correspondants⁴³⁾. Comme deux points doubles de Σ_1 et Σ_2 coïncident avec deux points cycliques, et deux plans doubles avec le plan de l'infini ε_∞ , les coniques du complexe sont des paraboles, le cône du complexe est orthogonal⁴⁴⁾, les courbes d'ordre sont des cercles cubiques; d'une manière analogue se spécialisent les congruences définies par 2 plans ε_1 et ε_2 ainsi que les surfaces développables⁴⁵⁾.

Trois positions $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ entraînent pour chaque point A une droite a' , intersection des plans normaux α^v et α_1^v et par suite un complexe tétraédral \mathcal{C}_3^v dont les points fondamentaux sont en général tous imaginaires. Il faut signaler dans Σ la courbe i_3 , lieu des points J pour lesquels J_1, J_2, J_3 sont en ligne droite.

Enfin quatre positions de Σ entraînent un système Σ' , formé des points de rencontre des plans $\alpha^v, \alpha_1^v, \alpha_2^v$. Entre Σ' et chaque Σ_i existe une correspondance cubique $\mathcal{V}_i^{(3)}$. Comme A' est le centre de la sphère passant par A_1, A_2, A_3, A_4 , le point A est aussi le centre de la sphère correspondante pour le mouvement inverse [n° 3]. En ce qui concerne la correspondance $\mathcal{V}^{(3)}$, il y a dans Σ une courbe remarquable k_6 , la *courbe fondamentale*, dont les points K sont tels que les 4 positions K_1, K_2, K_3, K_4 sont sur un même cercle; il existe aussi une surface F_3 qui correspond au plan de l'infini ε_∞ de Σ' et dont les points dans leurs 4 positions sont dans un même plan.

Enfin il convient de signaler la surface F_4 lieu des points H pour lesquels H_1, H_2, H_3, H_4 et H_5 , dans le cas de cinq positions,

41) Σ_m peut aussi exécuter le mouvement infinitésimal déterminé par le système focal (Nullsystem) [n° 18] de façon que la tangente à la trajectoire en A_m soit la corde $A_1 A_2$.

42) *Math. Ann.* 39 (1891), p. 463. Il introduit encore les transformations $\mathcal{C}, T, \mathcal{W}$, qui changent A en A_m , A en α^v et A_m en α^v et il examine leurs relations avec \mathcal{C} . En outre il traite à fond les cas d'exception. Il est remarquable que dans le cas du renversement et du renversement-torsion il y a toujours exception.

43) Sur le complexe tétraédral, voir *Th. Reye*, *Geometrie der Lage* (4^e éd.) 3, Leipzig 1910, p. 1 (§ 1).

44) Un cône est orthogonal si les sections circulaires sont normales à une génératrice.

45) *A. Schoenflies*, *Geometrie der Bewegung*³⁴⁾, p. 109. Sur la congruence définie par $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, voir *G. H. Halphen*, *Bull. Soc. math. France* 1 (1872/3), p. 114/7.

sont sur une même sphère; les centres des sphères ainsi obtenues forment une surface F'_4 de Σ'^{46} . *C. Rodenberg* a généralisé ces considérations pour le cas d'un nombre quelconque de positions et pour des surfaces quelconques.

En ce qui concerne deux positions Σ_1 et Σ_2 et la torsion correspondante $\mathcal{C}(\alpha, \tau)$ il existe des relations métriques trouvées par *M. Chasles* depuis longtemps. Les plus simples sont les suivantes⁴⁷).

La projection de la corde A_1, A_2 sur a a la valeur constante τ ; de même pour tout point de g_1 , la projection de sa corde sur g_m est constante. La perpendiculaire commune à g_m et à g^v coupe a à angle droit et entre les distances r, r_m, r^v des droites g, g_m, g^v à la droite a existent les relations:

$$r : r_m : r^v = \text{tang}(ga) : \text{tang}(g_m a) : \text{tang}(g^v a).$$

De plus si $\mathcal{B}(\beta), \mathcal{C}(\gamma)$ sont deux rotations telles que $\mathcal{B}\mathcal{C} = \mathcal{C}(\alpha, \tau)$ et si d est la plus courte distance entre b et c on a

$$\frac{\tau}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = d \sin \frac{1}{2} \beta \sin \frac{1}{2} \gamma \sin(bc)$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \sin(bc)^{48}.$$

Si \mathcal{B} et \mathcal{C} sont des renversements on a

$$\frac{\tau}{2} = d, \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \sin(bc)$$

et a coïncide avec d .

Il convient de s'arrêter à la construction de l'axe de torsion quand Σ_1, Σ_2 sont donnés par $A_1 B_1 C_1$ et $A_2 B_2 C_2$. *M. Chasles*⁴⁹) a donné d'abord deux constructions. On mène par O les vecteurs OA', OB', OC' équipollents à $A_1 A_2, B_1 B_2, C_1 C_2$, alors l'axe de torsion t est perpendiculaire au plan $A'B'C'$. On projette sur ce plan $A_1 B_1 C_1$ et $A_2 B_2 C_2$, alors l'axe de torsion t passe par le centre de rotation de ces deux projections. Telle est la première construction de *M. Chasles*. Une seconde

46) Ce théorème et d'autres analogues furent donnés par *A. Schoenflies*, [J. reine angew. Math. 98 (1885), p. 265]; dans ce mémoire il se trouve cependant quelques erreurs qui ont été corrigées un peu plus tard [Geometrie der Bewegung⁴⁴], p. 138 et suiv.; cf. Bull. sc. math. (2) 12 (1888), p. 18].

47) Pour un grand nombre de ces formules voir encore *O. Rodrigues* [J. math. pures appl. (1) 5 (1840), p. 380 (§§ 14 et suiv.)] et *D. Chelini* [Memorie Ist. Bologna (2) 1 (1861/2), p. 361 (§§ 4 et 6)].

48) Cette formule s'applique aussi à des axes qui se coupent [n° 2].

49) C. R. Acad. sc. Paris 52 (1861), p. 487. Une simplification de la seconde partie a été donnée par *G. R. Dahlander*, Öfersigt Vetensk.-Akad. förhandl. (Stockholm) 24 (1867), p. 601/4.

utilise les cotés a, b, c du triangle A, B, C , on construit a_m, b_m, c_m et a'', b'', c'' et leurs perpendiculaires communes respectives u, v, w , l'axe de la torsion est la perpendiculaire commune à u, v, w ⁵⁰). Les constructions se simplifient dans certaines positions particulières ou par un choix particulier de A_1, B_1, C_1 et A_2, B_2, C_2 ⁵¹). Une nouvelle construction digne de mention a été donnée par *R. Mehmke*⁵²); elle s'appuie sur ce que les systèmes Σ et Σ_m sont des systèmes en affinité.

6. Représentation analytique des mouvements finis. La représentation des mouvements finis au moyen de paramètres remonte à *L. Euler*⁵³). Il partit de ce fait que si un corps Σ tourne autour d'un point O , sa position peut être déterminée au moyen des formules ordinaires de la transformation de coordonnées, c'est-à-dire, au moyen des angles $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ qu'un trièdre trirectangle $T(x, y, z)$ fixe dans le corps Σ forme avec un trièdre trirectangle $T'(x', y', z')$ fixe dans l'espace. Mais comme d'autre part ces angles ou plutôt leurs neuf cosinus sont équivalents seulement à trois paramètres indépendants, alors se pose le problème de représenter uniformément les neuf cosinus au moyen de trois paramètres⁵⁴).

Soit $\mathcal{Q}(\omega)$ la rotation qui change T' en T ; *L. Euler* décompose \mathcal{Q} en trois rotations d'angles φ, ψ, ϑ , dont la première s'effectue autour de l'axe des z , la seconde autour de la droite l d'intersection des plans (xy) et $(x'y')$ et la troisième autour de l'axe des z' . La première rotation superpose l'axe x sur l , la deuxième l'axe z sur z' , la troisième l sur x' . Les expressions des neuf cosinus à l'aide de ces trois angles sont assez peu symétriques.

L. Euler obtint des expressions symétriques en introduisant comme paramètres l'angle ω de la rotation et les angles de direction α, β, γ de l'axe α ⁵⁵). On simplifie la représentation par l'introduction de

50) Les droites u, v, w peuvent encore être définies autrement, en remarquant que les renversements $\mathfrak{2l}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$, changent a_1, b_1, c_1 en a_2, b_2, c_2 , avec changement de sens. C'est sous cette forme que se présente la construction dans *H. Wiener*, Ber. Ges. Lpz. 42 (1890), math. p. 77.

51) *C. Moshammer* [Sitzgsb. Akad. Wien 73 II (1876), p. 157] choisit A, B, C sur la ligne d'intersection de ε_1 et ε_2 .

52) Der Civilingenieur 29 (1888), p. 207.

53) Novi Comm. Acad. Petrop. 20 (1775), éd. 1776, p. 193. Voir aussi *A. J. Lexell*, id. 20 (1775), éd. 1776, p. 239; *A. Schoenflies* [Rend. Circ. mat. Palermo 29 (1910), p. 331] a donné un exposé très simple des formules de *L. Euler*; cf. *W. Grunert*, Diss. Königsberg 1911.

54) Une représentation de toutes les rotations autour d'un point par les points de l'espace a été donnée par *C. Stephanos*, Math. Ann. 22 (1883), p. 331.

55) Novi Comm. Acad. Petrop. 20 (1775), éd. 1776, p. 212 et suiv.

paramètres homogènes

$$A = \sin \frac{\omega}{2} \cos \alpha, \quad B = \sin \frac{\omega}{2} \cos \beta, \quad C = \sin \frac{\omega}{2} \cos \gamma, \quad D = \cos \frac{\omega}{2}$$

en sorte que $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1$; alors les neuf cosinus directeurs a_i, b_i, c_i forment le tableau:

$$\begin{array}{lll} D^2 + A^2 - B^2 - C^2, & 2(AB - CD), & 2(AC + BD), \\ 2(AB + CD), & D^2 - A^2 + B^2 - C^2, & 2(BC - AD), \\ 2(AC - BD), & 2(BC + AD), & D^2 - A^2 - B^2 + C^2. \end{array}$$

Ces formules, après *L. Euler*, ont été plusieurs fois reproduites⁵⁶). Un pas essentiel fut fait par *O. Rodrigues*⁵⁷), qui détermina les paramètres A'', B'', C'', D'' de la rotation \mathcal{C}'' qui résulte de deux rotations \mathcal{C} et \mathcal{C}' . On a⁵⁸)

$$\begin{aligned} A'' &= +AD' - BC' + CB' + DA', \\ B'' &= +AC' + BD' - CA' + DB', \\ C'' &= -AB' + BA' + CD' + DC', \\ D'' &= +DD' - AA' - BB' - CC'. \end{aligned}$$

On doit aussi à *O. Rodrigues* une représentation paramétrique du changement de position le plus général. Il remplace la torsion par les composants τ_x, τ_y, τ_z de la translation de l'origine et par la rotation \mathcal{C} correspondante et il choisit pour paramètres les quantités τ_x, τ_y, τ_z avec les rapports des quantités A, B, C, D afférentes à cette rotation. Les équations qui servent de base à ses formules sont des relations entre les coordonnées des points A_1, A_2, A_m . Si l'on pose encore

$$A : B : C : D = l : m : n : 1,$$

ces relations ont la forme:

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= X + ny_m - mz_m, \\ y_2 - y_1 &= Y + lz_m - nx_m, \\ z_2 - z_1 &= Z + mx_m - ly_m, \end{aligned}$$

56) On les attribua longtemps à *G. Monge*; le premier *C. G. J. Jacobi* indiqua *L. Euler* comme leur auteur; *J. F. Encke* et *M. Reiss* [Correspondance math. phys. de l'Observatoire de Bruxelles 1 (1832), p. 273; 5 (1839), p. 119] donnèrent quelques développements à leur égard. Des expositions simples se trouvent par ex. dans *G. Koenigs* [Cinématique¹⁸], p. 198, 340] et aussi dans *F. Klein* et *A. Sommerfeld* [Über die Theorie des Kreisels, Leipzig 1910, cah. 1 (1897), p. 15 et suiv.] où, en particulier, les formules de composition se trouvent déduites avec facilité.

57) *J. math. pures appl.* (1) 5 (1840), p. 380.

58) Ces formules contiennent le théorème de multiplication des quaternions. Sur les relations de ceux-ci avec les rotations, voir l'article IV 15.

G. Koenigs [Cinématique¹⁸], p. 464 (note X)] a traité également du rapport existant entre la théorie des quaternions et celle des rotations.*

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6^e).

Envoi franco dans toute l'Union postale contre mandat de poste ou valeur sur Paris.

ŒUVRES COMPLÈTES DE LAGRANGE

PUBLIÉES PAR LES SOINS DE

J.-A. SERRET et G. DARBOUX,

Membres de l'Institut,

Sous les auspices du Ministre de l'Instruction publique.

Quatorze volumes in-4 (28 × 23) avec un beau portrait de LAGRANGE,
gravé sur cuivre par ACH. MARTINET.

La 1^{re} Série comprend tous les Mémoires imprimés dans les *Recueils des Académies de Turin, de Berlin et de Paris*, ainsi que les *Pièces diverses* publiées séparément. Cette série forme 7 Volumes (Tomes I à VII; 1867-1877), qui se vendent séparément..... 30 fr.

La 2^e Série, qui est en cours de publication, se compose de 7 Volumes, qui renferment les Ouvrages didactiques, la Correspondance et les Mémoires inédits, savoir :

TOME VIII : <i>Résolution des équations numériques</i> . In-4; 1879.....	18 fr.
TOME IX : <i>Théorie des fonctions analytiques</i> . In-4; 1881.....	18 fr.
TOME X : <i>Leçons sur le calcul des Fonctions</i> . In-4; 1884.....	18 fr.
TOME XI : <i>Mécanique analytique</i> (I ^{re} Partie), avec <i>Notes</i> de J. BERTRAND et G. DARBOUX; 1888.....	20 fr.
TOME XII : <i>Mécanique analytique</i> (II ^{re} Partie), avec <i>Notes</i> de J. BERTRAND et G. DARBOUX; 1889.....	20 fr.
TOME XIII : <i>Correspondance inédite avec d'Alembert</i> , publiée d'après les manuscrits autographes et annotée par LUDOVIC LALANNE; 1882..	15 fr.
TOME XIV : <i>Correspondance de Lagrange avec Condorcet, Laplace, Euler et divers savants</i> , publiée et annotée par LUDOVIC LALANNE, avec deux fac-similés; 1892.....	15 fr.

LE TOME I contient : Recherches sur la méthode de *maximis et minimis*. — Sur l'intégration d'une équation différentielle à différences finies, qui contient la théorie des suites récurrentes. — Recherches sur la nature et la propagation du son. — Nouvelles recherches sur la nature et la propagation du son. — Addition aux premières recherches sur la nature et la propagation du son. — Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies. — Application de la méthode exposée dans le Mémoire précédent à la solution de différents Problèmes de Dynamique. — Solution de différents Problèmes de Calcul intégral, avec une application à la théorie de Jupiter et de Saturne. — Solution d'un Problème d'Arithmétique.

Le TOME II contient : Sur l'intégration de quelques équations différentielles dont les indéterminées sont séparées, mais dont chaque membre en particulier n'est point intégrable. — Sur la méthode des variations. — Recherches sur le mouvement d'un corps qui est attiré vers deux centres fixes. — Sur la figure des colonnes. — Mémoire sur l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations, dans lequel on examine les avantages de cette méthode par le Calcul des probabilités, et où l'on résout différents problèmes relatifs à cette matière. — Sur la percussion des fluides. — Sur une nouvelle méthode de Calcul intégral par les différentielles affectées d'un radical carré sous lequel la variable ne passe pas par le quatrième degré. — Sur les courbes tautochrones. — Mémoire sur le passage de Vénus du 3 juin 1769. — Sur la solution des problèmes indéterminés du second degré. — Sur la résolution des équations numériques. — Additions au Mémoire sur la résolution des équations numériques. — Nouvelle méthode pour résoudre les Problèmes indéterminés en nombres entiers.

Le TOME III contient : Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries. — Sur la force des ressorts pliés. — Sur le Problème de Kepler. — Sur l'élimination des inconnues dans les équations. — Nouvelles réflexions sur les tautochrones. — Démonstration d'un Théorème d'Arithmétique. — Réflexions sur la résolution algébrique des équations. — Démonstration d'un Théorème nouveau concernant les nombres premiers. — Sur une nouvelle espèce de Calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables. — Sur la forme des racines imaginaires des équations. — Sur les réfractions astronomiques. — Sur l'intégration des équations à différences partielles du premier ordre. — Nouvelle solution du Problème du mouvement de rotation d'un corps de figure quelconque qui n'est animé par aucune force accélératrice. — Sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques. — Solutions analytiques de quelques Problèmes sur les pyramides triangulaires. — Recherches d'Arithmétique.

Le TOME IV, en tête duquel se trouve le portrait de Lagrange gravé sur acier, contient : Sur les intégrales particulières des équations différentielles. — Sur le mouvement des nœuds des orbites planétaires. — Recherches sur les suites récurrentes dont les termes varient de plusieurs manières différentes, ou sur l'intégration des équations linéaires aux différences finies et partielles : et sur l'usage de ces équations dans la théorie des hasards. — Sur l'altération des moyens mouvements des planètes. — Solutions de quelques problèmes d'Astronomie sphérique par le moyen des séries. — Sur l'usage des fractions continues dans le Calcul intégral. — Solution algébrique d'un Problème de Géométrie. — Recherches sur la détermination du nombre des racines imaginaires dans les équations littérales. — Sur quelques Problèmes de l'Analyse de Diophante. — Remarques générales sur le mouvement de plusieurs corps qui s'attirent mutuellement en raison inverse des carrés des distances. — Réflexions sur l'échappement. — Sur le Problème de la détermination des orbites des Comètes d'après trois observations. — Sur la théorie des lunettes. — Sur une manière particulière d'exprimer le temps dans les sections coniques, décrites par des forces tendantes au foyer et réciproquement proportionnelles au carré des distances. — Sur différentes questions d'Analyse relatives à la théorie des intégrales particulières. — Sur la construction des Cartes géographiques. — Sur la théorie du mouvement des fluides.

Le TOME V contient : Théorie de la libration de la Lune et des autres phénomènes qui dépendent de la figure non sphérique de cette planète. — Théorie des variations séculaires des planètes (I^{re} Partie). — Théorie des variations séculaires des éléments des planètes (II^e Partie). — Théorie des variations périodiques des mouvements des planètes (I^{re} Partie). — Sur les variations séculaires des mouvements moyens des planètes. — Théorie des variations périodiques des mouvements des planètes (II^e Partie). — Sur la manière de rectifier les méthodes ordinaires d'approximation pour l'intégration des équations du mouvement des planètes. — Sur une méthode particulière d'approximation et d'interpolation. — Sur une nouvelle propriété du centre de gravité. — Méthode générale pour intégrer les équations aux différences partielles du premier ordre, lorsque ces différences ne sont que linéaires. — Théorie géométrique du mouvement des aphélie des planètes, pour servir

d'addition aux *Principes de Newton*, relatifs à la propagation du son et au mouvement des ondes. — Mémoire sur une question concernant les annuités. — Mémoire sur l'expression du terme général des séries récurrentes, lorsque l'équation génératrice a des racines égales. — Mémoire sur les sphéroïdes elliptiques. — Mémoire sur la méthode d'interpolation. — Mémoire sur l'équation séculaire de la Lune. — Mémoire sur une loi générale d'Optique. — Rapports.

Le **TOME VI** contient : Recherches sur la libration de la Lune. — Recherches sur les inégalités des satellites de Jupiter. — Essai sur le problème des trois Corps. — Sur l'équation séculaire de la Lune. — Recherches sur la théorie des perturbations que les comètes peuvent éprouver par l'action des planètes. — Recherches sur la manière de former des Tables des planètes, d'après les seules observations. — Lettres à Laplace sur la théorie des inégalités séculaires des planètes. — Recherches sur les équations séculaires des mouvements des nœuds et des inclinaisons des orbites des planètes. — Mémoire sur la théorie des variations des éléments des planètes, et en particulier des variations des grands axes de leurs orbites. — Mémoire sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de Mécanique. — Second Mémoire sur la théorie de la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de Mécanique.

Le **TOME VII** contient : Additions aux éléments d'Algèbre d'Euler. Analyse indéterminée. — Leçons élémentaires sur les Mathématiques données à l'Ecole Normale en 1795. — Essai d'Analyse numérique sur la transformation des fractions. — Sur le principe des vitesses virtuelles. — Discours sur l'objet de la théorie des fonctions analytiques. — Solutions de quelques Problèmes relatifs aux triangles sphériques, avec une analyse complète de ces triangles. — Eclaircissement d'une difficulté singulière qui se rencontre dans le calcul de l'attraction des sphéroïdes très peu différents de la sphère. — Compas de réduction pour la distance de la Lune aux étoiles. — Sur l'origine des comètes. — Remarques sur la méthode des projections pour le calcul des éclipses de Soleil ou d'étoiles. — Sur le calcul des éclipses sujettes aux parallaxes. — Nouvelle méthode pour déterminer l'orbite des comètes d'après les observations. — Nouveau moyen de déterminer la longitude de Jupiter et de Saturne au moyen d'une Table à simple entrée. — Addition au Mémoire sur le calcul des éclipses sujettes aux parallaxes. — Sur la diminution de l'obliquité de l'écliptique. — Sur les interpolations. — Valeurs des variations annuelles des éléments des orbites des planètes. — Equation pour la détermination des éléments de l'orbite d'une planète ou d'une comète au moyen de trois observations peu éloignées. — Essai d'Arithmétique politique sur les premiers besoins de l'intérieur de la République. — Lettera di Luigi di La Grange Tournier, Torinese, all'illustrissimo signor conte Giulio Carlo da Fagnano, contenente una nuova serie per i differenziali ed integrali di qualsivoglia grado, corrispondente alla Newtoniana per le potestà e le radici. — Note sur un paradoxe qu'on rencontre dans les formules de l'attraction d'un point sur une surface sphérique quelconque. — Note sur la métaphysique du Calcul infinitésimal. — Formules relatives au mouvement du boulet dans l'intérieur du canon, extraites des manuscrits de Lagrange, par Poisson.

Le **TOME VIII** (*Résolution des équations numériques*) contient : Méthode pour trouver, dans une équation numérique quelconque, la valeur entière la plus approchée de chacune de ses racines réelles. — De la manière d'avoir les racines égales et les racines imaginaires des équations. — Nouvelle méthode pour approcher des racines des équations numériques. — Application des méthodes précédentes à quelques exemples. — Sur les racines imaginaires. (1. Sur la manière de reconnaître si une équation a des racines imaginaires. — 2. Où l'on donne des règles pour déterminer dans certains cas le nombre des racines imaginaires des équations. — 3. Où l'on applique la théorie précédente aux équations des second, troisième et quatrième degrés. — 4. Sur la manière de trouver les racines imaginaires d'une équation.) — Sur la manière d'approcher de la valeur numérique des racines des équations par les fractions continues. (1. Sur les fractions continues périodiques. — 2. Où l'on donne une manière très simple de réduire en fractions continues les racines des équations du second degré. — 3. Généralisation de la théorie des fractions continues. —

4. Où l'on propose différents moyens pour simplifier le calcul des racines par les fractions continues.) — *Notes sur la théorie des équations algébriques.*

Le TOME IX (*Théorie des fonctions analytiques*) contient : INTRODUCTION. Des fonctions en général; des fonctions primitives et dérivées. — Des différentes manières dont on a envisagé le Calcul différentiel. — Objet de cet Ouvrage. — I^{re} PARTIE : Exposition de la théorie avec ses principaux usages dans l'Analyse. — II^e PARTIE : Application de la théorie des fonctions à la Géométrie. — III^e PARTIE : Application de la théorie des fonctions à la Mécanique. — NOTE de Serret.

Le TOME X (*Leçons sur le Calcul des fonctions*) contient : Avertissement. — Sur l'objet du Calcul des Fonctions et sur les Fonctions en général. — Sur le développement d'une Fonction d'une variable, lorsqu'on attribue un accroissement à cette variable. Loi générale de ce développement. Origine des Fonctions dérivées. Différents ordres de ces Fonctions. Leur notation. — Fonctions dérivées des puissances. Développement d'une puissance quelconque d'un binôme. — Fonctions dérivées des quantités exponentielles et logarithmiques. Développement de ces quantités en séries. — Fonctions dérivées des sinus et cosinus d'angles exprimés par les sinus et cosinus. Développement de ces quantités en séries. — Fonctions dérivées des quantités composées de différentes fonctions d'une même variable ou dépendantes de ces fonctions par des équations données. — Sur la manière de rapporter les Fonctions dérivées à différentes variables. — Du développement des Fonctions lorsqu'on donne à la variable une valeur déterminée. Cas dans lesquels la règle générale est en défaut. Analyse de ces cas. Des valeurs des fractions dont le numérateur et le dénominateur s'évanouissent à la fois. — De la manière d'avoir les limites du développement d'une fonction, lorsqu'on n'a égard qu'à un nombre déterminé de termes. Cas dans lesquels les principes du Calcul différentiel sont en défaut. Théorème fondamental. Limites de plusieurs séries. Manière rigoureuse d'introduire les Fonctions dérivées dans la théorie des courbes et dans celle des mouvements variés. — Des équations dérivées et de leur usage pour la transformation des Fonctions. Analyse des sections angulaires. — Suite de l'analyse des sections angulaires, où l'on démontre les formules générales données dans la Leçon Précédente. — Théorie générale des équations dérivées et des constantes arbitraires. Théorie des multiplicateurs des équations dérivées. — Des valeurs singulières qui satisfont aux équations dérivées, et qui ne sont pas comprises dans les équations primitives. Théorie des équations primitives singulières. — Comment l'équation primitive singulière résulte de l'équation dérivée. — Equations dérivées qui ont des équations primitives singulières données. Analyse d'une classe d'équations de tous les ordres qui ont toujours nécessairement des équations primitives singulières. — Sur différents Problèmes relatifs à la théorie des équations primitives et singulières. — Digression sur les équations aux différences finies, sur le passage de ces différences aux différentielles et sur l'invention du Calcul différentiel. — Des fonctions de deux ou plusieurs variables; de leurs fonctions dérivées. Notation et formation de ces fonctions. — Equations dérivées à plusieurs variables. Théorie de ces équations. Méthodes générales pour trouver les équations primitives des équations du premier ordre à plusieurs variables. Des équations de condition par lesquelles on peut reconnaître si une fonction d'un ordre quelconque de plusieurs variables est une fonction dérivée exacte. Analogie de ces équations avec celles du problème des isopérimètres. Histoire de ce problème. Méthode des variations. — Méthode des variations, déduite de la considération des fonctions.

Le TOME XIII (*Correspondance*) contient 72 Lettres inédites qui sont publiées d'après les manuscrits autographes de d'Alembert et de Lagrange conservés à la Bibliothèque de l'Institut de France. Ces Lettres, d'un grand intérêt scientifique et historique, sont mises en ordre et annotées par Ludovic Lalanne.

Le TOME XIV et dernier renferme, entre autres, la Correspondance inédite de Lagrange avec Condorcet, Euler, Laplace, etc.; il est précédé d'une Notice destinée à compléter celle que l'on doit à Delambre. et qui a été reproduite en tête du premier Volume de la Collection.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55. A PARIS.

Envoi franco dans toute l'Union postale contre mandat de poste ou valeur sur Paris.

ROUCHÉ (Eugène), Membre de l'Institut, Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, Examineur de sortie à l'École Polytechnique. et **DE COMBEROUSSE (Charles)**, Professeur à l'École Centrale et au Conservatoire des Arts et Métiers. — **Traité de Géométrie**. 7^e édition, revue et augmentée, par EUGÈNE ROUCHÉ. Fort in-8 de LX-1212 pages, avec 703 fig. dans le texte et 1175 *Questions proposées et Problèmes*.

I^{re} PARTIE. — *Géométrie plane*; 1900..... 7 fr. 50 c.

II^e PARTIE. — *Géométrie dans l'espace; courbes et surfaces usuelles*; 1900..... 9 fr. 50 c.

Avertissement.

Il y a deux manières d'écrire un livre destiné aux études : on peut se restreindre aux *Programmes officiels* et n'en pas franchir le cadre; on peut aussi, en suivant strictement ces Programmes dans ce qu'ils ont d'obligatoire, aller au delà et essayer de les compléter. Pour appliquer une science, il ne suffit pas d'en connaître quelques parties; il faut être familiarisé avec toutes ses méthodes, en saisir l'ensemble. Les magnifiques découvertes de la Géométrie moderne n'ont pas pénétré dans l'enseignement; délaissées par les Programmes, elles n'occupent pas dans la série des études mathématiques la place qui leur est due; on en parle à peine et accessoirement en Géométrie analytique, où elles semblent bien à tort être une nouvelle conquête de l'admirable instrument créé par Descartes. Nous sommes loin de reprocher aux Programmes leur silence à cet égard : ils sont tellement chargés, qu'on serait mal venu à réclamer une addition. Mais ne peut-on *apprendre* un programme d'examen et essayer en même temps de *comprendre* la portée de la science que l'on étudie, en prenant une connaissance rapide, une vue générale de ses principales méthodes? Telle est la pensée qui nous a guidés dans la composition de cet Ouvrage; c'est aussi celle qui apparait dans le choix des caractères employés.

Borné aux parties imprimées en caractères ordinaires, l'Ouvrage est entièrement conforme aux Programmes officiels et à leur esprit. Les numéros imprimés en petits caractères contiennent d'utiles développements du texte destinés aux Candidats aux Ecoles spéciales. Enfin les Appendices sont consacrés à l'exposition des nouvelles méthodes. L'élève studieux les lira à son aise sans se préoccuper de la nécessité de retenir immédiatement tous les détails; il y puisera une profonde admiration pour la Science dont les limites lui apparaîtront si lointaines, un goût des spéculations mathématiques qui donnera à son esprit plus de rectitude et de fermeté; et, à mesure que son savoir gagnera en étendue, par une réaction inévitable, les matières exigées, éclairées par ses nouvelles connaissances, paraîtront pour lui leur difficulté première.

Le succès de nos éditions successives a donné pleinement raison à notre

manière de voir. Aussi nous sommes-nous appliqués sans cesse à compléter peu à peu notre œuvre. Il suffirait de comparer la Table des matières de la première édition à celle de l'édition actuelle pour se rendre compte de l'extension considérable que l'Ouvrage a reçue.

Privé de la collaboration si précieuse de mon ami Charles de Comberousse, j'ai dû m'occuper seul de cette septième édition, assumant ainsi une tâche fort lourde, mais surtout douloureuse; car il est en nous, pour certaines pertes, des sources intarissables de regrets! Toutefois, malgré mon isolement, j'espère être parvenu à tenir ce Traité au courant des progrès accomplis. Voici les additions ou les améliorations les plus importantes :

Les Notions historiques ont été notablement développées.

Un chapitre sur la Symétrie a été introduit à la fin du premier Livre.

La théorie des cercles isogonaux, que jusqu'ici nous avions seulement ébauchée, dans la deuxième Partie, sur la sphère, a été développée dans la première Partie, pour le cas du plan.

Le problème d'Apollonius (cercle tangent à trois cercles donnés) a été traité par la méthode de M. Fouché, qui contient d'ailleurs la solution de Gergonne. Ce tracé se trouve, il est vrai, mentionné dans le *Traité des propriétés projectives* (p. 138). Mais M. Fouché, comme bien d'autres, ignorait cette circonstance; d'ailleurs, tandis que Poncelet s'est borné à indiquer la solution dont il s'agit, M. Fouché en a fait une étude approfondie et en a tiré un très heureux parti pour la discussion fort épineuse du problème.

C'est à M. Neuberg, le savant professeur de l'Université de Liège, que nous devons la Note *Sur la Géométrie récente du triangle*; nul n'a, d'ailleurs, plus que lui contribué à l'institution de cette théorie. Nous lui avons, dans notre précédente édition, témoigné notre gratitude pour son obligeante confraternité scientifique; mais je tiens aujourd'hui à constater le succès de son travail, qui a suscité de nombreuses félicitations. On peut, je crois, sans trop conjecturer, prédire le même sort à la Note nouvelle *Sur les coniques remarquables annexées à un triangle*, qui a été placée naturellement dans la seconde Partie, après la Théorie générale des coniques.

La Note *Sur l'impossibilité de la quadrature du cercle* a été complètement changée. A la démonstration exacte mais compliquée de M. Lindemann, j'ai substitué la preuve plus facile de M. Hilbert (*Mathematische Annalen*, 1893).

Un assez grand nombre de personnes m'ayant exprimé le désir de trouver dans ce Traité des notions sur la *Géométrie*, j'ai cru ne pouvoir mieux faire que de m'adresser à l'inventeur, M. Lemoine, géomètre bien connu par ses contributions à la Géométrie du triangle, où le *point de Lemoine* joue un rôle prépondérant. Ma requête a été bien accueillie; la Note IV de la première Partie a été rédigée par M. Lemoine.

Enfin, la Note relative à la *Géométrie non euclidienne*, qui figurait dans l'édition précédente, a été remplacée par une belle Etude que M. Poincaré a eu l'obligeance de composer sur le même sujet pour ce Traité, et qui sera certainement fort appréciée de nos lecteurs.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6°).

Envoi franco dans toute l'Union postale contre mandat-poste ou valeur sur Paris.

DARBOUX (G.), Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences. — **Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du Calcul infinitésimal.** 4 volumes grand in-8, avec figures, se vendant..... 60 fr.

I^{re} PARTIE : *Généralités. Coordonnées curvilignes. Surfaces minima* ; 1887.

II^e PARTIE : *Les congruences et les équations linéaires aux dérivées partielles. — Des lignes tracées sur les surfaces* ; 1889..... 15 fr.

III^e PARTIE : *Lignes géodésiques et courbure géodésique. Paramètres différentiels. Déformation des surfaces* ; 1894..... 15 fr.

IV^e PARTIE : *Déformation infiniment petite et représentation sphérique* ; 1896..... 15 fr.

Le Tome I ne se vend pas séparément.

Extrait de la Préface.

L'Ouvrage dont je publie aujourd'hui la première Partie est le résumé des Leçons que j'ai faites à la Sorbonne pendant les hivers de 1882 à 1885. J'avais commencé l'exposition de la *Théorie des surfaces* dans le but unique d'y trouver des applications nouvelles de la théorie, si vaste et si peu connue, des équations aux dérivées partielles. Je comptais consacrer une année à peine à cet enseignement ; mais l'intérêt du sujet et aussi les demandes de mes auditeurs m'ont entraîné bien au delà des limites que j'avais primitivement fixées.

Titres des Chapitres.

I^{re} PARTIE. Livre I. Applications à la Géométrie de la Théorie des mouvements relatifs. Du déplacement à un paramètre ; application à la théorie des courbes gauches. Sur l'intégration du système linéaire qui se présente dans la théorie précédente. Interprétation géométrique de la méthode développée dans le Chapitre précédent. Applications de la théorie précédente. Des déplacements à deux variables indépendantes. Intégration simultanée des systèmes linéaires rencontrés dans la théorie précédente. Des déplacements à deux variables dans le cas où le système mobile n'a pas de point fixe. Premières notions sur les coordonnées curvilignes. Surfaces définies par des propriétés cinématiques.

Livre II. Des différents systèmes de coordonnées curvilignes. Systèmes conjugués. Lignes asymptotiques. Des systèmes orthogonaux et isothermes. Représentation conforme des aires planes. Du système orthogonal formé par les lignes de courbure. Les coordonnées pentasphériques. Les lignes de courbure en coordonnées tangentielles. Applications diverses.

Livre III. Les surfaces minima. Résumé historique. Les surfaces minima en coordonnées ponctuelles. Les surfaces minima en coordonnées tangentielles. Représentations conformes des surfaces minima. La surface adjointe de M. O. Bonnet. Les formules de Monge et leur interprétation géométrique. Les surfaces minima algébriques. Les formules de M. Schwarz. Surfaces

minima algébriques inscrites dans une développable algébrique. Le problème de Plateau. Détermination de la surface minima passant par un contour donné composé de lignes droites, ou de plans que la surface doit couper normalement. Les formules de M. Weierstrass. Applications diverses de la méthode précédente.

II^e PARTIE. *Livre IV. Les congruences et les équations linéaires aux dérivées partielles.* Notions générales sur les congruences. La méthode de Laplace, L'équation d'Euler et de Poisson. La méthode de Riemann. L'équation adjointe de Lagrange et les équations linéaires d'ordre impair équivalentes à leur adjointe. Compléments et solutions nouvelles des problèmes résolus au Chapitre II. Les équations à invariants égaux. La résolution des équations linéaires les unes par les autres. Les équations harmoniques. Applications analytiques des propositions développées dans les deux Chapitres précédents. Applications géométriques. Les surfaces à lignes de courbure isothermes. Trajectoires orthogonales d'une famille de surfaces. Droites normales à une surface. La surface de M. Liouville et les surfaces dont les plans principaux sont conjugués par rapport à une surface du second degré. Les congruences de cercles et les systèmes cycliques.

Livre V. Des lignes tracées sur les surfaces. Formules générales. Les formules de M. Codazzi. Courbure normale et torsion géodésique. Les lignes géodésiques. Les familles de courbes parallèles. Analogies entre la dynamique des mouvements dans le plan et la théorie des lignes géodésiques. Application des méthodes précédentes à l'étude des mouvements dans l'espace. Le problème général de la Dynamique.

III^e PARTIE. *Livre VI. Lignes géodésiques et courbure géodésique.* Détermination des géodésiques par la méthode de Jacobi. Intégrales homogènes du premier et du second degré. De la représentation géodésique de deux surfaces l'une sur l'autre. Intégrales homogènes de degré supérieur et intégrales d'une forme déterminée. Le plus court chemin entre deux points d'une surface. La courbure géodésique et le théorème de Gauss. Les cercles géodésiques. Les triangles géodésiques et le théorème de Gauss.

Livre VII. La déformation des surfaces. Les paramètres différentiels. Solution d'un problème fondamental : Reconnaître si deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre. Les formules de Gauss. Equation aux dérivées partielles des surfaces applicables sur une surface donnée. Étude de l'équation aux dérivées partielles dont dépend le problème de la déformation. Déformation des surfaces gauches. Les théorèmes de M. Weingarten. La surface des centres de courbure. Propriétés générales. Propriétés diverses des surfaces W. Application des théorèmes de M. Weingarten aux surfaces pour lesquelles la courbure totale ou la courbure moyenne est constante. Les surfaces à courbure totale négative. Les transformations des surfaces à courbure constante. Développements analytiques se rattachant aux transformations précédentes. Rapprochements et analogies entre les surfaces à courbure constante et les surfaces minima.

IV^e PARTIE: *Livre VIII. Déformation infiniment petite et représentation sphérique.* Déformation infiniment petite. Première solution. Déformation infiniment petite. Deuxième solution : les formules de M. Lelievre. Les douze surfaces. Développements géométriques se rattachant aux précédentes solutions. Transformations diverses. Inversion composée. Applications diverses. Roulement de deux surfaces l'une sur l'autre. Les systèmes cycliques et les surfaces applicables. Représentation sphérique : Solution complète du problème. Surfaces à lignes de courbure planes. Surfaces isothermiques à lignes de courbure planes. Surfaces à lignes de courbure sphériques. Généralisations diverses. Nouvelles classes de surfaces applicables. Dernières recherches
Notes et additions.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6^e).

Envoi franco dans toute l'Union postale contre mandat-poste ou valeur sur Paris.

TRAITÉ
DE
MÉCANIQUE RATIONNELLE

PAR

Paul APPELL

Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences.

TROIS VOLUMES GRAND IN-8, AVEC FIGURES.

- TOME I. — *Statique. Dynamique du point.* Volume de x-615 pages, 3^e édition entièrement refondue, avec 178 figures; 1909..... 20 fr.
TOME II. — *Dynamique des systèmes. Mécanique analytique.* Volume de vi-560 pages. 3^e édition entièrement refondue; avec 98 figures; 1911..... 20 fr.
TOME III. — *Équilibre et mouvement des milieux continus.* Volume de vii-645 pages. 2^e édition entièrement refondue; avec 70 fig.; 1908. 20 fr.

Préface de la 3^e édition.

En dehors des améliorations de détail apportées à la rédaction et des indications bibliographiques nouvelles, nous avons présenté, dans le premier Chapitre, la théorie des vecteurs, sous une forme entièrement renouvelée, dont le point de départ est dans ce fait que l'on rencontre, dans les applications, trois catégories de vecteurs. La première catégorie comprend des vecteurs qui sont définis en grandeur, direction et sens, mais dont le point d'application peut être pris arbitrairement dans l'espace : tels sont les vecteurs qui représentent des axes de couples appliqués à un solide; nous appelons les vecteurs de cette catégorie *vecteurs non localisés* (*unlocalised*), suivant l'expression employée par M. Love dans sa *Theoretical mechanics*, ou encore *vecteurs libres*. Dans la deuxième catégorie figurent des vecteurs définis en grandeurs, direction et sens, pouvant glisser arbitrairement sur la droite qui les porte : tels sont les vecteurs qui représentent des forces appliquées à un solide; nous les appelons *vecteurs localisés sur une droite* ou *vecteurs glissants*. Enfin, dans la troisième catégorie, figurent les vecteurs qui ont un point d'application

déterminé, comme les vecteurs représentant les vitesses de points mobiles sur les forces d'un champ; ces vecteurs sont *localisés en un point ou liés à leur point d'application*. Nous avons, en outre, introduit la distinction, si importante en Physique, entre les vecteurs *axiaux* et les vecteurs *polaires*.

Comme exercice sur le mouvement d'un point, nous avons étudié les cas les plus simples du mouvement d'une particule électrisée, soumise à l'action d'un champ électrique et d'un champ magnétique superposés. Ce problème a conduit à des recherches mathématiques intéressantes de M. Poincaré et de M. Carl Störmez, inspirées par les expériences de M. Birkeland et de M. Villard, et les idées émises par Birkeland et par Arrhénius sur l'origine des aurores polaires.

Titres des Chapitres du Tome I (3^e édition).

Introduction. — I^{re} Partie. *Notions préliminaires*. — CHAP. I. Théorie des vecteurs. — CHAP. II. Cinématique. — CHAP. III. Principes de la Mécanique : Forces, masses. — CHAP. IV. Travail ; fonction des forces. — II^e Partie. *Statique*. — CHAP. V. Equilibre d'un point ; équilibre d'un système. — CHAP. VI. Equilibre d'un solide. — CHAP. VII. Systèmes déformables. — CHAP. VIII. Principe des vitesses virtuelles. — CHAP. IX. Notions sur le frottement. — III^e Partie. *Dynamique du point*. — CHAP. X. Généralités. Mouvement rectiligne. Mouvement des projectiles. — CHAP. XI. Forces centrales. Mouvement elliptique des planètes. — CHAP. XII. Mouvement d'un point sur une courbe fixe ou mobile. — CHAP. XIII. Mouvement d'un point sur une surface fixe ou mobile. — CHAP. XIV. Equations de Lagrange pour un point. — CHAP. XV. Principe de d'Alembert. Principe de la moindre action. — CHAP. XVI. Equations canoniques. Théorème de Jacobi. Applications.

Titres des Chapitres du Tome II (3^e édition).

Dynamique des systèmes. — CHAP. XVII. Moments d'inertie. — CHAP. XVIII. Théorèmes généraux sur le mouvement des systèmes. Les sept équations universelles du mouvement. — CHAP. XIX. Dynamique du corps solide. Mouvements parallèles à un plan. — CHAP. XX. Mouvement d'un solide autour d'un point fixe. — CHAP. XXI. Corps solide libre. — CHAP. XXII. Mouvement relatif. — CHAP. XXIII. Principe de d'Alembert. — CHAP. XXIV. Equations générales de la Dynamique analytique. — CHAP. XXV. Equations canoniques. Théorèmes de Jacobi et de Poisson. Principes d'Hamilton, de la moindre action et de la moindre contrainte. — CHAP. XXVI. Chocs et percussions. — CHAP. XXVII. Notions sur les machines. Similitude.

Titres des Chapitres du Tome III (2^e édition).

CHAP. XXVIII. Intégrales de volumes, de surfaces et de lignes. — CHAP. XXIX. Attraction, potentiel. — CHAP. XXX. Equilibre et mouvement intérieur d'une masse continue. — CHAP. XXXI. Hydrostatique. — CHAP. XXXII. Déformation d'un milieu continu ; propriétés géométriques. — CHAP. XXXIII. Cinématique des milieux continus. — CHAP. XXXIV. Dynamique des fluides parfaits ; théorèmes généraux. — CHAP. XXXV. Théorie des tourbillons. — CHAP. XXXVI. Mouvements parallèles à un plan fixe. — CHAP. XXXVII. Notions sur la théorie de l'élasticité. — CHAP. XXXVIII. Equations du mouvement d'un fluide visqueux. — Sur l'action euclidienne (note de MM. F. et E. COSSERAT).

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,
 QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6^e).

Envoi franco dans toute l'Union postale contre mandat-poste ou valeur sur Paris.

JOURNAL
 DE
 L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PUBLIÉ PAR LE

CONSEIL D'INSTRUCTION DE CET ÉTABLISSEMENT

DEUXIÈME SÉRIE (1).

VOLUMES IN-4°, PARAISSANT PÉRIODIQUEMENT.

TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES DANS LES DIX PREMIERS CAHIERS.

- 1^{er} CAHIER. (1895.) *Poincaré (H.)*, Analysis situs. — Table des matières contenues dans les 64 premiers Cahiers formant 45 volumes, suivie d'une Table analytique et d'une Table générale par noms d'auteurs..... 10 fr.
- 2^e CAHIER. (1897.) *Laurent*, Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre. — *Godefroy (René)*, Détermination des rayons de courbure successifs de certaines courbes. — *Autonne (Léon)*, Sur l'équation différentielle du premier ordre et sur les singularités de ses intégrales algébriques. 10 fr.
- 3^e CAHIER. (1897.) *Autonne (Léon)*, Sur l'équation différentielle du premier ordre et sur les singularités de ses intégrales algébriques (*suite et fin*). — *Goursat (E.)*, Recherches sur les systèmes en involution d'équations du second ordre. — *Lecornu (L.)*, Sur le rendement des engrenages. — *Mayer (Daniel-E.)*, Théorèmes relatifs à la probabilité du jeu et applications au calcul d'intégrales désignées..... 10 fr.
- 4^e CAHIER. (1898.) *Boulangier*, Contribution à l'étude des équations différentielles linéaires homogènes intégrales algébriquement. — *Collignon*, Note sur la détermination de l'heure du passage du Soleil dans un plan vertical. — *Rabat*, Théorie des invariants universels. Application au groupe ponctuel et au groupe de contact dans l'espace à deux dimensions. — *D'Ocagne*, Une leçon sur les diagrammes cotés ou abaques. — Planches I et II. 13 fr.
- 5^e CAHIER. (1900.) *Caspari*, Azimut, latitude et longitude. — *Maillet*, Sur les groupes de classe N et de degré N au moins $\alpha - 1$ fois transitifs. —

(1) 1^{re} Série. 64 volumes in-4, avec figures et planches..... 1000 fr.
 Table des matières et noms d'auteurs des 64 Cahiers de la 1^{re} Série.
 16^e 1896..... 3 fr.
 (Voir le prospectus détaillé des Cahiers 83 et 64)

- Lecornu*, Sur l'équilibre d'élasticité du tore. — *Appell*, Sur l'équilibre d'un flotteur avec un chargement liquide. — *Carvallo*, Théorie du mouvement d'un motocycle et de la bicyclette..... 10 fr.
- 6^e CAHIER. (1901.) *Carvallo*, Théorie du mouvement du motocycle et de la bicyclette (*fin*). — *Andrade*, A propos de deux problèmes de probabilités, et *errata* d'un Mémoire du LXIV^e Cahier. 1894. — *Boulanger*, Détermination des invariants différentiels fondamentaux attachés au groupe G. 16 de M. Klein. — *Maillet*, Sur les graphiques et les formules d'annonces de crues. — *Rivière*, Sur divers cas de la flexion des cylindres à base circulaire..... 10 fr.
- 7^e CAHIER. (1902.) *Cornu*, Étude de l'absorption atmosphérique des radiations visibles par l'observation spectrale des faisceaux électriques de La Tour Eiffel en 1889. — *Lecornu*, Sur les volants élastiques. — *Callandréau*, Sur le calcul numérique des coefficients dans le développement de la fonction perturbatrice. — *Combebiac*, Calcul des triquaternions, nouvelle analyse géométrique. — Hommage rendu par l'École Polytechnique à M. le Colonel Mannheim 12 fr.
- 8^e CAHIER (1903.) *Maillet*, Sur les lois des montées de Belgrand et les formules du débit d'un cours d'eau. — *Autonne*, Sur les substitutions érémiennes de l'espace (1^{er} Mémoire). — *Maillet*, Sur les lignes de décroissance maxima des modules et les équations algébriques ou transcendentes. — *Ocagne* (M. d'), Exposé synthétique des principes fondamentaux de la Nomographie..... 10 fr.
- 9^e CAHIER (1904.) *H. Dulac*, Recherches sur les points singuliers des équations différentielles. — *R. Bricard*, Sur l'épicycloïde. — *Paul Appel*, Machine à déterminer les balourds..... 10 fr.
- 10^e CAHIER (1905.) *Edm. Maillet*, Sur les fonctions monodromes d'ordre non transfini et les équations différentielles. — *E. Jouguet*, Sur la similitude dans le mouvement des fluides. — *A. Colson*, Sur la théorie des déplacements gazeux. — *H. Poincaré*, Notice sur la vie et les travaux d'*Alfred Cornu*.

A LA MÊME LIBRAIRIE.

GOURSAT (Édouard), Professeur à la Faculté des Sciences de Paris. — **Cours d'Analyse mathématique.** 2 volumes grand in-8 (25 × 16) se vendant séparément.

TOME I : Dérivées et différentielles. Intégrales définies. Développements en séries. Applications géométriques. Volume de vi-620 pages, avec 52 figures; 1902..... 20 fr.

TOME II : Théorie des fonctions analytiques. Équations différentielles. Équations aux dérivées partielles. Éléments de calcul des variations. Volume de vi-640 pages, avec 95 figures; 1905..... 20 fr.

LIBRAIRIE GAUTHIER VILLARS ET FILS,
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

Envoi franco dans toute l'Union postale contre mandat de poste ou valeur sur Paris.

LES
INTÉGRAPHS,
LA COURBE INTÉGRALE ET SES APPLICATIONS.

ÉTUDE
SUR UN
NOUVEAU SYSTÈME D'INTÉGRATEURS MÉCANIQUES,
PAR
Br. ABDANK-ABAKANOWICZ.

UN VOLUME GRAND IN-8, AVEC 94 FIGURES DANS LE TEXTE; 1886... 5 FR.

Extrait de la Préface.

D'une façon générale, les intégrateurs mécaniques sont des instruments qui effectuent, dans certaines conditions et par des moyens purement mécaniques, la sommation d'une série infinie de grandeurs infiniment petites. Ces dernières peuvent d'ailleurs être les éléments soit d'une aire limitée par une courbe, soit d'une grandeur complexe quelconque, travail mécanique, chaleur, énergie électrique, etc., le problème à résoudre se ramenant toujours à la solution d'une intégrale définie. L'origine de cette espèce d'appareil est assez récente : les intégrateurs datent tous de ce siècle; il n'y a donc pas lieu d'être surpris si leur nombre est encore restreint et leurs applications rares.

La mesure des aires est un des problèmes qui se présentent le plus souvent dans les sciences appliquées, et il est d'ailleurs possible d'y ramener tous les autres problèmes; aussi est-ce de ce côté que les premiers inventeurs dirigèrent leurs recherches, s'appliquant à remplacer de longs et fastidieux calculs numériques par une simple opération mécanique. Il nous suffira de rappeler ici les planimètres d'Amsler-Laffon, aussi remarquables par la simplicité des principes mis en jeu que par les qualités pratiques de leur construction.

Les intégrateurs destinés à la totalisation de certains effets physiques variables, comme, par exemple, les intégrateurs dynamométriques, sont d'un

emploi beaucoup moins fréquent. On se bornait d'ailleurs, dans tous les appareils de cette nature, à rechercher le *résultat final* de l'intégration; ainsi les planimètres donnent simplement la mesure numérique de la surface considérée; les totalisateurs dynamométriques, la somme du travail dépensé ou produit pendant un certain laps de temps : aucun d'eux ne peut fournir par des indications continues la loi intime suivant laquelle a été effectuée la sommation.

Le but de nos recherches a été tout autre. Nous avons cherché à construire des intégrateurs qui non seulement effectuent la somme totale des éléments, mais donnent encore, sous forme de tracé graphique d'une courbe, la loi complète qui régit la sommation, permettant de suivre pas à pas, pour ainsi dire, le progrès de l'intégration et faisant connaître la succession des phases par lesquelles elle a passé. La courbe tracée par nos intégrateurs n'est autre chose que la *courbe intégrale*, dont nous exposons en quelques mots la théorie dans le premier Chapitre de cette étude.

Nous avons donné le nom d'*intégraphes* à ce nouveau genre d'intégrateurs, que nous croyons pouvoir affirmer avoir été le premier à construire.

Il serait superflu d'insister longuement sur l'importance du résultat obtenu, qui est le tracé mécanique de la courbe intégrale, ce tracé pouvant servir de point de départ à des opérations géométriques d'une grande utilité dans certaines applications pratiques. Quelques exemples suffiront à donner une idée de ces applications.

S'agit-il, par exemple, d'une aire limitée par un contour quelconque, le tracé des courbes intégrales permettra, indépendamment de la mesure de cette aire, la solution de plusieurs problèmes planimétriques, tels que la division de l'aire donnée en parties proportionnelles à des nombres quelconques; ce même tracé permettra encore d'obtenir avec la plus grande facilité le moment statique et les moments d'inertie par rapport à un axe quelconque situé dans le plan de la courbe. Un autre exemple, tiré de la Statique graphique, mettra encore mieux en relief l'importance des opérations basées sur la connaissance de la courbe intégrale. Ainsi, en partant de la courbe représentant la charge d'une poutre, nous pouvons, à l'aide des courbes intégrales, obtenir successivement les efforts tranchants, les moments fléchissants et enfin la ligne élastique.

Le domaine de la Physique, où la sommation des éléments infiniment petits de la forme γdx se rencontre à chaque instant, offre des applications sans nombre. Si l'on connaît, par exemple, la forme d'un courant induit, la courbe intégrale donnera le moyen de connaître, non seulement la quantité totale d'électricité développée dans l'induit, mais encore la forme du courant inducteur.

Pour bien montrer quelles sont l'étendue et la variété des applications de l'intégraphes, nous avons passé en revue les principales d'entre elles dans le cinquième Chapitre de cette étude. Citons ici en particulier :

Les problèmes planimétriques, la résolution des équations numériques, la recherche des moments de divers ordres et des centres de gravité, le problème du transport des terres, le calcul graphique des poutres, la théorie des voûtes, les problèmes de construction navale, l'étude des systèmes en mouvement, les problèmes électriques, etc.

Table des Matières.

CHAP. I. *La courbe intégrale.* Définition de la courbe intégrale. Tracé approximatif de cette courbe. Rapports généraux entre une courbe donnée et sa courbe intégrale. — CHAP. II. *Nouveau principe cinématique d'intégrateurs.*

Généralités. Propriétés de la roulette. Tracé de la courbe intégrale au moyen de la roulette. Vis à pas variable. Différents cas qui se présentent sur les applications de la vis à pas variable. Réalisation mécanique de cet organe. — **CHAP. III. Les intégraphes.** Les premiers intégraphes, Intégrateurs et intégraphes à roulette mobile le long d'une génératrice du cylindre. Modèles faits en collaboration avec Napoli. Machine à intégrer de M. Boys. Intégraphe de Zmurko. Intégrateur et dérivateur Mestre. Dérivation mécanique. — **CHAP. IV. Propriétés caractéristiques du nouveau système d'intégrateurs.** — **CHAP. V. Les applications.** Applications planimétriques. Tracé de quelques courbes au moyen de l'intégraphe. Représentation et résolution des équations numériques. Intégration des équations différentielles. Moments. Centres de gravité. Transport des terres. Efforts tranchants et moments fléchissants d'une poutre chargée. Courbe élastique. Théorie des voûtes. Problème de construction navale. Étude des systèmes en mouvement. Quelques applications électriques. Applications pratiques du nouveau système d'intégrateurs. — **APPENDICE.** Application de la roulette au tracé de certaines courbes. Quadrature des diagrammes obtenus pour le dynamomètre d'inertie de M. Desdouts. Note relative aux études de G. Coriolis.

NOTE. — Les intégraphes sont construits par la maison P. Barbier et C^{ie}, 5, place du Panthéon.

A LA MÊME LIBRAIRIE.

DULOS (Pascal), Professeur de Mécanique à l'École d'Arts et Métiers et à l'École des Sciences d'Angers. — **Cours de Mécanique**, à l'usage des Ecoles d'Arts et Métiers et de l'enseignement spécial des Lycées. 5 vol. in-8, avec 608 belles figures gravées sur bois. (*Ouvrage honoré d'une souscription des Ministères de l'Agriculture, de l'Instruction publique et des Travaux publics.*)

Cet important Ouvrage, rédigé pour les Écoles d'Arts et Métiers, convient aux bibliothèques de quartier des Lycées et Collèges, où les élèves de 5^e et 6^e années le consulteront avec fruit; les tomes I et II sont utiles aux candidats au Certificat d'aptitude; les candidats à l'Agrégation y trouveront traitées plusieurs leçons qu'ils peuvent avoir à faire sur la Mécanique.

On vend séparément chaque Tome :

TOME I : *Composition des forces. — Équilibre des corps solides. — Centre de gravité. — Machines simples. — Ponts suspendus. — Travail des forces. — Principe des forces vives. — Moments d'inertie. — Force centrifuge. — Pendule simple et pendule composé. — Centre de percussion. — Régulateur et force centrifuge. — Pendule balistique.* 2^e édition; 1885..... 7 fr. 50 c.

TOME II : *Résistances nuisibles ou passives. — Frottement. — Application aux machines. — Roideur des cordes. — Application du théorème des forces vives à l'établissement des machines. — Théorie des volants. — Résistance des matériaux.* 2^e édition; 1887..... 7 fr. 50 c.

TOME III : *Hydraulique. — Écoulement des fluides. — Jaugeage des cours d'eau. — Établissement des canaux à régime constant. — Récepteurs hydrauliques. — Travail des pompes. — Béliet hydraulique. — Vis d'Archimède. — Moulins à vent.* 2^e édition; 1887..... 7 fr. 50 c.

TOME IV : *Thermodynamique. — Machines à vapeur. — Principaux types de machines à vapeur. — Chaudières à vapeur. — Machines à air chaud et à gaz. — Calcul des volants. — Appareils dynamométriques.* 2^e éd.; 1891. 9 fr. 50 c.

TOME V : *Distribution de la vapeur dans les cylindres. — Mouvement des tiroirs. — Distributions simples. — Distributions à deux tiroirs. — Diagrammes rectangulaires. — Diagrammes polaires. — Application aux détentes les plus usuelles;* 1882..... 5 fr. 50 c.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS, 6^e.

Envoi franco dans toute l'Union postale contre mandat-poste ou valeur sur Paris.

RESAL (H.), Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique et à l'École des Mines, Inspecteur général des Mines, adjoint au Comité d'Artillerie pour les études scientifiques. — **Traité de Mécanique générale**, comprenant les *Leçons professées à l'École Polytechnique et à l'École des Mines*. 7 volumes in-8, se vendant séparément :

MÉCANIQUE RATIONNELLE.

TOME I : Cinématique. — *Théorèmes généraux de la Mécanique.* — *De l'équilibre et du mouvement des corps solides.* 2^e édition. In-8, avec 47 figures; 1895..... 6 fr. 50 c.

TOME II : Du mouvement des solides eu égard aux frottements. — *Équilibre intérieur.* — *Elasticité.* — *Hydrostatique.* — *Hydrodynamique.* — *Hydraulique.* 2^e édition. In-8, avec 41 figures; 1895..... 3 fr.

MÉCANIQUE APPLIQUÉE (Moteurs et Machines).

TOME III : Des machines considérées au point de vue des transformations de mouvement et de la transformation du travail des forces. — *Application de la Mécanique à l'Horlogerie.* In-8, avec 213 belles figures; 1875..... 11 fr.

TOME IV : Moteurs animés. — *De l'eau et du vent considérés comme moteurs.* — *Machines hydrauliques et élévatoires.* — *Machines à vapeur, à air chaud et à gaz.* In-8, avec 200 belles figures, levées et dessinées d'après les meilleurs types; 1876..... 15 fr.

CONSTRUCTIONS.

TOME V : Résistance des matériaux. — *Constructions en bois.* — *Maçonneries.* — *Fondations.* — *Murs de soutènement.* — *Reservoirs.* In-8, avec 308 belles figures, levées et dessinées d'après les meilleurs types; 1880..... 12 fr. 50 c.

TOME VI : Voûtes droutes et biaises, en dôme, etc — *Ponts en bois.* — *Planchers et combles en fer.* — *Ponts suspendus.* — *Ponts-levis.* — *Cheminées.* — *Fondations de machines industrielles.* — *Amélioration des cours d'eau.* — *Substruction des chemins de fer.* — *Navigation intérieure.* — *Ports de mer.* In-8, avec 519 figures et 5 planches chromolithographiques; 1881..... 15 fr.

DÉVELOPPEMENTS ET EXERCICES.

TOME VII : Développements sur la Mécanique rationnelle et la Cinématique pure, comprenant de nombreux *Exercices.* In-8, av. 43 fig.; 1889. 12 fr.

Les Tome I et II (2^e édition) comprennent l'enseignement de la Mécanique à l'École Polytechnique, et diffèrent tellement de ceux de la première édition qu'ils constituent presque un nouvel Ouvrage.

Parmi les innovations qui ont été faites on citera les suivantes :

Nouvelle théorie du roulement des corps. — Application de la méthode de la variation des constantes arbitraires à quelques problèmes du mouvement plan d'un point matériel. — Généralisation de la théorie géométrique des brachistochrones. — Nouvelles considérations sur le mouvement d'un point matériel sur une surface. — Equations de Lagrange et leur extension au mouvement relatif. — Stabilité de l'équilibre de l'axe de la toupie gyroscopique. — Mouvement de la Terre autour de son centre de gravité. — Nouvelle théorie des chocs. — Diverses questions relatives au mouvement d'un corps sur un autre, en égard au frottement. — Théorie complète des dilatations et des glissements dans un corps élastique. — Méthode rapide pour réduire à deux le nombre des coefficients qui entrent dans les équations générales de l'élasticité.

L'Hydrostatique, l'Hydrodynamique et l'Hydraulique ont été l'objet d'améliorations et d'adjonctions importantes.

29733

Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS.

Envoi franco dans toute l'Union postale contre mandat de poste ou valeur sur Paris.

PRINCIPES ET DÉVELOPPEMENTS

DE

GÉOMÉTRIE CINÉMATIQUE

OUVRAGE CONTENANT

DE

NOMBREUSES APPLICATIONS A LA THÉORIE DES SURFACES,

PAR

LE COLONEL A. MANNHEIM,

PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

UN VOLUME IN-4° DE X-589 PAGES; 1894. — PRIX : 25 FR.

Extrait de la Préface.

Parmi les propriétés du mouvement que l'on démontre en Cinématique, il en est quelques-unes dans lesquelles n'interviennent ni le temps, ni aucun élément arbitraire étranger à la figure mobile ⁽¹⁾. L'étude spéciale que j'ai faite de ces propriétés et de propriétés de même nature, purement géométriques, m'ayant conduit à en augmenter notablement le nombre, j'ai pensé qu'il importait de les réunir. Leur ensemble forme ainsi cette branche particulière de la Géométrie qu'on appelle généralement du nom que j'ai adopté : la *Géométrie cinématique*.

Tandis que la Cinématique a pour objet l'étude du mouvement indépendamment des forces, la Géométrie cinématique a pour objet l'étude du mouvement indépendamment des forces, du temps et de tout élément arbitraire étranger à la figure mobile. Réservant, avec Ampère, le nom de *déplacement* pour désigner un mouvement dans lequel on ne considère pas la vitesse, je dirai donc, pour bien préciser : la *Géométrie cinématique étudie les propriétés intrinsèques des déplacements des figures*.

Certaines de ces propriétés sont plus particulièrement utiles; leur em-

(1) Par exemple, des axes coordonnés, éléments arbitraires qui figurent dans les énoncés de quelques théorèmes de Cinématique.

ploi systématique m'a permis de constituer une méthode géométrique dont la valeur ressort de la variété, du nombre et de la nouveauté des résultats obtenus. En ce qui concerne les Applications, ces résultats se rapportent à la Mécanique, ainsi qu'à l'Optique et surtout à la Théorie des surfaces.

.....
Ce Livre renferme les principes et développements de la Géométrie cinématique présentés didactiquement. Je ne me suis cependant pas proposé de lui donner le caractère d'un Traité; j'ai voulu simplement faire l'exposé méthodique de mes travaux relatifs à cette branche intéressante de la Géométrie. L'analyse succincte que je vais donner de cet Ouvrage montrera la marche que j'ai suivie et le point où je suis arrivé.

.....
La première Partie de ce Livre comprend non seulement le déplacement plan des figures de forme invariable, mais aussi le déplacement des figures polygonales de forme variable. Pour cette dernière étude j'ai trouvé des formules primordiales que Bour a introduites, avec quelques-unes de leurs applications, dans le Cours de Mécanique et Machines qu'il a professé à l'Ecole Polytechnique.

De l'usage de ces formules résulte une méthode des normales, simple, facile dans son emploi, qui comprend comme cas particulier celle de Chasles et qui permet, en outre, de construire les centres de courbure. Je l'ai développée en présentant de nombreuses applications.

Ces formules ont leurs analogues pour le déplacement sur une sphère ou dans l'espace.

La deuxième Partie traite du déplacement dans l'Espace. Après avoir pris pour point de départ des propriétés dues à Chasles, j'expose, en les coordonnant, ceux de mes propres travaux qui, malgré leur diversité apparente, se rapportaient à une même idée, l'idée de constituer la *Géométrie cinématique*.

J'ai assujéti dans son déplacement le corps mobile à des conditions très diverses. Cette étude, nouvelle au moment où je l'ai reprise, m'a conduit à une méthode des normales pour le cas de l'espace.

Puis, j'ai considéré une figure mobile soumise à moins des cinq conditions nécessaires pour définir son déplacement, et qui peut alors être déplacée d'une infinité de manières à partir de sa position initiale.

La Cinématique ne traitant que du mouvement complètement défini, l'étude des propriétés de ces déplacements, est du domaine exclusif de la *Géométrie cinématique*. Les Chapitres qui la renferment ont, par cela même, une grande importance. Le cas où le nombre des conditions est réduit à quatre a surtout pris un développement considérable.

Les Mémoires que je reproduis ensuite contiennent, pour des sujets très variés, de nombreuses applications des propriétés des déplacements des figures. Je n'en ferai pas ici l'énumération: je citerai seulement la théorie du paraboloïde des huit droites, celle de l'hyperboloïde articulé, l'étude du contact du troisième ordre de deux surfaces et celle qui se rapporte à des questions dont les solutions dépendent des infiniment petits du troisième ordre, etc. J'ai été amené à trouver des théorèmes intéressants et à traiter des problèmes difficiles qui ne paraissent pas susceptibles de démonstrations ou de solutions géométriques.

Afin de grouper les questions de même nature, j'ai dû nécessairement diviser certains Mémoires pour en répartir les matières dans différents chapitres. Enfin, je développe des solutions que je m'étais borné à indiquer, et je termine la *Géométrie cinématique* de l'Espace par des notions sur le déplacement d'une figure polyédrale de dimensions variables, travail resté jusqu'ici inédit.

L'Appendice renferme plusieurs Notes qui permettent de voir comment j'ai abordé l'étude du déplacement sur son plan d'une figure polygonale de forme variable. Il contient aussi les solutions de questions qui, sans appartenir à la *Géométrie cinématique* proprement dite, s'y rattachent par quelque point. Du reste, il m'est arrivé aussi dans le courant de l'Ouvrage de donner des développements de Géométrie pure.

Ainsi, à l'exception des propriétés qui m'ont servi de point de départ, je puis dire que l'Ouvrage actuel est — tout entier — le résultat de mes recherches personnelles, et si, dans le courant de mon exposition, j'ai donné, en ayant soin d'ailleurs de nommer les auteurs, un certain nombre de théorèmes connus, c'est précisément parce que je les retrouve par mes procédés qui constituent, comme je l'ai déjà dit, une véritable méthode géométrique.

Je serais heureux si, en publiant dans leur ensemble ceux de mes travaux qui se rapportent à la *Géométrie cinématique*, j'avais pu faire assez apprécier les résultats obtenus et la méthode employée, pour encourager les géomètres à en poursuivre l'étude et provoquer ainsi de nouveaux progrès dans cette branche de la Géométrie.

Extrait de la Table des Matières.

I^{re} PARTIE. — GÉOMÉTRIE CINÉMATIQUE PLANE. — Théorie du déplacement d'une figure plane sur son plan. — *Théorie du centre instantané de rotation et méthode des normales.* Déplacement fini d'une figure plane sur son plan. Déplacement infiniment petit d'une figure plane sur son plan, centre instantané de rotation. Déplacement continu d'une figure plane sur son plan. Méthode des normales. Applications de la méthode des normales. Déplacement épicycloïdal. Exemples. *Triangle mobile de grandeur variable. Cas particuliers et applications. Construction des centres de courbure des lignes décrites ou des lignes enveloppes pendant le déplacement d'une figure plane sur son plan, et exemples relatifs à une figure de forme variable. Déplacement infiniment petit d'une figure polygonale de forme variable. Formules diverses. Applications diverses des formules précédentes. Développement de la méthode des normales et des centres de courbure.* Caustique par réfraction : constructions du point où un rayon réfracté touche son enveloppe et du centre de courbure sur cette courbe. Sur les quadrilatères articulés. Arcs des courbes planes ou sphériques considérées comme enveloppes de cercles. FORMULES DE GÉOMÉTRIE CINÉMATIQUE SPHÉRIQUE.

II^{re} PARTIE. — GÉOMÉTRIE CINÉMATIQUE DE L'ESPACE. — Théorie du déplacement infiniment petit d'une figure de forme invariable. — Examen préliminaire relatif au déplacement infiniment petit d'un point, d'une droite, d'un plan. Application au raccordement des surfaces réglées. Théorie du déplacement infiniment petit d'une figure de forme invariable (*suite*). Déplacement infiniment petit d'un faisceau de plans. Droites conjuguées. Adjointe à un plan. Le déplacement infiniment petit le plus général est hélicoïdal. Application à l'étude des *helicoides réglés. Propriétés géométriques du déplacement infiniment petit d'une figure de forme invariable.* Il faut cinq conditions pour déterminer le déplacement d'une figure de forme invariable. Cas où il y a moins de cinq conditions. Réduction de chacune des diverses conditions simples, qui entrent dans la définition du déplacement d'une figure, à cette condition unique : un point est assujéti à rester sur une surface donnée. Application : Méthode des normales dans le cas d'un déplacement assujéti à cinq conditions. Théorie du déplacement d'une figure de forme invariable lorsque ce déplacement n'est assujéti qu'à quatre conditions. Les normales aux surfaces trajectoires des points d'une figure rencontrent, toutes, deux mêmes droites qui sont des axes simultanés de rotation. Applications : Méthode des normales dans le cas où le déplacement de la figure mobile n'est assujéti qu'à quatre conditions. Théorème sur les normales et applications. Théorie de la courbure d'une surface. Droites de courbure. Des normales à une surface qui sont infiniment voisines d'une normale

donnée de cette surface. Généralisation du théorème sur les normales. Théorème analogue au théorème de Meusnier. Construire pour un point de la courbe d'intersection de deux surfaces : 1° l'axe de courbure de cette courbe; 2° le centre de la sphère osculatrice. **Etude de quelques déplacements particuliers. Propriétés relatives aux trajectoires des points d'une droite mobile et extension de ces propriétés aux trajectoires de tous les points d'une figure de grandeur invariable.** Droite ou figure mobile de grandeur invariable dont tous les points décrivent des ellipses. Déplacement d'une droite dont quatre points restent sur quatre surfaces données. Cas particuliers. Déplacement d'une droite dont trois points restent sur les faces d'un trièdre trirectangle. Déplacement des génératrices d'un hyperboloïde articulé à propos de la théorie géométrique de cet appareil; polhodie et herpolhodie. Polhodie et herpolhodie; étude directe. *Déplacement d'une droite, arête d'un faisceau de plans ou d'un dièdre mobile.* Propriétés relatives au déplacement d'un faisceau de plans. Analogie entre les propriétés relatives aux surfaces décrites par les points d'une droite et les surfaces touchées par les plans d'un faisceau mobile. Emploi d'un dièdre mobile dans la solution de ce problème: construire l'hyperboloïde osculateur d'une surface réglée définie par trois surfaces ou courbes directrices. Déplacement infiniment petit d'un dièdre et applications. Déplacement du dièdre droit formé par les sections principales d'une surface. Théorie du parabololoïde des huit droites. Surfaces dont les rayons de courbure principaux sont fonctions l'un de l'autre. *Déplacement de quelques trièdres particuliers.* Déplacement d'une surface de grandeur invariable assujettie à des conditions multiples. Théorie du déplacement d'une figure de forme invariable lorsque ce déplacement n'est assujetti qu'à quatre conditions (suite). *Points, plans et droites particulières. Conoïde de Plücker.* Représentation plane relative aux déplacements d'une figure de forme invariable assujettie à quatre conditions. *Pinceaux de droites et normales.* Quelques mots sur le déplacement d'une figure de forme invariable lorsque ce déplacement n'est assujetti qu'à trois conditions. Propriétés. Surface limite.

III^e PARTIE. — APPLICATIONS DIVERSES. — Constructions du centre de courbure de l'ellipse de Cassini. *Normales et normales.* Sur les surfaces réglées. Sur le contact du troisième ordre de deux surfaces. Solutions géométriques de problèmes relatifs à la théorie des surfaces et qui dépendent des infiniment petits du troisième ordre. Surfaces parallèles. Construction du centre de courbure de la développée de la courbe de contour apparent d'une surface que l'on projette orthogonalement sur un plan. *Surface gauche, lieu des normales principales de deux courbes. Mode de transformation en Géométrie cinématique et transformation de démonstration.* Déplacement d'une figure de forme invariable dont tous les plans passent par des points fixes. Surface de l'onde. Déplacement d'un double cône. Notions sur le déplacement infiniment petit d'une figure polyédrale de dimensions variables. Expressions diverses relatives au déplacement d'un point d'une droite ou d'un plan. Applications. Construire l'axe de courbure de la trajectoire d'un point, d'une droite mobile dont deux points décrivent deux courbes données. Expression de la variation de longueur d'un segment d'une droite mobile dans l'espace. Applications.

APPENDICE. — Citons seulement : Longueurs comparées d'arcs de courbes différentes. Propriétés de courbes de deux séries. Mode de représentation plane de classes de surfaces réglées. Liaison géométrique entre les sphères osculatrices de deux courbes qui ont les mêmes normales principales. Sur la surface de l'onde. Mémoire d'Optique géométrique.

MANNHEIM (le Colonel A.). — Cours de Géométrie descriptive de l'École Polytechnique, comprenant les ÉLÉMENTS DE LA GÉOMÉTRIE CINÉMATIQUE. 2^e édition. Grand in-8, avec 256 figures; 1886.. 17 fr.

Abréviations.

ans les publications de l'académie des sciences de Paris, H. signifie Histoire; Re mémoires.

= renvoi au tome premier; troisième volume.

(2, 19) = renvoi au tome premier, article 2, numéro 19.

ans les Notes, un nombre α en exposant indique un renvoi à la note α du article.

) 8 (1812), éd. 1816, p. 57 [1810] = deuxième série, tome ou volume 8, année 1812, 1816, page 57, lu ou signé en 1810.

a transcription des lettres russes a lieu conformément à l'orthographe tchèque.

n particulier \check{c} se prononce *tch*, *c* se prononce *tz*, \check{s} se prononce comme *ch* dans se prononce comme notre *j* dans *je*, *j* se prononce comme notre *y* dans *essayer*.

Abhandlungen.	élém. = élémentaire.	p. ex., par ex. = par exemple.
= Academie.	ex. = exemple.	partic. = particulier.
= Accademia.	extr. = extrait.	Petrop., Pétersb. = Saint Pétersbourg.
= Akademie.	fasc. = fascicule.	philol. = philologie.
Algebre, Algebra.	fig. = figure.	philom. = philomatique.
Allgemeine.	fis. = fisica.	philos. = philosophique.
American.	fol. = folio.	phys. = physique.
Annalen, Annales,	Géom. = Géométrie.	pl. = planche.
Anwendung.	Ges. = Gesellschaft.	polyt. = polytechnique.
= appliqué.	Gesch. = Geschichte.	pontif. = pontificia.
arimetica.	Giorn. = Giornale.	posth. = posthume.
Arithmetik, arith-	Gött. = Göttingen, Göttingue.	Proc. = Proceeding.
e.	Gymn. = Gymnasium.	progr. = programme.
association.	Hist. = Histoire.	prop. = proposition.
ufsätze.	id. = idem, ibidem.	publ. = publié.
Avancement.	imp. = imprimé.	Quart. = Quarterly.
Berichte.	inser. = inscription.	R. = reale, royal.
ongrès = bibliothèque	inst. = institution.	Recent. = Recentiores.
ongrès.	intermédi. = intermédiaire.	Rendic. = Rendiconto.
ath. = Bibliotheca	intern. = international.	réimp. = réimprimé.
ematica.	introd. = introduction.	sc. = sciences.
British.	Ist. = Istituto.	Schr. = Schriften.
Bulletin.	J. = Journal.	scient. = scientifique.
l. = Bulletin biblio-	Jahresb. = Jahresbericht.	s. d. = sans date.
o.	Lehrb. = Lehrbuch.	sect. = section.
cahier.	Leop. = Leopoldina.	Selsk. = Selskabs.
= Cambridge.	Lpz., Lps. = Leipzig.	sign. = signature.
carton.	Mag. = Magazine.	Sitzgsb. = Sitzungsberichte.
comparez.	Méc. = Mécanique.	s. l. = sans lieu.
= chapitre.	med. = medicinisch.	spéc. = spéciale.
= chimie, chimique.	Mém. = Mémoire.	suv. = suivante.
= circolo.	métaph. = métaphysique.	sup. = supérieure.
= circular.	Mitt. = Mitteilung.	suppl. = supplément.
= colonne.	Monatsh. = Monatshefte.	soc. = société.
= Commentarii.	Monatsb. = Monatsberichte.	theor. = theoretische.
entat. = Commenta-	ms., mss. = manuscrit, ma-	trad. = traduction.
es.	nuscrits.	Trans. = Transactions.
p. = Correspondance.	Nachr. = Nachrichten.	Unterh. = Unterhaltung.
= Comptes rendus.	nat. = naturelle.	Ver. = Vereinigung.
= définition.	naturf. = naturforschende.	Verh. = Verhandlung.
chr. = Denkschriften.	naturw. = naturwissenschaft-	Vetensk. = Vetenskabs.
= Dissertation.	norm. = normale. [lich.	Viertelj. = Vierteljahres-
Ecole.	nouv. = nouveau, nouvelle.	schrift.
édité à, édité par,	num. = numérique.	vol. = volume.
ion.	numism. = numismatique.	Vorles. = Vorlesung.
= Edinburgh.	Op. = Opera.	Wis. = Wissenschaft,
= Educational.	Opusc. = Opuscul.	wissenschaftlich.
= elementare.	Overs. = Oversight.	Z. = Zeitschrift.
	p. = page.	

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS

Quai des Grands-Augustins, 55, PARIS (6^e)

CHASLES (M.), Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la Géométrie moderne, suivi d'un Mémoire de Géométrie sur deux principes généraux de la Science, la Dualité et l'Homographie. Troisième édition, conforme à la première. Un volume in-4 (28-23) de 850 pages; 1889... 30 fr.

MOIGNO (L'ABBÉ), Leçons de Mécanique analytique, rédigées principalement d'après les méthodes de Cauchy, et étendues aux travaux les plus récents. Statique. In-8 (23-14), avec planches; 1868 12 fr.

POINOT (A.), Éléments de Statique, précédés d'une Notice sur Poinot par J. Bertrand, Membre de l'Institut. 12^e édition. Volume in-8, avec planches; 1877 7 fr.

CAUCHY (Aug.), Œuvres complètes, publiées sous la direction de l'Académie des Sciences de Paris. 27 volumes in-4 (28-23).

I^e Série. Mémoires, Notes et Articles extraits des Recueils de l'Académie des Sciences. 12 volumes, avec la Table générale de la I^e Série . . . 300 fr.
Chaque volume se vend séparément. 25 fr.

II^e Série. Mémoires extraits de divers Recueils. Ouvrages. Mémoires publiés séparément. 15 volumes. Chacun des neuf volumes parus 25 fr.

(Demander le prospectus spécial.)

B. G. TEUBNER IN LEIPZIG

Poststraße 3

MARCOLONGO, R., theoretische Mechanik. Autorisierte, deutsche Bearbeitung von H. E. Timerding, Professor an der Technischen Hochschule Braunschweig. In zwei Bänden. gr. 8. Geh. je *M* 10.—, in Leinwand geb. je *M* 11.—
I. Band: Kinematik und Statik. Mit 110 Figuren. 1911.
II. — Dynamik und Mechanik der deformierbaren Körper. 1912.

AUERBACH, F., Physik in graphischen Darstellungen. Mit 1373 Figuren auf 213 Tafeln. Mit Text. 1912. Geh. *M* 9.—, in Leinwand geb. *M* 10.—

WEBSTER, A. G., the dynamics of particles, of rigid, elastic, and fluid bodies being lectures on mathematical physics. 2^a edition. 1912. In Leinw. geb. *M* 14.—

HAMEL, G., elementare Mechanik. Ein Lehrbuch, enthaltend: Begründung der allgemeinen Mechanik; Mechanik der Systeme starrer Körper; die synthetischen und die Elemente der analytischen Methoden sowie eine Einführung in die Prinzipien der Mechanik deformierbarer Systeme. Mit 265 Figuren. Geh. *M* 16.—, in Leinwand geb. *M* 18.—

PERRY, JOHN, F. R. S., angewandte Mechanik. Ein Lehrbuch für Studierende, die Versuche anstellen und numerische und graphische Beispiele durcharbeiten wollen. Berechtigte deutsche Übersetzung von Ingenieur Rudolf Schiek in Köln. Mit 371 Figuren. 1908. In Leinwand geb. *M* 18.—

HENNEBERG, L., die graphische Statik der starren Systeme. Mit Figuren. 1911. In Leinwand geb. *M* 24.—

TIMERDING, H. E., Geometrie der Kräfte. gr. 8. 1908. In Leinw. geb. *M* 16.—
— Theorie der Kräftepläne. Eine Einführung in die graphische Statik. Mit 46 Figuren. 1910. Geh. *M* 2.60, in Leinwand geb. *M* 3.—