ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

DIRETTI DA

F. Brioschi e L. Cremona

(PRESSO IL R. ISTITUTO TECNICO SUPERIORE DI MILANO)

in continuazione degli Annali già pubblicati in Roma dal prof. Tortolini.

SERIE II. – TOMO V.

(novembre 1871 al maggio 1873).

MILANO

TIPOGRAFIA DI GIUSEPPE BERNARDONI.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO V.° (SERIE II.ª).

Indice.

Quelques cas de mouvement d'un point sur un corps en mouvement

(*par Mr.* Reinold Hoppe, *prof. à Berlin.*)

Imaginons qu'un corps roide n soit obligé de parcourir des positions géométriquement préscrites, ce qui a lieu, si toutes les quantités qui servent à exprimer ces positions sont fonctions données d'un paramètre, fonction connue ou inconnue du temps. Supposons de plus qu'un point matériel m ait la liberté de glisser le long d'un ligne s fixe à ce corps, et qu'une force extérieure le sollicite. Il se présentera un nombre de questions, dont nous ne considérerons que deux. Elles répondent aux cas, 1.° où le mouvement du corps est réglé par contrainte; 2.° où il est laissé à la seule influence du mouvement du point m. Nous allons examiner les questions dans toute leur généralité, bien que ce ne soient que des cas particuliers qui permettent la solution complète.

1. Équations différentielles.

Pourvu qu'aucune force ne sollicite le corps n, le mouvement du système matériel est déterminé par l'équation

$$\left(X-m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)dx+\left(Y-m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)dy+\left(Z-m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)dz$$
$$-\int\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}dx+\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}dy+\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\delta z\right)dn=0$$

où les mêmes lettres x, y, z, étant assez distinguées par les facteurs m, dn, désignent les coordonnées du point m et de l'élément du corps dn, et où X, Y, Z sont les composantes de la force agissante sur m. Les coordonnées de m sont fonctions données du paramètre ϑ et de l'arc de la ligne s, qui accompagne le corps en mouvement; les coordonnées de dn dépendent seulement de ϑ. Puisque les variations de ϑ et de s sont indépendantes l'une de l'autre, l'équation précédente se décompose dans les deux équations suivantes:

$$\left.\begin{aligned}\left(X-m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\frac{\partial x}{\partial \vartheta}+\left(Y-m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)\frac{\partial y}{\partial \vartheta}+\left(Z-m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)\frac{\partial z}{\partial \vartheta}=N\\ \left(X-m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\frac{\partial x}{\partial s}+\left(Y-m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)\frac{\partial y}{\partial s}+\left(Z-m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)\frac{\partial z}{\partial s}=0\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

où pour abréger on a posé

$$N=\int\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial \vartheta}+\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\frac{\partial y}{\partial \vartheta}+\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\frac{\partial z}{\partial \vartheta}\right)dn.$$

La première équation n'a pas lieu, si ϑ est donné en t, si par conséquent $d\vartheta=0$.

Posons de plus

$$w=\int\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \vartheta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \vartheta}\right)^2\right\}dn$$

et relativement au point m

$$2u-w=\left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \vartheta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \vartheta}\right)^2$$

$$v=\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial y}{\partial \vartheta}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial \vartheta}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$dV=Xdx+Ydy+Zdz;$$

en outre ayons égard à la relation

$$1=\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2$$

et désignons par des accents la différentation de ϑ et de s relative à t. Il sera facile d'en tirer les valeurs suivantes:

$$N=w\vartheta''+\tfrac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial \vartheta}\vartheta'^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vartheta}-\tfrac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial \vartheta}=\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial^2 x}{\partial \vartheta^2}+\frac{\partial y}{\partial \vartheta}\frac{\partial^2 y}{\partial \vartheta^2}+\frac{\partial z}{\partial \vartheta}\frac{\partial^2 z}{\partial \vartheta^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s}-\tfrac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial^2 x}{\partial \vartheta\partial s}+\frac{\partial y}{\partial \vartheta}\frac{\partial^2 y}{\partial \vartheta\partial s}+\frac{\partial z}{\partial \vartheta}\frac{\partial^2 z}{\partial \vartheta\partial s}$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{\partial y}{\partial \vartheta}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + \frac{\partial z}{\partial \vartheta}\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \vartheta} - \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial^2 x}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial^2 y}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial^2 z}{\partial \vartheta^2}$$

$$0 = \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial^2 x}{\partial \vartheta \partial s} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial^2 y}{\partial \vartheta \partial s} + \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial^2 z}{\partial \vartheta \partial s}$$

$$0 = \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}.$$

Ces formules énoncent les valeurs de tous les coefficients du développement des équations (1), lorsqu'on résout les trois accélerations dans les variations de ϑ et de s. On obtient les équations :

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial \vartheta} &= 2u\vartheta'' + \frac{\partial u}{\partial \vartheta}\vartheta'^2 + 2\frac{\partial u}{\partial s}\vartheta' s' + \frac{\partial v}{\partial s}s'^2 + v s'' \\ \frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial s} &= v\vartheta'' + \left(\frac{\partial v}{\partial \vartheta} - \frac{\partial u}{\partial s}\right)\vartheta'^2 + s''. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

En les ajoutant, après avoir multiplié la première par $d\vartheta$, la seconde par ds; on trouve l'équation de la force vive :

$$\frac{V}{m} = u\vartheta'^2 + v\vartheta' s' + \tfrac{1}{2}s'^2 \tag{3}$$

Deux quelconques de ces trois équations déterminent le mouvement du système, s'il est libre. La première et la troisième d'entre elles doivent être rejetées, si le corps se meut par contrainte. Alors la seconde équation suffit pour déterminer le mouvement du point.

Nous traiterons en particulier le cas, où le mouvement du corps consiste en une rotation. En prenant l'axe de rotation pour axe des z, nous pouvons poser

$$x = r\cos(\phi + \vartheta); \quad y = r\sin(\phi + \vartheta)$$

et r, ϕ, z seront fonctions de s seulement, dont nous désignerons par des accents les dérivées. On trouve ici :

$$w = \int r^2 dn = \text{const.}$$

$$2u = r^2 + w; \quad v = r^2\phi'.$$

Les équations de mouvement deviennent:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial \vartheta} &= (r^2+w)\vartheta'' + 2rr'\vartheta' s' + (2rr'\phi' + r^2\phi'')s'^2 + r^2\phi' s'' \\
\frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial s} &= r^2\phi'\vartheta'' - rr'\vartheta'^2 + s'' \\
\frac{2V}{m} &= (r^2+w)\vartheta'^2 + 2r^2\phi'\vartheta' s' + s'^2
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

La première équation peut aussi être écrite:

$$\frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = \frac{\partial}{\partial t}\{(r^2+w)\vartheta' + r^2\phi' s'\}. \qquad (5)$$

2. Rotation constante.

Quant au premier problème, il y a deux cas, où la solution se présente sans difficulté.

Supposons d'abord que la vîtesse de rotation soit constante. Si, premièrement, nous admettons que le point se meut sans force accélératrice, l'équation

$$s'' - rr'\vartheta'^2 = 0$$

a l'intégrale:

$$s'^2 - r^2\vartheta'^2 = k$$

et finalement:

$$t = \int \frac{ds}{\sqrt{r^2\vartheta'^2 + k}}$$

où r est donné en s.

Le cas ici considéré semble être le seul qui permet l'intégration pour une courbe s quelconque. Prenons maintenant une ligne droite, sur laquelle le point glisse, et faisons la force constante relativement à l'inténsité et à la direction. Pour introduire le nombre le moindre possible de quantités déterminantes, nous faisons l'axe des x normal à la force et à la droite s à un instant $t=0$, où les deux normales coïncident. Les équations de la droite auront, pour $t=0$, la forme:

$$x = a; \quad y = s\sin\varepsilon; \quad z = s\cos\varepsilon;$$

en général elles seront donc:

$$x = a\cos\vartheta - s\sin\varepsilon\sin\vartheta$$
$$y = a\sin\vartheta + s\sin\varepsilon\cos\vartheta$$
$$z = \qquad s\cos\varepsilon.$$

Les composantes de la force mR auront la forme:

$$X=0;\quad Y=mR\sin N;\quad Z=mR\cos N.$$

L'équation (4) devient:

$$s'' - s\vartheta'^2\sin^2\varepsilon = R(\sin\varepsilon\sin N\cos\vartheta + \cos\varepsilon\cos N)$$

et son intégrale générale a la forme:

$$s = Ae^{\vartheta\sin\varepsilon} + Be^{-\vartheta\sin\varepsilon} + C\cos\vartheta + D.$$

En substituant cette valeur on trouve les conditions:

$$C\vartheta'^2(1+\sin^2\varepsilon) + R\sin\varepsilon\sin N = 0$$
$$D\vartheta'^2\sin^2\varepsilon + R\cos\varepsilon\cos N = 0.$$

Soit $s=\sigma$, $s'=\lambda$, $\vartheta=0$ pour $t=0$: on aura encore les conditions suivantes:

$$\sigma = A + B + C + D$$
$$\lambda = (A-B)\vartheta'\sin\varepsilon$$

d'où l'on tire:

$$A = \frac{\sigma - C - D}{2} + \frac{\lambda}{2\vartheta'\sin\varepsilon};\quad B = \frac{\sigma - C - D}{2} - \frac{\lambda}{2\vartheta'\sin\varepsilon}$$

et la solution complète se présente comme il suit:

$$s = \tfrac{1}{2}\left\{\sigma + \frac{\lambda}{2\vartheta'\sin\varepsilon} + \frac{R}{\vartheta'^2}\left(\frac{\sin\varepsilon\sin N}{1+\sin^2\varepsilon} + \frac{\cos\varepsilon\cos N}{\sin^2\varepsilon}\right)\right\}e^{\vartheta\sin\varepsilon}$$
$$+\tfrac{1}{2}\left\{\sigma - \frac{\lambda}{2\vartheta'\sin\varepsilon} + \frac{R}{\vartheta'^2}\left(\frac{\sin\varepsilon\sin N}{1+\sin^2\varepsilon} + \frac{\cos\varepsilon\cos N}{\sin^2\varepsilon}\right)\right\}e^{-\vartheta\sin\varepsilon}$$
$$-\frac{R}{\vartheta'^2}\left(\frac{\sin\varepsilon\sin N\cos\vartheta}{1+\sin^2\varepsilon} + \frac{\cos\varepsilon\cos N}{\sin^2\varepsilon}\right).$$

Cette équation décide immédiatement de quelques questions. Le point m sera mené en équilibre autour de l'axe sans glisser, en trois cas: 1.° pour

$R=0$, $\sigma=0$, $\lambda=0$, c'est-à-dire, lorsqu'il se trouve sans vîtesse initiale et non sollicité dans le plus grand voisinage de l'axe; 2.° pour $N=0$, $\lambda=0$,

$$\sigma+\frac{R\cos\varepsilon}{\vartheta'^2\sin^2\varepsilon}=0$$

c'est-à-dire, lorsque la force est dirigée suivant l'axe de rotation, et que le point est placé comme il répond à la vîtesse; 3.° pour $\varepsilon=0$, $N=\pm\frac{1}{2}\pi$, cas de peu d'intérêt.

Le mouvement sera périodique, seulement si

$$\lambda=0;\ \sigma=-\frac{R}{\vartheta'^2}\left(\frac{\sin\varepsilon\sin N}{1+\sin^2\varepsilon}+\frac{\cos\varepsilon\cos N}{\cos^2\varepsilon}\right).$$

Il se pliera de plus en plus dans un mouvement périodique, si le coefficient de $e^{\vartheta\sin\varepsilon}$ est $=0$, l'exposant étant supposé positif. Dans tout autre cas le point s'en ira à l'infini.

3. Rotation libre.

La solution du second problème relatif à une rotation du corps s'offre sur le champ pour le cas $V=$const., où l'équation (5) a l'intégrale :

$$(r^2+w)\vartheta'+r^2\phi's'=h$$

qui, avec l'équation de la force vive

$$(r^2+w)\vartheta'^2+2r^2\phi'\vartheta's'+s'^2=k$$

suffit pour déterminer les deux fonctions ϑ et s. En éliminant ϑ' on trouve :

$$k(r^2+w)-h^2=(r^2+w-r^4\phi'^2)s'^2.$$

Comme r et ϕ' sont supposés connus en s, il résulte:

$$t=\int ds\sqrt{\frac{r^2+w-r^4\varphi'^2}{k(r^2+w)-h^2}}$$

$$\vartheta=\int\frac{h\,ds}{r^2+w}\sqrt{\frac{r^2+w-r^4\varphi'^2}{k(r^2+w)-h^2}}-\int\frac{r^2\,d\varphi}{r^2+w}.$$

4. Conditions d'une première intégrale lineaire.

S'il y a, pour $dV=0$, une première intégrale de la forme

$$\lambda\vartheta'+\mu s'=h \tag{6}$$

cas dont nous venons de considérer un exemple, il est toujours possible d'assigner les relations primitives entre t, ϑ, s. En examinant les conditions de ce cas, nous trouverons les expressions explicites des u, v, λ, μ, qui leur répondent le plus généralement.

En effet, ajoutons les équations (2) après les avoir multipliées par deux fonctions p, q de ϑ, s; il faudra que le résultat soit, pour quelque détermination de ces facteurs, identique à celui de la différentiation de l'équation (6), ce qui donne les cinq équations suivantes:

$$\lambda=2pu+qv \tag{7}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\vartheta}=p\frac{\partial u}{\partial\vartheta}+q\left(\frac{\partial v}{\partial\vartheta}-\frac{\partial u}{\partial s}\right)$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial s}+\frac{\partial\mu}{\partial\vartheta}=2p\frac{\partial u}{\partial s}$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial s}=p\frac{\partial v}{\partial s}$$

$$\mu=pv+q. \tag{8}$$

En éliminant λ, μ, on trouve:

$$p\frac{\partial u}{\partial\vartheta}+q\frac{\partial u}{\partial s}+2\frac{\partial p}{\partial\vartheta}u+\frac{\partial q}{\partial\vartheta}v=0$$

$$p\frac{\partial v}{\partial\vartheta}+q\frac{\partial v}{\partial s}+2\frac{\partial p}{\partial s}u+\left(\frac{\partial p}{\partial\vartheta}+\frac{\partial q}{\partial s}\right)v+\frac{\partial q}{\partial\vartheta}=0$$

$$\frac{\partial p}{\partial s}v+\frac{\partial q}{\partial s}=0. \tag{9}$$

Multiplions ces trois équations successivement par les trois systèmes de trois facteurs

$$\begin{array}{ccc} 1, & -v, & 2u \\ v, & -2u, & v(4u-v^2) \\ 0, & 0, & 1 \end{array}$$

ajoutons-les chaque fois, et faisons les substitions

$$u=\frac{2+v_1^2}{2u_1^2}, \quad v=\frac{v_1}{u_1} \tag{10}$$

nous obtiendrons trois nouvelles équations, qui peuvent prendre la place des équations précédentes, savoir

$$p\frac{\partial u_1}{\partial \vartheta}+q\frac{\partial u_1}{\partial s}=\left(\frac{\partial p}{\partial \vartheta}+\frac{\partial q}{\partial s}\right)u_1 \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} & p\frac{\partial v_1}{\partial \vartheta}+q\frac{\partial v_1}{\partial s}+\frac{2}{u_1}\frac{\partial p}{\partial s}+\frac{\partial q}{\partial \vartheta}u_1-\frac{\partial q}{\partial s}v_1=0 \\ & \frac{\partial p}{\partial s}v_1+\frac{\partial q}{\partial s}u_1=0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Soit $\sigma=$const. l'intégrale de l'équation

$$\frac{d\vartheta}{p}=\frac{ds}{q}=d\rho.$$

Regardons désormais ρ, σ comme variables indépendantes, ϑ, s comme fonctions, dont nous désignons la déterminante par r. Nous aurons:

$$\left.\begin{aligned} & p=\frac{\partial \vartheta}{\partial \rho}; \quad q=\frac{\partial s}{\partial \rho} \\ & r=\frac{\partial \vartheta}{\partial \rho}\frac{\partial s}{\partial \sigma}-\frac{\partial \vartheta}{\partial \sigma}\frac{\partial s}{\partial \rho} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

L'équation (11) se réduira à

$$r\frac{\partial u_1}{\partial \rho}=u_1\frac{\partial r}{\partial \rho}$$

et donnera l'intégrale

$$u_1=rP \tag{14}$$

où P désigne une fonction arbitraire de σ.

Les équations (12) prendront la forme

$$\begin{aligned} & r\frac{\partial v_1}{\partial \rho}-Bv_1+Cu_1+\frac{2A}{u_1}=0 \\ & Av_1+Bu_1=0 \end{aligned} \tag{15}$$

où l'on a posé

$$A=\frac{\partial \vartheta}{\partial \rho}\frac{\partial p}{\partial \sigma}-\frac{\partial \vartheta}{\partial \sigma}\frac{\partial p}{\partial \rho}$$

$$B=\frac{\partial\vartheta}{\partial\rho}\frac{\partial q}{\partial\sigma}-\frac{\partial\vartheta}{\partial\sigma}\frac{\partial q}{\partial\rho}$$

$$C=\frac{\partial q}{\partial\rho}\frac{\partial s}{\partial\sigma}-\frac{\partial q}{\partial\sigma}\frac{\partial s}{\partial\rho}\,.$$

En éliminant v_1 on trouve:

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{Br}{A}\right)-\left(\frac{B^2}{A}+C\right)=\frac{2A}{u_1^2}=\frac{2A}{r^2P^2}. \tag{16}$$

Les valeurs de A, B, C peuvent être réprésentées dans la forme suivante:

$$A=p^2\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{p}\frac{\partial\vartheta}{\partial\sigma}\right) \tag{17}$$

$$B=\frac{Aq}{p}+p\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{r}{p}\right) \tag{18}$$

$$C=-\frac{Aq^2}{p^2}-\frac{q}{p^3}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{r}{p^2}\right)+r\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{q}{p}\right)$$

d'où l'on tire:

$$\frac{Br}{A}=\frac{qr}{p}+\frac{pr}{A}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{r}{p}\right)$$

$$\frac{B^2}{A}+C=\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{qr}{p}\right)+\frac{p^2}{A}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{r}{p}\right)^2.$$

Ces valeurs étant portées dans l'équation (16), elle devient:

$$\frac{r}{p}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{p^2}{A}\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{r}{p}\right)=\frac{2A}{r^2P^2} \tag{19}$$

ou bien, pour séparer les fonctions:

$$2\left(\frac{p^2}{A}\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{r}{p}\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{p^2}{A}\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{r}{p}\right)=\frac{4}{P^2}\left(\frac{p}{r}\right)^3\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{r}{p}\right)$$

et après l'intégration:

$$\frac{p^4}{A^2}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{r}{p}\right)^2=N-\frac{2p^2}{P^2r^2} \tag{20}$$

où N est une fonction arbitraire de σ. Multiplions cette équation par $\frac{A}{p^2}$, et ajoutons-la à (19); il viendra:

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{r}{p}\frac{p^2}{A}\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{r}{p}\right)=\frac{NA}{p^2}=N\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{p}\frac{\partial\vartheta}{\partial\sigma}\right)$$

et nous avons une seconde intégrale:

$$\frac{pr}{A}\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{r}{p}=M+\frac{N}{p}\frac{\partial\vartheta}{\partial\sigma} \tag{21}$$

M étant fonction de σ. Le même multiplicateur prépare une troisième intégration, qui donne:

$$\left(\frac{r}{p}\right)^2=L+\frac{2M}{p}\frac{\partial\vartheta}{\partial\sigma}+\frac{N}{p^2}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\sigma}\right)^2 \tag{22}$$

ou, d'après (13):

$$r^2=L\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\rho}\right)^2+2M\frac{\partial\vartheta}{\partial\rho}\frac{\partial\vartheta}{\partial\sigma}+N\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\sigma}\right)^2$$

ou bien, en revenant aux variables indépendantes ϑ, s:

$$1=L\left(\frac{\partial\sigma}{\partial s}\right)^2-2M\frac{\partial\rho}{\partial s}\frac{\partial\sigma}{\partial s}+N\left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)^2$$

d'où nous tirons la valeur

$$s=\int_{(\vartheta)}\sqrt{L\,d\sigma^2-2M\,d\rho\,d\sigma+N\,d\rho^2} \tag{23}$$

en dénotant par la lettre (ϑ) en bas du signe intégrale, que les variations $d\rho$, $d\sigma$ sont liées par la relation $\vartheta=\text{const.}$, notation dont nous nous servirons plusieurs fois encore plus bas.

Les quantités L, M, N, P, ne sont pas toutes indépendamment arbitraires. En effet, en éliminant A et $\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{r}{p}$ entre les équations (17), (20), (21), on trouve:

$$\frac{2}{P^2}=\frac{Nr^2}{p^2}-\left(M+\frac{N}{p}\frac{\partial\vartheta}{\partial\sigma}\right)^2 \tag{24}$$

et en substituant la valeur (22):

$$\frac{2}{P^2}=LN-M^2.$$

Maintenant on peut prendre à volonté ϑ, fonction de ρ, σ. On en déduit s d'après (23), et puis u, v d'après (10), (13), (14), (15), enfin λ, μ d'après (7), (8). Donc, s'il ne s'agit que de déterminer explicitement les fonctions, qui répondent au cas de l'existence d'une première intégrale linéaire, la solution est accomplie. Pour l'appliquer, cependant, à notre problème de mécanique, il faut déterminer préalablement ρ et σ en accord avec les valeurs données de u et de v. Les conditions à remplir par ρ, σ doivent être équivalentes au système (11), (12), et peuvent être réprésentées par les équations (9), (14), (24). En y introduisant ϑ, s comme variables indépendantes, nous les écrivons:

$$v\frac{\partial}{\partial s}\left(r\frac{\partial\sigma}{\partial s}\right)+\frac{\partial}{\partial s}\left(r\frac{\partial\sigma}{\partial\vartheta}\right)=0 \tag{25}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\vartheta}\frac{\partial\sigma}{\partial s}-\frac{\partial\rho}{\partial s}\frac{\partial\sigma}{\partial\vartheta}=\frac{1}{r}=\frac{P}{u_1} \tag{26}$$

$$N=\frac{2}{P}\left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)^2-\left(N\frac{\partial\sigma}{\partial s}-M\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)^2. \tag{27}$$

Comme σ peut être remplacé par une fonction de σ quelconque, la fonction P ne contribue en rien à la généralité. Posons donc $P=1$; $r=u_1$. L'équation (25) ne contiendra qu'une seule inconnue. Elle serait immédiatement intégrable, si v était fonction de ϑ seulement. Pour augmenter encore l'étendue de cette solution, nous passons aux variables indépendantes ϑ, η, où $\eta=$const. est l'intégrale de l'équation

$$ds=v\,d\vartheta$$

l'équation (25) se réduira à

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(u_1\frac{\partial\sigma}{\partial\vartheta}\right)=u_1\frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial\sigma}{\partial\eta}.$$

Maintenant si la quantité

$$u_1\frac{\partial v}{\partial s}=u_1\frac{\partial}{\partial\vartheta}\log\frac{\partial s}{\partial\eta}$$

est fonction de ϑ seulement, on trouve en intégrant deux fois:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\vartheta}=\sigma\frac{\partial}{\partial\vartheta}\log\frac{\partial s}{\partial\eta}+\frac{\varphi(\vartheta)}{u_1}$$

$$\sigma=\frac{\partial s}{\partial\eta}\left\{\int_{(\eta)}\frac{\varphi(\vartheta)\,d\vartheta}{u_1\frac{\partial s}{\partial\eta}}+\psi(\eta)\right\}.$$

Supposons que σ soit trouvé; l'équation (26) donnera immédiatement la valeur la plus générale

$$\rho=\int_{(\sigma)}\frac{d\vartheta}{u_1\frac{\partial\sigma}{\partial s}}+\chi(\sigma).$$

On voit par cette expression, que $Nd\rho$ jouit de la même généralité que $Nd\rho - Md\sigma$; c'est pourquoi l'équation (27) peut être écrite aussi:

$$N = 2\left(\frac{\partial\sigma}{\partial s}\right)^2 + N^2\left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)^2$$

ou en substituant $\frac{Nd\sigma}{\sqrt{2}}$ à $d\sigma$:

$$\frac{\partial\rho^2 + \partial\sigma^2}{\partial s^2} = \frac{1}{N}.$$

La condition de l'existence d'une première intégrale linéaire est donc que le premier membre de cette équation, pour quelque détermination des fonctions arbitraires dans les expressions générales de ρ et de σ, soit fonction de σ seulement.

5. Intégration complète pour le cas d'une première intégrale linéaire.

Les transformations précédentes serviront à déterminer explicitement en fonction d'une seule variable σ le temps t et le paramètre ϑ. En effet, lorsqu'on élimine s' au moyen de la relation des différentielles

$$ps' = q\vartheta' + r\sigma'$$

les équations (6), (3) déviennent:

$$(p\lambda + q\mu)\vartheta' + r\mu\sigma' = hp \tag{28}$$

$$(p^2u + pqv + \tfrac{1}{2}q^2)\vartheta'^2 + r(pv + q)\vartheta'\sigma' + \tfrac{1}{2}r^2\sigma'^2 = kp^2.$$

La dernière équation peut, en vertu des valeurs (7), (8) de λ, μ, être écrite aussi:

$$(p\lambda + q\mu)\vartheta'^2 + 2r\mu\vartheta'\sigma' + r^2\sigma'^2 = 2kp^2.$$

En éliminant ϑ' au moyen de la première équation, on obtient:

$$2k(p\lambda + q\mu) - h^2 = \frac{r^2\sigma'^2}{p^2}(p\lambda + q\mu - \mu^2) \tag{29}$$

Or les équations

$$pv + q = \mu, \quad Av + B = 0$$

donnent successivement d'après (18), (21):

$$\mu = q - \frac{pB}{A} = -\frac{p^2}{A}\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{r}{p} = -\frac{1}{r}\left(Mp + N\frac{\partial\vartheta}{\partial\sigma}\right). \tag{30}$$

De plus, on a d'après (7), (8), (10), (14):

$$p\lambda + q\mu = p^2(2u - v^2) + (pv + q)^2 = \frac{2p^2}{r^2P^2} + \mu^2$$

et, en substituant la valeur précédente de μ, en vertu de (24):

$$p\lambda + q\mu = N \tag{31}$$

donc l'équation (29) se réduit à

$$2kN - h^2 = \frac{2\sigma'^2}{P^2}$$

d'où l'on tire:

$$t = \int \frac{d\sigma}{P\sqrt{kN - \frac{1}{2}h^2}}. \tag{32}$$

Enfin on trouve d'après (30), (28):

$$\begin{aligned} N\vartheta' &= N\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\rho}\rho' + \frac{\partial\vartheta}{\partial\sigma}\sigma'\right) \\ &= p(N\rho' - M\sigma') - r\mu\sigma' \\ &= p(N\rho' - M\sigma') + (p\lambda + q\mu)\vartheta' - hp \end{aligned}$$

par conséquent, à cause de (31):

$$N\rho' = M\sigma' + h.$$

Donc on a:

$$\rho = \frac{h}{N}t + \int \frac{M}{N}d\sigma. \tag{33}$$

Maintenant les quantités ϑ et s étant connues en ρ, σ; le mouvement est déterminé par (32) et (33).

Dimostrazione di un teorema di Cauchy

(*per* GIULIO ASCOLI, *a Milano*.)

Teorema: L'equazione

$$\frac{du}{dz} = f(u, z),$$

ove $f(u, z)$ è funzione sinettica di u e di z intorno $u = 0$ e $z = 0$, ammette uno ed un solo integrale u sinettico intorno $z = 0$, annullantesi con z.

CAUCHY, cui è dovuto questo teorema, e poi i signori BRIOT e BOUQUET lo dimostrarono col metodo dei limiti. In ciò che segue lo stesso teorema è dimostrato col metodo degli infinitesimi.

Sia O il polo nel piano rappresentativo dei punti z, per O tiro tanti raggi Oa, Ob, $Oc, \ldots$, infinitamente vicini, ed integro la equazione

$$du = f(u, z)\, dz \tag{1}$$

lungo ciascuno di questi in modo: 1° da non uscire dalla porzione di piano circostante il punto O ed entro la quale la $f(u, z)$, considerata nella sua dipendenza da z, è funzione sinettica di quest'ultima; 2° di non pigliare mai per u valori diversi da quelli pei quali il coefficiente $f(u, z)$ conserva il carattere di funzione monodroma finita e continua.

Ora egli è manifesto che il sistema di valori deposti intorno ad O nel modo indicato è ad un sol valore e finito: dimostriamo che è altresì continuo e monogeno. A tal fine consideriamo due raggi $Om = On = \rho$ inclinati l'uno dell'angolo θ sull'asse OZ, l'altro dell'angolo $\theta + \Delta\theta$, e sia u il valore dell'integrale deposto in m, procedendo nel modo indicato. Se si considerano come corrispondenti i punti dei due raggi Om, On che distanno egualmente da O, è chiaro che mentre un punto qualsivoglia sopra Om è l'indice del numero complesso z, il corrispondente sovra On è indice della quantità $z \cdot e^{\Delta\theta \cdot i}$; quindi se nella equazione (1) per z pongo $z \cdot e^{\theta i}$, avrò riferiti i mutamenti di z lungo On a quelli lungo Om; voglio dire con ciò che facendo muovere il punto z lungo Om, io troverò i valori dell'integrale deposti sovra On, i quali indicherò con $u+\Delta u$, essendo u i valori lungo Om nei punti corrispondenti a quelli di On.

Ciò posto, l'equazione (1) prende la forma

$$\frac{d(u+\Delta u)}{dz} = e^{\Delta\theta \cdot i} f(u+\Delta u,\ z e^{\Delta\theta \cdot i}). \tag{2}$$

Ora

$$e^{\Delta\theta \cdot i} = 1 + k \cdot \Delta\theta \cdot i, \tag{3}$$

ove k è quantità che diventa eguale ad 1 per $\Delta\theta$ infinitesimo; laonde sostituendo la (3), nella (2) si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{du}{dz} + \frac{d\Delta u}{dz} &= (1+k \cdot \Delta\theta \cdot i) f(u+\Delta u,\ z+k \cdot z \cdot \Delta\theta \cdot i) = \\ &= (1+k \cdot \Delta\theta \cdot i)[f(u+\Delta u,\ z) + f'_z(u+\Delta u,\ z) k \cdot z \cdot \Delta\theta \cdot i + \cdots].\end{aligned}$$

Se supponiamo ora che $\Delta\theta$ diventi $d\theta$, l'equazione precedente diventa, trascurando le quantità infinitesime d'ordine superiore al primo,

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta u}{dz} + \frac{du}{dz} &= f(u+\Delta u,\ z) + f(u+\Delta u,\ z) d\theta \cdot i + f'_z(u+\Delta u,\ z) z \cdot d\theta i \\ &= f(u,\ z) + f'_u(u,\ z)\Delta u + \cdots \\ &+ f(u,\ z) \cdot d\theta \cdot i + \cdots \\ &+ f'_z(u,\ z) z\, d\theta \cdot i + \cdots\end{aligned}$$

Ora

$$\frac{du}{dz} = f(u,\ z),$$

quindi

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta u}{dz} &= f'_u(u,\ z)\Delta u + \cdots \\ &+ f(u,\ z) d\theta \cdot i + \cdots \\ &+ f'_z(u,\ z) z \cdot d\theta \cdot i + \cdots\end{aligned} \tag{4}$$

Giunto in m, percorrendo la Om, col valore u dell'integrale, se mi portassi lungo il latercolo mn in n, quivi il valore dell'integrale sarebbe eguale ad u più il prodotto di $f(u,\ z)$ per la quantità complessa rappresentata in grandezza e direzione da mn, cioè per la quantità $z \cdot i \cdot d\theta$.

Ma questo prodotto, che indicherò con du, soddisfà alla (4) come Δu, perchè la derivata di esso rispetto a z è

$$f'_z(u, z) i \cdot z d\theta + f(u, z) i \cdot d\theta + f'_u(u, z) z \cdot i \cdot d\theta \frac{du}{dz} =$$
$$f'_z(u, z) i \cdot z \cdot d\theta + f(u, z) i \cdot d\theta + f'_u(u, z) du.$$

Δu e du non possono dunque differire tra loro che d'una costante rispetto a z; ma entrambi si annullano con z, dunque la costante è zero. E però i valori di u deposti lungo due rette successive si connettono con continuità, quindi la funzione costruita nel modo indicato è anche continua.

È poi monogena perchè la sua derivata $\frac{du}{dz}$ ha lo stesso valore in ciascun punto lungo due direzioni, p. e. nel punto m lungo la retta Om e lungo la mn.

Risulta altresì manifesto dalla dimostrazione precedente che l'equazione (1) ammette un unico integrale nell'intorno di $z = 0$, annullantesi con z, il quale è sinettico.

Milano, gennaio 1871.

Sur la rectification des lignes de courbure d'un ellipsoïde

(*par Mr.* Michael Roberts, *à Dublin.*)

Dans le tome 2^e^ de ce Journal j'ai données des formules qui conduisent à la comparaison des arcs des lignes de courbure d'un ellipsoïde, qui proviennent de l'intersection de cette surface avec un hyperboloïde gauche. Dans ce qui suit je me propose de présenter la solution complète du problème, en cherchant les formules dont dépend la comparaison des arcs des lignes de courbure, qui se trouvent situées sur un hyperboloïde à deux nappes.

Considérons maintenant le système des trois surfaces homofocales

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-b^2}+\frac{z^2}{a^2-c^2}=1 \tag{I}$$

$$\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}-\frac{z^2}{c^2-\mu^2}=1 \tag{II}$$

$$\frac{x^2}{\nu^2}-\frac{y^2}{b^2-\nu^2}-\frac{z^2}{c^2-\nu^2}=1 \tag{III}$$

où l'on suppose que $a>\sqrt{a^2-b^2}>\sqrt{a^2-c^2}$. On sait que l'élément de l'arc de la courbe d'intersection des surfaces (I) et (III) a pour expression $\sqrt{\frac{(a^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)}{(\mu^2-b^2)(c^2-{}^2\mu)}}\,d\mu$, et si l'on transforme cette valeur en posant

$$\xi^2=\frac{c^2-b^2}{a^2-b^2},\quad \xi'^2=\frac{a^2\xi^2}{c^2},\quad \xi''^2=\frac{(a^2-\nu^2)\xi^2}{c^2-\nu^2},\quad \mu^2=\frac{c^2-a^2\xi^2\sin^2\varphi}{1-\xi^2\sin^2\varphi},$$

on trouve, en désignant par s_φ l'arc qui dépend d'une amplitude ϕ, compté du sommet pour lequel $\mu = c$, et en écrivant

$$L(\phi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\xi^2\sin^2\varphi)(1-\xi'^2\sin^2\varphi)(1-\xi''^2\sin^2\varphi)}},$$

$$P(-\xi^2, \phi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1-\xi^2\sin^2\varphi)\sqrt{(1-\xi^2\sin^2\varphi)(1-\xi'^2\sin^2\varphi)(1-\xi''^2\sin^2\varphi)}},$$

l'expression

$$s_\varphi = \frac{a^2-c^2}{c\sqrt{(a^2-b^2)(c^2-\nu^2)}}\{(a^2-c^2)P(-\xi^2, \phi) - (a^2-\nu^2)L(\phi)\}.$$

Maintenant en supposant que les angles ϕ, ψ, χ, σ, τ soient liés par les équations

$$\cos\phi\cos\psi = \cos\sigma\cos\tau\cos\chi + \sin\sigma\sin\tau\sin\chi\,\nabla(\phi, \psi),$$
$$\cos\phi\cos\chi = \cos\sigma\cos\tau\cos\psi + \sin\sigma\sin\tau\sin\psi\,\nabla(\phi, \chi),$$

où $\nabla(\phi, \psi) =$

$$\frac{\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{(1-\xi^2\sin^2\psi)(1-\xi'^2\sin^2\psi)(1-\xi''^2\sin^2\psi)} - \sin\psi\cos\psi\sqrt{(1-\xi^2\sin^2\varphi)(1-\xi'^2\sin^2\varphi)(1-\xi''^2\sin^2\varphi)}}{\sin^2\varphi - \sin^2\psi},$$

j'ai démontré (voir ce Journal, t. 3^e^, page 76) qu'on a

$$P(-\xi^2, \phi) + P(-\xi^2, \psi) + P(-\xi^2, \chi) - P(-\xi^2, \sigma) - P(-\xi^2, \tau) =$$
$$\frac{\xi^4\sin\varphi\sin\psi\sin\chi\sin\sigma\sin\tau}{\sqrt{(1-\xi^2\sin^2\varphi)(1-\xi^2\sin^2\psi)(1-\xi^2\sin^2\chi)(1-\xi^2\sin^2\sigma)(1-\xi^2\sin^2\tau)}},$$

en sorte que, si s_φ, s_ψ, s_χ, s_σ, s_τ sont des arcs de la ligne de courbure dont il s'agit, on obtient

$$s_\varphi + s_\psi + s_\chi - s_\sigma - s_\tau =$$
$$\frac{(a^2-c^2)^2}{c\sqrt{(a^2-b^2)(c^2-\nu^2)}} \cdot \frac{\xi^4\sin\varphi\sin\psi\sin\chi\sin\sigma\sin\tau}{\sqrt{(1-\xi^2\sin^2\varphi)(1-\xi^2\sin^2\psi)(1-\sin^2\sin^2\chi)(1-\xi^2\sin^2\sigma)(1-\xi^2\sin^2\tau)}}.$$

Il est bon de remarquer que ξ, ξ', ξ'' sont inférieures à l'unité et qu'on a $\xi'' > \xi' > \xi$.

Maintenant soient z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 les coordonnées dirigées suivant l'axe des z des extremités variables des arcs s_φ, s_ψ, s_χ, s_σ, s_τ, on a

$$\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\xi^2\sin^2\varphi}} = \frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{(a^2-c^2)\sqrt{c^2-\nu^2}}z_1,$$

et ainsi pour les autres; d'où nous tirons

$$s_\varphi + s_\psi + s_\chi - s_\sigma - s_\tau = \frac{c^4(c^2-b^2)^2}{\{(a^2-c^2)(c^2-\nu^2)\}^3} z_1 z_2 z_3 z_4 z_5.$$

Dans l'expression que j'ai donnée pour la rectification des lignes de courbure de l'ellipsoïde (I) (voir ce Journal, t. 2^e, page 15) qui sont situées sur l'hyperboloïde gauche (II), les arcs sont comptés du sommet pour lequel $\nu=0$. Si l'on veut obtenir l'expression des arcs de cette courbe qui sont comptés du sommet pour lequel $\nu=b$, il faut mettre dans l'expression

$$\sqrt{\frac{(a^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}}\,d\nu,\quad \nu=\frac{b\mu\cos\varphi}{\sqrt{\mu^2-b^2\sin^2\varphi}}:$$

en sorte que ϕ s'annule quand $\nu=b$. Si s_φ désigne l'arc dont il s'agit, qui dépend d'une amplitude ϕ, en mettant

$$\eta''=\frac{b}{\mu},\quad \eta'=\sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{a^2-b^2}}\eta'',\quad \eta=\sqrt{\frac{c^2-\mu^2}{c^2-b^2}}\eta''$$

et en posant

$$L(\phi)=\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\eta^2\sin^2\varphi)(1-\eta'^2\sin^2\varphi)(1-\eta''^2\sin^2\varphi)}},$$

$$P(-\eta''^2,\phi)=\int_0^\varphi \frac{1}{1-\eta''^2\sin^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\eta^2\sin^2\varphi)(1-\eta'^2\sin^2\varphi)(1-\eta''^2\sin^2\varphi)}}$$

nous trouvons

$$s_\varphi=\frac{\mu^2-b^2}{\mu\sqrt{(a^2-b^2)(c^2-b^2)}}\{(a^2-\mu^2)L(\phi)+(\mu^2-b^2)P(-\eta''^2,\phi)\}.$$

En suivant la marche que nous venons d'indiquer, on trouve que les arcs correspondants aux angles ϕ, ψ, χ, σ, τ sont liés par l'équation

$$s_\varphi+s_\psi+s_\chi-s_\sigma-s_\tau=$$

$$\frac{(\mu^2-b^2)^2}{\mu\sqrt{(a^2-b^2)(c^2-b^2)}}\,\frac{\eta''^4\sin\varphi\sin\psi\sin\chi\sin\sigma\sin\tau}{\sqrt{(1-\eta''^2\sin^2\varphi)(1-\eta''^2\sin^2\psi)(1-\eta''^2\sin^2\chi)(1-\eta''^2\sin^2\sigma)(1-\eta''^2\sin^2\tau)}}.$$

Si y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 sont les coordonnées dirigées suivant l'axe des y des extremités variables des arcs qui figurent dans le premier membre de cette dernière équation, le second membre s'écrit de la manière suivante

$$\frac{b^4(c^2-b^2)^2}{\{(a^2-b^2)(\mu^2-b^2)\}^3}y_1y_2y_3y_4y_4.$$

Collège de la Trinité à Dublin, mars 1871.

Sur diverses conditions d'intégrabilité et d'intégration

(*par Mr.* Edouard Combescure, *à Montpellier.*)

---

§ 1. Intégration d'une expression contenant une fonction indéterminée de la variable indépendante et ses dérivées jusqu'à un ordre déterminé.

Soit

$$F(x, y, y', y'', \dots y^{(n)})$$

une fonction donnée, dans laquelle y est une fonction indéterminée de la variable indépendante x, et $y', y'', \dots y^{(n)}$ ses dérivées jusqu'à un certain ordre. La recherche des conditions pour que

$$\int F(x, y, y', y'', \dots y^{(n)})\, dx$$

soit intégrable, la fonction y demeurant indéterminée, est fondée principalement sur le procédé de l'intégration par parties, qui a l'inconvénient d'introduire dans le calcul des dérivées d'ordre supérieur à n, lesquelles doivent finalement disparaitre du résultat. La présence de ces derivées parasites conduit à partager l'équation de condition, à laquelle on arrive tout d'abord, en plusieurs autres, qui se réduisent à n distinctes, ainsi que l'a fait voir Joachimsthal dans un très-intéressant travail inséré au tome XXXIII du journal de Crelle. D'un autre côté Mr. Bertrand dans le tome II de son traité d'analyse, indique sommairement un procédé analogue à celui qu'on applique dans l'intégration des différentielles exactes; mais il se borne à cette simple indication, qu'il recommande au point de vue de la pratique, et qui constitue pourtant, ce me semble, le vrai point de vue théorique de la question, ainsi que je vais essayer de le montrer.

En désignant par f l'intégrale, de sorte que

$$\int F(x,\, y,\, y',\, y'',\ldots\, y^{(n)})\,dx = f(x,\, y,\, y',\ldots\, y'\ldots\, y^{(n-1)}),$$

on aura

$$F(x,\, y,\, y',\ldots\, y^{(n)}) = \frac{df}{dx} + y'\frac{df}{dy} + \cdots + y^{(n)}\frac{df}{dy^{(n-1)}}; \tag{1}$$

et cette équation devra être identique en considérant $x, y, y', \ldots y^{(n)}$, comme autant de variables indépendantes. Si l'on fait, pour abréger,

$$\Delta = \frac{d}{dx} + y'\frac{d}{dy} + y''\frac{d}{dy'} + \cdots + y^{(n)}\frac{d}{dy^{(n-1)}}$$

où les d désignent des différentiations partielles, et si l'on observe que, pour une fonction quelconque u, on a

$$\frac{d\cdot\Delta u}{dy^{(i)}} = \Delta\frac{du}{dy^{(i)}} + \frac{dy}{dy^{(i-1)}}, \tag{2}$$

le second terme du deuxième membre devant être supprimé lorsque i est égal à zéro, la différentiation partielle de l'équation (1) ou

$$F = \Delta f$$

donnera, en observant que f ne contient point $y^{(n)}$,

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dy^{(n)}} &= \frac{df}{dy^{(n-1)}}, \\
\frac{dF}{dy^{(n-1)}} &= \frac{df}{dy^{(n-2)}} + \Delta\frac{df}{dy^{(n-1)}}, \\
\frac{dF}{dy^{(n-2)}} &= \frac{df}{dy^{(n-3)}} + \Delta\frac{df}{dy^{(n-2)}}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{dF}{dy'} &= \frac{df}{dy} + \Delta\frac{df}{dy'}, \\
0 &= \Delta\frac{df}{dy}.
\end{aligned}$$

La première de ces relations montre que

$$F = P + y^{(n)}Q,$$

P et Q étant indépendants de $y^{(n)}$, et si l'on fait

$$\nabla = \frac{d}{dx} + y'\frac{d}{dy} + \cdots + y^{(n-1)}\frac{d}{dy^{(n-2)}},$$

de sorte que

$$\Delta = \nabla + y^{(n)} \frac{d}{dy^{(n-1)}},$$

la substitution de cette expression de F et de celle de Δ dans les équations précédentes, donnera immédiatement, par la comparaison des termes qui ne contiennent pas $y^{(n)}$, ainsi que de ceux qui sont multipliés par cette quantité, les deux groupes de relations

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dy^{(n-1)}} &= Q, \\
\frac{df}{dy^{(n-2)}} &= \frac{dP}{dy^{(n-1)}} - \nabla \frac{df}{dy^{(n-1)}}, \\
\frac{df}{dy^{(n-3)}} &= \frac{dP}{dy^{(n-2)}} - \nabla \frac{df}{dy^{(n-2)}}, \\
&\dots\dots\dots\dots \\
\frac{df}{dy} &= \frac{dP}{dy'} - \nabla \frac{df}{dy'}, \\
0 &= \frac{dP}{dy} - \nabla \frac{df}{dy};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dQ}{dy^{(n-1)}} &= \frac{d \cdot \frac{df}{dy^{(n-1)}}}{dy^{(n-1)}}, \\
\frac{dQ}{dy^{(n-2)}} &= \frac{d \cdot \frac{df}{dy^{(n-2)}}}{dy^{(n-1)}}, \\
&\dots\dots\dots\dots \\
\frac{dQ}{dy'} &= \frac{d \cdot \frac{df}{dy'}}{dy^{(n-1)}}, \\
\frac{dQ}{dy} & \quad \frac{d \cdot \frac{df}{dy}}{dy^{(n-1)}}.
\end{aligned}$$

Par une substitution de proche en proche, les équations du premier groupe reviennent à

$$\left.\begin{aligned}
\frac{df}{dy^{(n-1)}} &= Q, \\
\frac{df}{dy^{(n-2)}} &= \frac{dP}{dy^{(n-1)}} - \nabla Q = Q_1, \\
\frac{df}{dy^{(n-3)}} &= \frac{dP}{dy^{(n-2)}} - \nabla Q_1 = Q_2, \\
&\dots\dots\dots\dots \\
\frac{df}{dy} &= \frac{dP}{dy'} - \nabla Q_{n-2} = Q_{n-1}, \\
0 &= \frac{dP}{dy} - \nabla Q_{n-1} = Q_n;
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

et celles du second, d'après la notation introduite, peuvent s'écrire, en rejetant la première qui est identique,

$$\left.\begin{aligned} \frac{dQ}{dy^{(n-2)}} &= \frac{dQ}{dy^{(n-1)}}, \\ \frac{dQ}{dy^{(n-3)}} &= \frac{dQ}{dy^{(n-1)}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dQ}{dy} &= \frac{dQ_{n-1}}{dy^{(n-1)}}; \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

en y joignant

$$Q_n = 0,$$

on a ainsi n équations distinctes, auxquelles doivent satisfaire les fonctions données P et Q. Ces n équations expriment une partie des conditions d'intégrabilité de la fonction f; il est facile de montrer quelles entrainent les autres conditions requises. Si l'on fait suivre, en effet, les équations (4) de

$$0 = \frac{dQ_1}{dy^{(n-1)}},$$

et que dans le groupe ainsi complété, on ajoute à chaque équation la précédente opérée par ∇, on obtiendra

$$\begin{aligned} \nabla \frac{dQ}{dy^{(n-2)}} + \frac{dQ}{dy^{(n-3)}} &= \nabla \frac{dQ_1}{dy^{(n-1)}} + \frac{dQ_2}{dy^{(n-1)}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \nabla \frac{dQ}{dy'} + \frac{dQ}{dy} &= \nabla \frac{dQ_{n-2}}{dy^{(n-1)}} + \frac{dQ_{n-1}}{dy^{(n-1)}}, \\ \nabla \frac{dQ}{dy} &= \nabla \frac{dQ_{n-1}}{dy} + \frac{dQ_n}{dy^{(n-1)}}. \end{aligned}$$

Or, en ayant égard dans les premiers membres à la relation

$$\nabla \frac{du}{dy^{(i)}} + \frac{du}{dy^{(i-1)}} = \frac{d \cdot \nabla u}{dy^{(i)}},$$

et dans les seconds à celle-ci, équivalente,

$$\Delta \frac{du}{dy^{(i)}} = \frac{d \cdot \nabla u}{dy^{(i)}} - \frac{du}{dy^{(i-1)}},$$

l'une quelconque de ces équations pourra s'écrire

$$\frac{d\cdot\nabla Q}{dy^{(n-m)}}=\frac{d\cdot\nabla Q_{m-1}}{dy^{(n-1)}}\qquad=\frac{d\,Q_{m-1}}{dy^{(n-2)}}+\frac{d\,Q_m}{dy^{(n-1)}}$$

$$=\frac{d(\nabla Q_{m-1}+Q_m}{dy^{(n-1)}}=\frac{d\,Q_{m-1}}{dy^{(n-2)}}$$

d'où, à cause de (3)

$$\Delta\,Q_{m-1}+Q_m=\frac{dP}{dy^{(n-m)}},$$

résulte

$$\frac{d}{dy^{(n-m)}}\left(\frac{dP}{dy^{(n-1)}}-\nabla\,Q\right)=\frac{d\,Q_{n-1}}{dy^{(n-2)}},$$

c'est-à-dire, en ayant encore égard à (3),

$$\frac{d\,Q_1}{dy^{(n-m)}}=\frac{d\,Q_{m-1}}{dy^{(n-2)}}.$$

En donnant à m les valeurs 3, 4,... n, on aura le groupe

$$\frac{d\,Q_1}{dy^{(n-3)}}=\frac{d\,Q_2}{dy^{(n-2)}},$$

$$\frac{d\,Q_1}{dy^{(n-4)}}=\frac{d\,Q_3}{dy^{(n-2)}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d\,Q_1}{dy}\quad=\frac{d\,Q_{n-1}}{dy^{(n-2)}},$$

qui, complété par

$$0=\frac{d\,Q_n}{dy^{(n-2)}},$$

et soumis aux mêmes transformations, donnera

$$\frac{d\,Q_2}{dy^{(n-4)}}=\frac{d\,Q_3}{dy^{(n-3)}},$$

$$\frac{d\,Q_2}{dy^{(n-5)}}=\frac{d\,Q_4}{dy^{(n-3)}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d\,Q_2}{dy}\quad=\frac{d\,Q_{n-1}}{dy^{(n-3)}};$$

et ainsi de suite.

Quant à ce qui concerne la variable x, on a, d'après (1),

$$\frac{df}{dx}=P-y^{(n-1)}Q_1-y^{(n-2)}Q_2-\cdots-y'Q_{n-1};$$

d'où

$$\frac{d^2f}{dx\,dy^{(n-m)}}=-y^{(n-1)}\frac{dQ_1}{dy^{(n-m)}}-y^{n-2}\frac{dQ_2}{dy^{(n-m)}}-\cdots-y'\frac{dQ_{n-1}}{dy^{(n-m)}}+\nabla Q_{m-1},$$

en se rappelant que

$$\frac{dP}{dy^{(n-m)}}-Q_m=\nabla Q_{m-1}.$$

En ayant égard aux conditions d'intégrabilité déja remplies, ceci peut s'écrire

$$\frac{d^2f}{dx\,dy^{(n-m)}}=-y^{(n-1)}\frac{dQ_{m-1}}{dy^{(n-2)}}-\cdots-y'\frac{dQ_{m-1}}{dy}+\nabla Q_{n-1},$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^2f}{dx\,dy^{(n-m)}}=\frac{dQ_{m-1}}{dx}.$$

Ainsi les n équations (4), où l'on comprend

$$Q_n=0,$$

sont nécessaires et en même temps suffisantes pour assurer l'intégrabilité de la fonction f. On aura donc

$$\left.\begin{aligned} f=\int\{(P-y'Q_{n-1}-y''Q_{n-2}-\cdots-y^{(n-1)}Q_1)\,dx+\\ +Q_{n-1}\,dy+Q_{n-2}\,dy'+\cdots+Q_1\,dy^{(n-2)}+Q\,dy^{(n-1)}\}.\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

On peut remarquer, à titre de vérification, que cette formule doit devenir identique si, au lieu de considérer x, y, y',... $y^{(m-1)}$ comme autant de variables indépendantes, on a égard aux liaisons

$$dy=y'dx,\quad dy'=y''dx,\ldots,\quad dy^{(n-1)}=y^{(n)}dx:$$

elle se réduit alors effectivement à

$$f=\int(P+y^{(n)}Q)\,dx.$$

La formule donnée par Poisson pour représenter l'intégrale, outre la présence de termes inutiles, introduits par l'intégration par parties et qui doivent disparaitre en vertu de la condition multiple d'intégrabilité, peut devenir illusoire dans un grand nombre de cas. En rejetant ces termes inutiles et adoptant les notations précédentes, la formule en question revient à

$$f=\int P_0\,dx+\int_0^1(y^{(n-1)}Q'+y^{(n-2)}Q'_1+\cdots+y\,Q'_{n-1})\,du,$$

en désignant par Q', $Q'_1,\ldots$ ce que deviennent les fonctions Q, $Q_1,\ldots$ quand on y remplace y, $y',\ldots\ y^{(n-1)}$ par uy, $uy',\ldots\ uy^{(n-1)}$, et P_0 étant ce que devient P lorsqu'on y suppose nulles toutes les quantités y, $y',\ldots\ y^{(n-1)}$. Or P peut devenir alors infini, et il peut en être de même de quelques unes des fonctions Q', $Q'_1,\ldots$ à la limite inférieure de l'intégrale. A cause de la forme indéterminée de y, ces circostances pourraient être facilement éliminées par des modifications connues; mais je préfère recourir à la considération suivante, qui a l'avantage de rattacher la formule de Poisson à une transformation plus générale. Soit

$$V=\int(X_1\,dx_1+X_2\,dx_2+\cdots+X_m\,dx_m),$$

x_1, $x_2,\ldots\ x_m$ étant des variables indépendantes et les fonctions X_1, $X_2\ldots$ vérifiants les conditions ordinaires

$$\frac{dX_i}{dx_j}=\frac{dX_j}{dx_i}.$$

Soient en même temps

$$\xi_1(x_1,\ x_2,\ldots\ x_m,\ t),\ldots,\ \xi_m(x_1,\ x_2,\ldots\ x_m,\ t)$$

m fonctions quelconques des variables indépendantes x_1, $x_2,\ldots\ x_m$ et d'une nouvelle variable indépendante t, telles que, pour $t=t_0$, ces fonctions soient indépendantes de x_1, $x_2,\ldots\ x_m$ et que, pour $t=t_1$, elles se réduisent respectivement à x_1, $x_2,\ldots\ x_m$, conditions qu'on peut remplir d'une infinité de manières. En désignant par X'_1, $X'_2,\ldots\ X'_m$ ce que deviennent X_1, $X_2,\ldots\ X_m$ lorsqu'on y remplace x_1, $x_2,\ldots\ x_m$ respectivement par les fonctions ξ_1, $\xi_2,\ldots\ \xi_m$, et appelant V' ce que devient V par cette même substitution, de façon que

$$V'=V(\xi_1,\ \xi_2,\ldots\ \xi_m),$$

$V(x_1,\ x_2,\ldots\ x_m)$ étant censée la fonction intégrale proposée, on aura

$$\frac{dV'}{dt}=X'_1\,\xi'_1+X'_2\,\xi'_2+\cdots+X'_m\,\xi'_m$$

où ξ'_1, $\xi'_2, \ldots$ sont les dérivées des fonctions ξ_1, $\xi_2, \ldots$ par rapport au paramètre indépendant t. Si l'on intègre entre les limites t_0 et t_1 et que l'on ait égard aux conditions ci-dessus, on aura

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_m) - V_0 = \int_{t_0}^{t_1} (X'_1 \xi'_1 + X'_2 \xi'_2 + \cdots + X'_m \xi'_m)\, dt,$$

V_0 étant une constante.

Une des substitutions les plus simples consiste à prendre

$$\xi_1 = a_1 + (x_1 - a_1)t, \quad \xi_2 = a_2 + (x_2 - a_2)t, \ldots, \quad \xi_m = a_m + (x_m - a_m)t,$$
$$t_0 = 0, \quad t_1 = 1,$$

a_1, $a_2, \ldots a_m$ étant des constantes quelconques. Dans ce cas

$$\xi'_1 = (x_1 - a_1), \quad \xi'_2 = x_2 - a_2, \ldots$$

et la fonction X_1, par exemple, étant écrite sous la forme

$$X_1(x_1, x_2, \ldots x_m),$$

on a

$$X'_1 = X_1[a_1 + (x_1 - a_1)t,\ a_2 + (x_2 - a_2)t, \ldots,\ a_m + (x_m - a_m)t].$$

On peut remarquer généralement, à propos de la formule usuelle pour l'intégration des différentielles exactes, savoir

$$V - V_0 = \int_{a_1}^{x_1} X_1\, dx_1 + \int_{a_2}^{x_2} X_2^{(0)}\, dx_2 + \cdots + \int_{a_m}^{x_m} X_m^{(00\cdots)}\, dx_m,$$

que l'on peut former différents groupes de termes consécutifs et les réduire séparément à une intégrale unique, en employant différents paramètres t, $t_1, \ldots$ pour les différents groupes, ainsi que des limites et des substitutions différentes, si on le juge à propos. En appliquant la substitution simple qui précède aux variables y, $y', \ldots y^{(n)}$ de la formule (5) et prenant a_1, $a_2, \ldots$ égaux à zéro, on retombe sur la formule de Poisson. On pourrait d'ailleurs comprendre P_0 sous le même signe intégral, en écrivant xu au lieu de x dans cette fonction. Quant au passage par l'infini on l'évitera, s'il se présente, en prenant pour u_1, $u_2, \ldots$ des nombres différents de zéro.

D'après la nature de la question qui fait l'objet du présent paragraphe, il est clair que l'on satisfait de la manière la plus générale aux équations (4), y compris

$$Q_n = 0,$$

en prenant

$$Q=\frac{d\varphi}{dy^{(n-1)}}, \quad P=\nabla\phi$$

ϕ étant une fonction arbitraire de x, y, y',... $y^{(n-1)}$. Ces équations fournissent ainsi l'exemple de l'impossibilité d'éliminer entre n équations aux différences partielles l'une des quantités P ou Q, considérés comme des inconnues, puisque alors la fonction arbitraire ϕ devrait satisfaire à une équation aux différences partielles, au moins, ce qui ne la laisserait plus arbitraire généralement.

§ 2. Extension de la question précédente.

L'analyse précédente s'étend, sans difficulté, au cas où l'on ferait figurer dans F plusieurs fonctions indéterminées de la variable indépendante x. Ainsi en prenant, pour fixer les idées, trois fonctions y, z, u et considérant la relation

$$\int F(x, y, y', \dots y^{(n)}, z, z', \dots z^{(p)}, u, u', \dots u^{(q)})dx = \\ = f(x, y, y' \dots y^{(n-1)}, z, z', \dots z^{(p-1)}, u, u', \dots u^{(q-1)}),$$

on verra, par les mêmes considerations que ci-dessus, que

$$F=P+Qy^{(n)}+Rz^{(p)}+Su^{(q)},$$

les fonctions P, Q, R, S ne contenant point $y^{(n)}$, $z^{(p)}$, $u^{(q)}$. En posant

$$\nabla=\frac{d}{dx}+y'\frac{d}{dy}+\dots+y^{(n-1)}\frac{d}{dy^{(n-2)}}+z'\frac{d}{dz}+\dots+z^{(p-1)}\frac{d}{dz^{(p-2)}}+ \\ +u'\frac{d}{du}+\dots+u^{(q-1)}\frac{d}{du^{(q-2)}},$$

on obtiendra les équations:

$$\frac{df}{dy^{(n-1)}}=Q \qquad\qquad \frac{df}{dz^{(p-1)}}=R,$$

$$\frac{df}{dy^{(n-2)}}=\frac{dP}{dy^{(n-1)}}-\nabla\phi \quad =Q_1, \qquad \frac{df}{dz^{(p-2)}}=\frac{dP}{dz^{(p-1)}}-\nabla R \quad =R_1,$$

. . . .

$$\frac{df}{dy} = \frac{dP}{dy'} - \nabla Q_{n-2} = Q_{n-1}, \quad \frac{df}{dz} = \frac{dP}{dz'} - \nabla R_{p-2} = R_{p-1},$$

$$0 = \frac{dP}{dy} - \nabla Q_{n-1} = Q_n; \qquad 0 = \frac{dP}{dz} - \nabla R_{p-1} = R_p;$$

$$\frac{df}{du^{(q-1)}} = S,$$

$$\frac{df}{du^{(q-2)}} = \frac{dP}{du^{(p-1)}} - \nabla S = S_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{df}{du} = \frac{dP}{du'} - \nabla S_{q-2} = S_{q-1},$$

$$0 = \frac{dP}{du} - \nabla S_{q-1} = S_q.$$

Les conditions d'intégrabilité, outre

$$Q_n = 0, \quad R_p = 0, \quad S_q = 0,$$

seront

$$\frac{dQ}{dy^{(n-1)}} = \frac{dQ_{i-1}}{dy^{(n-1)}}, \quad \frac{dR}{dz^{(p-j)}} = \frac{dR_{j-1}}{dz^{(p-1)}}, \quad \frac{dS}{du^{(q-k)}} = \frac{dS_{k-1}}{du^{(q-1)}} \tag{I}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dQ_{i-1}}{dz^{(p-i)}} &= \frac{dR}{dy^{(n-1)}}, \quad \frac{dQ_{i-1}}{du^{(q-1)}} = \frac{dS}{dy^{(n-1)}}, \\ \frac{dR^{j-1}}{dy^{(n-1)}} &= \frac{dQ}{dz^{(p-i)}}, \quad \frac{dR_{j-1}}{du^{(q-1)}} = \frac{dS}{dz^{(p-i)}}, \\ \frac{dS_{k-1}}{dy^{(n-1)}} &= \frac{dQ}{du^{(q-k)}}, \quad \frac{dS_{i-1}}{dz^{(p-1)}} = \frac{dR}{du^{(q-k)}}. \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

On verra, comme précédemment, que les équations qui forment chacun des groupes (I) entrainent toutes les conditions d'intégrabilité pour les variables qui correspondent à chacun de ces groupes respectivement. On peut voir, par le même procédé, que l'ensemble des groupes (II) entraine le reste des conditions requises. On a, en effet, d'après (II),

$$\nabla \frac{dR}{dy^{(n-i)}} + \frac{dR}{dy^{(n-i-1)}} = \nabla \frac{dQ_{i-1}}{dz^{(p-1)}} + \frac{dQ_i}{dz^{(p-1)}},$$

ou

$$\frac{d \cdot \nabla R}{dy^{(n-i)}} = \frac{d \cdot \nabla Q_{i-1}}{dz^{(p-1)}} - \frac{dQ_{i-2}}{dz^{(p-2)}} + \frac{dQ_i}{dz^{(p-1)}}$$

$$= \frac{d(Q_i + \nabla Q_{i-1})}{dz^{(p-1)}} - \frac{dQ_{i-1}}{dz^{(p-2)}}$$

$$= \frac{d^2 P}{dz^{(p-1)} dy^{(n-i)}} - \frac{dQ_{i-1}}{dz^{(p-2)}},$$

ou bien

$$\frac{dQ_{i-1}}{dz^{(p-2)}} = \frac{d}{dy^{(n-i)}} \left(\frac{dP}{dz^{(p-1)}} - \nabla R \right),$$

c'est-à-dire

$$\frac{dQ_{i-1}}{dz^{(p-2)}} = \frac{dR_1}{dy^{(n-i)}};$$

etc.

Quant à la variable x, elle n'entraine pas de conditions nouvelles. On voit d'après cela, que le nombre total des conditions est ici $3(n+p+q-1)$. En les supposant remplies, on aura

$$f = \int [M dx + Q_{n-1} dy + \cdots + Q dy^{(n-1)} + R_{p-1} dz + \cdots + R dz^{(p-1)} + \\ + S_{q-1} du + \cdots + S du^{(q-1)}]$$

où

$$M = P - Q_{n-1} y' - \cdots - Q_1 y^{(n-1)} - R_{p-1} z' - \cdots - S_1 u^{(q-1)}.$$

On peut remarquer que la question présente peut s'appliquer au cas où, introduisant, indépendamment de x, une nouvelle variable indépendante t, traitée comme une constante dans tout le calcul, on considérerait z comme la dérivée d'un certain ordre h, et relative à t, de la fonction principale y, en sorte que $z, z', \ldots z^{(p-1)}$ désigneraient

$$\frac{d^h y}{dt^h}, \frac{d^{h+1} y}{dt^{h+1}}, \ldots;$$

et de même u pourrait être considerée comme la dérivée, d'un certain ordre h', et relative à t (ou à une autre variable indépendante s), de la fonction principale y, et ainsi de suite. De façon que les conditions (I) (II), y compris toujours

$$Q_n = 0, \quad R_p = 0, \quad S_q = 0,$$

assurent alors une première intégration relativement à la variable indépendante x: la constante additionnelle introduite étant, bien entendu, une fonction arbitraire des variables indépendantes $t, s, \ldots$

Par exemple, si l'on considère l'expression

$$P+Q\frac{d^2y}{dx_1^2}+X_2\frac{d^2y}{dx_1dx_2}+X_3\frac{d^2y}{dx_1dx_3}+\cdots+X_n\frac{d^2y}{dx_1dx_n}$$

où x_1, x_2,... x_n sont des variables indépendantes et P, Q, X_2, X_3,... X_n des fonctions de ces variables et de

$$y,\quad \frac{dy}{dx_1},\quad \frac{dy}{dx_2},\ldots,\quad \frac{dy}{dx_n},$$

en posant

$$\frac{dy}{dx_1}=y,\quad \frac{dy}{dx_2}=y_2,\ldots\quad \frac{dy}{dx_n}=y_n$$

et

$$\nabla=\frac{d}{dx_1}+y_1\frac{d}{dy},\quad Q_1=\frac{dP}{dy_1}-\nabla Q;$$

les conditions pour que l'expression proposée puisse s'intégrer par rapport à x_1 seront

$$0=\frac{dP}{dy}-\nabla Q_1,\quad \frac{dQ}{dy}=\frac{dQ_1}{du_1},\quad \frac{dQ_1}{dy_2}=\frac{dX_2}{dy},$$

$$0=\frac{dP}{dy_2}-\nabla X_2,\quad \frac{dQ}{dy_2}=\frac{dX_2}{dy_1},\quad \frac{dQ_1}{dy_3}=\frac{dX_3}{dy},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{dP}{dy_n}-\nabla X_n,\quad \frac{dQ}{dy_n}=\frac{dX_n}{dy_1},\quad \frac{dQ_1}{dy_n}=\frac{dX_n}{dy},$$

$$\frac{dX_i}{dx_j}=\frac{dX_j}{dx_i};$$

et quand ces conditions seront remplies, la fonction intégrale sera

$$f=\int[M\,dx_1+Q_1\,dy+Q\,dy_1+X_2\,dy_2+\cdots+X_n\,dy_n]$$

où

$$M=P-Q_1y_1-X_2y_2-\cdots-X_ny_n.$$

§ 3. Sur l'équation $\frac{d^2 z}{dx\,dy} = f(z)$.

Je me propose de déterminer dans quels cas il est possible d'intégrer cette équation au moyen d'une expression contenant, en dehors de tout signe d'intégration irréductible, une fonction arbitraire de x et ses dérivées jusqu'à un ordre déterminé, la variable y pouvant entrer d'une manière quelconque dans l'intégrale.

Soit donc

$$z = \phi(x, y, \xi, \xi', \dots \xi^{(n)}),$$

ξ étant une fonction arbitraire de x et $\xi, \xi', \dots \xi^{(n)}$ ses dérivées successives. En posant

$$\frac{d\phi}{dy} = q, \quad \Delta = \frac{d}{dx} + \xi' \frac{d}{d\xi} + \dots + \xi^{(n)} \frac{d}{d\xi^{(n-1)}},$$

on devra avoir

$$\Delta q + \xi^{(n+1)} \frac{dq}{d\xi^{(n)}} = f(\phi);$$

d'où

$$\frac{dq}{d\xi^{(n)}} = 0, \quad \Delta q = f(\phi).$$

En différentiant la dernière équation par $\xi^{(n)}$ et ayant égard à la précédente, on aura

$$\frac{dq}{d\xi^{(n-1)}} = \frac{df}{d\xi^{(n)}};$$

d'où, par un nouvelle différentiation relative à $\xi^{(n)}$,

$$\frac{d^2 f}{(d\xi^{(n)})^2} = 0.$$

On a donc

$$f = A\xi^{(n)} + B,$$

A et B étant des fonctions arbitraires de $x, y, \xi, \xi', \dots \xi^{(n-1)}$. Si l'on désigne par F la fonction inverse de f, de sorte que

$$z = F(f),$$

on aura

$$q = F'(f)\frac{df}{dy} = F'(B + A\xi^{(n)}) \cdot \left(\frac{dB}{dy} + \frac{dA}{dy}\xi^{(n)}\right).$$

De là, à cause de

$$\frac{dq}{d\xi^{(n)}} = 0,$$

on tire

$$F'(f)\frac{dA}{dy} + F''(f) \cdot A\left(\frac{dB}{dy} + \frac{dA}{dy}\xi^{(n)}\right) = 0. \qquad (\alpha)$$

Si l'on suppose que $\frac{dA}{dy}$ est égal à zéro, il faut que $F''(f)$ soit aussi égal à zéro, sans quoi $\frac{dB}{dy}$ devrait être nul et par conséquent f, et par suite z ne dépendrait que de x. Ainsi lorsque A ne dépend point de y, on a

$$f = az + b$$

a et b étant des constantes. Je mettrai pour un moment cette hypothèse de côté.

Si $\frac{dB}{dy}$ est nul, on a

$$F'(f) + A\xi^{(n)}F''(f) = 0;$$

d'où, en différentiant par $\xi^{(n)}$ et observant que A ne peut être nul, puisque on raisonne dans l'hypothèse où f contient effectivement $\xi^{(n)}$,

$$2F''(f) + A\xi^{(n)}F'''(f) = 0,$$

et par suite

$$\frac{F'''(f)}{2F''(f)} = \frac{F''(f)}{F'(f)}.$$

On en conclut par une intégration facile

$$f = a + be^{mz},$$

a, b, m étant des constantes. On est encore ramené à cette forme en laissant à B toute son indétermination. Car, à cause de la forme arbitraire de ξ, on peut supposer $\xi^{(n)}$ aussi petit qu'on voudra; A et B restant finis; mais alors en mettant, dans (α), $B + A\xi^{(n)}$ au lieu de f et développant suivant les puissances de $\xi^{(n)}$, pour que cette quantité disparaisse, il faut que

$$F''(B)\cdot A\frac{dB}{dy}+F'(B)\frac{dA}{dy}=0,$$

$$\frac{F'''(B)}{1\cdot 2}\cdot A\frac{dB}{dy}+F''(B)\frac{dA}{dy}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

d'où

$$\frac{F'''(B)}{2F'(B)}=\frac{F''(B)}{F(B)}:$$

ce qui redonne la forme exponentielle.

D'après la forme de l'équation différentielle proposée, et, en excluant le cas où b serait nul, on peut supposer cette constante égale à l'unité et adopter finalement

$$\frac{d^2z}{dx\,dy}=a+e^{mz}.$$

Cela étant, on aura d'après la double expression de f

$$e^{mz}=B-a+A\xi^{(n)};$$

d'où

$$q=\frac{1}{m}\frac{\frac{dB}{dy}+\frac{dA}{dy}\xi^{(n)}}{B-a+A\xi^{(n)}},$$

et, comme q doit être indépendant de $\xi^{(n)}$, il faut que

$$\text{ou } B=a, \quad \text{ou } \frac{\frac{dB}{dy}}{B-a}=\frac{\frac{dA}{dy}}{A},$$

et, dans tous les cas,

$$q=\frac{d\cdot\log A}{dy}\cdot$$

De la seconde supposition résulte

$$B-a=\tilde{\omega}\cdot A$$

$\tilde{\omega}$ étant une fonction arbitraire de x, ξ, ξ',... $\xi^{(n-1)}$. On ne nuira pas à la généralité de la question, en considérant $\tilde{\omega}$ comme une fonction tout-à-fait quelconque de la simple variable x; mais alors, en posant

$$\xi=\psi+\lambda,$$

et observant que

$$f = a + A(\xi^n + \tilde{\omega}),$$

on aura

$$\xi^{(n)} + \tilde{\omega} = \psi^{(n)} + \lambda^{(n)} + \tilde{\omega},$$

et l'on peut, quelque soit $\tilde{\omega}$, prendre λ tel que

$$\lambda^{(n)} + \tilde{\omega} = 0,$$

la fonction ψ demeurant indéterminée. Ceci revient à dire que l'on peut supposer $\tilde{\omega}$ égal à zéro, et alors on a

$$B = a, \qquad f = u + A\xi^{(n)}.$$

Dès lors, en posant

$$\Delta_1 = \frac{d}{dx} + \xi' \frac{d}{d\xi} + \cdots + \xi^{(n-1)} \frac{d}{d\xi^{(n-2)}},$$

l'équation

$$\Delta q = f$$

donnera

$$\Delta_1 q = a, \quad \frac{dq}{d\xi^{(n-1)}} = A,$$

c'est-à-dire

$$\Delta_1 \frac{d \log A}{dy} = m a, \quad \frac{d^2 \log A}{dy\, d\xi^{(n-1)}} = m A.$$

En différentiant la première par $\xi^{(n-1)}$, on tire de là

$$\frac{d^2 \log A}{dy\, d\xi^{(n-2)}} + m \Delta_1 A = 0,$$

et, par la condition d'intégrabilité,

$$\Delta_1 \frac{dA}{d\xi^{(n-1)}} + 2 \frac{dA}{d\xi^{(n-2)}} = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$\Delta_1 \frac{d \cdot \log A}{d\xi^{(n-1)}} + \frac{d \cdot \log A}{d\xi^{(n-1)}} \cdot \Delta_1 \log A + 2 \frac{d \log A}{d\xi^{(n-2)}} = 0.$$

En la différentiant par y et ayant égard aux relations précédentes, elle revient à

$$-m \Delta_1 A + m A \Delta_1 \log A + \frac{d \cdot \log A}{d\xi^{(n-1)}} \cdot m a = 0,$$

et, comme les deux premiers termes se détruisent, il faut que a soit nul. L'équation est alors réduite a celle qu'a intégrée Mr. Liouville. Et, comme l'équation linéaire, qui s'est présentée ci-dessus, n'est intégrable, sous la forme requise, que lorsque b est nul, on arrive en définitive à la conclusion que, parmi les équations de la forme

$$\frac{d^2 z}{dx\,dy}=f(z),$$

il n'y a que les deux seuls types

$$\frac{d^2 z}{dx\,dy}=a, \quad \frac{d^2 z}{dx\,dy}=2e^z$$

(on peut toujours supposer $b=2$, $m=1$) dont l'intégrale puisse s'exprimer au moyen d'une fonction arbitraire de l'une des variables indépendantes et des dérivées de cette fonction jusqu'à un ordre déterminé: cette fonction et ses dérivées étant supposées non engagées dans un signe d'intégration irreductible.

§ 4. Sur un des premiers mémoires de Laplace.

Le mémoire de Laplace (Académie des sciences, 1773) relatif à l'intégration des équations linéaires aux différences partielles, est peut-être, par la profondeur et la variété des aperçus qu'il renferme, un de plus remarquables travaux dont l'analyse est redevable à ce grand géomètre.

On sait que, par le changement des variables indépendantes, l'auteur ramène toute équation linéaire du second ordre, à deux variables indépendantes, à l'un ou l'autre des deux types que voici:

$$\frac{d^2 z}{dx\,dy}=m\frac{dz}{dx}+n\frac{dz}{dy}+lz, \tag{I}$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2}=m\frac{dz}{dx}+n\frac{dz}{dy}+lz; \tag{II}$$

où l, m, n, sont des fonctions quelconques de x, y.

Or ces types peuvent être encore réduits par la substitution simple

$$z=\lambda V$$

V étant la fonction nouvelle. On peut alors dans l'un et l'autre type faire disparaître le dernier terme en prenant pour λ une solution particulière de l'équation. Ou bien, on peut faire disparaître l'une des deux dérivées premières dans le premier type, et la dérivée $\frac{dz}{dx}$ dans le second. Je ne considère pas ces remarques comme essentiellement nouvelles, mais comme elles ont pour effet d'introduire une certaine simplification dans les calculs de Laplace, j'ai pensé qu'il ne serait pas sans intérêt de revenir sur cet important travail. Je me bornerai cependant à la partie essentielle, bien que d'autres points du mémoire soient susceptibles de simplifications.

Je vais m'occuper uniquement de l'équation (I). En posant

$$z = e^{\int m dy} V,$$

on la transforme dans

$$\frac{d^2 V}{dx dy} = a \frac{dV}{dy} + bV \tag{I'}$$

où

$$a = n - \frac{d}{dx} \cdot \int m dy, \quad b = mn + l - \frac{dm}{dx} \cdot$$

Le signe $\int$ comportant ici une fonction additionnelle et arbitraire de la variable x, on peut en disposer, dans certains cas, pour introduire dans a quelque simplification: ainsi, par exemple, en écrivant

$$z = e^{X + \int_{y_0}^{y} m dy} V$$

où X est une fonction indéterminée de x seul, le coefficient a pourra lui-même s'écrire

$$a = n - \int_{y_0}^{y} \frac{dm}{dx} dy + X';$$

et, si

$$n - \int_{y_0}^{y} \frac{dm}{dx} dy$$

se réduit à une fonction de x seul, on pourra toujours choisir X de manière à faire évanouir le coéfficient a et à réduire par suite l'équation à une forme plus simple. Ceci arrivera, en particulier, si l'on a

$$\frac{dn}{dy}=\frac{dm}{dx},$$

car alors

$$a=n_0+X'$$

n_0 étant ce que devient n quand on y remplace y par la constante y_0.

En partant de la forme réduite (I′) je vais reprendre la question de LAPLACE, à savoir, « de satisfaire, quand c'est possible, à l'équation (I′) en prenant pour V une expression qui renferme, en dehors de tout signe d'intégration irréductible, une fonction arbitraire de x et les derivées jusqu'à un ordre déterminée: y pouvant d'ailleurs entrer d'une manière quelconque dans cette expression. »

Et d'abord il ne sera peut être pas inutile de rappeler le raisonnement très-simple qu'emploie l'auteur, pour démontrer que la fonction arbitraire et ses dérivées doivent entrer linéairement dans l'intégrale. Voici le fond du raisonnement:

$$V=\phi\,(x,\ y,\ \xi,\ \xi',\dots\ \xi^{(n)})$$

représentant l'intégrale, où ξ est la fonction arbitraire de x et ξ, $\xi',\dots\ \xi^{(n)}$ ses dérivées: si l'on donne à ξ une forme déterminée ξ_0, et que l'on désigne par ω une fonction arbitraire nouvelle, par i une constante infiniment petite, l'équation proposée sera satisfaite, quelque soit i, quand dans la précédente expression de V on fera la substitution

$$\xi=\xi_0+i\omega,\quad \xi'=\xi'_0+i\omega',\dots\quad \xi^{(n)}=\xi_0{}^{(n)}+i\omega^{(n)}.$$

En développant suivant les puissances de i, on aura

$$V=\phi_0+i\phi_1+i^2\phi_2+\cdots$$

où ϕ_1 contient linéairement ω, $\omega',\dots\ \omega^{(n)}$; et comme l'équation doit être verifiée quelque soit i, il faudra que

$$\frac{d^2\varphi_0}{dx\,dy}=a\frac{d\varphi_0}{dy}+b\phi_0,$$

$$\frac{d^2\varphi_1}{dx\,dy}=a\frac{d\varphi_1}{dy}+b\phi_1,$$

. . . .

Conséquemment, à cause de la forme linéaire de l'équation proposée,

$$V = \phi_0 + \phi_1$$

satisfera à cette même équation, et en sera l'intégrale générale, puisque cette expression de V renferme une fonction arbitraire de x; y étant censé entrer d'une manière quelconque dans $(\phi_0 + \phi_1)$.

L'auteur présente le raisonnement à propos des équations linéaires du premier ordre, où il peut, à la rigueur, être considéré comme suffisant, et il le suppose reproduit quand il passe aux équations du second ordre. Mais il me semble que, dans le dernier cas, il n'est pas tout-à-fait satisfaisant. En effet, il est clair qu'on satisfera à l'équation proposée non seulement en prenant

$$V = \phi_0 + \phi_1,$$

mais aussi

$$V = \phi_0 + k_1\phi_1 + k_2\phi_2 + \cdots + k_m\phi_m,$$

k_1, k_2,... k_m étant des constantes quelconques. La présence de la fonction arbitraire ω pourrait bien faire considérer ces deux expressions comme présentant la même généralité au point de vue de la seule variabilité de x; mais rien ne dit que la suppression des termes $k_2\phi_2, \ldots, k_m\phi_m$ ne nuit pas à la généralité de forme en ce qui concerne la variable y, forme qui, d'après la manière même dont la question est posée, doit conserver la plus grande indétermination possible. Il faudrait donc établir que, du moment que ϕ_1 vérifie l'équation proposée, ϕ_2, ϕ_3,... sont identiquement nulles, quelles que soient ω, ω',... $\omega^{(n)}$; mais il est clair que ceci reviendrait à supposer que l'intégrale d'où l'on est parti était déjà linéaire par rapport à la fonction ξ et ses dérivées.

Bien que la présence, sous forme linéaire, dans l'intégrale, de la fonction arbitraire et de ses dérivées puisse être conclue du développement ordinaire en série suivant les puissances de l'une de variables, cependant comme il s'agit ici d'un développement limité, il y aurait quelques inconvénients à faire usage de ce procédé.

Pour ces divers motifs il m'a paru utile de traiter la question par des considérations différentes, lesquelles rentrent en partie dans celles employées aux précédents paragraphes, ce qui explique le rapprochement, dans le présent écrit, de questions qui peuvent paraître hétérogènes. D'ailleurs on arrive par un calcul unique à la forme et à l'expression de l'intégrale.

Soit donc, comme ci-dessus,

$$V = \phi(x, y, \xi, \xi', \dots \xi^{(n)})$$

la fonction intégrale, et

$$\Delta = \frac{d}{dx} + \xi' \frac{d}{d\xi} + \xi'' \frac{d}{d\xi'} + \cdots + \xi^{(n)} \frac{d}{d\xi^{(n-1)}},$$

$$q = \frac{dV}{dy};$$

on aura

$$\frac{dV}{dx} = \Delta\phi + \xi^{(n+1)} \frac{d\varphi}{d\xi^{(n)}},$$

et l'équation proposée (I') deviendra

$$\xi^{n+1} \frac{dq}{d\xi^{(n)}} + \Delta q = aq + b\phi.$$

Comme $\xi^{(n+1)}$ n'entre dans cette équation autrement que comme facteur au premier terme, celle-ci se partage dans le deux

$$\frac{dq}{d\xi^{(n)}} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2\varphi}{dy\, d\xi^{(n)}} = 0,$$

$$\Delta q = aq + b\phi \tag{α}$$

qui doivent être identiques, en considerant x, y, ξ, ξ',... $\xi^{(n)}$ comme autant de variables indépendantes. En différentiant la dernière par $\xi^{(n)}$ et se rappelant que

$$\frac{d \cdot \Delta u}{d\xi^{(i)}} = \Delta \frac{du}{d\xi^{(i)}} + \frac{du}{d\xi^{(i-1)}},$$

on aura, en tenant en suite compte de la première,

$$\frac{dq}{d\xi^{(n-1)}} = b \frac{d\varphi}{d\xi^{(n)}}, \quad \frac{d^2\varphi}{(d\xi^{(n)})^2} = 0. \tag{β}$$

Cette dernière équation, rapprochée de celle qui donne l'autre dérivée 2^me^ de ϕ en y et $\xi^{(n)}$, montre que

$$\phi = \xi^{(n)} F(x, \xi, \xi', \dots \xi^{(n-1)}) + F_1(x, y, \xi, \xi', \dots \xi^{(n-1)})$$

F et F_1 désignant des fonctions arbitraires.

On ne nuira évidemment en rien à la généralité de la question primitive en considérant $F(x, \xi, \xi', \dots \xi^{(n-1)})$ comme une fonction tout-à-fait quelconque $F(x)$, de la simple variable x. Or quelle que soit cette fonction $F(x)$, on peut concevoir qu'on ait changé la variable indépendante x en une autre t, changement qui n'altère nullement la forme essentielle de l'équation (I'). Comme on a alors

$$\frac{d^n \xi}{d x^n} = \frac{d^n \xi}{d t^n} \frac{d t^n}{d x^n} + \cdots,$$

en déterminant la substitution des variables par la condition

$$d t = \frac{d x}{\sqrt[n]{F(x)}},$$

l'expression de ϕ prendra la forme

$$\phi = \frac{d^n \xi}{d t^n} + F_2\left(t, y, \xi, \frac{d\xi}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}\xi}{d t^{n-1}}\right),$$

en comprenant dans le signe arbitraire F_2 la partie additionnelle qui provient du changement de la variable indépendante et qui contient les dérivées $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d^2\xi}{dt^2}, \ldots$ jusqu'à l'ordre $(n-1)$ seulement. Il est donc permis de supposer, en revenant aux notations primitives,

$$\phi = \xi^{(n)} + \phi_1(x, y, \xi, \xi', \ldots \xi^{(n-1)});$$

on aura d'après cela

$$q_1 = q = \frac{d\varphi_1}{dy}, \tag{γ}$$

et la première (β) donnera

$$\frac{d q_1}{d \xi^{(n-1)}} = b. \tag{δ}$$

En posant généralement

$$\Delta_1 = \frac{d}{dx} + \xi' \frac{d}{d\xi} + \cdots + \xi^{(n-i)} \frac{d}{d\xi^{(n-i-1)}},$$

l'équation (α) qu'on peut écrire

$$\Delta_1 q + \xi^{(n)} \frac{d q_1}{d \xi^{(n-1)}} = a q_1 + b \phi_1 + b \xi^{(n)},$$

deviendra, à cause de (δ),

$$\Delta_1 q_1 = a q_1 + b \phi_1. \tag{α_1}$$

En différentiant par $\xi^{(n-1)}$, on en conclut

$$\frac{dq}{d\xi^{(n-2)}}=ab-\frac{db}{dx}+b\frac{d\varphi_1}{d\xi^{(n-1)}};$$

d'où, en comparant à (δ),

$$0=\frac{d^2\varphi_1}{(d\xi^{(n-1)})^2}:$$

et ceci, rapproché de (δ) ou

$$b=\frac{d^2\varphi_1}{dy\,d\xi^{(n-1)}},$$

fournit, par l'intégration immédiate,

$$\phi_1=\xi^{(n-1)}[\int b\,dy+\tilde{\omega}_1(x,\ \xi,\ \xi',\ldots\ \xi^{(n-2)})]+\phi_2(x,\ y,\ \xi,\ \xi',\ldots\ \xi^{(n-2)}),$$

$\tilde{\omega}_1$, ϕ_2 désignant des fonctions arbitraires. On peut, sans nuire à la généralité de la question, considérer $\tilde{\omega}$ comme une fonction tout à fait quelconque de la simple variable x, et la comprendre alors dans le signe indéfini d'intégration partielle $\int b\,dy$, qui comporte une fonction additionnelle et arbitraire de x. Ceci sera désormais sous-entendu dans les circonstances analogues. J'écrirai donc simplement

$$\phi_1=\xi^{(n-1)}\int b\,dy+\phi_2.$$

En posant

$$q_2=\frac{d\varphi_2}{dy}, \tag{γ_1}$$

on aura

$$q_1=b\xi^{(n-1)}+q_2:$$

et ces valeurs de ϕ_1 et q_1 introduites dans (α_1), où l'on écrira préalablement

$$\Delta_2+\xi^{(n-1)}\frac{d}{d\xi^{(n-2)}}$$

au lieu de Δ_1, conduiront, par la comparaison des termes qui contiennent $\xi^{(n-1)}$ et par celle de ceux qui sont indépendants de cette quantité, à

$$\frac{dq_2}{d\xi^{(n-2)}}=ab+b\int b\,dy-\frac{db}{dx}=b_1, \tag{δ_1}$$

$$\Delta_2 q_2=aq_2+b\phi_2. \tag{α_2}$$

En différentiant (α_2) par $\xi^{(n-2)}$, on aura

$$\frac{dq_2}{d\xi^{(n-3)}}=a\frac{dq_2}{d\xi^{(n-2)}}+b\frac{d\varphi_2}{d\xi^{(n-2)}}-\frac{db_1}{dx},$$

c'est-à-dire

$$\frac{dq_2}{d\xi^{(n-3)}} = ab_1 - \frac{db_1}{dx} + b\frac{d\varphi_2}{d\xi^{(n-2)}},$$

dont la comparaison avec (δ_1) donne

$$\frac{d^2\varphi_2}{(d\xi^{(n-2)})^2} = 0;$$

et ceci rapproché de (δ_1) ou

$$\frac{d^2\varphi_2}{dy\,d\xi^{(n-2)}} = b_1,$$

fournit

$$\varphi_2 = \xi^{(n-2)}\int b_1\,dy + q_3(x, y, \xi, \ldots \xi^{(n-3)}),$$

et par suite

$$\frac{dq_2}{d\xi^{(n-3)}} = ab_1 - \frac{db_1}{dx} + b\int b_1\,dy = b_2.$$

En posant

$$q_2 = \frac{d\varphi_2}{dy} = b_1\xi^{(n-1)} + \frac{d\varphi_3}{dy} = b_1\xi^{(n-1)} + q_3,$$

on aura de la même manière le groupe

$$q_3 = \frac{d\varphi_3}{dy},$$

$$\frac{dq_3}{d\xi^{(n-3)}} = b_2,$$

$$\Delta_3 q_3 = aq_3 + b\varphi_3;$$

et l'on arrivera de proche en proche à

$$q_{n-1} = \frac{d\varphi_{n-1}}{dy},$$

$$\frac{dq_{n-1}}{d\xi^1} = b_{n-2},$$

$$\Delta_{n-1}q_{n-1} = aq_{n-1} + b\varphi_{n-1},$$

où

$$b_{n-2} = ab_{n-3} - \frac{db_{n-3}}{dx} + b\int b_{n-3}\,dy,$$

$$\Delta_{n-1} = \frac{d}{dx} + \xi'\frac{d}{d\xi}.$$

On tirera de là, comme ci-dessus,

$$\phi_{n-1} = \xi' \int b_{n-2}\,dy + \phi_n(x,\, y,\, \xi),$$

$$q_{n-1} = \xi' b_{n-2} + q_n,$$

$$q_n = \frac{d\varphi_n}{dy};$$

$$\frac{dq_n}{d\xi} = a b_{n-2} - \frac{db_{n-2}}{dx} + b\int b_{n-2}\,dy = b_{n-1},$$

$$\Delta_n q_n = a q_n + b\phi_n, \text{ où } \Delta_n = \frac{d}{dx}.$$

La comparaison de $\frac{dq_n}{d\xi}$ et $\frac{dq_n}{dx}$ donnera

$$a\frac{dq_n}{d\xi} + b\frac{d\varphi_n}{d\xi} - \frac{db_{n-1}}{dx} = 0,$$

ou

$$ab_{n-1} + b\frac{d\varphi_n}{d\xi} - \frac{db_{n-1}}{dx} = 0;$$

d'où

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} = 0,$$

et par suite

$$\phi_n = \xi\int b_{n-1}\,dy + \phi_{n+1}(x,\, y),$$

$$b_n = ab_{n-1} + b\int b_{n-1}\,dy - \frac{db_{n-1}}{dx} = 0;$$

$$q_n = \xi b_{n-1} + \frac{d\varphi_{n+1}}{dy} = \xi b_{n-1} + q_{n+1},$$

$$\left.\begin{aligned} q_{n+1} &= \frac{d\varphi_{n+1}}{dy}, \\ \frac{d\varphi_{n+1}}{dx} &= a q_{n+1} + b\phi_{n+1}. \end{aligned}\right\} \qquad (\varepsilon)$$

L'expression définitive de ϕ sera donc

$$\phi = \xi^{(n)} + \xi^{(n-1)}\int b\,dy + \xi^{(n-2)}\int b_1\,dy + \cdots + \xi\int b_{n-1}\,dy + \phi_{n+1}$$

et il faudra déterminer ϕ_{n+1} par les deux équations (ε) qui, par l'élimination de q_{n+1}, ramènent précisément à l'équation (I'). Seulement, comme on a dégagé tout ce qui est relatif à la fonction arbitraire ξ, et que ϕ_{n+1} ne doit en conséquence dépendre en aucune manière de cette quantité; comme d'ailleurs la première partie de ϕ, (celle où figurent ξ et ses dérivées) ne contient rien d'arbitraire en ce qui concerne la variable y; que de plus cette partie s'annule avec ξ; il s'en suit que la question de trouver l'intégrale complète est ramenée, pour le moment, à satisfaire à l'équation (I') par une expression qui ne contienne rien d'arbitraire relativement à x: l'expression ainsi trouvée représentera ϕ_{n+1}. Mais on va voir, dans un instant, comment on est ramené aux formules définitives de Laplace, passablement simplifiées par la réduction préliminaire du type (I) à (I'), et nécessairement modifiées dans la notation.

Si l'on pose

$$\int b_i dy = c_i,$$

les équations qui définissent b_1, b_2,... b_{n-1} et $b_n = 0$, peuvent s'écrire

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dc}{dy} &= b, \\
\frac{dc_1}{dy} &= a\frac{dc}{dy} + bc \quad - \frac{d^2c}{dxdy}, \\
\frac{dc_2}{dy} &= a\frac{dc_1}{dy} + bc_1 \quad - \frac{d^2c_1}{dxdy}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{dc_{n-1}}{dy} &= a\frac{dc_{n-2}}{dy} + bc_{n-2} - \frac{d^2c_{n-2}}{dxdy}, \\
0 &= a\frac{dc_{n-1}}{dy} + bc_{n-1} - \frac{d^2c_{n-1}}{dxdy};
\end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

et comme, en faisant abstraction de ϕ_{n+1} on a alors

$$\phi = \xi^{(n)} + c\,\xi^{(n-1)} + c_1\,\xi^{(n-2)} + \cdots + c_{n-2}\,\xi' + c_{n-1}\,\xi,$$

ces relations (c) sont précisément celles que l'on trouverait, si, adoptant à priori la forme linéaire, on substituait directement cette expression de ϕ dans l'équation proposée et qu'on écrivit qu'elle est satisfaite quels que soient ξ, ξ',... $\xi^{(n)}$.

En posant généralement

$$V(u) = -\frac{d^2u}{dx\,dy} + a\frac{du}{dy} + bu$$

et mettant de côté le cas de $b=0$, dans lequel l'intégration est manifeste, on peut, si l'on veut, interpreter comme il suit les équations (c):

« Ayant calculé la quantité

$$c = \int b\,dy,$$

si l'on a

$$V(c) = 0,$$

l'équation proposé s'intègre avec une fonction arbitraire de x et sa première dérivée. $V(c)$ n'étant pas nul, si l'on calcule

$$c_1 = \int V(c)\,dy,$$

et que l'on ait

$$V(c_1) = 0,$$

l'équation s'intègre avec une fonction arbitraire et ses deux premières dérivées. Et ainsi de suite ».

Voici maintenant comment on est ramené aux formules de Laplace simplifiées. Si l'on pose

$$\frac{dc_1}{dy} = \frac{dc}{dy}c'_1, \quad \frac{dc_2}{dy} = \frac{dc}{dy}c'_2, \ldots, \quad \frac{dc_{n-1}}{dy} = \frac{dc}{dy}c'_{n-1},$$

le groupe (c) se transforme dans

$$\frac{dc}{dy} = b, \quad c'_1 = a + c - \frac{\frac{d^2c}{dx\,dy}}{\frac{dc}{dy}},$$

$$\left.\begin{aligned}
c'_2 &= (c'_1 - c)c'_1 + c_1 - \frac{dc'_1}{dx}, \\
c'_3 &= (c'_1 - c)c'_2 + c_2 - \frac{dc'_2}{dx}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
c'_{n-1} &= (c'_1 - c)c'_{n-2} + c_{n-2} - \frac{dc'_{n-2}}{dx}, \\
0 &= (c'_1 - c)c'_{n-1} + c_{n-1} - \frac{dc'_{n-1}}{dx};
\end{aligned}\right\}$$

et l'on déduit de (c') par la différentiation relative à y,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dc'_2}{dy} &= (c'_1 - c)\frac{dc'_1}{dy} + \frac{dc'_1}{dy}c'_1 - \frac{d^2c'_1}{dx\,dy},\\
\frac{dc'_3}{dy} &= (c'_1 - c)\frac{dc'_2}{dy} + \frac{dc'_1}{dy}c'_2 - \frac{d^2c'_2}{dx\,dy},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{dc'_{n-1}}{dy} &= (c'_1 - c)\frac{dc'_{n-2}}{dy} + \frac{dc'_1}{dy}c'_{n-2} - \frac{d^2c'_{n-2}}{dx\,dy},\\
0 &= (c'_1 - c)\frac{dc'_{n-1}}{dy} + \frac{dc'_1}{dy}c'_{n-1} - \frac{d^2c'_{n-1}}{dx\,dy}.
\end{aligned}\right\} \qquad (c')$$

De même, en posant

$$\frac{dc'_2}{dy} = \frac{dc'_1}{dy}c''_2,\quad \frac{dc'_3}{dy} = \frac{dc'_1}{dy}c''_3,\dots,\quad \frac{dc'_{n-1}}{dy} = \frac{dc'_1}{dy}c''_{n-1},$$

on déduira de (c') un groupe, analogue à (c'), dont la différentiation par y donnera un groupe (c''), analogue à (c'), etc. Comme, à chaque opération pareille, le nombre des équations affectées d'une accolade diminue d'une unité, en ne retenant que les deux qui sont écrites au dessus de (c') et les analogues qui correspondent à (c''), (c'''),..., on pourra remplacer (c) par le système équivalent

$$\frac{dc}{dy} = b,\quad c'_1 = a + c - \frac{\dfrac{d^2c}{dx\,dy}}{\dfrac{dc}{dy}},$$

$$c_i^{(i)} = 2c_{i-1}^{(i-1)} - c_{i-2}^{(i-2)} - \frac{\dfrac{d^2c_{i-1}^{(i-1)}}{dx\,dy}}{\dfrac{dc_{i-1}^{(i-1)}}{dy}},$$

où i doit recevoir les valeurs 2, 3,... $(n-1)$ et où $c_n^{(n)}$ doit être égalé à zéro. Donc en écrivant, pour simplifier la notation, λ_i au lieu de $c_i^{(i)}$, on aura

$$\frac{d\lambda}{dy} = b,\quad \lambda_1 = a + \lambda - \frac{d\cdot\log\dfrac{d\lambda}{dy}}{dx},$$

$$\lambda_i = 2\lambda_{i-1} - \lambda_{i-2} - \frac{d\cdot\log\dfrac{d\lambda_{i-1}}{dy}}{dx},$$

$$0 = 2\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2} - \frac{d\cdot\log\dfrac{d\lambda_{n-1}}{dy}}{dx}.$$

Lorsque a et b sont donnés, λ et λ_1 s'en déduisent au moyen des deux premières de ces formules. On peut en suite au moyen de la suivante équation calculer de proche en proche $\lambda_2, \lambda_3, \ldots$, et, pour que l'intégration, sous la forme supposée, soit possible, il faut qu'on arrive à une valeur λ_n identiquement nulle. C'est la relation qui doit exister entre a et b. En particulier lorsque a est nul, on arrive ainsi à une équation aux différences partielles, de plus en plus compliquée, à mesure que n augmente, à laquelle λ ou b doit satisfaire. On conçoit la difficulté pratique et souvent illusoire de ces essais. Si, prenant la question au rebours, ce qui est peut-être le véritable point de vue où l'on doit se placer, on veut trouver les équations intégrables avec une fonction arbitraire ξ et les n premières dérivées, il suffit de prendre pour λ_{n-1} une fonction arbitraire de x, y: on a alors

$$\lambda_{n-2} = 2\lambda_{n-1} - \frac{d\cdot\log\dfrac{d\lambda_{n-1}}{dy}}{dx},$$

et, au moyen de

$$\lambda_{i-2} = 2\lambda_{i-1} - \frac{d\cdot\log\dfrac{d\lambda_{i-1}}{dy}}{dx} - \lambda_i,$$

on peut calculer de proche en proche $\lambda_{n-3}, \lambda_{n-4}, \ldots \lambda_1, \lambda$, et enfin

$$b = \frac{d\lambda}{dy}, \quad a = \lambda_1 - \lambda + \frac{d\cdot\log\dfrac{d\lambda}{dy}}{dx}.$$

Quant à l'intégrale complète, le plus simple moyen pour l'obtenir est de suivre l'idée de Laplace. En mettant avec l'illustre auteur, pour plus de généralité, un terme additionnel bT, fonction donnée quelconque de x, y, de façon que l'équation proposée soit ici

$$bT = a\frac{dV}{dy} + bV - \frac{d^2V}{dx\,dy};$$

si l'on fait

$$\frac{dV}{dy} = b\,V_1,$$

cette équation devient

$$T = V + (\lambda_1 - \lambda)\,V_1 - \frac{dV_1}{dx};$$

d'où

$$\frac{dT}{dy} = \frac{d\lambda_1}{dy}\,V_1 + (\lambda_1 - \lambda)\,\frac{dV_1}{dy} - \frac{d^2V_1}{dx\,dy}:$$

ce qui, par la substitution

$$\frac{dT}{dy} = \frac{d\lambda_1}{dy}\,T', \quad \frac{dV_1}{dy} = \frac{d\lambda_1}{dy}\,V_2,$$

et en ayant égard aux relations entre les λ, conduit à

$$T' = V_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)\,V_2 - \frac{dV_2}{dx},$$

$$\frac{dT'}{dy} = \frac{d\lambda_2}{dy}\,V_2 + (\lambda_2 - \lambda_1)\,\frac{dV_2}{dy} - \frac{d^2V_2}{dx\,dy}.$$

Posant de même

$$\frac{dT'}{dy} = \frac{d\lambda_2}{dy}\,T'', \quad \frac{dV_2}{dy} = \frac{d\lambda_2}{dy}\,V_3,$$

on aura

$$T'' = V_2 + (\lambda_3 - \lambda_2)\,V_3 - \frac{dV_3}{dx},$$

$$\frac{dT''}{dy} = \frac{d\lambda_3}{dy}\,V_3 + (\lambda_3 - \lambda_2)\,\frac{dV_3}{dy} - \frac{d^2V_3}{dx\,dy};$$

et ainsi de suite. Comme on arrivera à λ_n qui est nul, on aura enfin

$$T^{(n-1)} = V_{n-1} - \lambda_{n-1}\,V_n - \frac{dV_n}{dx},$$

$$\frac{dT^{(n-1)}}{dy} = -\lambda_{n-1}\,\frac{dV_n}{dy} - \frac{d^2V_n}{dx\,dy}.$$

Cette dernière équation en désignant par $\eta(y)$ une fonction arbitraire de y, donnera

$$V_n = T^{(n)} + \int \eta(y)\,e^{-\int \lambda_{n-1}dx}\,dy + \xi(x),$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$T^{(n)} = -\int dy\, e^{-\int \lambda_{n-1} dx} \left[\int dx \frac{d\,T^{(n-1)}}{dy} e^{\int \lambda_{n-1} dx} \right].$$

En rapprochant ensuite les équations ci-dessus, on calculera V au moyen des formules

$$\left.\begin{aligned}
V_{n-1} &= \lambda_{n-1} V_n + \frac{d V_n}{dx} + T^{(n-1)},\\
V_{n-2} &= (\lambda_{n-2} - \lambda_{n-1}) V_{n-1} + \frac{d V_{n-1}}{dx} + T^{(n-2)},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
V_1 &= (\lambda_1 - \lambda_2) V_2 + \frac{d V_2}{dx} + T',\\
V &= (\lambda - \lambda_1) V_1 + \frac{d V_1}{dx} + T.
\end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{V})$$

$$\left.\begin{aligned}
T' &= \frac{dT}{dy} : \frac{d\lambda_1}{dy}\\
T'' &= \frac{dT_1}{dy} : \frac{d\lambda_2}{dy}\\
&\dots\dots\dots\dots\\
T^{(n-1)} &= \frac{d\,T^{(n-2)}}{dy} : \frac{d\lambda_{n-1}}{dy}
\end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{T})$$

On peut remarquer aussi que

$$\left.\begin{aligned}
V &= \int \frac{d\lambda}{dy} V_1 dy = \int \frac{d\lambda}{dy} dy \int \frac{d\lambda_1}{dy} V_2 dy = \cdots =\\
&= \int \frac{d\lambda}{dy} dy \int \frac{d\lambda_1}{dy} dy \cdots \int \frac{d\lambda_{n-1}}{dy} V_n dy.
\end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{W})$$

§ 5. Exemples et remarques relatifs au précédent paragraphe.

Lorsque l, m, n sont constants, il en est de même de a et b; mais la réciproque comporte plus de généralité à l'egard de l, m, n. Supposant, dans tous les cas, a et b constants, on aura

$$\lambda = by + X, \quad \lambda_1 = by + a,$$

X étant une fonction quelconque de x. On trouvera ensuite

$$\lambda_i = ia + by - (i-1)X$$

et la condition

$$\lambda_n = 0$$

exige que b soit égal à zéro: mais alors l'équation (I') est immédiatement intégrable.

Je vais examiner maintenant quelques cas relatifs à un point de vue en quelque sorte inverse de celui de LAPLACE.

Une des hypothèses les plus simples consiste à prendre

$$\lambda_{n-1} = F(x) + F_1(y).$$

Mais il est facile de voir qu'on arriverait à un type d'équations aux différences partielles qu'on ferait rentrer immédiatement, par un changement très-simple de variables, dans l'hypothèse où l'on prendrait simplement

$$\lambda_{n-1} = x + y.$$

On trouve alors

$$\lambda_{n-i} = i(x+y),$$

et en particulier

$$\lambda_1 = (n-1)(x+y), \quad \lambda = n(x+y);$$

par suite

$$b = n, \quad a = -(x+y)$$

et l'équation, en faisant dorénavant abstraction du terme T, est

$$\frac{d^2 V}{dx\,dy} + (x+y)\frac{dV}{dy} - nV = 0.$$

Elle devient immédiatement intégrable en la différentiant n fois de suite par rapport à y, et peut être dès lors considérée comme introduite à simple titre de vérification.

Soit actuellement

$$\lambda_{n-1} = \frac{\tilde{\omega}(x)}{x+y}$$

où $\tilde{\omega}(x)$ est une fonction donnée quelconque de x. En désignant par des accents les dérivées, on trouvera successivement

$$\lambda_{n-2} = -\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}} + \frac{2(\tilde{\omega}+1)}{x+y},$$

$$\lambda_{n-3} = -\frac{(\tilde{\omega}+1)'}{\tilde{\omega}+1} - 2\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}} + \frac{3(\tilde{\omega}+2)}{x+y},$$

$$\lambda_{n-4} = -\frac{(\tilde{\omega}+2)'}{\tilde{\omega}+2} - 2\frac{(\tilde{\omega}+1)'}{\tilde{\omega}+1} - 3\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}} + \frac{4(\tilde{\omega}+3)}{x+y},$$

. . . .

$$\lambda_1 = -\frac{(\tilde{\omega}+n-3)'}{\tilde{\omega}+n-3} - 2\frac{(\tilde{\omega}+n-4)'}{\tilde{\omega}+n-4} - \cdots - (n-2)\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}} + (n-1)\frac{\tilde{\omega}+n-2}{x+y},$$

$$\lambda = -\frac{(\tilde{\omega}+n-2)'}{\tilde{\omega}+n-2} - 2\frac{(\tilde{\omega}+n-3)'}{\tilde{\omega}+n-3} - \cdots - (n-2)\frac{(\tilde{\omega}+1)'}{\tilde{\omega}+1} -$$

$$- (n-1)\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}} + n\frac{\tilde{\omega}+n-1}{x+y}.$$

En posant

$$X = \tilde{\omega}(\tilde{\omega}+1)(\tilde{\omega}+2)\cdots(\tilde{\omega}+n-1),$$

on conclura, des expressions précédentes de λ_1 et λ,

$$b = -n\frac{\tilde{\omega}+n-1}{(x+y)^2},$$

$$a = \frac{X'}{X} - \frac{\tilde{\omega}+2n}{x+y};$$

et l'on aura en conséquence l'équation

$$\frac{d^2V}{dx\,dy} + \left[-\frac{X'}{X} + \frac{\tilde{\omega}+2n}{x+y}\right]\frac{dV}{dy} + n\frac{\tilde{\omega}+n-1}{(x+y)^2}\cdot V = 0.$$

Par la substitution

$$V = XW,$$

on la ramène au type plus simple, et que l'on peut prendre pour point de départ,

$$\frac{d^2W}{dx\,dy} + \frac{\tilde{\omega}(x)+2n}{x+y}\frac{dW}{dy} + n\cdot\frac{\tilde{\omega}(x)+n+1}{(x+y)^2}W = 0.$$

On obtiendra l'intégrale de cette dernière équation en calculant V au moyen des formules (V), où l'on prendra pour λ_{n-1}, $\lambda_{n-2}, \ldots \lambda_1$, λ les valeurs ci-dessus, et l'on aura en suite W par la formule

$$W = \frac{V}{\tilde{\omega}(\tilde{\omega}+1)\cdots(\tilde{\omega}+n-1)}.$$

Vu le petit nombre de cas où l'on sait intégrer, sous forme finie, les équations du second ordre, même linéaires, cet exemple n'est peut-être pas indigne d'attention, à cause de la simplicité relative de l'équation différentielle et de la généralité que lui donne la présence de la fonction arbitraire $\varpi(x)$. Lorsque $\varpi(x)$ se réduit à un nombre entier négatif, il faut faire subir aux formules précédentes quelques modifications, pourquoi elles pourraient paraître conduire à des résultats contradictoires. Ainsi, par exemple, si l'on supposait

$$\varpi = -(n-1),$$

en calculant V par les formules (V), on trouverait que la partie qui dépend de la fonction arbitraire $\eta(y)$ disparait, et que V se réduit simplement à $\xi^{(n)}$. Mais dans le cas présent il ne saurait y avoir de difficultés, puisque l'équation en W est immédiatement intégrable. Les modifications qu'il faudrait faire n'offrant pas de difficulté, je n'insiste pas d'avantage sur ce point, d'autant moins que Poisson a donné depuis longtemps l'intégrale générale de l'équation ci-dessus, lorsque au lieu de

$$\varpi + 2n \quad \text{et} \quad n(\varpi + n - 1)$$

on écrit des constantes quelconques, et que j'aurai à présenter tout-à-l'heure quelques remarques au sujet de l'intégrale de Poisson.

Revenant à la théorie générale, on peut se poser la question de savoir dans quels cas l'intégrale de l'équation (I) ou (I′) contient, en dehors de tout signe d'intégration irréductible, non seulement la fonction ξ et ses dérivées jusqu'à un ordre détérminé, mais encore la fonction arbitraire de y et ses dérivées jusqu'à un ordre aussi déterminé. En mettant de côté tout ce qui se rapporte à la fonction ξ et aux fonctions de x qui pourraient s'introduire par les intégrations partielles relatives à y, la partie de l'intégrale qui dépend de la fonction arbitraire $\eta(y)$, pourra être représentée par la formule (W). En posant

$$\mu = e^{-\int \lambda_{n-1} dx},$$

et désignant par $\theta(y)$ une fonction arbitraire de y, il faudra donc que l'on ait

$$\int \frac{d\lambda}{dy} dy \int \frac{d\lambda_1}{dy} dy \cdots \int \frac{d\lambda_{n-1}}{dy} dy \int \mu \cdot \eta(y) dy = A\theta + A_1\theta' + \cdots + A_m \theta^{(m)},$$

A, A_1,... étant des fonctions déterminées de x, y et les accents indiquant toujours les dérivées. En différentiant n fois de suite par rapport à y et ayant soin de diviser par $\frac{d\lambda}{dy}$ après la 1ère différentiation, par $\frac{d\lambda_1}{dy}$ après la 2me, et ainsi de suite, on arrivera évidemment à un résultat de la forme

$$\int \mu\ \eta(y)\,dy = M\theta + M_1\theta' + \cdots + M_p\theta^{(p)};$$

M, M_1,... étant indépendants de θ et de ses dérivées. On en tirera par une dernière différentiation, relative à y,

$$\eta(y) = \frac{1}{\mu}\Big\{M'\theta + (M'_1 + M)\theta' + (M'_2 + M_1)\theta'' + \cdots +$$
$$+ (M'_p + M_{p-1})\theta^{(p)} + M_p\theta^{(p+1)}\Big\}.$$

Il faudra donc, en désignant par h, h_1,... h_{p+1} des fonctions de y seul, que l'on ait

$$M' = \mu h,\ M_1' + M = \mu h_1, \ldots,\ M_p' + M_{p-1} = \mu h_p,\ M_p = \mu h_{p+1}.$$

Or de ces relations on tire successivement

$$M_{p-1} = -(\mu h_{p+1})' + \mu h_p,$$
$$M_{p-2} = (\mu h_{p+1})'' - (\mu h)' + \mu h_{p-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

les accents marquant les dérivées par rapport à y, et l'on arrive finalement à une équation linéaire entre μ et les quantités h, h_1,... h_{p+1}. D'après la forme connue de l'intégrale d'une pareille équation, en considérant μ comme fonction inconnue, on voit que l'on doit avoir

$$\mu = XY + X_1Y_1 + \cdots + X_rY_r,$$

les X étant des fonctions quelconques de x seul et les Y des fonctions quelconques de y seul. Telle est la forme nécessaire de μ, et il est facile de voir qu'elle ne doit par recevoir de plus grandes restrictions. En effet, comme, actuellement,

$$V_n = \int \mu\ \eta(y)\,dy = X\int Y\eta(y)\,dy + X_1\int Y_1\eta(y)\,dy + \cdots + X_r\int Y_r\eta(y)\,dy;$$

si l'on pose

$$\int Y\eta(y)\,dy = \eta_1(y),$$

d'où

$$\eta(y) = \frac{\eta_1'(y)}{Y},$$

l'intégration par parties donnera

$$\int Y_1 \eta(y)\, dy = \frac{Y_1}{Y}\eta(y) - \int \left(\frac{Y_1}{Y}\right)' \eta_1(y)\, dy.$$

En faisant

$$\int \left(\frac{Y_1}{Y}\right)' \eta_1(y)\, dy = \eta_2(y),$$

d'où

$$\eta_1(y) = \frac{\eta_2'(y)}{\left(\frac{Y_1}{Y}\right)'},$$

$$\eta(y) = \frac{1}{Y}\left[\frac{\eta_2'(y)}{\left(\frac{Y_1}{Y}\right)'}\right]',$$

et introduisant partout $\eta_2(y)$, on aura

$$V_n = X\frac{\eta_2'}{\left(\frac{Y_1}{Y}\right)'} + X_1\left[\frac{Y_1}{Y}\left(\frac{\eta_2'}{\left(\frac{Y_1}{Y}\right)'}\right)' - \eta_2\right] + X_2\int \frac{Y_2}{Y}\left(\frac{\eta_2'}{\left(\frac{Y_1}{Y}\right)'}\right)' dy + \cdots +$$

$$+ X_r \int \frac{Y_n}{Y}\left(\frac{\eta_2'}{\left(\frac{Y_1}{Y}\right)'}\right)' dy$$

Or, en intégrant par parties en commençant par le terme en X_2 jusqu'à la fin, on dégagera du signe $\int$, dans chacun de ces termes, les dérivés de η_2, et il restera, affectés de ce signe, des termes tels que

$$\int Y \eta_2(y)\, dy = \eta_3(y),$$

en mettant de côté un coefficient fonction de x. En remplaçant partout η_2 par $\frac{\eta_3'}{y}$, et appliquant d'une manière analogue l'intégration par parties, on reduira encore le nombre des termes affectés du signe $\int$: l'application suffisament répetée du même procédé conduira finalement à une expression de V_n contenant linéairement une fonction arbitraire de y et ses dérivées jusqu'à un ordre déterminé, et libre d'ailleurs de tout signe d'intégration. Comme d'autre part, d'aprés les relations (V), V se déduit de V_n par de simples différentiations, il est clair que l'expression définitive de V sera dégagée de tout signe d'intégration où la fonction arbitraire de y et ses dérivées seraient enveloppées.

D'aprés l'expression ci-dessus de μ, l'expression de λ_{n-1} d'où il faut partir est donc:

$$\lambda_{n-1} = -\frac{X' Y + X' Y_1 + \cdots + X_r' Y_r}{X Y + X_1 Y_1 + \cdots + X_r Y_r}.$$

Malgré de réductions qui s'opèrent successivement dans le calcul de λ_{n-2} $\lambda_{n-3}, \ldots \lambda_1$, λ, et l'introduction de certains déterminants dans les expressions que l'on rencontre, la formation définitive de l'équation aux différences partielles exige une discussion et des détails assez circonstanciés qui ne m'ont pas paru assez importants pour être rapportés. Je me bournerai à la remarque très-générale et assez évidente que: toute fonction rationelle de quantités de la nature de μ se réduisant toujours au rapport de deux fonctions de cette espèce, il en sera de même des coefficients a et b qui doivent figurer dans l'équation aux différences cherchée. D'où l'on peut conclure réciproquement que, en partant d'une équation aux différences où a et b seront de pareils rapports, on arrivera à une équation intégrable, sous la forme actuellement requise, en établissant toutefois des relations convenables entre les fonctions X introduites, et d'autres correspondantes entre les fonctions Y. Je m'arrête à cet aperçu, nécessairement un peu vague.

§ 6. **Remarques sur une intégrale donnée par Poisson.**

Comme suite des considérations précédentes sur les équations linéaires, je veux introduire dans ce dernier paragraphe quelques remarques destinées à préciser et à simplifier, en quelques point, l'importante formule intégrable donnée par Poisson dans le 19^{me} cahier du journal de l'*Ecole Polythecnique,* et qui est relative à l'équation

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\lambda}{x}\frac{du}{dx} + \frac{\mu}{x^2}\cdot u, \tag{1}$$

où λ et μ sont des constantes quelconques, que je supposerai réelles. La formule intégrale est, comme on sait,

$$\left.\begin{aligned}u=x^{k-\frac{1}{2}\lambda}\int_0^\pi \phi(y+x\cos\omega)\sin^{2k-1}\omega\,d\omega+\\ +x^{k'-\frac{1}{2}\lambda}\int_0^\pi \psi(y+x\cos\omega)\sin^{2k'-1}\omega\,d\omega,\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

où

$$k=\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)^2-\mu},\quad k'=\frac{1}{2}-\sqrt{\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)^2-\mu},$$

et où ϕ et ψ dèsignent des fonctions arbitraires. L'auteur considère d'abord le cas où les nombres k et k' sont réels et positifs, et en déduit l'intégrale, pour le cas particulier où k et k' deviennent égaux, en posant

$$k'=k+\delta,$$

développant, dans la formule (2), suivant les puissances de δ, et faisant ensuite tendre δ vers zéro, après avoir préalablement changé les signes arbitraires ϕ et ψ. Il serait peut-être plus simple de considérer l'hypothèse où k et k' sont imaginaires, parceque, par une transformation immédiate, on passe au cas où ces quantités coïncident. Soit donc

$$\sqrt{\mu-\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)^2}=\rho,\quad \text{et}\quad i=\sqrt{-1};$$

l'intégrale (2) peut s'écrire

$$u=x^{\frac{1-\lambda}{2}}\left\{x^{i\rho}\int_0^\pi \phi\cdot\sin^{2i\rho}\omega\cdot d\omega+x^{-i\rho}\int_0^\pi \psi\cdot\sin^{-2i\rho}\omega\cdot d\omega\right\};$$

en y remplaçant

$$(\sqrt{x}\sin\omega)^{2i\rho}$$

par

$$e^{2i\rho\log(\sqrt{x}.\sin\omega)}=\cos(\rho\log\cdot x\sin^2\omega)+i\sin(\rho\log\cdot x\sin^2\omega),$$

séparant la partie réelle et la partie multipliée par i, et écrivant en suite ϕ au lieu de $\phi+\psi$, ψ au lieu de $i(\phi-\psi)$, on obtient

$$\left.\begin{aligned}u=x^{\frac{1-\lambda}{2}}\int_0^\pi \phi(y+x\cos\omega)\cos(\rho\log x\sin^2\omega)\,d\omega+\\ +x^{\frac{1-\lambda}{2}}\int_0^\pi \psi(y+x\cos\omega)\sin(\rho\log\cdot x\sin^2\omega)\,d\omega\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

et l'on peut s'assurer, par la substitution directe, que cette expression vérifie l'équation (I) quelles que soient les valeurs réelles de λ et ρ.

Lorsque ρ devient infiniment petit, en écrivant ψ au lieu de $\rho\psi$, on a tout de suite

$$u = x^{\frac{1-\lambda}{2}} \int_0^\pi \phi(y + x\cos\omega)\, d\omega + x^{\frac{1-\lambda}{2}} \int_0^\pi \psi(y + x\cos\omega) \log(x \sin^2\omega)\, d\omega, \quad (4)$$

pour le cas où les nombres k et k' deviennent égaux. On vérifie d'ailleurs cette intégrale par une substitution directe. Mais les remarques que je voulais faire ont trait spécialement au cas où, les nombres k et k' étant réels, l'un d'eux est négatif. La partie de la formule (2) qui répond à ce nombre négatif k', devenant infinie à la limite inférieure de l'intégrale, ne peut plus être employée, et c'est en revenant au développement en série et par des transformations un peu longues, que Poisson arrive à lui substituer une autre expression qui n'offre plus le même inconvénient, mais qui est assez compliqué, comme l'auteur le fait lui-même observer. Peut-être y aurait-il avantage à faire usage des considérations suivantes.

Considérons le cas particulier où μ est égal à zéro: alors les équations (1) et (2) deviennent

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\lambda}{x}\frac{du}{dx}, \quad (5)$$

$$u = x^{1-\lambda} \int_0^\pi \phi(y + x\cos\omega) \sin^{1-\lambda}\omega\, d\omega + \int_0^\pi \psi(y + x\cos\omega) \sin^{1-\lambda}\omega\, d\omega. \quad (6)$$

Si λ est positif et compris entre 0 et 2, aucune des deux intégrales qui figurent dans l'expression de u ne devient infinie aux limites. Car, pour de tres-petites valeurs de ω, on a

$$\sin^{1-\lambda}\omega = \omega^{1-\lambda}(1 + \eta)$$

η étant infiniment petit avec ω, et, en intégrant dans le petit intervalle de 0 à ε, les portions correspondantes des intégrales définies peuvent être réduites à

$$\phi(y + x\cos\varepsilon_1)\, \varepsilon^{2-\lambda} \frac{1 + \eta_1}{2 - \lambda},$$

$$\psi(y + x\cos\varepsilon_2)\, \varepsilon^{\lambda} \frac{1 + \eta_2}{\lambda},$$

ε_1, η_1, ε_2, η_2 tendant vers zéro avec ε. Ces portions d'intégrales ont donc des limites nulles tant que λ est compris entre 0 et 2, sans atteindre l'une ou l'autre de ces quantités. D'ailleurs, pour $\lambda = 0$, on connait l'intégrale de la proposée, et, pour $\lambda = 2$, on peut aussi l'obtenir en termes finis par la méthode de Laplace. Le cas intermédiaire de $\lambda = 1$ est résolu par la formule (4). On reconnait en outre par la substitution directe que, si λ est compris toujours entre 0 et 2, l'équation (5) est vérifiée par la formule (6), ou par (4) si $\lambda = 1$.

Cela posé, si l'on différentie l'équation (5) par rapport à x et que l'on pose ensuite

$$\frac{du}{dx} = u',$$

l'équation obtenue pourra s'écrire

$$\frac{d^2 u'}{dy^2} = \frac{d^2 u'}{dx^2} + \frac{\lambda}{x}\frac{du'}{dx} - \frac{\lambda}{x^2} u',$$

et suivant que l'on fait

$$u' = xV, \quad \text{ou} \quad u' = x^{-\lambda} W,$$

on la transforme dans

$$\frac{d^2 V}{dy^2} = \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{\lambda + 2}{x}\frac{dV}{dx}, \tag{7}$$

ou dans

$$\frac{d^2 W}{dy^2} = \frac{d^2 W}{dx^2} - \frac{\lambda}{x}\frac{dW}{dx}. \tag{8}$$

La substitution

$$W = x^{\lambda}\frac{du}{dx}$$

fait donc dépendre l'intégration de l'équation (8) de celle de l'équation (5) qui ne diffère de (8) que par le changement de signe de λ. On peut donc toujours admettre que dans (5) λ est positif. Je supposerai de plus que λ est compris, dans cette même équation, entre 0 et 2, auquel cas les formules (6) et (4) (celle-ci pour $\lambda = 1$) donneront toujours l'intégrale générale. Cela étant, et en faisant usage de la seconde transformation, par les substitutions successives, écrites sur la gauche, on obtiendra les transformées correspondantes, écrites sur la droite:

$$u_1=\frac{1}{x}\frac{du}{dx},\qquad \frac{d^2u}{dy^2}=\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{\lambda}{x}\frac{du}{dx},$$

$$u_2=\frac{1}{x}\frac{du_1}{dx},\qquad \frac{d^2u_1}{dy^2}=\frac{d^2u_1}{dx^2}+\frac{\lambda+2}{x}\frac{du_1}{dx},$$

$$\frac{d^2u_2}{dy^2}=\frac{d^2u_2}{dx^2}+\frac{\lambda+4}{x}\frac{du_2}{dx},$$

. . . .

$$u_n=\frac{1}{x}\frac{du_{n-1}}{dx},\qquad \frac{d^2u_n}{dy^2}=\frac{d^2u_n}{dx^2}+\frac{\lambda+2n}{x}\frac{du_n}{dx}.$$

Donc, étant donnée l'équation

$$\frac{d^2U}{dy^2}=\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{\lambda+2n}{x}\frac{dU}{dx},$$

où λ est compris entre 0 et 2, son intégrale pourra être représentée par

$$U=\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\cdot\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\cdots\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\cdot\frac{1}{x}\frac{du}{dx}$$

u étant donné par (6), ou bien par (4) si $\lambda=1$.

En posant

$$x=\sqrt{\xi},$$

on donnera à l'intégrale cette forme plus concise

$$U=\frac{d^nu}{d\xi^{(n)}},$$

x étant remplacé par $\sqrt{\xi}$ dans (6) ou (4). Lorsque λ est différent de 1, on peut évidemment ne pas soumettre à la transformation précédente la seconde intégrale qui figure dans (6) et la conserver telle et quelle, à la condition bien entendu, d'y écrire $\lambda+2n$ au lieu de λ.

Dans le cas extrême de $\lambda=0$, comme l'équation (5) a pour intégrale

$$u=f(x+y)+F(x-y),$$

il résulte de ce qui précède que l'équation

$$\frac{d^2U}{dy^2}=\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{2n}{x}\frac{dU}{dx}$$

a pour intégrale

$$U=\frac{d^n}{d\xi^{(n)}}[f(\sqrt{\xi}+y)+F(\sqrt{\xi}-y)].$$

On ramène aisément au cas particulier qui vient d'être examiné, savoir celui où μ est nul, le cas général où l'équation est

$$\frac{d^2z}{dy^2}=\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{\alpha}{x}\frac{dz}{dx}+\frac{\beta}{x^2}z,$$

α et β étant des constantes quelconques, que je suppose ici réelles. Il suffit de poser

$$z=x^\theta\cdot u,$$

θ étant l'une des racines de l'équation

$$\theta^2+(\alpha-1)\theta+\beta=0:$$

l'équation se transforme dans

$$\frac{d^2u}{dy^2}=\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{\alpha+2\theta}{x}\frac{du}{dx}.$$

Il est presque superflu de faire remarquer que l'équation

$$\frac{du}{dy}=\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{\lambda}{x}\frac{du}{dx}+\frac{\mu}{x^2}\cdot u,$$

que POISSON considère dans le même Mémoire, se prête à des transformations et à des remarques analogues à celles qui viennent d'être indiquées dans le présent paragraphe.

Montpellier, 20 avril 1871.

NOTE AU § 1.

MM. BACH et STOFFEL ont traité (*) la question qui fait l'objet de ce paragraphe, par un méthode qui présente quelques points de contact avec la précédente, mais qui me parait moins naturelle, en ce sens que le résultat est donné, pour ainsi dire, à priori et soumis ensuite à une sorte de vérification. J'ajouterai que dans le cas de plusieurs fonctions y, z, u,... la marche adoptée par ces auteurs ne conduirait peut-être pas très-simplement aux conditions strictement nécessaires d'intégrabilité développées au § 2 du présent écrit.

(*) Journal de Liouville, 2e série, t. 7.

NOTE AU § 4.

Par une sorte d'ambiguité attribué au mot quelconque dans l'énoncé du problème qui fait l'objet spécial de ce paragraphe, j'avais confondu, lors de l'envoi du présent travail à la Rédaction, deux questions distinctes. LAPLACE s'est proposé évidemment de satisfaire à l'équation aux différences partielles au moyen d'une expression contenant une fonction arbitraire de x et ses dérivées jusqu'à l'ordre n, sans se préoccuper de la manière plus ou moins générale dont y pourrait figurer dans cette expression; tandis que, au point de vue où je me suis placé, rien, sauf la présence de la fonction arbitraire de x et de ses n premières dérivées, ne doit limiter l'indétermination de forme qui correspond à la présence de y dans l'expression intégrale. La réduction à la forme linéaire est due uniquement à l'apparition de certaines fonctions arbitraires de x que l'intégration partielle introduit et dont on peut disposer comme on l'entend, ainsi qu'à un certain changement de la variable indépendante x: comme on le voit dans mon analyse.

Cette remarque me parait essentielle, mais n'entraine pas une modification nécessaire du texte, où la question est envisagée théoriquement à un point de vue plus large que celui de LAPLACE: seulement elle dégage le raisonnement de l'auteur du reproche d'irrégularité que je semblais lui adresser.

Montpellier, 31 octobre 1871.

Evaluation du nombre de combinaisons desquelles les 28 dés d'un jeu du Domino sont susceptibles d'après la règle de ce jeu.

(*par feu Dr.* M. Reiss *à Francfort.*)

Le jeu du Domino comprend sept éléments qui se combinent à deux dans les différents dés, et en constituent les deux parties. La règle du jeu exige que deux dés consécutifs se touchent par des parties équivalentes. De là on conclut que l'élément initial est le même que l'élément final; c'est-à-dire, que la partie extérieure du premier dé et celle du dernier sont équivalentes. En effet, une combinaison des 28 dés étant conforme à la règle, elle ne cessera pas de l'être, lorsqu'on en écarte les dés doubles. Cette réduction faite, chaque élément fera partie de six dés, puisqu'il est combiné successivement avec chacun des six autres; par conséquent, l'élément initial doit se rencontrer encore en cinq autres endroits de la combinaison. Or, dans l'intérieur de celle-ci, chaque élément se présente toujours deux fois de suite; d'abord comme seconde partie d'un dé, puis comme première partie du dé suivant; l'élément initial ne pourra donc s'y rencontrer que quatre fois, et devra finalement se trouver à un endroit où il ne soit pas suivi de lui-même, c'est-à-dire, à l'autre extrémité de la combinaison.

L'identité des éléments extrêmes nous fait voir qu'une combinaison de laquelle les dés doubles sont exclus, étant repliée sur elle-même de manière à ce que les dés extrèmes viennent se toucher par leurs parties extérieures, tous les éléments s'y présenteront partout deux fois de suite, comme parties contigues de deux dés consécutifs; ce qui par conséquent, aura lieu à trois différentes reprises. Des combinaisons repliées de la façon décrite, soit que l'on en ait exclu les dés doubles, soit qu'on les y admette, seront nommées circulaires, tandis que les combinaisons non repliées seront comprises sous le nom de rectilignes. Les combinaisons circulaires ne possèdent pas de dés extrèmes; on y peut, au contraire, considérer chaque dé comme initial. La direction suivant laquelle les dés y sont censés se succéder doit être fixée préalablement de même que celle des combinaisons rectilignes; nous la supposerons la même dans tous les cas.

Étant proposée une combinaison circulaire de laquelle les dés doubles sont exclus, on peut, d'après ce que nous venons de dire, y intercaler chaque dé double en trois différents endroits, il y a donc 3^7 manières différentes de combiner entre elles les intercalations des sept dés doubles. En d'autres termes, de chaque combinaison circulaire de laquelle les dés doubles sont exclus, il en résultera 3^7 autres dans lesquelles ces dés sont admis. Si donc on désigne par S le nombre de toutes les combinaisons de la première espèce, celui des combinaisons de la seconde sera $= 3^7 \cdot S$.

Si dans une combinaison circulaire de la seconde espèce on considère successivement comme initial chacun des 28 dés qu'elle comprend, il en résultera 28 combinaisons rectilignes; d'où l'on conclut sans difficulté que le nombre total de ces dernières équivaut à $28 \cdot 3^7 \cdot S$. La question se trouve donc réduite à trouver le nombre S, quantité que nous allons maintenant définir d'une manière plus simple et dégagée en même temps de toute considération accessoire.

2.

Nous représenterons les dés par des ambes composés des mêmes éléments, et nous désignerons ceux-ci par les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. De cette manière les combinaisons circulaires des dés desquelles les dés doubles sont exclus, se trouveront remplacées par des combinaisons ou suites d'ambes également circulaires. Ces suites se composeront des 21 ambes à éléments inégaux que l'on peut former avec les sept éléments 1, 2,..., ambes qui s'y succéderont dans le même ordre et suivant la même direction que les dés dans les combinaisons respectives, et qui seront ordonnées de manière que le second élément de chaque ambe soit le même que le premier de l'ambe suivant. Le nombre de toutes les suites satisfaisant à ces conditions ne sera donc autre que S.

Si relativement à une quelconque de ces suites circulaires d'ambes, on écrit circulairement, et d'après leur ordre les premiers éléments de tous les ambes qu'elle renferme, il en résultera une suite circulaire d'éléments à l'égard de laquelle on peut remarquer:

1.° qu'elle comprend tous les sept éléments, et chacun trois fois. En effet, dans la suite circulaire d'ambes qui a servi à la former, chaque élément qui y entre, c'est-à-dire chacun des sept éléments, se présente trois fois comme second élément d'un ambe, et trois fois comme premier élément de l'ambe suivant. Il doit donc aussi se rencontrer trois fois dans la suite circulaire composée des premiers éléments de tous les ambes.

2.° qu'on retrouvera la suite circulaire d'ambes, si dans la suite circulaire d'éléments qui en est dérivée, on considère comme un ambe chaque groupe de deux éléments consécutifs pris dans l'ordre qu'ils y occupent, et qu'on range ces ambes circulairement, en les faisant se succéder conformément à leur ordre. En effet, si a, b, c,... sont des éléments consécutifs de la suite circulaire d'éléments, a et b seront les éléments initiaux de deux ambes consécutifs de la suite circulaire d'ambes de laquelle elle est dérivée. Or le premier élément du second de ces ambes est en même temps le second élément du premier, qui sera par conséquent ab. De même, l'ambe consécutif à ab sera bc, et ainsi de suite.

D'après la seconde remarque les suites circulaires d'ambes et d'éléments se correspondent réciproquement une à une; par conséquent, le nombre des suites de la seconde espèce sera le même que celui des suites de la première, c'ést-à-dire, $= S$. On peut donc définir cette quantité comme étant le nombre de toutes ces suites circulaires d'éléments; ce qui nous permet de donner l'énoncé suivant à la question à résoudre:

« On demande le nombre S de toutes le suites circulaires que l'on peut « former avec les sept éléments 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, trois fois répétés, et « disposés en sorte que les 21 groupes de deux éléments consécutifs que « chacune en contient, présentent les 21 ambes à éléments inegaux que « l'on peut former avec les mêmes éléments 1, 2,... »

Comme on le voit, nous entendons ici par « ambes » des combinaisons des éléments à deux, sans égard à l'ordre dans lequel ils s'y suivent; ainsi, en parlant p. e. de l'ambe 12, il restera indécis, à moins de le dire explicitement, si on le prend dans ce sens ou en sens inverse (21).

3.

Idée générale de la méthode de solution.

Si d'une de ces suites circulaires d'éléments on efface, partout où ils se trouvent, les éléments 4, 5, 6, 7, et que l'on ne change rien à l'ordre des éléments non effacés, ceux-ci formeront eux-mêmes une suite circulaire assujétie aux conditions de se composer des éléments 1, 2, 3, trois fois répétés, et de renfermer (au moins une fois) chacune des ambes 12, 13, 23, sous la forme de groupes de deux éléments consécutifs. La première de ces conditions est évidente en elle-même, la seconde ne le sera pas moins si l'on fait attention qu'il y a dans la suite primitive trois groupes d'éléments consécutifs, formant respectivement des ambes 12, 13, 23, et que ces groupes ne seront pas dénaturés, lorsqu'on écarte les éléments 4, 5, 6, 7 de la suite.

Si l'on commence par former toutes les suites circulaires soumises aux deux conditions que nous venons de signaler, et que l'on intercale ensuite dans chacune de ces suites auxiliaires les éléments 4, 5, 6, 7, trois fois répétés, exécutant cette opération de toutes les manières propres à satisfaire aux conditions de la question et à produire des suites différentes les unes des autres, on trouvera nécessairement le tableau complet des suites circulaires desquelles il s'agit de déterminer le nombre. C'est en partant de ce point de vue que nous allons maintenant résoudre la question proposée.

SOLUTION.

4.

Première partie. — Enumération des suites auxiliaires.

La méthode que nous venons d'esquisser, exige en premier lieu que l'on forme le tableau des suites auxiliaires. Dans ce but, nous déterminerons préalablement les suites circulaires soumises à la seule condition de se composer des éléments 1, 2, 3, trois fois répétés. Afin de distinguer les uns des autres les trois éléments 1 que contient une telle suite, nous en nommerons un quelconque le premier, et nous en comprendrons les deux autres sous le nom de second ou de troisiéme, selon qu'ils en suivent le premier de plus près ou de plus loin, d'après la direction convenue. Nous désignerons aussi à l'égard d'une quelconque de ces suites circulaires

$$\left.\begin{array}{l}\text{par } A\\ \text{par } B\\ \text{par } C\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{le nombre}\\ \text{d'éléments}\\ \text{contenus}\end{array}\left\{\begin{array}{l}\text{entre le premier et le second } 1\\ \text{entre le seconde et le troisième } 1\\ \text{entre le troisième et le premier } 1\end{array}\right.$$

et nous représenterons par (A, B, C) le groupe de toutes les suites qui s'accordent sous le rapport des valeurs de A, B et C, quantités dont la somme est généralement $=6$.

Pour déterminer les suites desquelles se compose le groupe (A, B, C), nous les supposerons écrites sous forme rectiligne, en commençant chaque suite par son premier 1, et en y conservant l'ordre des éléments. En faisant abstraction dans ces suites rectilignes des éléments 1, les autres éléments présenteront des permutations de 2 et 3, trois fois répétés. Or, le tableau de toutes les permutations de ce genre étant celui-ci:

$$\left.\begin{array}{ll}
222333 & 322233\\
223233 & 322323\\
223323 & 322332\\
223332 & 323223\\
232233 & 323232\\
232323 & 323322\\
232332 & 332223\\
233223 & 332232\\
233232 & 332322\\
233322 & 333222
\end{array}\right\} \qquad (1)$$

ajoutons y l'élément 1 avant le premier, après le $A^{\text{ième}}$, et après le $(A+B)^{\text{ième}}$ élément de chaque permutation, et désignons par $[A, B, C]$ le groupe de suites rectilignes qui en résultent. Si maintenant on écrit ces dernières sous forme circulaire, en y faisant figurer comme premiers 1 les 1 initiaux des suites rectilignes, les suites circulaires que l'on obtient par là, ne seront autres que celles du groupe (A, B, C), qui se composera, par conséquent, de ces 20 suites, si toutefois dans le nombre de ces dernières aucune ne se rencontre plus d'une fois. Pour juger de cette circonstance, remarquons que deux suites circulaires, quelle que soit du reste leur origine, étant égales entre elles, et contenant, par conséquent, les éléments dans le même ordre, il faut pouvoir les faire coïncider, c'est-à-dire, les superposer de manière à ce que les éléments superposés soient partout les mêmes. Or, la coïncidence étant supposée possible à l'égard de deux suites dont l'une au moins provient du groupe $[A, B, C]$, des éléments 1 superposés ne pourront pas y occuper le même rang; car dans ce cas, les deux suites s'accorderaient sous le rapport des valeurs de A, B et C, et proviendraient, par conséquent, l'une et l'autre du groupe $[A, B, C]$; de plus, elles se rapporteraient évidemment à la même permutation du tableau (1), tandis que deux suites du groupe $[A, B, C]$, et par conséquent aussi les suites circulaires qui en proviennent, se rapportent nécessairement à deux permutations différentes. Il faut donc, si néanmoins il y a coïncidence, que le premier 1 de l'une des suites vienne se superposer ou sur le second ou sur le troisième 1 de l'autre; plus exactement, que les éléments 1 se superposent de l'une ou de l'autre des deux manières suivantes:

1.°	première suite	premier 1	second 1	troisième 1
	seconde suite	second 1	troisième 1	premier 1
2.°	première suite	premier 1	seconde 1	troisième 1
	seconde suite	troisième 1	premier 1	second 1

d'où il résulte que si la première suite provient de $[A, B, C]$, et appartient, par conséquent, au groupe (A, B, C), la seconde appartiendra ou au groupe (C, A, B) ou au groupe (B, C, A). Elle ne saurait donc provenir de $[A, B, C]$, à moins que les groupes (A, B, C), (C, A, B) et (B, C, A) ne se réduisent à un seul; ce qui n'a lieu qu'en admettant $A=B=C=2$. Ainsi donc, ce cas excepté, toutes les suites circulaires provenant du groupe $[A, B, C]$ seront différentes les unes des autres, et le groupe (A, B, C) les comprendra toutes les 20. Quant au cas de $A=B=C=2$, il est au contraire aisé de voir qu'à l'exception de

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & \\ 3 & & & & 1 \\ & 2 & 1\ 3 & 2 & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccccc} & 1 & 3 & 2 & \\ 2 & & & & 1 \\ & 3 & 1\ 2 & 3 & \end{array}$$

toutes les autres suites circulaires provenant du groupe $[2, 2, 2]$ seront trois à trois égales entre elles. En effet, si $a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3$ est une permutation du tableau (1), $a_2 b_2 a_3 b_3 a_1 b_1$ et $a_3 b_3 a_1 b_1 a_2 b_2$ en seront deux autres, à moins qu'on n'ait

$$a_1 = a_2 = a_3; \quad b_1 = b_2 = b_3;$$

cas dans lequel ces trois permutations se réduisent à une seule, savoir à 232323 ou 323232. Or, les suites rectilignes

$$1 a_1 b_1 1 a_2 b_2 1 a_3 b_3; \quad 1 a_2 b_2 1 a_3 b_3 1 a_1 b_1; \quad 1 a_3 b_3 1 a_1 b_1 1 a_2 b_2,$$

qui se déduisent des trois permutations indiquées, conduisent à la même suite circulaire, savoir à

$$\begin{array}{ccccc} & 1 \; a_1 & & b_1 \; 1 & \\ b_3 & & & & a_2 \\ & a_3 & 1 & b_2 & \end{array}$$

celle-ci résultera donc trois fois ou une seule fois du groupe [2, 2, 2], selon que les trois permutations mentionnées sont différentes les unes des autres ou non. Et réellement, le groupe [2, 2, 2] étant composé des suites

122123133	132122133
122132133	132123123
122133123	132123132
122133132	132132123
123122133	132132132
123123123	132133122
123123132	133122123
123132123	133122132
123132132	133123122
123133122	133132122

il est visible, en ordonnant de la manière suivante:

122123133	123133122	133122123
122132133	132133122	133122132
122133123	133123122	123122133
122133132	133132122	132122133
123123123		
123123132	123132123	132123123
123132132	132132123	132123132
132132132		

que les suites placées sur la même ligne horizontale conduisent à la même suite circulaire. Celles-ci seront donc ici au nombre de huit, que l'on peut représenter p. e. par les suites rectilignes:

122123133	133132122
122132133	133123122
123123123	132132132
123123132	132132123.

5.

Comme on a généralement $A+B+C=6$, les groupes de suites circulaires qui viennent ici en considération, seront

(0, 0, 6)	(1, 0, 5)	(2, 1, 3)	(3, 3, 0)
(0, 1, 5)	(1, 1, 4)	(2, 2, 2)	(4, 0, 2)
(0, 2, 4)	(1, 2, 3)	(2, 3, 1)	(4, 1, 1)
(0, 3, 3)	(1, 3, 2)	(2, 4, 0)	(4, 2, 0)
(0, 4, 2)	(1, 4, 1)	(3, 0, 3)	(5, 0, 1)
(0, 5, 1)	(1, 5, 0)	(3, 1, 2)	(5, 1, 0)
(0, 6, 0)	(2, 0, 4)	(3, 2, 1)	(6, 0, 0)

Or, il est évident que chaque suite circulaire appartenant au groupe (A, B, C) fera pareillement partie des groupes (B, C, A) et (C, A, B); en effet, elle viendra se ranger dans l'un ou l'autre de ces groupes, selon qu'on y considère le second ou le troisième 1 comme le premier. Il s'ensuit de là, que les groupes (A, B, C), (B, C, A) et (C, A, B), quand ils sont différents les uns des autres, ne se distingueront que par le rang qu'on y a assigné aux éléments 1, et se composeront du reste des mêmes suites circulaires. Il suffira donc à notre but de ne tenir compte que d'un seul des trois groupes; ce qui nous permet de développer seulement dix groupes, p. e.

(0, 0, 6);	(0, 1, 5);	(0, 2, 4);	(0, 3, 3);	(0, 4, 2);
(0, 5, 1);	(1, 1, 4);	(1, 2, 3);	(1, 3, 2);	(2, 2, 2);

qui comprendront nécessairement toutes les suites circulaires que nous cherchons. Il est d'ailleurs aisé de voir qu'ils n'en comprendront aucune plus d'une fois; car si dans le nombre des suites circulaires contenues dans les dix groupes il y en avait deux d'égales, et que l'une en appartînt au groupe (A, B, C), l'autre appartiendrait, ainsi que nous l'avons vu, ou au groupe (C, A, B) ou au groupe (B, C, A). Mais si le premier est un des dix groupes, les deux autres en seront exclus, à moins qu'ils ne se réduisent tous les trois à un seul, savoir à (2, 2, 2). Il faudrait donc que les deux suites égales appartinssent l'une et l'autre au groupe (2, 2, 2); ce qui est impossible, puisque ce groupe, comme tous les autres, ne se compose que de suites différentes.

Au lieu de former les suites circulaires elles-mêmes, nous continuerons, pour simplifier, à les représenter par des suites rectilignes, commençant par le premier 1, en sous-entendant toujours que les éléments extrèmes de chaque suite soient considérés comme consécutifs, et que l'on tient compte de l'ambe qu'ils présentent, comme de ceux qui constituent deux autres éléments consécutifs quelconques. Nous ferons aussi remarquer, pour abréger le plus possible, que les permutations du tableau (1), ainsi que les huit suites rectilignes représentant le groupe (2, 2, 2), sont disposées sur deux colonnes, résultant l'une de l'autre en permutant les éléments 2 et 3 (*). Le tableau comprenant toutes les suites circulaires qui se composent des éléments 1, 2, 3, trois fois répétés, se partagera donc en deux moitiés, dont la première, relative aux premières colonnes, est représentée par les suites rectilignes :

(0, 0, 6)	(0, 1, 5)	(0, 2, 4)	(0, 3, 3)
111222333	112122333	112212333	112221333
111223233	112123233	112213233	112231233
111223323	112123323	112213323	112231323
111223332	112123332	112213332	112231332
111232233	112132233	112312233	112321233
111232323	112132323	112312323	112321323
111232332	112132332	112312332	112321332
111233223	112133223	112313223	112331223
111233232	112133232	112313232	112331232
111233322	112133322	112313322	112331322
(0, 4, 2)	(0, 5, 1)	(1, 1, 4)	(1, 2, 3)
112223133	112223313	121212333	121221333
112232133	112232313	121213233	121231233
112233123	112233213	121213323	121231323
112233132	112233312	121213332	121231332
112322133	112322313	121312233	121321233
112323123	112323213	121312323	121321323
112323132	112323312	121312332	121321332
112332123	112332213	121313223	121331223
112332132	112332312	121313232	121331232
112333122	112333212	121313322	121331322

(2)

(*) Quant au tableau (1) la seconde colonne resultera de la première si, après y avoir permuté les éléments 2 et 3, on renverse l'ordre des permutations, en commençant par

(1, 3, 2)		(2, 2, 2)	
121223133	121323123	122123133	
122232133	121323132	122132133	
121233123	121332123	123123123	(2)
121233132	121332132	123123132	
121322133	121333122		

et dont la seconde résultera de la première en y permutant les éléments 2 et 3.

6.

Les suites circulaires que nous avons nommées auxiliaires étant soumises encore à une seconde condition, savoir à celle de présenter, sous la forme de groupes de deux éléments consécutifs, les trois ambes 12, 13, 23, il nous reste à exclure des suites circulaires que nous venons de représenter sous forme rectiligne, toutes celles qui ne satisfont pas à cette condition. Si l'on examine sous ce rapport le tableau (2) comprenant la première moitié des suites rectilignes, et que l'on tienne compte dans chaque suite de l'ambe formé par les éléments extrêmes, on trouvera sans peine que les suites à en exclure sont

111223332	112123332	121221333
111232332	112221333	121333122
111233232	112333212	
111233322		

Or, d'une part, les suites résultant de celles-ci en y permutant les éléments 2 et 3, devront être exclus de la seconde moitié des suites rectilignes; car si un des ambes 12, 13, 23, ne se présente pas dans une suite, son transformé — qui est semblablement un des ambes 12, 13, 23 — ne se présentera pas non plus dans la suite transformée. D'autre part, les suites de la première moitié dans lesquelles les ambes 12, 13, 23 se présentent tous les trois, se transformeront en des suites qui satisfont à la même condition; car les ambes 12, 13, 23 se transformant respectivement en 13, 12, 32, se retrouveront nécessairement dans les suites transformées. De ces remarques il s'ensuit que les suites auxiliaires seront représentées en moitié par les suites rectilignes:

---

la dernière, en y faisant suivre l'avant-dernière, et ainsi de suite. — Quant aux huit suites représentant le groupe (2, 2, 2), les suites résultant l'une de l'autre se trouvent placées sur la même ligne horizontale.

111222333	112321323	121312233
111223233	112321332	121312323
111223323	112331223	121312332
111232233	112331232	121313223
111232323	112331322	121313232
111233223	112223133	121313322
112122333	112232133	121231233
112123233	112233123	121231323
112123323	112233132	121231332
112132233	112322133	121321233
112132323	112323123	121321323
112132332	112323132	121321332
112133223	112332123	121331223
112133232	112332132	121331232
112133322	112333122	121331322
112212333	112223313	121223133
112213233	112232313	121232133
112213323	112233213	121233123
112213332	112233312	121233132
112312233	112322313	121322133
112312323	112323213	121323123
112312332	112323312	121323132
112313223	112332213	121332123
112313232	112332312	121332132
112313322	121212333	122123133
112231233	121213233	122132133
112231323	121213323	123123123
112231332	121213332	123123132
112321233		

(3)

et en moitié par celles qui en résultent en y permutant les éléments 2 et 3.

7.

Seconde partie. — Examen des cas où les suites auxiliaires sont égales entre elles. — Conséquence relative à la détermination de *S*.

Si les éléments 4, 5, 6, 7, trois fois répétés, sont intercalés dans une suite auxiliaire de manière à satisfaire aux conditions de la question, il en résultera une suite circulaire que nous nommerons complétée. — Tout groupe non interrompu d'éléments intercalés qui se trouve compris entre deux éléments d'une suite auxiliare sera nommé une intercalation. Les intercalations sont ou simples ou multiples, selon qu'elles consistent dans un seul élément ou en comprennent plusieurs.

Si l'on déduit de chaque suite auxiliaire toutes les suites cemplétées auxquelles elle donne lieu, on trouvera en même temps le nombre S, en ne prenant qu'une fois les suites complétées qui se présenteraient à plusieurs reprises. Examinons donc s'il existe de telles suites, et cela étant le cas, combien de fois elles se rencontrent.

En admettant que deux suites complétées soient égales entre elles, il deviendra évident, en les faisant coïncider, qu'elles résultent de la même suite auxiliare et des mêmes intercalations. Mais on voit en même temps que les 1 superposés ne peuvent pas y occuper le même rang; car, dans ce cas, chaque intercalation appartenant à l'une des suites, non seulement appartiendrait aussi à l'autre, mais elle y aurait en outre la même position, c'est-à-dire qu'elle serait appliquée à la même distance du premier 1 de la suite auxiliare commune. Les deux suites auraient donc la même origine sous tous les rapports, et la même opération serait exécutée deux fois; ce qui, comme il s'entend de soi-même, ne doit pas avoir lieu. Il faut donc, si néanmoins il y a coïncidence, que le premier 1 de l'une des suites vienne se superposer ou sur le second ou sur le troisième de l'autre; d'où l'on conclut, en faisant abstraction des éléments 4, 5, 6, 7, que la suite auxiliaire qui a servi à former l'une et l'autre suite, se trouvera coïncider avec elle-même, quoique les 1 superposés soient de rangs différents. C'est donc à cette condition que la suite auxiliaire doit satisfaire si l'on en peut déduire des suites complétées égales entre elles. Il est exigé par là — que ce soit du reste le second ou le troisième 1 qui se trouve superposé sur le premier — que les éléments contenus entre le premier et le second 1 de la suite auxiliaire soient les mêmes et se suivent dans le même ordre que ceux qui séparent le second 1 du troisième et celui-ci du premier; par conséquent les éléments intermédiaires seront au nombre de deux; de plus, ils seront eux-mêmes 2 et 3, et se présenteront dans l'ordre 23 ou 32, d'où il s'ensuit finalement que la suite auxiliaire sera

$$\begin{array}{cccccccccccc} & & 1 & 2 & 3 & & & & 1 & 3 & 2 & \\ \text{ou} & 3 & & & & 1 & \text{ou} & 2 & & & & 1 \\ & 2 & 1 & & 3 & 2 & & 3 & 1 & & 2 & 3 \end{array}$$

et qu'aucune autre suite auxiliaire ne saurait donner lieu à des suites complétées égales entre elles. Or, ayant déduit une telle suite de l'une ou de l'autre des deux suites exceptionnelles, on en peut déduire en outre deux autres qui lui soient égales, en y faisant avancer chaque intercalation de trois ou de six places; car en superposant dans le premier cas le premier 1 de la suite primitive sur le second 1 de la suite dérivée, l'une coïncidera nécessairement avec l'autre, ce qui aura lieu de même dans le second cas, si l'on superpose le premier 1 de la suite primitive sur le troisième 1 de la suite dérivée. D'autre part, il est évident qu'il n'existe pas d'autre suite égale à la suite primitive, puisqu'il n'y a pas d'autre mode de faire coïncider celle-ci avec une autre. On voit donc que les suites complétées qui résultent des deux suites auxiliaires exceptionnelles seront trois à trois égales entre elles, tandis que les suites auxiliaires seront toutes différentes les unes des autres. De cette circonstance il s'ensuit directement que si l'on connait le nombre des suites complétées qui résultent de chaque suite auxiliaire, on trouvera la valeur de S, en faisant la somme de toutes ces nombres, à l'exception de ceux qui se rapportent aux deux suites auxiliaires signalées, en y ajoutant le tiers de la somme de ces derniers.

8.

Troisième partie. — Des ambes altérés; des systèmes d'ambes altérés, et d'intercalations. — Formule pour déterminer S.

Chaque intercalation faisant partie d'une suite complétée, s'y trouve comprise entre deux éléments (de valeurs différentes ou de même valeur) qui sont consécutifs dans la suite auxiliaire correspondante, et y présentent un ambe que nous nommerons altéré, puisqu'il est le résultat d'une altération de la suite complétée. Les neuf ambes des suites auxiliaires se diviseront donc en ambes altérés et non altérés. Quant aux derniers, ils seront généralement au nombre de trois; car, ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer, les ambes 12, 13, 23, que présentent les suites complétées, doivent se retrouver sans altération dans les suites auxiliaires. Le nombre en question ne sera donc pas plus petit que trois, et il ne pourra pas être plus grand, parce que les autres ambes que présentent les suites complétées contiennent au moins un des éléments 4, 5, 6, 7, et ne peuvent, par cette raison, appartenir aux suites auxiliaires. De cette propriété générale on conclut directement cette autre, que le nombre des ambes altérés, et par conséquent aussi celui des intercalations, est généralement $=6$.

Si un des ambes 12, 13, 23 (les éléments étant pris dans ce sens ou en sens inverse) ne se présente qu'une fois dans une suite auxiliaire, il sera nécessairement un ambe non altéré; si au contraire, il s'y présente à plusieurs reprises (dans le même sens ou non), chacun de ces ambes de même composition pourra signifier l'ambe non altéré de cette sorte. Ainsi donc, en admettant que les ambes 12, 13, 23 se présentent respectivement l, m et n fois dans une suite auxiliaire donnée, celle-ci donnera lieu à $l \cdot m \cdot n$ suppositions différentes au sujet des ambes non altérés, et par conséquent aussi au sujet des ambes altérés. On remarquera que dans ces suppositions les ambes altérés, ainsi que les non altérés ne varient que de position, et restent d'ailleurs les mêmes quant aux éléments dont ils sont formés. Nous désignerons donc sous le nom de système d'ambes altérés de la suite auxiliaire donnée les six ambes altérés qu'elle presente, pris dans un ordre arbitraire tant par rapport aux ambes eux-mêmes, que par rapport aux éléments de chaque ambe. Nous dirons aussi, en comparant les ambes du système avec les ambes altérés donnés de position en vertu d'une supposition déterminée, que chaque ambe du système correspond à un des ces ambes altérés, composé des mêmes éléments et déterminé quant à sa position dans la suite auxiliaire. Cette correspondance sera fixée d'elle même par rapport aux ambes qui ne se rencontrent qu'une fois parmi les ambes altérés; si au contraire, un ambe s'y rencontre à plusieurs reprises, elle pourra être établie à volonté de diverses manières; nous supposerons donc dans ce cas, que l'on fasse les conventions nécessaires pour fixer les idées; de sorte que, quelque supposition que l'on admette au sujet des ambes altérés, la correspondance de ceux-ci avec les ambes du système se trouve généralement établie sans ambiguité.

9.

Les suites complétées devant être conformes à celles que nous avons définies dans l'énoncé de la quistion proposée (art. 2), il est nécessaire et il suffit que les intercalations qui servent à les former, satisfassent aux conditions fondamentales que voici:

1.° que, prises ensemble, elles se composent de douze éléments, savoir des éléments 4, 5, 6, 7, trois fois répétés;

2.° qu'elles présentent une fois chacun des six ambes à éléments inégaux que l'on peut former avec les éléments 4, 5, 6, 7, et qu'elles ne présentent pas d'autre ambe;

3.° que les éléments des intercalations qui viennent en contact avec les éléments des ambes altérés forment avec ceux-ci les douze ambes qui résultent de la combinaison de l'un des éléments 4, 5, 6, 7 avec l'un des éléments 1, 2, 3.

Et réellement, ces conditions remplies, les suites complétées se composeront des éléments 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, trois fois répétés, et outre les 18 ambes dont il est question dans la seconde et la troisième condition, elles présenteront encore les trois ambes 12, 13, 23, et par conséquent tous les ambes à éléments inégaux que l'on peut former avec 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Ce n'est comme on le voit, que la troisième condition fondamentale qui a égard aux ambes altérés, et seulement en ce qui concerne les éléments dont ils sont composés. La position des ambes altérés y étant indifférente, on peut, pour déduire une suite complétée d'une suite auxiliaire proposée, commencer par déterminer six intercalations qui, étant appliquées dans un certain ordre au système d'ambes altérées de la suite auxiliaire, satisfassent aux trois conditions fondamentales. Il faut remarquer à cet égard, que l'ordre dont il est question ici, doit-être déterminé sous le double rapport de la correspondance entre les ambes du système et les intercalations, et du sens dans lequel il faut prendre ces dernières, lorsqu'elles sont multiples.

Si l'on connaît six intercalations de cette nature, et l'ordre dans lequel elles s'appliquent au système d'ambes altérés, on obtiendra une suite complétée si, après qu'on a fixé la supposition à admettre au sujet des ambes altérés, on applique à chaque ambe de cette sorte, que présente alors la suite auxiliaire, la même intercalation qu'à l'ambe du système qui lui correspond selon nos conventions; en ayant soin toutefois de l'y insérer dans le même sens ou en sens inverse, selon que les ambes correspondants eux-mêmes observent le même ordre d'éléments ou non.

Nous nommerons système d'intercalations applicable à un système proposé d'ambes altérés six intercalations quelconques qui s'y appliquent conformément aux trois conditions fondamentales, l'ordre dans lequel cela a lieu étant déterminé sous le double rapport mentionné. Deux systèmes d'intercalations composés des mêmes intercalations, mais différents quant à l'ordre dans lequel ils s'appliquent au système proposé d'ambes altérés, doivent être considérés comme des systèmes différents puisqu'ils donnent lieu à des suites complétées différentes, lors même que la supposition au sujet des ambes altérés ne subit pas de variation.

10.

Si parmi les quantités l, m et n une au moins est >1, de sorte que le nombre des suppositions admissibles au sujet des ambes altérés et non altérés soit supérieur à l'unité, les suites complétées que l'on peut déduire de la suite auxiliaire proposée, se diviseront en $l \cdot m \cdot n$ groupes, selon la supposition qui y est en vigueur, et que l'on reconnaîtra dans chaque suite complétée en tenant compte de la position qu'y occupent les ambes 12, 13, 23. Il est facile à voir que tous ces groupes comprennent le même nombre de suites. En effet, si l'on suppose connus tous les systèmes d'intercalations applicables au système d'ambes altérés de la suite auxiliaire proposée, les suites complétées que l'on obtient par leur moyen, après qu'on a fixée la supposition à admettre, appartiendront toutes au même groupe. Viceversà, quelque suite de ce groupe que l'on considère, les six intercalations qu'elle renferme, constitueront un système d'intercalations applicable au système d'ambes altérés. On voit par là que le nombre de ces systèmes indiquera en même temps celui des suites comprises dans le groupe en question, et par conséquent aussi dans tout autre groupe; d'où il s'ensuit que tous les groupes comprennent le même nombre de suites. De là on est conduit à la conclusion suivante:

> Les ambes 12, 13, 23 se présentant respectivement l, m et n fois dans une suite auxiliaire, le nombre des suites complétées que l'on en peut déduire équivaudra à $l \cdot m \cdot n$ fois le nombre des systèmes d'intercalations applicables au système d'ambes altérés de la même suite auxiliaire.

On remarquera que cette conclusion subsiste même quand aucune des quantités l, m et n ne dépasse pas l'unité.

11.

Étant proposés une suite auxiliaire et son système d'ambes altérés, substituons dans celui-ci au lieu de 1 un quelconque des éléments 1, 2, 3, au lieu de 2 un quelconque des deux autres, et au lieu de 3 l'élément qui reste disponible. Le résultat de cette permutation des éléments 1, 2, 3 sera un système d'ambes transformés que nous nommerons, en abrégeant, le système transformé.

Tout système d'intercalations applicables au système proposé d'ambes altérés, s'appliquera aussi dans le même ordre au système transformé. En d'autres termes, les conditions fondamentales étant remplies vis-à-vis du premier système, elles le seront aussi vis-à-vis du second. Cela est évident par rapport aux deux premières conditions qui ne concernent que la combinaison des éléments 4, 5, 6, 7, entre eux. Quant à la troisième, les éléments des intercalations venant en contact avec les éléments des ambes du système proposé d'ambes altérés, formeront avec ceux-ci des ambes qui seront par supposition, 14, 15, 16, 17, 24, 25, 26, 27, 34, 35, 36, 37. En mettant le système transformé à la place du système proposé, les ambes analogues à ceux-ci en résulteront, si l'on permute les éléments 1, 2, 3 de la même manière que dans le système proposé. Mais cette permutation reproduira évidemment les mêmes ambes, à l'ordre près. On voit donc que dans le cas actuel, la troisième condition ne sera pas moins remplie que les deux autres.

On prouverait de la même manière que viceversa tout système d'intercalations applicable au système transformé s'applique de même au système proposé; par conséquent, ces systèmes sont susceptibles des mêmes systèmes d'intercalations, et à plus forte raison, du même nombre de ces systèmes.

Si le système transformé est lui même un système d'ambes altérés, se rapportant comme tel à une autre suite auxiliaire, le produit $l \cdot m \cdot n$ aura la même valeur à l'égard de cette seconde suite qu'à l'égard de la suite proposée. Car, en rapportant primitivement à celle-ci les quantités l, m et n, les ambes 12, 13, 23 se rencontreront respectivement $l-1$, $m-1$, $n-1$ fois dans le système proposé. Or, en permutant les éléments 1, 2, 3, on permute en même temps les ambes 12, 13, 23; par conséquent, les valeurs de $l-1$, $m-1$, $n-1$, qui se rapportent au système transformé, résulteront des valeurs primitives de ces quantités, en permutant celles-ci d'une certaine manière; d'où l'on conclut qu'en permutant de la même manière les valeurs primitives de l, m, n, relatives à la suite proposée, les valeurs résultantes se rapporteront à l'autre suite. Mais cette permutation n'influe que sur l'ordre des facteurs du produit $l \cdot m \cdot n$; la valeur de celui-ci sera donc la même dans l'un et l'autre cas.

En conséquence de ces propositions, et en égard à la conclusion développée dans l'article précédent, on parvient sans difficulté à cette autre:

> Lorsque les systèmes d'ambes altérés de deux suites auxiliaires différentes sont les mêmes ou plus généralement, lorsqu'ils se transforment l'un dans l'autre par suite d'une certaine permutation des éléments 1, 2, 3, ces deux suites donneront lieu au même nombre de suites complétées.

12.

Les suites auxiliaires qui ont cette propriété en commun, seront rangées dans la même catégorie. Pour effectuer la division de toutes les suites auxiliaires conformément à ce point de vue, nous n'en considérerons d'abord que la première moitié, représentée dans le tableau (3) sous forme rectiligne. En désignant généralement par abc, une permutation quelconque de 123, on vérifiera aisément la division suivante de ce tableau:

1. ($aa\ aa\ bb\ bb\ cc\ cc$)

	suite	syst. d'ambes altérés	a	b	c
1	111222333	11 11 22 22 33 33	1	2	3

2. ($aa\ aa\ bb\ cc\ bc\ bc$)

	suite	syst. d'ambes altérés	a	b	c
1	111223233	11 11 22 33 23 23	1	2	3
2	111223323	11 11 22 33 23 23	1	2	3
3	111232233	11 11 22 33 23 23	1	2	3
4	111233223	11 11 22 33 23 23	1	2	3

5	112122333	33	33	11	22	12	12	3	1	2
6	112133322	33	33	11	22	12	12	3	1	2
7	112212333	33	33	11	22	12	12	3	1	2
8	112213332	33	33	11	22	12	12	3	1	2
9	112223133	22	22	11	33	13	13	2	1	3
10	112333122	33	33	11	22	12	12	3	1	2
11	112223313	22	22	11	33	13	13	2	1	3
12	112233312	33	33	11	22	12	12	3	1	2

3. (*aa aa bc bc bc bc*)

	suite	syst. d'ambes altérés						*a*	*b*	*c*
1	111232323	11	11	23	23	23	23	1	2	3
2	121212333	33	33	12	12	12	12	3	1	2
3	121213332	33	33	12	12	12	12	3	1	2

4. (*aa bb cc ab ac bc*)

	suite	syst. d'ambes altérés						*a*	*b*	*c*
1	112132233	11	22	33	12	13	23	1	2	3
2	112133223	11	22	33	12	13	23	1	2	3
3	112213233	11	22	33	12	13	23	1	2	3
4	112213323	11	22	33	12	13	23	1	2	3
5	112312233	11	22	33	12	13	23	1	2	3
6	112313322	11	22	33	12	13	23	1	2	3
7	112231233	11	22	33	12	13	23	1	2	3
8	112231332	11	22	33	12	13	23	1	2	3
9	112331223	11	22	33	12	13	23	1	2	3
10	112331322	11	22	33	12	13	23	1	2	3
11	112232133	11	22	33	12	13	23	1	2	3
12	112233123	11	22	33	12	13	23	1	2	3
13	112233132	11	22	33	12	13	23	1	2	3
14	112322133	11	22	33	12	13	23	1	2	3
15	112233213	11	22	33	12	13	23	1	2	3
16	112332213	11	22	33	12	13	23	1	2	3

5. *aa bb ac ac bc bc*)

	suite	syst. d'ambes altérés						*a*	*b*	*c*
1	112123233	11	33	12	12	32	32	1	3	2
2	112123323	11	33	12	12	32	32	1	3	2
3	112132332	11	33	12	12	32	32	1	3	2
4	112133232	11	33	12	12	32	32	1	3	2
5	112312332	11	33	12	12	32	32	1	3	2
6	112313223	11	22	13	13	23	23	1	2	3
7	112231323	11	22	13	13	23	23	1	2	3
8	112321233	11	33	12	12	32	32	1	3	2
9	112321332	11	33	12	12	32	32	1	3	2
10	112331232	11	33	12	12	32	32	1	3	2
11	112332123	11	33	12	12	32	32	1	3	2
12	112332132	11	33	12	12	32	32	1	3	2
13	112232313	11	22	13	13	23	23	1	2	3
14	112322313	11	22	13	13	23	23	1	2	3
15	112323312	11	33	12	12	32	32	1	3	2
16	112332312	11	33	12	12	32	32	1	3	2
17	121312233	22	33	21	21	31	31	2	3	1
18	121313322	22	33	21	21	31	31	2	3	1
19	121331223	22	33	21	21	31	31	2	3	1
20	121331322	22	33	21	21	31	31	2	3	1
21	121223133	22	33	21	21	31	31	2	3	1
22	121322133	22	33	21	21	31	31	2	3	1
23	122123133	22	33	21	21	31	31	2	3	1
24	122132133	22	33	21	21	31	31	2	3	1

6. (*aa ab ac bc bc bc*)

	suite	syst. d'ambes altérés						*a*	*b*	*c*
1	112132323	11	12	13	23	23	23	1	2	3
2	112312323	11	12	13	23	23	23	1	2	3
3	112313232	11	12	13	23	23	23	1	2	3
4	112321323	11	12	13	23	23	23	1	2	3

5	112323123	11	12	13	23	23	23	1	2	3
6	112323132	11	12	13	23	23	23	1	2	3
7	112323213	11	12	13	23	23	23	1	2	3
8	121213233	33	31	32	12	12	12	3	1	2
9	121213323	33	31	32	12	12	12	3	1	2
10	121312332	33	31	32	12	12	12	3	1	2
11	121313223	22	21	23	13	13	13	2	1	3
12	121231233	33	31	32	12	12	12	3	1	2
13	121231332	33	31	32	12	12	12	3	1	2
14	121321233	33	31	32	12	12	12	3	1	2
15	121321332	33	31	32	12	12	12	3	1	2
16	121331232	33	31	32	12	12	12	3	1	2
17	121232133	33	31	32	12	12	12	3	1	2
18	121233123	33	31	32	12	12	12	3	1	2
19	121233132	33	31	32	12	12	12	3	1	2
20	121332123	33	31	32	12	12	12	3	1	2
21	121332132	33	31	32	12	12	12	3	1	2

7. (*ab ab ac ac bc bc*)

	suite	syst. d'ambes altérés						*a*	*b*	*c*
1	121312323	12	12	13	13	23	23	1	2	3
2	121313232	12	12	13	13	23	23	1	2	3
3	121231323	12	12	13	13	23	23	1	2	3
4	121321323	12	12	13	13	23	23	1	2	3
5	121323123	12	12	13	13	23	23	1	2	3
6	121323132	12	12	13	13	23	23	1	2	3
7	123123123	12	12	13	13	23	23	1	2	3
8	123123132	12	12	13	13	23	23	1	2	3

Or, à chaque suite auxiliaire faisant partie de la première moitié en correspond une autre comprise dans la seconde, en ce sens que ces suites se transforment l'une dans l'autre, en y permutant les éléments 2 et 3; il est visible, de plus, que la même correspondance existera entre les systèmes d'ambes altérés de ces suites; mais la permutation de 2 et de 3 n'est autre chose qu'une permutation particulière de 123; par conséquent, les suites auxiliaires correspondantes appartiendront à la même catégorie, et le nombre de suites qu'en comprend chacune sera le double de celui qu'y contribue la première moitié.

Quant au produit $l \cdot m \cdot n$ qui a la même valeur par rapport à toutes les suites auxiliaires de la même catégorie, il suffit de le déterminer en chaque cas, à l'égard d'une seule; ce qu'on fera en établissant d'abord les valeurs de $l-1$, $m-1$, $n-1$, relatives à un quelconque des systèmes d'ambes altérés de chaque catégorie. De cette manière on trouve:

cat.	$l-1$	$m-1$	$n-1$	$l \cdot m \cdot n$
1	0	0	0	1
2	0	0	2	3
3	0	0	4	5
4	1	1	1	8
5	0	2	2	9
6	1	1	3	16
7	2	2	2	27

Si l'on désigne maintenant par [1] le nombre de systèmes d'intercalations applicables à un système d'ambes altérés de la première catégorie, ou bien au système général *aaaabbbbcccc*, et que l'on entende par [2], [3],... les nombres analogues relatifs à la seconde catégorie, à la troisième, et ainsi de suite, la recherche précédente se résumera finalement ainsi qu'il suit:

la cat.	1	comprend	2	suites, chacune	donnant	lieu à	1 [1]	suites complétées
»	2	»	24	»	»	»	3 [2]	
»	3	»	6	»	»	»	5 [3]	
»	4	»	32	»	»	»	8 [4]	
»	5	»	48	»	»	»	9 [5]	
»	6	»	42	»	»	»	16 [6]	
«	7	»	16	»	»	»	27 [7]	

13.

En appliquant ces résultats à ce que nous avons dit sur la détermination du nombre S (voir la fin de l'art. 7), et en faisant attention que les suites auxiliaires

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 2 & & 3 \\ 3 & & & & 1 \\ 2 & 1 & & 3 & 2 \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccccc} 1 & & 3 & & 2 \\ 2 & & & & 1 \\ 3 & 1 & & 2 & 3 \end{array}$$

appartiennent l'une et l'autre à la septième catégorie, on parvient directement à la formule suivante:

$$\begin{aligned} S = & 2\cdot[1]+24\cdot3\cdot[2]+6\cdot5\cdot[3]+32\cdot8\cdot[4] \\ & +48\cdot9\cdot[5]+42\cdot16\cdot[6]+14^{2}/_{3}\cdot27\cdot[7] \\ = & 2\cdot[1]+72\cdot[2]+30\cdot[3]+256\cdot[4] \\ & +432\cdot[5]+672\cdot[6]+396\cdot[7]. \end{aligned}$$

Il nous reste donc à déterminer les quantités [1], [2],... ce qui exige une discussion préalable des questions qui se rattachent aux systèmes d'intercalations.

14.

Quatrième partie. — Énumération des systèmes d'intercalations indépendants.

Un système d'intercalations applicable à un système d'ambes altérés ne sera complètement déterminé, ainsi que nous l'avons déjà dit, que si l'on fixe la correspondance entre les ambes et les intercalations, et le sens dans lequel chaque intercalation doit être prise, lorsqu'elle est multiple. On peut cependant concevoir les systèmes d'intercalations sous un point de vue plus général, en faisant abstraction de leurs rapports avec les systèmes d'ambes altérés, ou, ce qui revient au même, en ne tenant compte que des deux premières des conditions fondamentales. Dans ce cas, la correspondance entre les intercalations et les ambes est mise hors de question, et le sens dans lequel on prend les intercalations multiples devient indifférent. Si donc deux intercalations sont l'une l'inverse de l'autre, il nous suffira d'en admettre celle dont l'élément initial est inférieur à l'élément final, ou, si les éléments extrêmes sont égaux entre eux, celle dont le second élément est inférieur à l'avant-dernier. Nous allons maintenant former le tableau complet des systèmes d'intercalations ainsi définis, que nous distinguerons par le nom d'indépendants.

Les six nombres indiquant de combien d'éléments se composent les intercalations qui forment un système, seront nommés le système de nombres de ce dernier, et les systèmes d'intercalations indépendants qui s'accordent sous ce rapport, seront rangés dans la même classe. Or, la somme des six nombres constituant un système est invariablement $=12$, et les différentes manières de partager le nombre 12 en six nombres entiers, sont les suivants:

1. 222222	5. 422211	9. 531111
2. 322221	6. 432111	10. 621111
3. 332211	7. 441111	11. 711111;
4. 333111	8. 522111	

par conséquent, il n'y a pas d'autres systèmes de nombres que ceux-ci. Mais il est aussi aisé de voir que le système 711111 ne saurait appartenir à un système d'intercalations; car il n'existe pas d'intercalation à sept éléments. En effet, une telle intercalation présenterait six ambes comme groupes de deux éléments consécutifs, ambes qui seraient tous différents les uns des autres, et seraient par conséquent 45, 46, 47, 56, 57, 67. L'intercalation comprendrait donc aussi tous les éléments 4, 5, 6, 7, mais de telle manière qu'il y en eût au moins un qui ne s'y rencontrât qu'une fois; car dans le cas contraire, elle devrait se composer au moins de $2 \cdot 4 = 8$ éléments. Or, un tel élément, selon qu'il se trouve à l'extrémité ou dans l'intérieur de l'intercalation, ne serait en contact qu'avec un ou deux des trois autres. L'intercalation ne présenterait donc pas tous les ambes possibles, ce qui est en contradiction avec notre première conclusion; par conséquent, il n'existe pas d'intercalation composée de sept éléments.

D'après cela, nous n'avons à considérer que dix systèmes de nombres et autant de classes de systèmes indépendants. La question revient donc à déterminer pour chaque classe tous les systèmes indépendants qui s'y rapportent. Afin d'y parvenir avec plus de facilité, nous chercherons d'abord toutes les intercalations multiples, les conditions à remplir étant celles-ci: 1.° que les intercalations ne comprennent d'autres éléments que 4, 5, 6, 7; 2.° qu'elles ne présentent d'autres ambes que 45, 46, 47, 56, 57, 67, et qu'elles n'en présentent aucune plus d'une fois; condition qui sera remplie d'elle-même, si l'intercalation ne comprend que des éléments différents les uns des autres, et qui exige dans le cas contraire, que deux éléments égaux soient séparés au moins par deux éléments intermédiaires.

15.

Quant aux intercalations à deux éléments, ils seront généralement de la forme $\alpha\beta$, en entendant par α et β deux quelconques des éléments 4, 5, 6, 7, différents l'un de l'autre et tels que α soit inférieur à β.

En désignant par γ et δ les deux autres des quatre éléments, les intercalations à trois éléments seront généralement exprimées par

$$\alpha\gamma\beta$$
$$\alpha\delta\beta.$$

Quant aux intercalations à quatre éléments, il y a deux cas à distinguer; l'un où les éléments extrèmes sont différents l'un de l'autre, le second où ces éléments sont égaux entre eux. Le premier cas donne lieu aux deux formes

$$\alpha\gamma\delta\beta$$
$$\alpha\delta\gamma\beta$$

où α, β, γ, δ ont la même signification que ci-dessus; dans le second cas on trouvera les formes

$$ABCA$$
$$ABDA$$
$$ACDA$$

en entendant par A un quelconque des éléments 4, 5, 6, 7, et par B, C, D les trois autres, mais tels que B soit inférieur à C, C inférieur à D.

Les intercalations à cinq éléments présentent les mêmes cas; on trouvera donc les formes

$$\begin{array}{ll} \alpha\beta\gamma\delta\beta & ABDCA \\ \alpha\beta\delta\gamma\beta & ABCDA \\ \alpha\gamma\delta\alpha\beta & ACBDA \\ \alpha\delta\gamma\alpha\beta & \end{array}$$

Pour ce qui est enfin des intercalations à six éléments, on peut aisément se convaincre à priori que le second cas est impossible; car si A est l'élément initial, il ne pourra occuper simultanément ni la seconde ni la troisième place; s'il est aussi l'élément final, il ne pourra non plus occuper ni la quatrième ni la cinquième. Les quatre éléments intermédiaires ne comprendront donc que B, C et D; ce qui exige qu'un de ces éléments, p. e. B, soit répété, et se trouve par conséquent aux deux extrèmités des éléments intermédiaires. Or, les intercalations $ABCDBA$ et $ABDCBA$ sont inadmissibles l'une et l'autre, puisqu'elles présentent deux fois l'ambe

AB. Il ne reste donc que le premier cas à considérer qui donne lieu aux formes

$$\alpha\beta\gamma\alpha\delta\beta$$
$$\alpha\beta\delta\alpha\gamma\beta$$
$$\alpha\gamma\beta\alpha\delta\beta$$
$$\alpha\delta\beta\alpha\gamma\beta$$
$$\alpha\gamma\beta\delta\alpha\beta$$
$$\alpha\delta\beta\gamma\alpha\beta.$$

En donnant maintenant à α, β, γ, δ, et à A, B, C, D toutes les valeurs compatibles avec les restrictions que nous avons faites, savoir celles ci:

	α	β	γ	δ
1	4	5	6	7
2	4	6	5	7
3	4	7	5	6
4	5	6	4	7
5	5	7	4	6
6	6	7	4	5

	A	B	C	D
1	4	5	6	7
2	5	4	6	7
3	6	4	5	7
4	7	4	5	6

on trouvera sans difficulté le tableau suivant de toutes les intercalations multiples:

2 él.	3 él.	4 éléments		5 éléments		
45	465	4675	4564	45675	56476	45764
46	475	4765	4574	45765	56746	45674
47	456	4576	4674	46745	54756	46574
56	476	4756	5465	47645	57456	54765
57	457	4567	5475	46576	57467	54675
67	467	4657	5675	46756	57647	56475
	546	5476	6456	45746	54657	64756
	576	5746	6476	47546	56457	64576
	547	5467	6576	47567	67457	65476
	567	5647	7457	47657	67547	74657
	647	6457	7467	45647	64567	74567
	657	6547	7567	46547	65467	75467

6 éléments

456475	475467	574567
457465	476457	576547
465475	457467	547567
475465	467457	567547
465745	457647	547657
475645	467547	567457
465476	564576	674657
467456	567546	675647
456476	546576	647657
476456	576546	657647
456746	546756	647567
476546	576456	657467

16.

Il nous sera maintenant très facile de former tous les systèmes indépendants compris dans une classe quelconque. Voici d'abord le procédé pour en trouver les intercalations multiples.

En admettant que le système respectif de nombres contienne k nombres supérieurs à l'unité, soit $l, m, \ldots p$, on combinera entre elles toutes les intercalations à l, à $m, \ldots$ à p éléments que nous venons d'énumérer, en formant les combinaisons avec une intercalation de chaque espèce, et en étendant cette opération sur toutes les combinaisons qui ne présentent qu'une fois le même ambe. Toutes les combinaisons que l'on obtient par là, seront sans exception propres à la formation de systèmes indépendants. Pour s'en assurer à priori, il suffit de prouver qu'elles présentent invariablement six ambes, et qu'elles ne renferment le même élément plus de trois fois. Quant au nombre des ambes, il est d'abord

$$l-1+m-1+\cdots+p-1=l+m+\cdots+p-k;$$

car toute intercalation multiple présente un ambe de moins qu'elle ne contient d'éléments. De plus, en désignant par k_1 le nombre des intercalations simples, on a

$$k+k_1=6; \quad l+m+\cdots+p+k_1=12$$

et par conséquent

$$l+m+\cdots+p-k=12-6=6;$$

ce qui prouve le premier point. En second lieu, ces six ambes étant 45, 46, 47, 56, 57, 67, chacun des éléments 4, 5, 6, 7 s'y trouvera combiné avec les trois autres; il faut donc ou qu'il se rencontre une fois dans l'intérieur d'une intercalation, et une fois à l'extrèmité de la même ou d'une autre, ou qu'il occupe trois fois une place extrème. De là on conclut que tout élément sera contenu ou deux ou trois fois dans une combinaison; ce qui prouve le second point, et nous fait voir en même temps qu'on complétera les systèmes d'intercalations en ajoutant aux combinaisons comme intercalations simples tous les éléments qui n'y sont contenus que deux fois. En suivant la marche que nous venons de tracer, on parviendra au tableau suivant des systèmes indépendants:

I. (222222)

1	45	46	47	56	57	67

II. (322221)

1	465	45	47	57	67	6	7	546	47	56	57	67	4
2	475	45	46	56	67	7	8	576	45	46	47	56	7
3	456	46	47	57	67	5	9	547	46	56	57	67	4
4	476	45	46	56	57	7	10	567	45	46	47	57	6
5	457	46	47	56	67	5	11	647	45	56	57	67	4
6	467	45	47	56	57	6	12	657	45	46	47	67	5

III. (332211)

1	465	475	45	67	6	7	10	456	476	46	57	5	7
2	465	476	45	57	6	7	11	456	467	47	57	5	6
3	465	457	47	67	5	6	12	456	576	46	47	5	7
4	465	576	45	47	6	7	13	456	647	57	67	4	5
5	465	547	57	67	4	6	14	476	457	46	56	5	7
6	475	456	46	67	5	7	15	476	546	56	57	4	7
7	475	467	45	56	6	7	16	476	657	45	46	5	7
8	475	546	56	67	4	7	17	457	467	47	56	5	6
9	475	567	45	46	6	7	18	457	567	46	47	5	6

19	457	647	56	67	4	5	25	576	547	46	56	4	7
20	467	547	56	57	4	6	26	576	647	45	56	4	7
21	467	657	45	47	5	6	27	547	567	46	57	4	6
22	546	576	47	56	4	7	28	547	657	46	67	4	5
23	546	567	47	57	4	6	29	567	647	45	57	4	6
24	546	657	47	67	4	5	30	647	657	45	67	4	5

IV. (333111)

1	465	476	457	5	6	7	5	456	576	647	4	5	7
2	465	576	547	4	6	7	6	476	546	657	4	5	7
3	475	456	467	5	6	7	7	457	567	647	4	5	6
4	475	546	567	4	6	7	8	467	547	657	4	5	6

V. (422211)

1	4675	45	47	56	6	7	13	4564	47	57	67	5	6
2	4765	45	46	57	6	7	14	4574	46	56	67	5	7
3	4576	46	47	56	5	7	15	4674	45	56	57	6	7
4	4756	45	46	67	5	7	16	5465	47	57	67	4	6
5	4567	46	47	57	5	6	17	5475	46	56	67	4	7
6	4657	45	47	67	5	6	18	5675	45	46	47	6	7
7	5476	46	56	57	4	7	19	6456	47	57	67	4	5
8	5746	45	56	67	4	7	20	6476	45	56	57	4	7
9	5467	47	56	57	4	6	21	6576	45	46	47	5	7
10	5647	45	57	67	4	6	22	7457	46	56	67	4	5
11	6457	47	56	67	4	5	23	7467	45	56	57	4	6
12	6547	46	57	67	4	5	24	7567	45	46	47	5	6

VI. (432111)

1	4675	456	47	5	6	7	8	4756	546	67	4	5	7
2	4675	547	56	4	6	7	9	4567	475	46	5	6	7
3	4765	457	46	5	6	7	10	4567	647	57	4	5	6
4	4765	546	57	4	6	7	11	4657	476	45	5	6	7
5	4576	465	47	5	6	7	12	4657	547	67	4	5	6
6	4576	647	56	4	5	7	13	5476	465	57	4	6	7
7	4756	467	45	5	6	7	14	5476	657	46	4	5	7

15	5746	456	67	4	5	7	37	5475	465	67	4	6	7
16	5746	567	45	4	6	7	38	5475	467	56	4	6	7
17	5467	475	56	4	6	7	39	5475	567	46	4	6	7
18	5467	657	47	4	5	6	40	5675	546	47	4	6	7
19	5647	457	67	4	5	6	41	5675	547	46	4	6	7
20	5647	576	45	4	6	7	42	5675	647	45	4	6	7
21	6457	476	56	4	5	7	43	6456	475	67	4	5	7
22	6457	567	47	4	5	6	44	6456	476	57	4	5	7
23	6547	467	57	4	5	6	45	6456	576	47	4	5	7
24	6547	576	46	4	5	7	46	6476	456	57	4	5	7
							47	6476	457	56	4	5	7
							48	6476	657	45	4	5	7
25	4564	475	67	5	6	7	49	6576	546	47	4	5	7
26	4564	476	57	5	6	7	50	6576	547	46	4	5	7
27	4564	576	47	5	6	7	51	6576	647	45	4	5	7
28	4574	465	67	5	6	7	52	7457	465	67	4	5	6
29	4574	467	56	5	6	7	53	7457	467	56	4	5	6
30	4574	567	46	5	6	7	54	7457	567	46	4	5	6
31	4674	456	57	5	6	7	55	7467	456	57	4	5	6
32	4674	457	56	5	6	7	56	7467	457	56	4	5	6
33	4674	657	45	5	6	7	57	7467	657	45	4	5	6
34	5465	475	67	4	6	7	58	7567	546	47	4	5	6
35	5465	476	57	4	6	7	59	7567	547	46	4	5	6
36	5465	576	47	4	6	7	60	7567	647	45	4	5	6

VII. (441111)

1	4675	6547	4	5	6	7	4	4756	5467	4	5	6	7
2	4765	6457	4	5	6	7	5	4567	5746	4	5	6	7
3	4576	5647	4	5	6	7	6	4657	5476	4	5	6	7

VIII. (522111)

1	45675	46	47	5	6	7	5	46576	45	47	5	6	7
2	45765	46	47	5	6	7	6	46756	45	47	5	6	7
3	46745	56	57	4	6	7	7	45746	56	67	4	5	7
4	47645	56	57	4	6	7	8	47546	56	67	4	5	7

9	47567	45	46	5	6	7	23	64567	47	57	4	5	6
10	47657	45	46	5	6	7	24	65467	47	57	4	5	6
11	45647	57	67	4	5	6	25	45764	47	56	5	6	7
12	46547	57	67	4	5	6	26	45674	46	57	5	6	7
13	56476	45	57	4	6	7	27	46574	45	67	5	6	7
14	56746	45	57	4	6	7	28	54765	46	57	4	6	7
15	54756	46	67	4	5	7	29	54675	47	56	4	6	7
16	57456	46	67	4	5	7	30	56475	45	67	4	6	7
17	57467	45	56	4	6	7	31	64756	45	67	4	5	7
18	57647	45	56	4	6	7	32	64576	47	56	4	5	7
19	54657	47	67	4	5	6	33	65476	46	57	4	5	7
20	56457	47	67	4	5	6	34	74657	45	67	4	5	6
21	67457	46	56	4	5	7	35	74567	46	57	4	5	6
22	67547	46	56	4	5	7	36	75467	47	56	4	5	6

IX. (531111)

1	45675	647	4	5	6	7	13	56476	457	4	5	6	7
2	45765	647	4	5	6	7	14	56746	457	4	5	6	7
3	46745	657	4	5	6	7	15	54756	467	4	5	6	7
4	47645	657	4	5	6	7	16	57456	467	4	5	6	7
5	46576	547	4	5	6	7	17	57467	456	4	5	6	7
6	46756	547	4	5	6	7	18	57647	456	4	5	6	7
7	45746	567	4	5	6	7	19	54657	476	4	5	6	7
8	47546	567	4	5	6	7	20	56457	476	4	5	6	7
9	47567	546	4	5	6	7	21	67457	465	4	5	6	7
10	47657	546	4	5	6	7	22	67547	465	4	5	6	7
11	45647	576	4	5	6	7	23	64567	475	4	5	6	7
12	46547	576	4	5	6	7	24	65467	475	4	5	6	7

X. (621111)

1	456475	67	4	5	6	7	7	465476	57	4	5	6	7
2	457465	67	4	5	6	7	8	467456	57	4	5	6	7
3	465475	67	4	5	6	7	9	456476	57	4	5	6	7
4	475465	67	4	5	6	7	10	476456	57	4	5	6	7
5	465745	67	4	5	6	7	11	456746	57	4	5	6	7
6	475645	67	4	5	6	7	12	476546	57	4	5	6	7

13	475467	56	4	5	6	7	25	574567	46	4	5	6	7
14	476457	56	4	5	6	7	26	576547	46	4	5	6	7
15	457467	56	4	5	6	7	27	547567	46	4	5	6	7
16	467457	56	4	5	6	7	28	567547	46	4	5	6	7
17	457647	56	4	5	6	7	29	547657	46	4	5	6	7
18	467547	56	4	5	6	7	30	567457	46	4	5	6	7
19	564576	47	4	5	6	7	31	674657	45	4	5	6	7
20	567546	47	4	5	6	7	32	675647	45	4	5	6	7
21	546576	47	4	5	6	7	33	647657	45	4	5	6	7
22	576546	47	4	5	6	7	34	657647	45	4	5	6	7
23	546756	47	4	5	6	7	25	647567	45	4	5	6	7
24	576456	47	4	5	6	7	36	657467	45	4	5	6	7

17.

Cinquième partie. — Des systèmes dérivés et auxiliaires. Méthode qui en découle pour déterminer les quantités [1], [2],...

Dans le nombre des systèmes d'intercalations indépendants se trouvent nécessairement tous ceux qui, étant pris dans un certain ordre, deviennent applicables à un système d'ambes altérés. Pour juger dans un cas donné, quels sont ces systèmes, il faut avoir recours à la troisième condition fondamentale. Or, cette condition, en tant qu'elle concerne les intercalations, ne tient compte que des éléments qui viennent en contact avec ceux des ambes altérés. Il convient donc, sous ce point de vue, d'indiquer chaque intercalation, multiple ou simple, par ces deux éléments caractéristiques; l'un étant celui par lequel elle touche le premier élément de l'ambe altéré correspondant, l'autre celui par lequel elle en touche le second. Ce seront les éléments extrêmes de l'intercalation, si celle-ci est multiple; si elle est simple, ils consisteront l'un et l'autre dans l'élément dont l'intercalation est formée, puisque cet élément se trouve alors en contact et avec le premier et avec le second de l'ambe altéré correspondant.

Les deux éléments caractéristiques d'une intercalation seront considérés comme formant un ambe, et les six ambes de cette nature, qui indiquent les intercalations constituant un système (indépendant ou déterminé quant à son ordre), en seront nommées le système dérivé. D'autre part, nous entendrons par système auxiliaire applicable à un système proposé d'ambes altérés six ambes quelconques qui, ne comprenant d'autres éléments que 4, 5, 6, 7, s'y appliquent dans un certain ordre, conformément à la troisième condition fondamentale. Cet ordre sera fixé en chaque cas, non seulement sous le rapport de la correspondance entre les ambes altérés et ceux du système auxiliaire, mais aussi relativement au sens dans lequel on prend ces derniers; chaque élément d'un de ces ambes devant être de même rang que l'élément contigu de l'ambe altéré correspondant.

Si dans le nombre des systèmes auxiliaires applicables à un système d'ambes altérés proposé, il s'en trouve un dont les ambes soient en même temps ceux du système dérivé d'un système indépendant, celui-ci deviendra applicable au même système d'ambes altérés, si l'on en détermine l'ordre analoguement à celui du système auxiliaire en question. A cette fin, il faut substituer à chaque ambe une intercalation qu'il indique, et prendre chaque intercalation multiple dans un sens tel que son élément initial s'accorde avec le premier, son élément final avec le second élément de l'ambe qu'elle remplace.

Il faut remarquer quant à cet ordre, que la substitution des intercalations s'accomplira sans ambiguité, si tous les ambes du système auxiliaire (ou dérivé) sont différents les uns des autres; si au contraire, plusieurs de ces ambes sont égaux entre eux (qu'il soient d'ailleurs pris dans le même sens ou non), les intercalations qu'ils indiquent et qui les doivent remplacer, pourront être permutées entre elles de toutes les manières possibles. On se convaincra du reste, par l'inspection du tableau de l'article précédent, que dans aucun système indépendant, plus d'un ambe caractéristique n'appartienne à plusieurs intercalations, et que par conséquent, le système auxiliaire ou dérivé duquel il s'agit, ne saurait contenir plusieurs fois qu'un seul ambe.

Il faut remarquer en second lieu, que, la substitution des intercalations accomplie, le sens de toute intercalation multiple sera déterminé sans ambiguité, lorsqu'elle est à éléments extrêmes inégaux. Dans le cas contraire, l'ambe qu'elle remplace se composera de deux éléments égaux, et ne sera plus propre à en fixer le sens; l'un et l'autre seront donc alors également admissibles.

Ces remarques nous font voir qu'en certains cas l'ordre du système indépendant pourra se déterminer de diverses manières, tout en restant analogue à celui du système auxiliaire. Or, chacune de ces manières se rapporte à un autre système d'intercalations applicable au système d'ambes altérés proposé (voir la fin de l'art. 9). Si donc on admet en général, qu'un système indépendant renferme L intercalations possédant le même ambe caractéristique, et que l'on désigne par M le nombre de ses intercalations multiples à éléments extrêmes égaux, la valeur de L étant selon le cas, 1, 2 ou 3, et celle de M, 0 ou 1, on parvient à la conclusion suivante qui embrasse tous le cas qui peuvent ici venir en considération:

> En admettant que les ambes d'un certain système auxiliaire applicable à un système d'ambes altérés proposé soient ceux du système dérivé d'un système indépendant, et que les valeurs de L et de M relatives à ce dernier soient λ et μ, celui-ci donnera lieu à $1\cdot 2\ldots\lambda\cdot 2^{\mu}$ systèmes d'intercalations différents, applicables au système d'ambes altérés proposé, et s'y appliquant tous dans un ordre analogue à celui du système auxiliaire en question.

18.

Si les ambes de ce système auxiliaire sont ceux d'un système dérivé commun à plusieurs systèmes indépendants, la conclusion précédente se rapportera à chacun de ces derniers, en y déterminant convenablement les valeurs de L et de M. Or, la valeur de L y sera évidemment la même, tandis que la quantité M y possédera, généralement parlant, des valeurs différentes. On est donc conduit à cette autre conclusion:

> À tout système auxiliaire applicable à un système d'ambes altérés proposé correspondra un nombre déterminé de systèmes d'intercalations s'appliquant au système proposé dans un ordre analogue. Ce nombre dépendra, en chaque cas, de la quantité et de la nature des systèmes indépendants qui ont les ambes du système auxiliaire respectif pour système dérivé; il sera $=0$, s'il n'existe pas de tels systèmes indépendants; si au contraire, il en existe un ou plusieurs, et que la quantité L y possède la valeur (commune) λ, la quantité M les valeurs μ', μ'',... le même nombre sera exprimé par
>
> $$1\cdot 2\ldots\lambda\cdot 2^{\mu'}+1\cdot 2\ldots\lambda\cdot 2^{\mu''}+\cdots=1\cdot 2\ldots\lambda[2^{\mu'}+2^{\mu''}+\cdots]=P;$$
>
> formule qui comprend autant de termes qu'il y a de systèmes indépendants qui s'y rapportent.

Il importe d'ajouter la remarque qu'à deux systèmes d'intercalations différents correspondent des systèmes d'intercalations différents. Cela est évident si les ambes de ces systèmes auxiliaires ne sont pas les mêmes, et constituent, par conséquent, des systèmes dérivés différents. Dans le cas contraire, les deux systèmes auxiliaires, puisqu'on les suppose différents, le seront quant à l'ordre; par conséquent, tout système d'intercalations correspondant à l'un différera de ceux qui correspondent à l'autre.

Il n'est pas moins aisé de voir que tout système d'intercalations applicable au système d'ambes altérés proposé, doit correspondre à un système auxiliaire qui s'y applique. En effet, quel que soit ce système d'intercalations, son système dérivé pris dans un ordre analogue au sien, satisfera à la troisième condition fondamentale, et sera par conséquent un système auxiliaire. C'est donc à celui-ci que correspondra le système d'intercalations en question.

Il s'ensuit de ces remarques jointes à la dernière conclusion, que l'on obtiendra tous les systèmes d'intercalations applicables au système d'ambes altérés proposé, en réunissant tous ceux qui correspondent aux différents systèmes auxiliaires applicables au même système d'ambes altérés. Il suffit donc, pour trouver le nombre des premiers, d'exécuter les opérations suivantes :

1.° de désigner les systèmes dérivés et les valeurs de L et de M pour tous les systèmes indépendants que nous avons énumérés; d'indiquer relativement à chaque système dérivé différent, les systèmes indépendants qui l'ont en commun, et la valeur de P qui en dépend;

2.° de former le tableau de tous les systèmes auxiliaires applicables au système d'ambes altérés proposé, d'en exclure ceux dont les ambes ne constituent pas de système dérivé, et de désigner pour chacun des autres la valeur de P dépendant du système dérivé particulier qui s'y rapporte. La somme de tous ces nombres sera le nombre cherché.

Il s'agira donc maintenant, pour déterminer les quantités [1], [2],..., d'exécuter ces opérations relativement aux différents systèmes d'ambes altérés; ce qui n'exige, dans chaque catégorie, que la considération d'un seul système, que nous supposerons partout être le système général (en a, b, c).

19.

Sixième partie. — Détermination des quantités [1], [2],..., de *S*, etc.

Première opération. — Nous diviserons les systèmes dérivés par catégories, en comprenant dans chacune tous ceux qui se transforment les uns dans les autres, par suite de certaines permutations des éléments 4, 5, 6, 7. En désignant généralement une telle permutation par $ABCD$, et en dénotant chaque système indépendant par deux chiffres, le premier ayant rapport à sa classe, le second au rang qu'il y occupe, on trouvera d'abord le tableau suivant de tous les systèmes dérivés différents, divisés d'après leurs catégories, avec l'indication des systèmes indépendants auxquels ils appartiennent, et des valeurs respectives de L et de M:

1.°

AB	*AC*	*AD*	*BC*	*BD*	*CD*	. . . $L=1$, $M=0$
45	46	47	56	57	67	. . . I, 1

2.°

AB	*AB*	*AC*	*BC*	*DC*	*DD*	. . . $L=2$, $M=0$
45	45	47	57	67	66	. . . II, 1
45	45	46	56	76	77	. . . II, 2
46	46	47	67	57	55	. . . II, 3
46	46	45	65	75	77	. . . II, 4
47	47	46	76	56	55	. . . II, 5
47	47	45	75	65	66	. . . II, 6
56	56	57	67	47	44	. . . II, 7
56	56	54	64	74	77	. . . II, 8
57	57	56	76	46	44	. . . II, 9
57	57	54	74	64	66	. . . II, 10
67	67	65	75	45	44	. . . II, 11
67	67	64	74	54	55	. . . II, 12

3.°

AB	*AB*	*AB*	*CD*	*CC*	*DD*	. . . $L=3$, $M=0$
45	45	45	67	66	77	. . . III, 1
46	46	46	57	55	77	. . . III, 10
47	47	47	56	55	66	. . . III, 17
56	56	56	47	44	77	. . . III, 22
57	57	57	46	44	66	. . . III, 27
67	67	67	45	44	55	. . . III, 30

4.° $AB\ AB\ AC\ BD\ CC\ DD \ldots L=2, \quad M=0$

45	45	46	57	66	77 . . .	III (2, 9)	V, 2
45	45	47	56	77	66 . . .	III (4, 7)	V, 1
46	46	45	67	55	77 . . .	III (6, 16). . . .	V, 4
46	46	47	65	77	55 . . .	III (12, 14) . . .	V, 3
47	47	45	76	55	66 . . .	III (3, 21). . . .	V, 6
47	47	46	75	66	55 . . .	III (11, 18) . . .	V, 5
56	56	54	67	44	77 . . .	III (8, 26). . . .	V, 8
56	56	57	64	77	44 . . .	III (15, 25) . . .	V, 7
57	57	54	76	44	66 . . .	III (5, 29). . . .	V, 10
57	57	56	74	66	44 . . .	III (20, 23) . . .	V, 9
67	67	64	75	44	55 . . .	III (13, 28) . . .	V, 12
67	67	65	74	55	44 . . .	III (19, 24) . . .	V, 11

5.° $AB\ AC\ AD\ BB\ CC\ DD \ldots L=1$

45	46	47	55	66	77 . . .	IV (1, 3).	$M=0$
						V (18, 21, 24).	$M=1$
						VI (1, 3, 5, 7, 9, 11).	$M=0$
						VIII (1, 2, 5, 6, 9, 10)	$M=0$
54	56	57	44	66	77 . . .	IV (2, 4)	$M=0$
						V (15, 20, 23).	$M=1$
						VI (2, 4, 13, 16, 17, 20).	$M=0$
						VIII (3, 4, 13, 14, 17, 18)	$M=0$
64	65	67	44	55	77 . . .	IV (5, 6).	$M=0$
						V (14, 17, 22).	$M=1$
						VI (6, 8, 14, 15, 21, 24).	$M=0$
						VIII (7, 8, 15, 16, 21, 22).	$M=0$
74	75	76	44	55	66 . . .	IV (7, 8).	$M=0$
						V (13, 16, 19).	$M=1$
						VI (10, 12, 18, 19, 22, 23).	$M=0$
						VIII (11, 12, 19, 20, 23, 24)	$M=0$

6.° $AB\ CD\ AA\ BB\ CC\ DD \ldots L=1$

45	67	44	55	66	77 ...	VI $\begin{pmatrix}25, 28, 33, 34, 37, 42\\43, 48, 51, 52, 57, 60\end{pmatrix}$	$M=1$
						VII (1, 2)	$M=0$
						VIII (27, 30, 31, 34)	$M=1$
						IX (1, 2, 3, 4, 21, 22, 23, 24)	$M=0$
						X $\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4, 5, 6\\31, 32, 33, 34, 35, 36\end{pmatrix}$	$M=0$
46	57	44	66	55	77 ...	VI $\begin{pmatrix}26, 30, 31, 35, 39, 41\\44, 46, 50, 54, 55, 59\end{pmatrix}$	$M=1$
						VII (3, 4)	$M=0$
						VIII (26, 28, 33, 35)	$M=1$
						IX (5, 6, 7, 8, 17, 18, 19, 20)	$M=0$
						X $\begin{pmatrix}7, 8, 9, 10, 11, 12\\25, 26, 27, 28, 29, 30\end{pmatrix}$	$M=0$
47	56	44	77	55	66 ...	VI $\begin{pmatrix}27, 29, 32, 36, 38, 40\\45, 47, 49, 53, 56, 58\end{pmatrix}$	$M=1$
						VII (5, 6)	$M=0$
						VIII (25, 29, 32, 36)	$M=1$
						IX (9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16)	$M=0$
						X $\begin{pmatrix}13, 14, 15, 16, 17, 18\\19, 20, 21, 22, 23, 24\end{pmatrix}$	$M=0$

Quant aux valeurs de P qu'il faut ajouter à ce tableau, pour compléter la première opération, il est aisé de reconnaître qu'elles sont constantes pour tous les systèmes dérivés appartenant à la même catégorie. Il suffit donc, en chaque cas, de la calculer pour un seul; ce qui nous donne:

catégorie							P
1.	AB	AC	AD	BC	BD	CD	1
2.	AB	AB	AD	BD	CD	CC	2
3.	AB	AB	AB	CD	CC	DD	6
4.	AB	AB	AC	BD	CC	DD	6
5.	AB	AC	AD	BB	CC	DD	20
6.	AB	CD	AA	BB	CC	DD	54

20.

Si dans l'une ou l'autre des formes générales qui caractérisent les différentes catégories, on substitue une permutation quelconque de 4567 au lieu de $ABCD$ (*), le système d'ambes résultant, pris dans un ordre convenable, sera dans tous les cas un des systèmes dérivés de la catégorie respective que nous venons d'énumérer. Il s'ensuit de cette observation, qu'il est du reste aisé de vérifier, que tout système auxiliaire que l'on peut ranger sous une de ces formes générales, en en changeant convenablement l'ordre, constitue par ses ambes un système dérivé. La valeur de P relative à un tel système auxiliaire, est donc celle qui se rapporte à la forme générale qui le comprend. Cette conclusion s'étend facilement à tous les systèmes auxiliaires en général, en y comprenant ceux qui ne se rangent sous aucune des formes générales mentionnées, et dont les ambes, par conséquent, ne constituent pas de système dérivé. En effet, on peut concevoir de tels systèmes auxiliaires comme étant compris sous d'autres formes générales, et l'on peut dire de celles-ci que la valeur de P qui s'y rapporte est $=0$.

Pour faciliter la recherche de la valeur de P qui convient à un système auxiliaire, nous ferons remarquer que l'on peut réunir en une seule la troisième et la quatrième catégorie des systèmes dérivés, puisque la valeur de P est dans l'une et l'autre $=6$. Cette réduction faite, les différentes catégories se distingueront les unes des autres par le nombre d'ambes à éléments égaux renfermés dans les formes générales qui les caractérisent. Or, en faisant attention que les systèmes auxiliaires doivent contenir trois fois chacun des éléments 4, 5, 6, 7, on se convaincra sans difficulté que tout système auxiliaire possédant un ou plusieurs ambes à éléments égaux, se range nécessairement sous une des six formes générales mentionnées, et appartient par conséquent à une des catégories respectives, savoir à celle qui possède le même nombre d'ambes à éléments égaux. Quant aux systèmes auxiliaires qui ne contiennent que des ambes à éléments inégaux, ceux qui se composent des six ambes 45, 46, 47, 56, 57, 67, appartiendront

(*) Il est superflu d'ajouter que par l'expression « substituer une permutation à une autre » nous entendons qu'à chaque élément de la seconde soit substitué l'élément de même rang de la première.

évidemment à la forme générale AB, AC, AD, BC, BD, CD, c'est-à-dire, à la première catégorie, tandis que les autres n'appartiennent à aucune et sont par conséquent les seuls dont les ambes ne constituent pas de système dérivé. D'après cela, il nous sera très facile de déterminer la valeur de P relative à un système auxiliaire quelconque. Il n'y a, en effet, qu'à procéder d'après les indications du tableau qui suit:

Cas		P
Point d'ambes à éléments égaux.	1. moins de six ambes différents	0
	2. six ambes différents	1
	3. un ambe à éléments égaux.	2
	4. deux ambes à éléments égaux. . . .	6
	5. trois ambes à éléments égaux	20
	6. quatre ambes à éléments égaux. . .	54

21.

Seconde opération. — Pour désigner un système auxiliaire $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$,... applicable à un système d'ambes altérés général $a_1 b_1$, $a_2 b_2$,... et tenir compte en même temps de l'ordre dans lequel il s'y applique, nous ferons usage de la notation suivante:

$$\frac{a_1 b_1 \quad a_2 b_2 \quad a_3 b_3 \quad a_4 b_4 \quad a_5 b_5 \quad a_6 b_6}{\alpha_1\beta_1 \quad \alpha_2\beta_2 \quad \alpha_3\beta_3 \quad \alpha_4\beta_4 \quad \alpha_5\beta_5 \quad \alpha_6\beta_6}$$

en plaçant les uns sous les autres les ambes correspondants, et en en faisant de même de leurs éléments contigus.

Les systèmes auxiliaires ne devant satisfaire qu'à la troisième condition fondamentale, il est nécessaire et il suffit à leur égard, que chacun des éléments 4, 5, 6, 7 se trouve une fois en contact avec chacun des éléments 1, 2, 3 ou a, b, c; c'est-à-dire, d'après notre notation, que chacun des premiers se trouve une fois sous chacun des seconds; ce qui est généralement possible, puisque tous les systèmes d'ambes altérés généraux contiennent quatre fois chacun des éléments a, b, c. Si donc on dénote par $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ et $\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2$ des permutations quelconques de 4567, et que l'on en assigne la première aux a, la seconde aux b, la troisième aux c, tout système auxiliaire applicable à un système d'ambes altérés général sera exprimé, selon le cas, par l'un ou l'autre des systèmes généraux que voici :

$$1.\ \frac{aa \quad aa \quad bb \quad bb \quad cc \quad cc}{\alpha\beta \quad \gamma\delta \quad \alpha_1\beta_1 \quad \gamma_1\delta_1 \quad \alpha_2\beta_2 \quad \gamma_2\delta_2}$$

$$2.\ \frac{aa \quad aa \quad bb \quad cc \quad bc \quad bc}{\alpha\beta \quad \gamma\delta \quad \alpha_1\beta_1 \quad \alpha_2\beta_2 \quad \gamma_1\gamma_2 \quad \delta_1\delta_2}$$

$$3.\ \frac{aa \quad aa \quad bc \quad bc \quad bc \quad bc}{\alpha\beta \quad \gamma\delta \quad \alpha_1\alpha_2 \quad \beta_1\beta_2 \quad \gamma_1\gamma_2 \quad \delta_1\delta_2}$$

$$4.\ \frac{aa \quad bb \quad cc \quad ab \quad ac \quad bc}{\alpha\beta \quad \alpha_1\beta_1 \quad \alpha_2\beta_2 \quad \gamma\gamma_1 \quad \delta\gamma_2 \quad \delta_1\delta_2}$$

$$5.\ \frac{aa \quad bb \quad ac \quad ac \quad bc \quad bc}{\alpha\beta \quad \alpha_1\beta_1 \quad \gamma\alpha_2 \quad \delta\beta_2 \quad \gamma_1\gamma_2 \quad \delta_1\delta_2}$$

$$6.\ \frac{aa \quad ab \quad ac \quad bc \quad bc \quad bc}{\alpha\beta \quad \gamma\alpha_1 \quad \delta\alpha_2 \quad \beta_1\beta_2 \quad \gamma_1\gamma_2 \quad \delta_1\delta_2}$$

$$7.\ \frac{ab \quad ab \quad ac \quad ac \quad bc \quad bc}{\alpha\alpha_1 \quad \beta\beta_1 \quad \gamma\alpha_2 \quad \delta\beta_2 \quad \gamma_1\gamma_2 \quad \delta_1\delta_2.}$$

De ces systèmes généraux se déduiront donc les tableaux complets des systèmes auxiliaires, si l'on y substitue successivement toutes les permutations de 4567, tant au lieu de $\alpha\beta\gamma\delta$, qu'au lieu de $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ et de $\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2$; d'où résulteront en chaque cas $24\cdot24\cdot24$ combinaisons de permutations, et autant de systèmes auxiliaires différents les uns des autres.

Au lieu de procéder de cette manière, on peut aussi substituer d'abord toutes les permutations de $\alpha\beta\gamma\delta$ à $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ et $\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2$; d'où résulteront en chaque cas $24\cdot24$ systèmes auxiliaires en α, β, γ, δ, dans lesquels il s'agirait, en second lieu, de remplacer $\alpha\beta\gamma\delta$ par toutes les permutations de 4567. Mais il est évident que les 24 systèmes auxiliaires qui se déduisent de l'un quelconque de ces systèmes en α, β, γ, δ, sont tous compris sous la même forme générale, savoir sous celle qui comprend ce système lui-même. La valeur de P y sera donc constante, d'où l'on conclut que l'on satisfera à la seconde opération en ne formant, en chaque cas, que le tableau des systèmes auxiliaires en α, β, γ, δ, et en multipliant par 24 le nombre qui en résulte, savoir la somme de tous les P qui s'y rapportent. Ce procédé s'applique indifféremment à tous les systèmes auxiliaires généraux; chacun admet en outre un procédé particulier servant à réduire encore plus le nombre de systèmes auxiliaires à considérer. C'est ce qui résultera de la discussion spéciale des différents cas que nous faisons suivre.

22.

$$1. \frac{aa \quad aa \quad bb \quad bb \quad cc \quad cc}{\alpha\beta \quad \gamma\delta \quad \alpha_1\beta_1 \quad \gamma_1\delta_1 \quad \alpha_2\beta_2 \quad \gamma_2\delta_2.}$$

Dans ce cas on peut éviter tout-à-fait la formation du tableau. En effet, puisque tous les ambes $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, $\alpha_1\beta_1$, $\gamma_1\delta_1$, $\alpha_2\beta_2$, $\gamma_2\delta_2$ sont à éléments inégaux, il suffit de considérer les systèmes auxiliaires, dans lesquels ces ambes sont en même temps différents les uns des autres, et sont par conséquent $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, $\beta\gamma$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$. Cela étant le cas, les ambes $\alpha_1\beta_1$, $\gamma_1\delta_1$, $\alpha_2\beta_2$, $\gamma_2\delta_2$ s'accorderont avec $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, $\beta\gamma$, $\beta\delta$; par conséquent, les ambes qui se rapportent aux deux bb seront ou $\alpha\gamma$ et $\beta\delta$, ou $\alpha\delta$ et $\beta\gamma$, tandis qu'aux deux cc se rapporteront dans le premier cas $\alpha\delta$ et $\beta\gamma$, dans le second $\alpha\gamma$ et $\beta\delta$. Quant aux ambes qui se rapportent aux deux bb, il est évidemment permis de les permuter entre eux; de plus, chacun de ces ambes est admissible dans un sens ou dans l'autre; il y a donc $2\cdot2\cdot2=8$ manières différentes de les rapporter aux deux bb, et il y en a évidemment autant de rapporter aux deux cc les deux autres des quatre ambes $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, $\beta\gamma$, $\beta\delta$. On conclut de là que dans chacun des deux cas les systèmes auxiliaires en α, β, γ, δ, que nous avons à considérer, sont au nombre de $8\cdot8=64$. Le nombre total de ces systèmes sera donc $2\cdot64=128$. Pour ce qui est enfin des valeurs de P relatives à ces systèmes, elles y seront constantes, savoir $=1$; le nombre résultant du tableau en α, β, γ, δ sera donc dans le cas actuel $=128$, et l'on aura

$$[1]=24\cdot128=3072.$$

23.

$$2.\ \frac{aa\quad aa\quad bb\quad cc\quad bc\quad bc}{\alpha\beta\quad \gamma\delta\quad \alpha_1\beta_1\quad \alpha_2\beta_2\quad \gamma_1\gamma_2\quad \delta_1\delta_2}.$$

Le rang des éléments α, β, γ, δ étant fixé suivant l'ordre $\alpha\beta\gamma\delta$, soient $\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1\delta'_1$ et $\alpha'_2\beta'_2\gamma'_2\delta'_2$ deux permutations quelconques de $\alpha\beta\gamma\delta$, mais telles que α'_1 soit inférieur en rang à β'_1, γ'_1 inférieur à δ'_1, et α'_2 inférieur à β'_2. Cela admis, le système général que nous avons en vue, se décomposera en huit autres, savoir en

aa	aa	bb	cc	bc	bc
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha'_1\beta'_1$	$\alpha'_2\beta'_2$	$\gamma'_1\gamma'_2$	$\delta'_1\delta'_2$
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha'_1\beta'_1$	$\alpha'_2\beta'_2$	$\delta'_1\gamma'_2$	$\gamma'_1\delta'_2$
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha'_1\beta'_1$	$\beta'_2\alpha'_2$	$\gamma'_1\gamma'_2$	$\delta'_1\delta'_2$
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha'_1\beta'_1$	$\beta'_2\alpha'_2$	$\delta'_1\gamma'_2$	$\gamma'_1\delta'_2$
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\beta'_1\alpha'_1$	$\alpha'_2\beta'_2$	$\gamma'_1\gamma'_2$	$\delta'_1\delta'_2$
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\beta'_1\alpha'_1$	$\alpha'_2\beta'_2$	$\delta'_1\gamma'_2$	$\gamma'_1\delta'_2$
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\beta'_1\alpha'_1$	$\beta'_2\alpha'_2$	$\gamma'_1\gamma'_2$	$\delta'_1\delta'_2$
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\beta'_1\alpha'_1$	$\beta'_2\alpha'_2$	$\delta'_1\gamma'_2$	$\gamma'_1\delta'_2$

dans chacun desquels les permutations $\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1\delta'_1$ et $\alpha'_2\beta'_2\gamma'_2\delta'_2$ devront être remplacées successivement par toutes leurs valeurs, c'est-à-dire, par toutes les permutations de $\alpha\beta\gamma\delta$, compatibles avec les restrictions établies; valeurs qui sont:

$\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1\delta'_1$	$\alpha'_2\beta'_2\gamma'_2\delta'_2$	
$\alpha\beta\gamma\delta$	$\alpha\beta\gamma\delta$	$\beta\gamma\alpha\delta$
$\alpha\gamma\beta\delta$	$\alpha\beta\delta\gamma$	$\beta\gamma\delta\alpha$
$\alpha\delta\beta\gamma$	$\alpha\gamma\beta\delta$	$\beta\delta\alpha\gamma$
$\beta\gamma\alpha\delta$	$\alpha\gamma\delta\beta$	$\beta\delta\gamma\alpha$
$\beta\delta\alpha\gamma$	$\alpha\delta\beta\gamma$	$\gamma\delta\alpha\beta$
$\gamma\delta\alpha\beta$	$\alpha\delta\gamma\beta$	$\gamma\delta\beta\alpha$

On peut ici remarquer que la permutation $\alpha'_2\beta'_2\delta'_2\gamma'_2$ a les mêmes valeurs que $\alpha'_2\beta'_2\gamma'_2\delta'_2$; il est donc permis de permuter entre eux γ'_2 et δ'_2, ce que nous ferons dans chacun des huit systèmes où γ'_1 et δ'_1 ont changé de place; par suite de quoi tous ces systèmes se trouveront composés des mêmes ambes. On en conclut que les systèmes auxiliaires en α, β, γ, δ, qui se déduisent de deux quelconques des huit systèmes, sont respectivement compris sous les mêmes formes générales. La quantité P y présentera par conséquent la même suite de valeurs, ce qui nous permet de ne former que le tableau déduit d'un seul, p. e. du premier, sauf à multiplier par 8 le nombre qui en résulte. Par là, le nombre des systèmes en α, β, γ, δ que nous avons à considérer, se trouve réduit de $24 \cdot 24$ à $6 \cdot 12$; réduction que l'on poussera encore plus loin, si l'on a recours aux considérations suivantes:

En fixant les valeurs des ambes $\alpha_1\beta_1$ et $\alpha_2\beta_2$, et en admettant de plus que γ_1 soit inférieur à δ_1, on détermine en même temps deux systèmes auxiliaires en α, β, γ, δ qui sont, en se servant de la notation générale:

aa	aa	bb	cc	bc	bc
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha_1\beta_1$	$\alpha_2\beta_2$	$\gamma_1\gamma_2$	$\delta_1\delta_2$
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha_1\beta_1$	$\alpha_2\beta_2$	$\gamma_1\delta_2$	$\delta_1\gamma_2$

et que nous désignerons en conséquence par $(\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2)$; le premier ambe étant supposé correspondre à bb, le second à cc. Si les ambes $\alpha_1\beta_1$ et $\alpha_2\beta_2$ sont bien ordonnés, c'est-à-dire, si les éléments inferieurs y occupent le premier rang, les systèmes $(\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2)$ appartiendront au tableau qui se déduit du premier des huit systèmes généraux énumérés ci-dessus. Ce tableau se partage par conséquent, en 36 groupes qui résultent de $(\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2)$ en y mettant successivement $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, $\beta\gamma$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$ tant à la place de $\alpha_1\beta_1$ qu'à celle de $\alpha_2\beta_2$.

Si dans un de ces groupes on remplace $\alpha\beta\gamma\delta$ par une quelconque de ses permutations, il se transformera en deux autres systèmes respectivement compris sous les mêmes formes générales. Or, les ambes $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$ ne changeront que d'ordre, si l'on y permute soit α et β, soit γ et δ, soit que l'on y permute simultanément α et γ, β et δ. Si donc on admet que la permutation substituée à $\alpha\beta\gamma\delta$ soit le résultat d'un ou de plusieurs de ces changements, et qu'elle transforme $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ et $\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2$ respectivement en $\alpha''_1\beta''_1\gamma''_1\delta''_1$ et $\alpha''_2\beta''_2\gamma''_2\delta''_2$, les deux systèmes transformés se composeront, abstraction faite de l'ordre, des ambes

$$\alpha\beta \quad \gamma\delta \quad \alpha''_1\beta''_1 \quad \alpha''_2\beta''_2 \quad \gamma''_1\gamma''_2 \quad \delta''_1\delta''_2$$

et

$$\alpha\beta \quad \gamma\delta \quad \alpha''_1\beta''_1 \quad \alpha''_2\beta''_2 \quad \gamma''_1\delta''_2 \quad \delta''_1\gamma''_2$$

qui, comme on le voit, sont en même temps ceux qui constituent le groupe de systèmes $(\alpha''_1\beta''_1,\ \alpha''_2\beta''_2)$, ce qui ne cessera pas d'avoir lieu, si l'on écrit les ambes $\alpha''_1\beta''_1$ et $\alpha''_2\beta''_2$ de manière qu'ils soient bien ordonnés. Dans ce cas le groupe $(\alpha''_1\beta''_1,\ \alpha''_2\beta''_2)$ appartiendra, ainsi que $(\alpha_1\beta_1,\ \alpha_2\beta_2)$, au tableau déduit du premier des huit systèmes, et il sera permis dans la recherche qui nous occupe, de remplacer l'un par l'autre; les systèmes qui les composent, étant respectivement compris sous les mêmes formes générales. Or, en examinant sous ce point de vue les 36 groupes qui viennent ici en question, on trouve le tableau suivant, dans lequel les substitutions se rapportent au premier groupe de chaque ligne:

				α et γ, β et δ			
	α et β	γ et δ	α et β, γ et δ	seuls	α et β	γ et δ	α et β, γ et δ
$(\alpha\beta,\ \alpha\beta)$				$(\gamma\delta,\ \gamma\delta)$			
$(\alpha\beta,\ \alpha\gamma)$	$(\alpha\beta,\ \beta\gamma)$	$(\alpha\beta,\ \alpha\delta)$	$(\alpha\beta,\ \beta\delta)$	$(\gamma\delta,\ \alpha\gamma)$	$(\gamma\delta,\ \beta\gamma)$	$(\gamma\delta,\ \alpha\delta)$	$(\gamma\delta,\ \beta\delta)$
$(\alpha\beta,\ \gamma\delta)$				$(\gamma\delta,\ \alpha\beta)$			
$(\alpha\gamma,\ \alpha\beta)$	$(\beta\gamma,\ \alpha\beta)$	$(\alpha\delta,\ \alpha\beta)$	$(\beta\delta,\ \alpha\beta)$	$(\alpha\gamma,\ \gamma\delta)$	$(\beta\gamma,\ \gamma\delta)$	$(\alpha\delta,\ \gamma\delta)$	$(\beta\delta,\ \gamma\delta)$
$(\alpha\gamma,\ \alpha\gamma)$	$(\beta\gamma,\ \beta\gamma)$	$(\alpha\delta,\ \alpha\delta)$	$(\beta\delta,\ \beta\delta)$				
$(\alpha\gamma,\ \alpha\delta)$	$(\beta\gamma,\ \beta\delta)$	$(\alpha\delta,\ \alpha\gamma)$	$(\beta\delta,\ \beta\gamma)$	$(\alpha\gamma,\ \beta\gamma)$	$(\beta\gamma,\ \alpha\gamma)$	$(\alpha\delta,\ \beta\delta)$	$(\beta\delta,\ \alpha\delta)$
$(\alpha\gamma,\ \beta\delta)$	$(\beta\gamma,\ \alpha\delta)$	$(\alpha\delta,\ \beta\gamma)$	$(\beta\delta,\ \alpha\gamma)$				

Il suffit donc de prendre

2	fois le groupe		$(\alpha\beta,\ \alpha\beta)$	4	fois le groupe		$(\alpha\gamma,\ \alpha\gamma)$
8	»	»	$(\alpha\beta,\ \alpha\gamma)$	8	»	»	$(\alpha\gamma,\ \alpha\delta)$
2	»	»	$(\alpha\beta,\ \gamma\delta)$	4	»	»	$(\alpha\gamma,\ \beta\delta)$;
8	»	»	$(\alpha\gamma,\ \alpha\beta)$				

il est de plus aisé de voir que les systèmes formant les groupes $(\alpha\beta,\ \alpha\gamma)$ et $(\alpha\gamma,\ \alpha\beta)$ se composent respectivement des mêmes ambes; on peut donc remplacer le second groupe par le premier; par suite de quoi le tableau qui se déduit du premier des huit systèmes généraux prendra la forme

	aa aa bb cc bc bc	cas	P			aa aa bb cc bc bc	cas	P
$2\times$	$\alpha\beta\ \gamma\delta\ \alpha\beta\ \alpha\beta\ \gamma\gamma\ \delta\delta$	4	6		$4\times$	$\alpha\beta\ \gamma\delta\ \alpha\gamma\ \alpha\gamma\ \beta\beta\ \delta\delta$	4	6
	$\alpha\beta\ \gamma\delta\ \alpha\beta\ \alpha\beta\ \gamma\delta\ \gamma\delta$	1	0			$\alpha\beta\ \gamma\delta\ \alpha\gamma\ \alpha\gamma\ \beta\delta\ \delta\beta$	1	0
$16\times$	$\alpha\beta\ \gamma\delta\ \alpha\beta\ \alpha\gamma\ \gamma\beta\ \delta\delta$	3	2		$8\times$	$\alpha\beta\ \gamma\delta\ \alpha\gamma\ \alpha\delta\ \beta\beta\ \delta\gamma$	3	2
	$\alpha\beta\ \gamma\delta\ \alpha\beta\ \alpha\gamma\ \gamma\delta\ \delta\beta$	1	0			$\alpha\beta\ \gamma\delta\ \alpha\gamma\ \alpha\delta\ \beta\gamma\ \delta\beta$	2	1
$2\times$	$\alpha\beta\ \gamma\delta\ \alpha\beta\ \gamma\delta\ \gamma\alpha\ \delta\beta$	1	0		$4\times$	$\alpha\beta\ \gamma\delta\ \alpha\gamma\ \beta\delta\ \beta\alpha\ \delta\gamma$	1	0
	$\alpha\beta\ \gamma\delta\ \alpha\beta\ \gamma\delta\ \gamma\beta\ \delta\alpha$	1	0			$\alpha\beta\ \gamma\delta\ \alpha\gamma\ \beta\delta\ \beta\gamma\ \delta\alpha$	2	1

le nombre qui en résulte est donc

$$2\cdot 6+16\cdot 2+4\cdot 6+8\cdot 3+4\cdot 1=96;$$

par conséquent le nombre qui résulte du tableau complet en α, β, γ, δ est $=8\cdot 96=768$, et l'on trouve

$$[2]=24\cdot 768=18432.$$

24.

$$3.\ \frac{aa \quad aa \quad bc \quad bc \quad bc \quad bc}{\alpha\beta \quad \gamma\delta \quad \alpha_1\alpha_2 \quad \beta_1\beta_2 \quad \gamma_1\gamma_2 \quad \delta_1\delta_2}$$

De ce système général se déduisent 24 systèmes auxiliaires en α, β, γ, δ, si l'on y substitue successivement toutes les permutations de $\alpha\beta\gamma\delta$ au lieu de $\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2$, tandis que $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ conserve la même valeur, soit $\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1\delta'_1$. Les éléments α'_1, β'_1, γ'_1, δ'_1, n'étant autres, à l'ordre près, que α, β, γ, δ, il en sera de même des systèmes d'ambes $\alpha'_1\alpha_2$, $\beta'_1\beta_2$, $\gamma'_1\gamma_2$, $\delta'_1\delta_2$ et $\alpha\alpha'_2$, $\beta\beta'_2$, $\gamma\gamma'_2$, $\delta\delta'_2$, si l'on désigne par α'_2 celui des éléments α_2, β_2, γ_2, δ_2 qui dans le premier système se trouve combiné avec α, par β'_2 celui qui s'y trouve combiné avec β, et ainsi de suite. Il s'ensuit de là que les 24 systèmes auxiliaires en α, β, γ, δ desquels nous venons de parler se composent respectivement des mêmes ambes que les systèmes d'ambes que l'on déduit de

$$\alpha\beta,\quad \gamma\delta,\quad \alpha\alpha'_2,\quad \beta\beta'_2,\quad \gamma\gamma'_2,\quad \delta\delta'_2$$

en y remplaçant $\alpha'_2\beta'_2\gamma'_2\delta'_2$ par toutes les permutations de $\alpha\beta\gamma\delta$. Or, ces derniers systèmes ne varient pas, quelle que soit la permutation $\alpha'_2\beta'_2\gamma'_2\delta'_2$; ils ne varieront donc non plus, quelle que soit la permutation $\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1\delta'_1$ de laquelle la première dépend. On en conclut que les 24 systèmes auxiliaires en α, β, γ, δ relatifs à une valeur quelconque de $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ se composent respectivement des mêmes ambes que ceux qui se rapportent à toute autre; à plus forte raison, les uns seront respectivement compris sous les mêmes formes générales que les autres. Il suffit, par conséquent, de former le tableau de ceux qui se rapportent à une seule valeur de $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$, p. e. à $\alpha\beta\gamma\delta$, et de multiplier par 24 le nombre qui en résulte. Ce tableau étant

aa	aa	bc	bc	bc	bc	cas	P	aa	aa	bc	bc	bc	bc	cas	P
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\alpha$	$\beta\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	6	54	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\gamma$	$\beta\alpha$	$\gamma\beta$	$\delta\delta$	3	2
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\alpha$	$\beta\beta$	$\gamma\delta$	$\delta\gamma$	4	6	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\gamma$	$\beta\alpha$	$\gamma\delta$	$\delta\beta$	1	0
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\alpha$	$\beta\gamma$	$\gamma\beta$	$\delta\delta$	4	6	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\gamma$	$\beta\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\delta$	4	6
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\alpha$	$\beta\gamma$	$\gamma\delta$	$\delta\beta$	3	2	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\gamma$	$\beta\beta$	$\gamma\delta$	$\delta\alpha$	3	2
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\alpha$	$\beta\delta$	$\gamma\beta$	$\delta\gamma$	3	2	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\gamma$	$\beta\delta$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	1	0
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\alpha$	$\beta\delta$	$\gamma\gamma$	$\delta\beta$	4	6	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\gamma$	$\beta\delta$	$\gamma\beta$	$\delta\alpha$	2	1
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\beta$	$\beta\alpha$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	4	6	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\delta$	$\beta\alpha$	$\gamma\beta$	$\delta\gamma$	1	0
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\beta$	$\beta\alpha$	$\gamma\delta$	$\delta\gamma$	1	0	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\delta$	$\beta\alpha$	$\gamma\gamma$	$\delta\beta$	3	2
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\beta$	$\beta\gamma$	$\gamma\alpha$	$\delta\delta$	3	2	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\delta$	$\beta\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\gamma$	3	2
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\beta$	$\beta\gamma$	$\gamma\delta$	$\delta\alpha$	1	0	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\delta$	$\beta\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\alpha$	4	6
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\beta$	$\beta\delta$	$\gamma\alpha$	$\delta\gamma$	1	0	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\delta$	$\beta\gamma$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	2	1
$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\beta$	$\beta\delta$	$\gamma\gamma$	$\delta\alpha$	3	2	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\alpha\delta$	$\beta\gamma$	$\gamma\beta$	$\delta\alpha$	1	0

le nombre qui en résulte sera $=108$; celui qui résulte du tableau complet en α, β, γ, δ sera donc $=24\cdot108$, et l'on aura

$$[3]=24\cdot24\cdot108=62208.$$

25.

4.	aa	bb	cc	ab	ac	bc
	$\alpha\beta$	$\alpha_1\beta_1$	$\alpha_2\beta_2$	$\gamma\gamma_1$	$\delta\gamma_2$	$\delta_1\delta_2$

Ce système général se décompose en quatre autres, savoir en

aa	bb	cc	ab	ac	bc
$\alpha\beta$	$\alpha'_1\beta'_1$	$\alpha'_2\beta'_2$	$\gamma\gamma'_1$	$\delta\gamma'_2$	$\delta'_1\delta'_2$
$\alpha\beta$	$\alpha'_1\beta'_1$	$\beta'_2\alpha'_2$	$\gamma\gamma'_1$	$\delta\gamma'_2$	$\delta'_1\delta'_2$
$\alpha\beta$	$\beta'_1\alpha'_1$	$\alpha'_2\beta'_2$	$\gamma\gamma'_1$	$\delta\gamma'_2$	$\delta'_1\delta'_2$
$\alpha\beta$	$\beta'_1\alpha'_1$	$\beta'_2\alpha'_2$	$\gamma\gamma'_1$	$\delta\gamma'_2$	$\delta'_1\delta'_2$

où $\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1\delta'_1$ et $\alpha'_2\beta'_2\gamma'_2\delta'_2$ sont des permutations quelconques de $\alpha\beta\gamma\delta$, mais telles que α'_1 soit inférieur à β'_1, α'_2 inférieur à β'_2. Ces systèmes étant composés des mêmes ambes, on conclut, comme dans le second cas (art. 23), qu'il suffit d'un seul, p. e. du premier, pour former le tableau α, β, γ, δ, sauf à multiplier par 4 le nombre qui en résulte.

En fixant les valeurs des ambes $\alpha_1\beta_1$ et $\alpha_2\beta_2$, on détermine en même temps quatre systèmes auxiliaires en α, β, γ, δ, qui sont

aa	bb	cc	ab	ac	bc
$\alpha\beta$	$\alpha_1\beta_1$	$\alpha_2\beta_2$	$\gamma\gamma_1$	$\delta\gamma_2$	$\delta_1\delta_2$
$\alpha\beta$	$\alpha_1\beta_1$	$\alpha_2\beta_2$	$\gamma\gamma_1$	$\delta\delta_2$	$\delta_1\gamma_2$
$\alpha\beta$	$\alpha_1\beta_1$	$\alpha_2\beta_2$	$\gamma\delta_1$	$\delta\gamma_2$	$\gamma_1\delta_2$
$\alpha\beta$	$\alpha_1\beta_1$	$\alpha_2\beta_2$	$\gamma\delta_1$	$\delta\delta_2$	$\gamma_1\gamma_2$

et que nous désignerons par $(\alpha_1\beta_1,\ \alpha_2\beta_2)$. Si l'on permute ici réciproquement soit α et β, soit γ et δ, et que les ambes $\alpha_1\beta_1$ et $\alpha_2\beta_2$ se transforment dans le premier cas en $\alpha''_1\beta''_1$ et $\alpha''_2\beta''_2$, dans le second en $\alpha'''_1\beta'''_1$ et $\alpha'''_2\beta'''_2$, on sera autorisé à remplacer par $(\alpha_1\beta_1,\ \alpha_2\beta_2)$ tant $(\alpha''_1\beta''_1,\ \alpha''_2\beta''_2)$ que $(\alpha'''_2\beta'''_2,\ \alpha'''_1\beta'''_1)$, groupe qu'il ne faut pas confondre avec $(\alpha'''_1\beta'''_1,\ \alpha'''_2\beta'''_2)$. Ces propositions se démontrent à l'aide de raisonnements déjà employés, et que l'on suppléera aisément. Nous ajouterons qu'il est permis d'écrire les ambes $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$, $\alpha''_1\beta''_1$, $\alpha''_2\beta''_2$, $\alpha'''_1\beta'''_1$, $\alpha'''_2\beta'''_2$ de manière qu'ils soient bien ordonnés; par suite de quoi les groupes $(\alpha_1\beta_1,\ \alpha_2\beta_2)$, $(\alpha''_1\beta''_1,\ \alpha''_2\beta''_2)$, $(\alpha'''_2\beta'''_2,\ \alpha'''_1\beta'''_1)$ appartiendront tous les trois au tableau qui se déduit du premier des quatre systèmes généraux. Il s'ensuit de là que les groupes desquels ce tableau est composé, se présenteront dans l'ordre suivant, si l'on place sur la même ligne ceux que l'on peut remplacer entre eux:

	α et β	γ et δ	α et β, γ et δ
$(\alpha\beta,\ \alpha\beta)$			
$(\alpha\beta,\ \alpha\gamma)$	$(\alpha\beta,\ \beta\gamma)$	$(\alpha\delta,\ \alpha\beta)$	$(\beta\delta,\ \alpha\beta)$
$(\alpha\beta,\ \alpha\delta)$	$(\alpha\beta,\ \beta\delta)$	$(\alpha\gamma,\ \alpha\beta)$	$(\beta\gamma,\ \alpha\beta)$
$(\alpha\beta,\ \gamma\delta)$		$(\gamma\delta,\ \alpha\beta)$	
$(\alpha\gamma,\ \alpha\gamma)$	$(\beta\gamma,\ \beta\gamma)$	$(\alpha\delta,\ \alpha\delta)$	$(\beta\delta,\ \beta\delta)$
$(\alpha\gamma,\ \alpha\delta)$	$(\beta\gamma,\ \beta\delta)$		
$(\alpha\gamma,\ \beta\gamma)$	$(\beta\gamma,\ \alpha\gamma)$	$(\beta\delta,\ \alpha\delta)$	$(\alpha\delta,\ \beta\delta)$
$(\alpha\gamma,\ \beta\delta)$	$(\beta\gamma,\ \alpha\delta)$		
$(\alpha\gamma,\ \gamma\delta)$	$(\beta\gamma,\ \gamma\delta)$	$(\gamma\delta,\ \alpha\delta)$	$(\gamma\delta,\ \beta\delta)$
$(\alpha\delta,\ \alpha\gamma)$	$(\beta\delta,\ \beta\gamma)$		
$(\alpha\delta,\ \beta\gamma)$	$(\beta\delta,\ \alpha\gamma)$		
$(\alpha\delta,\ \gamma\delta)$	$(\beta\delta,\ \gamma\delta)$	$(\gamma\delta,\ \alpha\gamma)$	$(\gamma\delta,\ \beta\gamma)$
$(\gamma\delta,\ \gamma\delta)$			

D'après cela, il suffit de prendre

1	fois	le groupe	$(\alpha\beta,\ \alpha\beta)$	2	fois	le groupe	$(\alpha\gamma,\ \beta\delta)$
4	»	»	$(\alpha\beta,\ \alpha\gamma)$	4	»	»	$(\alpha\gamma,\ \gamma\delta)$
4	»	»	$(\alpha\beta,\ \alpha\delta)$	2	»	»	$(\alpha\delta,\ \alpha\gamma)$
2	»	»	$(\alpha\beta,\ \gamma\delta)$	2	»	»	$(\alpha\delta,\ \beta\gamma)$
4	»	»	$(\alpha\gamma,\ \alpha\gamma)$	4	»	»	$(\alpha\delta,\ \gamma\delta)$
2	»	»	$(\alpha\gamma,\ \alpha\delta)$	1	»	»	$(\gamma\delta,\ \gamma\delta)$
4	»	»	$(\alpha\gamma,\ \beta\gamma)$				

ce qui nous conduit au tableau

	aa	*bb*	*cc*	*ab*	*ac*	*bc*	cas	*P*
$1\times$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\gamma$	$\delta\delta$	4	6
	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	$\delta\gamma$	4	6
	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\delta\gamma$	$\gamma\delta$	1	0
	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\delta\delta$	$\gamma\gamma$	4	6
$4\times$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma$	$\gamma\gamma$	$\delta\beta$	$\delta\delta$	4	6
	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	$\delta\beta$	4	6
	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma$	$\gamma\delta$	$\delta\beta$	$\gamma\delta$	1	0
	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma$	$\gamma\delta$	$\delta\delta$	$\gamma\beta$	3	2
$4\times$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\alpha\delta$	$\gamma\gamma$	$\delta\beta$	$\delta\gamma$	3	2
	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\alpha\delta$	$\gamma\gamma$	$\delta\gamma$	$\delta\beta$	3	2
	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\alpha\delta$	$\gamma\delta$	$\delta\beta$	$\gamma\gamma$	3	2
	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\alpha\delta$	$\gamma\delta$	$\delta\gamma$	$\gamma\beta$	1	0
$2\times$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\gamma\gamma$	$\delta\alpha$	$\delta\beta$	3	2
	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\gamma\gamma$	$\delta\beta$	$\delta\alpha$	3	2
	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\gamma\delta$	$\delta\alpha$	$\gamma\beta$	1	0
	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\gamma\delta$	$\delta\beta$	$\gamma\alpha$	1	0
$4\times$	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma$	$\alpha\gamma$	$\gamma\beta$	$\delta\beta$	$\delta\delta$	3	2
	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma$	$\alpha\gamma$	$\gamma\beta$	$\delta\delta$	$\delta\beta$	3	2
	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma$	$\alpha\gamma$	$\gamma\delta$	$\delta\beta$	$\beta\delta$	1	0
	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma$	$\alpha\gamma$	$\gamma\delta$	$\delta\delta$	$\beta\beta$	4	6
$2\times$	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma$	$\alpha\delta$	$\gamma\beta$	$\delta\beta$	$\delta\gamma$	2	1
	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma$	$\alpha\delta$	$\gamma\beta$	$\delta\gamma$	$\delta\beta$	2	1
	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma$	$\alpha\delta$	$\gamma\delta$	$\delta\beta$	$\beta\gamma$	2	1
	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma$	$\alpha\delta$	$\gamma\delta$	$\delta\gamma$	$\beta\beta$	3	2
$4\times$	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma$	$\beta\gamma$	$\gamma\beta$	$\delta\alpha$	$\delta\delta$	3	2
	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma$	$\beta\gamma$	$\gamma\beta$	$\delta\delta$	$\delta\alpha$	3	2
	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma$	$\beta\gamma$	$\gamma\delta$	$\delta\alpha$	$\beta\delta$	2	1
	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma$	$\beta\gamma$	$\gamma\delta$	$\delta\delta$	$\beta\alpha$	3	2

	aa	*bb*	*cc*	*ab*	*ac*	*bc*	cas	*P*
$2\times$	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma$	$\beta\delta$	$\gamma\beta$	$\delta\alpha$	$\delta\gamma$	2	1
	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma$	$\beta\delta$	$\gamma\beta$	$\delta\gamma$	$\delta\alpha$	2	1
	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma$	$\beta\delta$	$\gamma\delta$	$\delta\alpha$	$\beta\gamma$	2	1
	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma$	$\beta\delta$	$\gamma\delta$	$\delta\gamma$	$\beta\alpha$	1	0
$4\times$	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma$	$\gamma\delta$	$\gamma\beta$	$\delta\alpha$	$\delta\beta$	2	1
	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma$	$\gamma\delta$	$\gamma\beta$	$\delta\beta$	$\delta\alpha$	2	1
	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma$	$\gamma\delta$	$\gamma\delta$	$\delta\alpha$	$\beta\beta$	3	2
	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma$	$\gamma\delta$	$\gamma\delta$	$\delta\beta$	$\beta\alpha$	1	0
$2\times$	$\alpha\beta$	$\alpha\delta$	$\alpha\gamma$	$\gamma\beta$	$\delta\beta$	$\gamma\delta$	2	1
	$\alpha\beta$	$\alpha\delta$	$\alpha\gamma$	$\gamma\beta$	$\delta\delta$	$\gamma\beta$	3	2
	$\alpha\beta$	$\alpha\delta$	$\alpha\gamma$	$\gamma\gamma$	$\delta\beta$	$\beta\delta$	3	2
	$\alpha\beta$	$\alpha\delta$	$\alpha\gamma$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	$\beta\beta$	5	20
$2\times$	$\alpha\beta$	$\alpha\delta$	$\beta\gamma$	$\gamma\beta$	$\delta\alpha$	$\gamma\delta$	1	0
	$\alpha\beta$	$\alpha\delta$	$\beta\gamma$	$\gamma\beta$	$\delta\delta$	$\gamma\alpha$	3	2
	$\alpha\beta$	$\alpha\delta$	$\beta\gamma$	$\gamma\gamma$	$\delta\alpha$	$\beta\delta$	3	2
	$\alpha\beta$	$\alpha\delta$	$\beta\gamma$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	$\beta\alpha$	4	6
$4\times$	$\alpha\beta$	$\alpha\delta$	$\gamma\delta$	$\gamma\beta$	$\delta\alpha$	$\gamma\beta$	1	0
	$\alpha\beta$	$\alpha\delta$	$\gamma\delta$	$\gamma\beta$	$\delta\beta$	$\gamma\alpha$	2	1
	$\alpha\beta$	$\alpha\delta$	$\gamma\delta$	$\gamma\gamma$	$\delta\alpha$	$\beta\beta$	4	6
	$\alpha\beta$	$\alpha\delta$	$\gamma\delta$	$\gamma\gamma$	$\delta\beta$	$\beta\alpha$	3	2
$1\times$	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\gamma\delta$	$\gamma\alpha$	$\delta\alpha$	$\beta\beta$	3	2
	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\gamma\delta$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	$\beta\alpha$	1	0
	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\gamma\delta$	$\gamma\beta$	$\delta\alpha$	$\alpha\beta$	1	0
	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\gamma\delta$	$\gamma\beta$	$\delta\beta$	$\alpha\alpha$	3	2

duquel résulte le nombre

$$1\cdot 18+4\cdot 14+4\cdot 6+2\cdot 4+4\cdot 10+2\cdot 5+4\cdot 7+2\cdot 3+4\cdot 4+2\cdot 25+2\cdot 10+4\cdot 9+1\cdot 4=316,$$

et par suite

$$[4]=24\cdot 4\cdot 316=30336.$$

26.

5.

aa	bb	ac	ac	bc	bc
$\alpha\beta$	$\alpha_1\beta_1$	$\gamma\alpha_2$	$\delta\beta_2$	$\gamma_1\gamma_2$	$\delta_1\delta_2$

Nous substituerons à ce système général le suivant:

aa	bb	ac	ac	bc	bc
$\alpha_1\beta_1$	$\alpha_2\beta_2$	$\gamma_1\alpha$	$\delta_1\beta$	$\gamma_2\gamma$	$\delta_2\delta$

qui remplit évidemment le même but, et qui se décompose en quatre autres, savoir en

aa	bb	ac	ac	bc	bc
$\alpha'_1\beta'_1$	$\alpha'_2\beta'_2$	$\gamma'_1\alpha$	$\delta'_1\beta$	$\gamma'_2\gamma$	$\delta'_2\delta$
$\alpha'_1\beta'_1$	$\beta'_2\alpha'_2$	$\gamma'_1\alpha$	$\delta'_1\beta$	$\gamma'_2\gamma$	$\delta'_2\delta$
$\beta'_1\alpha'_1$	$\alpha'_2\beta'_2$	$\gamma'_1\alpha$	$\delta'_1\beta$	$\gamma'_2\gamma$	$\delta'_2\delta$
$\beta'_1\alpha'_1$	$\beta'_2\alpha'_2$	$\gamma'_1\alpha$	$\delta'_1\beta$	$\gamma'_2\gamma$	$\delta'_2\delta$

où $\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1\delta'_1$ et $\alpha'_2\beta'_2\gamma'_2\delta'_2$ sont des permutations quelconques de $\alpha\beta\gamma\delta$, dans lesquelles α'_1 est inférieur à β'_1, α'_2 inférieur à β'_2. Ces systèmes étant composés des mêmes ambes, il suffit de former le tableau en α, β, γ, δ, qui se déduit du premier, et de multiplier par 4 le nombre qui en résulte.

En désignant généralement par $(\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2)$ les systèmes en α, β, γ, δ, dans lesquels les ambes $\alpha_1\beta_1$ et $\alpha_2\beta_2$ ont respectivement les mêmes valeurs, savoir:

aa	bb	ac	ac	bc	bc
$\alpha_1\beta_1$	$\alpha_2\beta_2$	$\alpha_1\alpha$	$\beta_1\beta$	$\alpha_2\gamma$	$\beta_2\delta$
$\alpha_1\beta_1$	$\alpha_2\beta_2$	$\alpha_1\alpha$	$\beta_1\beta$	$\beta_2\gamma$	$\alpha_2\delta$
$\alpha_1\beta_1$	$\alpha_2\beta_2$	$\beta_1\alpha$	$\alpha_1\beta$	$\alpha_2\gamma$	$\beta_2\delta$
$\alpha_1\beta_1$	$\alpha_2\beta_2$	$\beta_1\alpha$	$\alpha_1\beta$	$\beta_2\gamma$	$\alpha_2\delta$

on constatera facilement les propositions suivantes:

1.° En permutant soit α et β, soit γ et δ, et en admettant que par suite d'un de ces changements ou de tous les deux, les ambes $\alpha_1\beta_1$ et $\alpha_2\beta_2$ se transforment en $\alpha''_1\beta''_1$ et $\alpha''_2\beta''_2$, il est permis de remplacer l'un par l'autre les groupes $(\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2)$ et $(\alpha''_1\beta''_1, \alpha''_2\beta''_2)$.

2.° Si, en permutant simultanément α et γ, β et δ, les ambes $\alpha_1\beta_1$ et $\alpha_2\beta_2$ se transforment en $\alpha'''_1\beta'''_1$ et $\alpha'''_2\beta'''_2$, il est permis de remplacer l'un par l'autre les groupes $(\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2)$ et $(\alpha'''_2\beta'''_2, \alpha'''_1\beta'''_1)$.

Les ambes $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$, $\alpha''_1\beta''_1$, $\alpha''_2\beta''_2$, $\alpha'''_1\beta'''_1$, $\alpha'''_2\beta'''_2$, étant bien ordonnés, le groupe $(\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2)$ ainsi que les groupes transformés appartiendront au tableau qui se déduit du premier des quatre systèmes généraux, et les groupes desquels ce tableau est composé se présenteront dans l'ordre suivant, indiquant ceux que l'on peut remplacer les uns par les autres:

				α et γ, β et δ			
	α et β	γ et δ	α et β, γ et δ	seuls	α et β	γ et δ	α et β, γ et δ
$(\alpha\beta, \alpha\beta)$				$(\gamma\delta, \gamma\delta)$			
$(\alpha\beta, \alpha\gamma)$	$(\alpha\beta, \beta\gamma)$	$(\alpha\beta, \alpha\delta)$	$(\alpha\beta, \beta\delta)$	$(\alpha\gamma, \gamma\delta)$	$(\beta\gamma, \gamma\delta)$	$(\alpha\delta, \gamma\delta)$	$(\beta\delta, \gamma\delta)$
$(\alpha\beta, \gamma\delta)$							
$(\alpha\gamma, \alpha\beta)$	$(\beta\gamma, \alpha\beta)$	$(\alpha\delta, \alpha\beta)$	$(\beta\delta, \alpha\beta)$	$(\gamma\delta, \alpha\gamma)$	$(\gamma\delta, \beta\gamma)$	$(\gamma\delta, \alpha\delta)$	$(\gamma\delta, \beta\delta)$
$(\alpha\gamma, \alpha\gamma)$	$(\beta\gamma, \beta\gamma)$	$(\alpha\delta, \alpha\delta)$	$(\beta\delta, \beta\delta)$				
$(\alpha\gamma, \alpha\delta)$	$(\beta\gamma, \beta\delta)$	$(\alpha\delta, \alpha\gamma)$	$(\beta\delta, \beta\gamma)$	$(\beta\gamma, \alpha\gamma)$	$(\alpha\gamma, \beta\gamma)$	$(\beta\delta, \alpha\delta)$	$(\alpha\delta, \beta\delta)$
$(\alpha\gamma, \beta\delta)$	$(\beta\gamma, \alpha\delta)$	$(\alpha\delta, \beta\gamma)$	$(\beta\delta, \alpha\gamma)$				
$(\gamma\delta, \alpha\beta)$							

Il suffit donc de prendre

2	fois le	groupe	$(\alpha\beta, \alpha\beta)$	4	fois le	groupe	$(\alpha\gamma, \alpha\gamma)$
8	»	»	$(\alpha\beta, \alpha\gamma)$	8	»	»	$(\alpha\gamma, \alpha\delta)$
1	»	»	$(\alpha\beta, \gamma\delta)$	4	»	»	$(\alpha\gamma, \beta\delta)$
8	»	»	$(\alpha\gamma, \alpha\beta)$	1	»	»	$(\gamma\delta, \alpha\beta)$

par conséquent, le tableau à former est celui-ci:

	aa	bb	ac	ac	bc	bc	cas	P
$2\times$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	4	6
	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	$\delta\gamma$	$\gamma\delta$	1	0
	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\delta\alpha$	$\gamma\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	4	6
	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\delta\alpha$	$\gamma\beta$	$\delta\gamma$	$\gamma\delta$	1	0
$8\times$	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	$\beta\gamma$	$\delta\delta$	3	2
	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	$\delta\gamma$	$\beta\delta$	1	0
	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma$	$\delta\alpha$	$\gamma\beta$	$\beta\gamma$	$\delta\delta$	3	2
	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma$	$\delta\alpha$	$\gamma\beta$	$\delta\gamma$	$\beta\delta$	2	1
$1\times$	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	$\alpha\gamma$	$\beta\delta$	1	0
	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	$\beta\gamma$	$\alpha\delta$	2	1
	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\delta\alpha$	$\gamma\beta$	$\alpha\gamma$	$\beta\delta$	2	1
	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\delta\alpha$	$\gamma\beta$	$\beta\gamma$	$\alpha\delta$	1	0
$8\times$	$\alpha\gamma$	$\alpha\beta$	$\beta\alpha$	$\delta\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	4	6
	$\alpha\gamma$	$\alpha\beta$	$\beta\alpha$	$\delta\beta$	$\delta\gamma$	$\gamma\delta$	1	0
	$\alpha\gamma$	$\alpha\beta$	$\delta\alpha$	$\beta\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	5	20
	$\alpha\gamma$	$\alpha\beta$	$\delta\alpha$	$\beta\beta$	$\delta\gamma$	$\gamma\delta$	3	2

	aa	bb	ac	ac	bc	bc	cas	P
$4\times$	$\alpha\gamma$	$\alpha\gamma$	$\beta\alpha$	$\delta\beta$	$\beta\gamma$	$\delta\delta$	3	2
	$\alpha\gamma$	$\alpha\gamma$	$\beta\alpha$	$\delta\beta$	$\delta\gamma$	$\beta\delta$	1	0
	$\alpha\gamma$	$\alpha\gamma$	$\delta\alpha$	$\beta\beta$	$\beta\gamma$	$\delta\delta$	4	6
	$\alpha\gamma$	$\alpha\gamma$	$\delta\alpha$	$\beta\beta$	$\delta\gamma$	$\beta\delta$	3	2
$8\times$	$\alpha\gamma$	$\alpha\delta$	$\beta\alpha$	$\delta\beta$	$\beta\gamma$	$\gamma\delta$	2	1
	$\alpha\gamma$	$\alpha\delta$	$\beta\alpha$	$\delta\beta$	$\gamma\gamma$	$\beta\delta$	3	2
	$\alpha\gamma$	$\alpha\delta$	$\delta\alpha$	$\beta\beta$	$\beta\gamma$	$\gamma\delta$	3	2
	$\alpha\gamma$	$\alpha\delta$	$\delta\alpha$	$\beta\beta$	$\gamma\gamma$	$\beta\delta$	4	6
$4\times$	$\alpha\gamma$	$\beta\delta$	$\beta\alpha$	$\delta\beta$	$\alpha\gamma$	$\gamma\delta$	1	0
	$\alpha\gamma$	$\beta\delta$	$\beta\alpha$	$\delta\beta$	$\gamma\gamma$	$\alpha\delta$	3	2
	$\alpha\gamma$	$\beta\delta$	$\delta\alpha$	$\beta\beta$	$\alpha\gamma$	$\gamma\delta$	3	2
	$\alpha\gamma$	$\beta\delta$	$\delta\alpha$	$\beta\beta$	$\gamma\gamma$	$\alpha\delta$	4	6
$1\times$	$\gamma\delta$	$\alpha\beta$	$\alpha\alpha$	$\beta\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	6	54
	$\gamma\delta$	$\alpha\beta$	$\alpha\alpha$	$\beta\beta$	$\delta\gamma$	$\gamma\delta$	4	6
	$\gamma\delta$	$\alpha\beta$	$\beta\alpha$	$\alpha\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	4	6
	$\gamma\delta$	$\alpha\beta$	$\beta\alpha$	$\alpha\beta$	$\delta\gamma$	$\gamma\delta$	1	0

le nombre qui en résulte est donc =

$$2\cdot 12+8\cdot 5+1\cdot 2+8\cdot 28+4\cdot 10+8\cdot 11+4\cdot 10+1\cdot 66=524,$$

et il vient

$$[5]=24\cdot 4\cdot 524=50304.$$

27.

$$6.\ \begin{array}{cccccc} aa & ab & ac & bc & bc & bc \\ \hline \alpha\beta & \gamma\alpha_1 & \delta\alpha_2 & \beta_1\beta_2 & \gamma_1\gamma_2 & \delta_1\delta_2 \end{array}$$

De ce système général se déduisent six systèmes auxiliaires en α, β, γ, δ, si l'on fixe les valeurs de α_1 et de α_2, et qu'on donne successivement toutes ses valeurs à la permutation $\beta_2\gamma_2\delta_2$, tandisque la permutation $\beta_1\gamma_1\delta_1$ reste la même. Or, il serait facile de démontrer (comparez le cas analogue, art. 24), que ces systèmes, ordonnés convenablement, ne cesseront pas d'être composés des mêmes ambes, si l'on remplace $\beta_1\gamma_1\delta_1$ par une quelconque de ses permutations. On conclut de là sans difficulté la proposition suivante:

En désignant par (α_1, α_2) les six systèmes auxiliaires mentionnés, relatifs à une valeur déterminée de $\beta_1\gamma_1\delta_1$, valeur que nous supposerons être telle que son premier élément soit inférieur au second, le second inférieur au troisième, il suffit d'employer à la formation du tableau en α, β, γ, δ les seize groupes qui se déduisent de (α_1, α_2) en y substituant successivement α, β, γ, δ, tant au lieu de α_1 que de α_2; sauf à multiplier par 6 le nombre résultant de ce tableau.

Il n'est pas moins aisé de constater cette autre proposition:

En permutant soit α et β, soit γ et δ, et en admettant que α_1 et α_2 se transforment dans le premier cas en α'_1 et α'_2, dans le second en α''_1 et α''_2, il est permis de remplacer par (α_1, α_2) l'un et l'autre des groupes (α'_1, α'_2) et (α''_2, α''_1).

En examinant sous ce point de vue les seize groupes que nous avons à considérer, ils se rangeront dans l'ordre suivant:

	α et β	γ et δ	α et β γ et δ
(α, α)	(β, β)		
(α, β)	(β, α)		
(α, γ)	(β, γ)	(δ, α)	(δ, β)
(α, δ)	(β, δ)	(γ, α)	(γ, β)
(γ, γ)		(δ, δ)	
(γ, δ)			
(δ, γ)			

Il suffit donc de prendre

2	fois le	groupe	(α, α)	2	fois le	groupe	(γ, γ)
2	»	»	(α, β)	1	»	»	(γ, δ)
4	»	»	(α, γ)	1	»	»	(δ, γ)
4	»	»	(α, δ)				

On se convaincra de plus sans peine qu'en permutant β et γ dans les systèmes (α, γ), ils se transformeront en d'autres respectivement composés des mêmes ambes que les systèmes (α, β); on est donc autorisé à remplacer le premier groupe par le dernier; par conséquent, le tableau en question prendra la forme suivante:

	aa	ab	ac	bc	bc	bc	cas	P
$2\times$	$\alpha\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\alpha$	$\beta\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	5	20
	$\alpha\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\alpha$	$\beta\beta$	$\gamma\delta$	$\delta\gamma$	3	2
	$\alpha\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\alpha$	$\beta\gamma$	$\gamma\beta$	$\delta\delta$	3	2
	$\alpha\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\alpha$	$\beta\gamma$	$\gamma\delta$	$\delta\beta$	2	1
	$\alpha\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\alpha$	$\beta\delta$	$\gamma\beta$	$\delta\gamma$	2	1
	$\alpha\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\alpha$	$\beta\delta$	$\gamma\gamma$	$\delta\beta$	3	2
$6\times$	$\alpha\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	$\beta\alpha$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	4	6
	$\alpha\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	$\beta\alpha$	$\gamma\delta$	$\delta\gamma$	1	0
	$\alpha\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	$\beta\gamma$	$\gamma\alpha$	$\delta\delta$	3	2
	$\alpha\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	$\beta\gamma$	$\gamma\delta$	$\delta\alpha$	2	1
	$\alpha\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	$\beta\delta$	$\gamma\alpha$	$\delta\gamma$	1	0
	$\alpha\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	$\beta\delta$	$\gamma\gamma$	$\delta\alpha$	3	2
$4\times$	$\alpha\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\delta$	$\beta\alpha$	$\gamma\beta$	$\delta\gamma$	3	2
	$\alpha\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\delta$	$\beta\alpha$	$\gamma\gamma$	$\delta\beta$	4	6
	$\alpha\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\delta$	$\beta\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\gamma$	4	6
	$\alpha\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\delta$	$\beta\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\alpha$	5	20
	$\alpha\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\delta$	$\beta\gamma$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	3	2
	$\alpha\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\delta$	$\beta\gamma$	$\gamma\beta$	$\delta\alpha$	3	2

	aa	ab	ac	bc	bc	bc	cas	P
$2\times$	$\alpha\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\gamma$	$\alpha\alpha$	$\beta\beta$	$\delta\delta$	6	54
	$\alpha\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\gamma$	$\alpha\alpha$	$\beta\delta$	$\delta\beta$	4	6
	$\alpha\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\gamma$	$\alpha\beta$	$\beta\alpha$	$\delta\delta$	4	6
	$\alpha\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\gamma$	$\alpha\beta$	$\beta\delta$	$\delta\alpha$	3	2
	$\alpha\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\gamma$	$\alpha\delta$	$\beta\alpha$	$\delta\beta$	3	2
	$\alpha\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\gamma$	$\alpha\delta$	$\beta\beta$	$\delta\alpha$	4	6
$1\times$	$\alpha\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	$\alpha\alpha$	$\beta\beta$	$\delta\gamma$	6	54
	$\alpha\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	$\alpha\alpha$	$\beta\gamma$	$\delta\beta$	5	20
	$\alpha\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	$\alpha\beta$	$\beta\alpha$	$\delta\gamma$	4	6
	$\alpha\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	$\alpha\beta$	$\beta\gamma$	$\delta\alpha$	4	6
	$\alpha\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	$\alpha\gamma$	$\beta\alpha$	$\delta\beta$	4	6
	$\alpha\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	$\alpha\gamma$	$\beta\beta$	$\delta\alpha$	5	20
$1\times$	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\delta\gamma$	$\alpha\alpha$	$\beta\beta$	$\gamma\delta$	4	6
	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\delta\gamma$	$\alpha\alpha$	$\beta\delta$	$\gamma\beta$	3	2
	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\delta\gamma$	$\alpha\beta$	$\beta\alpha$	$\gamma\delta$	1	0
	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\delta\gamma$	$\alpha\beta$	$\beta\delta$	$\gamma\alpha$	1	0
	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\delta\gamma$	$\alpha\delta$	$\beta\alpha$	$\gamma\beta$	1	0
	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$\delta\gamma$	$\alpha\delta$	$\beta\beta$	$\gamma\alpha$	3	2

le nombre qui en résulte est donc =

$$2\cdot 28+6\cdot 11+4\cdot 38+2\cdot 76+1\cdot 112+1\cdot 10=548,$$

et l'on trouve

$$[6]=24\cdot 6\cdot 548=78912.$$

28.

7. $\dfrac{ab \quad ab \quad ac \quad ac \quad bc \quad bc}{\alpha\alpha_1 \quad \beta\beta_1 \quad \gamma\alpha_2 \quad \delta\beta_2 \quad \gamma_1\gamma_2 \quad \delta_1\delta_2}$

En admettant γ'_1, inférieur à δ'_1, ce système général se décompose en deux autres, savoir en

ab	ab	ac	ac	bc	bc
$\alpha\alpha_1$	$\beta\beta_1$	$\gamma\alpha_2$	$\delta\beta_2$	$\gamma'_1\gamma_2$	$\delta'_1\delta_2$
$\alpha\alpha_1$	$\beta\beta_1$	$\gamma\alpha_2$	$\delta\beta_2$	$\delta'_1\gamma_2$	$\gamma'_1\delta_2$

dont le second comprendra les mêmes ambes que le premier, si l'on y permute γ_2 et δ_2, ce qu'il est évidemment permis de faire. Nous nous bornerons, en conséquence, à former le tableau en α, β, γ, δ, qui se déduit du premier de ces deux systèmes, et à multiplier par 2 le nombre qui en résulte. À ce tableau appartiendront les huits systèmes

ab	ab	ac	ac	bc	bc
$\alpha\alpha_1$	$\beta\beta_1$	$\gamma\alpha_2$	$\delta\beta_2$	$\gamma'_1\gamma_2$	$\delta'_1\delta_2$
$\alpha\alpha_1$	$\beta\beta_1$	$\gamma\alpha_2$	$\delta\beta_2$	$\gamma'_1\delta_2$	$\delta'_1\gamma_2$
$\alpha\alpha_1$	$\beta\beta_1$	$\gamma\beta_2$	$\delta\alpha_2$	$\gamma'_1\gamma_2$	$\delta'_1\delta_2$
$\alpha\alpha_1$	$\beta\beta_1$	$\gamma\beta_2$	$\delta\alpha_2$	$\gamma'_1\delta_2$	$\delta'_1\gamma_2$
$\alpha\beta_1$	$\beta\alpha_1$	$\gamma\alpha_2$	$\delta\beta_2$	$\gamma'_1\gamma_2$	$\delta'_1\delta_2$
$\alpha\beta_1$	$\beta\alpha_1$	$\gamma\alpha_2$	$\delta\beta_2$	$\gamma'_1\delta_2$	$\delta'_1\gamma_2$
$\alpha\beta_1$	$\beta\alpha_1$	$\gamma\beta_2$	$\delta\alpha_2$	$\gamma'_1\gamma_2$	$\delta'_1\delta_2$
$\alpha\beta_1$	$\beta\alpha_1$	$\gamma\beta_2$	$\delta\alpha_2$	$\gamma'_1\delta_2$	$\delta'_1\gamma_2$

si l'on fixe les valeurs de α_1 et de β_1, ainsi que de α_2 et de β_2. Ils sont de plus les seuls qui se rapportent à ces valeurs fixes; nous les désignerons donc par $(\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2)$, notation dans laquelle il est permis de permuter soit α_1 et β_1, soit α_2 et β_2; puisque par là les huit systèmes ne changeront que d'ordre.

En admettant que les ambes $\alpha''_1\beta''_1$ et $\alpha''_2\beta''_2$, ainsi que $\alpha'''_1\beta'''_1$ et $\alpha'''_2\beta'''_2$ aient ici la même signification que dans l'art. 26, c'est-à-dire, qu'ils résultent de $\alpha_1\beta_1$ et $\alpha_2\beta_2$ par suite des mêmes substitutions, on se convaincra sans difficulté que dans le cas actuel comme dans le cas cité, on est autorisé à remplacer par $(\alpha_1\beta_1,\ \alpha_2\beta_2)$ l'un et l'autre des groupes $(\alpha''_1\beta''_1,\ \alpha''_2\beta''_2)$ et $(\alpha'''_2\beta'''_2,\ \alpha'''_1\beta'''_1)$. On aboutira donc à la même conclusion par rapport à la formation du tableau. Or, on vérifiera aisément: 1.° que les systèmes $(\alpha\beta,\ \gamma\delta)$ se composent respectivement des mêmes ambes que les systèmes $(\alpha\beta,\ \alpha\beta)$; 2.° qu'en permutant α et δ dans les systèmes $(\alpha\gamma,\ \alpha\gamma)$, ils se transformeront en d'autres composés respectivement des mêmes ambes que les systèmes $(\alpha\beta,\ \alpha\gamma)$; 3.° qu'il en sera de même des systèmes $(\alpha\gamma,\ \beta\delta)$ vis-à-vis des systèmes $(\alpha\gamma,\ \alpha\beta)$; 4.° que les systèmes $(\gamma\delta,\ \alpha\beta)$ peuvent être négligés, puisqu'ils ne contiennent que des ambes à éléments inégaux parmi lesquels $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$ ne se rencontrent pas, de sorte que la quantité P y est généralement $=0$. Tous ces points considérés, on voit qu'il suffit de prendre:

3 fois le groupe	$(\alpha\beta,\ \alpha\beta)$		12 fois le groupe	$(\alpha\gamma,\ \alpha\beta)$
12 » »	$(\alpha\beta,\ \alpha\gamma)$		8 » »	$(\alpha\gamma,\ \alpha\delta)$

ce qui nous conduit au tableau suivant:

	ab	*ab*	*ac*	*ac*	*bc*	*bc*	cas	*P*
3×	$\alpha\alpha$	$\beta\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	6	54
	$\alpha\alpha$	$\beta\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	$\gamma\delta$	$\delta\gamma$	4	6
	$\alpha\alpha$	$\beta\beta$	$\gamma\beta$	$\delta\alpha$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	6	54
	$\alpha\alpha$	$\beta\beta$	$\gamma\beta$	$\delta\alpha$	$\gamma\delta$	$\delta\gamma$	4	6
	$\alpha\beta$	$\beta\alpha$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	4	6
	$\alpha\beta$	$\beta\alpha$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	$\gamma\delta$	$\delta\gamma$	1	0
	$\alpha\beta$	$\beta\alpha$	$\gamma\beta$	$\delta\alpha$	$\gamma\gamma$	$\delta\delta$	4	6
	$\alpha\beta$	$\beta\alpha$	$\gamma\beta$	$\delta\alpha$	$\gamma\delta$	$\delta\gamma$	1	0
12×	$\alpha\alpha$	$\beta\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\gamma$	$\gamma\beta$	$\delta\delta$	5	20
	$\alpha\alpha$	$\beta\beta$	$\gamma\alpha$	$\delta\gamma$	$\gamma\delta$	$\delta\beta$	4	6
	$\alpha\alpha$	$\beta\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\alpha$	$\gamma\beta$	$\delta\delta$	6	54
	$\alpha\alpha$	$\beta\beta$	$\gamma\gamma$	$\delta\alpha$	$\gamma\delta$	$\delta\beta$	5	20
	$\alpha\beta$	$\beta\alpha$	$\gamma\alpha$	$\delta\gamma$	$\gamma\beta$	$\delta\delta$	3	2
	$\alpha\beta$	$\beta\alpha$	$\gamma\alpha$	$\delta\gamma$	$\gamma\delta$	$\delta\beta$	1	0
	$\alpha\beta$	$\beta\alpha$	$\gamma\gamma$	$\delta\alpha$	$\gamma\beta$	$\delta\delta$	4	6
	$\alpha\beta$	$\beta\alpha$	$\gamma\gamma$	$\delta\alpha$	$\gamma\delta$	$\delta\beta$	3	2

	ab	*ab*	*ac*	*ac*	*bc*	*bc*	cas	*P*
12×	$\alpha\alpha$	$\beta\gamma$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	$\beta\gamma$	$\delta\delta$	4	6
	$\alpha\alpha$	$\beta\gamma$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	$\beta\delta$	$\delta\gamma$	3	2
	$\alpha\alpha$	$\beta\gamma$	$\gamma\beta$	$\delta\alpha$	$\beta\gamma$	$\delta\delta$	4	6
	$\alpha\alpha$	$\beta\gamma$	$\gamma\beta$	$\delta\alpha$	$\beta\delta$	$\delta\gamma$	3	2
	$\alpha\gamma$	$\beta\alpha$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	$\beta\gamma$	$\delta\delta$	3	2
	$\alpha\gamma$	$\beta\alpha$	$\gamma\alpha$	$\delta\beta$	$\beta\delta$	$\delta\gamma$	1	0
	$\alpha\gamma$	$\beta\alpha$	$\gamma\beta$	$\delta\alpha$	$\beta\gamma$	$\delta\delta$	3	2
	$\alpha\gamma$	$\beta\alpha$	$\gamma\beta$	$\delta\alpha$	$\beta\delta$	$\delta\gamma$	2	1
8×	$\alpha\alpha$	$\beta\gamma$	$\gamma\alpha$	$\delta\delta$	$\beta\beta$	$\delta\gamma$	5	20
	$\alpha\alpha$	$\beta\gamma$	$\gamma\alpha$	$\delta\delta$	$\beta\gamma$	$\delta\beta$	4	6
	$\alpha\alpha$	$\beta\gamma$	$\gamma\delta$	$\delta\alpha$	$\beta\beta$	$\delta\gamma$	4	6
	$\alpha\alpha$	$\beta\gamma$	$\gamma\delta$	$\delta\alpha$	$\beta\gamma$	$\delta\beta$	3	2
	$\alpha\gamma$	$\beta\alpha$	$\gamma\alpha$	$\delta\delta$	$\beta\beta$	$\delta\gamma$	4	6
	$\alpha\gamma$	$\beta\alpha$	$\gamma\alpha$	$\delta\delta$	$\beta\gamma$	$\delta\beta$	3	2
	$\alpha\gamma$	$\beta\alpha$	$\gamma\delta$	$\delta\alpha$	$\beta\beta$	$\delta\gamma$	3	2
	$\alpha\gamma$	$\beta\alpha$	$\gamma\delta$	$\delta\alpha$	$\beta\gamma$	$\delta\beta$	2	1

Le nombre qui en résulte étant $=$

$$3 \cdot 132 + 12 \cdot 110 + 12 \cdot 21 + 8 \cdot 45 = 2328,$$

on trouve

$$[7] = 24 \cdot 2 \cdot 2328 = 111744.$$

29.

En conséquence des valeurs que nous venons d'établir, il vient (art. 13)

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot 3072 + 72 \cdot 18432 + 30 \cdot 62208 + 256 \cdot 30336 \\ &\quad + 432 \cdot 50304 + 672 \cdot 78912 + 396 \cdot 111744 \\ &= 129976320. \end{aligned}$$

Le nombre des combinaisons circulaires des 28 dés est donc $=$

$$2^7 \cdot S = 284258211840;$$

et celui des combinaisons rectilignes ou proprement dites $=$

$$28 \cdot 2^7 \cdot S = 7959229931520.$$

Francfort, le 15 mai 1859.

Sur les limites de la convergence et de la divergence des séries infinies à termes positifs

(*par Mr.* J. Thomae, *à Halle.*)

Lejeune Dirichlet démontre dans sa théorie des nombres (éditée par Mr. Dedekind) la convergence de la série

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{(n)} \frac{1}{n^{1+\sigma}}$$

pour tous les σ positifs, au moyen des intégrales définies, et c'est par la même méthode qu'il trouve la limite, vers laquelle tend la somme de la série

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{(n)} \frac{\sigma}{n^{1+\sigma}},$$

si l'on fait évanouir σ sensiblement. On peut obtenir l'un et l'autre résultat par des moyens élémentaires, qui suffisent en même temps pour fixer les limites de la convergence et de la divergence des séries ne contenant que des termes positifs. Cette détermination, je crois, n'a pas été faite jusqu'à présent; c'est pourquoi je publie ici un mémoire élémentaire sur ce sujet, tout en remarquant que l'on peut aussi obtenir les mêmes résultats à l'aide du calcul intégral.

Dans tout cet écrit, σ sera un nombre positif, si petit que l'on voudra. De plus, qu'il soit

$$S(\sigma) = \sum_{0}^{\infty}{}_{(n)} \frac{(-1)^n}{(an+b)^\sigma}. \tag{1}$$

Cette série, dans laquelle il faut prendre pour a et b des nombres quelconques positifs, est convergente pour des σ quelque petits qu'ils soient, parceque ses termes diminuent vers zéro, et que les signes sont alternativement positifs et négatifs. Par conséquent, sont aussi convergentes les deux nouvelles séries, dont l'une provient de la réunion d'un terme pair avec le terme impair suivant, l'autre résulte de la réunion d'un terme pair avec le terme impair précédent, savoir

$$S(\sigma)=\sum_{0}^{\infty}{}_{(n)}\frac{1}{(2an+b)^{\sigma}}-\frac{1}{(\overline{2n+1}\,a+b)^{\sigma}}, \tag{2}$$

et

$$S(\sigma)=\frac{1}{b^{\sigma}}-\sum_{0}^{\infty}{}_{(n)}\cdot\frac{1}{(\overline{2n+1}\,a+b)^{\sigma}}-\frac{1}{(\overline{2n+2}\,a+b)^{\sigma}}. \tag{3}$$

A présent, nous nous occupons plus précisément de la série (2). On peut la mettre sous la forme

$$S(\sigma)=\sum_{0}^{\infty}{}_{(n)}\frac{1-\left(\frac{2na+b}{\overline{2n+1}\,a+b}\right)^{\sigma}}{(2na+b)^{\sigma}}=\sum_{0}^{\infty}{}_{(n)}\frac{1-\left[1-\frac{a}{2na+b}\left(1-\frac{a}{\overline{2n+1}\,a+b}\right)\right]^{\sigma}}{(2an+b)^{\sigma}}.$$

Si l'on développe dans l'expression dernière le numérateur d'après le théorème de Mac Laurin, en posant

$$\left[1-\frac{a}{2na+b}\left(1-\frac{a}{\overline{2n+1}\,a+b}\right)\right]^{\sigma}=$$

$$1-\frac{\sigma a}{2na+b}+\frac{\sigma a^2}{(2na+b)(\overline{2n+1}\,a+b)}+\frac{\sigma\cdot\overline{\sigma-1}\cdot a^2\theta}{2(2na+b)^2},$$

où θ signifie un nombre peut différent de 1, on peut écrire

$$S(\sigma)=\sum_{0}^{\infty}{}_{(n)}\frac{a\sigma}{(2na+b)^{1+\sigma}}+a\sigma E. \tag{4}$$

Dans cette formule, E signifie un nombre fini, parceque une série est absolument convergente si ses termes décroissent plus rapidement que $\frac{1}{n^2}$, ce qui est connu généralement. De là suit le théorème:

La série

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{(n)}\frac{1}{(2na+b)^{1+\sigma}} \tag{5}$$

est convergente pour des σ quelque petits qu'ils soient, parce qu'elle a la valeur $\frac{1}{a\sigma} \cdot S(\sigma) - E$.

Pour évaluer la limite

$$\lim_{\sigma=0} S(\sigma),$$

il faut considérer de la même manière la série (3), que nous écrirons

$$S(\sigma) = \frac{1}{b^\sigma} - \sum_0^\infty {}_{(n)} \frac{a\sigma}{(\overline{2n+1}\, a+b)^{1+\sigma}} + a\sigma H, \tag{6}$$

où H, ainsi que plus en haut E, est une série convergente, et par conséquent un nombre fini, même quand σ égale zéro. En soustrayant l'équation (6) de l'équation (4), il suit

$$\frac{1}{b^\sigma} + a\sigma(H - E) = \sum_0^\infty {}_{(n)} \frac{a\sigma}{(an+b)^{1+\sigma}},$$

donc

$$\lim_{\sigma=0}\left[\frac{1}{b^\sigma} + a\sigma(H-E)\right] = 1 = \lim_{\sigma=0} \sum_0^\infty {}_{(n)} \frac{a\sigma}{(an+b)^{1+\sigma}}, \tag{7}$$

ce qui est la valeur que Lejeune Dirichlet a calculée par un autre procédé. Il résulte de là, σ décroissant à zéro

$$\lim S(\sigma) = \lim \sum_0^\infty {}_{(n)} \frac{a\sigma}{(2an+b)^{1+\sigma}} = \lim \frac{1}{2} \sum \frac{2a\sigma}{(2an+b)^{1+\sigma}} = \frac{1}{2}. \tag{8}$$

Après avoir trouvé ainsi cette limite à l'aide de principes élémentaires, nous allons faire plusieurs autres conclusions sur la convergence des séries.

Si l'on forme le quotient de deux termes éloignées et consécutifs de la série (5), c'est-à-dire que l'on divise le $\overline{n-1}^{\text{ième}}$ terme par le $\overline{n-2}^{\text{ième}}$, en supposant pour simplifier $2a = 1$ et $b = 1$, on obtient pour ce quotient la valeur

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1+\sigma} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1+\sigma} = 1 - \frac{1+\sigma}{n} + \frac{\sigma}{1} \cdot \frac{\sigma+1}{2} \frac{\theta}{n^2},$$

où θ est peu différent de 1. Or, eu égard aux principes de la comparaison des séries, on peut établir le théorème:

Si la raison de deux termes se succédants dans une série infinie tend vers l'unité comme

$$1-\frac{1}{n}-\frac{\sigma}{n} \tag{9}$$

depuis un certain terme, dont l'indice est n, jusqu'à l'infini, la série est absolument convergente, tant que σ est positif, si petit qu'il soit.

Il est peu important, que l'approximation vers l'unité soit accélérée par une puissance de $\frac{1}{n}$ dont l'exposant surpasse l'unité. En effet, la valeur de la raison soit

$$1-\frac{1+\sigma}{n}+\frac{A}{n^{1+\rho}},$$

et que A soit un nombre quelconque fini; on pourra toujours donner un certain nombre $n=\nu$, à partir duquel

$$1-\frac{1}{n}-\frac{\sigma-\frac{A}{n^{\rho}}}{n}$$

tend plus lentement vers l'unité que

$$1-\frac{1}{n}-\frac{\delta}{n},$$

où δ est un nombre positif assujetti seulement à être moindre que σ. Il semble préférable d'énoncer ce théorème en ces mots:

Étant donnée une série infinie (10)

$$A_0+A_1+A_2+\cdots A_n+A_{n+1}+\cdots \textit{ in infinitum},$$

si l'on peut trouver un nombre positif σ quelque petit qu'il soit, de sorte qu'à partir d'un certain nombre $n=\nu$ jusqu'à l'infini

$$A_n\cdot n^{1+\sigma}$$

reste toujours sous une valeur définie quelque grande qu'elle soit, la série est absolument convergente.

On peut aussi obtenir les résultats précédents au moyen des principes de Gauss, contenus dans son mémoire sur les séries hypergéometriques. Mais on ne peut ainsi trouver les bornes de la petitesse, que σ ne doit pas surpasser, pour que la série soit encore convergente. Il est vrai, la série de termes positifs est divergente pour $\sigma = 0$. Mais les mesures qui fixent l'ordre dans lequel une fonction s'évanouit, c'est-à-dire les quantités τ, — qui font que depuis un certain nombre $n = \nu$ une fonction A_n de n multipliée par n^τ (donc $A_n \cdot n^\tau$) reste toujours au dessous d'un nombre défini différent en général de zéro, — ces mesures constituent une continuité d'une dimension, pour la détermination de laquelle tous nos nombres communs rationnels et irrationnels ne suffisent pas. En effet, une théorie rigoureuse des nombres irrationnels [qui est peut-être prise pour connue par la plus part des mathématiciens, mais qui n'a pas encore été publiée, ce que Mr. E. Heine fera bientôt (*)] a besoin de l'hypothèse suivante: « Toute grandeur qui est différente de zéro de moins que tout nombre d'une petitesse quelconque, est zéro elle même. » Dans la continuité des valeurs dont nous parlons, et qui assignent l'ordre dans lequel une fonction A_n s'annule, n croissant à l'infini, il y a de telles valeurs qui sont plus petites que chaque nombre aussi petit qu'on veut, et qui cependant diffèrent essentiellement de zéro. Par exemple, si $A_n \cdot \lg n$, n croissant à l'infini, reste toujours fini et différent de zéro, A_n décroît dans un ordre, dont la mesure est plus petite qu'un nombre donné, quelque petit qu'il soit, parceque $A_n \cdot n^\tau$, n croissant, devient infini pour tous les τ positifs si petits qu'ils soient, quoique A_n effectivement diminue. Mais on dirait, que A_n s'annule dans l'ordre de zéro, s'il resterait toujours fini et différent de zéro. Ainsi on appelle A_n d'un ordre négatif, s'il croît avec n à l'infini. J'ai déjà parlé de ce sujet dans mon livre « *Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der θ-functionen einer Veränderlichen* » page 40. Il existe aussi dans cette étendue des nombres (s'il est permis de généraliser ce nom et s'en servir pour les points de la continuité des valeurs qui marquent les ordres de décroissement) des nombres plus grands que tout nombre commun, quelque grand qu'il soit donné, savoir les mesures des ordres de e^n, e^{n^3}, e^{e^n}, etc., n étant positif et croissant à l'infini. Peut-être que les nombres que nous avons proposés ne joueront jamais un rôle important dans les mathématiques appliquées; néanmoins il me semble qu'il ne soit pas superflu de rendre attentifs les mathématiciens à ces formes, parcequ'elles peuvent mettre dans son jour la nature des nombres communs. Car il en provient clairement, qu'il n'est

(*) Journal de Mr. Borchardt, tome 74.

pas juste de prétendre qu'un point suive immédiatement un autre dans la continuité des nombres, ce qui parait intuitivement sûr dans la continuité des points d'une ligne de l'espace. Il en résulte de plus, qu'il est une vraie hypothèse de supposer qu'un nombre qui n'est pas négatif, mais moindre que tout nombre commun positif, quelque petit qu'il soit, soit zéro lui-même, parceque l'on peut abandonner cette hypothèse sans renoncer aux lois de l'addition et de la multiplication, ce que j'ai montré au lieu cité. Les mathématiciens, je crois, ne pourront éloigner de la sphère des discussions analytiques les quantités infiniment petites, différentes néanmoins de zéro, bien que la théorie des nombres communs et les calculs y fondés soient appuyés essentiellement sur cela, que de telles nombres n'existent pas. Mais cela ne vaut que pour l'étendue des nombres usités. On est aisément disposé à étendre cette propriété sur toutes les continuités mensurables, parcequ'on rapporte les nombres aux points de toute continuité; c'est ce que ne me semble pas être toujours juste, puisque les nombres quelque fois ne suffisent pas pour tous les points.

Maintenant, pour décider la question proposée sur les bornes de la convergence des séries, nous discutons la fonction

$$\lg\lg\lg\ldots\lg(n+1)=\lg^{(m+1)}(n+1),$$

c'est-à-dire le logarithme népérien pris $(m+1)$ fois de suite. On a

$$\lg^{(m+1)}(n+1)=\lg^{(m+1)}\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=\lg^{(m)}\left[\lg n+\lg\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=$$
$$=\lg^{(m)}\left(\lg n+\frac{1-\Delta_n}{n}\right)$$

où Δ_n est un nombre qui tend vers zéro, n croissant à l'infini. De plus il est

$$\lg^{(m+1)}(n+1)=\lg^{(m)}\left[\lg n\left(1+\frac{1-\Delta_n}{n\lg n}\right)\right]=\lg^{(m-1)}\left[\lg\lg n+\lg\left(1+\frac{1-\Delta_n}{n\lg n}\right)\right]=$$
$$=\lg^{(m-1)}\left(\lg\lg n+\frac{1-\Delta_n-\Delta'_n}{n\lg n}\right)$$

où Δ'_n tend vers zéro, n croissant à l'infini. Cela s'écrira

$$\lg^{(m-1)}\left(\lg\lg n\left[1+\frac{1-\Delta_n-\Delta'_n}{n\lg n\lg\lg n}\right)\right].$$

En continuant ce même procédé, on obtiendra finalement

$$\lg^{(m+1)}(n+1)=\lg^{(m+1)}(n)+\frac{1-\Delta_n-\Delta'_n-\cdots-\Delta_n^{(m)}}{n\lg n\lg\lg n\ldots\lg^{(m)}(n)},$$

ou

$$\lg^{(m+1)}(n+1) = \lg^{(m+1)}(n) + \frac{1-\Sigma^m{}_n}{n \lg n \lg\lg n \ldots \lg^{(m)}(n)} \tag{11}$$

où Δ''_n, Δ'_n, ... $\Delta^{(m)}_n$ et aussi leur somme $\Sigma^m{}_n$ tendent vers zéro, n croissant à l'infini. Cela fait que l'on peut choisir pour n un certain nombre ν assez grand, afin que toutes les expressions

$$1-\Sigma^m{}_\nu, \quad 1-\Sigma^m{}_{\nu+1}, \quad \text{etc.}$$

surpassent $\frac{1}{2}$. Or si l'on établit la suite des équations

$$\lg^{(m+1)}(\nu+1) = \lg^{(m+1)}(\nu) + \frac{1-\Sigma^m{}_\nu}{\nu \lg \nu \lg\lg \nu \ldots \lg^{(m)}(\nu)},$$

$$\lg^{(m+1)}(\nu+2) = \lg^{(m+1)}(\nu+1) + \frac{1-\Sigma^m{}_{\nu+1}}{(\nu+1)\lg(\nu+1)\lg\lg(\nu+1)\ldots \lg^m(\nu+1)},$$

. . . .

$$\lg^{(m+1)}(n+1) = \lg^{(m+1)}(n) + \frac{1-\Sigma^m{}_n}{n \lg n \ldots \lg^{(m)}(n)},$$

et que l'on fasse la somme, on obtient

$$\lg^{(m+1)}(n+1) - \lg^{(m+1)}(\nu) = \sum_{\nu}^{n}{}_{(\mu)} \frac{1-\Sigma^m{}_\nu}{\mu \lg \mu \lg\lg \mu \ldots \lg^{(m)}(\mu)}. \tag{12}$$

Puisque en faisant n assez grand, le premier membre de cette équation surpassera tout nombre donné, quelque grand qu'il soit, il s'ensuit que la série

$$\sum_{\nu}^{\infty}{}_{(n)} \frac{1-\Sigma^n{}_n}{n \lg n \lg\lg n \ldots \lg^{(m)}(n)}$$

ou, à plus forte raison, la série

$$\sum_{\nu}^{\infty}{}_{(n)} \frac{1}{n \lg n \lg\lg n \ldots \lg^{(m)}(n)} \tag{13}$$

est divergente.

Mais si nous additionnons la suite des équations

$$\frac{\lg^{(m+1)}(\nu+1)}{[\lg^{(m)}(\nu)]^\sigma} - \frac{\lg^{(m+1)}(\nu)}{[\lg^{(m)}(\nu)]^\sigma} = \frac{1-\Sigma^m{}_\nu}{\nu \lg \nu \lg\lg \nu \ldots \lg^{(m-1)}(\nu)[\lg^{(m)}(\nu)]^{1+\sigma}},$$

$$\frac{\lg^{(m+1)}(\nu+2)}{[\lg^{(m)}(\nu+1)]^\sigma}-\frac{\lg^{(m+1)}(\nu+1)}{[\lg^{(m)}(\nu+1)]^\sigma}=\frac{1-\Sigma^m{}_{\nu+1}}{(\nu+1)\lg(\nu+1)\ldots\lg^{(m-1)}(\nu+1)[\lg^{(m)}(\nu+1)]^{1+\sigma}},$$

. . . .

in infinitum,

la série infinie qui provient de la sommation des premiers membres, tend vers un nombre défini, et par conséquent aussi la série qui provient des seconds membres; c'est ce qu'on comprend après avoir démontré, que les termes consécutifs de la série

$$\sum_{\nu}^{\infty}{}_{(n)}\frac{\lg^{(m+1)}(n+1)}{[\lg^{(m)}(n)]^\sigma}-\frac{\lg^{(m+1)}(n)}{[\lg^{(m)}(n)]^\sigma}$$

depuis un certain terme, diminuent, n croissant à l'infini; cela suffira, parceque les signes sont alternés. Pour cela il faut montrer, que depuis un certain nombre $n=\nu$

$$\frac{\lg^{(m+1)}(n)}{[\lg^{(m)}(n)]^\sigma}>\frac{\lg^{(m+1)}(n+2)}{[\lg^{(m)}(n+1)]^\sigma}.$$

Cette inégalité est juste, lorsque

$$\left(\frac{\lg^{(m)}(n+1)}{\lg^{(m)}(n)}\right)^\sigma>\frac{\lg^{(m+1)}(n+2)}{\lg^{(m+1)}(n)},$$

donc que

$$\left(1+\frac{1-\Sigma^{m-1}{}_n}{n\lg n\lg\lg n\ldots\lg^{(m)}(n)}\right)^\sigma>1+\frac{2-S^m{}_n}{n\lg n\lg\lg n\ldots\lg^{(m+1)}(n)},$$

enfin que

$$1+\sigma\frac{1-\Sigma^{m-1}{}_n}{n\lg n\ldots\lg^{(m)}(n)}>1+\frac{2-S^m{}_n}{n\lg n\ldots\lg^{(m+1)}(n)},$$

où $\Sigma^{m-1}{}_n$ et $S^m{}_n$ tendent vers zéro, n croissant. Or il est clair que, σ étant positif, si petit qu'il soit, on peut prendre n assez grand, afin que

$$\sigma\frac{1-\Sigma^{m-1}{}_n}{n\lg n\ldots\lg^{(m)}(n)}>\frac{1}{\lg^{(m+1)}(n)}\cdot\frac{2-S^m{}_n}{n\lg n\ldots\lg^{(m)}(n)},$$

ou

$$\sigma(1-\Sigma^{m-1}{}_n)>\frac{2-S^m{}_n}{\lg^{(m+1)}(n)}.$$

Par conséquent la série résultante de la sommation des premiers membres de la suite des équations établie ci-devant

$$\frac{\lg^{(m+1)}(\nu+1)}{[\lg^{(m)}(\nu)]^\sigma}-\frac{\lg^{(m+1)}(\nu)}{[\lg^{(m)}(\nu)]^\sigma}+\frac{\lg^{(m+1)}(\nu+2)}{[\lg^{(m)}(\nu+1)]^\sigma}-\frac{\lg^{(m+1)}(\nu+1)}{[\lg^{(m)}(\nu+1)]^\sigma}+\cdots \textit{ in infinitum}$$

est convergente; donc telle est aussi la série résultante des seconds membres

$$\sum_{\nu}^{\infty}{}_{(n)} \frac{1-\Sigma^{m}_{n}}{n \lg n \ldots \lg^{(m-1)}(n) [\lg^{(m)}(n)]^{1+\sigma}},$$

ou, eu égard que, depuis $n=\nu$ jusqu'à l'infini, $1-\Sigma^{m}_{n}$ surpasse $\frac{1}{2}$, la série

$$\sum_{\nu}^{\infty}{}_{(n)} \frac{1}{n \lg n \lg\lg n \ldots \lg^{(m-1)}(n) [\lg^{(m)}(n)]^{1+\sigma}} \tag{14}$$

est absolument convergente. D'après tout cela, on peut énoncer le théorème général, qui renferme le théorème de n.° 10:

Etant donnée une série infinie (15)

$$A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_\nu + \cdots + A_n + A_{n+1} + \cdots \textit{ in infinitum},$$

dont les termes décroissent à partir d'un certain terme, de sorte que l'on peut trouver un nombre entier positif m et un nombre positif σ quelque petit qu'il soit, tels que

$$A_n \cdot n \cdot \lg n \cdot \lg\lg n \ldots \lg^{(m-1)}(n) \cdot [\lg^{(m)}(n)]^{1+\sigma}$$

reste toujours sous une limite finie, la série est convergente; mais s'il faut prendre pour cela $\sigma \lesseqgtr 0$, et que tous les termes de la série soient positifs, la série est divergente.

Halle, août 1871.

Errata del fascicolo precedente (tomo V°).

Pag.	21	ligne	20	le 1er membre soit « $\frac{dF}{dy}$ »
»	22	»	11	à la fin après $\frac{dQ}{dy}$ mettez « = »
»	23	»	3	au second membre lisez « Q_1 »
»	»	»	23	au 1er membre lisez « ∇ »
»	24	»	2	au lieu du second signe « = » mettez « — »
»	»	»	3	id. et de plus une parenthèse après « Q_1 »
»	25	»	8	à la fin lisez « Q_{n-1} »
»	27	»	22	lisez « $y'^{(n-1)}$ »
»	»	»	26	lisez « $a_1, a_2, \ldots$ »
»	28	»	23	au lieu de « φ » lisez « Q »
»	29	»	11	au 1er membre de la 1ere équation au lieu de « $(n-1)$ » lisez « $(n-i)$ »
»	»	»	12	au lieu de « $(p-i)$ » lisez « $(p-1)$ » et au lieu de « $(n-1)$ » lisez chaque fois « $(n-i)$ »
»	»	»	13	au lieu de « $(p-i)$ » lisez chaque fois « $(p-j)$ »
»	»	»	22	au lieu de « Q_{i-2} » lisez « Q_{i-1} »
»	31	»	7	lisez « $\frac{dy}{dx_1} = y_1$ »
»	»	»	12	au lieu de « u_1 » lisez « y_1 »
»	35	»	9	au lieu de « u » lisez « a »
»	41	»	20	lisez « Δ_i »
»	42	»	10	lisez « $\tilde{\omega}_1$ »
»	43	»	12	lisez chaque fois « $\zeta^{(n-2)}$ »
»	52	»	19	à la fin lisez « $n-1$ »
»	53	»	6	au lieu de « pourquoi » lisez « sansquoi »
»	55	»	16	au lieu de Y lisez « $f(y)$ »
»	»	»	18	au lieu de y, au dénominateur lisez « $f(y)$ »
»	58	»	19	dans la 2me intégrale lisez « $\lambda-1$ ».

Nella memoria PETERSEN, tomo IV di questi Annali, è accaduto uno spostamento tipografico. Tutto il pezzo che comincia colla linea 5 della pag. 90 e finisce colla linea 4 della pag. 91 dev' essere invece inserito fra le linee 13 e 14 della pag. 92.

Sulle trasformazioni razionali nello spazio (*)

(*del prof.* L. Cremona, *a Milano.*)

Generalità.

1. Quattro variabili omogenee indipendenti $x_1 x_2 x_3 x_4$ siano legate ad altre quattro variabili analoghe $y_1 y_2 y_3 y_4$ mediante le relazioni:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \phi_1 : \phi_2 : \phi_3 : \phi_4 \tag{1}$$

dove le ϕ siano funzioni (algebriche razionali) intere omogenee di uno stesso grado ν delle y.

Considerando le x e le y come coordinate di due punti corrispondenti in due spazî a tre dimensioni, le (1) esprimono che ad un punto qualsivoglia dello spazio (y), purchè non comune alle quattro superficie $\phi = 0$, corrisponde un solo e determinato punto dello spazio (x), e che ai piani

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0 \tag{2}$$

dello spazio (α) corrispondono le superficie d'ordine ν

$$\alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 + \alpha_3 \phi_3 + \alpha_4 \phi_4 = 0 \tag{3}$$

formanti un sistema lineare triplamente infinito.

Suppongasi ora che dalle (1) si possano desumere le y espresse razionalmente colle x, cioè le formole inverse delle (1) siano

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = \psi_1 : \psi_2 : \psi_3 : \psi_4 \tag{4}$$

essendo le ψ funzioni intere omogenee delle x, di un medesimo grado μ.

(*) I risultati esposti in questa Memoria furono comunicati al R. Istituto Lombardo, nelle sedute 4 maggio e 1° giugno 1871; e in parte anche alla Società delle Scienze di Gottinga (Nachrichten 1871, n.° 5; e Mathematische Annalen, t. 4, p. 213). Contemporaneamente usciva alla luce l'interessante Memoria del sig. Noether, *Ueber die eindeutigen Raumtransformationen* (Math. Annalen, t. 3, p. 547).

Ciò equivale a supporre il sistema (3) tale, che tre superficie prese arbitrariamente da esso abbiano un unico punto comune, il quale non apparntenga a tutte le superficie del sistema medesimo: così che anche ad un punto qualunque dello spazio (x), purchè non comune a tutte le superficie $\psi=0$, corrisponde un solo e determinato punto dello spazio (y). Dalle (4) segue inoltre che ai piani

$$\beta_1 y_1+\beta_2 y_2+\beta_3 y_3+\beta_4 y_4=0 \tag{5}$$

dello spazio (y) corrispondono le superficie d'ordine μ

$$\beta_1 \psi_1+\beta_2 \psi_2+\beta_3 \psi_3+\beta_4 \psi_4=0 \tag{6}$$

formanti un sistema lineare triplamente infinito; tre qualunque delle quali, in virtù delle (1), si segano in un solo punto non comune a tutto il sistema. Le (1), (4) significano eziandio che ciascuna superficie dei sistemi (3) e (6) è rappresentabile punto per punto sopra un piano.

2. Per brevità di discorso diremo omaloide (*) una superficie quando sia dotata della proprietà di poter essere rappresentata punto per punto sopra un piano; e omaloidico un sistema di superficie algebriche, il quale, come i sistemi (3) e (6), soddisfaccia alle due condizioni: 1° d'essere lineare e triplamente infinito; 2° che tre superficie prese ad arbitrio nel sistema si seghino in un solo punto non comune a tutto il sistema medesimo. Le superficie di un sistema omaloidico sono necessariamente omaloidi.

Queste denominazioni possono valere anche per le figure piane (e per le figure descritte in una superficie omaloide), così che una curva omaloide sarà una curva razionale, ed una rete omaloidica di curve sarà un sistema lineare doppiamente infinito di curve (razionali), due qualunque delle quali si seghino in un solo punto non comune a tutte.

3. Dato in uno spazio (y) un sistema omaloidico (3), possiamo porre le formole (1), cioè stabilire una corrispondenza univoca fra le superficie (3) ed i piani d'un altro spazio (x); e quindi dedurne le (4). Così viene ad essere individuato nello spazio (x) un nuovo sistema omaloidico (6) che possiamo chiamare l'inverso del dato. I due sistemi omaloidici servono di base a due trasformazioni inverse, razionali entrambe, che hanno luogo senza presupporre le variabili (di ciascuno spazio) legate da alcuna relazione.

(*) Cfr. Sylvester nel Cambridge and Dublin Math. Journal, t. 6, p. 12. Le superficie omaloidi, come le curve razionali (di genere $p=0$), sono dette *unicursal* dal sig. Cayley.

Basta adunque che sia dato un sistema omaloidico, perchè risultino determinati il sistema inverso e le due trasformazioni razionali inverse, per mezzo delle quali si passa dall'uno spazio all'altro e viceversa.

In altre parole, la ricerca delle trasformazioni razionali nello spazio (come nel piano) è ridotta a quella dei sistemi omaloidici.

4. Diremo fondamentali (*) o principali (**) i punti e le linee comuni a tutte le superficie d'un sistema omaloidico. Due superficie qualsivogliono

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1\phi_1+\alpha_2\phi_2+\alpha_3\phi_3+\alpha_4\phi_4=0 \\ \alpha'_1\phi_1+\alpha'_2\phi_2+\alpha'_3\phi_3+\alpha'_4\phi_4=0 \end{array}\right\} \quad (7)$$

del sistema (3) avranno, oltre alle curve fondamentali, una curva comune R, la quale, dovendo corrispondere punto per punto alla retta intersezione dei piani

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\alpha_4x_4=0 \\ \alpha'_1x_1+\alpha'_2x_2+\alpha'_3x_3+\alpha_4x_4=0, \end{array}\right\} \quad (8)$$

è necessariamente una curva razionale. E siccome la retta (8) incontra in μ punti una superficie qualunque del sistema (6), così la curva R definita dalle (7) avrà μ punti comuni con un piano qualsivoglia (5) dello spazio (y); dunque:

Alle rette dello spazio (x) corrispondono curve gobbe razionali d'ordine μ, una qualunque delle quali sarà determinata da quattro condizioni.

Ed analogamente:

Alle rette dello spazio (y) corrisponde un sistema quadruplamente infinito di curve gobbe razionali d'ordine ν.

Indicheremo con S una qualunque di queste curve, comune a due superficie del sistema (6).

5. Nello spazio (x) una retta ed un piano hanno un solo punto comune, se la prima non giace nel secondo; dunque:

Una curva R incontra una superficie ϕ (***), sulla quale non giaccia per intero, in un solo punto non comune a tutte le ϕ; ossia:

(*) *Mémoire sur les surfaces du* 3^e *ordre* (G. Crelle-Borchardt, t. 68), n.° 114.

(**) *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane*, Nota 2^a (Mem. Accad. Bologna, serie 2^a, t. 5, 1865).

(***) Cioè una superficie del sistema (3).

Delle $\nu\mu$ intersezioni di una curva R con una superficie ϕ ve ne sono $\nu\mu-1$ situate nei punti e nelle curve fondamentali del sistema (3).

Queste $\nu\mu-1$ intersezioni tengono poi luogo di $4(\mu-1)$ condizioni (lineari), fra le 4μ che in generale determinano una curva razionale d'ordine μ (*), giacchè, come si è veduto or ora, le curve R formano un sistema quadruplamente infinito.

Analoghe proprietà si possono enunciare per le curve S; e ciò sia detto una volta per tutte.

6. Considero un piano α_0 nello spazio (x), al quale corrisponderà una superficie ϕ_0 del sistema (3) nello spazio (y). Alle rette in α_0 corrisponderanno le curve R di ϕ_0; e le sezioni piane di ϕ_0 avranno per imagini in α_0 le curve d'ordine μ d'un sistema lineare, triplamente infinito e tale che due curve qualunque del sistema abbiano ν intersezioni variabili (corrispondenti ai punti in cui ϕ_0 è incontrata da una retta arbitraria). Perciò, se queste curve hanno m_i punti i-pli fissi $(i=1, 2, \ldots \mu-1)$, sussisteranno le due relazioni (**)

$$\mu^2-\sum_i i^2 m_i=\nu,$$

$$\tfrac{1}{2}\mu(\mu+3)-\sum_i \tfrac{1}{2}i(i+1)m_i=3,$$

dalle quali

$$3\mu+\nu=\sum_i i m_i+6.$$

A ciascuno dei suddetti punti i-pli (sia I uno qualunque de' medesimi) corrisponderà in ϕ_0 una curva razionale C_i d'ordine i, e ad una retta G condotta in α_0 arbitrariamente per I corrisponderà un'altra curva razionale $C_{\mu-i}$ d'ordine i, costituente insieme con C_i una curva R ed avente colla C_i me-

(*) Che la più generale curva razionale d'ordine μ nello spazio ad r dimensioni, sia determinata da $(r+1)(\mu+1)-4$ condizioni, risulta dall'osservare ch'essa è definita mediante le equazioni $y_1:y_2:\ldots:y_{r+1}=f_1:f_2:\ldots:f_{r+1}$, dove le f sono funzioni intere d'un parametro ω, dello stesso grado μ, e che degli $(r+1)(\mu+1)$ coefficienti arbitrari di queste funzioni se ne possono eliminare 4 mediante una sostituzione lineare $\omega'=\dfrac{a+b\omega}{c+d\omega}$.

(**) Cremona *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane* (Mem. Accad. Bologna, 1863 e 1865); — Cayley *On the rational transformation between two spaces* (Proceedings of the Lond. Math. Society, t. 3); — Noether *Ueber Flächen welche Schaaren rationaler Curven besitzen* (Math. Annalen, t. 3).

desima un punto comune (punto doppio per la R composta), che è il corrispondente di quello situato in G e infinitamente vicino ad I. Variando G intorno ad I, varia la $C_{\mu-i}$ ed il punto doppio percorre la curva fissa C_i. Ma la curva R composta della C_i e di una $C_{\mu-i}$ può considerarsi come intersezione (non completa) di due superficie ϕ, epperò il punto comune alle C_i, $C_{\mu-i}$, essendo doppio per la R, sarà un punto di contatto fra le due ϕ: dunque ogni punto della C_i è un punto di contatto fra due ϕ (ossia un punto doppio di una ϕ). Ora, il luogo dei punti di contatto fra le ϕ, ossia dei punti doppi delle ϕ medesime, è la Jacobiana del sistema (3): superficie d'ordine $4(\nu-1)$; dunque la curva C_i, situata su ϕ_0 e corrispondente al punto I di α_0, giace eziandio sulla Jacobiana delle ϕ.

Siccome poi ai piani in (y) corrispondono le superficie ψ in (x), così le curve d'ordine μ del sistema lineare sopra accennato non saranno altro che le tracce delle ψ sul piano α_0; e gli m_i punti i-pli (uno de' quali è I) saranno le intersezioni di questo piano con una curva F_{m_i} d'ordine m_i, i-pla per tutte le ψ. Viceversa, se una curva R si spezza, la sua imagine che è una retta, dovrà passare per un punto I. Dunque:

A ciascun punto di una curva fondamentale dello spazio (x), che sia i-pla per tutte le superficie ψ, corrisponde una curva razionale d'ordine i, luogo geometrico della quale è una superficie che fa parte della Jacobiana delle ϕ.

L'ordine di questo luogo sarà uguale al numero delle intersezioni (non fisse) di una curva S qualunque colla predetta curva fondamentale i-pla dello spazio (x). E il genere (*) di esso luogo sarà uguale al genere della corrispondente curva fondamentale.

7. Se fra le curve fondamentali dello spazio (x) ve n'è una che le curve S non incontrino in alcun punto, ad essa corrisponderà una superficie d'ordine 0; cioè ad un punto qualunque di quella curva corrisponderà una curva fissa, la quale, dovendo giacere su ciascuna ϕ, sarà una curva fondamentale dello spazio (y). Se la prima curva è i-pla per le ψ e d'ordine i', la seconda curva sarà d'ordine i e multipla secondo i' per le ϕ. La relazione fra le due curve è reciproca, cioè a ciascun punto della seconda corrisponde tutta la prima curva; e la seconda curva non è incontrata in alcun punto da una curva arbitraria R.

(*) Noether nelle Nachrichten di Gottinga, 14 luglio 1869.

8. Una retta incontra la Jacobiana delle ψ in $4(\mu-1)$ punti; dunque una R qualunque incontra in $4(\mu-1)$ punti l'insieme delle curve (e dei punti) fondamentali dello spazio (y). Ma $4(\mu-1)$ è appunto il numero delle condizioni lineari comuni alle curve R, giacchè queste costituiscono un sistema quadruplicemente infinito; dunque le curve R sono pienamente determinate dal dover segare in $4(\mu-1)$ punti le curve (e i punti) fondamentali dello spazio (y).

Quando una curva R si spezza in due C_i, $C_{\mu-i}$, la prima appartiene ad una serie semplicemente infinita, il cui luogo è parte della Jacobiana delle ϕ; la seconda invece, corrispondendo ad una retta che passa per un punto I [di una curva fondamentale i-pla in (x)], appartiene ad un sistema doppiamente infinito; ossia è soggetta a $4(\mu-i)-2$ condizioni. Una di queste è di dover incontrare in un punto la C_i; dunque la $C_{\mu-i}$ incontrerà le curve (e i punti) fondamentali dello spazio (y) in $4(\mu-i)-3$ punti. Questi punti corrisponderanno a quelli in cui la retta corrispondente a $C_{\mu-i}$ sega la Jacobiana delle ψ, oltre ad I. Dunque, detto x_i il grado di moltiplicità col quale la Jacobiana delle ψ passa per la curva fondamentale i-pla dello spazio (x), avremo

$$4(\mu-i)-3=4(\mu-1)-x_i$$

donde

$$x_i=4i-1$$

ossia

Una curva fondamentale dello spazio (x), i-pla per le ψ e segata dalle curve S, è multipla secondo $4i-1$ per la Jacobiana delle ψ (*).

La curva C_i, appartenendo ad una serie semplicemente infinita, è soggetta a $4i-1$ condizioni lineari, cioè sega in $4i-1$ punti le curve fondamentali dello spazio (y); ciò che s'accorda coll'essere I un punto $(4i-1)$plo per la Jacobiana delle ψ.

9. Però, se la curva fondamentale i-pla per le ψ è tale che le curve S non la seghino, nel qual caso (n.° 7) a tutt'i suoi punti corrisponde una curva fissa C_i, fondamentale nello spazio (y), le curve $C_{\mu-i}$ che con C_i formano una curva R appartengono ad un sistema triplamente infinito (giacchè esse corrispondono alle rette seganti in un punto non dato la curva i-pla per

(*) NOETHER nei Math. Annalen, t. 2, p. 293; t. 3, p. 547.

le ψ), epperò sono soggette a $4(\mu-i)-3$ condizioni. Una di queste consiste nel dover segare C_i; le altre $4(\mu-i)-4$ consisteranno in altrettante intersezioni colle curve (coi punti) fondamentali dello spazio (y). Dunque avremo in questo caso

$$4(\mu-i)-4=4(\mu-1)-x_i$$

ossia $x_i=4i$; il che significa:

Una curva fondamentale dello spazio (x), i-pla per le superficie ψ, ma non incontrata dalle curve S, è multipla secondo il numero $4i$ per la Jacobiana delle ψ.

Se la detta curva è d'ordine i', le corrisponde nello spazio (y) una curva d'ordine i, che è i'-pla per le ϕ e $4i'$-pla per la Jacobiana delle ϕ.

10. Se due curve fondamentali dello spazio (x), rispettivamente multiple secondo i, j $(j \geqq i)$ per le ψ, hanno un punto comune, a questo corrisponderà una curva spezzantesi in due C_i, C_{j-i}, la prima delle quali sarà comune alle due superficie che fanno parte della Jacobiana delle ϕ e corrispondono a quelle due curve fondamentali dello spazio (x). Come caso particolare, se una curva fondamentale dello spazio (x), i-pla per le ψ, ha un punto doppio, a questo corrisponderà una curva C_i doppia per la superficie corrispondente a quella curva fondamentale.

11. Come si è già veduto, ad un punto I di una curva fondamentale dello spazio (x), che sia i-pla per tutte le superficie ψ, corrisponde una curva razionale C_i d'ordine i. Se C_i giace tutta in un piano, a questo piano corrisponderà una ψ, per la quale I è un punto $(i+1)$-plo. Infatti, ad una retta condotta arbitrariamente per I corrisponderà una curva $C_{\mu-i}$ d'ordine $\mu-i$, la quale ha un punto comune con C_i, epperò incontrerà il piano di questa curva in altri $\mu-i-1$ punti. Dunque la retta arbitraria per I sega in altri $\mu-i-1$ punti la superficie ψ corrispondente al piano di C_i; vale a dire, per questa ψ il punto I è multiplo secondo $\mu-(\mu-i-1)=i+1$.

Se $i=1$, ai piani passanti per una retta C_1 corrispondono superficie ψ per le quali I è un punto doppio. Se due rette analoghe a C_i giacciono in un piano, a questo corrisponderà una ψ dotata di due punti doppi, ecc.

12. Analogamente si dimostra che, se le ψ hanno una curva fondamentale i-pla e d'ordine i', a ciascun punto della quale corrisponda una curva fissa piana (i'-pla per le ϕ e d'ordine i), al piano di questa curva corrisponderà una ψ, per la quale la prima curva sarà multipla secondo $i+1$.

13. Se le superficie ϕ hanno un punto (fondamentale) comune O, pel

quale ciascuna curva R passi con r rami, ogni retta dello spazio (x) conterrà r punti corrispondenti ad O; vale a dire, ad O corrisponderà una superficie d'ordine r. Od ancora: la superficie ψ corrispondente a qualunque piano passante per O si spezzerà in due, l'una fissa e d'ordine r, l'altra variabile in una rete d'ordine $\mu-r$, projettiva alla rete dei piani per O. Se il punto O assorbe r' condizioni per le curve R, quella superficie d'ordine r terrà luogo di una superficie d'ordine r' nella Jacobiana delle ψ: cioè r' sarà un multiplo di r, e la superficie d'ordine r, corrispondente ad O, dovrà essere contata $r':r$ volte nell'anzidetta Jacobiana.

14. Per esempio: se O è un punto (semplice o) multiplo secondo un numero l per le ϕ, le quali però non abbiano ivi (un piano tangente o) un cono osculatore fisso, così che le r tangenti di qualsiasi curva R non siano soggette ad alcuna condizione, in tal caso è $r'=2r$; onde la superficie d'ordine r corrispondente ad O è da contarsi due volte nella Jacobiana delle ψ. Ad una sezione piana della superficie d'ordine r corrisponde la serie de' punti prossimi ad O e situati in una ϕ: la qual serie è projettata da O mediante un cono d'ordine l. Dunque la superficie d'ordine r corrispondente ad O è omaloide, e le imagini delle sue sezioni piane sono curve d'ordine l.

15. Come secondo esempio: se O è un punto semplice per le ϕ, le quali ivi si tocchino con un contatto d'ordine $r-1$, sarà $r'=(r+1)r$; vale a dire, la superficie d'ordine r corrispondente ad O sarà compresa $r+1$ volte nella Jacobiana delle ψ.

16. Sia O un punto l-plo per le ϕ ed r-plo per le curve R. Siccome ciascuna ψ corrispondente ad un piano per O si spezza in un luogo fisso d'ordine r ed in una superficie d'ordine $\mu-r$, così a qualunque retta uscente da O corrisponderà una curva S', comune a infinite superficie d'ordine $\mu-r$, formanti un fascio. Le curve S' sono d'ordine $\nu-l$, giacchè questo è il numero delle ulteriori intersezioni di una ϕ con una retta per O; e formano un sistema doppiamente infinito, perchè corrispondono alle rette che passano per un punto fisso. Una curva S' è dunque assoggettata a $4(\nu-l)-2$ condizioni, cioè deve incontrare in $4(\nu-l)-2$ punti l'insieme delle curve e dei punti fondamentali dello spazio (x). A questi punti corrisponderanno quelli ne' quali una retta condotta ad arbitrio per O incontra ulteriormente la Jacobiana delle ϕ. Perciò, se indichiamo con $\varkappa$ l'ordine di moltiplicità del punto O per la detta Jacobiana, avremo

$$4(\nu-l)-2=4(\nu-1)-\varkappa$$

donde

$$\varkappa = 4l - 2;$$

cioè

Un punto fondamentale dello spazio (y), l-plo per le ϕ, è multiplo secondo $4l-2$ per la Jacobiana delle ϕ (*).

17. Dalle cose suesposte risulta che, se nello spazio (x) vi ha una curva fondamentale C_r d'ordine r ed i-pla per le ψ, ad essa corrisponde una superficie che fa parte della Jacobiana delle ϕ, e che sega ciascuna ϕ secondo curve fondamentali dello spazio (y) e secondo r curve d'ordine i, corrispondenti ai punti ne' quali C_r incontra un piano arbitrario nel primo spazio. Invece, la parte di Jacobiana delle ϕ che corrisponde (n.° 13) ad un punto fondamentale O dello spazio (x) non avrà con una ϕ qualsivoglia alcuna linea comune, oltre alle curve fondamentali dello spazio (y), perchè un piano arbitrario dello spazio (x) non passa per O.

18. Una trasformazione razionale non può dirsi pienamente nota, se non si conoscono per ciascuno de' due spazî l'insieme delle curve e de' punti fondamentali, il sistema delle superficie omaloidi ϕ o ψ, e le parti della relativa Jacobiana. La trasformazione è definita, quando è dato il sistema omaloidico coll'insieme de' punti e delle linee fondamentali; le altre circostanze poi si determinano per mezzo de' teoremi or ora esposti.

Ora mi propongo di mostrare in qual modo si possano ottenere tutt'i sistemi omaloidici, de' quali faccia parte una superficie ϕ data.

19. Sia ϕ_4 una superficie omaloide di grado n, della quale si conosca una rappresentazione (punto per punto) sopra un piano Π. Tutte le altre superficie omaloidi d'ordine n, aventi gli stessi punti multipli e le stesse linee multiple di ϕ_4, segheranno inoltre questa lungo curve le cui imagini in Π formeranno un certo sistema Σ. Assumasi poi in Π una rete omaloidica di curve K (**), in modo che ciascuna di queste insieme con un luogo fisso L (un insieme di linee, anche contate più volte) costituisca una curva del sistema Σ. Una curva K_1, formando insieme con L l'imagine dell'intersezione di ϕ_4 con un'altra superficie analoga ϕ_1, individua un fascio $\phi_4+\alpha_1\phi_1$; analogamente, se K_2, K_3 sono due altre curve della rete, non appartenenti con K_1 ad uno stesso fascio, saranno individuati i fasci $\phi_4+\alpha_2\phi_2$, $\phi_4+\alpha_3\phi_3$;

(*) Noether, l. c.

(**) Per la determinazione di queste reti e di tutto ciò che vi si appartiene, vedi la mia 2ª Nota *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane* (Bologna, 1855).

e siccome i tre fasci così ottenuti hanno una superficie comune ϕ_4, così essi determinano un sistema lineare triplamente infinito

$$\alpha_1\phi_1+\alpha_2\phi_2+\alpha_3\phi_3+\alpha_4\phi_4=0,$$

il quale è manifestamente omaloidico, epperò può servire di base ad una trasformazione razionale d'ordine n (n.° 3). Il grado delle ψ, ossia il grado della trasformazione inversa, non è altro che l'ordine delle curve di ϕ_4, aventi per imagini le K. Oltre ai punti ed alle curve multiple delle ϕ, sono fondamentali (cioè comuni a tutte le ϕ) quelle linee di ϕ_4 che in Π sono rappresentate dal luogo L.

Variando il luogo L e la rete delle K in tutt'i modi possibili, si otterranno per tal guisa tutte le trasformazioni nelle quali può essere impiegata la data superficie ϕ_4.

20. Le K sono le imagini, in Π, di quelle curve R (n.° 4), che giacciono in ϕ_4. Se una curva R si spezza, una delle curve parziali è comune alla Jacobiana delle ϕ (n.° 6); ma in tal caso, o si spezza anche la corrispondente K, o questa passa con un ramo di più per uno de' punti fondamentali della rappresentazione Π. Nella prima ipotesi, una delle linee componenti fa parte della Jacobiana della rete delle K; nell'altra ipotesi, il punto fondamentale nominato sarà precisamente l'imagine di quella parte di R che è comune a ϕ_4 ed alla Jacobiana delle ϕ. Dunque i punti fondamentali della rappresentazione Π e le curve costituenti la Jacobiana delle K formano insieme le imagini di quelle curve non fondamentali che sono comuni alla ϕ_4 ed alla Jacobiana delle ϕ, cioè di quelle curve che corrispondono alle intersezioni delle linee fondamentali dello spazio (x) col piano corrispondente a ϕ_4.

Perciò, se ai punti fondamentali di Π ed alle parti della Jacobiana delle K corrispondono, in ϕ_4, l_1 rette, l_2 coniche,... l_r curve (razionali) d'ordine r, le superficie ψ avranno in comune una curva semplice d'ordine l_1, una curva doppia d'ordine l_2,..., una curva r-pla d'ordine l_r,... Il genere di queste curve, il loro intersecarsi, o anche lo scindersi di alcuna di esse in parti sarà manifestato dagli analoghi accidenti dei diversi luoghi geometrichi componenti la Jacobiana delle ϕ: e questi luoghi saranno tosto determinati quando si considerino le condizioni alle quali sono soggette le rette, le coniche,... le curve (razionali) d'ordine r,... corrispondenti ai punti fondamentali di Π ed alle linee della Jacobiana delle K.

Ma ad esplicare il metodo, più di qualunque altra considerazione, gioverà la trattazione di qualche esempio: dove userò il simbolo (ν, μ) per esprimere due trasformazioni inverse, per le quali le ϕ, ψ siano rispettivamente dell'ordine ν, μ.

Trasformazioni di 2° grado

$(\nu=2;\ \mu=2,\ 3,\ 4)$.

21. Sia ϕ_4 una superficie di 2° grado; è noto (*) che essa può essere rappresentata sopra un piano qualunque Π mediante raggi che projettino i punti di ϕ_4 da un punto O fissato ad arbitrio in questa superficie. La rappresentazione ha due punti fondamentali 1, 2, che corrispondono alle generatrici rettilinee di ϕ_4 incrociate in O, mentre la retta 12 è l'imagine di esso punto O. Le sezioni piane di ϕ_4 sono rappresentate dalle coniche 12 (**); e il sistema Σ delle imagini delle intersezioni di ϕ_4 colle altre superficie di 2° grado sarà per conseguenza formato dalle curve di 4° ordine $1^2 2^2$ (***).

Le K possono allora essere le rette del piano Π, purchè L sia un luogo di 3° ordine $1^2 2^2$, cioè il sistema della retta 12 e di una conica 12. Il sistema omaloidico delle ϕ sarà adunque costituito dalle superficie di 2° grado che hanno in comune un punto O ed una conica C. Le K, cioè le rette del piano Π, rappresentano coniche passanti per O e seganti C in due punti; le curve R sono adunque tutte le coniche dello spazio che passano pel punto fisso O e incontrano due volte la conica fissa C. La trasformazione inversa è per conseguenza di 2° grado $(\mu=2)$.

Le K non hanno Jacobiana; ma ai punti fondamentali 1, 2 di Π corrispondono due rette, che passano per O e incontrano C; dunque il cono che da O projetta la conica C fa parte della Jacobiana delle ϕ e corrisponderà ad una linea fondamentale C' dello spazio (x), d'ordine 2 e semplice per le ψ.

La Jacobiana delle ϕ dev'essere una superficie d'ordine 4, e per essa O e C debbono avere i gradi 2, 3 di moltiplicità. Pel cono OC i gradi di moltiplicità di O, C sono 2, 1; dunque la Jacobiana suddetta conterrà,

(*) Chasles *Théorie analytique des courbes de tous les ordres tracées sur l'hyperboloïde à une nappe* (Comptes rendus de l'Acad. de Paris, t. 53; décembre 1861).

(**) Cioè dalle coniche passanti pei punti 1, 2.

(***) Cioè dalle curve di 4° ordine aventi due punti doppi fissi in 1, 2.

oltre al cono OC, un luogo di 2° ordine pel quale C sia doppia. Siffatto luogo non può essere altro che il piano della conica C, contato due volte.

Ora questo piano non ha in comune con qualsivoglia ϕ alcuna linea, oltre la conica fondamentale C; dunque il piano di C corrisponde ad un punto fondamentale O' dello spazio (x), semplice per le curve S.

Di qui segue che le ψ sono superficie di 2° grado, aventi in comune un punto O' ed una conica C'; vale a dire, il sistema omaloidico dello spazio (x) è affatto analogo a quello dello spazio (y).

22. Si soddisfarebbe ancora alle prescritte condizioni assumendo per L il sistema formato dalla retta 12 contata due volte e da una retta arbitraria. Allora si ottiene un caso particolare della trasformazione che precede: le ϕ (e così pure le ψ) sono superficie di 2° grado che passano per una conica fissa C, ed hanno un piano tangente fisso in un punto O di essa conica (*).

Sì in questo particolare, sì nel caso generale considerato innanzi, la conica C (e per conseguenza anche C') può essere il sistema di due rette che si seghino.

Se il luogo L è costituito dalla retta 12 contata tre volte, tutte le superficie ϕ (ed analogamente le ψ) hanno fra loro un contatto di 2° ordine in O. La Jacobiana delle ϕ è allora formata dal piano, da contarsi quattro volte, che tocca in O tutte le ϕ; e la conica C è un pajo di rette incrociate in O e contenute nel piano anzidetto.

23. Si giungerebbe alla medesima trasformazione (n.° 21) assumendo per le K le coniche descritte per 1, 2 e per un altro punto 0 fissato ad arbitrio nel piano Π; nel qual caso L risulterebbe una conica 12. Se questa conica passa per 0 si ha il caso del n.° 22.

24. Per O si conducano i piani $y_1=0$, $y_2=0$, $y_3=0$; posto per brevità

$$p(y)=p_1y_1+p_2y_2+p_3y_3,$$
$$q(y)=q_1y_1+q_2y_2+q_3y_3,$$

e indicata con $f(y)$ una forma quadratica omogenea delle y_1, y_2, y_3, siano

$$p(y)+\quad ky_4=0,$$
$$f(y)-q(y)y_4=0$$

le equazioni della conica C. Allora le formole (1) e (4) per tutt'i casi del-

(*) Rendiconti del R. Istituto Lombardo, 9 e 23 marzo 1871.

l'attuale trasformazione si potranno scrivere così:

$$x_1:x_2:x_3:x_4=[p(y)+ky_4]y_1:[p(y)+ky_4]y_2:[p(y)+ky_4]y_3:f(y)-y_4q(y),$$
$$y_1:y_2:y_3:y_4=[q(x)+kx_4]x_1:[q(x)+kx_4]x_2:[q(x)+kx_4]x_3:f(x)-x_4p(x).$$

La Jacobiana dello spazio (y) sarà

$$[p(y)+ky_4]^2[kf(y)+p(y)q(y)]=0,$$

ed analogamente quella dello spazio (x)

$$[q(x)+kx_4]^2[kf(x)+p(x)q(x)]=0.$$

Nel caso del n.° 21, cioè se la conica C non passa per O, si può porre $p_1=p_2=p_3=0$, $k=1$, $q_1=q_2=q_3=0$. Se C è un pajo di rette, f sarà il prodotto di due fattori lineari. Quando f sia un quadrato perfetto, il sistema omaloidico dello spazio (y) è formato dai coni che passano per O e si toccano fra loro lungo una retta fissa, non passante per O; ed analogamente per l'altro spazio.

Nel caso del n.° 22, cioè se C passa per O, dovremo porre $k=0$. Se C è una conica propriamente detta, si può fare $p_1=1$, $p_2=p_3=0$, $q_1=q_3=0$, $q_2=1$, $f(y)=y_3^2$. Invece, si potrà assumere f identicamente nulla, quando C sia un pajo di rette, una delle quali passi per O.

Da ultimo, se C consta di due rette incrociate in O, si potrà (oltre a $k=0$) porre $p_1=q_1=1$, $p_2=p_3=q_2=q_3=0$, $f(y)=y_2y_3$.

25. Le K siano coniche $1\,0_1 0_2$ (*); il luogo L essendo composto della retta 12 e di un'altra retta per 2. Le ϕ saranno allora superficie di 2° grado aventi in comune una retta C e tre punti O, O_1, O_2; e la trasformazione inversa sarà di 3° grado ($\mu=3$). Alle rette dello spazio (x) corrispondono le cubiche gobbe (come quelle che sono rappresentate dalle K) che passano pei tre punti fissi OO_1O_2 e incontrano due volte la retta C.

La Jacobiana delle ϕ è una superficie di 4° ordine, per la quale O, O_1, O_2 sono punti doppi e C è una retta tripla. Dunque ciascuna ϕ la segherà inoltre secondo un luogo di 5° ordine. E infatti, la Jacobiana delle K, che è la terna delle rette $0_1 0_2$, $1\,0_1$, $1\,0_2$, rappresenta, insieme col punto 2, una conica e tre rette. Per conseguenza la Jacobiana delle ϕ comprende: 1° il

(*) Cioè coniche passanti per 1 e per due altri punti fissi 0_1, 0_2.

luogo delle coniche passanti per OO_1O_2 e seganti C; 2° il luogo delle rette passanti per O_1 e seganti C; 3° il luogo delle rette passanti per O_2 e seganti C; 4° il luogo delle rette passanti per O e seganti C. Vale a dire: la Jacobiana delle ϕ è il sistema de' quattro piani OO_1O_2, OC, O_1C, O_2C.

Dunque lo spazio (x) contiene una retta fondamentale doppia D' e tre rette fondamentali semplici G', G'_1, G'_2.

Siccome ad una retta arbitraria nello spazio (x) corrisponde in (y) una cubica gobba passante per OO_1O_2 e segante due volte C, e ad un punto della retta D' corrisponde una conica passante per OO_1O_2 ed appoggiata in un punto a C, così ad una retta in (x) la quale incontri D' corrisponderà in (y) una retta appoggiata a C. Ora un piano qualsivoglia β in (y) contiene infinite rette appoggiate a C; dunque la corrispondente superficie ψ conterrà infinite rette appoggiate a D'. Vale a dire: le ψ sono superficie gobbe di 3° grado, per le quali D' è la retta doppia, e le G' sono generatrici semplici.

Che le G' siano rette appoggiate alla D', risulta anche dall'osservare che alla D' corrisponde un fascio di coniche nel piano OO_1O_2 e ad una G' un fascio di rette nel piano OC, e che questi due fasci hanno una retta comune. Invece le G' a due a due non si segano, giacchè i fasci corrispondenti non hanno nulla di comune.

Ad una retta arbitraria nello spazio (y) corrisponderà l'ulteriore intersezione di due superficie ψ, cioè una conica incontrata dalle quattro rette D', G'. Ma ad una retta appoggiata a C corrisponde una retta incontrata da D'; dunque ai punti di C corrispondono le rette segate dalle G', ossia alla retta fondamentale C corrisponde l'iperboloide $G'G'_1G'_2$. Ciascuna superficie ψ ha una direttrice non doppia; essa corrisponde al punto dove C incontra il piano β corrispondente a quella ψ.

Le due generatrici di ψ uscenti da un punto m' di D' corrispondono alle due rette comuni al piano β ed al cono che dal punto βC projetta la conica corrispondente ad m': il qual cono corrisponde al piano delle due generatrici di ψ. Fra le coniche passanti per OO_1O_2 ed incontrate da C ve ne sono due tangenti al piano β; esse corrispondono ai due punti cuspidali di ψ.

La Jacobiana delle ψ dev'essere una superficie di 8° ordine, passante tre volte per ciascuna G' e sette volte per la D'; e dee comprendere due volte i piani corrispondenti ai tre punti OO_1O_2. Di essa Jacobiana fa parte anche il luogo corrispondente a C, ossia l'iperboloide $G'G'_1G'_2$, il quale contiene una volta ciascuna delle quattro rette G', D'; dunque il sistema de' tre piani corrispondenti ai punti OO_1O_2 dovrà contenere D' tre volte e ciascuna G' una volta. Questi piani sono per conseguenza $G'D'$, G'_1D', G'_2D'.

Parecchi sono i casi particolari di questa trasformazione, i quali corrispondono al supporre i punti OO_1O_2 tutti o in parte infinitamente vicini fra loro o alla retta C, ecc. Alla medesima trasformazione si giunge assumendo per le K le cubiche $1^2 2 0_1 0_2 0_3$, nel qual caso L è una retta per 2.

26. Questa trasformazione dà la rappresentazione di una superficie gobba ψ di 3^o grado sul corrispondente piano β (*). Alle sezioni piane di ψ corrisponderanno le intersezioni di β colle ϕ, ossia le coniche passanti per un punto fisso (il punto βC), e seganti armonicamente un segmento fisso. Di quest'ultima condizione ci persuaderemo osservando che le ϕ segano il piano OO_1O_2 secondo un fascio di coniche, epperò segano la retta $(OO_1O_2)\beta$ in un'involuzione di punti. Imagine della retta doppia di ψ sarà l'intersezione di β col piano OO_1O_2 che corrisponde a D'; imagine della direttrice semplice è il punto βC. Le rette passanti per questo punto rappresentano le generatrici rettilinee di ψ.

27. Se il piano β passa pel punto nel quale la retta C incontra il piano OO_1O_2, le due direttrici della superficie gobba corrispondente riescono infinitamente vicine (**). La retta comune ai piani β, OO_1O_2 rappresenta la direttrice e una generatrice coincidente con essa. Le sezioni piane della superficie gobba ψ hanno per imagini le coniche che passano pel punto βC e sono ivi toccate da rette formanti un fascio projettivo alla punteggiata che le coniche stesse determinano sulla imagine della direttrice [in modo che la retta $\beta(OO_1O_2)$ corrisponda al punto βC, che è l'imagine del punto cuspidale]: infatti nel caso attuale, i punti della direttrice corrispondono projettivamente alle generatrici che passano rispettivamente per essi.

28. Se la trasformazione in discorso si applica ad una superficie F' di 2^o grado, data comunque nello spazio (x), questa si muterà in una superficie di 4^o ordine F, giacchè le intersezioni di questa con una retta arbitraria corrispondono ai punti comuni ad F' e ad una conica incontrante $D'G'G'_1G'_2$. Alle rette seganti C corrispondono le rette seganti D'; e alle rette passanti per uno de' punti O corrispondono le rette appoggiate a due rette G'; ma tutte queste rette incontrano F' in due punti, dunque anche quelle incontreranno in due punti la superficie F; ossia F ha la retta doppia C e i punti doppi O, O_1, O_2 (***).

(*) Rendiconti del R. Istituto Lombardo, 24 gennajo 1867, p. 21; — Clebsch nel G. Crelle-Borchardt, t. 67, p. 17.

(**) Rendiconti del R. Istituto Lombardo, 24 gennajo 1867, p. 22; — Clebsch nel G. Crelle-Borchardt, t. 67, p. 19.

(***) Noether nei Math. Annalen, t. 3, p. 50.

Per ottenere la rappresentazione di F sopra un piano, basterà projettare F' da un suo punto; le sezioni piane di F avranno allora per imagini le projezioni delle intersezioni di F' colle ψ, le quali projezioni sono curve di 6° ordine con due punti tripli (i punti fondamentali della rappresentazione di F'), due punti doppi (corrispondenti alle intersezioni di F' con D') e sei punti semplici (corrispondenti alle intersezioni di F' colle G'). Se ora su questo sistema di curve piane operiamo una trasformazione quadratica, mediante la rete delle coniche passanti pei due punti tripli e per uno de' punti doppi, le curve di 6° ordine si mutano in curve del 4° ordine $0^2 12345678$ (*). Siccome le quattro rette $D'G'G'_1G'_2$ formano tre piani $D'G'$, $D'G'_1$, $D'G'_2$, così, nella prima rappresentazione (cioè nella projezione di F') i sei punti semplici giacciono a due a due su tre coniche passanti pei tre punti tripli e pei due punti doppi. Queste coniche si trasformano poi in rette; perciò nella rappresentazione definitiva avremo le tre rette 012, 034, 056, imagini dei tre punti doppi O, O_1, O_2. Alla retta C corrisponde nello spazio (x) l'iperboloide $D'G'G'_1G'_2$, intersecante F' secondo una curva, la cui projezione sarà del 4° ordine, ma che si trasforma poi in una curva del 3° ordine, contenente tutt'i punti 012... 8. Ad un punto di C in F corrisponde l'intersezione di F' con una generatrice del detto iperboloide; cioè ad un punto della retta doppia C corrispondono due punti conjugati nella cubica 012... 8. Siccome le generatrici dell'iperboloide incontrano tutte la retta D', così i due punti conjugati costituenti l'imagine di un punto di C sono sempre (nella projezione di F') in una conica passante pei due punti tripli e pei due punti doppi, la qual conica si trasforma poi in una linea retta: dunque le coppie di punti conjugati della cubica 012... 8 sono allineate con un punto fisso della cubica medesima. Nella retta doppia C vi sono quattro punti cuspidali, giacchè quattro sono le generatrici dell'iperboloide che sono tangenti a C. Le imagini delle sezioni piane di F sono le curve di 4° ordine che appartengono al sistema $0^2 12... 8$ e segano la cubica 012... 8 in due punti conjugati. Il punto 0 e la retta 78 sono imagini di due coniche situate nel piano OO_1O_2, e corrispondenti ai punti ne' quali F' incontra D'. I punti (1, 2), (3, 4), (5, 6) rappresentano tre coppie di rette contenute nei piani OC, O_1C, O_2C, le quali corrispondono alle intersezioni di F' colle tre rette G'; i punti 7, 8 e le rette 07, 08 sono le imagini di

(*) Cioè dotate di un punto doppio 0 e di otto punti semplici 12... 8.

altre quattro rette di F, corrispondenti alle generatrici rettilinee di F' incontrate da D', ecc., ecc.

29. Se F' è tangente lungo una conica all'iperboloide $D'G'G'_1G'_2$, la corrispondente superficie F avrà la retta cuspidale C e i tre punti doppi OO_1O_2. Nella projezione di F', l'imagine di C sarà una conica 123456, e le imagini delle sezioni piane di F saranno curve di 6° ordine con due punti tripli $1, 2$, con tre punti semplici di contatto $4, 5, 6$, e con un altro punto singolare 3, equivalente a due punti doppi infinitamente vicini. Trasformando poi per mezzo della rete di coniche 123, le imagini delle sezioni piane divengono curve di 4° ordine con due punti $1, 2$ di semplice intersezione, con tre punti semplici di contatto $4, 5, 6$ e con un punto doppio 3. I tre punti $4, 5, 6$ sono in una retta, imagine della retta cuspidale.

30. Se nello spazio (y) è data una superficie quàdrica F passante pei tre punti OO_1O_2, ad essa corrisponderà in (x) una superficie F' di 3° ordine. Infatti, alle rette dello spazio (x) corrispondono cubiche gobbe, le quali avendo già in comune con F i tre punti OO_1O_2, la segano in altri tre punti. La superficie F' contiene: 1.° la retta D', che corrisponde alla conica comune ad F e al piano OO_1O_2; 2.° le tre rette G', che corrispondono alle tre coniche, sezioni di F coi piani OC, O_1C, O_2C; 3.° due altre rette appoggiate alle G', le quali corrispondono ai punti in cui F è incontrata da C; 4.° tre rette situate rispettivamente nei piani $D'G'$, $D'G'_1$, $D'G'_2$ e corrispondenti ai punti O, O_1, O_2; 5.° altre sei rette, ciascuna appoggiata a due G', corrispondenti alle generatrici di F che passano per un punto O; 6.° altre quattro rette, appoggiate a D', e corrispondenti alle generatrici di F che segano C; 7.° sei rette corrispondenti alle coniche passanti per due punti O e per uno de' punti comuni a C e ad F; 8.° due rette corrispondenti alle due cubiche gobbe che giacciono su F, passano pei tre punti O e segano C in due punti.

Projettando F da un suo punto, si ottiene una rappresentazione piana di F', nella quale le imagini delle sezioni piane sono curve di 4° ordine con due punti doppi e cinque punti semplici fissi. Trasformando poi questo sistema di curve mediante la rete di coniche passanti pei due punti doppi e per uno de' punti semplici, si giunge alla rappresentazione d'ordine minimo della superficie di 3° ordine (*). Imagini delle sezioni piane sono allora le

(*) CLEBSCH *Die Geometrie auf den Flächen dritter Ordnung* (G. Crelle-Borchardt, t. 65, p. 359); — CREMONA *Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre* (id., t. 68, p. 82).

curve di 3° ordine che passano per sei punti (fondamentali) fissi 123456. Questi sei punti, le quindici rette 12, 13,... e le sei coniche 12345,... rappresentano le ventisette rette della superficie.

31. Il sig. CAYLEY (*) ha già dato le formole (1), (4) pel caso più generale della presente trasformazione:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1 y_3 : y_2 y_3 : y_1 (y_2 + y_4) : y_2 (y_1 + y_4),$$

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_1 (x_1 x_4 - x_2 x_3) : x_2 (x_1 x_4 - x_2 x_3) : (x_1 - x_2) x_1 x_2 : (x_3 - x_4) x_1 x_2.$$

Nello spazio (y), le superficie quàdriche ϕ hanno in comune la retta $(y_1 = y_2 = 0)$ e i tre punti

$$(y_1 = y_3 = y_4 = 0), \quad (y_2 = y_3 = y_4 = 0), \quad (y_1 = y_2 = -y_4, \ y_3 = 0);$$

e nello spazio (x) le superficie cubiche ψ hanno in comune la retta doppia $(x_1 = x_2 = 0)$ e le tre rette semplici

$$(x_1 = x_3 = 0), \quad (x_2 = x_4 = 0), \quad (x_1 - x_2 = 0, \ x_3 - x_4 = 0).$$

La Jacobiana del 1° spazio è $y_1 y_2 y_3 (y_1 - y_2) = 0$; quella del 2°

$$x_1^2 x_2^2 (x_1 - x_2)^2 (x_1 x_4 - x_2 x_3) = 0.$$

Sono poi da notarsi i seguenti casi particolari:

1.° $$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1 y_3 : y_2 y_3 : y_1 (y_4 - y_1) : y_2 y_4,$$

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_1 (x_1 x_4 - x_2 x_3) : x_2 (x_1 x_4 - x_2 x_3) : x_1^2 x_2 : x_1^2 x_4.$$

Le ϕ hanno in comune la retta $(y_1 = y_2 = 0)$, e i punti $(y_1 = y_3 = y_4 = 0)$, $(y_1 - y_4 = y_2 = y_3 = 0)$, nel primo de' quali toccano la retta $(y_3 = y_4 = 0)$. Le ψ, oltre ad avere la retta doppia $(x_1 = x_2 = 0)$, si segano lungo la generatrice $(x_2 = x_4 = 0)$ e si toccano lungo l'altra generatrice $(x_1 = x_3 = 0)$.

La Jacobiana del 1° spazio è $y_1^2 y_2 y_3 = 0$; quella dell'altro

$$x_1^4 x_2^2 (x_1 x_4 - x_2 x_3) = 0.$$

2.° $$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1 y_4 : y_2 y_4 : y_1 y_3 : y_1^2 + y_2 y_3,$$

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_1 (x_1 x_4 - x_2 x_3) : x_2 (x_1 x_4 - x_2 x_3) : x_1^2 x_3 : x_1^3.$$

Le ϕ hanno in comune la retta $(y_1 = y_2 = 0)$ e il punto $(y_1 = y_3 = y_4 = 0)$, nel quale le loro sezioni fatte col piano $y_4 = 0$ hanno un contatto tripunto (e la tangente $y_3 = y_4 = 0$). Le ψ hanno in comune la retta doppia $(x_1 = x_2 = 0)$ e si osculano lungo la generatrice $(x_1 = x_3 = 0)$.

(*) Proceedings of the London Math. Society, t, 3, p. 171.

Le Jacobiane dei due spazi sono $y_1^3 y_4 = 0$, $x_1^6(x_1 x_4 - x_2 x_3) = 0$.

3.° $$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_2 y_3 : y_3 y_1 : y_1 y_2 : y_4(y_1 - y_2),$$
$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = (x_2 - x_1) x_2 x_3 : (x_2 - x_1) x_3 x_1 : (x_2 - x_1) x_1 x_2 : x_1 x_2 x_4$$

Le ϕ passano per la retta $(y_1 = y_2 = 0)$ e pei punti $(y_1 = y_3 = y_4 = 0)$, $(y_2 = y_3 = y_4 = 0)$, e sono toccate nel punto $(y_1 = y_2 = y_3 = 0)$ dal piano fisso $y_1 - y_2 = 0$. Le ψ, oltre alla retta doppia $(x_1 = x_2 = 0)$, hanno in comune le tre generatrici $(x_1 = x_3 = 0)$, $(x_2 = x_3 = 0)$, $(x_1 - x_2 = x_4 = 0)$, le prime due delle quali concorrono sulla retta doppia.

Le Jacobiane sono $y_1 y_2 y_3 (y_1 - y_2) = 0$, $x_1^2 x_2^2 (x_1 - x_2)^3 x_3 = 0$.

4.° $$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1 y_3 : y_2 y_3 : y_1^2 : y_2 y_4,$$
$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_1 x_2 x_3 : x_2^2 x_3 : x_1^2 x_2 : x_1^2 x_4.$$

Le ϕ passano per la retta $(y_1 = y_2 = 0)$; oltre a ciò, nel punto $(y_1 = y_2 = y_3 = 0)$ sono toccate dal piano $y_2 = 0$ e nel punto $(y_1 = y_3 = y_4 = 0)$ dalla retta $(y_3 = y_4 = 0)$. Le ψ hanno la retta doppia $(x_1 = x_2 = 0)$, sono toccate dal piano $x_3 = 0$ lungo la retta $(x_1 = x_3 = 0)$ e si segano in un'altra generatrice $(x_2 = x_4 = 0)$.

Le Jacobiane sono $y_1^2 y_2 y_3 = 0$, $x_1^4 x_2^3 x_3 = 0$.

5.° $$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_2 y_3 : y_3 y_1 : y_1 y_2 : y_2^2 - y_1 y_4,$$
$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_2^2 x_3 : x_1 x_2 x_3 : x_1 x_2^2 : x_1 (x_1 x_3 - x_2 x_4).$$

Le ϕ passano per la retta $(y_1 = y_2 = 0)$ e pel punto $(y_2 = y_3 = y_4 = 0)$, sono toccate nel punto $(y_1 = y_2 = y_3 = 0)$ dal piano $y_1 = 0$, e in questo stesso punto le loro sezioni fatte con piani passanti per la retta $(y_1 = y_3 = 0)$ si osculano. Le ψ hanno in comune la retta doppia $(x_1 = x_2 = 0)$ e le generatrici $(x_1 = x_3 = 0)$, $(x_2 = x_3 = 0)$, che concorrono sulla retta doppia; e lungo la seconda delle dette generatrici hanno tutt'i piani tangenti comuni.

Le Jacobiane sono $y_1^2 y_2 y_3 = 0$, $x_1^2 x_2^5 x_3 = 0$.

6.° $$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1 y_3 : y_2 y_3 : y_1^2 : y_2^2 - y_1 y_4,$$
$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_1^2 x_3 : x_1 x_2 x_3 : x_1^3 : x_2^2 x_3 - x_1^2 x_4.$$

Le ϕ passano per la retta $(y_1 = y_2 = 0)$ e sono segate dal piano $y_3 = 0$ secondo coniche aventi un contatto quadripunto in $(y_1 = y_2 = y_3 = 0)$, dove il piano tangente comune è $y_1 = 0$. Le ψ hanno in comune la retta doppia $(x_1 = x_2 = 0)$ e si osculano lungo la retta $(x_1 = x_3 = 0)$, in tutt'i punti della quale il piano tangente è costante $(x_3 = 0)$.

Le Jacobiane sono $y_1^2 y_3=0$, $x_1^7 x_3=0$.

Nel caso generale, come anche ne' primi due casi particolari, il luogo delle direttrici semplici delle ψ è l'iperboloide $x_1x_4-x_2x_3=0$; negli ultimi quattro casi, il detto luogo si riduce al piano $x_3=0$. Ne' due casi che seguono, la direttrice semplice coincide colla retta doppia.

$$7.^\circ \quad x_1:x_2:x_3:x_4=y_1(y_1-y_2):y_2(y_1-y_2):y_1y_3:y_2y_4,$$
$$y_1:y_2:y_3:y_4=x_1^2x_2:x_1x_2^2:x_2x_3(x_1-x_2):x_1x_4(x_1-x_2).$$

Le φ hanno in comune la retta $(y_1=y_2=0)$ ed il punto $(y_1=y_2,\ y_3=y_4=0)$, e ne' punti $(y_1=y_2=y_3=0)$, $(y_1=y_2=y_4=0)$ sono toccate rispettivamente dai piani $y_2=0$, $y_1=0$. Le ψ hanno in comune la retta doppia $(x_1=x_2=0)$, che ora fa anche le veci di una generatrice comune, e le due generatrici $(x_1=x_3=0)$, $(x_2=x_4=0)$.

Le Jacobiane sono $y_1y_2(y_1-y_2)^2=0$, $x_1^3x_2^3(x_1-x_2)^2=0$.

$$8.^\circ \quad x_1:x_2:x_3:x_4=y_1^2:y_1y_2:y_2y_4:y_1y_3-y_2^2,$$
$$y_1:y_2:y_3:y_4=x_1^2x_2:x_1x_2^2:x_2(x_1x_4+x_2^2-x_1x_3):x_1^2x_3.$$

Le φ hanno in comune la retta $(y_1=y_2=0)$ e i piani $y_1=0$, $y_2=0$ tangenti rispettivamente ne' punti $(y_1=y_2=y_4=0)$, $(y_1=y_2=y_3=0)$, e sono segate dai piani passanti per la retta $(y_1=y_4=0)$ secondo coniche che si osculano nel punto $(y_1=y_2=y_4=0)$ Le ψ hanno la retta doppia $(x_1=x_2=0)$, che qui fa anche l'ufficio di una generatrice di contatto (così che essa conta per 6 nell'ordine dell'intersezione di due ψ), e si segano inoltre nella generatrice $(x_2=x_3=0)$.

Le Jacobiane sono $y_1^3y_2=0$; $x_1^5x_2^3=0$.

32. Questi casi particolari si deducono dal caso generale, supponendo:

1.° che due de' tre punti O_1, O_2, O_3 siano infinitamente vicini in una data retta $(y_3=y_4=0)$;

2.° che i tre punti O_1, O_2, O_3 siano infinitamente vicini in un dato piano $y_4=0$;

3.° che il punto O_1 sia infinitamente vicino alla retta C, determinando con essa un piano $y_1-y_2=0$ (mentre i punti O_2, O_3 siano qualsivogliano);

4.° che oltre all'ipotesi 3ª, i punti O_2, O_3 siano infinitamente vicini fra loro in una data retta $(y_3=y_4=0)$;

5.° che i punti O_1, O_2 siano infinitamente vicini fra loro in una data retta ($y_1 = y_3 = 0$), ed anche infinitamente vicini alla retta C, colla quale determinino il piano $y_1 = 0$;

6.° che oltre all'ipotesi 5ª, anche il punto O_3 sia infinitamente vicino agli altri due, in un dato piano $y_3 = 0$;

7.° che i punti O_1, O_2, senza essere prossimi fra loro, siano infinitamente vicini alla retta C, determinando con essa rispettivamente i piani $y_1 = 0$, $y_2 = 0$;

8.° che, oltre all'ipotesi 7ª, il punto O_3 si accosti infinitamente ad O_1 in una retta data ($y_1 = y_4 = 0$).

33. Le K siano coniche per tre punti fissi $0_1 0_2 0_3$; il luogo L riducesi allora alla retta 12 contata due volte. Le ϕ sono superficie di 2° grado circoscritte ad un tetraedro fisso $OO_1O_2O_3$, in un vertice O del quale hanno un piano tangente fisso ω. La trasformazione inversa è di 4° grado ($\mu = 4$), giacchè alle rette dello spazio (x) corrispondono le curve gobbe di 4° ordine, per le quali $O_1O_2O_3$ sono punti semplici ed O è un punto doppio colle tangenti nel piano fisso ω.

Lo spazio (y) non contiene curve fondamentali; e la Jacobiana delle ϕ dee segare la ϕ_4 secondo un luogo di 8° ordine. Ora la Jacobiana delle K è la terna delle rette $0_2 0_3$, $0_3 0_1$, $0_1 0_2$ che rappresentano tre coniche; e i punti fondamentali 1, 2 rappresentano due rette, che insieme colle tre coniche costituiscono il predetto luogo di 8° ordine. Dunque la Jacobiana delle ϕ comprende: 1° il luogo delle coniche circoscritte al triangolo OO_2O_3 e tangenti in O al piano ω; 2° il luogo delle coniche circoscritte al triangolo OO_3O_1 e tangenti in O al piano ω; 3° il luogo delle coniche circoscritte al triangolo OO_1O_2 e tangenti in O al piano ω; 4° il luogo delle rette passanti per O e contenute nel piano ω. Questi quattro luoghi sono ordinatamente i piani OO_2O_3, OO_3O_1, OO_1O_2 ed ω; l'insieme dei quali costituirà adunque la Jacobiana delle ϕ; e ai piani medesimi corrisponderanno nello spazio (x) tre rette fondamentali doppie D'_1, D'_2, D'_3 ed una conica C'.

La retta comune a due de' tre piani OO_2O_3, OO_3O_1, OO_1O_2 fa parte d'entrambi i fasci di coniche contenuti in essi piani; dunque le tre rette doppie dello spazio (x) a due a due hanno un punto comune. Ma le tre rette doppie non possono giacere in un solo e medesimo piano, perchè ad esso corrisponderebbe una superficie ϕ della quale farebbero parte i tre piani OO_2O_3, OO_3O_1, OO_1O_2 (il che è assurdo, essendo le ϕ di 2° grado); dunque le tre rette concorrono in uno stesso punto Q'.

La retta comune al piano ω e ad uno dei piani OO_2O_3, OO_3O_1, OO_1O_2 fa parte sì del fascio di coniche contenute in questo piano, sì del fascio di rette contenute nel primo piano e incrociate in O; dunque la conica C' incontra ciascuna delle rette D'.

Da tutto ciò segue che le ψ sono superficie (di Steiner) di 4° ordine, per le quali Q' è un punto triplo, le D' sono rette doppie e C' è una conica semplice.

Le curve secondo le quali si segano ulteriormente le ψ a due a due, ossia le curve dello spazio (x) che corrispondono alle rette dello spazio (y), sono coniche appoggiate in un punto a ciascuna delle linee D'_1, D'_2, D'_3, C'.

La Jacobiana delle ψ dev'essere una superficie del 12° ordine, per la quale ciascuna D' sia multipla secondo 7, e la C' sia tripla. D'altra parte, a ciascuno de'punti O_1, O_2, O_3 dee corrispondere un piano da contarsi due volte, e al punto O una superficie quàdrica da contarsi tre volte nella Jacobiana delle ψ. Dunque ai punti $O_1O_2O_3O$ corrispondono ordinatamente i piani $D'_2D'_3$, $D'_3D'_1$, $D'_1D'_2$ e il cono quadrico $Q'C'$.

Si giunge alla medesima trasformazione, assumendo per le K le curve di 4° ordine $1^2 2^2 0^2 0_1 0_2 0_3$; nel qual caso il luogo L scompare affatto. Anche qui si ottengono parecchi casi particolari, supponendo che alcuni de' punti $OO_1O_2O_3$ siano infinitamente vicini.

34. Da questa trasformazione si ricava tosto la rappresentazione di una superficie ψ di Steiner sul corrispondente piano β (*). Alle sezioni piane di ψ corrispondono le intersezioni di β colle ϕ, vale a dire un sistema di coniche che incontrano in punti conjugati involutoriamente ciascuna delle rette, secondo le quali β sega i piani OO_2O_3, OO_3O_1, OO_1O_2; i punti doppi delle tre involuzioni sono i vertici di un quadrilatero completo. Ciascuna ϕ che tocchi il piano β lo sega secondo due rette; dunque ciascun piano tangente a ψ sega questa superficie secondo due coniche. I lati del quadrilatero anzidetto sono le generatrici di contatto del piano β con quattro coni ϕ, ai quali corrispondono quattro piani, e ciascuno di questi tocca ψ lungo una conica.

(*) Rendiconti del R. Istituto Lombardo, 24 gennajo 1862, p. 15; — Clebsch nel G. Crelle-Borchardt, t. 67, p. 1.

Ad una superficie di 2° grado situata comunque nello spazio (x) corrisponde in (y) una certa superficie di 4° ordine, per la quale $O_1 O_2 O_3$ sono punti doppi conici, ed O è un punto doppio uniplanare, nel quale il piano tangente sega la superficie secondo quattro rette. Io ho già studiato questa superficie altrove (*).

In generale, ad una superficie d'ordine n, situata comunque nello spazio (x), corrisponde in (y) una superficie d'ordine $2n$, per la quale $O_1 O_2 O_3$ sono punti n-pli conici, ed O è un punto n-plo uniplanare, dove il piano tangente ω sega la superficie secondo $2n$ rette (incrociate in O), così che la sezione fatta da un piano condotto arbitrariamente per O è una curva del genere $(n-1)^2$, per la quale O fa le veci di due punti n-pli infinitamente vicini. Se per la prima superficie il punto Q', le rette $Q'Q'_1$, $Q'Q'_2$, $Q'Q'_3$ e la conica C' sono multiple ordinatamente secondo i numeri q, q_1, q_2, q_3, c, la seconda superficie sarà dell'ordine $2n-(q_1+q_2+q_3+c)$, e per essa i punti O, O_1, O_2, O_3 saranno multipli secondo i numeri $n+q-(q_1+q_2+q_3+c)$, $n-(q_2+q_3)$, $n-(q_3+q_1)$, $n-(q_1+q_2)$; ecc. ecc.

35. Le formole (1) e (4) pel caso più generale della presente trasformazione sono (**):

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_2 y_3 : y_3 y_1 : y_1 y_2 : y_4(y_1 + y_2 + y_3),$$

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = f(x) x_2 x_3 : f(x) x_3 x_1 : f(x) x_1 x_2 : x_1 x_2 x_3 x_4,$$

dove per brevità si è posto $f(x) = x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2$. Le superficie quàdriche ϕ sono circoscritte al tetraedro formato dai piani $y_1=0$, $y_2=0$, $y_3=0$, $y_4=0$ e sono toccate nel vertice $(y_1=y_2=y_3=0)$ dal piano fisso $y_1+y_2+y_3=0$. Le ψ sono superficie di 4° ordine, aventi in comune tre rette doppie (gli spigoli del triedro formato dai piani $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$) ed una conica $[x_4=0,\ f(x)=0]$.

Le Jacobiane dei due sistemi sono $y_1 y_2 y_3 (y_1+y_2+y_3)=0$, $x_1^2 x_2^2 x_3^2 f^3(x)=0$.

Notiamo poi i seguenti casi particolari:

1.° $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_2 y_3 : y_3 y_1 : y_1 y_2 : y_3^2 - (y_1 + y_2) y_4,$

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = f(x) x_2 x_3 : f(x) x_3 x_1 : f(x) x_1 x_2 : x_1 x_2 (x_1 x_2 - x_3 x_4),$$

dove $f(x) = (x_1 + x_2) x_3$. Le ϕ passano pei punti

$$(y_1 = y_2 = y_3 = 0), \quad (y_1 = y_3 = y_4 = 0), \quad (y_2 = y_3 = y_4 = 0),$$

(*) Memorie dell'Accad. di Bologna, serie 3ª, t. 1°.

(**) Ibid.

nel primo de' quali esse hanno il piano tangente fisso $y_1+y_2=0$ e le loro sezioni fatte con piani passanti per la retta $(y_1=y_2=0)$ si osculano. Le ψ sono ancora superficie di STEINER aventi in comune le tre rette doppie $(x_2=x_3=0)$, $(x_3=x_1=0)$, $(x_1=x_2=0)$ ed una conica

$$[x_1+x_2=0,\ x_1x_2-x_3x_4=0],$$

la quale però è ora situata in un piano passante per una delle tre rette doppie.

Le Jacobiane sono $y_1y_2y_3(y_1+y_2)=0$, $x_1^2x_2^2x_3^5(x_1+x_2)^3=0$.

$$2.^{\circ}\quad x_1:x_2:x_3:x_4=y_2y_3:y_3y_1:y_1y_2:y_2^2+y_3^2+y_1y_4,$$

$$y_1:y_2:y_2:y_4=f(x)x_2x_3:f(x)x_3x_1:f(x)x_1x_2:x_1x_2x_3x_4-x_1^2(x_2^2+x_3^2),$$

dove $f(x)=x_2x_3$. Le ϕ hanno di comune i punti

$$(y_1=y_2=y_3=0),\quad (y_2=y_3=y_4=0),$$

nel primo dei quali esse sono toccate dal piano fisso $y_1=0$ e le loro sezioni fatte con qualunque piano passante per una delle rette $(y_1=y_2=0)$, $(y_1=y_3=0)$ si osculano. Le ψ sono ancora superficie di STEINER con tre rette doppie comuni $(x_2=x_3=0)$, $(x_3=x_1=0)$, $(x_1=x_2=0)$; ma invece di passare per una stessa conica, hanno in comune tutt'i piani tangenti ne' punti di una retta doppia $(x_2=x_3=0)$.

Le Jacobiane sono $y_1^2y_2y_3=0$, $x_1^2x_2^5x_3^5=0$.

$$3.^{\circ}\quad x_1:x_2:x_3:x_4=y_1^2:y_1y_2:y_2y_3:y_4(y_3-y_2),$$

$$y_1:y_2:y_3:y_4=f(x)x_1x_2:f(x)x_2^2:f(x)x_1x_3:x_1x_2^2x_4,$$

dove $f(x)=x_1x_3-x_2^2$. Le ϕ hanno di comune i tre punti $(y_1=y_2=y_3=0)$, $(y_1=y_2=y_4=0)$, $(y_1=y_3=y_4=0)$, nel primo de' quali sono toccate dal piano $y_3-y_2=0$, e nel secondo dalla retta $y_2=y_4=0$. Le ψ sono d'una forma degenere della superficie di STEINER (*), esse hanno in comune la retta $(x_1=x_2=0)$ equivalente a due rette doppie infinitamente vicine, un' altra retta doppia $(x_2=x_3=0)$ ed una conica $[x_4=0,\ f(x)=0]$.

Le Jacobiane sono $y_1^2y_2(y_3-y_2)=0$, $x_1^2x_2^4f^3(x)=0$.

$$4.^{\circ}\quad x_1:x_2:x_3:x_4=y_1y_3:y_2y_3:y_2^2:y_3^2+y_1y_4,$$

$$y_1:y_2:y_3:y_4=f(x)x_1x_3:f(x)x_2x_3:f(x)x_2^2:x_2^2(x_3x_4-x_2^2),$$

(*) CLEBSCH nel G. Crelle-Borchardt, t. 67, p. 15; — Rendiconti del R. Istituto Lombardo, 24 gennajo 1862, p. 19.

dove $f(x)=x_1 x_3$. Le ϕ passano pei punti $(y_1=y_2=y_3=0)$, $(y_2=y_3=y_4=0)$, nel primo de' quali sono toccate dal piano $y_1=0$, e nel secondo della retta $(y_3=y_4=0)$; inoltre sono segate da ogni piano passante per la retta $(y_1=y_2=0)$ secondo coniche che si osculano in $(y_1=y_2=y_3=0)$. Le ψ sono della stessa forma degenere della superficie di Steiner, come nel caso precedente; hanno in comune le rette doppie $(y_2=y_3=0)$, $(y_1=y_2=0)$, la prima delle quali rappresenta due rette doppie infinitamente vicine, ed inoltre una conica $[x_1=0,\ x_3x_4-x_2^2=0]$, il cui piano passa per la seconda retta doppia.

Le Jacobiane sono $y_1y_2^2y_3=0$, $x_1^3x_2^4x_3^5=0$.

5.° $$x_1:x_2:x_3:x_4=y_1^2:y_1y_3:y_3^2-y_1y_2:y_2y_4,$$
$$y_1:y_2:y_3:y_4=f(x)x_1^2:f^2(x):f(x)x_1x_2:x_1^3x_4,$$

dove $f(x)=x_2^2-x_1x_3$. Le ϕ hanno il punto comune $(y_1=y_2=y_3=0)$ col piano tangente fisso $y_2=0$, ed un altro punto comune $(y_1=y_3=y_4=0)$ dove le sezioni fatte col piano $y_4=0$ si osculano tutte fra loro. Le ψ appartengono ad un' altra forma degenere della superficie di Steiner (*); hanno in comune la retta $x_1=x_2=0$, che rappresenta tre rette doppie infinitamente vicine, ed inoltre la conica $[x_4=0,\ f(x)=0]$.

Le Jacobiane sono $y_1^3y_2=0$, $x_1^6f^3(x)=0$.

36. Questi casi particolari risultano dal caso generale supponendo:

1.° che il punto O_1 sia infinitamente vicino ad O nella retta $(y_1=y_2=0)$;

2.° che anche il punto O_2 sia infinitamente vicino ad O nella retta $(y_1=y_3=0)$;

3.° che de' tre punti O_1, O_2, O_3 (ora non più supposti prossimi ad O) due siano infinitamente vicini fra loro nella retta $(y_2=y_4=0)$;

4.° che il punto O_1 sia infinitamente vicino ad O nella retta $(y_1=y_2=0)$, e che i punti O_2, O_3 siano prossimi fra loro nella retta $(y_3=y_4=0)$;

5.° che i tre punti O_1, O_2, O_3 siano infinitamente vicini fra loro nel piano $y_4=0$.

(*) Rendiconti del R. Istituto Lombardo, 24 gennajo 1862, p. 20.

Trasformazioni di 3° grado
($\nu=3$; $\mu=2, 3, 4, \ldots, 9$).

37. Sia ϕ_4 una superficie gobba di 3° grado, la cui retta doppia indicherò con D. Abbiamo già veduto (n.° 26) che essa può essere rappresentata, punto per punto, in un piano Π in modo che le imagini delle sue sezioni piane siano coniche passanti per un punto fisso 1 e seganti armonicamente un dato segmento. Per conseguenza, il sistema Σ delle imagini delle intersezioni di ϕ_4 colle altre superficie gobbe di 3° grado, dotate della medesima retta doppia, sarà formato dalle curve di 4° ordine 1^3.

Assumendo per le K le rette del piano Π, epperò per L il gruppo di tre rette passanti per 1, si ottiene la trasformazione ($\nu=3$, $\mu=2$), che abbiamo già esaminata precedentemente (n.° 25).

Le K siano coniche $1\,0_1\,0_2$, epperò L sia un pajo di rette uscenti da 1. Le ϕ saranno superficie gobbe di 3° grado aventi in comune, oltre alla retta doppia D, due generatrici G_1, G_2 e due punti O_1, O_2; e la trasformazione inversa sarà di 3° grado ($\mu=3$). Alle rette dello spazio (x) corrispondono cubiche gobbe R, le quali passano per O_1, O_2, segano due volte D ed una volta ciascuna delle G_1, G_2; come si riconosce tosto dall'esame delle K, le quali sono le imagini di quelle curve R che giacciono in ϕ_4.

La Jacobiana delle ϕ dev'essere un luogo dell'8° ordine, pel quale D, G_1, G_2 siano multiple secondo i numeri 7, 3, 3; esso avrà adunque con ϕ_4 un'altra linea comune dell'ordine $3\cdot8-2\cdot7-2\cdot3=4$. Questa è l'insieme di una conica e di due rette, rappresentate su Π dalle rette $0_1 0_2$, $1\,0_1$, $1\,0_2$, che formano la Jacobiana delle K. Dunque la Jacobiana delle ϕ comprende: 1.° il luogo delle coniche passanti per O_1, O_2 ed appoggiate alle rette D, G_1, G_2, vale a dire l'iperboloide $DG_1G_2O_1O_2$; 2.° il luogo delle rette che passano per O_1 e segano D, vale a dire il piano O_1D: 3.° il luogo delle rette che passano per O_2 e segano D, vale a dire il piano O_2D. Questi tre luoghi sono da contarsi semplicemente nella Jacobiana delle ϕ, giacchè per questa i punti O_1, O_2 sono soltanto doppi (n.° 16); dunque la Jacobiana medesima comprenderà inoltre un luogo del 4° ordine, il quale, dovendo avere D come retta quadrupla e G_1, G_2 come rette doppie, non può essere altro che il pajo di piani DG_1, DG_2, contati due volte.

Segue da ciò che gli enti fondamentali dello spazio (x) sono una retta doppia D' (corrispondente all'iperboloide $DG_1G_2O_1O_2$), due rette semplici

G'_1, G'_2 (corrispondenti ai piani O_1D, O_2D) e due punti semplici O'_1, O'_2 (corrispondenti ai piani DG_1, DG_2).

Le rette D', G'_1 hanno un punto comune, perchè la retta che passa per O_1 e incontra D e G_1 appartiene sì alle coniche corrispondenti ai punti di D', sì alle rette corrispondenti ai punti di G'_1. Analogamente D' sega anche G'_1. Da ciò segue senz'altro, che le ψ sono superficie gobbe di 3° grado, aventi in comune la retta doppia D', le generatrici G'_1, G'_2, ed i punti O'_1 O'_2; vale a dire, il sistema delle ψ è affatto analogo a quello delle ϕ.

Se assumiamo $y_1=0$, $y_2=0$, $y_1-a_1y_2=0$, $y_1-a_2y_2=0$ come equazioni dei piani DO_1, DO_2, DG_1, DG_2; $(y_3=y_4=0)$ come equazioni della retta O_1O_2, ed $I(y)=0$ come equazione dell'iperboloide $DG_1G_2O_1O_2$, le formole (1), (4) per l'attuale trasformazione saranno

$$x_1:x_2:x_3:x_4=y_1I(y):y_2I(y):(y_1-a_1y_2)(y_1-a_2y_2)y_3:(y_1-a_1y_2)(y_1-a_2y_2)y_4,$$

$$y_1:y_2:y_3:y_4=x_1J(x):x_2J(x):(a_2-a_1)x_1x_2x_3:(a_2-a_1)x_1x_2x_4,$$

dove $J(x)=(x_1-a_1x_2)(x_1-a_2x_2)+(a_2-a_1)x_1x_2-I(x)$. Le Jacobiane dei due spazi sono

$$I(y)y_1y_2(y_1-a_1y_2)^2(y_1-a_2y_2)^2=0, \quad J(x)(x_1-a_1x_2)(x_1-a_2x_2)x_1^2x_2^2=0.$$

Si hanno casi particolari di questa trasformazione, quando facciansi ipotesi speciali sulla scambievole giacitura dei punti O_1, O_2 e delle rette D, G_1, G_2. D'ora innanzi tralasceremo di considerare tali casi, che per sè non presentano difficoltà: tanto più che noi non abbiamo qui l'intenzione d'esaurire tutt'i casi possibili, ma solamente di presentare alcuni degli esempi più notabili.

38. Ritenuta la supposizione del n.° 37 per ϕ_4, le K siano ora le cubiche $1^2 0_1 0_2 0_3 0_4$, ed L sia una retta per 1. Allora le ϕ saranno superficie gobbe di 3° grado aventi in comune, oltre alla retta doppia D, una generatrice G e quattro punti O_1, O_2, O_3, O_4; e la trasformazione inversa sarà di 4° grado ($\mu=4$). Alle rette dello spazio (x) corrispondono curve gobbe R di 4° ordine (e 2ª specie), che incontrano D in tre punti, G in un punto, e passano per quattro punti O.

La Jacobiana delle ϕ dev'essere dell'8° ordine e contenere D sette volte e G tre volte; essa segherà adunque ϕ_4 secondo un'altra linea dell'ordine $3\cdot8-2\cdot7-1\cdot3=7$, la quale è costituita da una cubica gobba e da quattro rette, rappresentate su Π dalla conica $1\,0_1 0_2 0_3 0_4$ e dalle rette $1\,0_1$, $1\,0_2$, $1\,0_3$, $1\,0_4$, che formano la Jacobiana delle K. Dunque la Jacobiana delle ϕ comprende: 1.° il luogo delle cubiche gobbe seganti D in due punti, G in un punto e passanti pei quattro punti O, vale a dire l'iperboloide $DGO_1O_2O_3O_4$; 2.° i luoghi delle rette seganti D e passanti per un punto O, vale a dire i quattro piani DO_1, DO_2, DO_3, DO_4. Questi cinque luoghi sono da contarsi semplicemente nella Jacobiana delle ϕ, perchè in questa i punti O non sono che doppi; dunque la Jacobiana che si considera comprenderà anche un luogo di 2° ordine, pel quale D e G siano doppie; il qual luogo sarà pertanto il piano DG contato due volte.

Di qui consegue che gli enti fondamentali dello spazio (x) sono una retta tripla D' (corrispondente all'iperboloide $DGO_1O_2O_3O_4$), quattro rette semplici G'_1, G'_2, G'_3, G'_4 (corrispondenti ai quattro piani DO), ed un punto O' (corrispondente al piano DG).

La retta D' incontra ciascuna retta G'_r, perchè la retta che passa per O_r e si appoggia a D, G, appartiene sì alle cubiche corrispondenti ai punti di D', sì alle rette corrispondenti ai punti di G'_r.

Le ψ sono adunque superficie gobbe di 4° grado, che hanno in comune la retta tripla D', le quattro generatrici G' ed il punto O'.

La Jacobiana delle ψ comprenderà: 1.° quattro piani, da contarsi due volte, corrispondenti ai quattro punti O, e seganti ciascuna ψ esclusivamente nelle linee fondamentali: essi sono i quattro piani $D'G'$; 2.° un luogo di rette corrispondenti ai punti di G, il qual luogo dev'essere un piano, perchè G ha con ciascuna R un solo punto comune, e deve segare ciascuna ψ secondo una retta, ond'esso sarà il piano $D'O'$; 3.° un luogo di coniche corrispondenti ai punti di D, il qual luogo sarà di 3° ordine, perchè D ha con ciascuna R tre punti comuni. Siccome la Jacobiana completa è dell'ordine 12 e contiene D', G', O' risp. 11, 3, 2 volte, così il luogo di 3° ordine conterrà D', G', O' risp. 2, 1, 1 volta, vale a dire, esso sarà la superficie gobba di 3° grado, che è determinata dalla retta doppia D', dalle quattro generatrici G', e dal punto O'. Le coniche (corrispondenti ai punti di D) secondo le quali la detta superficie di 3° grado interseca le ψ, sono appoggiate alle cinque rette D', G' e passano pel punto O'.

Se si rappresentano i piani DG, DO_1, DO_2, DO_3, DO_4, $O_1O_2O_3$, $O_1O_2O_4$ e l'iperboloide $DGO_1O_2O_3O_4$ colle equazioni

$$y_1-y_2=0,\; y_1-a_1y_2=0,\; y_1-a_2y_2=0,\; y_1=0,\; y_2=0,\; y_3=0,\; y_4=0,\; I(y)=0,$$

dove

$$I(y)=(y_1-a_1y_2)(y_1-a_2y_2)+ay_1y_3+by_1y_4+cy_2y_3+dy_2y_4,$$

le formole (1), (4) per l'attuale trasformazione saranno

$$x_1:x_2:x_3:x_4=y_1I(y):y_2I(y):y_2y_3(y_1-y_2):y_1y_4(y_1-y_2),$$
$$y_1:y_2:y_3:y_4=x_1J(x):x_2J(x):f(x)x_1x_3:f(x)x_2x_4,$$

dove $f(x)=(x_1-a_1x_2)(x_1-a_2x_2)$, e

$$J(x)=-(ax_1^2x_3+bx_1x_2x_4+cx_1x_2x_3+dx_2^2x_4)+(x_1-x_2)x_1x_2.$$

Le Jacobiane dei due spazi sono ordinatamente

$$I(y)(y_1-a_1y_2)(y_1-a_2y_2)y_1y_2(y_1-y_2)^2=0,$$
$$J(x)(x_1-x_2)(x_1-a_1x_2)^2(x_1-a_2x_2)^2x_1^2x_2^2=0.$$

39. La trasformazione qui trattata somministra la rappresentazione, punto per punto, di una superficie ψ sul corrispondente piano β (*). Come già si è notato, ψ è gobba e di 4° grado, ed è dotata di una retta tripla D'. Imagini delle sue sezioni piane saranno le tracce delle ϕ su β, epperò saranno curve H di 3° ordine, aventi in comune un punto doppio d (traccia di D) ed un punto semplice g (traccia di G). Ai piani per O' corrispondono gli iperboloidi $DO_1O_2O_3O_4$, i quali segano ciascuno dei piani $O_2O_3O_4$, $O_1O_3O_4$, $O_1O_2O_4$, $O_1O_2O_3$ secondo fasci di coniche; dunque le tracce di questi iperboloidi su β costituiranno una rete di coniche k (passanti per d) seganti in un' involuzione di punti ciascuna delle quattro rette tracce de' piani anzidetti. Fra le coniche k ve ne sono infinite che si spezzano in due rette, l'una delle quali passa per d, mentre l'altra tocca una conica fissa P. Ecco adunque come si può costruire la rappresentazione di ψ.

Assumansi ad arbitrio i punti d, g, quattro rette δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 (passanti per d), come tracce de' piani O_1D, O_2D, O_3D, O_4D, e tre altre rette ω_1, ω_2, ω_3 (non passanti per d), come tracce de' piani $O_2O_3O_4$, $O_1O_3O_4$, $O_1O_2O_4$. Le coppie di rette $\delta_1\omega_1$, $\delta_2\omega_2$, $\delta_3\omega_3$ determinano la rete delle coniche k. Congiungasi il punto $\delta_1\omega_2$ col punto $\delta_2\omega_1$; il punto $\delta_1\omega_3$ col punto $\delta_3\omega_1$; il punto $\delta_2\omega_3$ col punto $\delta_3\omega_2$; le tre congiungenti e le ω_1, ω_2, ω_3 toccano una conica stessa P. Stabiliscasi una corrispondenza anarmonica fra le tangenti di P e le rette per d, in modo che le ω_1, ω_2, ω_3 corrispondano alle δ_1, δ_2,

(*) Cfr. Noether nei Mathem. Annalen, t. 3.

δ_3; e sia ω_4 quella tangente di P che corrisponde a δ_4: sarà ω_4 la traccia del piano $O_1 O_2 O_3$; e ciascuna delle quattro rette ω sarà segata dalle coniche k in un' involuzione di punti.

Fra le coniche k che passano per g se ne scelga una, I, come traccia dell' iperboloide $DGO_1O_2O_3O_4$, cioè come imagine della retta tripla D'. Le coniche k determinano su I un' involuzione cubica di punti, così che ogni gruppo o terna di punti è l'imagine di un punto unico di D'; vale a dire, qualunque cubica H, passante per un punto di I, passa anche per gli altri due punti della medesima terna. In ciò consistono le condizioni alle quali sono soggette le H, e che provengono dal fatto che le ϕ passano pei quattro punti O. I punti conjugàti in uno stesso gruppo dell'involuzione cubica sono i vertici di un triangolo inscritto in I e circoscritto a P.

Le rette per d sono le imagini delle generatrici rettilinee di ψ; ma la retta dg, traccia del piano DG, non corrisponde che al punto O'; la generatrice che passa per O' ha per imagine il punto g. Il punto d rappresenta la conica secondo la quale ψ è intersecata dalla superficie gobba di 3° grado $D'^2G'_1G'_2G'_3G'_4O'$. Le coniche per d, g e per due punti di uno stesso gruppo dell' involuzione sono le imagini delle cubiche di ψ, situati nei piani tangenti. Le rette per g rappresentano le coniche, secondo le quali ψ è segata dai suoi piani bitangenti; quella di queste coniche che passa per O' ha per imagine il punto d.

La rete delle coniche k rappresenta, come già si è veduto, le sezioni fatte in ψ dai piani passanti per O'; donde segue che le tangenti di P sono le imagini delle cubiche di ψ, situate nei piani tangenti che escono da O'. Questi piani inviluppano un cono circoscritto di 4° ordine, che tocca ψ lungo una curva di 5° ordine (la cui imagine è una cubica d^2, Hessiana della rete delle k) e sega la stessa ψ lungo una curva di 6° ordine, la imagine della quale è la conica P, che insieme col punto d costituisce la curva Cayleyana della rete già nominata.

Sia m uno de' punti comuni alle coniche I, P; la retta tangente in m a P seghi di nuovo I in m'; la tangente in m' ad I toccherà allora anche P. I tre punti $mm'm'$ formano un gruppo dell' involuzione, vale a dire, i quattro punti m' sono i punti doppi dell'involuzione. La retta tripla D' contiene perciò quattro punti cuspidali, corrispondenti ai quattro gruppi analoghi ad $mm'm'$.

40. Conservata ancora la medesima superficie ϕ_4, suppongasi ora che le K siano le curve di 4° ordine $1^3 0_1 0_2 0_3 0_4 0_5 0_6$; il luogo L scompare del tutto. Le ϕ sono superficie gobbe di 3° grado, che, oltre alla retta doppia D, hanno in comune sei punti O_1, $O_2, \ldots$, O_6 fissi; e la trasformazione inversa è di 5° grado ($\mu=5$). Alle rette dello spazio (x) corrispondono curve gobbe R di 5° ordine, che incontrano D in quattro punti e passano per i sei punti dati.

La Jacobiana delle ϕ e la ϕ_4 devono avere in comune, oltre a D, una linea dell'ordine $3\cdot 8-2\cdot 7=10$, la quale è composta di una curva gobba di 4° ordine e di sei rette, rappresentate su Π dalla cubica $1^2 0_1 0_2 \ldots 0_6$, e dalle rette $1\,0_1, \ldots, 1\,0_6$, che costituiscono la Jacobiana delle K. Dunque la Jacobiana delle ϕ comprende: 1.° il luogo delle curve gobbe di 4° ordine, che segano D tre volte e passano per i sei punti dati, vale a dire l'iperboloide $DO_1O_2\ldots O_6$; 2.° i luoghi delle rette che segano D e passano per un punto O, vale a dire i sei piani DO_1, $DO_2, \ldots$, DO_6.

Di qui segue che le ψ sono superficie gobbe di 5° grado, aventi in comune una retta quadrupla D' (corrispondente all' iperboloide $DO_1\ldots$) e sei generatrici G'_1, $G'_2, \ldots$, G'_6 (corrispondenti ai sei piani DO). La Jacobiana delle ψ consta de' sei piani $D'G'$, da contarsi due volte, e della superficie gobba di 4° grado $D'^3G'_1G'_2\ldots G'_6$, che è il luogo delle coniche appoggiate alle sette rette D', G'.

Rappresentiamo nello spazio (y) colle equazioni $I(y)=0$, $H_1(y)=0$, $H_2(y)=0$, $y_1-a_1y_2=0$. $y_1-a_2y_2=0$, $y_1-a_3y_2=0$, $y_1-a_4y_2=0$, $y_1=0$, $y_2=0$, $y_3=0$, $y_4=0$ l' iperboloide $DO_1O_2O_3O_4O_5O_6$, uno degl' iperboloidi $DO_2O_3O_4O_5O_6$, un'iperboloide $DO_1O_3O_4O_5O_6$, ed i piani DO_1, DO_2, DO_3, DO_4, DO_5, DO_6, $O_1O_2O_3$, $O_4O_5O_6$; e nello spazio (x) rappresentiamo colle equazioni $J(x)=0$, $M(x)=0$, $N(x)=0$, $x_1-a_1x_2=0$, $x_1-a_2x_2=0$, $x_1-a_3x_2=0$, $x_1-a_4x_2=0$, $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=0$ la superficie di 4° grado $D'^3G'_1G'_2G'_3G'_4G'_5G'_6$, l' iperboloide $D'G'_4G'_5G'_6$, l' iperboloide $D'G'_1G'_2G'_3$, i piani $D'G'_1$, $D'G'_2$,$D'G'_3$, $D'G'_4$, $D'G'_5$, $D'G'_6$, un piano per G'_1, ed un piano per G'_2; allora le formole (1), (4) per la trasformazione attuale saranno:

$$x_1:x_2:x_3:x_4=y_1I(y):y_2I(y):(y_1-a_1y_2)H_1(y):(y_1-a_2y_2)H_2(y),$$

$$y_1:y_2:y_3:y_4=x_1J(x):x_2J(x):(x_1-a_1x_2)(x_1-a_2x_2)(x_1-a_3x_2)M(x):$$
$$:(x_1-a_4x_2)x_1x_2N(x).$$

Le Jacobiane de' due spazi sono

$$I(y)(y_1-a_1y_2)\ (y_1-a_2y_2)\ (y_1-a_3y_2)\ (y_1-a_4y_2)\ y_1y_2=0,$$

$$J(x)(x_1-a_1x_2)^2(x_1-a_2x_2)^2(x_1-a_3x_2)^2(x_1-a_4x_2)^2x_1^2x_2^2=0.$$

41. Questa trasformazione dà la rappresentazione di una superficie ψ (gobba, di 5° grado, dotata di una retta quadrupla D') sul corrispondente piano β (*). Assumansi in questo piano: un punto d, come traccia di D; tre coniche I, H_1, H_2, come tracce degli iperboloidi $I(y)=0$, $H_1(y)=0$, $H_2(y)=0$; e quattro rette g_1, g_2, g_5, g_6 come tracce dei piani $y_1-a_1y_2=0$, $y_1-a_2y_2=0$, $y_1=0$, $y_2=0$. Queste rette saranno le imagini delle generatrici G'_1, G'_2, G'_5, G'_6; la conica I rappresenterà la retta quadrupla D'; e le coniche H_1, H_2 le sezioni fatte in ψ dai piani $x_3=0$, $x_4=0$. Le imagini delle sezioni piane di ψ saranno tutte le curve h di 3° ordine del sistema lineare, triplamente infinito, determinato dai quattro luoghi g_5I, g_6I, g_1H_1, g_2H_2. Siano $i_1i_2i_3i_4$, $i'_1i'_2i'_3i'_4$ i punti ne' quali la conica I è risp. segata dai due luoghi g_1H_1, g_2H_2; questi due gruppi di quattro punti individuano su I un' involuzione biquadratica; e qualunque curva h (imagine d'una sezione piana di ψ) segherà I in quattro punti (oltre a d) appartenenti ad uno stesso gruppo dell'involuzione. Ciascun gruppo dell' involuzione costituisce l'imagine di un punto della retta quadrupla D'. Un' involuzione biquadratica ha sei punti doppi; dunque D' ha sei punti cuspidali, vale a dire sei punti, in ciascuno de' quali due delle quattro generatrici ivi incrociate sono coincidenti.

Le rette per d sono le imagini delle generatrici rettilinee; ogni conica passante per d e per tre punti di uno stesso gruppo dell' involuzione rappresenta la curva di 4° ordine, che risulta dal segare ψ con un piano tangente; ed ogni retta tirata fra due punti di uno stesso gruppo è tangente ad una curva fissa di 3ª classe e rappresenta la curva di 3° ordine, comune a ψ e ad un piano bitangente. La superficie ψ contiene una sola conica, rappresentata dal punto d e situata eziandio nella superficie $J(x)=0$.

(*Continua.*)

(*) Cfr. Noether, l. c.

Sulle curve multiple di superficie algebriche

(*del Dr.* MAX NOETHER, *a Heidelberg.*)

Qui mi propongo di riunire alcune formole relative al sistema dei punti d'intersezione di tre superficie, che abbiano in comune una curva multipla, ed anche relative al numero delle condizioni che per una superficie sono assorbite da tali curve. Questi risultati sono qui presentati soltanto come estensioni o anche come esatte determinazioni di altri risultati già noti, dovuti principalmente al sig. CAYLEY (*); ma appunto per la precisione della loro forma, sembrano ora suscettivi di molteplici applicazioni a diversi rami della geometria. Alla fine di questi scritti, si troverà l'applicazione alle trasformazioni birazionali (*eindeutig*) nello spazio.

I. L'equivalenza di una curva multipla.

1. Nella *Geometry of three dimensions* di SALMON (**) si trova l'espressione del numero de'punti d'intersezione di tre superficie, assorbiti da una comune curva, che sia semplice per due superficie e doppia per la terza. Adoperando semplicemente, come già ha fatto il sig. CAYLEY (***), una ripetizione del processo ivi usato, si ottiene gradualmente l'espressione generale del numero di punti assorbiti da una curva, che sia multipla per ciascuna delle tre superficie. Questo numero si dirà l'*equivalenza* della curva.

(*) Vedi particolarmente le formole di *equivalence* e di *postulation* di CAYLEY nella sua Memoria *On the rational transformation between two spaces* (Proceedings of the London math. Society, vol. 3, 1870, p. 179).

(**) Pag. 280. Cfr. anche CREMONA, *Preliminari* n.° 97.

(***) *On reciprocal surfaces* (Phil. Transact. vol. 159, 1869, p. 221).

2. Sia m l'ordine della curva; r il rango della medesima, vale a dire l'ordine della sviluppabile formata dalle sue tangenti; e la curva abbia h punti doppi apparenti, k punti doppi effettivi; dove per ora intendo di escludere punti di più alta moltiplicità. Allora è

$$r = m(m-1) - 2h - 2k.$$

Le tre superficie F_1, F_2, F_3 siano rispettivamente d'ordine n_1, n_2, n_3, e per esse la curva C sia multipla secondo i_1, i_2, i_3. La curva sarà equivalente a

$$m[i_2 i_3 n_1 + i_3 i_1 n_2 + i_1 i_2 n_3] - 2 i_1 i_2 i_3 \left(m + \frac{r+2k}{2}\right)$$

punti d'intersezione delle tre superficie. Poi, la curva C incontra la curva residua d'intersezione delle due superficie F_1, F_2 in

$$m(i_2 n_1 + i_1 n_2) - 2 i_1 i_2 \left(m + \frac{r+2k}{2}\right)$$

punti.

3. Passo oltre a determinare il numero delle intersezioni assorbite da più curve multiple, che fra loro si seghino. A quest'uopo, cerco la riduzione che le equivalenze di due curve subiscono in conseguenza di un punto ad esse comune. Siccome questa riduzione non può dipendere che dalla configurazione delle due curve in prossimità del punto d'intersezione, così io la dedurrò dal caso semplicissimo che le due curve siano due rette segantisi G, G'.

La retta G sia multipla secondo i_1, i_2, i_3 per le tre superficie F_1, F_2, F_3; e i_1', i_2', i_3' siano i numeri analoghi per G'; e suppongasi $i_1 \geqq i_1'$, $i_2 \geqq i_2'$.

La curva residua d'intersezione delle due superficie F_1, F_2 ha allora con G

$$i_2 n_1 + i_1 n_2 - 2 i_1 i_2 - i_1' i_2'$$

e con G'

$$i_2' n_1 + i_1' n_2 - 2 i_1' i_2' - (i_1 i_2' + i_2 i_1' - i_1' i_2')$$

punti comuni e non passa più oltre pel punto GG'. Dall'intersezione di questa curva con F_3 segue pertanto che l'equivalenza del sistema delle due rette è

$$\begin{aligned}&(i_2 i_3 n_1 + i_3 i_1 n_2 + i_1 i_2 n_3) - 2 i_1 i_2 i_3 + \\ &+ (i_2' i_3' n_1 + i_3' i_1' n_2 + i_1' i_2' n_3) - 2 i_1' i_2' i_3' - \\ &- (i_2' i_3' i_1 + i_3' i_1' i_2 + i_1' i_2' i_3 - i_1' i_2' i_3').\end{aligned}$$

4. Le superficie F_1, F_2, F_3 abbiano ora in comune due curve C e C', la prima delle quali sia multipla secondo i numeri i_1, i_2, i_3, e l'altra secondo i numeri i_1', i_2', i_3'. Le equivalenze di queste due curve siano M, M'. Se C e C' si segano in s punti, l'equivalenza del loro sistema sarà

$$M+M'-s(i_2'i_3'i_1+i_3'i_1'i_2+i_1'i_2'i_3-i_1'i_2'i_3'),$$

dove si supponga che due dei numeri i_1, i_2, i_3 siano uguali o maggiori dei corrispondenti numeri i_1', i_2', i_3'.

E la curva residua d'intersezione di F_1, F_2 incontra C, ossia la curva (m, r, k), in

$$\left[m\,(i_2\,n_1+i_1\,n_2)-2i_1\,i_2\left(m+\frac{r+2k}{2}\right)\right]-i_1'i_2's \text{ (per } i_1\geqq i_1',\ i_2\gtreqless i_2'),$$

punti; incontra invece C', ossia la curva (m', r', k'), in

$$\left[m'(i_2'n_1+i_1'n_2)-2i_1'i_2'\left(m'+\frac{r'+2k'}{2}\right)\right]-(i_1i_2'+i_2i_1'-i_1'i_2')s$$

punti, se $i_1\geqq i_1'$, $i_2\geqq i_2'$, ed in

$$\left[m'(i_2'n_1+i_1'n_2)-2i_1'i_2'\left(m'+\frac{r'+2k'}{2}\right)\right]-i_1i_2s$$

punti, se $i_1\geqq i_1'$, $i_2\leqq i_2'$.

Qui osservo che la riduzione ora ottenuta dell'equivalenza $M+M'$ sussiste anche pei punti doppi effettivi di una curva, perchè il termine della formola al n.° 2, che contiene il fattore k, si può riguardare come esprimente la riduzione dovuta a tali punti; il che accadrà anche in seguito.

5. Trattisi ora il seguente caso generale.

Le superficie F_1, F_2, F_3 abbiano il punto comune P, multiplo rispettivamente secondo i numeri l_1, l_2, l_3, e le curve comuni C, C',..., delle quali la prima sia contenuta i_1, i_2, i_3 volte e passi con j rami per P, la seconda sia contenuta i_1', i_2', i_3' volte ed abbia j' rami passanti per P, ecc. Suppongasi poi che i coni osculatori alle superficie F in P non si decompongano, in virtù delle singolarità ammesse, in parti che siano comuni ai coni medesimi: il che involge un limite inferiore per le l_1, l_2, l_3.

La deduzione dell'equivalenza di un siffatto sistema può attuarsi ancora col metodo indicato nel n.° 3. A ciascun ramo delle curve C, C',... si sostituiscano rette dotate della corrispondente moltiplicità e uscenti da P; e si determini direttamente la riduzione dell'equivalenza di questo nuovo sistema. Io darò a dirittura il risultato della deduzione.

Il rango r di C è nel caso attuale

$$r = m(m-1) - 2h - 2k - j(j-1)$$

e come equivalenza M di C s'intenda la quantità

$$M = m(i_2 i_3 n_1 + i_3 i_1 n_2 + i_1 i_2 n_3) - 2 i_1 i_2 i_3 \left(m + \frac{r}{2}\right).$$

Analogo significato abbia M' per C', ecc. L'equivalenza

$$l_1 l_2 l_3 + M + M' + \cdots$$

del sistema $(P, C, C', \ldots)$ subisce la riduzione

$$-\sum_\rho \{ i_2^{(\rho)} i_3^{(\rho)} l_1 + i_3^{(\rho)} i_1^{(\rho)} l_2 + i_1^{(\rho)} i_2^{(\rho)} l_3 - 2 i_1^{(\rho)} i_2^{(\rho)} i_3^{(\rho)} \} j^{(\rho)}$$

dove la somma s'intende estesa alle diverse curve passanti per P.

La curva residua d'intersezione delle superficie F_1, F_2 incontra la curva C in

$$\left[m(i_2 n_1 + i_1 n_2) - 2 i_1 i_2 \left(m + \frac{r+2k}{2}\right)\right] - (i_2 l_1 + i_1 l_2 - 2 i_1 i_2) j$$

punti, oltre a P, e passa con

$$l_1 l_2 - \sum_\rho i_1^{(\rho)} i_2^{(\rho)} j^{(\rho)}.$$

rami pel punto P.

6. Se l'ipotesi fatta nel n.° 5 non è soddisfatta, come p. es. nel caso del n.° 4, tuttavia si raggiunge ancora lo scopo mediante considerazioni analoghe a quelle fatte nel n.° 3. Siccome la grande moltiplicità de' casi particolari non permette di giungere ad una formola generale, così io mi limito a riferire il seguente esempio.

Le tre superficie F siano d'ordine n e posseggano tre rette multiple secondo i e uscenti da un punto P. Il punto P deve allora essere multiplo per le F secondo $\frac{3i}{2}$ o secondo $\frac{3i+1}{2}$, secondochè i è pari o dispari. Se n è abbastanza grande, onde le F non abbiano a decomporsi, l'equivalenza del sistema sarà per i pari

$$(9ni^2 - 6i^3) - \tfrac{9}{2} i^3,$$

per i dispari

$$(9ni^2 - 6i^3) - (\tfrac{9}{2} i^3 - \tfrac{1}{2}),$$

e la curva residua d'intersezione di due F nel solo secondo caso passa con un ramo per P.

II. La postulazione di una curva multipla.

7. Denomino (insieme col sig. Cayley) postulazione di una curva C, rispetto ad una superficie F_n d'ordine n, il numero delle condizioni lineari che F_n dee soddisfare, affinchè per essa la curva C sia multipla secondo un numero i.

La postulazione di una curva che sia l'intersezione completa di due superficie si può determinare direttamente. Per una siffatta curva C, intersezione completa di due superficie P, Q rispettivamente d'ordine p, q, che si tocchino in k punti, l'ordine m e il rango r sono dati dalle formole

$$m = pq, \quad r + 2k = pq(p + q - 2).$$

L'equazione di una superficie F_n, che debba contenere C come curva i-pla è della forma

$$0 = F_n \equiv A_0 P^i + A_1 P^{i-1} Q + \cdots + A_i Q^i;$$

infatti, siccome F_n passa per la completa intersezione di P^i e Q, così F_n deve avere la forma (*)

$$F_n \equiv A_0 P^i + Q \cdot F_{n-q},$$

dove la superficie F_{n-q} contenga C come curva $(i-1)$-pla; perciò F_{n-q} avrà la forma

$$F_{n-q} \equiv A_1 P^{i-1} + Q \cdot F_{n-2q},$$

e così di seguito.

S'indichi con

$$(N - \rho Q)_{i-\varrho}$$

il numero delle costanti assorbite nella superficie $F_{n-\varrho q}$ dalla condizione che essa contenga C come curva $(i-\rho)$-pla; e inoltre si scriva per brevità

$$\tfrac{1}{6}(s+1)(s+2)(s+3) = [s].$$

Dalla formola

$$F_n \equiv A_0 P^i + F_{n-q} Q,$$

mediante un processo di numerazione già adoperato da Jacobi (**), si ottiene

$$\begin{aligned} N_i &= [n] \{-[n-ip] + [n-q] - (N-Q)_{i-1} - [n-ip-q]\} \\ &= ipqn - \tfrac{1}{2} ipq(ip + q - 4) + (N-Q)_{i-1} \end{aligned}$$

(*) Vedi p. es. Math. Annalen, t. 2, p. 314.
(**) G. Crelle, t 15, p. 285.

per $n \geqq ip+q-3$; e invece

$$N_i = ipqn - \tfrac{1}{2}ipq(ip+q-4) - [n-ip-q] + (N-Q)_{i-1}$$

per $n < ip+q-3$. Poste così le analoghe espressioni di

$$(N-Q)_{i-1}, \quad (N-2Q)_{i-2}, \ldots$$

e avuto riguardo alla

$$(N-iQ)_0 = 0,$$

si ottiene il risultato seguente.

Sia $p \geqq q$. Nel caso di $n \geqq ip+q-3$, il postulante di C ha il valore

$$N_i = \tfrac{1}{2}\frac{i(i+1)}{2\cdot 3}pq\{6n-(2i+1)(p+q)+12\}.$$

Ma, se

$$(i-\rho+1)p+\rho q-3 > n \leq (i-\rho)p+(\rho+1)q-3,$$

per ottenere la postulazione di C, bisogna all'espressione precedente di N_i aggiungere ancora la quantità positiva

$$-[n-ip-q]-[n-(i-1)p-2q]-\cdots-[n-(i-\rho+1)p-\rho q],$$

e la medesima quantità, per $\rho = i$, è da aggiungere quando in generale

$$n < p+iq-3.$$

L'espressione di N_i si può anche porre sotto la forma

$$N_i = \frac{i(i+1)}{2\cdot 3}\{3n-2i+5\}m - \tfrac{1}{2}\frac{i(i+1)(2i+1)}{2\cdot 3}(r+2k).$$

8. La ricerca della postulazione di una qualsivoglia curva C si ridurrà al caso di un'intersezione completa, completando C in modo da ottenere appunto l'intersezione completa di due superficie.

Se una curva K, d'ordine M e di rango R, si spezza in due curve C, C' che abbiano rispettivamente gli ordini m, m', e i ranghi r, r', dalla condizione che per tale spezzamento non si altera il numero dei punti doppi apparenti, si ottiene il numero s delle intersezioni delle due curve

$$s = \tfrac{1}{2}(R-r-r'),$$

ed inoltre è $M = m+m'$. La curva spezzantesi in C, C' ha la stessa postulazione come K.

Sia ora K la completa intersezione di due superficie d'ordine p, q. Se C e C' hanno inoltre k, k' punti doppi effettivi, la postulazione di K sarà (n.° 6):

$$\begin{aligned}
N'_i &= \tfrac{1}{6}i(i+1)(3n-2i+5)M - \tfrac{1}{12}i(i+1)(2i+1)(R+2k+2k') \\
&= \tfrac{1}{6}i(i+1)(3n-2i+5)m - \tfrac{1}{12}i(i+1)(2i+1)(r+2k) \\
&+ \tfrac{1}{6}i(i+1)(3n-2i+5)m' - \tfrac{1}{12}i(i+1)(2i+1)(r'+2k') \\
&- \tfrac{1}{6}i(i+1)(2i+1)s.
\end{aligned}$$

In questa formola i soli primi due termini dipendono dai numeri m ed $r+2k$ della curva C; mentre gli altri termini, secondo la scelta di p e q, possono ancora assumere una serie di valori differenti. Purchè adunque n sia convenientemente grande, — cioè, in primo luogo, così grande che, giusta il n.° 6, la formola per N_i' possa sussistere, e poi così grande ancora, che l'ultimo termine di questa formola rappresenti effettivamente la riduzione della postulazione dovuta alle s intersezioni di C e C', vale a dire che queste s intersezioni possano introdursi qui come indipendenti fra loro, — la quantità

$$N_i = \tfrac{1}{6}i(i+1)(3n-2i+5)m - \tfrac{1}{12}i(i+1)(2i+1)(r+2k)$$

esprimerà la postulazione per una qualsivoglia C. Pare che non si possano assegnare in generale le modificazioni per valori più piccoli di n.

9. Trattasi ora di nuovo di determinare la riduzione cui va soggetto la postulazione di un sistema di curve in virtù di punti multipli di questo sistema medesimo. A tale uopo procederò ancora in modo analogo al n.° 3.

Sostituisco cioè ai rami del sistema di curve che escono da un punto multiplo di una superficie F_n altrettante rette dotate delle corrispondenti moltiplicità. In questo caso la determinazione della riduzione, che è identica con quella del dato sistema di curve, conduce ad un problema piano.

L'equazione della superficie F_n sia

$$0 = F_n \equiv x_4^{n-l} f_l + x_4^{n-l-1} f_{l+1} + \cdots + f_n,$$

dove f_ρ è una funzione omogenea d'ordine ρ delle coordinate $x_1 x_2 x_3$. Se questa superficie dee possedere più rette multiple G_1, G_2,... uscenti dal punto l-plo P $(x_1 = x_2 = x_3 = 0)$, la medesima proprietà dee competere a tutti i coni

$$f_l = 0, \quad f_{l+1} = 0, \ldots, \quad f_n = 0,$$

vale a dire, le curve piane

$$f_l = 0, \quad f_{l+1} = 0, \ldots, \quad f_n = 0$$

debbono avere punti rispettivamente dotati delle stesse moltiplicità nelle intersezioni delle rette G_1, $G_2, \ldots$, col piano $x_4 = 0$.

Per tal modo, si ha a determinare il numero delle condizioni che sono assorbite da più punti multipli di una curva piana d'ordine ρ: numero il quale, se ρ non oltrepassa un certo limite, dipende da ρ medesimo. La somma di questi numeri, determinati per $f_1, \ldots, f_n$, più $\frac{1}{6}l(l+1)(l+2)$, è la postulazione del sistema di rette e del punto P, rispetto alla superficie F_n.

10. La postulazione

$$\frac{1}{2}\sum_\sigma i_\sigma(i_\sigma+1)$$

di un sistema di punti i-pli, che abbiano una giacitura generale, rispetto ad una curva piana f_ρ d'ordine ρ, patisce una riduzione tostochè f_ρ, in virtù dei punti multipli, debba decomporsi in parti, alcune delle quali siano da contarsi più volte. A cagion della supposta generale giacitura di questi punti, f_ρ non può che decomporsi in curve razionali. Per ogni curva razionale che entri come parte α-pla della curva f_ρ, la riduzione della postulazione ammonta a

$$-\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1).$$

Questo fatto si può riconoscere geometricamente. Infatti, si consideri un fascio di curve razionali; siccome i punti-base, a motivo della razionalità, non formano alcun speciale sistema di punti d'intersezione, così questi punti somministrano l'espressione generale per la postulazione rispetto ad un sistema di α curve del fascio. Se ci dev'essere inoltre un punto α-plo, cioè se le α curve del fascio debbono coincidere in una determinata, ciò richiede α condizioni soltanto, e la riduzione del numero delle condizioni ammonta a (*)

$$\frac{1}{2}\alpha(\alpha+1)-\alpha=\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1).$$

(*) Un'interessante conferma di questo teorema è offerta dal teorema delle trasformazioni piane del sig. CREMONA (Memorie dell'Accad. di Bologna, serie 2ª, t. 5; 1865). Le curve delle reti nei piani X, Y siano d'ordine n, le prime con α_i, le ultime con β_i punti i-pli fissi ($i=1, 2, \ldots n-1$). Allora dalle note equazioni della trasformazione si ricava la

$$\frac{1}{2}(n^2-1)(n^2+2)=\sum_i \frac{1}{2}ni(ni+1)\alpha_i-\sum_i \frac{1}{2}i(i-1)\beta_i.$$

Il primo membro di questa equazione è il numero delle costanti nell'equazione di una curva d'ordine n^2-1. Tale è quella che nel piano X corrisponde al sistema dei β_i punti di Y; per essa gli α punti fondamentali devono essere punti ni-pli, con che è completamente determinata. E siccome questa curva contiene come parte integrante i-pla la curva razionale corrispondente ad un punto fondamentale i-plo, così l'equazione precedente è in accordo col teorema suesposto.

Come applicazione, darò la postulazione P di tre punti multipli secondo i_1, i_2, i_3, rispetto ad una curva f_ϱ, che possa contenere come parte integrante una retta multipla. Sia $i_1 \geqq i_2 \geqq i_3$. Secondo la grandezza di ρ, sono a distinguersi cinque casi:

α) se $\rho \geqq i_1 + i_2 + 1$, si ha $(\sigma = 1, 2, 3)$

$$P = \sum_\sigma \tfrac{1}{2} i_\sigma (i_\sigma + 1);$$

β) se $i_1 + i_2 - 1 > \rho \geqq i_1 + i_3 - 1$, si ha

$$P = \sum_\sigma \tfrac{1}{2} i_\sigma (i_\sigma + 1) - \tfrac{1}{2}(i_1 + i_2 - \rho)(i_1 + i_2 - \rho - 1);$$

γ) se $i_1 + i_3 - 1 > \rho \geqq i_2 + i_3 - 1$, si ha

$$P = \sum_\sigma \tfrac{1}{2} i_\sigma (i_\sigma + 1) - \tfrac{1}{2}(i_1 + i_2 - \rho)(i_1 + i_2 - \rho - 1) - \tfrac{1}{2}(i_1 + i_3 - \rho)(i_1 + i_3 - \rho - 1),$$

δ) se $i_2 + i_3 - 1 > \rho \geqq \tfrac{1}{2}(i_2 + i_2 + i_3)$, si ha

$$P = \sum_\sigma \tfrac{1}{2} i_\sigma (i_\sigma + 1) - \tfrac{1}{2}(i_1 + i_2 - \rho)(i_1 + i_2 - \rho - 1) - \tfrac{1}{2}(i_1 + i_3 - \rho)(i_1 + i_3 - \rho - 1) - \\ - \tfrac{1}{2}(i_2 + i_3 - \rho)(i_2 + i_3 - \rho - 1),$$

e rimangono in questo caso, ancora

$$\tfrac{1}{2}(2\rho - i_1 - i_2 - i_3 + 1)(2\rho - i_1 - i_2 - i_3 + 2)$$

costanti nell'equazione omogenea della curva;

ε) se $\rho < \tfrac{1}{2}(i_1 + i_2 + i_3)$, si ha $P = \tfrac{1}{2}(\rho + 1)(\rho + 2)$,

perchè in questo caso non è più possibile alcuna curva f_ϱ.

11. Ora si dedurrà dai n.^{i} 9 e 10 la riduzione della postulazione di un sistema di curve, rispetto ad una superficie F_n, per i casi ordinari. Dapprima F_n possegga una curva i_1-pla, ed un'altra i_2-pla $(i_1 \geqq i_2)$, che si incontrino in un punto P; allora P è un punto i_1-plo della superficie. Sostituendo ai due rami delle curve in P due rette, la postulazione del nuovo sistema sarà

$$\tfrac{1}{6} i_1 (i_1 + 1)(i_1 + 2) + (n - i_1 + 1)\{\tfrac{1}{2} i_1 (i_1 + 1) + \tfrac{1}{2} i_2 (i_2 + 1)\} - \\ - \{\tfrac{1}{2} i_2 (i_2 - 1) + \tfrac{1}{2}(i_2 - 1)(i_2 - 2) + \cdots + 3 + 1\}$$
$$= \tfrac{1}{6} i_1 (i_1 + 1)(3n - 2i_1 + 5) + \tfrac{1}{6} i_2 (i_2 + 1)(3n - 2i_2 + 5) - \tfrac{1}{6} i_2 (i_2 + 1)(3i_1 - i_2 + 1),$$

supposto $n \geqq i_1 + i_2 - 2$; donde segue che il termine di riduzione della postulazione di due curve multiple secondo i_1, i_2 $(i_1 \geqq i_2)$, per ciascun punto d'intersezione delle medesime (ed anche, se $i_1 = i_2$, per un punto d'incrociamento di due rami d'una medesima curva, poichè il termine proveniente da un effettivo punto doppio può considerarsi come termine di riduzione dovuta ad esso punto) sarà

$$-\tfrac{1}{6}i_2(i_2+1)(3i_1-i_2+1).$$

Invece, se $n<i_1+i_2-2$, la postulazione deve ancora essere diminuita di

$$\tfrac{1}{6}(i_1+i_2-n)(i_1+i_2-n-1)(i_1+i_2-n-2),$$

perchè gli i_1+i_2-n-2 ultimi termini della prima formola del presente n.° in tal caso scompajono.

12. Se inoltre la superficie F_n contiene un punto l-plo P, e delle curve i-ple C (ordine m, rango r), che passino con j_i rami per P, supposto che l sia di tal grandezza che il cono osculatore in P ad F_n non abbia parti integranti ripetute più volte, la postulazione del sistema PC sarà pel n.° 9

$$\tfrac{1}{6}l(l+1)(l+2)+\sum_i \tfrac{1}{6}i(i+1)\{(3n-2i+5)m_i-\tfrac{1}{2}(2i+1)r_i\}-$$
$$-\sum_i \tfrac{1}{6}i(i+1)(3r-2i+2)j_i.$$

13. Per trattare ancora un esempio distinto di un caso nel quale il cono osculatore in P contenga parti coincidenti, suppongo che la superficie F_n possegga tre rette concorrenti in P, che siano rispettivamente multiple secondo i_1, i_2, i_3; e l'ordine della moltiplicità del punto P sia quello che è determinato mediante queste tre linee multiple. Allora sono da distinguersi due casi:

α) $i_1 \geqq i_2+i_3$. Il punto P è i_1-plo per F_n, ed il numero delle condizioni per questa superficie sarà:

$$\tfrac{1}{6}i_1(i_1+1)(i_1+2)+(n-i_1+1)\sum_\sigma \tfrac{1}{2}i_\sigma(i_\sigma+1)-$$
$$-\{\tfrac{1}{2}i_2(i_2-1)+\tfrac{1}{2}(i_2-1)(i_2-2)+\cdots+1\}-\{\tfrac{1}{2}i_3(i_3-1)+\tfrac{1}{2}(i_3-1)(i_3-2)+\cdots+1\}=$$
$$(*)=[i_1-1]+(n-i_1+1)\sum_\sigma \tfrac{1}{2}i_\sigma(i_\sigma+1)-[i_2-2]-[i_3-2]=$$
$$=\sum_\sigma \tfrac{1}{6}i_\sigma(i_\sigma+1)(3n-2i_\sigma+5)-\tfrac{1}{6}i_2(i_2+1)(3i_1-i_2+1)-$$
$$-\tfrac{1}{6}i_3(i_3+1)(3i_1-i_3+1),$$

precisamente come dal n.° 11.

β) $i_1<i_2+i_3$. Qui P dev'essere un punto l-plo, dove

$$l=\tfrac{1}{2}(i_1+i_2+i_3),\ \text{ovvero}\ =\tfrac{1}{2}(i_1+i_2+i_3+1),$$

(*) Qui si fa uso della notazione del n.° 7, cioè $[s]=\frac{1}{6}(s+1)(s+2)(s+3)$.

secondo che $i_1+i_2+i_3$ è pari o dispari. Siccome ora $i_2+i_3 \geq l > i_1$, così, giovandoci dell'esempio dato nel n.° 10, avremo pel numero delle condizioni

$$\frac{1}{6}l(l+1)(l+2)+(n-l+1)\sum_\sigma \frac{1}{2}i_\sigma(i_\sigma+1)-$$

$$-[i_2+i_3-l-2]-[i_3+i_1-l-2]-[i_1+i_2-l-2]=$$

$$=\sum_\sigma \frac{1}{6}i_\sigma(i_\sigma+1)(3n-2i_\sigma+5)-\sum_\sigma \frac{1}{6}i_\sigma(i_\sigma+1)(3l-2i_\sigma+2)+[l-1]-$$

$$-[i_2+i_3-l-2]-[i_3+i_1-l-2]-[i_1+i_2-l-2].$$

Se fosse $n < i_1+i_2-2$, queste formole per la postulazione subirebbero ancora una correzione positiva, che si può calcolare facilmente, in modo analogo alla chiusa del n.° 11.

Finalmente osservo ancora che il caso in cui la superficie F_n si decomponesse in più parti coincidenti dà luogo a nuove modificazioni nel valore della postulazione, le quali richiederebbero una speciale investigazione.

III. Il genere di una superficie.

14. Gli sviluppi del capitolo II ammettono una diretta applicazione alla ricerca del genere p di una superficie F_n: numero che rimane invariabile nelle trasformazioni univoche (*eindeutige Transformationen*). Infatti, il genere p di una superficie F_n d'ordine n, secondo una definizione data da me nei Mathematische Annalen (t. 2, p. 315), è uguale al numero delle superficie F_{n-4} d'ordine $n-4$, linearmente fra loro indipendenti che si possono far passare $i-1$ volte per ciascuna curva i-pla C_i di F_n, ed $l-2$ volte per ogni punto l-plo P_l della stessa F_n; ossia

$$p=\frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3)-R,$$

dove R è la postulazione del sistema composto delle curve $(i-1)$ple C_i e dei punti $(l-2)$pli P_l, rispetto ad una superficie F_{n-4}. Qui il valore R è da prendersi nello stesso senso come nel cap. II, cioè con riguardo alle modificazioni ch'esso subisce nel caso in cui $n-4$ non supera un certo limite.

15. È importante che la formola data superiormente per p può già servire come definizione del genere, cioè di un numero caratteristico, che debba mantenersi invariato nelle trasformazioni univoche, se si calcola la postulazione R senza riguardo alla grandezza di $n-4$, cioè, se per R si adoperano assolutamente le formole generali, che, secondo il cap. II, valgono

per n abbastanza grande. Quest'osservazione è stata fatta dal sig. CAYLEY (*); e il sig. ZEUTHEN, in un bel lavoro sulla trasformazione delle superficie (**) ha, sotto ipotesi assai generali e per via puramente geometrica, dimostrata l'invariabilità, nelle trasformazioni univoche, del numero così definito. Per $p > 0$ le due definizioni conducono allo stesso numero; ma, mentre verbigrazia pei coni la definizione del n.° 14 dà sempre $p = 0$, invece la seconda definizione somministra un numero che è uguale al genere, preso negativamente, di una sezione piana del cono. In seguito io mi servirò dell'ultima definizione, che è più espressiva.

IV. Applicazione alle trasformazioni univoche (birazionali) nello spazio.

16. Come complemento alle ricerche recentemente fatte dai sig.[i] CAYLEY e CREMONA e da me sulle trasformazioni birazionali nello spazio (***) esporrò qui un sistema di formole, alle quali devono soddisfare i numeri relativi alle superficie trasformanti, e le quali si deducono dalle considerazioni svolte nei capitoli I, II, III.

Affinchè un sistema di superficie ϕ d'ordine n, le quali debbano corrispondere univocamente (*eindeutig*) ai piani dello spazio X, possano formare un sistema trasformante nello spazio Y (un sistema omaloidico, secondo l'espressione del sig. CREMONA), debbono esse ϕ soddisfare a più condizioni:

a) le ϕ devono possedere tanti elementi comuni (curve e punti fondamentali) quanti occorrono perchè esse formino una serie triplamente infinita;

b) tre superficie qualsivogliano della serie devono in generale segarsi in un solo punto variabile;

c) le ϕ sono di genere $p = 0$, conformemente alla definizione del n.° 15.

Le formole per le prime due condizioni sono già state date (l. c.) dal sig. CAYLEY, sebbene in una forma un po' meno generale di quella che qui si verrà proponendo. Le formole risultanti dalle tre condizioni costituiscono un sistema chiuso, che è l'analogo di quello che il sig. CREMONA ha stabilito per le trasformazioni piane.

(*) Math. Annalen, t. 3, pag. 526.

(**) Math. Annalen, t. 4, pag. 42 [III].

(***) Veggasi la già citata Memoria di CAYLEY, e inoltre i lavori pubblicati contemporaneamente da CREMONA e da me, il primo nelle Götting. Nachrichten 1871, n.° 5, il mio nei Math. Annalen t. 3; come pure le ricerche ancor più generali di CREMONA nei Rendiconti dell'Istituto Lombardo, 4 maggio e 1 giugno 1871, e nel presente fascicolo degli Annali di Matematica.

In ciò che segue, io non tratterò che un caso generale. Le modificazioni delle formole nei casi speciali si dovranno dedurre per la via indicata superiormente.

17. Le superficie ϕ d'ordine n abbiano in comune le curve fondamentali i-ple C_i d'ordine m_i e di rango r_i; una curva C_i abbia k_{ii} punti doppi effettivi, e incontri in altri k_{ij} punti una curva C_j $(i \geqq j)$. Oltracciò, le ϕ abbiano ancora i punti fondamentali l-pli P_l, pei quali una curva C_i passi con j_{il} rami. Qui però io suppongo che il cono osculatore in un così fatto punto P_l non sia fisso, nè tutto nè in parte, per tutte le ϕ. Da ultimo le ϕ abbiano ancora dei punti di contatto dell'ordine $\sigma - 1$.

La condizione b) nel n.° 16 dà, giusta il cap. I, la seguente equazione d'equivalenza:

$$(1)\quad \begin{cases} n^3 - 1 = \sum\limits_i i^2 \{(3n-2i)m_i - ir_i\} - \sum\limits_{ij} i^2(3j-i)k_{ij} + \\ \qquad + \sum\limits_l l^3 - \sum\limits_{il} i^2(3l-2i)j_{il} + \sum\limits_\sigma \sigma^2. \end{cases} \qquad \text{per} \begin{cases} i \gtreqless j \\ i \gtreqless l. \end{cases}$$

La prima somma doppia $\sum\limits_{ij}$ dev'essere estesa a tutt'i punti d'intersezione delle curve fondamentali prese a due a due, eccettuati quelli che cadono nei P_l, e a tutt'i punti doppi effettivi di ciascuna curva C_i. La seconda somma doppia $\sum\limits_{il}$ dev'essere estesa dapprima a tutt'i rami delle curve C_i passanti per un punto P_l, indi a tutt'i diversi punti P_l.

In grazie del cap. II, la condizione a) dà la seguente equazione di postulazione:

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3) - 4 = \sum\limits_i \frac{1}{6} i(i+1)\{(3n-2i+5)m_i - \frac{1}{2}(2i+1)r_i\} - \\ \qquad - \sum\limits_{ij} \frac{1}{6} i(i+1)(3j-i+1)k_{ij} + \sum\limits_l \frac{1}{6} l(l+1)(l+2) - \\ \qquad - \sum\limits_{il} \frac{1}{6} i(i+1)(3l-2i+2)j_{il} + \sum\limits_\sigma \frac{1}{2}\sigma(\sigma+1); \end{cases}$$

e finalmente, pel cap. III, n.° 15, la condizione c) dà l'equazione del genere:

$$(3)\quad \begin{cases} \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3) = \sum\limits_i \frac{1}{6} i(i-1)\{(3n-2i-5)m_i - \frac{1}{2}(2i-1)r_i\} - \\ \qquad - \sum\limits_{ij} \frac{1}{6} i(i-1)(3j-i-1)k_{ij} + \sum\limits_l \frac{1}{6} l(l-1)(l-2) - \\ \qquad - \sum\limits_{il} \frac{1}{6} i(i-1)(3l-2i-2)j_{il}. \end{cases}$$

Da queste tre equazioni, con facile combinazione, si ricavano le seguenti:

$$(4)\quad \begin{cases} \frac{1}{6}(4n-3)(4n-2)(4n-1)-1=\sum\limits_i \frac{1}{6}4i(4i-1)\{(12n-8i-5)m_i-\frac{1}{2}(8i-1)r_i\}- \\ \qquad -\sum\limits_{ij}\frac{1}{6}4i(4i-1)(12j-4i-1)k_{ij}+\sum\limits_l \frac{1}{6}(4l-2)(4l-1)4l- \\ \qquad -\sum\limits_{il}4i(4i-1)(12l-8i-2)j_{il}+\sum\limits_\sigma \sigma(7\sigma-3), \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} 2(n^2-1)=\sum\limits_i i\{(n+i)m_i-\frac{1}{2}ir_i\}-\sum\limits_{ij} ijk_{ij}+ \\ \qquad +\sum\limits_l l^2-\sum\limits_{il} ilj_{il}+\sum\limits_\sigma \frac{1}{2}\sigma(\sigma+1), \end{cases}$$

$$(6)\quad 11(n-1)=\sum_i i(5m_i-\tfrac{1}{2}r_i)-\sum_{ij} ik_{ij}+\sum_l 2l-\sum_{il} 2ij_{il}+\sum_\sigma \tfrac{1}{2}\sigma(\sigma+3).$$

Affine di completare questo sistema di formole per le trasformazioni razionali nello spazio, si designino le analoghe quantità relative allo spazio X, colle stesse notazioni, come per lo spazio Y, ma coll'aggiunta di un accento. Allora per gli ordini n, n' delle superficie trasformanti ϕ, ψ degli spazi Y, X risp., si ha:

$$n'=n^2-\sum_i i^2 m_i, \quad n=n'^2-\sum_i i^2 m'_i,$$

e a cagione dell'uguaglianza del genere delle sezioni piane delle superficie trasformanti nei due spazi,

$$\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)-\sum_i \tfrac{1}{2}i(i-1)m_i=\tfrac{1}{2}(n'-1)(n'-2)-\sum_i \tfrac{1}{2}i(i-1)m'_i,$$

donde

$$4(n'-n)=\sum_i im'_i-\sum_i im_i.$$

18. Le due equazioni (4) e (5) si possono interpretare geometricamente. La (4) dice che la Jacobiana delle ϕ, superficie d'ordine $4n-4$, dotata di un punto $(4l-2)$plo P_l e di una curva $(4i-1)$pla C_i, è completamente determinata da queste condizioni; essa (4) è adunque l'equazione di postulazione per la Jacobiana delle ϕ. E merita d'essere notato che, in questo caso, le espressioni date nel cap. II pel postulante possono essere adoperate senza modificazioni, sebbene la Jacobiana in generale contenga delle parti multiple (coincidenti), quali sono le superficie che corrispondono ai punti fondamentali di X.

Invece della (5), considero l'equazione che col mezzo della

$$n'=n^2-\sum_i i^2 m,$$

se ne ricava, cioè

$$(5)' \quad \left\{ \begin{aligned} 4n' - 4 = \sum_i 2i\{(n-i)m_i - \tfrac{1}{2} i r_i\} - \sum_{ij} 2ij k_{ij} + \\ + \sum_l 2l^2 - \sum_{il} 2il j_{il} + \sum_\sigma \sigma(\sigma+1). \end{aligned} \right.$$

Le curve razionali S, intersezioni variabili delle superficie ϕ prese a due a due, sono d'ordine n'. Il secondo membro della $(5)'$ esprime il numero $4n'-4$ delle condizioni alle quali debbono soggiacere queste curve S, mentre esse hanno in comune colla C_i il numero di punti dato nei n.[i] 4 e 5, e passano per P_l col numero di rami ivi del pari assegnato. Infatti, una curva S incontra una curva C_i in

$$Q_i = 2i\{(n-i)m_i - \tfrac{1}{2} i r_i\} - \sum_h h^2 k_{hi} - \sum_j (2ij - i^2) k_{ij} - \sum_l (2il - 2i^2) j_{il}$$
$$(h < i, \quad j \geqq i)$$

punti (dove, per un punto doppio effettivo di C_i la somma $\sum_j$ deve estendersi ad entrambi i rami del nodo); passa inoltre con

$$R_l = l^2 - \sum_i i^2 j_{il}$$

rami per P_l, ed ha in un punto di contatto d'ordine $\sigma-1$, delle ϕ, un punto σ-plo assorbente $\sigma(\sigma+1)$ condizioni.

Inoltre $4n'-4$ è anche l'ordine della Jacobiana delle superficie trasformanti ψ dello spazio X; la formola $(5)'$ dà dunque l'ordine Q_i della superficie che in X corrisponde ad una curva C_i, e l'ordine R_l della superficie corrispondente ad un punto P_l: la quale ultima è contenuta due volte nella Jacobiana delle ψ. Dall'ultimo termine della formola $(5)'$ si conclude ancora che la superficie d'ordine σ corrispondente ad un punto di contatto, d'ordine $\sigma-1$, delle ϕ è contenuta $\sigma+1$ volte nella Jacobiana anzidetta (*).

Heidelberg, settembre 1871.

(*) Questa conclusione in modo analogo è già stata ottenuta dal sig. Cremona nella 2ª delle già citate Note dei Rend. Ist. Lomb.

Nota alla Memoria del sig. Beltrami, « Sugli spazii di curvatura costante »

(*del prof.* L. Schlaefli; *a Berna*).

Nel tomo 2.° della Serie seconda di questi Annali (pag. 232) il sig. Beltrami ha dimostrato, che nell'espressione dell'elemento lineare di uno spazio ad n dimensioni di curvatura costante, si ponno scegliere le n variabili indipendenti in modo che ogni linea geodetica dentro il detto spazio sia rappresentata da $n-1$ equazioni lineari fra le variabili indipendenti. E fu la lettura di questa interessante Memoria che m'indusse a propormi il problema inverso che segue:

Trovare la definizione di uno spazio, le cui linee geodetiche sono rappresentate ciascuna da un sistema di $n-1$ equazioni lineari, essendo n il numero delle variabili indipendenti nello spazio.

Dinotando con ds l'elemento lineare e con t_1, t_2,... t_n le variabili indipendenti, lo spazio cercato sia definito dall'espressione

$$ds^2 = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \overset{\lambda\mu}{A}\, dt_\lambda\, dt_\mu,$$

dove i coëfficienti $\overset{\lambda\mu}{A}$ sono da determinarsi in funzione delle variabili indipendenti t_1, t_2,... t_n. Quale funzione omogenea, intera, di secondo grado degli elementi variabili dt_1, dt_2,..., riguardati come indipendenti dalle t_1, t_2,... t_n che entrano nella formazione dei coefficienti A, questa espressione si dinoti con S, ed assumendo δ come segno di differenziazione per questo aspetto improprio, si abbia

$$\delta S = 2L_1\,\delta dt_1 + \cdots + 2L_n\,\delta dt_n + S_1\,\delta t_1 + \cdots + S_n\,\delta t_n.$$

Per la linea geodetica si hanno, come è noto, le condizioni

$$d\frac{L_\lambda}{ds} = \frac{1}{2}\frac{S_\lambda}{ds} \quad (\lambda = 1,\ 2, \ldots\ n),$$

le quali in virtù dell' identità

$$\sum \frac{d t_\lambda}{d s} d \frac{L_\lambda}{d s} = \tfrac{1}{2} \sum \frac{S_\lambda}{d s^2} d t_\lambda ,$$

contano soltanto per $n-1$ condizioni. Mettendo in evidenza i differenziali di second' ordine, esse diventano:

$$\sum_{m=1}^{m=n} \overset{\lambda m}{A}\, d^2 t_m + \sum_{m=1}^{m=n} d \overset{\lambda m}{A} \cdot d t_m - \tfrac{1}{2} S_\lambda = L_\lambda \cdot \frac{d^2 s}{d s} \quad (\lambda = 1,\ 2, \ldots\ n).$$

Il loro sistema consta in tal modo di n rapporti uguali, de' quali $\frac{d^2 s}{d s}$ è il valore comune da eliminarsi; e poichè è lecito suppor nullo uno dei differenziali di second' ordine, la condizione del problema può venire espressa dal sistema $d^2 t_1 = 0$, $d^2 t_2 = 0, \ldots$ $d^2 t_n = 0$, al quale deve equivalere quello degli n rapporti uguali anzidetti. Per conservare la simmetria giova conservare nel calcolo il valore comune degli n rapporti, ed anzi rappresentarlo con (*)

$$\overset{1}{p}\, d t_1 + \overset{2}{p}\, d t_2 + \cdots + \overset{n}{p}\, d t_n ,$$

dove le p dinotano n funzioni incognite, da determinarsi insieme colle altre $\frac{1}{2} n (n+1)$ incognite A.

Così la prima condizione, per es., prende la forma

$$\sum_\lambda \sum_\mu \left(\overset{1\mu}{A}_\lambda - \tfrac{1}{2} \overset{\lambda\mu}{A}_1 \right) d t_\lambda d t_\mu = \sum_\lambda \overset{1\lambda}{A}\, d t_\lambda \cdot \sum_\mu \overset{\mu}{p}\, d t_\mu ,$$

e ne segue la

$$\overset{1\mu}{A}_\lambda + \overset{1\lambda}{A}_\mu - \overset{\lambda\mu}{A}_1 = \overset{1\mu}{A} \overset{\lambda}{p} + \overset{1\lambda}{A} \overset{\mu}{p} , \tag{A}$$

dove λ, μ possono essere fra loro uguali o diversi. (L' indice inferiore, per

---

(*) Per giustificare questo passo osservo quanto segue. Dinotati che siano gli n rapporti con $\frac{M_1}{L_1}, \frac{M_2}{L_2}, \ldots,$ se in un punto P dello spazio e per un singolo gruppo di rapporti dei differenziali $d t_1$, $d t_2, \ldots$ svanissero tutte le L_1, $L_2, \ldots$ L_n, anche il determinante dei coefficienti A svanirebbe, ed il punto P sarebbe singolare, perchè intorno ad esso lo spazio non avrebbe al più che $n-1$ dimensioni. Rigettato dunque un tal caso, ogni gruppo $(d t_1 : d t_2 : \cdots : d t_n)$ che faccia svanire L_1 fa svanire anche M_1, epperò M_1 è divisible per L_1 ed il quoziente è lineare ed omogeneo rispetto ai differenziali.

es. λ, dinota una prima derivazione rispetto a t_λ.) Permutando gli indici 1 e λ, si ha

$$\overset{\lambda\mu}{A}_1 + \overset{1\lambda}{A}_\mu - \overset{1\mu}{A}_\lambda = \overset{\lambda\mu}{A}\overset{1}{p} + \overset{1\lambda}{A}\overset{\mu}{p};$$

laonde, sommando le due equazioni e dividendo il risultato per 2, si ottiene:

$$\overset{1\lambda}{A}_\mu = \overset{1\lambda}{A}\overset{\mu}{p} + \tfrac{1}{2}\overset{\lambda\mu}{A}\overset{1}{p} + \tfrac{1}{2}\overset{1\mu}{A}\overset{\lambda}{p}.$$

Scrivendo poi m, 1 invece di 1, μ, si ha

$$\overset{\lambda m}{A}_1 = \overset{\lambda m}{A}\overset{1}{p} + \tfrac{1}{2}\overset{1m}{A}\overset{\lambda}{p} + \tfrac{1}{2}\overset{1\lambda}{A}\overset{m}{p}.$$

Dinotando con $\overset{\lambda m}{a}$ quel primo minore del determinante $D=|\overset{\lambda m}{A}|$ (*), il quale corrisponde all'elemento $\overset{\lambda m}{A}$, moltiplicando la precedente equazione per $\overset{\lambda m}{a}$ e sommando per $m=1, 2, \ldots n$, si ottiene la

$$\sum_m \overset{\lambda m}{a}\overset{\lambda m}{A}_1 = D\overset{1}{p} + \tfrac{1}{2}\overset{1\lambda}{A}\sum_m \overset{\lambda m}{a}\overset{m}{p} + \tfrac{1}{2}\overset{\lambda}{p}\times\left\{\begin{matrix}0, \text{ se non è } \lambda=1,\\ D, \text{ se } \lambda=1.\end{matrix}\right\} \qquad (1)$$

D'altra parte, se μ è diverso da λ, la moltiplicazione per $\overset{\mu m}{a}$, seguíta dalla somma per m, dà

$$\sum_m \overset{\mu m}{a}\overset{\lambda m}{A}_1 = \tfrac{1}{2}\overset{1\lambda}{A}\sum_m \overset{\mu m}{a}\overset{m}{p} + \tfrac{1}{2}\overset{\lambda}{p}\times\left\{\begin{matrix}0, \text{ se non è } \mu=1,\\ D, \text{ se } \mu=1.\end{matrix}\right\} \qquad (2)$$

La (1) sommata per $\lambda=1, 2, \ldots n$ dà

$$D_1 = (n+1)D\overset{1}{p}, \qquad (a)$$

cioè $\sum_m \overset{\lambda m}{A}\overset{\lambda m}{a}_1 + \sum_m \overset{\lambda m}{a}\overset{\lambda m}{A}_1 = (n+1)D\overset{1}{p}$, e sottraendone la (1),

$$\left.\begin{aligned}&\sum_m \overset{\lambda m}{A}\overset{\lambda m}{a}_1 = nD\overset{1}{p} - \tfrac{1}{2}\overset{1\lambda}{A}\sum_m \overset{\lambda m}{a}\overset{m}{p}, \text{ se non è } \lambda=1,\\ &\sum_m \overset{1m}{A}\overset{1m}{a}_1 = (n-\tfrac{1}{2})D\overset{1}{p} - \tfrac{1}{2}\overset{11}{A}\sum_m \overset{1m}{a}\overset{m}{p}.\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

(*) Secondo la segnatura introdotta dal sig. KRONECKER.

Permutando nella (2) gli indici diseguali λ, μ, essa, mediante la

$$\sum_m \overset{\mu m}{A}\,\overset{\lambda m}{a}_1 + \sum_m \overset{\lambda m}{a}\,\overset{\mu m}{A}_1 = \frac{\partial}{\partial t_1}\sum_m \overset{\mu m}{A}\,\overset{\lambda m}{a} = 0,$$

si cambia nelle

$$\left.\begin{aligned} &\sum_m \overset{\mu m}{A}\,\overset{\lambda m}{a}_1 = -\tfrac{1}{2}\overset{1\mu}{A}\sum_m \overset{\lambda m m}{a\,p} \quad \text{(se } \lambda \text{ è diverso da } 1 \text{ e da } \mu\text{)},\\ &\sum_m \overset{\mu m}{A}\,\overset{1 m}{a}_1 = -\tfrac{1}{2}D\overset{\mu}{p} - \tfrac{1}{2}\overset{1\mu}{A}\sum_m \overset{1 m m}{a\,p}, \quad \text{se non è } \mu = 1. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Moltiplicando la (3) per $\overset{\lambda r}{a}$, la (4) per $\overset{\mu r}{a}$, sommando i prodotti per $\mu = 1, 2, \ldots n$ [compresovi $\mu = \lambda$ in virtù della (3)] e dividendo per D, si ottengono, a seconda dei diversi casi, le seguenti equazioni differenziali:

$$\overset{11}{a}_1 = n\overset{111}{a\,p} - \sum_m \overset{1 m m}{a\,p},$$

$$\overset{1\lambda}{a}_1 = n\overset{1\lambda 1}{a\,p} - \tfrac{1}{2}\sum_m \overset{\lambda m m}{a\,p}, \quad \text{se non è } \lambda = 1,$$

$$\overset{\lambda r}{a}_1 = n\overset{\lambda r 1}{a\,p}, \quad \text{se nè } \lambda \text{ nè } r \text{ è } = 1.$$

Mercè l'equazione (a) queste ultime equazioni, moltiplicate per $D^{-\frac{n}{n+1}}$, diventano:

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\left(D^{-\frac{n}{n+1}}\overset{11}{a}\right) = -D^{-\frac{n}{n+1}}\sum_m \overset{1 m m}{a\,p}, \tag{b}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\left(D^{-\frac{n}{n+1}}\overset{1\lambda}{a}\right) = -\tfrac{1}{2}D^{-\frac{n}{n+1}}\sum_m \overset{\lambda m m}{a\,p}, \quad \text{se non è } \lambda = 1, \tag{c}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\left(D^{-\frac{n}{n+1}}\overset{\lambda\mu}{a}\right) = 0, \quad \text{se nè } \lambda \text{ nè } \mu \text{ è } = 1. \tag{d}$$

Dopo aver permutati gli indici 1, λ nella (c), il confronto colla (b) somministra la

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\left(D^{-\frac{n}{n+1}}\overset{11}{a}\right) = 2\frac{\partial}{\partial t_\lambda}\left(D^{-\frac{n}{n+1}}\overset{1\lambda}{a}\right). \tag{e}$$

Dalla (d) si conclude che $D^{-\frac{n}{n+1}}\overset{11}{a}$ è funzione della sola t_1, e che $D^{-\frac{n}{n+1}}\overset{12}{a}$

non dipende che dalle due t_1, t_2. Oltre a ciò la (e), differenziata rispetto a t_1, c'insegna che

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\left(D^{-\frac{n}{n+1}}\overset{11}{a}\right)=2\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_\lambda}\left(D^{-\frac{n}{n+1}}\overset{1\lambda}{a}\right);$$

epperò anche

$$\frac{\partial^2}{\partial t_\lambda^2}\left(D^{-\frac{n}{n+1}}\overset{\lambda\lambda}{a}\right)=2\frac{\partial^2}{\partial t_\lambda \partial t_\mu}\left(D^{-\frac{n}{n+1}}\overset{\lambda\mu}{a}\right),$$

se non è $\lambda=\mu$. Tutte queste derivate seconde hanno quindi un valore comune, sia 2α, il quale, per quanto si è detto dianzi, non può essere altro che una costante.

Integrando le due equazioni di second'ordine

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\left(D^{-\frac{n}{n+1}}\overset{11}{a}\right)=2\alpha,\quad \frac{\partial^2}{\partial t_2^2}\left(D^{-\frac{n}{n+1}}\overset{22}{a}\right)=2\alpha,$$

si abbia

$$D^{-\frac{n}{n+1}}\overset{11}{a}=\alpha t_1^2-2\beta_1 t_1+\gamma_{11},\quad D^{-\frac{n}{n+1}}\overset{22}{a}=\alpha t_2^2-2\beta_2 t_2+\gamma_{22},$$

dove per β_1, β_2, γ_{11}, γ_{22} s'intendono costanti arbitrarie. Dalle (e) poi si ricava la

$$d\left(D^{-\frac{n}{n+1}}\overset{12}{a}\right)=\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t_2}\left(D^{-\frac{n}{n+1}}\overset{22}{a}\right)dt_1+\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t_1}\left(D^{-\frac{n}{n+1}}\overset{11}{a}\right)dt_2$$

epperò $=(\alpha t_2-\beta_2)\,dt_1+(\alpha t_1-\beta_1)\,dt_2$, ed integrando

$$D^{-\frac{n}{n+1}}\overset{12}{a}=\alpha t_1 t_2-\beta_2 t_1-\beta_1 t_2+\gamma_{12}$$

colla nuova costante arbitraria γ_{12}. Le altre quantità a si deducono da queste applicando i relativi indici, e si avranno così in tutto $\frac{1}{2}n(n+3)$ costanti d'integrazione, le β_1, β_2,... β_n e le $\frac{1}{2}n(n+1)$ costanti $\gamma_{\lambda\mu}=\gamma_{\mu\lambda}$, dunque tante quante sono le funzioni incognite, cioè le p_1, p_2,... p_n e le $\overset{11}{A}$, $\overset{12}{A}$,... Il numero però delle equazioni originarie (A) sembra a prima giunta essere $\frac{1}{2}n^2(n+1)$; quindi bisognerà ancora verificare le (A), tostochè si siano trovati i valori dei coefficienti $\overset{\lambda\mu}{A}$, per escludere qualunque dubbio che il problema sia più che determinato.

Ora formiamo il determinante simmetrico

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 \cdot 1 & \cdot t_1 & \cdot t_2 & \cdots t_n \\ 1 \cdot \alpha & \cdot \beta_1 & \cdot \beta_2 & \cdots \beta_n \\ t_1 \cdot \beta_1 & \cdot \gamma_{11} & \cdot \gamma_{12} & \cdots \gamma_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_n \cdot \beta_n & \cdot \gamma_{n1} & \cdot \gamma_{n2} & \cdots \gamma_{nn} \end{vmatrix};$$

facendo uso delle cosidette ombre del sig. Sylvester, attribuiamo le ombre superiori alle linee, le inferiori alle colonne dello schema di Δ, dinotandole in entrambe le serie con $*012\ldots n$ e mettendo le due righe di ombre fra le parentesi ( ), cosicchè per es. $\begin{pmatrix} *\,0\,\lambda \\ *\,0\,\mu \end{pmatrix}$ significherà il determinante

$$\begin{vmatrix} 0 \cdot 1 & \cdot t_\mu \\ 1 \cdot \alpha & \cdot \beta_\mu \\ t_\lambda \cdot \beta_\lambda & \cdot \gamma_{\lambda\mu} \end{vmatrix} = -\alpha t_\lambda t_\mu + \beta_\mu t_\lambda + \beta_\lambda t_\mu - \gamma_{\lambda\mu},$$

e si avrà quindi

$$D^{-\frac{n}{n+1}} \overset{\lambda\mu}{a} = -\begin{pmatrix} *\,0\,\lambda \\ *\,0\,\mu \end{pmatrix}.$$

Il determinante formato da tutte le espressioni simili a quella del primo membro della presente equazione ha per valore

$$D^{-\frac{nn}{n+1}} \cdot \left|\overset{\lambda\mu}{a}\right| = D^{-\frac{nn}{n+1}} \cdot D^{n-1} = D^{-\frac{1}{n+1}},$$

mentre le espressioni simili a quella del secondo membro danno origine ad un altro determinante avente per valore $(-1)^n \begin{pmatrix} *\,0 \\ *\,0 \end{pmatrix}^{n-1} \Delta = -\Delta$. Dal paragone consegue la

$$D^{-\frac{1}{n+1}} = -\Delta, \tag{f}$$

e quindi la

$$\begin{pmatrix} *\,0\,\lambda \\ *\,0\,\mu \end{pmatrix} = (-1)^{n-1} \Delta^n \overset{\lambda\mu}{a} \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 1,\ 2, \ldots\ n \\ \mu = 1,\ 2,\ ..\ n \end{pmatrix}.$$

Con tutte le espressioni simili a quelle che costituiscono i due membri di quest'equazione, si formino di nuovo due determinanti, e di ciascun d'essi si prenda quel minore che corrisponde all'elemento d'indice λ, μ. Il determinante formato colle espressioni simili a quella del primo membro avrà per valore

$$\begin{pmatrix} * & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}^{n-2} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = (-1)^n \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix},$$

dove per $\begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix}$ s'intende quel minore del determinante Δ, che corrisponde all'elemento $\gamma_{\lambda\mu}$; ed il determinante formato coi secondi membri avrà il valore

$$[(-1)^{n-1}\Delta^n]^{n-1} D^{n-2} \overset{\lambda\mu}{A} = (-1)^{n-1} \Delta^2 \overset{\lambda\mu}{A}.$$

Eguagliando i due valori, si trova

$$\overset{\lambda\mu}{A} = -\Delta^{-2} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix}. \tag{g}$$

Quest'espressione di $\overset{\lambda\mu}{A}$ è certamente una conseguenza necessaria delle condizioni (A); ma, come già avvertimmo, bisogna vedere s'essa le verifichi tutte.

In virtù della (f), la (a) assume la forma

$$\overset{1}{p} = -\frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{2}{\Delta} \begin{bmatrix} * \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ ecc.},$$

e la (g), differenziata rispetto a t_1, dà

$$\overset{\lambda\mu}{A_1} = 2\Delta^{-3} \cdot 2 \begin{bmatrix} * \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} - \Delta^{-2} \left(\begin{bmatrix} * & \lambda \\ 1 & \mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} * & \mu \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \right),$$

donde, avendo riguardo alle

$$\begin{bmatrix} * \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} * \\ \mu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} = \Delta \begin{bmatrix} * & \lambda \\ 1 & \mu \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} * \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mu \\ \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} * \\ \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mu \\ 1 \end{bmatrix} = \Delta \begin{bmatrix} * & \mu \\ 1 & \lambda \end{bmatrix},$$

si deduce

$$\begin{aligned} \overset{\lambda\mu}{A_1} &= \Delta^{-3} \left(2 \begin{bmatrix} * \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} * \\ \mu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} * \\ \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \mu \end{bmatrix} \right) \\ &= \overset{\lambda\mu}{A}\overset{1}{p} + \tfrac{1}{2}\overset{1\lambda}{A}\overset{\mu}{p} + \tfrac{1}{2}\overset{1\mu}{A}\overset{\lambda}{p}, \end{aligned}$$

d'accordo colla forma originaria (A) di tutte le condizioni. Il problema dunque è possibile, la (g) ne rappresenta la sola soluzione generale, e la formola definitrice dello spazio considerato, stante la forma (g) dei coefficienti $\overset{\lambda\mu}{A}$, si può scrivere così:

$$ds^2 = \frac{1}{\Delta^2} \begin{vmatrix} 0 \cdot 0 & \cdot 1 & \cdot t_1 & \cdot t_2 & \cdot t_3 & \cdots t_n \\ 0 \cdot 0 & \cdot 0 & \cdot dt_1 & \cdot dt_2 & \cdot dt_3 & \cdots dt_n \\ 1 \cdot 0 & \cdot \alpha & \cdot \beta_1 & \cdot \beta_2 & \cdot \beta_3 & \cdots \beta_n \\ t_1 \cdot dt_1 & \cdot \beta_1 & \cdot \gamma_{11} & \cdot \gamma_{12} & \cdot \gamma_{13} & \cdots \gamma_{1n} \\ t_2 \cdot dt_2 & \cdot \beta_2 & \cdot \gamma_{21} & \cdot \gamma_{22} & \cdot \gamma_{23} & \cdots \gamma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_n \cdot dt_n & \cdot \beta_n & \cdot \gamma_{n1} & \cdot \gamma_{n2} & \cdot \gamma_{n3} & \cdots \gamma_{nn} \end{vmatrix}.$$

Siccome la forma lineare delle equazioni d'una linea geodetica non viene alterata da una trasformazione lineare delle variabili indipendenti, potremo disporre degli n^2 rapporti di costanti, contenuti nella trasformazione, in guisa da fare svanire nello schema del Δ tutti gli $\frac{1}{2}n(n+1)$ elementi costanti non-principali e da portare la nuova origine in un punto anticipatamente fissato. Ma poichè $\frac{1}{2}n(n-1)$ delle $\frac{1}{2}n(n+3)$ equazioni di condizione sono di secondo grado, non è forse fuor di luogo dimostrare che tal risultato si può ottenere con una trasformazione reale, purchè siano reali anche le $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ costanti date α, β, γ e l'intorno del punto prescelto per nuova origine.

Si concepisca lo schema del determinante Δ come rappresentativo di una sostituzione, e questa s'immagini preceduta dalla sostituzione

$$\begin{vmatrix} 1 \cdot 0 & \cdot 0 & \cdot 0 & \cdots 0 \\ 0 \cdot 1 & \cdot 0 & \cdot 0 & \cdots 0 \\ 0 \cdot \binom{1}{0} & \cdot \binom{1}{1} & \cdot \binom{1}{2} & \cdots \binom{1}{n} \\ 0 \cdot \binom{2}{0} & \cdot \binom{2}{1} & \cdot \binom{2}{2} & \cdots \binom{2}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \cdot \binom{n}{0} & \cdot \binom{n}{1} & \cdot \binom{n}{2} & \cdots \binom{n}{n} \end{vmatrix}$$

avente 1 per modulo, e seguíta dalla sostituzione proveniente dal volgere questo schema intorno alla sua diagonale principale, ed ora pongasi

$$\begin{aligned}
&\binom{\lambda}{0} \quad + \binom{\lambda}{1} t_1 \ + \binom{\lambda}{2} t_2 \ + \cdots + \binom{\lambda}{n} t_n \ = \overset{\lambda}{u},\\
&\binom{\lambda}{0}\alpha \ + \binom{\lambda}{1}\beta_1 + \binom{\lambda}{2}\beta_2 + \cdots + \binom{\lambda}{n}\beta_n = \overset{\lambda}{b},\\
&\binom{\lambda}{0}\beta_m + \binom{\lambda}{1}\gamma_{m1} + \binom{\lambda}{2}\gamma_{m2} + \cdots + \binom{\lambda}{n}\gamma_{mm} = \overset{\lambda}{h}_m,\\
&\binom{\mu}{0}\overset{\lambda}{b} \ + \binom{\mu}{1}\overset{\lambda}{h}_1 + \binom{\mu}{2}\overset{\lambda}{h}_2 + \cdots + \binom{\mu}{n}\overset{\lambda}{h}_n = \overset{\lambda\mu}{c};
\end{aligned}$$

sarà $\overset{\lambda\mu}{c} = \overset{\mu\lambda}{c}$, ed il determinante della sostituzione composta non cambierà, nè di valore, giacchè le sostituzioni prima ed ultima hanno 1 per modulo, nè di forma, poichè basta scrivere $\overset{\lambda}{u}$, $\overset{\lambda}{b}$, $\overset{\lambda\mu}{c}$ rispettivamente al posto di t_λ, β_λ, $\gamma_{\lambda\mu}$. Questa trasformazione, sebbene non sia la più generale, basta però pel proposto problema, il quale per $n=2$ è lo stesso che, dato un piano reale ed una superficie reale di secondo grado, assegnare alla sezione una coppia di diametri conjugati. Giova risolverlo parzialmente e per gradi, anzichè tutto ad un tratto.

1.° È facile trovare $n(n+1)$ elementi reali $\binom{\lambda}{\mu}$ tali, che nella nuova origine svaniscano $\overset{1}{u}$, $\overset{2}{u}$,... $\overset{n}{u}$, e che svaniscano del pari tutte le b, mentre $\binom{12\ldots n}{12\ldots n}=1$. Gli $n+1$ elementi $\binom{\lambda}{0}$, $\binom{\lambda}{1}$,... $\binom{\lambda}{n}$ di una stessa linea hanno soltanto da soddisfare alle due condizioni lineari ed omogenee $\overset{\lambda}{u}=0$, $\overset{\lambda}{b}=0$, e soddisfatte tutte queste $2n$ condizioni con $n(n+1)$ elementi, se risulti M come modulo della sostituzione, basterà dividere una linea per M, per ridurre il modulo al valore prescritto 1. Consideriamo ora questo stato di cose, come se fosse l'originario; per mantenerlo fermo basterà supporre nulli gli elementi $\binom{1}{0}$, $\binom{2}{0}$,... $\binom{n}{0}$. Così l'origine rimarrà la stessa, e le β_1, β_2,... β_n saranno annullate.

2.° Per annullare tutte le $\overset{12}{c}$, $\overset{13}{c}$,... $\overset{1n}{c}$, formisi la linea $\binom{1}{1}$, $\binom{1}{2}$,... $\binom{1}{n}$ con elementi reali scelti ad arbitrio, ma non tutti uguali a zero. In tal modo le $\overset{1}{h}_1$, $\overset{1}{h}_2$,... $\overset{1}{h}_n$ vengono tutte determinate in modo reale, e ciascuna delle

$n-1$ linee rimanenti avrà da soddisfare ad una sola condizione lineare ed omogenea, il che si può far in modo reale. Questo stato di cose si supponga già realizzato nello schema originario di Δ; affinchè esso si mantenga fermo in tutte le susseguenti trasformazioni, basterà supporre nulli gli elementi $\binom{1}{2}, \binom{1}{3}, \ldots \binom{1}{n}; \binom{2}{1}, \binom{3}{1}, \ldots \binom{n}{1}$.

3.º Si progredisca ora a far svanire $\overset{23}{c}, \overset{24}{c}, \ldots \overset{2n}{c}$. Prendasi per esempio $\binom{2}{2}=1, \binom{2}{3}=0, \binom{2}{4}=0, \ldots \binom{2}{n}=0$, e sarà

$$\overset{22}{c}=\gamma_{22}, \quad \overset{2\mu}{c}=\gamma_{22}\binom{\mu}{2}+\gamma_{23}\binom{\mu}{3}+\cdots+\gamma_{2n}\binom{\mu}{n}, \quad (\mu=3, 4, \ldots n):$$

dunque si potranno assegnare $n-2$ linee reali, in modo da far risultare $\overset{2\mu}{c}=0$. Supponendo nulli fin dal principio gli elementi $\binom{2}{3}, \binom{2}{4}, \ldots \binom{2}{n}$; $\binom{3}{2}, \binom{4}{2}, \ldots \binom{n}{2}$, le quantità analoghe a $\gamma_{23}, \gamma_{24}, \ldots \gamma_{2n}$ si conserveranno nulle anche dopo. Così proseguendo, è chiaro che finalmente tutte le costanti non-principali saranno scomparse dallo schema del Δ, mentre la nuova origine avrà la posizione prescelta.

Dunque, senza punto derogare alla generalità dello spazio considerato, possiamo porre

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 1 & t_1 & t_2 & \cdots & t_n \\ 1 & \alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ t_1 & 0 & \gamma_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma_{nn} \end{vmatrix} = -\alpha\gamma_{11}\gamma_{22}\cdots\gamma_{nn}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{t_1^2}{\gamma_{11}}+\frac{t_2^2}{\gamma_{22}}+\cdots+\frac{t_n^2}{\gamma_{nn}}\right),$$

$$ds^2=\frac{\alpha\gamma_{11}\gamma_{22}\cdots\gamma_{nn}}{\Delta^2}\left(\sum_m \frac{dt_m^2}{\alpha\gamma_{mm}}+\sum_{\lambda,\mu}\frac{(t_\lambda dt_\mu-t_\mu dt_\lambda)^2}{\gamma_{\lambda\lambda}\gamma_{\mu\mu}}\right).$$

Prima di passare ad ulteriori semplificazioni di questa formola definitrice, conviene ricercare le condizioni della sua realità nell'intorno dell'origine ($t_1=0,\ t_2=0, \ldots\ t_n=0$). Per brevità pongasi

$$C=\gamma_{11}\gamma_{22}\cdots\gamma_{nn}, \quad T=1+\alpha\left(\frac{t_1^2}{\gamma_{11}}+\frac{t_2^2}{\gamma_{22}}+\cdots+\frac{t_n^2}{\gamma_{nn}}\right),$$

e si avrà:

$$\Delta = -CT, \quad ds^2 = \frac{1}{CT^2}\left(\sum_m \frac{dt^2_m}{\gamma_{mm}} + \alpha \sum_{\lambda,\mu} \frac{(t_\lambda dt_\mu - t_\mu dt_\lambda)^2}{\gamma_{\lambda\lambda}\gamma_{\mu\mu}}\right),$$

epperò nell'origine $ds^2 = \sum_m \frac{dt^2_m}{C\gamma_{mm}}$. La realtà dunque dell'intorno di questo punto richiede che tutte le costanti $\gamma_{11}, \gamma_{22}, \dots \gamma_{nn}$ siano positive o negative, secondochè il loro prodotto C è positivo o negativo. Se n è pari, ne consegue, che tutte le $\gamma_{11}, \gamma_{22}, \dots \gamma_{nn}$ devono essere positive; se n è impari, o tutte sono positive, o tutte sono negative. Ma nell' ultimo caso l'espressione per ds^2 rimane la stessa se alle $\alpha, \gamma_{11}, \dots \gamma_{nn}$ si sostituiscano le $-\alpha, -\gamma_{11}, \dots -\gamma_{nn}$: possiamo quindi supporre positive le $\gamma_{11}, \gamma_{22}, \dots \gamma_{nn}$, e possiamo anche scrivere semplicemente $t_1, t_2, \dots t_n$ invece di $\frac{t_1}{\sqrt{\gamma_{11}}}, \frac{t_2}{\sqrt{\gamma_{22}}}, \dots \frac{t_n}{\sqrt{\gamma_{nn}}}$ (poichè tale sostituzione è reale). Inoltre, essendo C positivo, anche la c determinata da $C = \frac{1}{c^2}$ è reale, epperò si ha

$$T = 1 + \alpha \sum_m t^2_m, \quad ds^2 = \frac{c^2}{T^2}\left[\sum_m dt^2_m + \alpha \sum_{\lambda,\mu} (t_\lambda dt_\mu - t_\mu dt_\lambda)^2\right];$$

donde $\overset{\lambda\lambda}{A} = \frac{c^2}{T^2}(T - \alpha t^2_\lambda)$, $\overset{\lambda\mu}{A} = -\frac{c^2 \alpha t_\lambda t_\mu}{T^2}$. Dinotando il minore principale $\sum \pm \overset{11}{A}\overset{22}{A} \dots \overset{mm}{A}$ del determinante $|\overset{\lambda\mu}{A}|$ con M_m, si ha

$$M_m = \frac{c^{2m}}{T^{m+1}}\left[T - \alpha(t_1^2 + t_2^2 + \dots + t^2_m)\right].$$

Supposte sempre reali le coordinate $t_1, t_2, \dots t_n$, da ciò si vede che lo spazio in considerazione continua ad essere reale fino a tanto che T rimanga positivo. Imperocchè le diseguaglianze $M_1 > 0$, $M_2 > 0, \dots M_n > 0$ sono le condizioni necessarie e sufficienti perchè ds^2 rimanga positivo, comunque variino i rapporti dei differenziali $dt_1, dt_2, \dots dt_n$. Ne consegue che, se α è nullo o positivo, le $t_1, t_2, \dots t_n$ non hanno limiti; mentre che, se α è negativo, esse non possono variare che entro il campo limitato dalla condizione $t_1^2 + t_2^2 + \dots + t^2_n < -\frac{1}{\alpha}$. Quindi tre casi sono da distinguersi, secondochè la costante α è nulla, positiva, o negativa.

1.° $\alpha = 0$. Scrivendo t_m invece di ct_m, si ha

$$ds^2 = dt_1^2 + dt_2^2 + \dots + dt^2_n,$$

epperò una completa analogia coi casi del piano e dello spazio.

2.° $\alpha > 0$. Compendiando $\frac{c}{\sqrt{\alpha}}$, $\sqrt{\alpha}\cdot t_m$ in a, t_m, si ha

$$T = 1 + t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t^2_n \text{ (sia } = t^2),$$

$$ds^2 = \frac{a^2}{t^4}[dt_1^2 + \cdots + (t_1 dt_2 - t_2 dt_1)^2 + \cdots] = \frac{a^2}{t^4}[(t^2 - t_1^2)dt_1^2 + \cdots - 2t_1 t_2 dt_1 dt_2 \ldots]$$

$$= \frac{a^2}{t^4}[t^2(dt_1^2 + \cdots + dt^2_n) - (t_1 dt_1 + \cdots + t_n dt_n)^2],$$

epperò

$$ds^2 = \frac{a^2}{t^2}(dt_1^2 + dt_2^2 + \cdots + dt^2_n - dt^2).$$

Questa formola definitrice può essere rappresentata dalla

$$ds^2 = dx^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots dx^2_n,$$

ponendo $x = \frac{a}{t}$, $x_1 = a\frac{t_1}{t}, \cdots$ $x_n = a\frac{t_n}{t}$, donde consegue anche la

$$x^2 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x^2_n = a^2.$$

Dentro la totalità rettilinea e rettangolare dei gruppi di valori delle $n+1$ coordinate $x, x_1, \ldots x_n$, lo spazio del secondo caso può quindi esser considerato come il luogo rappresentato dall'equazione

$$x^2 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x^2_n = a^2,$$

cioè, per così dire, come una $(n+1)$-sfera di raggio a, se fosse lecito chiamare disfera una circonferenza, e trisfera una sfera.

3.° $\alpha < 0$. Compendiando $\frac{c}{\sqrt{-\alpha}}$, $\sqrt{-\alpha}\,t_m$ in a, t_m abbiamo

$$T = 1 - (t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t^2_n) \text{ (pongasi } = t^2),$$

$$ds^2 = \frac{a^2}{t^2}(dt^2 + dt_1^2 + dt_2^2 + \cdots + dt^2_n),$$

e questa è l'espressione definitrice, donde parte la Memoria del sig. Beltrami.

In tutti e tre i casi la riduzione testè eseguita sulla espressione del quadrato dell'elemento lineare ha per conseguenza, che la detta espressione assume nella prescelta origine (avente reale il suo intorno) la stessa forma

$$ds^2 = a^2(dt_1^2 + dt_2^2 + \cdots + dt^2_n).$$

Per questa ragione le anzidette tre formole ridotte ponno chiamarsi espressioni ortogonali, purchè, salvo per il primo caso, la nozione della ortogonalità si ristringa ad un solo punto, cioè alla origine. Come una espressione ortogonale si trasformi in un'altra simile, sia conservando, sia cambiando l'origine, è già stato esposto con tutta generalità dal sig. BELTRAMI nella Memoria citata, ed è in tal modo che si deve completare la trasformazione qui adoperata per costituire una trasformazione omografica nel senso generale.

Mi restano da fare alcune altre considerazioni che ora passo ad esporre.

Lo spazio (o come, a parer mio, si potrebbe anche dire, il reticolo od il tessuto) definito dalla espressione Gaussiana $ds^2=(dt_1, dt_2,\dots dt_n)^2$, nella quale i coefficienti sono funzioni delle $t_1, t_2,\dots t_n$, richiede generalmente, per assegnarvi una posizione, una varietà di $\frac{1}{2}n(n+1)$ dimensioni, dove il quadrato dell'elemento lineare sia rappresentabile dalla somma dei quadrati delle differenziali delle coordinate. Imperocchè per soddisfare ad un sistema di $\frac{1}{2}n(n+1)$ equazioni a derivate parziali, occorrono, in generale, altrettante funzioni disponibili. Ma nel secondo caso qui sopra considerato almeno, basta un luogo di secondo grado

$$(x^2+x_1^2+\cdots+x_n^2=a^2)$$

nella varietà di $n+1$ dimensioni. E siccome le linee geodetiche sono vincolate alla tessitura di tal luogo, così si può ricercarle in questo. Seguendo tal via, dal sistema dei rapporti uguali

$$d\frac{dx}{ds}=\lambda x\,ds,\quad d\frac{dx_1}{ds}=\lambda x_1\,ds,\dots\quad d\frac{dx_n}{ds}=\lambda x_n\,ds$$

si desume qual sistema integrale un sistema di $n-1$ equazioni lineari ed omogenee da aggiungersi alla equazione di secondo grado. Il sistema delle equazioni lineari individua un piano (luogo di 1° ordine) passante per la origine O, centro della $(n+1)$-sfera, la quale viene segata dal piano in una circonferenza. Quindi la linea geodetica è un cerchio massimo della $(n+1)$-sfera. Sia P (coordinate $x, x_1,\dots x_n$) un punto qualunque del cerchio; le coordinate di un punto mobile della retta OP saranno $\lambda x, \lambda x_1,\dots \lambda x_n$. Questa retta incontra il luogo lineare $x=a$ [tangente alla $(n+1)$-sfera nel punto A avente per coordinate a, 0, 0,... 0] nel punto Q, il quale ha le coordinate a, $a\frac{x_1}{x},\dots, a\frac{x_n}{x}$, e percorre la retta comune al luogo tangente ed al piano del cerchio, mentre il punto P descrive la geodetica. Denotando le coordinate di Q con a, at_1, at_2,... at_n, e la lunghezza della retta OQ con at, si avrà

$$t^2 = 1 + t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t^2{}_n,$$

ed inoltre $x_1 = t_1 x$, $x_2 = t_2 x$,... $x_n = t_n x$, donde $x^2 t^2 = a^2$, epperò

$$x = \frac{a}{t}, \quad x_1 = a\frac{t_1}{t}, \cdots \quad x_n = a\frac{t_1}{t},$$

che è appunto la sostituzione adoperata nel caso secondo di sopra.

Per trovare la lunghezza di un arco geodetico si può procedere come segue. Siano P_1, P_2 i due punti estremi dell'arco, ai quali, nel luogo tangente, corrispondano i punti Q_1, Q_2, aventi per coordinate $a\times(1, b_1, b_2, \ldots b_n)$, $a\times(1, c_1, c_2, \ldots c_n)$, e siano ab, ac le lunghezze delle rette OQ_1, OQ_2, così che

$$b^2 = 1 + \sum b^2{}_m, \quad c^2 = 1 + \sum c^2{}_m, \quad (m = 1, 2, \ldots n).$$

Ciò posto se M è un punto della retta $Q_1 Q_2$ individuato dal rapporto $\xi = \frac{MQ_1}{MQ_2}$, le sue coordinate sono

$$\frac{a}{1-\xi}\times(1-\xi, \; b_1 - \xi c_1, \ldots, \; b_n - \xi c_n),$$

e $Q_2 Q_1$ ha per projezioni le $a\times(0, b_1 - c_1, \ldots b_n - c_n)$. Affinchè l'angolo OMQ_1 divenga retto, bisogna che sia $\sum(b_m - c_m)(b_m - \xi c_m) = 0$, il che, ponendo

$$f = 1 + \sum b_m c_m,$$

porge la

$$\xi = \frac{f - b^2}{c^2 - f}.$$

Inoltre, ponendo

$$g^2 = b^2 + c^2 - 2f = \sum(b_m - c_m)^2,$$
$$h^2 = b^2 c^2 - f^2 = \sum(b_m - c_m)^2 + \sum_{\lambda,\mu}(b_\lambda c_\mu - b_\mu c_\lambda)^2,$$

si ha

$$OM = a\frac{h}{g}, \quad Q_1 Q_2 = ag, \quad MQ_1 = \frac{\xi}{1-\xi}ag = a\frac{f-b^2}{g}, \quad MQ_2 = \frac{ag}{1-\xi} = a\frac{c^2-f}{g}.$$

La retta OM seghi la linea geodetica nel punto L, e da L fino ai punti

P_1, P_2 si contino gli archi $a\beta$, $a\gamma$; e sarà

$$\cos\beta = \frac{OM}{OQ_1} = \frac{h}{bg}, \quad \operatorname{sen}\beta = \frac{MQ_1}{OQ_1} = \frac{f-b^2}{bg}, \quad \cos\gamma = \frac{h}{cg}, \quad \operatorname{sen}\gamma = \frac{c^2-f}{cg},$$

donde si ricava

$$\cos(\gamma-\beta) = \frac{f}{bc}, \quad \operatorname{sen}(\gamma-\beta) = \frac{h}{bc},$$

$$\text{arco geodetico } P_1P_2 = a(\gamma-\beta).$$

Se si comincia una volta dal muover dubbio contro le ordinarie nozioni dello spazio, in quanto esso, insieme col tempo, è parte essenziale della serie dei fenomeni attuali, non capisco, perchè si debba arrestarsi all'ipotesi che una porzione dello spazio, mediante un trasporto, sia suscettibile della congruenza con un'altra porzione dello stesso spazio. La forma di un corpo solido è il risultato istantaneo delle forze e delle velocità relative onde le sue molecole sono animate; e gli errori inerenti alla ipotesi che un tal corpo, dopo avvenuto un trasporto rispetto ad altri corpi che riputiamo in riposo, abbia serbato la sua forma, non sono in estremo grado minori di quelli inerenti alla presente astronomia pratica in connessione colle nozioni geometriche, anzi possono risguardarsi dello stess'ordine di piccolezza. E di quest'ordine, od almeno di un ordine comparabile con esso, sarebbe, parmi, anche la curvatura dello spazio, s'esso avesse, giusta la presunzione che il celeberrimo Riemann sembra far tralucere (*), una tessitura di curvatura costante $\frac{1}{a^2}$ ovvero $-\frac{1}{a^2}$. Ma poichè una porzione infinitesima d'ogni tessuto a tre dimensioni intorno ad un punto preso ad arbitrio s'avvicina sotto tutti i rapporti allo spazio geometrico con un errore relativo anche infinitesimo, non vi sarebbe bisogno d'una curvatura costante talmente piccola da farne scendere una parte degli errori dell'astronomia moderna; anche un tessuto qualunque a grandissima unità lineare farebbe all'uopo, e nella sua formola definitrice i sei coefficienti potrebbero essere funzioni sì del

---

(*) *Sur les hypothèses qui servent de fondament à la Géométrie* (tomo 3° di questi Annali).

tempo che delle tre coordinate. Riflettendo poi che lo spazio della meccanica non è uno spazio assoluto, tale cioè che possa dirsi in riposo piuttosto che in istato di moto uniforme e rettilineo, si comprende che una nuova definizione dello spazio deve accommodarsi anzitutto a questa relatività fisica; ma allora chi ci dirà, che cosa dovremo sostituire alle espressioni della forma $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$, $x' - x$, $\frac{mm'}{r^2}$, quando avremo delle coordinate molto più accidentali di quelle dello spazio finora riputato il vero? Se, per es., la curvatura non fosse nulla, ma costante, e se per r s'intende la distanza geodetica di due molecole, dovremo, nella correzione della formola $\frac{mm'}{r^2}$, sostituire alla r primitiva $2a \operatorname{sen} \frac{r}{2a}$ o $2a \operatorname{senh} \frac{r}{2a}$, a seconda della qualità positiva o negativa della curvatura, ovvero la distanza geodetica stessa? Se le espressioni intere e lineari e la $(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2$ non costituissero il primo fondamento del complesso dei fenomeni, i geometri greci e Galileo avrebbero ingannato il genere umano in tal grado da non potere, per molti secoli, riparare al danno. Non credo che le nozioni matematiche primordiali inventate dal genere umano, giunto a maturità e illuminato dall'esperienza, siano totalmente diverse da quelle che presiedono a tutto il resto dei fenomeni.

Berna, agosto 1871.

CORREZIONI AL FASCICOLO PRECEDENTE.

Pag. 134, ultima linea del testo, leggi: « d'ordine $\mu - i$ »
» 135, linea 8 salendo, leggi: « in alcun punto (non fisso) »
» 137, » 8 discendendo, leggi: « ... curve S (in punti non fissi) »
» 167, » 2 salendo, leggi: « $N_i = [n - ip] + \ldots$ »
» 169, » 2 e 11 discendendo, leggi: « n.° 7 »
» 170, » 1 della nota, leggi: « è offerta dalla teoria »
» 172, » 4 discendendo, leggi: « ancora essere aumentata di »
» 175, » 6 discendendo, leggi: « $(i \leq j)$ »
» 176, » 4 discendendo, leggi: « $-\sum_{il} \frac{1}{6} 4i(4i-1)(12l \ldots$ ».

Osservazione sulla precedente Memoria del sig.^r prof. Schläfli

(*del prof.* EUGENIO BELTRAMI, *a Bologna*).

Il risultato finale cui giunge il sig. SCHLAEFLI nella precedente sua Memoria è che il più generale spazio ad n dimensioni, pel quale si verifica la proprietà che ciascuna linea geodetica è rappresentata dal complesso di $n-1$ equazioni lineari, si ottiene semplicemente operando una trasformazione omografica su quello spazio ch'io avevo già considerato nella Memoria inserita in questi Annali, alla p. 232 del t. 2.°, serie II.ª, e per il quale io avevo dimostrato *a posteriori* l'esistenza di tale proprietà.

È agevole concepire che l'effetto d'una trasformazione omografica sta tutto in ciò, che al posto della funzione

$$a^2 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2$$

(designata nella mia Memoria con x^2), la quale eguagliata a zero definisce lo *spazio limite* (*ibid.* p. 235), sottentra una funzione quadratica qualunque ϕ, che per maggior comodo suppongo resa omogenea coll'introduzione di una nuova variabile x_0, e che designo con

$$\phi_{xx} = \phi(x_0, x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum a_{rs} x_r x_s,$$

dove r, s sono due indici, ciascuno dei quali può prendere tutti i valori $0, 1, 2, \ldots n$. L'equazione $\phi_{xx} = 0$ rappresenta allora, per lo spazio ad n dimensioni, ciò che corrisponde alla *quadrica assoluta* del sig. CAYLEY, e la formola metrica fondamentale per gli spazii di curvatura costante, che è la (8) della citata mia Memoria (p. 235), diventa in corrispondenza

$$\cosh^2 \frac{(xy)}{R} = \frac{\varphi^2_{xy}}{\varphi_{xx}\varphi_{yy}}, \tag{I}$$

dove (xy) designa la *distanza* dei due punti $(x_0, x_1, \ldots x_n)$ ed $(y_0, y_1, \ldots y_n)$, mentre ϕ_{xy} indica la funzione bilineare formata colle due serie di variabili x ed y. (Seguo, per la segnatura delle funzioni quadratiche e delle bilineari correlative, la regola già tenuta dal sig. KLEIN nella sua interessante Memoria sulla geometria non euclidea, *Mathem. Annalen*, t. IV, pag. 587). L'equazione precedente dà

$$\operatorname{senh}^2 \frac{(xy)}{R} = \frac{\varphi^2_{xy} - \varphi_{xx}\varphi_{yy}}{\varphi_{xx}\varphi_{yy}}.$$

Quando il punto y è infinitamente vicino al punto x, lo che si esprime sommariamente scrivendo $y = x + dx$, si ha

$$\phi_{xy} = \phi_{xx} + \tfrac{1}{2} d\phi_{xx},$$

$$\phi_{yy} = \phi_{xx} + d\phi_{xx} + \phi_{dx,dx},$$

donde

$$\frac{\varphi^2_{xy} - \varphi_{xx}\varphi_{yy}}{\varphi_{xx}\varphi_{yy}} = \frac{(d\varphi_{xx})^2 - 4\varphi_{xx}\varphi_{dx,dx}}{4\varphi^2_{xx}};$$

epperò, scrivendo ds in luogo di (xy), si ha

$$ds^2 = \frac{R^2}{4\varphi^2_{xx}} \{ (d\phi_{xx})^2 - 4\phi_{xx}\phi_{dx,dx} \}. \tag{II}$$

Tale è dunque la formola che porge l'espressione dell'elemento lineare dello spazio considerato dal sig. SCHLAEFLI, e che tien luogo, in seguito alla trasformazione omografica, di quella dalla quale io sono partito nella mia Memoria e che si trova alla p. 231, *sub* (1).

L'espressione trovata dal sig. SCHLAEFLI per l'elemento lineare dello stesso spazio è assai diversa dalla precedente, nella sua forma esterna. Mi propongo quindi di mostrare brevemente donde proceda tale differenza, e come essa non sia che apparente.

Si formi la funzione reciproca della ϕ_{xx} e, indicate con $\xi_0, \xi_1, \dots \xi_n$ le variabili reciproche, sia dessa

$$\phi_{\xi\xi} = \sum \alpha_{rs}\xi_r\xi_s,$$

dove

$$\alpha_{rs} = \frac{1}{\|a\|}\frac{\partial \|a\|}{\partial a_{rs}},$$

e reciprocamente

$$a_{rs} = \frac{1}{\|\alpha\|}\frac{\partial \|\alpha\|}{\partial \alpha_{rs}}.$$

Colla segnatura $\| \; \|$ indico (seguendo un uso già introdotto dal sig. Kronecker) il determinante formato cogli $(n+1)^2$ coefficienti a_{rs} oppure α_{rs}. Le variabili reciproche x e ξ sono fra loro collegate dalle relazioni

$$x_r = \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi_{\xi\xi}}{\partial \xi_r}, \quad \xi_r = \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi_{xx}}{\partial x_r},$$

dalle quali risulta

$$x_0\xi_0 + x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n = \varphi_{xx} = \varphi_{\xi\xi},$$

$$x_0\eta_0 + x_1\eta_1 + \cdots + x_n\eta_n$$

$$= y_0\xi_0 + y_1\xi_1 + \cdots + y_n\xi_n = \varphi_{xy} = \varphi_{\xi\eta},$$

dove le η sono variabili reciproche alle y, come le ξ lo sono alle x. Da queste relazioni risulta la seguente identità

$$\begin{vmatrix} \varphi_{xx} & \varphi_{xy} & x_0 & x_1 \ldots & x_n \\ \varphi_{yx} & \varphi_{yy} & y_0 & y_1 \ldots & y_n \\ x_0 & y_0 & \alpha_{00} & \alpha_{01} \ldots & \alpha_{0n} \\ x_1 & y_1 & \alpha_{10} & \alpha_{11} \ldots & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n & y_n & \alpha_{n0} & \alpha_{n1} \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Infatti gli elementi della prima colonna del determinante si ottengono moltiplicando ordinatamente quelli della 3ª, 4ª,... $(n+3)$ª colonna per ξ_0, $\xi_1, \ldots \xi_n$ e sommando; e per conseguenza il determinante è identicamente nullo. Si può, adoperando una segnatura di facile interpretazione, rappresentare più brevemente questa identità nel modo che segue:

$$\begin{Vmatrix} \varphi_{xx} & \varphi_{xy} & x \\ \varphi_{yx} & \varphi_{yy} & y \\ x & y & \alpha \end{Vmatrix} = 0. \tag{a}$$

Insieme con questa si hanno le identità ben note

$$\begin{Vmatrix} \varphi_{xx} & x \\ x & \alpha \end{Vmatrix} = 0, \quad \begin{Vmatrix} \varphi_{xy} & x \\ y & \alpha \end{Vmatrix} = 0, \quad \begin{Vmatrix} \varphi_{yy} & y \\ y & \alpha \end{Vmatrix} = 0, \tag{b}$$

dalle quali si trae

$$\left.\begin{aligned}
&\|\alpha\|\Phi_{xx}+\begin{Vmatrix} 0 & x \\ x & \alpha \end{Vmatrix}=0, \qquad \|\alpha\|\Phi_{yy}+\begin{Vmatrix} 0 & y \\ y & \alpha \end{Vmatrix}=0, \\
&\qquad\qquad \|\alpha\|\Phi_{xy}+\begin{Vmatrix} 0 & x \\ y & \alpha \end{Vmatrix}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

Ora i coefficienti dei due primi elementi della prima colonna, nello sviluppo del determinante (a), sono nulli in virtù delle identità (b), talchè all'identità (a) si può sostituire la seguente

$$\begin{Vmatrix} \Phi_{yy} & 0 & y \\ \Phi_{xy} & 0 & x \\ y & x & \alpha \end{Vmatrix}=0,$$

e questa equivale alla sua volta, in forza delle formole (c), alla seguente

$$\|\alpha\|\cdot\begin{vmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{xy} \\ \Phi_{yx} & \Phi_{yy} \end{vmatrix}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & x \\ y & x & \alpha \end{Vmatrix}.$$

Si ha dunque, in virtù della (I),

$$\cosh^2\frac{(xy)}{R}=\frac{\|\alpha\|\cdot\begin{Vmatrix} 0 & x \\ y & \alpha \end{Vmatrix}}{\begin{Vmatrix} 0 & x \\ x & \alpha \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} 0 & y \\ y & \alpha \end{Vmatrix}}, \quad \operatorname{senh}^2\frac{(xy)}{R}=-\frac{\|\alpha\|\cdot\begin{Vmatrix} 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & x \\ y & x & \alpha \end{Vmatrix}}{\begin{Vmatrix} 0 & x \\ x & \alpha \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} 0 & y \\ y & \alpha \end{Vmatrix}}.$$

Facendo $y=x+dx$ in quest'ultima formola, si ottiene:

$$ds^2=-\frac{R^2\cdot\|\alpha\|}{\begin{Vmatrix} 0 & x \\ x & \alpha \end{Vmatrix}^2}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & dx \\ 0 & 0 & x \\ dx & x & \alpha \end{Vmatrix}. \tag{III}$$

È questa appunto l'espressione data dal sig. Schlaefli (p. 185) per il quadrato dell'elemento lineare (il quale qui si riferisce ad uno spazio pseudosferico, ma si applicherebbe egualmente ad uno spazio sferico mutando R^2 in $-R^2$). La sola differenza è che il sig. Schlaefli ha posto $x_0=1$, $dx_0=0$, per ridurre il numero delle variabili ad n.

Le due espressioni (II) e (III) sono dunque perfettamente identiche fra loro, provenendo entrambe dalla stessa equazione (I), e non differiscono quanto alla forma se non perchè la prima contiene i coefficienti a_{rs} della quadrica assoluta *espressa in coordinate locali*, mentre la seconda contiene invece i coefficienti α_{rs} della stessa quadrica *espressa in coordinate tangenziali* (i quali due punti di vista non presentano, del resto, negli spazii di curvatura costante non $=0$, alcuna differenza essenziale).

È un fatto notabile che la considerazione *implicita* di queste ultime coordinate abbia permesso al sig. Schlaefli di pervenire con tanta prontezza ed eleganza alla forma (III), superando d'un tratto le difficoltà che avrebbe presentate l'applicazione del metodo da me adottato nel 1866 (*Annali di Matem.*, serie 1ª, t. VII, p. 185) per risolvere il problema nel caso di due dimensioni.

Sopra un teorema di Jacobi recato a forma più generale ed applicato alla funzione cilindrica

(*del prof.* L. Schlaefli, *a Berna*).

Nel tomo 1.° di questi Annali (pag. 241) mi dolsi di non aver potuto scoprire una prova diretta della eguaglianza

$$\left(\frac{x}{2}\right)^a \cdot \int_0^\infty e^{-x\cos\mathrm{h}\cdot\theta} \mathrm{sen\,h}^{2a}\cdot\theta\cdot d\theta = \frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^\infty e^{-x\cos\mathrm{h}\cdot\theta}\cos\mathrm{h}\cdot a\theta\cdot d\theta; \quad (a)$$

ora veggo che ne fornisce il mezzo un teorema di Jacobi (*), presentato sotto una forma alquanto più generale.

Dinotando con a un esponente la cui parte reale sia compresa fra $-\frac{1}{2}$ ed 1, mi propongo di trovare il valore dell'integrale

$$S = \int_1^x (t^2-1)^{a-\frac{1}{2}} \frac{dt}{(x-t)^a},$$

dove, per fissar le idee, suppongo x reale e più grande di 1. Sostituendo $t = x-(x-1)u$, quest'integrale diventa

$$S = (x+1)^{a-\frac{1}{2}}(x-1)^{\frac{1}{2}}\int_0^1 u^{-a}(1-u)^{a-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x-1}{x+1}u\right)^{a-\frac{1}{2}}du.$$

Sviluppando secondo le potenze ascendenti di $\frac{x-1}{x+1} = y^2$ e ponendo mente alla

$$(-1)^n\binom{a-\frac{1}{2}}{n}\int_0^1 u^{n-a}(1-u)^{a-\frac{1}{2}}du = \frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})\Gamma(1-a)}{a\Gamma(\frac{1}{2})}\binom{2a}{2n+1},$$

(*) *Formula transformationis integralium definitorum* (Giorn. di Crelle, t. 15).

si ottiene

$$S=\frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})\Gamma(1-a)}{a\Gamma(\frac{1}{2})}(x+1)^a\sum\binom{2a}{2n+1}y^{2n+1}$$

$$=\frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})\Gamma(1-a)}{a\Gamma(\frac{1}{2})}(x+1)^a\cdot\tfrac{1}{2}[(1+y)^{2a}-(1-y)^{2a}].$$

Ora si ponga $x=\cosh\cdot\theta$, e sarà $y=\operatorname{tangh}\cdot\frac{\theta}{2}$,

$$\sqrt{x+1}(1+y)=\sqrt{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\theta},\quad \sqrt{x+1}(1-y)=\sqrt{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}\theta},$$

epperò

$$S=2^a\frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})\Gamma(1-a)}{a\Gamma(\frac{1}{2})}\operatorname{senh}\cdot a\theta. \tag{1}$$

Per applicare questa eguaglianza alla trasformazione dell'integrale

$$T=2^a\frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^\infty e^{-x\cosh\cdot\theta}\cosh\cdot a\theta\cdot d\theta,$$

mettiamo dapprima l'espressione da integrarsi nella forma

$$\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\theta}(e^{-x\cosh\cdot\theta}\operatorname{senh}\cdot a\theta)+\frac{x}{a}e^{-x\cosh\cdot\theta}\operatorname{senh}\cdot\theta\cdot\operatorname{senh}\cdot a\theta.$$

Poichè $e^{-x\cosh\cdot\theta}\operatorname{senh}\cdot a\theta$ svanisce ai due limiti, si ha

$$T=\int_0^\infty xe^{-x\cosh\cdot\theta}\operatorname{senh}\cdot\theta\left(2^a\frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})}{a\Gamma(\frac{1}{2})}\operatorname{senh}\cdot a\theta\right)d\theta,$$

e quindi, rammentando la (1) e ponendo $\cosh\cdot\theta=z$

$$T=\frac{x}{\Gamma(1-a)}\int_1^\infty e^{-xz}\left(\int_1^z(t^2-1)^{a-\frac{1}{2}}\frac{dt}{(z-t)^a}\right)dz,$$

$$=\frac{x}{\Gamma(1-a)}\int_1^\infty(t^2-1)^{a-\frac{1}{2}}\left(\int_t^\infty e^{-xz}\frac{dz}{(z-t)^a}\right)dt.$$

La sostituzione $z=t+\frac{y}{x}$ dà

$$\int_t^\infty e^{-xz}\frac{dz}{(z-t)^a}=x^{a-1}e^{-xt}\int_0^\infty e^{-y}y^{-a}dy=\Gamma(1-a)\cdot x^{a-1}e^{-xt}:$$

quindi

$$T=x^a\int_1^\infty e^{-xt}(t^2-1)^{a-\frac{1}{2}}dt,$$

la quale equazione, col porre $t=\cosh\cdot\theta$, si cambia in quella da verificarsi. Riguardandone poi ambedue i membri come funzioni dell'esponente a, si rimuoverà facilmente la restrizione $a<1$, e si riconoscerà che la formola è valida finchè la parte reale di a è più grande di $-\frac{1}{2}$.

Per convincersi della connessione tra la formola (1) ed un teorema di Jacobi, si consideri l'integrale

$$A=\int(t^2-1)^{a-\frac{1}{2}}(t-x)^{-a}dt,$$

dove la variabile t parte da 1 e dopo un giro diretto intorno alla x (reale e più grande di 1), il quale escluda -1, ritorna al punto di partenza, e dove i logaritmi di t^2-1 e di $t-x$, nel momento in cui i loro numeri divengono positivi, sono supposti essere reali. Esso è convergente se la parte reale dell'esponente a sorpassa $-\frac{1}{2}$, e, considerato quale funzione di a, è differenziabile nella medesima supposizione, finchè la indipendente a resta finita. Se oltre a ciò la detta parte reale è più piccola di 1, l'integrale A permette alla variabile t l'accesso al punto x, la via d'integrazione può addossarsi alla linea di realità, meno un piccolissimo giro intorno ad x, al quale corrisponde una parte evanescente dell'integrale; e si ha

$$A=(e^{ia\pi}-e^{-ia\pi})\int_1^x\frac{(t^2-1)^{a-\frac{1}{2}}}{(x-t)^a}dt=\frac{2i\pi}{\Gamma(a)\Gamma(1-a)}\int_1^x\frac{(t^2-1)^{a-\frac{1}{2}}}{(x-t)^a}dt.$$

Mercè la formola (1), se ne conclude l'eguaglianza

$$\frac{1}{2i\pi}\int\frac{(t^2-1)^{a-\frac{1}{2}}}{(t-\cosh\cdot\theta)^a}dt=2^a\frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1+a)}\operatorname{senh}\cdot a\theta, \tag{2}$$

(la via della t è un laccio da 1 intorno a $\cosh\cdot\theta$, escludendo -1). A cagione della differenziabilità rispetto ad a, tutti e due i membri della (2) continueranno ad essere uguali, quand'anche la parte reale dell'esponente a sorpassi 1. Assumendo poi per esso un numero intero positivo n, l'espressione da integrarsi, dopo il giro, riprende lo stesso valore; così il punto 1 cessa di essere necessariamente punto di partenza e di arrivo; epperò la via d'integrazione, divenuta adesso veramente rientrante, può stringersi intorno a $\cosh\cdot\theta$; in questo caso dunque il primo membro della (2) rappresenta il coefficiente di h^{n-1} nello sviluppo della funzione

$$[(\cosh\cdot\theta+h)^2-1]^{n-\frac{1}{2}}$$

secondo le potenze ascendenti dell'incremento h, mentre il secondo membro assume la forma

$$(-1)^n 2^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \operatorname{senh}\cdot n\theta.$$

Diviso per $\operatorname{senh}^{2n-1}\cdot\theta$, il primo membro diventa funzione ad un valore rispetto a θ. Se dunque θ, uscendo dallo stato positivo, descrive un quarto di circonferenza intorno allo zero con un raggio più piccolo di π, e così trapassa in $i\phi$ (ϕ reale compreso tra 0 e π), il moltiplicatore $\operatorname{senh}^{2n-1}\theta$ della funzione ad un valore si cambierà in $i^{2n-1}\operatorname{sen}^{2n-1}\phi$, e $\operatorname{senh}\cdot n\theta$ in $i\operatorname{sen}\cdot n\phi$. Nel caso perciò di un esponente n intero positivo, l'eguaglianza (2) assume la seguente forma, dove si è posto $x=\cos\phi$:

$$\frac{1}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}\cdot\operatorname{sen}^{2n-1}\varphi}{\partial x^{n-1}}=-2^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}\operatorname{sen}\cdot n\phi,$$

la quale è la forma originaria del teorema citato.

La funzione che somministra la soluzione generale della equazione di Riccati si riscontra pure nella soluzione del problema di Kepler ed altrove, e venne chiamata dai sig.i Heine ed Hankel funzione cilindrica, dai sig.i Neumann e Lommel funzione di Bessel. Nelle Memorie da me conosciute sopra questa funzione si trova una grande varietà di teoremi interessanti, e fui sorpreso particolarmente dalla svolgibilità secondo funzioni cilindriche, proprietà che il sig. Neumann dimostra competere a funzioni di carattere assai generale. Quanto alle espressioni integrali della detta funzione, il sig. Hankel ne stabilisce, è vero, talune che valgono in tutti i casi, ma le corrispondenti vie d'integrazione sono lacci, ai quali è difficile assegnare una forma definita perchè risultino integrali a via reale; e la ragione n'è ch'egli si giova esclusivamente del tipo $\int e^{2x\cos\theta}\operatorname{sen}^{2a}\theta\cdot d\theta$. Probabilmente la espressione integrale, data nel tomo 1.° di questi Annali [pag. 237, (4)], è la più semplice fra quelle che si mantengono convergenti in tutt'i casi, ed è, nello stesso tempo, la più conforme alla definizione data da Bessel. Tuttavia il dedurla dalla considerazione di diverse serie sommatorie, come si è fatto ivi, riesce più laborioso del necessario; inoltre m'era restata allora nascosta la vera origine di quella forma bipartita da un solo integrale. Perciò ritorno ora sull'argomento, affine di metterlo in più chiara luce.

Sia

$$F(a,\ x^2)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{x^{2n}}{\Gamma(n+1)\Gamma(a+n+1)}.$$

Il denominatore del termine generale ammette l'introduzione del coefficiente binomiale $\binom{a+2n}{n}=\frac{\Gamma(a+2n+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(a+n+1)}$, e giusta una formola di Weierstrass si ha, dinotando con N un numero positivo destinato a crescere indefinitamente

$$\frac{1}{\Gamma(a+2n+1)}=\frac{1}{2i\pi}\int e^z z^{-a-2n-1}dz \text{ (laccio da } -N \text{ attorno 0)},$$

donde consegue la

$$x^a F(a,\ x^2)=\frac{1}{2i\pi}\int e^z\sum\binom{a+2n}{n}\left(\frac{x}{z}\right)^{a+2n}\frac{dz}{z}.$$

La nota forma della somma c'induce a porre $z=2x\cosh\cdot\theta$, epperò $\frac{dz}{z}=\frac{2\operatorname{senh}\cdot\theta}{2\cosh\cdot\theta}d\theta$; in tal modo si ha

$$\sum\binom{a+2n}{n}(2\cosh\cdot\theta)^{-a-2n-1}\cdot 2\operatorname{senh}\cdot\theta=e^{-a\theta},$$

epperò

$$x^a F(a,\ x^2)=\frac{1}{2i\pi}\int e^{2x\cosh\cdot\theta-a\theta}dt. \tag{b}$$

Ad un giro diretto, fatto dalla $z=\cosh\cdot\theta$ intorno a 0, corrisponde, nella metà orientale del piano rappresentativo di θ, un accrescimento di $2i\pi$.

1.° Se x è positivo, basta che la θ parta da $N-i\pi$ verso la regione finita senza toccare il meridiano principale, contenente i punti $\cdots -i\frac{\pi}{2}$,

$i\frac{\pi}{2},\cdots$ (dove $z=0$), ed arrivi nel punto $N+i\pi$ dell'orizzonte. (Se l'argomento della x viene a mutare, conviene, per conservare all'integrale il sommo grado di convergenza, che i due suoi limiti si muovano in senso opposto lungo l'orizzonte, affinchè il prodotto $2x\cosh\cdot\theta$ rimanga negativo). Osserviamo ora che, nella regione finita, l'espressione da integrarsi non incontra alcun impedimento, nè anche laddove $\cosh\cdot\theta$ svanisce. Laonde cessa adesso la condizione relativa ai punti $i\frac{\pi}{2},\cdots,$ e si può condurre la θ per tre linee rette da $N-i\pi$ per $-i\pi$ ed $i\pi$ sino ad $N+i\pi$. Ne risulterà l'espressione data nel luogo citato.

2.° Se la indipendente x è laterale, avente per es. positivo il fattore del simbolo i (che è il caso più frequente), la si dinoti con $i\frac{x}{2}$, dove x è positivo, e si scriva

$$\left(\frac{x}{2}\right)^a F\left(a,\,-\frac{x^2}{4}\right)=\frac{1}{2i\pi}\int e^z\sum\binom{-a-n-1}{n}\left(\frac{x}{2z}\right)^{a+2n}\frac{dz}{z};$$

(laccio da $-N$ intorno ad 0)

così, ponendo $z=x\operatorname{senh}\cdot\theta$ ed osservando la

$$\sum\binom{-a-n-1}{n}(2\operatorname{senh}\cdot\theta)^{-a-2n-1}\cdot 2\cosh\cdot\theta=e^{-a\theta}$$

($\operatorname{mod}\cdot\operatorname{senh}\cdot\theta>1$), si ottiene la

$$\left(\frac{x}{2}\right)^a F\left(a,\,-\frac{x^2}{4}\right)=\frac{1}{2i\pi}\int_{N-i\pi}^{N+i\pi}e^{x\operatorname{senh}\cdot\theta-a\theta}\,d\theta,$$

dove la θ può andare per tre linee rette da $N-i\pi$ per $-i\pi$ ed $i\pi$ a $N+i\pi$. Ponendo $\theta=-i\phi$ tra $-i\pi$ e 0, $\theta=i\phi$ tra 0 ed $i\pi$, e cambiando θ in $-i\pi+\theta$ tra $N-i\pi$ e $-i\pi$, in $i\pi+\theta$ tra $i\pi$ e $N+i\pi$, la formola diventa

$$\left(\frac{x}{2}\right)^a F\left(a,\,-\frac{x^2}{4}\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(x\operatorname{sen}\phi-a\phi)\cdot d\phi-\frac{\operatorname{sen}\cdot a\pi}{\pi}\int_0^\infty e^{-x\operatorname{senh}\cdot\theta-a\theta}\,d\theta,$$

e s'accorda colla definizione data dal Bessel, quando il parametro a diventa intero e positivo.

Abbiamo ottenuto la espressione (b) senza ricorrere alla equazione differenziale della funzione $F(a,\,x^2)$; potremo anche dedurne le altre espressioni integrali, senza ajuto della equazione differenziale ovvero delle serie sommatorie. Dalla (b) scaturisce la

$$x^{-a}F(-a,\,x^2)-x^aF(a,\,x^2)=\frac{1}{i\pi}\int_{N-i\pi}^{N+i\pi}e^{2x\cosh\cdot\theta}\operatorname{senh}\cdot a\theta\cdot d\theta \text{ (via per } -i\pi,\ i\pi)$$

$$=2\frac{\operatorname{sen}a\pi}{\pi}\int_0^N e^{-2x\cosh\cdot\theta}\cosh\cdot a\theta\cdot d\theta,\quad \text{giacchè}\int_{-i\pi}^{i\pi}=0.$$

Quindi per mezzo della (a), se la parte reale del parametro sorpassa $-\frac{1}{2}$, si ottiene la

$$x^{-2a}F(-a,\,x^2)-F(a,\,x^2)=\frac{2\operatorname{sen}a\pi}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(a+\frac{1}{2})}\int_0^N e^{-2x\cosh\cdot\theta}\operatorname{senh}^{2a}\theta\cdot d\theta.$$

Il valore della indipendente si riporti, con un mezzo giro retrogrado, dallo stato positivo al negativo, nel quale si dinoti con $e^{-i\pi}x$, mentre il limite superiore dell'integrale progredisca da $\theta=N$ a $\theta=N+i\pi$; poscia la via della θ consti di due linee rette, aventi comune il punto $i\pi$. In tal modo si avrà la

$$e^{2i\pi a}x^{-2a}F(-a,\,x^2)-F(a,\,x^2)$$

$$=\frac{2\operatorname{sen}\cdot a\pi}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(a+\frac{1}{2})}\left\{ie^{i\pi a}\int_0^\pi e^{2x\cos\varphi}\operatorname{sen}^{2a}\phi\,d\phi+e^{2i\pi a}\int_0^N e^{-2x\cosh\cdot\theta}\operatorname{senh}^{2a}\cdot\theta\cdot d\theta\right\}.$$

Moltiplicando questa eguaglianza per $\dfrac{e^{-i\pi a}}{2i\operatorname{sen}\cdot a\pi}$, la precedente per $\dfrac{-e^{i\pi a}}{2i\operatorname{sen}\cdot a\pi}$, e facendone la somma, si ha la

$$F(a,\,x^2)=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(a+\frac{1}{2})}\int_0^\pi e^{2x\cos\varphi}\operatorname{sen}^{2a}\phi\,d\phi \text{ (parte reale di } a>-\tfrac{1}{2}).$$

Berna, agosto 1871.

Sulle coordinate curvilinee d' una superficie e dello spazio.

MEMORIA QUINTA (*).

(*del prof.* DELFINO CODAZZI, *a Pavia*).

Nella Mem. 1ª, parte 2ª s'è trattata la prima metà d'una questione relativa al sistema di certe linee isometriche d'un corpo solido omogeneo indefinito, e s'è veduto che, dinotando con le intersezioni (μ, ν) quelle linee, hanno per esse da verificarsi le seguenti cinque condizioni

$$\frac{\partial M}{\partial \lambda}=0, \quad \frac{\partial N}{\partial \lambda}=0, \quad \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial \lambda}=0, \quad \frac{\partial \frac{l'}{l}}{\partial \lambda}=0, \quad \frac{\partial \omega_\lambda}{\partial \lambda}=0, \qquad 1$$

ove

$$M=m \operatorname{sen} \varepsilon_\nu, \quad N=n \operatorname{sen} \varepsilon_\mu.$$

Ora, nella presente Mem. 5ª si tratterà la seconda metà della medesima questione, e quindi si determinerà la natura geometrica sì delle varie linee isometriche, sì del sistema loro.

1.

Assumiamo il sistema delle superficie (λ), il quale è arbitrario, in modo da rendere soddisfatta la condizione, che le intersezioni dello stesso col sistema delle superficie (μ), cioè le linee (λ, μ) siano ortogonali alle linee

(*) I numeri contenuti entro parentesi richiameranno le formole della Mem. 1ª, par. 1ª stampata negli *Annali* s. 2ª, t. 1°, e quelle della Mem. 2ª stampata nel t. 2°; i numeri invece non racchiusi entro parentesi serviranno a dinotare le sole formole dell'attuale Mem. 5ª.

isotermiche (μ, ν). Questo può sempre farsi senza nuocere alla generalità della soluzione, perocchè, dati due sistemi di superficie

$$\mu=\mu^0(x, y, z), \quad \nu=\nu^0(x, y, z),$$

il terzo sistema

$$\lambda=\lambda^0(x, y, z),$$

il quale incontra il primo secondo linee ortogonali alle intersezioni del primo col secondo, sarà quello che rende soddisfatta l'equazione

$$\sum i_\nu i_\lambda=0 \text{ ovvero } \sum\frac{\partial i}{\partial\nu}\frac{\partial i}{\partial\lambda}=0.$$

Ora, se le due prime equazioni somministrano

$$x=x^0(z, \mu, \nu), \quad y=y^0(z, \mu, \nu),$$

l'equazione di condizione prenderà la forma

$$\left(\frac{\partial x^0}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\nu}+\frac{\partial x^0}{\partial\nu}\right)\frac{\partial x^0}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\lambda}+\left(\frac{\partial y^0}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\nu}+\frac{\partial y^0}{\partial\nu}\right)\frac{\partial y^0}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\lambda}+\frac{\partial z}{\partial\nu}\frac{\partial z}{\partial\lambda}=0,$$

ovvero

$$\left\{\left(\frac{\partial x^0}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial y^0}{\partial z}\right)^2+1\right\}\frac{\partial z}{\partial\nu}+\frac{\partial x^0}{\partial z}\frac{\partial x^0}{\partial\nu}+\frac{\partial y^0}{\partial z}\frac{\partial y^0}{\partial\nu}=0.$$

È questa un'equazione alle derivate ordinarie del prim'ordine, la quale darà mediante l'integrazione il valore di z in funzione delle ν, μ e d'una costante arbitraria, che sarà funzione arbitraria delle λ, μ.

Possiamo dunque assumere il sistema (λ) in modo che sia

$$\varepsilon_\mu=\tfrac{1}{2}\pi, \tag{2}$$

per cui la seconda condizione 1 diventa

$$\frac{\partial n}{\partial\lambda}=0. \tag{3}$$

Chiamando s_μ l'arco d'una linea qualunque tracciata nella superficie (μ), abbiamo

$$ds^2_\mu=l^2\,d\lambda^2+n^2\,d\nu^2;$$

ora la 3 manifesta, per una nota proprietà, che le linee (λ, μ) sono geodetiche della superficie (μ).

2.

Siccome le linee (λ, μ), (μ, ν) tracciate sulla superficie (μ) sono tra loro ortogonali, così potremo applicar loro le permutazioni semplici delle sei equazioni (50) e (51), cioè le

$$n c_\lambda + l\gamma_\nu = 0, \quad n b_\lambda = \frac{\partial l}{\partial \nu}, \quad l\beta_\nu = -\frac{\partial n}{\partial \lambda},$$

$$\frac{\partial \gamma_\nu}{\partial \lambda} + \frac{\partial a_\lambda}{\partial \nu} + \beta_\nu c_\lambda - \alpha_\nu b_\lambda = 0, \quad \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial \lambda} - \frac{\partial c_\lambda}{\partial \nu} + \beta_\nu a_\lambda + \gamma_\nu b_\lambda = 0,$$

$$\frac{\partial \beta_\nu}{\partial \lambda} - \frac{\partial b_\lambda}{\partial \nu} - \alpha_\nu a_\lambda - \gamma_\nu c_\lambda = 0.$$

Ma

$$a_\lambda = l' \cos\omega_\lambda, \quad \alpha_\nu = n' \cos\omega'_\nu, \quad b_\lambda = l' \operatorname{sen}\omega_\lambda, \quad \beta_\nu = n' \operatorname{sen}\omega'_\nu,$$

$$c_\lambda = l'' - \frac{\partial \omega_\lambda}{\partial \lambda}, \quad \gamma_\nu = n'' - \frac{\partial \omega'_\nu}{\partial \nu};$$

perciò esse equazioni, avuto riguardo alla quinta 1 ed alla 3, diventeranno

$$\left.\begin{aligned} & n l'' + l n'' = 0, \quad n l' \operatorname{sen}\omega_\lambda = \frac{\partial l}{\partial \nu}, \quad \omega'_\nu = 0, \\ & \frac{\partial n''}{\partial \lambda} + \frac{\partial \cdot l' \cos\omega_\lambda}{\partial \nu} - n' l' \operatorname{sen}\omega_\lambda = 0, \quad \frac{\partial n'}{\partial \lambda} - \frac{\partial l''}{\partial \nu} + n'' l' \operatorname{sen}\omega_\lambda = 0, \\ & \frac{\partial \cdot l' \operatorname{sen}\omega_\lambda}{\partial \nu} + n' l' \cos\omega_\lambda + n'' l'' = 0. \end{aligned}\right\} \qquad 4$$

Abbiamo soddisfatto alla $n' \operatorname{sen}\omega'_\nu = 0$ con la terza 4 anzichè con la $n' = 0$, perchè ω'_ν dinota l'angolo formato dalla normale principale della linea (λ, μ) con la normale della superficie (μ), e la linea, come s'è veduto, è geodetica della superficie. La seconda 4 mostra, in causa della quarta e della quinta tra le condizioni 1, che $\frac{\partial \log l}{\partial \nu}$ non contiene λ; perciò, chiamando l_1 una funzione delle λ, μ ed l_2 una funzione delle μ, ν, avremo

$$l = l_1 l_2, \quad \frac{\partial l_2}{\partial \nu} = n \frac{l' \operatorname{sen}\omega_\lambda}{l_1}. \qquad 5$$

Indichiamo con L_1 N_1 due novelle funzioni, l'una delle sole λ, μ, l'altra delle sole μ, ν, e poniamo

$$l_1=\frac{\partial L_1}{\partial \lambda}, \quad n=\frac{\partial N_1}{\partial \nu}.$$

Siano inoltre per brevità

$$\frac{l'}{l_1}=p, \quad \frac{l''}{l_1}=q;$$

per cui, a cagione della prima 4,

$$\frac{n''}{n}=-\frac{q}{l_2}. \qquad 6$$

La seconda 5 e la quinta 4 potranno scriversi

$$p\,\mathrm{sen}\,\omega_\lambda=\frac{\partial l_2}{\partial N_1}, \quad \frac{\partial \cdot l_2 \frac{n'}{n}}{\partial L_1}=\frac{\partial \cdot l_2 q}{\partial N_1}. \qquad 7$$

La quarta e la sesta 4 diventeranno

$$\frac{\partial q}{\partial L_1}-l_2\frac{\partial \cdot p\cos\omega_\lambda}{\partial N_1}+l_2\frac{n'}{n}p\,\mathrm{sen}\,\omega_\lambda=0, \quad \frac{\partial \cdot p\,\mathrm{sen}\,\omega_\lambda}{\partial N_1}+\frac{n'}{n}p\cos\omega_\lambda-\frac{q^2}{l_2}=0;$$

dalle quali si deducono, avuto riguardo alla prima 7,

$$\frac{\partial p^2}{\partial N_1}-2q^2\frac{\partial \cdot \log l_2}{\partial N_1}=2\frac{p\cos\omega_\lambda}{l_2}\frac{\partial q}{\partial L_1}, \quad \frac{n'}{n}=\frac{1}{p\cos\omega_\lambda}\left(\frac{q^2}{l_2}-\frac{\partial \cdot p\,\mathrm{sen}\,\omega_\lambda}{\partial N_1}\right). \qquad 8$$

Nelle equazioni 7, 8 si potranno riguardare come variabili indipendenti le L_1, N_1, μ; e saranno

$$\frac{\partial l_2}{\partial L_1}=0, \quad \frac{\partial p}{\partial L_1}=0, \quad \frac{\partial \omega_\lambda}{\partial L_1}=0, \quad \frac{\partial N_1}{\partial L_1}=0, \qquad 9$$

la terza delle quali segue dalle prime due e dalla prima 7.

3.

Passiamo a stabilire altre due equazioni, le quali racchiudano la prima e la terza tra le condizioni 1 non contemplate nelle equazioni del numero precedente.

La prima (44), la quale è una tra le sei equazioni relative alla superficie (1), può scriversi

$$\frac{\partial\cdot m\cos\varepsilon_\lambda}{\partial N_1}+m\frac{n'}{n}\operatorname{sen}\omega_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda=\frac{\partial\cdot\log n}{\partial\mu}\,.$$

Ma, per la terza (32) e per la terza 4,

$$\omega_\nu=\eta_\nu-\pi;$$

inoltre

$$\cos\varepsilon_\lambda=\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\cos\eta_\lambda,\quad \operatorname{sen}\eta_\nu\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda=\operatorname{sen}\varepsilon_\nu\operatorname{sen}\eta_\lambda.$$

Quindi l'equazione diventerà

$$\frac{\partial\cdot M\cos\eta_\lambda}{\partial N_1}-\frac{n'}{n}M\operatorname{sen}\eta_\lambda=\frac{\partial\log n}{\partial\mu}\,. \qquad 10$$

In seguito, la formola

$$\sum i_\mu i_\nu=\cos\varepsilon_\lambda$$

può scriversi

$$\sum\frac{\partial i}{\partial\mu}i_\nu=M\cos\eta_\lambda. \qquad 11$$

Le 10, 11 sono le due equazioni che si volevano stabilire, nelle quali

$$\frac{\partial M}{\partial L_1}=0,\quad \frac{\partial\eta_\lambda}{\partial L_1}=0. \qquad 12$$

4.

Osserviamo che, col sussidio della 10, si possono integrare subito la seconda 7 e la prima 8. Infatti, essa equazione mostra che

$$\frac{\partial\cdot\frac{n'}{n}}{\partial L_1}=0; \qquad 13$$

la seconda 8 in seguito fa vedere che

$$\frac{\partial q}{\partial L_1}=0;$$

per conseguenza la seconda 7 somministra, chiamando k una funzione arbitraria della sola μ,

$$q = \frac{k}{l_2} \cdot \qquad 14$$

Questo valore riduce la prima 8 alla

$$\frac{\partial(p^2+q^2)}{\partial N_1} = 0,$$

dalla quale, chiamando h una nuova funzione arbitraria della sola μ, si deduce

$$p^2 + q^2 = h^2. \qquad 15$$

Osserviamo altresì che le p, q rappresentano la curvatura e la torsione della linea qualunque (μ, ν). Ma queste due quantità, in causa della seconda 9 e della 14, sono costanti lungo tutta la linea. Quindi, invocando una nota proprietà, della quale il sig. Puiseux ha dato pel primo una dimostrazione analitica, possiamo concludere fin d'ora che la linea isotermica qualunque (μ, ν) è un'elica tracciata sopra un cilindro retto a base circolare. Noi però prescinderemo da questa cognizione, in primo luogo per fare una applicazione delle formole contenute nelle nostre prime due Memorie *Sulle coordinate curvilinee,* ed in secondo luogo perchè non basterà, per la presente questione, che si conosca la natura geometrica d'una linea isotermica qualunque, ma converrà che sia determinata anche la natura geometrica del sistema costituito dalle diverse linee isotermiche.

5.

Veniamo alle equazioni, che somministrano, mediante l'integrazione, i coseni delle tangenti alle linee (μ, ν), (λ, μ), e le coordinate rettilinee della superficie (μ).

La terza (33), la terza (35) e la prima (34), in causa delle 2 e terza 4, diventano rispettivamente

$$i_\nu = -i'_\lambda \operatorname{sen}\omega_\lambda + i''_\lambda \cos\omega_\lambda, \quad i'_\nu = i'_\lambda \cos\omega_\lambda + i''_\lambda \operatorname{sen}\omega_\lambda, \quad i''_\nu = -i_\lambda. \qquad 16$$

Le tre prime (28) possono scriversi

$$\frac{\partial i_\lambda}{\partial L_1}=p\,i'_\lambda,\quad \frac{\partial i'_\lambda}{\partial L_1}=-p\,i_\lambda-q\,i''_\lambda,\quad \frac{\partial i''_\lambda}{\partial L_1}=q\,i'_\lambda; \tag{17}$$

e le tre ultime (28) assumono la forma

$$\frac{\partial i_\nu}{\partial N_1}=\frac{n'}{n}i'_\nu,\quad \frac{\partial i'_\nu}{\partial N_1}=-\frac{n'}{n}i_\nu+\frac{q}{l_2}i''_\nu,\quad \frac{\partial i''_\nu}{\partial N_1}=-\frac{q}{l_2}i'_\nu. \tag{18}$$

Dapprima s'integreranno le 17, di poi si formeranno i valori delle i_ν, i'_ν, i''_ν col mezzo delle 16 e si renderanno soddisfatte le 18. Due integrali evidenti, l'uno delle 17 e l'altro delle 18, sono

$$i_\lambda^2+i_\lambda'^2+i_\lambda''^2=1,\quad i_\nu^2+i_\nu'^2+i_\nu''^2=1. \tag{19}$$

La prima e la terza (2) possono scriversi

$$\frac{\partial i}{\partial L_1}=l_2 i_\lambda,\quad \frac{\partial i}{\partial N_1}=i_\nu; \tag{20}$$

dalle quali, una volta note le i_λ, i_ν, si concluderà la i.

6.

Formiamo gl'integrali completi delle 17 e della prima 20.

Deduciamo dalla prima 17

$$\frac{\partial^2 i_\lambda}{\partial L_1^2}=-p^2 i_\lambda-p\,q\,i_\lambda'',$$

e deduciamo da questa

$$\frac{\partial^3 i_\lambda}{\partial L_1^3}=-p^2\frac{\partial i_\lambda}{\partial L_1}-q^2\frac{\partial i_\lambda}{\partial L_1},$$

ovvero, per la 15,

$$\frac{\partial^3 i_\lambda}{\partial L_1^3}+h^2\frac{\partial i_\lambda}{\partial L_1}=0.$$

L'integrale completo di quest'equazione è

$$h\,i_\lambda=p(\alpha_i\cos hL_1-\beta_i\operatorname{sen}hL_1)+q\,\gamma_i, \tag{21}$$

ove con $\frac{p\alpha_i}{h}$, $\frac{p\beta_i}{h}$, $\frac{q\gamma_i}{h}$ si sono dinotate le tre costanti arbitrarie rispetto ad L_1, le quali saranno funzioni arbitrarie delle N_1, μ. La prima 17 somministra in seguito

$$i_\lambda' = -\alpha_i \operatorname{sen} hL_1 - \beta_i \cos hL_1; \tag{22}$$

e la seconda

$$hqi_\lambda'' = -p^2(\alpha_i \cos hL_1 - \beta_i \operatorname{sen} hL_1) - pq\gamma_i + h^2(\alpha_i \cos hL_1 - \beta_i \operatorname{sen} hL_1),$$

ovvero

$$hi_\lambda'' = q(\alpha_i \cos hL_1 - \beta_i \operatorname{sen} hL_1) - p\gamma_i. \tag{23}$$

Da ultimo, l'integrale completo della prima 20 è

$$h^2(i - I) = l_2\{p(\alpha_i \operatorname{sen} hL_1 + \beta_i \cos hL_1) + hq\gamma_i L_1\},$$

ovvero

$$h^2(i - I) = pl_2(\alpha_i \operatorname{sen} hL_1 + \beta_i \cos hL_1) + hk\gamma_i L_1, \tag{24}$$

ove I dinota una funzione arbitraria delle N_1, μ.

7.

Troviamo le relazioni, che legano tra loro le funzioni arbitrarie α_i, β_i, γ_i.

La prima 19, mediante le 21, 22, 23, si cambia in

$$(p^2+q^2)(\alpha_i \cos hL_1 - \beta_i \operatorname{sen} hL_1)^2 + h^2(\alpha_i \operatorname{sen} hL_1 + \beta_i \cos hL_1)^2 + (p^2+q^2)\gamma_i^2 = h^2,$$

ovvero

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1. \tag{25}$$

La $\sum i_\lambda^2 = 1$ somministra dapprima

$$\sum \alpha_i \beta_i = 0, \quad \sum \beta_i \gamma_i = 0, \quad \sum \gamma_i \alpha_i = 0; \tag{26}$$

dipoi

$$\sum \alpha_i^2 = \sum \beta_i^2, \quad p^2 \sum \beta_i^2 + q^2 \sum \gamma_i^2 = h^2.$$

Ma la $\sum i_\lambda'^2 = 1$ dà

$$\sum \alpha_i^2 = 1;$$

perciò saranno

$$\sum \alpha_i^2 = 1, \quad \sum \beta_i^2 = 1, \quad \sum \gamma_i^2 = 1. \tag{27}$$

È facile il riconoscere che, mediante le relazioni 26, 27, le $\sum i_\lambda''^2 = 1$, $\sum i_\lambda i_\lambda' = 0$, $\sum i_\lambda' i_\lambda'' = 0$, $\sum i_\lambda'' i_\lambda = 0$ riescono soddisfatte. Adunque concluderemo che le α_i, β_i, γ_i rappresentano i coseni formati con l'asse delle i da tre nuovi assi mobili perpendicolari tra loro.

8.

Determiniamo la natura geometrica della linea isotermica qualunque (μ, ν).

Assumeremo tre nuovi assi, i quali abbiano l'origine nel punto mobile di coordinate I e le direzioni rappresentate dai coseni α_i, β_i, γ_i. Chiamando α, β, γ le coordinate d'un punto qualunque dello spazio riferito a' nuovi assi, avremo

$$\alpha = \sum(i-I)\alpha_i, \quad \beta = \sum(i-I)\beta_i, \quad \gamma = \sum(i-I)\gamma_i;$$

e quindi, in causa della 24,

$$h^2\alpha = p l_2 \operatorname{sen} h L_1, \quad h^2\beta = p l_2 \cos h L_1, \quad h\gamma = k L_1. \qquad 28$$

Le prime due mostrano che la linea (μ, ν) è tracciata sopra un cilindro retto, il quale ha per base un circolo col centro nella nuova origine, col piano perpendicolare al nuovo asse delle γ e col raggio r dato dall'equazione

$$r = \frac{p l_2}{h^2}. \qquad 29$$

Chiamando θ l'angolo formato dalla tangente alla (μ, ν) con l'asse delle γ, la 21 somministra

$$\cos\theta = \frac{q}{h}; \qquad 30$$

per cui l'angolo è costante rispetto ad L_1, e la linea per conseguenza è un'elica.

Osserviamo che le 30, 15, 29, 14 permettono d'esprimere le p, q, l_2, k in funzioni delle h, r, θ mediante le seguenti formole

$$p = h \operatorname{sen}\theta, \quad q = h\cos\theta, \quad l_2 = \frac{hr}{\operatorname{sen}\theta}, \quad k = h^2 r \cos\theta. \qquad 31$$

9.

Ora, possiamo assumere il sistema delle superficie cilindriche, le cui sezioni piane perpendicolari alle generatrici sono sempre circonferenze, come uno de' due sistemi (μ), (ν), i quali determinano con le loro scambievoli intersezioni le differenti linee (μ, ν). Assumiamolo come il sistema (μ), ed allora le r, γ_i saranno funzioni della sola μ, per cui

$$\frac{\partial r}{\partial N_1}=0, \quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial N_1}=0. \qquad 32$$

Ciò posto, le 31 mostrano che

$$\frac{\partial \theta}{\partial N_1}=0, \quad \frac{\partial l_2}{\partial N_1}=0, \quad \frac{\partial p}{\partial N_1}=0, \quad \frac{\partial q}{\partial N_1}=0; \qquad 33$$

la prima delle quali manifesta che le diverse linee (μ, ν) situate in una stessa superficie (μ) sono tra loro parallele. In causa della prima 5 e della seconda 33, noi possiamo risguardare la l_2 come già compenetrata nella l_1, la quale è funzione indeterminata delle λ, μ, e quindi possiamo fare

$$l_2=1. \qquad 34$$

La prima 7, in causa della stessa seconda 33, somministra

$$\omega_\lambda=0, \qquad 35$$

la quale risulta evidente quando si rifletta che ω_λ esprime l'angolo formato dalla normale principale della linea (μ, ν) colla normale della superficie (μ), e che la linea è geodetica della superficie. La seconda 8 poi si cambia in

$$\frac{n'}{n}=\frac{\cos^2\theta}{r}. \qquad 36$$

10.

Determiniamo le funzioni arbitrarie contenute nell'integrale 24 in modo che riescano soddisfatte le 18 e la seconda 20.

Le 16, pel valore 35, diventano

$$i_\nu=i_\lambda'', \quad i_\nu'=i_\lambda', \quad i_\nu''=-i_\lambda. \qquad 37$$

Ciò posto, la seconda 20, in causa delle 23, 24, prima 37, si cambia in

$$hq(\alpha_i\cos hL_1-\beta_i\operatorname{sen}hL_1)-hp\gamma_i=p\left(\frac{\partial\alpha_i}{dN_1}\operatorname{sen}hL_1+\frac{\partial\beta_i}{\partial N_1}\cos hL_1\right)+h^2\frac{\partial I_i}{\partial N_1};$$

la quale si decompone nelle

$$\frac{\partial I}{\partial N_1}+\gamma_i \operatorname{sen}\theta=0, \quad \frac{\partial \alpha_i}{\partial N_1}=-\frac{\cos\theta}{r}\beta_i, \quad \frac{\partial \beta_i}{\partial N_1}=\frac{\cos\theta}{r}\alpha_i. \qquad 38$$

È facile il verificare che le tre 18, mediante le due ultime 38 e mediante i valori trovati precedentemente, si riducono ad altrettante identità. La prima fra le 38 somministra

$$I=I^0-\gamma_i N_1 \operatorname{sen}\theta, \qquad 39$$

ove I^0 è funzione arbitraria della sola μ; e le due ultime conducono alla

$$\frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial N_1^2}+\frac{\cos^2\theta}{r^2}\alpha_i=0,$$

per cui risultano

$$\left.\begin{aligned}\alpha_i&=a_i \operatorname{sen}\left(\frac{\cos\theta}{r}N_1\right)+b_i\cos\left(\frac{\cos\theta}{r}N_1\right),\\ \beta_i&=-a_i\cos\left(\frac{\cos\theta}{r}N_1\right)+b_i\operatorname{sen}\left(\frac{\cos\theta}{r}N_1\right),\end{aligned}\right\} \qquad 40$$

ove a_i, b_i sono funzioni arbitrarie della sola μ. È chiaro, in causa delle 25, 26, 27, che le a_i, b_i, γ_i sono unite tra loro mediante le equazioni

$$\left.\begin{aligned}&a_i^2+b_i^2+\gamma_i^2=1,\\ &\sum a_i^2=1, \quad \sum b_i^2=1, \quad \sum \gamma_i^2=1, \quad \sum a_i b_i=0, \quad \sum b_i\gamma_i=0, \quad \sum \gamma_i a_i=0.\end{aligned}\right\} \qquad 41$$

Ora, la 24, col mezzo delle 39, 40, acquista la forma

$$i-I^0+\gamma_i N_1 \operatorname{sen}\theta=\gamma_i L_1\cos\theta$$

$$r\operatorname{sen} h L_1\left\{a_i\operatorname{sen}\left(\frac{\cos\theta}{r}N_1\right)+b_i\cos\left(\frac{\cos\theta}{r}N_1\right)\right\}-$$

$$-r\cos h L_1\left\{a_i\cos\left(\frac{\cos\theta}{r}N_1\right)-b_i\operatorname{sen}\left(\frac{\cos\theta}{r}N_1\right)\right\},$$

ovvero

$$i=I^0+\gamma_i(L_1\cos\theta-N_1\operatorname{sen}\theta) \qquad 42$$

$$-r a_i\cos\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}L_1+\frac{\cos\theta}{r}N_1\right)+r b_i\operatorname{sen}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}L_1+\frac{\cos\theta}{r}N_1\right).$$

Ne seguono

$$\left.\begin{aligned} i_\lambda &= a_i \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{r} L_1 + \frac{\cos\theta}{r} N_1\right) + \\ &\qquad + b_i \operatorname{sen}\theta \cos\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{r} L_1 + \frac{\cos\theta}{r} N_1\right) + \gamma_i \cos\theta, \\ i_\nu &= a_i \cos\theta \operatorname{sen}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{r} L_1 + \frac{\cos\theta}{r} N_1\right) + \\ &\qquad + b_i \cos\theta \cos\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{r} L_1 + \frac{\cos\theta}{r} N_1\right) - \gamma_i \operatorname{sen}\theta. \end{aligned}\right\} \quad 43$$

11.

Da ultimo, rendiamo soddisfatte le 10, 11.

Osserviamo che la μ è contenuta non solo nelle a_i, b_i, γ_i, I^0, r, θ, ma anche nelle L_1, N_1, dimodochè, facendo per brevità

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{r} L_1 + \frac{\cos\theta}{r} N_1 = \xi,$$

dovremo avere

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial i}{\partial\mu} &= i_\lambda \frac{\partial L_1}{\partial\mu} + i_\nu \frac{\partial N_1}{\partial\mu} + r(a_i \operatorname{sen}\xi + b_i \cos\xi)\left(L_1 \frac{d\cdot\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}}{d\mu} + N_1 \frac{d\frac{\cos\theta}{r}}{d\mu}\right) \\ &\quad - \frac{d\cdot r a_i}{d\mu}\cos\xi + \frac{d\cdot r b_i}{d\mu}\operatorname{sen}\xi + L_1 \frac{d\cdot\gamma_i\cos\theta}{d\mu} - N_1 \frac{d\cdot\gamma_i\operatorname{sen}\theta}{d\mu} + \frac{dI^0}{d\mu}. \end{aligned}\right\} \quad 44$$

La 11 adunque diventerà

$$\left.\begin{aligned} & L_1 \sum \left\{ r(a_i \operatorname{sen}\xi + b_i \cos\xi) \frac{d\cdot\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}}{d\mu} + \frac{d\cdot\gamma_i\cos\theta}{d\mu} \right\} i_\nu \\ & + N_1 \sum \left\{ r(a_i \operatorname{sen}\xi + b_i \cos\xi) \frac{d\cdot\frac{\cos\theta}{r}}{d\mu} - \frac{d\cdot\gamma_i\operatorname{sen}\theta}{d\mu} \right\} i_\nu \\ & - \quad \sum \left(\frac{d\cdot r a_i}{d\mu}\cos\xi - \frac{d\cdot r b_i}{d\mu}\operatorname{sen}\xi - \frac{dI^0}{d\mu} \right) i_\nu + \frac{\partial N_1}{\partial\mu} = M\cos\eta_\lambda, \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

ove i_ν è data dalla seconda 43, cioè dalla

$$i_\nu = (a_i \operatorname{sen}\xi + b_i \cos\xi)\cos\theta - \gamma_i \operatorname{sen}\theta.$$

È chiaro che nella (a) dovranno mancare i termini moltiplicati dalla L_1 posta fuori delle funzioni trigonometriche, perciò

$$\sum \left\{ r(a_i \operatorname{sen}\xi + b_i \cos\xi) \frac{d\cdot\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}}{d\mu} + \frac{d\cdot\gamma_i\cos\theta}{d\mu} \right\} i_\nu = 0,$$

ovvero, per le 41,

$$r\cos\theta \frac{d\cdot\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}}{d\mu} + \cos^2\theta \sum (a_i \operatorname{sen}\xi + b_i\cos\xi)\frac{d\gamma_i}{d\mu} - \operatorname{sen}\theta \frac{d\cos\theta}{d\mu} = 0;$$

la quale si decompone nelle

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\mu}\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{d\theta}{d\mu}, \quad \sum a_i \frac{d\gamma_i}{d\mu} = 0, \quad \sum b_i \frac{d\gamma_i}{d\mu} = 0.$$

Si conclude dalla prima

$$r = r_0 \operatorname{tang}\theta, \tag{45}$$

indicando con r_0 una costante assoluta, e non prendendo in considerazione le due soluzioni particolari

$$\theta = 0, \quad \theta = \tfrac{1}{2}\pi,$$

in ciascuna delle quali r rimane funzione indeterminata della μ. Si conclude dalle altre due

$$\gamma_i = \text{cost}, \tag{46}$$

la quale manifesta che le superficie cilindriche (μ) hanno le generatrici parallele tra loro.

In seguito, siccome

$$\begin{aligned}\sum \left\{ r(a_i \operatorname{sen}\xi + b_i\cos\xi)\frac{d\frac{\cos\theta}{r}}{d\mu} - \frac{d\cdot\gamma_i\operatorname{sen}\theta}{d\mu}\right\} i_\nu &= r\cos\theta\frac{d\frac{\cos\theta}{r}}{d\mu} + \operatorname{sen}\theta\frac{d\operatorname{sen}\theta}{d\mu} \\ &= -\frac{d\log r}{d\mu}\cos^2\theta,\end{aligned}$$

$$\sum\left(\frac{d\cdot r a_i}{d\mu}\cos\xi-\frac{d\cdot r b_i}{d\mu}\operatorname{sen}\xi\right)i_\nu=-r\cos\theta\sum\left(a_i\frac{db_i}{d\mu}\operatorname{sen}^2\xi-b_i\frac{da_i}{d\mu}\cos^2\xi\right)$$

$$=r\cos\theta\sum b_i\frac{da_i}{d\mu};$$

così la (a) diventerà

$$-N_1\frac{d\log r}{d\mu}\cos^2\theta-r\cos\theta\sum b_i\frac{da_i}{d\mu}+\sum\frac{dI^0}{d\mu}i_\nu+\frac{\partial N_1}{\partial\mu}=M\cos\eta_\lambda. \qquad (b)$$

Ora, è chiaro che nella (b) dovranno mancare i termini moltiplicati da senξ, cosξ, per cui

$$\sum a_i\frac{dI^0}{d\mu}=0,\quad \sum b_i\frac{dI^0}{d\mu}=0.$$

Quindi chiamando $r_0 f$ una funzione della μ ed ommettendo la costante arbitraria, il che vale quanto trasportare gli assi delle i parallelamente a sè stessi, avremo

$$I_0=r_0 f\gamma_i. \qquad 47$$

Per conseguenza, avuto anche riguardo alla 45, la (b) si riduce alla

$$\frac{\partial N_1}{\partial\mu}-N_1\cot\theta\frac{d\theta}{d\mu}-r_0\frac{df}{d\mu}\operatorname{sen}\theta-r_0\operatorname{sen}\theta\sum b_i\frac{da_i}{d\mu}=M\cos\eta_\lambda,$$

ovvero

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\cdot\frac{N_1}{\operatorname{sen}\theta}=\frac{M\cos\eta_\lambda}{\operatorname{sen}\theta}+r_0\left(\frac{df}{d\mu}+\sum b_i\frac{da_i}{d\mu}\right). \qquad 48$$

La 10 potrà scriversi, in causa della 36,

$$\frac{\partial\cdot M\cos\eta_\lambda}{\partial N_1}=\frac{\cos^2\theta}{r}M\operatorname{sen}\eta_\lambda+\frac{\partial\log n}{\partial\mu}.$$

Ma dalla 48 si deduce, prendendo la derivata rispetto a ν,

$$\frac{\partial\cdot M\cos\eta_\lambda}{\partial N_1}=\frac{\partial\log n}{\partial\mu}-\cot\theta\frac{d\theta}{d\mu};$$

perciò

$$M\operatorname{sen}\eta_\lambda=-\frac{r}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}\frac{d\theta}{d\mu}=-r_0\frac{d\operatorname{tang}\theta}{d\mu}. \qquad 49$$

12.

Le 41 sono verificate da' seguenti valori

$$\left.\begin{array}{c} a_x = -\cos\phi, \quad a_y = \operatorname{sen}\phi, \quad a_z = 0, \quad b_x = \operatorname{sen}\phi, \quad b_y = \cos\phi, \quad b_z = 0, \\ \gamma_x = 0, \quad \gamma_y = 0, \quad \gamma_z = 1, \end{array}\right\} \quad 50$$

ove ϕ è funzione arbitraria di μ. Le 42 allora somministrano

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{r} L_1 + \frac{\cos\theta}{r} N_1 - \phi\right), \\ y = r\operatorname{sen}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{r} L_1 + \frac{\cos\theta}{r} N_1 - \phi\right), \\ z = L_1\cos\theta - N_1\operatorname{sen}\theta + r_0 f. \end{array}\right\} \quad 51$$

Ciò posto, chiamiamo rispettivamente ζ_0, $\zeta_0 + \zeta$ l'angolo formato con l'asse delle x dal raggio r condotto al punto d'incontro dell'elica (μ, ν) col piano xy, e l'angolo formato con lo stesso asse dal raggio r condotto al piede della z relativa al punto qualunque della linea, dimodochè

$$x = r\cos(\zeta + \zeta_0), \quad y = r\operatorname{sen}(\zeta + \zeta_0). \quad 52$$

È chiaro che le ζ_0, ζ saranno funzioni rispettivamente l'una delle μ, ν, l'altra λ, μ, ν; e che, per le due prime 51 dovremo avere

$$L_1\operatorname{sen}\theta + N_1\cos\theta = r(\zeta + \zeta_0 + \phi). \quad 53$$

Questa equazione riduce la terza 51 alla

$$z = r_0(\zeta + \zeta_0 + \phi + f) - \frac{N_1}{\operatorname{sen}\theta},$$

la quale, dovendo essere in pari tempo

$$z = 0, \quad \zeta = 0,$$

si decompone nelle

$$z = r_0\zeta, \quad \frac{N_1}{\operatorname{sen}\theta} = r_0(\zeta_0 + \phi + f). \quad 54$$

La 53, mediante la seconda 54, può scriversi

$$\zeta = \frac{\cos\theta}{r_0} L_1 - (\zeta_0 + \phi)\operatorname{sen}^2\theta + f\cos^2\theta; \quad 55$$

la quale, per $\zeta=0$, si cambia in

$$L_1=\frac{r_0}{\cos\theta}\{(\zeta_0+\phi)\operatorname{sen}^2\theta-f\cos^2\theta)\},$$

e rappresenta il piano xy riferito alle coordinate curvilinee λ, μ, ν. Ora, dalle 52 e prima 54 si deduce

$$\frac{y}{x}=\operatorname{tang}\left(\frac{z}{r_0}+\zeta_0\right), \qquad 56$$

la quale è l'equazione dell'elicoide avente per piano direttore il piano xy e per direttrici l'asse delle z e l'elica qualunque (μ, ν).

13.

Assumiamo quale sistema (ν) gli elicoidi rappresentati dalla 56, ed allora la ζ_0 dovrà essere funzione di ν soltanto. Siccome in tal caso deduciamo dalla seconda 54

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\cdot\frac{N_1}{\operatorname{sen}\theta}=r_0\frac{d(\phi+f)}{d\mu},$$

così le 48, 49 somministreranno

$$\eta_\lambda=\tfrac{1}{2}\pi, \quad M=-\frac{dr}{d\mu}\cdot \qquad 57$$

Le formole

$$\cos\eta_\mu=-\cos\eta_\nu\cos\eta_\lambda+\operatorname{sen}\eta_\nu\operatorname{sen}\eta_\lambda\cos\varepsilon_\mu, \quad \frac{\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda}{\operatorname{sen}\eta_\lambda}=\frac{\operatorname{sen}\varepsilon_\mu}{\operatorname{sen}\eta_\mu}=\frac{\operatorname{sen}\varepsilon_\nu}{\operatorname{sen}\eta_\nu}$$

danno in seguito

$$\eta_\mu=\tfrac{1}{2}\pi, \quad \varepsilon_\lambda=\tfrac{1}{2}\pi, \quad \varepsilon_\nu=\eta_\nu. \qquad 58$$

Quest'angolo ε_ν si trova poi col mezzo della

$$\cos\varepsilon_\nu=\sum i_\lambda i_\mu \text{ ovvero } lm\cos\varepsilon_\nu=\sum\frac{\partial i}{\partial\lambda}\frac{\partial i}{\partial\mu}, \text{ oppure } -\frac{dr}{d\mu}\cot\varepsilon_\nu=\sum\frac{\partial i}{\partial L_1}\frac{\partial i}{\partial\mu};$$

la quale, in causa delle 51, può scriversi

$$-\frac{dr}{d\mu}\cot\varepsilon_\nu = -r\,\mathrm{sen}(\zeta+\zeta_0)\frac{\partial\zeta}{\partial L_1}\left\{\frac{dr}{d\mu}\cos(\zeta+\zeta_0) - r\,\mathrm{sen}(\zeta+\zeta_0)\frac{\partial\zeta}{\partial\mu}\right\}$$

$$+r\cos(\zeta+\zeta_0)\frac{\partial\zeta}{\partial L_1}\left\{\frac{dr}{d\mu}\,\mathrm{sen}(\zeta+\zeta_0) + r\cos(\zeta+\zeta_0)\frac{\partial\zeta}{\partial\mu}\right\} + r_0^2\frac{\partial\zeta}{\partial L_1}\frac{\partial\zeta}{\partial\mu}$$

$$=\frac{r_0^2}{\cos^2\theta}\frac{\partial\zeta}{\partial L_1}\frac{\partial\zeta}{\partial\mu} = \frac{r_0}{\cos\theta}\frac{\partial\zeta}{\partial\mu},$$

da cui

$$\cot\theta = -\frac{\cos\theta}{\frac{d\theta}{d\mu}}\frac{\partial\zeta}{\partial\mu}. \qquad 59$$

14.

Prendiamo

$$r=\mu, \quad \zeta_0=\nu, \qquad 60$$

e facciamo per brevità

$$\frac{\cos\theta}{r_0}L_1 - \phi\,\mathrm{sen}^2\theta + f\cos^2\theta = \mathrm{sen}^2\theta\cdot L_2(\lambda,\ \mu).$$

La 55 diventerà

$$\zeta = \frac{\mu^2}{r_0^2+\mu^2}(L_2-\nu), \qquad 61$$

per cui le 52 e la prima 54 potranno scriversi

$$x=\mu\cos\left(\frac{\mu^2L_2+r_0^2\nu}{r_0^2+\mu^2}\right), \quad y=\mu\,\mathrm{sen}\left(\frac{\mu^2L_2+r_0^2\nu}{r_0^2+\mu^2}\right), \quad z=r_0\frac{\mu^2}{r_0^2+\mu^2}(L_2-\nu). \qquad 62$$

Queste equazioni, nelle quali L_2 è funzione arbitraria delle λ, μ ed r_0 è costante arbitraria, rappresentano le richieste linee isotermiche $(\mu,\ \nu)$.

Siccome poi

$$\mu=\sqrt{x^2+y^2}, \quad \nu = L_2 - \frac{r_0^2+\mu^2}{\mu^2}\frac{z}{r_0},$$

così potremo mettere la 56 sotto la forma

$$\frac{y}{x} = \mathrm{tang}\left\{L_2(\lambda,\ \sqrt{x^2+y^2}) - \frac{r_0 z}{x^2+y^2}\right\}; \qquad 63$$

e questa equazione rappresenterà le superficie del sistema (λ).

Pavia, 29 luglio 1871.

Intorno ad alcune formole della teoria delle curve di secondo e di terzo ordine.

(*del sig.* S. GUNDELFINGER, *docente a Tubinga*).

Sono note le espressioni che CAYLEY ha dato pei fattori lineari delle forme binarie dal 2° al 4° grado, in funzione di covarianti. In questa Nota sono svolti analoghi risultati per una serie di forme ternarie quadratiche e cubiche, scomponibili in fattori. Essa è divisa in tre parti.

La prima parte tratta brevissimamente delle forme quadratiche; dopo avere scomposto in fattori la più generale forma ternaria quadratica a determinante nullo, si considerano singoli esempi pei quali questa scomposizione si semplifica: come nella determinazione dei punti d'incontro di una conica e di una retta, nella ricerca delle due tangenti in questi punti, ecc.

Nella seconda parte si spezzano definitivamente nei loro fattori le forme cubiche ternarie che sono proporzionali al loro determinante Hessiano, ovvero quelle per le quali il determinante è identicamente nullo. Anche questi spezzamenti assumono per casi speciali forma più semplice; ne offre una prova la determinazione simmetrica, qui sviluppata, delle intersezioni di una retta e di una cubica generale.

Tali metodi di scomposizione presentano grandi vantaggi sui metodi non simmetrici usualmente adoperati, e per mettono di farne frequentissime applicazioni nella geometria analitica. Con una di queste applicazioni si chiude la Memoria; e cioè, dal metodo dato nella prima parte per trovare le intersezioni di una conica e di una retta si ricava quasi senza calcolo la nota rappresentazione di ARONHOLD di un punto appartenente ad una curva di terzo ordine (*).

(*) Berliner Monatsberichte, 1861, pag. 460.

I. Sulle forme ternarie quadratiche.

Sia

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \phi(x) = b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + \cdots + b_{33}x_3^2 = \sum_i \sum_k b_{ik} x_i x_k$$

una forma ternaria quadratica qualsivoglia, e sia

$$\Phi(u_1, u_2, u_3) = \Phi(u) = B_{11}u_1^2 + 2B_{12}u_1u_2 + \cdots + B_{33}u_3^2$$

la sua forma aggiunta, ove B_{ik} indica il coefficiente di b_{ik} nel determinante $B = \sum \pm b_{11} b_{22} b_{33}$. Nei trattati si dimostra di solito geometricamente, che la forma $\phi(x)$, nel caso che B si annulli, si spezza in due fattori lineari. Lo stesso risultato e in pari tempo l'effettiva espressione di questi fattori può ottenersi anche nel modo seguente. Per valori arbitrari di s_i ed x_i si ha

$$[\sum \pm \phi'(s_1)\phi'(x_2)s_3]^2 = 2[\sum \pm \phi'(s_1)\phi'(x_2)s_3][\sum \pm \Phi'(s_1)s_2x_3]$$

$$= 2\begin{vmatrix} 4B\sum_i s_i^2 & 4B\sum_i s_i x_i & 2\Phi(s) \\ 2\phi(s) & \sum_i s_i \phi'(x_i) & \sum s_i^2 \\ \sum_i s_i \phi'(x_i) & 2\phi(x) & \sum s_i x_i \end{vmatrix},$$

quindi per $B = 0$

$$\left.\begin{aligned} 16\Phi(s)\phi(s)\phi(x) &= [\sum \pm \phi'(s_1)\phi'(x_2)s_3]^2 + 4\Phi(s)[\sum x_i \phi'(s_i)]^2 \\ &= \{\sum \pm \phi'(s_1)\phi'(x_2)s_3 + 2\sqrt{-\Phi(s)}\sum x_i\phi'(s_i)\} \times \\ &\times \{\sum \pm \phi'(s_1)\phi'(x_2)s_3 - 2\sqrt{-\Phi(s)}\sum x_i\phi'(s_i)\}(*). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Questa formola presenta la $\phi(x)$ scomposta in due fattori, dove possiamo attribuire alla s_i valori affatto arbitrari.

(*) Pervenni a questa relazione nel modo seguente. Posto

$$\varphi(x) = (p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3)(q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3) = p_x q_x$$

formai un'equazione quadratica avente per radici le due espressioni

$$(\Sigma \pm p_1 q_2 s_3) p_s q_x \text{ e } (\Sigma \pm p_1 q_2 s_3) p_x q_s;$$

dalla soluzione di essa, mediante un piccolo calcolo simbolico, risultò che:

$$(\Sigma \pm p_1 q_2 s_3)(p_x q_s - p_s q_x) = \Sigma \pm \varphi'(s_1)\varphi'(x_2)s_3.$$

Mediante la (1) si risolve in sostanza ogni problema nel quale si tratti di trovare i fattori di una forma quadratica ternaria spezzabile; tuttavia per certe questioni speciali essa non fornisce la più semplice soluzione; per ottenere la quale, non sarà superflua una trattazione speciale (*).

A mo' d'esempio la funzione

$$b_{11}(c_2u_3-c_3u_2)^2+2\,b_{12}(c_2u_3-c_3u_2)(c_3u_1-c_1u_2)+\cdots$$
$$=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & c_1 & u_1 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & c_2 & u_2 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & c_3 & u_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{pmatrix} cu \\ cu \end{pmatrix}\ (^{**})$$

è una forma quadratica delle u_i, scomponibile, poichè essa posta uguale a zero rappresenta il prodotto delle equazioni dei due punti, nei quali $\phi(x)=0$ è incontrata dalla retta $c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3=c_x=0$. Per trovare separatamente i due punti d'intersezione, partiamo dalla nota formola

$$\begin{pmatrix} cu \\ cu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cs \\ cs \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} csu \\ csu \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} cs \\ cu \end{pmatrix}^2,$$

ove le s_i sono arbitrarie. E siccome

$$\begin{pmatrix} csu \\ csu \end{pmatrix}=-(\sum\pm c_1s_2u_3)^2,$$

così si ha

$$\left.\begin{aligned}\begin{pmatrix} cu \\ cu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cs \\ cs \end{pmatrix}&=-\begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix}(\sum\pm c_1s_2u_3)^2+\begin{pmatrix} cs \\ cu \end{pmatrix}^2\\ &=\left\{\begin{pmatrix} cs \\ cu \end{pmatrix}+\sqrt{\begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix}}\cdot\sum\pm c_1s_2u_3\right\}\left\{\begin{pmatrix} cs \\ cu \end{pmatrix}-\sqrt{\begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix}}\cdot\sum\pm c_1s_2u_3\right\}.\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

I fattori del secondo membro di questa equazione, posti uguali a zero, stante la completa arbitrarietà delle s_i rappresentano i singoli punti d'incontro di $\phi(x)=0$ con $c_x=0$ (***).

(*) Cfr. anche *Giornale di Matematiche*, vol. 1° (Napoli 1863), pag. 360 (L. C.)

(**) Analogamente indicheremo in seguito con $\begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix}$ il determinante delle b_{ik} orlato con le c_i; ecc., ecc.

(***) Questa soluzione comprende in sè come caso particolare quella data da Aronhold nel Giornale di Borchardt, t. 61, pag. 102.

Sostituendo nella (2) $\frac{1}{2}\phi'(x_i)$ in luogo di u_i e $\frac{1}{2}\phi'(s_i)$ in luogo di s_i, le $\begin{pmatrix} cu \\ cu \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} cs \\ cu \end{pmatrix}$ si trasformano rispettivamente in

$$\phi(x)\Phi(c)-c_x^2B \text{ ed in } \tfrac{1}{2}\Phi(c)\sum\phi'(s_i)x_i-c_sc_xB,$$

cosicchè si ottiene

$$\left.\begin{aligned} &4\{\phi(x)\Phi(c)-c_x^2B\}\{\phi(s)\Phi(c)-c_s^2B\}=\\ &=\{\Phi(c)\sum\phi'(s_i)x_i-4c_sc_xB\}^2+\Phi(c)[\sum\pm\phi'(s_1)\phi'(x_2)c_3]^2\\ &=\{\Phi(c)\sum\phi'(s_i)x_i-4c_sc_xB+\sqrt{-\Phi(c)}\cdot\sum\pm\phi'(s_1)\phi'(x_2)c_3\}\times\\ &\times\{\Phi(c)\sum\phi'(s_i)x_i-4c_sc_xB-\sqrt{-\Phi(c)}\cdot\sum\pm\phi'(s_1)\phi'(x_2)c_3\}. \end{aligned}\right\}\quad(3)$$

È manifesto che $\phi(x)\Phi(c)-c_x^2B=0$ rappresenta la coppia delle tangenti alla conica $\phi(x)=0$ nei punti ove questa è incontrata da $c_x=0$, e l'equazione (3) fornisce separatamente queste due tangenti con l'introduzione di parametri arbitrari.

Se si vogliano determinare i due punti d'incontro della conica ϕ con la polare di un polo arbitrario y, basta sostituire in (2) $c_i=\frac{1}{2}\phi'(y_i)$; e si ottiene immediatamente

$$\left.\begin{aligned} &4\{\phi(y)\Phi(u)-Bu_y^2\}\{\phi(y)\Phi(s)-Bs_y^2\}=\\ &=\{\phi(y)\sum u_i\Phi'(s_i)-4u_ys_yB\}^2+B\phi(y)[\sum\pm\phi'(y_1)s_2u_3]^2\\ &=\{\phi(y)\sum u_i\Phi'(s_i)-4u_ys_yB+\sqrt{-B\phi(y)}\cdot[\sum\pm\phi'(y_1)s_2u_3]\}\times\\ &\times\{\phi(y)\sum u_i\Phi'(s_i)-4u_ys_yB-\sqrt{-B\phi(y)}\cdot[\sum\pm\phi'(y_1)s_2u_3]\}. \end{aligned}\right\}\quad(4)$$

I due fattori del secondo membro, posti uguali a zero, rappresentano (le u_i essendo le coordinate correnti) i punti di contatto delle tangenti che si possono condurre da y alla conica.

Si ricavano infine anche le singole equazioni di queste tangenti, sostituendo in (2) ai coefficienti b_{ik} i loro complementi B_{ik}, onde si ottiene

$$\left.\begin{aligned} &\{4\phi(x)\phi(y)-[\sum x_i\phi'(y_i)]^2\}\{4\phi(s)\phi(y)-[\sum s_i\phi'(y_i)]^2\}\\ &=\{2\phi(y)\sum x_i\phi'(s_i)-\sum\phi'(y_i)x_i\sum\phi'(y_i)s_i\}^2+16B\phi(y)(\sum\pm y_1s_2x_3)^2\\ &=\{2\phi(y)\sum x_i\phi'(s_i)-\sum x_i\phi'(y_i)\sum s_i\phi'(y_i)+4\sqrt{-B\phi(y)}(\sum\pm y_1s_2x_3)\}\times\\ &\times\{2\phi(y)\sum x_i\phi'(s_i)-\sum x_i\phi'(y_i)\sum s_i\phi'(y_i)-4\sqrt{-B\phi(y)}(\sum\pm y_1s_2x_3)\}. \end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Gli esempi addotti dimostrano abbastanza come si devano trattare altre forme ternarie quadratiche scomponibili in fattori.

II. Sulle forme cubiche ternarie.

a.) Definizioni. La funzione fondamentale sia simbolicamente

$$f=(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^3=a^3_x=b^3_x=c^3_x=\cdots$$

Faremo qui uso delle seguenti, fra le forme del suo sistema (cfr. Mathematische Annalen di Clebsch e Neumann, t. IV, pag. 145)

$$\Theta=(\sum\pm a_1b_2u_3)^2a_xb_x=(abu)^2a_xb_x$$

$$\Delta=(abc)^2a_xb_x=\alpha^3_x=\beta^3_x$$

$$S_f=(abc)(abu)(acu)(bcu)=(s_1u_1+s_2u_2+s_3u_3)^3=u_s^3$$

$$B=\sum\pm\frac{\partial\Theta}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}u_3$$

$$S=\tfrac{1}{6}(abc)(abd)(acd)(bcd)=\tfrac{1}{6}a_s^3$$

$$H=(a\alpha u)^2a_x\alpha_x=u_s^2a_sa_x^2-Su_x^2$$

$$F=(abu)^2(cdu)^2(bcu)(adu)$$

$$L'=\tfrac{1}{2}\sum\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\frac{\partial S_f}{\partial u_i}-T_fu_x \quad (*)$$

$$T_f=(abu)(a\alpha u)(b\alpha u)(ab\alpha)=(abu)^2a_sb_su_s=(t_1u_1+t_2u_2+t_3u_3)^3=u_t^3$$

$$K=(\alpha\beta u)^2\alpha_x\beta_x$$

$$T=\tfrac{1}{6}a_t^3.$$

b.) La forma f è proporzionale al proprio Hessiano.

È geometricamente evidente che una curva di 3° ordine $f(x)=0$ è costituita da tre rette, quando essa coincide con la propria curva Hessiana $\Delta=0$, vale a dire quando Δ è proporzionale ad f. Non è altrettanto semplice la dimostrazione puramente analitica di questo teorema. Cercai di darne una nel mio lavoro « *Ueber die Ausartungen einer Curve dritter Ordnung* » (t. IV dei Mathem. Annalen di Clebsch e Gordan, pag. 569); ma essa, come ho più tardi osservato, non può riguardarsi come conclu-

(*) L'introduzione della combinazione L' si raccomanda specialmente per la semplice sua interpretazione geometrica. Il prodotto delle equazioni delle tre tangenti della curva $f=0$, nei punti ove essa è incontrata da una retta arbitraria $u_x=0$, si trova facilmente essere $fF+L'u_x^2=0$; quindi $L'=0$ rappresenta la retta satellite della retta $u_x=0$.

dente. Infatti ivi ho fatto l'ipotesi, non dimostrata, che l'annullarsi identicamente della funzione $TS_f - ST_f$ sia la condizione sufficiente per lo spezzamento della curva di 3° ordine in una conica e in una retta, anche quando $Tf - S\cdot\Delta = 0$. Questa ipotesi è senza dubbio esatta, ma non potrebbe essere dimostrata che assai difficilmente per la via ivi seguìta. Non sarà quindi inutile di sviluppare qui nuovamente quel teorema, in un modo affatto diverso dal precedente. In questo sviluppo tutto si riduce a dimostrare l'esistenza di certe forme miste lineari, mediante le quali lo spezzamento di f nei suoi tre fattori si compie senz'altro.

Ponendo

$$\Delta = \rho f, \tag{1}$$

le equazioni

$$\begin{aligned} T_f &= (ab\alpha)(a\alpha u)(b\alpha u)(abu) \\ S\cdot f &= (ab\alpha)^2 a_x b_x \alpha_x \\ T &= (abc)(ab\alpha)(ac\alpha)(bc\alpha) \end{aligned}$$

si trasformano immediatamente in

$$\left.\begin{aligned} T_f &= \rho S_f \\ S &= \rho^2 \\ T &= \rho^3 \ (*). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

È inoltre

$$\left.\begin{aligned} L' &= 3(abu)^2 a_s b_x u_s^2 - T_f u_x \\ &= 3(a\alpha u)^2 (abu)(\alpha bu) b_x - T_f u_x \\ &= 3\rho(acu)^2(abu)(cbu) b_x - T_f u_x \\ &= \rho S_f u_x - T_f u_x; \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

(*) Dalle (1) e (2) si ricava $Tf - S\Delta \equiv 0$. Viceversa questa equazione esprime la proporzionalità di f e Δ. Per l'esistenza della (1) è anche sufficiente che si annulli identicamente la forma mista $\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \Delta}{\partial x_2} u_3$, come d'altronde avviene sovente che le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di uno stesso fenomeno analitico si possano scrivere sotto forme diverse. Se p. e., $TS_f - ST_f \equiv 0$, la curva di terz'ordine possiede due punti doppi; ma la stessa cosa ha luogo, se $\Sigma \pm \frac{\partial S_f}{\partial u_1}\frac{\partial T_f}{\partial u_2} x_3 \equiv 0$, ecc.

dalla relazione

$$SF = \tfrac{2}{3} S_f T_f - \tfrac{1}{18} \sum_i \sum_k \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial S_f}{\partial u_i} \frac{\partial S_f}{\partial u_k}$$

(cfr. Math. Ann. di Clebsch e Neumann, t. IV, pag. 152) si ricava finalmente, tenendo presente la (3),

$$SF = \tfrac{2}{3} S_f T_f - \tfrac{1}{3} S_f T_f = \tfrac{1}{3} S_f T_f. \tag{4}$$

Per ottenere mediante queste formole le forme miste irrazionali sopra menzionate, partiamo dall'equazione

$$\left.\begin{aligned} 2B^2 = -36f^2F + 72\Theta f S_f - 36\Theta^3 - 48 f L' u_x^2 + 24 f T_f u_x \\ -16 S_f \Delta u_x^3 - 72 u_x^2 \Theta H - 36 u_x^4 K \text{ (*)} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

sussistente per la più generale funzione fondamentale f del terzo grado.

Se in particolare per la f ha luogo la relazione (1), la precedente equazione moltiplicata per T^3, e avuto riguardo alle (2) e (4), si muta in quest'altra:

$$\left.\begin{aligned} 2T^3B^2 = T^2\{72 S f T_f \Theta u_x + 8 T f T_f u_x^3 - 12 f^2 T_f^2 \\ - 36 S\Theta u_x^2 (2S\Theta + T u_x^2) - 36 T\Theta^3\}. \end{aligned}\right\} \tag{5a}$$

Posto

$$\left.\begin{aligned} 4T(6fT_f - 2Tu_x^3 - 18 S\Theta u_x + \sqrt{-6T}B) = P \\ 4T(6fT_f - 2Tu_x^3 - 18 S\Theta u_x - \sqrt{-6T}B) = Q, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

si può dare senza difficoltà a questa relazione la forma

$$PQ = 64(S^2 u_x^2 - 3T\Theta)^3. \tag{7}$$

Siccome il secondo membro di questa equazione, che sussiste per tutti i valori delle x_i ed u_i è un cubo perfetto, dev'essere tale anche il primo membro cioè PQ. Ma perchè ciò sia possibile, è necessario o che P e Q abbiano fattori comuni o che P e Q sieno separamente dei cubi perfetti. Nel primo caso anche $P+Q$ e $P-Q$, vale a dire

$$SfT_f - 2Tu_x^3 - 18 S\Theta u_x \text{ e } B$$

(*) Questa formola si ricava, dopo un po' di calcolo simbolico, dall'equazione generale che ho stabilito nei Math. Annalen di Clebsch e Neumann, t. IV, pag. 163, e per mezzo della quale il quadrato del determinante funzionale di due forme ternarie qualsivogliano e della evidente forma aggiunta u_x vengono espressi in funzione dei quadrati e dei prodotti di queste ultime.

dovrebbero avere fattori comuni, il che in generale non avviene, come può verificarsi sopra una qualche forma f speciale, che soddisfaccia alla relazione (1), p. e. sulla $f=6x_1x_2x_3$.

Escludendo dunque dapprima l'esistenza di fattori comuni a P e a Q, possiamo porre

$$P=M^3, \text{ e } Q=N^3, \tag{8}$$

ove M e N indicano forme aggiunte lineari, le quali sono affette d'irrazionalità (*) nei soli coefficienti e sono legate dalla relazione

$$MN=4(S^2u_x^2-3T\Theta). \tag{9}$$

Dall'esistenza di queste forme aggiunte M e N si può facilmente dimostrare che f si spezza in tre fattori lineari. Infatti, indicando con ε una delle due radici cubiche imaginarie dell'unità positiva, si ha

$$\begin{aligned}(4Su_x+M+N)(4Su_x+\varepsilon M+\varepsilon^2N)(4Su_x+\varepsilon^2M+\varepsilon N)&=\\ =4^3S^3u_x^3+M^3+N^3-12Su_xMN&\\ =48T_ff \quad [\text{cfr. le equazioni (6), (8) e (9)}].&\end{aligned}$$

In questa formola attribuendo alle u_i valori puramente numerici, la f si presenta espressa come prodotto di tre fattori lineari. Se invece le x_i assumono determinati valori, si ottiene T_f spezzata in tre espressioni lineari. La funzione

$$4Su_x+\varepsilon^lM+\varepsilon^{2l}N$$

rappresenta quindi per $l=0$, 1 e 2 tre forme aggiunte lineari, ciascuna delle quali è il prodotto di un fattore lineare di f e di un fattore lineare di T_f (**): risultato che coincide completamente con quello che io aveva già ricavato dall'ipotesi diretta dello spezzamento di f.

La dimostrazione qui data perde il suo valore quando P e Q hanno fattori comuni. In questo caso, secondo la (7), la $6fT_f-2Tu_x^3-18S\Theta u_x$ contiene manifestamente l'espressione $S^2u_x^2-3T\Theta$ come fattore, epperò

(*) Il ragionamento adoperato nel testo riuscirà più chiaro considerando in (7) come costanti una volta le x_i, un'altra volta le u_i. Per ulteriore intelligenza si potrebbe finalmente mostrare a priori che $S^2u^2_x-3T\Theta$ si spezza nel prodotto di due forme aggiunte lineari; infatti, considerando $S^2u^2_x-3T\Theta$ come forma quadratica sia delle x_i o sia delle u_i, sempre svanisce il corrispondente determinante.

(**) L'equazione (4) mostra a priori che $T_f=0$ rappresenta i tre vertici del triangolo.

per tutti i valori di u_i che soddisfanno all'equazione $Tu_x^2 - 3S\Theta = 0$ essa deve annullarsi; in altre parole, per tutti i detti valori di u_i si ha

$$6fT_f = 8\,Tu_x^3.$$

Ciò è possibile soltanto quando T e quindi Δ si annullano; e allora P e Q sono assolutamente nulli, come anche viceversa l'annullarsi di P e Q porta sempre come conseguenza $T=0$, oppure $T_f=0$. Così siamo condotti alla discussione della condizione

$$c.)\qquad \Delta = a_{111}x_1^3 + 3a_{112}x_1^2x_2 + \cdots + 6a_{123}x_1x_2x_3 \equiv 0.$$

La nota formola

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial a_{111}}a_{111} + \frac{\partial F}{\partial a_{112}}a_{112} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial a_{123}}a_{123} = \tfrac{4}{3}S_f^2$$

mostra che ora è anche

$$\tfrac{2}{3}S_f = \frac{\partial S}{\partial a_{111}}u_1^3 + \frac{\partial S}{\partial a_{112}}u_1^2u_2 + \cdots + \frac{\partial S}{\partial a_{123}}u_1u_2u_3 \equiv 0,$$

la quale equazione dal canto suo ha sempre per conseguenza l'annullarsi di $T_f = (abu)^2a_sb_su_s$.

Quindi nel nostro caso la relazione (5) assume la forma semplice

$$Ff^2 + \tfrac{1}{18}B^2 = -\Theta^3,$$

ossia, moltiplicando per F,

$$\{Ff + \tfrac{1}{6}\sqrt{-2F}\cdot B\}\{Ff - \tfrac{1}{6}\sqrt{-2F}\cdot B\} = -\Theta^3F.$$

Dalla sola condizione $\Delta \equiv 0$ non consegue ancora necessariamente (*) che B ed f abbiano fattori comuni; quindi le quantità fra parentesi nella precedente equazione sono cubi perfetti rispetto alle x_i, e si può porre

$$Ff + \tfrac{1}{6}\sqrt{-2F}\cdot B = \mathbf{M}^3,\qquad Ff - \tfrac{1}{6}\sqrt{-2F}\cdot B = \mathbf{N}^3,$$

$\mathbf{M}$ ed $\mathbf{N}$ essendo covarianti lineari, irrazionali nei soli coefficienti, e legati dalla relazione

$$F^{-\frac{1}{3}}\mathbf{M}\mathbf{N} = -\Theta.$$

(*) Di ciò si può persuadersi facilmente con un esempio numerico; con una ricerca più precisa si rivela che deve presentarsi $F \equiv 0$.

L'equazione

$$(\mathbf{M}+\mathbf{N})(\mathbf{M}+\varepsilon\mathbf{N})(\mathbf{M}+\varepsilon^2\mathbf{N})=\mathbf{M}^3+\mathbf{N}^3=2Ff$$

mostra, che la curva $f=0$ rappresenta un fascio di tre rette, passanti tutte e tre pel punto comune ad $\mathbf{M}=0$ ed $\mathbf{N}=0$.

d.) Determinazione delle intersezioni di una curva arbitraria del 3° ordine con una retta.

Questa determinazione si potrebbe immediatamente collegare alle formole in (*b*) mediante il principio di reciprocità. Ma si ottengono risultati più semplici dal seguente metodo, nel quale si stabilisce in modo conveniente una equazione cubica, le cui radici uguagliate a zero rappresentano i punti d'intersezione (*).

L'equazione della retta sia

$$k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3=k_x=0$$

ed

$$\begin{aligned}(aku)^3=(bku)^3=(cku)^3=\cdots\\ =(p_1u_1+p_2u_2+p_3u_3)(q_1u_1+q_2u_2+q_3u_3)(r_1u_1+r_2u_2+r_3u_3)\\ =u_pu_qu_r=0\end{aligned}$$

sia il prodotto delle equazioni delle tre intersezioni. Formiamo una equazione cubica le cui radici sieno

$$y_1=u_pv_qv_r,\quad y_2=u_qv_pv_r,\quad y_3=u_rv_pv_q,$$

le v_i rappresentando quantità affatto arbitrarie. Si ha allora

$$\begin{aligned}y_1+y_2+y_3&=3(aku)(akv)^2\\ y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3&=3(akv)(aku)^2(bkv)^3\\ y_1y_2y_3&=(aku)^3(bkv)^3(ckv)^3.\end{aligned}$$

Nello scopo di trovare un'espressione pel prodotto delle differenze, poniamo simbolicamente

$$(aku)^3=(\gamma_1u_1+\gamma_2u_2+\gamma_3u_3)^3=u_\gamma{}^3=u_\delta{}^3=u_\varepsilon{}^3=\cdots, \tag{1}$$

cosicchè

$$27(\gamma\delta x)^2(\varepsilon\xi x)^2(\gamma\varepsilon x)(\delta\xi x)=2(rpx)^2(qrx)^2(pqx)^2.$$

(*) Un simile procedimento formò il punto di partenza per tutte le soluzioni qui esposte.

Assumendo

$$x_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2, \quad x_2 = u_3 v_1 - u_1 v_3, \quad x_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1,$$

ne viene

$$27 (u_\gamma v_\delta - u_\delta v_\gamma)^2 (u_\varepsilon v_\xi - u_\xi v_\varepsilon)^2 (u_\gamma v_\varepsilon - u_\varepsilon v_\gamma)(u_\delta v_\xi - u_\xi v_\delta)$$
$$= 2 (u_r v_p - u_p v_r)^2 (u_q v_r - u_r v_q)^2 (u_p v_q - u_q v_p)^2.$$

Ma per l'equazione di definizione (1) è

$$\gamma_1 = a_2 k_3 - a_3 k_2, \quad \gamma_2 = a_3 k_1 - a_1 k_3, \quad \gamma_3 = a_1 k_2 - a_2 k_1,$$

e l'ultima formola diviene

$$2 (u_r v_p - u_p v_r)^2 (u_q v_r - u_r v_q)^2 (u_p v_q - u_q v_p)^2$$
$$= 27 (a b k)^2 (c d k)^2 (a c k)(b d k)(k u v)^6 = 27 F(k_1, k_2, k_3) \cdot (k u v)^6,$$

ossia, moltiplicando per $(a k v)^3 (b k v)^3$,

$$(y_1 - y_2)^2 (y_2 - y_3)^2 (y_3 - y_1)^2 = \tfrac{27}{2} F(k_1, k_2, k_3)(a k v)^3 (b k v)^3 (k u v)^6.$$

Ora con metodi noti si trovano facilmente i valori delle stesse y_i. Indicando le espressioni

$$\tfrac{1}{2} (a b k)^2 (c b k)(a k v)(c k v)^2 + \tfrac{1}{2} \sqrt{-\tfrac{1}{2} F(k_1, k_2, k_3)} \cdot (a k v)^3$$

e

$$\tfrac{1}{2} (a b k)^2 (c b k)(a k v)(c k v)^2 - \tfrac{1}{2} \sqrt{-\tfrac{1}{2} F(k_1, k_2, k_3)} \cdot (a k v)^3,$$

come cubi perfetti nelle v_i, rispettivamente con A^3 e B^3, si ottiene mediante un piccolo calcolo simbolico

$$y_i = (a k u)(a k v)^2 + (\varepsilon^i A + \varepsilon^{2i} B) \sum \pm k_1 u_2 v_3, \quad (i = 1, 2, 3)$$

ove i valori corrispondenti delle due radici cubiche A e B sono determinati dalla relazione

$$A B = -\tfrac{1}{2} (a b k)^2 (a k v)(b k v) \text{ (*)}.$$

(*) Si potrebbe anche mostrare facilmente a posteriori che

$$[(a k u)(a k v)^2 + (A + B)(k u v)]\,[(b k u)(b k v)^2 + (\varepsilon A + \varepsilon^2 B)(k u v)]\,[(c k u)(c k v)^2 + (\varepsilon^2 A + \varepsilon B)(k u v)]$$
$$= (a k u)^3 (b k v)^3 (c k v)^3.$$

Lo spezzamento di $(a k u)^3$ qui dato è la conseguenza immediata di un principio generale di trasformazione, sul quale ritornerò altrove.

Di questo modo di determinare le intersezioni di una curva di 3° ordine e di una retta ho in animo di dare in altra Memoria interessanti applicazioni alla teoria degl'integrali ellittici.

III. Sulla rappresentazione di Aronhold di un punto di una curva del 3° ordine.

Questa rappresentazione si riduce a stabilire le equazioni dei punti nei quali una curva qualsivoglia di 3° ordine $f(x_1, x_2, x_3)=f(x)=0$ è incontrata da una retta del fascio

$$\sum_i \{\varkappa f'(y_i)-\lambda\Delta'(y_i)\}x_i=0 \tag{1}$$

ove le y_i sono le coordinate di un qualsivoglia punto determinato della cubica, epperò soddisfanno all'equazione $f(y)=0$. La nota identità di Salmon

$$f(x)\Delta(y)-f(y)\Delta(x)=[\sum f'(x_i)y_i][\sum\Delta'(y_i)x_i]-[\sum f'(y_i)x_i][\sum\Delta'(x_i)y_i]$$
$$=\frac{1}{\varkappa}\{\varkappa\sum f'(x_i)y_i-\lambda\sum\Delta'(x_i)y_i\}\sum\Delta'(y_i)x_i$$
$$-\frac{1}{\varkappa}\{\varkappa\sum f'(y_i)x_i-\lambda\sum\Delta'(y_i)x_i\}\sum\Delta'(x_i)y_i$$

mostra che uno dei punti d'intersezione coincide col centro del fascio (1) e che gli altri due giacciono sopra la conica

$$\sum y_i[\varkappa f'(x_i)-\lambda\Delta'(x_i)]=0.$$

Si ottengono quindi le equazioni di queste altre due intersezioni, assumendo nella formola (2) del § I

$$c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3=\tfrac{1}{3}\sum_i[\varkappa f'(y_i)-\lambda\Delta'(y_i)]x_i=\sum(\varkappa f_i-\lambda\Delta_i)x_i$$

e

$$\phi(x_1, x_2, x_3)=\tfrac{1}{3}\sum y_i[\varkappa f'(x_i)-\lambda\Delta'(x_i)]$$
$$=\tfrac{1}{6}\{\sum\sum\{\varkappa f''(y_iy_k)-\lambda\Delta''(y_iy_k)\}x_ix_k$$
$$=\sum\sum(\varkappa f_{ik}-\lambda\Delta_{ik})x_ix_k.$$

Ponendo inoltre la s_i, che ivi era rimasta arbitraria, uguale ad f_i, viene

$$\binom{c}{c}=-\tfrac{1}{6}\{\varkappa f(y)-\lambda\Delta(y)\}\Delta_{\varkappa f(y)-\lambda\Delta(y)}$$

$$= -\tfrac{1}{6}\{\varkappa f(y) - \lambda\Delta(y)\}\{\Delta(y)(\varkappa^3 - 3\varkappa\lambda^2 + 2\lambda^3 T) +$$
$$+ f(y)(-3\varkappa^2\lambda S + 6\varkappa\lambda^2 T - 3\lambda^3 S^2)\},$$

$$\sum \pm c_1 s_2 u_3 = \lambda \sum \pm f_1 \Delta_2 u_3,$$

$$\binom{cs}{cu} = -[kf(y) - \lambda\Delta(y)] \begin{vmatrix} \varkappa f_{11} - \lambda\Delta_{11} & \varkappa f_{12} - \lambda\Delta_{12} & \varkappa f_{13} - \lambda\Delta_{13} & f_1 \\ \varkappa f_{21} - \lambda\Delta_{21} & \varkappa f_{22} - \lambda\Delta_{22} & \varkappa f_{23} - \lambda\Delta_{23} & f_2 \\ \varkappa f_{31} - \lambda\Delta_{31} & \varkappa f_{32} - \lambda\Delta_{32} & \varkappa f_{33} - \lambda\Delta_{33} & f_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -[\varkappa f(y) - \lambda\Delta(y)]\binom{f}{u}_{\varkappa f(y) - \lambda\Delta(y)}.$$

Essendo $f(y) = 0$, le equazioni dei due punti-intersezioni si ottengono da

$$\binom{f}{u}_{\varkappa f(y) - \lambda\Delta(y)} + \sqrt{\frac{\lambda}{6}(\varkappa^3 - 3\varkappa\lambda^2 S + 2\lambda^3 T)}\,(\sum \pm f_1 \Delta_2 u_3) = 0 \qquad (2)$$

attribuendo al radicale una volta il segno positivo e l'altra volta il segno negativo.

Aronhold ha ricavato l'equazione (2) risolvendo la sostituzione mediante la quale egli riduce un integrale ellittico di 1ª specie alla forma normale. Viceversa, questa sostituzione si può derivare facilmente dalla (2).

Infatti una retta del fascio (1) sega $f(x) = 0$ in due punti coincidenti, quando

$$\lambda\varkappa^3 - 3\varkappa\lambda^2 S - 2\lambda^4 T = 0. \qquad (3)$$

Si hanno quindi le equazioni delle quattro tangenti che si possono condurre alla curva dal centro del fascio, e del resto si può procedere nello stesso modo di Aronhold (*)

(*) Mancando nell'equazione (3) le coordinate del centro, resta così in pari tempo dimostrato per via puramente analitica che il rapporto anarmonico delle quattro tangenti che si possono condurre da un punto qualsivoglia della cubica a toccare altrove la curva, ha un valore σ costante. È noto che gl'invarianti assoluti e il rapporto anarmonico σ dell'equazione biquadratica (3) sono legati dalla relazione

$$\frac{S^3}{T^2} = 81\,\frac{(1 - \sigma + \sigma^2)^3}{(1 + \sigma)^2(2 - \sigma)^2(1 - 2\sigma)^2}.$$

Questo rapporto anarmonico per $T = 0$ si riduce a -1, e per $S = 0$ diviene una radice cubica imaginaria dell'unità positiva.

Sur quelques problèmes relatifs à deux séries de surfaces

(*par Mr.* EDOUARD COMBESCURE, *à Montpellier*).

§ 1. Formules préliminaires se rapportant à un système orthogonal connu.

Plusieurs géomètres et particulièrement MM. LAMÉ et BERTRAND ont fait, comme on sait, d'importantes applications du système triple de surfaces orthogonales formé d'une série de surfaces parallèles et des deux séries de surfaces développables qui sont respectivement les lieux des normales menées aux surfaces parallèles par tous les points de leurs lignes de courbure. Ce système, l'un des plus anciennement connus, comporte un ensemble de formules qui, à ma connaissance, n'ont pas été complétement développées et qui peuvent être utiles dans certaines recherches. Comme j'aurai, dans un instant, à faire usage de ces formules, il m'a paru opportun d'entrer dans quelques détails à leur sujet. On pourrait les déduire aisément des formules générales de M. LAMÉ *(coordonnées curvilignes);* mais il est aussi simple de les établir directement comme il suit:

Si l'on considère l'équation

$$\frac{du^2}{dx^2}+\frac{du^2}{dy^2}+\frac{du^2}{dz^2}=1,$$

elle admet la solution complète

$$u=\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+(z+c)^2},$$

a, b, c étant des constantes arbitraires; on peut donc représenter son intégrale générale par le système suivant, dans lequel f désigne une fonction arbitraire,

$$\left.\begin{aligned} & x+a=up, \quad y+b=uq, \quad z+c=ur, \\ & p=h\frac{df}{da}, \quad q=h\frac{df}{db}, \quad r=h\frac{df}{dc}, \\ & h=\frac{1}{\pm\sqrt{\frac{df^2}{da^2}+\frac{df^2}{db^2}+\frac{df^2}{dc^2}}}, \quad f(a,\,b,\,c)=0: \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ce qu'on peut aussi conclure de la considération des surfaces parallèles à

$$f(-a,\,-b,\,-c)=0.$$

En désignant par ξ et η les paramètres indépendants qui déterminent les lignes de courbure de la surface f et par R, R_1 les rayons principaux de courbure de cette même surface, on a les relations connues

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{d\xi}&=R\frac{dp}{d\xi}, \\ \frac{db}{d\xi}&=R\frac{dq}{d\xi}, \\ \frac{dc}{d\xi}&=R\frac{dr}{d\xi}, \end{aligned}\right\} (2), \qquad \left.\begin{aligned} \frac{da}{d\eta}&=R_1\frac{dp}{d\eta}, \\ \frac{db}{d\eta}&=R_1\frac{dq}{d\eta}, \\ \frac{dc}{d\eta}&=R_1\frac{dr}{d\eta}. \end{aligned}\right\} (2')$$

Les trois paramètres u, ξ, η définissent le système triplement orthogonal dont il a été question ci-dessus. En substituant ces trois variables indépendantes à x, y, z, on aura d'abord, en ayant égard à (1), (2), (2′),

$$\frac{dx}{du}=p, \quad \frac{dx}{d\xi}=(u-R)\frac{dp}{d\xi}, \quad \frac{dx}{d\eta}=(u-R_1)\frac{dp}{d\eta};$$

et par suite, les formules ordinaires pour le changement des variables indépendantes, savoir

$$\begin{aligned} \frac{dx}{du}\frac{du}{dx}+\frac{dx}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}+\frac{dx}{d\eta}\frac{d\eta}{dx}&=1, \\ \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}+\frac{dy}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}+\frac{dy}{d\eta}\frac{d\eta}{dx}&=0, \\ \frac{dz}{du}\frac{du}{dx}+\frac{dz}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}+\frac{dz}{d\eta}\frac{d\eta}{dx}&=0, \end{aligned}$$

étant multipliées respectivement par $\frac{dx}{du}$, $\frac{dy}{du}$, $\frac{dz}{du}$, puis par $\frac{dx}{d\xi}$, $\frac{dy}{d\xi}$, $\frac{dz}{d\xi}$, enfin par $\frac{dx}{d\eta}$, $\frac{dy}{d\eta}$, $\frac{dz}{d\eta}$ et chaque fois ajoutées, donneront

$$\frac{du}{dx}=p, \quad \frac{d\xi}{dx}=\frac{1}{\Delta^2(u-R)}\cdot\frac{dp}{d\xi}, \quad \frac{d\eta}{dx}=\frac{1}{\nabla^2(u-R_1)}\cdot\frac{dp}{d\eta}, \tag{3}$$

où, pour abréger,

$$\Delta^2=\frac{dp^2}{d\xi^2}+\frac{dq^2}{d\xi^2}+\frac{dr^2}{d\xi^2}, \quad \nabla^2=\frac{dp^2}{d\eta^2}+\frac{dq^2}{d\eta^2}+\frac{dr^2}{d\eta^2}.$$

De là résulte, en désignant par S une somme symétrique en x, y, z,

$$S\frac{d\xi^2}{dx^2}=\frac{1}{\Delta^2(u-R)^2}, \quad S\frac{d\eta^2}{dx^2}=\frac{1}{\nabla^2(u-R_1)^2};$$

et par conséquent, pour une fonction quelconque v de x, y, z, supposée exprimée en u, ξ, η,

$$S\frac{dv^2}{dx^2}=\frac{dv^2}{du^2}+\frac{1}{\Delta^2(u-R)^2}\cdot\frac{dv^2}{d\xi^2}+\frac{1}{\nabla^2(u-R_1)^2}\cdot\frac{dv^2}{d\eta^2}. \tag{4}$$

D'après (2), (3), on a

$$\frac{da}{dx}=\frac{da}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}+\frac{da}{d\eta}\frac{d\eta}{dx}=\frac{R}{\Delta^2(u-R)}\cdot\frac{dp^2}{d\xi^2}+\frac{R_1}{\nabla^2(u-R_1)}\cdot\frac{dp^2}{d\eta^2},$$

d'ailleurs

$$u\frac{du}{dx}=x+a; \text{ d'où } u\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{du^2}{dx^2}=1+\frac{da}{dx};$$

par conséquent

$$S\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{1}{u-R}+\frac{1}{u-R_1}. \tag{5}$$

En posant, pour un moment,

$$A=\frac{1}{\Delta^2}\frac{dp}{d\xi}, \quad B=\frac{1}{\nabla^2}\frac{dp}{d\eta},$$

de sorte que

$$\frac{d\xi}{dx}=\frac{A}{u-R}, \quad \frac{d\eta}{dx}=\frac{B}{u-R_1},$$

on aura

$$\frac{d^2\xi}{dx^2}=\frac{A}{(u-R)^2}\left(-p+\frac{A}{u-R}\frac{dR}{d\xi}+\frac{B}{u-R_1}\frac{dR}{d\eta}\right)+\frac{A}{(u-R)^2}\cdot\frac{dA}{d\xi}+$$
$$+\frac{B}{(u-R)(u-R_1)}\cdot\frac{dA}{d\eta};$$

et, si l'on observe que

$$\frac{dA}{d\eta}=\frac{d\cdot\frac{1}{\Delta^2}}{d\eta}\cdot\frac{dp}{d\xi}+\frac{1}{\Delta^2}\cdot\frac{d^2p}{d\xi\,d\eta},$$

$$SB\frac{dA}{d\eta}=\frac{1}{\Delta^2\nabla^2}S\frac{dp}{d\eta}\frac{d^2p}{d\xi d\eta}=\frac{1}{\Delta^2\nabla}\frac{d\nabla}{d\xi},$$

$$SA\frac{dA}{d\xi}=-\frac{1}{\Delta^3}\frac{d\Delta}{d\xi},$$

on obtiendra

$$S\frac{d^2\xi}{dx^2}=\frac{1}{\Delta^2(u-R)}\left[\frac{\frac{dR}{d\xi}}{(u-R)^2}-\frac{\frac{d\Delta}{d\xi}}{\Delta(u-R)}+\frac{\frac{d\nabla}{d\xi}}{\nabla(u-R_1)}\right]. \tag{5'}$$

On aurait de même

$$S\frac{d^2\eta}{dx^2}=\frac{1}{\nabla^2(u-R_1)}\left[\frac{\frac{dR_1}{d\eta}}{(u-R_1)^2}-\frac{\frac{d\nabla}{d\eta}}{\nabla(u-R_1)}+\frac{\frac{d\Delta}{d\eta}}{\Delta(u-R)}\right]. \tag{5''}$$

Au moyen de (5), (5′), (5″) et des expressions précédentes de $S\frac{d\xi^2}{dx^2}$, $S\frac{d\eta^2}{dx^2}$, on aura immédiatement l'expression de $S\frac{d^2v}{dx^2}$ en u, ξ, η.

La comparaison des dérivées $\frac{d^2a}{d\xi d\eta}$ déduites de (2) et de (2′) fournit, comme on sait,

$$\frac{1}{R-R_1}\cdot\frac{dR}{d\eta}+\frac{1}{\Delta}\cdot\frac{d\Delta}{d\eta}=0,\quad \frac{1}{R_1-R}\cdot\frac{dR_1}{d\xi}+\frac{1}{\nabla}\frac{d\nabla}{d\xi}=0. \tag{6}$$

Lorsqu'on suppose que R, R_1 dépendent uniquement d'un paramètre t fonction de ξ, η, ces relations donnent, en remplaçant ξ par un fonction convenable de ξ lui-même, et η par une fonction convenable de η,

$$\frac{d(R-R_1)}{R-R_1}+\frac{d\Delta}{\Delta}+\frac{d\nabla}{\nabla}=0;$$

et, par suite,

$$R-R_1=\frac{1}{\Delta\nabla},\quad dR=\frac{1}{\nabla}d\cdot\frac{1}{\Delta},\quad dR_1=-\frac{1}{\Delta}d\cdot\frac{1}{\nabla}:$$

de sorte que Δ et ∇ sont alors, comme R et R_1, des fonctions du seul paramètre t. Je rappelle ce résultat, dû à Mr. Weingarten (J. de Crelle t. 62), parceque j'aurai à l'invoquer dans ce qui suit.

Le système de formules, établies ci-dessus, doit être complété par le groupe suivant que l'on peut considérer isolément dans l'étude de certains problèmes sphériques. En considérant p, q, r comme des fonctions quelconques de ξ, η assujetties à l'unique condition

$$p^2+q^2+r^2=1,$$

et supposant que ξ et η sont les paramètres de deux familles quelconques de courbes sphériques orthogonales, en posant toujours

$$S\frac{dp^2}{d\xi^2}=\Delta^2,\quad S\frac{dp^2}{d\eta^2}=\nabla^2,$$

on a, pour l'une quelconques des coordonnées p, q, r, les équations

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2p}{d\xi^2}+\Delta^2 p&=\frac{1}{\Delta}\frac{d\Delta}{d\xi}\frac{dp}{d\xi}-\frac{\Delta}{\nabla^2}\frac{d\Delta}{d\eta}\frac{dp}{d\eta},\\
\frac{dp^2}{d\eta^2}+\nabla^2 p&=\frac{1}{\nabla}\frac{d\nabla}{d\eta}\frac{dp}{d\eta}-\frac{\nabla}{\Delta^2}\frac{d\nabla}{d\xi}\frac{dp}{d\xi},\\
\frac{d^2p}{d\xi\,d\eta}\qquad&=\frac{1}{\Delta}\frac{d\Delta}{d\eta}\frac{dp}{d\xi}+\frac{1}{\nabla}\frac{d\nabla}{d\xi}\frac{dp}{d\eta},\\
1-p^2&=\frac{1}{\Delta^2}\frac{dp^2}{d\xi^2}+\frac{1}{\nabla^2}\frac{dp^2}{d\eta^2};
\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

qui entrainent la relation de Mr. LAMÉ

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\Delta}\frac{d\nabla}{d\xi}\right)+\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{\nabla}\frac{d\Delta}{d\eta}\right)+\Delta\,\nabla=0,\tag{8}$$

et qui sont un cas particulier des formules données par Mr. BRIOSCHI au § 4 de son Mémoire *Sulle coordinate curvilinee* (*).

La plupart des formules, données un peu plus haut, doivent être modifiées lorsque la surface

$$f(-a,\,-b,\,-c)=0$$

est développable. On a dans ce cas

$$a=\lambda+\lambda_1\eta,\quad b=\mu+\mu_1\eta,\quad c=\nu+\nu_1\eta,$$

λ, λ_1,... θ étant des fonctions de ξ, assujetties aux conditions

$$\lambda_1^2+\mu_1^2+\nu_1^2=1,$$

$$\frac{d\lambda}{d\lambda_1}=\frac{d\mu}{d\mu_1}=\frac{d\nu}{d\nu_1}=\theta,$$

(*) Annali di Matematica (serie 2ª) tomo 1.

de sorte que

$$\sqrt{S\frac{da^2}{d\xi^2}}=(\theta+\eta)\sqrt{S\frac{d\lambda_1^2}{d\xi^2}}, \quad \sqrt{S\frac{da^2}{d\eta^2}}=1,$$

$$p=\frac{\nu_1 d\mu_1-\mu_1 d\nu_1}{\sqrt{S\cdot d\lambda_1^2}}, \quad q=\frac{\lambda\, d\nu_1-\nu_1 d\lambda_1}{\sqrt{S\cdot d\lambda_1^2}}, \quad r=\frac{\mu_1 d\lambda_1-\lambda_1 d\mu_1}{\sqrt{S\cdot d\lambda_1^2}}.$$

Le premier groupe (2), qui subsiste toujours, donne, par suite,

$$R=(\theta+\eta)\frac{\sqrt{S\cdot d\lambda_1^2}}{\sqrt{S\cdot dp^2}}.$$

Comme $\frac{dp}{d\eta}$ est nul, tandis que $\frac{da}{d\eta}$ est égal à λ_1, les relations (2′) montrent que R_1 doit être infini: il faudra écrire dans ces formules

$$R_1\frac{dp}{d\eta}=\lambda_1;$$

d'où résultera

$$\lim\cdot R_1\nabla=1.$$

Par ces considérations de limites les équations (4), (5), (5′), (5″) deviendront, dans le cas présent,

$$S\frac{dv^2}{dx^2}=\frac{dv^2}{du^2}+\frac{1}{\Delta^2(u-R)^2}\frac{dv^2}{d\xi^2}+\frac{dv^2}{d\eta^2}, \tag{4_1}$$

$$S\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{1}{u-R}, \tag{5_1}$$

$$S\frac{d^2\xi}{dx^2}=\frac{1}{\Delta^2(u-R)^2}\left[\frac{\frac{dR}{d\xi}}{u-R}-\frac{\frac{d\Delta}{d\xi}}{\Delta}\right], \tag{$5'_1$}$$

$$S\frac{d^2\eta}{dx^2}=0. \tag{$5''_1$}$$

§ 2. Application incidente à un problème de température.

Comme simple application de quelques unes des formules du précédent paragraphe, et parceque j'aurai ultérieurement occasion d'invoquer en passant le résultat, je vais donner une solution purement analytique d'une question très-élégamment résolue par Mr. Bertrand dans un important Mémoire, inséré au tome XIV (1ère série) du journal de Mr. Liouville, et sur lequel j'aurai à revenir.

Lorsqu'on exige que la température V d'un milieu homogène indéfini ne dépende que du temps t et d'un paramètre λ, fonction des seules coordonnées rectangulaires x, y, z, l'équation ordinaire du mouvement de la chaleur, savoir

$$\frac{dV}{dt}=\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2},$$

se transforme d'abord dans la suivante

$$\frac{dV}{dt}=\frac{d^2V}{d\lambda^2}S\frac{d\lambda^2}{dx^2}+\frac{dV}{d\lambda}S\frac{d^2\lambda}{dx^2}.$$

Il est facile de voir à l'inspection de cette transformée que V ne pourra être une fonction des seules variables λ et t que dans les trois cas:

I. $S\frac{d\lambda^2}{dx^2}$ et $S\frac{d^2\lambda}{dx^2}$ sont des fonctions de λ seulement.

En changeant le paramètre λ en un autre u convenablement choisi, ces deux conditions reviennent aux suivantes:

$$S\frac{du^2}{dx^2}=1, \quad S\frac{d^2u}{dx^2}=F(u).$$

Si l'on conserve dèslors les notations du paragraphe précédent, la formule (5) montre que R et R_1 qui, par leur nature, ne peuvent dépendre que de ξ et de η, doivent se réduire à des constantes; mais on sait, et l'on pourrait d'ailleurs déduire tout de suite des formules (2), (2') que, dans ce cas, la surface f est une sphère, de façon que l'on peut poser

$$f(a, b, c)=a^2+b^2+c^2-R^2,$$

R étant ici constant. Les formules (1) donnent alors

$$(u-R)^2=x^2+y^2+z^2,$$

et la température est déterminée par l'équation

$$\frac{dV}{dt}=\frac{d^2V}{du^2}+\frac{2}{u}\frac{dV}{du}$$

dont l'intégrale est connue. On retrouve ainsi, et par des moyens au fond équivalents, le résultat de Mr. Bertrand.

Si la surface f est supposée développable, la formule (5_1) donne

$$u=\sqrt{x^2+y^2};$$

et, par suite

$$\frac{dV}{dt}=\frac{d^2V}{du^2}+\frac{1}{u}\frac{dV}{du},$$

équation qu'on sait intégrer.

Enfin, quand les deux rayons principaux de courbure de f sont supposés infinis, on peut prendre

$$u=z$$

et par conséquent

$$\frac{dV}{dt}=\frac{d^2V}{du^2}.$$

II.

$$S\frac{d^2\lambda}{dx^2}=m\lambda,$$

$$V=\lambda e^{mt};$$

III.

$$S\frac{d^2\lambda}{dx^2}=m,$$

$$V=\lambda+mt.$$

§ 3. 1er Problème concernant deux séries de surfaces.

Si l'on considère deux séries de surfaces, aux paramètres réels et respectifs α et β, deux surfaces infiniment voisines du premier système et deux surfaces infiniment voisines du second donnent lieu, par leurs intersections réciproques, à un canal quadrangulaire, infiniment étroit, de longueur finie on infinie et dont la section droite change en général de forme et de grandeur quand on chemine le long de l'arête curviligne

$$\alpha=\text{constante},\quad \beta=\text{constante}.$$

Or on peut se demander que cette section droite reste toujours la même pour un même canal infinitésimal.

La solution de cette question revient évidemment à celle du problème analytique suivant: « satisfaire de la manière la plus générale aux trois équations

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha^2}{dx^2} + \frac{d\alpha^2}{dy^2} + \frac{d\alpha^2}{dz^2} &= g, \\ \frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dx} + \frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dy} + \frac{d\alpha}{dz}\frac{d\beta}{dz} &= h, \\ \frac{d\beta^2}{dx^2} + \frac{d\beta^2}{dy^2} + \frac{d\beta^2}{dz^2} &= k, \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

en prenant pour g, h, k les fonctions les plus générales possibles de α et β. »

Je rappellerai que Mr. Bertrand, dans le Mémoire cité, a résolu une question analogue en s'imposant les deux conditions nouvelles

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2} + \frac{d^2\alpha}{dy^2} + \frac{d^2\alpha}{dz^2} = p_1,$$

$$\frac{d^2\beta}{dx^2} + \frac{d^2\beta}{dy^2} + \frac{d^2\beta}{dz^2} = q_1,$$

p_1 et q_1 étant aussi des fonctions de α et β; et qu'il a trouvé pour les courbes

$$\alpha = \text{constante}, \quad \beta = \text{constante},$$

des hélices de même pas (quelconque), tracées sur des cylindres de révolution de même axe.

Ceci rappelé, je reviens aux trois équations (a).

De quelque manière qu'on ait satisfait à ces équations, on peut remplacer les deux paramètres indépendants α et β par deux autres u et v pareillement indépendants et liés aux premiers par les deux conditions compatibles qu'on voudra, c'est-à-dire telles qu'à des valeurs indépendantes de α et β correspondent pour u et v des valeurs également indépendantes.

Comme

$$\begin{aligned} S\frac{du^2}{dx^2} &= g\frac{du^2}{d\alpha^2} + 2h\frac{du}{d\alpha}\frac{du}{d\beta} + k\frac{du^2}{d\beta^2}, \\ S\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} &= g\frac{du}{d\alpha}\frac{dv}{d\alpha} + h\left(\frac{du}{d\alpha}\frac{dv}{d\beta} + \frac{du}{d\beta}\frac{dv}{d\alpha}\right) + k\frac{du}{d\beta}\frac{dv}{d\beta}, \\ S\frac{dv^2}{dx^2} &= g\frac{dv^2}{d\alpha^2} + 2h\frac{dv}{d\alpha}\frac{dv}{d\beta} + k\frac{dv^2}{d\beta^2}; \end{aligned}$$

si l'on définit la substitution de paramètres par les deux équations

$$g\frac{du^2}{d\alpha^2}+2h\frac{du}{d\alpha}\frac{du}{d\beta}+k\frac{du^2}{d\beta^2}=1,$$

$$g\frac{du}{d\alpha}\frac{dv}{d\alpha}+h\left(\frac{du}{d\alpha}\frac{dv}{d\beta}+\frac{du}{d\beta}\frac{dv}{d\alpha}\right)+k\frac{du}{d\beta}\frac{dv}{d\beta}=0:$$

on pourra toujours tirer de la première une valeur de u en α et β, et, en la reportant dans la seconde, on conclura de celle-ci une valeur correspondante pour v. D'ailleurs cette valeur de v ne se réduira pas à une fonction de u seul, car une pareille supposition, introduite dans la seconde des deux équations précédentes, conduirait à un résultat en contradiction avec la première.

Moyennant cette substitution théorique de paramètres, on sera amené à considérer le système

$$\frac{du^2}{dx^2}+\frac{du^2}{dy^2}+\frac{du^2}{dz^2}=1,$$

$$\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dy}\frac{dv}{dy}+\frac{du}{dz}\frac{dv}{dz}=0,$$

$$\frac{dv^2}{dx^2}+\frac{dv^2}{dy^2}+\frac{dv^2}{dz^2}=F(u, v);$$

et, quand on l'aura résolu, on obtiendra la solution la plus générale du système primitif (a) en prenant pour α et pour β des fonctions arbitraires des expressions trouvées pour u et v.

Or, si l'on se reporte aux formules (3), (2), (2′) du § 1 dont on adopte ici les notations, on voit que

$$S\frac{du}{dx}\frac{d\xi}{dx}=0,\quad S\frac{du}{dx}\frac{d\eta}{dx}=0;$$

par conséquent, on satisfera, de la manière la plus générale, aux deux premières des équations précédentes en adoptant pour (u) la forme donnée par le système (1) et prenant pour v une fonction arbitraire de ξ et de η.

Pour que la troisième équation ci-dessus soit vérifiée, il faut, en vertu de (4), que l'on ait

$$\frac{\frac{1}{\Delta^2}\frac{dv^2}{d\xi^2}}{(u-R)^2}+\frac{\frac{1}{\nabla^2}\frac{dv^2}{d\eta^2}}{(u-R_1)^2}=F(u, v). \qquad (F)$$

Afin d'obtenir toutes les manières dont cette condition peut être remplie, il convient de distinguer plusieurs cas.

(I). Je supposerai que R et R_1 sont différents et finis, et que de plus v contient effectivement les deux variables ξ et η. Dans ces hypothèses, et à cause de la décomposition unique d'une fonction rationnelle en fractions simples, l'équation (F) exige que les quantités

$$R, \quad R_1, \quad \frac{1}{\Delta}\frac{dv}{d\xi}, \quad \frac{1}{\nabla}\frac{dv}{d\eta},$$

qui, par leur nature, ne peuvent dépendre que de ξ et η, se réduisent à des fonctions de v seul. Mais, d'après le théorème rappelé de Mr. Weingarten, Δ et ∇ étant nécessairement des fonctions du paramètre v lorsque R et R_1 dépendent uniquement de ce même paramètre, il faut ici que $\frac{dv}{d\xi}$ et $\frac{dv}{d\eta}$ se réduisent à des fonctions de v seul. En écrivant qu'il en est ainsi, on conclut aisément des équations que l'on forme que v est une fonction arbitraire d'une fonction linéaire de ξ et de η, fonction linéaire qu'on peut toujours supposer reduite à la forme: $\xi+\eta$.

Si l'on considère maintenant l'expression

$$S\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{d^2v}{d\xi^2}S\frac{d\xi^2}{dx^2}+\frac{d^2v}{d\eta^2}S\frac{d\eta^2}{dx^2}+\frac{dv}{d\xi}S\frac{d^2\xi}{dx^2}+\frac{dv}{d\eta}S\frac{d^2\eta}{dx^2}$$

dans laquelle

$$S\frac{d\xi^2}{dx^2}=\frac{1}{\Delta^2(u-R)^2}, \quad S\frac{d\eta^2}{dx^2}=\frac{1}{\nabla^2(u-R_1)^2},$$

et que l'on se reporte aux formules (5), (5′), (5″), l'hypothèse de R, R_1, Δ, ∇, v fonctions de $(\xi+\eta)$ seulement, introduite dans ces mêmes formules, montre que $S\frac{d^2u}{dx^2}$ et $S\frac{d^2v}{dx^2}$ sont, dans les conditions actuelles, des fonctions de u et v seulement. Donc comme

$$S\frac{d\alpha^2}{dx^2}, \quad S\frac{d\beta^2}{dx^2}, \quad S\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dx}, \quad S\frac{d^2\alpha}{dx^2}, \quad S\frac{d^2\beta}{dx^2},$$

s'expriment linéairement au moyen de

$$S\frac{du^2}{dx^2}, \quad S\frac{dv^2}{dx^2}, \quad S\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}, \quad S\frac{d^2u}{dx^2}, \quad S\frac{d^2v}{dx^2},$$

les coefficients de ces relations linéaires dépendant uniquement de u et de v, ou de α et β, on arrive à cette conclusion que, sous les hypothèses admises (I), la supposition de $S\,\frac{d\alpha^2}{dx^2}$, $S\frac{d\alpha\,d\beta}{dx\,dx}$, $S\frac{d\beta^2}{dx^2}$, fonctions de α et β seulement, entraine la même propriété pour $S\frac{d^2\alpha}{dx^2}$, $S\frac{d^2\beta}{dx^2}$. On est ainsi ramené aux **cinq** conditions que s'est imposé tout de suite Mr. Bertrand. On pourrait donc s'en rapporter aux conclusions géométriques de l'éminent auteur. Mais, pour faire une application des formules (7) et (8) je vais poursuivre brièvement la solution analytique commencée.

Puisque R, R_1, Δ, ∇ sont des fonctions du seul paramètre $t=\xi+\eta$, la relation (8), en particulier, peut s'écrire

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\tilde{\omega}}{\omega}\frac{d\tilde{\omega}}{dt}\right)+\omega=0,$$

où

$$\Delta^2+\nabla^2=\tilde{\omega}^2, \quad \Delta\nabla=\omega.$$

En posant

$$\omega=\frac{d\theta}{dt},$$

on tire de là

$$\tilde{\omega}^2+\theta^2=4\,C^2,$$

où C désigne une constante arbitraire et où l'on a absorbé dans θ une autre constante que l'intégration introduit. Si maintenant on rapporte les équations (7) aux variables

$$t=\xi+\eta, \quad s=\xi-\eta,$$

et que de l'expression de $\frac{d^2p}{ds^2}$, préalablement différentiée par s, on élimine $\frac{d^2p}{ds^2}$, $\frac{d^2p}{dt\,ds}$ au moyen des mêmes équations (7) transformées, on obtiendra

$$\frac{d^3p}{ds^3}+C^2\frac{dp}{ds}=0.$$

En considérant les constantes de l'intégrale de cette équation comme des fonctions arbitraires de t, la vérification complète du groupe (7) transformé conduira sans peine à

$$p=A\,\tilde{\omega}\cos(Cs+\tau)+B\,\tilde{\omega}\sin(Cs+\tau)+G\theta,$$

où A, B, G sont des constantes arbitraires et où

$$\tau=C\int\frac{\Delta^2-\nabla^2}{\tilde{\omega}^2}\,dt.$$

On peut donc prendre, en mettant de côté un changement insignifiant d'axes coordonnés,

$$p=\frac{\varpi}{2C}\cos(Cs+\tau),\quad q=\frac{\varpi}{2C}\sin(Cs+\tau),\quad r=\frac{\theta}{2C}\cdot$$

En se rappelant que, ici,

$$R-R_1=\frac{1}{\omega},$$

les formules (2), (2') rapportées aux variables t et s feront connaitre a, b, c par des quadratures, et l'on aura finalement, au moyen de (1),

$$x=\left(u-\frac{R+R_1}{2}-\frac{1}{2C\omega}\frac{d\tau}{dt}\right)p-\frac{1}{2C\omega\varpi}\cdot\frac{d\varpi}{dt}q,$$

$$y=\left(u-\frac{R+R_1}{2}-\frac{1}{2C\omega}\frac{d\tau}{dt}\right)q+\frac{1}{2C\omega\varpi}\cdot\frac{d\varpi}{dt}p,$$

$$z=\frac{u\theta}{2C}-\frac{1}{4C}\int(R+R_1)\omega\,dt-\frac{s}{4C},$$

p et q ayant les valeurs précédentes.

Lorsque u et t ou v sont constants, ces équations représentent une hélice. En donnant à u et à v divers systèmes de valeurs, on obtient des hélices, de même pas quelconque, tracées sur des cylindres de révolution de même axe. Par l'introduction de deux nouveaux paramètres u_1 et v_1, fonctions déterminées de u et v, on peut représenter plus simplement ces hélices par

$$x^2+y^2=u_1^2,\quad z-m\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=v_1$$

m étant une constante arbitraire.

(II). Revenant à l'équation (F), supposons que R et R_1 sont égaux et que de plus v contient effectivement les deux variables ξ et η. La vérification de cette équation exige alors seulement que l'expression

$$\frac{1}{\Delta^2}\frac{dv^2}{d\xi^2}+\frac{1}{\nabla^2}\frac{dv^2}{d\eta^2}$$

se réduise à une fonction de v seul, ou, ce qui revient au même, que l'on ait

$$\frac{1}{\Delta^2}\frac{dv^2}{d\xi^2}+\frac{1}{\nabla^2}\frac{dv^2}{d\eta^2}=1.$$

Les surfaces parallèles (u) étant actuellement des sphères, on peut prendre pour ξ et η les paramètres de deux familles quelconques de courbes sphériques orthogonales et supposer, par exemple,

$$a=\sin\xi\cos\eta,\quad b=\sin\xi\sin\eta,\quad c=\cos\xi,$$

de façon que l'équation précédente devient

$$\frac{dv^2}{d\xi^2}+\frac{1}{\sin^2\xi}\frac{dv^2}{d\eta^2}=1. \tag{v}$$

En désignant par ω une indéterminée et posant

$$\frac{dv}{d\xi}=\sin\omega,\quad \frac{dv}{d\eta}=\sin\xi\cos\omega,$$

il en résulte

$$\cos\omega\cdot\frac{d\omega}{d\eta}+\sin\xi\sin\omega\cdot\frac{d\omega}{d\xi}=\cos\omega\cos\xi;$$

d'où, par l'intégration,

$$\sin\omega=\sin\zeta\sin(\eta+\varepsilon),\quad \cos\zeta=\sin\xi\cos\omega,$$

ε étant un paramètre arbitraire et ζ une fonction quelconque de ce paramètre. De ces relations on conclut facilement pour le système intégral relatif à l'équation (v):

$$\cos\xi=\sin\zeta\cos(v+\tilde{\omega}),$$
$$\cos(\eta+\varepsilon)=\cot\xi\cot\zeta,$$
$$\tilde{\omega}=\int\cos\zeta\cdot d\varepsilon.$$

Pour deux formes particulières de ζ en ε les courbes sphériques

$$v=\text{constante}$$

fournies par ces équations se réduisent à deux séries de cercles parallèles. Mais pour toute autre forme de ζ ces courbes ne sont pas des cercles.

(III). Admettons enfin que v ne dépende que de ξ, par exemple. L'équation (F) montre que R et Δ doivent, dans ce cas, être des fonctions de ξ seul. On peut supposer que Δ est égal à l'unité et l'équation (8) donne, par suite,

$$\nabla=M\sin\xi+N\cos\xi,$$

M et N étant des fonctions arbitraires de η. Les formules (6) font voir que

$$\nabla R_1=\nabla R-\int\nabla\, dR+H(\eta),$$

H étant une fonction arbitraire et le signe $\int$ se rapportant à ξ. La première des équations (7) revient à

$$\frac{d^2p}{d\xi^2}+p=0,$$

et l'on peut adopter, en conséquence,

$$p=A\ \sin\xi+B\ \cos\xi,$$
$$q=A'\sin\xi+B'\cos\xi,$$
$$r=A''\sin\xi+B''\cos\xi,$$

A, B,... étant des fonctions arbitraires de η qui, pour la vérification complète du groupe (7), doivent satisfaire aux conditions

$$\frac{dA}{dB}=\frac{dA'}{dB'}=\frac{dA''}{dB''},$$

$$A^2+A'^2+A''^2=1,\quad B^2+B'^2+B''^2=1,\quad AB+A'B'+A''B''=0,$$

lesquelles ne sont pas tout-à-fait distinctes. On peut prendre, d'après cela,

$$B=\frac{A''dA'-A'dA''}{\sqrt{S\cdot dA^2}},\quad B'=\frac{AdA''-A''dA}{\sqrt{S\cdot dA^2}},\quad B''=\frac{A'dA-AdA'}{\sqrt{S\cdot dA^2}},$$

$$\nabla=\sqrt{S\frac{dA^2}{d\eta^2}}\cdot\sin\xi+\sqrt{S\frac{dB^2}{d\eta^2}}\cdot\cos\xi,$$

avec l'unique condition

$$A^2+A'^2+A''^2=1.$$

On trouve en suite au moyen de (2), (2'),

$$a=Rp-A\int\sin\xi\cdot dR-B\int\cos\xi\cdot dR+\int\frac{dA}{\sqrt{S\cdot dA^2}}H(\eta)\,d\eta,$$

et des expressions analogues pour b et c; et si l'on fait, pour abréger,

$$(u-R)\sin\xi+\int\sin\xi\cdot dR=u_1,$$
$$(u-R)\cos\xi+\int\cos\xi\cdot dR=v_1,$$

on obtient finalement

$$x=A\ u_1+B\ v_1+\mathbf{a},$$
$$y=A'u_1+B'v_1+\mathbf{b},$$
$$z=A''u_1+B''v_1+\mathbf{c},$$

où

$$\mathbf{a}=-\int\frac{dA}{\sqrt{S\cdot dA^2}}H\,d\eta,\quad \mathbf{b}=-\int\frac{dA'}{\sqrt{S\cdot dA^2}}H\,d\eta,\quad \mathbf{c}=-\int\frac{dA''}{\sqrt{S\cdot dA^2}}H\,d\eta,$$

et où l'on peut substituer les paramètres u_1 et v_1 aux paramètres u et v ou ξ.

Il entre, comme on voit, deux fonctions arbitraires dans la solution: ainsi, par exemple, on peut tracer arbitrairement la courbe sphérique (A, A', A'') et prendre pour H une fonction arbitraire de la variable η, laquelle peut être prise elle-même pour l'une des coordonnées sphériques de cette courbe. La courbe $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ peut donc être considérée comme tout-à-fait quelconque.

Les expressions précédentes de x, y, z se prêtent à diverses interprétations géométriques en ce qui concerne les courbes

$$u_1=\text{const.},\quad v_1=\text{const.}$$

Comme pour ces courbes on a

$$(x-\mathbf{a})^2+(y-\mathbf{b})^2+(z-\mathbf{c})^2=u_1^2+v_1^2,$$

$$\frac{dx}{d\mathbf{a}}=\frac{dy}{d\mathbf{b}}=\frac{dz}{d\mathbf{c}},$$

on voit qu'elles constituent le système, non circulaire, des lignes de courbure de la surface canal dont l'axe fixe est la courbe $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ et le rayon générateur $\sqrt{u_1^2+v_1^2}$. L'une quelconque des courbes (u, v) peut donc être ici considérée comme l'intersection d'une surface canal, d'axe fixe $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, et d'une surface développable ayant pour arête de rebroussement l'une des développées de cet axe.

Il convient de noter un cas qui se présente précisément lorsqu'on introduit la condition nouvelle, à savoir que $S\frac{d^2u}{dx^2}$ soit une fonction de u et de v. Il faut alors que R_1 soit, comme R, un fonction de ξ seul. Les quantités H, $S\frac{dA^2}{d\eta^2}$, $S\frac{dB^2}{d\eta^2}$ doivent se réduire à des constantes. La courbe sphérique (A, A', A'') est un cercle et l'on peut prendre

$$\begin{aligned} A&=\sin\varepsilon\cos\omega, & B&=\cos\varepsilon\cos\omega,\\ A'&=\sin\varepsilon\sin\omega, & B'&=\cos\varepsilon\sin\omega,\\ A''&=\cos\varepsilon, & B''&=-\sin\varepsilon;\end{aligned}$$

ε étant une constante quelconque. En posant

$$u_1 \sin\varepsilon + v_1 \cos\varepsilon = u_2,$$
$$u_1 \cos\varepsilon - v_1 \sin\varepsilon = v_2,$$

on obtient

$$x = u_2 \cos\omega + H\int \sin\omega\, d\eta,$$
$$y = u_2 \sin\omega - H\int \cos\omega\, d\eta,$$
$$z = v_2;$$

où l'on doit prendre pour ω une fonction arbitraire de η. L'axe (**a**, **b**, **c**) de la surface canal est ici une courbe plane quelconque, le rayon générateur de cette même surface a pour valeur $\sqrt{u_2^2 + v_2^2}$. Les lignes de courbure non circulaires, peuvent évidemment s'obtenir ici au moyen de sections planes parallèles au plan de la courbe (**a**, **b**, **c**). On peut aussi considérer les deux premières des équations, qui précédent immédiatement, comme représentant des cylindres parallèles à base quelconque: les courbes

$$u_2 = \text{const.}, \quad v_2 = \text{const.},$$

définissant les sections droites de ces cylindres. Ce résultat était assez évident à priori, mais je tenais à le retrouver dans l'analyse qui fait l'objet du présent paragraphe.

Remarque. Pour compléter la solution du problème posé en commençant, il resterait peut-être à examiner l'hypothèse où les surfaces parallèles (u) proviennent d'une surface f développable. Mais je ne crois pas devoir m'arrêter à ces détails.

§ 4. Deuxième problème.

« Les mêmes choses étant posées qu'au commencement du précédent paragraphe, on peut demander que la section droite, au lieu de demeurer constante tout le long d'un même canal infinitésimal, reste seulement semblable à elle-même. »

En désignant par μ et ν les paramètres des deux familles de surfaces cherchées, les équations immediates du nouveau problème sont évidemment

$$\frac{S\frac{d\mu^2}{dx^2}}{S\frac{d\nu^2}{dx^2}} = f(\mu, \nu), \quad \frac{S\frac{d\mu}{dx}\frac{d\nu}{dx}}{\sqrt{S\frac{d\mu^2}{dx^2}}\cdot\sqrt{S\frac{d\nu^2}{dx^2}}} = F(\mu, \nu);$$

et on peut les remplacer par

$$S\frac{d\mu^2}{dx^2}=f(\mu,\nu)\,S\frac{d\nu^2}{dx^2},\quad S\frac{d\mu}{dx}\frac{d\nu}{dx}=f_1(\mu,\nu)\,S\frac{d\nu^2}{dx^2},$$

f et f_1 étant des fonctions quelconques de μ et de ν. Si l'on remplace les deux paramètres μ et ν par deux autres ξ et η, on aura, en ayant égard aux deux dernières équations,

$$\begin{aligned}
S\frac{d\xi^2}{dx^2}&=\left[f\frac{d\xi^2}{d\mu^2}+2f_1\frac{d\xi}{d\mu}\frac{d\xi}{d\nu}+\frac{d\xi^2}{d\nu^2}\right]S\frac{d\nu^2}{dx^2},\\
S\frac{d\eta^2}{dx^2}&=\left[f\frac{d\eta^2}{d\mu^2}+2f_1\frac{d\eta}{d\mu}\frac{d\eta}{d\nu}+\frac{d\eta^2}{d\nu^2}\right]S\frac{d\nu^2}{dx^2},\\
S\frac{d\xi}{dx}\frac{d\eta}{dx}&=\left[f\frac{d\xi}{d\mu}\frac{d\eta}{d\mu}+f_1\frac{d\xi}{d\mu}\frac{d\eta}{d\nu}+f_1\frac{d\xi}{d\nu}\frac{d\eta}{d\mu}+\frac{d\xi}{d\nu}\frac{d\eta}{d\nu}\right]S\frac{d\nu^2}{dx^2}.
\end{aligned}$$

On peut déterminer la substitution de paramètres par les deux équations que l'on obtient 1° en égalant à zéro la troisième parenthèse, 2° en égalant entr'elles les deux premières parenthèses. On déduit aisément des deux équations ainsi formées les deux suivantes

$$\begin{aligned}
\frac{d\eta}{d\mu}&=\frac{1}{\sqrt{f-f_1^2}}\left(f_1\frac{d\xi}{d\mu}+\frac{d\xi}{d\nu}\right),\\
\frac{d\eta}{d\nu}&=-\frac{1}{\sqrt{f-f_1^2}}\left(f\frac{d\xi}{d\mu}+f_1\frac{d\xi}{d\nu}\right),
\end{aligned}$$

qui conduisent tout de suite à une équation du second ordre en ξ. Cette substitution de paramètres a pour effet, géométriquement, de transformer en carré la section droite parallèlogrammique du canal curviligne infinitésimal. On pourrait faire en deux coups cette transformation. En égalant à zéro la parenthèse de la troisième des avant dernières équations, sans introduire d'autre condition, on pourrait prendre $\xi=\mu$ et déterminer, par suite, η au moyen de l'équation du premier ordre

$$f\frac{d\eta}{d\mu}+f_1\frac{d\eta}{d\nu}=0:$$

cette substitution préliminaire aurait pour effet géométrique de transformer en rectangle la section parallélogrammique. En prenant alors cette section rectangulaire pour point de départ, on passerait à la section carrée par le moyen des deux équations

$$\frac{d\eta}{d\mu}=\frac{1}{\sqrt{f}}\frac{d\xi}{d\nu}, \quad \frac{d\eta}{d\nu}=-\sqrt{f}\cdot\frac{d\xi}{d\mu}.$$

Il va sans dire qu'il s'agit ici d'une substitution théorique de paramètres et qu'il suffit de concevoir qu'on a une solution particulière quelconque des équations qui définissent la substitution, pourvu qu'il en résulte pour ξ et η des valeurs indépendantes comme celles de μ et de ν. Or en partant de la forme rectangulaire, que l'on peut toujours adopter, si l'on raisonnait dans l'hypothèse que, dans la transformation en carré qui vient d'être indiquée, η peut être une fonction de ξ, on arriverait facilement aux relations suivantes

$$\frac{d\eta}{d\mu}=\frac{d\xi}{d\mu}\sqrt{-1}, \quad \frac{d\eta}{d\nu}=\frac{d\xi}{d\nu}\sqrt{-1},$$

qui conduiraient à supposer

$$\xi=\mu+\nu, \quad \eta=(\mu+\nu)\sqrt{-1}$$

et, par suite,

$$f=-1:$$

résultat inadmissible si l'on admet, comme je le fais ici, qu'il s'agit de surfaces et de paramètres réels.

Moyennant la substitution de paramètres dont il vient d'être question, on est amené à considérer les équations

$$S\frac{d\xi^2}{dx^2}=S\frac{d\eta^2}{dx^2}, \quad S\frac{d\xi}{dx}\frac{d\eta}{dx}=0;$$

et quand on y aura satisfait de la manière la plus générale, on obtiendra la solution la plus générale aussi des équations posées au début de ce paragraphe, en prenant pour μ et pour ν des fonctions arbitraires des formes trouvées pour ξ et η.

En supposant toujours μ, ν, ξ, η des quantités réelles, les deux équations qui précèdent sont renfermées dans l'équation unique

$$\frac{du^2}{dx^2}+\frac{du^2}{dy^2}+\frac{du^2}{dz^2}=0$$

où

$$u=\xi+i\eta, \quad i=\sqrt{-1},$$

à la condition de supposer ultérieurment à u la forme habituelle des imaginaires.

Bien que l'intégrale de l'équation en u puisse s'obtenir au moyen d'une solution complète, qu'il n'est pas difficile de trouver, il m'a paru préférable, à cause de la forme toute spéciale de l'équation, de suivre la marche suivante.

Si l'on pose

$$\frac{du}{dx}=i\cos\omega\cdot\frac{du}{dz},\quad \frac{du}{dy}=i\sin\omega\cdot\frac{du}{dz};$$

les trois quantités $i\cos\omega$, $i\sin\omega$, 1, étant proportionelles aux dérivées partielles d'une même fonction u, la condition connue d'intégrabilité donnera

$$\cos\omega\cdot\frac{d\omega}{dx}+\sin\omega\cdot\frac{d\omega}{dy}-i\frac{d\omega}{dz}=0.$$

L'intégrale de cette équation peut être représentée par le système

$$x=\alpha+iz\cos\omega,$$
$$y=\beta+iz\sin\omega,$$
$$\omega=f(\alpha,\beta),$$

f désignant une fonction arbitraire des deux paramètres auxiliaires α et β. En prenant α, β, et $z=\zeta$ pour les variables indépendantes, on a en suite

$$du=i(\cos\omega\, d\alpha+\sin\omega\, d\beta)\frac{du}{dz},$$

et, par conséquent,

$$\frac{du}{d\alpha}=\frac{du}{dx},\quad \frac{du}{d\beta}=\frac{du}{dy}.$$

D'ailleurs si l'on imagine que, dans u, x et y sont remplacés par leurs expressions précédentes et z par ζ, on a

$$\frac{du}{d\zeta}=\left(1+i\cos\omega\cdot\frac{dx}{d\zeta}+i\sin\omega\cdot\frac{dy}{d\zeta}\right)\frac{du}{dz};$$

et comme

$$\frac{dx}{d\zeta}=i\cos\omega,\quad \frac{dy}{d\zeta}=i\sin\omega,$$

il en résulte

$$\frac{du}{d\zeta}=0.$$

Enfin, en observant que

$$\frac{\frac{du}{d\alpha}}{\cos\omega}=\frac{\frac{du}{d\beta}}{\sin\omega}=\sqrt{\frac{du^2}{d\alpha^2}+\frac{du^2}{d\beta^2}}=i\frac{du}{dz},$$

on pourra adopter pour le système intégral, relatif à l'équation proposée,

$$\left.\begin{aligned} u &= \phi(\alpha, \beta) \\ x &= \alpha + iz \frac{\frac{d\varphi}{d\alpha}}{\sqrt{\frac{d\varphi^2}{d\alpha^2} + \frac{d\varphi^2}{d\beta^2}}}, \\ y &= \beta + iz \frac{\frac{d\varphi}{d\beta}}{\sqrt{\frac{d\varphi^2}{d\alpha^2} + \frac{d\varphi^2}{d\beta^2}}}, \end{aligned}\right\} \qquad (u)$$

où $\phi(\alpha, \beta)$ est une fonction arbitraire, représentant, comme on voit, la valeur de u qui répond à z égal à zéro et dans laquelle on a remplacé x et y par α et β respectivement.

Il est presque superflu de faire observer que, si ϕ ne dépendait que de $(\alpha \pm i\beta)$, on aurait

$$\frac{du^2}{d\alpha^2} + \frac{du^2}{d\beta^2} = 0,$$

et par suite

$$\frac{du}{dz} = 0.$$

L'équation proposée est alors

$$\frac{du^2}{dx^2} + \frac{du^2}{dy^2} = 0,$$

et l'on y satisfait précisément en prenant pour u une fonction arbitraire de $(x \pm iy)$.

Comme ϕ désigne une fonction tout-à-fait quelconque des indéterminées α et β, on peut adopter pour son expression générale

$$u = \phi(\alpha, \beta) = F(\alpha, \beta) + iF_1(\alpha, \beta),$$

F et F_1 étant des fonctions réelles quelconques des deux lettres α et β. Lorsqu'on aura éliminé ces deux lettres du système intégral (u), on obtiendra, pour déterminer u, une équation dont la forme générale sera

$$\Phi(x, y, z, u) + i\Phi_1(x, y, z, u) = 0,$$

Φ et Φ_1 étant des fonctions réelles des variables x, y, z, u. Si l'on y remplace u per $(\xi + i\eta)$, cette équation prendra la forme

$$\Psi(x, y, z, \xi, \eta) + i\Psi_1(x, y, z, \xi, \eta) = 0,$$

Ψ et Ψ_1 étant des fonctions réelles des cinq indéterminées x, y, z, ξ, η. On aura donc, pour déterminer ξ et η en x, y, z, les deux équations

$$\Psi = 0, \quad \Psi_1 = 0$$

renfermant implicitement les traces des deux fonctions arbitraires F et F_1 qui doivent s'introduire dans la solution des deux équations simultanées

$$S\frac{d\xi^2}{dx^2} = S\frac{d\eta^2}{dx^2}, \quad S\frac{d\xi}{dx}\frac{d\eta}{dx} = 0.$$

Il m'a paru utile de vérifier directement certaines circonstances de l'analyse précédent, laquelle doit comprendre, comme cas particulier, la solution du problème des sections droites constantes considéré au § 3.

Prenons, par exemple, les hélices

$$\mu^2 = x^2 + y^2, \quad \nu = z - m \operatorname{arc tg} \frac{y}{x} \cdot$$

on a

$$S\frac{d\mu^2}{dx^2} = 1, \quad S\frac{d\nu^2}{dx^2} = \frac{\mu^2 + m^2}{\mu^2}, \quad S\frac{d\mu}{dx}\frac{d\nu}{dx} = 0;$$

et, par suite, pour transformer en carré la section rectangulaire de ce système,

$$\frac{d\xi}{d\nu} = \frac{d\eta}{dt}, \quad \frac{d\xi}{dt} = -\frac{d\eta}{d\nu},$$

$$t = \int \frac{d\mu}{\mu}\sqrt{\mu^2 + m^2};$$

$$S\frac{d\xi^2}{dx^2} = S\frac{d\eta^2}{dx^2} = \frac{\mu^2 + m^2}{\mu^2}\left(\frac{d\xi^2}{dt^2} + \frac{d\xi^2}{d\nu^2}\right).$$

Comme il suffit, pour la substitution de paramètres, d'une solution particulière, je prendrai

$$\xi = \nu, \quad \eta = t = \sqrt{\mu^2 + m^2} + \frac{m}{2}\log\frac{\sqrt{\mu^2 + m^2} - m}{\sqrt{\mu^2 + m^2} + m} \cdot$$

En posant

$$u = \xi + i\eta,$$

on aura donc ici

$$u = z - m \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + i \left[\sqrt{x^2 + y^2 + m^2} + \frac{m}{2} \log \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + m^2} - m}{\sqrt{x^2 + y^2 + m^2} + m} \right];$$

d'où résulte

$$\frac{du}{dx} = \frac{my + ix\sqrt{x^2 + y^2 + m^2}}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{-mx + iy\sqrt{x^2 + y^2 + m^2}}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{du}{dz} = 1.$$

En substituant dans les relations générales

$$\frac{\frac{du}{dx}}{x - \alpha} = \frac{\frac{du}{dy}}{y - \beta} = \frac{\frac{du}{dz}}{z},$$

on en conclut, moyennant quelques simples transformations,

$$\sqrt{x^2 + y^2 + m^2} = \Theta + iz,$$

$$y - ix = (\beta - i\alpha) \frac{\Theta + iz + m}{\Theta + m},$$

$$y + ix = (\beta + i\alpha) \frac{\Theta + iz - m}{\Theta - m},$$

où

$$\Theta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + m^2}.$$

Si l'on remplace, dans l'expression ci-dessus de u, $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ par

$$-\frac{i}{2} \log \left(- \frac{y - ix}{y + ix} \right)$$

et qu'on substitue en même temps les valeurs précédentes, on obtient

$$u = i\Theta + \frac{mi}{2} \log \left(- \frac{\beta - i\alpha}{\beta + i\alpha} \cdot \frac{\Theta - m}{\Theta + m} \right),$$

ou bien

$$u = - m \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha} + i \left(\Theta + \frac{m}{2} \log \frac{\Theta - m}{\Theta + m} \right),$$

expression indépendante de z et qui est bien la valeur de u d'où l'on est parti quand on y fait z égal à zéro et qu'on y remplace x et y par α et β respectivement. Il est bien entendu que c'est de cette dernière propriété qu'on aurait dû partir s'il s'était agi seulement de trouver, le plus simplement possible, l'expression de la fonction $\phi(\alpha, \beta)$ qui répond à l'exemple actuel.

J'ajouterai une dernière remarque sur le système intégral (u). Si l'on pose généralement

$$\frac{d\varphi}{d\alpha}=\lambda A, \quad \frac{d\varphi}{d\beta}=\lambda B,$$

$$\lambda=\sqrt{\frac{d\varphi^2}{d\alpha^2}+\frac{d\varphi^2}{d\beta^2}}, \quad A^2+B^2=1:$$

on trouve aisément

$$S\frac{d\alpha^2}{dx^2}=\frac{B^2}{D^2}, \quad S\frac{d\beta^2}{dx^2}=\frac{A^2}{D^2}, \quad S\frac{d\alpha\, d\beta}{dx\, dx}=-\frac{AB}{D^2},$$

où

$$D=1+iz\left(\frac{dA}{d\alpha}+\frac{dB}{d\beta}\right).$$

On a aussi

$$S\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{\lambda}{D}\left(\frac{dA}{d\alpha}+\frac{dB}{d\beta}\right).$$

Lorsqu'on suppose

$$\frac{dA}{d\alpha}+\frac{dB}{d\beta}=0,$$

on reconnait sans peine que ϕ est une fonction quelconque de θ, cette dernière quantité étant déterminée par l'équation

$$\beta+\alpha\theta=\psi(\theta),$$

ψ désignant une fonction arbitraire. On a par conséquent

$$x=\alpha+iz\frac{\theta}{\sqrt{1+\theta^2}},$$

$$y=\beta+iz\frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}},$$

$$u=F(\theta);$$

ou, si on le préfère, en éliminant α et β,

$$y+\theta x-iz\sqrt{1+\theta^2}=\psi(\theta)$$

$$u=F(\theta).$$

Dans le cas présent

$$S\frac{d^2u}{dx^2}=0,$$

et, par suite, quand on posera

$$u=\xi+i\eta,$$

on aura

$$S\frac{d^2\xi}{dx^2}=0,\quad S\frac{d^2\eta}{dx^2}=0.$$

Par exemple, si l'on suppose ψ égal à zéro, on aura

$$-\theta=\frac{xy+iz\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+z^2};$$

et, en prenant

$$\xi+i\eta=u=-\theta,$$

il viendra

$$\xi=\frac{xy}{x^2+z^2},\quad \eta=\frac{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+z^2}, \tag{s}$$

équations qui représentent deux familles particulières de cônes orthogonaux et isothermes.

En conservant la précédente expression de θ et posant

$$u=f(\theta)+if_1(\theta),$$

la substitution de

$$-\theta=\xi+i\eta$$

où ξ et η ont les valeurs ci-dessus, donnera

$$u=\Phi(\xi,\eta)+i\Psi(\xi,\eta):$$

de sorte que, en posant

$$\xi_1=\Phi(\xi,\eta),\quad \eta_1=\Psi(\xi,\eta),$$

on aura, avec les traces de deux fonctions arbitraires f et f_1, deux familles de cônes orthogonaux et isothermes, aux paramètres ξ_1 et η_1, et se coupant suivant les mêmes droites que les cônes particuliers (s).

Montpellier, 1872.

N.B. Le présent travail a été envoyé à l'Institut en mars 1870. L'envoi contenait une suite (non complète) relative à la théorie des lignes isothermes permanentes. Elle sera publiée ultérieurement avec des additions que j'aurai le soin d'indiquer. Mais les précédents problèmes peuvent très-bien en être détachés.

Théorie des coordonnées curvilignes quelconques.

TROISIÈME PARTIE.

(*par Mr. l'Abbé* Aoust, *prof. a Marseille.*)

Nous avons exposé dans la *première partie* (*) de notre *Théorie des coordonnées curvilignes* les formules qui servent de fondement à cette théorie. *La deuxième partie* (**) a été consacrée aux principales applications de ces formules à la géométrie des surfaces et des courbes situées sur les surfaces. Il nous reste à généraliser nos résultats et à déduire de ces mêmes formules une série de relations se rapportant aux divers éléments des surfaces, relations importantes qui, par suite de l'introduction de la courbure inclinée, prennent un caractère de simplicité. Tel est l'objet de cette *troisième partie.*

Nous conservons toujours les définitions, notations et hypothèses admises dans notre première partie. Lorsque nous projetterons une courbure inclinée telle que $\frac{1}{\mathfrak{C}_{01}}$, ou l'arc de contingence correspondant $\mathfrak{J}_{01}$, sur l'un des trois arcs coordonnés, nous représenterons la projection par le même symbole affecté en haut et à droite de l'indice relatif à l'arc dont il s'agit, cet indice étant placé entre crochets ( ); s'il s'agit, par exemple, de l'arc $d\sigma$, les projections sur cet arc seront $\frac{1}{\mathfrak{C}_{01}^{(0)}}$, $\mathfrak{J}_{01}^{(0)}$. Lorsqu'on les projettera sur une direction quelconque ν, les symboles seront affectés de la lettre (ν) entre crochets.

Lorsque un indice ou une lettre placés sous le signe de sommation $\sum$ resteront invariables durant la permutation tournante des autres indices

---

(*) Annali di Matematica, 1[a] serie (Roma), t. 6.
(**) Annali di Matematica, 2[a] serie (Milano), t. 2.

affectant des quantités également placées sous le signe $\sum$, nous aurons soin de placer cet indice ou cette lettre qui restent invariables entre parenthèses [ ].

§ 1. De la courbure inclinée suivant une direction quelconque et de ses variations.

1. *Courbure inclinée d'une ligne suivant une direction quelconque.* Pour rester fidèle à nos conventions, si une ligne ν se déplace d'après une loi connue de telle sorte qu'un de ses points parcoure un arc s, nous appelons *courbure inclinée* de l'arc s *suivant la direction* ν, le rapport du déplacement angulaire infiniment petit de la ligne ν au chemin infiniment petit parcouru par le point sur l'arc ds et nous représentons cette courbure par $\frac{1}{\mathfrak{C}_{\nu,ds}}$. L'arc de cercle décrit d'un point de la droite comme centre avec un rayon égal à l'unité, entre la première position de la droite et une parallèle menée de ce point à la seconde position de cette droite, est appelé arc de *contingence inclinée* de la ligne s *suivant la direction* ν et représenté par le symbole $\mathfrak{J}_{\nu,ds}$. Cet arc de cercle représente en grandeur et en direction la courbure inclinée.

Cette conception est toute à fait générale et s'applique sans exception à toutes les courbures que les géomètres introduisent dans le calcul ainsi qu'à toutes les grandeurs de l'ordre des courbures qu'ils considèrent, et la courbure inclinée les comprend toutes comme cas particuliers.

Elle comprend les courbures propres des arcs coordonnés, puisque la courbure d'une ligne est la courbure inclinée de cette ligne suivant ses tangentes.

Elle comprend la courbure inclinée d'un arc coordonné suivant une autre arc coordonné, puisque cette courbure n'est autre chose que la courbure du premier arc inclinée suivant les tangentes au second.

Elle comprend la fléxion d'une surface suivant une direction donnée sur cette surface. En effet, d'après certains géomètres, cette dénomination s'applique au rapport de l'angle de deux normales à la surface, menées par les deux extrémités d'un arc infiniment petit situé sur la surface, à la longueur de cet arc; on voit donc que la flexion de la surface ρ suivant un arc $d\sigma_1$ n'est autre chose que la courbure inclinée de cet arc suivant les normales à la surface et qu'elle sera representée par $\frac{1}{\mathfrak{L}_{n1}}$. D'après nos conventions, ses composantes obliques suivant les arcs coordonnés seront $\frac{1}{l_{n1}^{(0)}}$, $\frac{1}{l_{n1}^{(1)}}$, $\frac{1}{l_{n1}^{(2)}}$; et ses projections sur ces trois arcs seront $\frac{1}{\mathfrak{L}_{n1}^{(0)}}$, $\frac{1}{\mathfrak{L}_{n1}^{(1)}}$, $\frac{1}{\mathfrak{L}_{n1}^{(2)}}$.

2. *Variations d'un angle.* Soient deux droites ν, μ, formant entre elles un angle (ν, μ) variable et dont le sommet parcourt l'arc infiniment petit $d\lambda$; l'on a par rapport aux trois coordonnées rectilignes x, y, z, la relation

$$\cos(\nu, \mu) = \sum \cos(\nu, x)\cos(\mu, x),$$

le signe $\sum$ se rapportant aux trois axs coordonnés; si l'on prend la variation suivant le déplacement $d\lambda$ on aura en introduisant les courbures inclinées et en restant fidèles aux conventions établies, la relation fondamentale

$$(1) \qquad \frac{d\cos(\nu, \mu)}{d\lambda} = \frac{\cos(\mu, \mathfrak{L}_{\nu\lambda})}{\mathfrak{L}_{\nu\lambda}} + \frac{\cos(\nu, \mathfrak{L}_{\mu\lambda})}{\mathfrak{L}_{\mu\lambda}} = \frac{1}{\mathfrak{L}_{\nu\lambda}{}^{(\mu)}} + \frac{1}{\mathfrak{L}_{\mu\lambda}{}^{(\nu)}}.$$

Soit π la normale au plan parallèle aux deux directions ν et μ. Si, conformément à notre usage, on représente par les mêmes lettres de l'alphabet romain affectées de l'indice (π) les projections des deux courbures sur le plan des deux droites dans leur position primitive, l'équation précédente pourra s'écrire sous la forme suivante:

$$(2) \qquad -\frac{d(\nu, \mu)}{d\lambda} = \frac{1}{\mathrm{L}_{\nu\lambda}{}^{(\pi)}} + \frac{1}{\mathrm{L}_{\mu\lambda}{}^{(\pi)}}.$$

Les formules (1), (2) se démontrent avec non moins de facilité par la géométrie; car si du sommet de l'angle on mène des parallèles aux positions des deux côtés après leur déplacements et qu'on projete l'angle ainsi obtenu sur le plan des deux côtés avant leur déplacement et que du sommet de l'angle, avec un rayon égal à l'unité, on décrive dans ce plan une circonfèrence de cercle, on voit directement que la variation de l'angle des deux droites est égale à la somme des projections des déviations des côtés sur le plan des deux droites; ce qui n'est autre chose que le principe exprimé par l'équation (2), que l'on peut aussi énoncer de la manière suivante:

Théorème. *La variation d'un angle est la somme des projections sur le plan de cet angle, des arcs de contingence inclinée de la ligne décrite par le sommet, suivant chacun des deux côtés de l'angle.*

C'est ce théorème, qui convenablement appliqué donne toutes les formules de la théorie.

Lorsque les deux côtés de l'angle coïncident avec les tangentes aux deux arcs coordonnées, on retrouve les formules (14) et (15) de notre première partie, lesquelles peuvent être condensées dans la formule suivante

$$(1)' \qquad \frac{d\cos(d\sigma_1,\, d\sigma_2)}{d\sigma} = \frac{1}{\mathfrak{L}_{10}^{(2)}} + \frac{1}{\mathfrak{L}_{20}^{(1)}}. \qquad (9)$$

Cette formule, jointe à toutes celles que l'on obtient par la variation d'un des trois éléments $d\sigma$, $d\sigma_1$, $d\sigma_2$ contenus dans le premier membre et des indices correspondants du second, donne les neuf équations relatives aux variations des arcs coordonnés.

3. *Relations entre les composantes obliques d'une courbure et ses projections orthogonales sur les arcs coordonnés.*

Soit la courbure considérée $\frac{1}{\mathfrak{L}}$; $\frac{1}{l^{(0)}}$, $\frac{1}{l^{(1)}}$, $\frac{1}{l^{(2)}}$, ses composantes obliques suivant les arcs coordonnés; $\frac{1}{\mathfrak{L}^{(0)}}$, $\frac{1}{\mathfrak{L}^{(1)}}$, $\frac{1}{\mathfrak{L}^{(2)}}$ ses projections orthogonales sur les trois arcs; si l'on remarque que la projection d'une courbure sur une direction est égale à la somme des projections des composantes obliques de cette courbure sur cette direction, on a le type suivant qui contient trois équations

$$(3) \qquad \frac{1}{\mathfrak{L}^{(0)}} = \frac{\cos(d\sigma,\, d\sigma)}{l^{(0)}} + \frac{\cos(d\sigma,\, d\sigma_1)}{l^{(1)}} + \frac{\cos(d\sigma,\, d\sigma_2)}{l^{(2)}}. \qquad (3)$$

Par la résolution des trois équations linéaires contenues dans ce type, ou mieux encore, par la composition des courbures suivant les trois normales n, n_1, n_2 aux trois surfaces coordonnées ρ, ρ_1, ρ_2, on trouve le type inverse dans le quel on représent par k le produit des sinus des angles Φ, Φ_1, θ_2

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{k^2}{l^{(0)}\sin\varphi} = \frac{\sin(d\sigma_2,\, d\sigma_1)}{\mathfrak{L}^{(0)}}\cos(dn,\, dn) + \frac{\sin(d\sigma,\, d\sigma_2)}{\mathfrak{L}^{(1)}}\cos(dn,\, dn_1) + {} \\ + \frac{\sin(d\sigma_1,\, d\sigma_2)}{\mathfrak{L}^{(2)}}\cos(dn,\, dn_2) \end{aligned} \right\}; \qquad (3)$$

ce type renferme également trois équations.

Si l'on décomposait la courbure $\frac{1}{\mathfrak{L}}$ suivant les trois normales et qu'on représentat par $\frac{1}{l^{(n)}}$, $\frac{1}{l^{(n_1)}}$, $\frac{1}{l^{(n_2)}}$ les trois composantes obliques suivant ces normales, et par $\frac{1}{\mathfrak{L}^{(n)}}$, $\frac{1}{\mathfrak{L}^{(n_1)}}$, $\frac{1}{\mathfrak{L}^{(n_2)}}$ les trois projections orthogonales de la courbure $\frac{1}{\mathfrak{L}}$ sur les trois normales, on trouverait les relations:

$$(4)\qquad \frac{1}{\mathfrak{L}^{(n)}}=\frac{\cos(n,\,d\sigma)}{l^{(0)}},\qquad\qquad \frac{1}{\mathfrak{L}^{(0)}}=\frac{\cos(d\sigma,\,n)}{l^{(n)}}.\qquad (3)$$

Ces systèmes d'équations fournissent donc les composantes obliques et normales d'une courbure suivant les trois arcs coordonnés et suivant les trois normales aux surfaces coordonnées.

4. *Des composantes orthogonales de la flexion d'une surface suivant une direction.*

Considérons les flexions de la surface ρ suivant les deux directions $d\sigma_1$, $d\sigma_2$; ces deux flexions sont $\frac{1}{\mathfrak{L}_{n1}}$, $\frac{1}{\mathfrak{L}_{n2}}$; joignons-y la courbure inclinée $\frac{1}{\mathfrak{L}_{n0}}$ de l'arc $d\sigma$ suivant les normales aux surfaces infiniment voisines de la série ρ, parce que cette courbure s'introduit d'elle même dans le calcul; cela posé, prenons la variation des angles $(n,\,d\sigma_1)$, $(n,\,d\sigma_2)$ suivant les trois arcs coordonnés, en appliquant la formule (1); et remarquons que ces angles restent droits; nous aurons les deux groupes suivants d'équations:

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{\mathfrak{L}^{(n)}_{10}}+\frac{1}{\mathfrak{L}^{(1)}_{n0}}=0, && \frac{1}{\mathfrak{L}^{(n)}_{20}}+\frac{1}{\mathfrak{L}^{(2)}_{n0}}=0,\\
&\frac{1}{\mathfrak{L}^{(n)}_{11}}+\frac{1}{\mathfrak{L}^{(1)}_{n1}}=0, && \frac{1}{\mathfrak{L}^{(n)}_{21}}+\frac{1}{\mathfrak{L}^{(2)}_{n1}}=0,\\
&\frac{1}{\mathfrak{L}^{(n)}_{12}}+\frac{1}{\mathfrak{L}^{(1)}_{n2}}=0; && \frac{1}{\mathfrak{L}^{(n)}_{22}}+\frac{1}{\mathfrak{L}^{(2)}_{n2}}=0.
\end{aligned}\right\}\qquad (3)$$

Si l'on opére de même sur le deux autres surfaces coordonnées, on obtiendra pour chacune d'elles six formules qui se déduisent des précedentes par la rotation des indices.

Si l'on remarque que les premiers termes de ces équations sont connus, puisque chacun d'eux est le produit de la composante oblique suivant $d\sigma$ de la courbure inclinée dont il s'agit par le cosinus de l'angle que la normale n fait avec la direction $d\sigma$, et que l'expression de ce cosinus a été donnée dans notre première Partie n.° 1, les formules précedentes font connaître la courbure inclinée $\frac{1}{\mathfrak{L}_{n0}}$ et les deux flexions $\frac{1}{\mathfrak{L}_{n1}}$, $\frac{1}{\mathfrak{L}_{n2}}$ en grandeur et en direction, parce que cette courbure et ces deux flexions étant perpendiculaires à la normale n, il suffit de deux équations du groupe précedent situées sur la même ligne pour déterminer la courbure dont il s'agit. Ainsi, en prenant le rapport des composantes des courbures $\frac{1}{\mathfrak{L}_{n0}^{(1)}}$, $\frac{1}{\mathfrak{L}_{n0}^{(2)}}$, on aura le rapport des cosinus des angles que la courbure $\frac{1}{\mathfrak{L}_{n0}}$ fait avec les deux arcs $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, et conséquemment l'intensité de cette courbure exprimées par les deux équations:

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\cos(\mathfrak{L}_{n0},\, d\sigma_1)}{\cos(\mathfrak{L}_{n0},\, d\sigma_2)} &= \frac{l_{20}^{(0)}}{l_{10}^{(0)}}, \\ \frac{\sin^4\varphi}{k^2(\mathfrak{L}_{n0})^2} &= \left(\frac{1}{l_{10}^{(0)}}\right)^2 + \left(\frac{1}{l_{20}^{(0)}}\right)^2 - \frac{2\cos\varphi}{l_{10}^{(0)}\, l_{20}^{(0)}}, \end{aligned}\right\}\qquad (9)$$

5. *Des composantes obliques de la flexion d'une surface suivant une direction.*

Quand on connait les composantes orthogonales d'une courbure on passe aux composantes obliques au moyen des formules (3)'. Si l'on applique ces formules à une flexion dont on connait les composantes orthogonales par les équations (5), on obtiendra les relations qui donnent les composantes obliques $\frac{1}{l_{n0}^{(1)}}$, $\frac{1}{l_{n0}^{(2)}}$, $\frac{1}{l_{n0}^{(0)}}$ de la courbure $\frac{1}{\mathfrak{L}_{n0}}$; ces relations, qui sont au nombre de deux parce que la composante $\frac{1}{l_{n0}^{(0)}}$ est nulle, sont les suivantes:

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\sin^2\varphi}{l^{(1)}{}_{n0}} &= \frac{\cos(d\sigma_2,\, d\sigma_2)}{\mathfrak{L}^{(n)}{}_{10}} - \frac{\cos(d\sigma_1,\, d\sigma_2)}{\mathfrak{L}^{(n)}{}_{20}} = \frac{\sin\varphi \sin(\mathfrak{L}_{n0},\, d\sigma_2)}{\mathfrak{L}_{n0}} \\ \frac{\sin^2\varphi}{l^{(2)}{}_{n0}} &= \frac{\cos(d\sigma_2,\, d\sigma_1)}{\mathfrak{L}^{(n)}{}_{10}} - \frac{\cos(d\sigma_1,\, d\sigma_1)}{\mathfrak{L}^{(n)}{}_{20}} = \frac{\sin\varphi \sin(\mathfrak{L}_{n0},\, d\sigma_1)}{\mathfrak{L}_{n0}} \end{aligned}\right\}\qquad (9)$$

Il est facile de voir que la rotation des seconds indices inférieurs donnera les deux couples des formules qui se rapportent aux deux flexions $\frac{1}{\mathfrak{L}_{n1}}$, $\frac{1}{\mathfrak{L}_{n2}}$; et, ces deux couples obtenus, on passera du groupe de ces six équations se rapportant à la surface ρ aux groupes qui se rapportent aux surfaces ρ_1 et ρ_2 par la permutation tournante de tous les indices. On a donc ce théorème:

Théorème. *Si l'on prend les flexions d'une surface ρ suivant deux arcs $d\sigma_1$, $d\sigma_2$ tracés sur cette surface, les composantes obliques et les* *composantes orthogonales suivant ces deux arcs, de ces flexions, s'expriment linéairement au moyen des projections sur la normale des courbures inclinées des deux arcs $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, réciproquement l'un à l'autre.*

Un théorème semblable existe pour les composantes de la courbure $\frac{1}{\mathfrak{L}_{n0}}$.

Il est bon de remarquer que les formules (5) font connaître les cosinus des angles que cette courbure et les deux flexions font avec les arcs coordonnés, tandis que les formules (7) donnent l'expression des sinus des mêmes angles.

6. *De la variation de l'angle que la normale à une surface coordonnée fait avec l'intersection des deux autres.* Le cosinus de l'angle que la normale n fait avec l'élement $d\sigma$ est donné par la relation

$$\cos(n,\, d\sigma) = \sum \cos(n,\, x)\cos(d\sigma,\, x),$$

le signe $\sum$ s'étendant aux trois arcs x, y, z. Si l'on prend la variation des deux membres par rapport aux trois arcs coordonnés, en appliquant la formule (1) on obtiendra les trois équations:

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d}{d\sigma}\cos(n,\, d\sigma) = \dfrac{1}{\mathfrak{L}^{(n)}_{00}} + \dfrac{1}{\mathfrak{L}^{(0)}_{n0}}, \\ \dfrac{d}{d\sigma_1}\cos(n,\, d\sigma) = \dfrac{1}{\mathfrak{L}^{(n)}_{01}} + \dfrac{1}{\mathfrak{L}^{(0)}_{n1}}, \\ \dfrac{d}{d\sigma_2}\cos(n,\, d\sigma) = \dfrac{1}{\mathfrak{L}^{(n)}_{02}} + \dfrac{1}{\mathfrak{L}^{(0)}_{n2}}; \end{array} \right\} \qquad (9)$$

dans les quelles il n'y a d'inconnus que les cosinus des angles que la courbure $\frac{1}{\mathfrak{L}_{n0}}$ et les flexions de la surface ρ font avec l'arc $d\sigma$. Considérons la première, elle forme avec les directions $d\sigma$, $d\sigma_1$ un trièdre; et avec les directions $d\sigma_1$, $d\sigma_2$ un autre trièdre; si dans chacun d'eux on exprime le cosinus de la face opposée à la direction de la courbure $\frac{1}{\mathfrak{L}_{n0}}$ au moyen de la formule fondamentale de la trigonometrie sphèrique et qu'on élimine entre les deux relations résultantes les cosinus des diédres suivant cette direction par cette consideration que la somme des deux diédres vaut deux angles droits, on obtient la relation

$$\sin\varphi\cos(\mathfrak{L}_{n0},\, d\sigma) = \cos\varphi_1\sin(\mathfrak{L}_{n0},\, d\sigma_1) + \cos\varphi_2\sin(\mathfrak{L}_{n0},\, d\sigma_2);$$

en divisant par $\mathfrak{L}_{n0}$, et en ayant égard aux formules (7), on trouve l'équation suivante

$$(9) \qquad -\frac{\sin\varphi}{\mathfrak{C}^{(0)}{}_{n0}} = \frac{\sin\varphi_2 \cos\theta_1}{\mathfrak{C}^{(n)}{}_{20}} + \frac{\sin\varphi_1 \cos\theta_2}{\mathfrak{C}^{(n)}{}_{10}}. \qquad (9)$$

Si maintenant on élimine $\frac{1}{\mathfrak{C}^{(0)}{}_{n0}}$ entre cette équation et la première des équations (8) et qu'on opère de même sur les autres équations du groupe, on obtient le type suivant

$$(8)' \sin\phi \frac{d}{d\sigma}\cos(n, d\sigma) = \frac{\sin\varphi}{\mathfrak{C}^{(n)}{}_{00}}\cos(n, n) + \frac{\sin\varphi_1}{\mathfrak{C}^{(n)}{}_{10}}\cos(n, n_1) + \frac{\sin\varphi_2}{\mathfrak{C}^{(n)}{}_{20}}\cos(n, n_2) \ (9)$$

qui contient neuf équations, formant trois groupes relatifs, chacun à chacune des surfaces. Les deux autres équations du premier groupe se déduisent de l'équation (8)' par la rotation des indices dans le dénominateur $d\sigma$ dans le premier membre, et la rotation correspondante des seconds indices inférieurs des courbures dans le second membre.

Il resulte de ce qui précède, que la variation suivant l'un des trois arcs coordonnés, de l'angle que la normale à l'une des surfaces fait avec l'intersection des deux autres, s'exprime linéairement et symétriquement en fonction des composantes normales des courbures de cet arc inclinées suivant les tangentes des trois arcs coordonnés.

7. *De la variation des angles que les trois surfaces coordonnées font entre elles.* L'on a la relation

$$\cos(n_1, n_2) = \sum \cos(n_1, x)\cos(n_2, x);$$

si l'on différentie les deux membres par rapport aux trois éléments $d\sigma$, $d\sigma_1$, $d\sigma_2$ on obtient les équations:

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\cos(n_1, n_2)}{d\sigma} &= \frac{1}{\mathfrak{C}^{(n_2)}{}_{n_1 0}} + \frac{1}{\mathfrak{C}^{(n_1)}{}_{n_2 0}}, \\ \frac{d\cos(n_1, n_2)}{d\sigma_1} &= \frac{1}{\mathfrak{C}^{(n_2)}{}_{n_1 1}} + \frac{1}{\mathfrak{C}^{(n_1)}{}_{n_2 1}}, \\ \frac{d\cos(n_1, n_2)}{d\sigma_2} &= \frac{1}{\mathfrak{C}^{(n_2)}{}_{n_1 2}} + \frac{1}{\mathfrak{C}^{(n_1)}{}_{n_2 2}}; \end{aligned} \right\} \qquad (3)$$

or si l'on remarque que les projections des courbures sur une direction sont égales à la somme des projections des composantes obliques de ces courbures sur cette direction, les équations précédentes peuvent s'écrire sous la forme suivante:

$$(10)' \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\cos(n_1, n_2)}{d\sigma} &= \frac{\cos(n_2, d\sigma_2)}{l^{(2)}_{n_1 0}} + \frac{\cos(n_1, d\sigma_1)}{l^{(1)}_{n_2 0}}, \\ \frac{d\cos(n_1, n_2)}{d\sigma_1} &= \frac{\cos(n_2, d\sigma_2)}{l^{(2)}_{n_1 1}} + \frac{\cos(n_1, d\sigma_1)}{l^{(1)}_{n_2 1}}, \\ \frac{d\cos(n_1, n_2)}{d\sigma_2} &= \frac{\cos(n_2, d\sigma_2)}{l^{(2)}_{n_1 2}} + \frac{\cos(n_1, d\sigma_1)}{l^{(1)}_{n_2 2}}. \end{aligned} \right.$$

Si l'on remarque que les deux angles (n_1, n_2) et θ sont supplémentaires et qu'on ait égard aux valeurs des cosinus des angles $(n_1, d\sigma_1)$, $(n_2, d\sigma_2)$ 1ère Partie, n.° 3, on obtient les équations suivantes:

$$(10)'' \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\theta}{d\sigma} &= \frac{\sin\varphi_1}{l^{(2)}_{n_1 0}} + \frac{\sin\varphi_2}{l^{(1)}_{n_2 0}}, \\ \frac{d\theta}{d\sigma_1} &= \frac{\sin\varphi_1}{l^{(2)}_{n_1 1}} + \frac{\sin\varphi_2}{l^{(1)}_{n_2 1}}, \\ \frac{d\theta}{d\sigma_2} &= \frac{\sin\varphi_1}{l^{(2)}_{n_1 2}} + \frac{\sin\varphi_2}{l^{(1)}_{n_2 2}}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Telles sont les équations qui donnent les variations des angles des surfaces coordonnées.

8. *Variation de la distance de deux surfaces coordonnées d'une même série.* Considérons deux surfaces coordonnées d'une même série ρ, infiniment voisines; leur distance dn comptée sur la normale a pour expression

$$dn = d\sigma\cos(n, d\sigma);$$

d'après cela, si l'on prend la variation par rapport à ρ_1, on aura

$$d_1 dn = \cos(n, d\sigma) d_1 d\sigma + d\sigma d_1 \cos(n, d\sigma),$$

or si l'on a égard aux variations des arcs (1ère Partie, n.° 18) et aux variations des angles $(n, d\sigma)$, form. 8, on obtient les deux formules suivantes:

$$(11) \left\{ \begin{aligned} \frac{\sin^2\varphi}{k}\frac{d_1 dn}{d\sigma d\sigma_1} &= \frac{\sin\varphi}{l^{(0)}_{10}}\cos(n, n) + \frac{\sin\varphi_1}{l^{(0)}_{11}}\cos(n, n_1) + \frac{\sin\varphi_2}{l^{(0)}_{12}}\cos(n, n_2), \\ \frac{\sin^2\varphi}{k}\frac{d_2 dn}{d\sigma d\sigma_2} &= \frac{\sin\varphi}{l^{(0)}_{20}}\cos(n, n) + \frac{\sin\varphi_1}{l^{(0)}_{21}}\cos(n, n_1) + \frac{\sin\varphi_2}{l^{(0)}_{22}}\cos(n, n_2). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

On trouvera les deux autres couples contenus dans ce type par la rotation des indices.

9. *De la double variation de l'angle qu'une direction variable fait avec une direction fixe.* Soit l'axe des x cette direction fixe; considérons

une ligne ν menée par un point et dont la direction varie avec le point. Si nous restons fidèle à notre notation et que nous prenons la variation de $\cos(\nu, x)$ par rapport à ρ_1 nous aurons l'équation

$$\frac{d}{d\rho_1}\cos(\nu, x) = \frac{d\sigma_1}{d\rho_1}\left(\frac{X}{l^{(0)}{}_{\nu 1}} + \frac{X_1}{l^{(1)}{}_{\nu 1}} + \frac{X_2}{l^{(2)}{}_{\nu 1}}\right); \tag{12}$$

si l'on prend la variation par rapport à ρ_2 des deux membres de cette équation et qu'on élimine les variations des cosinus au moyen des relations (23) et (24) (1ère Partie) l'on aura l'équation suivante

$$\left\{\begin{aligned}\frac{d^2\cos(\nu, x)}{d\rho_2\, d\rho_1} = \frac{d\sigma_1}{d\rho_1}\cdot\frac{d\sigma_2}{d\rho_2}\sum X_0\left\{\frac{1}{l^{[(0)]}{}_{[\nu 1]}\, l^{(0)}_{[02]}} + \frac{1}{l^{[(1)]}{}_{[\nu 1]}\, l^{(0)}_{[12]}} + \frac{1}{l^{[(2)]}{}_{[\nu 1]}\, l^{(0)}_{[22]}} + \right.\\ \left. + \frac{d}{d\rho_{[2]}}\left(\frac{d\sigma_{[1]}}{d\rho_{[1]}\, l^{(0)}{}_{[\nu 1]}}\right)\right\}\end{aligned}\right\} \tag{13} \quad (9)$$

le signe $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs que prend l'expression placée sous ce signe par suite de la rotation simultanée des indices non contenus entre crochets [ ].

Cette formule est tout à fait générale; l'indice qui suit ν dans les composantes des courbures suivant la direction ν est partout le même et égal à 1, il provient de la variation par rapport à ρ_1; le second indice qui affecte les courbures des seconds facteurs de chaque terme est partout le même et égal à 2, il provient de la variation par rapport à ρ_2. Il suffira donc de modifier convenablement ces deux indices dans le second membre et les variations correspondantes du premier pour avoir toutes les doubles variations possibles. D'après cela la double variation du cosinus de l'angle (ν, x) suivant les mêmes paramètres intervertis, sera donnée par l'équation

$$\left\{\begin{aligned}\frac{d^2\cos(\nu, x)}{d\rho_1\, d\rho_2} = \frac{d\sigma_2}{d\rho_2}\cdot\frac{d\sigma_1'}{d\rho_1}\sum X_0\left\{\frac{1}{l^{[(0)]}{}_{[\nu 2]}\, l^{(0)}_{[01]}} + \frac{1}{l^{[(1)]}{}_{[\nu 2]}\, l^{(0)}_{[11]}} + \frac{1}{l^{[(2)]}{}_{[\nu 2]}\, l^{(0)}_{[21]}} + \right.\\ \left. \frac{d}{d\rho_{[1]}}\left(\frac{d\sigma_{[2]}}{d\rho_{[2]}\, l^{(0)}{}_{[\nu 2]}}\right)\right\}.\end{aligned}\right. \tag{13'}$$

Suivant que l'on fera coïncider dans l'équation (13) la ligne ν avec les tangentes aux lignes coordonnées ou avec les normales aux surfaces coordonnées, on aura les doubles variations des courbures inclinées des arcs coordonnées ou des flexions des trois surfaces.

10. *Des relations qui existent entre les variations des arcs de contingence inclinée suivant une direction quelconque.* Si l'on remarque que

les doubles variations que nous avons trouvées dans le numéro précédent doivent être identiques quelques soient les cosinus X_0, X_1, X_2, on obtient en identifiant les expressions de ces doubles variations, trois équations entre les variations des composantes obliques des courbures inclinées suivant la direction ν. Ces trois équations sont:

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{d\sigma_1}{l^{(0)}{}_{\nu 1}\,d\rho_1}\right)-\frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{d\sigma_2}{l^{(0)}{}_{\nu 2}\,d\rho_2}\right)+\frac{d\sigma_1}{d\rho_1}\frac{d\sigma_2}{d\rho_2}\sum\left\{\frac{1}{l^{(0)}{}_{[\nu 1]}\,l^{[0]}_{0[2]}}-\frac{1}{l^{(0)}{}_{[\nu 2]}\,l^{[0]}_{0[1]}}\right\}=0,\\ &\frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{d\sigma_1}{l^{(1)}{}_{\nu 1}\,d\rho_1}\right)-\frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{d\sigma_2}{l^{(1)}{}_{\nu 2}\,d\rho_2}\right)+\frac{d\sigma_1}{d\rho_1}\frac{d\sigma_2}{d\rho_2}\sum\left\{\frac{1}{l^{(0)}{}_{[\nu 1]}\,l^{[1]}_{0[2]}}-\frac{1}{l^{(0)}{}_{[\nu 2]}\,l^{[1]}_{0[1]}}\right\}=0,\\ &\frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{d\sigma_1}{l^{(2)}{}_{\nu 1}\,d\rho_1}\right)-\frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{d\sigma_2}{l^{(2)}{}_{\nu 2}\,d\rho_2}\right)+\frac{d\sigma_1}{d\rho_1}\frac{d\sigma_2}{d\rho_2}\sum\left\{\frac{1}{l^{(0)}{}_{[\nu 1]}\,l^{[2]}_{0[2]}}-\frac{1}{l^{(0)}{}_{[\nu 2]}\,l^{[2]}_{0[1]}}\right\}=0; \end{aligned}\right\}\quad (3)$$

le signe $\sum$ s'étend à toutes les valeurs que prend l'expression placée sous le signe par suite de la rotation simultanée des indices non renfermés entre crochets [ ].

Les deux autres groupes, de trois équations chacun, contenues dans le type (14) se déduisent de ce type par la rotation de tous les indices 0, 1, 2 supérieurs ou inférieurs. Le premier groupe se rapporte au plan tangent à la surface ρ_1; le second au plan tangent à la surface ρ_1; et le troisième au plan tangent à la surface ρ_2.

11. *Transformation des équations précédentes.* Multiplions la première équation du groupe (14) par $\cos(d\sigma, d\sigma)$, la seconde par $\cos(d\sigma, d\sigma_1)$, la troisième par $\cos(d\sigma, d\sigma_2)$ et ajoutons les équations résultantes, membre à membre; si l'on remarque que la somme des projections des composantes obliques d'une courbure sur l'une des trois directions, $d\sigma$, $d\sigma_1$, $d\sigma_2$ est égale à la projection de cette courbure sur cette direction et si l'on élimine les variations des arcs au moyen des relations (1)', on obtiendra une équation qui formera avec les deux que l'on obtient par un procédé analogue, le groupe suivant:

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{d\sigma_1}{d\rho_1\,\mathfrak{L}^{(0)}{}_{\nu 1}}\right)-\frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{d\sigma_2}{d\rho_2\,\mathfrak{L}^{(0)}{}_{\nu 2}}\right)=\frac{d\sigma_1}{d\rho_1}\frac{d\sigma_2}{d\rho_2}\left(\frac{\cos(\mathfrak{L}_{\nu 1},\,\mathfrak{L}_{02})}{\mathfrak{L}_{\nu 1}\,\mathfrak{L}_{02}}-\frac{\cos(\mathfrak{L}_{\nu 2},\,\mathfrak{L}_{01})}{\mathfrak{L}_{\nu 2}\,\mathfrak{L}_{01}}\right);\\ &\frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{d\sigma_1}{d\rho_1\,\mathfrak{L}^{(1)}{}_{\nu 1}}\right)-\frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{d\sigma_2}{d\rho_2\,\mathfrak{L}^{(1)}{}_{\nu 2}}\right)=\frac{d\sigma_1}{d\rho_1}\frac{d\sigma_2}{d\rho_2}\left(\frac{\cos(\mathfrak{L}_{\nu 1},\,\mathfrak{L}_{12})}{\mathfrak{L}_{\nu 1}\,\mathfrak{L}_{12}}-\frac{\cos(\mathfrak{L}_{\nu 2},\,\mathfrak{L}_{11})}{\mathfrak{L}_{\nu 2}\,\mathfrak{L}_{11}}\right)\\ &\frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{d\sigma_1}{d\rho_1\,\mathfrak{L}^{(2)}{}_{\nu 1}}\right)-\frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{d\sigma_2}{d\rho_2\,\mathfrak{L}^{(2)}{}_{\nu 2}}\right)=\frac{d\sigma_1}{d\rho_1}\frac{d\sigma_2}{d\rho_2}\left(\frac{\cos(\mathfrak{L}_{\nu 1},\,\mathfrak{L}_{22})}{\mathfrak{L}_{\nu 1}\,\mathfrak{L}_{22}}-\frac{\cos(\mathfrak{L}_{\nu 2},\,\mathfrak{L}_{21})}{\mathfrak{L}_{\nu 2}\,\mathfrak{L}_{21}}\right). \end{aligned}\right\}\quad (3)$$

Le groupe précédent se rapporte au plan tangent à la surface ρ; les deux autres groupes se rapportant aux deux autres surfaces coordonnées s'obtiennent par la rotation des indices 0, 1, 2.

Les équations du type (15) forment une système équivalent au système tourni par le type (14); mais elles ont des avantages qui leur sont propres, soit au point de vue géomètrique, soit au point de vue analytique. Elles conduisent au théorème unique suivant:

Théorème. *Si l'on prend les arcs de contingence inclinée de deux lignes coordonnées $d\sigma_1$, $d\sigma_2$ suivant deux directions ν, μ et qu'on projette les arcs inclinés de contingence suivant une direction ν, sur la direction des deux arcs réciproques de contingence, la différence des produits binaires d'un arc par sa projection et la diffèrence des variations par rapport aux paramètres réciproques, des projections des deux arcs de contingence inclinée suivant la direction ν sur la seconde directions μ sont égales.*

Ce théorème permet de condenser les neuf équations du type (15) en une seule.

$$(15)' \quad \frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{d\sigma_1}{d\rho_1}\cdot\frac{\cos(\mathfrak{L}_{\nu1},\mu)}{\mathfrak{L}_{\nu1}}\right)-\frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{d\sigma_2}{d\rho_2}\frac{\cos(\mathfrak{L}_{\nu2},\mu)}{\mathfrak{L}_{\nu2}}\right)=\frac{d\sigma_1}{d\rho_1}\frac{d\sigma_2}{d\rho_2}\left(\frac{\cos(\mathfrak{L}_{\nu1},\mathfrak{L}_{\mu2})}{\mathfrak{L}_{\nu1}\mathfrak{L}_{\mu2}}-\frac{\cos(\mathfrak{L}_{\nu2},\mathfrak{L}_{\mu1})}{\mathfrak{L}_{\nu2}\mathfrak{L}_{\mu1}}\right) \quad (3)$$

sur la quelle nous reviendrons plus loin.

12. *Deuxième transformation.* Considérons le second membre de l'équation (15)'; deux des courbures sont perpendicolaires à la direction ν et les deux autres à la direction μ. Soit π une direction perpendiculaire aux deux précédentes et considérons le trièdre formé par ces trois directions, l'on a la relation

$$\cos(\mathfrak{L}_{\nu1},\mathfrak{L}_{\mu2})=\cos(\mathfrak{L}_{\nu1},\pi)\cos(\mathfrak{L}_{\mu2},\pi)+\sin(\mathfrak{L}_{\nu1},\pi)\sin(\mathfrak{L}_{\mu2},\pi)\cos(\nu,\mu);$$

si l'on divise les deux membres par le produit $\mathfrak{L}_{\nu_1}\mathfrak{L}_{\mu_2}$ et qu'on introduise les projections des ces courbures sur le plan des deux droites ν, μ et sur la normale à ce plan, en restant fidèle à la notation du n.º 2, et qu'on opère de même sur le second terme du second membre de l'équation (15)' le facteur binôme de ce second membre prendra la forme suivante

$$\left(\frac{1}{\mathfrak{L}^{(\pi)}{}_{\nu1}\mathfrak{L}^{(\pi}{}_{\mu2}}-\frac{1}{\mathfrak{L}^{(\pi)}{}_{\nu2}\mathfrak{L}^{(\pi)}{}_{\mu1}}\right)-\left(\frac{1}{\mathrm{L}^{(\pi}{}_{\nu1}\mathrm{L}^{(\pi}{}_{\mu2}}-\frac{1}{\mathrm{L}^{(\pi}{}_{\nu2}\mathrm{L}^{(\pi}{}_{\mu1}}\right)\cos(\nu,\mu).$$

Or si l'on remarque que dans le premier membre de l'équation (15)' les courbures $\frac{1}{\mathfrak{L}_{\nu 1}}$, $\frac{1}{\mathfrak{L}_{\nu 2}}$ projetées sur la direction μ sont égales aux projections de ces courbures sur le plan $(\nu,\ \mu)$ multipliées par le sinus de l'angle $(\nu,\ \mu)$, qu'on développe les différentiations indiquées, et qu'on ait égard à l'équation (1), les termes qui contiennent $\cos(\nu,\ \mu)$ s'annulent en vertu de cette équation, et l'on obtient l'équation suivante:

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{d\sigma_1}{d\rho_1 \mathrm{L}^{(\pi)}{}_{\nu 1}}\right) - \frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{d\sigma_2}{d\rho_2 \mathrm{L}^{(\pi)}{}_{\nu 2}}\right) = \frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{d\sigma_2}{d\rho_2 \mathrm{L}^{(\pi)}{}_{\mu 2}}\right) - \\ &\qquad - \frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{d\sigma_1}{d\rho_1 \mathrm{L}^{(\pi)}{}_{\mu 1}}\right) = \frac{\frac{d\sigma_1}{d\rho_1}\frac{d\sigma_2}{d\rho_2}}{\sin(\nu,\ \mu)}\left(\frac{1}{\mathfrak{L}^{(\pi)}{}_{\nu 1}\mathfrak{L}^{(\pi)}{}_{\mu 2}} - \frac{1}{\mathfrak{L}^{(\pi)}{}_{\nu 2}\mathfrak{L}^{(\pi)}{}_{\mu 1}}\right) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

la quelle donne naissance au théorème suivant:

Théorème. *Si l'on prend les arcs de contingence inclinée de deux lignes coordonnées* $d\sigma_1$, $d\sigma_2$ *suivant deux directions* ν, μ *et qu'on projette ces quatre arcs sur le plan de ces deux directions et sur la normale à ce plan, la différence des produits binaires des projections normales des arcs de contingence inclinée des deux lignes suivant deux directions différentes et la différence des variations par rapport aux paramètres réciproques, des projections sur le plan* $\nu\mu$ *des deux arcs de contingence inclinée suivant l'une ou l'autre des deux directions* ν, μ *sont entre elles dans un rapport égal au sinus de ces deux directions.*

L'un et l'autre des théorèmes demontrés dans ce numéro et dans le numéro précédent ont une grande importance, parce que chacun de ces théorèmes renferme d'une manière compléte la solution du problème des coordonnées curvilignes, ayant pour but de déterminer les équations aux différences partielles du second ordre des lignes coordonnés, comme la chose sera mise en évidence dans les numéros suivants.

13. *Des relations qui existent entre les variations des courbures inclinées de deux arcs coordonnés suivant une direction quelconque.*

1.° Développons les différentiations indiquées dans les premiers membres des équations (14) et remplaçons les variations des arcs par leurs valeurs tirées des équations (20)″, 1ère Partie, l'on aura les trois équations suivantes:

$$
(17)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d}{d\sigma_2}\left(\frac{1}{l^{(0)}{}_{\nu 1}}\right)-\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{l^{(0)}{}_{\nu 2}}\right)+\frac{1}{l^{(0)}{}_{\nu 1}}\left(\frac{1}{l^{(1)}_{21}}-\frac{1}{l^{(1)}_{12}}\right)-\frac{1}{l^{(0)}{}_{\nu 2}}\left(\frac{1}{l^{(2)}_{12}}-\frac{1}{l^{(2)}_{21}}\right)=\\
&\qquad\qquad=-\Sigma\left\{\frac{1}{l^{(0)}{}_{[\nu 1]}\,l^{[0]}_{0[2]}}-\frac{1}{l^{(0)}{}_{[\nu 2]}\,l^{[0]}_{0[1]}}\right\},\\
&\frac{d}{d\sigma_2}\left(\frac{1}{l^{(1)}{}_{\nu 1}}\right)-\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{l^{(1)}{}_{\nu 2}}\right)+\frac{1}{l^{(1)}{}_{\nu 1}}\left(\frac{1}{l^{(1)}_{21}}-\frac{1}{l^{(1)}_{12}}\right)-\frac{1}{l^{(1)}{}_{\nu 2}}\left(\frac{1}{l^{(2)}_{12}}-\frac{1}{l^{(2)}_{21}}\right)=\\
&\qquad\qquad=-\Sigma\left\{\frac{1}{l^{(0)}{}_{[\nu 1]}\,l^{[1]}_{0[2]}}-\frac{1}{l^{(0)}{}_{[\nu 2]}\,l^{[1]}_{0[1]}}\right\},\\
&\frac{d}{d\sigma_2}\left(\frac{1}{l^{(2)}{}_{\nu 1}}\right)-\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{l^{(2)}{}_{\nu 2}}\right)+\frac{1}{l^{(2)}{}_{\nu 1}}\left(\frac{1}{l^{(1)}_{21}}-\frac{1}{l^{(1)}_{11}}\right)-\frac{1}{l^{(2)}{}_{\nu 2}}\left(\frac{1}{l^{(2)}_{12}}-\frac{1}{l^{(2)}_{21}}\right)=\\
&\qquad\qquad=-\Sigma\left\{\frac{1}{l^{(0)}{}_{[\nu 1]}\,l^{[2]}_{0[2]}}-\frac{1}{l^{(0)}{}_{[\nu 2]}\,l^{[2]}_{0[1]}}\right\}.
\end{aligned}\right\}\quad (3)
$$

Ces équations sont relatives aux variations des composantes obliques des courbures inclinées.

2.° Pour obtenir les relations qui existent entre les variations des composantes orthogonales des courbures inclinées, il faut se servir des équations (15)′ et éliminer les variations des arcs au moyen de la formule

$$
(18)\qquad \frac{\sin^2\varphi\, d_2 d\sigma_1}{d\sigma_1 d\sigma_2}=\frac{1}{\mathcal{L}^{(1)}_{21}}+\frac{\cos\varphi}{\mathcal{L}^{(2)}_{12}}\qquad (6)
$$

qui se déduit sans difficulté de la formule (20) de notre 1ère Partie, on obtient ainsi

$$
(19)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sin^2\phi\left\{\frac{d}{d\sigma_2}\left(\frac{1}{\mathcal{L}^{(\mu)}{}_{\nu 1}}\right)-\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{\mathcal{L}^{(\mu)}{}_{\nu 2}}\right)\right\}+\frac{1}{\mathcal{L}^{(\mu)}{}_{\nu 1}}\left(\frac{1}{\mathcal{L}^{(1)}_{21}}+\frac{\cos\varphi}{\mathcal{L}^{(2)}_{12}}\right)-\\
&\qquad-\frac{1}{\mathcal{L}^{(\mu)}{}_{\nu 2}}\left(\frac{1}{\mathcal{L}^{(2)}_{12}}+\frac{\cos\varphi}{\mathcal{L}^{(1)}_{21}}\right)=\left\{\frac{\cos(\mathcal{L}_{\nu 1},\mathcal{L}_{\mu 2})}{\mathcal{L}_{\nu 1}\mathcal{L}_{\mu 2}}-\frac{\cos(\mathcal{L}_{\nu 2},\mathcal{L}_{\mu 1})}{\mathcal{L}_{\nu 2}\mathcal{L}_{\mu 1}}\right\}\sin^2\phi.
\end{aligned}\right.
$$

Cette équation est telle que le second membre ne fait que changer de signe lorsqu'on change ν en μ et réciproquement, il en résulte qu'il en sera de même du premier membre, on a donc l'équation

$$
\begin{aligned}
&\sin^2\phi\left\{\frac{d}{d\sigma_2}\left(\frac{1}{\mathcal{L}^{(\mu)}{}_{\nu 1}}+\frac{1}{\mathcal{L}^{(\nu)}{}_{\mu 1}}\right)-\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{\mathcal{L}^{(\mu)}{}_{\nu 2}}+\frac{1}{\mathcal{L}^{(\nu)}{}_{\mu 2}}\right)\right\}+\\
&\quad+\left(\frac{1}{\mathcal{L}^{(1)}_{21}}+\frac{\cos\varphi}{\mathcal{L}^{(2)}_{12}}\right)\left(\frac{1}{\mathcal{L}^{(\mu)}{}_{\nu 1}}-\frac{1}{\mathcal{L}^{(\nu)}{}_{\mu 1}}\right)+\left(\frac{1}{\mathcal{L}^{(2)}_{12}}+\frac{\cos\varphi}{\mathcal{L}^{(1)}_{21}}\right)\left(\frac{1}{\mathcal{L}^{(\mu)}{}_{\nu 2}}-\frac{1}{\mathcal{L}^{(\nu)}{}_{\mu 2}}\right)=0
\end{aligned}
$$

qui se déduit aussi de l'équation (1), par le procédé indiqué à la fin du n.° 11 et par l'élimination des variations des arcs.

3.° Enfin, on obtient les relations qui existent entre les variations des projections des courbures sur le plan des directions (ν, μ), en effectuant les différentiations indiquées dans le type (16) et en éliminant les variations des arcs au moyen de la formule (20) 1ère Part. on obtient ainsi l'équation suivante:

$$(20)\left\{\begin{aligned}&\frac{d}{d\sigma_2}\left(\frac{1}{L^{(\pi)}{}_{\nu1}}\right)-\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{L^{(\pi)}{}_{\nu2}}\right)+\frac{1}{L^{(\pi)}{}_{\nu1}}\left(\frac{1}{L_{21}}+\frac{\cos\varphi}{L_{12}}\right)+\\&\quad+\frac{1}{L^{(\pi}{}_{\nu2}}\left(\frac{1}{L_{12}}+\frac{\cos\varphi}{L_{21}}\right)=\frac{1}{\sin(\nu,\mu)}\left(\frac{1}{\mathfrak{L}^{(\pi)}{}_{\nu1}\mathfrak{L}^{(\pi)}{}_{\mu2}}-\frac{1}{\mathfrak{L}^{(\pi)}{}_{\nu2}\mathfrak{L}^{(\pi)}{}_{\mu1}}\right)\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

et comme le second membre ne fait que changer de signe lorsqu'on change μ en ν et réciproquement, il en sera de même du premier membre, on obtient donc une équation analogue à celle qu'a fourni l'équation (19).

14. *Des facteurs binômes des seconds membres des équations précedentes.* Considerons d'abord le facteur binôme situé dans le second membre de l'équation (15)′ et son expression en fonction des variations des courbures donné par le premier. Si dans l'équation (1) on fait successivement coïncider la direction λ avec $d\sigma_1$ et $d\sigma_2$, on obtiendra deux équations au moyen desquelles on pourra éliminer une ou deux courbures inclinées du premier membre de l'équation (15)′; de sorte que si, pour abréger, on représente le facteur binome par $U^{12}{}_{\nu\mu}$ l'on aura:

$$(15)''\left\{\begin{aligned}&\frac{d\sigma_1}{d\rho_1}\frac{d\sigma_2}{d\rho_2}U^{12}{}_{\nu\mu}=\frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{d\sigma_1}{d\rho_1\mathfrak{L}^{(\mu)}{}_{\nu1}}\right)-\frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{d\sigma_2}{d\rho_2\mathfrak{L}^{(\mu)}{}_{\nu2}}\right)=\frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{d\sigma_2}{d\rho_2\mathfrak{L}^{(\nu)}{}_{\mu2}}\right)-\\&\qquad\qquad-\frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{d\sigma_1}{d\rho_1\mathfrak{L}^{(\nu)}{}_{\mu1}}\right),\\&\frac{d\sigma_1}{d\rho_1}\frac{d\sigma_2}{d\rho_2}U^{12}{}_{\nu\mu}=\frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{d\sigma_1}{d\rho_1\mathfrak{L}^{(\mu)}{}_{\nu1}}\right)+\frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{d\sigma_2}{d\rho_2\mathfrak{L}^{(\nu)}{}_{\mu2}}\right)-\frac{d^2\cos(\nu,\mu)}{d\rho_1d\rho_2}=\\&\qquad\qquad=-\frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{d\sigma_1}{d\rho_1\mathfrak{L}^{(\nu)}{}_{\mu1}}\right)-\frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{d\sigma_2}{d\rho_2\mathfrak{L}^{(\mu)}{}_{\nu2}}\right)+\frac{d^2\cos(\nu,\mu)}{d\rho_1d\rho_2}\end{aligned}\right.$$

De même si l'on représente par $\mathrm{U}^{12}{}_{\nu\mu}$ le facteur binôme du second membre de l'équation (16) et qu'on opére de la même manière sur cette équation au moyen des deux équations que l'on obtient en faisant coïncider la direction λ dans la formule (2) avec les directions $d\sigma_1$, $d\sigma_2$ on obtient les deux nouvelles formes de l'équation (16)

$$(16)'\left\{\begin{aligned}&\frac{d\sigma_1}{d\rho_1}\frac{d\sigma_2}{d\rho_2}\mathrm{U}^{12}{}_{\nu\mu}=\frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{d\sigma_1}{d\rho_1L^{(\pi}{}_{\nu1}}\right)+\frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{d\sigma_2}{d\rho_2L^{(\pi}{}_{\mu2}}\right)+\frac{d^2(\nu,\mu)}{d\rho_1d\rho_2}=\\&\qquad\qquad=-\frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{d\sigma_1}{d\rho_1L^{(\pi}{}_{\mu1}}\right)-\frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{d\sigma_2}{d\rho_2L^{(\pi)}{}_{\nu2}}\right)-\frac{d^2(\nu,\mu)}{d\rho_1d\rho_2}.\end{aligned}\right.$$

Les deux binômes $U^{12}{}_{\nu\mu}$ et $\mathbf{U}^{12}{}_{\nu\mu}$ ont donc chacun quatre expressions principales; celles du premier binôme sont en fonction des variations des arcs de contingence inclinées $d\sigma_1$, $d\sigma_2$ suivant les directions ν ou μ sur ces deux directions; celles du second binôme sont en fonction des variations des projections des mêmes arcs de contingence sur le plan des deux directions ν, μ.

Si l'on développe les différentiations indiquées dans les quatre expressions des binômes $U^{12}{}_{\nu\mu}$ et $\mathbf{U}^{12}{}_{\nu\mu}$ et qu'on élimine les variations des arcs, comme nous l'avons déjà fait à la fin du n.° précédent, nous obtiendrons quatre nouvelles expressions de ces binômes en fonction des projections des courbures inclinées correspondantes sur les deux directions ν et μ lorsqu'il s'agira du premier binôme, et sur le plan des deux directions ν et μ lorsqu'il s'agira du second (*). On a donc les deux nouvelles expressions de $U^{12}{}_{\nu\mu}$.

$$
(19)'\left\{\begin{aligned}
\sin^2\phi\, U^{12}{}_{\nu\mu} &= \frac{d}{d\sigma_2}\left(\frac{1}{\mathcal{L}^{(\mu)}{}_{\nu 1}}\right)+\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{\mathcal{L}^{(\nu)}{}_{\mu 2}}\right)+\frac{1}{\mathcal{L}^{(\mu)}{}_{\nu 1}}\left(\frac{1}{\mathcal{L}^{(1)}_{21}}+\frac{\cos\varphi}{\mathcal{L}^{(2)}_{12}}\right)+\\
&\quad+\frac{1}{\mathcal{L}^{(\nu)}{}_{\mu 2}}\left(\frac{1}{\mathcal{L}^{(2)}_{12}}+\frac{\cos\varphi}{\mathcal{L}^{(1)}_{21}}\right)-\sin^2\phi\,\frac{d^2\cos(\nu,\mu)}{d\rho_1\, d\rho_2}\,\frac{d\rho_1}{d\sigma_1}\,\frac{d\rho_2}{d\sigma_2},\\
-\sin^2\phi\, U^{12}{}_{\nu\mu} &= \frac{d}{d\sigma_2}\left(\frac{1}{\mathcal{L}^{(\nu)}{}_{\mu 1}}\right)+\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{\mathcal{L}^{(\mu)}{}_{\nu 2}}\right)+\frac{1}{\mathcal{L}^{(\nu)}{}_{\mu 1}}\left(\frac{1}{\mathcal{L}^{(1)}_{21}}+\frac{\cos\varphi}{\mathcal{L}^{(2)}_{12}}\right)+\\
&\quad+\frac{1}{\mathcal{L}^{(\mu)}{}_{\nu 2}}\left(\frac{1}{\mathcal{L}^{(2)}_{12}}+\frac{\cos\varphi}{\mathcal{L}^{(1)}_{21}}\right)-\sin^2\phi\,\frac{d^2\cos(\nu,\mu)}{d\rho_1\, d\rho_2}\,\frac{d\rho_1}{d\sigma_1}\,\frac{d\rho_2}{d\sigma_2};
\end{aligned}\right.
$$

et aussi les deux nouvelles expressions de $\mathbf{U}^{12}{}_{\nu\mu}$

$$
(20)'\left\{\begin{aligned}
\mathbf{U}^{12}{}_{\nu\mu} &= \frac{d}{d\sigma_2}\left(\frac{1}{L^{(\pi)}{}_{\nu 1}}\right)+\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{L^{(\pi)}{}_{\mu 2}}\right)+\frac{1}{L^{(\pi)}{}_{\nu 1}}\left(\frac{1}{L_{21}}+\frac{\cos\varphi}{L_{12}}\right)+\\
&\quad+\frac{1}{L^{(\pi)}{}_{\mu 2}}\left(\frac{1}{L_{12}}+\frac{\cos\varphi}{L_{21}}\right)+\frac{d^2(\nu,\mu)}{d\rho_1\, d\rho_2}\,\frac{d\rho_1}{d\sigma_1}\,\frac{d\rho_2}{d\sigma_2},\\
-\mathbf{U}^{12}{}_{\nu\mu} &= \frac{d}{d\sigma_2}\left(\frac{1}{L^{(\pi)}{}_{\mu 1}}\right)+\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{L^{(\pi)}{}_{\nu 2}}\right)+\frac{1}{L^{(\pi)}{}_{\mu 1}}\left(\frac{1}{L_{21}}+\frac{\cos\varphi}{L_{12}}\right)+\\
&\quad+\frac{1}{L^{(\pi)}{}_{\nu 2}}\left(\frac{1}{L_{12}}+\frac{\cos\varphi}{L_{21}}\right)+\frac{d^2(\nu,\mu)}{d\rho_1\, d\rho_2}\,\frac{d\rho_1}{d\sigma_1}\,\frac{d\rho_2}{d\sigma_2}.
\end{aligned}\right.
$$

(*) *Analyse infinitesimale des courbes tracées sur une surface quelconque,* pag. 48.

§ 2. Problème des coordonnées curvilignes.

Le problème des coordonnées curvilignes consiste à établir les équations aux différences partielles des certaines grandeurs, tellement liées avec les surfaces coordonnées que lorsque ces grandeurs sont déterminées le système des surfaces coordonnées se trouve par cela même déterminé.

15. *Première solution du probleme.* Dans cette solution les grandeurs entre lesquelles il faut établir les équations aux dérivées partielles sont les composantes obliques suivant les trois arcs coordonnés des courbures inclinées de ces arcs, suivant leurs tangentes. Nous ne distinguons pas entre les courbures propres et les courbures inclinées d'un arc, parce que la courbure propre de cet arc n'est autre chose que sa courbure inclinée suivant les tangentes de cet arc. D'après cela, chaque arc aura trois courbures inclinées; et comme chaque courbure inclinée a trois composantes obliques suivant les arcs coordonnées, les grandeurs introduites dans la question pour en donner la solution sont au nombre de 27. Ces grandeurs se lient avec les trois paramètres différentiels du premier ordre des arcs coordonnés et les cosinus des angles que ces arcs forment entre eux. Le problème des coordonnées curvilignes consiste donc à trouver les relations qui existent entre les 33 quantités dont nous venons de parler. Ces relations s'obtiennent avec une simplicité inesperée par suite de l'introduction de la courbure inclinée.

1.° Neuf relations proviennent de ce, que la projection de la courbure inclinée d'un arc quelconque sur la tangente suivant laquelle cette courbure est inclinée, est nulle, cette tangente et la courbure inclinée se coupant à angles droits; ces sont les neuf équations (26), 1ère Partie.

2.° Trois relations proviennent de ce que les composantes obliques suivant un arc des courbures inclinées des deux autres arcs suivant les arcs réciproques sont égales; ce sont les équations (32), 1ère Partie.

3.° Neuf relations sont fournies par les variations suivant les trois paramètres de chacun des angles coordonnés. Ce sont les neuf équations (14) et (15), 1ère Partie, dans lesquelles il faut exprimer les courbures tangentielles en fonction des composantes obliques de ces courbures, form. (3).

4.° Enfin les neuf équations les plus importantes sont fournies par les doubles variations des cosinus des angles qu'un arc coordonné fait avec une ligne fixe. Ce sont les équations aux différences partielles (29) et (31)

1ère Partie.] Ces équations sont au nombre de 27; mais elles se reduisent à neuf vraiment distinctes.

Cette solution que nous avons donnée du problème date de 1862 (*). Elle repose sur la conception de la courbure inclinée qui se prête admirablement au calcul qui fournit presque intuitivement les relations dont on a besoin, et qui enfin est susceptible d'une notation parlante, comme cela devient necessaire dans un problème si compliqué.

Il serait facile de déduire ces dernières équations de notre analyse actuelle, il suffirait de faire coïncider dans nos équations (14) la direction ν successivement avec les trois arcs coordonnés; ce qui reviendrait à remplacer successivement ν par les indices 0, 1, 2.

16. *Seconde solution du problème.* Notre analyse actuelle contient une nouvelle solution du problème qu'il nous parait utile de signaler parce qu'elle résulte de l'application d'un théorème unique demontré dans le n.° 11. Quelles sont les grandeurs introduites dans cette seconde solution pour déterminer le système? Ce sont les projections orthogonales des neuf courbures inclinées des arcs coordonnés sur les arcs; ou en d'autres termes les composantes orthogonales des courbures suivant les arcs coordonnés.

1.° Comme la projection d'un courbure inclinée sur la tangente à un arc suivant laquelle elle est inclinée est nulle, le nombre des composantes orthogonales des courbures n'est plus que dix-huit.

2.° Les trois relations provenant de ce que les composantes obliques suivant un arc, des courbures inclinées des deux autres arcs suivant leurs tangentes reciproques, s'obtiennent directement au moyen des équations (3). Ces relations sont:

$$(21) \qquad \sin\phi\left(\frac{1}{\mathfrak{L}_{12}^{(0)}}-\frac{1}{\mathfrak{L}_{21}^{(0)}}\right)+\frac{\sin\varphi_2\cos\theta_1}{\mathfrak{L}_{12}^{(2)}}+\frac{\sin\varphi_1\cos\theta_2}{\mathfrak{L}_{21}^{(1)}}=0. \qquad (3)$$

3.° Les relations au nombre de neuf provenant de la variation des angles coordonnés suivant les trois paramètres sont données directement par l'introduction des courbures inclinées dans cette variation, form. (1)'.

4.° Enfin les relations aux différences partielles de ces composantes orthogonales sont données par l'unique équation (15)' qui s'applique aux trois plans tangents, et dans chacun d'eux, aux différentes valeurs que l'on obtient en faisant successivement ν et μ égales à 0, 1, 2; ce qui fournit

(*) Comptes rendus de l'Institut de France.

en tout 27 équations équivalentes aux 27 équations trouvées dans la première solution.

Certainement ce n'est pas un petit avantage offert par un théorème de faire dépendre d'une seule relation géomètrique, des équations qui se produisent au point de vue analytique sous des allures distinctes et pour lesquelles il fallait des calculs différents, mais, ici il y a un second avantage qui se présente forcément par l'application du théorème: c'est que l'opérateur est éclairé sur celles des équations qu'il doit conserver et sur celles qu'il doit rejeter, soit parce qu'elles sont des identités, soit parce qu'elles sont des conséquences d'autres équations du système. En effet le binôme du second membre que nous avons représenté par $U^{12}{}_{\nu\mu}$ devient identiquement nul, lorsque les indices inférieurs ν, μ deviennent les mêmes et alors, les deux premiers termes du 1[er] membre de l'équation $(15)'$ sont aussi individuellement nuls; ce cas se présente neuf fois. Ce binôme ne fait que changer de signe lorsque les indices ν et μ prennent réciproquement la place, l'un de l'autre, et alors, on voit par suite de l'équation $(1)'$ que les premiers membres de l'équation $(15)'$ sont égaux et de signes contraires. Ceci reduit à neuf les 27 équations contenues dans la formule $(15)'$.

D'après nos notations, nous pouvons écrire sous la forme suivante les trois équations qui se rapportent à la surface ρ

$$(22) \qquad \left\{ \begin{aligned} d_2\mathfrak{J}^{(1)}_{01} - d_1\mathfrak{J}^{(1)}_{02} &= d_1\mathfrak{J}^{(0)}_{12} - d_2\mathfrak{J}^{(0)}_{11} = d\sigma_1\, d\sigma_2\, U^{12}_{01}, \\ d_2\mathfrak{J}^{(2)}_{11} - d_1\mathfrak{J}^{(2)}_{12} &= d_1\mathfrak{J}^{(1)}_{22} - d_2\mathfrak{J}^{(1)}_{21} = d\sigma_1\, d\sigma_2\, U^{12}_{12}, \\ d_2\mathfrak{J}^{(0)}_{21} - d_1\mathfrak{J}^{(0)}_{22} &= d_1\mathfrak{J}^{(2)}_{02} - d_2\mathfrak{J}^{(2)}_{01} = d\sigma_1\, d\sigma_2\, U^{12}_{20}. \end{aligned} \right\} \qquad (3)$$

Il est bon de remarquer: 1.° que les deux secondes se déduisent de la première par la rotation des indices variables, qui sont dans le second membre les indices inférieurs de U et dans le premier les indices supérieurs et le premier indice inférieur des arcs de contingence inclinée; 2.° que les deux groupes d'équations relatives aux surfaces ρ_1 et ρ_2 se déduisent du groupe précédent en soumettant les autres indices à la permutation tournante.

Si dans les équations (22), on exprime les arcs de contingence en fonction des courbures correspondantes et qu'on élimine les variations des arcs coordonnés au moyen des équations (18), on obtiendra le système d'équations correspondant aux équations (22) et dans lesquelles il n'entrera que les variations des composantes orthogonales des courbures. On déduirait directement ce groupe d'équations des équations (19) en donnant à μ et à ν les valeurs successives 0, 1; 1, 2; 2, 0 qui proviennent de la permutation tournante des indices.

Il ne reste plus qu'à obtenir les binomes U_{01}^{12}, U_{12}^{12}, etc. en fonction des composantes normales des courbures inclinées; or, le premier terme de ce binôme exprime le produit de la courbure $\frac{1}{\mathfrak{L}_{01}}$ par la projection de la courbure $\frac{1}{\mathfrak{L}_{12}}$ sur la direction de la première. Cette projection est égale à la somme des projections des composantes obliques de la seconde sur la direction de la première, on aura donc

$$\frac{\cos(\mathfrak{L}_{01}, \mathfrak{L}_{12})}{\mathfrak{L}_{01}\mathfrak{L}_{12}} = \sum \frac{\cos(\mathfrak{L}_{[01]}, d\sigma)}{\mathfrak{L}_{[01]}\, l_{[12]}^{(0)}},$$

le signe $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs que prend l'expression placée sous ce signe lorsque l'on fait subir à tous les indices non compris entre crochets [ ] la permutation tournante. Maintenant, si on exprime les composantes obliques contenues dans le second membre en fonction des composantes orthogonales de la même courbure au moyen des formules (3), et qu'en suite on opére d'une manière analogue sur le second terme du binôme U_{01}^{12}, on aura en conservant à k la signification que nous lui avons donnée au n.° 3, le système d'équations compris dans le type suivant

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} & k^2 U_{01}^{12} - \sin^2\phi \left\{ \frac{1}{\mathfrak{L}_{01}^{(2)}\mathfrak{L}_{12}^{(2)}} - \frac{1}{\mathfrak{L}_{02}^{(2)}\mathfrak{L}_{11}^{(2)}} \right\} = \\ & \qquad = \sum \left(\frac{1}{\mathfrak{L}_{0[1]}^{(1)}\mathfrak{L}_{1[2]}^{(0)}} - \frac{1}{\mathfrak{L}_{0[2]}^{(1)}\mathfrak{L}_{1[1]}^{(2)}} \right) \sin\phi_1 \sin\phi_2 \cos\theta; \end{aligned}\right\}\quad (3)$$

les valeurs des autres binômes se déduiront du précédent par la permutation tournante de tous les indices variables qui sont les indices supérieurs des courbures et les premiers indices inferieurs. Les valeurs des binômes relatifs aux surfaces ρ_1 et ρ_2 se déduisent du groupe précedent par la permutation tournante des autres indices.

17. *Troisième solution du problème.* Les équations aux différences partielles, qui se rapportent à cette solution, sont les équations qui sont fournies par le théorème du n.° 12 lorsqu'on suppose que les directions ν et μ coïncident avec les tangentes de deux arcs coordonnés; ceci revient à donner dans l'équation (16) à ν et μ les valeurs, 0, 1, 2. On obtient ainsi pour chacune des surfaces coordonnées neuf équations. Il est facile de voir

que le nombre se réduit à trois pour chaque surface par un raisonnement analogue à celui qui vient d'être fait au numéro précédent. Car les binômes provenant du binome $U^{12}{}_{\nu\mu}$ lorsqu'on donne à ν et à μ les valeurs 0, 1, 2 jouissent des mêmes propriétés que les binômes qui se déduisent de $U^{12}{}_{\nu\mu}$; et les premiers membres des équations (16) et (15)$'$ jouissent aussi, pour les mêmes valeurs, de proprietés identiques. Les équations qui se rapportent à la surface ρ sont les suivantes:

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned}
&d_2 J''_{01} - d_1 J''_{02} = d_1 J''_{12} - d_2 J''_{11} = \frac{d\sigma_1 d\sigma_2}{\sin\varphi} U^{12}_{01},\\
&d_2 J_{11} - d_1 J_{12} = d_1 J_{22} - d_2 J_{21} = \frac{d\sigma_1 d\sigma_2}{\sin\varphi} U^{12}_{12},\\
&d_2 J'_{21} - d_1 J'_{22} = d_1 J'_{02} - d_2 J'_{01} = \frac{d\sigma_1 d\sigma_2}{\sin\varphi} U^{12}_{20};
\end{aligned}\right\}\qquad (3)$$

dont le mode de formation est analogue au mode de formation des équations (22). Si l'on remarque que lorsque les directions ν et μ coïncident avec celles de deux arcs coordonnés, la direction π perpendiculaire à ν et à μ devient celle de la normale à la surface qui contient ces deux arcs, les valeurs des facteurs binômes des équations précédentes sont données par les relations:

$$(24)'\qquad \left\{\begin{aligned}
U^{12}_{01} &= \frac{1}{\mathfrak{L}^{(n_2)}{}_{01}\mathfrak{L}^{(n_2)}{}_{12}} - \frac{1}{\mathfrak{L}^{(n_2)}{}_{02}\mathfrak{L}^{(n_2)}{}_{11}},\\
U^{12}_{12} &= \frac{1}{\mathfrak{L}^{(n)}{}_{11}\mathfrak{L}^{(n)}{}_{22}} - \frac{1}{\mathfrak{L}^{(n)}{}_{12}\mathfrak{L}^{(n)}{}_{21}},\\
U^{12}_{20} &= \frac{1}{\mathfrak{L}^{(n_1)}{}_{21}\mathfrak{L}^{(n_1)}{}_{02}} - \frac{1}{\mathfrak{L}^{(n_1)}{}_{22}\mathfrak{L}^{(n_1)}{}_{01}};
\end{aligned}\right.$$

lesquelles se déduisent les unes des autres par la rotation des indices inférieurs du premier membre et la rotation simultanée des indices supérieurs et des premièrs indices inférieurs des courbures du second membre.

La composition des équations (24) merite de fixer un instant notre attention.

1.° Ces neuf équations se partagent en trois groupes se rapportant chacun à chacune des surfaces coordonnées, et chaque groupe ne contient que les courbures inclinées des arcs qui sont contenus sur la surface propre à ce groupe.

2.° Dans chaque équation du groupe, il n'entre que le courbures inclinées de ces deux arcs suivant les deux côtés de l'un des trois angles coordonnés; dans le premier membre, ce sont les projections de ces courbures sur le plan de cet angle, dans le second, les projections de ces courbures sur la normale à ce plan.

3.° Le premier membre de l'équation est égal à la différence des variations, par rapport aux paramètres réciproques, des deux composantes tangentielles des deux arcs de contingence inclinée des deux lignes coordonnées suivant une même direction; le second membre est égal au quotient que l'on obtient en divisant la différence des produits binaires des projections normales des arcs de contingence inclinée des deux lignes suivant deux directions différentes par le sinus de l'angle de ces deux directions.

4.° Une des équations du groupe, celle qui contient les courbures inclinées de deux lignes coordonnées suivant ces deux lignes, est remarquable en ce sens que son second membre est égal à la courbure de la surface propre à ce groupe. Car, dans ce cas, le binôme U_{12}^{12} est égal au rapport du carré du sinus des lignes coordonnées à la courbure de la surface (*). Cette équation est l'équation de Gauss sur la variation des arcs de contingence géodésique des lignes coordonnées, mais sous une forme plus simple (**).

5.° Chacune des équations aux différences partielles est susceptible de prendre quatre formes différentes également simples et qui se déduisent sans difficulté des quatre formes sous lesquelles nous avons présenté l'equation (16), n.° 14.

Si, dans les équations (24), on substitue aux variations des arcs coordonnées leurs valeurs données par les équations (20), 1ère Partie, on obtiendra le système d'équations correspondant aux équations (20) et chacune des équations ainsi obtenues pourra s'écrire sous quatre formes différentes, n.° 14.

18. *Remarque sur la forme des équations précédentes.* Comme nous l'avons établi dans notre *Analyse infinitésimale des courbes tracées sur une surface quelconque,* le théorème de Gauss sur la somme des angles d'un polygone géodésique quelconque est un des deux principes qui servent à établir les équations différentielles des courbes tracées sur une surface, et ce principe fécond est la conséquence immédiate de l'équation due à ce géomètre sur la somme des variations des angles de contingence géodésique des lignes coordonnées tracées sur la surface; or, cette équation assez complexe entre dans l'ordonnance de la formule (16) par suite de l'introduction

(*) Voyez la seconde partie, n.° 27.
(**) *Analyse infinitésimale des courbes*, chap. III.

de la courbure inclinée; c'est la seconde des équations (24), qui est la transformée la plus simple de l'équation de Gauss.

Lorsqu'on veut resoudre le problème des surfaces applicables sur une surface donnée sans duplicature et sans déchirure, on parvient, par une analyse propre, à établir deux formules très compliquées qui jointes à l'équation de Gauss donnent les équations aux différences partielles du problème. La 1ère et la 3ème équation (24) sont les formes les plus simples de ces deux formules, qui par consequence entrent aussi dans l'ordonnance de notre équation (16).

Ces deux questions essentiellement distinctes qui ont été séparément résolues par les géomètres, ont donc un lien commun qui les rattache à un seul principe géomètrique, puisque l'application du théorème du n.° 17 donne la mise en équation des conditions de ces deux problèmes. On peut même dire que dans l'un et l'autre de ces deux cas c'est la même équation; or, ce lien commun qu'il était important de signaler c'est *la courbure inclinée* qui le met en évidence lui donnant la forme la plus simple.

Ainsi, il résulte de ce que nous venons d'établir dans les numéros précédents que non seulement la solution du problème des coordonnées curvilignes contient la solution du problème des lignes tracées sur une surface quelconque et celle du problème des surfaces applicables, comme nous l'avons établi d'une autre manière dans notre 2ème Partie, n.° 35, mais que toutes les équations de ces trois problèmes sont condensées en une seule et même équation, qui est ou l'équation (15)′ ou l'équation (16). Ainsi se trouve justifiée l'assertion que nous avons faite à la fin du n.° 12 du présent Mémoire.

Si dans ces trois problèmes, on n'avait pas introduit l'élément nouveau *de la courbure inclinée,* ces équations aux différences partielles qui donnent la solution de ces problèmes, se seraient chargées de termes nombreux et compliquées; et il eut été difficile, pour ne pas dire impossible, de découvrir la forme unique de la formule qui donne, à la fois, l'équation des lignes tracées sur une surface, les trois équations des surfaces applicables, et les neuf équations des coordonnées curvilignes quelconques; et en même temps de traiter les trois équations par une seule et même analyse.

19. *Relations entre les variations des composantes de la flexion d'une surface.* La flexion de la surface suivant une direction est un élément important de la géométrie des surfaces; nous avons déjà montré par quelles relations simples il se trouve lié avec les courbures inclinées des arcs coor-

données; il est utile de connaître aussi les relations qui lient entre elles les variations de cet élément suivant deux directions; or, ces relations se déduisent d'une manière non moins aisée des formules que nous avons établies et sont aussi contenues dans le théorème général que nous avons établi dans le numéro 11.

Cherchons en premier lieu les relations qui existent entre les composantes obliques de la flexion de la surface. Si dans les formules (14), nous supposons que la direction ν coïncide avec la normale n à la surface ρ et si l'on remarque que les composantes obliques suivant la direction $d\sigma$ des flexions $\frac{1}{\mathfrak{L}_{n1}}$, $\frac{1}{\mathfrak{L}_{n2}}$ sont nulles, les trois équations du groupe (14) relatives à la surface ρ se réduisent à deux, qui sont

$$(25)\left\{\begin{aligned}
&\frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{d\sigma_1}{l^{(1)}_{n1}d\rho_1}\right)-\frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{d\sigma_2}{l^{(1)}_{n2}d\rho_2}\right)+\frac{d\sigma_1 d\sigma_2}{d\rho_1 d\rho_2}\left\{\frac{1}{l^{(1)}_{n1}l^{(1)}_{12}}-\frac{1}{l^{(1)}_{n2}l^{(1)}_{11}}+\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\left.+\frac{1}{l^{(2)}_{n1}l^{(1)}_{22}}-\frac{1}{l^{(2)}_{n2}l^{(1)}_{21}}\right\}=0,\\
&\frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{d\sigma_1}{l^{(2)}_{n1}d\rho_1}\right)-\frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{d\sigma_2}{l^{(2)}_{n2}d\rho_2}\right)+\frac{d\sigma_1 d\sigma_2}{d\rho_1 d\rho_2}\left\{\frac{1}{l^{(1)}_{n1}l^{(2)}_{12}}-\frac{1}{l^{(1)}_{n2}l^{(2)}_{11}}+\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\left.+\frac{1}{l^{(2)}_{n1}l^{(2)}_{22}}-\frac{1}{l^{(2)}_{n2}l^{(2)}_{21}}\right\}=0;
\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

les deux autres équations de chacun des deux autres groupes se déduisent des deux précédentes par la rotation des indices 0, 1, 2. Ceci prouve que les variations des composantes obliques de la flexion de la surface ρ, soit suivant $d\sigma_1$ soit suivant $d\sigma_2$ sont liées par deux équations avec les variations de la courbure de l'arc $d\sigma$ suivant les normales à la surface ρ, pendant que cette surface se déforme par suite de la variation du paramètre ρ; cette courbure $\frac{1}{\mathfrak{L}_{n0}}$ s'introduit en effet, dans les deux équations des deux derniers groupes.

Si l'on effectue les différentiations indiquées et qu'on élimine les variations des arcs au moyen des formules $(20)''$, 1ère Partie, on obtient les équations deja trouvées entre les variations explicites des composantes obliques des flexions (2me Partie, n.° 31). Ces équations sont:

$$
(26)\left\{
\begin{aligned}
&\frac{d}{d\sigma_2}\left(\frac{1}{l^{(1)}_{n1}}\right)-\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{l^{(1)}_{n2}}\right)+\frac{1}{l^{(1)}_{n1}\,l^{(1)}_{21}}-\frac{1}{l^{(1)}_{n2}}\left(\frac{1}{l^{(2)}_{12}}-\frac{1}{l^{(2)}_{21}}+\frac{1}{l^{(1)}_{11}}\right)+\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+\frac{1}{l^{(2)}_{n1}\,l^{(1)}_{22}}-\frac{1}{l^{(2)}_{n2}\,l^{(1)}_{21}}=0,\\
&\frac{d}{d\sigma_2}\left(\frac{1}{l^{(2)}_{n1}}\right)-\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{l^{(2)}_{n2}}\right)+\frac{1}{l^{(2)}_{n1}}\left(\frac{1}{l^{(1)}_{21}}-\frac{1}{l^{(1)}_{12}}+\frac{1}{l^{(2)}_{22}}\right)-\frac{1}{l^{(2)}_{n2}\,l^{(2)}_{12}}+\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+\frac{1}{l^{(1)}_{n1}\,l^{(2)}_{12}}-\frac{1}{l^{(1)}_{n2}\,l^{(2)}_{11}}=0;
\end{aligned}
\right\}\quad(3)
$$

les autres équations de chacun des deux autres groupes se déduisent de ces deux dernièrs par la rotation des indices.

Il existe pour chacune des deux autres surfaces ρ_1 et ρ_2 des équations semblables à celles des groupes (25) et (26) et qui se déduisent des six équations de chacune de ces séries en remplaçant successivement n par n_1 et n_2.

On aurait un système d'équations équivalent au précédent en faisant usage des équations (15) dans lesquelles on remplacerait la direction ν par celle de la normale n; ou bien encore en faisant usage des équations (16) dans lesquelles la direction ν serait celle de la normale n, tandisque la direction μ coïnciderait successivement avec celle de chacun des arcs coordonnés. Il est inutile de remarquer que chacune des équations de ces deux systèmes serait susceptible de prendre quatre formes principales correspondantes aux formes données par les formules (15)′ (16)′.

20. *Nouvelle solution du problème des coordonnées.* Il résulte de ce que nous venons d'établir qu'on a une nouvelle méthode pour résoudre le problème des coordonnées curvilignes, qui dépend alors des composantes des flexions des trois surfaces; et qu'il existe une triple variété de solutions suivant que ces composantes sont les composantes obliques, ou les composantes orthogonales des flexions des surfaces, ou enfin les composantes tangentielles.

Supposons, par exemple, que l'on fasse choix des composantes obliques des flexions des surfaces pour déterminer le système coordonné; chaque surface ayant deux flexions, chacune suivant l'un des deux arcs coordonnés, et chaque flexion n'ayant que deux composantes obliques, on a ainsi douze quantités auxquelles s'ajoutent les courbures des trois arcs coordonnés suivant les normales à la surface correspondante; or, ces courbures ont seulement deux composantes obliques, la troisième composante étant nulle; il resulte de là que l'on a une somme de 18 composantes obliques auxquelles il faut ajouter les trois cosinus des angles coordonnés et les paramètres différentiels du premier ordre. Les relations qui existent entre ces grandeurs sont:

1.° Les trois groupes d'équations aux différences partielles contenues dans le type (25) ou dans le type (26) qui se reduisent à neuf. Chacune de ces équations peut être ainsi préparée qu'elle ne dépende que des composantes obliques des flexions des surfaces et de la courbure des arcs coordonnées suivant la normale à la surface correspondante, puisque les équations (5) et (8) permettent d'exprimer les composantes obliques des courbures inclinées des arcs coordonnés en fonction des composantes obliques des flexions des surfaces et de la courbure des arcs suivant la normale à la surface correspondante.

2.° Trois relations proviennent de ce que les composantes obliques suivant un arc des courbures inclinées des deux autres arcs suivant les arcs réciproques sont égales. En effet, il résulte de ce théorème que dans les équations (5) le second terme de l'équation 3^me^ de la première colonne, est égal au second terme de la 2^me^ équation de la seconde colonne, on a donc l'équation

$$(27) \qquad \frac{1}{\mathfrak{L}^{(1)}{}_{n2}} = \frac{1}{\mathfrak{L}^{(2)}{}_{n1}}\,; \qquad (3)$$

laquelle donne les relations suivantes au nombre de trois:

$$(27) \qquad \frac{1}{l^{(1)}{}_{n2}} + \frac{\cos\varphi}{l^{(2)}{}_{n2}} = \frac{1}{l^{(2)}{}_{n1}} + \frac{\cos\varphi}{l^{(1)}{}_{n1}}\,. \qquad (3)$$

3.° Neuf relations sont fournies par les variations suivant les trois arcs coordonnés des angles que les surfaces coordonnées font entre elles, relations qui sont données par les équations (10).

Ces relations sont donc en nombre suffisant pour déterminer les quantités dont dépend le problème des coordonnées.

Il y aurait à considérer le cas où dans la formule (15)′ et dans la formule (16) on fait coïncider les directions ν et μ avec celles de deux normales aux surfaces coordonnées; on trouverait une nouvelle catégorie de formules qui donneraient naissance à des considerations analogues à celles que nous venons de développer.

21. *Extension de la formule* (16) *à une fonction quelconque.* Reportons nous au n.° 12 et considérons la forme donnée dans ce numéro au

binôme $U^{12}_{\nu\mu}$. Si nous representons par $V^{12}_{\nu\mu}$ le facteur de $\cos(\nu\mu)$ dans l'expression de ce binôme, nous aurons la relation n.° 12

$$U^{12}_{\nu\mu} = \mathrm{U}^{12}_{\nu\mu} + V^{12}_{\nu\mu} \cdot \cos(\nu\mu); \tag{28}$$

cela posé, soit ψ une fonction quelconque de l'angle (ν, μ) et soient ψ' et ψ'' les dérivées première et seconde de cette fonction par rapport à cet angle; l'on a identiquement, par suite des équations qui se déduisent de l'équation (2) en faisant coïncider la direction λ avec celle des arcs coordonnées, la relation suivante

$$\frac{\psi''}{L^{(\pi}{}_{\nu1}}\frac{d\sigma_1}{d\rho_1}\frac{d(\nu,\mu)}{d\rho_2} - \frac{\psi''}{L^{(\pi)}{}_{\nu2}}\frac{d\sigma_2}{d\rho_2}\frac{d(\nu,\mu)}{d\rho_1} = \frac{\psi''}{L^{(\pi)}{}_{\mu2}}\frac{d\sigma_2}{d\rho_2}\frac{d(\nu,\mu)}{d\rho_1} -$$
$$- \frac{\psi''}{L^{(\pi}{}_{\mu1}}\frac{d\sigma_1}{d\rho_1}\frac{d(\nu,\mu)}{d\rho_2} = \frac{d\sigma_1}{d\rho_1}\frac{d\sigma_2}{d\rho_2}\psi'' V^{12}_{\nu\mu};$$

si l'on multiplie les deux membres de l'équation (16) par ψ' et qu'on ajoute l'équation résultante et l'équation précédente, membre à membre, on obtient, réductions faites, l'équation suivante

$$(15)''' \left\{ \begin{aligned} &\frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{d\sigma_1}{d\rho_1}\frac{\psi'}{L^{(\pi}{}_{\nu1}}\right) - \frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{d\sigma_2}{d\rho_2}\cdot\frac{\psi'}{L^{(\pi)}{}_{\nu2}}\right) = \frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{d\sigma_2}{d\rho_2}\frac{\psi'}{L^{(\pi)}{}_{\mu2}}\right) - \\ &\qquad - \frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{d\sigma_1}{d\rho_1}\frac{\psi'}{L^{(\pi}{}_{\mu1}}\right) = \frac{d\sigma_1}{d\rho_1}\frac{d\sigma^2}{d\rho_2}\left(V^{12}_{\nu\mu}\psi'' + \mathrm{U}^{12}_{\nu\mu}\frac{\psi'}{\sin(\nu,\mu)}\right). \end{aligned} \right.$$

Or, si l'on introduit l'angle auxiliaire ε de telle sorte que l'on ait

$$\frac{\cos\varepsilon}{\sin(\nu,\mu)} = \frac{\psi''}{\psi'},$$

et que, pour abreger, on représente par u et v les deux faces opposées à la normale π de deux trièdres faciles à determiner, ayant un angle commun ε suivant cette normale, le second membre de l'équation $(15)'''$ prendra la forme suivante

$$\frac{d\sigma_1}{d\rho_1}\frac{d\sigma_2}{d\rho_2}\frac{\psi'}{\sin(\nu,\mu)}\left(\frac{\cos u}{\mathfrak{L}_{\nu1}\mathfrak{L}_{\mu2}} - \frac{\cos v}{\mathfrak{L}_{\nu2}\mathfrak{L}_{\mu1}}\right).$$

Cette équation est tout à fait générale puisqu'elle renferme comme cas particuliers: la formule $(15)'$ qui correspond à la valeur de ψ égale à $\cos(\nu, \mu)$ et la formule (16) qui correspond à la valeur de ψ égale à l'angle (ν, μ) et une infinité d'autres provenant des formes particulières données à la fonction ψ; or, chacune de ces formes, à cause de l'indétermination des directions ν et μ, contient la solution du problème des coordonnées curvilignes comme nous l'avons suffisamment établi pour les deux formes spéciales que nous avons étudiées dans le courant de ce Mémoire, savoir la forme

$$\psi = \cos(\nu,\ \mu) \ \text{ et } \ \psi = (\nu,\ \mu).$$

Il est important de dire que la formule $(15)'''$ donne la double formule correspondante à la double formule $(15)''$ du n.° 14. Ces deux formules sont les suivantes:

$$\frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{d\sigma_1}{d\rho_1}\frac{\psi'}{\mathrm{L}^{(\pi\ \nu 1}}\right) + \frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{d\sigma_2}{d\rho_2}\frac{\psi'}{\mathrm{L}^{(\pi\ \mu 2}}\right) - \frac{d^2\psi(\nu,\ \mu)}{d\rho_1 d\rho_2} =$$
$$= \frac{d\sigma_1}{d\rho_1}\frac{d\sigma_2}{d\rho_2}\frac{\psi'}{\sin(\nu,\ \mu)}\left(\frac{\cos u}{\mathfrak{L}_{\nu 1}\mathfrak{L}_{\mu 2}} - \frac{\cos v}{\mathfrak{L}_{\nu 2}\mathfrak{L}_{\mu 1}}\right),$$

$$\frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{d\sigma_1}{d\rho_1}\frac{\psi'}{\mathrm{L}^{(\pi\ \mu 1}}\right) + \frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{d\sigma_2}{d\rho_2}\frac{\psi'}{\mathrm{L}^{(\pi\ \nu 2}}\right) - \frac{d^2\psi(\nu,\ \mu)}{d\rho_1 d\rho_2} =$$
$$= -\frac{d\sigma_1}{d\rho_1}\frac{d\sigma_2}{d\rho_2}\frac{\psi'}{\sin(\nu,\ \mu)}\left(\frac{\cos u}{\mathfrak{L}_{\nu 1}\mathfrak{L}_{\mu 2}} - \frac{\cos v}{\mathfrak{L}_{\nu 2}\mathfrak{L}_{\mu 1}}\right);$$

elle donne aussi les formules analogues aux formules (19), $(19)'$, (20), $(20)'$.

Nous avions déjà montré que ces formes générales convenaient à l'équation fondamentale de la théorie des lignes tracées sur une surface (*); équation qui est l'une de celles que fournit la théorie des coordonnées curvilignes, mais on voit de plus que ces formes appartiennent aussi à toutes les autres équations aux différences partielles de cette théorie. On voit de plus que les différentes transformations que nous avons développées dans l'*Analyse des courbes* appartiennent aussi à chacune des équations aux différences partielles de la théorie des coordonnées curvilignes.

(*) Voyez notre *Analyse infinitésimale des courbes*.

Quand'è che dalla superficie generale di terz'ordine si stacca una parte che non sia realmente segata da ogni piano reale?

(*del prof.* L. Schlaefli, *a Berna*).

Per ajutare l'imaginazione, assumasi come piano all'infinito qualcuno dei piani che non segano realmente la parte B staccata dalla rimanente falda A della superficie proposta S; la quale all'incontro è realmente segata da ogni piano reale, epperò contiene almeno una retta reale a, a causa del numero impari 27 delle rette, e perchè la parte chiusa B non può contenere una retta.

Da ciò che una retta data ad arbitrio non può segare la superficie in cinque punti, si conchiude facilmente, che la B non può di nuovo spezzarsi in due parti chiuse, e che è dappertutto convessa. Per la retta a passano adunque due soli piani reali p, q tangenti alla B; questi sono tritangenti per S e fanno parte dei cinque piani tritangenti $pqrst$, che passano per la a.

Un piano mobile attorno ad a, finchè esso seghi realmente la parte B, descrive una coppia di spazî angolari opposti lungo lo spigolo a, la qual coppia qualificherò come p i e n a, perchè entro uno di essi spazî è situata la parte B. Ove si disponga dei fattori costanti dei polinomi p, q, corrispondenti ai detti due piani tritangenti, in modo da rendere pq positivo in un punto racchiuso dalla B, quella coppia piena resta definita dall'essere pq positivo. Entro di essa il piano mobile, in qualsiasi posizione, sega la parte B in una conica reale, i cui punti d'intersezione colla retta a sono imaginari conjugati; queste coppie di punti formano sulla a un'involuzione a elementi doppi reali, la quale perciò abbraccia anche coppie di punti reali.

Il piano mobile (attorno ad a), bitangente in una qualsiasi delle coppie di punti reali, descrive due spazî angolari, limitati dai due piani u, v, che corrispondono ai punti doppi dell'involuzione; essi spazî formano una coppia angolare **piena**, ciascuna delle cui metà contiene una parte della falda A; e la falda A passa dall'una metà nell'altra attraverso la retta a, entro lo spazio definito per es. dall'essere uv positivo. Questa coppia angolare si dinoti con α, e quella dove pq era positivo, con I.

Appena uscito dallo spazio I, per es. dalla banda del piano p, il piano mobile deve segare la superficie S in una conica imaginaria, e descrive perciò una coppia angolare **vuota** II, finchè non incontra realmente la falda A. Ma un incontro essendo necessario, il primo di tali incontri non può aver luogo se non che in una regione convessa di cotesta falda. Dunque lo spazio vuoto II vien terminato da un piano tritangente reale r, il cui trilatero è formato dalla retta a e da due lati imaginari conjugati. Così pure il piano q è confine tra lo spazio pieno I e uno spazio vuoto III, il quale sarà terminato da un altro piano tritangente s, il cui contatto colla falda A avrà luogo in una regione convessa della medesima.

Ora, poichè abbiamo già quattro piani tritangenti reali p, q, r, s, il quinto t è necessariamente reale. I piani r, s limitano una coppia angolare **piena** IV, entro la quale il piano mobile sega la falda A in una conica reale; e propriamente, subito dopo la sua entrata, sia dalla banda del piano r, sia dalla banda del piano s, in una conica che non raggiunge ancora la retta a. Dunque lo spazio α sta dentro lo spazio IV, ed è facile il vedere che il piano tritangente t non può esser situato se non dentro lo spazio α; donde segue che il triangolo (t) ha tutti i suoi lati a, b, c reali.

Rispetto alla retta b si può ora ripetere lo stesso discorso fatto per la retta a; e così per la retta c. All'infuori del piano t del trilatero (abc) vi sono adunque $3 \cdot 4$ piani tritangenti reali senza trilatero reale, che passano a quattro a quattro per i lati dell'unico triangolo reale. Da ciò apparisce che a, b, c sono le sole rette reali della superficie S, e che non vi sono più di 13 piani tritangenti reali.

Questo ragionamento si può invertire. Dunque quella specie della superficie generale di terz'ordine, che ha 3 rette reali e 13 piani tritangenti reali, è composta di una falda realmente segata da ogni piano e di una parte scevra di tale proprietà e non connessa colla prima. Secondochè il piano all'infinito la sega o non la sega realmente, la seconda parte della superficie (per chi consideri soltanto lo spazio finito) è costituita da due falde separate come l'iperboloide non rigato, ovvero da una superficie chiusa come l'ellissoide.

Le cinque specie, che sono da distinguersi nella superficie generale di terz'ordine, avuto riguardo alla realtà delle sue 27 rette e de' suoi 45 piani tritangenti, si ottengono anche, dietro le idee di Riemann, mediante la considerazione del modo col quale le parti reali della superficie sono connesse, e vengono, sotto questo rispetto, ad ordinarsi come segue (*):

1.° Tutte le rette sono reali.

2.° Soltanto 15 rette sono reali; le rimanenti formano un senario doppio, in cui ogni retta dell'un senario è conjugata alla retta corrispondente dell'altro.

3.° 7 rette reali, 5 piani reali; i cinque piani reali passano per una stessa retta reale, e tre di essi contengono triangoli reali.

4.° 3 rette reali che formano un triangolo, e 7 piani reali, uno dei quali contiene il triangolo, mentre gli altri passano a due a due per i lati del triangolo medesimo.

5.° 3 rette reali che formano un triangolo, e 13 piani reali; cioè, oltre al piano del triangolo, per ciascun lato di esso passano ancora quattro piani reali.

Il passaggio fra due specie consecutive ha luogo per mezzo di una superficie di decima classe (dotata di un punto doppio). La più facile rappresentazione dei quattro passaggi si fa col mezzo della notazione

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix}$$

di un senario doppio di rette (**). Nel momento del passaggio, le due rette corrispondenti di ciascuna coppia, come per es. a_1 e b_1, vengono a coincidere, cosicchè rimangono soltanto sei rette, le quali costituiscono la intersezione completa della superficie di terz'ordine col cono tangente nel punto doppio.

Quando si ristringe la considerazione delle coppie di rette corrispondenti al minimo numero possibile, si possono distinguere soltanto due modi di

(*) Cfr. Cremona, *Mémoire sur les surfaces du 3e ordre* (Giornale di Borchardt, t. 68), n.° 159.

(**) Il piano delle a_1, b_2 è dinotato con (12), quello delle a_2, b_1 con (21), la retta comune a questi due piani con c_{12}, ed il piano delle tre rette c_{12}, c_{34}, c_{56} con (12, 34, 56).

passaggio. O le due rette di una coppia (a_1, b_1) sono dapprima reali e dopo il passaggio attraverso la coincidenza son divenute imaginarie conjugate:

$$\text{passaggio da } \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix} a_1 \\ | \\ b_1 \end{pmatrix};$$

ovvero il passaggio abbraccia due coppie (a_1, b_1), (a_2, b_2), dove dapprima le rette a_1, a_2 sono imaginarie conjugate, del pari che le rette b_1, b_2; e poscia le rette a_1, b_2 diventano conjugate, del pari che le rette b_1, a_2:

$$\text{passaggio da } \begin{pmatrix} a_1 - a_2 \\ b_1 - b_2 \end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix} a_1 & & a_2 \\ & \times & \\ b_1 & & b_2 \end{pmatrix}.$$

La combinazione

$$\begin{pmatrix} a_1 - a_2 & a_3 & & a_4 \\ & & \times & \\ b_1 - b_2 & b_3 & & b_4 \end{pmatrix}$$

è impossibile, giacchè dall'intersecarsi delle a_1, b_3 seguirebbe anche l'intersecarsi delle loro conjugate a_2, a_4, appartenenti al medesimo senario.

Vi sono adunque soltanto le quattro seguenti forme di passaggio di un senario doppio attraverso ad un nodo:

$$A)\quad \text{Da } \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix} \text{ ad } \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ | & | & | & | & | & | \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix},$$

cioè dalla specie 1ª alla specie 2ª, dove soltanto le 15 rette c_{12}, ecc. sono reali.

$$B)\quad \text{Da } \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 - b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix} \text{ ad } \begin{pmatrix} a_1 & & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ & \times & & | & | & | & | \\ b_1 & & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix}.$$

In tutti e due gli stati, le 7 rette c_{12}, c_{34} e c_{56}, c_{35} e c_{46}, c_{36} e c_{45} rimangono reali; ma il primo stato ne ha le otto $a_3, \ldots a_6$, $b_3, \ldots b_6$ di più. Qui abbiamo dunque il passaggio dalla specie 2ª alla 3ª.

$$C)\quad \text{Da } \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & a_3 - a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 - b_2 & b_3 - b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix} \text{ ad } \begin{pmatrix} a_1 & & a_2 & a_3 & & a_4 & a_5 & a_6 \\ & \times & & & \times & & | & | \\ b_1 & & b_2 & b_3 & & b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix}.$$

Le 3 rette c_{12}, c_{34}, c_{56}, che formano un triangolo, rimangono reali. Il primo stato ne ha le quattro a_5, a_6, b_5, b_6 di più, epperò corrisponde alla specie 3ª. Nel secondo stato, i piani (12) e (21), (34) e (43), (13, 24, 56), (12, 34, 56), (14, 23, 56) sono i soli reali, il che indica la specie 4ª. Passaggio dalla specie 3ª alla 4ª.

$$D)\quad \text{Da}\begin{pmatrix} a_1-a_2 & a_3-a_4 & a_5-a_6 \\ b_1-b_2 & b_3-b_4 & b_5-b_6 \end{pmatrix} \text{ ad } \begin{pmatrix} a_1 \times a_2 & a_3 \times a_4 & a_5 \times a_6 \\ b_1 \quad b_2 & b_3 \quad b_4 & b_5 \quad b_6 \end{pmatrix}.$$

Le 3 rette c_{12}, c_{34}, c_{56}, lati del triangolo del piano (12, 34, 56), sono le sole reali in ambedue gli stati. Nel primo stato, i soli sette piani (12, 34, 56), (12, 35, 46) e (12, 36, 45), (15, 34, 26) e (16, 34, 25), (13, 24, 56) e (14, 23, 56) sono reali; ma nel secondo stato, vi si aggiungono ancora i sei piani (12) e (21), (34) e (43), (56) e (65). Passaggio dalla specie 4ª alla 5ª.

Nei passaggi A, B, C il senario doppio del primo stato contiene delle rette reali; dunque nel contorno infinitesimale del nodo il passaggio ha luogo da un iperboloide ad una falda, per mezzo di un cono reale, ad un iperboloide a due falde. Ma nel passaggio D, dove non c'è alcuna retta reale, è possibile lo stesso caso ed anche l'altro, cioè il passaggio da una superficie di second'ordine imaginaria ad un ellissoide, per mezzo di un punto isolato (sfera a raggio nullo).

Passiamo ad interpretare questi fatti geometrici secondo il concetto del nesso introdotto dal Riemann. Consideriamo dapprima l'ordine della connessione, come se vi fosse inerente una costante arbitraria additiva, e ponghiamo mente soltanto alle variazioni del detto ordine, cagionate da un taglio o da una cucitura.

Imagino la porzione del piano compresa tra due cerchi concentrici, ovvero la superficie esteriore di una canna. Ogni curva rientrante, che faccia un giro fra i due orli, e che perciò non possa esser ridotta ad un punto, rappresenta il nesso straordinario, mentre le curve rientranti, che possono esser ridotte ad un punto, rappresentano il nesso ordinario; ed è per questa ragione che il Riemann chiama tal superficie doppiamente connessa. Un taglio, che cominci da un punto di un orlo e termini in un punto interno, non altera il nesso straordinario; dunque io stimo zero il suo effetto. Un taglio, che parta da un punto dell'un orlo e termini in un punto dell'altro, distrugge il nesso straordinario; il suo effetto è da stimarsi per -1; e deve ritenersi lo stesso valore, quand'anche il taglio congiunga due punti dello stesso orlo, cosicchè la superficie venga a spezzarsi. Un taglio, i cui punti estremi stieno dentro la superficie, dà luogo ad un nuovo nesso attorno al taglio, cosicchè il suo effetto deve essere 1. I due orli di questo taglio costituiscono una curva rientrante, la quale come terzo pezzo completa coi due altri il sistema dei confini della superficie. Un nuovo taglio adunque, il quale congiunga quei due punti estremi, è ora un taglio da orlo ad orlo, che conta -1, mentre esso congiunto con quello precedente, forma un taglio rientrante o circolare. Quindi un taglio circolare conta zero, spezzi esso la superficie o no.

Una cucitura toglie via l'effetto di un taglio della sua medesima specie. E però una cucitura, che congiunga due pezzi del confine, cosicchè i due punti estremi di essa rimangano punti del confine, conta 1; e conta -1, se i suoi due punti estremi cessano di esser punti del confine. E una cucitura circolare conta zero.

In conseguenza, se facciamo in due regioni diverse di una superficie o di un sistema di superficie due tagli interni, e poi applichiamo il contorno dell'un buco al contorno dell'altro e li cuciamo insieme, l'effetto delle tre operazioni conta 2.

Tale idea si deve concepire quando nel contorno infinitesimale di un nodo istantaneo di una superficie di terz'ordine ha luogo un passaggio da un iperboloide a due falde in un iperboloide a una falda.

Ora imaginiamo una superficie limitata, semplicemente connessa, per es. l'interno di un cerchio, e diamole il numero α per ordine di connessione. Poi spezziamola con un taglio da orlo ad orlo, e valutiamo la separazione col numero β. Poichè il taglio conta -1, e ciascun pezzo porta di per sè il numero α, avrèmo la equazione

$$\alpha-1=\alpha+\alpha+\beta,$$

ciascun membro della quale rappresenta il numero che compete al sistema dei due pezzi. Ne segue

$$\beta=-\alpha-1$$

quale valutazione della separazione. Ma è cosa naturale il supporre questo numero opposto a quello che compete al passaggio da una iperboloide a due falde in una iperboloide ad una falda, e quindi l'uguagliarlo a -2. Allora ne segue $\alpha=1$.

Se poi cuciamo insieme le due parti dell'orlo del cerchio in modo da farne scomparire il contorno, tale cucitura conta -1; la superficiė è venuta a chiudersi, ed il suo numero è adesso zero. Per la superficie di una sfera adunque l'ordine di connessione è zero; e del pari per il piano illimitato, per l'ellissoide e per l'iperboloide a due falde. E siccome l'ultima superficie con due tagli interni ed una cucitura circolare viene a cambiarsi in un iperboloide ad una falda, si darà a questo il numero 2. Forse non è fuor di luogo l'osservare che i due nessi straordinari dell'iperboloide rigato possono esser rappresentati da due sistemi di sezioni piane, e ch'essi hanno le sezioni di contatto per limiti comuni, attraverso i quali si fa il passaggio dall'un sistema nell'altro. Un sistema abbraccia le sezioni ellittiche, paraboliche e quelle iperboliche, la cui distanza dal centro sorpassa quella del piano tangente loro parallelo; e l'altro sistema soltanto le sezioni iperboliche meno distanti dal centro del piano tangente loro parallelo. Quanto al rapporto fra i due nessi straordinari, l'iperboloide rigato si distingue adunque essenzialmente dalla superficie di un anello (generato da un cerchio che ruoti attorno un asse situato fuori di esso), giacchè in questa non vi sono passaggi dalle curve rappresentanti l'un nesso straordinario a quelle rappresentanti l'altro.

Volendo ora applicare il concetto del nesso alla quinta specie della superficie generale di terz'ordine, possiamo sostituire alla parte staccata B una sfera ed alla falda infinita A un piano situato fuori della sfera. Ciascuna delle due superficie conta zero, e la separazione conta -2. Dunque alla quinta specie spetta il numero -2. Se la parte B si riduce ad un punto isolato e poi scompare, la separazione è tolta via, epperò il numero in quistione s'è accresciuto di 2. Del pari, se la parte B viene a toccare la falda A in una regione convessa per formare un nodo fornito di cono tangente reale, e che poi il contorno infinitesimale del nodo si cambi in un iperboloide ad una falda, anche allora l'ordine della connessione si eleva di 2. Per la quarta specie l'ordine è dunque zero, per la terza 2, per la seconda 4, e per la prima 6; il che vuol dire che la superficie generale di terz'ordine con 27 rette reali ha tre buchi (*).

Gravedona (lago di Como), li 21 settembre 1872.

(*) Come risulta anche dall'ispezione delle fotografie stereoscopiche del modello costruito dal prof. Wiener in Carlsruhe.

Intorno ad alcune trasformazioni di determinanti

(*del capitano* F. Siacci, *a Torino*).

§ 1.

Siano due sistemi di equazioni lineari ad n incognite comuni $x_1 x_2 \dots x_n$ rappresentati da

(1) $\sum_s a_{rs} x_s = \mu u_r$, (2) $\sum_s b_{rs} x_s = -\lambda u_r$, $[r, s = 1, 2 \dots n]$.

Si avrà primieramente

$$\sum_s (\lambda a_{rs} + \mu b_{rs}) x_s = 0;$$

e quindi chiamando $P(\lambda, \mu)$ il determinante di grado n, che ha per elemento $\lambda a_{rs} + \mu b_{rs}$ sarà

$$P(\lambda, \mu) = 0. \tag{3}$$

Risolvendo poi il sistema (1) rispetto alle x si avrà

$$x_t = \mu \sum_r \alpha_{rt} u_r, \quad [t = 1, 2 \dots n], \tag{4}$$

ove, rappresentando con A il determinante che ha per elemento a_{rs}, è

$$\alpha_{rs} = \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial a_{rs}}.$$

Sostituendo nella (4) il valore di u_r dato dalla (2) si ottiene

$$0 = \lambda x_t + \mu \sum_r \alpha_{rt} \sum_s b_{rs} x_s = \lambda x_t + \mu \sum_s x_s \sum_r \alpha_{rt} b_{rs}.$$

Ponendo finalmente

$$\sum_r \alpha_{rt} b_{rs} = h_{ts} \tag{5}$$

ed eliminando le x sarà

$$L=\begin{vmatrix} \mu h_{11}+\lambda & \mu h_{12} & \dots \mu h_{1n} \\ \mu h_{21} & \mu h_{22}+\lambda & \dots \mu h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mu h_{n1} & \mu h_{n2} & \dots \mu h_{nn}+\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Questa equazione ammette evidentemente le stesse radici $\frac{\lambda}{\mu}$ della (3). Quindi $P(\lambda, \mu)$ ed L non differiranno che di un fattore indipendente da λ e da μ: ma per $\lambda=0$ è $P(\lambda, \mu):L=A$; dunque, qualunque sia λ, sarà

$$P(\lambda, \mu)=AL.$$

Se poi si risolve il sistema (2) rispetto alle x, e, chiamando B il determinante che ha per elemento b_{rs}, si pone $\beta_{rs}=\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial b_{rs}}$, si ricava

$$x_t=-\lambda\sum_r \beta_{rt}u_r \tag{6}$$

e quindi operando su questa analogamente a ciò che abbiamo fatto sulla (4) troveremo che posto

$$\sum_r \beta_{rt}a_{rs}=k_{ts}, \tag{7}$$

ed

$$M=\begin{vmatrix} \lambda k_{11}+\mu & \lambda k_{12} & \dots \lambda k_{1n} \\ \lambda k_{21} & \lambda k_{22}+\mu & \dots \lambda k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda k_{n1} & \lambda k_{n2} & \dots \lambda k_{nn}+\mu \end{vmatrix},$$

sarà

$$P(\lambda, \mu)=BM.$$

È da notare che siccome il valore di P non cambia se si pone a_{sr} in luogo di a_{rs} e b_{sr} in luogo di b_{rs}, così nei determinanti L ed M le h e le k possono essere definite non solo dalle (5) e (7) ma anche dalle seguenti

$$\sum_r a_{tr}b_{sr}=h_{ts} \quad \sum_r \beta_{tr}a_{sr}=k_{ts}. \tag{8}$$

Le quantità h e k siano esse definite dalle (5) e (7) o dalle (8), godono delle proprietà seguenti:

$$\left.\begin{array}{l} h_{r1}k_{1r}+h_{r2}k_{2r}+\cdots h_{rn}k_{nr}=1 \\ h_{s1}k_{1r}+h_{s2}k_{2r}+\cdots h_{sn}k_{ns}=0 \end{array}\right\} \qquad (9)$$

ove, rimanendo fissi gl'indici, si possono scambiare le h colle k.

Ed infatti chiamando H il determinante che ha per elemento h_{rs}, si ha dalla prima delle (8), per un teorema noto,

$$\frac{B}{A}\sum_r \alpha_{tr}\beta_{sr}=\frac{\partial H}{\partial h_{ts}},$$

e quindi

$$\frac{\partial H}{\partial h_{ts}}=\frac{B}{A}k_{st}=Hk_{st},$$

relazione che equivale alle (9).

Dalle equazioni (4) e (6) si ottiene

$$0=\sum_r(\mu\alpha_{rt}+\lambda\beta_{rt})u_r$$

e quindi ove dicasi $Q(\lambda, \mu)$ il determinante che ha per elemento $\mu\alpha_{rt}+\lambda\beta_{rt}$ sarà

$$Q(\lambda, \mu)=0.$$

E questa equazione avendo le stesse radici della (3), Q differirà da P per un solo fattore costante; e siccome per $\lambda=0$ si ha $P:Q=AB$, così si avrà in ogni caso

$$P=ABQ.$$

Riassumiamo le cose dette nel seguente teorema:

Posto

$$A=\sum\pm a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}, \quad B=\sum\pm b_{11}b_{22}\ldots b_{nn},$$
$$\alpha_{rs}=\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial a_{rs}}, \qquad \beta_{rs}=\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial b_{rs}},$$

si ha

$$P(\lambda, \mu)\equiv\sum\pm(\lambda a_{11}+\mu b_{11})(\lambda a_{22}+\mu b_{22})\ldots(\lambda a_{nn}+\mu b_{nn})=$$
$$=AB\sum\pm(\mu\alpha_{11}+\lambda\beta_{11})(\mu\alpha_{22}+\lambda\beta_{22})\ldots(\mu\alpha_{nn}+\lambda\beta_{nn}) \text{ (*)}.$$

(*) Il teorema rappresentato da questa equazione è stato già da me dimostrato in altro modo e pubblicato con alcune applicazioni negli Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino. Giugno 1872.

Se inoltre si fa

$$\sum_t \alpha_{rt} b_{st} = h_{rs}, \quad \sum_t \beta_{rt} a_{st} = k_{rs},$$

si ha

$$P(\lambda, \mu)$$

$$= A \begin{vmatrix} \mu h_{11} + \lambda & \mu h_{12} & \ldots \mu h_{1n} \\ \mu h_{21} & \mu h_{22} + \lambda & \ldots \mu h_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu h_{n1} & \mu h_{n2} & \ldots \mu h_{nn} + \lambda \end{vmatrix} = B \begin{vmatrix} \lambda k_{11} + \mu & \lambda k_{12} & \ldots \lambda k_{1n} \\ \lambda k_{21} & \lambda k_{22} + \mu & \ldots \lambda k_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda k_{n1} & \lambda k_{n2} & \ldots \lambda k_{nn} + \mu \end{vmatrix}.$$

§ 2.

Dicasi P_{cs} il complemento di $\lambda a_{cs} + \mu b_{cs}$ nel determinante $P(\lambda, \mu)$. Sarà

$$\sum_s P_{cs}(\lambda a_{cs} + \mu b_{cs}) = P(\lambda, \mu)$$

$$\sum_s P_{cs}(\lambda a_{rs} + \mu b_{rs}) = 0.$$

Si moltiplichi il primo membro di questa seconda equazione per α_{rt}, e quindi si sommino le equazioni che risultano dal porre $r = 1, 2 \ldots n$: si avrà

$$\lambda P_{ct} + \mu \sum_s P_{cs} \sum_r \alpha_{rt} b_{rs} = P(\lambda, \mu) \alpha_{ct},$$

ovvero

$$\lambda P_{ct} + \mu \sum_s P_{cs} h_{ts} = P(\lambda, \mu) \alpha_{ct}. \tag{10}$$

Per analogia sarà anche

$$\mu P_{ct} + \lambda \sum_s P_{cs} k_{ts} = P(\lambda, \mu) \beta_{ct}. \tag{11}$$

Ora è evidente che i coefficienti di $P_{c1} P_{c2} \ldots P_{cn}$ nelle n equazioni che risultano dalla (10) o dalla (11) ponendo $t = 1, 2 \ldots n$ sono gli elementi del determinante L o del determinante M. Quindi la equazione (10) ove si dinotino con l_{ts} gli elementi di L, potrà rappresentarsi con

$$\sum_s P_{cs} l_{ts} = P(\lambda, \mu) \alpha_{ct}. \tag{12}$$

Parimenti l'equazione (11) potrà rappresentarsi con

$$\sum_s P_{cs} m_{ts} = P(\lambda, \mu)\beta_{ct}, \tag{13}$$

ove con m_{ts} s'indichi l'elemento del determinante M. Si moltiplichi la (12) per μ', e la (13) per λ', e quindi si sommino. Verrà

$$\sum_s P_{cs}(\mu' l_{ts} + \lambda' m_{ts}) = P(\lambda, \mu)(\mu' \alpha_{ct} + \lambda' \beta_{ct}).$$

Se finalmente si formino i due determinanti che hanno per elementi rispettivi il primo ed il secondo membro di questa equazione è chiaro che da una parte verrà il prodotto del reciproco di $P(\lambda, \mu)$ per il determinante che ha per elemento $\mu' l_{ts} + \lambda' m_{ts}$; e dall'altra verrà $[P(\lambda, \mu)]^n \cdot Q(\lambda', \mu')$.

Donde il teorema:

Se dei due determinanti L ed M, che secondo il precedente teorema equivalgono a $P(\lambda, \mu):A$ ed a $P(\lambda, \mu):B$, si addizionino gli elementi omologhi dopo aver moltiplicato quei del primo per μ' e quei del secondo per λ', il determinante che ne risulta equivale a $P(\lambda, \mu)P(\lambda', \mu'):AB$.

§ 3.

Si moltiplichi l'equazione (12) per il complemento di l_{ts} nel determinante L, complemento che rappresenteremo con L_{ts}, e si sommi poscia col simbolo $\sum_t$. Si otterrà

$$P_{cs} = A \sum_t L_{ts} \alpha_{ct},$$

poichè $L = P(\lambda, \mu):A$; ed in modo analogo si otterebbe dalla (13)

$$P_{cs} = B \sum M_{ts} \beta_{ct}:$$

moltiplicando poi la prima di queste equazioni per a_{ct} e la seconda per b_{ct} e sommando i due sistemi che nascono dal porre $c = 1, 2 \ldots n$, si ricava

$$A L_{ts} = \sum_c P_{cs} a_{ct},$$

$$B M_{ts} = \sum_c P_{cs} b_{ct};$$

si sommino finalmente queste due equazioni dopo aver moltiplicato la prima per λ e la seconda per μ, ed avremo

$$\lambda A L_{ts} + \mu B M_{ts} = \sum_c P_{cs}(\lambda a_{ct} + \mu b_{ct}):$$

e questo secondo membro sarà eguale a $P(\lambda, \mu)$ o a zero, secondo che t sarà eguale ad s, ovvero diverso da esso. Quindi si può affermare:

Se dei due determinanti che secondo il primo teorema equivalgono a $P(\lambda, \mu):A$ ed a $P(\lambda, \mu):B$, si prendono i complementi di due elementi omologhi, e si sommino dopo aver moltiplicato il primo per $A\lambda$ ed il secondo per $B\mu$, la somma sarà eguale a $P(\lambda, \mu)$ o nulla, secondochè gli elementi saranno o non saranno principali.

§ 4.

Pongasi nel determinante A, $a_{rs} = a_{sr} = 0$, $a_{rr} = 1$. Si avrà

$$A = 1, \quad \alpha_{rs} = \alpha_{sr} = 0, \quad \alpha_{rr} = 1,$$

e quindi

$$h_{ts} = \sum_r \alpha_{tr} b_{sr} = b_{st},$$

$$k_{ts} = \sum_r \beta_{tr} \alpha_{sr} = \beta_{ts},$$

$$L = \begin{vmatrix} \mu b_{11} + \lambda & \mu b_{21} & \ldots \mu b_{n1} \\ \mu b_{12} & \mu b_{22} + \lambda & \ldots \mu b_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu b_{1n} & \mu b_{2n} & \ldots \mu b_{nn} + \lambda \end{vmatrix}, \quad M = \begin{vmatrix} \lambda\beta_{11} + \mu & \lambda\beta_{12} & \ldots \lambda\beta_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda\beta_{22} + \mu & \ldots \lambda\beta_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda\beta_{n1} & \lambda\beta_{n1} & \ldots \lambda\beta_{nn} + \mu \end{vmatrix}.$$

Se si pone inoltre $\lambda = 1$ $\mu = -1$, sarà $L = P(1, -1)$ ed $MB = P(1, -1)$ onde

$$L_{rr} - BM_{rr} = P(1, -1),$$

$$L_{rs} - BM_{rs} = 0.$$

Se finalmente si pone $b_{rs} + b_{sr} = 0$, $b_{rr} = 1$, ed n un numero pari, P, riuscendo gobbo simmetrico sarà un quadrato, ed L essendo identico a P, sarà $L_{rr} = 0$, e

$$-BM_{rr} = P(1, -1) = BM.$$

Moltiplicando per 2 tutti gli elementi di M, e dicendo R il determinante che ne risulta, ed R_{rs} un suo complemento qualunque, sarà

$$R=2^n M, \quad R_{rs}=2^{n-1} M_{rs},$$

e perciò

$$R_{rr}=-\tfrac{1}{2}R.$$

Ma il determinante R è quello di una sostituzione reciproca di grado pari, dove tutti gli elementi principali sono diminuiti dell'unità; dunque:

Se nel determinante di una sostituzione ortogonale di grado pari si sottrae l'unità da tutti gli elementi principali e si prendono poscia i complementi di questi, tali complementi sono tutti eguali e valgono la metà del determinante ridotto col segno cambiato.

§ 5.

Sia

$$F(x)=c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_{n-1} x + c_n \tag{14}$$

e siano $C_0 C_1 \ldots C_{2n-1}$, $2n$ quantità che soddisfino alle seguenti n equazioni

$$\left.\begin{aligned}
0&=c_0 C_n + c_1 C_{n-1} + \cdots + c_{n-1} C_1 + c_n C_0\\
0&=c_0 C_{n+1} + c_1 C_n + \cdots + c_{n-1} C_2 + c_n C_1\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
0&=c_0 C_{2n-1} + c_1 C_{2n-2} + \cdots + c_{n-1} C_n + c_n C_{n-1};
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

e da queste e dalla (14) eliminando $c_0 c_1 \ldots c_{n-1}$, ovvero $c_1 c_2 \ldots c_n$ si otterrà

$$\frac{A}{c_n} F(x)=\begin{vmatrix}
1 & x & x^2 & \ldots & x^n\\
C_0 & C_1 & C_2 & \ldots & C_n\\
C_1 & C_2 & C_3 & \ldots & C_{n+1}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
C_{n-1} & C_n & C_{n+1} & \ldots & C_{2n-1}
\end{vmatrix} \tag{16}$$

ovvero

$$\frac{B}{c_0} F(x)=\begin{vmatrix}
1 & x & x^2 & \ldots & x^n\\
C_0 & C_1 & C_2 & \ldots & C_n\\
C_1 & C_2 & C_3 & \ldots & C_{n+1}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
C_{n-1} & C_n & C_{n+1} & \ldots & C_{2n-1}
\end{vmatrix} \tag{17}$$

ove

$$A=\begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \dots & C_n \\ C_2 & C_3 & C_4 \dots & C_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_n & C_{n+1} & C_{n+2} \dots & C_{2n-1} \end{vmatrix}, \quad B=\begin{vmatrix} -C_0 & -C_1 & -C_2 \dots & -C_{n-1} \\ -C_1 & -C_2 & -C_3 \dots & -C_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -C_{n-1} & -C_n & -C_{n+1} \dots & -C_{2n-2} \end{vmatrix};$$

e per conseguenza

$$Ac_0 - Bc_n = 0.$$

Se ora dagli elementi della 2ª colonna del determinante (16) si sottraggono quei della prima moltiplicati per x, da quei della 3ª, quei della 2ª moltiplicati per x, e così di seguito, il valore del determinante non si altera e quindi le equazioni (16) e (17) potranno prendere le seguenti forme

$$\frac{A}{c_n}F(x) = \frac{B}{c_0}F(x) = \begin{vmatrix} C_1 - xC_0 & C_2 - xC_1 \dots & C_n - xC_{n-1} \\ C_2 - xC_1 & C_3 - xC_2 \dots & C_{n+1} - xC_n \\ \dots & \dots & \dots \\ C_n - xC_{n-1} & C_{n+1} - xC_n \dots & C_{2n-1} - xC_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

Ciò posto, trasformiamo questo determinante, che può considerarsi come un caso particolare del $P(\lambda, \mu)$ ove $\lambda = 1$, e $\mu = x$, nei due corrispondenti ad L e ad M. A tale oggetto osserviamo che nel valore di $h_{ts} = \sum_r \alpha_{tr} b_{sr}$, è $b_{sr} = -a_{s-1,r}$, quindi

$$h_{ts} = -\sum_r \alpha_{tr} a_{s-1,r}$$

ed

$$h_{t2} = h_{t3} = \dots = h_{tt} = 0, \quad h_{t,t+1} = -1, \quad h_{t,t+2} = h_{t,t+3} = \dots = h_{tn} = 0.$$

Nel valore poi di $k_{ts} = \sum_r \beta_{tr} a_{sr}$, si potrà porre $-b_{s+1,r}$ in luogo di a_{sr} e perciò

$$k_{ts} = -\sum_r \beta_{tr} b_{s+1,r}$$

e

$$k_{t1} = k_{t2} = \dots k_{t,t-2} = 0 \quad k_{t,t-1} = -1 \quad k_{tt} = k_{t,t+1} = \dots = k_{t,n-1} = 0.$$

Restano a trovare i valori di

$$h_{t1} = \sum_r \alpha_{tr} b_{1r} \quad \text{e} \quad k_{tn} = \sum_r \beta_{tr} a_{nr}.$$

Ma questi si traggono facilmente dalle equazioni (15), ottenendosi

$$h_{t1} = \frac{c_{n-t}}{c_n}, \quad k_{tn} = \frac{c_{n-t+1}}{c_0}.$$

Dunque

$$L=\frac{F(x)}{c_n}=\begin{vmatrix} 1+\frac{c_{n-1}}{c_n}x & -x & 0\ldots & 0 & 0 \\ \frac{c_{n-2}}{c_n}x & 1 & -x\ldots & 0 & 0 \\ \frac{c_{n-3}}{c_n}x & 0 & 1\ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{c_1}{c_n}x & 0 & 0\ldots & 1 & -x \\ \frac{c_0}{c_n}x & 0 & 0\ldots & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad (18)$$

$$M=\frac{F(x)}{c_0}=\begin{vmatrix} x & 0 & 0\ldots & 0 & \frac{c_n}{c_0} \\ -1 & x & 0\ldots & 0 & \frac{c_{n-1}}{c_0} \\ 0 & -1 & x\ldots & 0 & \frac{c_{n-2}}{c_0} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0\ldots & x & \frac{c_2}{c_0} \\ 0 & 0 & 0\ldots & -1 & \frac{c_1}{c_0}+x \end{vmatrix}. \qquad (19)$$

E questi due determinanti godranno l'uno rispetto all'altro delle proprietà indicate nei §§ 2 e 3, cioè:

Se agli elementi del determinante M si aggiungono gli elementi omologhi del determinante L moltiplicati per y il determinante che ne risulta vale

$$\frac{F(x)F(y)}{c_0 c_n}.$$

Se si dicono L_{rs} ed M_{rs} i complementi di due elementi omologhi di L ed M si ha

$$c_n L_{rr} + c_0 M_{rr} x = F(x)$$

$$c_n L_{rs} + c_0 M_{rs} x = 0.$$

Torino, novembre 1872.

Sulla integrazione della equazione $\Delta^2 u = 0$.

(*del prof.* Ulisse Dini, *a Pisa*).

Molti distinti geometri si sono occupati della determinazione della funzione u di due variabili reali x e y che nei punti interni a un dato campo C è finita, continua e a un sol valore, essa e le sue derivate, e soddisfa alla equazione $\Delta^2 u = \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} = 0$, e avvicinandosi indefinitamente al contorno si mantiene sempre finita, e resta, almeno generalmente, anche continua, e sul contorno prende valori dati ad arbitrio. In questo lavoro invece io prendo dapprima a determinare la funzione u nel campo racchiuso da un cerchio o da due cerchi concentrici, quando si richiede che pei punti interni al campo che si considera essa soddisfi alle condizioni dette sopra, e avvicinandosi indefinitamente al contorno s e sul contorno stesso non superi mai un numero finito e resti, almeno generalmente, anche continua sì essa che la sua derivata $\frac{du}{dp}$ rispetto alla normale p al contorno contata verso l'interno, e al contorno questa derivata prenda valori dati ad arbitrio in tutti i punti ove questi valori dati soddisfano alla legge di continuità; intendendo sempre però che questi valori siano finiti e abbiano soltanto un numero finito di discontinuità e soddisfino alla equazione $\int \frac{du}{dp}\, ds = 0$ che, come è noto, è conseguenza necessaria delle altre condizioni che si sono poste.

Passo quindi a trattare il problema analogo pel caso della sfera, e considero poi il caso in cui sul contorno, anzichè essere dati i valori di u o di $\frac{du}{dp}$, sono dati quelli di una funzione lineare di queste quantità, ciò che mi porta a risolvere completamente un problema della teoria del calore; e infine tratto i problemi analoghi pel caso della equazione $\Delta^2 = f$, ove f è una funzione finita e continua insieme alle sue derivate prime e seconde in tutti i punti del campo che si considera.

1. Siano x e y le coordinate cartesiane, e ρ, θ le coordinate polari di un punto M di un campo C. Ricordando che la espressione $\Delta^2 u$ in coordinate polari è la seguente:

$$\Delta^2 u = \frac{d^2 u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{d^2 u}{d\theta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{du}{d\rho},$$

si vede subito che se nell'interno di C la funzione u soddisfa alla equazione $\Delta^2 u = 0$, ed è finita, continua e a un sol valore essa e le sue derivate, anche la funzione $U = \rho\frac{du}{d\rho}$ sarà finita e continua insieme alle sue derivate nell'interno di C, e soddisfarà essa pure alla equazione $\Delta^2 U = 0$, giacchè si avrà:

$$\Delta^2 U = \frac{d(\rho^2 \Delta^2 u)}{\rho d\rho}.$$

Ora supponendo che C sia il campo racchiuso da una circonferenza di raggio R col centro all'origine delle coordinate rettilinee e polari, al contorno si avrà $\frac{du}{d\rho} = -\frac{du}{dp}$, e quindi la esistenza di una funzione u, che è tale che la sua derivata $\frac{du}{dp}$ al contorno prende i valori dati, e che soddisfa alle altre condizioni dette sopra, porta alla esistenza di una funzione $U = \rho\frac{du}{d\rho}$ che nell'interno soddisfa alle stesse condizioni, e avvicinandosi indefinitamente al contorno si mantiene sempre finita e resta generalmente anche continua e sul contorno prende i valori dati $-R\frac{du}{dp}$.

Ora per teoremi noti (v. per es.: Schwarz, Crelle Journ., v. 74, p. 218), il valore di questa funzione U nel punto (ρ', θ') interno a C è:

$$-\frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{du}{dp}\frac{R^2 - \rho'^2}{R^2 - 2R\rho'\cos(\theta - \theta') + \rho'^2}d\theta;$$

quindi, se la funzione cercata u esiste, nel punto (ρ', θ') dovremo avere:

$$\frac{du'}{d\rho'} = -\frac{R}{2\pi\rho'}\int_0^{2\pi}\frac{du}{dp}\frac{R^2 - \rho'^2}{R^2 - 2R\rho'\cos(\theta - \theta') + \rho'^2}d\theta,$$

ovvero:

$$\frac{du'}{d\rho'} = \frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{du}{dp}\frac{2\rho' - 2R\cos(\theta - \theta')}{R^2 - 2R\rho'\cos(\theta - \theta') + \rho'^2}d\theta - \frac{R}{2\pi\rho'}\int_0^{2\pi}\frac{du}{dp}d\theta, \qquad (1)$$

o anche:

$$\frac{du'}{d\rho'} = \frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{du}{dp}\frac{d}{d\rho'}\{\log[R^2 - 2R\rho'\cos(\theta-\theta') + \rho'^2]\}d\theta, \tag{2}$$

giacchè si suppone che i valori dati di $\frac{du}{dp}$ soddisfino alla condizione:

$$\int_s \frac{du}{dp}ds = R\int_0^{2\pi}\frac{du}{dp}d\theta = 0.$$

Se dunque la funzione u' esiste, il valore di $\frac{du'}{d\rho'}$ nel punto $M(\rho', \theta')$ interno a C non può essere che il valore (2); quindi, integrando lungo il raggio $\theta' = \text{cost.}$ dal centro al punto (ρ', θ'), e supponendo, ciò che evidentemente può farsi, che il valore di u nel centro sia zero, se la funzione u' esiste, si avrà:

$$u' = \frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{du}{dp}\log\{R^2 - 2R\rho'\cos(\theta-\theta') + \rho'^2\}d\theta, \tag{3}$$

giacchè, nelle ipotesi che noi abbiamo fatte sui valori dati di $\frac{du}{dp}$ al contorno, le integrazioni rispetto a ρ' e a θ' potevano invertirsi.

2. La funzione cercata adunque non può essere che quella che ci viene data dalla formola (3). Però, poichè non siamo ancora sicuri della esistenza di questa funzione, converrà cercare se la funzione u' data dalla (3) soddisfa o no a tutte le condizioni che abbiamo poste.

Si verifica senza difficoltà che pei punti (ρ', θ') interni a C le condizioni che abbiamo poste sono tutte soddisfatte dalla funzione (3). Per verificare poi che essa resta finita e continua anche avvicinandosi indefinitamente al contorno e sul contorno stesso, basta procedere come segue.

Indichiamo con u'_s il valore che prende il secondo membro della (3) per $\rho' = R$. Si avrà:

$$u'_s = \frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{du}{dp}\log 4\,\text{sen}^2\frac{\theta-\theta'}{2}d\theta, \tag{4}$$

e questo valore evidentemente sarà finito e determinato.

Similmente indichiamo con u'_ε il valore che si ha per u' dalla (3) sul cerchio di raggio $\rho' = R - \varepsilon$. Si avrà:

$$u'_\varepsilon = \frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{du}{dp}\log\left[\frac{\varepsilon^2}{R^2} + 4\,\text{sen}^2\frac{\theta-\theta'}{2}\left(1-\frac{\varepsilon}{R}\right)\right]d\theta,$$

e perciò sarà:

$$u'_\varepsilon - u'_s = \frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{du}{dp}\left\{\log\left[\frac{\varepsilon^2}{R^2}+4\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta-\theta'}{2}\left(1-\frac{\varepsilon}{R}\right)\right]-\log 4\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta-\theta'}{2}\right\}d\theta.$$

Indichiamo ora con δ una quantità differente da zero positiva e arbitrariamente piccola, che poi dovrà restar fissa, e osserviamo che quando i valori dell'elemento dell'integrale che comparisce in questa formola si riguardino come fissati nei punti del cerchio di raggio uno, cui si riferiscono i valori di θ corrispondenti, questo integrale potrà considerarsi come esteso al cerchio di raggio uno, e potrà sempre decomporsi in due, che indicheremo con $\int_{2\delta}$ e $\int_{2\pi-2\delta}$, dei quali il primo sia esteso all'arco circolare che va dal punto $\theta=\theta'-\delta$ al punto $\theta=\theta'+\delta$, e il secondo sia esteso all'arco rimanente.

Indicando con g il massimo (o limite superiore) fra i valori assoluti dati di $\frac{du}{dp}$, e supponendo δ ed ε già così piccoli che le quantità:

$$4\,\mathrm{sen}^2\frac{\delta}{2},\quad \text{e}\quad \frac{\varepsilon^2}{R^2}+4\,\mathrm{sen}^2\frac{\delta}{2}\left(1-\frac{\varepsilon}{R}\right)$$

siano ambedue minori dell'unità, si vede subito che per tutti i valori di ε inferiori a un certo limite (che evidentemente può prendersi diverso da zero) e per tutti i valori di θ' l'integrale $\int_{2\delta}$ in valore assoluto sarà minore di:

$$g\int_{\theta'-\delta}^{\theta'+\delta}\left\{-\log 4\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta-\theta'}{2}\left(1-\frac{\varepsilon}{R}\right)-\log 4\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta-\theta'}{2}\right\}d\theta,$$

ovvero di:

$$-2g\int_{\theta'-\delta}^{\theta'+\delta}\log 4\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta-\theta'}{2}\,d\theta-2g\delta\log\left(1-\frac{\varepsilon}{R}\right);$$

e quindi, poichè prendendo δ sufficientemente piccolo l'integrale:

$$\int_{\theta'-\delta}^{\theta'+\delta}\log 4\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta-\theta'}{2}\,d\theta$$

può rendersi arbitrariamente piccolo, si conclude che si può trovare un valore di δ così piccolo, che per questo valore di δ (che ora lascieremo fisso) e pei valori di ε inferiori a un certo limite finito e per tutti i valori di θ' l'integrale $\int_{2\delta}$ in valore assoluto sia sempre minore di quella quantità che più ci piace.

Consideriamo ora l'altro integrale $\int_{2\pi-2\delta}$, e scriviamo perciò il suo elemento sotto la forma:

$$\frac{du}{dp}\log\left(1-\frac{\varepsilon}{R}+\frac{\varepsilon^2}{4R^2\operatorname{sen}^2\frac{\theta-\theta'}{2}}\right)d\theta=\frac{du}{dp}\log\left\{1-\frac{\varepsilon}{R}\left(1-\frac{\varepsilon}{4R\operatorname{sen}^2\frac{\theta-\theta'}{2}}\right)\right\}d\theta.$$

Osservando che il minimo valore di $\operatorname{sen}^2\frac{\theta-\theta'}{2}$ durante l'integrazione è $\operatorname{sen}^2\frac{\delta}{2}$, si vedrà subito che pei valori di ε inferiori a $4R\operatorname{sen}^2\frac{\delta}{2}$ la quantità sotto il logaritmo è sempre minore dell'unità, e quindi in valore assoluto l'elemento dell'integrale non è mai maggiore di:

$$-g\log\left(1-\frac{\varepsilon}{R}\right)d\theta,$$

e l'integrale non è maggiore di $-2\pi g\log\left(1-\frac{\varepsilon}{R}\right)$; e questo mostra chiaramente che pei valori di ε inferiori a un certo numero differente da zero ε_1 l'integrale $\int_{2\pi-2\delta}$ per tutti i valori di θ' sarà minore di una quantità piccola quanto si vuole data.

Da ciò risulta che si può trovare un numero positivo e differente da zero ε_1, tale che per tutti i valori positivi di ε inferiori a ε_1 e per tutti i valori di θ' la differenza $u'_s-u'_\varepsilon$ in valore assoluto sia sempre minore di una quantità data piccola quanto si vuole; e si conclude perciò intanto che avvicinandosi indefinitamente al contorno nel senso dei raggi la funzione u' si mantiene continua e tende verso i valori u'_s dati dalla (4), e la continuità è uniforme su tutti i raggi.

Ora, per questo e perchè i valori u'_ε di u' lungo un cerchio qualunque di raggio $R-\varepsilon$ interno a C costituiscono una funzione continua, s'intende subito come possano sempre trovarsi due numeri positivi e differenti da zero ε_1 e ε_2 tali che, costruendo per ogni punto $(R,\,\theta')$ del contorno il quadrilatero curvilineo, di cui due lati sono porzioni uguali a $2R\varepsilon_2$ e $2(R-\varepsilon_1)\varepsilon_2$ del contorno e del cerchio di raggio $R-\varepsilon_1$ rispettivamente, e gli altri due sono le porzioni uguali ad ε_1 dei raggi corrispondenti agli angoli polari $\theta'+\varepsilon_2$ e $\theta'-\varepsilon_2$, le differenze fra $u'_s(\theta')$ e il valore di u' o di u'_s in un altro punto qualunque di quel quadrilatero siano minori in valore assoluto di una quantità positiva piccola quanto si vuole data ad arbitrio; e questo basta per potere concludere, come volevamo, che la funzione u' data dalla (3) si mantiene finita e continua anche avvicinandosi indefinitamente al contorno (in qualunque direzione) e sul contorno stesso, quando per valori al contorno si prendano i valori limiti u'_s dati dalla formola (4).

E ora, poichè questi valori limiti u'_s sono quelli appunto che si hanno dalla formola (3) per $\rho'=R$, e bisogna necessariamente prenderli per valori della funzione u' al contorno se si vuole la continuità, si può dire che la formola (3) vale per tutto il campo C incluso il contorno.

3. Mi piace di osservare che, anche indipendentemente dalla considerazione dei valori di u' nell'interno di C, si può provare direttamente nel modo seguente che i valori limiti u'_s costituiscono una funzione continua di θ'.

Osserviamo per questo che avendosi dalla (4):

$$u'_s(\theta')=\frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{du}{dp}\log 4\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta-\theta'}{2}\,d\theta,$$

$$u'_s(\theta'+\varepsilon)=\frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{du}{dp}\log 4\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta-\theta'-\varepsilon}{2}\,d\theta,$$

sarà:

$$u'_s(\theta'+\varepsilon)-u'_s(\theta')=\frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{du}{dp}\left\{\log\mathrm{sen}^2\frac{\theta-\theta'-\varepsilon}{2}-\log\mathrm{sen}^2\frac{\theta-\theta'}{2}\right\}d\theta,$$

e poichè l'integrale che qui comparisce può al solito considerarsi come esteso al cerchio di raggio uno, indicando con δ una quantità positiva sufficientemente piccola potremo scrivere:

$$u'_s(\theta'+\varepsilon)-u'_s(\theta')=\frac{R}{2\pi}\int_{2\delta}+\frac{R}{2\pi}\int_{2\pi-2\delta},$$

ove gl'integrali $\int_{2\delta}$ e $\int_{2\pi-2\delta}$, rispetto al modo secondo cui sono estesi, hanno il significato del paragrafo precedente.

Ora siccome le quantità sotto i logaritmi non superano l'unità, in valore assoluto l'integrale $\int_{2\delta}$ non potrà superare la quantità:

$$-g\int_{\theta'-\delta}^{\theta'+\delta}\log\operatorname{sen}^2\frac{\theta-\theta'-\varepsilon}{2}\,d\theta-g\int_{\theta'-\delta}^{\theta'+\delta}\log\operatorname{sen}^2\frac{\theta-\theta'}{2}\,d\theta,$$

la quale, se ε' è il valore assoluto di ε, è minore di:

$$-g\int_{\theta'-\delta-\varepsilon'}^{\theta'+\delta+\varepsilon'}\log\operatorname{sen}^2\frac{\theta-\theta'-\varepsilon}{2}\,d\theta-g\int_{\theta'-\delta}^{\theta'+\delta}\log\operatorname{sen}^2\frac{\theta-\theta'}{2}\,d\theta;$$

quindi, poichè pei valori di δ e $\delta+\varepsilon'$ inferiori a un limite finito, abbastanza piccolo, gli integrali che qui compariscono sono sempre minori di quella quantità che più ci piace, si conclude intanto che si può trovare un valore di δ sufficientemente piccolo, tale che per tutti i valori di ε inferiori in valore assoluto a un certo numero finito, e per tutti i valori di θ' l'integrale $\int_{2\delta}$ in valore assoluto sia minore di quella quantità che più ci piace.

Consideriamo ora l'altro integrale $\int_{2\pi-2\delta}$, e per escludere il caso che il punto $\theta=\theta'+\varepsilon$ cada nell'intervallo di integrazione, supponiamo subito che ε in valore assoluto non raggiunga δ, ma sia per es. $<\frac{1}{2}\delta$, essendo δ il numero (che ora deve restar fisso) che abbiamo determinato poc'anzi.

Osservando che l'elemento dell'integrale può scriversi:

$$\frac{du}{dp}\log\left\{\cos\frac{\varepsilon}{2}+\cot\frac{\theta-\theta'}{2}\operatorname{sen}\frac{\varepsilon}{2}\right\}^2 d\theta=2\frac{du}{dp}\log\cos\frac{\varepsilon}{2}\,d\theta+$$
$$+\frac{du}{dp}\log\left\{1+\cot\frac{\theta-\theta'}{2}\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}\right\}^2 d\theta,$$

e il massimo valore assoluto di $\cot\frac{\theta-\theta'}{2}$ durante l'integrazione è $\cot\frac{\delta}{2}$, si vede subito che le quantità sotto i logaritmi non saranno mai zero, e l'integrale $\int_{2\pi-2\delta}$ in valore assoluto sarà minore di:

$$-4g\pi\log\cos\frac{\varepsilon}{2}-2g\pi\log\left\{1-\cot\frac{\delta}{2}\operatorname{tg}\frac{\varepsilon'}{2}\right\}^2,$$

essendo ε' il valore assoluto di ε; e quindi pei valori di ε minori in valore assoluto di un numero finito e positivo ε_1 $\left(\text{che è un numero inferiore a } \delta \text{ e che rende sufficientemente prossime a uno le quantità } \cos\frac{\varepsilon_1}{2}, \text{ e } 1 - \cot\frac{\delta}{2}\operatorname{tg}\frac{\varepsilon_1}{2}\right)$ l'integrale stesso per tutti i valori di θ' sarà minore di quella quantità che più ci piace; e così resta nuovamente dimostrato che i valori di u'_s dati dalla (4) costituiscono una funzione continua di θ'.

4. Passiamo ora a fare le verificazioni relative ai valori della derivata $\frac{du'}{dp'}$ rispetto alla normale interna p', quando ci si avvicina indefinitamente al contorno e sul contorno stesso.

Supponiamo perciò che i valori dati di $\frac{du}{dp}$ costituiscano una funzione finita e continua o avente soltanto un numero finito di discontinuità, e osserviamo che il valore di $\frac{du'}{dp'}$ nel punto $M(\rho', \theta')$ interno al cerchio è $-\frac{du'}{d\rho'}$, e si ha subito dalla (3). Per un teorema di SCHWARZ (m. c.) potremo dire intanto che entro il cerchio questi valori di $\frac{du'}{dp'}$ sono sempre finiti e continui, e restano finiti anche quando ci si avvicina indefinitamente al contorno, e avvicinandosi indefinitamente a punti del contorno ove nei valori dati di $\frac{du}{dp}$ non si ha discontinuità, $\frac{du'}{dp'}$ tende con continuità verso i valori dati corrispondenti, mentre avvicinandosi indefinitamente a punti del contorno, nei quali i valori dati hanno una discontinuità, $\frac{du'}{dp'}$ tende con continuità verso valori finiti differenti dipendentemente dalla direzione secondo cui ci si muove; e in particolare quando ci si muove nel senso del raggio $\frac{du'}{dp'}$ tende verso il valore medio fra i due valori dati:

$$\frac{du}{dp}(\theta'+0) \text{ e } \frac{du}{dp}(\theta'-0) \ (*).$$

Questo ci permette di dire che quando, restando sempre nell'interno del

(*) Notiamo che se vi sono discontinuità nella serie dei valori dati di $\frac{du}{dp}$ noi supponiamo sempre che siano di quelle per le quali le corrispondenti quantità $\frac{du}{dp}(\theta'+0)$ e $\frac{du}{dp}(\theta'-0)$ hanno un significato determinato.

cerchio, ci si avvicina indefinitamente al contorno la funzione u' data dalla (3), anche per ciò che riguarda la sua derivata $\frac{du'}{dp'}$ soddisfa alle condizioni che si sono poste; e così resta soltanto a far vedere che i valori che si hanno effettivamente per $\frac{du'}{dp'}$ dalla (3) sul contorno nei punti ove i valori dati $\frac{du}{dp}$ non hanno discontinuità sono precisamente questi valori dati.

Consideriamo perciò $\frac{du'}{d\rho'}$ come una funzione di ρ' e θ' che pei punti interni a C è definita dalla (2), e pei punti del contorno ove si ha continuità nei valori dati di $\frac{du}{dp}$ è definita dalla formola:

$$\frac{du'}{d\rho'} = -\frac{du}{dp},$$

e nei punti di discontinuità di $\frac{du}{dp}$ resta finita.

L'integrale $\int_0^{\rho'} \frac{du'}{d\rho'} d\rho'$ preso lungo il raggio $\theta' = \text{cost.}$ dal centro fino al punto $M(\rho', \theta')$ interno a C (cioè per $\rho' < R$) si accorderà col valore di u' in questo punto; e poichè quando M si avvicina indefinitamente al contorno muovendosi sul raggio $\theta' = \text{cost.}$ tanto l'integrale $\int_0^{\rho'} \frac{du'}{d\rho'} d\rho'$ quanto la funzione u' variano con continuità e i loro valori limiti sono $\int_0^R \frac{du'}{dp'} d\rho'$ e u'_s, si conclude che la formola:

$$u' = \int_0^{\rho'} \frac{du'}{d\rho'} d\rho',$$

ove $\frac{du'}{d\rho'}$ è definita come è stato detto sopra, e u' è data dalla (3) sussisterà anche per $\rho' = R$, e perciò sarà (seguendo le notazioni del paragrafo precedente):

$$u'_\varepsilon - u'_s = -\int_{R-\varepsilon}^{R} \frac{du'}{d\rho'} d\rho';$$

e poichè $\frac{du'}{d\rho'}$ lungo il raggio $\theta' = \text{cost.}$ è continua, indicando con $\frac{du_0}{dp}$ il valore dato $\frac{du}{dp}(\theta')$ pei punti di continuità di questi valori, e il valore medio fra i due $\frac{du}{dp}(\theta'+0)$ e $\frac{du}{dp}(\theta'-0)$ pei punti di discontinuità degli stessi valori, e osservando che il limite di $\frac{du'}{d\rho'}$ per $\rho'=R$ è $-\frac{du_0}{dp}$, si potrà scrivere:

$$u'_\varepsilon - u'_s = \varepsilon\left(\frac{du_0}{dp} + \varepsilon_1\right)$$

ove ε_1 tende a zero con ε, e perciò sarà:

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{u'_\varepsilon - u'_s}{\varepsilon} = \frac{du_0}{dp},$$

ciò che mostra appunto che i valori che prende effettivamente $\frac{du'}{dp'}$ sul contorno sono i valori dati nei punti ove questi valori non hanno discontinuità, e sono i valori medii fra i due $\frac{du}{dp}(\theta'+0)$ e $\frac{du}{dp}(\theta'-0)$ nei punti di discontinuità degli stessi valori dati.

5. La funzione u' data dalla (3) soddisfa dunque a tutte le condizioni che si sono poste; e si può dire in conseguenza che qualunque siano i valori dati per $\frac{du}{dp}$, purchè costituiscano una funzione finita e continua o avente soltanto un numero finito di discontinuità e soddisfino alla condizione $\int \frac{du}{dp} ds = 0$, esiste sempre una funzione u' che soddisfa a tutte le condizioni poste in principio, e all'infuori di una costante additiva essa è unica, ed è data dalla formola (3). Essa è inoltre **totalmente continua** anche sul contorno; e nei punti θ' del contorno ove i valori dati $\frac{du}{dp}$ hanno una discontinuità, la sua derivata rispetto alla normale interna prende il valore medio fra i due $\frac{du}{dp}(\theta'+0)$ e $\frac{du}{dp}(\theta'-0)$.

È poi da notare che quando la condizione $\int \frac{du}{dp} ds = 0$ non fosse soddisfatta, non esisterebbe più una funzione che soddisfa a tutte le condizioni che ponemmo in principio; e quando fra queste condizioni si tralasciasse quella di mantenersi sempre finita nell'interno insieme alle sue derivate, per ottenere una funzione che soddisfa a tutte le altre condizioni basterebbe prendere [a causa della (2)] la funzione $u' - \frac{R}{2\pi}\log\rho' \int_0^{2\pi} \frac{du'}{dp} d\theta$, ove u' è data dalla formola (3). Questa funzione diviene logaritmicamente infinita all'origine, e sul contorno è ancora continua.

6. Farò ora vedere che quando i valori dati di $\frac{du}{dp}$ al contorno costituiscono una funzione $F(\theta)$ di θ finita continua e periodica (*) che soddisfa alla solita condizione $\int_0^{2\pi} F(\theta)\,d\theta = 0$, e ammette una derivata che è sempre finita ed è inoltre continua o ha soltanto un numero finito di discontinuità, la funzione corrispondente (3) ammette anche una derivata finita e continua lungo il contorno nel senso dell'arco.

Osserviamo infatti che lungo il contorno si ha:

$$u'_s(\theta') = \frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)\log\operatorname{sen}^2\frac{\theta-\theta'}{2}\,d\theta,$$

o anche:

$$u'_s(\theta') = \frac{R}{2\pi}\int_{-\theta'}^{2\pi-\theta'} F(\theta'+t)\log\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}\,dt = \frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta'+t)\log\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}\,dt;$$

e perciò sarà:

$$u'_s(\theta'+\varepsilon) - u'_s(\theta') = \frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi} \{F(\theta'+t+\varepsilon) - F(\theta'+t)\}\log\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}\,dt,$$

e l'integrale che qui comparisce potrà al solito considerarsi come esteso al cerchio di raggio uno.

Immaginiamo ora fissati su questo cerchio il punto $t=0$ o $t=2\pi$, e i punti che corrispondono ai valori di t pei quali $F'(\theta'+t)$ è discontinua, uno dei quali potrà anche essere il punto $t=0$ stesso. Siccome questi punti sono in numero finito, potremo racchiuderli in altrettanti intervalli sufficientemente piccoli di ampiezza 2δ, ciascuno dei quali contenga soltanto uno degli stessi punti che potremo supporre esser quello di mezzo; e allora, indicando con $\int_{2\delta}^{(r)}$ gli integrali estesi a questi intervalli, e con $\int_{\sigma_m}$ quelli corrispondenti

(*) Riguardando i valori di $F(\theta)$ come fissati nei punti corrispondenti del contorno, la periodicità si ha sempre quando in ogni punto la funzione è a un sol valore.

agli altri intervalli nei quali $F'(\theta'+t)$ è continua, potremo scrivere:

$$\frac{u'_s(\theta'+\varepsilon)-u'_s(\theta')}{\varepsilon}=\frac{R}{2\pi\varepsilon}\sum\int_{\sigma_m}\{F(\theta'+t+\varepsilon)-F(\theta'+t)\}\log\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}dt+$$

$$+\frac{R}{2\pi\varepsilon}\sum\int_{2\delta}^{(r)}\{F(\theta'+t+\varepsilon)-F(\theta'+t)\}\log\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}dt.$$

Ora si ha evidentemente per le ipotesi fatte:

$$F(\theta'+t+\varepsilon)-F(\theta'+t)=\int_{\theta'+t}^{\theta'+t+\varepsilon}F'(\theta)\,d\theta;$$

quindi se fra $\theta'+t$ e $\theta'+t+\varepsilon$ non cadranno discontinuità di $F'(\theta)$ si avrà:

$$F(\theta'+t+\varepsilon)-F(\theta'+t)=\varepsilon F'(\theta'+t+\alpha\varepsilon) \tag{5}$$

con α positivo e minore di uno, e se fra $\theta'+t$ e $\theta'+t+\varepsilon$ cadranno delle discontinuità di $F'(\theta)$ si avrà semplicemente:

$$F(\theta'+t+\varepsilon)-F(\theta'+t)=\varepsilon\mu$$

essendo μ un numero finito compreso fra il limite superiore e il limite inferiore dei valori di $F'(\theta'+t)$ fra $\theta'+t$ e $\theta'+t+\varepsilon$.

Indicando dunque con μ' il massimo (o limite superiore) fra i valori assoluti di $F'(\theta)$, si avrà in valore assoluto:

$$\frac{R}{2\pi\varepsilon}\sum\int_{2\delta}^{(r)}\{F(\theta'+t+\varepsilon)-F(\theta'+t)\}\log\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}dt<-\frac{R\mu'}{2\pi}\sum\int_{2\delta}^{(r)}\log\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}dt$$

e perciò prendendo δ sufficientemente piccolo la stessa somma potrà rendersi minore di quella quantità che più ci piace.

Supponiamo ora che ε in valore assoluto non raggiunga δ e sia per es.: $<\frac{1}{2}\delta$ essendo δ il numero che ora abbiamo determinato. Allora per gli integrali $\int_{\sigma_m}$ sarà sempre soddisfatta la condizione per la quale si ha la (5); e perciò sarà:

$$\frac{R}{2\pi\varepsilon}\sum\int_{\sigma_m}\{F(\theta'+t+\varepsilon)-F(\theta'+t)\}\log\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}dt=$$

$$=\frac{R}{2\pi}\sum\int F'(\theta'+t+\alpha_m\varepsilon)\log\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}dt,$$

ove α_m è positivo e minore di uno.

Ma siccome negli intervalli σ_m, e così anche negli intervalli che si ottengono estendendo questi di $\frac{1}{2}\delta$ dalle due parti, la funzione $F'(\theta'+t)$ è continua, si può trovare un numero finito e positivo ε_1 tale che per tutti i punti t di questi intervalli e per tutti i valori di ε minori in valore assoluto di ε_1 la differenza $F'(\theta'+t+\varepsilon)-F'(\theta'+t)$ in valore assoluto sia minore di quella quantità β che più ci piace; quindi per questi valori di ε si avrà in valore assoluto:

$$\sum\int_{\sigma_m} F'(\theta'+t+\alpha_m\varepsilon)\log\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}dt-\sum\int_{\sigma_m} F'(\theta'+t)\log\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}dt$$
$$<-\beta\sum\int_{\sigma_m}\log\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}dt,$$

e questo ci permette ora di dire che per i valori di ε inferiori in valore assoluto a una quantità finita convenientemente scelta ε_1 la differenza:

$$\frac{u'(\theta'+\varepsilon)-u'_s(\theta')}{\varepsilon}-\frac{R}{2\pi}\sum\int_{\sigma_m} F'(\theta'+t)\log\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}dt$$

si manterrà minore di quella quantità che più ci piace.

Ma la somma $\sum\int_{\sigma_m} F'(\theta'+t)\log\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}dt$ non differisce da

$$\int_0^{2\pi} F'(\theta'+t)\log\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}dt$$

che per una quantità minore in valore assoluto di $-\mu'\sum\int_{2\delta}^{(r)}\log\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}dt,$

e che quindi può supporsi arbitrariamente piccola; dunque si ha evidentemente:

$$\lim_{\varepsilon=0}\frac{u'_s(\theta'+\varepsilon)-u'_s(\theta')}{\varepsilon}=\frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi} F'(\theta'+t)\log\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}dt,$$

ovvero:

$$\frac{du'_s(\theta')}{d\theta'}=\frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi} F'(\theta'+t)\log\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}dt=\frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi} F'(\theta)\log\operatorname{sen}^2\frac{\theta-\theta'}{2}d\theta$$

e questa mostra appunto, che, colle ipotesi che abbiamo fatte su $F(\theta)$, la derivata della nostra funzione u' al contorno presa nel senso dell'arco è sempre finita e determinata, ed è inoltre continua, giacchè l'integrale che comparisce nel secondo membro ha la stessa forma di quello che comparisce nel valore di u' al contorno e che si dimostrò già essere una funzione continua di θ'.

Questa proprietà potrebbe anche facilmente generalizzarsi.

7. È inoltre da notare che per quanto precede questa derivata $\frac{du'_s}{d\theta'}$ al contorno si può anche riguardare come il valore al contorno della funzione u', per la quale i valori dati della derivata rispetto alla normale interna al contorno stesso fossero quelli della funzione $F'(\theta)$; e questo porta subito a dire che alla funzione u' data dalla (3) al contorno può applicarsi due volte la derivazione rispetto all'arco, quando anche la derivata prima della funzione $F(\theta)$ che corrisponde ai valori dati di $\frac{du}{dp}$ è sempre finita, continua e periodica, e la derivata seconda è anch'essa finita ed è pure continua od ha soltanto un numero finito di discontinuità.

E in generale sarà:

$$\frac{d^m u'_s}{d\theta'^m} = \frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi} F^{(m)}(\theta)\log \operatorname{sen}^2\frac{\theta-\theta'}{2}\,d\theta,$$

quando la funzione $F(\theta)$ oltre a soddisfare alla condizione $\int_0^{2\pi} F(\theta)\,d\theta = 0$ è periodica, finita e continua, essa e le sue derivate fino alla $(m-1)^a$ inclusive, e la derivata m^a è finita ed è pure continua, o ha soltanto un numero finito di discontinuità.

Inoltre si vede facilmente che in queste ipotesi si ha sempre:

$$\lim_{\rho'=R}\left(\frac{d^m u'}{d\theta'^m}\right) = \frac{d^m u'_s}{d\theta'^m}.$$

Farò osservare che questa formola potrebbe dimostrarsi facilmente anche per la funzione della quale sono dati arbitrariamente i valori al contorno, quando questi valori soddisfano a tutte le condizioni che abbiamo indicate per la $F(\theta)$, esclusa quella espressa dalla equazione $\int_0^{2\pi} F(\theta)\,d\theta = 0$. In questo caso però bisogna intendere esclusi i punti θ' corrispondenti alle discontinuità della serie delle derivate m^e dei valori dati, poichè in essi il valore limite di $\frac{d^m u'}{d\theta'^m}$ per $\rho' = R$ è la media fra i due $\frac{d^m u}{d\theta^m}(\theta'+0)$ e $\frac{d^m u}{d\theta^m}(\theta'-0)$.

8. La formola (3) conduce subito anche al valore di u' in serie. Osservando infatti che per $\rho'<R$ si ha:

$$\log\{R^2-2R\rho'\cos(\theta-\theta')+\rho'^2\}=2\log R-2\sum_1^\infty \frac{\rho'^n}{nR^n}\cos n(\theta-\theta'),$$

e la serie del secondo membro, lungo ogni cerchio interno al cerchio dato, è convergente in ugual grado, si troverà subito:

$$u'=-\frac{1}{\pi}\sum_1^\infty \frac{\rho'^n}{nR^{n-1}}\int_0^{2\pi}\frac{du}{dp}\cos n(\theta-\theta')d\theta \qquad (6)$$

per tutti i punti interni al nostro cerchio; e se i valori dati di $\frac{du}{dp}$ costituiranno una funzione, che oltre ad essere finita e continua o avere soltanto un numero finito di discontinuità, è sviluppabile in serie di Fourier per tutti i valori di θ, questa formola varrà anche sul cerchio, giacchè allora essendo convergente la serie $-\frac{1}{\pi}\sum_1^\infty\int_0^{2\pi}\frac{du}{dp}\cos n(\theta-\theta')d\theta$, per un teorema di Abel lo sarà anche la serie $-\frac{1}{\pi}\sum_1^\infty\frac{R}{n}\int_0^{2\pi}\frac{du}{dp}\cos n(\theta-\theta')d\theta$, e la sua somma sarà il limite per $\rho'=R$ della somma u' della serie:

$$-\frac{1}{\pi}\sum_1^\infty\frac{1}{n}\frac{\rho'^n}{R^{n-1}}\int_0^{2\pi}\frac{du}{dp}\cos n(\theta-\theta')d\theta$$

(ove $\rho'<R$), cioè u'_s (*).

In questo caso poi la serie derivata rispetto a ρ' convergerà essa pure anche per $\rho'=R$, e, siccome $\int_0^{2\pi}\frac{du}{dp}ds=0$, salvo le solite singolarità pei

---

(*) È da notare che per questo e perchè u' è continua sul contorno (§ 3) qualunque siano i valori dati di $\frac{du}{d\rho}$ purchè finiti, si può dire che quando $f(\theta)$ è una funzione finita tale che la serie di Fourier corrispondente è sempre convergente, la serie trigonometrica:

$$\sum_1^\infty\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos n(\theta-\theta')d\theta$$

rappresenta sempre una funzione finita e continua di θ'. Ciò risulta subito anche da un teorema che ho dato nel § 5 della mia Memoria sulla serie di Fourier (Ann. delle Univ. Tosc., t. XIV), nel caso però soltanto che la funzione abbia un numero finito di massimi e minimi e di discontinuità, od avendone un numero infinito soddisfi a certe condizioni.

punti di discontinuità dei valori dati $\frac{du}{dp}$ e pei punti estremi 0 e 2π, essa avrà per somma $-\frac{du}{dp}$; e se $\frac{du}{dp}$ sarà finita, continua, e periodica e ammetterà una derivata finita e sviluppabile in serie di Fourier, allora la serie che si ottiene, applicando la derivazione termine a termine rispetto a θ' alla serie che rappresenta u, ci darà il valore di $\frac{du'}{d\theta'}$, non solo pei punti interni ma anche pei punti del contorno; giacchè questa serie derivata sul contorno è la seguente:

$$-\frac{1}{\pi}\sum_1^\infty \int_0^{2\pi} \frac{du}{dp} \operatorname{sen} n(\theta-\theta')\, d\theta;$$

e questa, ponendo $\frac{du}{dp} = F(\theta)$, e integrando per parti nei differenti termini si trasforma nell'altra:

$$-\frac{1}{\pi}\sum_1^\infty \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} F'(\theta) \cos n(\theta-\theta')\, d\theta,$$

la quale essendo convergente ed essendo quella che corrisponde ai valori al contorno della funzione per la quale i valori dati di $\frac{du}{dp}$ sono quelli di $F'(\theta)$, rappresenta appunto (§ 6) la derivata rispetto a θ' dei valori che si hanno al contorno per la funzione u'.

9. Il metodo che abbiamo seguito pel caso di un cerchio si applica subito anche al caso di due cerchi concentrici s e s'.

Indichiamo infatti con R e R' i raggi di questi cerchi, e supponiamo che s sia il cerchio maggiore, e $\frac{du}{dp_s}$ e $\frac{du}{dp_{s'}}$ siano i valori dati di $\frac{du}{dp}$ su s e su s', e siano finiti e continui e periodici e soddisfino alle note condizioni che si richiedono per essere sviluppabili in serie di Fourier, cioè abbiano un numero finito di massimi e minimi o avendone un numero infinito soddisfino alla condizione $\lim D \log \delta = 0$, essendo D l'oscillazione nell'intervallo δ. Osservando che ora questi valori di $\frac{du}{dp_s}$ e $\frac{du}{dp_{s'}}$ devono soddisfare alla condizione $\int_s \frac{du}{dp_s} ds = -\int_{s'} \frac{du}{dp_{s'}} ds'$, e i valori della funzione $\rho' \frac{du'}{d\rho'}$ sul cerchio s

verranno ora ad essere $-R\frac{du}{dp_s}$ e sul cerchio s' saranno $R'\frac{du}{dp_{s'}}$, si potrà dire senz'altro (v. mia Mem. *Sulle funz. di una variab. comp.* in questi Annali tom. IV: o SCHWARZ mem. cit.) che se la funzione cercata esiste, il valore della funzione $\rho'\frac{du'}{d\rho'}$ nel punto (ρ', θ') interno al campo che si considera sarà dato dalla formola:

$$\left.\begin{aligned}\rho'\frac{du'}{d\rho'} = -\frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{du}{dp_s}d\theta - \frac{R}{\pi}\sum_1^\infty\frac{R^n}{\rho'^n}\frac{\rho'^{2n}-R'^{2n}}{R^{2n}-R'^{2n}}\int_0^{2\pi}\frac{du}{dp_s}\cos n(\theta-\theta')\,d\theta + \\ + \frac{R'}{\pi}\sum_1^\infty\frac{R'^n}{\rho'^n}\frac{R^{2n}-\rho'^{2n}}{R^{2n}-R'^{2n}}\int_0^{2\pi}\frac{du}{dp_{s'}}\cos n(\theta-\theta')\,d\theta.\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Ora se si osserva che i coefficienti $\frac{R^n}{\rho'^n}\frac{\rho'^{2n}-R'^{2n}}{R^{2n}-R'^{2n}}$, $\frac{R'^n}{\rho'^n}\frac{R^{2n}-\rho'^{2n}}{R^{2n}-R'^{2n}}$ possono scriversi rispettivamente:

$$\frac{\frac{\rho'^n}{R^n}}{1-\frac{R'^{2n}}{R^{2n}}} - \frac{\frac{R'^n}{R^n}\frac{R'^n}{\rho'^n}}{1-\frac{R'^{2n}}{R^{2n}}}, \quad \frac{\frac{R'^n}{\rho'^n}}{1-\frac{R'^{2n}}{R^{2n}}} - \frac{\frac{R'^n}{R^n}\frac{\rho'^n}{R^n}}{1-\frac{R'^{2n}}{R^{2n}}},$$

e le serie:

$$\sum_1^\infty\int_0^{2\pi}\frac{du}{dp_s}\cos n(\theta-\theta')\,d\theta, \quad \sum_1^\infty\int_0^{2\pi}\frac{du}{dp_{s'}}\cos n(\theta-\theta')\,d\theta,$$

per le ipotesi fatte sui valori dati di $\frac{du}{dp_s}$ e $\frac{du}{dp_{s'}}$ sono convergenti in ugual grado (*), applicando il solito teorema di ABEL si vedrà subito che il valore precedente di $\rho'\frac{du'}{d\rho'}$ risulta dall'aggregato di quattro serie che sono convergenti in ugual grado in tutto il campo (il contorno inclus.), e questo mentre ci mostra che il valore stesso di $\rho'\frac{du'}{d\rho'}$ è sempre finito e continuo e sul

---

(*) La proprietà di cui qui si fa uso che le serie di FOURIER corrispondenti a funzioni come le $\frac{du}{dp_s}$ e $\frac{du}{dp_{s'}}$ sono convergenti in ugual grado fu data da HEINE pel caso in cui queste funzioni oltre essere finite e continue hanno un numero finito di massimi e minimi. Essa però si estende facilmente anche al caso delle funzioni finite e continue che hanno un numero infinito di massimi e minimi e soddisfano alla condizione $\lim D\log\delta = 0$, essendo D l'oscillazione della funzione nell'intervallo δ.

contorno s, s' prende rispettivamente i valori $-R\frac{du}{dp_s}$ e $R'\frac{du}{dp_{s'}}$, ci mostra altresì che si può dividere per ρ' la equazione (7) e poi applicare l'integrazione per serie lungo un raggio qualunque $\theta'=\text{cost.}$ da un punto qualunque di questo raggio fino al punto $\rho=\rho'$, purchè questi punti siano entrambi contenuti entro il campo dato e anche sul contorno.

Si avrà dunque, eseguendo questa integrazione

$$u'=-R\frac{\log\rho'}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{du}{dp_s}d\theta-\frac{R}{\pi}\sum_1^\infty\frac{R^n}{n\rho'^n}\frac{\rho'^{2n}+R'^{2n}}{R^{2n}-R'^{2n}}\int_0^{2\pi}\frac{du}{dp_s}\cos n(\theta-\theta')\,d\theta+$$
$$-\frac{R'}{\pi}\sum_1^\infty\frac{R'^n}{n\rho'^n}\frac{\rho'^{2n}+R^{2n}}{R^{2n}-R'^{2n}}\int_0^{2\pi}\frac{du}{dp_{s'}}\cos n(\theta-\theta')\,d\theta+F(\theta'),$$

e poichè u' deve soddisfare alla equazione $\Delta^2 u'=0$ e essere a un sol valore, si dovrà avere $F(\theta')=\text{cost}$; e perciò sarà all'infuori di una costante:

$$u'=-R\frac{\log\rho'}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{du}{dp_s}d\theta-\frac{R}{\pi}\sum_1^\infty\frac{R^n}{n\rho'^n}\frac{\rho'^{2n}+R'^{2n}}{R^{2n}-R'^{2n}}\int_0^{2\pi}\frac{du}{dp_s}\cos n(\theta-\theta')\,d\theta-$$
$$-\frac{R'}{\pi}\sum_1^\infty\frac{R^n}{n\rho'^n}\frac{\rho'^{2n}+R^{2n}}{R^{2n}-R'^{2n}}\int_0^{2n}\frac{du}{dp_{s'}}\cos n(\theta-\theta')\,d\theta.$$

Ora facendo sulle serie che compariscono in questo valore di u' osservazioni simili a quelle che abbiamo fatte sopra per le serie che compariscono in $\rho'\frac{du'}{d\rho'}$, si vede subito che la funzione u' così determinata è finita continua e ad un sol valore nell'interno di C, e si mantiene tale anche avvicinandosi indefinitamente al contorno e sul contorno stesso. D'altra parte le sue derivate entro C soddisfano evidentemente alle condizioni che abbiamo poste, e dal modo con cui essa è stata trovata risulta anche che la sua derivata rispetto alla normale resta finita e continua anche avvicinandosi indefinitamente al contorno e sul contorno prende i valori dati; quindi essa è appunto la funzione cercata.

Per la derivata $\frac{du'}{d\theta'}$ si hanno ancora le stesse proprietà che nel caso precedente.

10. Lo stesso processo può seguirsi per la determinazione della funzione u che nell'interno di una sfera è finita continua e a un sol valore

essa e le sue derivate e soddisfa alla equazione $\Delta^2 u=\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}=0$, e avvicinandosi indefinitamente al contorno si mantiene sempre finita e resta, almeno generalmente, anche continua sì essa che la sua derivata $\frac{du}{dp}$ rispetto alla normale p al contorno contata verso l'interno, e al contorno questa derivata prende valori finiti dati ad arbitrio e che hanno tutt'al più un numero finito di discontinuità, e soddisfano alla condizione:

$$\int_\sigma \frac{du}{dp}d\sigma=0$$

ove l'integrale è esteso alla superficie σ della sfera.

Si osservi perciò che anche in questo caso se u soddisfa alla equazione $\Delta^2 u=0$, la funzione $\rho\frac{du}{d\rho}$ vi soddisfarà pure, e quindi se R è il raggio della sfera, pel punto (ρ', θ', ϕ') interno ad essa, si avrà come è noto:

$$\rho'\frac{du'}{d\rho'}=\frac{1}{4\pi R}\int_\sigma\left(\rho\frac{du}{d\rho}\right)_{\rho=R}\frac{(R^2-\rho'^2)d\sigma}{(R^2-2R\rho'\cos\gamma+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ove l'integrale è esteso alla superficie σ della sfera di raggio R, $d\sigma$ è l'elemento superficiale $R^2\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi$ di questa sfera nel punto (R, θ, ϕ), e γ è l'angolo dei raggi vettori del punto (ρ', θ', ϕ') e del punto (R, θ, ϕ), talchè si ha:

$$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\cos(\phi-\phi').$$

Ora, osservando che $\left(\rho\frac{du}{d\rho}\right)_{\rho=R}=-R\frac{du}{dp}$, si ha di qui:

$$\frac{du'}{d\rho'}=-\frac{1}{4\pi}\int_\sigma\frac{du}{dp}\frac{d\sigma}{\rho'(R^2-2R\rho'\cos\gamma+\rho'^2)^{\frac{1}{2}}}-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_\sigma\frac{du}{dp}\frac{d}{d\rho'}\left\{\frac{1}{(R^2-2R\rho'\cos\gamma+\rho'^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}d\sigma,$$

quindi applicando l'integrazione rispetto a ρ' sotto il segno integrale, e osservando che:

$$\int\frac{d\rho'}{\rho'(R^2-2R\rho'\cos\gamma+\rho'^2)^{\frac{1}{2}}}=$$
$$-\frac{1}{R}\log\{R-\rho'\cos\gamma+(R^2-2R\rho'\cos\gamma+\rho'^2)^{\frac{1}{2}}\}+\frac{\log\rho'}{R}+\text{cost},$$

e $\int_\sigma \frac{du}{dp} d\sigma=0$, si troverà, all'infuori di una costante:

$$u'=\frac{1}{4\pi R}\int_\sigma \frac{du}{dp}\left\{\log\left\{R-\rho'\cos\gamma+(R^2-2R\rho'\cos\gamma+\rho'^2)^{\frac{1}{2}}\right\}-\right.$$
$$\left.-\frac{2R}{(R^2-2R\rho'\cos\gamma+\rho'^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}d\sigma;$$

e, ora quando si facessero su questo valore di u' le opportune verificazioni, si troverebbe che esso soddisfa a tutte le condizioni che abbiamo poste ed è in conseguenza la funzione cercata.

11. Tralasceremo di fare queste verificazioni, e passeremo invece a cercare il valore di u' in serie di funzioni sferiche, limitandoci per semplicità al caso in cui i valori dati di $\frac{du}{dp}$ costituiscono una funzione che è finita e continua e che su ogni linea della sfera ha un numero finito di massimi e minimi, o avendone un numero infinito è tale che le sue oscillazioni in vicinanza dei punti ove si hanno questi infiniti massimi e minimi sono di ordine uguale o superiore al primo rispetto all'intervallo in cui si prendono.

Per questo osserviamo che se esiste la funzione u' che noi cerchiamo, per la funzione $\rho'\frac{du'}{d\rho'}$ nel punto (ρ', θ', ϕ') deve aversi, come è noto:

$$\rho'\frac{du'}{d\rho'}=\frac{1}{4\pi}\sum_0^\infty(2n+1)\frac{\rho'^n}{R^{n-1}}\int_\omega\left(\frac{du}{d\rho}\right)_{\rho=R}P_n d\omega,$$

essendo $d\omega$ l'elemento superficiale $\operatorname{sen}\theta d\theta d\phi$ della sfera ω di raggio uno, e essendo P_n le note funzioni sferiche di Legendre; e poichè si ha:

$$\left(\frac{du}{d\rho}\right)_{\rho=R}=-\frac{du}{dp},\ \text{e} \int_\omega \frac{du}{dp}d\omega=0,$$

dovrà essere:

$$\frac{du'}{d\rho'}=-\frac{1}{4\pi}\sum_1^\infty(2n+1)\frac{\rho'^{n-1}}{R^{n-1}}\int_\omega\frac{du}{dp}P_n d\omega. \tag{8}$$

Ora se si osserva che, per quanto dimostro in una Memoria che pubblicherò quanto prima sulle serie di funzioni sferiche, la funzione data $\frac{du}{dp}$, soddisfacendo alle condizioni dette sopra, è sempre sviluppabile in serie di funzioni sferiche, e la serie corrispondente:

$$\frac{1}{4\pi}\sum_1^\infty (2n+1)\int_\omega \frac{du}{dp} P_n d\omega$$

è convergente in ugual grado su tutta la superficie della sfera, si concluderà subito che la serie che comparisce nella formola precedente è convergente in egual grado in tutto lo spazio racchiuso dalla sfera e sulla sfera stessa; e questo oltre a mostrarci che, qualunque siano i valori dati di $\frac{du}{dp}$, purchè soddisfino alle condizioni dette sopra, il valore precedente di $\frac{du'}{d\rho'}$ è sempre finito e continuo in tutto il campo (il contorno inclus.) e sulla superficie prende i valori dati, ci mostra altresì che alla serie che comparisce in $\frac{du'}{d\rho'}$ può applicarsi termine a termine l'integrazione definita lungo un raggio qualunque della sfera da $\rho' = 0$ a $\rho' = \rho'$, essendo $\rho' \leq R$.

Applicando questa integrazione si trova:

$$u' = -\frac{1}{2\pi}\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n}\frac{\rho'^n}{R^{n-1}}\int_\omega \frac{du}{dp} P_n d\omega;$$

e ora basta fare le opportune verificazioni per concludere che questa formola, all'infuori di una costante, determina la funzione cercata u' per tutti i punti interni alla sfera e sulla sfera stessa.

Per questo si osservi che siccome la serie:

$$\frac{1}{4\pi}\sum_1^\infty (2n+1)\int_\omega \frac{du}{dp} P_n d\omega$$

converge in ugual grado su tutta la superficie della sfera, altrettanto accadrà dell'altra:

$$\frac{1}{4\pi}\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n}\int_\omega \frac{du}{dp} P_n d\omega,$$

e quindi si può dire intanto che la funzione u', oltre ad essere finita e continua nell'interno della sfera si mantiene tale anche avvicinandosi indefinitamente alla superficie stessa. Inoltre poichè la funzione $\rho'^n P_n$ come funzione di ρ', θ', ϕ' soddisfa alle condizioni che si richiedono per u' nell'interno della sfera, altrettanto accadrà di u'; e poichè pel modo con cui u' è stata dedotta dal valore (8) di $\frac{du'}{d\rho'}$ si vede subito che anche alla superficie sono soddisfatte le condizioni cui deve soddisfare la derivata rispetto alla normale interna, si conclude che u' soddisfa a tutte le condizioni che si sono poste ed è in conseguenza la funzione cercata.

Inoltre è da notare che, se $\frac{du}{dp}$ è una funzione di θ e ϕ, $F(\theta, \phi)$, che rispetto a ϕ ammette una derivata $\frac{dF}{d\varphi}$ che soddisfa alle condizioni stesse che si sono poste per $\frac{du}{dp}$, la funzione u' ammetterà anche alla superficie una derivata rispetto a ϕ' che sarà finita e continua e il cui valore si otterrà applicando la derivazione termine a termine rispetto a ϕ' alla serie corrispondente:

$$-\frac{1}{4\pi}\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n}\int_\omega \frac{du}{dp} P_n d\omega.$$

Se si osserva infatti che questa serie derivata rispetto a ϕ' è la seguente:

$$-\frac{1}{4\pi}\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n}\int_\omega \frac{du}{dp}\frac{dP_n}{d\varphi'} d\omega,$$

si vedrà subito che, applicando ai varii termini di essa la integrazione per parti rispetto a ϕ, coll'osservare che dalle note espressioni di P_n si ha:

$$\frac{dP_n}{d\varphi'} = -\frac{dP_n}{d\varphi},$$

essa si trasforma nell'altra:

$$-\frac{1}{4\pi}\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n}\int_\omega \frac{dF}{d\varphi} P_n d\omega,$$

che è convergente in ugual grado; e quindi per teoremi noti sulle serie derivate si concluderà subito che la sua somma è finita e continua ed è appunto la derivata della somma della serie:

$$-\frac{1}{4\pi}\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n}\int_\omega \frac{du}{dp} P_n d\omega,$$

come volevamo dimostrare.

12. Mi piace ora d'indicare un metodo generale che spesso può servire per la determinazione di una funzione u di due variabili reali x e y che nell'interno di un campo connesso C soddisfa alle solite condizioni, e al contorno è tale che la sua derivata $\frac{du}{dp}$ rispetto alla normale interna prende dati valori che soddisfano alla condizione $\int \frac{du}{dp} ds=0$.

Per questo consideriamo insieme alla funzione u la funzione v che nell'interno di C soddisfa alle due condizioni:

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{du}{dy}, \quad \frac{dv}{dy}=\frac{du}{dx}.$$

Questa funzione v pei punti interni di C sarà data dalla equazione:

$$v=c+\int_\sigma \left(\frac{du}{dx}dy-\frac{du}{dy}dx\right),$$

ove c è una costante arbitraria e σ è una curva qualunque entro C che da un punto determinato (x_0, y_0) va al punto (x, y); quindi la funzione v che entro C corrisponde ad una data funzione u sarà unica e sarà finita e continua essa e le sue derivate e soddisfarà alla equazione $\Delta^2 v=0$, e le sue derivate saranno sempre anche a un sol valore. Inoltre la stessa v sarà essa pure a un sol valore se il campo C è semplicemente connesso, e sarà tale anche quando C non sia semplicemente connesso se la funzione u soddisfarà a certe condizioni speciali; e la stessa v si manterrà finita e continua insieme alle sue derivate prime, anche avvicinandosi indefinitamente al contorno di C e sul contorno stesso quando ciò avvenga per u e per le sue derivate prime.

Viceversa quando sia data v, la funzione corrispondente u si avrà dalla formola:

$$u=c+\int_\sigma \left(\frac{dv}{dy}dx-\frac{dv}{dx}dy\right).$$

Ora, venendo ad essere $u+iv$ una funzione w monodroma finita e continua della variabile complessa $z=x+iy$, se si immaginano x e y e quindi u e v espresse per l'arco s di una delle curve del contorno di C (o di una curva qualunque entro C) e per la normale p a questa curva contata verso l'interno, si ha, come è noto:

$$\frac{dw}{dp}+i\frac{dw}{ds}=0,$$

ovvero:

$$\frac{du}{dp} = \frac{dv}{ds}, \quad \frac{du}{ds} = -\frac{dv}{dp},$$

per tutti i punti interni a C e anche al contorno se allora $\frac{du}{dx}$ e $\frac{du}{dy}$ si mantengono finite e continue; quindi se rapporto a u si conoscono i valori di $\frac{du}{dp}$ al contorno, e questi sono tali che le derivate $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ risultino finite e continue anche al contorno, rapporto a v al contorno si conosceranno quelli di $\frac{dv}{ds}$ e quindi anche quelli di v all'infuori di una costante c_s che può essere differente sui differenti pezzi s del contorno; e questi valori di v soddisfaranno alla condizione $\int \frac{dv}{ds} ds = 0$.

Ora s'immagini determinata la funzione v_1 che nell'interno di C soddisfa alle solite condizioni e sul contorno prende i valori $c_s + \int_0^s \frac{du}{dp} ds$. Questa funzione v_1, per ogni sistema di valori delle costanti c_s, sarà unica e a un sol valore; e quindi se la funzione cercata u esisterà e, oltre ad avere le derivate prime finite e continue anche al contorno, sarà tale che la funzione v che le corrisponde sia essa pure a un sol valore, questa funzione v sarà una delle funzioni v_1 che si otterrà particolarizzando convenientemente le costanti c_s, e perciò si avrà allora per la funzione cercata u:

$$u = c + \int_\sigma \left(\frac{dv_1}{dy} dx - \frac{dv_1}{dx} dy \right), \tag{9}$$

ove c è una costante e l'integrale è esteso a una curva qualunque σ che mantenendosi sempre nell'interno di C va dal punto determinato (x_0, y_0) al punto variabile (x, y). Se poi la funzione cercata u non esistesse, o se la funzione v corrispondente non potesse essere a un sol valore, allora v_1, essendo a un sol valore, non potrebbe essere questa funzione v, e il valore di u dato dalla (9) non sarebbe quello cercato, e esso perciò non risulterebbe monodromo, o la funzione v_1 non avrebbe le derivate prime finite e continue al contorno; quindi si può dire che determinata in ogni caso una funzione v_1 colla condizione che al contorno prenda i valori $c_s + \int_0^s \frac{du}{dp} ds$

ove le quantità c_s sono costanti che possono essere differenti sui differenti pezzi del contorno, se questa funzione al contorno avrà anche le derivate prime finite e continue, e se le costanti c_s potranno determinarsi in modo che la funzione u data dalla (9) risulti a un sol valore, questa funzione u sarà appunto la funzione cercata (*).

È da notare che quando le derivate di v_1 al contorno risultassero infinite, potrebbe però avvenire che la funzione u data dalla (9) fosse ancora la funzione cercata, e per decidere la questione basterebbe fare le opportune verificazioni.

Inoltre è da notare che nel caso che il campo C sia semplicemente connesso, la condizione di monodromia della funzione (9) è sempre soddisfatta.

Applicando il metodo che risulta dalle considerazioni esposte alla ricerca della funzione u nel caso del cerchio si trovano le formole dei §§ 1 e 8, e applicandole al caso di due cerchi, si ritrova ancora la formola del § 9 tutte le volte che sia soddisfatta la condizione $\int \frac{du}{dp_s} ds = 0$, che è quella della monodromia tanto per la funzione u data dalla (9) quanto per la funzione che abbiamo indicato con v.

Il prof. Betti aveva in sostanza già usato questo metodo per determinare la distribuzione delle correnti elettriche in una lastra rettangolare. (Nuovo Cimento, ser. II, vol. III). Aggiungo che, se ben mi ricordo, il sig. Prym mi diè cenno di questo metodo in una recente conversazione che ebbi il piacere di tenere con lui intorno ai risultati che io aveva allora ottenuti.

13. Passiamo ora a mostrare come il metodo che abbiamo seguito per determinare, nel caso del cerchio, di due cerchi o della sfera, la funzione u che soddisfa alle solite condizioni quando sono dati i valori di $\frac{du}{dp}$ al contorno, serve anche per la determinazione della funzione u per gli stessi campi

(*) Che la funzione u sia unica quando essa e la derivata $\frac{du}{dp}$ devono essere sempre finite anche avvicinandosi indefinitamente al contorno, e devono restare continue per tutto tranne nei punti di discontinuità dei valori dati (che supponiamo in numero finito), risulta subito dalla formola nota:

$$\int u \frac{du}{dp} d\sigma = -\int\int \left\{ \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 \right\} dx\, dy,$$

ove l'integrale del primo membro è esteso a una curva vicina quanto si vuole al contorno, e quello del secondo è esteso al campo racchiusa da questa curva.

quando si richiede che nell'interno siano soddisfatte le solite condizioni, e avvicinandosi indefinitamente al contorno e sul contorno stesso la funzione e la sua derivata $\frac{du}{dp}$ si mantengano finite e generalmente anche continue, e sul contorno una data funzione lineare $\alpha u - \beta \frac{du}{dp}$ di u e di $\frac{du}{dp}$ prenda valori ξ dati ad arbitrio.

Studiamo più specialmente il caso del cerchio, e supponiamo che i valori dati ξ costituiscano una funzione finita e continua o avente soltanto un numero finito di discontinuità e sviluppabile in serie di FOURIER.

Considerando la funzione $U = \alpha u + \frac{\beta}{R} \frac{\rho du}{d\rho}$, si vede subito che nell'interno del cerchio dovrà essere finita e continua e a un sol valore essa e le sue derivate e dovrà soddisfare alla equazione $\Delta^2 U = 0$; quindi (servendosi dello sviluppo in serie che è più comodo) dovrà essere:

$$\alpha u' + \frac{\beta}{R} \frac{\rho' du'}{d\rho'} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\alpha u + \frac{\beta}{R} \frac{\rho du}{d\rho} \right)_{\rho=R} d\theta + \\ + \frac{1}{\pi} \sum_1^\infty \frac{\rho'^n}{R^n} \int_0^{2\pi} \left(\alpha u + \frac{\beta}{R} \frac{\rho du}{d\rho} \right)_{\rho=R} \cos n(\theta - \theta') d\theta,$$

e poichè sul contorno deve aversi:

$$\alpha u + \frac{\beta}{R} \frac{\rho du}{d\rho} = \alpha u - \beta \frac{du}{dp} = \xi,$$

sarà:

$$\alpha u' + \frac{\beta}{R} \frac{\rho' du'}{d\rho'} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi d\theta + \frac{1}{\pi} \sum_1^\infty \frac{\rho'^n}{R^n} \int_0^{2\pi} \xi \cos n(\theta - \theta') d\theta,$$

ovvero, supponendo β diverso da zero:

$$\frac{R\alpha}{\beta} u' + \frac{\rho' du'}{d\rho'} = \frac{R}{2\beta\pi} \int_0^{2\pi} \xi d\theta + \frac{R}{\beta\pi} \sum_1^\infty \frac{\rho'^n}{R^n} \int_0^{2\pi} \xi \cos n(\theta - \theta') d\theta;$$

e, per le ipotesi fatte su ξ, la serie del secondo membro sarà convergente in tutto il campo incluso il contorno, e lungo ogni raggio dal centro al contorno inclusive sarà anche convergente in ugual grado, e separati con piccoli spazii superficiali i punti di discontinuità di ξ, nello spazio restante essa sarà anche continua e sul contorno prenderà i valori dati ξ.

Consideriamo ora separatamente i due casi di $\frac{\alpha}{\beta}$ positivo e $\frac{\alpha}{\beta}$ negativo, trascurando il caso di $\frac{\alpha}{\beta}=0$ che già è stato qui considerato.

Osserviamo che, se si pone $R\frac{\alpha}{\beta}=k$, e si moltiplica per ρ'^{k-1}, si ha dalla precedente:

$$\frac{d}{d\rho'}(\rho'^k u')=\frac{R\rho'^{k-1}}{2\pi\beta}\int_0^{2\pi}\xi d\theta+\frac{R}{\pi\beta}\sum_1^\infty\frac{\rho'^{n+k-1}}{R^n}\int_0^{2\pi}\xi\cos n(\theta-\theta')d\theta; \qquad (10)$$

si vedrà subito che quando $\frac{\alpha}{\beta}$ o k è positivo, integrando lungo il raggio $\theta'=$cost. dal punto $\rho'=0$ fino al punto $\rho'=\rho'$, essendo $\rho'\leq R$, e osservando che la costante d'integrazione deve prendersi uguale a zero, si ha:

$$\rho'^k u'=\frac{R\rho'^k}{2\pi\beta k}\int_0^{2\pi}\xi d\theta+\frac{R}{\pi\beta}\sum_1^\infty\frac{\rho'^{n+k}}{(n+k)R^n}\int_0^{2\pi}\xi\cos n(\theta-\theta')d\theta,$$

e quindi infine:

$$u'=\frac{1}{2\pi\alpha}\int_0^{2\pi}\xi d\theta+\frac{R}{\pi\beta}\sum_1^\infty\frac{\rho'^n}{\left(n+R\frac{\alpha}{\beta}\right)R^n}\int_0^{2\pi}\xi\cos n(\theta-\theta')d\theta, \qquad (11)$$

pel valore di u' in un punto qualunque (ρ', θ') interno a C o sul contorno, quando $\frac{\alpha}{\beta}$ sia positivo; e poichè colle solite osservazioni e con quelle fatte nella nota al § 8, si trova che questo valore di u' è finito e continuo in tutto il campo C incluso il contorno e soddisfa a tutte le altre condizioni che si sono poste, si conclude che esso è appunto il valore cercato di u' nel caso che ora consideriamo di α e β dello stesso segno.

Consideriamo ora il caso in cui α e β sono di segno contrario, e supponiamo dapprima che il rapporto $R\frac{\alpha}{\beta}$ non sia un numero intero negativo.

Allora integrando al solito la equazione (10) lungo il raggio $\theta'=$cost. dal punto $\rho'=\rho_0$ al punto $\rho'=\rho'$, ove ρ_0 non è zero e $\rho'\leq R$, si trova:

$$u'=\frac{1}{2\pi\alpha}\int_0^{2\pi}\xi d\theta+\frac{R}{\pi\beta}\sum_1^\infty\frac{\rho'^n}{\left(n+R\frac{\alpha}{\beta}\right)R^n}\int_0^{2\pi}\xi\cos n(\theta-\theta')d\theta+\frac{F(\theta')}{\rho'^k},$$

essendo $F(\theta')$ una funzione di θ' che oltre ad essere finita continua e a un sol valore insieme alle sue derivate per tutti i valori di θ' e avere il periodo 2π, deve essere tale che la funzione $\frac{F(\theta')}{\rho'^k}$ soddisfi alla equazione $\Delta^2 = 0$.

Ma ciò non può ottenersi (perchè k non è intero) a meno che non sia $F(\theta') = 0$; quindi anche in questo caso si ha la (11) che soddisfa ancora a tutte le condizioni poste.

Se poi k è un numero intero negativo $-m$, allora si avrà dalla (10):

$$u' = \frac{1}{2\pi\alpha}\int_0^{2\pi} \xi\, d\theta + \frac{R}{\pi\beta}\sum_1^{m-1} \frac{\rho'^n}{\left(n + R\frac{\alpha}{\beta}\right)R^n}\int_0^{2\pi} \xi \cos n(\theta - \theta')\, d\theta +$$

$$+ \frac{\rho'^m \log \rho'}{\pi\beta R^{n-1}}\int_0^{2\pi} \xi \cos m(\theta - \theta')\, d\theta + \frac{R}{\pi\beta}\sum_{m+1}^{\infty} \frac{\rho'^n}{\left(n + R\frac{\alpha}{\beta}\right)R^n}\int_0^{2\pi} \xi \cos n(\theta - \theta')\, d\theta +$$

$$+ F(\theta')\rho'^m,$$

essendo $F(\theta')$ una funzione di θ' che, oltre ad essere finita, continua e a sol valore essa e le sue derivate per tutti i valori di θ' e avere il periodo 2π, deve esser tale che la funzione:

$$U = \frac{\rho'^m \log \rho'}{\pi\beta R^{n-1}}\int_0^{2\pi} \xi \cos m(\theta - \theta')\, d\theta + F(\theta')\rho'^m$$

soddisfi alla equazione $\Delta^2 U = 0$.

Ma per queste condizioni si può porre:

$$\int_0^{2\pi} \xi \cos m(\theta - \theta')\, d\theta = \lambda_m \cos m\theta' + \mu_m \operatorname{sen} m\theta'$$

$$F(\theta') = \sum_0^{\infty}(a_n \cos n\theta' + b_n \operatorname{sen} n\theta')$$

e alla serie di Fourier, che qui abbiamo presa per rappresentare $F(\theta')$, può applicarsi la derivazione quante volte si vuole; quindi si vede subito che tutte le condizioni precedenti non possono soddisfarsi a meno che λ_m e μ_m non siano nulli e $F(\theta')$ non si riduca alla forma:

$$a_m \cos m\theta' + b_m \operatorname{sen} m\theta';$$

e poichè quando queste condizioni siano soddisfatte il valore precedente di u' prende la forma:

$$\left.\begin{aligned} u' = \frac{1}{2\pi\alpha}\int_0^{2\pi} \xi\, d\theta + \frac{R}{\pi\beta}\sum_1^{\infty}{}^{m)} \frac{\rho'^n}{\left(n + R\frac{\alpha}{\beta}\right)R^n}\int_0^{2\pi} \xi \cos n(\theta - \theta')\, d\theta + \\ + \rho'^m(a_m \cos m\theta' + b_m \operatorname{sen} m\theta') \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

ove nella serie $\sum_1^\infty{}_{(m)}$ deve lasciarsi il termine corrispondente a $n = -R\frac{\alpha}{\beta} = m$, e questo valore soddisfa a tutte le condizioni che si sono poste, si conclude che in questo caso la funzione u' data dalla formola precedente (12) è appunto quella richiesta.

Si può dire adunque che nel caso in cui $R\frac{\alpha}{\beta}$ non è un intero negativo la funzione richiesta u' esiste, ed è pienamente determinata qualunque siano i valori dati ξ di $\alpha u - \beta \frac{du}{dp}$ al contorno, purchè questi valori siano sviluppabili in serie di Fourier, e la sua espressione analitica si ha dalla (11); e quando $R\frac{\alpha}{\beta}$ sia un intero negativo $-m$, i valori ξ non potranno essere dati arbitrariamente ma dovranno soddisfare alle due condizioni:

$$\int_0^{2\pi} \xi \cos m\theta \, d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \xi \operatorname{sen} m\theta \, d\theta = 0;$$

e quando queste condizioni siano soddisfatte, la funzione u' esisterà ancora e sarà data dalla (12) ove a_m e b_m sono costanti arbitrarie, e quindi essa non sarà del tutto determinata, e per renderla tale potremo dare per es. arbitrariamente il valore della funzione in due punti diversi dal centro del cerchio.

È poi da notare che anche nel caso attuale i valori di u' al contorno costituiscono una funzione continua di θ'; e se i valori dati di ξ apparterranno ad una funzione di θ finita, continua e periodica che ammette una derivata ξ', sviluppabile essa pure in serie di Fourier, agli stessi valori di u' al contorno potrà applicarsi la derivazione anche rispetto a θ', e questa derivata sarà finita e continua, e corrisponderà ai valori al contorno della funzione u', per la quale i valori dati di $\alpha u - \beta\frac{du}{dp}$ sono quelli della funzione ξ'.

In modo simile si tratta il caso di due cerchi concentrici e quello della sfera.

Nel caso della sfera, quando i valori ξ costituiscono una funzione finita e continua in tutti i punti e che, se su qualche linea ha un numero infinito di massimi e minimi, le sue oscillazioni in vicinanza dei punti corrispondenti sono di ordine uguale o superiore al primo rispetto all'intervallo in cui si prendono, il valore della funzione u' viene dato dalla formola:

$$u'=\frac{R}{4\pi\beta}\sum_0^\infty \frac{\rho'^n}{\left(n+R\frac{\alpha}{\beta}\right)R^n}\int_\omega \xi P_n d\omega, \tag{13}$$

quando $R\frac{\alpha}{\beta}$ non è un numero intero negativo; e se $R\frac{\alpha}{\beta}$ è un numero intero negativo $-m$, allora bisogna che si abbia:

$$\int_\omega \xi P_m d\omega = 0,$$

e il valore u' prende allora la forma:

$$u'=\frac{R}{4\pi\beta}\sum_0^{\infty}{}_{(m)} \frac{\rho'^n}{\left(n+R\frac{\alpha}{\beta}\right)R^n}\int_\omega \xi P_n d\omega + \rho'^m Y'_m,$$

ove Y'_m è la funzione sferica generale dell'ordine m, e nella serie $\sum_0^\infty{}_{(m)}$ deve lasciarsi il termine corrispondente a $n=-R\frac{\alpha}{\beta}=m$.

È da notare che quando $R\frac{\alpha}{\beta}$ è positivo, le formole precedenti risolvono il problema della determinazione delle temperature stazionarie in un disco circolare di grossezza trascurabile, quando non si disperde calore perpendicolarmente al disco, o nel cilindro circolare pieno di lunghezza indefinito quando la temperatura è la stessa in tutti i punti della stessa parallela all'asse, e nella sfera, quando il contorno del disco o la superficie del cilindro e della sfera sono all'aria libera che ha una data temperatura $\frac{\xi}{\alpha}\cdot$ Esse poi conducono alla soluzione dello stesso problema anche pel caso che in un punto del disco o della sfera o lungo una retta parallela all'asse nel cilindro vi sia una sorgente calorifica costante, giacchè per i valori di u' corrispondenti a questi casi basta, trattandosi del disco o del cilindro, aggiungere al secondo membro della formola (11) il termine $A\log\delta$ e cambiarvi ξ in $\xi - A\left(\alpha\log\delta+\frac{\beta}{\delta}\frac{d\delta}{d\rho'}\right)_{\rho'=R}$, e trattandosi della sfera aggiungere al secondo membio della (13) il termine $\frac{A}{\delta}$ e cambiarvi ξ in:

$$\xi - A\left(\frac{\alpha}{\delta}-\frac{\beta}{\delta^2}\frac{d\delta}{d\rho'}\right)_{\rho'=R},$$

essendo A una costante e δ la distanza dal punto del disco o della sfera o di ciascuna sezione orizzontale del cilindro ove esiste la sorgente calorifica al punto variabile di coordinate (ρ', θ') o (ρ', θ', ϕ') situato esso pure sul disco o sulla sfera o sulla stessa sezione del cilindro; giacchè u' in vicinanza della sorgente calorifica sul disco o sulla sezione orizzontale del cilindro si riduce alla forma $A\log\delta +$ funz. cont. e nella sfera si riduce invece alla forma $\frac{A}{\delta}+$ funz. cont.

14. Mi piace ora di mostrare che il metodo seguito nella trattazione dei problemi precedenti, come può evidentemente servire per campi diversi da quelli che qui ho considerato, può anche servire per altri problemi, e in particolare per la determinazione della funzione u', per la quale al contorno non sono dati i valori di essa o della sua derivata prima rispetto alla normale interna, ma sono dati invece quelli della sua derivata seconda rispetto alla stessa normale o quelli della derivata terza, ecc.

Supponiamo infatti che siano dati i valori della derivata m-esima $\frac{d^m u}{dp^m}$. Limitandoci al caso del cerchio si osserva che siccome la funzione $U=\rho^m \frac{d^m u}{d\rho^m}$ dovrà essa pure soddisfare alla condizione $\Delta^2 U=0$, ecc., si avrà, servendosi dello sviluppo in serie:

$$\frac{d^m u'}{d\rho'^m}=(-1)^m \frac{R^n}{2\pi\rho'^m}\int_0^{2\pi}\frac{d^m u}{dp^m}\,d\theta+\frac{(-1)^m}{\pi}\sum_1^\infty \frac{\rho'^{n-m}}{R^{n-m}}\int_0^{2\pi}\frac{d^m u}{dp^m}\cos n(\theta-\theta')\,d\theta,$$

e perciò si concluderà intanto che onde u sia sempre finita insieme alle sue derivate nell'interno del cerchio, i valori dati di $\frac{d^m u}{dp^m}$ dovranno soddisfare alle condizioni:

$$\int_0^{2\pi}\frac{d^m u}{dp^m}\,d\theta=0,\quad \int_0^{2\pi}\frac{d^m u}{dp^m}\cos s\theta\,d\theta=0,\quad \int_0^{2\pi}\frac{d^m u}{dp^m}\operatorname{sen} s\theta\,d\theta=0,$$

per $s=1, 2, 3,\dots m-1$; e quando queste condizioni siano soddisfatte sarà:

$$u'=\sum_0^{m-1}\rho'^s f_s(\theta')+$$

$$+\frac{(-1)^m}{\pi}\sum_m^\infty \frac{\rho'^n}{R^{n-m}n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}\int_0^{2\pi}\frac{d^m u}{dp^m}\cos n(\theta-\theta')\,d\theta,$$

ove le $f_s(\theta')$ devono essere funzioni di θ' finite, continue e a un sol valore e col periodo 2π esse e le loro derivate e devono essere tali che la funzione $\sum_0^{m-1} \rho'^s f_s(\theta')$ soddisfi alla equazione $\Delta^2=0$.

Questo porta subito che si abbia:

$$f_s(\theta')=a_s \cos s\theta' + b_s \operatorname{sen} s\theta',$$

con a_s e b_s costanti arbitrarie; quindi dovremo avere:

$$u'=\sum_0^{m-1} \rho'^s(a_s \cos s\theta' + b_s \operatorname{sen} s\theta') +$$

$$+\frac{(-1)^m}{\pi} \sum_m^{\infty} \frac{\rho'^n}{R^{n-m} n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)} \int_0^{2\pi} \frac{d^m u}{dp^m} \cos n(\theta-\theta')\, d\theta,$$

e ora si verificherebbe facilmente che questo valore di u' soddisfa a tutte le condizioni che si richiedono, e quindi esso è appunto quello cercato.

15. In ultimo credo utile di mostrare che i risultati precedenti, almeno pei campi qui considerati, possono estendersi anche al caso più generale in cui la funzione da determinarsi U, al contorno o alla superficie limite deve soddisfare alle condizioni poste in questa memoria o a quelle ricordate in principio, e nell'interno deve essere finita continua e a un sol valore insieme alle sue derivate prime e alle derivate seconde $\frac{d^2U}{dx^2}$, $\frac{d^2U}{dy^2}$, o $\frac{d^2U}{dx^2}$, $\frac{d^2U}{dy^2}$, $\frac{d^2U}{dz^2}$, e deve soddisfare alla equazione $\Delta^2 U=f$, ove f è una funzione conosciuta dei punti dello stesso campo che insieme alle derivate prime e alle derivate seconde $\frac{d^2f}{dx^2}$, $\frac{d^2f}{dy^2}$, o $\frac{d^2f}{dx^2}$, $\frac{d^2f}{dy^2}$, $\frac{d^2f}{dz^2}$, è finita continua e a un sol valore in tutto il campo (il contorno o la superficie limite inclus.)

Sia perciò U la funzione da determinarsi in un campo connesso C a due o a tre dimensioni (*), e per essa siano dati i valori di U o quelli di $\frac{dU}{dp}$ al contorno s o sulla superficie limite σ; e nel caso che siano dati questi ultimi

(*) Diciamo esplicitamente che, onde esser sicuri delle formole che qui si usano, noi ammettiamo sempre che pel campo C possano tracciarsi nel suo interno delle curve o delle superficie i cui punti corrispondano uno ad uno a quelli del contorno o della superficie limite e per modo che questo contorno o questa superficie e le loro normali possano riguardarsi come limiti di quelle curve e di quelle superficie stesse e delle loro normali.

supponiamo che oltre a soddisfare alle solite condizioni, essi soddisfino anche all'altra:

$$\int_s \frac{du}{dp}ds=-\iint_C f\,dx\,dy,\quad \text{o:}\int_\sigma \frac{du}{dp}d\sigma=-\iiint_C f\,dx\,dy\,dz, \tag{14}$$

secondochè il campo C è a due o a tre dimensioni, la quale come è noto è conseguenza necessaria delle altre condizioni cui ora si deve soddisfare.

Ponendo: $U=u_1+u_2$, si vede subito che se riusciremo a determinare una funzione u_1 che nell'interno del campo C soddisfi alla equazione $\Delta^2 u_1=f$, e alle altre condizioni che si sono poste per u, e al contorno s o sulla superficie limite σ soddisfi semplicemente alla condizione di essere ancora finita e continua essa soltanto, o essa e le sue derivate prime, nel qual caso si avrà anche necessariamente:

$$\int_s \frac{du_1}{dp}ds=-\iint_C f\,dx\,dy,\quad \text{o:}\int_\sigma \frac{du_1}{dp}d\sigma=-\iiint_C f\,dx\,dy\,dz,$$

la questione potrà dirsi risoluta, poichè essa si ridurrà allora a determinare nel campo C una funzione u_2 che nell'interno soddisfa alla equazione $\Delta^2 u_2=0$ e alle altre condizioni solite, e al contorno s o sulla superficie limite σ essa o la sua derivata $\frac{du_2}{dp}$ prendono respettivamente i valori noti $U-u_1$, o $\frac{dU}{dp}-\frac{du_1}{dp}$, gli ultimi dei quali, per le ipotesi fatte, soddisfaranno evidentemente all'una o all'altra delle due condizioni:

$$\int_s\left(\frac{dU}{dp}-\frac{du_1}{dp}\right)ds=0,\quad \int_\sigma\left(\frac{dU}{dp}-\frac{du_1}{dp}\right)d\sigma=0,$$

secondochè il campo C è a due o a tre dimensioni.

Ora questa funzione u_1 è subito conosciuta, perchè se r indica la distanza di un punto di coordinate (x, y) o (x, y, z) da un altro punto M' di coordinate (x', y') o (x', y', z') situato nel campo C (il contorno o la superficie incl.), per un teorema noto e del resto facilmente dimostrabile, si ha che l'integrale $\frac{1}{2\pi}\iint_C f\log r\,dx\,dy$ nel caso del campo a due dimensioni, e l'altro

$-\frac{1}{4\pi}\iiint_C \frac{f\,dx\,dy\,dz}{r}$ nel caso del campo a tre dimensioni, soddisfano nel campo C a tutte le condizioni che si richiedono per u_1, e al contorno o alla superficie hanno sempre anche le derivate prime finite e continue; quindi si può prendere senz'altro per il valore u'_1 di u_1 nel punto M':

$$u'_1 = \frac{1}{2\pi} \iint_C f \log r \, dx \, dy,$$

nel caso del campo a due dimensioni, e:

$$u'_1 = -\frac{1}{4\pi} \iiint_C \frac{f \, dx \, dy \, dz}{r},$$

nel caso del campo a tre dimensioni; e così la questione che ci eravamo proposti viene sempre ridotta alla questione analoga pel caso della equazione $\Delta^2 = 0$, e ammette perciò sempre una soluzione quando quest'ultima l'ammette.

E così in particolare si può dire che nel caso del cerchio di raggio R, secondochè sono dati i valori di U o di $\frac{dU}{dp}$ al contorno, anche se questi valori hanno un numero finito di discontinuità, il valore U' della funzione cercata U nel punto interno $M'(\rho', \theta')$ è dato rispettivamente dalle formole:

$$U' = \frac{1}{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} f \log [\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\theta - \theta')] \rho \, d\rho \, d\theta +$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (U - u_1)_s \frac{(R^2 - \rho'^2) \, d\theta}{R^2 + \rho'^2 - 2R\rho' \cos(\theta - \theta)},$$

$$U' = \frac{1}{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} f \log [\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\theta - \theta')] \rho \, d\rho \, d\theta +$$
$$+ \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{dU}{dp} + \frac{du'_1}{d\rho}\right)_s \log [R^2 + \rho'^2 - 2R\rho' \cos(\theta - \theta')] \, d\theta,$$

essendo:

$$u'_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} f \log [\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\theta - \theta')] \rho \, d\rho \, d\theta;$$

e per la sfera di raggio R il valore U' di U nel punto $M'(\rho', \theta', \phi')$ è dato invece dalle formole:

$$U' = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{f \, dS}{(\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos\gamma)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{4\pi R} \int_\sigma (U - u'_1)_\sigma \frac{(R^2 - \rho'^2) \, d\sigma}{(R^2 + \rho'^2 - 2R\rho' \cos\gamma)^{\frac{3}{2}}},$$

$$U'=-\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{f\,dS}{(\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos\gamma)^{\frac{1}{2}}}+$$

$$+\frac{1}{4\pi R}\int_\sigma \left(\frac{dU}{dp}+\frac{du'_1}{d\rho'}\right)_\omega \Big\{\log[R-\rho'\cos\gamma+(R^2+\rho'^2-2R\rho'\cos\gamma)^{\frac{1}{2}}]-$$

$$-\frac{2R}{(R^2+\rho'^2-2R\rho'\cos\gamma)^{\frac{1}{2}}}\Big\}d\sigma,$$

ove:

$$u'_1=-\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{f\,dS}{(\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos\gamma)^{\frac{1}{2}}},$$

σ e S sono la superficie e il volume della sfera, e γ è l'angolo che il raggio vettore del punto $M'(\rho', \theta', \phi')$ fa con quello del punto $M(\rho, \theta, \phi)$, o $M(R, \theta, \phi)$ cui si riferiscono gli elementi corrispondenti degli integrali, e pel quale si ha in conseguenza:

$$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\cos(\phi-\phi').$$

S'intende però che, mentre quando sono dati i valori di U al contorno o sulla superficie la funzione è pienamente determinata, quando sono dati invece i valori di $\frac{dU}{dp}$ la funzione è determinata soltanto all'infuori di una costante; e perciò in questo caso ai valori precedenti di U' potrebbe aggiungersi una costante arbitraria.

16. È poi da osservare che siccome per la funzione ausiliaria u_1 che qui comparisce, in tutti i punti (x', y') interni a un campo C di due dimensioni si ha, da formole note:

$$u'_1=\frac{1}{2\pi}\iint_C f\log r\,dx\,dy+\frac{1}{2\pi}\int_s \Big\{\log r\frac{du_1}{dp}-u_1\frac{d\log r}{dp}\Big\}ds,$$

e per il campo a tre dimensioni si ha invece:

$$u'_1=-\frac{1}{4\pi}\iiint_C \frac{f\,dx\,dy\,dz}{r}-\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \Big\{\frac{1}{r}\frac{du_1}{dp}-u_1\frac{d\frac{1}{r}}{dp}\Big\}d\sigma,$$

si può dire evidentemente che per ogni punto interno al campo C la stessa funzione u_1, nel caso che il campo sia a due dimensioni, soddisfa alla equazione:

$$\int_s \Big\{\log r\frac{du_1}{dp}-u_1\frac{d\log r}{dp}\Big\}ds=0,$$

e nel caso che il campo sia a tre dimensioni soddisfa invece all'altra:

$$\int_\sigma \left\{ \frac{1}{r} \frac{du_1}{dp} - u_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dp} \right\} d\sigma = 0.$$

17. Supponiamo ora che U sia una funzione qualunque che nell'interno del campo C soddisfa alla equazione $\Delta^2 U = f$, e alle altre condizioni solite, e al contorno o alla superficie è finita e continua insieme alle sue derivate prime. Indicando con ϕ un altra funzione che al contorno o alla superficie soddisfa ancora a queste condizioni, e nell'interno soddisfa alla equazione $\Delta^2 \phi = 0$, e alle altre condizioni solite, si deduce subito da formole note che il valore U' di U nel punto M' di coordinate (x', y') o (x', y', z') interno a C, nel caso del campo a due dimensioni, è dato dalla formola:

$$U' = \frac{1}{2\pi} \iint_C f(\log r + \phi)\, dx\, dy + \frac{1}{2\pi} \int_s \left\{ (\log r + \phi) \frac{dU}{dp} - U \frac{d(\log r + \varphi)}{dp} \right\} ds$$

e nel caso del campo a tre dimensioni è dato invece dall'altra:

$$U' = -\frac{1}{4\pi} \iiint_C f\left(\frac{1}{r} + \phi\right) dx\, dy\, dz - \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \left\{ \left(\frac{1}{r} + \phi\right) \frac{dU}{dp} - U \frac{d\left(\frac{1}{r} + \varphi\right)}{dp} \right\} d\sigma;$$

e quindi se il campo C sarà tale che per ogni suo punto (x', y') o (x', y', z') esista una funzione di Green corrispondente, prendendo per ϕ questa funzione si avrà:

$$U' = \frac{1}{2\pi} \iint_C f(\log r + \phi)\, dx\, dy - \frac{1}{2\pi} \int_s U \frac{d(\log r + \varphi)}{dp} ds, \qquad (15)$$

pel campo a due dimensioni; e

$$U' = -\frac{1}{4\pi} \iiint_C f\left(\frac{1}{r} + \phi\right) dx\, dy\, dz + \frac{1}{4\pi} \int_\sigma U \frac{d\left(\frac{1}{r} + \varphi\right)}{dp} d\sigma \qquad (16)$$

pel campo a tre dimensioni.

18. Considerando ora il caso di un campo C a due dimensioni, supponiamo che esso sia tale che possano sempre tracciarsi nel suo interno una serie di curve s_1 che vadano avvicinandosi indefinitamente ad s come loro limite, e che formino dei campi C_1 tali che per ogni punto (x', y') interno ad essi esista sempre una corrispondente funzione di Green ϕ_1

dotata della proprietà che il suo valore in ogni punto (x, y) dello stesso campo (il contorno s_1 inclus.), coll'avvicinarsi di s_1 ad s, tenda verso il valore di ϕ nello stesso punto, e vi tenda con uguale rapidità in tutti i punti (x, y) (*), e la stessa proprietà sussista ancora pei valori di $\frac{d\varphi_1}{dp_1}$ e $\frac{d\varphi}{dp}$ nei punti corrispondenti dei contorni s_1 ed s; e dimostriamo che allora la formola precedente (15) varrà anche nel caso in cui al contorno per le sue derivate prime non si pone nessuna condizione, e per la funzione U si richiede soltanto che essa resti inferiore a un numero finito anche avvicinandosi indefinitamente al contorno e sul contorno stesso, e, tolti tutt'al più su esso un numero finito di punti, in tutti gli altri si mantenga ancora continua.

Si osservi per questo che una tale funzione U nel campo C_1 soddisfarà sempre alle condizioni per le quali si ha la (15), e percio sarà:

$$U' = \frac{1}{2\pi}\iint_{C_1} f(\log r + \phi_1)\, dx\, dy - \frac{1}{2\pi}\int_{s_1} U_{s_1} \frac{d(\log r + \varphi_1)}{dp_1}\, ds_1;$$

e poichè, supponendo che $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ siano i punti di discontinuità di U al contorno s di C, e escludendoli con intervalli arbitrariamente piccoli δ_1, $\delta_2, \ldots \delta_m$, il secondo membro della (15) può scriversi:

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{C_1} f(\log r + \phi)\, dx\, dy + \frac{1}{2\pi}\iint_{C-C_1} f(\log r + \phi)\, dx\, dy -$$

$$- \frac{1}{2\pi}\int_{s-\Sigma\delta_n} U \frac{d(\log r + \varphi)}{dp}\, ds - \sum \frac{1}{2\pi}\int_{\delta_n} U \frac{d(\log r + \varphi)}{dp}\, ds,$$

per le ipotesi fatte, si concluderà subito che esisterà una curva s' tutta interna a C e tale che per tutti i contorni s_1 compresi fra s' ed s il secondo membro della formola precedente differisca da quello della (15) meno di quella quantità che più ci piace; e questo basta evidentemente per poter dire che la (15) sussiste anche nel caso che qui consideriamo.

(*) Intendiamo dire con ciò che per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo σ deve esistere una curva s' tutta interna a C, e tale che per tutte le curve s_1 comprese fra s' ed s si abbia numericamente $\varphi - \varphi_1 < \sigma$ per tutti i punti (x, y) del campo C_1 (il contorno s_1 inclus.)

Similmente si vede che quando il campo C sia a tre dimensioni e soddisfi a condizioni analoghe, la formola (16) varrà anche per ogni funzione U per la quale si richiede soltanto che nell'interno di C soddisfi ancora alle solite condizioni, e avvicinandosi indefinitamente alla superficie e sulla superficie stessa resti sempre numericamente inferiore a un numero finito, e tolti tutt'al più su questa superficie un numero finito di punti o un numero finito di linee, in tutti i punti restanti sia ancora continua.

19. Le formole precedenti (15) e (16) suppongono che sia nota a priori l'esistenza della funzione U che nell'interno di C soddisfa alle solite condizioni, e al contorno o sulla superficie prende i valori che compariscono negli ultimi integrali delle stesse formole. Ma, per quanto si è detto nel § 15, qualunque siano questi valori al contorno o alla superficie, se il campo C è tale che per esso esista una funzione U_2 che al contorno o alla superficie prende valori dati arbitrariamente e nell'interno soddisfa alla equazione $\Delta^2 U_2 = 0$, e alle altre condizioni solite (*), esiste pure una e una sola funzione U che al contorno o sulla superficie prende i valori dati, e nell'interno soddisfa alla equazione $\Delta^2 U = f$; quindi in questo caso si può dire evidentemente che se il campo C è tale che per esso la funzione di Green corrispondente soddisfi alle condizioni dette sopra, la funzione U che al contorno o alla superficie prende i valori dati esisterà pure, e sarà quella data dalle formole (15) o (16) secondochè il campo è a due o a tre dimensioni.

E su queste formole si può notare che il secondo termine è la funzione U_2 che nell'interno soddisfa alla equazione $\Delta^2 U_2 = 0$, e al contorno prende i valori dati, e il primo termine:

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_C f(\log r + \phi)\,dx\,dy, \quad \text{o:} \quad -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_C f\left(\frac{1}{r} + \phi\right)dx\,dy\,dz,$$

è la funzione che nell'interno soddisfa alla equazione $\Delta^2 = f$, e al contorno o alla superficie prende il valore zero.

20. In particolare si osservi che pel cerchio di raggio R il valore nel punto $M(\rho, \theta)$ della funzione di Green relativa al punto $M'(\rho', \theta')$ è il seguente:

$$\phi = \log R - \tfrac{1}{2}\log[\rho^2\rho'^2 + R^4 - 2\rho\rho' R^2 \cos(\theta - \theta')],$$

(*) È noto che questo avviene in un caso molto generale. (V. Schwarz, Monatsb. der Königl. Akad. der Wissensch. zu Berlin. Januar 1872.)

e la funzione analoga per la sfera di raggio R è invece:

$$\phi = -\frac{R}{(\rho^2\rho'^2 + R^4 - 2\rho\rho' R^2 \cos\gamma)^{\frac{1}{2}}},$$

e se O è il centro del cerchio o della sfera e M'' è il punto che corrisponde a M' nella trasformazione per raggi vettori reciproci per la quale si ha $OM' \cdot OM'' = R^2$, nel caso del cerchio sarà anche $\phi = -\log MM'' - \log\frac{\rho'}{R}$, e nel caso della sfera sarà $\phi = -\frac{R}{\rho'}\frac{1}{MM''}$. Nell'un caso e nell'altro prendendo per curve s_1 o per superficie σ_1 una serie di circonferenze o di sfere concentriche a quella data, da queste espressioni di ϕ (e più semplicemente dalle ultime) si vede subito che pel cerchio e per la sfera sono soddisfatte relativamente a ϕ le condizioni del § 18; e si conclude perciò che nel caso del cerchio, se i valori dati U_s al contorno sono finiti e hanno soltanto un numero finito di discontinuità, la funzione U che nell'interno soddisfa alla equazione $\Delta^2 U = f$, e al contorno prende questi valori dati, è la seguente:

$$\left.\begin{aligned} U' = \frac{1}{4\pi}\int_0^R\int_0^{2\pi} f \log\left(1 - \frac{(R^2-\rho^2)(R^2-\rho'^2)}{\rho^2\rho'^2 + R^4 - 2\rho\rho' R^2\cos(\theta-\theta')}\right)\rho\, d\rho\, d\theta\, + \\ + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_s \frac{(R^2-\rho'^2)\,d\theta}{R^2+\rho'^2-2R\rho'\cos(\theta-\theta')}; \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

e nel caso della sfera quando i valori dati U_σ alla superficie sono finiti e hanno soltanto un numero finito di discontinuità in punti separati o lungo linee separate, la funzione corrispondente U è l'altra:

$$\left.\begin{aligned} U' = -\frac{1}{4\pi}\iint_S \left\{ -\frac{R}{(\rho^2\rho'^2 + R^4 - 2\rho\rho' R^2\cos\gamma)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos\gamma)^{\frac{1}{2}}} \right\} dS\, + \\ + \frac{1}{4\pi R}\int_\sigma \frac{U_\sigma (R^2-\rho'^2)\,d\sigma}{(R^2+\rho'^2-2R\rho'\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

21. Se poi al contorno del cerchio o sulla superficie della sfera saranno dati invece i valori di $\frac{dU}{dp}$, e questi saranno finiti e con un numero finito di discontinuità e soddisfaranno alle condizioni (14) del § 15, allora si osserverà prima che la funzione corrispondente U e quindi anche l'altra $\rho\frac{dU}{d\rho}$

devono esistere (§ 15); e poi osservando, che nel caso del piano o dello spazio si ha sempre:

$$\Delta^2\left(\rho\frac{dU}{d\rho}\right) = \frac{d(\rho^2\Delta^2 U)}{\rho d\rho},$$

si determinerà subito la funzione $\rho\frac{dU}{d\rho}$, pel caso del cerchio e della sfera, sostituendo nelle (17) e (18) per U', f, U_s e U_σ le quantità $\rho'\frac{dU'}{d\rho'}$, $\frac{d(\rho^2 f)}{\rho d\rho}$, $-R\left(\frac{dU}{dp}\right)_s$ e $-R\left(\frac{dU}{dp}\right)_\sigma$; e basterà poi integrare rispetto a ρ' fra 0 e ρ' le equazioni ottenute per ricavarne subito i valori cercati U' di U nei punti (ρ', θ'), o (ρ', θ', ϕ') del cerchio o della sfera. Si troverà così, avendo riguardo anche alle equazioni (14) del § 15, che nel caso del cerchio, all'infuori di una costante, si ha la formola seguente:

$$U' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\rho'}\frac{d\rho'}{\rho'}\int_0^R\int_0^{2\pi}\left\{\frac{d(\rho^2 f)}{d\rho}(\log r + \phi) + \rho f\right\}d\rho\, d\theta +$$
$$+\frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{dU}{dp}\right)_s \log[R^2 + \rho'^2 - 2R\rho'\cos(\theta - \theta')]\, d\theta,$$

e questa, eseguendo prima una integrazione per parti rispetto a ρ nel termine che contiene $\frac{d(\rho^2 f)}{d\rho}$, e poi dopo facili riduzioni eseguendo l'integrazione rispetto a ρ', e trascurando una costante si trasforma nell'altra:

$$U' = \frac{1}{4\pi}\int_0^R\int_0^{2\pi}\rho f \log\Big[\{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos(\theta - \theta')\}\{\rho^2\rho'^2 + R^4 -$$
$$- 2\rho\rho' R^2\cos(\theta - \theta')\}\Big]d\rho\, d\theta + \frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{dU}{dp}\right)_s \log[R^2 + \rho'^2 - 2R\rho'\cos(\theta - \theta')]\, d\theta,$$

ovvero, all'infuori sempre di una costante:

$$U' = \frac{1}{2\pi}\int_0^R\int_0^{2\pi}\rho f(\log r - \phi)\, d\rho\, d\theta +$$
$$+\frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{dU}{dp}\right)_s \log[R^2 + \rho'^2 - 2R\rho'\cos(\theta - \theta')]\, d\theta.$$

Similmente nel caso della sfera si trova:

$$U' = -\frac{1}{4\pi}\iint_S f\left\{\frac{R}{(\rho^2\rho'^2 + R^4 - 2\rho\rho' R^2 \cos\gamma)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos\gamma)^{\frac{1}{2}}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{R}\log\left[R^2 - \rho\rho'\cos\gamma + (\rho^2\rho'^2 + R^4 - 2\rho\rho' R^2\cos\gamma)^{\frac{1}{2}}\right]\right\} dS +$$

$$+ \frac{1}{4\pi R}\int_\sigma \left(\frac{dU}{dp}\right)_\sigma \left\{\log\left[R - \rho'\cos\gamma + (R^2 + \rho'^2 - 2R\rho'\cos\gamma)^{\frac{1}{2}}\right] - \frac{2R}{(R^2 + \rho'^2 - 2R\rho'\cos\gamma)^{\frac{1}{2}}}\right\} d\sigma,$$

e si può osservare che, siccome in queste formole il secondo termine è una funzione la cui derivata rispetto alla normale interna sul cerchio o sulla sfera è:

$$\frac{dU}{dp} - \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dU}{dp}d\theta, \quad \text{o:} \quad \frac{dU}{dp} - \frac{1}{4\pi R^2}\int_\sigma \frac{dU}{dp}d\sigma,$$

il primo termine delle stesse formole sarà la funzione che nell'interno del campo corrispondente soddisfa alla equazione $\Delta^2 = f$ e alle altre condizioni solite, e sul cerchio o sulla sfera ha la derivata rispetto alla normale interna costante, e uguale rispettivamente a:

$$-\frac{1}{2\pi R}\int_0^R\int_0^{2\pi} f\rho\, d\rho\, d\theta, \quad \text{o:} \quad -\frac{1}{4\pi R^2}\iint_S f\, dS.$$

Notiamo che questi risultati potrebbero estendersi anche al caso di due cerchi concentrici o di due sfere pure concentriche; e, più generalmente, anche al caso di due cerchi o di due sfere che non si tagliano e non si toccano, e al caso di due ellissi omofocali.

E notiamo inoltre che anche nel caso della equazione $\Delta^2 U = f$ si potrebbero dare le formole per le questioni analoghe a quelle trattate nei §§ 13 e 14 pel caso della equazione $\Delta^2 = 0$. Però pei problemi analoghi a quelli del § 14 converrebbe porre delle condizioni anche rispetto alle derivate di ordine superiore al secondo della funzione f.

FINE DEL TOMO V.° (SERIE II.ª)