ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

FRANCESCO BRIOSCHI

e continuati dai professori:

Luigi Bianchi in Pisa | **Giuseppe Jung** in Milano
Ulisse Dini in Pisa | **Corrado Segre** in Torino

SERIE III. * TOMO XXII.

MILANO
TIPO-LITOGRAFIA REBESCHINI DI TURATI E C.
OFFICINA CARTE VALORI

1914.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO XXII.° (SERIE III.ª)

Sulle superficie flessibili ed inestendibili deformabili in rigate.

(*Di* Mauro Picone, *a Pisa.*)

PREFAZIONE.

Nella teoria delle trasformazioni B_k per le superficie applicabili sulle quadriche generali, recentemente creata dal prof. Bianchi (*), costituiscono di nuovo un elemento essenziale geometrico di trasformazione le congruenze rettilinee W, secondo il seguente generale teorema:

« *Per qualunque superficie S applicabile sopra una quadrica Q esistono ∞^2* « *congruenze rettilinee W che, avendo S per prima falda focale, hanno le loro* « *seconde falde focali S_1 applicabili sulla medesima quadrica* ».

Questa circostanza, insieme a parecchie altre tra cui quella dell'esistenza di congruenze W a falde focali semplicemente rigate e a falde focali applicabili sull'elicoide rigata d'area minima (**), fa naturalmente pensare alla possibile esistenza di una teoria per le trasformazioni delle superficie applicabili sopra la più generale superficie *semplicemente rigata*, nella quale l'elemento geometrico di trasformazione sia sempre fornito dalle congruenze rettilinee W.

E da qualche tempo appunto mi sono dedicato, per incitamento del mio Maestro prof. Bianchi, a studii volti a stabilire i fondamenti di quella teoria.

In questi studii, pei quali manca l'ausilio di una qualche legge che si possa *a priori* presumere di poter sostituire a quella della affinità d'Ivory fra due

(*) Bianchi, *Mémoire sur la théorie des transformations des surfaces applicables sur les quadriques générales* [Mémoires présentés par divers Savants à l'Académie des Sciences, t. XXXIV]. — *Lezioni di geometria differenziale*, vol. III (Pisa, Spoerri, 1909). — *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, 2te Auflage, Kapiteln XIX, XX, XXI [Leipzig, Teubner, 1910].

(**) Bianchi, *Sulle configurazioni mobili di Möbius nelle trasformazioni asintotiche delle curve e delle superficie*, §§ 9 e 15 [Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. XXV, 1908].

quadriche omofocali, in cui si risolve, come ha scoperto il prof. BIANCHI, la legge di applicabilità fra le due falde focali S e S_1 delle congruenze W sopranominate, è necessario seguire vie ben diverse dalle classiche.

E le prime ricerche che subito si impongono sono quelle dirette a risolvere il seguente problema fondamentale:

Problema A). *Sia data una superficie S applicabile sopra una rigata, determinare tutte le congruenze W che avendo S come prima falda focale, hanno la seconda falda applicabile sopra una rigata.*

Risoluto questo problema si dovrebbe passare all'altro:

Problema B). *Fra le nominate congruenze W, a falde focali applicabili su rigate, ricercare quelle a falde focali applicabili l'una sull'altra.*

La risoluzione di questi due problemi fornirebbe evidentemente la determinazione di tutte quelle trasformazioni asintotiche di superficie (*) che da una superficie applicabile sopra una rigata R fanno passare ad un'altra applicabile sopra una rigata *identica o no* alla R (**).

Ma queste ricerche, com'è da aspettarsi, sono irte di difficoltà fin dai primi passi e nei miei studii ho potuto per ora solo inoltrarmi nella trattazione del problema A).

Ho posto a fondamento della mia trattazione un criterio, di cui già da tempo sono in possesso, che fornisce *le condizioni necessarie e sufficienti affinchè una data superficie sia deformabile in rigata.*

Nel presente lavoro faccio appunto conoscere questo criterio in tutte le sue numerose conseguenze e in qualche sua applicazione (***).

(*) Secondo una locuzione introdotta dal prof. BIANCHI (nella Memoria citata: *Sulle configurazioni mobili di Möbius...*), le falde focali di una congruenza W si diranno *l'una trasformata asintotica dell'altra.*

(**) Si verrebbero così a determinare, nel caso particolare delle superficie doppiamente rigate, *tutte* le congruenze W a falde focali applicabili su quadriche rigate, *identiche o no.* Si conoscono esempî di congruenze W a falde focali applicabili su quadriche diverse: v. BIANCHI, *Ricerche sulla deformazione delle quadriche* [Circolo matematico di Palermo, t. XXII, 1906]. Ivi (§ 12) vengono anche costruite congruenze W le cui falde focali sono effettive quadriche (generalmente diverse). Ho recentemente dimostrato, nei miei studii sulle congruenze W, che *la costruzione del prof. Bianchi fornisce tutte le congruenze W le cui falde focali sono effettive quadriche.*

(***) Nello stabilire il criterio in discorso ho dapprima riferito la superficie al doppio sistema delle sue linee asintotiche, e ciò (per la circostanza che le trasformazioni per congruenze W conservano queste linee) in vista della sua immediata applicazione agli studii su riferiti. Ottenuto il criterio, ho poi potuto facilmente ritrovarlo in coordinate generali.

Avrei rimandato la pubblicazione del presente scritto all'epoca in cui la completa risoluzione del problema A) avesse conferito al mio criterio la generale fiducia nella sua efficacia per le applicazioni, ma in questi ultimi tempi la teoria da me svolta per la deformabilità di una superficie in rigata si è andata arricchendo di osservazioni, d'indole analitica e d'indole geometrica, che mi sembrano degne d'essere conosciute e che costituiscono un tutto che può e deve stare a sè, e perciò decido la presente pubblicazione.

Per offrire un esempio espressivo dei risultati conseguiti in questo lavoro, enuncio qui un teorema ottenuto al § 5:

Se sopra una superficie (a curvatura negativa) è noto il doppio sistema delle sue asintotiche, si può, risolvendo un'equazione algebrica di 2.° grado, riconoscere se essa è o non è deformabile in rigata e, nel caso affermativo, averne in termini finiti una doppia serie di deformate rigate.

Non porrò fine a questa prefazione senza osservare che, nel caso particolare dell'applicabilità sopra una quadrica, già si possiede, com'è ben noto, un criterio dovuto al prof. Ricci che lo ha dedotto nella sua classica teoria delle superficie (*) da considerazioni di una portata ben più considerevole di quelle mie, strettamente attinenti allo speciale problema che mi sono proposto.

§ 1.

Prima conseguenza differenziale delle equazioni esprimenti che una data superficie è deformabile in una rigata.

1. Sopra una superficie S a curvatura negativa

$$K = -\frac{1}{\rho^2},$$

si dice che un doppio sistema di linee è di *asintotiche virtuali* quando con una conveniente flessione della superficie è possibile far divenire quel sistema di asintotiche effettive sulla deformata (**).

Sia

$$d s^2 = E d u^2 + 2 F d u d v + G d v^2 \tag{1}$$

(*) Ricci, *Lezioni sulla teoria delle superficie* (Verona-Padova, Drucker, 1898).
(**) Cfr. Bianchi, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, zweite Auflage, p. 212.

il quadrato dell'elemento lineare della superficie riferita ad un qualunque sistema coordinato (u, v) e i simboli

$$\begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix} \qquad (i,\ k,\ l = 1,\ 2),$$

ne esprimano i relativi simboli di Christoffel.

La ricerca di ogni doppio sistema (α, β) di asintotiche virtuali sulla S equivale alla ricerca di due funzioni u e v di α e β soddisfacenti alle equazioni di Darboux:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \left(\begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} - \frac{\partial \log\rho}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta} + \\
&\qquad + \left(\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} - \frac{1}{2}\frac{\partial \log\rho}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right) + \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}\frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta} = 0, \\
&\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta} + \left(\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} - \frac{1}{2}\frac{\partial \log\rho}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right) + \\
&\qquad + \left(\begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} - \frac{\partial \log\rho}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta} = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{A}$$

e alla condizione

$$I(u, v) \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial\alpha} & \dfrac{\partial u}{\partial\beta} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial\alpha} & \dfrac{\partial v}{\partial\beta} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Nota una tale coppia $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$ di soluzioni delle equazioni (A), le linee $\alpha = \text{cost.}$ e $\beta = \text{cost.}$ tracciano appunto sulla superficie il più generale doppio sistema di asintotiche virtuali (v. Bianchi, loc. cit.).

Supponiamo, *come sempre in seguito, fino a quando non avvertiremo espressamente una differente disposizione*, che il doppio sistema coordinato (u, v) sulla superficie, sia esso stesso un doppio sistema di asintotiche virtuali, eventualmente anche effettive. Allora, alle equazioni (A) si deve poter soddisfare ponendovi $u = \alpha$, $v = \beta$, per il che occorre e basta che i coefficienti E, F, G della forma (1) soddisfino alle relazioni

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \log\rho}{\partial v} = \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial \log\rho}{\partial u} = \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix}. \tag{2}$$

In tali coordinate le equazioni di Darboux si scrivono

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\left(\left\{\begin{matrix}1\,1\\1\end{matrix}\right\}-2\left\{\begin{matrix}1\,2\\2\end{matrix}\right\}\right)\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta}+\left\{\begin{matrix}2\,2\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta}=0,\\ \frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\left\{\begin{matrix}1\,1\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta}+\left(\left\{\begin{matrix}2\,2\\2\end{matrix}\right\}-2\left\{\begin{matrix}1\,2\\1\end{matrix}\right\}\right)\frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta}=0.\end{aligned}\right\}\tag{B}$$

Poniamo

$$E\,G-F^2=\Delta,$$

si ha

$$\left\{\begin{matrix}1\,1\\1\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}1\,2\\2\end{matrix}\right\}=\frac{\partial\log\sqrt{\Delta}}{\partial u},$$

$$\left\{\begin{matrix}2\,2\\2\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}1\,2\\1\end{matrix}\right\}=\frac{\partial\log\sqrt{\Delta}}{\partial v},$$

e quindi, in virtù delle (2):

$$\left\{\begin{matrix}1\,1\\1\end{matrix}\right\}-2\left\{\begin{matrix}1\,2\\2\end{matrix}\right\}=\frac{\partial}{\partial u}\log\sqrt{\frac{\Delta}{\rho^3}},$$

$$\left\{\begin{matrix}2\,2\\2\end{matrix}\right\}-2\left\{\begin{matrix}1\,2\\1\end{matrix}\right\}=\frac{\partial}{\partial v}\log\sqrt{\frac{\Delta}{\rho^3}},$$

poniamo, per semplicità,

$$\sqrt{\frac{\rho^3}{\Delta}}=r,$$

$$-\left\{\begin{matrix}1\,1\\2\end{matrix}\right\}=p,\qquad -\left\{\begin{matrix}2\,2\\1\end{matrix}\right\}=q,$$

le equazioni di Darboux prenderanno dopo ciò la seguente forma:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta}=\frac{\partial\log r}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta}+q\frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta},\\ \frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta}=\frac{\partial\log r}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta}+p\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta},\end{aligned}\right\}\tag{B*}$$

sotto la quale noi le considereremo d'ora innanzi fino al § 5.

2. Veniamo ora alla ricerca che forma principale oggetto del presente lavoro, alla ricerca, cioè, delle condizioni necessarie e sufficienti a cui devono soddisfare i coefficienti E, F, G della forma (1) perchè essa possa esprimere il quadrato dell'elemento lineare di una superficie deformabile in una rigata.

Se la superficie S è applicabile sopra una rigata R, il doppio sistema Σ corrispondente in applicabilità su S alle asintotiche effettive di R è su S un doppio sistema di asintotiche virtuali di cui il sistema corrispondente a quello delle generatrici di R è di linee geodetiche. Viceversa se un tal doppio sistema Σ di asintotiche virtuali esiste su S, quella flessione della superficie per cui quel doppio sistema diventa di asintotiche effettive, deforma la S in una rigata sulla quale le generatrici sono le corrispondenti alle linee del sistema di Σ costituito di geodetiche. Per cui intanto:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la superficie S sia deformabile in una rigata è che su di essa esista un doppio sistema di asintotiche virtuali di cui un sistema sia costituito di linee geodetiche.

Supposto che il doppio sistema di asintotiche virtuali (α, β) sia tale, dobbiamo aggiungere alle equazioni (B*) a cui soddisfano u e v quella, a cui devono esse pure soddisfare, esprimenti che, per esempio, le linee $\beta = \text{cost.}$ sono geodetiche.

Questa equazione è la seguente:

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \left\{\begin{matrix} 1\,1 \\ 2 \end{matrix}\right\}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^3 - \left(\left\{\begin{matrix} 1\,1 \\ 1 \end{matrix}\right\} - 2\left\{\begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix}\right\}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 \frac{\partial v}{\partial \alpha} +$$
$$+ \left(\left\{\begin{matrix} 2\,2 \\ 2 \end{matrix}\right\} - 2\left\{\begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix}\right\}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \left\{\begin{matrix} 2\,2 \\ 1 \end{matrix}\right\}\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^3 = 0 \ (*),$$

che colle posizioni fatte si scrive:

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = p\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^3 - q\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^3 - \frac{\partial \log r}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial \log r}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial \alpha}.$$

Possiamo dunque intanto enunciare il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la superficie S sia deformabile in una rigata è che esistano due funzioni u e v verificanti il seguente sistema di tre equazioni alle derivate parziali del 2.° ordine:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} &= \frac{\partial \log r}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta} + q\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta}, \\
\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} &= \frac{\partial \log r}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta} + p\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta}, \\
\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} &= p\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^3 - q\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^3 - \frac{\partial \log r}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial \log r}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial \alpha},
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I})$$

(*) Cfr. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, seconda edizione, vol. I, p. 187.

e soddisfacenti alla condizione

$$I(u,\ v) \neq 0.$$

3. Ora è molto notevole la circostanza che del sistema (I) e della condizione $I(u,\ v) \neq 0$ è conseguenza differenziale un'equazione il cui primo membro è una *forma quadratica* in $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$ e $\frac{\partial v}{\partial \alpha}$ avente per coefficienti funzioni note di u e v.

Onde pervenire a questa equazione, fondamentale per la nostra ricerca, procediamo nel modo seguente.

Deriviamo la prima e la seconda equazione del sistema (I) rispetto ad α, otterremo, se sostituiamo ogni volta le espressioni di $\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\, \partial \beta}$ e di $\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha\, \partial \beta}$ date dalle equazioni stesse:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 u}{\partial \alpha^2 \partial \beta} = & \left(\frac{\partial^2 \log r}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 \log r}{\partial u\, \partial v}\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial \log r}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \log r}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta} + q\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta}\right) + \\
& + \left(\frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta} + q\frac{\partial v}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \log r}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta} + p\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta}\right) + \\
& + \frac{\partial \log r}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + q\frac{\partial v}{\partial \beta}\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 v}{\partial \alpha^2 \partial \beta} = & \left(\frac{\partial^2 \log r}{\partial u\, \partial v}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 \log r}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial \log r}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \log r}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta} + p\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta}\right) + \\
& + \left(\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta} + p\frac{\partial u}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \log r}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta} + q\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta}\right) + \\
& + \frac{\partial \log r}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \beta}\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + p\frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}.
\end{aligned}$$

Moltiplichiamo ambo i membri della prima equazione per $\frac{\partial v}{\partial \alpha}$ e ambo i membri della seconda per $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$, indi sottraiamo la prima equazione dalla seconda, si avrà:

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial^3 v}{\partial \alpha^2 \partial \beta} - \frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial^3 u}{\partial \alpha^2 \partial \beta} =$$

$$\begin{aligned}
= & \left(\frac{\partial p}{\partial u} + p\frac{\partial \log r}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^3 \frac{\partial u}{\partial \beta} + \left\{\frac{\partial p}{\partial v} + p\frac{\partial \log r}{\partial v} - \frac{\partial^2 \log r}{\partial u^2} - \right. \\
& \left. - \left(\frac{\partial \log r}{\partial u}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial v}{\partial \alpha} +
\end{aligned}$$

$$+\left(p\,q+\frac{\partial^2 \log r}{\partial u\,\partial v}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta}-\left\{\frac{\partial q}{\partial u}+q\,\frac{\partial \log r}{\partial u}-\frac{\partial^2 \log r}{\partial v^2}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\partial \log r}{\partial v}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^2\frac{\partial v}{\partial \beta}\frac{\partial u}{\partial \alpha}-$$

$$-\left(p\,q+\frac{\partial^2 \log r}{\partial u\,\partial v}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^2\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta}-\left(\frac{\partial q}{\partial v}+q\,\frac{\partial \log r}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^3\frac{\partial v}{\partial \beta}+p\,\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}+$$

$$+\frac{\partial \log r}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \beta}\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2}-q\,\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta}\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2}-\frac{\partial \log r}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}.$$

Deriviamo rispetto a β la terza equazione del sistema (I), tenendo conto delle due prime, ed otteniamo:

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial^3 v}{\partial \alpha^2\,\partial \beta}-\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial^3 u}{\partial \alpha^2\,\partial \beta}=$$

$$=\left(\frac{\partial p}{\partial u}+2\,p\,\frac{\partial \log r}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^3\frac{\partial u}{\partial \beta}+\left\{2\,p\,\frac{\partial \log r}{\partial v}-\frac{\partial^2 \log r}{\partial u^2}-\right.$$

$$\left.-2\left(\frac{\partial \log r}{\partial u}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2\frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial v}{\partial \alpha}+$$

$$+\left(3\,p\,q-\frac{\partial^2 \log r}{\partial u\,\partial v}-\frac{\partial \log r}{\partial u}\,\frac{\partial \log r}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta}-$$

$$-\left(\frac{\partial q}{\partial v}+2\,q\,\frac{\partial \log r}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^3\frac{\partial v}{\partial \beta}-$$

$$-\left\{2\,q\,\frac{\partial \log r}{\partial u}-\frac{\partial^2 \log r}{\partial v^2}-2\left(\frac{\partial \log r}{\partial v}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^2\frac{\partial v}{\partial \beta}\frac{\partial u}{\partial \alpha}-$$

$$-\left(3\,p\,q-\frac{\partial^2 \log r}{\partial u\,\partial v}-\frac{\partial \log r}{\partial u}\,\frac{\partial \log r}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^2\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta}+$$

$$+\frac{\partial p}{\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^3\frac{\partial v}{\partial \beta}+p\,\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}+\frac{\partial \log r}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta}\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}-\frac{\partial q}{\partial u}\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^3\frac{\partial u}{\partial \beta}-$$

$$-q\,\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta}\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2}-\frac{\partial \log r}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2}.$$

Eguagliando le due espressioni che così abbiamo ottenute della combinazione

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial^3 v}{\partial \alpha^2\,\partial \beta}-\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial^3 u}{\partial \alpha^2\,\partial \beta},$$

troviamo, come prima conseguenza differenziale del sistema (I):

$$\left.\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{\partial \log r}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \beta}+\frac{\partial \log r}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \beta}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}\frac{\partial v}{\partial \alpha}-\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2}\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)+\\
&\qquad +\left\{p\frac{\partial \log r}{\partial v}-\frac{\partial p}{\partial v}-\left(\frac{\partial \log r}{\partial u}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2\frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial v}{\partial \alpha}+\\
&+\left(2pq-2\frac{\partial^2 \log r}{\partial u\,\partial v}-\frac{\partial \log r}{\partial u}\frac{\partial \log r}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta}-\\
&\qquad -\left\{q\frac{\partial \log r}{\partial u}-\frac{\partial q}{\partial u}-\left(\frac{\partial \log r}{\partial v}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^2\frac{\partial v}{\partial \beta}\frac{\partial u}{\partial \alpha}-\\
&-\left(2pq-2\frac{\partial^2 \log r}{\partial u\,\partial v}-\frac{\partial \log r}{\partial u}\frac{\partial \log r}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^2\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta}+\\
&\qquad +p\frac{\partial \log r}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^3\frac{\partial u}{\partial \beta}+\frac{\partial p}{\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^3\frac{\partial v}{\partial \beta}-\\
&-q\frac{\partial \log r}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^3\frac{\partial v}{\partial \beta}-\frac{\partial q}{\partial u}\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^3\frac{\partial u}{\partial \beta}.
\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

Ma in virtù della terza equazione del sistema (I) si ha:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial \log r}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \beta}+\frac{\partial \log r}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \beta}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}\frac{\partial v}{\partial \alpha}-\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2}\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)=\\
&=\left(\frac{\partial \log r}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2\frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial v}{\partial \alpha}+\frac{\partial \log r}{\partial u}\frac{\partial \log r}{\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta}-\left(\frac{\partial \log r}{\partial v}\right)^2\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^2\frac{\partial v}{\partial \beta}\frac{\partial u}{\partial \alpha}-\\
&-\frac{\partial \log r}{\partial u}\frac{\partial \log r}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^2\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta}-p\frac{\partial \log r}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^3\frac{\partial u}{\partial \beta}-p\frac{\partial \log r}{\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^3\frac{\partial v}{\partial \beta}+\\
&+q\frac{\partial \log r}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^3\frac{\partial v}{\partial \beta}+q\frac{\partial \log r}{\partial u}\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^3\frac{\partial u}{\partial \beta},
\end{aligned}$$

sostituendo quindi nella (3) si otterrà:

$$\begin{aligned}
0 &= -\left(\frac{\partial p}{\partial v}-p\frac{\partial \log r}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2\frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial v}{\partial \alpha}+2\left(pq-\frac{\partial^2 \log r}{\partial u\,\partial v}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta}+\\
&+\left(\frac{\partial q}{\partial u}-q\frac{\partial \log r}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^2\frac{\partial v}{\partial \beta}\frac{\partial u}{\partial \alpha}-2\left(pq-\frac{\partial^2 \log r}{\partial u\,\partial v}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^2\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta}+\\
&+\left(\frac{\partial p}{\partial v}-p\frac{\partial \log r}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^3\frac{\partial v}{\partial \beta}-\left(\frac{\partial q}{\partial u}-q\frac{\partial \log r}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^3\frac{\partial u}{\partial \beta},
\end{aligned}$$

ora il primo membro di quest'ultima equazione è il seguente prodotto

$$\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial v}-p\frac{\partial \log r}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2+2\left(pq-\frac{\partial^2 \log r}{\partial u\,\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \alpha}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial q}{\partial u}-q\frac{\partial \log r}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta}-\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta}\right),$$

per cui, dalla condizione $I(u,\ v) \neq 0$ a cui devono soddisfare u e v, segue necessariamente

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}-p\frac{\partial \log r}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2+2\left(pq-\frac{\partial^2 \log r}{\partial u\,\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \alpha}+\left(\frac{\partial q}{\partial u}-q\frac{\partial \log r}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^2=0. \quad \text{(II)}$$

Questa è l'equazione a cui alludevamo, necessaria conseguenza del sistema (I) e della condizione $I(u,\ v) \neq 0$.

Il primo membro di quest'equazione è appunto una forma quadratica in $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$ e $\frac{\partial v}{\partial \alpha}$ i cui coefficienti sono

$$P=\frac{\partial p}{\partial v}-p\frac{\partial \log r}{\partial v}=r\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{p}{r}\right),\quad Q=\frac{\partial q}{\partial u}-q\frac{\partial \log r}{\partial u}=r\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{q}{r}\right),$$

$$R=pq-\frac{\partial^2 \log r}{\partial u\,\partial v}.$$

Ora è evidente quanto importante sia per la nostra analisi assicurarci che la equazione (II) lega effettivamente $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$ e $\frac{\partial v}{\partial \alpha}$. E nel seguente paragrafo ci assicureremo di ciò dimostrando precisamente che non possono mai aver luogo insieme le identità:

$$P\equiv 0,\quad Q\equiv 0,\quad R\equiv 0.$$

§ 2.

I coefficienti dell'equazione (II)
non sono mai insieme identicamente nulli *).

4. Assunto sopra una superficie a curvatura negativa $-\frac{1}{\rho^2}$ a sistema coordinato (u, v) un doppio sistema di asintotiche virtuali, sia

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \tag{1}$$

il quadrato dell'elemento lineare della superficie, posto

$$\frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Delta}} = r, \quad -\left\{ {11 \atop 2} \right\} = p, \quad -\left\{ {22 \atop 1} \right\} = q, \quad EG - F^2 = \Delta$$

vogliamo dimostrare che non potranno mai verificarsi insieme le seguenti identità

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{p}{r}\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{q}{r}\right) = 0, \\ pq = \frac{\partial^2 \log r}{\partial u\,\partial v}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Supposto infatti che possano valere le identità (2) perverremo, col seguente procedimento, ad un assurdo.

Indichiamo con $U(u)$ e $V(v)$ due funzioni, la prima della sola u e la seconda della sola v, dalle (2) ricaviamo

$$p = Ur, \quad q = Vr, \quad \frac{\partial^2 \log r}{\partial u\,\partial v} = UVr^2,$$

cioè

$$\left\{ {11 \atop 2} \right\} = -U\frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Delta}}, \quad \left\{ {22 \atop 1} \right\} = -V\frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Delta}},$$

$$3\frac{\partial^2 \log \rho}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial^2 \log \Delta}{\partial u\,\partial v} = 2UV\frac{\rho^3}{\Delta}. \tag{3}$$

(*) In un'affrettata lettura del presente lavoro si può fare a meno di leggere la dimostrazione contenuta in questo paragrafo, ammettendo quanto abbiamo affermato alla fine del precedente.

Pei simboli di Christoffel relativi alla forma differenziale (1) avremo le espressioni

$$\begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial u} \log \sqrt{\frac{\Delta}{\rho}}, \quad \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial v} \log \sqrt{\frac{\Delta}{\rho}},$$

$$\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{\partial \log \sqrt{\rho}}{\partial v}, \quad \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{\partial \log \sqrt{\rho}}{\partial u}.$$

$$\begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix} = - U \frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Delta}}, \quad \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} = - V \frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Delta}},$$

che sostituite nelle identità *):

$$\frac{\partial E}{\partial u} = 2 \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} E + 2 \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix} F,$$

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 2 \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} E + 2 \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} F,$$

$$\frac{\partial F}{d u} = \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} E + \left[\begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} \right] F + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix} G,$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} E + \left[\begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} \right] F + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} G,$$

$$\frac{\partial G}{\partial u} = 2 \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} F + 2 \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} G,$$

$$\frac{\partial G}{\partial v} = 2 \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} F + 2 \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} G,$$

dànno luogo alle seguenti

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial u} &= E \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\Delta}{\rho} - F \,.\, 2\, U \frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Delta}}, \\ \frac{\partial E}{\partial v} &= E \frac{\partial \log \rho}{\partial v} + F \frac{\partial \log \rho}{\partial u}, \\ \frac{\partial F}{\partial u} &= E \frac{\partial \log \sqrt{\rho}}{\partial v} + F \frac{\partial \log \sqrt{\Delta}}{\partial u} - G\, U \frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Delta}}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

(*) V. Bianchi, *Lezioni*..., vol. I, p. 65.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial v} &= -E\,V\frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Delta}} + F\frac{\partial \log\sqrt{\Delta}}{\partial v} + G\frac{\partial \log\sqrt{\rho}}{\partial u}\,,\\
\frac{\partial G}{\partial u} &= F\frac{\partial \log\rho}{\partial v} + G\frac{\partial \log\rho}{\partial u}\,,\\
\frac{\partial G}{\partial v} &= -F\,.\,2\,V\frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Delta}} + G\frac{\partial}{\partial v}\log\frac{\Delta}{\rho}\,.
\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

Dalla prima di queste identità ricaviamo $\frac{\partial^2 E}{\partial u\,\partial v}$, tenendo conto delle espressioni di $\frac{\partial E}{\partial v}$, $\frac{\partial F}{\partial v}$ date dalle identità stesse, si avrà:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E}{\partial u\,\partial v} &= \\
&= E\left(\frac{\partial \log\rho}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\Delta}{\rho} + \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log\frac{\Delta}{\rho} + 2\,U\,V\frac{\rho^3}{\Delta}\right) + \\
&\quad + F\left(\frac{\partial \log\rho}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\Delta}{\rho} - 2\,U\frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Delta}}\frac{\partial \log\sqrt{\Delta}}{\partial v} - 2\,U\frac{\partial}{\partial v}\frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Delta}}\right) - \\
&\quad - G\,U\frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Delta}}\frac{\partial \log\rho}{\partial u}\,,
\end{aligned}$$

ma è

$$2\,U\frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Delta}}\frac{\partial \log\sqrt{\Delta}}{\partial v} + 2\,U\frac{\partial}{\partial v}\frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Delta}} = 3\,U\frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Delta}}\frac{\partial \log\rho}{\partial v}\,,$$

e per la (3):

$$2\,U\,V\frac{\rho^3}{\Delta} = 3\frac{\partial^2 \log\rho}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial^2 \log\Delta}{\partial u\,\partial v}\,,$$

ne segue

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E}{\partial u\,\partial v} &= \\
&= E\left(\frac{\partial \log\rho}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\Delta}{\rho} + 2\frac{\partial^2 \log\rho}{\partial u\,\partial v}\right) + \\
&\quad + F\left(\frac{\partial \log\rho}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\Delta}{\rho} - 3\,U\frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Delta}}\frac{\partial \log\rho}{\partial v}\right) - G\,U\frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Delta}}\frac{\partial \log\rho}{\partial u}\,.
\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

Analogamente segue dalla seconda delle (4)

$$\frac{\partial^2 E}{\partial u\,\partial v}=$$

$$= E\left(\frac{\partial \log \rho}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\Delta}{\rho}+\frac{\partial^2 \log \rho}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial \log \sqrt{\rho}}{\partial v}\frac{\partial \log \rho}{\partial u}\right)+$$

$$+F\left(\frac{\partial^2 \log \rho}{\partial u^2}+\frac{\partial \log\sqrt{\Delta}}{\partial u}\frac{\partial \log \rho}{\partial u}-2\,U\frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Delta}}\frac{\partial \log \rho}{\partial v}\right)-$$

$$-G\,U\frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Delta}}\frac{\partial \log \rho}{\partial u}.$$

Per cui da quest'ultima e dalla (5) si otterrà la relazione

$$\left.\begin{aligned} &E\left(\frac{\partial^2 \log \rho}{\partial u\, d v}-\frac{1}{2}\frac{\partial \log \rho}{\partial u}\frac{\partial \log \rho}{\partial v}\right)+F\left\{\frac{\partial \log\sqrt{\Delta}}{\partial u}\frac{\partial \log \rho}{\partial u}-\right.\\ &\qquad\left.-U\frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Delta}}\frac{\partial \log \rho}{\partial v}-\left(\frac{\partial \log \rho}{\partial u}\right)^2-\frac{\partial^2 \log \rho}{\partial u^2}\right\}=0. \end{aligned}\right\}\tag{6}$$

Ma d'altra parte abbiamo (*)

$$-\frac{1}{\rho^2}=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{E}\left\{\begin{matrix}1\ 1\\2\end{matrix}\right\}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{E}\left\{\begin{matrix}1\ 2\\2\end{matrix}\right\}\right)\right\},$$

cioè

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\frac{\partial}{\partial v}\frac{U\rho^{\frac{3}{2}}}{E}+\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{E}\frac{\partial \log\sqrt{\rho}}{\partial u}\right),$$

ed eseguendo le derivazioni, ove si tenga conto delle prime due delle (4)

$$\frac{\partial^2 \log \rho}{\partial u^2}+\left(\frac{\partial \log \rho}{\partial u}\right)^2+U\frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Delta}}\frac{\partial \log \rho}{\partial v}-\frac{\partial \log\sqrt{\Delta}}{\partial u}\frac{\partial \log \rho}{\partial u}-\frac{2\,E}{\rho^2}=0;\tag{7}$$

pertanto la (6) si spezza nell'eguaglianza ultima (7) e nella seguente:

$$\frac{\partial^2 \log \rho}{\partial u\,\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial \log \rho}{\partial u}\frac{\partial \log \rho}{\partial v}-\frac{2\,F}{\rho^2}=0.\tag{8}$$

(*) V. Bianchi, *Lezioni...*, vol. I, p. 77.

Si ha anche (*)

$$-\frac{1}{\rho^2}=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{G}\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{G}\left\{\begin{matrix}1\ 2\\1\end{matrix}\right\}\right)\right\},$$

cioè

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\frac{\partial}{\partial u}\frac{V\rho^{\frac{3}{2}}}{G}+\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{G}\frac{\partial\log\sqrt{\rho}}{\partial v}\right),$$

dalla quale, eseguendo le derivazioni tenendo conto delle ultime due delle (4), si ricava

$$\frac{\partial^2\log\rho}{\partial v^2}+\left(\frac{\partial\log\rho}{\partial v}\right)^2+V\frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Delta}}\frac{\partial\log\rho}{\partial u}-\frac{\partial\log\sqrt{\Delta}}{\partial v}\frac{\partial\log\rho}{\partial v}-\frac{2\,G}{\rho^2}=0. \tag{9}$$

Consideriamo ora le eguaglianze (7), (8), (9) alla quale associamo la (3) che, per la (8), potrà ora anche scriversi

$$\frac{\partial^2\log\sqrt{\Delta}}{\partial u\,\partial v}=\frac{3}{4\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\partial\rho}{\partial v}+\frac{3\,F}{\rho^2}-U\,V\frac{\rho^3}{\Delta}. \tag{10}$$

Scriviamo le nominate eguaglianze (7), (8) e (9) nella forma più semplice seguente

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2\rho}{\partial u^2}&=\frac{\partial\log\sqrt{\Delta}}{\partial u}\frac{\partial\rho}{\partial u}-U\frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Delta}}\frac{\partial\rho}{\partial v}+\frac{2\,E}{\rho},\\
\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v}&=\frac{3}{2\rho}\frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\partial\rho}{\partial v}+\frac{2\,F}{\rho}\\
\frac{\partial^2\rho}{\partial v^2}&=-V\frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Delta}}\frac{\partial\rho}{\partial u}+\frac{\partial\log\sqrt{\Delta}}{\partial v}\frac{\partial\rho}{\partial v}+\frac{2\,G}{\rho},
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

e deduciamo le due loro conseguenze differenziali ottenute eguagliando le due espressioni che le prime due forniscono di $\frac{\partial^3\rho}{\partial u^2\,\partial v}$ ed eguagliando quelle che le ultime due forniscono di $\frac{\partial^3\rho}{\partial u\,\partial v^2}$.

Queste due conseguenze differenziali, se si tien conto delle (4) e se, ogni

(*) V. Bianchi, *Lezioni*..., vol. I, p. 77.

volta, si sostituisce a $\frac{\partial^2 \log \sqrt{\Delta}}{\partial u \, \partial v}$ la sua espressione data dalla (10), sono semplicemente le seguenti:

$$E\frac{\partial \rho}{\partial v} - F\frac{\partial \rho}{\partial u} = 0,$$

$$-F\frac{\partial \rho}{\partial v} + G\frac{\partial \rho}{\partial u} = 0,$$

dalle quali, a causa di $EG - F^2 > 0$, si ricava $\rho =$ cost. Dopo di che, dalle (11), si trae la conclusione assurda

$$\frac{E}{\rho} \equiv \frac{F}{\rho} \equiv \frac{G}{\rho} \equiv 0.$$

Le identità (2) non possono dunque mai coesistere.

§ 3.

Esame di un caso particolare.

5. Dalla supposta deformabilità della superficie S in rigata, dalla supposta esistenza, cioè, sulla superficie del doppio sistema (α, β) di asintotiche virtuali di cui le linee $\beta =$ cost. sono geodetiche, abbiamo dunque dedotto in ciò che precede l'esistenza di due funzioni $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$ soddisfacenti alla condizione $I(u, v) \mid= 0$, soluzioni del sistema (I) e verificanti la relazione

$$P\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 + 2R\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \alpha} + Q\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^2 = 0, \tag{II}$$

che abbiamo dimostrato non esser mai un'identità negli argomenti $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial v}{\partial \alpha}$.

Dopo ciò possiamo dire che se fra le funzioni P, Q, R vale la diseguaglianza

$$R^2 - PQ < 0,$$

la superficie S non è deformabile in rigata (*). Abbiamo dunque intanto:

(*) Per mostrare un esempio, consideriamo le superficie pseudosferiche. Il quadrato dell'elemento lineare di una superficie pseudosferica di raggio ρ riferita ad un suo doppio si-

Prima condizione necessaria affinchè la superficie S sia deformabile in rigata è che sia

$$R^2 - PQ \geqq 0. \tag{1}$$

6. In questo paragrafo, onde rendere più spedita la trattazione ulteriore, vogliamo subito esaminare e discutere il caso particolare in cui, valendo la (1), sia identicamente

$$P \equiv Q \equiv 0. \tag{2}$$

Sarà di conseguenza $R^2 > 0$. Supponiamo, in primo luogo, che valendo le identità (2) sia $p \neq 0$, $q \neq 0$. Affermiamo che in tal caso *la superficie non è deformabile in rigata.* Difatti, nell'ipotesi che tale deformazione sia possibile, dalla (II) si trae necessariamente o

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0, \tag{3}$$

o

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = 0, \tag{4}$$

e quindi dalla terza delle (I), sia valendo la (3) che valendo la (4),

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial \alpha} = 0.$$

---

stema di asintotiche virtuali è dato da

$$d s^2 = \rho^2 (d u^2 + 2 \cos \omega \, du \, d v + d v^2)$$

dove (v. BIANCHI, loc. cit., p. 161) ω è una qualunque soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = \operatorname{sen} \omega. \tag{a}$$

Per cui

$$p = \frac{1}{\operatorname{sen} \omega} \frac{\partial \omega}{\partial u}, \quad q = \frac{1}{\operatorname{sen} \omega} \frac{\partial \omega}{\partial v}, \quad r = \frac{1}{\sqrt{\rho} \operatorname{sen} \omega},$$

e quindi, in virtù della (a),

$$P = 1, \quad Q = 1, \quad R = \cos \omega.$$

Ne segue, poichè $0 < \omega < \pi$,

$$R^2 - PQ = -\operatorname{sen}^2 \omega < 0.$$

Non esistono pertanto superficie pseudosferiche rigate. Ciò è notissimo ed anche coi mezzi ordinari si può facilmente dimostrare in vari modi.

Ne segue che per ogni coppia $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$ di soluzioni del sistema (I) è di necessità $I(u, v) = 0$, cioè l'affermata impossibilità della deformazione in rigata della superficie.

Supponiamo, in secondo luogo, che valendo le identità (2), sia $p = 0$, $q \neq 0$. In questo caso, essendo $-p = \left\{ {11 \atop 2} \right\} = 0$, le linee $v = \text{cost.}$ sono geodetiche sulla superficie; quella sua deformata sulla quale le linee u e v sono asintotiche effettive è rigata e le $v = \text{cost.}$ ne sono le rette. È facile vedere che di ogni doppio sistema (α, β) di asintotiche virtuali sulla superficie, per il quale un sistema è costituito di linee geodetiche, il sistema delle $v = \text{cost.}$ fa parte come quello delle linee geodetiche. Difatti dalla (II) si trae o la (3) o la (4), ma la (3), essendo $q \neq 0$, ha di conseguenza, per la terza delle (I), la (4), si deve dunque rigettare la (3). Ne segue di necessità

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = 0,$$

il che dimostra appunto il nostro asserto.

Sulla nostra superficie sono dunque unicamente le $v = \text{cost.}$ le geodetiche che si possono rettificare per flessione, *e la flessione risulterà individuata dall'assegnare sulla superficie una curva arbitraria che deve divenire asintotica curvilinea sulla deformata rigata.* Ciò risulta anche dall'integrazione del sistema (I).

Abbiamo visto invero che le (I) hanno di necessaria conseguenza la (4); supposto, come sempre si può con un cambiamento di parametro, $v = \beta$, il sistema (I) si riduce all'unica equazione a cui si deve soddisfare

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \, \partial \beta} = \frac{\partial \log r}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial u}{\partial \beta}. \tag{5}$$

Le soluzioni di quest'equazione sono univocamente determinate dalle condizioni

$$u(\alpha, 0) = A(\alpha), \quad u(0, \beta) = B(\beta),$$

supposto $A(\alpha)$ e $B(\beta)$ funzioni dei loro rispettivi argomenti soddisfacenti alle relazioni $A(0) = B(0)$, $A'(0) \neq 0$ e del resto arbitrarie, l'ultima delle quali relazioni ci assicura che in un intorno di $\alpha = \beta = 0$ è $I(u, v) \neq 0$.

Con un cambiamento del parametro α queste condizioni possono sempre ridursi alle seguenti

$$u(\alpha, 0) = \alpha + B(0), \quad u(0, \beta) = B(\beta),$$

delle quali la seconda significa appunto che fra le curve $\alpha = \text{cost.}$ si è assegnata ad arbitrio la $\alpha = 0$, di equazione $u = B(v)$ nelle u e v. Risulta dopo ciò individuato il sistema di asintotiche virtuali (α, v) e di conseguenza una deformata della superficie in cui le v sono rette e la curva arbitraria $u = B(v)$ è divenuta asintotica.

Per quanto concerne l'integrazione dell'equazione (5), possiamo osservare che potendosi essa scrivere

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{r(u, \beta)} \frac{\partial u}{\partial \beta}\right) = 0,$$

la sua integrazione si riconduce a quella della seguente equazione del primo ordine

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} = \frac{B'(\beta)}{r\{B(\beta), \beta\}} r(u, \beta)$$

colla condizione

$$u(\alpha, 0) = \alpha + B(0) \text{ (*)}.$$

Consideriamo infine il caso in cui è $p = 0$, $q = 0$. In questo caso sia le curve $u = \text{cost.}$ che le curve $v = \text{cost.}$ sono geodetiche e quella deformata della superficie sulla quale le u, v sono asintotiche effettive è una quadrica rigata di cui le u, v sono le generatrici. Con un'analisi identica a quella svolta pel caso precedente si trova che gli unici sistemi ∞^1 di curve sulla superficie che si possono rettificare per flessione sono quelli delle $u = \text{cost.}$ e delle $v = \text{cost.}$ e che la più generale deformazione della superficie in rigata è quella che rende di asintotiche effettive un doppio sistema di asintotiche virtuali di cui fa parte o il sistema delle $u = \text{cost.}$ o quello delle $v = \text{cost.}$

Un'osservazione vogliamo ancora fare: Due quadriche siano l'una deformata dell'altra, le corrispondenti in applicabilità alle generatrici rettilinee dell'una costituiranno sull'altra un doppio sistema di asintotiche virtuali e di linee geodetiche che, per quanto precede, coinciderà col doppio sistema delle generatrici. Ne segue il noto teorema:

Due quadriche applicabili l'una sull'altra sono identiche.

(*) Per l'effettiva deformazione in rigata della superficie rimandiamo al § 6.

§ 4.

Le condizioni necessarie e sufficienti per la deformabilità in rigata di una superficie.

7. Passiamo ora a considerare il caso generale in cui almeno una delle funzioni P, Q sia diversa da zero e a dare le condizioni necessarie e sufficienti per la deformabilità in rigata della superficie S.

Per fissare le idee supponiamo

$$Q \neq 0,$$

mentre, naturalmente, vale sempre la diseguaglianza

$$R^2 - PQ \geqq 0. \tag{1}$$

Diciamo λ_1 e λ_2 le due funzioni reali (eventualmente coincidenti) radici dell'equazione in λ:

$$Q\lambda^2 + 2R\lambda + P = 0; \tag{2}$$

l'equazione (II), conseguenza di quelle del sistema (I), si scriverà

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial \alpha}\right) = 0.$$

Ne segue che per la deformabilità della superficie in rigata deve essere soddisfatta, insieme alle (I), o l'una o l'altra delle seguenti equazioni

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0.$$

Indichi λ una delle due radici dell'equazione (2) e associamo alle equazioni del sistema (I) la seguente

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \lambda \frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0. \tag{3}$$

Segue da quest'ultima equazione

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 + \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}$$

e quindi dalla terza delle (I):

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial u}+\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^3=\left(p-q \lambda^3-\frac{\partial \log r}{\partial u} \lambda+\frac{\partial \log r}{\partial v} \lambda^2\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^3,$$

da cui, poichè non si può fare $\frac{\partial u}{\partial \alpha}=0$, chè dalla (3) seguirebbe anche $\frac{\partial v}{\partial \alpha}=0$, si avrà

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u}+\lambda \frac{\partial \log r}{\partial u}-p+\lambda\left(\frac{\partial \lambda}{\partial v}-\lambda \frac{\partial \log r}{\partial v}+q \lambda^2\right)=0. \tag{4}$$

Introduciamo la (3) nella seconda delle (I), tenendo conto della prima, si avrà:

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \beta}+\frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \beta}\right) \frac{\partial u}{\partial \alpha}+\lambda\left(\frac{\partial \log r}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial u}{\partial \beta}+q \lambda \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta}\right)=$$
$$=\lambda \frac{\partial \log r}{\partial v} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta}+p \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial u}{\partial \beta},$$

e quindi, poichè si deve supporre $\frac{\partial u}{\partial \alpha} \neq 0$,

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial u}+\lambda \frac{\partial \log r}{\partial u}-p\right) \frac{\partial u}{\partial \beta}+\left(\frac{\partial \lambda}{\partial v}-\lambda \frac{\partial \log r}{\partial v}+q \lambda^2\right) \frac{\partial v}{\partial \beta}=0. \tag{5}$$

Coesistendo dunque le (I) ne seguono di necessità la (4) e la (5). Ora nell'ipotesi che la superficie S sia deformabile in rigata si deve poter soddisfare alle (I) con due funzioni u e v per le quali sia $I(u, v) \neq 0$, dalla (4) e dalla (5) seguono quindi le identità necessarie

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \lambda}{\partial u}+\lambda \frac{\partial \log r}{\partial u}-p=0, \\
&\frac{\partial \lambda}{\partial v}-\lambda \frac{\partial \log r}{\partial v}+q \lambda^2=0.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Possiamo dire dopo ciò che condizioni necessarie affinchè la superficie sia deformabile in rigata, sono le seguenti:

Deve valere la (1) *e per una* λ *delle due radici dell'equazione* (2) *devono sussistere le identità* (6).

8. Dico che le condizioni ora enunciate come necessarie per la deformabilità delle superficie in rigata sono anche sufficienti. È evidente infatti che se per una radice λ dell'equazione (2) valgono le identità (6), il sistema delle *tre* equazioni (I) è conseguenza del seguente di *due* equazioni

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta} &= \frac{\partial \log r}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta} + q\lambda\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta}, \\ \frac{\partial v}{\partial\alpha} &= \lambda\frac{\partial u}{\partial\alpha}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

al quale si potrà soddisfare con due funzioni u e v per le quali sia

$$I(u, v) \neq 0.$$

Per convincersi di ciò e per vedere quale arbitrarietà regni in due tali soluzioni del sistema (7), integriamo questo sistema. Diciamo a tal uopo φ una funzione di u e v che soddisfi all'equazione lineare omogenea alle derivate parziali del primo ordine:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \lambda(u, v)\frac{\partial\varphi}{\partial v} = 0; \tag{8}$$

la seconda delle (7) equivarrà alla seguente

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = 0.$$

Dalla quale, a meno di un cambiamento del parametro β, deduciamo:

$$\varphi(u, v) = \beta. \tag{9}$$

Veniamo così a determinare sulla superficie le linee $\beta =$ cost. che potranno rettificarsi per flessione, esse possono evidentemente anche definirsi come le linee integrali dell'equazione

$$dv - \lambda\, du = 0.$$

A proposito della detta determinazione delle linee rettificabili, va osservato che se le due radici λ_1, λ_2 dell'equazione (2) fossero distinte ed entrambe verificassero le identità (6) vi sarebbero sulla superficie due diversi sistemi di geodetiche flessibili in rette, l'uno corrispondente all'equazione $dv - \lambda_1 du = 0$ e l'altro all'equazione $dv - \lambda_2 du = 0$.

I noti teoremi generali (*) assicurano che in queste ipotesi la superficie è applicabile sopra una quadrica; ci riserbiamo di esaminare a parte le circostanze analitiche e geometriche relative a questo caso; per ora, e in seguito fino a quando non avvertiremo espressamente il contrario, vogliamo supporre per semplicità che:

Una sola λ *delle due radici dell'equazione* (2) *verifichi le identità* (6).

Possiamo scegliere la soluzione φ della (8) in guisa che sia sempre

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} \neq 0,$$

basterà perciò dedurre φ per quadrature dalle equazioni

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \theta \lambda, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\theta$$

dove θ è una funzione sempre positiva il cui logaritmo soddisfa all'equazione

$$\frac{\partial \log \theta}{\partial u} + \lambda \frac{\partial \log \theta}{\partial v} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} = 0.$$

Ciò posto, dalla (9) ricaveremo

$$\begin{gathered} v = v(u, \beta), \\ \frac{\partial v}{\partial \beta} = \lambda \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{\theta}, \end{gathered} \tag{9'}$$

dopo di che la prima delle (7) potrà scriversi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} = \left(\frac{\partial \log r}{\partial u} + q \lambda^2\right) \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{q \lambda}{\theta} \frac{\partial u}{\partial \alpha}. \tag{10}$$

D'altra parte in virtù della (9) stessa è

$$I(u, v) = -\frac{1}{\theta} \frac{\partial u}{\partial \alpha},$$

ne segue che, determinata quella soluzione u della (10) che verifica le condizioni

$$u(\alpha, 0) = A(\alpha), \quad u(0, \beta) = B(\beta),$$

(*) V. Bianchi, loc. cit., Cap. VIII.

supposte $A(\alpha)$ e $B(\beta)$ funzioni arbitrarie dei loro argomenti e per le quali è $A(0) = B(0)$, $A'(0) \neq 0$, potremo poi dalla (9') avere la v che insieme alla u dà la coppia cercata di soluzioni del sistema (7) e quindi del sistema (I).

Prima di enunciare il teorema che possiamo formulare dopo quanto precede, osserviamo il fatto notevole che, supposte valide le identità (6), la conseguenza differenziale di queste, ottenuta eguagliando le due espressioni da esse fornite di $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v}$, è appunto l'equazione (2) in λ. Possiamo dire cioè che se esiste una funzione reale λ verificante le identità (6), questa è una delle due radici dell'equazione (2), pei coefficienti della quale varrà di conseguenza la (1).

Pertanto, il criterio per decidere se una data superficie a curvatura negativa sia deformabile in rigata è fornito semplicemente dal seguente teorema:

Sia

$$E\,d u^2 + 2 F\,d u\,d v + G\,d v^2,$$

il quadrato dell'elemento lineare di una superficie a curvatura negativa $-\frac{1}{\rho^2}$, *riferita ad un doppio sistema coordinato di asintotiche virtuali. Posto*

$$E G - F^2 = \Delta, \quad \frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Delta}} = r, \quad -\left\{ \begin{matrix} 1\ 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} = p, \quad -\left\{ \begin{matrix} 2\ 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} = q,$$

condizione necessaria e sufficiente affinchè la superficie sia deformabile in rigata è che esista una funzione λ (*reale*) *di* u *e* v *verificante le due equazioni*

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \lambda}{\partial u} + \lambda \frac{\partial \log r}{\partial u} - p = 0, \\ &\frac{\partial \lambda}{\partial v} - \lambda \frac{\partial \log r}{\partial v} + q \lambda^2 = 0\ (*). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Soddisfatta questa condizione e nota λ, ciò che si consegue risolvendo un'equazione di 2.° grado, si può determinare sulla superficie, mercè l'integrazione dell'equazione lineare omogenea alle derivate parziali del prim'or-

(*) Per le applicazioni giova notare che le (6) possono anche scriversi:

$$\frac{\partial (\lambda r)}{\partial u} = p r, \quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{r}{\lambda}\right) = q r.$$

dine (8) od anche mediante l'equivalente integrazione dell'equazione differenziale ordinaria del prim'ordine

$$\frac{dv}{du} = \lambda(u, v),$$

il sistema delle geodetiche flessibili in rette.

9. Per quanto riguarda l'integrazione dell'equazione (10) possiamo osservare, in primo luogo, che come condizioni sufficienti a determinarne un integrale possono sempre prendersi le due seguenti

$$u(\alpha, 0) = \alpha + B(0), \quad u(0, \beta) = B(\beta), \tag{11}$$

con B (β) affatto arbitraria, delle quali la seconda significa appunto che fra le curve $\alpha = \text{cost.}$ si è assegnata ad arbitrio la $\alpha = 0$ di equazione $u = B\{\varphi(u, v)\}$ nelle u e v. Risulta dopo ciò determinato, come abbiamo visto, il sistema di asintotiche virtuali (α, β), con le linee β geodetiche, e di conseguenza una deformata della superficie sulla quale le β sono rette e la curva arbitraria $u = B\{\varphi(u, v)\}$ è divenuta asintotica.

Osserviamo, in secondo luogo, che, supposto che i coefficienti dell'equazione (10) espressi per u e β, come vuole la (9'), siano dati da

$$a(u, \beta) = -\left(\frac{\partial \log r}{\partial u} + q\lambda^2\right), \quad b(u, \beta) = \frac{q\lambda}{\theta},$$

posto

$$a_1(u, \beta) = e^{\int a(u,\beta)du}, \quad b(u, \beta) = \int a_1(u, \beta)\, b(u, \beta)\, du,$$

l'equazione potrà scriversi

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[a_1(u, \beta)\frac{\partial u}{\partial \beta} + b_1(u, \beta)\right] = 0;$$

e quindi, la determinazione del suo integrale verificante le condizioni (11), sarà ricondotta a quella dell'integrale dell'equazione del prim'ordine:

$$a_1(u, \beta)\frac{\partial u}{\partial \beta} + b_1(u, \beta) = a_1\left\{B(\beta), \beta\right\}B'(\beta) + b_1\left\{B(\beta), \beta\right\},$$

soddisfacente alla condizione

$$u(\alpha, 0) = \alpha + B(0).$$

§ 5.

Il criterio per la deformabilità in rigata di una superficie espresso in coordinate generali.

10. La considerazione dei risultati ultimamente conseguiti offre, come ora vogliamo mostrare, un'altra via per giungere a stabilire il criterio della deformabilità in rigata di una superficie.

Ed è per tale via che riusciremo al nostro scopo, *lasciando al sistema coordinato a cui riferiamo i punti della superficie la più grande generalità.*

A questo risultato si potrebbe anche pervenire seguendo il procedimento diretto usato al § 1, ma attraverso calcoli assai laboriosi (*).

Riprendendo le equazioni (A) di Darboux (§ 1) in coordinate generali, sappiamo che: Condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie S a curvatura negativa $-\frac{1}{\rho^2}$ sia deformabile in rigata è che esista una coppia comune di soluzioni $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$ per le tre equazioni del seguente sistema

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \left(\begin{Bmatrix} 1\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} - \frac{\partial \log \rho}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta} + \\ &\quad + \left(\begin{Bmatrix} 1\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} - \frac{1}{2}\frac{\partial \log \rho}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right) + \begin{Bmatrix} 2\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{I}^*)$$

(*) Il procedimento del § 1 che, partendo dallo studio diretto del sistema di equazioni (I) del detto paragrafo, mi ha condotto a stabilire il criterio della deformabilità in rigata di una superficie quando i punti di essa sono riferiti ad un sistema coordinato di asintotiche virtuali, ha il merito di avermi fornito questo risultato senza che io nulla conoscessi della natura di detto criterio. Comunicati i miei risultati del § 4 al prof. Bianchi, Egli mi fece osservare l'opportunità di estenderli al caso generale in cui i punti della superficie siano riferiti ad un qualunque sistema coordinato, esprimendo in pari tempo l'opinione che una tale estensione doveva esser possibile. Dopo queste osservazioni del prof. Bianchi, aiutato dall'acquistata conoscenza della natura del criterio a cui si doveva pervenire, ho ideato il procedimento che espongo in questo paragrafo; il quale procedimento assai più rapidamente e con la massima generalità conduce al risultato finale, mentre parmi che potrebbe anche trovare con successo un più vasto campo di applicazione in ricerche consimili.

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\left\{\begin{matrix}1\ 1\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta}+\left(\left\{\begin{matrix}1\ 2\\2\end{matrix}\right\}-\frac{1}{2}\frac{\partial\log\rho}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right)+\\&\qquad\qquad+\left(\left\{\begin{matrix}2\ 2\\2\end{matrix}\right\}-\frac{\partial\log\rho}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta}=0,\\&\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+\left\{\begin{matrix}1\ 1\\2\end{matrix}\right\}\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)^3-\left(\left\{\begin{matrix}1\ 1\\1\end{matrix}\right\}-2\left\{\begin{matrix}1\ 2\\2\end{matrix}\right\}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)^2\frac{\partial v}{\partial\alpha}+\\&\qquad+\left(\left\{\begin{matrix}2\ 2\\2\end{matrix}\right\}-2\left\{\begin{matrix}1\ 2\\1\end{matrix}\right\}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right)^2\frac{\partial u}{\partial\alpha}-\left\{\begin{matrix}2\ 2\\1\end{matrix}\right\}\left(\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right)^3=0,\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{I}^*)$$

verificanti la condizione $I(u,\ v) \neq 0$.

Se una tale coppia di soluzioni $u(\alpha,\ \beta)$, $v(\alpha,\ \beta)$ esiste, le $\beta=\text{cost.}$ tracciano appunto sulla superficie un sistema di geodetiche rettificabili.

Supponiamo la superficie S deformabile in rigata, sia

$$dv-\lambda\,du=0 \qquad (1)$$

l'equazione differenziale che definisce, nelle coordinate u e v, il sistema delle $\beta=\text{cost.}$, si tratta di determinare la funzione $\lambda(u,\ v)$. Dalla (1) si deduce:

$$\frac{\partial v}{\partial\alpha}-\lambda\frac{\partial u}{\partial\alpha}=0, \qquad (2)$$

e quindi

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta}=\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\beta}+\frac{\partial\lambda}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial\beta}\right)\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\lambda\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta},\\&\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}=\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}+\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)^3.\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

Introdotta la (2) e l'ultima delle (3) nell'ultima equazione del sistema (I*) si trova per λ la seguente equazione del prim'ordine a cui deve di necessità soddisfare

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\lambda}{\partial u}+\left\{\begin{matrix}1\ 1\\2\end{matrix}\right\}-\left(\left\{\begin{matrix}1\ 1\\1\end{matrix}\right\}-2\left\{\begin{matrix}1\ 2\\2\end{matrix}\right\}\right)\lambda+\\&\qquad+\left[\frac{\partial\lambda}{\partial v}+\left(\left\{\begin{matrix}2\ 2\\2\end{matrix}\right\}-2\left\{\begin{matrix}1\ 2\\1\end{matrix}\right\}\right)\lambda-\left\{\begin{matrix}2\ 2\\1\end{matrix}\right\}\lambda^2\right]\lambda=0.\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

Dalle prime due equazioni del sistema (I*), per la (2) e per la prima delle (3), si ricava poi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \beta}\Bigg[\frac{\partial \lambda}{\partial u}+\begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}-\left(\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}-2\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\right)\lambda-&\\ -\left(\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}-\frac{1}{2}\frac{\partial \log \rho}{\partial v}\right)\lambda^2-\left(\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}-\frac{1}{2}\frac{\partial \log \rho}{\partial u}\right)\lambda\Bigg]&+\\ +\frac{\partial v}{\partial \beta}\Bigg[\frac{\partial \lambda}{\partial v}+\left(\begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix}-2\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\right)\lambda-\begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix}\lambda^2+&\\ +\left(\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}-\frac{1}{2}\frac{\partial \log \rho}{\partial v}\right)\lambda+\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}-\frac{1}{2}\frac{\partial \log \rho}{\partial u}\Bigg]&=0,\end{aligned}$$

dalla quale, sostituendo all'espressione

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u}+\begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}-\left(\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}-2\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\right)\lambda,$$

la sua eguale fornita dalla (4):

$$-\left[\frac{\partial \lambda}{\partial v}+\left(\begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix}-2\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\right)\lambda-\begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix}\lambda^2\right]\lambda,$$

si deduce

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial v}{\partial \beta}-\lambda\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)\Bigg[\frac{\partial \lambda}{\partial v}+\left(\begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix}-2\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\right)\lambda-\begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix}\lambda^2+&\\ +\left(\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}-\frac{1}{2}\frac{\partial \log \rho}{\partial v}\right)\lambda+\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}-\frac{1}{2}\frac{\partial \log \rho}{\partial u}\Bigg]&=0.\end{aligned}$$

Segue da ciò che, posto

$$\left.\begin{aligned}&-\begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}=p_0,\quad \frac{1}{2}\frac{\partial \log \rho}{\partial u}+\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}=p_1,\quad \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}-\frac{1}{2}\frac{\partial \log \rho}{\partial v}=p_2,\\ &-\begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix}=q_0,\quad \frac{1}{2}\frac{\partial \log \rho}{\partial v}+\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix}=q_1,\quad \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}-\frac{1}{2}\frac{\partial \log \rho}{\partial u}=q_2,\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

la funzione incognita $\lambda(u, v)$ deve necessariamente soddisfare al seguente sistema di equazioni alle derivate parziali del prim'ordine:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \lambda}{\partial u}&=\quad p_0-p_1\lambda+p_2\lambda^2,\\ \frac{\partial \lambda}{\partial v}&=-q_2+q_1\lambda-q_0\lambda^2,\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

che si traduce nell'equazione in λ ai differenziali totali del primo ordine del tipo di RICCATI:

$$d\lambda = p_0\,du - q_2\,dv - (p_1\,du - q_1\,dv)\,\lambda + (p_2\,du - q_0\,dv)\,\lambda^2. \tag{7}$$

Come condizione necessaria per la deformabilità in rigata della superficie, troviamo dunque l'esistenza di una soluzione reale λ delle equazioni (6) o della (7). Tale condizione è anche sufficiente, come si dedurrà valendosi di considerazioni identiche a quelle svolte negli ultimi numeri del paragrafo precedente.

Osserviamo d'altra parte che l'equazione di secondo grado in λ traducente le condiziori di illimitata integrabilità del sistema (6) non può essere un'identità in λ; poichè in tal caso esisterebbero infinite soluzioni del sistema (6) (dipendenti da una costante arbitraria) e sulla superficie una semplice infinità di sistemi di geodetiche rettificabili, circostanza questa che può solo presentarsi nelle superficie a curvatura nulla.

Segue da ciò che la funzione λ dovrà essere data da una delle due radici dell'equazione di 2.° grado

$$Q\lambda^2 + 2R\lambda + P = 0, \tag{8}$$

avendo posto

$$p_1 q_2 - p_0 q_1 + \frac{\partial p_0}{\partial v} + \frac{\partial q_2}{\partial u} = P, \quad p_2 q_1 - p_1 q_0 + \frac{\partial p_2}{\partial v} + \frac{\partial q_0}{\partial u} = Q,$$

$$p_0 q_0 - p_2 q_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p_1}{\partial v} + \frac{\partial q_1}{\partial u}\right) = R.$$

Si potrà pertanto affermare in generale:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie a curvatura negativa $-\frac{1}{\rho^2}$ *sia deformabile in rigata è che, fatte le posizioni* (5), *esista una funzione reale* λ *verificante le due equazioni:*

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\lambda}{\partial u} &= p_0 - p_1\lambda + p_2\lambda^2, \\ \frac{\partial\lambda}{\partial v} &= -q_2 + q_1\lambda - q_0\lambda^2. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Una tale funzione, se esiste, si ottiene risolvendo l'equazione di secondo grado (8).

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie a curvatura negativa $-\frac{1}{\rho^2}$ *sia deformabile in una quadrica rigata è che esistano due funzioni reali e distinte verificanti le* (6) (*).

Osserviamo che, supposte $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$ soluzioni delle (I*), l'equazione (8) si traduce nella seguente fra $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$ e $\frac{\partial v}{\partial \alpha}$:

$$P\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 + 2R\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \alpha} + Q\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^2 = 0,$$

che è la conseguenza differenziale a cui si perverrebbe se si operasse direttamente sulle equazioni del sistema (I*), nel modo indicato al § 1.

§ 6.

L'effettiva deformazione in rigata.

11. Vogliamo ora mostrare come si possa subito procedere alla risoluzione del problema, per una superficie di constatata deformabilità in rigata e per la quale quindi sia nota la funzione λ relativa, dell'effettiva costruzione di tutte le sue deformate rigate.

Vedremo che la risoluzione di questo problema dipende da quella dei più elementari.

Per la superficie S, riferita ad un qualunque sistema coordinato, si sia dunque constatata la sua deformabilità in rigata e sia λ la funzione che soddisfa alle equazioni (6) del paragrafo precedente. Vogliamo dimostrare il teorema:

Per la superficie S si possono costruire tutte le deformate rigate mediante l'integrazione, ogni volta, di un'equazione differenziale ordinaria del tipo di Riccati.

La deformazione della S in rigata è determinata quando sia assegnata su di essa una curva C che deve divenire asintotica sulla deformata rigata.

(*) Cfr. il primo numero del § 8.

Questa curva C è solo assoggettata alla condizione di non toccare nessuna delle geodetiche, del sistema che designeremo con Φ, che si devono rettificare. L'equazione differenziale di queste geodetiche è

$$d v - \lambda (u, v) \, d u = 0,$$

per cui, se

$$u = h (s), \quad v = k (s)$$

sono le assegnate equazioni parametriche della C, s designandone l'arco, la menzionata condizione si traduce nella seguente diseguaglianza a cui devono soddisfare $h (s)$ e $k (s)$:

$$k' (s) - \lambda \{ h (s), k (s) \} h' (s) \neq 0.$$

È noto l'angolo θ secondo cui la C taglia le geodetiche del sistema Φ; esso è quell'angolo fra 0 e π definito dall'eguaglianza

$$\cos \theta = \left[\frac{\underset{x,y,z}{S} \left(\frac{\partial x}{\partial u} + \lambda \frac{\partial x}{\partial v} \right) \left\{ \frac{\partial x}{\partial u} h' (s) + \frac{\partial x}{\partial v} k' (s) \right\}}{\sqrt{E + 2 F \lambda + G \lambda^2}} \right]_{\substack{u=h(s) \\ v=k(s)}} =$$

$$= \left[\frac{E h' + F k' + \lambda (F h' + G k')}{\sqrt{E + 2 F \lambda + G \lambda^2}} \right]_{\substack{u=h(s) \\ v=k(s)}}.$$

Secondo questo stesso angolo θ dovranno le rette della deformata rigata R tagliare la deformata Γ della C, e dovendo questa essere asintotica su R, ciascuna di quelle rette deve essere situata sul piano osculatore alla C nel punto per cui essa passa. D'altra parte sono note la torsione e la flessione della Γ che sono rispettivamente

$$\pm \frac{1}{\rho \{ h (s), k (s) \}}, \quad \left| \frac{1}{\rho_g \{ h (s), k (s) \}} \right|,$$

$-\frac{1}{\rho^2}$ indicando al solito la curvatura di S e $\frac{1}{\rho_g}$ la curvatura geodetica di C su S, per cui la curva Γ sarà, a meno di una simmetria rispetto all'origine, perfettamente determinata, e le sue equazioni

$$x = \bar{x} (s), \quad y = \bar{y} (s), \quad z = \bar{z} (s), \tag{1}$$

si otterranno integrando appunto un'equazione differenziale ordinaria del tipo di Riccati, ed eseguendo poi tre quadrature (*). Detti $\alpha(s)$, $\beta(s)$, $\gamma(s)$; $\xi(s)$, $\eta(s)$, $\zeta(s)$ rispettivamente i coseni di direzione della tangente e della normale principale della curva (1), le equazioni della rigata R deformata della S sono le seguenti

$$\left.\begin{aligned} x &= \bar{x}(s) + t\{\alpha(s)\cos\theta(s) \pm \xi(s)\operatorname{sen}\theta(s)\}, \\ y &= \bar{y}(s) + t\{\beta(s)\cos\theta(s) \pm \eta(s)\operatorname{sen}\theta(s)\}, \\ z &= \bar{z}(s) + t\{\gamma(s)\cos\theta(s) \pm \zeta(s)\operatorname{sen}\theta(s)\}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

dove vanno presi i segni superiori o gli inferiori secondo che la curvatura geodetica della C è positiva o negativa. Resta così dimostrato il teorema enunciato.

12. Osserviamo i seguenti notevoli casi particolari del teorema ora dimostrato.

Se la curva C assegnata su S come quella che sulla deformata rigata R deve divenire un'asintotica curvilinea è un'asintotica attuale sulla S, la Γ coinciderà nella forma colla C, potremo dunque prendere per Γ la C stessa e per costruire la deformata rigata R basterà, poichè il piano osculatore in un punto alla C è il piano tangente ivi alla superficie, per ciascun punto della C condurre la tangente alla geodetica del sistema Φ che vi passa (teorema di Chieffi (**)). Per quanto precede, possiamo dire di più:

Nota un'asintotica effettiva della S, si può in termini finiti costruirne la deformata rigata che ha con S quell'asintotica in comune.

Se $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ sono le equazioni della superficie S, quelle della detta deformata rigata R avente con S l'asintotica $u = h(s)$, $v = k(s)$, in comune, saranno le seguenti

$$x = x\{h(s),\ k(s)\} + t\left(\frac{\dfrac{\partial x}{\partial u} + \lambda\dfrac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{E + 2F\lambda + G\lambda^2}}\right)_{\substack{u=h(s)\\ v=k(s)}}, \ldots\ldots,\ldots$$

Supponiamo in secondo luogo che la curva C assegnata su S sia una geodetica, la Γ sarà una retta sulla deformata R. Assumiamo dunque per Γ l'asse delle z, poniamo cioè $\bar{x}(s) = \bar{y}(s) = 0$, $\bar{z}(s) = s$, sarà $\alpha(s) = \beta(s) = 0$,

(*) V. per esempio Bianchi, loc. cit., pag. 15.

(**) Chieffi, *Sulle deformate dell'iperboloide rotondo ad una falda e su alcune superficie che se ne deducono* [Giornale di matematiche, vol. XLIII, 1905].

$\gamma(s) = 1$, $\zeta(s) = \nu(s) = 0$ (*). Per potere scrivere le (2), indicando brevemente con $\rho(s)$ la funzione $\rho\{(h(s), k(s)\}$, basterà determinare le funzioni

$$\xi(s), \quad \eta(s); \quad \lambda(s), \quad \mu(s)$$

che soddisfino alle equazioni di FRENET

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{ds} &= -\frac{\lambda(s)}{\rho(s)}, & \frac{d\eta}{ds} &= -\frac{\mu(s)}{\rho(s)}, \\ \frac{d\lambda}{ds} &= \frac{\xi(s)}{\rho(s)}, & \frac{d\mu}{ds} &= \frac{\eta(s)}{\rho(s)}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\xi^2 + \eta^2 = 1, \quad \lambda^2 + \mu^2 = 1, \quad \xi\lambda + \mu\eta = 0, \quad \xi\mu - \lambda\eta = 1.$$

Poniamo perciò

$$\xi = \cos\tau, \quad \eta = \operatorname{sen}\tau,$$

sarà

$$\lambda = -\operatorname{sen}\tau, \quad \mu = \cos\tau,$$

per cui le (3) si ridurranno semplicemente alla seguente

$$\frac{d\tau}{ds} = -\frac{1}{\rho(s)}$$

donde

$$\tau = c - \int \frac{ds}{\rho(s)};$$

e per le equazioni della deformata rigata R della superficie S avremo, a meno di una rotazione attorno all'asse delle z:

$$\begin{aligned} x &= \quad t\cos\int_0^s \frac{ds}{\rho(s)} \operatorname{sen}\theta(s), \\ y &= -t\operatorname{sen}\int_0^s \frac{ds}{\rho(s)} \operatorname{sen}\theta(s), \\ z &= \quad s + t\cos\theta(s). \end{aligned}$$

Si ha dunque il teorema:

Nota una geodetica su S, che non sia del sistema Φ, si può costruire, mediante una quadratura, quella deformata rigata della superficie sulla quale la detta geodetica è rettilinea.

(*) $\lambda(s)$, $\mu(s)$, $\nu(s)$ designano al solito i coseni di direzione della binormale ad una curva.

13. Così, nel caso delle due superficie di rotazione deformabili in rigate, nel caso cioè del catenoide e dell'iperboloide rotondo ad una falda, per le quali superficie si conoscono tutte le geodetiche, si potranno costruire le ∞^2 deformate rigate ottenute rettificando ciascuna geodetica, occorrerà perciò soltanto, ogni volta, eseguire una quadratura. Ci affrettiamo però ad osservare che trattandosi di superficie di rotazione, non otterremo effettivamente, colla costruzione indicata, che ∞^1 deformate rigate *distinte*. Per avere ognuna di queste basterà deformare in rigata la superficie, rettificando ciascuna geodetica di un fascio di geodetiche per un punto della superficie (*).

Per cui, nel caso del catenoide, possiamo dire di conoscere, oltre le *due* deformate rigate fornite dalla deformazione di Chieffi (**), altre ∞^1 deformate rigate, *distinte* fornite dalle deformazioni ora indicate. E ricordando che le linee di stringimento di queste rigate sono curve a torsione costante $\frac{1}{m}$, se m è il raggio del circolo di gola del catenoide che si deforma, ne concluderemo: *Con sole quadrature si possono costruire ∞^1 curve* **distinte** *di data torsione costante.*

Nel caso dell'iperboloide rotondo ad una falda, il teorema di Chieffi non fornisce nessuna sua deformata rigata, le nostre deformazioni ne forniscono ∞^1 distinte, lasciando rigide le generatrici dell'uno o dell'altro sistema. Ricordiamo ora (***) che le linee di stringimento di tali rigate sono curve di Bertrand per le quali, se a e b designano rispettivamente l'asse trasverso e l'asse non trasverso dell'iperbola meridiana del detto iperboloide, la relazione lineare che ne lega la flessione e la torsione è

$$\frac{a}{\rho}+\frac{b}{T}=1,$$

e potremo dire: *Con sole quadrature si possono costruire ∞^1 curve* **distinte** *di* Bertrand *relative ad una data relazione lineare che ne deve legare la flessione e la torsione.*

Rileviamo le formole particolarmente semplici per la deformata rigata dell'iperboloide rotondo ad una falda proveniente dal rettificare un ramo dell'iperbola meridiana.

(*) Se due tali deformate rigate potessero portarsi a coincidere, esse sarebbero costituite da rette che s'appoggiano a due incidenti.

(**) Tale deformazione, nel caso particolare che consideriamo, fu data la prima volta dal Bianchi, v. Bianchi, *Lezioni*..., vol. II, § 377.

(***) Teorema di Laguerre, v. Bianchi, *Lezioni*..., vol. I, p. 269.

14. Riassumiamo a questo punto i risultati generali ottenuti fin qui: Data una superficie a curvatura negativa $-\frac{1}{\rho^2}$, si può con soli calcoli algebrici e di derivazione, consistenti nella risoluzione dell'equazione di secondo grado (8) del § 5 e nel verificare se una λ delle due radici ottenute soddisfa alle due relazioni differenziali del primo ordine (6) del § 5, decidere se la superficie è o no deformabile in rigata.

Nel caso affermativo, nota λ, il problema dell'effettiva costruzione di *tutte* le deformate rigate della superficie è perfettamente equivalente a quello della costruzione di curve di data torsione e flessione.

Per ogni asintotica attuale sulla superficie si ha poi senz'altro in termini finiti una deformata rigata avente quella asintotica a comune colla superficie. Per modo che, se sopra una superficie è noto il doppio sistema di asintotiche (attuali), constatata, riferendoci, come anche possiamo, a questo sistema, la sua deformabilità in rigata, si può ottenere senz'altro in termini finiti una doppia serie di deformate rigate della superficie: i calcoli necessarii per tutto ciò consistono unicamente in quelli (algebrici e di derivazione) diretti a vedere quale delle due radici dell'equazione (2) del § 4 verifica le (6) dello stesso paragrafo (*).

Infine, nota λ, per ogni geodetica sulla superficie [le cui equazioni $u = h(s)$, $v = k(s)$ verifichino la diseguaglianza $k'(s) - \lambda\{h(s), k(s)\}h'(s) \neq 0$] si costruisce una deformata rigata della superficie per la quale quella geodetica è divenuta una direttrice rettilinea, e ciò eseguendo una quadratura.

§ 7.

Qualche applicazione.

15. Nelle applicazioni giova conoscere, per una data superficie S di constatata deformabilità in rigata, l'espressione del relativo elemento lineare riferito ad un doppio sistema coordinato ortogonale di cui faccia parte il si-

(*) È visibile quale perfezionamento apportino questi risultati al citato teorema di CHIEFFI, secondo il quale teorema, per poter costruire la doppia serie indicata di deformate rigate di una superficie, *di supposta deformabilità in rigata,* occorre conoscerne, oltre le asintotiche, il sistema delle geodetiche rettificabili o almeno in ogni punto la direzione della geodetica che vi passa del detto sistema. Cfr. l'esposizione del teorema di CHIEFFI che trovasi nel BIANCHI, *Lezioni...*, vol. III, pp. 3-5.

stema Φ delle geodetiche rettificabili. E vogliamo qui anzitutto dare questa espressione.

Nota la funzione λ che soddisfa alle (6) del § 5 si hanno intanto con una quadratura tutte le curve del sistema Σ delle traiettorie ortogonali alle geodetiche del sistema Φ. Difatti queste geodetiche sono le linee integrali dell'equazione

$$d v - \lambda \, d u = 0,$$

per cui (*), posto

$$\sigma(u, v) = \int \frac{(E + \lambda F) \, d u + (F + G \lambda) \, d v}{\sqrt{E + 2 F \lambda + G \lambda^2}},$$

le linee dell'indicato sistema Σ hanno per equazione $\sigma(u, v) = \text{cost.}$ e σ è l'arco delle geodetiche Φ contato a partire da una loro traiettoria ortogonale fissa.

Le geodetiche del sistema Φ hanno per equazione (v. n. 8) $\varphi(u, v) = \text{cost.}$, essendo φ dato dall'eguaglianza

$$\varphi = \int \theta \, (d v - \lambda \, d u),$$

dove θ è una funzione sempre positiva il cui logaritmo soddisfa all'equazione:

$$\frac{\partial \log \theta}{\partial u} + \lambda \frac{\partial \log \theta}{\partial v} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} = 0. \tag{1}$$

Riferiamo la superficie S al doppio sistema Σ, Φ, assunto a nuovo sistema coordinato e sia:

$$E_1(\sigma, \varphi) \, d \sigma^2 + 2 F_1(\sigma, \varphi) \, d \sigma \, d \varphi + G_1(\sigma, \varphi) \, d \varphi^2$$

il suo $d s^2$ nelle coordinate σ, φ. Si avrà

$$E_1 = 1, \quad F_1 = 0,$$

$$G_1 = \frac{1}{\Delta_1 \varphi} = \frac{E G - F^2}{E \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - 2 F \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + G \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2} = \frac{E G - F^2}{\theta^2 (E + 2 F \lambda + G \lambda^2)}.$$

(*) V. Bianchi, *Lezioni...*, vol. I, p. 202.

Concludiamo pertanto:

Nota una soluzione $\log \theta$ *dell'equazione* (1), *si può con sole quadrature calcolare, sotto forma geodetica, l'elemento lineare della rigata su cui la S è applicabile.*

Come conferma della teoria generale, possiamo verificare l'identità

$$\frac{\partial^3 G_1}{\partial \sigma^3} \equiv 0,$$

esprimente che G_1 è della forma

$$a_0(\varphi)\sigma^2 + a_1(\varphi)\sigma + a_2(\varphi).$$

Questa verifica si compie facilmente osservando che

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} = \frac{\partial u}{\partial \sigma}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial \sigma}\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial u}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial}{\partial u} + \lambda \frac{\partial}{\partial v}\right) = \frac{\dfrac{\partial}{\partial u} + \lambda \dfrac{\partial}{\partial v}}{\sqrt{E + 2F\lambda + G\lambda^2}},$$

e tenendo conto della (1) a cui soddisfa $\log \theta$, delle identità (6) del § 5 a cui soddisfa λ e delle espressioni delle derivate di E, F, G per mezzo dei simboli di Christoffel.

16. Vogliamo ora mostrare, con due esempî, come si possa applicare la teoria generale svolta alla risoluzione di questioni che ad essa competono.

A tale scopo poniamoci dapprima il seguente problema:

Ricercare tutte le superficie d'area minima deformabili in rigate.

Questa ricerca si compie assai facilmente applicando il criterio di Ricci sulla deformabilità di una superficie in superficie d'area minima e il risultato ne è il seguente:

Le uniche superficie d'area minima deformabili in rigate sono le elicoidali (*).

Ma anche la nostra teoria permette con pari semplicità di pervenire allo stesso risultato.

Riferiamo perciò la superficie d'area minima al doppio sistema ortogonale isotermo delle sue asintotiche effettive u e v; se $-\frac{1}{\rho^2}$ è la curvatura della superficie, al quadrato del suo elemento lineare si può, con convenienti

(*) V. Bianchi, *Lezioni*..., vol. II, §§ 345 e 349.

parametri u e v, dare la forma

$$d s^2 = \rho (d u^2 + d v^2), \tag{2}$$

ρ essendo una soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial^2 \log \sqrt{\rho}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log \sqrt{\rho}}{\partial v^2} = \frac{1}{\rho} \, . \tag{3}$$

La questione che dobbiamo risolvere è la seguente:

Ricercare tutte le soluzioni $\rho (u, v)$ della (3) per le quali la forma differenziale (2) sia equivalente al quadrato dell'elemento lineare di una superficie rigata.

Per un $d s^2$ della forma (2) abbiamo, adottando le notazioni del § 4,

$$p = \frac{\partial \log \sqrt{\rho}}{\partial v}, \quad q = \frac{\partial \log \sqrt{\rho}}{\partial u}, \quad r = \sqrt{\rho} \ (*).$$

Poniamo

$$\log \sqrt{\rho} = \theta ,$$

l'equazione (3) si cangia nell'equazione di Liouville in θ

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = e^{-2\theta},$$

e la questione proposta consiste (§ 4) nel ricercarne una soluzione tale che esista una funzione λ verificante le equazioni

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \lambda}{\partial u} + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial u} - \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0, \\ &\frac{\partial \lambda}{\partial v} - \lambda \frac{\partial \theta}{\partial v} + \lambda^2 \frac{\partial \theta}{\partial u} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

(*) Per avere dunque tutte le superficie d'area minima rigate, bisogna trovare una soluzione della (3) per cui sia $\frac{\partial \log \sqrt{\rho}}{\partial v} = 0$, cioè $\sqrt{\rho}$ funzione della sola u. Ne segue:

$$\rho = \frac{\cosh^2 \sqrt{a}\,(u + b)}{a} ,$$

con a e b costanti arbitrarie e quindi che: *Le uniche superficie d'area minima rigate sono le elicoidi rigate d'area minima* (teorema di Catalan).

Ora dalle (4) segue

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} - \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial u} = 0, \tag{5}$$

per cui possiamo dare all'enunciato della nostra questione anche la seguente forma:

Ricercare le soluzioni λ dell'equazione (5) tali che le due seguenti equazioni alle derivate parziali, una del secondo ordine e l'altra del primo,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = e^{-2\theta} \\ &\frac{\partial \theta}{\partial v} = \lambda \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{\partial \lambda}{\partial u}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

abbiano una soluzione comune.

Ogni tale soluzione comune, introdotta nella (2), darà il $d s^2$ di una superficie d'area minima deformabile in rigata.

Applicando al sistema (6) il noto metodo generale per la ricerca di soluzioni comuni a due equazioni alle derivate parziali, una del second'ordine e l'altra del primo (*), si vede subito che l'unica soluzione dell'equazione (5) per la quale le (6) ammettono una soluzione comune è la $\lambda = \text{cost.}$

Supponiamo perciò $\lambda = \text{cost.} = k$. Il sistema (6) diverrà

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = e^{-2\theta}, \\ &\frac{\partial \theta}{\partial v} = k \frac{\partial \theta}{\partial u}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

sistema che è illimitatamente integrabile e di cui si trova subito la soluzione θ dipendente appunto da *due* costanti arbitrarie. Poniamo perciò

$$\frac{\partial \theta}{\partial u} = \tau,$$

il sistema (7) equivale al seguente sistema ai differenziali totali illimitata-

(*) V., ad esempio, GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux derivées partielles du second ordre*, t. II, p. 46.

mente integrabile:

$$\left.\begin{aligned} d\theta &= \tau\,(d u + k\, d v), \\ d\tau &= \frac{e^{-2\theta}}{1+k^2}\left(d u + k\, d v\right); \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

da queste due equazioni si ricava

$$d\tau = \frac{e^{-2\theta}}{1+k^2}\,\frac{d\theta}{\tau},$$

e quindi, se a designa una costante positiva arbitraria,

$$\tau = \sqrt{a - \frac{e^{-2\theta}}{1+k^2}}\,.$$

Introdotta questa espressione di τ nella prima delle (8), si avrà, b indicando una seconda costante arbitraria,

$$\frac{1}{2}\int \frac{d\rho}{\sqrt{a\rho^2 - \frac{\rho}{1+k^2}}} = u + k v + b,$$

da cui

$$\rho = \frac{\cosh^2 \sqrt{a}\,(u + k v + b)}{a\,(1+k^2)}\,.$$

Pertanto il quadrato dell'elemento lineare della più generale superficie d'area minima deformabile in rigata, riferita al doppio sistema delle sue asintotiche, è dato da

$$d s^2 = \frac{\cosh^2 \sqrt{a}\,(u + k v + b)}{a\,(1+k^2)}\,(d u^2 + d v^2),$$

dove a, b, k sono costanti arbitrarie. Ma diamo a questo $d s^2$ la forma geodetica, riferendolo alle geodetiche rettificabili $d v - k\, d u = 0$ e alle loro traiettorie ortogonali, porremo perciò

$$\sqrt{a}\,(u + k v + b) = u_1,$$

$$\sqrt{a}\,(v - k u) = v_1,$$

e si avrà

$$d s^2 = \frac{\cosh^2 u_1}{a^2\,(1+h^2)^2}\,(d u_1^2 + d v_1^2).$$

Ora le uniche superficie d'area minima che realizzano questo ds^2 sono appunto (Bianchi, loc. cit., § 345) le superficie minime elicoidali, le cui equazioni si scrivono

$$x = m(\cos\beta \cosh u_1 \cos v_1 + \operatorname{sen}\beta \operatorname{senh} u_1 \operatorname{sen} v_1),$$

$$y = m(\cos\beta \cosh u_1 \operatorname{sen} v_1 - \operatorname{sen}\beta \operatorname{senh} u_1 \cos v_1),$$

$$z = m(u_1 \cos\beta + v_1 \operatorname{sen}\beta),$$

dove è

$$m = \frac{1}{a^2(1+k^2)}$$

e β indica una costante arbitraria.

17. Un'altra ricerca che il nostro criterio permette di fare colla massima speditezza è quella *di tutte le superficie reali di rotazione a curvatura negativa deformabili in rigate a rette reali o immaginarie.* E questa ricerca vogliamo ora compiere nel modo più esauriente.

Si sa (*) che le superficie di rotazione deformabili in rigate a rette reali sono unicamente il *catenoide* (e le sue deformate di rotazione) e il *catenoide allungato* (e le sue deformate di rotazione delle quali fa parte *l'iperboloide rotondo ad una falda*).

Non si conoscono in modo altrettanto completo le superficie reali di rotazione a curvatura negativa deformabili in rigate a rette immaginarie, applicabili cioè su quadriche immaginarie. Fra queste, come forme tipiche, si sono notate le superficie di rotazione aventi per curva meridiana rispettivamente la *trattrice*, la *catenaria accorciata*, la *sinusoide iperbolica*, la *curva logaritmica* (**). Ma queste, con le loro deformate di rotazione, non forniscono tutte le possibili superficie reali di rotazione a curvatura negativa applicabili su quadriche immaginarie; fra esse non trovansi, ad esempio, le deformate reali di rotazione del paraboloide rotondo di Darboux a parametro puramente immaginario: *Alle menzionate superficie di rotazione vanno aggiunte altre quattro, e queste e quelle, colle loro deformate reali di rotazione, dànno tutte le possibili superficie reali di rotazione a curvatura negativa applicabili su quadriche immaginarie.*

(*) Cfr. Bianchi, *Lezioni* ..., Vol. I, § 123.
(**) Cfr. Bianchi, *Vorlesungen* ..., § 267.

Condurremo la nostra ricerca studiando il sistema (6) del § 5 nel caso di un ds^2 appartenente ad una superficie reale di rotazione a curvatura negativa, e procurando di determinare i coefficienti del ds^2 in modo che quel sistema ammetta una soluzione in λ *reale o complessa:* nel caso di una soluzione reale il corrispondente ds^2 competerà ad una superficie di rotazione deformabile in una rigata a rette reali, nel caso opposto competerà ad una superficie di rotazione deformabile in una rigata a rette immaginarie, cioè in una quadrica immaginaria.

Considerando il ds^2 di una superficie S di rotazione a curvatura negativa sotto la solita forma

$$ds^2 = du^2 + r^2(u)\,dv^2, \tag{9}$$

si tratta di determinare $r(u)$ in modo che la S sia deformabile in rigata.

Si ha

$$p_0 = -\left\{ {1\,1 \atop 2} \right\} = 0, \quad p_1 = \frac{\partial \log \sqrt{\rho}}{\partial u} + \left\{ {1\,2 \atop 2} \right\} - \left\{ {1\,1 \atop 1} \right\} = \frac{d}{du} \log (r\sqrt{\rho}),$$

$$p_2 = \left\{ {1\,2 \atop 1} \right\} - \frac{\partial \log \sqrt{\rho}}{\partial v} = 0,$$

$$q_0 = -\left\{ {2\,2 \atop 1} \right\} = r\,r', \quad q_1 = \frac{\partial \log \sqrt{\rho}}{\partial v} + \left\{ {1\,2 \atop 1} \right\} - \left\{ {2\,2 \atop 2} \right\} = 0,$$

$$q_2 = \left\{ {1\,2 \atop 2} \right\} - \frac{\partial \log \sqrt{\rho}}{\partial u} = \frac{d}{du} \log \frac{r}{\sqrt{\rho}},$$

$$-\frac{1}{\rho^2} = -\frac{r''}{r} < 0, \quad \frac{1}{\rho} = \sqrt{\frac{r''}{r}} > 0.$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la S sia deformabile in una rigata (*a rette reali o immaginarie*) è che esista una funzione λ (*reale o complessa*) verificante le due equazioni

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} + \lambda \frac{d}{du} \log (r\sqrt{\rho}) = 0,$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} + \frac{d}{du} \log \frac{r}{\sqrt{\rho}} + \lambda^2 r\,r' = 0,$$

e l'equazione differenziale delle geodetiche della S deformabili in rette sarà

$$dv - \lambda\,du = 0.$$

P, Q, R, coefficienti dell'equazione

$$Q\lambda^2 + 2R\lambda + P = 0,$$

a cui deve di necessità soddisfare λ, sono funzioni della sola u, perciò λ dovrà, essa pure, esser funzione dellà sola u; si dovrà pertanto con una funzione $\lambda(u)$ soddisfare alle due equazioni

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\lambda}{du} + \lambda \frac{d}{du}\log(r\sqrt{\rho}) = 0, \\ &\frac{d}{du}\log\frac{r}{\sqrt{\rho}} + \lambda^2 r r' = 0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Già da un primo esame del sistema (10) si vede subito che, eccettuato il caso in cui alle (10) soddisfa la $\lambda \equiv 0$, in cui cioè le geodetiche rettificabili sulla S sono i meridiani, caratterizzato dal soddisfare r all'equazione

$$\frac{d}{du}\log\frac{r}{\sqrt{\rho}} = 0,$$

in ogni altro, poichè se alle (10) soddisfa λ, soddisfa anche $-\lambda$, la superficie è applicabile sopra una quadrica (a rette reali o immaginarie).

La prima equazione delle (10) dà

$$\lambda = \frac{c}{r\sqrt{\rho}},$$

c indicando una costante reale o complessa. E poichè per la seconda delle (2) deve aversi

$$\frac{1}{2}\frac{d}{du}\log\frac{r^2}{\rho} + \frac{r'}{r}\frac{c^2}{\rho} = 0, \tag{11}$$

c^2 dovrà essere reale e quindi c o reale o puramente immaginaria. La (11) esprime la seguente equazione differenziale a cui deve soddisfare r:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{du}\log\sqrt{r^3 r''} + \frac{r'}{r}\sqrt{\frac{r''}{r}}\,c^2 = 0, \tag{12}$$

che si tratta di integrare.

Per $c = 0$, dovrà r soddisfare all'equazione

$$r^3 r'' = a = \text{cost. arb. positiva},$$

equivalente alla

$$2\,r'\,r'' = a\,\frac{2\,r'}{r^3}\,,$$

da cui

$$r'^2 + \frac{a}{r^2} = b = \text{cost. arb. positiva},$$

e quindi

$$d\,s^2 = \frac{r^2}{b\,r^2 - a}\,d\,r^2 + r^2\,d\,v^2. \tag{13}$$

Per offrire un tipo di superficie di rotazione che realizzi questo $d\,s^2$, rammentiamo che tutte le possibili (*) superficie di rotazione il cui elemento lineare può porsi sotto la forma (13), riferite al doppio sistema dei meridiani e dei paralleli, hanno il seguente $d\,s^2$

$$d\,s^2 = \frac{r^2}{m\,(b\,r^2 - m\,a)}\,d\,r^2 + r^2\,d\,v^2,$$

m indicando una costante positiva arbitraria. Avremo dunque la seguente semplice infinità di curve meridiane:

$$z = \int\sqrt{\frac{(1 - m\,b)\,r^2 + m^2\,a}{m\,(b\,r^2 - m\,a)}}\,d\,r,$$

fra le quali, per $m = \frac{1}{b}$, si trova la *catenaria*

$$r = k\cosh\frac{z}{k}\,,\quad k = \frac{\sqrt{a}}{b}\,.$$

Il catenoide e le sue deformate reali di rotazione sono dunque le uniche superficie reali di rotazione deformabili in rigate per rettificazione dei meridiani.

Supponiamo ora $c \neq 0$. La (12) potrà scriversi

$$(\sqrt{r^3\,r''})' + 2\,r'\,r''\,c^2 = 0,$$

da cui si ricava

$$\sqrt{r^3\,r''} + r'^2\,c^2 = a, \tag{14}$$

(*) Cfr. BIANCHI, *Lezioni*..., Vol. I, § 105. Risultando $\frac{r''}{r} = \frac{a}{r^4}$, la superficie non è a curvatura costante.

dove a è tale costante reale arbitraria da risultare

$$a - c^2 r'^2 > 0$$

e quindi positiva per c^2 positiva. La (14) può scriversi

$$\frac{2c^2 r' r''}{(a - c^2 r'^2)^2} - \frac{2c^2 r'}{r^3} = 0,$$

ne segue

$$\frac{1}{a - c^2 r'^2} + \frac{c^2}{r^2} = b, \qquad (15)$$

dove b è tale costante reale arbitraria da risultare

$$b - \frac{c^2}{r^2} > 0, \quad \text{cioè} \quad b r^2 - c^2 > 0,$$

e quindi positiva per c^2 positiva. Segue dalla (15)

$$\left(\frac{dr}{du}\right)^2 = \frac{\frac{ab-1}{c^2} r^2 - a}{b r^2 - c^2},$$

pertanto le costanti a e b devono inoltre esser tali che risulti

$$\frac{ab-1}{c^2} r^2 - a > 0,$$

e quindi $ab - 1 > 0$ per $c^2 > 0$.

Poniamo

$$\frac{ab-1}{c^2} = \alpha, \quad -a = \beta,$$

$$b = \gamma, \quad -c^2 = \delta,$$

potremo dopo ciò enunciare il teorema:

Per tutte le superficie reali di rotazione a curvatura negativa deformabili in rigate (a rette reali o immaginarie) si ha:

$$\left(\frac{dr}{du}\right)^2 = \frac{\alpha r^2 + \beta}{\gamma r^2 + \delta},$$

dove α, β, γ, δ sono costanti reali arbitrarie legate dalla relazione

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1 \qquad (16)$$

e per le quali riescono soddisfatte le disuguaglianze

$$\alpha r^2 + \beta > 0, \quad \gamma r^2 + \delta > 0, \quad \delta r'^2 - \beta > 0 \ (*). \tag{17}$$

Le equazioni delle geodetiche rettificabili sulla superficie sono

$$d v \pm \frac{\sqrt{-\delta}}{r\sqrt{\rho}}\, d u = 0 \ (**).$$

Al quadrato dell'elemento lineare di ciascuna di queste superficie si può dunque dare la forma

$$d s^2 = \frac{\gamma r^2 + \delta}{\alpha r^2 + \beta}\, d r^2 + r^2\, d v^2, \tag{18}$$

e per la curvatura si trova

$$-\frac{1}{\rho^2} = -\frac{1}{(\gamma r^2 + \delta)^2}, \tag{19}$$

per cui, nelle variabili r e v, le equazioni differenziali delle geodetiche rettificabili sono

$$d v \pm \frac{\sqrt{-\delta}\, d r}{r\sqrt{\alpha r^2 + \beta}} = 0.$$

Ricerchiamo i varî tipi di superficie reali di rotazione realizzanti l'elemento lineare dato dalla (18). Non consideriamo il caso delle superficie pseudosferiche, caratterizzato dall'essere $\gamma = 0$, per cui già si conoscono le deformate tipiche reali di rotazione in numero di *tre*: del tipo *parabolico*, del tipo *ellittico*, del tipo *iperbolico* (***), corrispondenti, nelle nostre notazioni, al supporre nella (18) $\beta = 0$, $\beta > 0$, $\beta < 0$. Solo osserviamo per questo caso che, essendo $\gamma = 0$, si ricaverà dalla seconda delle (17) $\delta > 0$ e quindi dalla (19) $\delta = \rho$, e per equazioni delle geodetiche rettificabili otterremo

$$d v \pm \frac{i}{r}\, d u = 0,$$

definenti le linee di lunghezza nulla sopra la superficie.

(*) La diseguaglianza $\delta r'^2 - \beta > 0$ è conseguenza della $\gamma r^2 + \delta > 0$ e della $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

(**) Il nostro enunciato comprende evidentemente anche il caso $\delta = 0$ delle superficie di rotazione deformabili in rigate per rettificazione dei meridiani.

(***) Cfr. Bianchi, *Lezioni* . . . , Vol. I, §§ 102 e 103.

Escluso il caso $\gamma = 0$ *delle superficie pseudosferiche,* possiamo dire che tutte le possibili superficie di rotazione realizzanti un elemento lineare della forma dedotta dalla (18), riferite al doppio sistema dei meridiani $v = \text{cost.}$ e dei paralleli $r = \text{cost.}$, hanno il seguente $d\,s^2$:

$$d\,s^2 = \frac{\gamma\,r^2 + \delta\,m}{m\,(\alpha\,r^2 + \beta\,m)}\,d\,r^2 + r^2\,d\,v^2,$$

dove m è una costante positiva.

Ora, usufruendo della relazione (16) e delle diseguaglianze (17) a cui devono soddisfare le costanti α, δ, β, γ, si hanno le seguenti *otto* distinte combinazioni di segno per le dette costanti:

$$\delta < 0, \quad \alpha > 0, \quad \gamma > 0, \quad \beta < 0,$$

$$\delta > 0, \begin{cases} \alpha > 0, \quad \gamma > 0, \begin{cases} \beta < 0, \\ \beta = 0, \\ \beta > 0, \end{cases} \\ \alpha = 0, \quad \gamma < 0, \quad \beta > 0, \\ \alpha > 0, \quad \gamma < 0, \begin{cases} \beta < 0, \\ \beta = 0, \\ \beta > 0. \end{cases} \end{cases}$$

Ne segue la possibile esistenza di *otto* famiglie di superficie reali di rotazione a curvatura negativa deformabili in rigate a rette reali o immaginarie, cosiffatte che un componente di ognuna non è ottenibile per deformazione (**reale**) da un componente di un'altra, mentre lo è da un componente della stessa famiglia. Vediamo ora se esistono effettivamente, per ciascuna delle *otto* famiglie menzionate, superficie reali di rotazione realizzanti il corrispondente $d\,s^2$.

Caso $\delta < 0$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $\beta < 0$. Vi appartengono tutte le possibili superficie di rotazione deformabili in quadriche a rette reali. Si ha la seguente semplice infinità (dipendente dai valori di m) di curve meridiane

$$z = \int \sqrt{\frac{(\gamma - \alpha\,m)\,r^2 + m\,(\delta - \beta\,m)}{m\,(\alpha\,r^2 + \beta\,m)}}\,d\,r. \tag{20}$$

Per $m = \frac{\delta}{\beta}$, si trova (posto $\delta = -c^2$) l'*iperbola*

$$\frac{\alpha}{c^2}\,r^2 - \alpha^2\,z^2 = 1,$$

per $m = \frac{\gamma}{\alpha}$, la *catenaria allungata*

$$r = \frac{k}{\alpha} \cosh \alpha z,$$

$$k = \sqrt{-\beta \gamma}, \quad -\beta \gamma = 1 - \alpha \delta > 1.$$

Ne segue che: *Il catenoide e il catenoide allungato, colle loro deformate di rotazione, forniscono tutte le superficie di rotazione deformabili in rigate a rette reali; le superficie della seconda famiglia sono applicabili sull'iperboloide rotondo ad una falda.*

Negli altri *sette* casi è sempre $\delta > 0$, le corrispondenti famiglie di superficie di rotazione saranno dunque applicabili su quadriche immaginarie.

Casi $\delta > 0$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$. Possiamo fare, nell'equazione (20) delle curve meridiane, $m = \frac{\gamma}{\alpha}$ ed otteniamo,

per $\beta < 0$, la *catenaria accorciata:*

$$r = \frac{k}{\alpha} \cosh \alpha z, \quad k = \sqrt{-\beta \gamma}, \quad 0 < -\beta \gamma = 1 - \alpha \delta < 1;$$

per $\beta = 0$, la *curva logaritmica:*

$$z = \delta \log r \text{ (*)};$$

per $\beta > 0$, la *sinusoide iperbolica:*

$$r = k \operatorname{senh} \alpha z, \quad k = \frac{\sqrt{\beta \gamma}}{\alpha}.$$

(*) In questo caso la (20) si scrive

$$z = \int \sqrt{\frac{\delta^2}{r^2} + \frac{\gamma \delta}{m} - 1}\, d r,$$

vi sono valori positivi di m pei quali è $-1 < \frac{\gamma \delta}{m} - 1 < 0$, posto, per tali valori di m, $1 - \frac{\gamma \delta}{m} = k^2$, sarà $k < 1$ e si trova per curva meridiana la *trattrice allungata*

$$r = \frac{\delta}{k} \operatorname{sen} \tau, \quad z = \delta \left(\log \operatorname{tang} \frac{\tau}{2} + \cos \tau \right).$$

La corrispondente superficie di rotazione potrebbe anche assumersi come tipica per la famiglia in discorso.

Caso $\delta > 0$, $\alpha = 0$, $\gamma < 0$, $\beta > 0$. Risulterà $\gamma = -\frac{1}{\beta}$, facciamo nella (20) $m = \frac{\delta}{2\beta}$, otterremo la curva meridiana

$$z = \int \sqrt{1 - \left(\frac{2r}{\delta}\right)^2} \, d\, r,$$

e quindi, se τ varia fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$,

$$r = \frac{\delta}{2} \operatorname{sen} \tau, \quad z = \frac{\delta}{8} (2\tau + \operatorname{sen} 2\tau).$$

La superficie di rotazione che ha questa curva meridiana è una deformata reale del *paraboloide rotondo* di Darboux a parametro puramente immaginario, la cui curva meridiana si ottiene appunto dalla (20) col farvi $m = \frac{\delta}{\beta}$.

Caso $\delta > 0$, $\alpha > 0$, $\gamma < 0$, $\beta < 0$. Poniamo nella (20)

$$m = -\frac{\delta}{\beta}, \quad r = \sqrt{\frac{\delta}{\alpha}} \cosh \varphi,$$

si avrà

$$z = \sqrt{\frac{2\delta}{\alpha}} \int \sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{2\alpha\delta}\right) \cosh^2 \varphi} \, d\, \varphi.$$

Poniamo

$$1 - \frac{1}{2\alpha\delta} = k'^2, \quad \frac{\delta}{\alpha} = l^2,$$

essendo $\alpha\delta = 1 + \beta\gamma > 1$, risulterà $1 > k' > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Le equazioni della curva meridiana si scriveranno

$$r = l \cosh \varphi, \quad z = l\sqrt{2} \int \sqrt{1 - k'^2 \cosh^2 \varphi} \, d\, \varphi,$$

od anche, introducendo le funzioni ellittiche col porre

$$k = \sqrt{1 - k'^2} \qquad \left(k < \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\operatorname{senh} \varphi = \frac{k}{k'} \operatorname{cn} (\tau, k),$$

ove si faccia variare τ fra 0 e il mezzo periodo,

$$r = l\,\frac{\operatorname{dn}(\tau,\,k)}{k'}\,,$$

$$z = l\sqrt{2}\,k^2\int_0^\tau \operatorname{sn}^2(\tau,\,k)\,d\tau = l\sqrt{2}\left[\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}\,\tau - \frac{\Theta'(\tau)}{\Theta(\tau)}\right]\ (*).$$

Questa curva è affine alla

$$r = l\,\frac{\operatorname{dn}(\tau,\,k)}{k}\,,\qquad z = \frac{l}{k}\left[\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}\,\tau - \frac{\Theta'(\tau)}{\Theta(\tau)}\right],$$

curva meridiana della superficie pseudosferica di rotazione di raggio l del tipo iperbolico $\left(\text{coincide con questa solo per } k = \frac{1}{\sqrt{2}}\,,\ \text{cioè per } \gamma = 0\right)$. Si ha dunque il teorema: *Costruita la superficie pseudosferica di rotazione del tipo iperbolico col modulo* $k < \frac{1}{\sqrt{2}}$, *l'affinità*

$$x' = \frac{k}{k'}\cdot x,\quad y' = \frac{k}{k'}\cdot y,\quad z' = k\sqrt{2}\,.\,z,$$

trasforma la superficie in una superficie di rotazione a curvatura negativa non costante, altresì applicabile sopra una quadrica immaginaria, tipica per le superficie di rotazione della famiglia $\delta > 0$, $\alpha > 0$, $\gamma < 0$, $\beta < 0$.

Caso $\delta > 0$, $\alpha > 0$, $\gamma < 0$, $\beta = 0$. Sarà $\alpha = \frac{1}{\delta}$, e quindi la (20) si scriverà

$$z = \int\sqrt{\frac{\delta^2}{r^2} + \frac{\gamma\,\delta}{m} - 1}\;d\,r,$$

$\frac{\gamma\,\delta}{m} - 1$ è sempre negativa e minore di -1, posto $1 - \frac{\gamma\,\delta}{m} = k^2$, sarà $k > 1$

(*) Θ designa la funzione di Jacobi costruita coi periodi

$$2\,\omega = 4\int_0^1 \frac{d\,u}{\sqrt{(1-u^2)\,(1-k^2\,u^2)}}\,,\qquad 2\,\omega' = 2\,i\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{d\,u}{\sqrt{(u^2-1)\,(1-k^2\,u^2)}}\,.$$

e si trova la *trattrice accorciata:*

$$r = \frac{\delta}{k} \operatorname{sen} \tau, \quad z = \delta \left(\log \operatorname{tang} \frac{\tau}{2} + \cos \tau \right).$$

Caso $\delta > 0$, $\alpha > 0$, $\gamma < 0$, $\beta > 0$. Poniamo nella (12):

$$m = \frac{\delta}{2 \beta}, \quad r = \sqrt{\frac{\delta}{2 \alpha}} \operatorname{senh} \varphi,$$

si avrà

$$z = \sqrt{\frac{\delta}{2 \alpha}} \int \sqrt{1 + \left(1 - \frac{2}{\alpha \delta}\right) \operatorname{senh}^2 \varphi} \, d \varphi.$$

Per essere $0 < \alpha \delta = 1 + \beta \gamma < 1$, posto $\frac{2}{\alpha \delta} - 1 = \lambda^2$, risulterà $\lambda > 1$. Poniamo

$$\frac{\delta}{2 \alpha} = l^2, \quad \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}} = k, \quad \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} = k', \quad \left(k < \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

potremo scrivere

$$r = l \operatorname{senh} \varphi, \quad z = l \int \sqrt{1 - \frac{k'}{k} \operatorname{senh}^2 \varphi} \, d \varphi,$$

e quindi, col cambiamento di variabile

$$\cosh \varphi = \frac{\operatorname{dn}(\tau, k)}{k'},$$

ove si tenga τ fra 0 e il mezzo periodo,

$$r = l \frac{k}{k'} \operatorname{cn}(\tau, k), \quad z = \frac{l}{k} \left[\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} \tau - \frac{\Theta'(\tau)}{\Theta(\tau)} \right].$$

Questa curva è affine alla curva meridiana della superficie pseudosferica di rotazione del tipo ellittico, avente per equazione

$$r = l k \operatorname{cn}(\tau, k), \quad z = l \left[\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} \tau - \frac{\Theta'(\tau)}{\Theta(\tau)} \right],$$

si ha dunque il teorema: *Costruita la superficie pseudosferica di rotazione* *del tipo ellittico col modulo* $k < \frac{1}{\sqrt{2}}$, *l'affinità*

$$x' = \frac{x}{k'}, \quad y' = \frac{y}{k'}, \quad z' = \frac{z}{k},$$

trasforma la superficie in una superficie a curvatura negativa non costante altresì applicabile sopra una quadrica immaginaria, tipica per le superficie di rotazione della famiglia $\delta > 0$, $\alpha > 0$, $\gamma < 0$, $\beta > 0$.

Crediamo utile dare pei risultati della precedente analisi il quadro riassuntivo che trovasi alla fine della Memoria, pag. 62.

§ 8.

Le condizioni necessarie e sufficienti per la deformabilità in quadrica rigata di una superficie e l'effettiva deformazione.

18. Passiamo ora a dare le condizioni necessarie e sufficienti affinchè una superficie sia applicabile sopra una superficie doppiamente rigata, cioè sopra una quadrica rigata (*).

È intanto evidente che condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie sia suscettibile d'essere deformata in una quadrica rigata è che su di essa esista un doppio sistema di asintotiche virtuali totalmente costituito da linee geodetiche. Per semplicità e in vista delle applicazioni alle trasformazioni per congruenze W, riferiamo la superficie ad un doppio sistema qualsiasi di asintotiche virtuali (u, v); perchè su di essa possa esistere il men-

(*) Queste condizioni si possono anche facilmente stabilire, come ho già accennato al § 4, servendosi delle conclusioni a cui ivi pervenni e dei noti teoremi generali sulla deformazione delle rigate, ma mi piace ritrovarle di nuovo direttamente allo scopo, in ispecie, di rilevare un interessante fatto analitico, relativo ad un certo sistema di *quattro* equazioni non lineari alle derivate parziali del secondo ordine in *due* funzioni incognite, consistente in ciò, che se quel sistema ammette soluzioni, queste possono dedursi dall'integrazione di due equazioni lineari omogenee alle derivate parziali del prim'ordine, i cui coefficienti si ottengono risolvendo un'equazione di 2.° grado.

tovato doppio sistema (α, β) di asintotiche virtuali totalmente costituito da linee geodetiche, occorre e basta che il sistema seguente di *quattro* equazioni alle derivate parziali del 2.° ordine nelle *due* funzioni incognite u e v:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta}=\frac{\partial\log r}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta}+q\frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta},\\
&\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta}=\frac{\partial\log r}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta}+p\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta},\\
&\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}=p\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)^3-q\left(\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right)^3-\frac{\partial\log r}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)^2\frac{\partial v}{\partial\alpha}+\frac{\partial\log r}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right)^2\frac{\partial u}{\partial\alpha},\\
&\frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2}-\frac{\partial v}{\partial\beta}\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}=p\left(\frac{\partial u}{\partial\beta}\right)^3-q\left(\frac{\partial v}{\partial\beta}\right)^3-\frac{\partial\log r}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial\beta}\right)^2\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{\partial\log r}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial\beta}\right)^2\frac{\partial u}{\partial\beta},
\end{aligned}\right\}\quad\text{(III)}$$

ammetta una coppia di soluzioni u e v per le quali l'jacobiano $I(u,\ v)$ sia diverso da zero. Le $\alpha=\text{cost.}$ e le $\beta=\text{cost.}$ tracceranno allora sulla superficie l'indicato doppio sistema di asintotiche virtuali totalmente costituito da linee geodetiche.

Ora, ammessa l'esistenza della detta coppia u e v di soluzioni del sistema (III), trarremo (n. 3) come conseguenza differenziale delle prime tre equazioni del sistema e della condizione $I(u,\ v)=|=0$:

$$P\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)^2+2R\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\alpha}+Q\left(\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right)^2=0,\qquad\text{(II)}$$

ed evidentemente come conseguenza delle prime due equazioni e della quarta:

$$P\left(\frac{\partial u}{\partial\beta}\right)^2+2R\frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial v}{\partial\beta}+Q\left(\frac{\partial v}{\partial\beta}\right)^2=0.\qquad\text{(IV)}$$

Supposto sempre $Q=|=0$, designino λ_1 e λ_2 le due radici dell'equazione di secondo grado

$$Q\lambda^2+2R\lambda+P=0.\qquad(1)$$

Le due equazioni (II) e (IV), conseguenze necessarie del sistema (III), daranno luogo alle seguenti

$$\frac{\partial v}{\partial\alpha}-\lambda_i\frac{\partial u}{\partial\alpha}=0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial\beta}-\lambda_k\frac{\partial u}{\partial\beta}=0,$$

le lettere i e k indicando i numeri 1 o 2, dove non potrà essere $i = k$, chè in tal caso risulterebbe $I(u, v) = 0$. Scambiando, ove occorra, α con β, come conseguenze necessarie del sistema (III) e della condizione $I(u, v) \neq 0$, troviamo dunque le equazioni

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial \beta} - \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial \beta} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Ma dalla condizione $I(u, v) \neq 0$, deduciamo di necessità, per le (2), $\lambda_1 \neq \lambda_2$; onde, *come prima condizione necessaria per la deformabilità della superficie in quadrica rigata troviamo*

$$R^2 - PQ > 0.$$

Ed ora, ripetendo le considerazioni del § 4, associando la prima equazione delle (2) alle prime tre delle (III) e la seconda equazione delle stesse (2) alle prime due e alla quarta delle (III), ricaveremo le identità necessarie.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_1}{\partial u} + \lambda_1 \frac{\partial \log r}{\partial u} - p = 0, \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial u} + \lambda_2 \frac{\partial \log r}{\partial u} - p = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_1}{\partial v} - \lambda_1 \frac{\partial \log r}{\partial v} + q \lambda_1^2 = 0, \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial v} - \lambda_2 \frac{\partial \log r}{\partial v} + q \lambda_2^2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Troviamo dunque, come condizioni necessarie per la deformabilità della superficie in quadrica rigata che: *deve essere* $R^2 - PQ > 0$, *e per le due radici dell'equazione* (1) *devono aver luogo le identità* (3) *e* (4).

Ora è facile dimostrare che queste condizioni sono anche sufficienti per la detta deformabilità. A tale scopo mostreremo la possibilità dell'integrazione del sistema (III), effettuandola al modo seguente. Diciamo φ e ψ due integrali primi, rispettivamente delle due equazioni differenziali

$$d v - \lambda_1 d u = 0,$$
$$d v - \lambda_2 d u = 0,$$

cioè due soluzioni, rispettivamente, delle due equazioni lineari, omogenee alle derivate parziali del prim'ordine:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial u}+\lambda_1\frac{\partial \varphi}{\partial v}=0,\\ \frac{\partial \psi}{\partial u}+\lambda_2\frac{\partial \psi}{\partial v}=0.\end{aligned}\right\} \tag{V}$$

Le (2), conseguenze necessarie del sistema (III), danno luogo per la φ e per la ψ alle (V), d'altra parte se φ e ψ sono due soluzioni delle (V), essendo $\lambda_1 \neq \lambda_2$, le equazioni

$$\left.\begin{aligned}\varphi(u,\ v)=\alpha,\\ \psi(u,\ v)=\beta,\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

forniscono u e v in funzione di α e di β con $I(u,\ v)\neq 0$, per cui se verifichiamo che queste funzioni soddisfano alle equazioni del sistema (III), avremo dimostrato la sufficienza delle menzionate condizioni e di più che, in quelle condizioni, l'integrazione del sistema (III) equivale a quella delle due equazioni (V) lineari, omogenee alle derivate parziali del primo ordine.

Per compiere l'indicata verifica, osserviamo intanto che dalle (5) si traggono le (2), indi deriviamo la prima di queste identità per β e la seconda per α, otteniamo

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta}-\lambda_1\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta}=\left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial u}+\lambda_2\frac{\partial\lambda_1}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta}-\lambda_2\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta}=\left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial u}+\lambda_1\frac{\partial\lambda_2}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta},$$

e quindi

$$(\lambda_1-\lambda_2)\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta}=\left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial u}-\frac{\partial\lambda_1}{\partial u}+\lambda_1\frac{\partial\lambda_2}{\partial v}-\lambda_2\frac{\partial\lambda_1}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta},$$

$$(\lambda_1-\lambda_2)\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta}=\left(\lambda_1\frac{\partial\lambda_2}{\partial u}-\lambda_2\frac{\partial\lambda_1}{\partial u}+\lambda_1^2\frac{\partial\lambda_2}{\partial v}-\lambda_2^2\frac{\partial\lambda_1}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta},$$

ma in virtù delle supposte identità (3), (4) abbiamo

$$\frac{\partial\lambda_2}{\partial u}-\frac{\partial\lambda_1}{\partial u}=(\lambda_1-\lambda_2)\frac{\partial\log r}{\partial u},\quad \lambda_1\frac{\partial\lambda_2}{\partial v}-\lambda_2\frac{\partial\lambda_1}{\partial v}=q\,\lambda_1\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2),$$

$$\lambda_1\frac{\partial\lambda_2}{\partial u}-\lambda_2\frac{\partial\lambda_1}{\partial u}=p\,(\lambda_1-\lambda_2),\quad \lambda_1^2\frac{\partial\lambda_2}{\partial v}-\lambda_2^2\frac{\partial\lambda_1}{\partial v}=\lambda_1\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)\frac{\partial\log r}{\partial v},$$

per cui, sostituendo e dividendo per $\lambda_1 - \lambda_2$, seguirà

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \frac{\partial \log r}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta} + q\,\lambda_1\lambda_2\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta} = \frac{\partial \log r}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta} + q\frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \frac{\partial \log r}{\partial v}\lambda_1\lambda_2\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta} + p\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta} = \frac{\partial \log r}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta} + p\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta}.$$

Ciò dimostra che le due funzioni u e v soddisfano alle due prime equazioni del sistema (III), ed è poi immediata la verifica che anche le due ultime equazioni vengon soddisfatte dalle stesse funzioni.

Ora se si osserva (come al § 4) che due funzioni λ_1 e λ_2 per le quali valgono le identità (3) e (4) sono necessariamente radici dell'equazione (1), potremo enunciare, dopo quanto precede, il seguente teorema:

Sia

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

il quadrante dell'elemento lineare di una superficie a curvatura negativa $-\frac{1}{\rho^2}$, *riferita ad un doppio sistema coordinato di asintotiche virtuali. Posto*

$$EG - F^2 = \Delta, \quad \frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Delta}} = r, \quad -\left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 2 \end{matrix} \right\} = p, \quad -\left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} = q,$$

condizione necessaria e sufficiente affinchè la superficie sia deformabile in quadrica rigata è che esistano due funzioni reali e distinte verificanti le due equazioni in λ:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u} + \lambda\frac{\partial \log r}{\partial u} - p = 0,$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial v} - \lambda\frac{\partial \log r}{\partial v} + q\lambda^2 = 0.$$

Note queste due funzioni λ_1 e λ_2, ciò che si consegue risolvendo l'equazione (1) di secondo grado in λ, si possono determinare sulla superficie, mediante l'integrazione delle due equazioni differenziali ordinarie:

$$dv - \lambda_1\,du = 0, \quad dv - \lambda_2\,du = 0,$$

i due sistemi di geodetiche flessibili contemporaneamente in rette, *e l'integrazione del sistema* (III) *è ricondotta a quella di queste due equazioni o alla equivalente ricerca di due soluzioni particolari delle* (V).

19. Ove occorra solamente accertarsi della deformabilità in quadrica rigata della superficie, si può anche evitare la risoluzione dell'equazione (1). E infatti dalle (3), sommandole si ricava

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{R}{Q}+\frac{\partial \log r}{\partial u}\frac{R}{Q}+p=0,$$

cioè

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{r\,R}{Q}\right)+p\,r=0; \tag{6}$$

dalle medesime (3), sommandole dopo aver moltiplicata la prima per λ_2 e la seconda per λ_1:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{r^2\,P}{Q}\right)+2\,p\,r^2\,\frac{R}{Q}=0. \tag{7}$$

Allo stesso modo dalle (4), scritte nella forma

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{\lambda_1}+\frac{\partial \log r}{\partial v}\frac{1}{\lambda_1}-q=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{\lambda_2}+\frac{\partial \log r}{\partial v}\frac{1}{\lambda_2}-q=0,$$

si ricava

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{r\,R}{P}\right)+q\,r=0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{r^2\,Q}{P}\right)+2\,q\,r^2\,\frac{R}{P}=0. \tag{9}$$

Ed evidentemente possiamo enunciare il teorema: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la superficie sia deformabile in una quadrica rigata è che, essendo $R^2-P\,Q>0$, valgano le identità* (6), (7), (8) *e* (9).

20. Occupiamoci ora dell'effettiva deformazione in quadrica rigata di una superficie S per la quale si sia constatata la possibilità di tale deformazione e si siano ottenute le due funzioni λ_1 e λ_2.

Dimostreremo anzitutto il teorema:

Si può con sole quadrature avere l'elemento lineare della quadrica su cui la superficie S è applicabile, riferito al doppio sistema delle traiettorie ortogonali alle generatrici dei due sistemi.

E invero le geodetiche corrispondenti in applicabilità sulla S alle generatrici della quadrica sono le geodetiche dei due sistemi $\varphi=\text{cost.}$ e $\psi=\text{cost.}$, il primo definito dall'equazione differenziale

$$d v - \lambda_1 \, d u = 0,$$

e il secondo dall'equazione

$$d v - \lambda_2 \, d u = 0;$$

per cui, posto

$$\sigma (u, v) = \int \frac{(E + \lambda_1 F) \, d u + (F + \lambda_1 G) \, d v}{\sqrt{E + 2 F \lambda_1 + G \lambda_1^2}},$$

$$\tau (u, v) = \int \frac{(E + \lambda_2 F) \, d u + (F + \lambda_2 G) \, d v}{\sqrt{E + 2 F \lambda_2 + G \lambda_2^2}},$$

le linee $\sigma (u, v) = \text{cost.}$ e $\tau (u, v) = \text{cost.}$ tracciano sulla S le corrispondenti in applicabilità alle linee del doppio sistema delle traiettorie ortogonali alle generatrici dei due sistemi della quadrica.

Eseguiamo il cambiamento di coordinate espresso dalle eguaglianze

$$\sigma (u, v) = \sigma, \quad u = u (\sigma, \tau),$$

$$\tau (u, v) = \tau, \quad v = v (\sigma, \tau),$$

e sia

$$E_1 (\sigma, \tau) \, d \sigma^2 + 2 F_1 (\sigma, \tau) \, d \sigma \, d \tau + G_1 (\sigma, \tau) \, d \tau^2 \tag{10}$$

il quadrato dell'elemento lineare della S nelle nuove coordinate σ e τ; avremo

$$\Delta_1 \sigma = \Delta_1 \tau = 1, \quad \nabla (\sigma, \tau) = \frac{E + F (\lambda_1 + \lambda_2) + G \lambda_1 \lambda_2}{\sqrt{E + 2 F \lambda_1 + G \lambda_1^2} \sqrt{E + 2 F \lambda_2 + G \lambda_2^2}},$$

e quindi

$$E_1 (\sigma, \tau) = G_1 (\sigma, \tau) = \left[\frac{(E + 2 F \lambda_1 + G \lambda_1^2) \, (E + 2 F \lambda_2 + G \lambda_2^2)}{(E G - F^2) \, (\lambda_1 - \lambda_2)^2} \right]_{\substack{u = u(\sigma, \tau) \\ v = v(\sigma, \tau)}},$$

$$F_1 (\sigma, \tau) = - \left[\frac{\{ E + F (\lambda_1 + \lambda_2) + G \lambda_1 \lambda_2 \} \sqrt{E + 2 F \lambda_1 + G \lambda_1^2} \sqrt{E + 2 F \lambda_2 + G \lambda_2^2}}{(E G - F^2) \, (\lambda_1 - \lambda_2)^2} \right]_{\substack{u = u(\sigma, \tau) \\ v = v(\sigma, \tau)}}.$$

Queste formole dànno appunto i coefficienti della prima forma fondamentale della quadrica su cui S è applicabile, riferita al doppio sistema delle traiettorie ortogonali alle generatrici dei due sistemi. Dopo ciò, per avere la quadrica su cui S è applicabile, non resta che a costruire quella ben determinata quadrica per la quale il quadrato dell'elemento lineare, riferito al doppio sistema delle traiettorie ortogonali alle generatrici dei due sistemi, è dato dalla forma differenziale (10).

21. Per quanto riguarda l'effettiva costruzione della quadrica indicata vogliamo aggiungere le seguenti osservazioni di indole analoga a quelle contenute al § 6.

Cominciamo dal supporre la superficie rigata. Supponiamo cioè di avere una superficie rigata R riferita ad un qualunque doppio sistema coordinato di cui faccia parte il sistema delle generatrici rettilinee come quello delle $v = \text{cost.}$

Riprendendo le notazioni del § 5, sarà $p_0 \equiv 0$, $q_2 \equiv 0$, per cui le equazioni, a cui si deve poter soddisfare con due funzioni reali e distinte, per la deformabilità della R in quadrica rigata, sono le seguenti

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \lambda}{\partial u} + p_1 \lambda - p_2 \lambda^2 = 0, \\ &\frac{\partial \lambda}{\partial v} - q_1 \lambda + q_0 \lambda^2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

A queste equazioni soddisfa intanto la funzione $\lambda \equiv 0$, a cui corrisponde il sistema delle $v = \text{cost.}$; per cui, *condizione necessaria e sufficiente affinchè la rigata R sia applicabile sopra una quadrica rigata è che esista una funzione $\lambda \neq 0$ verificante le* (11). Questa funzione si ottiene subito dall'equazione (1) che, per essere $P \equiv 0$, si scriverà

$$Q \lambda^2 + 2 R \lambda = 0,$$

e otterremo dunque

$$\lambda = -\frac{2R}{Q}.$$

Ottenuta λ si costruisce immediatamente in termini finiti la quadrica su cui la rigata R è applicabile.

La famiglia Φ di curve della R definite dall'equazione differenziale

$$d v - \lambda \, d u = 0$$

è di geodetiche che possono rettificarsi per flessione. Per cui (v. n. 12) se per ogni punto di una generatrice qualunque g della R conduciamo la tangente alla geodetica della famiglia Φ che vi passa otterremo una deformata rigata Q della R che dico essere doppiamente rigata.

E invero poichè il doppio sistema su R costituito dalle linee Φ e dalle generatrici è di asintotiche virtuali, altrettanto potrà dirsi del doppio sistema che a quello corrisponde in applicabilità su Q, ma in tale doppio sistema esistono due linee di diversa famiglia che sono asintotiche attuali su Q: esse sono la retta g e una qualunque delle tangenti alle linee Φ, per cui questo doppio sistema è di asintotiche attuali su Q. Ne segue che le corrispondeuti in applicabilità su Q alle generatrici di R sono asintotiche attuali e dovendo d'altra parte, come queste, essere geodetiche saranno rettilinee (*).

La rigata Q è dunque una quadrica, la quadrica su cui la rigata R è applicabile (**). In quanto alle equazioni di Q otteniamo, se $u = h(s)$ e $v = \overline{v}$ sono le equazioni su R della g riferita al suo arco s:

$$x = a + \alpha s + t \left[\frac{\dfrac{\partial x}{\partial u} + \lambda \dfrac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{E + 2F\lambda + G\lambda^2}} \right]_{\substack{u=h(s)\\ v=\overline{v}}}, \; \ldots\ldots, \; \ldots\ldots,$$

dove a, b, c sono le coordinate del punto $s = 0$ di g e α, β, γ i coseni di direzione.

Per quanto riguarda poi le deformazioni di R che rettificano le geodetiche Φ, incurvando le sue attuali generatrici rettilinee, valgono inalterati i teoremi del n.° 12.

Si abbia ora una superficie qualsiasi S applicabile sopra una quadrica rigata. Varranno evidentemente inalterati i risultati del n.° 11 concernenti la

(*) Del resto che Q sia doppiamente rigata segue anche subito da un noto teorema, di cui il ragionamento fatto ne ripete la dimostrazione, secondo il quale teorema *in una deformazione di una rigata in cui una generatrice si conserva rettilinea, tutte le altre si conservan tali* (v. Bianchi, *Vorlesungen*... § 117).

(**) La quadrica Q così costruita, su cui la rigata R è applicabile, tocca questa rigata lungo tutti i punti della generatrice g. Per ogni altra generatrice della R potremo ripetere la medesima costruzione della quadrica su cui R è applicabile e otterremo la medesima quadrica Q, essendo solo variata, nel sistema delle generatrici di Q rimaste rigide sulla deformata R, la generatrice di contatto. Per cui il risultato ottenuto può essere anche enunciato nella forma seguente:

Una quadrica Q rotoli al modo di Laguerre (v. Bianchi, *Lezioni*, vol. III, § 4) *sopra una sua deformata rigata R: mentre la generatrice di contatto percorre il sistema delle generatrici della quadrica rimaste rigide, ogni altra generatrice dell'altro sistema di Q inviluppa su R la sua deformata curvilinea,* ricerca di tutte le deformate rigate delle superficie. La sola differenza sta in ciò, che per ogni curva assegnata sulla superficie si ottengono due distinte sue deformate rigate sulle quali quella curva è divenuta un'asintotica; per l'una si sono rettificate le geodetiche $dv - \lambda_1 du = 0$, per l'altra le geodetiche $dv - \lambda_2 du = 0$.

Per la deformazione in quadrica della superficie, possiamo subito dimostrare il teorema:

Nota un'asintotica su S si costruisce, in termini finiti, la quadrica su cui S è applicabile.

Nota infatti un'asintotica C su S si costruisce in termini finiti una sua deformata rigata di cui C è asintotica, indi non si avrà che a deformare questa rigata in quadrica, ciò che, come abbiamo visto, può effettuarsi in termini finiti.

Si ha anche il teorema:

Nota una geodetica di una qualunque delle due famiglie definite dalle equazioni differenziali $dv - \lambda_1 du = 0$, $dv - \lambda_2 du = 0$, si costruisce, mediante una quadratura, la quadrica su cui S è applicabile.

Quella deformata rigata della S su cui una tale geodetica è divenuta asintotica è infatti [v. nota a pag. 60] doppiamente rigata.

Parma, agosto 1912.

Curve meridiane tipiche per le superficie reali di rotazione a curvatura negativa deformabili in rigate a rette reali o immaginarie.

Quadrato dell'elemento lineare: $d s^2 = \dfrac{\gamma r^2 + \delta}{\alpha r^2 + \beta} d r^2 + r^2 d v^2,$

Equazioni differenziali delle geodetiche rettificabili: $d v \pm \dfrac{\sqrt{-\delta} \,.\, d r}{r \sqrt{\alpha r^2 + \beta}} = 0.$

	SEGNI DELLE COSTANTI			EQUAZIONI DELLE CURVE MERIDIANE
Per le deformate di superficie semp.te rigate	$\delta = 0, \ \alpha > 0, \ \gamma > 0, \ \beta < 0$			$r = \frac{1}{\alpha} \cosh \alpha z.$
Per le deformate di quadriche reali	$\delta < 0, \ \alpha > 0, \ \gamma > 0, \ \beta < 0$			$r = \frac{k}{\alpha} \cosh \alpha z, \quad k > 1.$
Per le deformate di quadriche immaginarie	$\delta > 0$	$\alpha = \frac{1}{\delta}, \ \gamma = 0$	$\beta < 0$	$r = \delta \frac{\mathrm{dn}(\tau, k)}{k}, \quad z = \frac{\delta}{k} \left[\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} \tau - \frac{\Theta'(\tau)}{\Theta(\tau)} \right], \quad 0 < k < 1.$
			$\beta = 0$	$r = \delta \operatorname{sen} \tau, \quad r = \delta \left(\log \operatorname{tang} \frac{\tau}{2} + \cos \tau \right).$
			$\beta > 0$	$r = \delta k \operatorname{cn}(\tau, k), \quad z = \delta \left[\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} \tau - \frac{\Theta'(\tau)}{\Theta(\tau)} \right]. \quad 0 < k < 1.$
		$\alpha > 0, \ \gamma > 0$	$\beta < 0$	$r = \frac{k}{\alpha} \cosh \alpha z, \quad 0 < k < 1.$
			$\beta = 0$	$z = \delta \log r.$
			$\beta > 0$	$r = k \operatorname{senh} \alpha z, \quad k > 0.$
		$\alpha = 0, \ \gamma < 0, \ \beta > 0$		$r = \frac{\delta}{2} \operatorname{sen} \tau, \quad z = \frac{\delta}{8} (2 \tau + \operatorname{sen} 2 \tau).$
		$\alpha > 0, \ \gamma < 0$	$\beta < 0$	$r = l \frac{\mathrm{dn}(\tau, k)}{k'}, \quad z = l \sqrt{2} \left[\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} \tau - \frac{\Theta'(\tau)}{\Theta(\tau)} \right], \quad l > 0, \ 0 < k \sqrt{2} < 1.$
			$\beta = 0$	$r = \frac{\delta}{k} \operatorname{sen} \tau, \quad z = \delta \left(\log \operatorname{tang} \frac{\tau}{2} + \cos \tau \right), \quad k > 1.$
			$\beta > 0$	$r = l \frac{k}{k'} \operatorname{cn}(\tau, k), \quad z = \frac{l}{k} \left[\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} \tau - \frac{\Theta'(\tau)}{\Theta(\tau)} \right], \quad l > 0, \ 0 < k \sqrt{2} < 1.$

Sulle equazioni generali per la Dinamica negli spazii ad *n* dimensioni ed a curvatura costante.

(*Di* A. Del Re, *a Napoli.*)

1. In una precedente Nota (*), inserita nel fasc. 11.°, 1.ª Serie corrente anno dei *Rend. della R. Acc. dei Lincei* (alla quale Nota intendo senz'altro riferirmi per ciò che concerne il significato dei simboli e delle notazioni qui adoperate), io ho stabilite le formule fondamentali per la Statica e la Dinamica dei sistemi materiali negli spazii ad n dimensioni suscettibili di una determinazione métrica che conferisca al quadrato dell'elemento lineare la forma

$$d s^2 = \gamma^2 \tau (d x \mid d x) = \gamma^2 \tau \sum_1^{n+1} \frac{d x_i^2}{\alpha_i^2} \cdot \tag{1}$$

Tali formule, limitatamente alla Dinamica, e nel caso di vincoli, in termini finiti indipendenti dal tempo, si trovano compendiate nell'unica equazione

$$\mathbf{G}_q (\gamma^2 \tau \overline{Q} + T) = \frac{d}{d t} \mathbf{G}_{q'} T, \tag{2}$$

ed esplicitamente scritte si presentano nella forma

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial (\gamma^2 \tau \overline{Q} + T)}{\partial q_h} = \dfrac{d}{d t} \left(\dfrac{\partial T}{\partial q'_h}\right) \\ (h = 1, 2, \ldots, s + 1); \end{array}\right\} \tag{3}$$

(*) *Le equazioni generali per la Statica e la Dinamica dei sistemi materiali ad n dimensioni ed a curvatura costante nell'Analisi di* Grassmann. — [Cfr. Giugno 1912].

ovvero, posto $\frac{\partial \overline{Q}}{\partial q_h} = Q_h$, nell'altra (così vogliamo ora scriverle pure):

$$\left.\begin{array}{c} \frac{d}{d\,t}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_h}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_h} = \gamma^2 \tau Q_h \\ (h = 1, 2, \ldots, s+1). \end{array}\right\} \qquad (3_1)$$

A differenza di quanto si fece nella Nota citata, qui [per mettere maggiormente in rilievo la circostanza, già fatta esplicitamente rilevare in tale Nota, che le derivate della

$$Q = \sum_1^p \left(\frac{1}{\alpha_1^2} y_{r1} \varphi_{r1} + \frac{1}{\alpha_2^2} y_{r2} \varphi_{r2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_{n+1}^2} y_{r,n+1} \varphi_{r,n+1}\right)$$

rispetto alle q_h vanno prese soltanto in quanto che queste q_h entrano nella composizione delle $\varphi_{r1}, \varphi_{r2}, \ldots, \varphi_{r,n+1}$, e per un motivo consigliato da quanto fra poco si dirà] si è scritto $\overline{Q}$ al posto di Q; sicchè, p. es., Q_h è anche eguale a $\left(\frac{\partial Q}{\partial q_h}\right)$ di quella prima Nota.

Ora, se supponiamo che il sistema dei punti, tutti distinti, $x_1, x_2, \ldots, x_p$ che compongono il sistema materiale in movimento X, ed il sistema dei punti distinti o coincidenti (tutti, o in parte) $y_1, y_2, \ldots, y_p$ coi quali restano definite le forze *agenti* in $x_1, x_2, \ldots, x_p$ siano in siffatta relazione che ogni punto y_h sia la *derivata interna* (così ho chiamato pure il *gradiente*) di una stessa funzione scalare U, *rispetto al punto*

$$x_h = x_{h1} e_1 + x_{h2} e_2 + \cdots + x_{h,n+1} e_{n+1},$$

cioè, indicato con $\mathbf{G}_h$ l'operatore

$$\mathbf{G}_h = \alpha_1^2 \frac{\partial}{\partial x_{h1}} e_1 + \alpha_2^2 \frac{\partial}{\partial x_{h2}} e_2 + \cdots + \alpha_{n+1}^2 \frac{\partial}{\partial x_{h,n+1}} e_{n+1}$$

si abbia, per tutti i valori di h da 1 a p

$$y_h = \mathbf{G}_h U,$$

osservando essere allora

$$y_{hi} = \alpha_i^2 \frac{\partial U}{\partial x_{hi}} = \alpha_i^2 \frac{\partial U}{\partial \varphi_{hi}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1),$$

e che per $Q_h = \frac{\partial \overline{Q}}{\partial q_h}$ si ha l'espressione

$$\frac{1}{\alpha_1^2} \sum_r y_{r1} \frac{\partial \varphi_{r1}}{\partial q_h} + \frac{1}{\alpha_2^2} \sum_r y_{r2} \frac{\partial \varphi_{r2}}{\partial q_h} + \cdots + \frac{1}{\alpha_{n+1}^2} \sum_r y_{r,n+1} \frac{\partial \varphi_{r,n+1}}{\partial q_h},$$

si troverà essere pure:

$$\frac{\partial \overline{Q}}{\partial q_h} = \frac{1}{\alpha_1^2} \sum_r \alpha_1^2 \frac{\partial U}{\partial \varphi_{r1}} \frac{\partial \varphi_{r1}}{\partial q_h} + \frac{1}{\alpha_2^2} \sum \alpha_2^2 \frac{\partial U}{\partial \varphi_{r1}} \frac{\partial \varphi_{r2}}{\partial q_h} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{\alpha_{n+1}^2} \sum \alpha_{n+1}^2 \frac{\partial U}{\partial q_{r,n+1}} \frac{\partial \varphi_{r,n+1}}{\partial q_h},$$

ovvero:

$$\frac{\partial \overline{Q}}{\partial q_h} = \sum_{r=1}^{r=p} \left(\frac{\partial U}{\partial x_{r1}} \frac{\partial x_{r1}}{\partial q_h} + \cdots + \frac{\partial U}{\partial x_{r,n+1}} \frac{\partial x_{r,n+1}}{\partial q_h} \right) = \frac{\partial U}{\partial q_h}.$$

Ne seguono allora, per le (2) e (3) le forme seguenti

$$\mathbf{G}_q (\gamma^2 \tau U + T) = \frac{d}{d t} \mathbf{G}_{q'} T \qquad (2')$$

$$\left. \begin{array}{c} \dfrac{\partial (\gamma^2 \tau U + T)}{\partial q_h} = \dfrac{d}{d t} \left(\dfrac{\partial T}{\partial q'_h} \right) \\ (h = 1, 2, \ldots, s + 1) \end{array} \right\} \qquad (3')$$

senza la restrizione, necessaria nel caso generale, di dovere scrivere $\overline{U}$ al posto di U.

2. Per adattare le (2), (3) e le (2'), (3') al caso in cui si tratti di uno spazio ellittico, basterà prendere γ puramente immaginario ed

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{n+1} = 1, \qquad \tau = 1. \qquad (4)$$

Per adattarle al caso di uno spazio iperbolico basterà prendere γ reale ed

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 1, \qquad \alpha_{n+1} = \sqrt{-1}, \qquad \tau = -1. \qquad (5)$$

Per adattarle al caso di uno spazio euclideo converrà procedere come segue.

Si consideri un punto al finito e a modulo unitario ed n vettori unitarii $i_1, i_2, \ldots, i_n$ due a due ortogonali fra loro. Un punto x_r del sistema X si potrà rappresentare scrivendo

$$x_r = e + x_{r1}\, i_1 + x_{r2}\, i_2 + \cdots + x_{r,n}\, i_n; \tag{6}$$

dalla quale si deduce

$$d\,x_r = d\,x_{r1} \,.\, i_1 + d\,x_{r2} \,.\, i_2 + \cdots + d\,x_{r,n} \,.\, i_n, \tag{6'}$$

ove $x_{r1}, x_{r2}, \ldots, x_{r,n}$ possono essere considerate come le coordinate cartesiane ortogonali di x_r rispetto agli n assi $e\,x_1, e\,x_2, \ldots, e\,x_n$, e la $x_{r,n+1}$ che qui figura come modulo di x_r, sia l'unità.

Si dica F_r la forza secondo il significato ordinario applicata nel punto x_r; se per punto y_r si prende il *vettore* di F_r, sarà $F_r = x_r\, y_r$, e saranno, posto nel caso presente

$$y_r = Y_{r1} \,.\, i_1 + Y_{r2} \,.\, i_2 + \cdots + Y_{r,n} \,.\, i_n\,, \tag{7}$$

$Y_{r1}, Y_{r2}, \ldots, Y_{r,n}$ le *componenti*, nel senso ordinario, della forza F_r parallelamente agli assi coordinati.

Dalle (6), (6') ove mancano le $\varphi_{r,n+1}$ per tutti i valori di r da 1 a p, e dalla (7) dove si presentano nulle tutte le $y_{r,n+1}$ per gli stessi valori di r, segue che, nelle espressioni generali di Q e di T mancheranno tutti i termini contenenti tali quantità. Inoltre, lo spazio *eventualmente ampliato* S_s (cfr. n.° 7, II, Nota cit.) nel quale è preso il punto q, lo sarà con l'aggiunta d'altri vettori $i_{n+1}, i_{n+2}, \ldots, i_s$ fuori dello spazio S_n di quei primi e di e, vettori pure due a due ortogonali fra loro ed ortogonali ad $i_1, i_2, \ldots, i_n$; per cui, allora, si potrà presentare q nella forma

$$q = e + q_1\, i_1 + q_2\, i_2 + \cdots + q_s\, i_s,$$

dalla quale segue essere

$$q' = q'_1\, i_1 + q'_2\, i_2 + \cdots + q'_s\, i_s\,.$$

I *gradienti* (simbolici) $\mathbf{G}_q$, $\mathbf{G}'_q$ del caso generale diventano, nel caso attuale, i *vettori* (simbolici)

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{G}_q &= \frac{\partial}{\partial q_1}\, i_1 + \frac{\partial}{\partial q_2}\, i_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial q_s}\, i_s \\ \mathbf{G}_{q'} &= \frac{\partial}{\partial q'_1}\, i_1 + \frac{\partial}{\partial q'_2}\, i_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial q'_s}\, i_s; \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

perchè, dalla forma

$$d s^2 = d x_1^2 + d x_2^2 + \cdots + d x_n^2$$

che ha ora il quadrato dell'elemento lineare, nella quale manca $d x_{n+1}$ perchè nullo, segue essere $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 1$ ed α_{n+1} qualunque, del quale non occorre tener conto. E poichè segue inoltre essere $\gamma = \tau = 1$, così, visto che si ha

$$\frac{\partial \overline{Q}}{\partial q_h} = Q_h = \sum_{r=1}^{r=p} \left(Y_{r1} \frac{\partial \varphi_{r1}}{\partial q_h} + Y_{r2} \frac{\partial \varphi_{r2}}{\partial q_h} + \cdots + Y_{rn} \frac{\partial \varphi_{rn}}{\partial q_n} \right),$$

$$(h = 1, 2, \ldots, s)$$

la formula (2) diventa

$$\mathbf{G}_q (\overline{Q} + T) = \frac{d}{d t} \mathbf{G}_{q'} T \tag{2''}$$

col significato nuovo dato dalle (8) per $\mathbf{G}_q$ e $\mathbf{G}_{q'}$, le (3)

$$\left. \begin{array}{c} \dfrac{\partial (\overline{Q} + T)}{\partial q_h} = \dfrac{d}{d t} \left(\dfrac{\partial T}{\partial q'_h} \right) \\ (h = 1, 2, \ldots, s), \end{array} \right\} \tag{3''}$$

e le (3_1)

$$\frac{d}{d t} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_h} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, s); \tag{3'_1}$$

le quali, per $n = 3$, sono le ordinarie formule di LAGRANGE.

Che se le forze F_r hanno una funzione U, dalla (7) si rileverà che i vettori y_r sono i gradienti della U rispetto ai punti x_r; ed allora le (2'), (3') o le (2''), (3'') dànno le

$$\mathbf{G}_q (U + T) = \frac{d}{d t} \mathbf{G}_{q'} T \tag{2'''}$$

$$\left. \begin{array}{c} \dfrac{\partial (T + U)}{\partial q_h} = \dfrac{d}{d t} \left(\dfrac{\partial T}{\partial q'_h} \right) \\ h = 1, 2, \ldots, s \end{array} \right\} \tag{3'''}$$

Per $n = 3$, le (3''') sono le formule di LAGRANGE nel caso dell'esistenza di una funzione di forze.

Si noti la importante circostanza, secondo la quale *all'esistenza di una funzione per le forze,* nel senso ordinario, corrisponde nel nostro modo generale di concezione per le forze stesse *l'esistenza di un gradiente di una stessa funzione scalare* per ogni singola forza. In altri termini, all'esistenza di una funzione scalare *le cui derivate rispetto alle coordinate dei punti* di applicazione delle forze rappresentano le *componenti* omonime *delle forze* stesse, corrisponde l'esistenza di una funzione scalare le cui *derivate interne, rispetto ai punti d'applicazione*, rappresentano *le forze*.

3. Le formule (2) e (3) scritte per vincoli, in termini finiti, indipendenti dal tempo, valgono anche per vincoli, in termini finiti, dipendenti dal tempo, malgrado la forma non più omogenea che presenta la espressione di T nelle $q'_1, q'_2, \ldots, q'_{s+1}$. Infatti, se, al posto delle (24) della Nota precedente, abbiamo le

$$x_{ri} = \varphi_{ri}(q_1, q_2, \ldots, q_s, t) \tag{9}$$

per

$$r = 1, 2, \ldots, p \quad \text{ed} \quad i = 1, 2, \ldots, n+1$$

nelle quali t entra esplicitamente, allora avremo

$$\frac{d\varphi_{ri}}{dt} = (\mathbf{G}_q \varphi_{ri} \mid q') + \frac{\partial \varphi_{ri}}{\partial t},$$

e quindi

$$\frac{dx_r}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n+1} \left\{ (\mathbf{G}_q \varphi_{ri} \mid q') + \frac{\partial \varphi_{ri}}{\partial t} \right\} e_i, \tag{10}$$

mentre, all'epoca t, vale per δx_r la espressione

$$\delta x_r = \sum_{i=1}^{i=n+1} (\mathbf{G}_q \varphi_{ri} \mid \delta q)\, e_i.$$

Ne segue che sarà

$$\left(\frac{dx_r}{dt} \middle| \delta x_r\right) = \sum_{i=1}^{i=n+1} \frac{1}{\alpha_i^2} \left\{ (\mathbf{G}_q \varphi_{ri} \mid q') + \frac{\partial \varphi_{ri}}{\partial t} \right\} (\mathbf{G}_q \varphi_{ri} \mid \delta q)$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n+1} \left[\left\{ (\mathbf{G}_q \varphi_{ri} \mid q') + \frac{\partial \varphi_{ri}}{\partial t} \right\} \frac{\mathbf{G}_q \varphi_{ri}}{\alpha_i^2} \right] \Big| \, \delta q.$$

Siccome poi, al tempo t, rimane per δT la espressione

$$\delta T = (\mathbf{G}_q T \mid \delta q),$$

così avremo al posto delle (36), (37) della suddetta Nota, rispettivamente le seguenti

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{G}_q(\gamma^2\,\tau\,\overline{Q}+T) &= \gamma^2 \frac{d}{d\,t}\sum_{r=1}^{r=p} m_r\,\tau \sum_{i=1}^{i=n+1} \left\{ (\mathfrak{G}_q\,\varphi_{ri}\mid q') + \frac{\partial\,\varphi_{ri}}{\partial\,t} \right\} \frac{\mathfrak{G}_q\,\varphi_{ri}}{\alpha_i^2} \\ T &= \frac{\gamma^2}{2}\sum_{r=1}^{r=p} m_r\,\tau \sum_{i=1}^{i=n+1} \frac{1}{\alpha_i^2} \left\{ (\mathfrak{G}_q\,\varphi_{ri}\mid q') + \frac{\partial\,\varphi_{ri}}{\partial\,t} \right\}^2 \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

dalla seconda delle quali si deduce immediatamente per la presenza esplicita delle q'_1, $q'_2, \ldots$ solo nelle $(\mathfrak{G}_q\,\varphi_{ri}\,/\,q')$:

$$\left(\frac{\partial\,T}{\partial\,q'_h}\right) = \gamma^2 \sum_{r=1}^{r=p} m_r\,\tau \left| \left[\sum_{i=1}^{i=n+1} \left\{ (\mathfrak{G}_q\,\varphi_{ri}\mid q') + \frac{\partial\,\varphi_{ri}}{\partial\,t} \right\} \frac{\mathfrak{G}_q\,\varphi_{ri}}{\alpha_i^2} \right] \right| e_h,$$

d'onde

$$\mathfrak{G}_{q'}\,T = \gamma^2 \sum_{r=1}^{r=p} m_r\,\tau \sum_{i=1}^{i=n+1} \left\{ \mathfrak{G}_q\,\varphi_{ri}\mid q') + \frac{\partial\,\varphi_{ri}}{\partial\,t} \right\} \frac{\mathfrak{G}_q\,\varphi_{ri}}{\alpha_i^2};$$

e dal confronto di questa con la (11) si ricava

$$\mathfrak{G}_q(\gamma^2\,\tau\,\overline{Q}+T) = \frac{d}{d\,t}\,\mathfrak{G}_{q'}\,T$$

che è appunto la (2).

In un lavoro a parte (*) sarà trattato del caso in cui a fianco delle equazioni (9) sussistono fra i parametri q_1, $q_2, \ldots$, q_s altre equazioni di condizione, sia in termini finiti (il che sostanzialmente dà solo nella forma un caso diverso da quelli già considerati), sia in termini differenziali non integrabili (il che costituisce un caso da dovere necessariamente trattare a parte).

NB. Ad ulteriore giustifica della nozione di *lavoro* di una forza $x\,y$, durante lo spostamento elementare $x\,d\,x$ del suo punto di applicazione x, quale venne assunta al n.° 1 della Nota citata cui la presente è collegata (cfr. intanto il n.° 2 di tal Nota) torna qui opportuno osservare che, utilizzando una certa maniera di decomposizione delle forze e degli spostamenti che io ho adoperata nella mia Nota *Principii di una teoria che abbraccia la Astatica in uno spazio ellittico ad n dimensioni*, stampata nei Rend. dell'Acc. di Napoli per l'anno 1911 (maniera di decomposizione che quando lo spazio S_n

(*) Questo lavoro è già alle stampe sotto il titolo: *Le equazioni generali per la Statica e la Dinamica nel caso di vincoli in termini differenziali non integrabili*, e comparirà nel fascicolo prossimo dei Rend. della R. Accad. di Napoli. [È comparso, infatti, nel fasc. ottobre-novembre-dicembre 1912. In esso, a piè di pagina, trovasi stampato che la presente Nota sarebbe apparsa nel Vol. XX, Serie III, degli *Annali.* — Doveva, invece, andare stampato «nel vol. XXII». (Aggiunta dell'A.)].

è euclideo contiene quella di decomporre una forza, o uno spostamento, secondo n direzioni di cui tre mai in uno stesso piano) *i teoremi* che identificano il lavoro di una forza in uno spostamento dato con la somma algebrica dei lavori di quella forza negli spostamenti componenti di questo, e con la somma algebrica dei lavori delle componenti di quella nello spostamento dato, *restano immutati nel contenuto e nella forma.*

Infatti, se $e'_1, e'_2, \ldots, e'_{n+1}$ sono i vertici di un'altra piramide di elementi mutuamente normali e nei loro moduli pure normali, potremo scrivere

$$x\,y = (y \mid e'_1)\,x\,e'_1 + (y \mid e'_2)\,x\,e'_2 + \cdots + (y \mid e'_{n+1})\,x\,e'_{n+1}$$
$$x\,d\,x = (d\,x \mid e'_1)\,x\,e'_1 + (d\,x \mid e'_2)\,x\,e'_2 + \cdots + (d\,x \mid e'_{n+1})\,x\,e'_{n+1},$$

e ritenere come *componenti* di $x\,y$ e di $x\,d\,x$, *secondo* le rette $x\,e'_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ le espressioni

$$(y \mid e'_i)\,x\,e'_i, \quad (d\,x \mid e'_i)\,x\,e'_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Ora, il lavoro della componente $(y \mid e'_i)\,x\,e'_i$ di $x\,y$ nello spostamento $x\,d\,x$, è fornito da

$$L_i = (y \mid e'_i)\,e'_i \mid d\,x = (y \mid e'_i)\,(e'_i \mid d\,x) = (y \mid e'_i)\,(d\,x \mid e'_i),$$

ed il lavoro di $x\,y$ nello spostamento $(d\,x \mid e'_i)\,x_i\,e'_i$ è fornito da

$$(y \mid [(d\,x \mid e'_i)\,e'_i]) = (y\,(d\,x \mid e'_i) \mid e'_i) = (y \mid e'_i)\,(d\,x \mid e'_i),$$

cioè dalla stessa L_i; dunque, intanto, *il lavoro di una forza durante uno spostamento componente di un dato eguaglia il lavoro della componente omonima delle forze durante lo spostamento dato.*

Sommiamo i valori di L_i da 1 ad $n+1$; avremo

$$\Sigma\,L_i = \Sigma\,(y \mid e'_i)\,(d\,x \mid e'_i) = [\Sigma\,(y \mid e'_i)\,e'_i] \mid d\,x;$$

ma, in grazia della formula (1) della mia Nota testè citata *Principii*, ecc., è $\Sigma\,(y \mid e'_i)\,e'_i = y$, dunque, sarà:

$$\Sigma\,L_i = (y \mid d\,x),$$

il che prova appunto l'asserto.

Recherches sur les suites régulières et les nombres de Bernoulli et d'Euler.

(*Par* Niels Nielsen, *à Copenhague.*)

Dans un Mémoire récent intitulé : *Sur les transcendantes élémentaires et les nombres de Bernoulli et d'Euler* (*) j'ai étudié plusieurs polynomes entiers, dont les valeurs, pour des arguments particuliers, deviennent les nombres B_n de Bernoulli, les coefficients des tangentes T_n et les nombres E_n d'Euler.

Par ce procédé j'ai donné de nombreuses expressions indépendantes d'un caractère très général des nombres susdits.

Or, parmi les polynomes qui possèdent la propriété susdite, la suite des fonctions de Bernoulli

$$B_0(x),\ B_1(x),\ B_2(x),\ldots,\ B_n(x),\ldots$$

et la suite des fonctions d'Euler

$$E_0(x),\ E_1(x),\ E_2(x),\ldots,\ E_n(x),\ldots$$

semblent être les plus importantes.

En effet, prenons pour point de départ ces deux suites de polynomes entiers, il est possible de développer une théorie arithmétique et parfaitement élémentaire des nombres célèbres susdits; car une telle théorie n'exige que la connaissance de la formule binomiale qui correspond à un exposant positif entier.

Il est bien connu que la méthode classique, appliquée dans les recherches sur les nombres B, T_n et E_n, savoir l'application de la fonction exponentielle et des fonctions trigonométriques est beaucoup simplifiée par la méthode symbolique découverte par A. Blissard (**) et retrouvée par E. Lucas (***).

(*) *Annali di Matematica* (3), t. 19, pp. 179-204; 1912.

(**) *Quarterly Journal of Mathematics*, t. 8, pp. 85-110, 1867; t. 9, pp. 82-94, 154-177, 1868.

(***) Voir par exemple: *Annali di Matematica* (2), t. 8, pp. 56-79; 1877 et A. Radicke: *Die Recursionsformeln für die Berechnung der Bernoullischen und Eulerschen Zahlen.* 1880.

La méthode symbolique simplifie beaucoup les calculs, il est vrai, mais elle exige des calculs séparés pour chacune des trois classes des nombres B_n, T_n et E_n.

Le point essentiel de ma méthode élémentaire est de remplacer les formules numériques susdites par des identités algébriques qui contiennent une variable complexe, ce qui nous donnera, en attribuant à la variable des valeurs spéciales convenables, d'un coup de main, toutes les formules connues de ce genre et un grand nombre d'autres.

Dans deux Mémoires intitulés: *Recherches sur les nombres de Bernoulli* (*) et *Recherches sur les fonctions et les nombres de Bernoulli et d'Euler* (**) dont le dernier n'est publié pas encore j'ai donné les fondements de la théorie élémentaire susdite.

Le but du Mémoire présent est l'étude d'un seul point de ma théorie générale, savoir le développement des classes des formules récursives pour les B_n, T_n et E_n, formules très remarquables, d'un caractère presque arbitraire.

A cet effet, il est nécessaire de considérer quelques propriétés fondamentales des fonctions de Bernoulli et d'Euler.

PREMIÈRE PARTIE.

Les polynomes réguliers.

I. Définitions et propriétés fondamentales.

Je définis les fonctions de Bernoulli à l'aide des deux équations fonctionnelles (***)

$$B'_n(x) = B_{n-1}(x), \quad B_n(x) - B_n(x-1) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{1}$$

(*) *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark*, 1913.

(**) *Annales de l'École Normale;* Paris.

(***) Comparer par exemple la définition beaucoup plus compliquée donnée par A. Berger dans les *Acta mathematica*, t. 14, p. 251; 1890-91.

où il faut admettre $n \geqq 1$; en étudiant l'équation aux différences finies (1) je trouve pour les $B_n(x)$ les expressions suivantes

$$\left.\begin{aligned} &B_0(x) = 1, \quad B_1(x) = x + \frac{1}{2} \\ &B_n(x) = \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{s=1}^{\leqq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^{s-1} B_s x^{n-2s}}{(2s)!\,(n-2s)!}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

et je démontre que les nombres rationnelles B_n sont tous positifs. Cette introduction des nombres de BERNOULLI coïncide avec celle d'EULER (*).

De même je définis les fonctions d'EULER à l'aide des équations aux différences finies

$$E_n(x) + E_n(x-1) = \frac{x^n}{n!}, \quad n \geqq 0, \tag{3}$$

ce qui donnera les expressions suivantes

$$\left.\begin{aligned} &E_0(x) = \frac{1}{2} \\ &E_n(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^n}{n!} + \sum_{s=1}^{\leqq \frac{n+1}{2}} \frac{(-1)^{s-1} T_s x^{n-2s+1}}{(2s-1)!\,(n-2s+1)!\,2^{2s}}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

et je démontre de cette manière que les nombres T_n sont des positifs entiers, pairs à l'exception de $T_1 = 1$.

Il est évident que les fonctions $E_n(x)$ satisfont, pour $n \geqq 1$, à l'équation fonctionnelle

$$E'_n(x) = E_{n-1}(x). \tag{5}$$

Combinons maintenant les expressions (2) et (4) et les équations aux différences finies (1) et (3), il est évident que les fonctions $B_n(x)$ et $E_n(x)$ satisfont aux équations fonctionnelles

$$(-1)^n B_n(-x-1) = B_n(x), \quad (-1)^n E_n(-x-1) = E_n(x). \tag{6}$$

De plus, il saute aux yeux que les deux formules (2) et (4) nous permettent de déterminer, pour tous les n, les valeurs numériques $B_n(0)$ et

(*) *Institutiones calculi differentialis*, pp. 409-410, 421-422. Saint-Pétersbourg, 1755.

$E_n(0)$; nous trouvons pour les fonctions de BERNOULLI

$$\left.\begin{array}{l} B_0(0) = 1, \quad B_1(0) = \frac{1}{2} \\ B_{2n+1}(0) = 0, \quad B_{2n}(0) = \frac{(-1)^{n-1} B_n}{(2n)!}, \quad n \geqq 1 \end{array}\right\} \tag{7}$$

et pour les fonctions d'EULER

$$\left.\begin{array}{l} E_0(0) = \frac{1}{2}, \quad E_{2n}(0) = 0, \quad n \geqq 1 \\ E_{2n+1}(0) = \frac{(-1)^n T_{n+1}}{(2n+1)!\, 2^{2n+2}}, \quad n \geqq 0. \end{array}\right\} \tag{8}$$

Quant aux valeurs numériques qui correspondent à $x = -\frac{1}{2}$, nous considérons les deux identités évidentes

$$B_n(x) = 2^{n-1}\left(B_n\left(\frac{x}{2}\right) + B_n\left(\frac{x-1}{2}\right)\right) \tag{9}$$

$$E_n(x) = 2^n\left(B_{n+1}\left(\frac{x}{2}\right) - B_{n+1}\left(\frac{x-1}{2}\right)\right), \tag{10}$$

cas particuliers des formules de RAABE (*).

Cela posé, nous aurons pour les fonctions de BERNOULLI

$$\left.\begin{array}{c} B_0\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \quad B_{2n}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n (2^{2n}-2) B_n}{(2n)!\, 2^{2n}}, \quad n \geqq 1 \\ B_{2n+1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0, \quad n \geqq 0 \end{array}\right\} \tag{11}$$

et pour les fonctions d'EULER

$$\left.\begin{array}{c} E_0\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad E_{2n}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n E_n}{(2n)!\, 2^{2n+1}}, \quad n \geqq 1 \\ E_{2n+1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0. \end{array}\right\} \tag{12}$$

(*) *Journal de Crelle*, t. 42, pp. 356-357; 1851.

Je définis précisément de cette manière les nombres E_n d'Euler, et on voit que cette introduction des E_n coïncide avec celle d'Euler (*).

Remarquons en passant que la formule (10) donnera immédiatement la formule d'Euler (**)

$$T_n = \frac{2^{2n}(2^{2n}-2)B_n}{2n}. \tag{13}$$

Généralisons maintenant les équations fonctionnelles (6) en étudiant le polynome entier du degré n par rapport à x

$$f_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n} a_{n,s}\, x^{n-s} \tag{14}$$

qui est assujetti à satisfaire à l'équation fonctionnelle

$$(-1)^n f_n(-x-1) = f_n(x). \tag{15}$$

Nous désignons dans ce qui suit comme *réguliers* tous les polynomes de ce genre.

Remarquons que l'équation (15) donnera immédiatement

$$f_n(x-1) = (-1)^n f_n(-x),$$

nous aurons, en vertu de (14), ces deux équations aux différences finies

$$f_n(x) - f_n(x-1) = 2 \,.\, \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n-1}{2}} a_{n,2s+1}\, x^{n-2s-1}$$

$$f_n(x) + f_n(x-1) = 2 \,.\, \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n}{2}} a_{n,2s}\, x^{n-2s},$$

ce qui donnera, en vertu de (1) et (3), ces deux développements de $f_n(x)$

$$\frac{1}{2} f_n(x) = K_n + \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n-1}{2}} (n-2s-1)!\, a_{n,2s+1}\, B_{n-2s}(x), \tag{16}$$

$$\frac{1}{2} f_n(x) = \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n}{2}} (n-2s)!\, a_{n,2s}\, E_{n-2s}(x), \tag{17}$$

(*) *Opuscula Analytica*, t. II, pp. 269-270. Saint-Pétersbourg, 1785.

(**) Loc. cit., p. 273.

où, dans (16), K_{2n} est une constante, tandis que nous aurons, en vertu de (15), $K_{2n+1}=0$.

Les deux développements (14) et (17) montrent clairement que le polynome $f_n(x)$ qui satisfait à l'équation fonctionnelle (15) est parfaitement déterminé si nous connaissons ou tous les coefficients $a_{n,2s}$ ou tous les $a_{n,2s+1}$. Soit n un nombre pair, le coefficient $a_{n,n}$ peut toujours être choisi arbitrairement.

Nous nous bornerons ici à ces remarques sur l'équation fonctionnelle (15) que j'ai étudiée assez amplement dans mes deux Mémoires susdits.

Cependant, il nous reste encore de modifier les développements (16) et (17).

A cet effet, nous désignons par

$$a_0\, a_1\, a_2 \dots a_n \dots \tag{18}$$

une suite infinie qui satisfait à la seule condition $|a_0|>0$, mais qui est du reste parfaitement arbitraire, puis nous posons pour tous les n

$$f_n(x)=\sum_{s=0}^{s=n} \frac{a_s\, x^{n-s}}{(n-s)!}\,. \tag{19}$$

Cela posé, il est évident que $f_n(x)$ est, pour tous les n, du degré n par rapport à x et que les éléments de la suite infinie

$$f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\dots,\ f_n(x),\dots \tag{20}$$

satisfont, pour $n \geqq 1$, à l'équation fonctionnelle

$$f'_n(x)=f_{n-1}(x). \tag{21}$$

Supposons maintenant que tous les éléments de la suite infinie (20) soient des polynomes réguliers, savoir qu'ils satisfassent pour tous les n à l'équation fonctionnelle (15), nous désignons comme *régulière* la suite (20), et nous indiquons par le symbole $[f_n(x),\ a_n]$ que les polynomes $f_n(x)$ sont, pour tous les n, à déterminer par la formule (19). Nous désignons la suite (18) comme la *base* de la suite régulière (20).

Soit $[f_n(x),\ a_n]$ une suite régulière quelconque, nous aurons, en vertu de (16) et (17), pour tous les n, les développements suivants

$$\frac{1}{2} f_n(x)=\sum_{s=0}^{\leqq \frac{n}{2}} a_{2s+1}\, B_{n-2s}(x) \tag{22}$$

$$\frac{1}{2} f_n(x)=\sum_{s=0}^{\leqq \frac{n}{2}} a_{2s}\, E_{n-2s}(x)\,; \tag{23}$$

c'est-à-dire que la suite régulière $[f_n(x), \alpha_n]$ est parfaitement déterminée, pourvu que tous les éléments α_{2s} ou tous les éléments α_{2s+1} de sa base soient connus.

On détermine immédiatement les bases qui correspondent aux suites harmoniques formées des $B_n(x)$ ou des $E_n(x)$.

II. Le polynome régulier le plus général.

Pour étudier, au point de vue des zéros aussi, un polynome régulier nous choisissons n nombres complexes

$$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \ldots \alpha_n \tag{1}$$

qui satisfont, pour $1 \leqq s \leqq n$, aux conditions

$$\alpha_s + \alpha_{n-s+1} = m, \tag{2}$$

où m désigne un nombre complexe différent de zéro mais quelconque du reste. De plus, nous supposons les nombres (1) aussi arbitraires que les conditions (2) le permettent.

Soit $n = 2q$ ou $n = 2q + 1$, il est par conséquent possible de choisir précisément q des nombres α_s parfaitement arbitraires; dans le dernier cas, où n est supposé impair, l'ensemble (1) contient l'élément $\frac{1}{2}m$.

Cela posé, il est évident que le polynome du degré n par rapport à x

$$F_n(x) = \left(x + \frac{\alpha_1}{m}\right)\left(x + \frac{\alpha_2}{m}\right)\cdots\left(x + \frac{\alpha_n}{m}\right) \tag{3}$$

est régulier; car nous aurons, en vertu de (1), pour $1 \leqq s \leqq n$

$$-x - 1 + \frac{\alpha_s}{m} = -\left(x + \frac{\alpha_{n-s+1}}{m}\right).$$

Posons ensuite pour abréger

$$(x + \alpha_1)(x + \alpha_2)\ldots(x + \alpha_n) = \sum_{s=0}^{s=n} A_{n,s}\, x^{n-s}, \tag{4}$$

nous aurons évidemment

$$F_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{A_{n,s}}{m^s} \cdot x^{n-s}, \tag{5}$$

ce qui donnera, en vertu des formules (16) et (17) du paragraphe I, ces deux développements

$$\frac{1}{2} F_n(x) = K + \sum_{s=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} \frac{(n-2s-1)!\, A_{n,2s+1}}{m^{2s+1}} B_{n-2s}(x) \tag{6}$$

$$\frac{1}{2} F_n(x) = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(n-2s)!\, A_{n,2s}}{m^{2s}} E_{n-2s}(x). \tag{7}$$

Remarquons encore que l'équation fonctionnelle (15) du paragraphe I donnera pour $0 \leq p \leq n$

$$(-1)^p F_n^{(n-p)}(-x-1) = F_n^{(n-p)}(x), \tag{8}$$

il est très facile de déduire plusieurs groupes de relations entre les coefficients $A_{n,p}$.

Formules de première espèce. Posons dans (8) $x=0$, nous aurons en vertu de (5), et pourvu que $1 \leq p \leq n$

$$\left(1-(-1)^p\right) A_{n,p} = \sum_{s=0}^{s=p-1} (-1)^s \binom{n-s}{p-s} m^{p-s} A_{n,s}, \tag{9}$$

d'où, en remplaçant p par $2p+1$ respectivement par $2p+2$, ces deux autres formules

$$2 A_{n,2p+1} = \sum_{s=0}^{s=2p} (-1)^s \binom{n-s}{2p-s+1} m^{2p-2s+1} A_{n,s} \tag{10}$$

$$(n-2p-1) A_{n,2p+1} = \sum_{s=0}^{s=2p} (-1)^s \binom{n-s}{2p-s+2} m^{2p-2s+1} A_{n,s}. \tag{11}$$

Posons ensuite dans (8) $2p+1$ au lieu de p et $x = -\frac{1}{2}$, nous aurons

$$\sum_{s=0}^{s=2p+1} (-1)^s \binom{n-s}{2p-s+1} 2^s m^{2p-s+1} A_{n,s} = 0. \tag{12}$$

Il est digne de remarque que les trois formules (10), (11) et (12) sont équivalentes.

Formules de deuxième espèce. Introduisons aux seconds membres de (6) et (7) les expressions obtenues pour les fonctions de BERNOULLI ou d'EULER, puis ordonnons suivant des puissances descendantes de x, nous aurons respectivement

$$(-1)^p \left(\frac{A_{n,2p+1}}{n-2p} - \frac{m}{2} A_{n,2p}\right) = \sum_{s=0}^{s=p-1} (-1)^s \binom{n-2s-1}{2p-2s} \frac{m^{2p-2s} A_{n,2s+1} B_{p-s}}{n-2p}, \quad (13)$$

où il faut admettre $1 \leqq p \leqq \frac{n-1}{2}$, et

$$(-1)^p A_{n,2p+1} = \sum_{s=0}^{s=p} (-1)^s \binom{n-2s}{2p-2s+1} \left(\frac{m}{2}\right)^{2p-2s+1} A_{n,2s} T_{p-s+1}, \quad (14)$$

formule qui est valable pour $0 \leqq p \leqq \frac{n-1}{2}$.

Il saute aux yeux que les deux systèmes des formules (13) et (14) sont équivalents entre eux et avec les trois précédents. Les réductions des seconds membres des formules de première espèce obtenues en introduisant les B_n ou les T_n sont très remarquables.

Posons, dans (14) $p=0$, nous aurons le résultat évident

$$A_{n,1} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n = \frac{m \cdot n}{2}. \quad (15)$$

Formule de troisième espèce. Supposons n pair, remplaçons n par $2n$, puis posons pour abréger

$$P_{2n} = (2\alpha_1 - m)(2\alpha_2 - m)\ldots(2\alpha_{2n} - m), \quad (16)$$

nous aurons évidemment

$$P_{2n} = (2m)^{2n} F_{2n}\left(-\frac{1}{2}\right), \quad (17)$$

d'où, en vertu de (5),

$$P_{2n} - 2^{2n} A_{2n,2n} = \sum_{s=0}^{s=2n-1} (-1)^s 2^s m^{2n-s} A_{2n,s}. \quad (18)$$

Posons ensuite, dans (7), $x = -\frac{1}{2}$, il en résulte, en vertu de la définition des nombres d'EULER, savoir la formule (12) du paragraphe I,

$$(-1)^n (P_{2n} - 2^{2n} A_{2n,2n}) = \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s 2^{2s} m^{2n-2s} A_{2n,2s} E_{n-s}. \quad (19)$$

Posons de même, dans (6), $x = 0$, $x = -\frac{1}{2}$, puis soustrayons les deux résultats ainsi obtenus, la formule *eulérienne* (13) du paragraphe I donnera

$$(-1)^n (P_{2n} - 2^{2n} A_{2n,2n}) = \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \left(\frac{m}{2}\right)^{2n-2s-1} 2^{2s+1} A_{2n,2s+1} T_{n-s}, \tag{20}$$

formule qui ne contient pas la constante K_{2n}.

Les trois dernières formules sont équivalentes aussi; remarquons la simplification du second membre de (18) obtenue en introduisant les E_n et les T_n.

Appliquons les formules (10) et (19), nous aurons immédiatement le théorème suivant:

I. *Supposons que tous les nombres α_s soient des entiers, la quantité m et les coefficients $A_{n,s}$ ont la même propriété, et nous aurons dans ce cas les congruences suivantes*

$$2 A_{n,2p+1} \equiv 0 \pmod{m}, \quad 0 \leqq p \leqq \frac{n-1}{2} \tag{21}$$

$$P_{2n} - 2^{2n} A_{2n,2n} \equiv 0 \pmod{m^2}, \quad n \geqq 1. \tag{22}$$

III. Cas particuliers essentiels.

Il nous semble utile, à cause de nos recherches suivantes, de discuter ici plus amplement certains cas particuliers des formules générales que nous venons de développer.

Premier cas particulier. Soit l'ensemble des α_s les nombres naturels

$$1, 2, 3, \ldots, n-1, \tag{1}$$

nous avons à poser $m = n$ et à remplacer n par $n - 1$. Posons ensuite comme ordinairement

$$(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1) = \sum_{s=0}^{s=n-1} C_n^s x^{n-s-1},$$

où les nombres C_n^s sont les coefficients de la factorielle du rang n, nous aurons par conséquent

$$A_{n,s} = C_n^s. \tag{2}$$

Quant à P_{2n}, nous aurons en remplaçant n par $2n+1$,

$$P_{2n} = (-1)^n [1 . 3 . 5 \ldots (2n-1)]^2. \tag{3}$$

L'introduction de ces deux valeurs dans les formules générales du paragraphe II étant évidente, nous nous bornons à indiquer les deux congruences ainsi obtenues

$$2\, C_n^{2p+1} \equiv 0 \pmod{n}, \quad 0 \leqq p \leqq \frac{n-2}{2} \tag{4}$$

$$[1 . 3 . 5 \ldots (2n-1)]^2 \equiv (-1)^n\, 2^{2n} (2n)! \left(\operatorname{mod} (2n+1)^2\right), \quad n \geqq 1, \tag{5}$$

d'où, en supposant que $2n+1$ soit un nombre premier (*),

$$1 . 3 . 5 \ldots (2n-1) \equiv (-1)^{2n}\, 2^{3n} . n! \left(\operatorname{mod} (2n+1)^2\right) \cdot \tag{6}$$

Dans ce qui suit nous avons à appliquer les deux sommes de puissances numériques

$$s_q(n) = \sum_{r=1}^{r=n} r^q, \qquad \sigma_q(n) = \sum_{r=0}^{r=n-1} (-1)^r (n-r)^q. \tag{7}$$

Remarquons en passant que nous pouvons aussi, dans ce cas, choisir l'ensemble des α_s comme les nombres

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ n, \tag{8}$$

de sorte que nous avons à poser $m = n$ et à remplacer n par $n+1$.

Deuxième cas particulier. Soit l'ensemble des α_s les n nombres impairs

$$1,\ 3,\ 5, \ldots,\ 2n-1, \tag{9}$$

nous avons à poser $m = 2n$; nous trouvons immédiatement

$$P_{2n} = (-1)^n\, 2^{2n} [1 . 3 . 5 \ldots (2n-1)]^2. \tag{10}$$

Posons ensuite pour abréger

$$(x+1)(x+3) \ldots (x+2n-1) = \sum_{s=0}^{s=n} D_n^s x^{n-s},$$

nous aurons de même

$$A_{n,s} = D_n^s . \tag{11}$$

(*) La congruence (6) est valable encore pour le module $(2n+1)^3$.

Cela posé, nous obtenons, dans ce cas, les deux congruences

$$2\, D_n^{2p+1} \equiv 0 \pmod{2\,n}, \quad 0 \leq p \leq \frac{n-1}{2} \tag{12}$$

$$(-1)^n\, 2^{2n}\, [1\,.\,3\,.\,5 \ldots (2\,n-1)]^2 \equiv 2^{2n}\,.\,1\,.\,3\,.\,5 \ldots (4\,n-1) \pmod{16\,n^2}. \tag{13}$$

Dans ce qui suit, nous avons à appliquer les deux sommes de puissances numériques

$$t_q(n) = \sum_{s=0}^{s=n-1} (2\,n - 2\,s - 1)^q, \quad \tau_q(n) = \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s\,(2\,n - 2\,s - 1)^q, \tag{14}$$

formées des nombres (9).

Troisième cas particulier. Soit $m > 2$ un entier quelconque du reste, et soit $n = \varphi(m)$ la fonction introduite dans la théorie des nombres par Euler, les n nombres

$$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \ldots \alpha_n \tag{15}$$

plus petits que m et premiers avec m satisfont encore à la condition (2) du paragraphe II; dans ce cas n est toujours un nombre pair, savoir $n = 2\,\mu$.

Supposons m impair, hypothèse qui est la plus intéressante, la moitié des nombres (15) sont pairs, les autres μ impairs. Désignons par

$$\gamma_1\ \gamma_2 \ldots \gamma_\mu \tag{16}$$

les nombres pairs, par

$$\delta_1\ \delta_2 \ldots \delta_\mu \tag{17}$$

les nombres impairs contenus dans l'ensemble (15), nous aurons

$$P_n = (-1)^\mu\,(\delta_1\,\delta_2 \ldots \delta_\mu)^2, \tag{18}$$

ce qui donnera la congruence

$$(-1)^\mu\,\delta_1\,\delta_2 \ldots \delta_\mu \equiv 2^n\,\gamma_1\,\gamma_2 \ldots \gamma_\mu \pmod{m^2}. \tag{19}$$

Dans le cas, où m est supposé pair, tous les nombres α_s sont impairs; dans ce cas il n'est pas possible de donner généralement à la congruence (22) du paragraphe II une forme si simple que (19).

Dans ce qui suit nous avons à appliquer les sommes de puissances formées des nombres (15)

$$s_q = \alpha_1^q + \alpha_2^q + \cdots + \alpha_n^q, \tag{20}$$

sommes pour lesquelles A. THACKER (*) a indiqué des expressions remarquables.

Soit m un nombre impair, nous posons encore

$$\sigma_q = \sum_{s=1}^{s=n} (-1)^{\alpha_s} \alpha_s^q, \tag{21}$$

et en appliquant la définition (17)

$$t_q = \sum_{s=1}^{s=\mu} \delta_s^q, \quad \tau_q = \sum_{s=1}^{s=\mu} (-1)^{\frac{\delta_s-1}{2}} \delta_s^q; \tag{22}$$

on voit que ces sommes de puissances coïncident avec les précedentes dans le cas où m est un nombre premier impair.

Remarquons du reste qu'il est très facile de déduire pour les σ_q des expressions analogues à celles données par THACKER pour les s_q et que ces expressions sont des conséquences immédiates de réflexions suivantes:

Soit m décomposé dans ses facteurs premiers comme suit:

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}, \tag{23}$$

nous aurons

$$\varphi(m) = m\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right). \tag{24}$$

Désignons ensuite par

$$m_1^{(q)},\ m_2^{(q)}, \ldots,\ m_{t_q}^{(q)}, \quad t_q = \binom{r}{q}$$

les positifs entiers obtenus en divisant m par q de ses facteurs premiers, par

$$\pi_1^{(q)},\ \pi_2^{(q)}, \ldots,\ \pi_{t_q}^{(q)}$$

les produits correspondants des q facteurs premiers de m, nous aurons toujours

$$\pi_s^{(q)} m_s^{(q)} = m, \quad 1 \leqq s \leqq t_q. \tag{25}$$

Cela posé, il est évident que la formule (24) se présente sous cette autre

(*) *Journal de Crelle*, t. 40, pp. 89-92; 1850. *Nouvelles Annales*, t. 10, pp. 324-328; 1851. BINET, dans les *Comptes rendus*, t. 32, pp. 918-921, 1851, a résolu le même problème; comparez E. PROUHET, dans les *Nouvelles Annales*, t. 10, pp. 328-330; 1851.

forme aussi

$$\varphi(m) = m + \sum_{s=1}^{s=r} (-1)^s \sum_{\nu=1}^{\nu=t_s} m_\nu^{(s)}. \tag{26}$$

Dans ce qui suit, nous avons à donner des applications intéressantes de la méthode de THACKER.

DEUXIÈME PARTIE.

Suites régulières très générales.

IV. FORMULES FONDAMENTALES.

Prenons pour point de départ les nombres α_s appliqués dans le paragraphe II, il est très facile de construire des suites régulières d'une forme très générale.

A cet effet, nous avons à adjoindre aux nombres α_s un ensemble correspondant

$$\beta_1\, \beta_2\, \beta_3 \ldots \beta_n \tag{1}$$

de sorte que β_s correspond à α_s et que nous aurons pour $1 \leqq s \leqq n$

$$\beta_s = (-1)^\varepsilon \beta_{n-s+1}, \tag{2}$$

où ε est un nombre fixe. Du reste les nombres β_s sont à choisir aussi arbitraires que ces conditions le permettent.

Cela posé, il est évident que les polynomes

$$g_p(x) = \frac{1}{p!} \cdot \sum_{s=1}^{s=n} \beta_s \left(x + \frac{\alpha_s}{m}\right)^p$$

forment une suite régulière; car nous aurons évidemment

$$\beta_s \left(-x - 1 + \frac{\alpha_s}{m}\right)^p = (-1)^{p+\varepsilon} \beta_{n-s+1} \left(x + \frac{\alpha_{n-s+1}}{m}\right)^p. \tag{3}$$

On voit que le degré du polynome $g_p(x)$ ne peut jamais dépasser p et que la base de la suite régulière susdite est intimément liée avec les sommes

$$\gamma_q = \sum_{s=1}^{s=n} \beta_s \alpha_s^q. \tag{4}$$

Supposons

$$\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_{r-1} = 0, \quad |\gamma_r| > 0, \tag{5}$$

la fonction

$$\Phi_q(x) = \frac{1}{(q+r)!} \cdot \sum_{s=1}^{s=n} \beta_s \left(x + \frac{\alpha_s}{m}\right)^{q+r} \tag{6}$$

est toujours, même pour $r = 0$, un polynome régulier du degré q, ce qui donnera, en vertu de (3),

$$(-1)^q \Phi_q(-x-1) = (-1)^{q+r+\varepsilon} \Phi_q(-x-1) = \Phi_q(x), \tag{7}$$

d'où la proposition suivante.

I. *Supposons remplies les conditions susdites, la somme*

$$r + \varepsilon$$

est toujours un nombre pair.

Posons maintenant pour abréger

$$a_\varrho = \gamma_{r+\varrho},$$

nous aurons, en vertu de (6),

$$\Phi_q(x) = \sum_{s=0}^{s=q} \frac{a_s}{(r+s)!\, m^{r+s}} \cdot \frac{x^{q-s}}{(q-s)!}, \tag{8}$$

de sorte que les formules (22) et (23) du paragraphe I donnent ces deux développements:

$$\frac{1}{2} \Phi_q(x) = \sum_{s=0}^{\leq \frac{q}{2}} \frac{a_{2s+1}}{(r+2s+1)!\, m^{r+2s+1}} B_{q-2s}(x) \tag{9}$$

$$\frac{1}{2} \Phi_q(x) = \sum_{s=0}^{\leq \frac{q}{2}} \frac{a_{2s}}{(r+2s)!\, m^{r+2s}} E_{q-2s}(x). \tag{10}$$

Les dérivées du polynome $\Phi_q(x)$ étant des fonctions de même genre, nous trouvons évidemment les formules analogues à celles du paragraphe II en substituant simplement, dans les développements divers de $\Phi_q(x)$, les valeurs particulières de x en question. De ce procédé nous trouvons les formules suivantes:

Formules de première espèce:

$$\left(1 - (-1)^q\right) a_q = \sum_{s=0}^{s=q-1} (-1)^s \binom{r+q}{r+s} m^{q-s} a_s \tag{11}$$

$$2\, a_{2q+1} = \sum_{s=0}^{s=2q} (-1)^s \binom{r+2q+1}{r+s} m^{2q-s+1} a^s \tag{12}$$

$$(r+2q+2)\, a_{2q+1} = \sum_{s=0}^{s=2q} (-1)^s \binom{r+2q+2}{r+s} m^{2q-s+1} a_s \tag{13}$$

$$2^{2q+1} a_{2q+1} = \sum_{s=0}^{s=2q} (-1)^s \binom{r+2q+1}{r+s} 2^s m^{2q-s+1} a_s; \tag{14}$$

dans (11) il faut supposer $q \geqq 1$; posons $q = 1$, nous aurons

$$a_1 = \frac{m(r+1)}{2} a_0 . \tag{15}$$

Formules de deuxième espèce:

$$\left.\begin{aligned} (-1)^q \left(a_{2q+1} - \frac{m(r+2q+1)}{2} a_{2q}\right) = \\ = \sum_{s=0}^{s=q-1} (-1)^s \binom{r+2q+1}{r+2s+1} m^{2q-2s} a_{2s+1} B_{q-s} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$(-1)^q a_{2q+1} = \sum_{s=0}^{s=q} (-1)^s \binom{r+2q+1}{r+2s} \left(\frac{m}{2}\right)^{2q-2s+1} a_{2s} T_{q-s+1}; \tag{17}$$

dans (16) il faut supposer également $q \geqq 1$.

Formules de troisième espèce. Posons pour abréger

$$b_{2q} = \frac{1}{2^r} \sum_{s=1}^{s=n} \beta_s (2\alpha_s - m)^{r+2q} = (r+2q)!\, 2^{2q} m^{r+2q} \Phi_{2q}\left(-\frac{1}{2}\right), \tag{18}$$

nous aurons les formules suivantes valables pourvu que $q \geqq 1$:

$$b_{2q} - 2^{2q} a_{2q} = \sum_{s=0}^{s=2q-1} (-1)^s \binom{r+2q}{r+s} 2^s m^{2q-s} a_s \tag{19}$$

$$(-1)^q (b_{2q} - 2^{2q} a_{2q}) = \sum_{s=0}^{s=q-1} (-1)^s \binom{r+2q}{r+2s} 2^{2s} m^{2q-2s} a_{2s} E_{q-s} \tag{20}$$

$$(-1)^q (b_{2q} - 2^{2q} a_{2q}) = \sum_{s=0}^{s=q-1} (-1)^s \binom{r+2q}{r+2s+1} \left(\frac{m}{2}\right)^{2q-2s-1} 2^{2s+1} a_{2s+1} T_{q-s}. \tag{21}$$

Ici nous aurons le théorème suivant:

II. *Soient tous les* α_s *et tous les* β_s *des nombres entiers, les quantités* m, a_q *et* b_{2q} *ont la même propriété, et nous aurons les deux congruences*

$$2\,a_{2q+1} \equiv 0 \pmod{m}, \quad q \geqq 0 \tag{22}$$

$$b_{2q} \equiv 2^{2q}\,a_{2q} \pmod{m^2}, \quad q \geqq 1. \tag{23}$$

En effet, il est évident que m et a_s sont des nombres entiers, et la formule (19) montre que b_{2q} est également un entier; les deux congruences en question sont ensuite des conséquences immédiates de (12) et (20).

Les formules précédentes donnent des résultats remarquables concernant les zéros d'un polynome régulier quelconque.

Posons $m = 1$, $\beta_s = 1$, ce qui donnera $\varepsilon = r = 0$; posons ensuite $\alpha_s = -\omega_s$, les n nombres ω_s sont les zéros d'un polynome régulier quelconque du degré n. En nous bornant à des sommes de puissances semblables des zéros

$$s_q = \omega_1^q + \omega_2^q + \cdots \omega_n^q, \quad s_0 = n,$$

nous avons à poser dans les formules précédentes

$$a_r = (-1)^r s_r,$$

ce qui donnera le théorème suivant:

III. *Les sommes des puissances semblables des zéros d'un polynome régulier quelconque satisfont à des conditions analogues à celles que nous venons de développer pour les coefficients du polynome susdit.*

Dans les paragraphes suivants nous avons à combiner des hypothèses simples relatives aux nombres β_s et les hypothèses relatives aux α_s étudiées dans le paragraphe III, ce qui nous donnera un grand nombre de formules analogues.

Dans un Mémoire récent intitulé: *Verkürzte Rekursionsformeln für die Bernoullischen und Eulerschen Zahlen* (*) j'ai étudié des cas particuliers de nos polynomes $\Phi_q(x)$; ces cas sont intimément liés avec les recherches de KRONECKER (**) et ils nous donnent particulièrement les formules très remarquables indiquées par M. HAUSSNER (***) pour les B_n, T_n et E_n et une suite de formules analogues.

(*) *Sitzungsberichte der Kgl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig*, 1913.

(**) *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (2), t. I, pp. 385-391; 1856.

(***) *Göttinger Nachrichten 1893*, pp. 777-809.

V. Première application.

Posons, comme dans le théorème III du paragraphe IV,

$$\beta_s = 1, \tag{1}$$

ce qui donnera $\varepsilon = r = 0$, nous aurons à considérer ces trois cas particuliers:

Premier cas particulier. L'ensemble des α_s étant

$$1, 2, 3, \ldots, n-1,$$

nous avons à remplacer, dans les formules générales du paragraphe III, n par $n-1$ et à poser $m = n$ et

$$a_q = s_q(n-1), \qquad a_0 = n-1, \tag{2}$$

ce qui donnera la congruence

$$2\, s_{2q+1}(n-1) \equiv 0 \pmod{n}. \tag{3}$$

Quant au nombre b_{2q}, nous aurons selon que $n = 2\mu$ ou $n = 2\mu + 1$ respectivement

$$b_{2q} = 2^{2\mu+1}\, s_{2q}(\mu - 1), \qquad b_{2q} = 2\, t_{2q}(\nu), \tag{4}$$

d'où en remplaçant μ par n

$$\left.\begin{aligned} 2^{2q+1}\, s_{2q}(n-1) &\equiv 2^{2q}\, s_{2q}(2n-1) \pmod{4n^2} \\ t_{2q}(n) &\equiv 2^{2q-1}\, s_{2q}(2n) \left(\operatorname{mod} (2n+1)^2\right) \cdot \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Soit au contraire l'ensemble des α_s les $n+1$ nombres

$$0, 1, 2, 3, \ldots, n,$$

nous aurons au lieu de (2) les expressions suivantes

$$a_q = s_q(n), \qquad a_0 = n+1, \tag{6}$$

ce qui donnera la formule d'EULER (*)

$$\left(1-(-1)^q\right) s_q(n) = (n+1)\, n^q + \sum_{r=1}^{r=q-1} (-1)^r \binom{q}{r} n^{q-r} s_r(n), \tag{7}$$

dans laquelle il est permis de remplacer $s_\nu(n)$ par $s_\nu(n-1)$, pourvu que le premier terme du second membre soit remplacé par $(n-1)\, n^q$.

Comme autre cas particulier connu nous aurons

$$\left.\begin{aligned} &(-1)^q \left(s_{2q+1}(n-1) - n\left(q+\frac{1}{2}\right) s_{2q}(n-1)\right) = \\ &\qquad = \sum_{r=0}^{r=q-1} (-1)^r \binom{2q+1}{2r+1} n^{2q-2r} s_{2r+1}(n-1)\, B_{q-r}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

formule qui a été trouvée presque contemporainément par A. RADICKE (**) et J. WORPITZKY (***); posons, dans (8), $n=2$, nous retrouvons la formule d'EULER (****)

$$\sum_{r=0}^{r=q-1} (-1)^r \binom{2q+1}{2r+1} 2^{2q-2r} B_{q-r} = (-1)^{q-1}\, 2q. \tag{9}$$

Appliquons au contraire la seconde hypothèse, puis soustrayons (8) et la formule analogue ainsi obtenue, nous aurons la première formule récursive connue pour les nombres de BERNOULLI, savoir la formule de MOIVRE ($*_*$)

$$(-1)^{q-1}\left(q-\frac{1}{2}\right) = \sum_{r=0}^{r=q-1} (-1)^r \binom{2q+1}{2r+1} B_{q-r}. \tag{10}$$

Deuxième cas particulier. Soit l'ensemble des α_s les nombres impairs

$$1,\ 3,\ 5, \ldots,\ 2n-1,$$

nous aurons à poser dans les formules générales $m = 2n$ et

$$a_q = t_q(n), \qquad a_0 = n, \tag{11}$$

tandis que le nombre b_{2q} deviendra pour $n = 2\mu$ ou $n = 2\mu + 1$ respecti-

(*) *Institutiones calculi differentialis*, pp. 348-351. Saint-Pétersbourg, 1755.

(**) *Die Recursionsformeln für die Bernoullischen und Eulerschen Zahlen*, p. 7; Halle, 1880.

(***) *Journal de Crelle*, t. 84, p. 217; 1883.

(****) *Opuscula analytica*, t. II, pp. 264-265. Saint-Pétersbourg, 1785.

($*_*$) *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*. Londres, 1730.

vement

$$b_{2q} = 2^{2q+1}\, t_{2q}(\mu), \qquad b_{2q} = 2^{4q+1}\, s_{2q}(\mu), \tag{12}$$

de sorte que nous aurons les congruences

$$t_{2q+1}(n) \equiv 0 \pmod{n} \tag{13}$$

$$2^{2q+1}\, t_{2q}(n) \equiv 2^{2q}\, t_{2q}(2n) \pmod{4n^2} \tag{14}$$

$$2^{2q+1}\, s_{2q}(n) \equiv t_{2q}(2n+1) \left(\operatorname{mod} (2n+1)^2\right). \tag{15}$$

Troisième cas particulier. Soient les α_s les positifs entiers plus petits que m et premiers avec m, nous aurons

$$2\, s_{2q+1} \equiv 0 \pmod{m} \tag{16}$$

et, pourvu que m soit un nombre impair,

$$t_{2q} \equiv 2^{2q-1}\, s_{2q} \pmod{m^2}. \tag{17}$$

L'analogie des trois cas particuliers que nous venons d'étudier est parfaite.

VI. Deuxième application.

En second lieu nous posons

$$\beta_s = (-1)^{n-s}, \tag{1}$$

ce qui donnera $\varepsilon = 0$ ou $\varepsilon = 1$, selon que n est impair ou pair.

I. *Soit n un nombre impair*, nous aurons $\varepsilon = r = 0$, ce qui donnera des formules analogues à celles du paragraphe V.

Premier cas particulier. Pour les nombres naturels

$$1, 2, 3, 4, \ldots, 2n-1$$

nous trouvons

$$m = 2n, \quad a_q = \sigma_q(2n-1), \quad b_{2q} = 2^{2q+1}\, \sigma_{2q}(n-1), \tag{2}$$

ce qui donnera

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_{2q+1}(2n-1) \equiv 0 \pmod{n} \\ 2^{2q+1}\, \sigma_{2q}(n-1) \equiv 2^{2q}\, \sigma_{2q}(2n-1) \pmod{4n^2}. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Second cas particulier. Pour les nombres impairs

$$1,\ 3,\ 5,\ldots,\ 4n+1$$

nous avons à poser

$$m = 4n+2,\quad a_q = \tau_q(2n+1),\quad b_{2q} = 2^{4q+1}\,\sigma_{2q}(n), \tag{4}$$

de sorte que nous aurons

$$\left.\begin{aligned} \tau_{2q+1}(2n+1) &\equiv 0 \left(\bmod\ (2n+1)\right) \\ 2^{2q+1}\,\sigma_{2q}(n) &\equiv \tau_{2q}(2n+1) \left(\bmod\ (2n+1)^2\right). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

II. *Soit n un nombre pair,* nous aurons $\varepsilon = 1$, tandis que nous ne pouvons dire généralement que r doit être un nombre impair.

Dans nos trois cas ordinaires nous aurons toujours $r = 1$.

Premier cas particulier. L'ensemble des nombres α_s

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots,\ 2n$$

donnera

$$m = 2n+1,\quad a_q = \sigma_{q+1}(2n),\quad b_{2q} = \tau_{2q+1}(n), \tag{6}$$

et nous aurons par conséquent

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{2q+2}(2n) &\equiv 0 \left(\bmod\ (2n+1)\right) \\ \tau_{2q+1}(n) &\equiv 2^{2q}\,\sigma_{2q+1}(2n) \left(\bmod\ (2n+1)^2\right). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Deuxième cas particulier. Pour l'ensemble des nombres impairs

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ldots,\ 4n-1$$

nous aurons

$$m = 4n,\quad a_q = \tau_{2q+1}(2n),\quad b_{2q} = 2^{2q+1}\,\tau_{2q+1}(n),$$

de sorte que nous aurons

$$\left.\begin{aligned} 2\,\tau_{2q+2}(2n) &\equiv 0 \pmod{4n} \\ 2^{2q+1}\,\tau_{2q+1}(n) &\equiv 2^{2q}\,\tau_{2q+1}(2n) \pmod{16n^2}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Troisième cas particulier. Soit m un nombre impair et soient les α_s les nombres plus petits que m et premiers avec m, nous aurons

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{2q+2} &\equiv 0 \pmod{m} \\ \tau_{2q+1} &\equiv 2^{2q}\,\sigma_{2q+1} \pmod{m^2}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

L'analogie de ces formules entre elles et avec celles du paragraphe précédent est parfaite.

Additionnons, puis soustrayons les formules récursives obtenues dans ces deux paragraphes, nous aurons de nombreuses d'autres formules de ce genre. Cependant nous ne nous arrêtons pas à une étude plus ample de ce problème.

VII. Troisième application.

Pour donner d'autres applications de nos formules générales nous remplaçons n par $n+1$ et nous nous bornerons à l'étude de ces deux cas particuliers de l'ensemble des α_s:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots, n, \quad m = n \tag{1}$$

$$1,\ 3,\ 5,\ 7, \ldots, 2n+1, \quad m = 2n+2. \tag{2}$$

En premier lieu posons

$$\beta_s = \binom{n}{s}, \tag{3}$$

nous aurons $\varepsilon = r = 0$; posons ensuite pour abréger

$$a_{n,q} = \sum_{s=0}^{s=n-1} \binom{n}{s} (n-s)^q \tag{4}$$

$$b_{n,q} = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} \binom{n}{s} (n-2s)^q \tag{5}$$

$$c_{n,q} = \sum_{s=0}^{s=n} \binom{n}{s} (2n-2s+1)^q, \tag{6}$$

l'hypothèse (1) donnera

$$a = a_{n,q}, \quad b_{2q} = 2\, b_{n,2q},$$

de sorte que nous aurons les congruences

$$\left. \begin{aligned} 2\, a_{n,2q+1} &\equiv 0 \pmod{n} \\ 2\, b_{n,2q} &\equiv 2^{2q}\, a_{n,2q} \pmod{n^2}. \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

Quant à l'ensemble (2), nous aurons

$$a_q = c_{n,q}\,, \quad b_{2q} = 2^{2q+1}\, b_{n,2q}\,,$$

d'où l'on conclut

$$\left. \begin{aligned} c_{n,2q+1} &\equiv 0 \left(\bmod{(n+1)}\right) \\ 2^{2q}\, b_{n,2q} &\equiv 2^{2q-1}\, c_{n,2q} \left(\bmod{(n+1)^2}\right). \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

En second lieu nous posons

$$\beta_s = (-1)^{n-s} \binom{n}{s}, \tag{9}$$

ce qui donnera $\varepsilon = r = n$; dans ce cas nous posons

$$\alpha_{n,q} = \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \binom{n}{s} (n-s)^{q+n} \tag{10}$$

$$\beta_{n,q} = \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n-1}{2}} (-1)^s \binom{n}{s} (n-2s)^{q+n} \tag{11}$$

$$\gamma_{n,q} = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} (2n-2s+1)^{q+n}. \tag{12}$$

Cela posé, nous aurons pour l'ensemble (1)

$$a_q = \alpha_{n,q}\,, \quad b_{2q} = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\, \beta_{n,2q}\,;$$

c'est-à-dire que $\beta_{n,2q}$ est toujours divisible par 2^{n-1}; dans ce cas nous aurons les congruences

$$\left. \begin{aligned} 2\, \alpha_{n,2q+1} &\equiv 0 \pmod{n} \\ \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\, \beta_{n,2q} &\equiv 2^{2q}\, \alpha_{n,2q} \pmod{n^2}. \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

Quant à l'ensemble (2), nous aurons

$$a_q = \gamma_{n,q}\,, \qquad b_{2q} = \frac{(-1)^n\, 2^{2q}}{2^{n-1}}\, \beta_{n,2q}\,,$$

ce qui donnera

$$\left.\begin{array}{r} \gamma_{n,2q+1} \equiv 0 \left(\bmod\, (n+1)\right) \\ \dfrac{(-1)^n\, 2^{2q}\, \beta_{n,2q}}{2^{n-1}} \equiv 2^{2q}\, \gamma_{n,2q} \left(\bmod\, (2n+2)^2\right) . \end{array}\right\} \tag{14}$$

On sait que les six nombres $a_{n,q}$ etc. que nous venons de considérer jouent un rôle important dans les représentations indépendantes des nombres B_n, T_n et E_n.

VIII. Les fonctions partielles.

Revenons aux ensembles contenant les n éléments α_s et les n éléments correspondants β_s que nous avons appliqués dans le paragraphe IV, puis supposons que n soit un nombre pair, savoir $n = 2\mu$, il est possible de diviser en deux groupes à μ éléments les nombres α_s, savoir

$$\left.\begin{array}{l} \alpha'_1\ \alpha'_2\ \alpha'_3\ \ldots\ \alpha'_\mu \\ \alpha''_1\ \alpha''_2\ \alpha''_3\ \ldots\ \alpha''_\mu , \end{array}\right\} . \tag{1}$$

de sorte que nous aurons pour $1 \leqq s \leqq \mu$

$$\alpha'_s + \alpha''_s = m, \tag{2}$$

et ce problème admet précisément $2^{\mu-1}$ solutions.

Nous désignons comme *complémentaires* les deux groupes (1) ainsi définies, tandis qu'un seul de ces deux groupes complémentaires est un groupe *partiel* formé de l'ensemble des n nombres α_s.

Nous divisons aussi en deux groupes les nombres β_s correspondantes à (1), de sorte que β'_s et β''_s appartiennent à α'_s respectivement α''_s; c'est-à-dire que nous aurons pour $1 \leqq s \leqq \mu$

$$\beta'_s = (-1)^s\, \beta''_s . \tag{2bis}$$

Soient maintenant (1) deux groupes complémentaires formés de l'ensemble des n nombres α_s, nous désignons comme fonctions *partielles* appartenant aux ensembles des nombres α_s et des nombres β_s chacun des deux polynomes entiers

$$\left.\begin{aligned} f_\nu(x) &= \frac{1}{\nu!}\cdot\sum_{s=1}^{s=\mu}\beta'_s\left(x+\frac{\alpha'_s}{m}\right)^\nu \\ g_\nu(x) &= \frac{1}{\nu!}\cdot\sum_{s=1}^{s=\mu}\beta''_s\left(x+\frac{\alpha''_s}{m}\right)^\nu, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

où $\nu \geqq 0$ est un entier quelconque du reste.

Nous désignons comme *complémentaires* les deux fonctions partielles ainsi définies $f_\nu(x)$ et $g_\nu(x)$.

Ces définitions adoptées, nous pouvons former précisément 2^μ fonctions partielles qui correspondent aux ensembles des α_s et des β_s.

Supposons maintenant n impair, savoir $n = 2\mu + 1$, nous avons à ajoindre à chacun des deux groupes complémentaires (1) l'élément

$$\frac{m}{2}, \tag{4}$$

et les fonctions partielles complémentaires $f_\nu(x)$ et $g_\nu(x)$ deviennent dans ce cas

$$\left.\begin{aligned} f_\nu(x) &= \frac{1}{\nu!}\left(\frac{\beta_{\mu+1}}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^\nu + \sum_{s=1}^{s=\mu}\beta'_s\left(x+\frac{\alpha'_s}{m}\right)^\nu\right) \\ g_\nu(x) &= \frac{1}{\nu!}\left(\frac{\beta_{\mu+1}}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^\nu + \sum_{s=1}^{s=\mu}\beta''_s\left(x+\frac{\alpha''_s}{m}\right)^\nu\right). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Dans ces deux définitions nous supposons $n > 1$; soit particulièrement $n = 1$, chacun des deux groupes complémentaires (1) est composé du seul élément (4), de sorte que nous aurons dans ce cas seulement les deux fonctions partielles complémentaires

$$f_\nu(x) = g_\nu(x) = \frac{\beta_1}{\nu!\,2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^\nu. \tag{6}$$

Cela posé, la définition (6) du paragraphe IV donnera le théorème suivant:

I. *Soient $f_\nu(x)$ et $g_\nu(x)$ deux fonctions partielles complémentaires quelconques appartenant aux ensembles des α_s et des β_s, nous aurons toujours*

$$f_\nu(x) + g_\nu(x) = \Phi_{\nu-r}(x), \quad \nu \geqq r \tag{7}$$

$$(-1)^{r+\varepsilon} f_\nu(-x-1) = g_\nu(x), \quad (-1)^{r+\varepsilon} g_\nu(-x-1) = f_\nu(x). \tag{8}$$

Posons ensuite pour abréger

$$\left.\begin{aligned} f_\nu(x) &= \sum_{s=0}^{s=\nu} \frac{a'_s}{s!\,m^s} \cdot \frac{x^{\nu-s}}{(\nu-s)!} \\ g_\nu(x) &= \sum_{s=0}^{s=\nu} \frac{a_s''}{s!\,m^s} \cdot \frac{x^{\nu-s}}{(\nu-s)!}, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

nous aurons, en vertu du développement (8) du paragraphe IV,

$$a'_s + a''_s = a_{s-r}, \quad s \geqq r; \tag{10}$$

supposons $s < r$, nous aurons, au contraire,

$$a'_s + a''_s = 0. \tag{11}$$

Dans ce cas il faut supposer naturellement $r > 0$.

Les fonctions partielles jouent, pour nos recherches ultérieures, un rôle fondamental.

TROISIÈME PARTIE.

Applications des fonctions $B_n(p\,x)$ et $E_n(p\,x)$.

IX. Formules fondamentales.

Soit p un positif entier quelconque, les équations aux différences finies qui figurent dans les définitions des fonctions de Bernoulli et d'Euler, savoir les formules (1) et (3) du paragraphe I, donnent immédiatement ces deux identités générales

$$B_n(x-p) = B_n(x) - \frac{1}{(n-1)!} \cdot \sum_{s=0}^{s=p-1} (x-s)^{n-1} \tag{1}$$

$$E_n(x-p) = (-1)^p E_n(x) - \frac{(-1)^p}{n!} \cdot \sum_{s=0}^{s=p-1} (-1)^s (x-s)^n, \tag{2}$$

formules qui nous conduiront à des résultats essentiels pour les deux fonctions

$$\varphi(x) = \frac{B_n(px - \beta)}{p^{n-1}}, \quad \psi(x) = \frac{E_n(px - \beta)}{p^n}, \tag{3}$$

où β désigne un nombre complexe quelconque.

En effet, substituons $-x-1$ au lieu de x, nous aurons en vertu de (1) et (2)

$$\varphi(-x-1) = \frac{B_n(-px-\beta)}{p^{n-1}} + \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \cdot \sum_{s=0}^{s=p-1} \left(x + \frac{\beta+s}{p}\right)^{n-1}$$

$$\psi(-x-1) = \frac{(-1)^p E_n(-px-\beta)}{p^n} - \frac{(-1)^{n+p}}{n!} \cdot \sum_{s=0}^{s=p-1} (-1)^s \left(x + \frac{\beta+s}{p}\right)^n$$

d'où, en appliquant les équations fonctionnelles (6) du paragraphe I,

$$(-1)^n \varphi(-x-1) = \frac{B_n(px+\beta-1)}{p^{n-1}} + \frac{1}{(n-1)!} \cdot \sum_{s=0}^{s=p-1} \left(x + \frac{\beta+s}{p}\right)^{n-1} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} (-1)^n \psi(-x-1) = {} & \frac{(-1)^p E_n(px+\beta-1)}{p^n} + \\ & + \frac{1}{n!} \cdot \sum_{s=0}^{s=p-1} (-1)^{p-s-1} \left(x + \frac{\beta+s}{p}\right)^n, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

formules qui nous conduiront à des résultats intéressants si nous supposons $\beta = 0$ ou $\beta = \frac{1}{2}$.

Posons d'abord $\beta = 0$, puis appliquons encore une fois les deux équations aux différences finies qui figurent dans la définition des $B_n(x)$ et des $E_n(x)$, nous aurons pour les fonctions

$$\varphi(x) = \frac{B_n(px)}{p^{n-1}}, \quad \psi(x) = \frac{E_n(px)}{p^n}$$

les équations fonctionnelles

$$\left.\begin{aligned} (-1)^n \varphi(-x-1) &= \varphi(x) + \frac{1}{(n-1)!} \cdot \sum_{s=1}^{s=p-1} \left(x + \frac{s}{p}\right)^{n-1} \\ (-1)^{n+p-1} \psi(-x-1) &= \psi(x) + \frac{1}{n!} \cdot \sum_{s=1}^{s=p-1} (-1)^s \left(x + \frac{s}{p}\right)^n. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Posons ensuite $\beta = \frac{1}{2}$, nous verrons que les fonctions

$$\varphi_1(x) = \frac{B_n\left(px - \frac{1}{2}\right)}{p^{n-1}}, \quad \psi_1(x) = \frac{E_n\left(px - \frac{1}{2}\right)}{p^n}$$

satisfont aux équations fonctionnelles

$$\left.\begin{aligned} (-1)^n \varphi_1(-x-1) &= \varphi_1(x) + \frac{1}{(n-1)!} \cdot \sum_{s=0}^{s=p-1} \left(x + \frac{2s+1}{2p}\right)^{n-1} \\ (-1)^{n+p} \psi_1(-x-1) &= \psi_1(x) - \frac{1}{n!} \cdot \sum_{s=0}^{s=p-1} (-1)^s \left(x + \frac{2s+1}{2p}\right)^n. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Or, il est très facile de généraliser beaucoup les deux dernières groupes d'équations fonctionnelles.

A cet effet, considérons le nombre composé m étudié à la fin du paragraphe III, puis posons, en appliquant les définitions susdites,

$$F_n(x) = \frac{B_n(mx)}{m^{n-1}} + \sum_{s=1}^{s=r} (-1)^s \left(\sum_{q=1}^{q=t_s} \frac{B_n(m_q^{(s)} x)}{(m_q^{(s)})^{n-1}} \right),$$

la formule (26) du § III montrera, en vertu de la première relation (2), que la fonction $F_n(x)$ satisfait à l'équation fonctionnelle

$$(-1)^n F_n(-x-1) = F_n(x) + \frac{1}{(n-1)!} \cdot \sum_{s=1}^{s=2\mu} \left(x + \frac{a_s}{m}\right)^{n-1}, \quad n \geqq 1, \quad (8)$$

où $2\mu = \varphi(m)$, et où les $a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_{2\mu}$ sont les positifs entiers plus petits que m et premiers avec m.

Supposons ensuite que m soit un nombre impair, puis posons

$$G_n(x) = \frac{E_n(mx)}{m^n} + \sum_{s=1}^{s=r} (-1)^s \left(\sum_{q=1}^{q=t_s} \frac{E_n(m_q^{(s)} x)}{(m_q^{(s)})^n} \right),$$

nous aurons de même

$$(-1)^n G_n(-x-1) = G_n(x) + \frac{1}{n!} \cdot \sum_{s=1}^{s=2\mu} (-1)^{a_s} \left(x + \frac{a_s}{m}\right)^n. \quad (9)$$

Il est très facile d'ordonner selon des puissances descendantes de x les deux polynomes $F_n(x)$ et $G_n(x)$.

En effet, désignons par a un positif entier, puis posons pour abréger

$$\varphi_a(m) = (p_1^a - 1)(p_2^a - 1) \ldots (p_r^a - 1),$$

nous aurons les expressions suivantes

$$F_n(x) = \frac{\varphi_1(m)}{n!} x^n + \sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^{r+s-1} \varphi_{2s-1}(m) B_s}{(2s)!\, m^{2s-1}} \cdot \frac{x^{n-2s}}{(n-2s)!} \tag{10}$$

$$G_n(x) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{s=1}^{\leq \frac{n+1}{2}} \frac{(-1)^{r+s-1} \varphi_{2s-1}(m) T_s}{(2s-1)!\,(2m)^{2s-1}} \cdot \frac{x^{n-2s+1}}{(n-2s+1)!}, \tag{11}$$

où il faut admettre $n \geqq 2$ respectivement $n \geqq 1$; supposons dans (10) $n = 1$, le second membre doit être réduit à son premier terme.

Nous ne nous arrêtons pas à la généralisation correspondante des formules (7), parce qu'une telle généralisation nous ne donne pas des applications aussi intéressantes que la précédente.

X. Suites régulières de première espèce.

Désignons par $f_m(x)$ et $g_m(x)$ deux fonctions partielles complémentaires quelconques, formées de l'ensemble

$$1,\ 2,\ 3, \ldots,\ p-1 \tag{1}$$

des nombres α_s et de l'ensemble adjoint des nombres β_s

$$\beta_s = 1, \tag{2}$$

puis posons

$$f_m(x) = \sum_{q=0}^{q=m} \frac{s'_q}{q!\,p^q} \cdot \frac{x^{m-q}}{(m-q)!}, \quad g_m(x) = \sum_{q=0}^{q=m} \frac{s''_q}{q!\,p^q} \cdot \frac{x^{m-q}}{(m-q)!}, \tag{3}$$

nous aurons, en vertu des formules (10) et (11) du paragraphe VIII,

$$s'_q + s''_q = s_q(p-1), \qquad s'_0 = s''_0 = \frac{p-1}{2}. \tag{4}$$

Dans ce qui suit nous désignons comme *complémentaires* les deux sommes ainsi définies s'_q et s''_q.

Soit $p = 2r + 1$ ou $p = 2r + 2$, nous pouvons former des ensembles (1) et (2) précisément 2^r fonctions partielles.

Cela posé, nous aurons le théorème suivant:

I. *Soit $f_m(x)$ une fonction partielle quelconque formée des ensembles* (1) *et* (2), *les fonctions*

$$F_n(x) = \frac{B_n(px)}{p^{n-1}} + f_{n-1}(x), \qquad n \geqq 1, \tag{5}$$

sont toutes des polynomes réguliers.

En effet, nous aurons immédiatement $F'_n(x) = F_{n-1}(x)$ et les formules (8) du paragraphe VIII et (6) du paragraphe IX donnent

$$(-1)^n F_n(-x-1) = \frac{B_n(px)}{p^{n-1}} + \left(f_{n-1}(x) + g_{n-1}(x)\right) - g_{n-1}(x) = F_n(x).$$

Quant au développement du polynome $F_n(x)$ selon les fonctions de Bernoulli, nous avons à chercher, dans $F_n(x)$, les coefficients des puissances x^{n-2s-1}. Or, $B_n(x)$ ne contenant qu'une seule de ces puissances, savoir x^{n-1}, les autres se trouvent dans la fonction partielle $f_{n-1}(x)$.

Appliquons ensuite les formules (3) et (4), nous aurons le développement cherché

$$\frac{1}{2} F_n(x) = \frac{p}{2} B_n(x) + \sum_{q=1}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{s'_{2q}}{(2q)!\, p^{2q}} B_{n-2q}(x), \tag{6}$$

et il existent par conséquent précisément 2^r développements de ce genre, ce qui nous donnera des formules récursives très remarquables.

En effet, substituons, dans (6), $2n$ au lieu de n, puis posons $x = 0$, nous aurons

$$\frac{p^{2n+1} - p}{2} B_n + \sum_{q=1}^{q=n-1} (-1)^q \binom{2n}{2q} p^{2n-2q} s'_{2q} B_{n-q} = (-1)^n (s'_{2n} - nps'_{2n-1}); \tag{7}$$

nous nous bornons à cette seule application de la formule générale (6).

Introduisons maintenant, dans (2), au lieu des s'_m les sommes complémentaires s''_m, ce qui est permis, puis additionnons les deux formules ainsi obtenues, nous aurons, quelles que soient les fonctions partielles complémentaires $f_m(x)$ et $g_m(x)$ que nous avons prises pour point de départ:

$$\left.\begin{aligned} & p(p^{2n}-1) B_n + \sum_{q=1}^{q=n-1} (-1)^q \binom{2n}{2q} p^{2n-2q} s_{2q}(p-1) B_{n-q} = \\ & \qquad = (-1)^n \left(s_{2n}(p-1) - nps_{2n-1}(p-1)\right), \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

ce qui est précisément la seconde formule de ce genre trouvée par A. RADICKE (*) et J. WORPITZKY (**).

Posons dans (8) $p = 2$, nous aurons, en vertu de la formule *eulérienne* (13) du paragraphe I,

$$\frac{n\, T_n}{2^{2n-2}} = \sum_{q=1}^{q=n-1} (-1)^{q-1} \binom{2\,n}{2\,q} 2^{2n-2q} B_{n-q} + (-1)^{n-1}\,(2\,n-1); \tag{9}$$

posons dans (7)

$$p = 3, \quad s'_m = 1, \quad s''_m = 2^m,$$

nous aurons ces deux autres formules récursives d'une simple forme

$$\frac{3^{2n+1}-3}{2} B_n + \sum_{q=1}^{q=n-1} (-1)^q \binom{2\,n}{2\,q} 3^{2n-2q} B_{n-q} = (-1)^{n-1}\,(3\,n-1) \tag{10}$$

$$\frac{3^{2n+1}-3}{2} B_n + \sum_{q=1}^{q=n-1} (-1)^q \binom{2\,n}{2\,q} 2^{2q}\, 3^{2n-2q} B_{n-q} = (-1)^{n-1}\,(3\,n-2)\, 2^{2n-1}. \tag{11}$$

Soit maintenant l'ensemble adjoint à (1) défini par

$$\beta_s = (-1)^s, \tag{12}$$

nous formons deux fonctions partielles complémentaires $h_m(x)$ et $k_m(x)$ de ces deux ensembles. Posons ensuite

$$h_m(x) = \sum_{q=0}^{q=m} \frac{\sigma'_q}{q!\, p^q} \cdot \frac{x^{m-q}}{(m-q)!}, \quad k_m(x) = \sum_{q=0}^{q=m} \frac{\sigma''_q}{q!\, p^q} \cdot \frac{x^{m-q}}{(m-q)!},$$

les sommes complémentaires σ'_q et σ''_q satisfont à la condition

$$\sigma'_q + \sigma''_q = (-1)^{p-1}\, \sigma_q\,(p-1), \tag{13}$$

ce qui donnera pour $q = 0$

$$\sigma'_0 + \sigma''_0 = 0, \qquad \sigma'_0 + \sigma''_0 = -1 \tag{14}$$

selon que p est supposé impair ou pair.

Cela posé, nous trouvons le théorème suivant:

II. *Soit $h_m(x)$ une fonction partielle quelconque formée des ensembles*

(*) *Die Recursionsformeln für die Bernoullischen und Eulerschen Zahlen*, p. 7. Halle, 1880.

(**) *Journal de Crelle*, t. 84, p. 217; 1883.

(1) *et* (12), *les* 2^r *fonctions de la forme*

$$G_n(x) = \frac{E_n(px)}{p^n} + h_n(x) \tag{15}$$

sont toutes des polynomes réguliers.

Nous aurons dans ce cas

$$(-1)^{n+p-1} G_n(-x-1) = \frac{E_n(px)}{p^n} + \left(h_n(x) + k_n(x)\right) - k_n(x) = G_n(x); \tag{16}$$

c'est-à-dire que nous avons à étudier séparément les deux cas suivants:

1.° *p est un nombre impair.* Dans ce cas le polynome $G_n(x)$ est précisément du degré n par rapport à x; car le coefficient qui correspond à la puissance x^n deviendra

$$\frac{1}{n!}\left(\sigma'_0 + \frac{1}{2}\right),$$

et σ'_0 est un nombre entier.

Cherchons dans $G_n(x)$ les coefficients des puissances x^{n-2s}, nous aurons le développement selon les fonctions d'Euler

$$\frac{1}{2} G_n(x) = \left(\frac{1}{2} + \sigma'_0\right) E_n(x) + \sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{\sigma'_{2s}}{(2s)!\, p^{2s}} E_{n-2s}(x), \tag{17}$$

d'où en posant $2n+1$ au lieu de n, puis supposant $x=0$ la formule récursive pour les coefficients des tangentes

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{p^{2n+1}-1}{2} + \sigma'_0 p^{2n+1}\right) T_{n+1} + \\ &+ \sum_{s=1}^{s=n} (-1)^s \binom{2n+1}{2s} 2^{2s} p^{2n-2s+1} \sigma'_{2s} T_{n-s+1} = (-1)^n 2^{2n+1} \sigma'_{2n+1}, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

où il faut supposer $n \geq 1$.

Posons dans (17) $n=1$, $x=0$, nous aurons au contraire

$$\sigma'_1 = \frac{p-1}{4} + \frac{\sigma'_0 p}{2}. \tag{19}$$

Introduisons maintenant dans (18), au lieu des σ'_m, les sommes complémentaires σ''_m, ce qui est permis, puis ajoutons les deux résultats ainsi obtenus, nous aurons, quelles que soient les fonctions partielles complémentaires $h_m(x)$ et $k_m(x)$,

$$\left.\begin{aligned}(p^{2n+1}-1)\,T_{n+1}+\sum_{s=1}^{s=n}(-1)^s\binom{2n+1}{2s}2^{2s}p^{2n-2s+1}\,\sigma_{2s}(p-1)\,T_{n-s+1}&=\\ =(-1)^n\,2^{2n+1}\,\sigma_{2n+1}(p-1).&\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

Posons, dans (18),

$$p=3,\quad \sigma'_m=-1,\quad \sigma''_m=2^m,$$

nous aurons les formules particulières

$$\frac{3^{2n+1}+1}{2}\,T_{n+1}+\sum_{s=1}^{s=n}(-1)^s\binom{2n+1}{2s}2^{2s}\,3^{2n-2s+1}\,T_{n-s+1}=(-1)^{n-1}\,2^{2n-1}\qquad(21)$$

$$\frac{3^{2n+2}-1}{2}\,T_{n+1}+\sum_{s=1}^{s=n}(-1)^s\binom{2n+1}{2s}2^{4s}\,3^{2n-2s+1}\,T_{n-s+1}=(-1)^n\,2^{4n+2}.\qquad(22)$$

2.° *p est un nombre pair.* Dans ce cas le degré de $G_n(x)$ ne peut pas, en vertu de (16), dépasser $n-1$; c'est-à-dire que nous aurons

$$\sigma'_0=\sigma''_0=-\frac{1}{2}\,.$$

Or, il est facile de voir que $G_n(x)$ est précisément du degré $n-1$; car le coefficient qui correspond à la puissance x^{n-1} deviendra

$$\frac{1}{(n-1)!\,p}\left(\sigma'_1+\frac{1}{4}\right),$$

et σ'_1 est la moitié d'un nombre impair.

Nous trouvons ici le développement suivant selon les fonctions de Bernoulli

$$\frac{1}{2}\,G_n(x)=\sum_{s=0}^{\leq\frac{n-1}{2}}\frac{\sigma'_{2s+2}}{(2s+2)!\,p^{2s+2}}\,B_{n-2s-1}(x),\quad n\geqq 1,\qquad(23)$$

d'où en substituant $2n+1$ au lieu de n, puis posant $x=0$

$$\left.\begin{aligned}\frac{(n+1)\,p}{2^{2n+2}}\,T_{n+1}+\sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n+2}{2s+2}p^{2n-2s}\,\sigma'_{2s+2}\,B_{n-s}&=\\ =(-1)^{n-1}\Big((n+1)\,p\,\sigma'_{2n+1}-\sigma'_{2n+2}\Big),&\end{aligned}\right\}\quad(24)$$

formule qui est valable, pourvu que $n\geqq 1$.

Posons dans (23) $n = 1$, $x = 0$, nous aurons au contraire

$$\sigma'_2 = \frac{p}{2} + 2p\sigma'_1. \tag{25}$$

La formule (24) donnera, par le procédé ordinaire, quelles que soient les fonctions partielles complémentaires $h_m(x)$ et $k_m(x)$,

$$\left.\begin{aligned}\frac{(n+1)\,p\,T_{n+1}}{2^{2n+1}} = \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \binom{2n+2}{2s+2} p^{2n-2s} \sigma_{2s+2}(p-1)\, B_{n-s} + \\ + (-1)^n \Big((n+1)\,p\,\sigma_{2n+1}(p-1) - \sigma_{2n+2}(p-1)\Big)\cdot\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Les cas particulier $p = 2$ nous conduira de nouveau à la formule (9).

XI. Suites régulières de deuxième espèce.

Soient maintenant $f_m(x)$ et $g_m(x)$ deux fonctions partielles complémentaires quelconques qui correspondent à l'ensemble des nombres α_s

$$1, 3, 5, 7, \ldots, 2p-1 \tag{1}$$

et à l'ensemble adjoint

$$\beta_s = 1, \tag{2}$$

puis posons pour abréger

$$f_m(x) = \sum_{s=1}^{s=m} \frac{t'_s}{s!\,(2p)^s} \cdot \frac{x^{m-s}}{(m-s)!}, \; g_m(x) = \sum_{s=1}^{s=m} \frac{t''_s}{s!\,(2p)^s} \cdot \frac{x^{m-s}}{(m-s)!}, \tag{3}$$

nous aurons pour les sommes complémentaires

$$t'_m + t''_m = t_m(p), \tag{4}$$

d'où particulièrement

$$t'_0 = t''_0 = \frac{p}{2}\cdot \tag{5}$$

Appliquons ensuite la première des formules (7) du paragraphe IX, il résulte le théorème:

I. *Soit* $f_m(x)$ *une fonction partielle quelconque formée des ensembles* (1) *et* (2), *les fonctions*

$$F_n(x) = \frac{B_n\left(p\,x - \frac{1}{2}\right)}{p^{n-1}} + f_{n-1}(x), \quad n \geqq 1 \tag{6}$$

sont toutes des polynomes réguliers.

Remarquons que le polynome $B_n\left(p\,x - \frac{1}{2}\right)$ ne contient que des puissances de la forme x^{n-2s}, nous aurons

$$\frac{1}{2} F_n(x) = \sum_{q=0}^{\leqq \frac{n}{2}} \frac{t'_{2q}}{(2q)!\,(2p)^{2q}} B_{n-2q}(x), \tag{7}$$

d'où, en introduisant $2n$ au lieu de n, puis posant $x = 0$, la formule récursive

$$\frac{p}{2}(2^{2n} - 2) B_n + \sum_{q=0}^{q=n-1} (-1)^q \binom{2n}{2q} (2p)^{2n-2q} t'_{2q} B_{n-q} = (-1)^n (t'_{2n} - 2np\,t'_{2n-1}), \tag{8}$$

ce qui donnera, quelles que soient les fonctions partielles complémentaires que nous venons d'appliquer,

$$\left.\begin{aligned} p\,(2^{2n} - 2) B_n + \sum_{q=0}^{q=n-1} (-1)^q \binom{2n}{2q} (2p)^{2n-2q} t_{2q}(p) B_{n-q} = \\ = (-1)^n \Big(t_{2n}(p) - 2np\,t_{2n-1}(p)\Big). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Soit particulièrement $p = 1$, nous retrouvons la formule (9) du paragraphe X, tandis que les hypothèses

$$p = 2, \quad t'_m = 1, \quad t''_m = 3^m$$

donnent, en vertu de (8),

$$\frac{(2^{2n} + 2)\,n\,T_n}{2^{2n-1}} = \sum_{q=1}^{q=n-1} (-1)^{q-1} \binom{2n}{2q} 2^{4n-4q} B_{n-q} - (-1)^n (4n - 1) \tag{10}$$

$$\frac{(2^{2n} + 2)\,n\,T_n}{2^{2n-1}} = \sum_{q=1}^{q=n-1} (-1)^{q-1} \binom{2n}{2q} 3^{2q}\, 2^{4n-4q} B_{n-q} - (-1)^n (4n - 3)\, 3^{2n-1}. \tag{11}$$

Étudions maintenant le cas, où l'ensemble adjoint de (1) se détermine par les nombres

$$\beta_s = (-1)^s, \quad \alpha_s = 2s + 1, \tag{12}$$

puis désignons par $h_m(x)$ et $k_m(x)$ deux fonctions partielles complémentaires formées de ces ensembles, nous aurons en posant

$$h_m(x) = \sum_{s=0}^{s=m} \frac{\tau'_s}{s!\,(2\,p)^s} \cdot \frac{x^{m-s}}{(m-s)!}, \quad k_m(x) = \sum_{s=0}^{s=m} \frac{\tau''_s}{s!\,(2\,p)^s} \cdot \frac{x^{m-s}}{(m-s)!} \tag{13}$$

pour les sommes complémentaires τ'_m et τ''_m la condition suivante

$$\tau'_m + \tau''_m = (-1)^{p-1}\,\tau_m(p). \tag{14}$$

Cela posé, la dernière des formules (7) du paragraphe IX donnera le théorème:

II. *Soit* $h_m(x)$ *une fonction partielle quelconque, formée des ensembles* (1) *et* (12), *les fonctions*

$$G_n(x) = \frac{E_n\left(p\,x - \frac{1}{2}\right)}{p^n} - h_n(x) \tag{15}$$

sont toutes des polynomes réguliers.

L'équation fonctionnelle correspondante, savoir

$$(-1)^{n+p}\,G_n(-x-1) = G_n(x) \tag{16}$$

dépendant de la parité de p, nous avons à étudier séparément les deux cas suivants:

1.° *p est un nombre pair.* Les mêmes réflexions que dans le paragraphe précédent montrent que $G_n(x)$ est toujours un polynome du degré n; remarquons ensuite que $E_n\left(p\,x - \frac{1}{2}\right)$ ne contient que des puissances de x de la forme x^{n-2s}, nous aurons le développement

$$\frac{1}{2}\,G_n(x) = -\sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{\tau'_{2s+1}}{(2\,s+1)!\,(2\,p)^{2s+1}}\,B_{n-2s}(x). \tag{17}$$

Introduisons ensuite dans (17) $2\,n$ au lieu de n, puis posons $x = 0$, il résulte la formule récursive

$$\left.\begin{aligned}\left(n+\frac{1}{2}\right)p\,E_n = \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \binom{2\,n+1}{2\,s+1} (2\,p)^{2n-2s}\,\tau'_{2s+1}\,B_{n-s} - \\ -(-1)^n\left((2\,n+1)\,p\,\tau'_{2n} - \tau'_{2n+1}\right),\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

d'où, en appliquant la méthode ordinaire,

$$\left.\begin{aligned}(2n+1)\,p\,E_n + \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \binom{2n+1}{2s+1} (2p)^{2n-2s}\, \tau_{2s+1}(p)\, B_{n-s} = \\ = (-1)^{n-1}\Big(\tau_{2n+1}(p) - (2n+1)\,p\,\tau_{2n}(p)\Big),\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

et nous trouvons toujours cette formule, quelles que soient les deux fonctions partielles complémentaires $h_m(x)$ et $k_m(x)$.

Posons, dans (18),

$$p = 2, \quad \tau'_m = 1, \quad \tau''_m = -3^m,$$

nous aurons respectivement

$$(2n+1)\,E_n = \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \binom{2n+1}{2s+1} 2^{4n-4s} B_{n-s} + (-1)^n (4n+1) \quad (20)$$

$$(2n+1)\,E_n + \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \binom{2n+1}{2s+1} 3^{2s+1}\, 2^{4n-4s} B_{n-s} = (-1)^{n-1}(4n-1)\,3^{2n}. \quad (21)$$

2.° *p est un nombre impair.* Dans ce cas $G_n(x)$ est un polynome du degré $n-1$, de sorte que nous aurons ici

$$\frac{1}{2} G_n(x) = -\sum_{s=0}^{\leq\frac{n-1}{2}} \frac{\tau'_{2s+1}}{(2s+1)!\,(2p)^{2s+1}} E_{n-2s-1}(x), \qquad n \geqq 1, \quad (22)$$

ce qui donnera en substituant $2n$ au lieu de n et en posant $x = 0$

$$\frac{1}{2} E_n = \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \binom{2n}{2s+1} p^{2n-2s-1}\, \tau'_{2s+1}\, T_{n-s} + (-1)^n \tau'_{2n} \quad (23)$$

$$E_n = \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \binom{2n}{2s+1} p^{2n-2s-1}\, \tau_{2s+1}(p)\, T_{n-s} + (-1)^n \tau_{2n}(p). \quad (24)$$

Posons $p = 1$, nous aurons la formule d'Euler (*)

$$E_n = \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \binom{2n}{2s+1} T_{n-s} + (-1)^n, \quad (25)$$

ce qui est précisément la formule (12) du paragraphe I.

(*) *Opuscula analytica*, t. II, pp. 269-270. Saint-Pétersbourg, 1785.

XII. Suites régulières de troisième espèce.

Il est très curieux, ce me semble, que les formules (8) et (9) du paragraphe IX nous permettent de généraliser les résultats obtenus dans les deux paragraphes précédents.

En effet, désignons par $m > 1$ un entier quelconque du reste, par

$$\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\ldots\,\alpha_\mu\,, \qquad \mu = \varphi(m) \tag{1}$$

les positifs entiers plus petits que m et premiers avec m et déterminons l'ensemble adjoint de sorte que

$$\beta_s = 1, \tag{2}$$

nous aurons pour les coefficients des deux fonctions partielles complémentaires quelconques

$$f_n(x) = \sum_{q=0}^{q=n} \frac{s'_q}{q\,!\,m^q} \cdot \frac{x^{n-q}}{(n-q)\,!}, \quad g_n(x) = \sum_{q=0}^{q=n} \frac{s''_q}{q\,!\,m^q} \cdot \frac{x^{n-2}}{(n-q)\,!} \tag{3}$$

les conditions suivantes

$$s'_q + s''_q = s_q = \sum_{s=1}^{s=\mu} \alpha_s^q. \tag{4}$$

Cela posé, nous aurons le théorème suivant:

I. *Soit* $m > 1$ *un entier quelconque du reste, et soit* $f_n(x)$ *une fonction partielle quelconque, formée des ensembles* (1) *et* (2), *les fonctions*

$$\Phi_n(x) = F_n(x) + f_{n-1}(x), \qquad n \geqq 1, \tag{5}$$

où $F_n(x)$ *est la fonction définie par la formule* (10) *du paragraphe IX, sont toutes des polynomes réguliers.*

Nous aurons immédiatement le développement

$$\frac{1}{2}\,\Phi_n(x) = \sum_{q=0}^{\leqq \frac{n}{2}} \frac{s'_{2q}}{(2\,q)\,!\,m^{2q}}\,B_{n-2q}(x), \tag{6}$$

d'où en remplaçant n par $2\,n$, puis posant $x = 0$, la formule récursive très curieuse

$$\left.\begin{aligned}\frac{(-1)^r m \varphi_{2n-1}(m)}{2} B_n + (-1)^n (s'_{2n} - m n s'_{2n-1}) = \\ = \sum_{q=0}^{q=n-1} (-1)^q \binom{2n}{2q} s'_{2q} m^{2n-2q} B_{n-q}.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Introduisons dans (7) au lieu de s'_q les sommes correspondantes, puis additionnons les deux formules ainsi obtenues, nous aurons toujours, quelles que soient les fonctions partielles complémentaires appliquées:

$$\left.\begin{aligned}(-1)^r m \varphi_{2n-1}(m) B_n + (-1)^n (s_{2n} - m n s_{2n-1}) = \\ = \sum_{q=0}^{q=n-1} (-1)^q \binom{2n}{2q} m^{2n-2q} s_{2q} B_{n-q}.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Posons encore dans (7)

$$m = 6, \quad r = 2, \quad s'_n = 1, \quad s''_n = 5^n,$$

il résultent les formules récursives

$$(3^{2n} - 3)(2^{2n-1} - 1) B_n = \sum_{q=0}^{q=n-1} (-1)^q \binom{2n}{2q} 6^{2n-2q} B_{n-q} + (-1)^n (6n - 1) \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned}(3^{2n} - 3)(2^{2n-1} - 1) B_n = \sum_{q=0}^{q=n-1} (-1)^q \binom{2n}{2q} 5^{2q} 6^{2n-2q} B_{n-q} + \\ + (-1)^n (6n - 5) 5^{2n-1}.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Quant à l'application des formules (9) et (11) du paragraphe IX, nous supposons m impair et nous remplaçons l'ensemble (2) par cet autre

$$\beta_s = (-1)^{\alpha_s}. \tag{11}$$

Soient ensuite $h_n(x)$ et $k_n(x)$ deux fonctions partielles complémentaires formées de ces deux ensembles (1) et (11), nous posons

$$h_n(x) = \sum_{q=0}^{q=n} \frac{\sigma'_q}{q!\, m^q} \cdot \frac{x^{n-q}}{(n-q)!}, \quad k_n(x) = \sum_{q=0}^{q=n} \frac{\sigma''_q}{q!\, m^q} \cdot \frac{x^{n-q}}{(n-q)!}, \tag{12}$$

ce qui donnera

$$\sigma'_q + \sigma''_q = \sigma_q = \sum_{s=1}^{s=\mu} (-1)^{\alpha_s} \alpha_s^q, \tag{13}$$

d'où particulièrement pour $q = 0$

$$\sigma'_q + \sigma''_q = 0. \tag{14}$$

Cela posé, nous aurons le théorème suivant:

II. *Soit $m > 1$ un nombre entier impair quelconque du reste, et soit $h_n(x)$ une fonction partielle quelconque formée des ensembles* (1) *et* (11), *les fonctions*

$$\Psi_n(x) = G_n(x) + h_n(x), \tag{15}$$

où $G_n(x)$ est la fonction définie par la formule (11) *du paragraphe IX, sont toutes des polynomes réguliers.*

Dans ce cas nous aurons le développement

$$\frac{1}{2}\Psi_n(x) = \sum_{q=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{\sigma'_{2q}}{(2q)!\, m^{2q}} E_{n-2q}(x), \tag{16}$$

d'où, en remplaçant n par $2n+1$, puis posant $x = 0$, la formule récursive curieuse

$$\left.\begin{aligned}\frac{(-1)^r}{2}\varphi_{2n+1}(m)\, T_{n+1} = \sum_{q=0}^{q=n} (-1)^q \binom{2n+1}{2q} 2^{2q} m^{2n-2q+1} \sigma'_{2q} T_{n-q+1} - \\ -(-1)^n 2^{2n+1} \sigma'_{2n+1},\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

de sorte que nous aurons, en vertu de (14),

$$\left.\begin{aligned}(-1)^r \varphi_{2n+1}(m)\, T_{n+1} = \sum_{q=0}^{q=n} (-1)^q \binom{2n+1}{2q} 2^{2q} m^{2n-2q+1} \sigma_{2q} T_{n-q+1} - \\ -(-1)^n 2^{2n+1} \sigma_{2n+1}.\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Soit m un nombre premier, les formules récursives générales que nous venons de développer coïncident avec celles obtenues dans le paragraphe X.

QUATRIÈME PARTIE.

Applications diverses.

XIII. SUR DEUX ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

KRONECKER (*), dans ses recherches remarquables, trouve pour le nombre général B_n de BERNOULLI deux expressions à l'aide des sommes des puissances des racines de deux équations algébriques.

Or, il est très facile de trouver d'autres expressions de ce genre et plus simples que celles de KRONECKER.

A cet effet, prenons pour point de départ la formule d'EULER, savoir la formule (9) du paragraphe V

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{(-1)^r}{(2r+1)!} \cdot \frac{2^{2n-2r-1} B_{n-r}}{(2n-2r)!} + \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} = 0, \tag{1}$$

puis désignons par s_q la somme des q-ièmes puissances de m racines de l'équation algébrique

$$\frac{x^m}{1!} - \frac{x^{m-1}}{3!} + \frac{x^{m-2}}{5!} - \cdots = 0, \tag{2}$$

la formule de NEWTON donnera, pour $1 \leqq n \leqq m$

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{(-1)^r s_{n-r}}{(2r+1)!} + \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} = 0, \tag{3}$$

d'où en vertu de (1)

$$s_n = \frac{2^{2n-1} B_n}{(2n)!}, \quad 1 \leqq n \leqq m. \tag{4}$$

Appliquons ensuite la formule récursive de JACOBI (**)

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{(-1)^r}{(2r+2)!} \cdot \frac{B_{n-r}}{(2n-2r)!} + \frac{(-1)^n n}{(2n+2)!} = 0, \tag{5}$$

(*) *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (2), t. 1, pp. 385-391; 1856.

(**) *Journal de Crelle*, t. 12, p. 265; 1834.

ce qui n'est autre chose que l'expression de $B_{2n+2}(-1)$ tirée directement de la formule (2) du paragraphe I, puis désignons par s'_q la somme des q-ièmes puissances des m racines de l'équation algébrique

$$\frac{x^m}{2!} - \frac{x^{m-1}}{4!} + \frac{x^{m-2}}{6!} - \cdots = 0, \tag{6}$$

nous aurons de même, en vertu de la formule de Newton,

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{(-1)^r s_{n-r}}{(2r+2)!} + \frac{(-1)^n n}{(2n+2)!} = 0, \quad 1 \leqq n \leqq m, \tag{7}$$

d'où, en vertu de (5),

$$s'_n = \frac{B_n}{(2n)!}, \quad 1 \leqq n \leqq m. \tag{8}$$

Cela posé, les formules (4) et (8) donnent, pour les deux équations algébriques (4) et (8), la relation

$$s_n = 2^{m-1} s'_n, \quad 1 \leqq n \leqq m; \tag{9}$$

j'ignore comment démontrer directement cette formule curieuse.

M. Mandl (*) a trouvé, pour les nombres (4), la formule récursive (3) sans remarquer qu'elle appartient à Euler.

XIV. Sur un théorème de Sylvester.

Il nous reste encore à montrer comment on pourrait tirer directement de nos formules précédentes quelques propriétés essentielles des nombres de Bernoulli.

En premier lieu la formule de Moivre, savoir la formule (10) du paragraphe V, donnera, par la conclusion de n à $n+1$, une expression de la forme

$$2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \ldots (2n+1) B_n = 2k + 1,$$

où k est un entier non négatif; c'est-à-dire que nous pouvons toujours ad-

(*) *Sitzungsberichte der Wiener Akademie*, t. 94, I, p. 953; 1886.

mettre

$$B_n = \frac{a_n}{2\,b_n}, \tag{1}$$

où a_n et b_n sont des entiers impairs premiers entre eux.

Désignons ensuite par $2\,G_n$ le plus petit dénominateur commun des n premiers nombres de Bernoulli, G_n est toujours un nombre impair.

Appliquons ensuite la formule (9) du paragraphe X, savoir

$$\frac{n\,T_n}{2^{2n-2}} = \sum_{q=1}^{q=n-1} (-1)^{q-1} \binom{2\,n}{2\,q} 2^{2n-2q} B_{n-q} + (-1)^{n-1} (2\,n-1),$$

le second membre est, en vertu de (1), un entier; multiplions par G_{n-1}, nous verrons que ce nombre est impair, de sorte que nous aurons

$$n\,T_n = 2^{2n-2} (2\,K+1), \tag{2}$$

où K est un entier non négatif.

Cela posé, nous aurons immédiatement le théorème suivant indiqué par Worpitzky (*):

I. *Soit l'indice n un nombre de la forme $2^p\,(2\,q+1)$, nous aurons pour le n-ième coefficient des tangentes une expression de la forme*

$$T_n = 2^{2n-p-2} (2\,r+1). \tag{3}$$

En dernier lieu, nous avons à appliquer la formule (8) du paragraphe X, savoir

$$\left.\begin{aligned} p\,(p^{2n}-1)\,B_n + \sum_{q=1}^{q=n-1} (-1)^q \binom{2\,n}{2\,q} p^{2n-2q} s_{2q}(p-1)\,B_{n-q} = \\ = (-1)^n \Big(s_{2n}(p-1) - n\,p\,s_{2n-1}(p-1)\Big) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

combinée avec un résultat obtenu pour la somme

$$s_n(q) = 1^n + 2^n + 3^n + \cdots + q^n.$$

En effet, posons dans l'expression de $B_{n+1}(x)$ successivement $x=q$, $x=0$, puis soustrayons, il en résulte la formule classique

$$s_n(q) = \frac{q^{n+1}}{n+1} + \frac{q^n}{2} + \sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^{s-1}}{n+1} \binom{n+1}{2\,s} B_s\, q^{n-2s+1}; \tag{5}$$

(*) *Journal de Crelle*, t. 94, p. 232; 1883.

posons ensuite dans cette formule $q = 1, 2, 3, \ldots, p-1$, puis ajoutons tous les résultats ainsi obtenus, nous aurons

$$\sum_{q=1}^{q=p-1} s_n(q) = \frac{s_{n+1}(p-1)}{n+1} + \frac{s_n(p-1)}{2} + \sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^{s-1}}{n+1}\binom{n+1}{2s} B_s\, s_{n-2s+1}(p-1).$$

Or, nous aurons pour le premier membre de cette formule l'expression

$$(p-1)\,1^n + (p-2)\,2^n + \cdots + 1\,.\,(p-1)^n = p\, s_n(p-1) - s_{n+1}(p-1);$$

remplaçons enfin n par $2n-1$, il en résulte

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{q=1}^{q=n-1} (-1)^q \binom{2n}{2q} s_{2q}(p-1)\, B_{n-q} = \\ &\quad = (-1)^n \Big((2n+1)\, s_{2n}(p-1) - (2np-n)\, s_{2n-1}(p-1)\Big) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

d'où, en soustrayant les formules (4) et (6), puis multipliant par p^n et divisant par $2n$, nous trouvons la formule

$$\left.\begin{aligned} &\frac{p^{n+1}(p^{2n}-1)}{2n} B_n + \sum_{q=1}^{q=n-1} (-1)^q \binom{2n-1}{2q} s_{2q}(p-1) \frac{p^n(p^{2n-2q}-1)}{2n-2q} B_{n-q} = \\ &\quad = (-1)^n \left(\frac{p^n(p-1)}{2} s_{2n-1}(p-1) - p^n s_{2n}(p-1)\right). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Remarquons maintenant que l'expression

$$\frac{p^2(p^2-1)}{2} B_1 = \frac{p^2(p+1)(p-1)}{12} \tag{8}$$

est toujours un nombre entier, pourvu que p le soit, la formule (7) donnera par la conclusion de n à $n+1$, le théorème suivant:

II. *Soit p un nombre entier quelconque, l'expression*

$$C_n = \frac{p^{n+1}(p^{2n}-1)}{2n} B_n \tag{9}$$

est toujours un nombre entier.

On sait que Sylvester (*) a démontré que l'expression

$$\frac{p^{2n}(p^{2n}-1)}{2n} B_n \tag{10}$$

est un nombre entier, résultat qui est retrouvé par Lipschitz (**).

(*) *Philosophical Magazine*, février 1861.

(**) *Journal de Crelle*, t. 96, p. 2; 1884.

Soit p un nombre de la forme $6q \pm 1$, nous verrons, en vertu de (8), que l'expression

$$\frac{p^{n-1}(p^{2n}-1)}{2n} B_n \tag{11}$$

est toujours un nombre entier.

Posons particulièrement, dans (9), $p = 2$, nous verrons, en vertu de (1), que le nombre

$$A_n = 2(2^{2n}-1) B_n \tag{12}$$

est toujours un nombre entier impair, résultat qui était connu déjà par Euler (*).

Remarquons l'identité

$$n\, T_n = 2^{2n-2} A_n,$$

le théorème de Worpitzky est évident et se présente comme une conséquence immédiate des formules *eulériennes* susdites.

(*) *Institutiones calculi differentialis*, pp. 495-497. Saint-Pétersbourg, 1755.

Sulla generazione di curve piane algebriche reali mediante « piccola variazione » di una curva spezzata.

(*Di* LUIGI BRUSOTTI, *a Pavia.*)

Gli studî sul numero, sulla disposizione e sul comportamento dei circuiti di una curva piana algebrica reale si sono svolti principalmente in due indirizzi.

Uno di essi prende le mosse da un'osservazione di CAYLEY sull'esistenza di sestiche piane (prive di molteplicità) dotate di un sol circuito non projettabile interamente al finito (*), e si fonda sul concetto di *indice,* cioè del minimo numero di punti (reali) in cui un circuito è tagliato da una retta (reale). Così CHARLOTTE ANGAS SCOTT ha dimostrato che per ogni ordine n esistono curve razionali costituite da un circuito d'indice $n-2$ e curve ellittiche costituite da un tal circuito ed eventualmente da un ovale (**) e PETER FIELD hà trovato che per ogni ordine n esistono curve, prive di singolarità, dotate di un sol circuito d'indice $n-4$, mentre esistono curve di genere p $[1 \leq p \leq n-2]$ costituite da p circuiti tali che la somma dei loro indici sia $= n-2$ (***).

L'altro indirizzo, più largamente rappresentato, parte dai classici risultati di un lavoro di HARNACK (****). In esso è dimostrato che una curva di

(*) CAYLEY, *On quartic curves* (Phil. Mag. XXIX, 1865; Coll. Math. Pap., vol. V, pag. 468).

(**) SCOTT, *On the Circuits of plane Curves* (Transactions of the Amer. Math. Society, vol. 3, 1902, pagg. 388–398).

(***) FIELD, *On the Circuits of a plane Curve* (Math. Ann., Bd. LXVII, pag. 126; Bd. LXIX, pag. 218).

(****) *Ueber die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven* (Math. Ann., Bd. X, pagine 189-198).

genere p possiede al più $p+1$ circuiti, che per ogni valore di p esistono curve dotate di circuiti in tal numero e che per ogni ordine n esistono curve piane dotate di $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$ circuiti (numero massimo). HILBERT nella prima parte di una Memoria (la cui seconda parte è dedicata alle curve gobbe reali di massimo genere) dimostra l'esistenza di curve piane d'ordine n fornite di $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$ circuiti, dei quali $\frac{1}{2}(n-2)$ [per n pari] oppure $\frac{1}{2}(n-3)$ [per n dispari] sono disposti in modo che il primo sia interno al secondo, il secondo al terzo, ecc., ecc. (*eingeschachtelte Züge*) (*). I metodi ed i risultati di HILBERT sono estesi da HULBURT e da Miss RAGSDALE (**). Altri procedimenti per la costruzione di curve piane reali d'ordine n, col massimo numero di circuiti, sono esposti in una mia Nota (***).

Alle dette ricerche si collega il teorema secondo cui non esistono sestiche piane (reali) dotate di undici circuiti, ciascuno dei quali sia esterno agli altri; teorema enunciato da HILBERT (loc. cit.), preso pure in esame da WRIGHT e da KLARA LÖBENSTEIN (****) e recentemente dimostrato da ROHN ($*_*$). Nel citato lavoro di Miss RAGSDALE viene enunciata una generalizzazione di esso per curve d'ordine pari qualunque, ma la dimostrazione riflette le sole curve ottenute coi metodi di HARNACK e di HILBERT.

(*) HILBERT, *Ueber die reellen Züge algebraischer Curven* (Math. Ann., Bd. XXXVIII, pagg. 115-138).

(**) HULBURT, *A Class of New Theorems on the Number and Arrangement of the Real Branches of Plane Algebraic Curves* (American Journ. of Math., vol. 14, pag. 246). — RAGSDALE, *On the Arrangement of the Real Branches of Plane Algebraic Curven* (American Journ. of Math., vol. 28, pagg. 377-404).

(***) *Sulla generazione delle curve piane di genere p dotate di p + 1 circuiti* (Rend. R. Ist. Lomb., serie II, XLIII, 1910, pag. 143).

(****) WRIGHT, *The Ovals of the Plane Sextic Curve* (American Journ. of Math., vol. 29, pagg. 305-308). — LÖBENSTEIN, *Ueber den Satz, dass eine ebene, algebraische Kurve 6. Ordnung mit 11 sich einander ausschliessenden Ovalen nicht existiert* (Inaug. Dissert. Göttingen, Kaestner, 1910). Cfr. l'altra dissertazione uscita contemporaneamente alla precedente: G. KAHN, *Eine allgemeine Methode zur Untersuchung der Gestalten der algebraischen Kurven* (Göttingen, 1910).

($*_*$) *Die ebene Kurve 6. Ordnung mit elf Ovalen* (Leipz. Ber.; 63; 1911). — *Die Maximalzahl und Anordnung der Ovale bei der ebenen Kurve 6. Ordnung und bei der Fläche 4. Ordnung* (Math. Ann., Bd. LXXIII, 1913).

Gli studî di KLEIN (*) [pur riattaccandosi in parte a quelli di ZEUTHEN sulle bitangenti di una quartica piana reale (**)] si svolgono con metodi originali caratterizzati specialmente dall'intervento delle superficie dette di RIEMANN-KLEIN e dalla loro distinzione in diasimmetriche et ortosimmetriche. Qui ricordo come sia da KLEIN dimostrata l'esistenza di curve di genere p, dotate di 0, 1,..., p circuiti, nel caso diasimmetrico, e di curve di genere p, dotate di $p+1$, $p-1$, $p-3$,... circuiti nel caso ortosimmetrico.

Non insisto sui lavori concernenti curve di quarto, di quinto e di sesto ordine, dotate o meno di assegnate singolarità, lavori dovuti a W. FR. MEYER, BRILL, GENTRY, BULLARD, HJELMMAN, BARCROFT, DOWLING, PETER FIELD, ROSENBLATT . . . (***).

Nelle ricerche variamente dirette, che si son venute citando, l'effettiva costruzione di curve soddisfacenti a condizioni assegnate è generalmente ottenuta mediante « piccola variazione » di una curva spezzata. Il metodo consiste nella introduzione di $h \geq 2$ curve $f_i = 0$ d'ordini $n_i\,(i = 1, 2,\ldots, h)$ a punti reali e di una curva reale $g = 0$ d'ordine $n_1 + n_2 + \cdots + n_h$, con tale scelta che la curva:

$$f_1 f_2 \ldots f_h + t\,g = 0 \tag{α}$$

per t reale, di segno opportuno e di valor assoluto abbastanza piccolo, possegga le volute proprietà.

Nella presente Memoria mi sono proposto di sottoporre il metodo della « piccola variazione » ad uno studio sistematico. Allo scopo di circoscrivere

---

(*) Vedansi specialmente: *Eine neue Relation zwischen den Singularitäten einer algebraischen Curve* (Math. Ann., Bd. X, pag. 199). — *Ueber den Verlauf der Abel'schen Integrale bei den Curven vierten Grades* (Ibid., pag. 365). — *Ueber eine neue Art von Riemann'schen Flächen* (Ibid., pag. 398; cfr. Bd. VII, pag. 558). — *Ueber Realitätsverhältnisse bei der einem beliebiger Geschlechte zugehörigen Normalcurve der* φ (Math. Ann., Bd. XLII, pag. 1). — *Riemann'sche Flächen* (Autograph. Vorles., Göttingen, 1892).

(**) ZEUTHEN, *Sur les différentes formes des courbes du quatrième ordre* (Math. Ann., Bd. VII, pag. 410).

(***) Per la bibliografia in proposito vedasi la diligente prefazione al lavoro di ROSENBLATT: *Untersuchungen über die Gestalten der algebraischen Kurven sechster Ordnung* (Bull. de l'Académie des Sciences de Cracovie, 1910, pag. 636). Cfr. pure KOHN, *Specielle ebene algebraische Kurven* [*Erster Teil: Ebene Kurven dritter und vierter Ordnung*] (Encyclopädie der Math. Wiss., III, 2, Heft 4), num. 53.

la trattazione, ho però escluso, così per le $f_i = 0$ come per la (α), l'esistenza di punti multipli reali e per le $f_i = 0$ anche quella di mutui contatti reali. In tale campo ho potuto raggiungere risultati di notevole generalità. Ho dimostrato, ad es., come (supposte le $f_i = 0$ in posizione generica) si possa realizzare algebricamente una « piccola variazione » di cui siano assegnati i caratteri topologici (§ 9) ed ho stabilito le condizioni perchè la (α) risulti dotata del massimo numero di circuiti relativo al suo ordine (§ 12).

Le ricerche svolte si fondano in parte su concetti e procedimenti offerti dall'*Analysis situs* del piano projettivo, in parte invece su sviluppi di carattere algebrico appartenenti specialmente alla teoria dei sistemi lineari di curve piane ed alla geometria sopra una curva.

Nell'intento di mantenere nettamente distinti i due diversi ordini di considerazioni, ho diviso il lavoro in due parti. La prima (dal § 1 al § 7) è di contenuto strettamente topologico, la seconda (dal § 8 al § 12) ne applica le conclusioni alle curve piane algebriche reali.

Il § 1 contiene alcuni preliminari sui *circuiti* (privi di punti multipli) nel piano projettivo e sulla divisione in regioni prodottavi da un sistema di circuiti in numero finito. È notevole, per alcune distinzioni in casi, l'intervento del concetto di segmento *di seconda specie* rispetto ad un circuito pari.

I §§ 2, 3, 4, 5 si riferiscono a sistemi Σ di circuiti sottoposti alla restrizione che per un punto del piano passino al più due circuiti del sistema.

Nel § 2 è studiata la « piccola variazione » di un sistema Σ col metodo dei *collegamenti*, cioè mediante un'operazione topologica nell'*intorno* di ogni mutua intersezione O fra circuiti di Σ [soppressione in Σ dei segmenti concorrenti in O e sostituzione con due *collegamenti* in *campi* opposti al vertice (Fig. 2)].

Nel § 3 è introdotto il metodo dei *passaggi* in cui è essenziale la considerazione del numero pari o dispari delle intersezioni di un segmento (o di un circuito) col suo trasformato [*parità dei passaggi*]. Nella determinazione di una « piccola variazione » con tale metodo intervengono il concetto di *Streckencomplex* e quello di *albero*.

Il § 4 stabilisce un limite superiore per il numero a' dei circuiti del sistema Σ' trasformato di Σ. Se Σ possiede a circuiti e presenta $k \neq 0$ intersezioni, si dimostra la:

$$a' \leq a + k - 2.$$

Supposto però Σ decomponibile in h sistemi S_i ($i = 1, 2, \ldots, h$) tali che circuiti di uno stesso S_i non posseggano mutue intersezioni, si trova:

$$a' \leq a + k - 2(h-1),$$

quando due sistemi S_i, S_j posseggano sempre $k_{ij} \neq 0$ mutue intersezioni. Per $h = 2, 3, 4$ il limite superiore può diventare un massimo colla comparsa di particolari coppie, terne, quaterne di circuiti, mentre ciò si esclude per $h > 4$. L'ipotesi che le k_{ij} non siano necessariamente tutte $\neq 0$ porta all'introduzione di una costante d ed alla relazione:

$$a' \leq a + k - 2(h-d).$$

Il § 5 è uno studio topologico delle coppie, terne e quaterne di circuiti inerenti ai casi di massimo trattati al § 4. I tipi elencati sono rappresentati nelle tavole fuori testo.

Nei §§ 6, 7 è tolta una precedente restrizione, supponendo che per un punto del piano possan passare più di due circuiti di Σ. Nel § 6 è generalizzato in tal senso il concetto di «piccola variazione» coll'introduzione di convenienti operazioni elementari. Nel § 7 si estendono ai nuovi sistemi i risultati del § 4.

Il § 8, che inizia la Parte II, studia la curva (α) nelle ipotesi che per un punto reale del piano passino al più due $f_i = 0$ e che la $g = 0$ non contenga nessuna delle mutue intersezioni reali fra le $f_i = 0$. Risulta che il sistema Σ' dei circuiti di (α) si ottiene da quello Σ dei circuiti della curva spezzata $f_1 f_2 \ldots f_h = 0$ con un procedimento di «piccola variazione» nel senso dei §§ 2 e 3.

Sorge il quesito se reciprocamente una «piccola variazione» topologica determinata possa algebricamente effettuarsi nel modo indicato. Il § 9, mantenute le ipotesi restrittive del § 8, risponde affermativamente a tale quesito. Nel caso di due curve $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, la trattazione si riduce alla costruzione di una $g = 0$, la quale (all'infuori eventualmente di una retta) sia nella sua parte essenziale costituita da $m \leq \frac{1}{2} n_1 n_2$ ovali circondanti altrettante mutue intersezioni reali delle $f_1 = 0$, $f_2 = 0$. È notevole l'intervento delle curve d'ordine $\frac{n_1 + n_2}{2}$ oppure $\frac{n_1 + n_2 - 1}{2}$ passanti per le dette m intersezioni. Per $h > 2$ curve $f_i = 0$ la trattazione si fonda su quella del precedente caso $h = 2$.

Il § 10 risolve, con metodi essenzialmente diversi, la questione del § 9 in alcuni casi particolari. In essi una delle $f_i = 0$ è una curva di genere p

dotata di $p+1$ oppure di p circuiti, la $g=0$ una sua curva aggiunta determinata mediante considerazioni di geometria sulla curva.

Il § 11 toglie le sopraindicate restrizioni del § 8; ad una « piccola variazione » algebrica così estesa corrisponde una « piccola variazione » topologica nel senso più esteso del § 6.

Nel § 12 sono stabilite le condizioni necessarie e sufficienti perchè una « piccola variazione » algebrica (nel senso più largo del § 11) produca una curva dotata del massimo numero di circuiti compatibile col suo ordine. La discussione, utilizzando i risultati dei §§ 4 e 7, conduce a soli *cinque tipi* distinti, in ciascuno dei quali il numero delle $f_i=0$ è ≤ 4 (*).

PARTE PRIMA.

La “ piccola variazione „ topologica.

§ 1. Preliminari.

1. Considero il *piano* dal punto di vista della Geometria projettiva, cioè come *una superficie chiusa, ad una faccia, riducibile ad un pezzo semplicemente connesso mediante un taglio chiuso* (*di seconda classe*) (**).

(*) Hulburt (loc. cit.), riferendosi al caso di due curve $f_1=0$, $f_2=0$, aveva enunciato che curve col massimo numero di circuiti si possono ottenere soltanto coi metodi di Harnack (n_1 qualunque, $n_2=1$) e di Hilbert, in senso largo (n_1 qualunque, $n_2=2$). Nella mia Nota citata ho dimostrato invece l'esistenza di procedimenti essenzialmente diversi. Le conclusioni del § 12 completano il risultato estendendolo anche al caso di $h>2$ curve $f_i=0$.

(**) Qui ed altrove mi valgo di concetti e denominazioni fondamentali nell'*Analysis situs*. Per ciò cfr. Dehn und Heegaard, *Analysis situs* (Encyclopädie der Math. Wiss., III, 1, Heft 1) specialmente a pag. 158 e a pag. 189 e seg.[1] Per quanto riguarda il piano projettivo vedi segnatamente Schläfli, *Correzione alla Memoria: Quand'è che dalla superficie generale di terz'ordine si stacca un pezzo rientrante?* (Ann. di Mat., T. VII, pag. 193) ed Enriques, *Prinzipien der Geometrie* (Enc. der Math. Wiss., III, 1, Heft 1) a pag. 74. Cfr. pure Steinitz, *Ueber ein merkwürdiges Polyeder von einseitiger Gesamtfläche* (Journal für Math., 130, pagg. 281-307) specialmente a pag. 287 e Mohrmann, *Ueber die automorphe Collineationsgruppe des rationalen Normalkegels n. Ordnung* (Rend. del Circolo mat. di Palermo, T. XXXI) a pag. 175.

È quindi essenziale la distinzione fra *circuiti pari* e *circuiti dispari* (incontrati da una retta generica in un numero pari risp. dispari di punti) (*). Dalla trattazione *escludo circuiti dotati di punti singolari* (*multipli*). Introduco invece talora *circuiti poligonali*, cioè dotati di *punti angolari* in numero finito. Ad essi sono applicabili le considerazioni valide per i circuiti ordinarî, quando nel computo delle intersezioni con altri circuiti si conteggino in modo opportuno quelle eventualmente raccolte nei punti angolari.

Due circuiti (non aventi infiniti punti in comune) si tagliano in un numero pari di punti se uno di essi è pari, in un numero dispari di punti se sono entrambi dispari.

2. Un circuito dispari non divide il piano, ma vi traccia un taglio di seconda classe, cioè vi determina una regione R semplicemente connessa, nella quale non giacciono circuiti dispari. Segue che ogni *segmento* (di curva) congiungente due punti del circuito divide R in due parti.

Un circuito γ pari divide il piano in due regioni R' R'', l'una *interna* non contenente circuiti dispari, l'altra *esterna* contenente circuiti dispari. La R' è semplicemente connessa. Invece un segmento σ cogli estremi su γ e giacente in R'' o divide R'' in due regioni (una semplicemente connessa, l'altra del tipo di R'') e si dirà *di prima specie*, oppure non divide R'' ma vi determina una regione semplicemente connessa e si dirà *di seconda specie* (rispetto a γ).

Gli estremi di σ dividono γ in due segmenti, ciascuno dei quali forma con σ un circuito (poligonale) pari o dispari secondo che σ è di prima o di seconda specie. Un circuito δ dispari non secante γ taglia perciò σ, nei due casi, rispettivamente in un numero pari o dispari di punti.

Se $\sigma' = A'B'$, $\sigma'' = A''B''$ *sono segmenti di seconda specie rispetto ad uno stesso circuito* γ (pari) *e non si tagliano, le coppie* $A'B'$, $A''B''$ *su* γ *si separano.* Infatti, se non si separassero, sarebbe possibile scegliere su γ uno τ' dei segmenti di estremi $A'B'$ ed uno τ'' dei segmenti di estremi $A''B''$ in modo che τ' e τ'' non abbiano punti in comune; in tal caso i circuiti $\tau' + \sigma'$, $\tau'' + \sigma''$, entrambi dispari, non si taglierebbero, il che è assurdo. Segue che se $\sigma' = A'B'$, $\sigma'' = A''B'', \ldots, \sigma^{(q)} = A^{(q)}B^{(q)}$ sono segmenti di seconda specie rispetto a γ, si possono scegliere le notazioni in modo che su γ gli estremi si succedano nell'ordine $A'A'' \ldots A^{(q)}B'B'' \ldots B^{(q)}$.

(*) Sui circuiti nel piano vedi von STAUDT, *Geometrie der Lage* (Nürnberg, 1847; trad. it. PIERI, Torino, 1888), § 12; ZEUTHEN, *Sur les différentes formes des courbes du quatrième ordre* (cit.) e per ulteriori citazioni BERZOLARI, *Allgemeine Theorie der höheren ebenen algebraischen Kurven* (Enc. der Math. Wiss., III, 2, Heft 3) a pagg. 385-386.

3. Siano $\gamma\,\gamma'$ due circuiti secantisi; le loro k intersezioni dividono così γ come γ' in k segmenti (considerando per $k=1$ i circuiti come segmenti cogli estremi coincidenti).

Se γ è pari, fra i k segmenti di γ', quelli di seconda specie rispetto a γ sono in numero pari o dispari secondo che γ' è pari oppure dispari. Ciò risulta dall'osservare che le intersezioni di γ' con un circuito δ dispari e non secante γ sono pur quelle di δ coi segmenti di γ' esterni a γ (cfr. num. 2).

Se fra i k segmenti di γ' due $\sigma' = A'B'$, $\sigma'' = A''B''$ sono di seconda specie rispetto a γ, le coppie $A'B'$, $A''B''$ su γ devono separarsi (num. 2), mentre su γ' non si separano. Segue che: *Se le k intersezioni di γ e γ', per opportuna scelta dei sensi, sono ugualmente ordinate sui due circuiti e γ è pari, dei k segmenti su γ' uno al più è di seconda specie rispetto a γ.* Onde *nelle dette ipotesi fra i k segmenti di γ' ne esiste uno ed uno solo di seconda specie rispetto a γ se γ' è dispari, non ne esistono se γ' è pari.*

4. Un sistema di circuiti (in numero finito) determina una divisione del piano in regioni. Due regioni i cui contorni abbiano un segmento in comune si diranno *limitrofe*. Una regione può essere limitrofa con se stessa (tale è la R determinata nel piano da un circuito dispari; vedi num. 2).

Se i circuiti dispari del sistema sono in numeri dispari non è possibile contraddistinguere le regioni coi segni + e — (tinteggiarle con due tinte) in modo che regioni limitrofe abbiano segno diverso (tinta diversa).

Infatti una retta generica (non passante per mutue intersezioni fra circuiti del sistema) taglia il sistema in un numero *dispari* di punti, che determinano sulla retta altrettanti segmenti. D'altra parte su di essa segmenti consecutivi appartengono a regioni limitrofe e, contraddistinti i segmenti come le regioni a cui appartengono, non è possibile ciò avvenga in modo che a segmenti consecutivi competano ovunque segni opposti.

Se i circuiti dispari del sistema sono in numero pari (anche nullo) è possibile contraddistinguere le regioni coi segni + e — (tinteggiarle con due tinte) in modo che regioni limitrofe abbiano segno diverso (tinta diversa).

Sia P un punto non appartenente a circuiti del sistema nè allineato con eventuali tratti rettilinei di tali circuiti. Una retta per P taglia il sistema in un numero pari di punti che su di essa determinano altrettanti segmenti. Sopra ogni retta per P si contraddistinguano alternatamente tali segmenti coi segni + e —, attribuendo il segno + al segmento contenente P e considerando come un segmento cogli estremi coincidenti ogni punto in cui sia raccolto un numero pari di intersezioni della retta con circuiti del sistema. Punti di una stessa regione giacciono così su segmenti ugualmente contrassegnati, punti di regioni limitrofe su segmenti diversamente contrassegnati. Si attribuisca ad ogni regione il segno dei segmenti che le appartengono; le regioni vengono contraddistinte nel modo voluto.

Nel caso di circuiti *tutti pari*, le regioni si possono assai semplicemente contraddistinguere attribuendo ad una di esse il segno + od il segno —, secondo che i circuiti del sistema ai quali è interna sono in numero pari o dispari (*).

5. Il sistema consti di due circuiti $\gamma\gamma'$ aventi $k>0$ punti in comune. *Le regioni sono $k+2$ se $\gamma\gamma'$ sono pari ed inoltre fra i k segmenti di γ' nessuno è di seconda specie rispetto a γ; sono $k+1$ in ogni altro caso.*

Nel primo caso infatti γ divide il piano in due regioni e, introducendo successivamente i k segmenti di γ', ognuno di essi stacca una nuova regione. Se $\gamma\gamma'$ sono pari, ma γ' presenta segmenti di seconda specie rispetto a γ, l'insieme di γ e di uno di tali segmenti divide il piano in due regioni semplicemente connesse; nella successiva introduzione degli altri $k-1$ segmenti di γ', ogni segmento stacca una nuova regione. Se infine uno dei circuiti (e sia γ) è dispari, esso determina nel piano una regione semplicemente connessa ed ogni segmento di γ' stacca una nuova regione.

Dalle cose dette segue pure che, se γ' non possiede segmenti di seconda specie rispetto a γ, lo stesso avviene di γ rispetto a γ'. In tal caso inoltre, delle $k+2$ regioni, $k+1$ sono semplicemente connesse, mentre la rimanente è ad una faccia e contiene circuiti dispari; il suo contorno si dirà *contorno esteriore* del sistema. Negli altri casi le $k+1$ regioni sono tutte semplicemente connesse.

6. *Se $\gamma\gamma'$ sono pari e privi di mutui segmenti di seconda specie, è possibile scegliere i sensi positivi sui circuiti e contrassegnare le regioni in tal maniera che il contorno delle regioni contraddistinte col + si possa percorrere in modo continuo descrivendo i segmenti di γ in senso positivo e quelli di γ' in senso negativo, mentre il contorno di quelle contraddistinte col — si*

(*) Le questioni trattate in questo numero hanno qualche affinità col cosiddetto *Kartenfarbenproblem* (Cfr. Dehn und Heegaard, loc. cit., pagg. 177-178), il quale è però stato studiato specialmente per superficie *a due faccie*. Per le superficie ad una faccia vedasi il breve cenno sulla superficie di Möbius dato da Heffter in nota al suo lavoro: *Ueber das Problem der Nachbargebiete* (Math. Ann., Bd. XXXVIII, pag. 477) a pagg. 479-480.

possa percorrere in modo continuo descrivendo i segmenti così di γ come di γ' in senso positivo.

Dim.^e^ — Fra le $k+2$ regioni, le $k+1$ semplicemente connesse si possono considerare come i *pezzi* di una superficie (semplicemente connessa) a due faccie. È perciò possibile (*) percorrere i contorni di tali regioni ed il contorno esteriore in sensi tali che un segmento comune ai contorni di due regioni (limitrofe) venga percorso sui due contorni in sensi opposti. Su γ [su γ'] si assuma come positivo il senso nel quale è percorso *un* suo segmento pensato come appartenente al contorno di una regione interna a γ [risp. esterna a γ']. Seguirà che tutti i segmenti di γ [risp. di γ'] verranno percorsi in senso positivo o negativo secondo che vengano pensati appartenenti al contorno di regioni interne od esterne a γ [risp. esterne o interne a γ']. Si muti il senso per i contorni delle regioni esterne a γ e si scelgano i segni delle regioni col criterio indicato in fine del num. 3; risulteranno le condizioni espresse nell'enunciato.

Se $\gamma\,\gamma'$ sono pari e dotati di mutui segmenti di seconda specie, non è possibile scegliere i sensi positivi sui circuiti e contrassegnare le regioni in maniera da soddisfare alle condizioni sopra indicate.

Se ciò fosse possibile, con procedimento inverso a quello seguito nel caso precedente si giungerebbe a stabilire per i contorni delle $k+1$ regioni sensi tali che ogni segmento comune ai contorni di regioni limitrofe venga percorso sui due contorni in sensi opposti. Il piano projettivo risulterebbe così composto di *pezzi* ad indicatrici concordi, il che è assurdo trattandosi di superficie ad una faccia.

Se $\gamma\,\gamma'$ sono dispari, è possibile scegliere i sensi positivi sui circuiti e contrassegnare le regioni in maniera da soddisfare alle condizioni sopra indicate.

Infatti tagliando il piano lungo γ si ha una superficie (semplicemente connessa) a due faccie, di cui le $k+1$ regioni determinate da $\gamma\,\gamma'$ sono i *pezzi*. È dunque lecito immaginare i contorni di tali regioni descritti in modo che segmenti (di γ') comuni ai contorni di due regioni limitrofe siano descritti sui due contorni in senso inverso. Regioni separate da γ non sono, sotto l'aspetto attuale, da considerarsi come adiacenti. Se si seguono i due bordi del taglio γ partendo da un punto su un bordo e ritornando a questo (sullo stesso bordo), si riconosce che nei contorni delle varie regioni i segmenti di γ sono percorsi tutti in ugual senso; e questo si fisserà come po-

(*) Si tenga presente quanto si legge in Dehn und Heegaard, loc. cit., pag. 158.

sitivo. Richiamata l'osservazione precedente sui segmenti di γ', comunque su di esso si fissi il senso positivo, con opportuna scelta dei segni delle regioni, risultano soddisfatte le volute condizioni.

7. Alcuni dei risultati precedenti (num.[i] 5 e 6) si estendono a sistemi di più circuiti a due a due secantisi. Qui mi limito a brevi osservazioni, supponendo che per un punto del piano passino al più due circuiti del sistema. Sia k il numero delle mutue intersezioni. Se il sistema contiene un circuito dispari il numero delle regioni è $k+1$. Se il sistema è di circuiti *tutti pari*, le regioni sono talora in numero di $k+2$ (di cui $k+1$ sono semplicemente connesse ed una contiene circuiti dispari), talora invece in numero di $k+1$. I due casi si dirimono nel modo seguente. Detti $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \ldots$ i circuiti del sistema, si supponga che γ_2 sia privo di segmenti di seconda specie rispetto a γ_1, che γ_3 sia privo di tali segmenti rispetto al *contorno esteriore* della coppia $\gamma_1 \gamma_2$, che γ_4 sia nelle stesse condizioni rispetto all'analogo *contorno esteriore* della terna $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ e che così si continui sino ad esaurire il sistema; si verifica allora il primo caso. Se invece il detto procedimento si arresta per la comparsa di segmenti di seconda specie, si verifica il secondo caso. È notevole che il secondo caso può avverarsi anche quando i circuiti presi

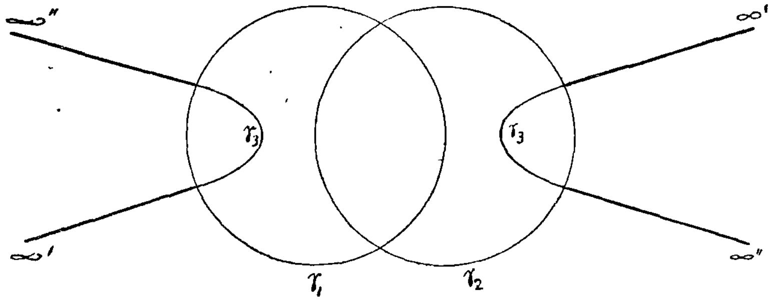


Fig. 1.

a due a due non presentino mutui segmenti di seconda specie, come dimostra la qui annessa Fig. 1, ove i segmenti di γ_3 di seconda specie rispetto al contorno esteriore della coppia $\gamma_1 \gamma_2$ sono segnati con tratto più forte.

§ 2. La « piccola variazione » di un sistema Σ di circuiti col metodo dei *collegamenti.*

8. Due circuiti $\gamma_1 \gamma_2$ si incontrino in un punto O. Nel piano l'intorno di O si scompone in quattro *campi* a due a due opposti al vertice. Si convenga di assegnare a due di essi opposti al vertice il segno $+$ ed ai rimanenti il segno — (Fig. 2). Su γ_1 [risp. su γ_2] in prossimità di O e da bande opposte si prendano due punti A_1, B_1 [risp. A_2, B_2] e si supponga che, ad es., $O A_1$, $O A_2$ fronteggino uno dei campi di segno $+$. Soppressi su γ_1 e γ_2 i segmenti $A_1 O B_1$, $A_2 O B_2$, si sostituiscano con segmenti (*collegamenti*) $B_1 B_2$, $A_1 A_2$ nell'intorno di O e nei campi di segno $+$ (Fig. 2 *bis*) oppure con segmenti (*collegamenti*) $A_1 B_2$, $A_2 B_1$ nell'intorno di O e nei campi di segno — (Fig. 2 *ter*). Tale operazione elementare si dirà « piccola variazione » applicata a γ_1 e γ_2 in O. Essa, dal punto di vista topologico, è individuata dal segno $+$ o — che compete ai campi in cui si tracciano i collegamenti.

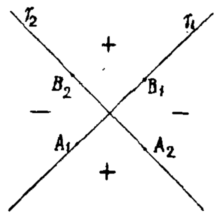


Fig. 2.

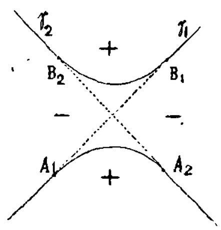


Fig. 2 *bis*.

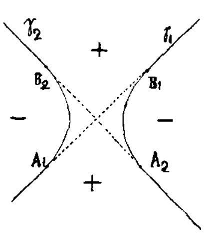


Fig. 2 *ter*.

9. Sia Σ un sistema di circuiti (in numero finito), privi di punti singolari (cfr. num. 1) e di mutui contatti, così disposti che per un punto del piano ne passino al più due.

Sia k il numero dei punti di intersezione e per i campi nell'intorno di ciascuno si proceda alla scelta dei segni secondo il numero precedente. Tale scelta è arbitraria, ma può esser fatta con criterî di opportunità.

Si può ad es. assegnare su ciascun circuito di Σ il senso positivo ed attribuire il segno $+$ (risp. —) ai campi fronteggiati da segmenti che, a partire dal punto di intersezione, vengono percorsi in sensi dello stesso nome (risp. di nome diverso) [*1.° criterio*]. Si veda perciò la Fig. 3, dove i sensi positivi dei circuiti sono indicati da freccie.

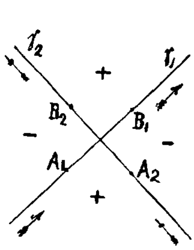


Fig. 3.

Se i circuiti dispari di Σ sono in numero pari (anche nullo), contraddistinte le regioni coi segni + e — secondo il num. 4, si può invece attribuire a ciascuno dei campi (nell'intorno dell'intersezione) il segno della regione a cui esso appartiene [*2.° criterio*].

Il secondo criterio può talora coincidere col primo; ciò ad es. è lecito (num. 6) nel caso in cui Σ consti di due circuiti pari privi di mutui segmenti di seconda specie oppure consti di due circuiti dispari. Talora invece i due criterî, pur essendo entrambi applicabili, differiscono in modo essenziale; ciò avviene ad es. (num. 6) nel caso in cui Σ consti di due circuiti pari dotati di mutui segmenti di seconda specie.

10. Se in alcuni dei k punti d'intersezione si applica (num. 8) ai circuiti ivi concorrenti una «piccola variazione», Σ si trasforma in un sistema di circuiti dotati eventualmente di nodi o di mutue intersezioni nei punti sui quali non si è operato. Poichè in ogni punto si può applicare la «piccola variazione» di segno +, o quella di segno —, o infine non applicarne alcuna, il numero dei modi in cui il procedimento si esplica (compreso il caso di nessun procedimento) è fornito da quello delle disposizioni con ripetizione di 3 cose a k a k, ossia da 3^k.

Se la «piccola variazione» si applica in tutti e k i punti, si dirà brevemente applicata a Σ. Il sistema Σ' che si ottiene (sistema *trasformato*) è costituito da circuiti privi così di nodi come di mutue intersezioni. Sarà questo il solo caso considerato in seguito.

Il procedimento di «piccola variazione» si può applicare a Σ in 2^k modi, quante cioè sono le disposizioni con ripetizione dei segni + e — a k a k. Una di tali disposizioni infatti individua una distribuzione dei segni nei k punti di intersezione, quindi caratterizza il procedimento.

Ad ogni «piccola variazione» di Σ è annessa quella che se ne ricava mutando tutti i segni e che si dirà *complementare* alla prima.

È infine da osservarsi che, dedotto da Σ il trasformato Σ' col metodo ora esposto dei collegamenti, è sempre lecito, sotto l'aspetto topologico, sostituire ai circuiti di Σ' circuiti prossimi.

§ 3. La «piccola variazione» di Σ col metodo dei *passaggi*.

11. La «piccola variazione» di Σ può essere presentata sotto un diverso aspetto, più opportuno per alcune fra le applicazioni di carattere algebrico.

Si considerino su γ_1 (di Σ) i punti di intersezione cogli altri circuiti e no O, O' due consecutivi di essi risp. su γ_2, γ'_2 (Figg. 4 e 5). Si prendano γ_1 in prossimità di O (risp. di O') i punti $A_1\, B_1$ (risp. $C_1\, D_1$), in modo che l circuito i punti si succedano nell'ordine $A_1\, O\, B_1\, C_1\, O'\, D_1$. Da bande op-

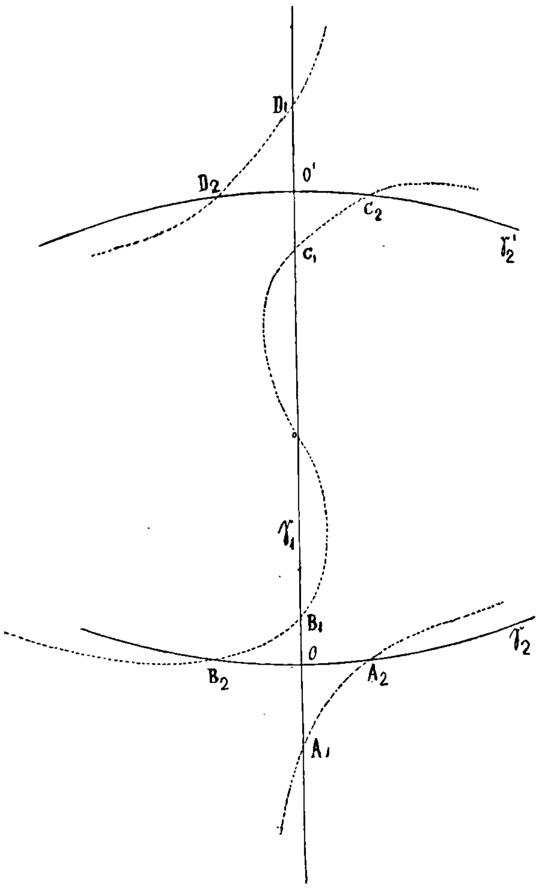


Fig. 4.

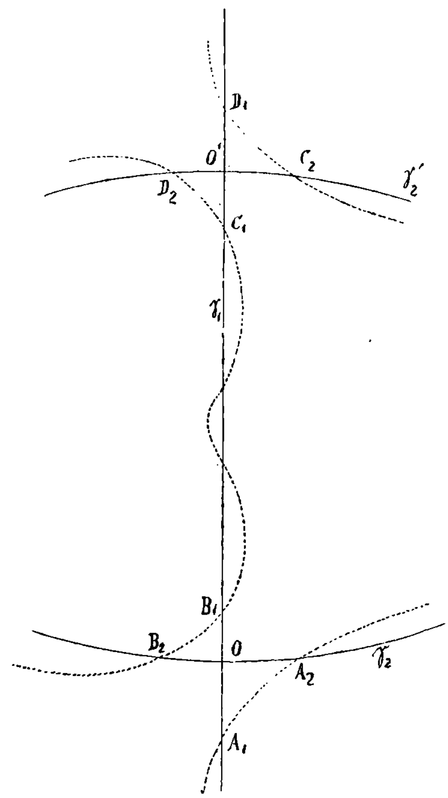


Fig. 5.

poste e in prossimità di O (risp. di O') su γ_2 (risp. su γ'_2) si segnino i punti $A_2\, B_2$ (risp. $C_2\, D_2$), in modo che i due campi fronteggiati da $O\,A_2$, $O\,B_1$ e da $O'\,C_1$, $O'\,C_2$ appartengano ad una stessa regione.

Per la « piccola variazione » in O, si introducano i collegamenti $A_1\,A_2$, $B_1\,B_2$; il procedimento potrà essere continuato in O' coll'introduzione di $C_1\,C_2$, $D_1\,D_2$; oppure con quella di $C_1\,D_2$, $C_2\,D_1$. In entrambi i casi il segmento $\sigma = O B_1 C_1 O'$ di γ_1 si può supporre sostituito da un segmento prossimo che abbia un estremo nel campo $\widehat{B_2 O B_1}$, ma che nel primo caso (Fig. 4) abbia l'altro estremo in $\widehat{C_1 O' C_2}$, quindi *tagli σ in un numero dispari di punti*, mentre nel secondo (Fig. 5) abbia l'altro estremo in $\widehat{C_1 O' D_2}$, quindi *tagli σ in un numero pari* (*anche nullo*) *di punti.*

Analogamente un circuito di Σ non intersecato da altri del sistema si può anche supporre sostituito da un circuito prossimo che lo taglierà in un numero di punti pari o dispari secondo che è pari o dispari il circuito stesso.

Il numero delle intersezioni di un segmento (o di un circuito) col segmento (col circuito) deformato si dirà brevemente in seguito numero dei *passaggi.*

12. Per caratterizzare un procedimento di «piccola variazione» col metodo dei passaggi, si svolgano le seguenti osservazioni.

Preso un circuito di Σ, si considerino in Σ quelli secanti il dato, poi quelli secanti uno almeno dei circuiti nuovamente introdotti e così si prosegua fino a che l'operazione si arresti. Si otterrà un sistema Σ_1, che dirò *sistema connesso.* Se Σ_1 non coincide con Σ, si operi analogamente su uno dei circuiti di Σ rimanenti e così si prosegua. Il sistema Σ risulterà in generale composto di più sistemi connessi:

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \ldots$$

i quali posseggano rispettivamente:

$$k_1, k_2, k_3, \ldots$$

intersezioni, essendo:

$$k_1 + k_2 + k_3 + \cdots = k.$$

Si consideri Σ_1 e si supponga per ora che non possegga circuiti (dispari) dotati di una sola intersezione nè si riduca ad un sol circuito. In tale ipotesi l'insieme dei segmenti di Σ_1 forma (secondo il linguaggio della *Analysis situs*) uno *Streckencomplex* od una *rete* (*). Poichè ogni segmento passa per due dei k_1 punti e per ciascuno di questi passan quattro segmenti, il numero totale dei segmenti è $2k_1$. Secondo un teorema noto (**) è possibile (e in

(*) DEHN und HEEGAARD, loc. cit., pag. 171 e seg.

(**) DEHN und HEEGAARD, loc. cit., pagg. 171-172.

più maniere) sopprimere $2k_1 - k_1 + 1 = k_1 + 1$ segmenti in modo che lo *Streckencomplex* si muti in un *albero*, cioè in una configurazione senza circuiti (*ohne Kreise*).

Su ciascuno dei $k_1 - 1$ segmenti (*rami*) dell'albero si fissi la parità pel numero dei passaggi (secondo il num. *11*). Si osservi che ciascuno dei segmenti di Σ_1 esclusi è segmento di chiusura di un circuito (poligonale) i cui rimanenti lati sono *rami* dell'*albero*, che la parità del numero di intersezioni del circuito poligonale col sistema trasformato di Σ_1 è ben determinata, che quindi infine è pure determinata la parità del numero dei passaggi sul segmento di chiusura.

La scelta della parità sui *rami* dell'*albero*, quindi su tutti i segmenti di Σ_1, si può dunque fare in 2^{k_1-1} modi.

Se Σ_1 possiede un circuito γ_1 dotato di una sola intersezione O, γ_1 è dispari, è pure dispari il circuito γ_2 che lo interseca in O, nè intervengono altri circuiti dispari (che taglierebbero γ_1 fuori di O). Se Σ_1 è composto solo di γ_1 e γ_2, il sistema trasformato taglia necessariamente così γ_1 come γ_2 in un numero pari di punti, onde la scelta della parità dei passaggi si può fare in un sol modo (in 2^{k_1-1} modi per $k_1 = 1$).

Se Σ_1 contiene altri circuiti si prescinda da γ_1 e da O. Il sistema Σ^*_1 che così risulta è uno *Streckencomplex* con $k_1 - 1$ punti e $2(k_1 - 1)$ segmenti, sui quali perciò (v. sopra) la scelta della parità per il numero dei passaggi si può fare complessivamente in 2^{k_1-2} modi. Introdotti ora nuovamente γ_1 ed O, il sistema trasformato deve tagliare γ_1 in un numero pari di punti e resta solo a scegliere la parità per uno dei due segmenti in cui O divide quello di Σ^*_1 al quale appartiene. Il numero complessivo dei modi è quindi $2 \, . \, 2^{k_1-2}$, cioè ancora 2^{k_1-1}.

Fissata così su ciascun segmento di Σ_1 la parità del numero dei passaggi, non è ancora individuata la «piccola variazione», rimanendo ancora la scelta fra due «piccole variazioni» *complementari* (cfr. num. 10 in fine). Questa si dirime fissando il *campo* di partenza nell'intorno di uno dei k_1 punti (cioè il segno + o — della «piccola variazione» in quel punto).

Poichè la scelta del segno si può fare in due modi, *le «piccole variazioni» distinte di* Σ_1 *sono in numero di* $2 \, . \, 2^{k_1-1} = 2^{k_1}$. Il risultato è valido anche nel caso finora escluso di un sol circuito che non dà luogo a scelta ($k_1 = 0$, $2^{k_1} = 1$).

Analoghe conclusioni valendo per $\Sigma_2, \Sigma_3, \ldots$, segue che il numero delle «piccole variazioni» essenzialmente distinte di Σ è:

$$2^{k_1} \, . \, 2^{k_2} \, . \, 2^{k_3} \ldots = 2^{k_1+k_2+k_3+\cdots} = 2^{k}.$$

Si ritrova così il risultato raggiunto al num. 10 col metodo dei collegamenti e ciò implicitamente dimostra che la scelta della parità dei passaggi si può sempre effettuare nel modo detto senza coinvolgere contraddizioni.

13. A complemento di quanto è esposto al num. 12, si aggiunga un ovvio procedimento di costruzione per l'*albero* estratto da un *sistema connesso* di circuiti, sistema che per semplicità dirò Σ e supporrò composto di k punti e $2k$ segmenti.

Siano $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \ldots \gamma_r (r > 1)$ i circuiti di Σ e si indichi con $k_{ij} = k_{ji}$ il numero delle intersezioni di γ_i con γ_j. Si potrà sempre supporre un tale ordinamento dei circuiti, che ciascuno tagli uno almeno dei precedenti.

Ciò posto si sopprima un segmento di γ_1 e si mantenga la *catena* dei rimanenti $k_{12} + k_{13} + \cdots + k_{1r} - 1$. I $k_{12} + k_{23} + k_{24} + \cdots + k_{2r}$ segmenti di γ_2 si succedono distribuiti in k_{12} *catene* cogli estremi su γ_1; in ciascuna catena si sopprima un segmento ad arbitrio e si mantengano i rimanenti, in tutto

$$k_{12} + k_{23} + k_{24} + \cdots + k_{2r} - k_{12} = k_{23} + k_{24} + \cdots + k_{2r}.$$

I $k_{13} + k_{23} + k_{34} + \cdots + k_{3r}$ segmenti di γ_3 si succedono distribuiti in $k_{13} + k_{23}$ *catene* coi due estremi su uno dei circuiti γ_1, γ_2; soppresso in ciascuna catena un segmento, si mantengano i rimanenti, in tutto

$$k_{13} + k_{23} + k_{34} + \cdots + k_{3r} - k_{13} - k_{23} = k_{34} + k_{35} + \cdots + k_{3r}.$$

Così si prosegua fino ad esaurire il sistema, osservando che in generale i

$$\sum_{i=1}^{s-1} k_{is} + \sum_{i=s+1}^{r} k_{si}$$

segmenti di γ_s si succedono distribuiti in $\sum\limits_{i=1}^{s-1} k_{is}$ catene cogli estremi sui circuiti $\gamma_i (i < s)$, sopprimendo in ciascuna catena un segmento, mantenendo i rimanenti, in tutto $\sum\limits_{i=s+1}^{r} k_{si}$.

I segmenti mantenuti in numero di

$$\begin{aligned} k_{12} + k_{13} + \cdots + k_{1r} &- 1 \\ + k_{23} + \cdots + k_{2r}& \\ + \cdots\cdots\cdots& \\ + k_{r-1,r} &= k - 1 \end{aligned}$$

costituiscono l'*albero* cercato. Ad esso *non appartiene alcun segmento di* γ_r (più in generale *non appartiene alcun segmento di un circuito* γ_s *secante solo circuiti* γ_i *per* $i < s$).

Segue che *nel caso di due circuiti l'albero si può ridurre alla catena di* $k-1$ *dei* k *segmenti di uno di essi.* Più in generale *se le* k *intersezioni son tutte raccolte su un circuito* γ_1 *del sistema, l'albero si può ridurre alla catena di* $k-1$ *segmenti di* γ_1 (*).

§ 4. Di un limite superiore per il numero dei circuiti del sistema trasformato Σ'.

14. Sia Σ un sistema di a circuiti con k intersezioni; sia Σ' il suo trasformato per « piccola variazione ».

Se è $k=0$, Σ' *possiede* a *circuiti.*

Se è $k \neq 0$, si domanda il massimo numero di circuiti raggiunto da Σ'. Prescindendo dai circuiti privi di intersezioni, che permangono, per formare un circuito di Σ' occorrono almeno due dei $2k$ segmenti di Σ; l'ipotesi più favorevole sarà quindi che i segmenti si distribuiscano in k coppie a formare k circuiti. Siano σ_1, τ_1 due segmenti così accoppiati ed appartenenti ai circuiti γ, δ; si indichino con O_1, O_2 i loro estremi comuni e su γ, δ si assumano i versi positivi nei sensi $\overline{O_1 O_2}$ dei segmenti σ_1, τ_1. Il segmento successivo di σ_1 su γ (e sia σ_2) dovrà essere accoppiato con un segmento avente l'estremo in O_2, e, non potendo questo essere τ_1, sarà il suo successivo τ_2 su δ. Sia O_3 il secondo estremo comune a σ_2, τ_2 e si continui il procedimento fino a raggiungere nuovamente su γ e δ (come secondo estremo) il punto O_1. Se i punti intervenuti sono $k_1 \leq k$, ai due circuiti si sono sostituiti k_1 circuiti. Se è $k_1 < k$, si prenda una coppia di segmenti diversa da quelle già considerate e si trovi un gruppo analogo di k_2 punti e così via si trovino eventualmente nuovi gruppi analoghi di k_3, k_4,..., k_r punti, essendo:

$$k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + k_r = k.$$

(*) Basta dunque fissare la parità dei passaggi sui $k-1$ segmenti di γ_1. Ciò si può stabilire anche direttamente in modo semplice, suscettibile di estensione al caso in cui le intersezioni siano distribuite su più circuiti non secantisi (sempre riferendosi a sistemi connessi).

Il numero dei circuiti di Σ' sarà in tale ipotesi

$$a + k - 2r;$$

esso per $r = 1$ raggiunge il massimo

$$a + k - 2.$$

La «piccola variazione» in discorso si può effettuare attribuendo a tutti i punti d'intersezione il segno $+$ (num. 10), supposto applicato il *1.° criterio* (num. 9), col quale del resto, nel caso di ugual parità per γ e δ, si può far coincidere anche il *2.° criterio* (num. 9 in fine; num. 3 in fine).

Concludendo:

Se un sistema Σ di circuiti possiede a *circuiti e $k > 0$ intersezioni, il trasformato possiede circuiti in numero $\leqq a + k - 2$. Il massimo $a + k - 2$ è raggiunto quando e solo quando*

1.° *le k intersezioni sono raccolte su due soli circuiti e, per opportuna scelta dei sensi, sono su quelli nello stesso ordine,*

2.° *i segni attribuiti secondo il 1.° criterio sono tutti $+$.*

Se si intende applicare il metodo dei passaggi, fissato un *campo* iniziale opportuno (num. 12), alla seconda condizione si può (num. 3 in fine, num. 5, num. 6) sostituire la seguente:

L'assegnazione dei passaggi si fa in numero pari per tutti i segmenti se i due circuiti hanno ugual parità; se i due circuiti hanno parità diversa, si fa eccezione per l'unico segmento (del circuito dispari) di seconda specie (rispetto al circuito pari), segmento al quale si assegna un numero dispari di passaggi (*).

15. Sia Σ un sistema decomponibile nei sistemi $S_1 S_2 \ldots S_h$ $(h > 1)$ tali che i circuiti di uno stesso sistema S_i non abbiano mutue intersezioni, mentre le intersezioni dei circuiti di S_i con quelli di S_j $(i \neq j)$ siano complessivamente $k_{ij} = k_{ji} \neq 0$.

Dico che *limite superiore per il numero dei circuiti del trasformato Σ' è* $a + k - 2(h - 1)$.

Per $h = 2$ il teorema è vero (anzi *il limite superiore è un massimo*), come si vede richiamando il num. 14, immaginando in S_1, S_2 due circuiti γ_1, γ_2

(*) Coppie di circuiti nelle condizioni del presente num. sono rappresentate nelle prime quattro figure della Tavola I (V. in fine).

nelle condizioni di γ, δ del num. cit. e supponendo i rimanenti circuiti privi di intersezioni ($k_{12} = k$).

Basta perciò dimostrare che se il teorema è valido per $h-1$ sistemi S_i, lo è pure per h. Dicasi Σ_0 il sistema ottenuto da Σ colla soppressione di S_h; sia Σ'_0 un suo trasformato.

Se $\Sigma_0\, \Sigma'_0$ posseggono rispettivamente a_0, a'_0 circuiti, per ipotesi è:

$$\left.\begin{aligned} a'_0 \leq a_0 + k_{12} + k_{13} + \cdots + k_{1,h-1} \\ + k_{23} + \cdots + k_{2,h-1} \\ + \cdots\cdots\cdots\cdot \\ + k_{h-2,h-1} - 2(h-2). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Una «piccola variazione» di Σ (intesa ad es. nel senso del num. 10) si può pensare effettuata facendo seguire ad una «piccola variazione» di Σ_0 una «piccola variazione» del sistema costituito da Σ'_0 ed S_h. Detto a' il numero dei circuiti di Σ', $a^{(h)}$ quello dei circuiti di S_h, segue (num. 14):

$$a' \leq a'_0 + a^{(h)} + k_{1h} + k_{2h} + \cdots + k_{h-1,h} - 2, \tag{2}$$

onde, per la (1), anche:

$$a' \leq a + k - 2(h-1). \tag{3}$$

Il teorema è così dimostrato; ma è opportuno osservare che in (3) si ha il segno $=$ (cioè il limite superiore è un massimo) solo quando ciò avvenga insieme in (1) ed in (2). In (2) ciò avviene soltanto se Σ'_0 ed S_h posseggono tutte le loro intersezioni ugualmente ordinate su due circuiti (num. 14), per il che è necessaria in Σ'_0 la presenza di un circuito proveniente da $h-1$ segmenti appartenenti ad altrettanti circuiti dei sistemi $S_1\, S_2 \ldots S_{h-1}$.

16. Si esamini *il caso* $h=3$. Dico che *il limite superiore è un massimo.*

Come condizioni necessarie dal num. prec. si deducono le seguenti: 1.° Le mutue intersezioni fra circuiti di S_1, S_2 sono distribuite su due soli circuiti γ_1, γ_2 ed ugualmente ordinate su di questi; 2.° Esiste in S_3 un circuito γ_3 secante due segmenti di γ_1, γ_2 cogli estremi comuni, rispettivamente in k_{13}, k_{23} punti, ugualmente ordinati (nel loro insieme) su γ_3 e sul circuito proveniente dalla riunione dei due segmenti.

Tali condizioni sono realizzabili. I $2k$ segmenti (dei tre circuiti) vengono distribuiti in $k-3$ coppie ad estremi comuni e in due terne, in ciascuna delle quali i segmenti, di γ_1, γ_2, γ_3, sono disposti triangolarmente (*triangoli*).

Si prendano, com'è lecito, sui tre circuiti sensi positivi tali che uno dei contorni triangolari (quindi anche l'altro) sia percorso con continuità (il che obbliga ad un cambiamento di senso in confronto al caso $h=2$). La «piccola variazione» corrispondente alla scelta di segni tutti — (num. 10), secondo il *1.° criterio* (num. 9), dà effettivamente luogo ad un sistema Σ' dotato del numero massimo $a+k-4$ di circuiti.

Fissato un *campo* di partenza si può applicare anche il metodo dei passaggi (num. 12). Il numero dei passaggi va scelto pari su tutti i segmenti fatta eccezione: 1.° nel caso di *un solo* circuito dispari per il segmento (di esso) di seconda specie rispetto al *contorno esteriore* della coppia costituita dai circuiti pari (num. 5 in fine; num. 4 in fine); — 2.° nel caso di *tre* circuiti dispari per i lati di quello fra i due *triangoli* il cui contorno è circuito dispari (*).

17. Anche *per* $h=4$ *il limite superiore è un massimo.* Come condizioni necessarie dal num. 15 si deducono le seguenti: 1.° Le intersezioni appartenenti ad $S_1\,S_2\,S_3$ sono distribuite su tre circuiti $\gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_3$ nel modo del num. 16. — 2.° Esiste in S_4 un circuito γ_4 le cui intersezioni coi lati di uno dei *triangoli* della terna $\gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_3$ sono rispettivamente in numero di k_{14}, k_{24}, k_{34} e complessivamente sono ordinate in ugual modo su γ_4 e sul contorno del *triangolo.*

Tali condizioni sono realizzabili. I $2k$ segmenti vengono distribuiti in $k-6$ coppie di segmenti ad estremi comuni ed in quattro *triangoli,* ciascuno dei quali ha per lati segmenti di *tre* fra i quattro circuiti (nei quattro modi possibili).

È lecito fissare i sensi positivi sui circuiti in modo che i contorni dei quattro *triangoli* siano percorsi con continuità. La «piccola variazione» corrispondente alla scelta di segni tutti — (num. 10) secondo il *1.° criterio* (num. 9) dà effettivamente luogo a un sistema Σ' dotato del numero massimo $a+k-6$ di circuiti.

Fissato un *campo* iniziale si può applicare il metodo dei passaggi (num. 12). Il numero dei passaggi va scelto pari su tutti i segmenti, fatta eccezione: 1.° nel caso di *un solo* circuito dispari per il segmento (di esso) di seconda specie rispetto al *contorno esteriore* della terna costituita dai circuiti pari (num. 7); — 2.° nel caso di *tre* circuiti dispari per i lati del *triangolo* da cui è escluso il circuito pari (**).

(*) *Terne* del tipo indicato sono rappresentate nelle Tav. I e II (V. in fine).

(**) *Quaterne* del tipo indicato sono rappresentate nelle Tav. II e III (V. in fine).

Non è lecito passare dal caso $h = 4$ al caso $h = 5$ col procedimento indicato in fine del num. 15, perchè mancano *quadrilateri* su cui operare.

Ne segue, a complemento del num. 15, che il *limite superiore*

$$a + k - 2(h - 1)$$

è un massimo per $h \leq 4$, *mentre per* $h > 4$ *si ha in ogni caso*

$$a' < a + k - 2(h - 1).$$

Maggiori particolari non occorrono per le applicazioni algebriche della Parte II.

18. Mantenute le notazioni del num. 15 si tolga la restrizione $k_{ij} \neq 0$.

Due sistemi $S_i S_j$ di Σ pei quali sia $k_{ij} \neq 0$ si dicano fra loro *collegati*. Preso il sistema S_1, se esiste in Σ un sistema collegato con S_1, p. es. S_2, lo si aggreghi ad S_1; se esiste in Σ un sistema collegato con S_1 o con S_2, lo si aggreghi ai precedenti e così si prosegua finchè si trovino sistemi collegati con uno almeno dei precedenti; risulterà un sistema Σ_1. Se Σ_1 non esaurisce Σ, si assuma un S_i fuori di Σ_1 e si proceda analogamente alla formazione di un sistema Σ_2 analogo a Σ_1. Se Σ_1 e Σ_2 non esauriscono insieme Σ, si prosegua. Il sistema Σ risulterà in generale decomposto in d sistemi $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_d$ (*).

Sia Σ'_c il trasformato di Σ_c nella «piccola variazione» di Σ ed a_c, a'_c, k_c, h_c abbiano per Σ_c il significato attribuito ad a, a', k, h per Σ. Nella formazione di Σ_c i sistemi S_i si presentano in un ordine determinato; mantenendo tale ordinamento è lecito applicare a Σ_c il procedimento di induzione matematica del num. 15, benchè le k_{ij} non siano tutte $\neq 0$. Si ottiene così la disuguaglianza

$$a'_c \leq a_c + k_c - 2(h_c - 1).$$

Se in essa si pone successivamente $c = 1, 2, \ldots, d$, indi si somma a membro a membro, si deduce:

$$a' \leq a + k - 2(h - d). \tag{4}$$

La (4) comprende come caso particolare la (3) [num. 15], di cui la validità si estende a tutti i casi in cui è $d = 1$.

(*) Se ogni S_i si riduce ad un solo circuito, si ritrova il procedimento del num. 12 per la decomposizione di Σ in sistemi connessi.

§ 5. Studio topologico sui casi di massimo del paragrafo precedente.

19. Nel precedente paragrafo ai num.[1] 14, 16, 17 figurano coppie, terne e qualerne di circuiti, corrispondenti a casi di massimo per il numero dei circuiti del sistema trasformato. Mi propongo di studiare la reciproca posizione dei circuiti di tali *coppie*, *terne* e *quaterne*, enumerando i casi essenzialmente distinti sotto l'aspetto topologico (*).

I due circuiti $\gamma_1 \gamma_2$ di una *coppia*, se sono entrambi pari, dividono il piano in $k+2$ regioni (num. 5, num. 3 in fine). Di esse k hanno per contorno coppie di segmenti e due hanno per contorno circuiti poligonali di k segmenti. Il *contorno esteriore* può essere fornito da una coppia, oppure da un circuito poligonale. Nel primo caso, che indicherò con $(\gamma_1 \gamma_2)_1$, il sistema trasformato (della coppia) consta di $k-1$ circuiti indipendenti (**) e di un circuito che li include; nel secondo, che indicherò con $(\gamma_1 \gamma_2)_2$, il sistema trasformato consta di k circuiti indipendenti (***).

Il caso di due circuiti l'uno γ_1 pari, l'altro γ_2 dispari non presenta distinzioni; sarà indicato con $(\gamma_1 \gamma_2)_3$. Il sistema trasformato possiede un circuito dispari e $k-1$ circuiti (pari) indipendenti.

Così non presenta distinzioni il caso di due circuiti dispari $\gamma_1 \gamma_2$, che si indicherà con $(\gamma_1 \gamma_2)_4$. Il sistema trasformato possiede k circuiti (pari) indipendenti.

20. Si consideri una *terna* di circuiti $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$, tutti pari. Le regioni sono $k+2$ (num. 7; num. 16; num. 3 in fine). Di esse $k-3$ sono contornate da coppie di segmenti, due sono triangolari, tre sono contornate da circuiti poligonali dotati rispettivamente di $k_{12}+k_{13}$, $k_{23}+k_{21}$, $k_{31}+k_{32}$ lati.

Se il contorno esteriore è dato da una coppia di segmenti, i circuiti $\gamma_1 \gamma_2$ a cui questi appartengono presentano il caso $(\gamma_1 \gamma_2)_1$. Il circuito γ_3 presenterà il caso $(\gamma_3 \delta)_2$ col circuito δ composto da altra coppia di segmenti appartenenti a $\gamma_1 \gamma_2$. Se il conteggio per le coppie di segmenti (di $\gamma_1 \gamma_2$) si sup-

(*) Tali casi sono rappresentati nelle Tavole fuori testo; ogni figura è accompagnata dal simbolo relativo al caso considerato.

(**) Dico *indipendenti* due circuiti (pari), di cui *ciascuno* è esterno all'altro.

(***) I due tipi di coppie figurano già nelle ricerche di Hilbert e di Miss Ragsdale, citate nella prefazione, essendo però uno dei circuiti sempre una conica.

pone iniziato dalla prima nominata, potrà la coppia di δ occupare posto dispari o pari. Nel primo caso, che dirò $(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3)_1$, il circuito γ_3 dà luogo agli aggruppamenti $(\gamma_1 \gamma_3)_1$, $(\gamma_2 \gamma_3)_1$; nel secondo, che dirò $(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3)_2$, esso dà luogo invece agli aggruppamenti $(\gamma_1 \gamma_3)_2$ $(\gamma_2 \gamma_3)_2$. Precisando il posto occupato dalla coppia di δ si avrebbe una distinzione in sottocasi.

Se il contorno esteriore è triangolare due qualunque dei circuiti, siano $\gamma_1 \gamma_2$, presentano il caso $(\gamma_1 \gamma_2)_1$. Il circuito γ_3 dà il caso $(\gamma_3 \delta)_1$ col contorno esteriore della coppia $\gamma_1 \gamma_2$. La terna si dirà di tipo $(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3)_3$.

Nei tre casi ora studiati il sistema trasformato (della terna) possiede $k-2$ circuiti indipendenti ed uno che li include.

Se il contorno esteriore è poligonale, possegga ad esempio $k_{12}+k_{13}$ lati. Risultano gli aggruppamenti $(\gamma_1 \gamma_2)_2$, $(\gamma_1 \gamma_3)_2$. Ma, ad es., γ_3 dà il caso $(\gamma_3 \delta)_2$, con δ proveniente da una coppia di segmenti di $\gamma_1 \gamma_2$, il segmento di γ_1 appartenendo al contorno esteriore di $(\gamma_1 \gamma_2)_2$. Ne consegue l'aggruppamento $(\gamma_2 \gamma_3)_1$. Il caso verrà indicato con $(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3)_4$. Il sistema trasformato consta di $k-1$ circuiti indipendenti.

Nella *terna* $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ siano ora $\gamma_1 \gamma_2$ pari e sia γ_3 dispari. Il circuito poligonale che produce l'unico circuito dispari del sistema trasformato può essere una coppia di segmenti oppure un triangolo.

Nella prima ipotesi, uno dei segmenti della coppia è di γ_3; l'altro sia di γ_1. Il circuito γ_2 sarà nella posizione $(\gamma_2 \delta)_2$ col circuito δ composto da altra coppia di segmenti appartenenti a $\gamma_1 \gamma_3$. Secondo che, a partire dalla coppia prima nominata, quella di δ occupa posto dispari o pari, nasce l'aggruppamento $(\gamma_1 \gamma_2)_1$ oppure l'aggruppamento $(\gamma_1 \gamma_2)_2$; il primo caso sarà indicato con $(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3)_5$, il secondo con $(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3)_6$. Si possono introdurre sottocasi.

Nella seconda ipotesi è necessario l'aggruppamento $(\gamma_1 \gamma_2)_1$; il caso sarà indicato con $(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3)_7$.

Nei tre casi ultimamente considerati il sistema trasformato consta di un circuito dispari e di $k-2$ circuiti (pari) indipendenti.

Il caso di un circuito pari γ_1 e di due circuiti dispari $\gamma_2 \gamma_3$ non presenta distinzioni; sarà indicato con $(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3)_8$. Il sistema trasformato è di $k-1$ circuiti indipendenti.

Così non presenta distinzioni il caso di tre circuiti dispari $(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3)_9$. Il sistema trasformato consta di un circuito dispari (proveniente da uno dei due triangoli) e di $k-2$ circuiti (pari) indipendenti.

21. Sia una *quaterna* di circuiti $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$, tutti pari. Il contorno este-

riore potrà esser dato da una coppia di segmenti, da un triangolo, da un poligono ad es. di $k_{12}+k_{13}+k_{14}$ lati.

Se il contorno esteriore è dato da una coppia di segmenti di $\gamma_1\gamma_2$, si ha uno degli aggruppamenti $(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)_1$ oppure $(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)_2$, segue rispettivamente $(\gamma_1\gamma_2\gamma_4)_1$ oppure $(\gamma_1\gamma_2\gamma_4)_2$ ed in ogni caso $(\gamma_3\gamma_4)_1$. Si hanno così due tipi di quaterne $(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)_1$, $(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)_2$.

Se il contorno esteriore è un triangolo, si avrà ad esempio l'aggruppamento $(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)_3$; il circuito γ_4 coll'altro triangolo τ dà luogo al tipo $(\gamma_4\tau)_2$ e produce gli aggruppamenti $(\gamma_1\gamma_4)_1$, $(\gamma_2\gamma_4)_1$, $(\gamma_3\gamma_4)_1$. La quaterna si dirà $(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)_3$.

Nei tre casi il sistema trasformato (della quaterna) è di $k-3$ circuiti indipendenti e di un circuito che li include.

Se il contorno esteriore è il poligono di $k_{12}+k_{13}+k_{14}$ lati, si hanno gli aggruppamenti $(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)_4$ $(\gamma_1\gamma_2\gamma_4)_4$ $(\gamma_1\gamma_3\gamma_4)_4$; segue $(\gamma_2\gamma_3\gamma_4)_3$. Il tipo si dirà $(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)_4$. Il sistema trasformato è di $k-2$ circuiti indipendenti.

Siano ora $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ pari, γ_4 dispari. Poichè γ_4 ha le sue intersezioni su un triangolo della terna $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, il contorno esteriore della terna ha in comune col triangolo un lato almeno, quindi o un lato o tre lati.

Nella prima ipotesi si ha, ad es., l'aggruppamento $(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)_4$ ed il circuito dispari del sistema trasformato proviene da una coppia di segmenti appartenenti a $\gamma_1\gamma_4$. Il tipo si dirà $(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)_5$.

Nella seconda ipotesi si ha l'aggruppamento $(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)_3$; ma il segmento di γ_4 di seconda specie rispetto al contorno esteriore della terna può avere gli estremi su un sol lato (sia di γ_1), oppure su due lati (siano di γ_2, γ_3); onde il circuito dispari o proverrà da una coppia di segmenti (di $\gamma_1\gamma_4$) o da un triangolo (coi lati appartenenti a $\gamma_2\gamma_3\gamma_4$). I due casi si diranno rispettivamente $(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)_6$, $(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)_7$.

Nei tre casi ora veduti il sistema trasformato consta di un circuito dispari e di $k-3$ circuiti (pari) indipendenti.

Se $\gamma_1\gamma_2$ son pari, $\gamma_3\gamma_4$ dispari, poichè γ_4 deve applicarsi ad un circuito triangolare dispari, è necessario l'aggruppamento $(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)_7$. Si ha così pure $(\gamma_1\gamma_2\gamma_4)_7$. Il caso, unico, si indicherà con $(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)_8$. Il sistema trasformato è di $k-2$ circuiti indipendenti.

Sia γ_1 pari, siano $\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ dispari. Il caso, evidentemente unico, si dirà $(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)_9$. Il sistema trasformato possiede un circuito dispari e $k-3$ circuiti (pari) indipendenti.

Così è unico il caso $(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)_{10}$ di quattro circuiti dispari. Il sistema trasformato è di $k-2$ circuiti indipendenti.

22. Su quanto è esposto ai num.[1] 19, 20, 21 è però da osservarsi ciò che segue.

Per $k=1$ una *coppia* di circuiti può in due modi fornire una $(\gamma_1\gamma_2)_4$.

Così una *terna* $(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)_9$ per $k_{12}=k_{13}=1$ può essere considerata come tale in due od in quattro modi secondo che sia $k_{23}\neq 1$ oppure $k_{23}=1$.

Analogamente per $k=2$ una *coppia* di circuiti, se i circuiti sono entrambi pari, è ad un tempo una $(\gamma_1\gamma_2)_1$ ed una $(\gamma_1\gamma_2)_2$, mentre, se essi sono di parità diversa, dà luogo ad una $(\gamma_1\gamma_2)_3$ in due modi differenti.

Le proprietà ora esposte dipendono dalla possibilità di mutare il senso positivo su uno o più circuiti, senza che cessino le condizioni fondamentali di ordinamento, il che *avviene solo nei casi elencati.*

§ 6. Estensione del concetto di « piccola variazione » topologica.

23. Le precedenti considerazioni si riferiscono a sistemi Σ, tali che per un punto del piano passino due circuiti di Σ al più (num. 9). Tolgasi ora tale restrizione e si consideri un punto O del piano, pel quale passino $r\geq 2$ circuiti di Σ:

$$\gamma_1,\ \gamma_2,\ldots,\ \gamma_r.$$

Sui $2r$ segmenti (dei circuiti γ_i) uscenti da O, presi ordinatamente, si segnino nell'intorno di O rispettivamente i punti $A_1 A_2 A_3 \ldots A_{2r}$, in modo che A_i ed A_{i+r} siano su γ_i (da bande opposte di O). All'indice j di A_j si convenga di sostituire eventualmente ogni intero $\equiv j$ mod. $2r$.

Nell'intorno di O si determinano $2r$ *campi* $\widehat{A_j O A_{j+1}}$. In seguito ogni *collegamento* di A_j con A_{j+1} si immaginerà tracciato nel campo $\widehat{A_j O A_{j+1}}$.

24. Si introducano le seguenti operazioni (*):

Operazione U. Soppressione dei segmenti OA_j (nell'intorno di O); collegamento di A_{2l-1} con A_{2l} $(l=1, 2,\ldots, r)$ [Fig. 6, per r dispari; Fig. 7, per r pari].

Operazione U'. Soppressione dei segmenti OA_j; collegamento di A_{2l} con A_{2l+1} $(l=1, 2,\ldots, r)$.

(*) La scelta di queste operazioni è suggerita dalle questioni algebriche trattate al § 11.

Operazioni V_i (r dispari $= 2s+1$; $i = 1, 2, \ldots, r$). Soppressione dei seg-

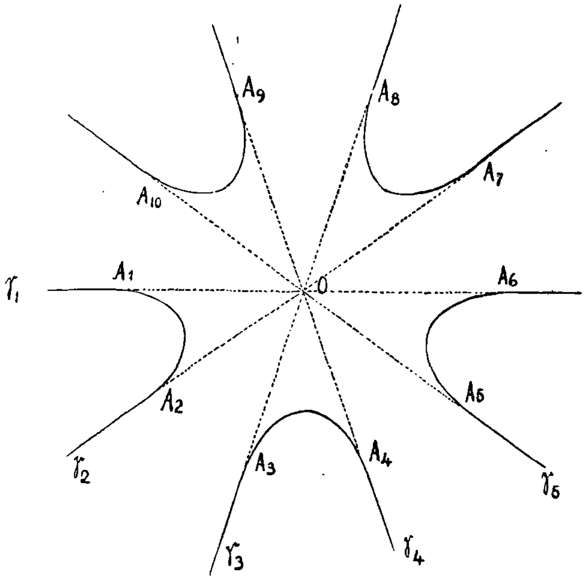


Fig. 6.

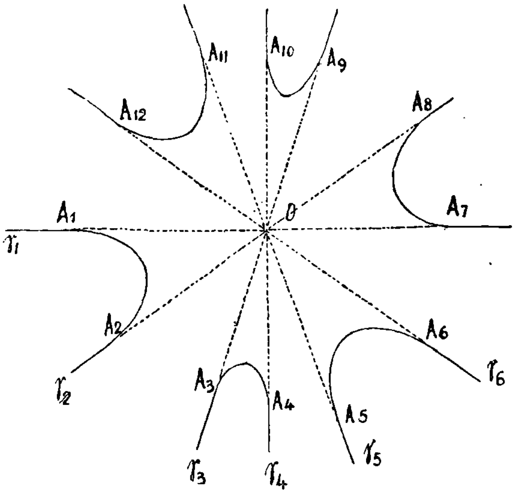


Fig. 7.

menti $O\,A_j$, esclusi $O\,A_i$ ed $O\,A_{i+r}$; collegamento di A_{i+2l-1} con A_{i+2l} ($l = 1, 2, \ldots, s$);

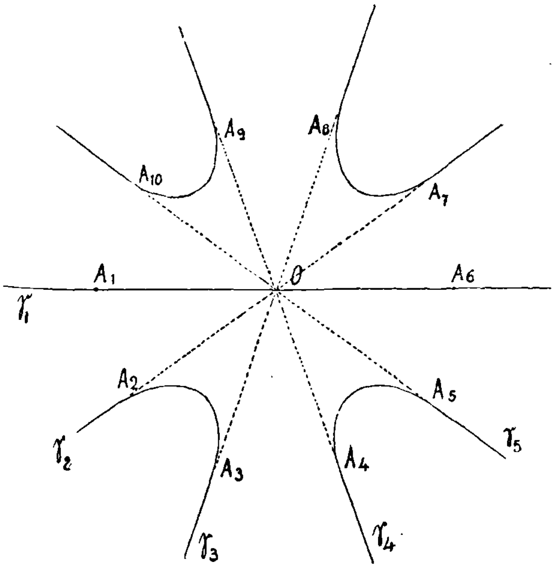


Fig. 8.

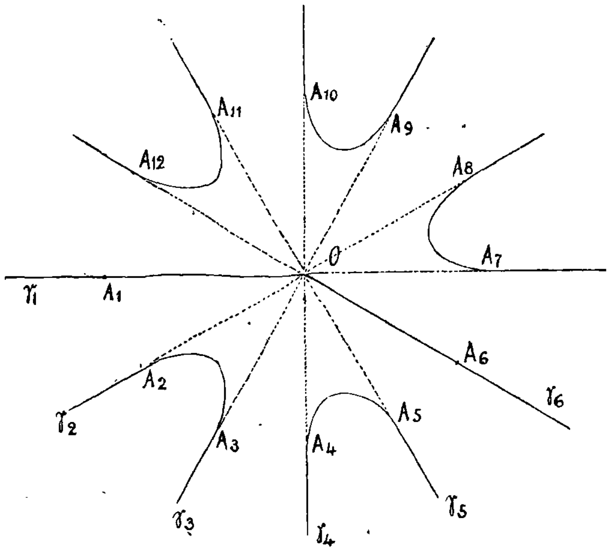


Fig. 9.

collegamento di $A_{i+r+2l-1}$ con A_{i+r+2l} ($l = 1, 2, \ldots, s$) [Fig. 8 per $i = 1$, $r = 5$].

Operazioni W_i (r pari $= 2s$; $i = 1, 2, \ldots, 2r$). Soppressione dei segmenti OA_j, esclusi OA_i ed OA_{i+r-1}; collegamento di A_{i+2l-1} con A_{i+2l} ($l = 1, 2, \ldots, s-1$); collegamento di A_{i+r+2l} con $A_{i+r+2l+1}$ ($l = 0, 1, 2, \ldots, s-1$) [Fig. 9 per $i = 1$, $r = 6$].

Operazioni Z_i (r dispari $= 2s+1$; $i = 1, 2, \ldots, 2r$). Soppressione dei segmenti OA_j, esclusi OA_{i+1} ed OA_{i+r-1}; collegamento di A_{i+2l} con A_{i+2l+1} ($l = 1, 2, \ldots, s-1$); collegamento di A_{i+r+2l} con $A_{i+r+2l+1}$ ($l = 0, 1, 2, \ldots, s$) [Fig. 10 per $i = 1$, $r = 5$].

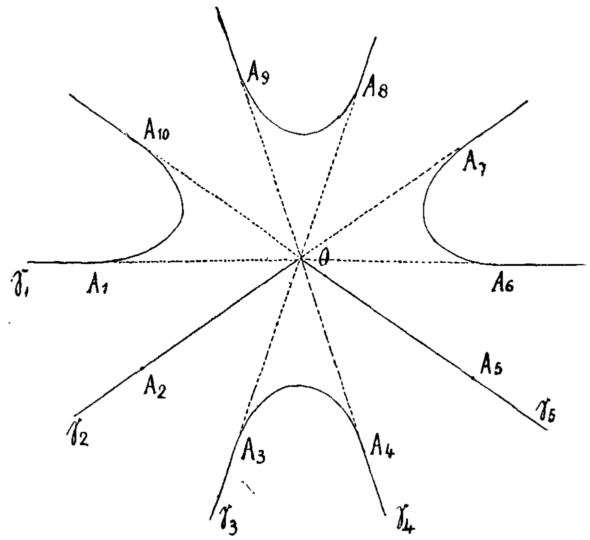


Fig. 10.

Ciascuna delle operazioni U, U', V_i, W_i, Z_i si dirà «piccola variazione» applicata in O ai circuiti $\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_r$. Esteso così il concetto di «piccola variazione» *in un punto*, si estende immediatamente quello di «piccola variazione» *di un sistema* Σ.

Dal punto di vista topologico la «piccola variazione» di un sistema non muta essenzialmente quando si sostituiscano ai circuiti del sistema trasformato circuiti prossimi; si possono quindi generalizzare anche le considerazioni del § 3, introducendo nuovamente il concetto di *passaggio*.

Sotto l'aspetto più largo ora introdotto, in un punto O, per $r = 2$, le operazioni *di tipo W* si confondono colle operazioni *di tipo U* (coincidenti con quelle definite al num. 8); così per $r = 3$, le operazioni *di tipo Z* si confondono con quelle *di tipo U*, quando, in entrambi i casi, si prescinda dall'appartenenza o meno di O ad un circuito del sistema trasformato (*).

(*) L'osservazione, in quanto si riferisce al caso $r = 2$, dispensa dal trattare nel senso esteso del § 6 la «piccola variazione» pei sistemi Σ del caso ristretto (§§ 2, 3, 4, 5).

§ 7. Estensione dei risultati sul numero dei circuiti di Σ'.

25. Le mutue intersezioni dei circuiti di Σ siano raccolte nei punti $O_1 O_2 \dots O_q$ e per O_i passino $r_i \geq 2$ circuiti. Posto:

$$k = \frac{r_1(r_1-1)}{2} + \frac{r_2(r_2-1)}{2} + \dots + \frac{r_q(r_q-1)}{2}, \tag{5}$$

si osservi che in (5) rientra il significato particolare di k al § 2 e segg.

Introducasi, nell'attuale senso più esteso, il trasformato Σ' di Σ mediante « piccola variazione », e si attribuiscano ad a, h, d, a' significati analoghi a quelli indicati nel § 4.

Dico sussiste ancora la

$$a' \leq a + k - 2(h-d), \tag{6}$$

già dimostrata per il caso ristretto [num. 18, form. (4)].

Perciò svolgo le seguenti considerazioni.

Per O passino $r > 2$ circuiti di Σ. Spostando opportunamente nell'intorno di O uno di essi, si deduce da Σ un sistema Σ_0 di cui passano per O soltanto $r-1$ circuiti, tagliati nell'intorno di O dal circuito spostato in $r-1$ intersezioni semplici. Poichè è

$$\frac{(r-1)(r-2)}{2} + r - 1 = \frac{r(r-1)}{2},$$

col passare da Σ a Σ_0 [form. (5)], k non si altera; nè, evidentemente, si alterano a, h, d. Ora, coll'esame dei singoli casi (num. 26), si dimostrerà come si possano scegliere Σ_0 e la sua « piccola variazione » in modo tale che il sistema trasformato Σ'_0 possegga $a'_0 \geq a'$ circuiti, presentandosi anzi il caso del segno $=$ soltanto eccezionalmente. Se dunque Σ_0 soddisfa ad una relazione del tipo di (6), ad una simile relazione soddisfa pure Σ.

Ma la ripetizione del procedimento conduce infine ad un sistema del caso ristretto per cui la condizione si verifica. Dunque Σ soddisfa alla (6).

26. A completare quanto è esposto nel precedente numero, dimostro la possibilità di scegliere Σ_0 e Σ'_0 in modo che sia $a'_0 \geq a'$.

Nella « piccola variazione » di Σ si supponga dapprima applicata in O

l'*operazione* U. Se r è dispari $= 2s + 1$ (Fig. 6) si sposti γ_1 in modo che esso venga a tagliare i rimanenti circuiti nei segmenti $O A_j$ con $1 < j \leq r$ (Fig. 11). Al sistema Σ_0 così ottenuto si applichi una « piccola variazione », che fuori dell'intorno di O coincida con quella di Σ, in O attui un'operazione *di tipo* U equivalente alla data nei campi non attraversati dal circuito spo-

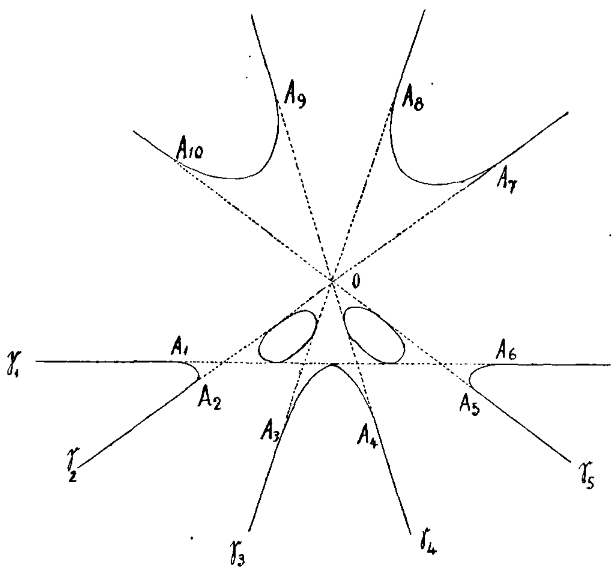


Fig. 11.

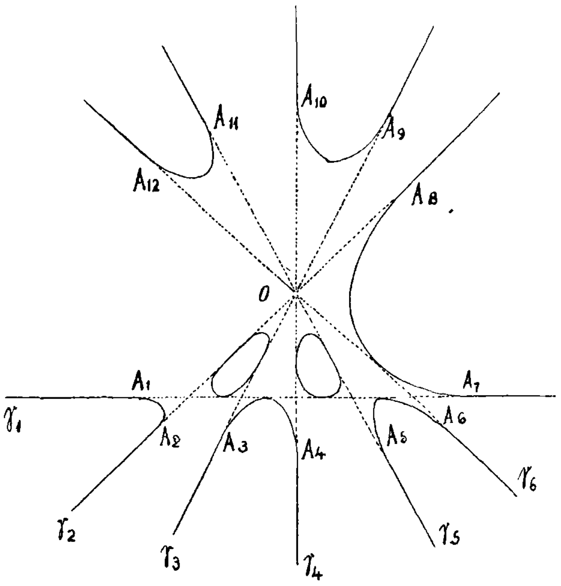


Fig. 12.

stato, e nelle nuove intersezioni semplici si comporti in modo da conservare gli antichi collegamenti (vedasi ancora la Fig. 11). Risulta:

$$a'_0 = a' + s, \tag{7}$$

per l'apparire in Σ'_0 di s nuovi circuiti (intorno ad O) accanto agli antichi di Σ'.

Se r è pari $= 2s$ (Fig. 7) si sposti γ_1 in modo che venga a tagliare (p. es.) i segmenti $O A_j$ con $1 < j \leq r$ (Fig. 12).

Sul sistema Σ_0 così ottenuto si operi in modo simile a quello esposto per r dispari (vedi ancora Fig. 12). Risulterà:

$$a'_0 = a' + s - 1. \tag{8}$$

Qualora in O fosse applicata, anzichè l'operazione U, l'*operazione* U', si opererebbe analogamente, raggiungendo analoghi risultati.

Si supponga invece in O applicata *l'operazione* V_i, per il che dev'essere r dispari $= 2s + 1$ (Fig. 8, $i = 1$, $r = 5$). Si sposti γ_i in modo che esso venga a tagliare i segmenti $O A_j$ con $i < j < i + r$ (Fig. 13). A Σ_0 così dedotto si applichi una « piccola variazione » che, fuori dall'intorno di O coincida con quella di Σ, che in O attui una operazione *di tipo* W equivalente a V_i nei campi non attraversati dal circuito spostato, e che nelle nuove intersezioni semplici si comporti così da conservare gli antichi collegamenti (vedi ancora Figura 13). Sarà

$$a'_0 = a' + s - 1 \qquad (9)$$

per l'apparire di $s - 1$ circuiti nuovi nell'intorno di O.

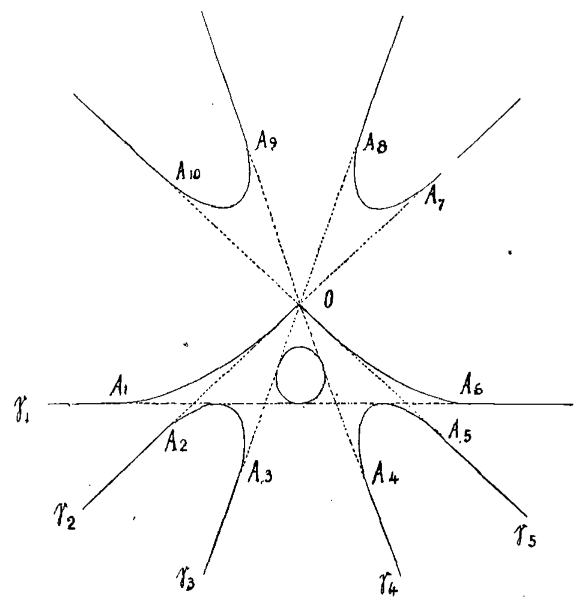


Fig. 13.

Si supponga poi che in O, a Σ, sia applicata *l'operazione* W_i, onde è r pari $= 2s$ (Fig. 9, $i = 1$, $r = 6$). Si sposti γ_i in modo che esso venga a tagliare i segmenti $O A_j$ con $i + r < j < i + 2r$ (Fig. 14). A Σ_0 così ottenuto si applichi una « piccola variazione » analoga alle precedenti, attuante in O un'operazione *di tipo* V, in cui il circuito di Σ'_0 passante per O provenga (nell'intorno) dall'antico γ_{i+r-1} (vedasi ancora Fig. 14). Sarà:

$$a'_0 = a' + s - 1. \qquad (10)$$

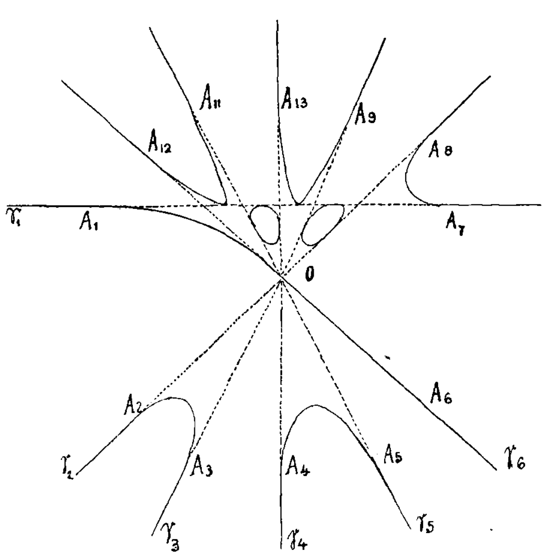


Fig. 14.

Si supponga infine che in O, a Σ, si applichi *l'operazione* Z_i, ond'è r dispari $= 2s + 1$ (Fig. 10, $i = 1$, $r = 5$). Si sposti γ_i in modo che venga a tagliare i segmenti $O A_j$ con $i + r < j < i + 2r$ (Fig. 15). A Σ_0, così ottenuto, si applichi una « piccola variazione » analoga alle precedenti, attuante in O un'operazione *di tipo W*, che, per i campi non attraversati dal circuito spostato, equivalga a Z_i. Sarà:

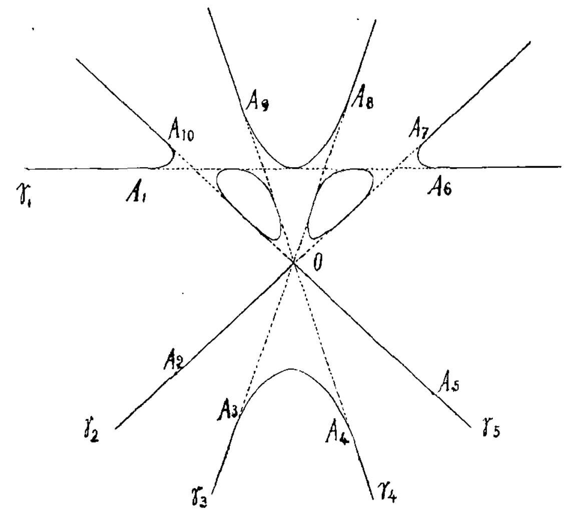


Fig. 15.

$$a'_0 = a' + s. \tag{11}$$

27. Per $r > 2$ le (7), (8), (10), (11) conducono ad $a'_0 > a'$; la (9) conduce ad $a'_0 > a'$ per $r > 3$, ad $a'_0 = a'$ per $r = 3$.

Affinchè il limite superiore fornito da (6) sia un massimo è dunque necessario che *per un punto del piano non passino più di tre circuiti di* Σ *e che nei punti per cui ne passano tre si applichi una operazione di tipo V.*

Allo scopo di circoscrivere la questione, *riprendo la restrizione* $k_{ij} \neq 0$ (introdotta dal num. 15 al 17 incluso), supponendo esteso il significato delle k_{ij} con quello di k [secondo la (5)].

Prescindo dai casi già considerati al § 4 ed al sistema Σ (sottoposto alle condizioni necessarie sopra enunciate) applico la trasformazione studiata al num. 26, in *ciascuno* dei punti per cui passano tre circuiti. Indico con $\Sigma_{(0)}$ il sistema ottenuto.

Risulta: *Condizione necessaria e sufficiente perchè la « piccola variazione » di* Σ *dia luogo ad un massimo è che ciò avvenga per* $\Sigma_{(0)}$.

Poichè ad uno dei punti O di Σ si sostituisce in $\Sigma_{(0)}$ un *triangolo* $O\,O'\,O''$, $\Sigma_{(0)}$ sarà dei tipi studiati ai num.[1] 16 e 17.

Ma *in generale* la « piccola variazione » applicata a $\Sigma_{(0)}$ non è quella indicata ai num.[1] citati, che dovrebbe riunire i lati del triangolo in un solo circuito (vedasi Fig. 16). Fa eccezione (num. 22), per la duplice possibilità di collegamento, soltanto il caso in cui $\Sigma_{(0)}$, all'infuori di eventuali circuiti isolati, consti di una *terna* $(\gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_3)_9$, essendo O una delle intersezioni di γ_2 con γ_3 ed O' (risp. O'') l'*unica* intersezione di γ_1 con γ_2 (risp. con γ_3) (vedasi ancora Fig. 16).

Segue che *il limite superiore fornito da* (6) *è un massimo nei soli casi seguenti:* 1.° *Se* Σ *e la « piccola variazione » si scelgono secondo uno dei numeri* 14, 16, 17. 2.° *Se* Σ, *all'infuori di eventuali circuiti isolati, è composto*

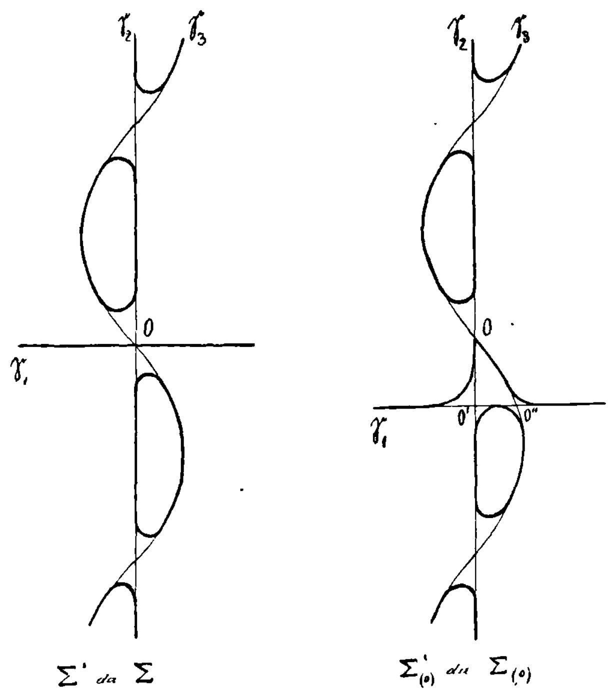


Fig. 16.

di tre circuiti $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ *dispari,* $\gamma_2 \gamma_3$ *hanno le mutue intersezioni ugualmente ordinate e* γ_1 *li taglia soltanto in una* O *di queste; se inoltre la « piccola variazione » attua in* O *l'operazione* V_1 *e nelle altre intersezioni* (*di* $\gamma_2 \gamma_3$) *operazioni di tipo* U *colleganti le coppie di segmenti ad estremi comuni* (Fig. 16).

PARTE SECONDA.

La "piccola variazione„ algebrica.

§ 8. La « piccola variazione » di una curva piana algebrica reale spezzata.

28. Si consideri la curva (piana) spezzata nelle h curve algebriche a punti reali:

$$C^{n_1},\ C^{n_2}, \ldots,\ C^{n_h}$$

rispettivamente di ordini $n_1, n_2, \ldots, n_h$, irriducibili, prive di singolarità in punti reali e di mutui contatti reali (ma eventualmente dotate così di singolarità immaginarie-conjugate come di mutui contatti immaginarî-conjugati). *Per un punto reale del piano passino al più due C^{n_i}.*

Sia

$$f_i = 0 \qquad (i = 1,\ 2, \ldots,\ h)$$

l'equazione di C^{n_i} in coordinate projettive con elementi di riferimento reali (e del resto arbitrarî); sia

$$g = 0$$

l'equazione di una curva *reale* d'ordine $n_1 + n_2 + \cdots + n_h$, generica (cioè *non passante per le mutue intersezioni reali delle C^{n_i}*).

Nella

$$f_1\, f_2 \ldots f_h + t\, g = 0 \tag{12}$$

si attribuiscano a t valori reali; essa rappresenterà una curva reale pure d'ordine $n_1 + n_2 + \cdots + n_h$.

Qualora l'insieme dei circuiti della curva spezzata si consideri come un sistema Σ, l'insieme di quelli della (12) *per $|t|$ abbastanza piccolo* potrà considerarsi come un sistema Σ' dedotto da Σ per « piccola variazione », nel senso dei §§ 2 e 3.

Se Σ è *connesso* (num. 12) [o composto di un sistema connesso e di circuiti staccati], le intersezioni di $g=0$ coi segmenti [e circuiti] di Σ fissano la *parità dei passaggi* ed il segno di t dirime la scelta fra le due « piccole variazioni » complementari. Onde la « piccola variazione » è in questo caso topologicamente determinata.

Più in generale si osservi che il sistema composto di Σ e dei circuiti di $g=0$, possedendo complessivamente un numero pari di circuiti dispari, determina una divisione del piano in regioni contraddistinguibili coi segni $+$ e $-$ (num. 4).

Si consideri

$$t=-\frac{f_1 f_2 \dots f_h}{g}$$

come *funzione* delle coordinate di un punto, e si noti che t prende segni opposti in regioni di segno opposto, perchè il passare attraverso un punto *generico* del contorno di una regione muta il segno o di una delle f_i o di g. La (12) è una delle curve $t=\text{cost.}$, quindi si svolge in regioni di ugual segno. Perciò nell'intorno di una intersezione (reale) $f_i=0$ $f_j=0$ sono ben determinati i *campi* in cui passa la (12), come quelli appartenenti a regioni di dato segno.

La « piccola variazione » è dunque pienamente determinata (ad es. nel senso del num. 10) dal comportamento di $g=0$ e dal segno di t, dipendendo ancora da quest'ultimo la scelta fra « piccole variazioni » complementari.

La (12), per gli opportuni valori di t, si dirà appunto dedotta dalla curva spezzata mediante « piccola variazione » (algebrica).

§ 9. Esistenza di una « piccola variazione » algebrica equivalente ad una data « piccola variazione » topologica.

29. Da quanto si legge nel precedente paragrafo nasce il quesito se una « piccola variazione » *topologicamente possibile* lo sia pure *algebricamente,* cioè se *ad una data scelta dei campi negli intorni delle intersezioni corrisponda sempre un'opportuna scelta della $g=0$ e del segno di t.*

Il quesito ha risposta affermativa, come si dimostra in questo paragrafo.

Si prenda in esame il caso di due curve. La (12) diverrà:

$$f_1 f_2 + t g = 0. \qquad (12)'$$

Detto k il numero delle intersezioni (reali) di $C^{n_1} C^{n_2}$, sarà

$$k \leq n_1 n_2 . \tag{13}$$

Si supponga dapprima $n_1 + n_2$ *pari.* Il sistema Σ, contenendo zero o due circuiti dispari, produce una divisione D del piano in parti contraddistinguibili coi segni $+$ e $-$ (num. 4). Una « piccola variazione » della curva spezzata si può perciò determinare con una distribuzione di segni nei k punti (num. 10), fissati i segni nei *campi* col *2.° criterio* (num. 9).

Sia m il numero dei punti contrassegnati col $-$ e si immagini la $g = 0$ costituita da altrettanti piccoli ovali circondanti i detti punti ed ulteriormente da eventuali circuiti ciascuno dei quali seghi al più un *segmento* di Σ.

L'insieme di Σ e dei circuiti di $g = 0$ produce nel piano una divisione D' in regioni le quali si possono contraddistinguere coi segni $+$ e $-$ in tal guisa, che nell'intorno dei punti non circondati [risp. circondati] i segni delle regioni nelle divisioni D e D' siano concordi [risp. discordi].

Nell'ipotesi fatta per la $g = 0$, a t si attribuisca tal segno che la (12)' si svolga nelle regioni di segno $+$ secondo D'; la (12)' si comporterà negli intorni dei k punti in tal modo da porre in atto la « piccola variazione » assegnata.

Lo stesso scopo si sarebbe raggiunto circondando con ovali i punti contrassegnati col $+$ ed attribuendo a t segno tale che (12)' si svolga nelle regioni di segno $-$, secondo la nuova divisione D' del piano in regioni (*).

L'arbitrarietà che nasce dall'ultima osservazione permette di riferirsi in ogni caso ad una $g = 0$ con ovali circondanti m fra i k punti, essendo

$$m \leq \frac{1}{2} k,$$

quindi anche, per la (13):

$$m \leq \frac{1}{2} n_1 n_2 . \tag{14}$$

(*) Se Σ è connesso, oppure composto di un sistema connesso e di circuiti isolati, la trattazione si può semplificare e ridurre ad un computo di *passaggi.* Invero un segmento congiungente due punti di ugual segno, essendo tagliato da due o zero ovali, presenta un numero pari di passaggi, mentre un segmento congiungente punti di segno opposto, essendo segato da un sol ovale, presenta un numero dispari di passaggi (non alterando gli eventuali ulteriori circuiti di $g = 0$ la parità); e ciò appunto deve essere (vedi num. 11).

Le considerazioni svolte riducono, nel caso attuale, la soluzione del quesito posto in principio di questo num. alla costruzione di una curva $g=0$ del tipo indicato. Per questo si veda il num. seguente.

30. Si osservi dapprima che le curve d'ordine $\frac{1}{2}(n_1+n_2)$ passanti per gli m punti da circondarsi formano un sistema lineare (C) di dimensione

$$r \geqq \frac{1}{8}(n_1+n_2)(n_1+n_2+6)-m. \tag{15}$$

Supposto $n_1 \geqq n_2$, da (14) e (15) si deduca

$$r \geqq \frac{1}{8}\left[(n_1-n_2)(n_1-n_2+6)+12n_2\right],$$

onde anche:

$$r > \frac{1}{8}(n_1-n_2)(n_1-n_2+6)+1. \tag{16}$$

Ne segue che (C) non può possedere C^{n_2} come parte fissa, quindi che, per l'irriducibilità di C^{n_2}, è di curve irriducibili. Risulta anzi che esso descrive su C^{n_2} una serie lineare almeno ∞^1, onde, *se $C^{n_1}C^{n_2}$ sono in posizione algebricamente generica*, all'infuori degli m punti assegnati, non possiede altri punti-base su C^{n_2}; in particolare *(C) non possiede punti-base nelle ulteriori intersezioni reali di C^{n_1} e C^{n_2}*. È quanto per ora suppongo (*).

Siano $w=0$, $\bar{w}=0$ due curve di (C) immaginarie-conjugate e del resto generiche. Sia $g_0=0$ una curva d'ordine n_1+n_2 reale a punti immaginarî. La:

$$g \equiv w\bar{w}+z\,g_0=0, \tag{17}$$

per z (reale) di valor assoluto abbastanza piccolo e di segno opportuno, sarà composta di piccoli ovali circondanti le intersezioni reali di $w=0$, $\bar{w}=0$, cioè da m ovali circondanti i punti assegnati ed eventualmente da altri ovali di cui ciascuno taglia al più un segmento di Σ. La (17) è la curva richiesta.

31. Il sistema (C) abbia oltre agli m punti assegnati, che dirò punti P, altri $m'>0$ punti fondamentali (semplici), che dirò punti P', in ulteriori in-

(*) La restrizione sarà tolta al numero seguente. È bene però osservare come nella maggior parte dei problemi di « piccola variazione » sia lecito ridursi ad una posizione algebricamente generica, sostituendo ad una delle curve date una curva prossima, senza alterare le condizioni topologiche, le quali generalmente sono le sole essenziali.

tersezioni di $C^{n_1} C^{n_2}$ (reali od, in parte, immaginarie-conjugate). Se fra gli m punti assegnati solo $m_0 \leq m$ forniscono alle (C) condizioni lineari indipendenti, una nota proprietà delle *serie lineari speciali* (*), applicata alla *serie caratteristica* di (C), conduce in modo semplice alla

$$2\, m_0 - m > m',$$

onde alla

$$m > m'. \tag{18}$$

Sia (C') il sistema delle curve d'ordine $\frac{1}{2}(n_1 + n_2)$ passanti per gli m' punti P' e si supponga che esso non possegga ulteriori punti fondamentali nelle intersezioni di $C^{n_1} C^{n_2}$. Se $w' = 0$, $\overline{w}' = 0$ sono due curve di (C') immaginarie conjugate e del resto generiche e $g_0 = 0$ è ancora una curva d'ordine $n_1 + n_2$ reale a punti immaginarî, la

$$g' \equiv w' \overline{w}' + z' g_0 = 0,$$

per z' opportuno, è una curva costituita da ovali circondanti le intersezioni reali di $w' = 0$, $\overline{w}' = 0$, cioè dagli ovali circondanti quelli fra i punti P' che sono reali ed eventualmente da altri ovali di cui ciascuno sega al più un segmento di Σ.

Se inoltre $w = 0$, $\overline{w} = 0$ rappresentano ancora curve immaginarie conjugate generiche di (C), la

$$g \equiv w \overline{w} + z g' = 0,$$

per z opportuno, è la curva richiesta. Ed invero, poichè i punti P' reali sono interni ad ovali di $g' = 0$, mentre i punti P sono esterni ad ogni ovale di essa, si potrà sempre scegliere il segno di z in modo che, per $|z|$ abbastanza piccolo, la $g = 0$ (priva di punti reali negli intorni dei punti P' reali) sia costituita da m ovali circondanti i punti P ed eventualmente da altri di cui ciascuno seghi al più un segmento di Σ.

Si supponga ora che (C'), oltre agli m' punti P', possegga m'' punti fon-

(*) L'ordine di una serie speciale è $\geqq$ al doppio della sua dimensione (teorema di CLIFFORD); v. ad es.: BERTINI, *La geometria delle serie lineari sopra una curva piana secondo il metodo algebrico* (Ann. di Mat., serie 2.ª, T. XXII), num. 25, cfr. num. 38; SEGRE, *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito* (Ibid.), num.[i] 72 ed 84; — BERZOLARI, *Allgemeine Theorie der höheren ebenen algebraischen Kurven* (cit.), num. 27.

damentali P'' in ulteriori intersezioni di $C^{n_1} C^{n_2}$ (necessariamente fra i punti P). Sussiste la

$$m' > m'' \tag{19}$$

analoga alla (18) e si può introdurre il sistema (C'') delle curve d'ordine $\frac{1}{2}(n_1 + n_2)$ per i punti P'', del quale dapprima si suppone l'assenza di punti fondamentali nelle ulteriori intersezioni delle $C^{n_1} C^{n_2}$. In tale ipotesi, dette $w'' = 0$, $\overline{w}'' = 0$ curve immaginarie conjugate generiche di (C'') e posto:

$$g'' \equiv w'' \overline{w}'' + z'' g_0,$$

$$g' \equiv w' \overline{w}' + z' g'',$$

$$g \equiv w \overline{w} + z g',$$

per opportuni valori di z'' z', z, sarà $g = 0$ la curva richiesta.

Nell'ipotesi contraria si continua il procedimento, il quale, per le (18), (19) ed analoghe, necessariamente finisce.

È così tolta la restrizione posta al numero precedente.

32. Sia $n_1 + n_2$ *dispari.* Il sistema Σ contiene un sol circuito dispari. Detta $u = 0$ una retta generica, cioè non passante per le intersezioni delle $C^{n_1} C^{n_2}$, il sistema composto di Σ e della retta determina nel piano una divisione D in regioni contraddistinguibili coi segni $+$ e $-$. Ai campi negli intorni delle k intersezioni reali si attribuiscano i segni delle regioni a cui appartengono secondo la D.

Si fissi una distribuzione di segni nelle k intersezioni; essa determina una «piccola variazione» di Σ e reciprocamente.

Si immagini la $g = 0$ spezzata nella retta $u = 0$ ed in una curva $g_1 = 0$ (d'ordine $n_1 + n_2 - 1$) costituita da piccoli ovali circondanti i punti contrassegnati col $-$ [oppure quelli contrassegnati col $+$] ed ulteriormente da circuiti ciascuno dei quali seghi al più un segmento di Σ. L'insieme di Σ e dei circuiti appartenenti a $g \equiv u g_1 = 0$ produce nel piano una divisione D' in regioni, le quali si possono contraddistinguere coi segni $+$ e $-$ in tal guisa che nell'intorno dei punti non circondati (risp. circondati) i segni delle regioni nelle divisioni D e D' siano concordi (risp. discordi). Nell'ipotesi fatta si attribuisca a t segno tale che $(12)'$ si svolga nelle regioni di segno $+$ [oppure in quelle di segno $-$] secondo D'; si attuerà così la «piccola variazione» assegnata.

Il problema si riduce alla costruzione di una $g_1 = 0$ del tipo indicato, valendo per il numero m dei punti da circondarsi ancora la (14).

Interviene il sistema (C) delle curve d'ordine $\frac{1}{2}(n_1 + n_2 - 1)$ passante per gli m punti, di dimensione

$$r \geqq \frac{1}{8}(n_1 + n_2 - 1)(n_1 + n_2 + 5) - m. \tag{15)'}$$

Suppósto $n_1 > n_2$, da (14) e (15)' si deduce:

$$r \geqq \frac{1}{8}(n_1 - n_2 - 1)(n_1 - n_2 + 5) + n_2,$$

onde (escluso il caso ovvio $n_1 = 2$, $n_2 = 1$, $m = 1$, $r = 1$):

$$r > \frac{1}{8}(n_1 - n_2 - 1)(n_1 - n_2 + 5) + 1. \tag{16)'}$$

Se C^{n_1}, C^{n_2} sono algebricamente generiche, l'ulteriore trattazione si svolge analoga a quella per la costruzione di $g = 0$ al num. 30 e conduce alla

$$g_1 \equiv w\bar{w} + z\,g_0 = 0$$

per opportuni valori di z, essendo $w = 0$, $\bar{w} = 0$ immaginarie conjugate generiche in (C) e $g_0 = 0$ reale a punti immaginarî (d'ordine $n_1 + n_2 - 1$).

Se C^{n_1}, C^{n_2} sono tali che (C), oltre agli m punti assegnati, abbia ulteriori punti fondamentali nelle intersezioni reali delle curve stesse, valgono considerazioni analoghe a quelle svolte al num. 31.

Il caso di due curve è dunque esaurito, anche per $n_1 + n_2$ dispari.

33. Il metodo seguito nei num.[i] 29, 30, 31, 32 per il caso di due curve non si può sempre immaginare esteso al caso di più curve.

Il sistema Σ possiede un numero pari o dispari di circuiti dispari, secondo che è pari o dispari $n_1 + n_2 + \cdots + n_h$. L'estensione del procedimento conduce dunque sostanzialmente, nelle due ipotesi, alla ricerca di una curva d'ordine $n_1 + n_2 + \cdots + n_h$ oppure $n_1 + n_2 + \cdots + n_h - 1$, composta di m ovali circondanti altrettante fra le mutue intersezioni (reali) delle C^{n_i} ed eventualmente da ulteriori circuiti, ciascuno dei quali seghi al più un segmento di Σ. È inoltre lecito supporre:

$$m \leqq \frac{1}{2}k,$$

onde:

$$m \leq \frac{1}{2}(n_1 n_2 + n_1 n_3 + \cdots + n_{h-1} n_h). \tag{20}$$

Però la (20) non è condizione sufficiente per l'esistenza del sistema (C) delle curve d'ordine $\frac{1}{2}(n_1+n_2+\cdots+n_h)$ oppure $\frac{1}{2}(n_1+n_2+\cdots+n_h-1)$ passanti per gli m punti da circondarsi, se non si aggiunge la condizione:

$$\left.\begin{aligned} & n_1^2+n_2^2+\cdots+n_h^2+6(n_1+n_2+\cdots+n_h) > \\ & \qquad > 2(n_1 n_2 + n_1 n_3 + \cdots + n_{h-1} n_h), \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

oppure (rispettivamente) la:

$$\left.\begin{aligned} & n_1^2+n_2^2+\cdots+n_h^2+4(n_1+n_2+\cdots+n_h) > \\ & \qquad > 2(n_1 n_2 + n_1 n_3 + \cdots + n_{h-1}) + 5. \end{aligned}\right\} \tag{21$'$}$$

All'infuori d'ogni validità generale, rimane tuttavia la possibilità di continuare il procedimento quando esista il sistema (C), cioè quando per le curve d'ordine $\frac{1}{2}(n_1+n_2+\cdots+n_h)$ o (rispettivamente) $\frac{1}{2}(n_1+n_2+\cdots+n_h-1)$ il gruppo degli m punti rappresenti un numero di condizioni lineari indipendenti:

$$m_0 < \frac{1}{8}(n_1+n_2+\cdots+n_h)(n_1+n_2+\cdots+n_h+6)$$

o (rispettivamente):

$$m_0 < \frac{1}{8}(n_1+n_2+\cdots+n_h-1)(n_1+n_2+\cdots+n_h+5).$$

Le considerazioni analoghe a quelle svolte nel num. 31 richiederebbero più minuto esame, presentandosi qui il caso nuovo di un sistema (C) con parti fisse (una o più delle C^{n_i}).

Ma il problema posto all'inizio di questo paragrafo sarà risolto per altra via nel numero seguente in tutta la sua generalità.

34. Date le C^{n_s} $(s=1, 2, \ldots, h)$ si contraddistinguano i campi negli intorni delle k loro mutue intersezioni reali coi segni $+$ e $-$ (num. 9). S'immagini una « piccola variazione » di Σ determinata da una distribuzione di segni nelle dette intersezioni (num. 10).

Si fissino due curve $C^{n_i} C^{n_j}$ $(i<j)$ e si prescinda, per un momento, dalle

rimanenti. Negli intorni delle loro intersezioni si mantenga la precedente indicazione dei campi mediante segni e nelle intersezioni stesse si distribuiscano i segni in accordo colla fissata distribuzione generale. Nascerà per il sistema Σ_{ij} dei circuiti di $C^{n_i}\,C^{n_j}$ una «piccola variazione», realizzata algebricamente assumendo come curva trasformata la:

$$f_i\,f_j + t_{ij}\,g_{ij} = 0, \tag{22}$$

dove $g_{ij} = 0$, t_{ij} son scelti, ad es., nel modo indicato ai num.[1] 29, 30, 31, 32.

Il segno di t_{ij} è così ben determinato, ma si supporrà, come è lecito, *che sia il* $+$, includendo eventualmente un fattore (-1) nel primo membro della $g_{ij} = 0$. Inoltre l'arbitrarietà che rimane nella scelta delle $g_{ij} = 0$ permette di escluderne il passaggio per mutue intersezioni delle C^{n_s}.

Si indichi con f_{ij} il prodotto di tutte le f_s, escluse le f_i, f_j. Dico che, *per effettuare algebricamente l'assegnata «piccola variazione» di* Σ, *basta nella* (12) [del num. 29] *porre*:

$$g \equiv f_{12}\,g_{12} + f_{13}\,g_{13} + \cdots + f_{ij}\,g_{ij} + \cdots + f_{h-1,h}\,g_{h-1,h} \tag{23}$$

e $t > 0$, *ma abbastanza piccolo.*

Ai parametri t, t_{ij} delle (12) e (22) si ridoni l'intiera variabilità, considerandoli come funzioni delle coordinate di un punto corrente nel piano:

$$t = -\frac{f_1\,f_2 \cdots f_i \cdots f_j \cdots f_h}{g}, \tag{24}$$

$$t_{ij} = -\frac{f_i\,f_j}{g_{ij}}. \tag{25}$$

Dalle (23), (24), (25) segue:

$$\frac{1}{t} \equiv \frac{1}{t_{12}} + \frac{1}{t_{13}} + \cdots + \frac{1}{t_{ij}} + \cdots + \frac{1}{t_{h-1,h}}. \tag{26}$$

Se si procede mediante la (26) al calcolo di $\frac{t_{ij}}{t}$, i termini del secondo membro del tipo $\frac{t_{ij}}{t_{qs}} = \frac{f_i\,f_j\,g_{qs}}{f_q\,f_s\,g_{ij}}$ possono essere distinti in quattro gruppi: un termine cogli indici q, $s = i$, j; $h-2$ termini con uno di essi $= j$; $h-2$ termini con uno di essi $= i$; i rimanenti cogli indici diversi entrambi da i, j. Si stabilisce così una identità del tipo seguente:

$$\frac{t_{ij}}{t} \equiv 1 + f_i\,T_i + f_j\,T_j + f_i\,f_j\,T_{ij}. \tag{27}$$

Si faccia ora tendere comunque il punto corrente ad una delle intersezioni (reali) di $C^{n_i} C^{n_j}$; poichè T_i, T_j, T_{ij} tendono a limiti finiti ed f_i, f_j tendono al limite zero, segue

$$\lim \frac{t_{ij}}{t} = 1. \tag{28}$$

Se ne deduce che è possibile immaginare un intorno della intersezione in cui t e t_{ij} posseggano lo stesso segno, onde *nei campi in cui è* $t_{ij} > 0$ *è pure* $t > 0$. Ossia *i campi degli intorni delle intersezioni di* $C^{n_i} C^{n_j}$ *percorsi da* (22) *sono pure percorsi da* (12) [*per* $t > 0$ *abbastanza piccolo e* g *data da* (23)].

Tenuta presente la scelta delle «piccole variazioni» applicate ai sistemi Σ_{ij}, si conclude d'aver raggiunto pure per Σ la «piccola variazione» assegnata.

§ 10. Altre dimostrazioni d'esistenza per alcuni casi notevoli.

35. In casi particolari la $g = 0$, corrispondente ad una «piccola variazione» assegnata, può ottenersi con procedimenti essenzialmente diversi da quelli indicati nella trattazione generale del § 9. A qualche esempio per se stesso interessante è dedicato il presente paragrafo.

1.° esempio. Sia dapprima C^{n_1} di genere p, dotata del numero massimo di circuiti compatibile col genere, cioè (*) di $p+1$ circuiti. Le k intersezioni (reali) siano tutte raccolte sopra un solo circuito γ di C^{n_1} (onde manchino le mutue intersezioni reali fra le rimanenti C^{n_s}) (**).

Essendo Σ composto di un sistema connesso e di eventuali circuiti staccati, interverranno soltanto considerazioni di *parità di passaggi* (§ 3) e queste potranno restringersi ai soli segmenti di γ (num. 13 in fine).

Le *curve aggiunte* della C^{n_1} di ordine $n_1 + n_2 + \cdots + n_h$ segnano su di essa una serie lineare di dimensione

$$r = p + n_1 (n_2 + n_3 + \cdots + n_h + 3) - 2 \tag{29}$$

(*) Harnack, loc. cit.

(**) Il caso *B*), che verrà considerato al num. 44, rientra nelle attuali ipotesi.

e di ordine $r+p$ (*). Con

$$k' \leq k \leq n_1 (n_2 + n_3 + \cdots + n_h)$$

si indichi il numero dei segmenti di γ che esigono numero dispari di passaggi secondo la « piccola variazione » assegnata.

Si determini un gruppo della serie mediante r punti (algebricamente generici) distribuiti come segue: 1.° un punto su ciascuno dei k' segmenti indicati; 2.° un punto su ciascuno dei circuiti di C^{n_1} diversi da γ, escluso l'eventuale circuito dispari; 3.° i rimanenti $r-k'-p$ oppure $r-k'-p+1$ necessariamente in numero pari (**), raggruppati comunque in coppie di punti immaginari conjugati, o di punti appartenenti ad uno stesso segmento di γ, o di punti sopra uno stesso degli ulteriori circuiti di C^{n_1} (raggruppati cioè in modo tale da non alterare la parità dei passaggi).

Il gruppo sarà necessariamente completato da p punti, fra cui quelli reali disposti in numero dispari su ciascuno dei p circuiti di C^{n_1} diversi da γ, cioè da p punti tutti reali giacenti rispettivamente sui p circuiti stessi.

Le condizioni offerte dal gruppo alle curve aggiunte d'ordine

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_h$$

sono tutte reali, quindi per esso passano aggiunte (di tale ordine) reali. Una generica di queste si può assumere come curva $g=0$.

36. Si consideri ora il seguente:

2.° ESEMPIO. Sia ancora C^{n_1} dotata di $p+1$ circuiti. Le k intersezioni siano però distribuite su due circuiti γ, δ della C^{n_1}, ma Σ sia, all'infuori di circuiti isolati, connesso [per il che basta l'esistenza di un circuito appartenente ad una $C^{n_s} (s>1)$ e secante così γ come δ]. Inoltre la « piccola variazione » assegnata sia tale che su δ due segmenti al più richiedano un numero dispari di passaggi. Sarà sufficiente fissare la parità dei passaggi su γ e δ (vedi nota al num. 13).

Supposto $p>1$ (***), si riprenda il sistema delle aggiunte d'ordine

---

(*) Vedi ad es. BERTINI, loc. cit., num. 22 *c*); BERZOLARI, loc. cit., num. 27.

(**) Se n_1 è pari, $r-p$ per la (29) è pari, γ è circuito pari, onde k' è pari, $r-k'-p$ è pari. Se n_1 è dispari e γ pure è dispari così $r-p$ come k' hanno la parità di $n_1+n_2+\ldots+n_h$, onde $r-k'-p$ è pari. Se n_1 è dispari e γ è pari, le $C^{n_s} (s>1)$ non contengono circuiti dispari, cioè sono d'ordine pari, $r-p$ è dispari, k' è pari, $r-k'-p+1$ è pari.

(***) Il caso $p=1$ si tratta direttamente in modo semplice.

$n_1 + n_2 + \cdots + n_h$ e si determini un gruppo della serie da esso segnata su C^{n_1} mediante r punti, distribuendoli così: 1.° uno in ciascuno dei k' segmenti di γ richiedenti numero dispari di passaggi; 2.° uno su ciascuno dei p circuiti diversi da γ, escluso l'eventuale dispari, in modo però che, se δ richiede numero dispari di passaggi su due segmenti (ed è quindi pari), il punto su δ sia preso in uno di questi; 3.° i rimanenti $r - k' - p$ od $r - k' - p + 1$ in coppie non alteranti la parità dei passaggi, coll'avvertenza che per $p = 2$, n_1 dispari, γ e δ pari, una coppia sia presa sul rimanente circuito (dispari).

Il gruppo sarà completato da p punti rispettivamente sui p circuiti di C^{n_1} diversi da γ e rispetterà la parità dei passaggi ovunque, fuorchè, in generale, su δ. Tale parità si potrà ristabilire riconducendo quello fra i p punti indicati appartenente a δ sul segmento opportuno.

Perciò sopra un circuito ε di C^{n_1}, diverso da γ e δ, contenente uno, almeno, degli r punti determinanti il gruppo, si sposti tale punto fino a descrivere l'intero circuito (lasciando fissi su C^{n_1} gli altri $r - 1$ punti). Il gruppo, detratti i punti fissi, varia così in una serie lineare semplicemente infinita d'ordine $p + 1$ e viene a coincidere con tutti i gruppi di questa aventi due punti su ε, nessun punto su γ, un punto su ciascuno dei rimanenti circuiti. In particolare il punto mobile sul circuito δ lo descrive per intiero, e, variando opportunamente il gruppo, può essere condotto sul segmento voluto.

Una generica aggiunta reale d'ordine $n_1 + n_2 + \cdots + n_h$, passante per il gruppo (di $r + p$ punti) così ottenuto, è la richiesta $g = 0$ (*).

37. Si passi infine al seguente:

3.° ESEMPIO. Sia C^{n_1} dotata di p circuiti e le k intersezioni siano raccolte sopra un suo circuito γ (onde Σ, all'infuori di circuiti isolati, è connesso).

Si determini un gruppo della serie segnata su C^{n_1} dalle aggiunte d'ordine $n_1 + n_2 + \cdots + n_h$ mediante r punti così distribuiti: 1.° un punto su ciascuno dei k' segmenti di γ richiedenti numero dispari di passaggi; 2.° un punto su ciascuno dei p circuiti di C^{n_1} (il punto su γ dicasi A), escluso l'eventuale circuito dispari se è diverso da γ; 3.° i rimanenti $n - k' + p$ od $n - k' + p + 1$ punti in coppie non alteranti la parità dei passaggi.

Il gruppo, completato da p punti rispettivamente sui p circuiti, in ge-

(*) Nei due esempi è notevole l'uso della geometria sopra una curva di genere p dotata di $p + 1$ circuiti. Per altre applicazioni di questa si veda la mia Nota: *Serie lineari e corrispondenze sopra una curva di genere p dotata di $p + 1$ circuiti* (Rend. R. Ist. Lomb., serie 2ª, XLIII, 1910).

nerale su γ (ma non altrove) contravviene alla parità dei passaggi. Se però uno degli r punti determinanti il gruppo descrive un circuito (di C^{n_1}) diverso da γ, mentre gli altri $r-1$ son fissi, il punto mobile su γ può essere condotto sul segmento contenente A, ristabilendo la parità dei passaggi.

Una generica aggiunta (d'ordine $n_1+n_2+\cdots+n_h$) passante per il gruppo fornisce ancora la $g=0$.

§ 11. Estensione del concetto di « piccola variazione » algebrica.

38. Riprendo la trattazione del § 8, sulla

$$f_1 f_2 \dots f_h + t g = 0, \tag{30}$$

ma abbandono due delle restrizioni ivi imposte, ammettendo: 1.° che per un punto (reale) del piano passino eventualmente anche più di due C^{n_i}; 2.° che la $g=0$ possa passare [semplicemente (*)] per alcune (anche per tutte) le mutue intersezioni (reali) delle C^{n_i}.

Osservo che il sistema dei circuiti delle C^{n_i} è un sistema Σ nel senso (più esteso) del § 6; dico inoltre che, per $|t|$ abbastanza piccolo il sistema dei circuiti di (30) è il trasformato Σ' di Σ in una « piccola variazione » intesa nel senso (più esteso) del paragrafo stesso.

Ciò verrà dimostrato nei num.[i] seguenti riprendendo le notazioni ivi introdotte.

39. Sia O un punto del piano pel quale passino $r \geqq 2$ circuiti di Σ e si supponga dapprima che $g=0$ *non passi per* O. In un intorno di O non contenente punti di $g=0$ si considerino i $2r$ campi $\widehat{A_j O A_{j+1}}$ (num. 23); in punti di uno stesso campo la

$$t = -\frac{f_1 f_2 \dots f_h}{g}$$

ha uno stesso segno ben determinato, mentre in punti rispettivamente di due campi consecutivi $\widehat{A_j O A_{j+1}}$, $\widehat{A_{j+1} O A_{j+2}}$ ha segni opposti.

(*) Il supporre per $g=0$ una singolarità in una intersezione delle C^{n_i}, porterebbe conseguentemente ad un punto multiplo ivi per la (30), e ciò si vuol qui escludere (vedi la prefazione).

Segue che t assume segni alternati nei $2r$ campi intorno ad O. Se, per fissare le idee, si suppone $t > 0$ nel campo $\widehat{A_1 O A_2}$, *la trasformazione di* $f_1 f_2 \dots f_h = 0$ *in* (30) *dà luogo in* O *ad una « piccola variazione » e precisamente ad una operazione* U *od* U' *secondo che è* $t > 0$ *oppure* $t < 0$.

40. Si supponga ora che $g = 0$ *passi per* O *senza toccare ivi alcuna delle* C^{n_i}.

Se su $g = 0$ da bande opposte di O, e nell'intorno di questo, si prendono due punti $G_1\, G_2$ (Figg. 17 e 18), i segmenti $O\,G_1$, $O\,G_2$ giacciono in due

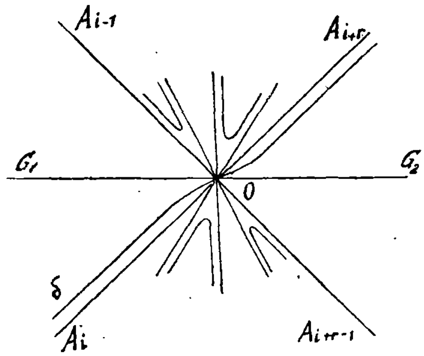


Fig. 17.

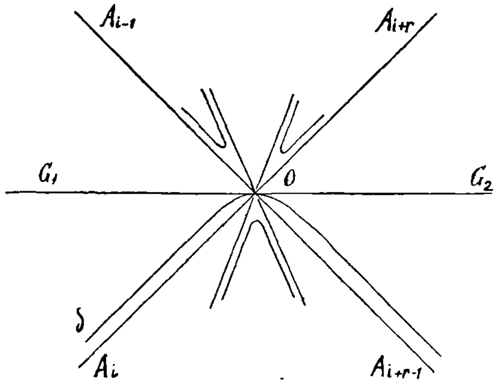


Fig. 18.

campi opposti al vertice $\widehat{A_{i-1} O A_i}$, $\widehat{A_{i+r-1} O A_{i+r}}$, dividendo ciascuno di questi in due nuovi campi.

Si hanno così in tutto $2r + 2$ campi intorno ad O e in essi t assume ordinatamente segni alternati. Per es. *in* $\widehat{G_1 O A_i}$ *sia* $t > 0$.

La (30) ha in O con $g = 0$ contatto r-punto, ed il circuito δ di essa tangente la $g = 0$ l'attraversa in O oppure non l'attraversa, secondo che r è dispari ($= 2s + 1$) o pari ($= 2s$).

Per r dispari e $t > 0$, il circuito δ, nell'intorno di O, si svolgerà nei campi $\widehat{G_1 O A_i}$, $\widehat{G_2 O A_{i+r}}$ e risulterà quindi dall'unione in O dei segmenti prossimi ad $O\,A_i$, $O\,A_{i+r}$. La rimanente parte di (30) nell'intorno di O si svolgerà nei campi $\widehat{A_{i+2l-1} O A_{i+2l}}$, $\widehat{A_{i+r+2l-1} O A_{i+r+2l}}$ ($l = 1, 2, \dots, s$) [vedasi Fig. 17].

Per r dispari e $t < 0$ si presentano considerazioni analoghe coll'intervento di $O\,A_{i-1}$, $O\,A_{i+r-1}$ in luogo di $O\,A_i$, $O\,A_{i+r}$.

Dunque *la trasformazione di* $f_1 f_2 \dots f_h = 0$ *in* (30) *dà luogo in* O *ad una «piccola variazione» e precisamente ad una operazione* V_i *oppure* V_{i-1}, *secondo che è* $t > 0$ *oppure* $t < 0$.

Per r *pari e* $t > 0$, il circuito δ, nell'intorno di O, si svolgerà nei campi $\widehat{G_1\,O\,A_i}$, $\widehat{A_{i+r-1}\,O\,G_2}$ e risulterà quindi dall'unione in O dei segmenti prossimi ad $O\,A_i$, $O\,A_{i+r-1}$. La rimanente parte di (30) nell'intorno di O si svolgerà nei campi $\widehat{A_{i+2l-1}\,O\,A_{i+2l}}$ $(l = 1, 2, \dots, s-1)$ ed $\widehat{A_{i+r+2l}\,O\,A_{i+r+2l+1}}$ $(l = 0, 1, 2, \dots, s-1)$ [vedasi Fig. 18].

Per r *pari e* $t < 0$ si presentano considerazioni analoghe coll'intervento di $O\,A_{i+r}$, $O\,A_{i-1}$ in luogo di $O\,A_i$, $O\,A_{i+r-1}$.

Dunque *la trasformazione di* $f_1 f_2 \dots f_h = 0$ *in* (30) *dà luogo in* O *ad una «piccola variazione» e precisamente ad una operazione* W_i *oppure* W_{i+r} *secondo che è* $t > 0$ *oppure* $t < 0$.

41. *Se* $g = 0$ *ha con* γ_i *contatto dispari* (*in* O), il circuito δ di (30) tangente $g = 0$ si comporta come nel caso del precedente numero, del quale persistono perciò le conclusioni.

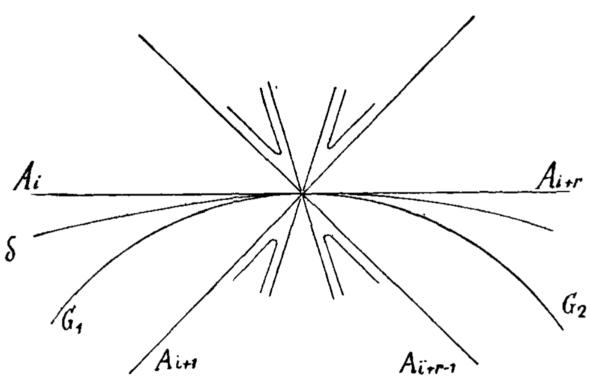


Fig. 19.

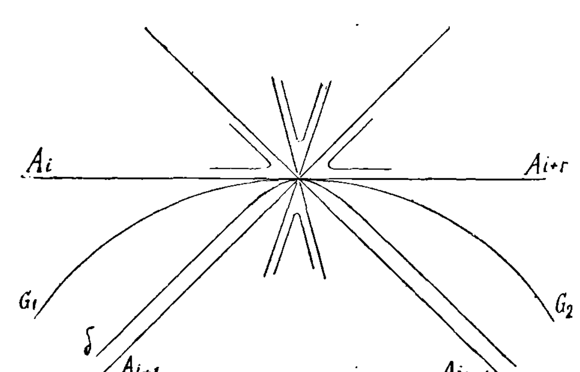


Fig. 20.

Se $g = 0$ *ha con* γ_i *contatto pari*, il circuito δ non attraversa od attraversa $g = 0$, secondo che r è dispari o pari.

Si supponga che, nell'intorno di O, $g = 0$ si svolga nei campi $\widehat{A_i\,O\,A_{i+1}}$, $\widehat{A_{i+r-1}\,O\,A_{i+r}}$ e dicansi $O\,G_1$; $O\,G_2$ i segmenti di essa in detti campi (Figg. 19, 20, 21).

Nei $2r + 2$ campi (intorno ad O) t presenta ordinatamente segni alternati; *sia* $t > 0$ *in* $\widehat{A_i\,O\,G_1}$.

Sia r dispari. Per $t > 0$, δ, presso O, si svolge nei campi $\widehat{A_i O G_1}$, $\widehat{G_2 O A_{i+r}}$ e risulta dall'unione in O dei segmenti prossimi ad $O A_i$, $O A_{i+r}$ [Fig. 19]. Per $t < 0$, δ, presso O, si svolge nei campi $\widehat{G_1 O A_{i+1}}$, $\widehat{A_{i+r-1} O G_2}$ e risulta dall'unione in O dei segmenti prossimi ad $O A_{i+1}$, $O A_{i+r-1}$ [Fig. 20]. È ovvio in entrambi i casi l'ulteriore comportamento di (30) nell'intorno di O. Onde:

La trasformazione di $f_1 f_2 \dots f_h = 0$ *in* (30) *dà luogo in* O *ad una operazione* V_i *oppure* Z_i, *secondo che è* $t > 0$ *oppure* $t < 0$.

Sia r pari. Secondo che è $t > 0$ oppure $t < 0$, δ si svolge, presso O, nei campi $\widehat{A_i O G_1}$, $\widehat{A_{i+r-1} O G_2}$ oppure $\widehat{G_1 O A_{i+1}}$, $\widehat{G_2 O A_{i+r}}$ e risulta quindi dall'unione in O dei segmenti prossimi ad $O A_i$, $O A_{i+r-1}$ oppure $O A_{i+1}$, $O A_{i+r}$. È ovvio l'ulteriore comportamento di (30) nell'intorno di O. Onde la *trasformazione di* f_1, $f_2, \dots, f_h = 0$ *in* (30) *dà luogo in* O *ad una operazione* W_i *oppure* W_{i+1}, *secondo che è* $t > 0$, *oppure* $t < 0$ (vedi Figura 21 per $t > 0$).

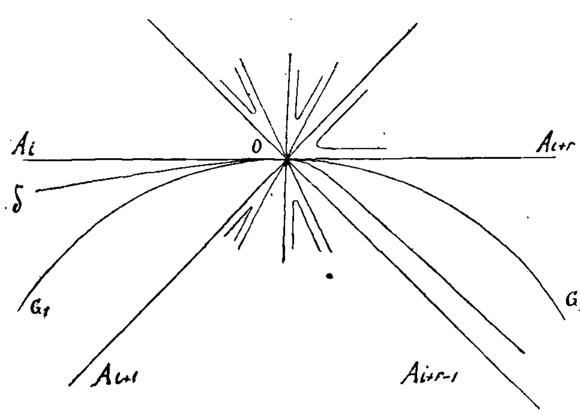


Fig. 21.

42. Da quanto è svolto nei precedenti numeri risulta che ad ogni scelta di $g = 0$ e del segno di t corrisponde (per $|t|$ abbastanza piccolo) una « piccola variazione » *topologicamente* ben determinata. Qui, come nel caso ristretto del § 8 (cfr. § 9), sorge la questione se inversamente ogni « piccola variazione » topologica si possa ottenere *algebricamente* con opportuna scelta di $g = 0$ e di t. Il quesito ha in alcuni casi risposta affermativa, ma la trattazione generale offre qualche difficoltà.

Il solo caso che si presenterà nel seguito è però del tutto ovvio. Esso è quello di tre rette concorrenti in un punto O, nel quale è da operarsi una V. Basta perciò assumere come $g = 0$ una cubica reale che passi semplicemente per O attraversando campi opportuni e dare a t segno opportuno, sempre in conformità alle condizioni esposte al num. 40. Tale determinazione è evidentemente possibile in più modi.

§ 12. Condizioni necessarie e sufficienti perchè la curva trasformata abbia il massimo numero di circuiti compatibile col suo ordine.

43. Una curva d'ordine n possiede al più $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$ circuiti e, per ogni valore di n, esistono curve dotate di circuiti in tal numero (*). Nel presente paragrafo stabilisco condizioni necessarie e sufficienti perchè una « piccola variazione » algebrica (nel senso più esteso del § 11) produca una curva del tipo detto.

I sistemi costituiti dai circuiti delle singole C^{n_i} $(i=1, 2,\dots, h)$ si possono considerare come sistemi S_i, nel senso del § 4 (num. 15 e segg.), del quale si riprendono qui le notazioni (cfr. § 7).

Il numero k, anche nel senso più esteso del § 7 [form. (5)], rappresenta il numero totale delle mutue intersezioni reali fra le C^{n_i}. Infatti gli r circuiti passanti per un punto O appartengono ad r distinte C^{n_i}; in O son dunque raccolte $\frac{r(r-1)}{2}$ mutue intersezioni.

Applicando a ciascuna delle C^{n_i} la proprietà richiamata all'inizio di questo numero, poi sommando, si ottiene:

$$a \leqq \frac{(n_1-1)(n_1-2)}{2}+\cdots+\frac{(n_h-1)(n_h-2)}{2}+h$$

ossia:

$$\left.\begin{aligned} a \leqq \frac{1}{2}(n_1+n_2+\cdots+n_h-1)(n_1+n_2+\cdots+n_h-2)+ \\ +2h-n_1 n_2-n_1 n_3-\cdots-n_{h-1} n_h-1 \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

ove *il segno = figura solo se ogni C^{n_i} ha numero massimo di circuiti.*

Per la (6) [num. 25], da (31) segue:

$$a' \leqq \frac{1}{2}(n_1+n_2+\cdots+n_h-1)(n_1+n_2+\cdots+n_h-2)+1-Y, \tag{32}$$

posto:

$$Y=(n_1 n_2+n_1 n_3+\cdots+n_{h-1} n_h-k)-2(d-1), \tag{33}$$

(*) Harnack, loc. cit.

coll'avvertenza che *in* (32) *figura il segno* $=$ *solo se ciò avviene così in* (6) *come in* (31).

Poichè sistemi S_i appartenenti a sistemi Σ_j diversi non hanno intersezioni comuni (num. 18), così il numero delle k_{sq} nulle è $\geq \frac{d(d-1)}{2}$. D'altra parte, se è $k_{sq}=0$, è $n_s n_q \geq 2$ perchè pari; ossia l'annullarsi di una k_{sq} porta alla differenza $n_1 n_2 + \cdots + n_{h-1} n_h - k$ il contributo di due unità almeno. Perciò è:

$$n_1 n_2 + n_1 n_3 + \cdots + n_{h-1} n_h - k \geq d(d-1) \tag{34}$$

ove *per* $d > 1$ *il segno* $=$ *figura soltanto se ogni* Σ_j *consta di un solo* S_i $(d=h)$ *e se inoltre ad ogni* $k_{sq}=0$ *corrisponde* $n_s n_q = 2$.

Da (33) e (34) si deduce

$$Y \geq (d-2)(d-1)$$

onde:

$$Y \geq 0 \tag{35}$$

ove *il segno* $=$ *figura solo se ciò avviene in* (34) *ed inoltre* d *assuma uno dei valori* 2, 1.

44. Condizioni necessarie perchè la curva trasformata sia del tipo richiesto sono ora *l'annullarsi di* Y *e la comparsa del segno* $=$ *in* (32). Tali condizioni risultano pure sufficienti, quando si aggiunga la possibilità di tradurre algebricamente la relativa « piccola variazione » topologica.

Si supponga $d=2$; da precedenti osservazioni si deduce: $h=2$, $n_1 n_2 = 2$, onde $n_1 = 2$, $n_2 = 1$. Si perviene così al *sistema di una conica e di una retta che non si tagliano.* Poichè una « piccola variazione » qualunque del sistema produce una cubica con due circuiti (numero massimo) così, per questo primo caso, le condizioni risultano sufficienti.

Si supponga $d=1$; perchè sia $Y=0$ occorre che sia

$$k = n_1 n_2 + n_1 n_3 + \cdots + n_{h-1} n_h,$$

cioè che *le mutue intersezioni delle* C^{n_i} *siano tutte reali.* Sussiste dunque la $k_{sq} \neq 0$ per ogni coppia di indici. Perchè in (32) valga il segno $=$, deve esso valere in (31) [cioè *le singole* C^{n_i} *debbono avere il massimo numero di circuiti*] ed anche in (6) [cioè *deve presentarsi uno dei casi indicati al num.* 27 *in fine* (cfr. num.[i] 14, 16, 17), coll'avvertenza che *nell'ultimo di essi dalle* $n_1 n_2 = k_{12} = 1$, $n_1 n_3 = k_{13} = 1$ *segue* $n_1 = n_2 = n_3 = 1$]. In tali casi la « piccola variazione » è algebricamente attuabile (§ 9 e § 11 al num. 42), onde ancora le condizioni risultano sufficienti.

Concludendo:

Condizione necessaria e sufficiente perchè la «piccola variazione» di una curva spezzata (nel senso del § 11) *produca una curva dotata del massimo numero di circuiti compatibile coll'ordine è che si verifichi uno dei seguenti casi:*

A) *La curva si spezza in una conica e in una retta non secantisi; la «piccola variazione» è arbitraria.*

B) *La curva si spezza in due curve* $C^{n_1} C^{n_2}$ *provvedute del massimo numero di circuiti compatibile coi relativi ordini, aventi le intersezioni tutte reali (e distinte) raccolte su due circuiti* $\gamma_1 \gamma_2$ *rispettivamente di* $C'^{1} C^{n_2}$ *e su questi (per opportuna scelta dei sensi) ugualmente ordinate. La «piccola variazione» proviene dall'attribuire il segno* $+$ *a tutte le intersezioni, secondo il 1.° criterio* (num. 9) [*in relazione alla detta scelta dei sensi*].

C) *La curva si spezza in tre* $C^{n_1} C^{n_2} C^{n_3}$ *provvedute del massimo numero di circuiti compatibile coi relativi ordini, aventi le mutue intersezioni tutte reali (distinte), collocate su tre circuiti* $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ *rispettivamente di* $C^{n_1} C^{n_2} C^{n_3}$, *in modo che le intersezioni appartenenti a* γ_i *si possano pensare ugualmente ordinate su di esso e sul circuito risultante dalla riunione di due «segmenti» di* $\gamma_j \gamma_l$ *cogli estremi in comune* ($i, j, l = 1, 2, 3$). *I segmenti dei circuiti* $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ *son collegati in* $k - 3$ *coppie e in due «triangoli»; se i sensi su* $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ *si scelgono in modo che un «triangolo» (quindi anche l'altro) sia percorso con continuità, la «piccola variazione» proviene dall'attribuire il segno — a tutte le intersezioni, secondo il 1.° criterio.*

D) *La curva si spezza in quattro* $C^{n_1} C^{n_2} C^{n_3} C^{n_4}$ *provvedute del massimo numero di circuiti compatibile coi relativi ordini, aventi le mutue intersezioni tutte reali (distinte), collocate su quattro circuiti* $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$ *rispettivamente di* $C^{n_1} C^{n_2} C^{n_3} C^{n_4}$, *in modo che le intersezioni appartenenti a* γ_i *(per opportuna scelta dei sensi) siano ugualmente ordinate su di esso e sul contorno di un «triangolo» avente per lati segmenti rispettivamente di* $\gamma_j \gamma_l \gamma_m$ ($i, j, l, m = 1, 2, 3, 4$). *La «piccola variazione» proviene dall'attribuire il segno — a tutte le intersezioni secondo il 1.° criterio (in relazione alla detta scelta dei sensi).*

E) *La curva si spezza in tre rette uscenti da un punto O, nel quale si attua un'operazione di tipo V* (§ 6) (*).

(*) I casi *A*) ed *E*) sono ovvii. Del caso *B*) forniscono esempi i metodi di Harnack, di Hilbert, della cubica ausiliare, della quartica ausiliare, di moltiplicazione mediante generatrici bifronti. Per i primi due metodi vedansi i lavori citati nella prefazione; per i rimanenti

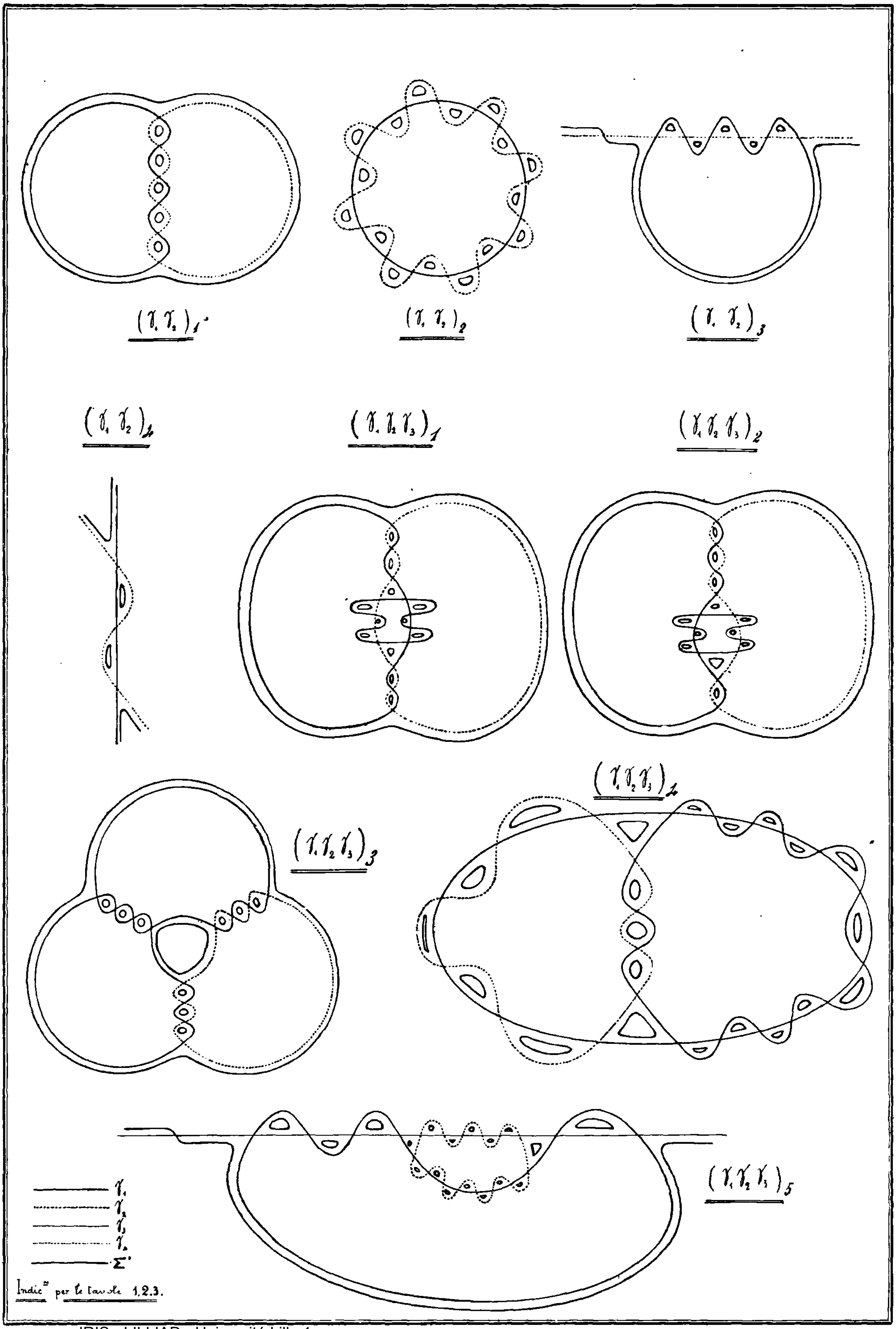
Come corollario si deduce *l'impossibilità di generare curve col massimo numero di circuiti mediante curve spezzate in cinque o più* C^{n_i} (*).

---

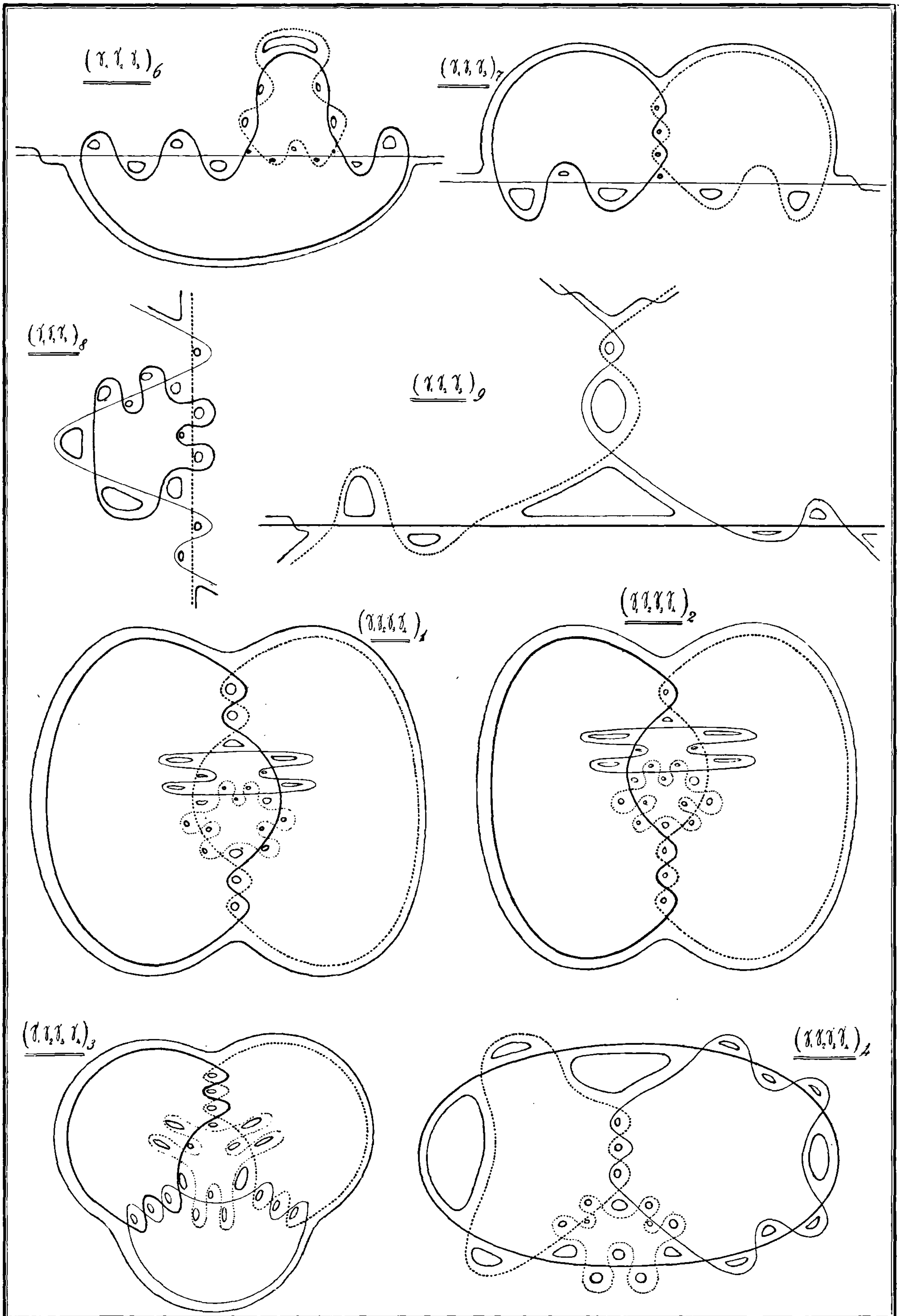
vedasi la mia Nota: *Sulla generazione delle curve piane di genere p dotate di* $p+1$ *circuiti* (cit.), ove le condizioni del caso *B*) sono dimostrate sufficienti coll'inclusione di una condizione superflua riflettente la projettabilità al finito dei segmenti sui quali sono ordinate le intersezioni. Esempî del caso *C*) sono forniti da una generatrice a circuito bifronte e da due rette *secanti* le rispettive fronti; ed anche da una generatrice a circuito bifronte, dalla bifronte prossima e dalla curva dedotta per duplicazione (Nota cit.; num. 6). Un esempio del caso *D*) è dato da una generatrice a circuito trifronte e da tre rette secanti le rispettive fronti (Nota cit.; num. 5). Ulteriori esempî, specialmente del caso *B*), saranno oggetto di prossima pubblicazione.

(*) Sul campo di validità per le conclusioni raggiunte osservo quanto segue. Le restrizioni poste sono: 1.° la $g=0$ non ha punti multipli nelle mutue intersezioni reali delle C^{n_i}; 2.° le C^{n_i} non hanno mutui contatti reali; 3.° le C^{n_i} non hanno punti multipli reali. La prima restrizione non influisce sul risultato; infatti l'ipotesi contraria attribuirebbe alla curva trasformata punti multipli, il che non avviene se essa possiede il massimo numero di circuiti compatibile coll'ordine. È presumibile che anche la seconda restrizione non abbia valore sostanziale, se si riflette alle conseguenze prodotte dal sostituire ai contatti convenienti intersezioni. Ad *A*) si dovrebbe però aggregare (come caso limite) l'opportuna «piccola variazione» della curva che si spezza in una conica ed in una tangente di questa. La terza restrizione è invece essenziale.

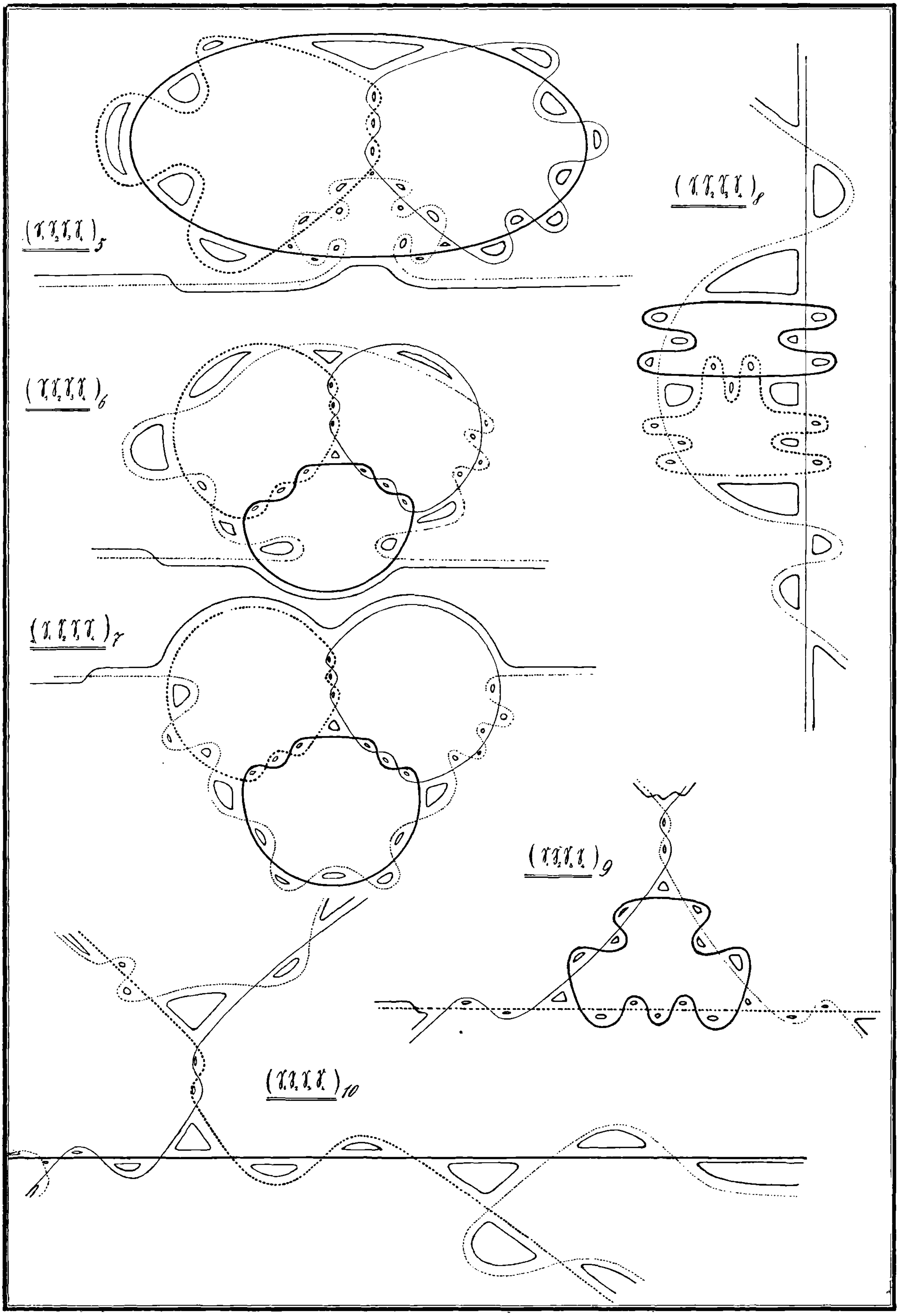
Pavia, 9 Aprile 1913.



$(\gamma_1\gamma_2)_1$
$(\gamma_1\gamma_2)_2$
$(\gamma_1\gamma_2)_3$
$(\gamma_1\gamma_2)_4$
$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)_1$
$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)_2$
$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)_3$
$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)_4$
$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)_5$
γ_1
γ_2
γ_3
γ_4
Σ'
Indic.ni per le tavole 1.2.3.



$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)_6$
$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)_7$
$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)_8$
$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)_9$
$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)_1$
$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)_2$
$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)_3$
$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)_4$



$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)_5$
$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)_6$
$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)_7$
$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)_8$
$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)_9$
$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)_{10}$

Sul Teorema di Kirchhoff traducente il Principio di Huyghens.

(*Di* Gian Antonio Maggi, *a Pisa.*)

Nella serie delle dimostrazioni del Teorema di Kirchhoff traducente il Principio di Huyghens, comparse dopo la dimostrazione originaria di Kirchhoff (*), collo scopo di rimovere alcune obbiezioni a cui questa può dar luogo, credo che, in ordine di precedenza, tenga il primo posto quella che io ne ho dato nella mia Memoria: *Sulla propagazione libera e perturbata delle onde luminose, in un mezzo isotropo,* pubblicata in questi *Annali* (**). Avevo avuto, non molto tempo prima, la fortuna di seguire le lezioni di Kirchhoff, all'Università di Berlino, e mi ero così trovato in condizione privilegiata, per portare la mia attenzione su quel risultato di primaria importanza, che il presente assetto della teoria del campo elettro-magnetico ha recentemente arricchito di nuove applicazioni. Mi permetto di domandare un'altra volta la cortese ospitalità degli *Annali di Matematica,* per poche pagine, dedicate a quella più semplice esposizione che trovo ora di farne. Tanto più che ho ragione di supporre che la forma del discorso ch'io ho tenuto nel suddetto lavoro, per connettere in un particolar modo la soluzione colla posizione del problema, abbia alquanto nuociuto alla sua perspicuità. Poichè il concetto informatore mi sembra meritevole di essere rilevato, per la sua semplicità e per qualche altra applicazione, di cui è, per avventura, suscettibile. E intanto si presta ad una nuova deduzione del Teorema di Green, il quale da Kirchhoff, da Beltrami e da altri è preso per fondamento della propria dimostrazione.

(*) *Zur Theorie der Lichtsstrahlen.* Sitzber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin, 1882. Gesammelte Werke, Nachtrag, pag. 22.

(**) Serie 2.ª, Tomo XVI.

§ 1. Sia

$$\varphi = \varphi(x, y, z, t)$$

una soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 \varphi, \tag{1}$$

monodroma, continua e finita, unitamente colle sue derivate prime e seconde (*), per ogni valore di t, e in un campo finito, τ, di cui (x, y, z) rappresenta il punto generico, limitato da un contorno, generalmente regolare, σ, del quale n rappresenta la normale volta verso l'interno.

Rappresentando, per un momento, con x', y', z' le coordinate del punto generico del campo considerato, e con Δ'_2 il Δ_2 formato con x', y', z', sarà identicamente, per (1),

$$\frac{\partial^2 \varphi(x', y', z', t)}{\partial t^2} = a^2 \Delta'_2 \varphi(x', y', z', t). \tag{2}$$

Indichino ora x'', y'', z'' parimente le coordinate del suddetto punto generico del nostro campo, e x_0, y_0, z_0 le coordinate di un punto esterno a questo campo. Poniamo

$$r_0 = \sqrt{(x'' - x_0)^2 + (y'' - y_0)^2 + (z'' - z_0)^2}.$$

La (2), restando inteso che Δ'_2 si applica esclusivamente alle x', y', z', fornisce

$$\frac{\partial^2 \dfrac{\varphi\left(x', y', z', t - \dfrac{r_0}{a}\right)}{r_0}}{\partial t^2} = a^2 \Delta'_2 \frac{\varphi\left(x', y', z', t - \dfrac{r_0}{a}\right)}{r_0}. \tag{3}$$

D'altra parte, rappresentando con Δ''_2 il Δ_2 formato colle x'', y'', z'', e inteso che si applichi esclusivamente ad esse, si ha, per un ben noto risultato,

$$\frac{\partial^2 \dfrac{\varphi\left(x', y', z', t - \dfrac{r_0}{a}\right)}{r_0}}{\partial t^2} = a^2 \Delta''_2 \frac{\varphi\left(x', y', z', t - \dfrac{r_0}{a}\right)}{r_0}. \tag{4}$$

(*) Per le derivate seconde, è sufficiente che siano finite e integrabili, e si verifichi $\dfrac{\partial^2 \varphi(x, y, z, t)}{\partial x \partial t} = \dfrac{\partial^2 \varphi(x, y, z, t)}{\partial t \partial x}$.

Si conclude, dal confronto di (3) con (4),

$$\Delta'_2 \frac{\varphi\left(x', y', z', t - \frac{r_0}{a}\right)}{r_0} = \Delta''_2 \frac{\varphi\left(x', y', z', t - \frac{r_0}{a}\right)}{r_0}. \tag{5}$$

Ora, col significato di coordinate del punto generico del campo τ, x, y, z rappresentano egualmente x', y', z' e x'', y'', z''; per cui si ha manifestamente

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial x''}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial y''}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial z''}.$$

Ne viene, per (5),

$$\Delta'_2 \frac{\varphi\left(x', y', z', t - \frac{r_0}{a}\right)}{r_0} - \Delta''_2 \frac{\varphi\left(x', y', z', t - \frac{r_0}{a}\right)}{r_0} =$$

$$= \Sigma \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \dfrac{\varphi\left(x', y', z', t - \frac{r_0}{a}\right)}{r_0}}{\partial x'} - \frac{\partial \dfrac{\varphi\left(x', y', z', t - \frac{r_0}{a}\right)}{r_0}}{\partial x''}\right] = 0,$$

dove i termini sottintesi in Σ si otterranno dallo scritto, cambiando x in y e z. E, stando questa eguaglianza, per ogni punto del campo τ:

$$\int_\tau \Sigma \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \dfrac{\varphi\left(x', y', z', t - \frac{r_0}{a}\right)}{r_0}}{\partial x'} - \frac{\partial \dfrac{\varphi\left(x', y', z', t - \frac{r_0}{a}\right)}{r_0}}{\partial x''}\right] d\tau = 0.$$

O ancora, applicando un notissimo teorema, per la cui validità, nell'ipotesi che il punto (x_0, y_0, z_0) sia esterno al campo, si verificano tutte le condizioni volute:

$$\int_\sigma \Sigma \left[\frac{\partial \dfrac{\varphi\left(x', y', z', t - \frac{r_0}{a}\right)}{r_0}}{\partial x'} - \frac{\partial \dfrac{\varphi\left(x', y', z', t - \frac{r_0}{a}\right)}{r_0}}{\partial x''}\right] \cos(n x)\, d\sigma = 0,$$

che si può scrivere

$$\int_\sigma \left\{ \Sigma \frac{\partial \dfrac{\varphi\left(x', y', z', t - \dfrac{r_0}{a}\right)}{r_0}}{d x''} \cos(n x) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{r_0} \Sigma \frac{\partial \varphi\left(x', y', z', t - \dfrac{r_0}{a}\right)}{\partial x'} \cos(n x) \right\} d\sigma = 0. \tag{6}$$

Allora non resta più che da porre

$$\frac{\partial \varphi(x, y, z, t)}{\partial n} = f(t),$$

$$\Sigma \frac{\partial \dfrac{\varphi\left(x', y', z', t - \dfrac{r_0}{a}\right)}{r_0}}{\partial x''} \cos(n x) = \left(\frac{\partial \dfrac{\varphi\left(t - \dfrac{r_0}{a}\right)}{r_0}}{\partial n}\right),$$

e da intendere oramai

$$r_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

con che $\left(\dfrac{\partial \dfrac{\varphi\left(t - \dfrac{r_0}{a}\right)}{r_0}}{\partial n}\right)$ rappresenta la derivata di $\dfrac{\varphi\left(x, y, z, t - \dfrac{r_0}{a}\right)}{r_0}$ rispetto ad n, considerando x, y, z, come variabili, *solo in quanto entrano in* r_0, per porre (6) sotto la forma

$$\int_\sigma \left[\left(\frac{\partial \dfrac{\varphi\left(t - \dfrac{r_0}{a}\right)}{r_0}}{\partial n}\right) - \frac{f\left(t - \dfrac{r_0}{a}\right)}{r_0} \right] d\sigma = 0. \tag{7}$$

Questo è il Teorema di Kirchhoff, pel punto esterno al campo, dal quale, col consueto procedimento, si deduce, per (x_0, y_0, z_0) interno al campo,

$$4\pi \varphi_0(t) = \int_\sigma \left[\left(\frac{\partial \dfrac{\varphi\left(t - \dfrac{r_0}{a}\right)}{r_0}}{\partial n}\right) - \frac{f\left(t - \dfrac{r_0}{a}\right)}{r_0} \right] d\sigma. \tag{8}$$

§ 2. È ovvia l'accennata applicazione dello stesso concetto alla deduzione del Teorema di GREEN.

Sia, in primo luogo,

$$\varphi = \varphi(x, y, z)$$

una soluzione dell'equazione

$$\Delta_2 \varphi = 0,$$

monodroma, continua e finita, che ammetta derivate prime parimente monodrome, continue e finite, e derivate seconde finite e integrabili, nel suddetto campo. Conserviamo ai simboli precedentemente adoperati lo stesso significato.

Si ha, senz'altro,

$$\Delta'_2 \frac{\varphi(x', y', z')}{r_0} - \Delta''_2 \frac{\varphi(x', y', z')}{r_0} = 0.$$

D'altra parte,

$$\Delta_2 \frac{\varphi(x', y', z')}{r_0} - \Delta''_2 \frac{\varphi(x', y', z')}{r_0} =$$
$$\sum \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \dfrac{\varphi(x', y', z')}{r_0}}{\partial x'} - \frac{\partial \dfrac{\varphi(x', y', z')}{r_0}}{\partial x''}\right].$$

Quindi, nell'ipotesi di (x_0, y_0, z_0) esterno al campo, procedendo come nel caso precedente,

$$\left.\begin{aligned} &\int_\sigma \sum \left[\frac{\partial \dfrac{\varphi(x', y', z')}{r_0}}{\partial x''} - \frac{\partial \dfrac{\varphi(x', y', z')}{r_0}}{\partial x'}\right] \cos(n\,x)\, d\sigma = \\ &\qquad = \int_\sigma \left(\varphi \frac{\partial \dfrac{1}{r_0}}{\partial n} - \frac{1}{r_0}\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) d\sigma = 0. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Si sa come, prescritte per φ le opportune condizioni asintotiche, questa formola si estenda al campo infinito, e come se ne ricava, nella ipotesi di

(x_0, y_0, z_0) interno al campo (finito o infinito),

$$4\pi\varphi_0 = \int_\sigma \left(\varphi \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial n} - \frac{1}{r_0} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\sigma, \tag{10}$$

che è il Teorema di Green, per le funzioni armoniche.

§ 3. Chi osservasse che, col procedimento ordinario, la (10) scaturisce dalla formola più generale

$$4\pi\varphi_0 = \int_\sigma \left(\varphi \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial n} - \frac{1}{r_0} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\sigma - \int_\tau \frac{\psi \, d\tau}{r_0}, \tag{11}$$

relativa all'equazione

$$\Delta_2 \varphi = \psi,$$

dove $\psi = \psi(x, y, z)$ rappresenta una funzione delle x, y, z, assegnata nel campo τ, pur si riconosce che la (11) si ricava, alla sua volta, facilmente dalla (10) (ammesso verificato con ψ il teorema di Poisson).

Poniamo perciò

$$\varphi^* = -\frac{1}{4\pi} \int_\tau \frac{\psi(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\tau, \qquad r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}.$$

$\varphi^* = \varphi^*(x, y, z)$ (funzione potenziale di un corpo) è, *in tutto lo spazio*, funzione monodroma, continua e finita, unitamente colle sue derivate prime, possiede le accennate proprietà asintotiche, ammette derivate seconde finite e integrabili, e soddisfa

$$\Delta_2 \varphi^* = \begin{cases} \psi \\ 0 \end{cases},$$

dove sta ψ o 0, secondo che il punto (x, y, z) è interno o no al campo τ.

Ne viene, nell'ipotesi di (x_0, y_0, z_0) interno al campo τ,

$$\Delta_2 (\varphi - \varphi^*) = 0,$$

e per (10),

$$4\pi(\varphi_0 - \varphi^*_0) = \int_\sigma \left(\varphi \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial n} - \frac{1}{r_0} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\sigma - \int_\sigma \left(\varphi^* \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial n} - \frac{1}{r_0} \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} \right) d\sigma.$$

Ma, per le accennate proprietà di φ^*, il valore del secondo termine del secondo membro non potrebbe differire che per il segno dal valore che compete allo stesso integrale, applicato al campo complementare del supposto; e questo valore, per (10), è zero. Si ritrova quindi la formola (11).

§ 4. Infine, con un procedimento simile a quello tenuto nel precedente paragrafo, per dedurre la (11) dalla (10), proposta l'equazione più generale

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2 \varphi = \psi,$$

valendosi del risultato che, posto.

$$\varphi^* = \frac{1}{4\pi a^2} \int_\tau \frac{\psi\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a}\right)}{r} d\tau, \quad r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2},$$

si ha

$$\frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial t^2} - \Delta_2 \varphi^* = \left\{ \begin{matrix} \psi \\ 0 \end{matrix} \right. ,$$

dove sta ψ o 0, secondo che il punto (x, y, z) è interno o no al campo τ, si deduce da (8) la formola più generale, relativa all'ipotesi di (x_0, y_0, z_0) interno al campo τ,

$$4\pi \varphi_0(t) = \int_\sigma \left[\left(\frac{\partial \frac{\varphi\left(t - \frac{r_0}{a}\right)}{r_0}}{\partial n} \right) - \frac{f\left(t - \frac{r_0}{a}\right)}{r_0} \right] d\sigma + \frac{1}{a^2} \int_\tau \frac{\psi\left(t - \frac{r_0}{a}\right)}{r_0} d\tau.$$

Pisa, Luglio, 1913.

Bestimmung der Koeffizienten in einer Funktionalgleichung nebst einer Anwendung.

(*Von* Michael Wilensky *aus Krementschug* [*Russland*].)

Es sei eine Reihe von Funktionen einer Variabeln x

$$F_0,\ F_1,\ F_2 \ldots,\ F_n$$

derart gegeben, dass die *Funktionalgleichung* besteht

$$\left.\begin{aligned} F_{n+1} - F_{n-1} &= 2\,D_x F_n\,; \quad n > 0 \\ F_1 \qquad &= \quad D_x F_0 \qquad n = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Löst man diese Gleichung nach F_{n+1} auf, setzt für n successive die Werte 0, 1, 2..., n ein und substituiert für die F_r, auf der rechten Seite der Gleichung, ihre Werte in $D_x^\lambda F_0$, so erhält man eine Rekursionsformel, vermittelst welcher jede F_n durch F_0 und ihre Derivierten verschiedener Ordnung sich ausdrücken lässt, so z. B.

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= D_x F_0 \\ F_2 &= 2\,D_x^2 F_0 + F_0 \\ F_3 &= 4\,D_x^3 F_0 + 3\,D_x F_0 \\ F_4 &= 8\,D_x^4 F_0 + 8\,D_x^2 F_0 + F_0\,. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Es ist evident, dass allgemein gilt

$$F_n = \sum_{\lambda=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} A_n^\lambda\, D_x^{n-2\lambda} F_0\,. \tag{3}$$

Auch ist ersichtlich, aus den Gleichungen (2), dass

$$A_n^0 = 2^{n-1}\,; \quad A_{2n}^n = 1\,; \quad A_{2n+1}^n = (2\,n + 1).$$

Die Richtigkeit dieser Behauptungen lässt sich leicht induktorisch nachweisen.

Um die A_n^λ in (3) allgemein zu bestimmen, beachte man, dass ihre Werte von der Beschaffenheit von $F_0(x)$ unabhängig sind und dass also eine passende Spezialisierung von F_0 zu ihrer Bestimmung dienen kann.

Als solche eignet sich

$$F_0(x) = e^{x \sin z}, \quad \text{wo} \quad \sin z = \sin.\ \text{hyperb.}\ z. \tag{4}$$

Leitet man die F_n nach der Vorschrift der Gleichung (1) ab, so findet man: $F_1(x) = e^{x\sin z} \sin z$; $F_2(x) = e^{x \sin z} \cos 2z$.

Durch Induktion findet man allgemein

$$\left.\begin{aligned} F_{2n}(x) &= e^{x\sin z} \cos 2nz \\ F_{2n+1}(x) &= e^{x \sin z} \sin(2n+1) z. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Ferner ist

$$\frac{\partial^n F_0(x)}{\partial x^n} = e^{x \sin z} \sin^n z. \tag{6}$$

Wendet man auf dieser Funktion die Gleichung (3) an und dividiert beiderseits durch $e^{x\sin z}$, so ergeben sich die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \cos 2nz &= \sum_{\lambda=0}^{n} A_{2n}^{n-\lambda} \sin^{2\lambda} z \\ \sin(2n+1)z &= \sum_{\lambda=0}^{n} A_{2n+1}^{n-\lambda} \sin^{2\lambda+1} z. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Differenziert man letztere 2 Gleichungen nach z und dividiert beiderseits durch n^2, so erhält man für die erste Gleichung

$$\cos 2nz = \frac{A_{2n}^{n-1}}{2n^2} + \sum_{\lambda=1}^{n-1} \frac{A_{2n}^{n-\lambda-1}(\lambda+1)(2\lambda+1) + A_{2n}^{n-\lambda} \cdot 2\lambda^2}{2n^2} \sin^{2\lambda} z + A_{2n}^0 \sin^{2n} z.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der ursprünglichen, so folgt sofort, dass $A_{2n}^{n-1} = 2n^2$ und dass für jedes $\lambda < n$ die Gleichung gilt

$$A_{2n}^{n-\lambda-1} = \frac{2(n^2 - \lambda^2)}{(\lambda+1)(2\lambda+1)} A_{2n}^{n-\lambda}.$$

Setzt man für λ successive 0, 1, 2..., λ, so findet man

$$A_{2n}^{n-\lambda} = 2^{2\lambda} \frac{n(n-1)\dots(n-\lambda+1)\,n(n+1)\dots(n+\lambda-1)}{(2\lambda)!} =$$

$$= 2^{2\lambda} \frac{n!\,(n+\lambda-1)!}{(2\lambda)!\,(n-\lambda)!\,(n-1)!},$$

oder

$$A_{2n}^{n-\lambda} = 2^{2\lambda} \binom{n+\lambda}{n-\lambda} \frac{n}{n+\lambda}. \tag{8}$$

Analog findet man für die 2-te Reihe

$$\sin(2n+1)z = \frac{6A_{2n+1}^{n-1} + A_{2n+1}^{n}}{(2n+1)^2} \sin z +$$
$$+ \sum_{\lambda=1}^{n-1} \frac{(2\lambda+1)^2 A_{2n+1}^{n-\lambda} + (2\lambda+2)(2\lambda+3) A_{2n+1}^{n-\lambda-1}}{(2n+1)^2} \sin^{2\lambda+1} z + A_{2n+1}^{0} \sin^{2n+1} z.$$

Es ergiebt sich

$$A_{2n+1}^{n-\lambda-1} = \frac{2(n-\lambda)(n+\lambda+1)}{(\lambda+1)(2\lambda+3)} A_{2n+1}^{n-\lambda}$$

und beim Einsetzen für λ die Werte 0, 1, 2..., λ, allgemein

$$A_{2n+1}^{n-\lambda} = (2n+1)\, 2^{\lambda} \frac{n(n+1)\dots(n+\lambda)(n-1)(n-2)\dots(n-\lambda+1)}{\lambda!\, 1.3.5\dots(2\lambda+1)} =$$
$$= (2n+1)\, 2^{2\lambda} \frac{(n+\lambda)!\,(n-1)!}{(n-1)!\,(n-\lambda)!\,(2\lambda+1)!}$$

oder

$$A_{2n+1}^{n-\lambda} = 2^{2\lambda} \binom{n+\lambda+1}{n-\lambda} \frac{2n+1}{n+\lambda+1}. \tag{9}$$

Setzt man in den Gleichungen (8) und (9) $\lambda = (n-\lambda)$, so ergiebt sich allgemein

$$A_{n}^{\lambda} = 2^{n-2\lambda-1} \binom{n-\lambda}{\lambda} \frac{n}{n-\lambda}. \tag{10}$$

Erinnert man sich der Formel

$$(2\sin z)^{2n} = \sum_{\lambda=0}^{n} (-1)^{n-\lambda} \varepsilon_\lambda \binom{2n}{n-\lambda} \cos 2\lambda z$$
$$(2\sin z)^{2n+1} = 2\sum_{\lambda=0}^{n} (-1)^{n-\lambda} \binom{2n+1}{n-\lambda} \sin(2\lambda+1)z$$

(wo ε_λ, nach dem Vorgange C. NEUMANNS, eine Konstante $= 2$ bedeutet, nur $\varepsilon_0 = 1$), so lässt sich die Reihe (3) auch umkehren, nämlich

$$D_x^n F_0(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{\lambda=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^\lambda \varepsilon_{n-2\lambda} \binom{n}{\lambda} F_{n-2\lambda}(x). \tag{11}$$

Man kann aber die Gleichung (1) auch folgenderweise schreiben

$$\left.\begin{aligned} F_{2n} &= F_0 + 2\,D_x \sum_{\lambda=0}^{n-1} F_{2\lambda+1} \\ F_{2n+1} &= D_x \sum_{\lambda=0}^{n} \varepsilon_\lambda\, F_{2\lambda}\,. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Giebt es eine Konstante a für welche $F_\lambda(a) = 0$ oder einer anderen Konstante in Bezug auf x für jedes λ, so ist

$$\left.\begin{aligned} \int_a^x \left\{ F_{2n}(x) - F_0(x) \right\} d\,x &= 2 \sum_{\lambda=0}^{n-1} F_{2\lambda+1} + C \\ \int_a^x F_{2n+1}(x)\, d\,x &= \sum_{\lambda=0}^{n} \varepsilon_\lambda\, F_{2\lambda} + C. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

In unserem Falle z. B. ist

$$\int_a^x e^{x\sin z} (\cos 2\,n\,z - 1)\, d\,x = 2 \sum_{\lambda=0}^{n-1} e^{x\sin z} \sin(2\,\lambda + 1)\,z - \frac{\cos 2\,n\,z - 1}{\sin z}$$

$$\sin(2\,n+1)\,z \int_a^x e^{x\sin z}\, d\,x = \sum_{\lambda=0}^{n} \varepsilon_\lambda\, e^{x\sin z} \cos 2\,\lambda\,z - \frac{\sin(2\,n+1)\,z}{\sin z}\,.$$

Integriert man diese 2 Integrale nach den gewöhnlichen Methoden und vergleicht die Resultate, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} 2 \sum_{\lambda=0}^{n-1} \sin(2\,\lambda+1)\,z &= \frac{\cos 2\,n\,z - 1}{\sin z} \\ \sum_{\lambda=0}^{n} \varepsilon_\lambda \cos 2\,\lambda\,z &= \frac{\sin(2\,n+1)\,z}{\sin z}\,, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Relationen, die sonst auf ganz anderem Wege abgeleitet zu sein pflegen.

Wollte man die Gleichungen (14) auf die Kreisfunktionen anwenden, ohne vom Imaginären Gebrauch zu machen, so hätte man wählen können $F_0(x) = e^{-x\sin\varphi}$ wo $\sin\varphi$ den trigometrischen sin bedeutet mit der Funktionalgleichung

$$\left.\begin{aligned} F_{n-1} - F_{n+1} &= 2\,D_x\,F_n \\ F_1 &= -\,D_x\,F_0\,. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Es sind dann

$$\left.\begin{aligned} F_{2n}(x) &= e^{-x\sin\varphi} \cos 2\,n\,\varphi \\ F_{2n+1}(x) &= e^{-x\sin\varphi} \sin(2\,n+1)\,\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Die ganze Beweisführung bleibt wie früher. Die Gleichungen (3), (11) und (14) gehen entsprechend über in

$$F_n(x) = (-1)^n \sum_{\lambda=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} A_n^\lambda\, D_x^{n-2\lambda} F_0(x) \tag{17}$$

$$D_x^n F_0(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{\lambda=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^{n-\lambda} \varepsilon_{n-2\lambda} \binom{n}{\lambda} F_{n-2\lambda}(x) \tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned} 2\sum_{\lambda=0}^{n-1} \sin(2\lambda+1)\varphi &= \frac{1-\cos 2n\varphi}{\sin\varphi} \\ \sum_{\lambda=0}^{n} \varepsilon_\lambda \cos 2\lambda\varphi &= \frac{\sin(2n+1)\varphi}{\sin\varphi}\,. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Nun folgt die sogenannte Bessel'sche Funktion

$$\overset{n}{\daleth}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\varphi - n\varphi)\,d\varphi$$

für n ganz der Gleichung (15), wie unmittelbar aus ihrer Definition ersichtlich ist.

Von dieser Tatsache machen wir Gebrauch um vermittelst der Gleichung (17) die von Carl Neumann (in seiner: *Theorie der Besselschen Funktionen*, 1867) eingeführte Funktion $\overset{n}{O}(x)$ auf einfache und elementare Weise abzuleiten und ihren Wert zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke gehe man aus von der *Schlömilch'schen Gleichung* (*Z. f. Math. und Physik*, II, p. 157)

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \overset{0}{\daleth}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \overset{n}{\daleth}(x)\left(t^n + (-1)^n t^{-n}\right). \tag{20}$$

Setzt man $t = e^z$, also $\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) = \text{sin. hyp. } z$, so geht die Gleichung über in

$$e^{x\sin z} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \overset{2n}{\daleth}(x)\cos 2nz + 2\sum_{n=0}^{\infty} \overset{2n+1}{\daleth}(x)\sin(2n+1)z. \tag{20 a}$$

Differenziert man diese Gleichung wiederholt nach $\sin z$, indem man auf der rechten Seite statt $\cos 2nz$ und $\sin(2n+1)z$ ihre Werte aus den Gleichungen (7) einsetzt und setzt nach der Differentiation jedes Mal $z = 0$, so erhält man auf der linken Seite Potenzen von x; auf der rechten Seite aber liefert nur derjenige Posten einen Beitrag, deren Exponent nach der Differentiation der Null gleich wird; man erhält

$$x^{\nu} = \sum_{n=\nu}^{\infty} \varepsilon_n A_{2n-\nu}^{n-\nu}\, \nu!\, \overset{2n-\nu}{\sqsupset}(x). \tag{21}$$

Es möge beiläufig bemerkt werden, dass wenn man die letzte Gleichung ν Mal nach x differenziert, die Relation resultiert

$$1 = \sum_{n=\nu}^{\infty} \varepsilon_n A_{2n-\nu}^{n-\nu} D_x^{\nu} \overset{2n-\nu}{\sqsupset}(x) \tag{22}$$

von welcher die bekannte Gleichung

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \overset{2n}{\sqsupset}(x)$$

nur ein Spezialfall für $\nu = 0$ ist.

Kehren wir zur Gleichung (21) zurück, lassen ν von 0 bis ∞ laufen und dividieren sie beiderseits durch $y^{\nu+1}$, wobei $y > x$ vorausgesetzt wird, so ist die linke Seite der Gleichung nach dem binomischen Satze $= \dfrac{1}{y-x}$ und die Gleichung geht über in

$$\frac{1}{y-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon_n A_{2n-\nu}^{n-\nu} \frac{\nu!}{y^{\nu+1}} \overset{2n-\nu}{\sqsupset}(x).$$

Setzt man zuerst $n - \nu = \nu$ und hält n fest, nachher $n = n - \nu$ bei *festem* ν, so wird die obige Gleichung

$$\frac{1}{y-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \varepsilon_n A_n^{\nu} \frac{(n-2\nu)!}{y^{n-2\nu+1}} \overset{n}{\sqsupset}(x). \tag{23}$$

Bezeichnet man den Koeffizienten von $\overset{n}{\sqsupset}(x)$, welcher von x unabhängig ist mit $\overset{n}{O}(y)$, so resultiert die Neumannsche Gleichung

$$\frac{1}{y-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \overset{n}{O}(y) \overset{n}{\sqsupset}(x) \tag{24}$$

und es folgt zugleich, dass

$$\overset{n}{O}(y) = \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} A_n^\nu \frac{(n-2\nu)!}{y^{n-2\nu+1}}. \tag{25}$$

Man sieht sofort, dass $\overset{0}{O}(y) = \frac{1}{y}$ ist.

Nun ist $D_y^{n-2\nu}\left(\frac{1}{y}\right) = (-1)^n \frac{(n-2\nu)!}{y^{n-2\nu+1}}$; man kann also (25) schreiben

$$\overset{n}{O}(y) = (-1)^n \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} A_n^\nu D_y^{n-2\nu} \overset{0}{O}(y) \tag{26}$$

und daraus folgt mit Notwendigkeit, nach dem gesagten, dass

$$\left.\begin{aligned} \overset{n-1}{O} - \overset{n+1}{O} &= 2 D_y \overset{n}{O} \\ \overset{1}{O} &= - D_y \overset{0}{O}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Setzt man den Wert für A_n^ν aus (10) in (25) ein, so ergiebt sich

$$\overset{n}{O}(y) = \frac{n}{4} \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(n-\nu-1)!}{\nu!} \left(\frac{2}{y}\right)^{n+1-2\nu} \tag{28}$$

Nun ist

$$A_{2n}^\nu (2n-2\nu)! = \frac{\partial^{2n-2\nu} \cos 2nz}{\partial \sin z^{2n-2\nu}} \ (z=0);$$

$$A_{2n+1}^\nu (2n+1-2\nu)! = \frac{\partial^{2n-2\nu+1} \sin (2n+1) z}{\partial \sin z^{2n-2\nu+1}} \ (z=0)$$

(wie oben gesehen). Anderseits ist immer

$$\int_0^\infty e^{-yz} f(z)\, dz = \sum_{\lambda=0}^{n} \frac{f^{(\lambda)}(0)}{y^\lambda} = \sum_{\lambda=0}^{n} \frac{f^{(n-\lambda)}(0)}{y^{n-\lambda}} \tag{29}$$

wenn $f(z)$ eine ganze rationale Funktion von z ist.

Vergleicht man diesen Ausdruck mit (25), so ergiebt sich, dass

$$\left.\begin{aligned} \overset{2m}{O}(y) &= \int_0^\infty e^{-y\sin z} \cos 2mz \cos z\, dz \\ \overset{2m+1}{O}(y) &= \int_0^\infty e^{-y\sin z} \sin (2m+1) z \cos z\, dz \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

eine Integralform, wie sie GRAF und GUBLER in ihrer *Einleitung in die Theorie der B. F.* (II, p. 6) geben.

Setzt man $\sin z = z$ also $e^{\pm z} = \pm z + \sqrt{1+z^2}$

$$\cos 2mz = \frac{1}{2}\left\{(z+\sqrt{1+z^2})^{2m} + (z-\sqrt{1+z^2})^{2m}\right\}$$

$$\sin(2m+1)z = \frac{1}{2}\left\{(z+\sqrt{1+z^2})^{2m+1} + (z-\sqrt{1+z^2})^{2m+1}\right\}$$

dann lassen sich beide Integrale (30) zusammenfassen und man erhält, wenn man noch $yz = z$ setzt

$$\overset{n}{O}(y) = \frac{1}{2y^{n+1}}\int_0^{\infty} e^{-z}\left[(z+\sqrt{y^2+z^2})^n + (z-\sqrt{y^2+z^2})^n\right] dz \tag{31}$$

eine Integralform, die NEUMANN in seinem oben citierten Werke gegeben hat, jedoch ohne Beweis.

Diesem letzten Integrale kann man nach (29) eine *neue Definition* der Funktion $\overset{n}{O}(y)$ entnehmen nämlich

$$\overset{n}{O}(y) = \sum_{\lambda=0}^{n} \frac{\varphi^{(\lambda)}(z)}{2x^{n+1}} (z=0) \tag{32}$$

wobei

$$\varphi(z) = (z+\sqrt{y^2+z^2})^n + (z-\sqrt{y^2+z^2})^n .$$

Fängt die Reihe der gegebenen Funktionen mit $F_1(x)$ an:

$$F_1, \quad F_2 \ldots, \quad F_n$$

die derart miteinander verbunden sind, dass

$$\left.\begin{aligned} F_{n+1} - F_{n-1} &= 2D_x F_n \\ F_2 &= 2D_x F_1 . \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

So wähle man als Anfangsfunktion

$$F_1(x) = e^{x\sin z}\cos z ;$$

es sind dann

$$\left.\begin{aligned} F_{2n}(x) & \quad e^{x\sin z}\sin(2nz) \\ F_{2n+1}(x) &= e^{x\sin z}\cos(2n+1)z \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

$$D_x^{\nu} F_1(x) = e^{x\sin z}\sin^{\nu} z \cos z. \tag{35}$$

Es wird also die Gleichung bestehen

$$\left.\begin{aligned} \sin(2nz) &= \sum_{\lambda=0}^{n-1} B_{2n}^{n-\lambda-1} \sin^{2\lambda+1} z \cos z \\ \cos(2n+1)z &= \sum_{\lambda=0}^{n} B_{2n+1}^{n-\lambda} \sin^{2\lambda} z \cos z. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Um die Werte der B_n^λ zu ermitteln, braucht man nur die Gleichungen (7) nach z zu differenzieren; es ergiebt sich

$$B_{2n}^{n-\lambda-1} = A_{2n}^{n-\lambda-1} \frac{\lambda+1}{n} = 2^{2\lambda+1} \binom{n+\lambda}{n-\lambda-1} = 2^{2\lambda+1} \binom{n+\lambda}{n-\lambda} \frac{n-\lambda}{2\lambda+1} \tag{37}$$

$$B_{2n+1}^{n-\lambda} = A_{2n+1}^{n-\lambda} \frac{2\lambda+1}{2n+1} = 2^{2\lambda} \binom{n+\lambda}{n-\lambda} \tag{38}$$

oder allgemein

$$B_n^\lambda = 2^{n-2\lambda-1} \binom{n-\lambda-1}{\lambda} = 2^{n-2\lambda-1} \binom{n-\lambda}{\lambda} \frac{n-2\lambda}{n-\lambda}. \tag{39}$$

Will man also hier die $F_n(x)$ nach $D_x^\lambda F_1(x)$ entwickeln, so wird die Reihe lauten

$$F_n = \sum_{\lambda=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} B_n^\lambda D_x^{n-1-2\lambda} F_1 \tag{40}$$

und hieraus, wenn man wieder sich der Entwickelung von $\sin^\nu z$ nach Vielfachen von $\sin z$ und $\cos z$ bedient

$$D_x^n F_1(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{\lambda=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^\lambda \frac{n+1-2\lambda}{n+1-\lambda} \binom{n}{\lambda} F_{n+1-2\lambda}(x). \tag{41}$$

Hier wird sich Gleichung (12) folgenderweise gestalten

$$\left.\begin{aligned} F_{2n} &= 2 D_x \sum_{\lambda=0}^{n-1} F_{2\lambda+1} \\ F_{2n+1} &= F_1 + 2 \sum_{\lambda=1}^{n} D_x F_{2\lambda}. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Wendet man es an auf die Funktionen (34), multipliziert beiderseits mit dx, integriert zwischen den Grenzen 0 und x und vergleicht die so erhaltenen Ergebnisse mit denen der gewöhnlichen Integration, so erhält man

$$2\sum_{\lambda=0}^{n-1}\cos(2\lambda+1)z = \frac{\sin 2nz}{\sin z} \tag{43}$$

$$2\sum_{\lambda=1}^{n}\sin 2\lambda z = \frac{\cos(2n+1)z - \cos z}{\sin z}. \tag{44}$$

Soll die Gleichung (33) heissen

$$\left.\begin{aligned} F_{n-1} - F_{n+1} &= \quad 2D_x F_n \\ F_2 &= -2D_x F_1 \end{aligned}\right\}. \tag{45}$$

so braucht man nur die Gleichung (40) mit $(-1)^{n+1}$ (41) mit $(-1)^n$ zu multiplizieren; (43) und (44) gehen über, da dann $e^{-x\sin\varphi}\cos\varphi$ als Anfangsfunktion gewählt werden kann, in

$$2\sum_{\lambda=0}^{n-1}\cos(2\lambda+1)\varphi = \frac{\sin 2n\varphi}{\sin\varphi} \tag{46}$$

$$2\sum_{\lambda=1}^{n}\sin 2n\varphi = \frac{\cos\varphi - \cos(2n+1)\varphi}{\sin\varphi}. \tag{47}$$

Den Gleichung (45) genügen die von Ludwig Schläfli eingeführten Funktionen (*Math. Ann.*, III, p. 134)

$$\overset{n}{S}(x) = \int_1^\infty e^{-xs}\left(t^n - (-1)^n t^{-n}\right)\frac{dt}{t}; \quad s = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) \tag{48}$$

$$\overset{n}{T}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\sin(x\sin\varphi - n\varphi)\,d\varphi. \tag{49}$$

(Diese Definitionen sind dem oben citierten Werke von Graf und Gubler entnommen worden).

Es gelten also die Beziehungen, wenn man unter $\overset{n}{F}(x)$ $\overset{n}{S}(x)$ oder $\overset{n}{T}$ versteht

$$\overset{n}{F} = (-1)^{n-1}\sum_{\lambda=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} B_n^\lambda D_x^{n-1-2\lambda}\overset{1}{F} \tag{50}$$

$$D_x^n\overset{1}{F} = \frac{1}{2^n}\sum_{\lambda=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^{n-\lambda}\frac{n+1-2\lambda}{n+1-\lambda}\binom{n}{\lambda}\overset{n+1-2\lambda}{F} \tag{51}$$

Setzt man im Integrale für

$$\overset{n}{S}(x), \quad x\,s = z; \quad t = s + \sqrt{1+s^2} = \frac{z + \sqrt{x^2+z^2}}{x},$$

so geht es über in

$$\overset{n}{S}(x) = \int_0^\infty e^{-z} \frac{\left(z+\sqrt{x^2+z^2}\right)^n - \left(z-\sqrt{z^2+x^2}\right)^n}{x^n \sqrt{x^2+z^2}}\, d\,z.$$

Man kann daher definieren

$$\overset{n}{S}(x) = \sum_{\lambda=0}^{n} \frac{\psi^{(\lambda)} z}{x^n} \tag{52}$$

wobei

$$\psi(z) = \frac{\left(z+\sqrt{x^2+z^2}\right)^n - \left(z-\sqrt{x^2+z^2}\right)^n}{\sqrt{x^2+z^2}}.$$

Bern, 15 Juli 1913.

Transformations of Surfaces of Guichard and Surfaces Applicable to Quadrics.

(*By* LUTHER PFAHLER EISENHART, *Princeton, N. J.*)

INTRODUCTION.

GUICHARD (*) has discovered a class of surfaces which possess the following characteristic property: If S is such a surface, there exists an *associate* surface $\overline{S}$, such that the lines of curvature on the two surfaces have the same spherical representation, and the principal radii of curvature ρ_1, ρ_2; $\overline{\rho}_1$, $\overline{\rho}_2$ of the respective surfaces are in the relation

$$\rho_1 \overline{\rho}_2 + \rho_2 \overline{\rho}_1 = \text{const.} \neq 0. \tag{a}$$

CALAPSO (**) made a study of these surfaces and determined their analytical characterization. He found that there are two types which he called *the surfaces of* GUICHARD *of the first and second kinds.* In the present paper the author establishes transformations of these surfaces such that a surface and a transform constitute the envelope of a two parameter family of spheres with lines of curvature corresponding on the two sheets. These transformations of surfaces of GUICHARD are analogous in some respects to the transformations D_m of isothermic surfaces discovered by DARBOUX (***) and developed by BIANCHI (****). In particular, there are certain *special surfaces of*

(*) *Sur les surfaces isothermiques*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, vol. 130, p. 159.

(**) *Alcune superficie di* GUICHARD *e le relative trasformazioni*, Annali di Matematica, ser. 3, vol. 11, pp. 201 et seq.

(***) *Sur les surfaces isothermiques*, Annales de l'École Normale Supérieure, ser. 3, vol. 16, pp. 491-508.

(****) *Ricerche sulle superficie isoterme e sulla deformazione delle quadriche,* Annali di Matematica, ser. 3, vol. 11, pp. 93 et seq.

GUICHARD which undergo types of transformations carrying with them surfaces applicable to quadrics. Consequently this memoir makes a contribution to the theory of the deformation of quadrics, which recently has been the object of study by BIANCHI, GUICHARD and others.

In the second volume of his *Leçons* (*) DARBOUX has developed the analysis of the general *transformation of* RIBAUCOUR, that is, the determination of a surface S, which together with a given surface S, constitues the envelope of a two-parameter family of spheres upon the two sheets of which lines of curvature correspond. These results are recalled in § 1 and in § 2 are given the equations of surfaces of GUICHARD as derived by CALAPSO. In § 3 we apply the preceding results to the establishment of transformations T_n of surfaces of GUICHARD into surfaces of the same kind. The equations of the transformation involve five functions between which these is a homogeneous quadratic relation, and these functions satisfy a homogeneous differential system of the first order. In addition to the significant constant n which appears in the notation T_n there are consequently three arbitrary constants of integration. We show that each of the *two kinds* of surfaces of GUICHARD is thus transformable into a surface of the same *kind*, but, in order to avoid repetition, in the subsequent sections we develop the theory only for surfaces of the *first kind.* However, each theorem has its analogue for surfaces of the *second kind.*

The relation (a) being reciprocal the *associate surface* $\bar{S}$ is a surface of GUICHARD and it is of the same kind as S. Consequently there are transformations $\bar{T}_n$ of $\bar{S}$. Furthermore, when a transformation of S is known, one finds directly a transformation of $\bar{S}$, such that the transforms S_1 and $\bar{S}_1$ are associates of one another. The interrelation of four such surfaces gives a geometrical interpretation of the constant n.

In §§ 7-10 it is shown that the transformations T_n admit of the following *theorem of permutability:*

If S is a surface of GUICHARD *and S_1 and S_2 an two surfaces obtained from S by transformations T_{n_1} and T_{n_2}, where $n_2 \neq n_1$, there exists a unique surface S' which may be obtained from S_1 by a transformation T'_{n_2} and from S_2 by a transformation T'_{n_1}.*

The determination of S' requires only algebraic processes. For certain values of n_1, it is possible to find two different transformations T_{n_1} which

(*) pp. 338-343.

lead to a similar result, but the determination of S' requires differentiation.

The surfaces of constant curvature are surfaces of GUICHARD of the first or second kind according as the curvature is positive or negative. Of the ∞^4 transforms of such a surface ∞^3 are surfaces of the same constant curvature. The transformations T_n in this case are the same as those which are a consequence of the beautiful theorems announced to the French Academy in 1899 by GUICHARD. BIANCHI has shown also that they may be obtained by suitable combinations of BÄCKLUND transformations of surfaces of constant curvature.

The circles normal to two surfaces S and S_1, which are in the relation of a transformation T_n, form a cyclic system; we call the plane of the circle the *circle-plane* of the transformation. The remainder of the memoir is devoted to the study of a particular type of surfaces of the first kind characterized by the property that for each surface one knows in general three transformations T_n whose circle-planes coincide. Moreover, the envelope of this *singular* circle plane is applicable to the general quadric meeting the circle at infinity in four distinct points. These surfaces are characterized analytically by the requirement that the functions ξ, λ, θ satisfy a differential relation of the first order involving four arbitrary constants A, B, C, D. In some respects these surfaces are analogous to the isothermic surfaces discovered by DARBOUX (*), and following the terminology adopted by BIANCHI in the latter case, we refer to one of our surfaces as a *special surface of* GUICHARD *of the first kind of class* (A, B, C, D). When S is of this type the three known transforms are special surfaces of the same class. Furthermore the associate surface is a special surface of class (C, B, A, D). The investigation closes with the establishment of transformations of special surfaces into surfaces of the same class and the proof of a theorem of permutability for these special transformations.

(*) Loc. cit., p. 506.

§ 1. General Transformation of Ribaucour.

Darboux (*) has developed in an elegant form the formulas of the general transformation of Ribaucour. We recall in this section certain of these results without giving any proofs.

Let S be a surface referred to its lines of curvature; x, y, z the cartesian coordinates of a point on S; u, v the curvilinear coordinates; ρ_1 and ρ_2 the principal radii of normal curvature in the respective directions $v=$ const., $u=$ const.; and we write the linear element of S in the form

$$d s^2 = E\, d u^2 + G\, d v^2. \tag{1}$$

Darboux has shown that if λ and μ are two solutions of the equations

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} + \rho_1 \frac{\partial \mu}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} + \rho_2 \frac{\partial \mu}{\partial v} = 0, \tag{2}$$

the envelope of the spheres of radius $\frac{\lambda}{\mu}$ and center

$$\xi = x - X\frac{\lambda}{\mu}, \quad \eta = y - Y\frac{\lambda}{\mu}, \quad \zeta = z - Z\frac{\lambda}{\mu}, \tag{3}$$

where X, Y, Z are the direction-cosines of the normal to S, consists of S and of a second surface S_1 upon which also the lines of curvature are parametric. Moreover, the most general envelope of spheres such that the lines of curvature on the two sheets correspond is given by solving (2). In other words the solution of equations (2) carries with it the determination of the most *general transformation of* Ribaucour of the surface S.

Incidentally we observe that equations (2) are of the same form as the Rodrigues equations

$$\frac{\partial x}{\partial u} + \rho_1 \frac{\partial X}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial v} + \rho_2 \frac{\partial Y}{\partial v} = 0 \text{ (**)}.$$

(*) *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. II, pp. 338-343.

(**) E. p. 122. A reference of this form is to the author's *Differential Geometry* (Ginn & Co., Boston, 1909).

Hence λ is the general solution of the point equation of S and μ of the tangential equation.

If we define two functions α and β by

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} = \sqrt{E}\,\alpha, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \sqrt{G}\,\beta, \tag{4}$$

the coordinates x, y, z, of the corresponding point on S_1 are given by equations of the form

$$x_1 = x - \frac{1}{\sigma n}\,(\mu X + \alpha X' + \beta X''), \tag{5}$$

where X', Y', Z' and X'', Y'', Z'' denote the direction-cosines of the tangents to the curves $v = \text{const.}$, $u = \text{const.}$ respectively, n denotes a constant and σ is given by the quadratic relation

$$2\lambda n \sigma = \alpha^2 + \beta^2 + \mu^2 \text{ (*)}. \tag{6}$$

The linear element of S_1 is readily found to be

$$d s_1^2 = \frac{\lambda^2}{\alpha^2}\left(\frac{\partial \log \sigma}{\partial u}\right)^2 d u^2 + \frac{\lambda^2}{\beta^2}\left(\frac{\partial \log \sigma}{\partial v}\right)^2 d v^2\,; \tag{7}$$

we obtains this from the following equations which we get from (5):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= -\frac{\lambda}{\sigma}\frac{\partial \log \sigma}{\partial u}\left[X' - \frac{1}{\sigma n}\frac{\alpha}{\lambda}(\mu X + \alpha X' + \beta X'')\right] \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} &= -\frac{\lambda}{\beta}\frac{\partial \log \sigma}{\partial v}\left[X'' - \frac{1}{\sigma n}\frac{\beta}{\lambda}(\mu X + \alpha X' + \beta X'')\right]. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

If X'_1, Y'_1, Z'_1; X''_1, Y''_1, Z''_1; X_1, Y_1, Z_1 denote the direction-cosines for S_1 analogous to those for S without the subscript, and if the mutual orien-

(*) It is assumed that positive directions are taken on the tangents and normal to S so that

$$\begin{vmatrix} X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = +1.$$

tation is to be the same as for S, we may put

$$\left.\begin{aligned} X'_1 &= \quad X' - \frac{1}{\sigma n}\frac{\alpha}{\lambda}(\mu X + \alpha X' + \beta X''),\\ X''_1 &= -X'' + \frac{1}{\sigma n}\frac{\beta}{\lambda}(\mu X + \alpha X' + \beta X''),\\ X_1 &= \quad X - \frac{1}{\sigma n}\frac{\mu}{\lambda}(\mu X + \alpha X' + \beta X''). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Hence if E_1 and G_1 denote the first fundamental coefficients of S_1, we must have

$$\frac{\partial \log \sigma}{\partial u} = -\sqrt{E_1}\,\frac{\alpha}{\lambda}, \quad \frac{\partial \log \sigma}{\partial v} = \sqrt{G_1}\,\frac{\beta}{\lambda}. \tag{10}$$

Since λ must satisfy the equation

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right) = 0, \tag{11}$$

in consequence of the GAUSS and CODAZZI equations (*)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\sqrt{E\,G}}{\rho_1\,\rho_2} = 0,\\ &\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{\rho_1}\right) = \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}, \quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{\rho_2}\right) = \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

it follows from (2) and (4) that

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \mu}{\partial u} = -\sqrt{E}\,\frac{\alpha}{\rho_1}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial v} = -\sqrt{G}\,\frac{\beta}{\rho_2},\\ &\frac{\partial \beta}{\partial u} = \frac{\alpha}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial v} = \frac{\beta}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

If the equation (6) be differentiated and in the reduction use be made of (4), (10) and (13), we obtain

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial u} &= -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\beta + \mu\frac{\sqrt{E}}{\rho_1} + n\,\sigma\left(-\sqrt{E_1} + \sqrt{E}\right),\\ \frac{\partial \beta}{\partial v} &= -\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\alpha + \mu\frac{\sqrt{G}}{\rho_2} + n\,\sigma\left(\quad \sqrt{G_1} + \sqrt{G}\right). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

(*) E. p. 157.

The conditions of integrability of equations (4) and of the first two of equations (13) are satisfied in virtue of (12) and of the last two of equations (13). Expressing the conditions of integrability of the latter and of (14), we obtain

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\sqrt{E_1}}{\partial v} &= -\sqrt{G_1}\left[\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}+\frac{\beta}{\lambda}(\sqrt{E_1}-\sqrt{E})\right], \\ \frac{\partial\sqrt{G_1}}{\partial u} &= -\sqrt{E_1}\left[\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}-\frac{\alpha}{\lambda}(\sqrt{G_1}+\sqrt{G})\right]. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

When these equations are satisfied by two functions E_1 and G_1, so also is the condition of integrability of equations (10).

If we form the equations of Rodrigues for S_1 and make use of (9), we find that the principal radii ρ'_1, ρ'_2 of S_1 are given by

$$\frac{\partial\log\sigma}{\partial u}\left(\frac{1}{\rho'_1}+\frac{\mu}{\lambda}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)=0,\quad \frac{\partial\log\sigma}{\partial v}\left(\frac{1}{\rho'_2}+\frac{\mu}{\lambda}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)=0. \tag{16}$$

§ 2. Surfaces of Guichard. The Associate Surface.

Following Calapso (*) we say that S is a *surface of* Guichard *of the first kind* if its fundamental coefficients satisfy the relation

$$\sqrt{G}\frac{D}{\sqrt{E}}-\sqrt{E}\frac{D''}{\sqrt{G}}=\sqrt{G-E}. \tag{17}$$

If we define two functions ξ and θ by

$$\sqrt{E}=e^{\xi}\sinh\theta,\quad \sqrt{G}=e^{\xi}\cosh\theta, \tag{18}$$

the relation (17) may be replaced by

$$\left.\begin{aligned} D &= e^{\xi}\sinh\theta\,(\cosh\theta+h\sinh\theta), \\ D'' &= e^{\xi}\cosh\theta\,(\sinh\theta+h\cosh\theta), \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

the function h being thus defined. From (18) and (19) follow (**)

$$\frac{1}{\rho_1}=e^{-\xi}(\coth\theta+h),\quad \frac{1}{\rho_2}=e^{-\xi}(\tanh\theta+h). \tag{20}$$

(*) Loc. cit.
(**) E. p. 122.

Expressing the condition that the above functions satisfy the CODAZZI and GAUSS equations (12), we obtain the following equations to be satisfied by h, θ and ξ:

$$\frac{\partial h}{\partial u} = (h + \coth\theta)\frac{\partial \xi}{\partial u}, \quad \frac{\partial h}{\partial v} = (h + \tanh\theta)\frac{\partial \xi}{\partial v}, \tag{21}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + \coth\theta\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} + \tanh\theta\frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} - \operatorname{csch}^2\theta\frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u} + \\ &+ \operatorname{sech}^2\theta\frac{\partial \theta}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v} + (\cosh\theta + h\sinh\theta)(\sinh\theta + h\cosh\theta) = 0.\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Moreover, the condition of integrability of (21) requires that

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v} + \coth\theta\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v} + \tanh\theta\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial \theta}{\partial u}. \tag{23}$$

From the general theory of surfaces it follows that every set of solutions of equations (21), (22), (23) defines a surface of GUICHARD of the first kind.

Later it will desirable to know the expressions for the derivatives of the direction-cosines X', X'', X for S. From well-known general formula (*) we find

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial X'}{\partial u} = -\left(\tanh\theta\frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial v}\right)X'' + (\cosh\theta + h\sinh\theta)X,\\ &\frac{\partial X'}{\partial v} = \left(\coth\theta\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial u}\right)X'', \quad \frac{\partial X''}{\partial u} = \left(\tanh\theta\frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial v}\right)X',\\ &\frac{\partial X''}{\partial v} = -\left(\coth\theta\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial u}\right)X' + (\sinh\theta + h\cosh\theta)X,\\ &\frac{\partial X}{\partial u} = -(\cosh\theta + h\sinh\theta)X', \quad \frac{\partial X}{\partial v} = (\sinh\theta + h\cosh\theta)X''.\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

From the last two equations it follows that the linear element of the spherical representation of S is

$$d s'^2 = (\cosh\theta + h\sinh\theta)^2\,d u^2 + (\sinh\theta + h\cosh\theta)\,d v^2. \tag{25}$$

CALAPSO has shown (**) that if ξ, θ, h satisfy equations (21), (22), (23),

(*) E. p. 157.

(**) Loc. cit., p. 14.

so also do $\bar{\xi}$, $\bar{\theta}$, h, where the first two are given by

$$\left.\begin{aligned} e^{\bar{\xi}} &= e^{-\xi}(1-h^2), \\ \sinh\bar{\theta} &= \frac{1}{h^2-1}\left[\sinh\theta\,(1+h^2)+2\,h\cosh\theta\right], \\ \cosh\bar{\theta} &= -\frac{1}{h^2-1}\left[\cosh\theta\,(1+h^2)+2\,h\sinh\theta\right]. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

From these equations we have

$$\left.\begin{aligned} \cosh\bar{\theta}+h\sinh\bar{\theta} &= \quad(\cosh\theta+h\sinh\theta), \\ \sinh\bar{\theta}+h\cosh\bar{\theta} &= -(\sinh\theta+h\cosh\theta). \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

From (24) and (27) it follows that for the surface $\bar{S}$, determined by $\bar{\xi}$, $\bar{\theta}$, h, the direction cosines are given by

$$\bar{X} = -X, \quad \bar{X}' = -X', \quad \bar{X}'' = X'', \tag{28}$$

so that the proper orientation may be obtained. In view of this we take for the principal radii of $\bar{S}$

$$\bar{\rho}_1 = \frac{-e^{\bar{\xi}}\sinh\bar{\theta}}{\cosh\bar{\theta}+h\sinh\bar{\theta}}, \quad \bar{\rho}_2 = \frac{-e^{\bar{\xi}}\cosh\bar{\theta}}{\sinh\bar{\theta}+h\cosh\bar{\theta}}. \tag{29}$$

With the aid of (26) and (27) we show that

$$\rho_1\bar{\rho}_2+\rho_2\bar{\rho}_1 = 2. \tag{30}$$

Hence $\bar{S}$ is the associate of S.

A *surface of* Guichard *of the second kind* is one whose fundamental coefficients satisfy the relation

$$\sqrt{G}\frac{D}{\sqrt{E}} - \sqrt{E}\frac{D''}{\sqrt{G}} = \sqrt{E+G}. \tag{17*}$$

An expression or equation for these surfaces will be denoted by (a*) when the equation (a) is the analogous one for a surface of the first kind. We have

$$\sqrt{E} = e^{\xi}\sin\theta, \quad \sqrt{G} = e^{\xi}\cos\theta, \tag{18*}$$

$$D = e^{\xi}\sin\theta\,(\cos\theta+h\sin\theta), \quad D'' = e^{\xi}\cos\theta\,(-\sin\theta+h\cos\theta), \tag{19*}$$

$$\frac{1}{\rho_1} = e^{-\xi}(\cot\theta + h), \quad \frac{1}{\rho_2} = e^{-\xi}(-\tan\theta + h), \tag{20*}$$

$$\frac{\partial h}{\partial u} = (h + \cot\theta)\frac{\partial \xi}{\partial u}, \quad \frac{\partial h}{\partial v} = (h - \tan\theta)\frac{\partial \xi}{\partial v}, \tag{21*}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + \cot\theta\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} + \tan\theta\frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial \theta}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v} - \\ &\quad - (\cos\theta + h\sin\theta)(\sin\theta - h\cos\theta) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{22*}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v} + \cot\theta\frac{\partial \theta}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u} - \tan\theta\frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}. \tag{23*}$$

For the associate surface $\overline{S}$ the function h is the same as for S, and the other functions are given by

$$\left.\begin{aligned} e^{\overline{\xi}} &= e^{-\xi}(1 + h^2), \\ \sin\overline{\theta} &= -\frac{1}{1+h^2}\left[\sin\theta\,(1 - h^2) - 2h\cos\theta\right], \\ \cos\overline{\theta} &= \frac{1}{1+h^2}\left[\cos\theta\,(1 - h^2) + 2h\sin\theta\right]. \end{aligned}\right\} \tag{26*}$$

§ 3. Transformations of Surfaces of Guichard.

If S a surface of Guichard of the first kind and S_1 is to be a surface of Guichard of the first kind with its fundamental functions expressed by means of ξ_1, θ_1, h_1, equations (4), (10), (13) and (14) assume the form

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \log\sigma}{\partial u} = -e^{\xi_1}\sinh\theta_1\frac{\alpha}{\lambda}, \quad \frac{\partial \log\sigma}{\partial v} = e^{\xi_1}\cosh\theta_1\frac{\beta}{\lambda}, \\ &\frac{\partial \lambda}{\partial u} = \alpha\, e^{\xi}\sinh\theta, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \beta\, e^{\xi}\cosh\theta, \\ &\frac{\partial \mu}{\partial u} = -\alpha(\cosh\theta + h\sinh\theta), \quad \frac{\partial \mu}{\partial v} = -\beta(\sinh\theta + h\cosh\theta), \\ &\frac{\partial \alpha}{\partial u} = -\beta\left(\tanh\theta\frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial v}\right) + \mu(\cosh\theta + h\sinh\theta) + \\ &\qquad\qquad + n\sigma(-e^{\xi_1}\sinh\theta_1 + e^{\xi}\sinh\theta), \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \alpha}{\partial v} = \beta\left(\coth\theta\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial u}\right), \quad \frac{\partial \beta}{\partial u} = \alpha\left(\tanh\theta\frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial v}\right),\\
&\frac{\partial \beta}{\partial v} = -\alpha\left(\coth\theta\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial u}\right) + \mu(\sinh\theta + h\cosh\theta) +\\
&\qquad\qquad + n\sigma(e^{\xi_1}\cosh\theta_1 + e^{\xi}\cosh\theta).
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Moreover, equations (15) may be replaced by

$$\left.\begin{aligned}
&\tanh\theta_1\frac{\partial \xi_1}{\partial v} + \tanh\theta\frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \theta_1}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\beta}{\lambda}(e^{\xi_1}\sinh\theta_1 - e^{\xi}\sinh\theta) = 0,\\
&\coth\theta_1\frac{\partial \xi_1}{\partial u} + \coth\theta\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \theta_1}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial u} - \frac{\alpha}{\lambda}(e^{\xi_1}\cosh\theta_1 + e^{\xi}\cosh\theta) = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

From (31) it follows that

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) = -\frac{\alpha}{\lambda}\varphi, \quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) = -\frac{\beta}{\lambda}\psi, \tag{33}$$

where

$$\left.\begin{aligned}
\varphi &= \cosh\theta + \left(h + \frac{\mu}{\lambda}e^{\xi}\right)\sinh\theta,\\
\psi &= \sinh\theta + \left(h + \frac{\mu}{\lambda}e^{\xi}\right)\cosh\theta.
\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

When we express the condition that the principal radii of S_1 have forms analogous to those for S (20), but in terms of ξ_1, θ_1, h_1, it follows from equations (16) that

$$\left.\begin{aligned}
\varphi &= \cosh\theta_1 + \left(h_1 + \frac{\mu}{\lambda}e^{\xi_1}\right)\sinh\theta_1,\\
-\psi &= \sinh\theta_1 + \left(h_1 + \frac{\mu}{\lambda}e^{\xi_1}\right)\cosh\theta_1.
\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

From (34) and (35) it follows that

$$\varphi^2 - \psi^2 = 1 - \left(h + \frac{\mu}{\lambda}e^{\xi}\right)^2 = 1 - \left(h_1 + \frac{\mu_1}{\lambda_1}e^{\xi_1}\right)^2,$$

from which we find, in order that (34) and (35) be consistent, that

$$h_1 + \frac{\mu}{\lambda}e^{\xi_1} = h + \frac{\mu}{\lambda}e^{\xi} = t, \tag{36}$$

t being a function thus defined.

One finds readily that the foregoing equations may be replaced by

$$\left.\begin{aligned} t &= -\tanh\frac{1}{2}(\theta_1+\theta), \\ \varphi &= \quad \operatorname{sech}\frac{1}{2}(\theta+\theta_1)\cosh\frac{1}{2}(\theta_1-\theta), \\ \psi &= -\operatorname{sech}\frac{1}{2}(\theta+\theta_1)\sinh\frac{1}{2}(\theta_1-\theta). \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

In consequence of equations (21) and analogous equations for S_1 namely,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial u} &= (h_1+\coth\theta_1)\frac{\partial \xi_1}{\partial u}, \\ \frac{\partial h_1}{\partial v} &= (h_1+\tanh\theta_1)\frac{\partial \xi_1}{\partial v}, \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

we have from (36)

$$\frac{\partial t}{\partial u} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\operatorname{csch}\theta - e^{\xi}\frac{\alpha}{\lambda}\right)\varphi, \qquad \frac{\partial t}{\partial v} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\operatorname{sech}\theta - e^{\xi}\frac{\beta}{\lambda}\right)\psi, \tag{39}$$

$$\frac{\partial t}{\partial u} = \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial u}\operatorname{csch}\theta_1 - e^{\xi_1}\frac{\alpha}{\lambda}\right)\varphi, \qquad \frac{\partial t}{\partial v} = -\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial v}\operatorname{sech}\theta_1 + e^{\xi_1}\frac{\beta}{\lambda}\right)\psi, \tag{40}$$

from which it follows that

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial u} &= \quad \sinh\theta_1\left[\operatorname{csch}\theta\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\alpha}{\lambda}(e^{\xi_1}-e^{\xi})\right], \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial v} &= -\cosh\theta_1\left[\operatorname{sech}\theta\frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\beta}{\lambda}(e^{\xi_1}-e^{\xi})\right]. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

When the expression (37) for t is substituted in (39), we obtain

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial u} &= -\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\operatorname{csch}\theta - e^{\xi}\frac{\alpha}{\lambda}\right)(\cosh\theta_1+\cosh\theta), \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial v} &= \quad\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\operatorname{sech}\theta - e^{\xi}\frac{\beta}{\lambda}\right)(\sinh\theta_1-\sinh\theta). \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

One finds readily that in consequence of (31), the conditions of integrability of (41) and (42) are satisfied. Furthermore, if we have two functions θ_1 and ξ_1 satisfying the system (31), (41), (42), equations (32) are satisfied identically, the function h_1 given by (36) satisfies (38) and the functions θ_1, ξ_1

and h_1 satisfy an equation analogous to (22), because of the fundamental relation (6).

It is our purpose now to reduce our equations to a simple form and to this end we observe that as a consequence of equations (35) we have

$$\varphi \cosh \theta_1 + \psi \sinh \theta_1 = 1, \quad \psi \cosh \theta_1 + \varphi \sinh \theta_1 = -t, \tag{43}$$

from which follows

$$\cosh \theta_1 (t\varphi + \psi) + \sinh \theta_1 (t\psi + \varphi) = 0.$$

We replace this equation by

$$e^{\xi_1} \cosh \theta_1 = \rho (t\psi + \varphi), \quad e^{\xi_1} \sinh \theta_1 = -\rho (t\varphi + \psi),$$

where ρ is a factor of proportionality to be determined. To this end we differentiate these equations and express the condition that ξ_1 and θ_1 satisfy equations (41) and (42). This leads to the two equations

$$\frac{\partial \log \rho}{\partial u} + \frac{\partial \log \sigma}{\partial u} + \frac{\partial \xi}{\partial u} - \frac{\alpha}{\lambda} e^{\xi} \sinh \theta = 0,$$

$$\frac{\partial \log \rho}{\partial v} + \frac{\partial \log \sigma}{\partial v} + \frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\beta}{\lambda} e^{\xi} \cosh \theta = 0.$$

Hence to within a constant factor ρ is equal to $\lambda/\sigma\, e^{\xi}$, which factor may be taken equal to unity since σ has thus far appeared only with the constant multiplier n. Hence we have

$$e^{\xi_1} \cosh \theta_1 = \frac{\lambda e^{-\xi}}{\sigma} (t\psi + \varphi), \quad e^{\xi_1} \sinh \theta_1 = -\frac{\lambda e^{-\xi}}{\sigma} (t\varphi + \psi). \tag{44}$$

Moreover, from (43) it follows that

$$e^{\xi_1} = \frac{\lambda}{\sigma} e^{-\xi} (1 - t^2). \tag{45}$$

From (44) we find readily the formulas

$$e^{\xi_1 + \xi} \sinh (\theta_1 + \theta) = -\frac{2\lambda t}{\sigma}, \quad e^{\xi_1 + \xi} \cosh (\theta_1 + \theta) = \frac{\lambda}{\sigma} (1 + t^2). \tag{46}$$

As a result of the preceding investigation the *fundamental system of equations* of a transformation from a surface of Guichard of the first kind into another surface of the same kind is the following:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma}{\partial u} = e^{-\xi}\,\alpha\,(t\,\varphi + \psi), \quad \frac{\partial \sigma}{\partial v} = e^{-\xi}\,\beta\,(t\,\psi + \varphi),\\
&\frac{\partial \lambda}{\partial u} = e^{\xi}\,\alpha \sinh\theta, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = e^{\xi}\,\beta\cosh\theta,\\
&\frac{\partial \mu}{\partial u} = -\alpha\,(\cosh\theta + h\sinh\theta), \quad \frac{\partial \mu}{\partial v} = -\beta\,(\sinh\theta + h\cosh\theta),\\
&\frac{\partial \alpha}{\partial u} = -\beta\left(\tanh\theta\,\frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial v}\right) + \mu\,(\cosh\theta + h\sinh\theta) +\\
&\qquad\qquad + n\,\sigma\,e^{\xi}\sinh\theta + n\,\lambda\,e^{-\xi}\,(t\,\varphi + \psi),\\
&\frac{\partial \alpha}{\partial v} = \beta\left(\coth\theta\,\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial u}\right), \quad \frac{\partial \beta}{\partial u} = \alpha\left(\tanh\theta\,\frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial v}\right),\\
&\frac{\partial \beta}{\partial v} = -\alpha\left(\coth\theta\,\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial u}\right) + \mu\,(\sinh\theta + h\cosh\theta) +\\
&\qquad\qquad + n\,\sigma\,e^{\xi}\cosh\theta + n\,\lambda\,e^{-\xi}\,(t\,\psi + \varphi),
\end{aligned}\right\} \tag{I}$$

and the fundamental quadratic relation

$$2\,\lambda\,\sigma\,n = \alpha^2 + \beta^2 + \mu^2. \tag{II}$$

One finds that the system (I) and (II) is consistent. When we have a set of functions α, β, λ, μ, σ satisfying this system for a given value of the constant n, we say that we have a transformation T_n from one surface S into a second surface S_1. The fundamental functions ξ_1, θ_1 and h_1 are given at once from (44), (45) and (36).

Since one of the constants arising from the integration has been put in evidence, namely n, there remain three other arbitrary constants. Hence we have the theorem:

A surface of Guichard *of the first kind admits* ∞^3 *transformations* T_n *into surfaces of the same kind.*

Evidently these constants can be chosen so that a given point of S shall go into a given point of S_1, and then the transformation T_n is determined.

Incidentally we observe that for a surface of Guichard of the first kind the equations (2) assume the form

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u}(\coth\theta + h) + e^{\xi}\frac{\partial \mu}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v}(\tanh\theta + h) + e^{\xi}\frac{\partial \mu}{\partial v} = 0.$$

Comparing these equations with (I), we find that a set of solutions is of the form

$$\lambda = e^{\xi} + l, \quad \mu = -h + m, \tag{47}$$

where l and m are arbitrary constants. It does not follow that S_1 in this case is a surface of GUICHARD. This question will be investigated later (§ 15).

If we proceed with surfaces of GUICHARD of the second kind in a manner analogous to the foregoing, we find

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) = -\frac{\alpha}{\lambda}\varphi, \quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) = -\frac{\beta}{\lambda}\psi, \tag{33*}$$

where now

$$\varphi = \cos\theta + t\sin\theta, \qquad \psi = -\sin\theta + t\cos\theta, \tag{34*}$$

$$\varphi = \cos\theta_1 + t\sin\theta_1, \qquad \psi = \sin\theta_1 - t\cos\theta_1, \tag{35*}$$

$$t = h + \frac{\mu}{\lambda}e^{\xi} = h_1 + \frac{\mu}{\lambda}e^{\xi_1}. \tag{36*}$$

The functions ξ_1 and θ_1 of a transform S_1 are given by

$$e^{\xi_1}\cos\theta_1 = \frac{\lambda}{\sigma}(t\psi - \varphi)e^{-\xi}, \quad e^{\xi_1}\sin\theta_1 = -\frac{\lambda}{\sigma}(t\varphi + \psi)e^{-\xi}, \tag{44*}$$

$$e^{\xi_1} = -\frac{\lambda}{\sigma}(1+t^2)e^{-\xi}; \tag{45*}$$

and the fundamental system analogous to (I) is

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma}{\partial u} = e^{-\xi}\alpha(t\varphi + \psi), \quad \frac{\partial\sigma}{\partial v} = e^{-\xi}\beta(t\psi - \varphi),\\
&\frac{\partial\lambda}{\partial u} = e^{\xi}\sin\theta\,\alpha, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial v} = e^{\xi}\cos\theta\,\beta,\\
&\frac{\partial\mu}{\partial u} = -\alpha(\cos\theta + h\sin\theta), \quad \frac{\partial\mu}{\partial v} = \beta(\sin\theta - h\cos\theta),\\
&\frac{\partial\alpha}{\partial u} = -\beta\left(\tan\theta\frac{\partial\xi}{\partial v} + \frac{\partial\theta}{\partial v}\right) + \mu(\cos\theta + h\sin\theta) +\\
&\qquad\qquad + n\sigma e^{\xi}\sin\theta + n\lambda e^{-\xi}(t\varphi + \psi),\\
&\frac{\partial\alpha}{\partial v} = \beta\left(\cot\theta\frac{\partial\xi}{\partial u} - \frac{\partial\theta}{\partial u}\right), \quad \frac{\partial\beta}{\partial u} = \alpha\left(\tan\theta\frac{\partial\xi}{\partial v} + \frac{\partial\theta}{\partial v}\right),\\
&\frac{\partial\beta}{\partial v} = -\alpha\left(\cot\theta\frac{\partial\xi}{\partial u} - \frac{\partial\theta}{\partial u}\right) - \mu(\sin\theta - h\cos\theta) +\\
&\qquad\qquad + n\sigma e^{\xi}\cos\theta + n\lambda e^{-\xi}(t\psi - \varphi).
\end{aligned}\right\} \tag{I*}$$

In the following sections we limit our considerations to surfaces of the first kind, but it is easy to carry out similar processes for surfaces of the second kind, as the preceding results indicate.

§ 4. Envelope of the Circle-Plane of the Transformation.

It is a well known fact that the circles orthogonal to two surfaces which are in the relation of a transformation of Ribaucour form a cyclic system. We call the plane of this circle the ***circle-plane of the transformation*** and in this section we derive certain results for the envelope S_0 of this plane.

From (9) it follows that the direction-cosines of this plane are proportional to

$$\beta X' - \alpha X'', \quad \beta Y' - \alpha Y'', \quad \beta Z' - \alpha Z''. \tag{48}$$

Consequently the coordinates x_0, y_0, z_0 of a point M_0 on S_0 are of the form

$$x_0 = x + p\,(\alpha X' + \beta X'') + q\,X, \tag{49}$$

where p and q are to be determined. If we express the condition that for any infinitesimal variation of u and v, the displacement of M_0 is normal to the direction given by (48), and in the reduction make use of (I), we find that

$$\left.\begin{aligned} p = -\frac{e^{\xi}}{r}, \quad q = -\frac{1}{r}\,(e^{\xi}\mu + 2\,n\,\lambda\,t), \\ r = n\left\{ e^{-\xi}\lambda\,(1+t^2) - 2\,h\,t + e^{\xi}\sigma \right\}. \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

We have seen that μ satisfies the tangential equation of S; hence there is a surface Σ_0 whose tangential coordinates are X, Y, Z, μ. The point coordinates, ξ_0, η_0, ζ_0, of Σ_0 are given by expressions of the form

$$\xi_0 = \mu\,X + \alpha\,X' + \beta\,X'', \tag{51}$$

as follows from (I) and the general theory of tangential coordinates (*).

(*) E. p. 163.

With the aid of the functions ξ_0, η_0, ζ_0, the differentials of x_0, y_0, z_0 may be given the form

$$d x_0 = X\, d\,\omega + \xi_0\, d\, p, \tag{52}$$

where

$$\omega = q - p\,\mu. \tag{53}$$

If we put further

$$\psi = \mu\,\omega + \frac{p}{2}(\mu^2 + \alpha^2 + \beta^2) + \lambda, \tag{54}$$

the linear element of S_0 may be written

$$d\, s_0^2 = d\,\omega^2 + 2\, d\, p\, d\,\psi. \tag{55}$$

These results which hold for any cyclic system (*) will be applied later to the transformations T_n.

§ 5. Transformations $\overline{T}_n$ of the Associate Surface.

The associate surface $\overline{S}$ of a given S admits transformations $\overline{T}_n$ analogous to those for S. The fundamental system of equations we denote by $(\overline{\mathrm{I}})$ and $(\overline{\mathrm{II}})$; they are analogous to (I) and (II) and differ only in that the functions are $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\mu}$, $\overline{\lambda}$, $\overline{\sigma}$. However, it is our purpose to show that the knowledge of each transformation T_n of S carries with it that of a transformation $\overline{T}_n$ of $\overline{S}$.

In § 1 we observed that μ satisfies the tangential equation of S and each solution of this equation leads to a transformation of Ribaucour of S. Since S and $\overline{S}$ correspond with parallelism of tangent planes and the lines of curvature on the two surfaces correspond, there is a transformation of Ribaucour of $\overline{S}$ determined by $\overline{\mu} = \mu$. We shall show that in fact this is a transformation $\overline{T}_n$.

Assuming that $\overline{\mu} = \mu$ leads to a $\overline{T}_n$, we observe from $(\overline{\mathrm{I}})$ and (27) that in this case we must have

$$\overline{\alpha} = \alpha, \quad \overline{\beta} = -\beta. \tag{56}$$

(*) Bianchi, *Lezioni*, vol. II, p. 211.

From (26) and ($\overline{\text{I}}$) it follows that

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \bar\lambda}{\partial u} &= - e^{-\xi} \alpha \left[\sinh\theta\,(1+h^2) + 2h\cosh\theta\right],\\ \frac{\partial \bar\lambda}{\partial v} &= - e^{-\xi} \beta \left[\cosh\theta\,(1+h^2) + 2h\sinh\theta\right].\end{aligned}\right\} \tag{57}$$

In consequence of the foregoing results, we have from (II) and ($\overline{\text{II}}$),

$$\bar\lambda\,\bar\sigma = \lambda\,\sigma. \tag{58}$$

By means of (26) the first two of ($\overline{\text{II}}$), namely

$$\frac{\partial \bar\sigma}{\partial u} = e^{-\bar\xi}\,\bar\alpha\,(\bar t\,\bar\varphi + \bar\psi), \qquad \frac{\partial \bar\sigma}{\partial v} = e^{-\bar\xi}\,\bar\beta\,(\bar t\,\bar\psi + \bar\varphi),$$

are transformable into

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar\sigma}{\partial u} = - \alpha e^{\xi} \Bigg\{ &\left[h\frac{\mu^2}{\bar\lambda^2} e^{-\xi} + \frac{\mu}{\bar\lambda}\right] 2 e^{-\xi}\cosh\theta + \\ &+ \left[1 + 2h\frac{\mu}{\bar\lambda} e^{-\xi} + \frac{\mu^2}{\bar\lambda^2} e^{-2\xi}(h^2+1)\right]\sinh\theta \Bigg\},\\ \frac{\partial \bar\sigma}{\partial v} = - \beta e^{\xi} \Bigg\{ &\left[h\frac{\mu^2}{\bar\lambda^2} e^{-\xi} + \frac{\mu}{\bar\lambda}\right] 2 e^{-\xi}\sinh\theta + \\ &+ \left[1 + 2h\frac{\mu}{\bar\lambda} e^{-\xi} + \frac{\mu^2}{\bar\lambda^2} e^{-2\xi}(h^2+1)\right]\cosh\theta \Bigg\}.\end{aligned}$$

When $\bar\sigma$ in these equations is replaced by the value from (58), we obtain two equations of the form

$$A\cosh\theta + B\sinh\theta = 0, \qquad A\sinh\theta + B\cosh\theta = 0.$$

Hence $A = B = 0$, and thus we obtain two equations

$$C \equiv \frac{\mu^2}{\bar\lambda^2} + \frac{\lambda}{\bar\lambda} + \frac{\lambda\,\sigma}{\bar\lambda^2} = 0, \qquad C\left[(h^2+1)\,e^{-\xi} + e^{\xi}\frac{\bar\lambda}{\lambda}\right] = 0.$$

This necessitates

$$\bar\lambda = -\left(\frac{\mu^2}{\lambda} + \sigma\right),$$

which value satisfies (57) as is readily shown. And from (58) we have

$$\bar{\sigma} = -\frac{\lambda^2 \sigma}{\mu^2 + \sigma\lambda}.$$

Hence have the following theorem:

If α, β, λ, μ, σ determine a transformation T_n of a surface of GUICHARD *of the first kind, the functions*

$$\bar{\alpha} = \alpha, \quad \bar{\beta} = -\beta, \quad \bar{\lambda} = -\left(\frac{\mu^2}{\lambda} + \sigma\right), \quad \bar{\mu} = \mu, \quad \bar{\sigma} = -\frac{\lambda^2 \sigma}{\mu^2 + \sigma\lambda} \tag{59}$$

determine a transformation $\bar{T}_n$ of the associate surface $\bar{S}$. Moreover, the surface $\bar{S}_1$ resulting from $\bar{T}_n$ is the associate of the transform S_1 of S.

In order to prove the latter part of the theorem, we remark that the direction cosines of the normal to $\bar{S}_1$ are of the form

$$\bar{X}_1 = \bar{X} - \frac{1}{\bar{\sigma} n} \frac{\mu}{\bar{\lambda}} (\mu \bar{X} + \bar{\alpha} \bar{X}' + \bar{\beta} \bar{X}''),$$

as follows from (9). In consequence of (28) and (59) we have

$$\bar{X}_1 = -X_1, \quad \bar{Y}_1 = -Y_1, \quad \bar{Z}_1 = -Z_1. \tag{60}$$

From (45), (36) and (26) it follows that the functions e^{ξ} of $\bar{S}_1$ and of the associate of S_1 have the respective forms

$$\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\sigma}} e^{-\bar{\xi}} \left[1 - \left(\frac{\mu}{\bar{\lambda}} e^{\bar{\xi}} + \bar{h}\right)^2\right], \qquad e^{-\xi_1}\left[1 - \left(t - \frac{\mu}{\lambda} e^{\xi_1}\right)^2\right].$$

One finds readily that each of these is equal to

$$e^{-\xi} \frac{\mu^2}{\lambda\sigma} (t^2 - 1) + 2t\frac{\mu}{\lambda} + e^{\xi}\frac{\sigma}{\lambda}. \tag{61}$$

Again from (36) and analogous equations for the transformation of $\bar{S}$ we have

$$\frac{\bar{h}_1 - h_1}{\mu} = \frac{1}{\bar{\lambda}} (e^{\bar{\xi}} - e^{\bar{\xi}_1}) + \frac{1}{\lambda} (e^{\xi_1} - e^{\xi}).$$

When the value (61) of $e^{\bar{\xi}_1}$ is substituted in the right-hand member of this equation, and also the expressions for $e^{\overline{\xi}}$ and e^{ξ_1}, it vanishes identically. Hence for $\overline{S}_1$ and the associate of S_1 the functions e^{ξ} and h are equal. From equations for these two surfaces analogous to (21) it follows that the functions θ also are equal. Consequently $\overline{S}_1$ is the associate of S_1.

The coordinates of $\overline{S}_1$ are given by

$$\overline{x}_1 - \overline{x} = -\frac{1}{\overline{\sigma} n}(\mu \overline{X} + \overline{\alpha} \overline{X}' + \overline{\beta} \overline{X}''), \tag{62}$$

as follows from (5). In consequence of (59) and (28), we have

$$\frac{\overline{x}_1 - \overline{x}}{x_1 - x} = \frac{\overline{y}_1 - \overline{y}}{y_1 - y} = \frac{\overline{z}_1 - \overline{z}}{z_1 - z} = -\frac{\sigma}{\overline{\sigma}}. \tag{63}$$

If d and $\overline{d}$ denote the lengths of the joins of corresponding points on S and S_1 and on $\overline{S}$ and $\overline{S}_1$ respectively, we have from (5), (62) and (63)

$$d^2 = \frac{2\lambda}{\sigma n}, \quad \overline{d}^2 = \frac{2\overline{\lambda}}{\overline{\sigma} n}, \quad \frac{\overline{d}}{d} = -\frac{\sigma}{\overline{\sigma}}. \tag{64}$$

Since the radius R of the sphere of the transformation T_n is $\frac{\lambda}{\mu}$, it follows from (59) and (64) that

$$d\,\overline{d} + \frac{d^2}{R^2} = -\frac{2}{n}. \tag{65}$$

This gives a geometric interpretation of the constant n. We resume these results in the theorem:

If S and S_1 are in the relation of a transformation T_n, so also are the associates of these surfaces, namely $\overline{S}$ and $\overline{S}_1$. The joins of corresponding points on S and S_1 and on $\overline{S}$ and $\overline{S}_1$ are parallel and the lengths of these joins satisfy the relation

$$d\,\overline{d} + \frac{d^2}{R^2} = -\frac{2}{n}.$$

An interesting particular case is afforded when $n = -\frac{1}{2}$. Later (§ 11) it will be seen that this is a sort of critical value of n. If now ω denotes the angle between the join of corresponding points on S and S_1 and the normal to S, we have $d = 2R\cos\omega$.

Hence when $n = -\frac{1}{2}$ equation (65) reduces to

$$d\,\bar{d} = 4\sin^2\omega. \tag{66}$$

§ 6. The Inverse Transformation.

It is evident that the relation between a surface S and a trasform S_1 is reciprocal. It is our purpose now to fund the expressions for the functions α^{-1}, β^{-1}, λ^{-1}, μ^{-1}, σ^{-1} by which one obtanis S from S_1 by a transformation of the type discussed in § 3. From (65) it is evident that n has the same value as for the transformation from S to S_1. Hence we refer to the desired transformation as T_n^{-1}.

The analogue of equation (5) is

$$x - x_1 = -\frac{1}{\sigma^{-1} n}(\mu^{-1} X_1 + \alpha^{-1} X'_1 + \beta^{-1} X''_1).$$

If we replace X_1, X'_1 and X''_1 by their expressions (9) and equate the expressions for $(x_1 - x)$ given by this equation and (5), we obtain an equation of the form

$$A X + B X' + C X'' = 0,$$

where A, B, C are determinate functions.

Since we obtain also two equations of the same form but with the $X's$ replaced by $Y's$ and $Z's$ respectively, it follows that A, B, C must be zero. This gives the three equations

$$\sigma\frac{\mu^{-1}}{\mu} + \sigma^{-1} = \sigma\frac{\alpha^{-1}}{\alpha} + \sigma^{-1} = -\sigma\frac{\beta^{-1}}{\beta} + \sigma^{-1} = \frac{\mu\,\mu^{-1} + \alpha\,\alpha^{-1} - \beta\,\beta^{-1}}{n\,\lambda}.$$

From these equations follow

$$\alpha^{-1} = \rho\,\alpha, \quad \beta^{-1} = -\rho\,\beta, \quad \mu^{-1} = \rho\,\mu, \quad \sigma^{-1} = \rho\,\sigma,$$

where ρ is a factor of proportionality to be determined. To these may be added also $\lambda^{-1} = \rho\lambda$, since the radius of the sphere is given by

$$R = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda^{-1}}{\mu^{-1}}.$$

When this value of λ^{-1} is substituded in the equations

$$\frac{\partial \lambda^{-1}}{\partial u} = \alpha^{-1} e^{\xi_1} \sinh \theta_1, \quad \frac{\partial \lambda^{-1}}{\partial v} = \beta^{-1} e^{\xi_1} \cosh \theta_1,$$

which are analogous to the equations for λ in the system (I), it is found that $\rho = \frac{1}{\sigma\lambda}\cdot$ Hence the above equations become

$$\alpha^{-1} = \frac{\alpha}{\sigma\lambda}, \quad \beta^{-1} = -\frac{\beta}{\sigma\lambda}, \quad \mu^{-1} = \frac{\mu}{\sigma\lambda}, \quad \lambda^{-1} = \frac{1}{\sigma}, \quad \sigma^{-1} = \frac{1}{\lambda}. \tag{67}$$

It is readily shown that these values satisfy the fundamental system for S_1 analogous to (I).

§ 7. The Theorem of Permutability.

In the succeeding sections we establish the following theorem of permutability for the transformations T_n of surfaces of Guichard of the first kind:

If S is a surface of Guichard *of the first kind and S_1 and S_2 are two surfaces of the same kind obtained from S by transformations T_{n_1} and T_{n_2}, where $n_2 \neq n_1$, these exists a unique surface S' of the same kind which may be obtained from S_1 by a transformation T'_{n_2} and from S_2 by a transformation T'_{n_1}.*

We say that four such surfaces S, S_1, S_2, S' form a *quatern.*

Let α_1, β_1, λ_1, μ_1, σ_1 denote the functions of the transformation T_{n_1} which gives rise to the surface S_1. The functions α'_1, β'_1, λ'_1, μ'_1, σ'_1 of a transformation T'_{n_2} of S_1 must satisfy the equations which are obtained from (I) on replacing ξ, θ, h and n by ξ_1, θ_1, h_1 and n_2. By means of the relations of § 3 these equations may be put in the form

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma'_1}{\partial u} = -\frac{\lambda_1}{\sigma_1} e^{-\xi} e^{-2\xi_1} K_1 \alpha'_1, \quad \frac{\partial \sigma'_1}{\partial v} = \frac{\lambda_1}{\sigma_1} e^{-\xi} e^{-2\xi_1} L_1 \beta'_1, \\
&\frac{\partial \lambda'_1}{\partial u} = -\frac{\lambda_1}{\sigma_1} e^{-\xi} (t_1 \varphi_1 + \psi_1) \alpha'_1, \quad \frac{\partial \lambda'_1}{\partial v} = \frac{\lambda_1}{\sigma_1} e^{-\xi} (t_1 \psi_1 + \varphi_1) \beta'_1, \\
&\frac{\partial \mu'_1}{\partial u} = -\alpha'_1 \left[\varphi_1 + \frac{\mu_1}{\sigma_1} e^{-\xi} (t_1 \varphi_1 + \psi_1)\right], \\
&\qquad\qquad\qquad \frac{\partial \mu'_1}{\partial v} = \beta'_1 \left[\psi_1 + \frac{\mu_1}{\sigma_1} e^{-\xi} (t_1 \psi_1 + \varphi_1)\right], \\
&\frac{\partial \alpha'_1}{\partial u} = \beta'_1 \left[\tanh\theta . \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial v} - \frac{\beta_1}{\lambda_1} M_1\right] + \mu'_1 \left[\varphi_1 + \frac{\mu_1}{\sigma_1} e^{-\xi} (t_1 \varphi_1 + \psi_1)\right] - \\
&\qquad\qquad - n_2 \sigma'_1 \frac{\lambda_1}{\sigma_1} e^{-\xi} (t_1 \varphi_1 + \psi_1) - n_2 \lambda'_1 \frac{\lambda_1}{\sigma_1} e^{-\xi} e^{-2\xi_1} K_1, \\
&\frac{\partial \alpha'_1}{\partial v} = -\beta'_1 \left[\coth\theta \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial u} - \frac{\alpha_1}{\lambda_1} N_1\right], \\
&\qquad\qquad\qquad \frac{\partial \beta'_1}{\partial u} = -\alpha'_1 \left[\tanh\theta \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial v} - \frac{\beta_1}{\lambda_1} M_1\right], \\
&\frac{\partial \beta'_1}{\partial v} = \alpha'_1 \left[\coth\theta \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial u} - \frac{\alpha_1}{\lambda_1} N_1\right] - \mu'_1 \left[\psi_1 + \frac{\mu_1}{\sigma_1} e^{-\xi} (t_1 \psi_1 + \varphi_1)\right] + \\
&\qquad\qquad + n_2 \sigma'_1 \frac{\lambda_1}{\sigma_1} e^{-\xi} (t_1 \psi_1 + \varphi_1) + n_2 \lambda'_1 \frac{\lambda_1}{\sigma_1} e^{-\xi} e^{-\xi_1} L_1,
\end{aligned}\right\} \text{(III)}$$

where

$$\left.\begin{aligned}
&t_1 = h + \frac{\mu_1}{\lambda_1} e^{\xi} = h_1 + \frac{\mu_1}{\lambda_1} e^{\xi_1}, \quad t'_1 = h_1 + \frac{\mu'_1}{\lambda'_1} e^{\xi_1}, \\
&\varphi_1 = \cosh\theta + t_1 \sinh\theta, \quad \psi_1 = \sinh\theta + t_1 \cosh\theta, \\
&K_1 = \sinh\theta \left[(t'^2_1 + 1)(t_1^2 + 1) - 4 t_1 t'_1\right] + 2 \cosh\theta (t_1 t'_1 - 1)(t'_1 - t_1), \\
&L_1 = \cosh\theta \left[(t'^2_1 + 1)(t_1^2 + 1) - 4 t_1 t'_1\right] + 2 \sinh\theta (t_1 t'_1 - 1)(t'_1 - t_1), \\
&M_1 = e^{\xi} \sinh\theta + \frac{\lambda_1}{\sigma_1} e^{-\xi} (t_1 \varphi_1 + \psi_1), \\
&N_1 = e^{\xi} \cosh\theta + \frac{\lambda_1}{\sigma_1} e^{-\xi} (t_1 \psi_1 + \varphi_1).
\end{aligned}\right\} \text{(III')}$$

To these equations must be added also the quadratic relation

$$\alpha'^2_1 + \beta'^2_1 + \mu'^2_1 = 2\lambda'_1 \sigma'_1 n_2 . \tag{IV}$$

In like manner if α_2, β_2, λ_2, μ_2, σ_2 are the functions of the transformation T_{n_2} by which S is transformed into S_2, the fundamental system of equations to be satisfied by the functions α'_2, β'_2, λ'_2, μ'_2, σ'_2 of a transformation T'_{n_1} of S_2 may be obtained from (III), (III') and (IV) by replacing the subscripts 1 and 2 by 2 and 1 respectively.

It is our purpose to show that there exists a surface S' which may be obtained without quadratures from S_1 by a transformation T'_{n_2} and from S_2 by a transformation T'_{n_1}.

§ 8. Relations for General Transformations of Ribaucour.

In this section we shall derive preparatory to the proof of the theorem of permutability certain relations connecting the transformation functions which hold for any transformation of Ribaucour possessing a theorem of permutability (*).

Equations (9) may be written in the form

$$\left.\begin{aligned} X'_1 &= a_{11} X' + a_{12} X'' + a_{13} X, \\ X''_1 &= a_{21} X' + a_{22} X'' + a_{23} X, \\ X_1 &= a_{31} X' + a_{32} X'' + a_{33} X, \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

where

$$\left.\begin{aligned} a_{11} = 1 - \frac{\alpha_1^2}{n_1 \sigma_1 \lambda_1}, \quad a_{22} &= -1 + \frac{\beta_1^2}{n_1 \sigma_1 \lambda_1}, \quad a_{33} = 1 - \frac{\mu_1^2}{n_1 \sigma_1 \lambda_1}, \\ a_{12} = -a_{21} = -\frac{\alpha_1 \beta_1}{n_1 \sigma_1 \lambda_1}, &\quad a_{13} = a_{31} = -\frac{\alpha_1 \mu_1}{n_1 \sigma_1 \lambda_1}, \\ a_{23} = -a_{32} &= \frac{\beta_1 \mu_1}{n_1 \sigma_1 \lambda_1} . \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

From (5) it follows that the coordinates x', y', z' of S', a transform of

(*) Cf. Bianchi, *Ricerche sulle superficie isoterme, etc.*, p. 18.

S_1 by a T'_{n_2}, are given by

$$x' = x_1 - \frac{1}{n_2 \sigma'_1} (\alpha'_1 X'_1 + \beta'_1 X''_1 + \mu'_1 X_1). \tag{70}$$

If S' is at the same time a transform of S_2 by a T''_{n_1}, we must have

$$x' = x_2 - \frac{1}{n_1 \sigma'_2} (\alpha'_2 X'_2 + \beta'_2 X''_2 + \mu'_2 X_2), \tag{71}$$

where X'_2, X''_2 and X_2 are of the form

$$\left.\begin{aligned} X'_2 &= b_{11} X' + b_{12} X'' + b_{13} X, \\ X''_2 &= b_{21} X' + b_{22} X'' + b_{23} X, \\ X_2 &= b_{31} X' + b_{32} X'' + b_{33} X, \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

a coefficient b_{ij} being given by a_{ij} in (69) when the subscripts 1 are replaced by 2.

If these two values of x' be equated, the resulting equation is reducible by means of equations of the form (5) for S_1 and S_2 and by (68) and (72) to the form

$$P X' + Q X'' + R X = 0.$$

There are two similar equations obtained by replacing the X' s by Y' s and Z' s. Hence we must have $P = Q = R = 0$. If we put for brevity

$$A_i = \frac{\alpha'_1 a_{1i} + \beta'_1 a_{2i} + \mu'_1 a_{3i}}{n_2 \sigma'_1}, \quad B_i = \frac{\alpha'_2 b_{1i} + \beta'_2 b_{2i} + \mu'_2 b_{3i}}{n_1 \sigma'_2}$$

for $i = 1, 2, 3$, this gives the three equations

$$\left.\begin{aligned} A_1 - B_1 &= \frac{\alpha_2}{n_2 \sigma_2} - \frac{\alpha_1}{n_1 \sigma_1}, \quad A_2 - B_2 = \frac{\beta_2}{n_2 \sigma_2} - \frac{\beta_1}{n_1 \sigma_1}, \\ A_3 - B_3 &= \frac{\mu_2}{n_2 \sigma_2} - \frac{\mu_1}{n_1 \sigma_1}. \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

Another set of necessary conditions may be obtained by considering the two sets of expressions for the direction-cosines of the principal directions and normal to S'. These are of the form

$$\begin{aligned} X'_3 &= a'_{11} X'_1 + a'_{12} X''_1 + a'_{13} X_1 = b'_{11} X'_2 + b'_{12} X''_2 + b'_{13} X_2, \\ X''_3 &= a'_{21} X'_1 + a'_{22} X''_1 + a'_{23} X_1 = b'_{21} X'_2 + b'_{22} X''_2 + b'_{23} X_2, \\ X_3 &= a'_{31} X'_1 + a'_{32} X''_1 + a'_{33} X_1 = b'_{31} X'_2 + b'_{32} X''_2 + b'_{33} X_2, \end{aligned}$$

where the functions a'_{ij} and b'_{ij} are of the same form as (69) in the functions of T'_{n_2} and T'_{n_1} respectively. Proceeding as above we find the following nine equations of condition:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\alpha'_1}{\lambda'_1} A_i - \frac{\alpha'_2}{\lambda'_2} B_i = a_{1i} - b_{1i}, \\
&\frac{\beta'_1}{\lambda'_1} A_i - \frac{\beta'_2}{\lambda'_2} B_i = a_{2i} - b_{2i}, \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \\
&\frac{\mu'_1}{\lambda'_1} A_i - \frac{\mu'_2}{\mu'_2} B_i = a_{3i} - b_{3i}.
\end{aligned}\right\} \tag{74}$$

In order that these equations may be consistent with (73), it is necessary that for the following matrix

$$\left\|\begin{matrix}
\alpha'_1 & \alpha'_2 & a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & a_{13} - b_{13} \\
\beta'_1 & \beta'_2 & a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & a_{23} - b_{23} \\
\mu'_1 & \mu'_2 & a_{31} - b_{31} & a_{32} - b_{32} & a_{33} - b_{33} \\
\lambda'_1 & \lambda'_2 & \dfrac{\alpha_2}{n_2 \sigma_2} - \dfrac{\alpha_1}{n_1 \sigma_1} & \dfrac{\beta_2}{n_2 \sigma_2} - \dfrac{\beta_1}{n_1 \sigma_1} & \dfrac{\mu_2}{n_2 \sigma_2} - \dfrac{\mu_1}{n_1 \sigma_1}
\end{matrix}\right\|$$

every minor of the third order involving the terms of the first two columns be zero. From the form of the expressions for the functions a_{ij} and b_{ij}, and the fact that the fundamental relation (II) is satisfied by T_{n_1} and T_{n_2} the preceding condition necessitates the proportionality of the corresponding minors of the second order of the matrices

$$\left\|\begin{matrix}
\alpha'_1 & \beta'_1 & \mu'_1 & \lambda'_1 \\
\alpha'_2 & \beta'_2 & \mu'_2 & \lambda'_2
\end{matrix}\right\|, \qquad
\left\|\begin{matrix}
\alpha_1 & -\beta_1 & \mu_1 & \lambda_1 \\
\alpha_2 & -\beta_2 & \mu_2 & \lambda_2
\end{matrix}\right\|.$$

From this it follows in turn that the minors of the third order of the following matrices must vanish

$$\left\|\begin{matrix}
\alpha'_1 & \beta'_1 & \mu'_1 & \lambda'_1 \\
\alpha_1 & -\beta_1 & \mu_1 & \lambda_1 \\
\alpha_2 & -\beta_2 & \mu_2 & \lambda_2
\end{matrix}\right\|, \qquad
\left\|\begin{matrix}
\alpha'_2 & \beta'_2 & \mu'_2 & \lambda'_2 \\
\alpha_1 & -\beta_1 & \mu_1 & \lambda_1 \\
\alpha_2 & -\beta_2 & \mu_2 & \lambda_2
\end{matrix}\right\|. \tag{75}$$

§ 9. Determination of T'_{n_2}.

We now apply the general results of the preceding section to the case of surfaces of Guichard.

For the sake of brevity we use the notation

$$(\lambda_1 \mu_2) = \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1,$$

and we consider the following identitstet which follows from (75):

$$\alpha'_1 (\mu_1 \beta_2) + \beta'_1 (\mu_1 \alpha_2) + \mu'_1 (\beta_1 \alpha_2) = 0. \tag{76}$$

If this equation be differentiated with respect to u and v separately, and the derivatives of the various functions be replaced by their expressions from (I) and (III), we obtain the following equations:

$$(\mu_1 \beta_2) \Big[(\alpha_1 \alpha'_1 - \beta_1 \beta'_1 + \mu_1 \mu'_1) \frac{M_1}{\lambda_1} - n_2 \sigma'_1 \frac{\lambda_1}{\sigma_1} e^{-\xi} (t_1 \varphi_1 + \psi_1) -$$

$$- n_2 \lambda'_1 \frac{\lambda_1}{\sigma_1} e^{-\xi} e^{-2\xi_1} K_1\Big] +$$

$$+ n_2 \sigma_2 (\mu'_1 \beta_1 + \beta'_1 \mu_1) M_2 - n_1 \sigma_1 (\mu'_1 \beta_2 + \beta'_1 \mu_2) M_1 = 0,$$

$$(\mu_1 \alpha_2) \Big[(\alpha_1 \alpha'_1 - \beta_1 \beta'_1 + \mu_1 \mu'_1) \frac{N_1}{\lambda_1} - n_2 \sigma'_1 \frac{\lambda_1}{\sigma_1} e^{-\xi} (t_1 \psi_1 + \varphi_1) -$$

$$- n_2 \lambda'_1 \frac{\lambda_1}{\sigma_1} e^{-\xi} e^{-\xi_1} L_1\Big] +$$

$$+ n_2 \sigma_2 (\mu'_1 \alpha_1 - \alpha'_1 \mu_1) N_2 - n_1 \sigma_1 (\mu'_1 \alpha_2 - \alpha'_1 \mu_2) N_1 = 0,$$

where M_2 and N_2 have expressions analogous to those of M_1 and N_1.

With the aid of the identities

$$\left.\begin{aligned} \beta'_1 (\mu_1 \lambda_2) + \mu'_1 (\beta_1 \lambda_2) + \lambda'_1 (\mu_1 \beta_2) = 0, \\ \alpha'_1 (\mu_1 \lambda_2) + \mu'_1 (\lambda_1 \alpha_2) + \lambda'_1 (\alpha_1 \mu_2) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

which arise from (75), the preceding equations are reducible to

$$\left.\begin{aligned} &\mu'_1 \Big\{ M_1 \left(\frac{\beta_1}{\lambda_1} \Phi - n_1 \sigma_1 \beta_2\right) - n_2 \sigma_2 \beta_1 M_2 + n_2 \frac{\lambda_1}{\sigma_1} e^{-\xi} e^{-2\xi_1} K_1 . (\lambda_1 \beta_2) \Big\} + \\ &+ \beta'_1 \Big\{ M_1 \left(\frac{\mu_1}{\lambda_1} \Phi - n_1 \sigma_1 \mu_2\right) - n_2 \sigma_2 \mu_1 M_2 + n_2 \frac{\lambda_1}{\sigma_1} e^{-\xi} e^{-2\xi_1} K_1 (\lambda_1 \mu_2) \Big\} + \\ &+ n_2 \sigma'_1 (\mu_1 \beta_2) \frac{\lambda_1}{\sigma_1} e^{-\xi} (t_1 \varphi_1 + \psi_1) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

$$\left.\begin{aligned}&\mu'_1 \left\{ N_1 \left(\frac{\beta_1}{\lambda_1} \Phi - n_1 \sigma_1 \beta_2\right) - n_2 \sigma_2 \beta_1 N_2 + n_2 \frac{\lambda_1}{\sigma_1} e^{-\xi} e^{-2\xi_1} L_1 (\lambda_1 \beta_2) \right\} + \\ &+ \beta'_1 \left\{ N_1 \left(\frac{\mu_1}{\lambda_1} \Phi - n_1 \sigma_1 \mu_2\right) - n_2 \sigma_2 \mu_1 N_2 + n_2 \frac{\lambda_1}{\sigma_1} e^{-\xi} e^{-2\xi_1} L_1 (\lambda_1 \mu_2) \right\} + \\ &+ n_2 \sigma'_1 (\mu_1 \beta_2) \frac{\lambda_1}{\sigma_1} e^{-\xi} (t_1 \psi_1 + \varphi_1) = 0,\end{aligned}\right\} \tag{78}$$

where

$$\Phi = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \mu_1 \mu_2 . \tag{79}$$

When one operates upon any other equation arising from (75) after the manner in which (76) was treated, the resulting equations are reducible by means of (75) to equations (78).

When one eliminates σ'_1 from the equations (78) and then obtains a linear relation between β'_1 and μ'_1, the latter may be replaced by

$$\left.\begin{aligned}\mu'_1 &= \rho \left[\mu_1 \Omega + \sigma_1 (\mu_1 \lambda_2) (n_1 t_1 - n_2 t'_1)\right], \\ \beta'_1 &= - \rho \left[\beta_1 \Omega + \sigma_1 (\beta_1 \lambda_2) (n_1 t_1 - n_2 t'_1)\right],\end{aligned}\right\} \tag{80}$$

where

$$\Omega = t_1 (\Phi - n_2 \sigma_2 \lambda_1 - n_1 \sigma_1 \lambda_2) - \lambda_1 \lambda_2 n_2 e^{-2\xi} (t_1 t_2 - 1) (t_2 - t_1). \tag{81}$$

From (77) and (80) it follows that

$$\left.\begin{aligned}\alpha'_1 &= \rho \left[\alpha_1 \Omega + \sigma_1 (\alpha_1 \lambda_2) (n_1 t_1 - n_2 t'_1)\right], \\ \lambda'_1 &= \rho \lambda_1 \Omega.\end{aligned}\right\} \tag{82}$$

We are now confronted with the probleme of evaluating t'_1 and ρ. To this end we remark that in consequence of the first two of equations (III') we must have

$$t'_1 - t_1 = \left(\frac{\mu'_1}{\lambda'_1} - \frac{\mu_1}{\lambda_1}\right) e^{\xi_1} . \tag{83}$$

Expressing the condition that μ'_1 and λ'_1 as given by (80) and (81) satisfy this relation, we have

$$\left.\begin{aligned}(t'_1 - t_1) \Omega &= (\mu_1 \lambda_2) (n_1 t_1 - n_2 t'_1) e^{-\xi} (1 - t_1^2) = \\ &= \lambda_1 \lambda_2 e^{-2\xi} (1 - t_1^2) (t_1 - t_2) (n_1 t_1 - n_2 t'_1) ;\end{aligned}\right\} \tag{84}$$

this second expression is a consequence of (36). With the aid of this result equations (80) and (82) can be given the form

$$\left.\begin{aligned}
\mu'_1 &= \quad \rho'\left[\mu_1\,(\mu_1\,\lambda_2)\,e^{-\xi}\,(1-t_1^2)+(\mu_1\,\lambda_2)\,\sigma_1\,(t'_1-t_1)\right],\\
\beta'_1 &= -\rho'\left[\beta_1\,(\mu_1\,\lambda_2)\,e^{-\xi}\,(1-t_1^2)+(\beta_1\,\lambda_2)\,\sigma_1\,(t'_1-t_1)\right],\\
\alpha'_1 &= \quad \rho'\left[\alpha_1\,(\nu_1\,\lambda_2)\,e^{-\xi}\,(1-t_1^2)+(\alpha_1\,\lambda_2)\,\sigma_1\,(t'_1-t_1)\right],\\
\lambda'_1 &= \quad \rho'\,\lambda_1\,(\nu_1\,\lambda_2)\,e^{-\xi}\,(1-t_1^2),
\end{aligned}\right\} \tag{85}$$

where

$$\rho'=\frac{\rho\,\Omega}{(\nu_1\,\lambda_2)\,e^{-\xi}\,(1-t_1^2)}\,. \tag{86}$$

If we put

$$\Psi_1=\Phi-n_2\,(\sigma_2\,\lambda_1+\sigma_1\,\lambda_2)-\lambda_1\,\lambda_2\,e^{-2\xi}\,n_2\,(t_1-t_2)^2, \tag{87}$$

equation (84) may be written

$$(t'_1-t_1)\left[\Psi_1+(n_2-n_1)\,\lambda_2\,\sigma_1\right]=e^{-\xi}\,(\nu_1\,\lambda_2)\,(1-t_1^2)\,(n_1-n_2). \tag{88}$$

By means of this expression equations (85) are reducible to the form

$$\left.\begin{aligned}
\mu'_1 &= \quad \bar\rho\left[\mu_1\,\Psi_1+\mu_2\,\lambda_1\,\sigma_1\,(n_2-n_1)\right],\\
\beta'_1 &= -\bar\rho\left[\beta_1\,\Psi_1+\beta_2\,\lambda_1\,\sigma_1\,(n_2-n_1)\right],\\
\alpha'_1 &= \quad \bar\rho\left[\alpha_1\,\Psi_1+\alpha_2\,\lambda_1\,\sigma_1\,(n_2-n_1)\right],\\
\lambda'_1 &= \quad \bar\rho\left[\lambda_1\,\Psi_1+\lambda_2\,\lambda_1\,\sigma_1\,(n_2-n_1)\right],
\end{aligned}\right\} \tag{89}$$

where

$$\bar\rho=\frac{\rho\,\Omega}{\Psi_1+(n_2-n_1)\,\lambda_2\,\sigma_1}\,.$$

Before determining $\bar\rho$ we derive from equations (78) the expressions for σ'_1. To this end we multiply these equations by $\cosh\theta$ and $\sinh\theta$ and add the resulting equations. In consequence of (46) and (III′) this gives on the elimination of μ'_1 and β'_1 by means of (89)

$$\sigma'_1 = \bar{\rho}\left[\sigma_1 \Psi_1 + \sigma_2 \lambda_1 \sigma_1 (n_2 - n_1) + \frac{\lambda_1 \lambda_2 e^{-2\xi} (n_2 - n_1)(t_1 - t_2)^2 \sigma_1 \Psi_1}{\Psi_1 + (n_2 - n_1) \lambda_2 \sigma_1}\right]. \tag{90}$$

In order to determine $\bar{\rho}$ we calculate the first derivatives of Ψ_1 and find

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_1}{\partial u} &= (n_1 - n_2)\,\alpha_2 \left[e^{\xi} \sinh\theta\, \sigma_1 + e^{-\xi} \lambda_1 (t_1 \varphi_1 + \psi_1)\right], \\ \frac{\partial \Psi_1}{\partial v} &= (n_1 - n_2)\,\beta_2 \left[e^{\xi} \cosh\theta\, \sigma_1 + e^{-\xi} \lambda_1 (t_1 \psi_1 + \varphi_1)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{91}$$

If we express the conditions that the functions λ'_1, α'_1, β'_1 satisfy the third and fourth of equations (III) we obtain

$$\frac{\partial \log \bar{\rho}\, \lambda_1 \sigma_1}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial \log \bar{\rho}\, \lambda_1 \sigma_1}{\partial v} = 0.$$

To within a constant multiplier $\bar{\rho}$ is $\frac{1}{\lambda_1 \sigma_1}$. Without loss of generality we take this constant equal to unity and obtain the following fundamental set of values:

$$\left.\begin{aligned} \mu'_1 &= \frac{1}{\lambda_1 \sigma_1}\left[\mu_1 \Psi_1 + \mu_2 \lambda_1 \sigma_1 (n_2 - n_1)\right], \\ \beta'_1 &= -\frac{1}{\lambda_1 \sigma_1}\left[\beta_1 \Psi_1 + \beta_2 \lambda_1 \sigma_1 (n_2 - n_1)\right], \\ \alpha'_1 &= \frac{1}{\lambda_1 \sigma_1}\left[\alpha_1 \Psi_1 + \alpha_2 \lambda_1 \sigma_1 (n_2 - n_1)\right], \\ \lambda'_1 &= \frac{1}{\lambda_1 \sigma_1}\left[\lambda_1 \Psi_1 + \lambda_2 \lambda_1 \sigma_1 (n_2 - n_1)\right], \\ \sigma'_1 &= \frac{1}{\lambda_1 \sigma_1}\left[\sigma_1 \Psi_1 + \sigma_2 \lambda_1 \sigma_1 (n_2 - n_1) + \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \frac{\lambda_1 \lambda_2 e^{-2\xi} (n_2 - n_1)(t_1 - t_2)^2 \sigma_1 \Psi_1}{\Psi_1 + (n_2 - n_1) \lambda_2 \sigma_1}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{V}$$

One shows readily that these expressions satisfy the systems (III) and (IV).

§ 10. Determination of S'.

From (V) we have

$$\alpha_1 \alpha'_1 - \beta_1 \beta'_1 + \mu_1 \mu'_1 = 2 \Psi_1 n_1 + \Phi (n_2 - n_1). \tag{92}$$

We put

$$\left.\begin{aligned} \chi_1 &= \Psi_1 + (n_2 - n_1) \lambda_2 \sigma_1 = \Phi - n_2 \sigma_2 \lambda_1 - n_1 \sigma_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2 e^{-2\xi} n_2 (t_1 - t_2)^2, \\ \chi_2 &= \Psi_2 + (n_1 - n_2) \lambda_1 \sigma_2 = \Phi - n_1 \sigma_1 \lambda_2 - n_2 \sigma_2 \lambda_1 - \lambda_1 \lambda_2 e^{-2\xi} n_1 (t_1 - t_2)^2. \end{aligned}\right\} \tag{93}$$

When the expressions (V) are substituted in (70), the resulting equation is reducible by (5), (68) and (69) to

$$\left.\begin{aligned} x' - x = \frac{n_1 - n_2}{n_1 n_2 \sigma'_1 \lambda_1 \chi_1} \Big\{ & X' (n_1 \lambda_1 \alpha_2 \chi_1 - n_2 \lambda_2 \alpha_1 \chi_2) + \\ & + X'' (n_1 \lambda_1 \beta_2 \chi_1 - n_2 \lambda_2 \beta_1 \chi_2) + \\ & + X \ (n_1 \lambda_1 \mu_2 \chi_1 - n_2 \lambda_2 \mu_1 \chi_2) \Big\}, \end{aligned}\right\} \tag{VI}$$

where

$$\lambda_1 \sigma'_1 \chi_1 = \lambda_1 \lambda_2 \sigma_1 \sigma_2 (n_1 - n_2)^2 + \Psi_1 \Psi_2 . \tag{94}$$

It is evident that the espressions (VI) and (94) are symmetric in the functions of the transformations T_{n_1} and T_{n_2}. Hence if we had applied the preceding methods to S_2 we should have been brought to the same result. Accordingly we have established the theorem of permutability stated at the beginning of § 7, provided we show that S' is different from S.

According to the theorem the case $n_2 = n_1$ is excluded. It follows from (VI) that if S' and S coincide, either $\chi_1 = \chi_2 = 0$, or

$$\frac{n_1 \lambda_1 \alpha_2}{n_2 \lambda_2 \alpha_1} = \frac{n_1 \lambda_1 \beta_2}{n_2 \lambda_2 \alpha_1} = \frac{n_1 \lambda_1 \mu_2}{n_2 \lambda_2 \mu_1} = \frac{\chi_2}{\chi_1} . \tag{95}$$

The first of these conditions necessitates

$$\Phi - n_2 \sigma_2 \lambda_1 - n_1 \sigma_1 \lambda_2 = 0, \quad t_1 - t_2 = 0, \tag{96}$$

as follows from (93). But the second of (96) gives $\frac{\mu_2}{\lambda_2} - \frac{\mu_1}{\lambda_1} = 0$, and consequently, the radii of the two spheres are equal, which means that S_1 and S_2 coincide.

If (95) is satisfied, then

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \rho ,$$

where ρ is a factor of proportionality, which is found to be constant when this value of μ_2 is substituted in equations (I) for $\frac{\partial \mu}{\partial u}$ and $\frac{\partial \mu}{\partial v}$.

Since the equations of the system (I) and (II) are homogeneous, the foregoing proportionalities may be replaced by

$$\alpha_2 = \alpha_1 , \quad \beta_2 = \beta_1 , \quad \mu_2 = \mu_1 . \tag{97}$$

From the equations for $\frac{\partial \lambda}{\partial u}$ and $\frac{\partial \lambda}{\partial v}$, it follows that

$$\lambda_2 - \lambda_1 = c,$$

where c is constant. In like manner from the equations for $\frac{\partial \alpha}{\partial u}$ and $\frac{\partial \beta}{\partial v}$, we obtain the condition

$$n_2 \lambda_2 t_2 = n_1 \lambda_1 t_1 .$$

If this equation be differentiated with respect to u and v separately, the resulting equations are reducible to

$$\alpha_1 e^{\xi} \sinh \theta = \left(\lambda_1 + \frac{n_2 c}{n_2 - n_1}\right) \frac{\partial \xi}{\partial u} , \quad \beta_1 e^{\xi} \cosh \theta = \left(\lambda_1 + \frac{n_2 c}{n_2 - n_1}\right) \frac{\partial \xi}{\partial v} .$$

In consequence of the expressions for $\frac{\partial \lambda}{\partial u}$ and $\frac{\partial \lambda}{\partial v}$ in (I), the foregoing equations lead by integration to

$$\lambda_1 = e^{\xi} + l_1 ,$$

by a suitable choice of the constant integration. From (I) and the foregoing, it follows that μ_1 is equal to $-h$ to within an additive constant. Hence we write the above results thus:

$$\lambda_1 = e^{\xi} + l_1 , \quad \mu_1 = m_1 - h, \quad \alpha_1 = \cosh \theta \frac{\partial \xi}{\partial u} , \quad \beta_1 = \operatorname{senh} \theta \frac{\partial \xi}{\partial v} . \tag{98}$$

Later (§ 15) we find that this transformation is not possible for the general surface of GUICHARD, and furthermore that it is impossible to have (98) and (97) hold at the same time; as $n_2 \neq n_1$. Accordingly we have the theorem:

If the constants n_1 and n_2 are unequal, the surface S' is distinct from S.

§ 11. CASE WHERE $n_2 = n_1$.

Thus far we have excluded from the discussion the case where $n_2 = n_1$. In taking it up for discussion, we observe that as a consequence of (VI), (93) and (94), S' coincides with S unless $\Psi_1 = 0$, since $\Psi_1 = \Psi_2$ for $n_2 = n_1$. But it follows from (91) that now $\Psi_1 = \text{const.}$ Hence we assume that the arbitrary constants in the functions of $\lambda_2, \mu_2, \alpha_2, \beta_2, \sigma_2$ satisfying (I) and (II) are chosen so that $\Psi_1 = 0$. Consequently

$$\Phi = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \mu_1 \mu_2 = n_1 (\sigma_2 \lambda_1 + \sigma_1 \lambda_2) + \lambda_1 \lambda_2 e^{-2\xi} n_1 (t_1 - t_2)^2. \tag{99}$$

From this and (II) we have

$$(\alpha_1 \lambda_2 - \alpha_2 \lambda_1)^2 + (\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1)^2 + (\mu_1 \lambda_2 - \mu_2 \lambda_1)^2 (1 + 2 n_1) = 0. \tag{100}$$

Hence when $1 + 2 n_1 \geqq 0$, the only real solutions of the problem are such that

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

As shown at the close of the last section, the factor of proportionality is constant and may be taken equal to unity. Thus S_2 coincides with S_1. However, when $2 n_1 + 1 < 0$, this condition is not imposed by (100). Accordingly we investigate this case.

From (81) we obtain as the expression for Ω

$$\Omega = \lambda_1 \lambda_2 e^{-2\xi} n_1 (t_1 - t_2)(t_1^2 - 1) = n_1 (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1) e^{\xi_1} \frac{\sigma_1}{\lambda_1}. \tag{101}$$

When this value is substituted in (84), the latter equation is satisfied identically, and hence does not, as in the general case, give an expression for $t'_1 - t_1$. In order to obtain the latter we proceed as follows.

As suggested by (88), we seek a function r such that

$$t'_1 - t_1 = r\,\lambda_1\,\lambda_2\,e^{-2\xi}\,(t_1 - t_2)\,(1 - t_1^2) = r\,\lambda_2\,\sigma_1\,e^{-\xi+\xi_1}\,(t_1 - t_2). \tag{102}$$

Evidently t'_1 must satisfy equations analogous to (39), namely

$$\frac{\partial t'_1}{\partial u} = \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial u}\operatorname{csch}\theta_1 - e^{\xi_1}\frac{\alpha'_1}{\lambda'_1}\right)(\cosh\theta_1 + t'_1\sinh\theta_1),$$

$$\frac{\partial t'_1}{\partial v} = \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial v}\operatorname{sech}\theta_1 - e^{\xi_1}\frac{\beta'_1}{\lambda'_1}\right)(\sinh\theta_1 + t'_1\cosh\theta_1),$$

in which α'_1, β'_1, λ'_1 have the values (80) and (82). If we express this condition, the resulting equations for the determination of r may be put in the form

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{r} + \lambda_2\,\sigma_1\right) &= \alpha_2\left[\lambda_1\,e^{-\xi}\,(t_1\,\varphi_1 + \psi_1) + \sigma_1\,e^{\xi}\sinh\theta\right], \\ \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{r} + \lambda_2\,\sigma_1\right) &= \beta_2\left[\lambda_1\,e^{-\xi}\,(t_1\,\psi_1 + \varphi_1) + \sigma_1\,e^{\xi}\cosh\theta\right]. \end{aligned}\right\} \tag{103}$$

These equations satisfy the condition of integrability (*) and hence r can be found by quadratures.

In order to find the coordinates of S' we must derive from equations (78) the expression for σ'_1 when μ'_1 and β'_1 have the values (80). This is

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sigma'_1\,t_1}{\rho} = \Omega&\left[t_1\,\sigma_1 - \lambda_1\,e^{-2\xi_1}\,(t_1\,t'_1 - 1)\,(t'_1 - t_1)\right] + \\ &+ \sigma_1\,n_1\,(t_1 - t'_1)\left[(\sigma_1\,t_2\,\lambda_2 - \sigma_2\,t_1\,\lambda_1) - t_1\,\lambda_1\,\lambda_2\,e^{-2\xi}\,(t_1 - t_2)^2\right]. \end{aligned}\right\} \tag{104}$$

From equations (5), (70), (68), (69), (80), and (82) we obtain

$$\begin{aligned} x' - x = \frac{(t'_1 - t_1)\,\rho}{n_1\,\sigma_1\,\sigma'_1\,t_1}\Big\{ & X'\left[n_1\,\sigma_1^2\,t_1\,(\alpha_1\,\lambda_2) + \alpha_1\,\lambda_1\,\Omega\,e^{-2\xi_1}\,t_1\,(t'_1 - t_1)\right] + \\ & + X''\left[n_1\,\sigma_1^2\,t_1\,(\beta_1\,\lambda_2) + \beta_1\,\lambda_1\,\Omega\,e^{-2\xi_1}\,t_1\,(t'_1 - t_1)\right] + \\ & + X\left[n_1\,\sigma_1^2\,t_1\,(\mu_1\,\lambda_2) + \mu_1\,\lambda_1\,\Omega\,e^{-2\xi_1}\,t_1\,(t'_1 - t_1)\right]\Big\}. \end{aligned}$$

(*) This can be seen directly from equations (91).

When the expression (102) of $t'_1 - t_1$ is substituted in this equation, the result is reducible to

$$\left.\begin{aligned} x' - x = \frac{r}{n_1 P} \Big\{ X' (\alpha_2 \lambda_1 - \alpha_1 \lambda_2 R) + X'' (\beta_2 \lambda_1 - \beta_1 \lambda_2 R) + \\ + X (\mu_2 \lambda_1 - \mu_1 \lambda_2 R) \Big\}, \end{aligned}\right\} \quad (105)$$

where

$$R = 1 - r e^{-2\xi} \lambda_1 \lambda_2 (t_1 - t_2)^2, \quad P = (1 + r \lambda_2 \sigma_1) R - r \lambda_1 \sigma_2 .$$

We have seen that r may be found by quadratures, but the latter may be avoided in the following manner. Let $\bar\alpha_2, \bar\beta_2, \bar\lambda_2, \bar\mu_2, \bar\sigma_2$ be a set of integrals of (I) and (II) for $n = \bar n$, such that as $\bar n$ approaches n_1, we have

$$\left.\begin{aligned} \lim (\bar\alpha_2) = \alpha_2, \quad \lim (\bar\beta_2) = \beta_2, \quad \lim (\bar\lambda_2) = \lambda_2, \\ \lim (\bar\mu_2) = \mu_2, \quad \lim (\bar\sigma_2) = \sigma_2 . \end{aligned}\right\} \quad (106)$$

The function $\dfrac{\bar\Psi}{n_1 - \bar n}$, where

$$\bar\Psi = \alpha_1 \bar\alpha_2 + \beta_1 \bar\beta_2 + \mu_1 \bar\mu_2 - \bar n (\bar\sigma_2 \lambda_1 + \sigma_1 \bar\lambda_2) - \lambda_1 \bar\lambda_2 e^{-2\xi} \bar n (t_1 - \bar t_2)^2, \quad (107)$$

satisfies the equations

$$\frac{\partial \bar\Psi}{\partial u} = (n_1 - \bar n) \bar\alpha_2 \left[\lambda_1 e^{-\xi} (t_1 \varphi_1 + \psi_1) + \sigma_1 e^{\xi} \sinh \theta \right],$$

$$\frac{\partial \bar\Psi}{\partial v} = (n_1 - \bar n) \bar\beta_2 \left[\lambda_1 e^{-\xi} (t_1 \psi_1 + \varphi_1) + \sigma_1 e^{\xi} \cosh \theta \right].$$

As $\bar n$ approaches n_1, we have accordingly that the solution of (103) is given by

$$\frac{1}{r} + \lambda_2 \sigma_1 = - \lim_{\bar n = n_1} \frac{d \bar\Psi}{d \bar n} .$$

Hence if we have a set of solutions of (I) and (II), looked upon for the time being as functions of n as well as of u and v, satisfying the conditions (106), the function r can be found by differentiation.

§ 12. Transformations of a Transform S_1.

As a consequence of the theorem of permutability we have the following theorem:

If one knows all the surfaces arising from a surface of Guichard *of the first type by transformations T_n, the transformations of these surfaces can be effected without integration.*

If S_1 is a surface arising from S by means of a transformation T_{n_1} whose functions are $\alpha_1, \beta_1, \lambda_1, \mu_1, \sigma_1$, the preceding theorem follows at once for the case of all transformations T_n of S_1, so long as $n \neq n_1$. In § 11 we saw also that by means of differentiation the transformations T_{n_1} of S_1 can be found where the functions $\alpha_2, \beta_2, \mu_2, \lambda_2, \sigma_2$ satisfy the conditions (I), (II), (99).

We consider now the remaining case where we take for $\alpha_2, \beta_2, \lambda_2, \mu_2, \sigma_2$ functions $\alpha, \beta, \lambda, \mu, \sigma$ looked upon as functions of n as well as of u and v, such that

$$\lim_{n=n_1} (\alpha) = \alpha_1, \quad \lim (\beta) = \beta_1, \quad \lim (\lambda) = \lambda_1,$$
$$\lim (\mu) = \mu_1, \quad \lim (\sigma) = \sigma_1.$$

Equation (VI) may be replaced by

$$\left.\begin{aligned} x' - x = \frac{n - n_1}{n\, n_1\, A} \Big\{ & X' \Big[(n \lambda \alpha_1 - n_1 \lambda_1 \alpha) \chi + n_1 \lambda_1^2 \alpha \lambda e^{-2\xi} (n - n_1)(t - t_1)^2\Big] + \\ & + X'' \Big[(n \lambda \beta_1 - n_1 \lambda_1 \beta) \chi + n_1 \lambda_1^2 \beta \lambda e^{-2\xi} (n - n_1)(t - t_1)^2\Big] + \\ & + X \Big[(n \lambda \mu_1 - n_1 \lambda_1 \mu) \chi + n_1 \lambda_1^2 \mu \lambda e^{-2\xi} (n - n_1)(t - t_1)^2\Big] \Big\}, \end{aligned}\right\} \qquad (108)$$

where

$$\left.\begin{aligned} \chi &= \alpha \alpha_1 + \beta \beta_1 + \mu \mu_1 - n \sigma \lambda_1 - n_1 \sigma_1 \lambda - \lambda \lambda_1 e^{-2\xi} n_1 (t - t_1)^2, \\ A &= \chi \Big[\chi + (n - n_1)(\lambda_1 \sigma - \lambda \sigma_1)\Big] + \\ &\qquad + \lambda \lambda_1 e^{-2\xi} (n_1 - n)(t - t_1)^2 \Big[\chi + (n - n_1) \lambda_1 \sigma\Big]. \end{aligned}\right\} \qquad (109)$$

From this expression for χ it follows that

$$\lim_{n=n_1} (\chi) = 0, \quad \lim_{n=n_1} \left(\frac{\partial \chi}{\partial n}\right) = 0.$$

We introduce a function B by the equation

$$\lim_{n=n_1} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial n^2}\right) = B(u,\, v),$$

and for the sake of brevity we write

$$\Pi = \lambda \lambda_1 e^{-\xi} (t - t_1)(n - n_1),$$

so that the expression for A assumes the form

$$A = \chi \left[\chi + (n - n_1)(\lambda_1 \sigma - \lambda \sigma_1)\right] - \frac{\Pi^2}{n\, n_1 \lambda \lambda_1} \left(\lambda_1 \sigma + \frac{\chi}{n - n_1}\right). \tag{110}$$

One sees that $\lim\limits_{n=n_1} (\Pi) = 0$, $\lim\limits_{n=n_1} \left(\dfrac{\partial \Pi}{\partial n}\right) = 0$. We put also

$$\lim_{n=n_1} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial n^2}\right) = C(u,\, v).$$

Referring to (108) and (110), we note that in order to evaluate the indeterminate form in the right-hand member of (108), we must differentiate the numerators and denominator four times with respect to n. If we adopt the notation

$$\bar{\lambda} = \lim_{n=n_1} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial n}\right), \quad \bar{\mu} = \lim_{n=n_1} \left(\frac{\partial \mu}{\partial n}\right), \quad \text{etc.},$$

we find the following expression for $(x' - x)$ when $n = n_1$:

$$\left. \begin{aligned} x' - x = \frac{1}{E} \Big\{ & X' (D \alpha_1 - n_1 \lambda_1^2 B \bar{\alpha}) + X'' (D \beta_1 - n_1 \lambda_1^2 B \bar{\beta}) + \\ & + X (D \mu_1 - n_1 \lambda_1^2 B \bar{\mu}) \Big\}, \end{aligned} \right\} \tag{111}$$

where

$$\left. \begin{aligned} D &= (\lambda_1 + n_1 \bar{\lambda})\, \sigma_1 B + 6\, n_1 C^2, \\ E &= n_1^2 \lambda_1 \left[6 B^2 + B (\lambda_1 \bar{\sigma} - \bar{\lambda} \sigma_1)\right] - 6\, C^2 \sigma_1 . \end{aligned} \right\} \tag{112}$$

Since only differentiations have been performed in arriving at this result, the theorem is established.

It is interesting to see that the functions B and C may be obtained by quadratures, which in some cases may be a simpler process than the foregoing. In fact from (109), (91) and (I) it follows that

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \chi}{\partial u} &= (n - n_1)\, e^{-\xi} (\lambda\, \alpha_1 - \lambda_1\, \alpha)\, (t\, \varphi + \psi),\\ \frac{\partial \chi}{\partial v} &= (n - n_1)\, e^{-\xi} (\lambda\, \beta_1 - \lambda_1\, \beta)\, (t\, \psi + \varphi),\end{aligned}\right\} \tag{113}$$

and

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \Pi}{\partial u} &= (n - n_1) \left\{ (\mu\, \alpha_1 - \mu_1\, \alpha)\, e^{\xi} \sinh\theta + (\alpha_1 \lambda - \alpha \lambda_1) (\cosh\theta + h \sinh\theta) \right\},\\ \frac{\partial \Pi}{\partial v} &= (n - n_1) \left\{ (\mu\, \beta_1 - \mu_1\, \beta)\, e^{\xi} \cosh\theta + (\beta_1 \lambda - \beta \lambda_1) (\sinh\theta + h \cosh\theta) \right\}.\end{aligned}\right\} \tag{114}$$

Hence B and C satisfy the equations

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial u} &= e^{-\xi} (\bar\lambda\, \alpha_1 - \lambda_1\, \bar\alpha)\, (t_1\, \varphi_1 + \psi_1),\\ \frac{\partial B}{\partial v} &= e^{-\xi} (\bar\lambda\, \beta_1 - \lambda_1\, \bar\beta)\, (t_1\, \psi_1 + \varphi_1),\\ \frac{\partial C}{\partial u} &= (\bar\mu\, \alpha_1 - \mu_1\, \bar\alpha)\, e^{\xi} \sinh\theta + (\alpha_1 \bar\lambda - \bar\alpha \lambda_1) (\cosh\theta + h \sinh\theta),\\ \frac{\partial C}{\partial v} &= (\bar\mu\, \beta_1 - \mu_1\, \bar\beta)\, e^{\xi} \cosh\theta + (\beta_1 \bar\lambda - \bar\beta \lambda_1) (\sinh\theta + h \cosh\theta).\end{aligned}\right\} \tag{115}$$

§ 13. Spherical Surfaces and Their Transformations.

If we put

$$e^{\xi} = a, \quad h = 0, \tag{116}$$

equations (21) are satisfied identically and equation (22) reduces to

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + \sinh\theta \cosh\theta = 0. \tag{117}$$

Now

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{E} &= a \sinh \theta, \quad \sqrt{G} = a \cosh \theta, \\ D &= D'' = a \sinh \theta \cosh \theta, \\ \rho_1 &= a \tanh \theta, \quad \rho_2 = a \coth \theta.\end{aligned}\right\} \tag{118}$$

From the latter it follows that $\rho_1 \rho_2 = a^2$. Hence S in this case is a *spherical* surface. Moreover, it can be shown that the fundamental coefficients of any spherical surface can be put in the form (118) (*).

Conversely, suppose that ξ is constant. It follows from (21) that h is constant. If $h \neq 0$, and we put

$$\cosh k = \frac{h}{\sqrt{h^2 - 1}}, \quad \sinh k = \frac{1}{\sqrt{h^2 - 1}},$$

$$u' = \sqrt{h^2 - 1}\, u, \quad v' = \sqrt{h^2 - 1}\, v, \quad \theta' = \theta + k,$$

the function θ' satisfies an equation of the form (117). Hence it is perfectly general to take $h = 0$. From these results we have the theorem:

Spherical surfaces are surfaces of GUICHARD *of the first kind; they are characterized analytically by the condition $\xi = const.$*

In the present case as follows from (26) the functions of the associate surface $\overline{S}$ have the values

$$e^{\overline{\xi}} = \frac{1}{a}, \quad \sinh \overline{\theta} = -\sinh \theta, \quad \cosh \overline{\theta} = \cosh \theta,$$

and

$$\overline{\rho}_1 = \frac{1}{a} \tanh \theta, \quad \overline{\rho}_2 = \frac{1}{a} \coth \theta.$$

Hence *the associate surface of a spherical surface is a spherical surface, homothetic to the original surface.*

We consider the transformations T_n of a spherical surface S. If the new surface is to be spherical, it follows from (41) that $e^{\xi_1} = e^{\xi} = a$, and from (36) it follows that $h_1 = 0$. Hence S and S_1 have the same constant Gaussian curvature. From (45) we see that if e^{ξ_1} is to be equal to a, we must have

$$\frac{\sigma}{\lambda} + \frac{\upsilon^2}{\lambda^2} - \frac{1}{a^2} = 0. \tag{119}$$

(*) E. p. 278.

If we put $e^{\xi} = a$, $h = 0$, in the system (I), we obtain a system which is entirely consistent, and ordinarily the condition (119) is not satisfied. Hence we have the theorem:

Of the ∞^4 transforms of a spherical surface ∞^3 are spherical surfaces. We consider these transformations further.

If σ be eliminated from (119) and (II), we obtain

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2n\frac{\lambda^2}{a^2} + (1 + 2n)\mu^2 = 0. \tag{120}$$

One sees that if $0 > n > -1/2$, the surface S_1 is imaginary.

If σ be eliminated from (I) by means of (119), we obtain the system

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\lambda}{\partial u} = a\,\alpha\sinh\theta, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial v} = a\,\beta\cosh\theta,\\
&\frac{\partial\mu}{\partial u} = -\alpha\cosh\theta, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial v} = -\beta\sinh\theta,\\
&\frac{\partial\alpha}{\partial u} = -\beta\frac{\partial\theta}{\partial v} + \mu(1 + 2n)\cosh\theta + \frac{2\lambda n}{a}\sinh\theta, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial v} = \beta\frac{\partial\theta}{\partial u},\\
&\frac{\partial\beta}{\partial u} = \alpha\frac{\partial\theta}{\partial v}, \quad \frac{\partial\beta}{\partial v} = -\alpha\frac{\partial\theta}{\partial u} + \mu(1 + 2n)\sinh\theta + \frac{2\lambda n}{a}\cosh\theta.
\end{aligned}\right\} \tag{121}$$

Since the functions α, β, λ, μ must satisfy (120), we verify that there are ∞^3 transformations of spherical surfaces into spherical surfaces.

Suppose now that S_1 and S_2 are two spherical surfaces which are obtained from S by transformations T_{n_1} and T_{n_2}. In order to make use of the general formulas, we retain σ_1 and σ_2, given by

$$\frac{\sigma_1}{\lambda_1} + \frac{\mu_1^2}{\lambda_1^2} - \frac{1}{a^2} = 0, \quad \frac{\sigma_2}{\lambda_2} + \frac{\mu_2^2}{\lambda_2^2} - \frac{1}{a^2} = 0. \tag{122}$$

If the fourth surface S' of the quatern is to be spherical also, we must have

$$\frac{\sigma_1^1}{\lambda_1^1} + \frac{\mu_1^{12}}{\lambda_1^{12}} - \frac{1}{a^2} = 0. \tag{123}$$

If the values of the functions as given by (V) be substituted in this equation, the result is reducible to

$$\left.\begin{aligned}
&\Psi_1\left(\frac{\sigma_1}{\lambda_1} + \frac{\mu_1^2}{\lambda_1^2} - \frac{\sigma_2}{\lambda_2} - \frac{\mu_2^2}{\lambda_2^2}\right) + (n_2 - n_1)\left[\lambda_2\,\sigma_1\left(\frac{\sigma_1}{\lambda_1} - \frac{\sigma_2}{\lambda_2}\right) + \right.\\
&\left. + 2\lambda_2\,\sigma_1\frac{\mu_1}{\lambda_1}\left(\frac{\mu_1}{\lambda_1} - \frac{\mu_2}{\lambda_2}\right) + \lambda_1\lambda_2\left(\frac{\mu_1}{\lambda_1} - \frac{\mu_2}{\lambda_2}\right)^2\left(\frac{\mu_1^2}{\lambda_1^2} - \frac{1}{a^2}\right)\right] = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{124}$$

One finds readily that this equation is satisfied identically by (122). Hence

If S_1 and S_2 are spherical surfaces obtained from a spherical surface S by transformations T_{n_1} and T_{n_2}, the fourth surface S' of the quatern is spherical and all four surfaces have the same constant Gaussian curvature.

Equations (123) and (124) follow on expressing the condition that $e^{\xi'} = a$. We raise the question if this is possible, when the surfaces S_1 and S_2 are not spherical. Now equation (124) must hold. We write it in the form

$$\chi_1 + (n_2 - n_1) \frac{\left(\frac{\sigma_1}{\lambda_1} + \frac{\mu_1^2}{\lambda_1^2} - \frac{1}{a^2}\right) \lambda_1 \lambda_2 \left(\frac{\mu_1}{\lambda_1} - \frac{\mu_2}{\lambda_2}\right)^2}{\frac{\sigma_1}{\lambda_1} + \frac{\mu_1^2}{\lambda_1^2} - \frac{\sigma_2}{\lambda_2} - \frac{\mu_2^2}{\lambda_2^2}} = 0, \tag{125}$$

where χ_1 is given by (93). Moreover, in the general case we have

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \chi_1}{\partial u} &= (n_1 - n_2) \frac{1}{a} (\lambda_1 \alpha_2 - \lambda_2 \alpha_1)(t_1 \varphi_1 + \psi_1), \\ \frac{\partial \chi_1}{\partial v} &= (n_1 - n_2) \frac{1}{a} (\lambda_1 \beta_2 - \lambda_2 \beta_1)(t_1 \psi_1 + \varphi_1). \end{aligned}\right\} \tag{126}$$

If equation (125) be differentiated separately with respect to u and v, and in the reduction use be made of (126) and (I), the resulting equations are of the form

$$A \cosh \theta + B \sinh \theta = 0, \quad A \sinh \theta + B \cosh \theta = 0,$$

where A and B are determinate functions. It is evident that A and B must be zero. Since $n_1 \neq n_2$, this gives, if we denote by P_1 and P_2 the left-hand members of equations (122),

$$(P_1 - P_2)\left(\frac{\mu_2}{\lambda_2} P_1 - \frac{\mu_1}{\lambda_1} P_2\right) = 0,$$

$$\frac{1}{a^2}(P_1 - P_2)^2 + \left(\frac{\mu_2}{\lambda_2} P_1 - \frac{\mu_1}{\lambda_1} P_2\right) = 0.$$

Hence P_1 and P_2 must be zero, and consequently S_1 and S_2 must be spherical.

We apply also to the case of spherical surfaces the results of § 11. One finds readily from (80), (102) and (103) that

$$\frac{\mu_1^1}{\lambda_1^1} = \frac{\mu_1}{\lambda_1} + \frac{1}{a}(t'_1 - t_1) = \frac{\mu_1}{\lambda_1} + r \frac{\sigma_1}{\lambda_1} (\mu_1 \lambda_2 - \mu_2 \lambda_1),$$

$$\frac{\sigma'_1}{\lambda'_1} = \frac{\sigma_1}{\lambda_1}\left[1 - 2r\frac{\mu_1}{\lambda_1}(\mu_1\lambda_2 - \mu_2\lambda_1) - r^2\frac{\sigma_1}{\lambda_1}(\mu_1\lambda_2 - \mu_2\lambda_1)^2\right].$$

Since these values satisfy (123), the surface S' is spherical.

When one adopts the limiting process in finding the transforms of S_1 as set forth in the preceding section, if both S_1 and $\bar{S}_2$ are spherical, the condition (123) is satisfied durinig the limiting process and consequently S' is spherical. In view of these results we have the theorem:

When one knows the transformations of a spherical surface S into spherical surfaces, the similar transformations of the latter require differentiation at most.

§ 14. Envelope of the Circle-Plane for Transformations of Surfaces of Constant Curvature. The Surface of Centres of the Spheres.

When S is a spherical surface, the functions p, q, ω, ψ which enter in the equations of the envelope S_0 of the circle-plane of a transformations (cf. § 4) take on the values

$$p = -\frac{a^2}{2n\lambda}, \quad q = -\frac{a^2}{2n\lambda}\mu(1+2n),$$

$$\omega = -a^2\frac{\mu}{\lambda}, \quad \psi = \frac{\lambda}{2}\left(1 - a^2\frac{\mu^2}{\lambda^2}\right).$$

Now the linear element of S_0 (55) is

$$ds^2 = d\omega^2 + 2\,dp\,d\psi$$

$$= a^4\left(d\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 - a^4\frac{\mu}{\lambda}\cdot\frac{1}{n}\,d\frac{\mu}{\lambda}\cdot\frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{a^2}{2n}\left(1 - a^2\frac{\mu^2}{\lambda^2}\right)\frac{d\lambda^2}{\lambda^2}.$$

If we put

$$\bar{x} = -a^2\frac{\mu}{\lambda}, \quad \bar{y} - i\bar{z} = -\frac{a^2}{2n\lambda}, \quad \bar{y} + i\bar{z} = \lambda\left(1 - a^2\frac{\mu^2}{\lambda^2}\right),$$

the surface of coordinates $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ is applicable to S_0. Moreover, on eliminating μ and λ from the above equations, we see that

$$\bar{y}^2 + \bar{z}^2 - \frac{\bar{x}^2}{2n} = -\frac{a^2}{2n}. \tag{127}$$

Hence *when n is negative and different from $-1/2$, the envelope of the circle-plane is applicable to an ellipsoid of revolution; when n is positive, to a hyperboloid of revolution of two sheets; when $n = -1/2$, to a sphere.*

We shall show that the surface Σ of centres of the spheres is the surface complementary to S_0, when the geodesics on the latter are the deforms of the meridians on (127). In order to do this we must show that the joins of corresponding points on Σ and S_0 are tangent to the orthogonal trajectories of the curve $\frac{\mu}{\lambda} = \text{const.}$ on S_0, and that they are the intersection of the tangent planes to Σ and S_0.

The orthogonal trajectories are defined by $\lambda^2 - a^2\mu^2 = \text{const.}$ and from (121) it follows that along one of these geodesics

$$\alpha\psi\, du + \beta\varphi\, dv = 0.$$

Hence the direction-cosines of the tangent to one of these curves are proportional to

$$\beta\varphi\frac{\partial x_0}{\partial u} - \alpha\psi\frac{\partial x_0}{\partial v}, \quad \beta\varphi\frac{\partial y_0}{\partial u} - \alpha\psi\frac{\partial y_0}{\partial v}, \quad \beta\varphi\frac{\partial z_0}{\partial u} - \alpha\psi\frac{\partial z_0}{\partial v}.$$

With the aid of (52) we find that

$$\beta\varphi\frac{\partial x_0}{\partial u} - \alpha\psi\frac{\partial x_0}{\partial v} = \alpha^2\,\frac{\alpha\beta\mu}{\lambda^2}\left[p\,(\alpha X' + \beta X'') + \left(q + \frac{\lambda}{p}\right)X\right].$$

But from (3) and (49) it follows that the quantity in parenthesis is equal to $x_0 - \xi$. Hence the first condition is satisfied.

The direction-cosines of the tangent plane to S_0 are proportional to

$$\beta X' - \alpha X'', \quad \beta Y' - \alpha Y'', \quad \beta Z' - \alpha Z''.$$

One shows readily that to within a factor the direction-cosines of the normal to the surface Σ are of the form

$$\alpha X' + \beta X'' + \mu X.$$

Since these two normals are perpendicular to the joins of corresponding points on S_0 and Σ, we have proved that Σ is complementary to S_0.

Bianchi has shown (*) that every deform of a quadric of revolution is applicable to the complementary surface determined by the tangents to the deforms of the meridians. Hence we have the following theorem:

The envelope of the circle-plane of a transformation T_n of spherical surfaces and the surface of centres of the spheres of T_n are the focal surfaces of a normal congruence, and are applicable to one another and to an hyperboloid or ellipsoid of revolution according as n is positive or negative ($\neq -1/2$).

We have seen that S_0 is imaginary, when $0 < n < -1/2$. Hence the real transformations are those for which the surface of centres is applicable to a prolate ellipsoid of revolution or an hyperboloid of two sheets of revolution. Consequentty they are the transformations growing out of the beautiful theorem announced by Guichard (**), which have been the starting point of the recent theory of surfaces applicable to quadrics. Bianchi (***) showed that transformations of this kind can be obtained by combining certain conjugate-imaginary transformations of Bäcklund for spherical surfaces.

Pseudospherical surfaces are surfaces of Guichard of the second kind, being characterized by $\xi =$ const. We shall not repeat the preceding investigations for this kind of surfaces, but it is worth while to call attention to a few results.

For pseudospherical surfaces we have the relation

$$\sigma = -\lambda\left(\frac{1}{a^2} + \frac{\mu^2}{\lambda^2}\right). \tag{119*}$$

From this equation and (II) it follows that if the transformation is to be real n must be negative.

The functions determining S_0, the envelope of the circle-plane have the values

$$p = \frac{a^2}{2n\lambda}, \quad q = \frac{a^2\mu}{2n\lambda}(1+2n), \quad \omega = a^2\frac{\mu}{\lambda}, \quad \psi = \frac{\lambda}{a}\left(1 + a^2\frac{\mu^2}{\lambda^2}\right).$$

If we put

$$\bar{x} = a^2\frac{\mu}{\lambda}, \quad \bar{y} - i\bar{z} = \frac{a^2}{2n\lambda}, \quad \bar{y} + i\bar{z} = \lambda\left(1 + n^2\frac{\mu^2}{\lambda^2}\right),$$

(*) *Lezioni*, vol. III, p. 281.

(**) *Sur la déformation des quadriques de révolution.* Comptes Rendus, 23 janvier, 1899.

(***) *Lezioni*, vol. II, pp. 464-465.

the locus of the point $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ is the quadric

$$\bar{y}^2 + \bar{z}^2 = \frac{a^2}{2n}\left(1 + \frac{\bar{x}^2}{a^2}\right). \tag{127*}$$

When $n = -\frac{1}{2}$, S_0 is a pseudospherical surface. Since

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{\lambda^2}{a^2}, \quad p = -\frac{a^2}{\lambda}, \quad q = 0,$$

we find that $\sum (x - x_0)^2 = a^2$. Hence S and S_1 are two Bianchi transforms of S_0.

For the other values of n, S_0 and the surface Σ of centres of the spheres are the focal surfaces of a normal congruence of tangents to the geodesics on S_0 corresponding to the meridians on (127*). Bianchi (*) has shown that the ellipsoid (127*) is applicable to a hyperbolic sinusoid or to the abridged catenoid according as $2n$ is less or greater than -1. Consequently these real transformations can be obtained by combining Bäcklund transformations B_σ and $B_{-\sigma}$, as Bianchi (**) has shown.

§ 15. Special Surfaces of Guichard of The First Kind.

The remainder of this memoir will be devoted to the study of a class of surfaces of Guichard of the first kind, each of which admits several transformations T_n with a common circle-plane.

From (48) and (I) it follows that if S_1 and S_2 are two transforms determined by α_1, β_1, λ_1, μ_1, σ_1, n_1 and α_2, β_2, λ_2, μ_2, σ_2, n_2 respectively such that the circle-plane is the same for both transformations, we must have

$$\frac{\partial(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial(u, v)} = 0, \quad \frac{\partial(\mu_1, \mu_2)}{\partial(u, v)} = 0.$$

Since λ satisfies the point equation of S there can at most be a linear relation between λ_1 and λ_2; the same is true of μ_1 and μ_2. Since equations (I)

(*) *Lezioni*, vol. III, p. 283.
(**) *Lezioni*, vol. II, p. 432.

and (II) are homogeneous, the most general case to be considered is

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \lambda', \quad \mu_2 = \mu_1 + \mu', \quad n_2 = n_1 + n', \tag{128}$$

where λ', μ' and n' are constants. We must have also

$$\alpha_2 = \alpha_1, \quad \beta_2 = \beta_1. \tag{129}$$

In order that the expressions in (I) for $\frac{\partial \alpha}{\partial u}$ and $\frac{\partial \beta}{\partial v}$ shall be the same for the two transformations, the following equations must be satisfied:

$$\left.\begin{aligned} &\mu' + 2 n_2 \lambda_2 e^{-\xi} t_2 - 2 n_1 \lambda_1 e^{-\xi} t_1 = 0, \\ &\mu' h + (n_2 \sigma_2 - n_1 \sigma_1) e^{\xi} + n_2 \lambda_2 e^{-\xi} (1 + t_2^2) - n_1 \lambda_1 e^{-\xi} (1 + t_1^2) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{130}$$

If these equations be differentiated with respect to u and v, the results are reducible in consequence of (I) to

$$\frac{n_2 \lambda_2 - n_1 \lambda_1}{n_2 - n_1} e^{-\xi} \operatorname{csch} \theta \frac{\partial \xi}{\partial u} = \alpha, \quad \frac{n_2 \lambda_2 - n_1 \lambda_1}{n_2 - n_1} e^{-\xi} \operatorname{sech} \theta \frac{\partial \xi}{\partial v} = \beta.$$

When these expressions for α and β are substituted in equations (I) for $\frac{\partial \lambda}{\partial u}$ and $\frac{\partial \lambda}{\partial v}$, one finds by integration that

$$\xi = c \,.\, \log (n_2 \lambda_2 - n_1 \lambda_1),$$

where c is the constant of integration. Without loss of generality we choose c so that

$$\frac{n_2 \lambda_2 - n_1 \lambda_1}{n_2 - n_1} = e^{\xi}, \quad \alpha = \operatorname{csch} \theta \frac{\partial \xi}{\partial u}, \quad \beta = \operatorname{sech} \theta \frac{\partial \xi}{\partial v}. \tag{131}$$

With this choice the equations (I) for $\frac{\partial \lambda}{\partial u}$, $\frac{\partial \lambda}{\partial v}$, $\frac{\partial \mu}{\partial u}$ and $\frac{\partial \mu}{\partial v}$ assume such a form that we have

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= e^{\xi} + l_1, & \lambda_2 &= e^{\xi} + l_2, \\ \mu_1 &= -h + m_1, & \mu_2 &= -h + m_2, \end{aligned}\right\} \tag{132}$$

where the l's and m's are constants. From (130), (131), (132) we obtain

$$n_2 l_2 - n_1 l_1 = 0, \quad (m_2 - m_1) + 2 (n_2 m_2 - n_1 m_1) = 0. \tag{133}$$

When the above values for α and β are substituted in equations (41), the latter become

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial u} = \sinh \theta_1 \frac{\alpha_1}{\lambda_1} (l_1 + e^{\xi_1}), \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial v} = -\cosh \theta_1 \frac{\beta_1}{\mu_1} (l_1 + e^{\xi_1}). \tag{134}$$

Comparing these equations with the first two of (31), we have from the latter by integration

$$\sigma_1 = \frac{c_1}{l_1 + e^{\xi_1}}, \tag{135}$$

where c_1 is the constant of integration.

If we replace the first of equations (133) by

$$n_2 l_2 = n_1 l_1 = -\frac{1}{2} A, \tag{136}$$

the second is equivalent to

$$A = \frac{l_1 l_2 (m_2 - m_1)}{l_1 m_2 - l_2 m_1}. \tag{137}$$

From (135) and (45) we get

$$\sigma_1 = \frac{1}{l_1} \left[c_1 - (l_1 + e^{\xi}) e^{-\xi} (1 - t_1^2) \right], \tag{138}$$

where now in consequence of (132) we have from (36)

$$t_1 = \frac{l_1 h + m_1 e^{\xi}}{l_1 + e^{\xi}}. \tag{139}$$

When the above values for α, β, λ, μ, σ are substituted in equation (II), we obtain

$$h^2 + \operatorname{csch}^2 \theta \left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)^2 + \operatorname{sech}^2 \theta \left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)^2 + A e^{-\xi} (h^2 - 1) + 2 B h + C e^{\xi} + D = 0, \tag{VII}$$

A, B, C, D being constants, given by (137) and by

$$\left.\begin{aligned} B = -(1 + 2 n_1) m_1, \quad C = \frac{2 n_1}{l_1} (1 - m_1^2 - c_1), \\ D = m_1^2 + 4 n_1 - 2 c_1 n_1. \end{aligned}\right\} \tag{140}$$

From these follow

$$\left.\begin{aligned} B &= m_1\left(\frac{A}{l_1}-1\right), \quad C = -\frac{2\,n_1\,c_1}{l_1}+\frac{m_1^2-1}{l_1^2}A, \\ D &= -2\,n_1\,c_1+m_1^2-2\,\frac{A}{l_1}, \quad l_1\,C-D=\frac{A}{l_1}+m_1^2\left(\frac{A}{l_1}-1\right)\cdot \end{aligned}\right\} \tag{141}$$

If l_1 and m_1 be eliminated from the first and last of these equations and (137), we obtain the following cubic for n_1:

$$(D-2\,n_1)\,2\,n_1\,(1+2\,n_1)+A\,C\,(1+2\,n_1)-B^2\,2\,n_1=0. \tag{142}$$

In consequence of (137) and (140) the expressions for λ_1, μ_1, σ_1 may be given the form

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= e^{\xi}-\frac{A}{2\,n_1}, \quad \mu_1=-\left(\frac{B}{1+2\,n_1}+h\right), \\ n_1\,\sigma_1 &= -\frac{C}{2}+n_1\,e^{-\xi}\,(h^2-1)-n_1\,\frac{\mu_1^2}{\lambda_1}\cdot \end{aligned}\right\} \tag{143}$$

Conversely, suppose we have a surface S of GUICHARD of the first kind whose functions satisfy equation (VII). For convenience we refer to S as a *special surface of class* ($A\,B\,C\,D$), thus putting the constants in evidence. Each of the roots of (142) when substituted in (143) gives a set of functions which together with the values (131) of α and β satisfy equations (I) and (II). Hence if the roots if (142) are distinct, three circles lie in the same plane, and this plane is unique for the surface.

In § 3 we observed that a transformation of RIBAUCOUR of a surface of GUICHARD is always given by

$$\lambda = e^{\xi}+l, \quad \mu=-h+m.$$

But if this is to be a transformation T_n, all the foregoing steps follow at once and so we have the theorem:

A necessary and sufficient condition that a surface be a special surface of GUICHARD *of the first kind is that equations* (I) *admit the solutions*

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= e^{\xi}+l_1, \quad \mu_1=-h+m_1, \quad \alpha_1=\operatorname{csch}\theta\,\frac{\partial\xi}{\partial u}, \\ \beta_1 &= \operatorname{sech}\theta\,.\,\frac{\partial\xi}{\partial v}, \quad \sigma_1=\frac{1}{l_1}\left[c_1-(l_1+e\xi)\,e^{-\xi}\,(1-l_1^2)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{144}$$

It should be observed that the functions of a spherical surface satisfies equation (VII). However, in this case λ_1 and μ_1, as given by (144), are constants, and α and β are zero. Accordingly we exclude spherical surfaces when considering special surfaces.

§ 16. Complementary Transformations of Special Surfaces. Envelope of the Singular Circle-Plane.

We have just seen that in general a special surface admits of three transformations for each of which the functions are of the form (144). We say that these functions determine *complementary* transformations of S and that a resulting surface S_1 is *complementary* to S.

From (67) and (36) it follows that the functions of the inverse transformation are, to within the constant factor $1/l.\ c.$,

$$\left.\begin{aligned} \alpha^{-1} = \operatorname{csch}\theta_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial u}, \quad \beta^{-1} = \operatorname{sech}\theta_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial v}, \quad \lambda^{-1} = l_1 + e^{\xi_1}, \\ \mu^{-1} = m_1 - h_1, \quad \sigma^{-1} = \frac{1}{l_1 + e^{\xi}} . \end{aligned}\right\} \tag{145}$$

Since all of the equations are homogeneous this constant factor is unessential. Furthermore, one notices that the same constants l_1, m_1, n_1 appear in (145) as in (144), and in the same way. Hence

If S is a special surface of Guichard *of class $(A\,B\,C\,D)$, each complementary surface is a special surface of the same class.*

From (26) we find that

$$\operatorname{csch}\bar{\theta}\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial u} = \operatorname{csch}\theta\frac{\partial \xi}{\partial u}, \quad \operatorname{sech}\bar{\theta}\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial v} = \operatorname{sech}\theta\frac{\partial \xi}{\partial v} .$$

Combining this result with the first of (26), we have from (VII) that

The surface $\bar{S}$ associate to a special surface of Guichard *of class $(A\,B\,C\,D)$ is a special surface of class (C, B, A, D).*

We have seen that the circle-plane of a complementary transformation of a special surface of Guichard possesses the property that in general it contains three circles associated with complementary transformations. It will be found that the envelope of this ***singular circle-plane*** is applicable to a quadric.

If we apply the results of § 4 to the particular case under discussion, the functions ω, r, ψ have the form

$$\left.\begin{aligned} &\omega = \frac{A}{l_1 r}(l_1 h + m_1 e^{\xi}), \quad r = \frac{A}{2}(h^2 - 1)e^{-\xi} - e^{\xi}\frac{C}{2}, \\ &\psi = \frac{A}{2r}\left[2 m_1 h - 2 + (m_1^2 + 1)\frac{e^{\xi}}{l_1} + l_1 e^{-\xi}(h^2 - 1)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{146}$$

Putting

$$\left.\begin{aligned} &\bar{x} = \frac{A}{l_1 r}(h l_1 + e^{\xi} m_1), \quad \bar{y} - i\bar{z} = -\frac{e^{\xi}}{r}, \\ &\bar{y} + i\bar{z} = \frac{A}{r}\left[2 m_1 h - 2 + (m_1^2 + 1)\frac{e^{\xi}}{l_1} + l_1 e^{-\xi}(h^2 - 1)\right], \end{aligned}\right\} \tag{147}$$

we have in consequence of (55)

$$d s_0^2 = d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2.$$

Hence the surface whose coordinates are given by (147) is applicable to S_0.

From (147) it follows that

$$\frac{A}{r} = m_1 \bar{x} - \frac{1}{2}(\bar{y} + i\bar{z}) + \frac{1}{2}(\bar{y} - i\bar{z})\left[(m_1^2 - 1)\frac{A}{l_1} - C l_1\right] + l_1. \tag{148}$$

Eliminating e^{ξ} and h from the expressions (146) for r and (147) for $\bar{x}$ and $\bar{y} - i\bar{z}$, we obtain

$$A\left\{\frac{1}{r^2} - \frac{1}{A^2}\left[\bar{x} + \frac{m_1 A}{l_1}(\bar{y} - i\bar{z})\right]^2\right\} - 2(\bar{y} - i\bar{z}) + C(\bar{y} - i\bar{z})^2 = 0.$$

When the expression (148) for $\frac{1}{r}$ is substituted in this equation, we see that the surface of coordinates $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ is a general quadric meeting the circle at infinity in four distinct points.

The equation of the quadric as thus found involves the four constants A, C, l_1 and m_1. But by means of equations (141) l_1 and m_1 are expressible in terms of A, B, C and D. Recalling these results, we have the theorem:

The envelope of the singular circle-plane of a special surface of GUICHARD *of the first kind is applicable to a general quadric which meets the circle at infinity in four distinct points; this quadric is the same for all special surfaces of the same class.*

§ 17. Transformations of Special Surfaces into Surfaces of the Same Class.

We have seen that the surfaces complementary to a special surface are surfaces of the same class. With the aid of this result and the theorem of permutability for general transformations T_n, we shall show that, if S_1 is a surface arising from a special surface S by a complementary transformation T_{n_1}, then ∞^2 of the ∞^3 surfaces arising from S by transformations T_{n_2}, where $n_2 \neq n_1$, are special surfaces of the same class as S.

Let S_2 be one of the latter surfaces. From § 9 it follows that the transformation fonctions of S_2 are of the form

$$\left.\begin{aligned}
\alpha'_2 &= \frac{1}{\lambda_2 \sigma_2}\Big[\alpha_2 \Psi_2 + \alpha_1 \lambda_2 \sigma_2 (n_1 - n_2)\Big], \\
\beta'_2 &= -\frac{1}{\lambda_2 \sigma_2}\Big[\beta_2 \Psi_2 + \beta_1 \lambda_2 \sigma_2 (n_1 - n_2)\Big], \\
\lambda'_2 &= \frac{1}{\lambda_2 \sigma_2}\Big[\lambda_2 \Psi_2 + \lambda_1 \lambda_2 \sigma_2 (n_1 - n_2)\Big], \\
\mu'_2 &= \frac{1}{\lambda_2 \sigma_2}\Big[\mu_2 \Psi_2 + \mu_1 \lambda_2 \sigma_2 (n_1 - n_2)\Big], \\
\sigma'_2 &= \frac{1}{\lambda_2 \sigma_2}\Big[\sigma_2 \Psi_2 + \sigma_1 \lambda_2 \sigma_2 (n_1 - n_2) + \frac{\lambda_1 \lambda_2 e^{-2\xi}(n_1 - n_2)(t_1 - t_2)^2 \sigma_2 \Psi_2}{\Psi_2 + (n_1 - n_2)\lambda_1 \sigma_2}\Big],
\end{aligned}\right\} \qquad (149)$$

where

$$\Psi_2 = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \mu_1 \mu_2 - n_1(\sigma_1 \lambda_2 + \sigma_2 \lambda_1) - \lambda_1 \lambda_2 e^{-2\xi} n_1 (t_1 - t_2)^2. \qquad (150)$$

We inquire whether it is possible to determine $\alpha_2, \beta_2, \lambda_2, \mu_2, \sigma_2$ so that S' shall be a complementary surface to S_2, when $\alpha_1, \beta_1, \lambda_1, \mu_1, \sigma_1$ have the values (144). If this is possible, the functions $\alpha'_2, \ldots, \sigma'_2$ given by (149) must be equal, to within a constant factor, to

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{csch}\theta_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial u}, \quad \operatorname{sech}\theta_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial v}, \quad e^{\xi_2} + l_1, \quad m_1 - h_2, \\
&\frac{1}{l_1}\Big[c_1 - (e^{\xi_2} + l_1)e^{-\xi_2}(1 - t'^2_2)\Big].
\end{aligned}\right\} \qquad (151)$$

One finds readily that if the constant multiplier in (151) be taken as $(n_1 - n_2)$, the equivalence of the two values of the first four quantities in (149) and (151) requires that

$$\Omega \equiv \Psi_2 - \sigma_2 (n_1 - n_2)(e^{\xi_2} - e^{\xi}) = 0.$$

In consequence of (45) this may be written

$$\Omega = \Psi_2 - (n_1 - n_2)\Big[\lambda_2 e^{-\xi}(1 - t_2^2) - e^{\xi}\sigma_2\Big] = 0. \tag{152}$$

Without difficulty one shows that

$$t'_2 = \frac{l_1 e^{-\xi}(e^{\xi} - e^{\xi_2})\, t_2}{l_1 + e^{\xi_2}} + e^{\xi_2 - \xi}\, t_1 \frac{l_1 + e^{\xi}}{l_1 + e^{\xi_2}}.$$

With the aid of this result it is readily shown that when $\Omega = 0$, the expressions for σ'_2 from (149) and (151) differ only by the factor $(n_1 - n_2)$.

We return to the consideration of the condition $\Omega = 0$. From equations analogous to (91) we have in the present case

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial u} = (n_2 - n_1)\operatorname{csch}\theta \frac{\partial \xi}{\partial u}\Big[e^{\xi}\sinh\theta\, \sigma_2 + e^{-\xi}\lambda_2 (t_2 \varphi_2 + \psi_2)\Big],$$

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial v} = (n_2 - n_1)\operatorname{sech}\theta \frac{\partial \xi}{\partial v}\Big[e^{\xi}\cosh\theta\, \sigma_2 + e^{-\xi}\lambda_2 (t_2 \psi_2 + \varphi_2)\Big].$$

Making use of these expressions, we find that

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial v} = 0.$$

Hence if the initial values of $\alpha_2, \ldots, \sigma_2$ be chosen so that $\Omega = 0$, this equation will be true for all values of u and v. Accordingly we have the theorem:

If S is a special surface of Guichard *and S_1 is a complementary surface by a transformation T_{n_1}, of the ∞^3 transformations T_{n_2}, where $n_2 \neq n_1$, ∞^2 give rise to special surfaces S_2 of the same class as S; since the fourth surface S' of the quatern is complementary to S_2, it also is a special surface of the same class.*

§ 18. First Integral of the System (I) for Special Surfaces, and Resulting Transformations.

If in (150) and (152) we replace $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \sigma_1$ by the values (144) and in the reduction we make use of (138) and (140), the function Ω can be given the form

$$\left.\begin{aligned}\Omega = \operatorname{csch}\theta \frac{\partial \xi}{\partial u}\alpha_2 + \operatorname{sech}\theta \frac{\partial \xi}{\partial v}\beta_2 + \left(\frac{A}{2} - n_2 e^{\xi}\right)\left(\sigma_2 + \frac{\mu_2^2}{\lambda_2}\right) - \\ - \mu_2 (B + h + 2 n_2 h) + \lambda_2 \left[n_2 (1 - h^2) e^{-\xi} + \frac{1}{2} C\right].\end{aligned}\right\} \qquad (153)$$

We have just seen that Ω is constant, provided that $n_2 \neq n_1$.

However, this restriction is not necessary. For if A, B, C are constants entering in the class of a special surface and n_2 is any constant, the first derivatives of Ω given by (153) are reducible to zero in consequence of equation (VII). Hence we have the theorem:

If S is a special surface of class $(A\,B\,C\,D)$, the fundamental system (I) *admits the first integral*

$$\left.\begin{aligned}\Omega \equiv \operatorname{csch}\theta \frac{\partial \xi}{\partial u}\alpha + \operatorname{sech}\theta \frac{\partial \xi}{\partial v}\beta + \left(\frac{A}{2} - n e^{\xi}\right)\left(\sigma + \frac{\mu^2}{\lambda}\right) - \\ - \quad (B + h + 2 n h) + \lambda \left[n (1 - h^2) e^{-\xi} + \frac{1}{2} C\right] = \text{const.}\end{aligned}\right\} \qquad (\text{VIII})$$

Suppose now that we have a set of functions $\alpha, \ldots, \sigma$ satisfying (I) and whose initial values are such that $\Omega = 0$; then for all values of u and v $\Omega = 0$. We shall show that the surface arising from the transformation determined by these functions gives rise to a special surface S_1 of the same class as S. In fact, if we substitute the expressions for h_1, $\frac{\partial \xi_1}{\partial u}$, $\frac{\partial \xi_1}{\partial v}$, e^{ξ_1}, given by (36), (41) and (45), in the expression

$$h_1^2 + \operatorname{csch}^2\theta_1 \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial u}\right)^2 + \operatorname{sech}^2\theta_1 \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial v}\right)^2 + A\, e^{-\xi_1}(h_1^2 - 1) + \\ + 2 B h_1 + C e^{\xi_1} + D,$$

the latter vanishis identically, and consequently the desired result is established.

One shows without difficulty that certain of these transformations are real. For, if the equation $\Omega = 0$ be written in the form

$$\operatorname{csch}\theta \cdot \frac{\partial \xi}{\partial u}\alpha + \operatorname{sech}\theta \frac{\partial \xi}{\partial v}\beta - \left(\frac{B}{1+2n} + h\right)\mu(1+2n) + $$
$$+ \left(\frac{A}{2} - n e^{\xi}\right)\left(\sigma + \frac{\mu^2}{\lambda}\right) + \lambda\left[n(1-h^2)e^{-\xi} + \frac{C}{2}\right] = 0,$$

the coefficients of α, β, $\mu(1+2n)$ are the values of α, β, μ for a complementary transformation. If σ be eliminated from this equation and (11), the result may be written

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\alpha^2}{\lambda n} + \frac{2\operatorname{csch}\theta \frac{\partial \xi}{\partial u}\alpha}{\frac{A}{2} - n e^{\xi}} + \frac{\beta^2}{\lambda n} + \frac{2\operatorname{sech}\theta \frac{\partial \xi}{\partial v}\beta}{\frac{A}{2} - n e^{\xi}} + \\ &+ \left[\frac{\mu^2}{\lambda n} - \frac{2\left(\frac{B}{1+2n} + h\right)\mu}{\frac{A}{2} - n e^{\xi}}\right](1+2n) + \frac{\lambda}{\frac{A}{2} - n e^{\xi}}\left[2n(1-h^2)e^{-\xi} + C\right] = 0. \end{aligned}\right\} \quad (154)$$

We consider now the function

$$\left.\begin{aligned} \Pi \equiv &\left(\frac{\alpha}{n\lambda} - \frac{\operatorname{csch}\theta \frac{\partial \xi}{\partial u}}{n e^{\xi} - \frac{A}{2}}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{n\lambda} - \frac{\operatorname{sech}\theta \frac{\partial \xi}{\partial v}}{n e^{\xi} - \frac{A}{2}}\right)^2 + \\ &+ \left(\frac{\mu}{n\lambda} + \frac{\frac{B}{1+2n} + h}{n e^{\xi} - \frac{A}{2}}\right)^2 (1+2n). \end{aligned}\right\} \quad (155)$$

When n is equal to one of the roots of the cubic (142), and α, β, μ are given the values (144), the function Π is equal to zero. We shall show that these are the only real expressions of α, β, μ for these values of such that $2n + 1 > 0$. In fact, in consequence of (154), we find that

$$\left.\begin{aligned} \Pi = -\frac{1}{2n(1+2n)\left(n e^{\xi} - \frac{A}{2}\right)^2}\Big[&(D-2n)\,2n(1+2n) + \\ &+ AC(1+2n) - 2nB^2\Big]. \end{aligned}\right\} \quad (156)$$

Since the expression on the right differs only by a factor from the left-hand member of (142), the function Π vanishes when n is a root of equation (142), thus establishing the above mentioned result.

Equation (156) in which Π has the meaning (155) is equivalent to $\Omega = 0$ for special surfaces. Evidently Π changes sign as n passes through the roots of equation (142). Hence for certain values of n the function Π is positive, in which case the transformation is real.

These results may be stated as follows:

If S is a special surface of class $(A\,B\,C\,D)$ and $\alpha, \beta, \lambda, \mu, \sigma$ are solutions of the system (I) *satisfying the condition*

$$\operatorname{csch}\theta \frac{\partial \xi}{\partial u}\alpha + \operatorname{sech}\theta \frac{\partial \xi}{\partial v}\beta + \left(\frac{A}{2} - n e^{\xi}\right)\left(\sigma + \frac{\mu^2}{\lambda}\right) -$$

$$- \mu\left[B + h(1+2n)\right] + \lambda\left[n(1-h^2)e^{-\xi} + \frac{1}{2}C\right] = 0,$$

the surface S_1 determined by this transformation is of the same class as S; for certain values of n these surfaces S_1 are real; the complementary surfaces are the only real ones when n is a root of the fundamental cubic equation such that $2n+1>0$.

§ 19. Theorem of Permutability for Transformations of Special Surfaces and Surfaces Applicable to the General Quadric.

We close the discussion of special surfaces with the proof of the following theorem:

If a special surface S of class $(A\,B\,C\,D)$ is transformed by a T_{n_1} and T_{n_2} respectively into surfaces S_1 and S_2 of the same class, the fourth surface of the quatern is a special surface of the same class.

By hypothesis the functions $\alpha_1, \beta_1, \lambda_1, \mu_1, \sigma_1; \alpha_2, \ldots, \sigma_2$ of the transformations T_{n_1} and T_{n_2} satisfy the conditions

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{csch}\theta \frac{\partial \xi}{\partial u}\alpha_1 + \operatorname{sech}\theta \frac{\partial \xi}{\partial v}\beta_1 + \left(\frac{A}{2} - n_1 e^{\xi}\right)\left(\sigma_1 + \frac{\mu_1^2}{\lambda_1}\right) - \\ &\quad - \mu_1\left[B + h(1+2n_1)\right] + \lambda_1\left[n_1(1-h^2)e^{-\xi} + \frac{1}{2}C\right] = 0, \end{aligned}\right\} \tag{157}$$

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{csch}\theta\,\frac{\partial\xi}{\partial u}\,\alpha_2+\operatorname{sech}\theta\,\frac{\partial\xi}{\partial v}\,\beta_2+\left(\frac{A}{2}-n_2\,e^{\xi}\right)\left(\sigma_2+\frac{\mu_2^2}{\lambda_2}\right)-\\&\quad-\mu_2\left[B+h\,(1+2\,n_2)\right]+\lambda_2\left[n_2\,(1-h^2)\,e^{-\xi}+\frac{1}{2}\,C\right]=0.\end{aligned}\right\}\qquad(158)$$

The theorem will be proved, if we show that the functions α'_1, β'_1, λ'_1, μ'_1, σ'_1 given by (V) satisfy the condition

$$\operatorname{csch}\theta_1\,\frac{\partial\xi_1}{\partial u}\,\alpha'_1+\operatorname{sech}\theta_1\,\frac{\partial\xi_1}{\partial v}\,\beta'_1+\left(\frac{A}{2}-n_2\,e^{\xi_1}\right)\left(\sigma'_1+\frac{\mu'^2_1}{\lambda'_1}\right)-$$

$$-\mu'_1\left[B+h_1\,(1+2\,n_2)\right]+\lambda'_1\left[n_2\,(1-h_1^2)\,e^{-\xi_1}+\frac{1}{2}\,C\right]=0.$$

We replace $\operatorname{csch}\theta_1\,\frac{\partial\xi_1}{\partial u}$ and $\operatorname{sech}\theta_1\,\frac{\partial\xi_1}{\partial v}$ by their expressions from (41), and α'_1 and β'_1 by their values from (V); we subtract from this result equation (157) multiplied by $\frac{\Psi_1}{\lambda_1\,\sigma_1}$ and equation (158) multiplied by (n_2-n_1). The resulting equation assumes the form

$$a\,\frac{A}{2}+b\,B+c\,\frac{C}{2}+d=0,$$

where a, b, c, d are determinate functions. The expressions for b and c vanish in consequence of (V).

The function a is

$$\sigma'_1+\frac{\mu'^2_1}{\lambda'_1}-\frac{\Psi_1}{\lambda_1\,\sigma_1}\left(\sigma_1+\frac{\mu_1^2}{\lambda_1}\right)+(n_1-n_2)\left(\sigma_2+\frac{\mu_2^2}{\lambda_2}\right).$$

When the values of σ'_1, μ'_1, λ'_1 from (V) are substituted, we find that $a=0$.

With the aid of this identity and (45) we obtain for d the following expression multiplied by (n_1-n_2):

$$\frac{\Psi_1}{\lambda_1}\,(e^{\xi_1}-e^{\xi})+n_2\,(e^{\xi_1}-e^{\xi})\left(\sigma_2+\frac{\mu_2^2}{\lambda_2}\right)-\mu_2\,(1+2\,n_2)\,h+\lambda_2\,n_2\,(1-h^2)\,e^{-\xi}$$

$$-(e^{\xi_1}-e^{\xi})\,\frac{\alpha_1\,\alpha_2+\beta_1\,\beta_2}{\lambda_1}-\lambda_2\,n_2\,e^{-\xi_1}\,(1-h_1^2)+h_1\,(1+2\,n_2)\,\mu_2.$$

When the value (87) of Ψ_1 is substituted in the above, and use is made of (45) and (36), we see that $d = 0$. Hence the theorem is established.

The singular circle-planes of each of the surfaces S, S_1, S_2, S' envelope surfaces applicable to the same quadric. Hence the preceding results lead to a transformation of surfaces S_0 applicable to the general quadric, and the last theorem shows that the transformations of these surfaces S_0 possess a theorem of permutability.

Princeton University,
July 25, 1913.

Sur le théorème de v. Staudt et de Th. Clausen relatif aux nombres de Bernoulli.

(*Par* Niels Nielsen, *à Copenhague.*)

I. Théorèmes généraux.

Soit p un nombre premier impair, tel que $p-1$ divise le positif entier pair $2n$, nous disons pour abréger que p soit du rang n.

Désignons ensuite par m un positif entier quelconque, il est évident que le nombre premier p du rang n est du rang mn aussi; c'est-à-dire que le nombre premier 3 est d'un rang quelconque.

Supposons, au contraire, donné le positif entier n, l'ensemble des nombres premiers du rang n

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_{\nu_n}, \tag{1}$$

est parfaitement déterminé.

Ces définitions adoptées, le théorème de v. Staudt (*) et de Th. Clausen (**) donnera pour le n-ième nombre de Bernoulli une expression de la forme

$$(-1)^n B_n = A_n + \frac{1}{2} + \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \cdots + \frac{1}{\lambda_{\nu_n}}, \tag{2}$$

où A_n désigne un nombre entier.

Cela posé, il est évident que la détermination de la partie fractionnaire de B_n exige la connaissance de tous les nombres premiers du rang n; c'est-à-dire qu'une telle détermination est un problème très difficile.

Quant à la partie entière A_n du nombre B_n, elle dépend aussi des nom-

(*) *Journal de Crelle*, t. 21, pp. 372-374; 1840.

(**) *Astronomische Nachrichten*, t. 17, col. 351-352; 1840.

bres premiers du rang n, comme le montrent clairement des théorèmes de v. STAUDT (*) et de STERN (**); mais la nature de ces nombres est parfaitement inconnue du reste.

On a indiqué un nombre de relations dites caractéristiques pour les A_n, relations qui sont illusoires considérées dans ce point de vue.

En effet, les formules en question ne sont autre chose que des propriétés communes aux coefficients d'un groupe très étendu des formules récursives pour les nombres de BERNOULLI, ce qui est évident si nous étudions d'un point de vue général le problème susdit, sans nous borner à certains cas spéciaux.

A cet effet, nous prenons pour point de départ la formule récursive pour les nombres de BERNOULLI

$$\sum_{s=1}^{\leqq \frac{m-1}{2}} (-1)^s \alpha_{m,2s} B_s = \beta_m, \qquad m \geqq 3; \tag{3}$$

désignons ensuite par

$$p_1\, p_2\, p_3 \ldots p_\mu \tag{4}$$

l'ensemble des nombres premiers impairs égaux à m au plus, puis introduisons dans (3) au lieu des B_s les expressions tirées de (2), nous aurons une identité de la forme

$$\sum_{s=1}^{\leqq \frac{m-1}{2}} \gamma_{m,2s} A_s = N_m - \sum_{q=1}^{q=\mu} \frac{M_q}{p_q}, \tag{5}$$

où nous avons posé pour abréger

$$N_m = \beta_m - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\leqq \frac{m-1}{2}} \alpha_{m,2s}, \tag{6}$$

$$M_q = \sum_{s=1}^{\leqq \frac{m-1}{p_q-1}} \alpha_{m,sp_q-s}. \tag{7}$$

(*) *De numeris Bernoullianis commentatio*; *De numeris Bernoullianis commentatio altera.* Erlangue, 1845.

(**) *Journal de Crelle*, t. 81, pp. 290-294; 1876.

Cela posé, soit $2\rho+1 \leqq m$ un positif entier impair, et soit ensuite

$$\omega_\rho = \sum_{s=1}^{\leqq \frac{m-1}{2\rho}} \alpha_{m,2s\rho},$$

il est évident que l'hypothèse $2\rho+1=p_q$ entraîne l'égalité

$$\omega_\rho = M_q.$$

Considérons maintenant les équations

$$\sum_{s=1}^{\leqq \frac{m-1}{2}} \alpha_{m,2s} A_s = N_m - \sum_{s=1}^{\leqq \frac{m-1}{2}} \frac{\omega_s \delta_s}{2s+1}, \qquad m \geqq 3, \tag{8}$$

linéaires dans les nombres δ_s, nous aurons en vertu de (5) le théorème suivant:

I. *Posons dans* (8) *successivement*

$$m = 3,\ 5,\ 7, \ldots,\ 2\rho+1,$$

il est possible de déterminer les ρ *nombres*

$$\delta_1\ \delta_2\ \delta_3 \ldots \delta_\rho,$$

et nous aurons toujours $\delta_\rho = 1$ *ou* $\delta_\rho = 0$, *selon que* $2\rho+1$ *est un nombre premier ou non.*

Revenons maintenant à la formule (5), puis supposons que $2\beta_m$ et tous les coefficients $\alpha_{m,2s}$ soient des nombres entiers; il est évident que la somme qui figure au premier membre est un nombre entier. Remarquons ensuite que les dénominateurs qui figurent au second membre de la formule susdite sont sans diviseur commun, il faut que M_q soit divisible par p_q; c'est-à-dire que nous aurons le théorème suivant:

II. *Supposons entiers* $2\beta_m$ *et tous les coefficients* $\alpha_{m,2s}$, *puis désignons par* p *un nombre premier impair, égal à* m *au plus, nous aurons*

$$\sum_{s=1}^{\leqq \frac{m-1}{p-1}} \alpha_{m,ps-s} \equiv 0 \pmod{p}. \tag{9}$$

Soit particulièrement m un nombre premier, la formule (9) donnera pour $p=m$

$$\alpha_{m,m-1} \equiv 0 \pmod{m}. \tag{10}$$

Le théorème inverse de II est évident, savoir:

III. *Soient les coefficients* $\alpha_{m,2s}$ *des nombres entiers qui satisfont aux congruences* (9), *où* p *désigne un nombre premier impair, égal à* m *au plus, l'expression*

$$2 \cdot \sum_{s=1}^{\leqq \frac{m-1}{2}} (-1)^s \alpha_{m,2s} B_s \tag{11}$$

est toujours un nombre entier.

Or, il est très facile de généraliser beaucoup les deux derniers théorèmes.

A cet effet, désignons par $\gamma_{m,2s}$ des nombres qui satisfont aux congruences

$$\gamma_{m,2r} \equiv \gamma_{m,2s} \qquad (\mathrm{mod}\, p),$$

où p est un nombre premier impair du rang $(2r - 2s)$ et égal à m au plus, nous aurons évidemment

$$\sum_{s=1}^{\leqq \frac{m-1}{p-1}} \alpha_{m,ps-s} \gamma_{m,ps-s} \equiv \gamma_{m,p-1} \cdot \sum_{s=1}^{\leqq \frac{m-1}{p-1}} \alpha_{m,ps-s} \qquad (\mathrm{mod}\, p);$$

c'est-à-dire que la somme (11) peut être remplacée par cette autre

$$2 \cdot \sum_{s=1}^{\leqq \frac{m-1}{2}} (-1)^s \alpha_{m,2s} \gamma_{m,2s} B_s . \tag{12}$$

Étudions encore la formule

$$f(x) = K + \sum_{s=1}^{s=m-1} a_{m,s}\, s\,!\, B_s(x), \tag{13}$$

où les $B_s(x)$ désignent les fonctions de Bernoulli, de sorte que $f(x)$ est par conséquent un polynome entier du degré $m-1$, nous aurons l'autre théorème analogue à II:

IV. *Supposons que tous les coefficients* $a_{m,2s}$ *de la formule* (13) *soient des nombres entiers, supposons ensuite que l'expression*

$$2 f(0) - 2K - a_{m,1} \tag{14}$$

ait la même propriété, nous aurons les congruences

$$\sum_{s=1}^{\leqq \frac{m-1}{p-1}} a_{m,ps-s} \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, p), \tag{15}$$

où p *désigne un nombre premier impair, égal à* m *au plus.*

En effet, posons dans (13) $x = 0$, nous aurons la formule récursive

$$K - \frac{1}{2} a_{m,1} - f(0) = \sum_{s=1}^{\leq \frac{m-1}{2}} (-1)^s a_{m,2s} B_s ;$$

il est digne de remarque que les coefficients $a_{m,2s+1}$, $s \geq 1$, ne jouent aucun rôle pour les congruences (15).

II. Applications diverses.

Comme première application de nos théorèmes généraux, nous étudions la formule classique

$$\sum_{s=1}^{\leq \frac{m-1}{2}} (-1)^s \binom{m}{2s} B_s = 1 - \frac{m}{2}, \qquad m \geq 3 ; \tag{1}$$

le théorème II du paragraphe I donnera immédiatement les congruences

$$\sum_{s=1}^{\leq \frac{m-1}{p-1}} \binom{m}{ps-s} \equiv 0 \pmod{p}, \tag{2}$$

où p désigne un nombre premier impair, égal à m au plus.

Supposons m impair, savoir $m = 2n + 1$, Hermite (*) a démontré directement les cas correspondants de la congruence (2), tandis que Lipschitz (**) a traité d'un autre point de vue la formule en question.

Désignons ensuite par

$$p_1 \, p_2 \, p_3 \ldots p_\mu$$

l'ensemble des nombres premiers impairs, égaux à m au plus, posons

$$\Omega_m = \sum_{k=1}^{k=\mu} \frac{1}{p_k} \left(\sum_{s=1}^{\leq \frac{m-1}{p_k-1}} \binom{m}{s p_k - s} \right), \tag{3}$$

(*) *Journal de Crelle*, t. 81, pp. 93-95; 1876.
(**) *Journal de Crelle*, t. 96, p. 14; 1884.

puis remarquons que la formule binomiale donnera

$$\sum_{s=1}^{s=n}\binom{2n+1}{2s}=2^{2n}-1,\quad \sum_{s=1}^{s=n}\binom{2n+2}{2s}=2^{2n+1}-2,$$

nous aurons, en vertu de (1), ces deux formules

$$\sum_{s=1}^{s=n}\binom{2n+1}{2s}A_s=1-n-2^{2n-1}-\Omega_{2n+1}, \tag{4}$$

$$\sum_{s=1}^{s=n}\binom{2n+2}{2s}A_s=1-n-2^{2n}-\Omega_{2n+2}, \tag{5}$$

dont la première est due à HERMITE.

Or, il est digne de remarque, ce me semble, que G.-F. MEYER (*) déjà en 1862 a essayé de développer la formule (4) d'HERMITE, mais qu'il n'a pas réussi à donner sous forme simple l'expression Ω_{2n+1}.

Soustrayons les deux formules (4) et (5), puis posons

$$\Omega'_{2n+1}=\Omega_{2n+2}-\Omega_{2n+1}=\sum_{k=1}^{k=\mu}\frac{1}{p_k}\left(\sum_{s=1}^{\leq\frac{2n}{p_k-1}}\binom{2n+1}{p_k s-s-1}\right), \tag{6}$$

nous aurons la formule de STERN (**)

$$\sum_{s=1}^{s=n}\binom{2n+1}{2s-1}A_s=-2^{2n-1}-\Omega'_{2n+1}. \tag{7}$$

STERN, dans son grand Mémoire intitulé : *Beiträge zur Theorie der Eulerschen und Bernoullischen Zahlen* (***), consacre les six dernières pages à une application analogue de ses trois formules récursives pour les nombres de BERNOULLI :

$$\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s-2}B_s+(-1)^n\left(\binom{2n}{2}-1\right)B_n=0,$$

$$\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s-1}B_s+(-1)^n(2n+1)B_n=-\frac{1}{2},$$

$$\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n-1}{2s-2}B_s+(-1)^n(2n+1)B_n=0;$$

(*) *Archiv de Grunert*, t. 38, pp. 241-246 ; 1862.

(**) *Journal de Crelle*, t. 84, pp. 267-269 ; 1878.

(***) *Göttinger Abhandlungen*, t. 23 ; 1878 ; 44 pages.

formules qui satisfont évidemment aux conditions indiquées dans le théorème II du paragraphe I.

Désignons par p un nombre premier impair, égal à $2n+1$ au plus, nous aurons immédiatement les trois congruences

$$\sum_{s=1}^{\leqq\frac{2n}{p-1}} \binom{2n}{ps-s-2} \equiv \delta_p \pmod p, \tag{8}$$

$$\sum_{s=1}^{\leqq\frac{2n}{p-1}} \binom{2n}{ps-s-1} \equiv -\delta_p \pmod p, \tag{9}$$

$$\sum_{s=1}^{\leqq\frac{2n}{p-1}} \binom{2n-1}{ps-s-2} \equiv -\delta_p \pmod p, \tag{10}$$

où il faut admettre $\delta_p = 1$ ou $\delta_p = 0$ selon que p est du rang n ou non; Stern démontre directement chacune des trois congruences en question.

Tels sont les résultats obtenus jusqu'ici en appliquant le théorème de v. Staudt et de Th. Clausen sur les formules récursives pour les nombres de Bernoulli.

Les trois auteurs susdits, savoir Hermite, Lipschitz et Stern, ont cru évidemment que ces résultats représentent des propriétés caractéristiques des coefficients binomiaux.

En effet, Hermite mentionne la fonction numérique Ω_m, définie dans la formule (3), du nombre m dans le cas où m est un nombre impair, savoir $m = 2n+1$. Or, il existe une fonction analogue du nombre pair $m = 2n+2$, et ces fonctions ne sont que des cas particuliers de la fonction générale

$$\sum_{q=1}^{q=\mu} \frac{M_q}{p_q}$$

qui figure au second membre de la formule (5) du paragraphe I, pourvu que les conditions indiquées dans le théorème II du même paragraphe soient remplies.

Lipschitz donne le cas particulier de notre théorème général I du paragraphe I qui correspond à la formule (4) due à Hermite.

De plus, on dit que la même formule d'Hermite soit une formule récursive pour les nombres entiers A_n, quoique notre formule générale (5) du paragraphe I a précisément la même propriété.

Or, considérons la Table des formules récursives pour les nombres de Bernoulli que j'ai donnée dans mon Mémoire (*): *Recherches sur les nombres de Bernoulli et d'Euler*, nous verrons que la plupart de ces formules satisfont aux conditions susdites.

C'est-à-dire que l'application du théorème de v. Staudt et de Th. Clausen sur de telles formules ne donne pas des propriétés caractéristiques des nombres entiers A_n, mais des propriétés communes des coefficients qui figurent dans les formules récursives susdites.

Nous nous bornerons à indiquer quelques autres applications de ce genre.

Posons pour abréger

$$\lambda_r = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{r},$$

nous aurons l'identité

$$\frac{x^{m+1} + (-1)^m}{x+1} = (-1)^m \lambda_{m+1} + \sum_{s=0}^{s=m-1} (-1)^s \left[\binom{m+1}{s+1} - 1\right] (m-s-1)!\, B_{m-s}(x),$$

puis différentions par rapport à x, l'hypothèse $x = 0$ donnera la formule récursive

$$\sum_{s=1}^{\leqq \frac{m-1}{2}} (-1)^{s-1} \left[\binom{m+1}{2s+1} - 1\right] B_s = \frac{1}{2} + \frac{m(m-3)}{4}, \tag{11}$$

de sorte que nous aurons les congruences

$$\sum_{s=1}^{\leqq \frac{m-1}{p-1}} \left[\binom{m+1}{ps - s + 1} - 1\right] \equiv 0 \pmod{p}, \tag{12}$$

où p désigne un nombre premier impair, égal à m au plus.

Étudions encore les deux formules récursives (**)

$$T_{n+1} = \sum_{s=1}^{s=n} \binom{2n+1}{2s} 2^{2s} B_s T_{n-s+1}, \tag{13}$$

$$\frac{n T_n}{2^{2n-2}} = E_n - \sum_{s=1}^{s=n-1} \binom{2n}{2s} 2^{2s} B_s E_{n-s}, \tag{14}$$

(*) *Mémoires de l'Académie Royale de Danemark*, 1913. Dans ce qui suit je cite le Mémoire sous le titre donné dans le texte.

(**) *Recherches sur les nombres de Bernoulli et d'Euler*, pp. 78-79; 1913.

où les T_m et les E_m sont les coefficients des tangentes respectivement les nombres d'EULER, nous aurons pour le nombre premier $p = 2q + 1$:

$$\sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{q}} (-1)^{qs} \binom{2n+1}{2qs} T_{n-qs+1} \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, p), \tag{15}$$

$$\sum_{s=1}^{\leq \frac{n-1}{q}} (-1)^{qs} \binom{2n}{2qs} E_{n-qs} \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, p). \tag{16}$$

Remarquons encore que la somme qui figure au second membre de (14) est par conséquent un nombre pair, tandis que E_n est toujours impair, nous aurons la proposition suivante:

I. *L'expression*

$$\frac{n\, T_n}{2^{2n-2}} = 2\,(2^{2n} - 1)\, B_n \tag{17}$$

est toujours un nombre entier impair.

Cette proposition due à EULER (*), est retrouvée par STERN (**) et plus tard par WORPITZKY (***).

III. **Sur les coefficients de factorielles.**

Pour donner un exemple, dans lequel les conditions indiquées dans le théorème II du paragraphe I ne sont pas remplies, nous aurons à etudier les deux formules récursives (****)

$$\frac{n-r+1}{n+1}\, C^r_{n+1} - C^r_n - \frac{n-r+1}{2}\, C^{r-1}_n = \sum_{s=1}^{\leq \frac{r}{2}} (-1)^{s-1} \binom{n-r+2s}{2s} C^{r-2s}_n B_s, \tag{1}$$

$$\frac{(n-1)\,!\,(n-1)}{2n+2} = \sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} (-1)^{s-1}\, C^{n-2s}_n B_s, \tag{2}$$

(*) *Institutiones calculi differentialis*, p. 495; Saint-Pétersbourg, 1755. *Opuscula Analytica*, t. II, p. 273; Saint-Pétersbourg, 1785.

(**) *Journal de Crelle*, t. 88, p. 92; 1880.

(***) *Journal de Crelle*, t. 94, p. 232; 1883. Comparez la note de KRONECKER dans le même tome, p. 269.

(****) *Recherches sur les nombres de Bernoulli et d'Euler*, p. 66; 1913.

où les C_n^m désignent les coefficients de factorielles, tandis qu'il faut admettre, dans (1), $2 \leqq r \leqq n-1$.

La formule (2) est due à Schömilch (*), mais retrouvée par A. Radicke (**).

Étudions tout d'abord la formule (1).

Soit $p = 2q + 1 \leqq r + 1$ un nombre premier impair qui n'est pas diviseur de $n+1$, nous aurons la congruence

$$\sum_{s=1}^{\leq \frac{r}{2q}} \binom{n-r+2qs}{2qs} C_n^{r-2qs} \equiv 0 \pmod{p}, \qquad 2 \leqq r \leqq n-1. \tag{3}$$

Soit ensuite $n+1$ un nombre composé, et soit

$$p_1 p_2 p_3 \ldots p_\mu$$

l'ensemble des nombres premiers qui divisent $n+1$ et qui ne dépassent pas $r+1$, nous verrons que le produit

$$p_1 p_2 \ldots p_\mu \cdot \frac{n-r+1}{n+1} C_n^r, \qquad 2 \leqq r \leqq n-1 \tag{4}$$

est toujours un nombre entier.

Soit enfin $n+1 = p$ un nombre premier, il est évident que $n+1$ et $n-r+1$ sont sans diviseur commun, et nous aurons par conséquent le théorème de Lagrange (***):

I. *Soit p un nombre premier impair quelconque, nous aurons*

$$C_p^r \equiv 0 \pmod{p}, \qquad 1 \leqq r \leqq p-2. \tag{5}$$

Appliquons maintenant l'identité

$$2\, C_p^{2r+1} = \sum_{s=0}^{s=2r} (-1)^s \binom{p-s-1}{2r-s+1} p^{2r-s+1} C_n^s, \tag{6}$$

cas particulier d'une formule générale que je viens de démontrer pour les polynomes réguliers (****), nous aurons en vertu de (5) cette autre proposition :

(*) *Archiv de Grunert*, t. 9, p. 234; 1847.

(**) *Die Recursionsformeln für die Berechnung der Bernoullischen und Eulerschen Zahlen*, p. 15; Halle a. S., 1880.

(***) *Mémoires de l'Académie de Berlin* (1771), t. 2, pp. 125-137; 1773.

(****) *Annali di Matematica* (3), t. 22, p. 78, formule (9); 1913.

II. *Soit $p > 3$ un nombre premier impair, quelconque du reste, nous aurons*

$$C_p^{2r+1} \equiv 0 \pmod{p^2}, \qquad 1 \leqq r \leqq \frac{p-3}{2}. \tag{7}$$

Cela posé, introduisons dans (1) $2r+1$ au lieu de r, puis remplaçons n par le nombre premier p, nous aurons la congruence

$$\frac{p-2r}{p+1} C_{p+1}^{2r+1} - \frac{p-2r}{2} C_p^{2r} \equiv (-1)^{r-1} \binom{p-1}{2r} C_p^1 B_r \qquad \pmod{p^2}.$$

Or nous aurons

$$C_{p+1}^{2r+1} = C_p^{2r+1} + p\, C_p^{2r} \equiv 0 \qquad \pmod{p^2},$$

$$C_p^1 = \frac{p(p-1)}{2}, \qquad \binom{p-1}{2r} \equiv 1 \qquad \pmod{p},$$

ce qui donnera finalement

$$\frac{C_p^{2r}}{p} \equiv \frac{(-1)^r B_r}{2r} \pmod{p}, \qquad 1 \leqq r \leqq \frac{p-3}{2}. \tag{8}$$

Appliquons ensuite la formule récursive

$$(-1)^r \left(C_p^{2r+1} - \frac{(p-2r-1)p}{2} C_p^{2r} \right) =$$

$$= \sum_{s=0}^{s=r-1} (-1)^s \binom{p-2s-2}{2r-2s} p^{2r-2s} C_p^{2s+1} B_{r-s},$$

cas particulier d'une formule générale que je viens de démontrer pour les suites regulières (*), nous aurons

$$\frac{C_p^{2r+1}}{p^2} \equiv -\frac{(2r+1)\, C_p^{2r}}{p} \qquad \pmod{p};$$

c'est-à-dire que nous venons de démontrer le théorème suivant dû à M. Glaisher (**) :

III. *Soit $p > 3$ un nombre premier impair, quelconque du reste, nous*

(*) *Annali di Matematica* (3), t. 22, p. 86, formule (16); 1913.

(**) *Quarterly Journal of mathematics*, t. 31, pp. 321-353; 1900.

aurons les deux congruences modulo p:

$$\frac{C_p^{2r}}{p} \equiv \frac{(-1)^r B_r}{2r}, \qquad \frac{C_p^{2r+1}}{p^2} \equiv \frac{(-1)^{r-1}(2r+1)B_r}{4r}, \tag{9}$$

où il faut supposer $1 \leqq r \leqq \frac{p-3}{2}$.

Étudions maintenant la formule (2).

Soit tout d'abord $n+1$ un nombre composé, le premier membre de la formule susdite est toujours un nombre entier; ce qui donnera

$$\sum_{s=1}^{\leqq \frac{n}{p-1}} C_n^{n-ps+s} \equiv 0 \qquad (\text{mod } p), \tag{10}$$

où p désigne un nombre premier impair égal à n au plus.

Soit, au contraire, n un nombre premier, nous remplaçons n par $2n+1$, ce qui donnera, en vertu de (7),

$$(2n)!\, 2n \equiv (-1)^{n-1}\, 2n\,(2n+1)(2n+2)\, B_n \qquad \left(\text{mod } (2n+1)^2\right). \tag{11}$$

Appliquons ensuite le résultat

$$(-1)^{n-1}(2n+1)\, B_n \equiv -1 \qquad (\text{mod } 2n+1),$$

obtenu directement du théorème de v. Staudt et de Th. Clausen, la formule (11) donnera immédiatement le théorème de Wilson:

$$(2n)! + 1 \equiv 0 \qquad (\text{mod } 2n+1). \tag{12}$$

Posons pour abréger

$$(2n)! = (2n+1)\, W_n - 1, \tag{13}$$

le nombre W_n est un positif entier; nous le désignons comme quotient de Wilson.

Introduisons ensuite, dans (11), l'expression (13), il en résulte

$$2n\left((2n+1)\, W_n - 1\right) \equiv (-1)^{n-1}(4n^2+4n)(2n+1)\, B_n \qquad \left(\text{mod } (2n+1)^2\right),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$2n\left((2n+1)\, W_n - 1\right) \equiv (-1)^n (2n+1)\, B_n \qquad \left(\text{mod } (2n+1)^2\right),$$

de sorte que nous aurons

$$2n(2n+1)W_n \equiv (2n+1)\left((-1)^n B_n + \frac{2n}{2n+1}\right)\left(\text{mod}\,(2n+1)^2\right);$$

c'est-à-dire que nous avons démontré le théorème suivant:

IV. *Soit* $2n+1$ *un nombre premier impair quelconque, le quotient correspondant de* WILSON *satisfait à la congruence*

$$W_n \equiv (-1)^{n-1} B_n - \frac{2n}{2n+1} \qquad (\text{mod}\,2n+1). \tag{14}$$

Ce théorème qui peut être considéré comme un supplément à celui de M. GLAISHER est indiqué sans démonstration par M. LERCH (*).

Dans un Mémoire intitulé: *Recherches sur les résidus quadratiques et sur les quotients de* FERMAT (**), j'ai donné d'autres démonstrations des deux derniers théorèmes et un grand nombre d'autres applications, sur la théorie des nombres, des nombres de BERNOULLI, applications, qui sont nouvelles, je le crois.

Revenons encore une fois à la congruence (14) de M. LERCH, puis posons conformément au théorème de v. STAUDT et de TH. CLAUSEN

$$B_n = \frac{a_n}{(4n+2)\beta_n}, \tag{15}$$

où la fraction qui figure au second membre est irréductible, la formule (14) donnera après un calcul simple

$$2\beta_n W_n \equiv \frac{(-1)^{n-1} a_n + 2\beta_n}{2n+1} - 2\beta_n \qquad (\text{mod}\,2n+1);$$

c'est-à-dire que nous aurons en outre la congruence

$$(-1)^n a_n \equiv 2\beta_n \qquad (\text{mod}\,2n+1) \tag{16}$$

où il faut supposer par conséquent que $2n+1$ soit un nombre premier.

(*) *Mathematische Annalen*, t. 60, p. 488; 1905.

(**) Le Mémoire paraîtra dans les *Annales de l'École Normale.*

Sulle congruenze rettilinee W a parametro medio costante.

(*Di* Luigi Bianchi, *a Pisa.*)

PREFAZIONE.

In una qualunque congruenza rettilinea diamo, col Sannia (*), il nome di *parametro medio*, sopra ogni raggio della congruenza, alla quantità

$$H = \sqrt{d^2 - \lambda^2},$$

indicando con d la distanza dei punti limiti, con λ quella dei fuochi.

Ci proponiamo di studiare nel presente lavoro quelle congruenze a parametro medio costante che sono nello stesso tempo congruenze W, cioè tali che sulle due falde focali si corrispondono le linee asintotiche. Due casi ben noti di congruenze appartengono a questa classe e sono:

1.° Le congruenze W normali (a parametro medio nullo), la cui ricerca equivale a quella delle superficie applicabili sopra superficie di rotazione (Ribaucour-Weingarten);

2.° Le congruenze pseudosferiche, caratterizzate dalla proprietà di avere insieme costanti d e λ; le due falde focali di queste congruenze sono superficie pseudosferiche di egual raggio, derivate l'una dall'altra per trasformazione di Bäcklund.

Premesse alcune formole generali per le congruenze rettilinee con una falda focale assegnata, queste si applicano al caso delle congruenze W a parametro medio costante a assegnato, e si riconosce che bisogna distinguere due casi secondo che la curvatura K della falda prescritta S è variabile,

(*) Sannia, *Nuova esposizione della geometria infinitesimale delle congruenze rettilinee* (Annali di Matematica, Serie 3.ª, T. XV (1908)).

ovvero costante. Nel primo caso, se la congruenza cercata esiste, essa *è unica;* nel secondo invece esiste una *doppia infinità* di tali congruenze, eccettuato per altro il caso in cui si abbia $K = -\frac{1}{a^2}\cdot$ Quest'ultimo caso, quando cioè la S è pseudosferica ed il parametro medio della congruenza W da costruirsi ne eguaglia il raggio, è notevole come caso eccezionale per ciò che esistono allora due e due sole tali congruenze, e sono quelle formate dalle normali principali delle asintotiche dell'uno o dell'altro sistema.

Nel caso generale la determinazione delle congruenze a parametro medio costante, con assegnata falda focale S a curvatura costante, dipende dalla integrazione di un sistema di equazioni ai differenziali totali in due funzioni incognite, integrazione che si sa completamente eseguire appena della superficie S si conoscano le superficie derivate per trasformazione di Lie-Bonnet, e su queste le linee geodetiche. È notevole poi che, in ogni caso, le seconde falde focali $\bar{S}$ di queste congruenze godono della proprietà che le loro equazioni di Moutard per le deformazioni infinitesime ammettono *quattro* soluzioni legate da una relazione quadratica; ci troviamo così nel campo delle equazioni di Moutard con gruppi di soluzioni quadratiche che si incontrano in diverse ricerche di geometria infinitesimale. Da ultimo si generalizza alle attuali congruenze la teoria delle trasformazioni che deriva per le congruenze pseudosferiche dal teorema di permutabilità, e si dimostra che ogni congruenza W a parametro medio costante a con una falda focale pseudosferica ammette ∞^2 trasformazioni (di Bäcklund) in altre congruenze della medesima specie.

In una seconda parte della Memoria trattiamo di un'altra classe particolare di congruenze W a parametro medio costante, caratterizzate dalla proprietà che le equazioni di Moutard relative alle due falde focali coincidono nell'unica $\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = 0$. Le congruenze di questa specie si ottengono tutte, colla nota costruzione di Darboux, dalle superficie di traslazione le cui curve generatrici hanno torsioni costanti e di segno contrario, ma del resto qualunque; le diciamo per ciò *congruenze di* Darboux. In particolare quando le torsioni delle due curve generatrici hanno eguale valore assoluto, la congruenza è normale e le due falde focali dànno le deformate del paraboloide rotondo. La proprietà così singolare che appartiene in questo caso alle falde focali di fornire una classe completa di superficie applicabili si dimostra essere appunto esclusiva a questo caso. Anzi si prova, più in generale, che l'unica classe di superficie applicabili le cui equazioni di Moutard coincidono tutte nella $\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = 0$ è data dalle deformate del paraboloide rotondo.

Da ultimo dimostro che anche per le congruenze W di Darboux esistono trasformazioni di Bäcklund. Si ottengono queste trasformazioni semplicemente col mantener fisse una delle due curve a torsione costante generatrici delle superficie di traslazione, mentre l'altra si cangia con una trasformazione qualunque di Backlund. Nel caso particolare delle congruenze di Darboux normali, colle falde focali applicabili sul paraboloide rotondo, queste trasformazioni vengono a coincidere colle B_k della teoria generale per le deformate di questa quadrica.

§ 1.

Formole generali per le congruenze rettilinee.

Consideriamo una congruenza rettilinea qualunque, della quale però supponiamo reali e distinti i due sistemi di sviluppabili, e quindi anche reali e distinte le due falde focali S, $\bar{S}$.

Assumendo come superficie di partenza del sistema di raggi la prima falda focale S, cominciamo dallo stabilire un sistema di formole generali che riescono utili in molte ricerche (*). Riferiamo la superficie S ad un sistema curvilineo *ortogonale* qualunque (u, v), e sia la S definita dalle sue due forme quadratiche fondamentali

$$d s^2 = E\, d u^2 + G\, d v^2,$$

$$D\, d u^2 + 2\, D'\, d u\, d v + D''\, d v^2.$$

Valgono allora la formola di Gauss

$$\frac{D D'' - D'^2}{E G} = K = -\frac{1}{\sqrt{E G}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right) \right\}, \qquad (a)$$

(*) Cf. la mia Memoria: *Sopra alcune classi di congruenze rettilinee negli spazî di curvatura costante* (Annali di matematica, Serie 3.ª, T. X (1904)).

designando K la curvatura totale di S, e le due formole di CODAZZI

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D}{\sqrt{E}}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D'}{\sqrt{E}}\right)=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\cdot\frac{D'}{\sqrt{G}}+\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cdot\frac{D''}{\sqrt{G}},\\ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''}{\sqrt{G}}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D'}{\sqrt{G}}\right)=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\cdot\frac{D}{\sqrt{E}}+\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cdot\frac{D'}{\sqrt{E}}.\end{aligned}\right\}\qquad(b)$$

Mantenendo poi le consuete notazioni per gli elementi fondamentali x, X_1, X_2, X_3, ecc., della S (Vedi Vol. II, § 254) (*), avremo le formole fondamentali che raccogliamo nel quadro seguente:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial x}{\partial u}=\sqrt{E}\,.\,X_1,\quad \frac{\partial X_1}{\partial u}=-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cdot X_2+\frac{D}{\sqrt{E}}X_3,\\ &\qquad\frac{\partial X_2}{\partial u}=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}X_1+\frac{D'}{\sqrt{G}}X_3,\quad \frac{\partial X_3}{\partial u}=-\frac{D}{\sqrt{E}}X_1-\frac{D'}{\sqrt{G}}X_2,\\ &\frac{\partial x}{\partial v}=\sqrt{G}\,X_2,\quad \frac{\partial X_1}{\partial v}=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}X_2+\frac{D'}{\sqrt{E}}X_3,\\ &\qquad\frac{\partial X_2}{\partial v}=-\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}X_1+\frac{D''}{\sqrt{G}}X_3,\quad \frac{\partial X_3}{\partial v}=-\frac{D'}{\sqrt{E}}X_1-\frac{D''}{\sqrt{G}}X_2,\end{aligned}\right\}\qquad(c)$$

colle analoghe dedotte permutando circolarmente le coordinate.

La congruenza da considerarsi consta di tangenti alla superficie S, e per definirla basterà dare in ogni punto (u, v) di S l'angolo $\varphi=\varphi(u, v)$ d'inclinazione del raggio della congruenza sulla direzione (X_1, Y_1, Z_1) della tangente alla $v=\text{cost.}$ Indichiamo poi con

$$\lambda=\lambda(u, v)$$

il valore del segmento focale, e in fine con

$$\sigma=\sigma(u, v)$$

l'angolo dei due piani focali, ossia l'angolo sotto cui si tagliano, lungo il raggio, i due piani tangenti nei due fuochi $F\equiv(x, y, z)$, $\overline{F}\equiv(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ alle due falde focali S, $\overline{S}$. Indicando poi con $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ i coseni di direzione della

(*) Le citazioni come questa s'intendono riferite alle mie: ***Lezioni di geometria differenziale*** (2.ª edizione).

normale alla $\overline{S}$, potremo scrivere le formole

$$\ldots\ \bar{x} = x + \lambda(\cos\varphi\, X_1 + \operatorname{sen}\varphi\, X_2)\,, \tag{1}$$

$$\ldots\ \overline{X} = \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\varphi\, X_1 - \operatorname{sen}\sigma\cos\varphi\, X_2 + \cos\sigma\, X_3\,, \tag{2}$$

colle altre analoghe.

Ora $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ debbono soddisfare alle due equazioni

$$S\overline{X}\frac{\partial\bar{x}}{\partial u} = 0, \quad S\overline{X}\frac{\partial\bar{x}}{\partial v} = 0\ (*),$$

le quali, calcolate dalle (1), (2) colle formole del quadro (*c*), dànno le due formole fondamentali:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = \frac{\sqrt{E}\operatorname{sen}\varphi}{\lambda} + \cot\sigma\left(\frac{D}{\sqrt{E}}\cos\varphi + \frac{D'}{\sqrt{G}}\operatorname{sen}\varphi\right),\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = -\frac{\sqrt{G}\cos\varphi}{\lambda} + \cot\sigma\left(\frac{D'}{\sqrt{E}}\cos\varphi + \frac{D''}{\sqrt{G}}\operatorname{sen}\varphi\right).
\end{aligned}\right\} \tag{I}$$

Conformemente a quanto è detto sopra, si osserverà che, appena fissato φ, risultano determinati dalle (I) i valori di $\frac{1}{\lambda}$, $\cot\sigma$, non potendo annullarsi il determinante

$$\sqrt{G}\cos\varphi\left(\frac{D}{\sqrt{E}}\cos\varphi + \frac{D'}{\sqrt{G}}\operatorname{sen}\varphi\right) + \sqrt{E}\operatorname{sen}\varphi\left(\frac{D'}{\sqrt{E}}\cos\varphi + \frac{D''}{\sqrt{G}}\operatorname{sen}\varphi\right),$$

chè altrimenti sopra la S le *caustiche* della congruenza (cioè le linee inviluppate dai raggi) sarebbero asintotiche (**) e le falde focali coinciderebbero, caso che abbiamo escluso.

(*) Col simbolo sommatorio S indichiamo la somma di tre termini simili rispetto agli assi.

(**) In altro modo: se a linee $v =$ cost. si assumono le caustiche, si ha $\varphi = 0$, ma è $D \mathrel{=}\mid= 0$, e le formole (I) riducendosi alle due

$$-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = \cot\sigma\frac{D}{\sqrt{E}}, \quad \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = -\frac{\sqrt{G}}{\lambda} + \cot\sigma\frac{D'}{\sqrt{E}},$$

fissano i valori di $\cot\sigma$, $\frac{1}{\lambda}$.

§ 2.

Calcolo degli elementi della seconda falda.

Deriviamo rapporto ad u, v le (1) e (2), tenendo conto delle (I) e delle formole del quadro (c).

Se introduciamo per brevità di scrittura le espressioni seguenti

$$\alpha = \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \sqrt{E} \cos \varphi, \qquad \beta = \frac{\partial \lambda}{\partial v} + \sqrt{G} \operatorname{sen} \varphi, \tag{3}$$

$$\gamma = \frac{\partial \sigma}{\partial u} - \frac{D}{\sqrt{E}} \operatorname{sen} \varphi + \frac{D'}{\sqrt{G}} \cos \varphi, \qquad \delta = \frac{\partial \sigma}{\partial v} - \frac{D'}{\sqrt{E}} \operatorname{sen} \varphi + \frac{D''}{\sqrt{G}} \cos \varphi, \tag{4}$$

$$l = \frac{D}{\sqrt{E}} \cos \varphi + \frac{D'}{\sqrt{G}} \operatorname{sen} \varphi, \qquad m = \frac{D'}{\sqrt{E}} \cos \varphi + \frac{D''}{\sqrt{G}} \operatorname{sen} \varphi, \tag{5}$$

troviamo le formole:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{x}}{\partial u} &= (\cos \varphi \,.\, \alpha - \cot \sigma \operatorname{sen} \varphi \,.\, l \lambda) X_1 + \\
&\qquad + (\operatorname{sen} \varphi \,.\, \alpha + \cot \sigma \cos \varphi \,.\, l \lambda) X_2 + l \lambda X_3 , \\
\frac{\partial \overline{x}}{\partial v} &= (\cos \varphi \,.\, \beta - \cot \sigma \operatorname{sen} \varphi \,.\, m \lambda) X_1 + \\
&\qquad + (\operatorname{sen} \varphi \,.\, \beta + \cot \sigma \cos \varphi \,.\, m \lambda) X_2 + m \lambda X_3 ,
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{X}}{\partial u} &= \left(\frac{\sqrt{E} \operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{\lambda} + \cos \sigma \operatorname{sen} \varphi \,.\, \gamma\right) X_1 + \\
&\qquad + \left(\frac{\sqrt{E} \operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen}^2 \varphi}{\lambda} - \cos \sigma \cos \varphi \,.\, \gamma\right) X_2 - \operatorname{sen} \sigma \,.\, \gamma X_3 , \\
\frac{\partial \overline{X}}{\partial v} &= \left(- \frac{\sqrt{G} \operatorname{sen} \sigma \cos^2 \varphi}{\lambda} + \cos \sigma \operatorname{sen} \varphi \,.\, \delta\right) X_1 - \\
&\qquad - \left(\frac{\sqrt{G} \operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{\lambda} + \cos \sigma \cos \varphi \,.\, \delta\right) X_2 - \operatorname{sen} \sigma \,.\, \delta X_3 .
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Di qui, formando per la seconda falda focale $\overline{S}$ della congruenza i coefficienti $\overline{E}$, $\overline{F}$, $\overline{G}$; $\overline{D}$, $\overline{D}'$, $\overline{D}''$ delle due forme quadratiche fondamentali:

$$\overline{E} = S\left(\frac{\partial \overline{x}}{\partial u}\right)^2, \quad \overline{F} = S\frac{\partial \overline{x}}{\partial u}\frac{\partial \overline{x}}{\partial v}, \quad \overline{G} = S\left(\frac{\partial \overline{x}}{\partial v}\right)^2$$

$$\overline{D} = -S\frac{\partial \overline{x}}{\partial u}\frac{\partial \overline{X}'}{\partial u}, \quad \overline{D}' = -S\frac{\partial \overline{x}}{\partial u}\frac{\partial \overline{X}'}{\partial v} = -S\frac{\partial \overline{x}}{\partial v}\frac{\partial \overline{X}'}{\partial u},$$

$$\overline{D}'' = -S\frac{\partial \overline{x}}{\partial v}\frac{\partial \overline{X}'}{\partial v},$$

deduciamo le formole

$$\overline{E} = \alpha^2 + \frac{\lambda^2}{\operatorname{sen}^2\sigma} l^2, \quad \overline{F} = \alpha\beta + \frac{\lambda^2}{\operatorname{sen}^2\sigma}\cdot l\, m, \quad \overline{G} = \beta^2 + \frac{\lambda^2}{\operatorname{sen}^2\sigma} m^2 \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{D} &= -\frac{\sqrt{E}\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi}{\lambda}\alpha + \frac{\lambda}{\operatorname{sen}\sigma}\cdot l\gamma, \quad \overline{D}' = \frac{\sqrt{G}\operatorname{sen}\sigma\cos\varphi}{\lambda}\alpha + \frac{\lambda}{\operatorname{sen}\sigma} l\delta \\ \overline{D}' &= -\frac{\sqrt{E}\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi}{\lambda}\beta + \frac{\lambda}{\operatorname{sen}\sigma}\cdot m\gamma, \quad \overline{D}'' = \frac{\sqrt{G}\operatorname{sen}\sigma\cos\varphi}{\lambda}\beta + \frac{\lambda}{\operatorname{sen}\sigma}\cdot m\delta. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Paragonando i due valori scritti per $\overline{D}'$, risulta la relazione

$$\sqrt{G}\cos\varphi\,.\,\alpha + \sqrt{E}\operatorname{sen}\varphi\,.\,\beta = \frac{\lambda^2}{\operatorname{sen}^2\sigma}(m\gamma - l\delta), \tag{10}$$

la quale segue anche dal derivare la prima delle (I) rapporto a v, la seconda rapporto ad u, e sottraendo, coll'aver riguardo alle (I) stesse ed alle (a), (b). Così la relazione (10) appare quale *condizione d'integrabilità* per le (I).

Osserviamo ancora che dalle (8), (9) seguono per $\overline{E}\,\overline{G} - \overline{F}^2$, $\overline{D}\,\overline{D}'' - \overline{D}'^2$ le espressioni

$$\overline{E}\,\overline{G} - \overline{F}^2 = \frac{\lambda^2}{\operatorname{sen}^2\sigma}(\beta l - \alpha m)^2$$

$$\overline{D}\,\overline{D}'' - \overline{D}'^2 = (\sqrt{G}\cos\varphi\,.\,\gamma + \sqrt{E}\operatorname{sen}\varphi\,.\,\delta)(\beta l - \alpha m);$$

conseguentemente per la curvatura $\overline{K}$ della seconda falda $\overline{S}$

$$\overline{K} = \frac{\overline{D}\,\overline{D}'' - \overline{D}'^2}{\overline{E}\,\overline{G} - \overline{F}^2}$$

si ha la formola

$$\overline{K} = \frac{\operatorname{sen}^2\sigma}{\lambda^2}\,\frac{\sqrt{G}\cos\varphi\,.\,\gamma + \sqrt{E}\operatorname{sen}\varphi\,.\,\delta}{\beta l - \alpha m}. \tag{11}$$

§ 3.

Le congruenze W in generale.

Applichiamo le formole generali ora stabilite al caso delle congruenze W, supponendo cioè che sulle due falde focali S, $\bar{S}$ si corrispondano le linee asintotiche (o i sistemi coniugati), ***escludendo da ora in poi il caso di falde focali sviluppabili.***

Esprimiamo che la congruenza è W col sussistere delle proporzioni

$$\bar{D} : \bar{D}' : \bar{D}'' = D : D' : D'',$$

ossia delle equazioni

$$D' \bar{D} - D \bar{D}' = 0$$

$$D' \bar{D}'' - D'' \bar{D}' = 0.$$

Se in queste sostituiamo per $\bar{D}$, $\bar{D}'$, $\bar{D}''$ i valori (9), usando del primo valore di $\bar{D}'$ per la prima, del secondo per la seconda, troviamo dapprima

$$l\,\alpha = l \frac{\lambda^2}{\operatorname{sen}^2 \sigma} \frac{1}{\sqrt{E\,G}} (D' \gamma - D\,\delta)$$

$$m\,\beta = m \frac{\lambda^2}{\operatorname{sen}^2 \sigma} \frac{1}{\sqrt{E\,G}} (D'' \gamma - D'\,\delta),$$

e se l, m sono ambedue diversi da zero, ne segue che le formole richieste sono

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{\lambda^2}{\operatorname{sen}^2 \sigma} \frac{1}{\sqrt{E\,G}} (D' \gamma - D\,\delta) \\ \beta &= \frac{\lambda^2}{\operatorname{sen}^2 \sigma} \frac{1}{\sqrt{E\,G}} (D'' \gamma - D'\,\delta). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Ma ora diciamo che, in ogni caso, anche annullandosi l o m, queste formole (12) esprimono le condizioni per una congruenza W. Intanto l, m non possono annullarsi insieme, perchè questo richiederebbe per la (5) l'annullarsi di $D\,D'' - D'^2$ e la S sarebbe sviluppabile contro l'ipotesi.

Ora, se si ha per es. $m = 0$, indi $l \neq 0$, varrà sempre la prima delle (12) e da questa, osservando la (10), segue l'altra, poichè si ha

$$\sqrt{G} \cos \varphi (D' \gamma - D \delta) + \sqrt{E} \operatorname{sen} \varphi (D'' \gamma - D' \delta) = \sqrt{E G} (m \gamma - l \delta).$$

Sostituendo nelle (12) per $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ i loro valori effettivi (4), (5), abbiamo le due formole:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \sqrt{E} \cos \varphi &= \frac{\lambda^2}{\operatorname{sen}^2 \sigma} \frac{1}{\sqrt{E G}} \left(D' \frac{\partial \sigma}{\partial u} - D \frac{\partial \sigma}{\partial v} - K E \sqrt{G} \cos \varphi \right), \\ \frac{\partial \lambda}{\partial v} + \sqrt{G} \operatorname{sen} \varphi &= \frac{\lambda^2}{\operatorname{sen}^2 \sigma} \frac{1}{\sqrt{E G}} \left(D'' \frac{\partial \sigma}{\partial u} - D' \frac{\partial \sigma}{\partial v} - K G \sqrt{E} \operatorname{sen} \varphi \right), \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

e queste, insieme alle (I), esprimono le condizioni necessarie e sufficienti perchè il sistema di raggi sia una congruenza *W*.

Se calcoliamo dalle (12) il valore di $\beta l - \alpha m$, abbiamo

$$\beta l - \alpha m = \frac{\lambda^2}{\operatorname{sen}^2 \sigma} \frac{1}{\sqrt{E G}} \left\{ (l D'' - m D') \gamma + (m D - l D') \delta \right\},$$

ossia, per le (5)

$$\beta l - \alpha m = K \frac{\lambda^2}{\operatorname{sen}^2 \sigma} (\sqrt{G} \cos \varphi \,.\, \gamma + \sqrt{E} \operatorname{sen} \varphi \,.\, \delta).$$

Dopo ciò la (11) si converte nella relazione

$$K \,.\, \overline{K} = \left(\frac{\operatorname{sen} \sigma}{\lambda} \right)^4, \tag{13}$$

che dà la ben nota proposizione di Ribaucour per le congruenze *W* (Vol. II, pag. 59). Sarebbe anche facile dedurre dalle formole attuali che la (13) *caratterizza* le congruenze *W*.

È noto altresì che, nelle congruenze *W*, ciascuna falda focale ammette una deformazione infinitesima nella quale ogni punto si sposta parallelamente alla normale nel punto corrispondente dell'altra falda (Vol. II, pag. 53). Se diciamo per la S

$$\varepsilon n \overline{X}, \qquad \varepsilon n \overline{Y}, \qquad \varepsilon n \overline{Z}$$

le componenti dello spostamento, dove n è una conveniente funzione di u, v

ed ε una costante infinitesima, l'incognita n è da calcolarsi dalle formole

$$S X_1 \frac{\partial}{\partial u}(n \bar{X}) = 0, \qquad S X_2 \frac{\partial}{\partial v}(n \bar{X}) = 0,$$

le quali dànno per le (2) e (7)

$$\frac{\partial \log n}{\partial u} = -\frac{\sqrt{E}\cos\varphi}{\lambda} - \cot\sigma \, . \, \gamma, \qquad \frac{\partial \log n}{\partial v} = -\frac{\sqrt{G}\,\mathrm{sen}\,\varphi}{\lambda} - \cot\sigma \, . \, \delta,$$

e possono scriversi, per le (4), sotto la forma equivalente

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \log(n\,\mathrm{sen}\,\sigma)}{\partial u} &= -\frac{\sqrt{E}\cos\varphi}{\lambda} + \cot\sigma\left(\frac{D}{\sqrt{E}}\,\mathrm{sen}\,\varphi - \frac{D'}{\sqrt{G}}\cos\varphi\right), \\ \frac{\partial \log(n\,\mathrm{sen}\,\sigma)}{\partial v} &= -\frac{\sqrt{G}\,\mathrm{sen}\,\varphi}{\lambda} + \cot\sigma\left(\frac{D'}{\sqrt{E}}\,\mathrm{sen}\,\varphi - \frac{D''}{\sqrt{G}}\cos\varphi\right) \cdot \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

La condizione d'integrabilità per queste formole è soddisfatta nel caso delle congruenze W, e solo in questo.

§ 4.

Congruenze W a parametro medio costante.

Essendo λ la distanza dei fuochi e σ l'angolo dei piani focali, per la distanza d dei punti limiti abbiamo $d = \frac{\lambda}{\mathrm{sen}\,\sigma}$, e quindi pel parametro medio $H = \sqrt{d^2 - \lambda^2}$ risulta

$$H = \lambda \cot\sigma.$$

Le congruenze a parametro medio costante $= a$ sono dunque quelle per le quali

$$\cot\sigma = \frac{a}{\lambda} \cdot \qquad (15)$$

Se supponiamo di più che si tratti di una congruenza W, avremo subito il sistema di equazioni differenziali da cui dipende la ricerca delle congruenze W a parametro medio costante $= a$, con assegnata prima falda focale S, introducendo nelle (I), (II) per $\cot\sigma$ il valore (15); così otteniamo pel detto sistema:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}=\frac{\sqrt{E}\operatorname{sen}\varphi}{\lambda}+\frac{a}{\lambda}\left(\frac{D}{\sqrt{E}}\cos\varphi+\frac{D'}{\sqrt{G}}\operatorname{sen}\varphi\right),\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}=-\frac{\sqrt{G}\cos\varphi}{\lambda}+\frac{a}{\lambda}\left(\frac{D'}{\sqrt{E}}\cos\varphi+\frac{D''}{\sqrt{G}}\operatorname{sen}\varphi\right),
\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left(a\frac{D'}{\sqrt{EG}}-1\right)\frac{\partial\lambda}{\partial u}-a\frac{D}{\sqrt{E}}\frac{\partial\lambda}{\partial v}=\left[K(\lambda^2+a^2)+1\right].\sqrt{E}\cos\varphi,\\
&a\frac{D''}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\lambda}{\partial u}-\left(a\frac{D'}{\sqrt{EG}}+1\right)\frac{\partial\lambda}{\partial v}=\left[K(\lambda^2+a^2)+1\right].\sqrt{G}\operatorname{sen}\varphi,
\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

Osserviamo che si ottiene una soluzione particolare ben nota del problema, supponendo costante λ, indi σ; allora risulta

$$K=-\frac{1}{\lambda^2+a^2}=-\frac{\cos^2\sigma}{a^2},$$

la superficie S deve essere pseudosferica di raggio $=\frac{\cos\sigma}{a}$, e lo stesso accade della seconda falda focale $\overline{S}$, mentre le (16) diventano le formole per la trasformazione di Bäcklund in coordinate (ortogonali) qualunque.

In generale sarà λ variabile, e dalle (17), lineari in $\frac{\partial\lambda}{\partial u}$, $\frac{\partial\lambda}{\partial v}$, osservando che, per la (a), il loro determinante ha il valore Ka^2+1, avremo in ogni caso le due formole

$$\left.\begin{aligned}
&(Ka^2+1)\frac{\partial\lambda}{\partial u}=\left[K(\lambda^2+a^2)+1\right].\\
&\qquad\qquad.\left\{-\sqrt{E}\cos\varphi+a\left(\frac{D}{\sqrt{E}}\operatorname{sen}\varphi-\frac{D'}{\sqrt{G}}\cos\varphi\right)\right\}\\
&(Ka^2+1)\frac{\partial\lambda}{\partial v}=\left[K(\lambda^2+a^2)+1\right].\\
&\qquad\qquad.\left\{-\sqrt{G}\operatorname{sen}\varphi+a\left(\frac{D'}{\sqrt{E}}\operatorname{sen}\varphi-\frac{D''}{\sqrt{G}}\cos\varphi\right)\right\}.
\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

Escludendo dapprima il caso che sia $Ka^2+1=0$, il sistema differenziale da cui dipende la nostra ricerca è adunque il seguente:

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi}{\partial u}-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}=\frac{1}{\lambda}\left\{\sqrt{E}\,\mathrm{sen}\,\varphi+a\left(\frac{D}{\sqrt{E}}\cos\varphi+\frac{D'}{\sqrt{G}}\,\mathrm{sen}\,\varphi\right)\right\}\\
&\frac{\partial \varphi}{\partial v}+\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}=\frac{1}{\lambda}\left\{-\sqrt{G}\cos\varphi+a\left(\frac{D'}{\sqrt{E}}\cos\varphi+\frac{D''}{\sqrt{G}}\,\mathrm{sen}\,\varphi\right)\right\}
\end{aligned}\right\}\quad\text{(III)}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \lambda}{\partial u}=\frac{K(\lambda^2+a^2)+1}{K a^2+1}\left\{a\left(\frac{D}{\sqrt{E}}\,\mathrm{sen}\,\varphi-\frac{D'}{\sqrt{G}}\cos\varphi\right)-\sqrt{E}\cos\varphi\right\}\\
&\frac{\partial \lambda}{\partial v}=\frac{K(\lambda^2+a^2)+1}{K a^1+1}\left\{a\left(\frac{D'}{\sqrt{E}}\,\mathrm{sen}\,\varphi-\frac{D''}{\sqrt{G}}\cos\varphi\right)-\sqrt{G}\,\mathrm{sen}\,\varphi\right\}.
\end{aligned}\right\}\quad\text{(IV)}
$$

Bisogna ora esaminare le condizioni d'integrabilità per questo sistema.

§ 5.

Esame delle condizioni d'integrabilità.

Dall'osservazione fatta al § 2 risulta che la condizione d'integrabilità per le (III) rientra nel sistema stesso (III), (IV), e resta solo da ricercare la condizione d'integrabilità delle (IV). Ma dalle (III) stesse, e dalle equazioni (6) di Codazzi, vediamo facilmente che l'espressione

$$
\begin{aligned}
d\,\Omega=&\left\{a\left(\frac{D}{\sqrt{E}}\,\mathrm{sen}\,\varphi-\frac{D'}{\sqrt{G}}\cos\varphi\right)-\sqrt{E}\cos\varphi\right\}du+\\
&+\left\{a\left(\frac{D'}{\sqrt{E}}\,\mathrm{sen}\,\varphi-\frac{D''}{\sqrt{G}}\cos\varphi\right)-\sqrt{G}\,\mathrm{sen}\,\varphi\right\}dv
\end{aligned}
$$

deve risultare il differenziale esatto di una funzione Ω di u, v; per ciò le (IV) possono anche scriversi

$$
\frac{\partial \lambda}{\partial u}=\frac{K(\lambda^2+a^2)+1}{K a^2+1}\,\frac{\partial \Omega}{\partial u},\quad \frac{\partial \lambda}{\partial v}=\frac{K(\lambda^2+a^2)+1}{K a^2+1}\,\frac{\partial \Omega}{\partial v},
$$

onde segue che tanto Ω quanto K sono funzioni di λ (supposta variabile). Con queste osservazioni siamo condotti a distinguere due casi essenzialmente diversi, secondo che la curvatura K della falda focale assegnata S è variabile, ovvero costante.

1.° caso — K variabile.

Deduciamo allora dalle (IV)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial u}\left\{\left(a\frac{D'}{\sqrt{E}}-\sqrt{G}\right)\operatorname{sen}\varphi-a\frac{D''}{\sqrt{G}}\cos\varphi\right\}+\\ +\frac{\partial K}{\partial v}\left\{-a\frac{D}{\sqrt{E}}\operatorname{sen}\varphi+\left(a\frac{D'}{\sqrt{G}}+\sqrt{E}\right)\cos\varphi\right\}=0,\end{aligned}\right\}\qquad(\alpha)$$

e siccome i coefficienti di sen φ, cos φ non sono simultaneamente nulli (perchè $K a^2+1 \neq 0$), ne risulta determinata tg φ, e quindi fissata la congruenza. Affinchè questa soddisfi al problema occorre e basta, per le (III), che il valore così calcolato per φ soddisfi all'equazione differenziale

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\left\{-\sqrt{G}\cos\varphi+a\left(\frac{D'}{\sqrt{E}}\cos\varphi+\frac{D''}{\sqrt{G}}\operatorname{sen}\varphi\right)\right\}=\\ =\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)\left\{\sqrt{E}\operatorname{sen}\varphi+a\left(\frac{D}{\sqrt{E}}\cos\varphi+\frac{D'}{\sqrt{G}}\operatorname{sen}\varphi\right)\right\}.\end{aligned}\right\}\qquad(\beta)$$

Concludiamo quindi: *Se la curvatura K è variabile, la congruenza cercata, se esiste, è unica e determinata.*

Come esempio di questo caso, si consideri una superficie di rotazione qualunque con

$$d s^2=d u^2+r^2 d v^2 \qquad \Big(r=r(u)\Big),$$

$$D=-\frac{r''}{\sqrt{1-r'^2}},\quad D'=0,\quad D''=r\sqrt{1-r'^2},\quad \left(r'=\frac{d r}{d u},\quad r''=\frac{d^2 r}{d u^2}\right).$$

Essendo $K=-\frac{r''}{r}$, $\frac{\partial K}{\partial v}=0$, la ($\alpha$) dà

$$r\operatorname{sen}\varphi+a\sqrt{1-r'^2}\cos\varphi=0,$$

mentre la (β), come subito si vede, ne segue per derivazione. Dunque: per una superficie di rotazione qualunque S la formola $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{a\sqrt{1-r'^2}}{r}$ definisce una congruenza W a parametro medio costante a, avente S per prima falda focale, e la seconda falda $\overline{S}$ è un'altra superficie di rotazione.

2.° caso — K costante.

Quando K è costante, anche la condizione d'integrabilità delle (IV) risulta soddisfatta, ed il sistema differenziale (III), (IV) è in conseguenza illimitatamente integrabile. Esiste quindi uno ed un solo sistema integrale (λ, φ) che, per valori iniziali u_0, v_0 dati alle variabili indipendenti, assume valori prefissati qualunque (λ_0, φ_0). Ciò significa geometricamente che si può assegnare ad arbitrio, in un punto iniziale F_0 di S, in grandezza ed orientazione, il segmento focale $F_0\overline{F}_0$. Ricordando che nella discussione attuale è escluso il caso $Ka^2+1=0$, abbiamo dunque il risultato:

Ogni superficie a curvatura costante K appartiene, come prima falda focale, ad una doppia infinità di congruenze W a parametro medio fissato a, escluso il caso $K = -\frac{1}{a^2}$.

§ 6.

Esame del caso speciale.

Prendiamo ora ad esaminare se nel caso finora escluso, quando cioè la prima falda focale S sia pseudosferica e di raggio eguale al parametro medio a della congruenza W da costruirsi, esistono di siffatte congruenze e come si ottengono.

Per questo cominciamo dal ricorrere alle (18), le quali, essendo $Ka^2+1=0$, mentre il fattore comune ai secondi membri $K(\lambda^2+a^2)+1=K\lambda^2$ è diverso da zero, diventano

$$a\left(\frac{D}{\sqrt{E}}\operatorname{sen}\varphi - \frac{D'}{\sqrt{G}}\cos\varphi\right) - \sqrt{E}\cos\varphi = 0$$

$$a\left(\frac{D'}{\sqrt{E}}\operatorname{sen}\varphi - \frac{D''}{\sqrt{G}}\cos\varphi\right) - \sqrt{G}\operatorname{sen}\varphi = 0$$

e rientrano l'una nell'altra, a causa appunto di $Ka^2 + 1 = 0$. Si riconosce nel modo più semplice il significato geometrico di questa relazione, assumendo a linee coordinate $v =$ cost. le caustiche della congruenza, con che $\varphi = 0$. Allora la seconda ci dà $D'' = 0$ e dice che le $u =$ cost., trajettorie ortogonali delle caustiche, debbono essere asintotiche; dunque la congruenza deve essere costituita dalle normali principali delle asintotiche di un sistema.

Ora dimostriamo inversamente che: ***In ogni superficie pseudosferica di raggio $= R$ le normali principali delle asintotiche, nell'uno o nell'altro sistema, formano una congruenza W a parametro medio costante $= \pm R$.***

Basterà provare che se la S è pseudosferica di raggio R, si soddisfano le (16), (17) insieme assumendo per φ l'angolo d'inclinazione sulle $v =$ cost. delle trajettorie ortogonali delle asintotiche (nell'uno o nell'altro sistema) e dando alla costante a il valore $\pm R$.

Per semplicizzare, si riferisca la S alle sue linee di curvatura (u, v), colle formole ben note della teoria (Vol. II, § 373). Essendo θ una soluzione dell'equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \operatorname{sen} \theta \cos \theta, \tag{19}$$

avremo (l. c.)

$$\sqrt{E} = R \cos \theta, \quad \sqrt{G} = R \operatorname{sen} \theta$$

$$r_1 = -R \operatorname{tg} \theta, \quad r_2 = R \cot \theta,$$

indi

$$\frac{D}{\sqrt{E}} = -\frac{\sqrt{E}}{r_2} = -\operatorname{sen} \theta, \quad D' = 0, \quad \frac{D''}{\sqrt{G}} = -\frac{\sqrt{G}}{r_1} = \cos \theta;$$

di più poniamo nelle (16), (17) $a = R$. Queste formole diventano

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} &= \frac{R}{\lambda} \operatorname{sen} (\varphi - \theta) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} &= \frac{R}{\lambda} \operatorname{sen} (\varphi - \theta), \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial u} - \frac{\partial \lambda}{\partial v} &= \frac{\lambda^2}{R} \cos \theta \cos \varphi, \\ \frac{\partial \lambda}{\partial u} - \frac{\partial \lambda}{\partial v} &= -\frac{\lambda^2}{R} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Ora le linee asintotiche $u - v = \text{cost.}$ sono inclinate sulle $v = \text{cost.}$ appunto dell'angolo θ, e quindi le loro trajettorie ortogonali dell'angolo $\varphi = \frac{\pi}{2} + \theta$. Perciò le (20) concordano nella equazione

$$\frac{R}{\lambda} = \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} \tag{22}$$

e le (21) nell'altra

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} - \frac{\partial \lambda}{\partial v} = -\frac{R^2}{\lambda} \operatorname{sen} \theta \cos \theta,$$

ossia

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{R}{\lambda}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{R}{\lambda}\right) = \operatorname{sen} \theta \cos \theta. \tag{22*}$$

Ma in effetto col valore (22) per $\frac{R}{\lambda}$ è soddisfatta, a causa della (19), la (22*).

Affatto similmente, se si prendesse invece $a = -R$, basterebbe considerare le asintotiche dell'altro sistema $u + v = \text{cost.}$ e le loro trajettorie ortogonali corrispondenti a $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$.

Concludiamo adunque: *Ogni superficie pseudosferica di raggio $= R$ è falda focale di due e due sole congruenze W a parametro medio costante $= \pm R$; queste sono formate dalle normali principali delle linee asintotiche nell'uno o nell'altro sistema* (*).

Come si vede, rispetto al caso generale (quando K è una costante di-

(*) Questa proprietà può anche enunciarsi sotto la forma equivalente:

Ogni superficie pseudosferica ammette due deformazioni infinitesime nelle quali i punti si spostano secondo le binormali alle trajettorie ortogonali delle asintotiche.

È facile vedere che la funzione *caratteristica* Φ di Weingarten (Vol. II, pag. 5) corrispondente a queste deformazioni infinitesime è

$$\Phi = \frac{\partial \theta}{\partial u} \pm \frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

Le due deformazioni infinitesime appartengono al *fascio* che comprende le due funzioni caratteristiche $\frac{\partial \theta}{\partial u}$, $\frac{\partial \theta}{\partial v}$, le quali ultime corrispondono nel medesimo modo alle *congruenze W* formate dalle tangenti alle linee di curvatura.

versa da $\left.-\frac{1}{a^2}\right)$, questo è un caso eccezionale notevole, avendosi due sole congruenze che soddisfano, le quali si ottengono *in termini finiti* appena nota la superficie pseudosferica S.

§ 7.

Congruenze W normali.

Noi vogliamo ora studiare, nel caso $K = \text{cost.}$, il problema d'integrazione del sistema (III), (IV), e cominciamo per questo dal caso particolare $a = 0$ delle congruenze normali, al qual caso si riduce essenzialmente, come si vedrà, il caso generale $a \neq 0$.

Ponendo nelle equazioni differenziali (III), (IV) la costante a eguale a zero, abbiamo il sistema

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = \frac{\sqrt{E}\,\text{sen}\,\varphi}{\lambda} \\ &\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = -\frac{\sqrt{G}\cos\varphi}{\lambda}, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \lambda}{\partial u} + \sqrt{E}\cos\varphi\,(K\lambda^2 + 1) = 0 \\ &\frac{\partial \lambda}{\partial v} + \sqrt{G}\,\text{sen}\,\varphi\,(K\lambda^2 + 1) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{23*}$$

che nella nostra ipotesi di $K = \text{cost.}$ (*) è illimitatamente integrabile. Sosti-

(*) In generale, per K qualunque, prendendo a linee coordinate $v = \text{cost.}$ le caustiche si ha $\varphi = 0$ e le (23), (23*) diventano

$$\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = 0, \quad \frac{1}{\lambda} = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial u} + (K\lambda^2 + 1)\sqrt{E} = 0.$$

La prima insegna che le $v = \text{cost.}$ sono geodetiche, la seconda che λ è il raggio di curvatura geodetica delle trajettorie ortogonali. Siccome poi, per la terza, λ è funzione di u soltanto, tuendo alla funzione incognita λ la sua inversa

$$T = \frac{1}{\lambda}, \tag{24}$$

scriveremo questo sistema sotto la forma

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} &= \sqrt{E} \operatorname{sen} \varphi \,.\, T \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} &= -\sqrt{G} \cos \varphi \,.\, T \end{aligned}\right\} \tag{III*}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial u} &= (T^2 + K) \sqrt{E} \cos \varphi \\ \frac{\partial T}{\partial v} &= (T^2 + K) \sqrt{G} \operatorname{sen} \varphi . \end{aligned}\right\} \tag{IV*}$$

Risultano da quanto si è detto sopra nella nota, e si confermano subito direttamente colla formola di Bonnet per la curvatura geodetica, le proprietà seguenti:

1.° le caustiche di equazione differenziale

$$\sqrt{E} \operatorname{sen} \varphi \, d u - \sqrt{G} \cos \varphi \, d v = 0$$

sono linee geodetiche:

2.° le loro trajettorie ortogonali sono le $T = \text{cost.}$ coll'equazione differenziale

$$\sqrt{E} \cos \varphi \, d u + \sqrt{G} \operatorname{sen} \varphi \, d v = 0$$

ed hanno la curvatura geodetica

$$\frac{1}{\rho_g} = T.$$

Ciò premesso, distinguiamo secondo che $K > 0$, ovvero $K < 0$, e facciamo per semplicità nel primo caso $K = +1$, nel secondo $K = -1$.

---

segue che la S è applicabile sopra una superficie di rotazione e le $v = \text{cost.}$ sono le deformate dei meridiani. Quanto alla quarta, essa coincide colla nota espressione della curvatura.

Da queste osservazioni risulta nuovamente la proposizione ben nota pei teoremi di Weingarten e Ribaucour: ***Per costruire le congruenze W normali basta prendere una qualunque superficie applicabile sopra una superficie di rotazione e condurre le tangenti alle deformate dei meridiani.***

1.° caso $K = +1$.

Ponendo $T = \operatorname{tg} \tau$, le equazioni differenziali (III*), (IV*) assumono la forma normale seguente:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} &= \sqrt{E} \operatorname{sen} \varphi \,.\, \operatorname{tg} \tau \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} &= -\sqrt{G} \cos \varphi \,.\, \operatorname{tg} \tau \end{aligned}\right\} \tag{A}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial u} = \sqrt{E} \cos \varphi, \quad \frac{\partial \tau}{\partial v} = \sqrt{G} \operatorname{sen} \varphi. \tag{A'}$$

Le linee $\tau =$ cost. sono geodeticamente parallele, e siccome la loro curvatura geodetica è $\frac{1}{\rho_g} = \operatorname{tg} \tau$, fra queste la $\tau = 0$ è una geodetica, alla quale tutte le caustiche (geodetiche) sono normali. La funzione τ rappresenta la distanza geodetica di un punto generico della superficie dalla $\tau = 0$. Viceversa si ottiene l'integrale generale del sistema differenziale (A), (A') scegliendo ad arbitrio una geodetica g sulla superficie e prendendo la funzione τ eguale alla distanza geodetica del punto (u, v) dalla g.

2.° caso $K = -1$.

Nel caso $K = -1$ si ha in primo luogo una soluzione notevole del sistema (III*), (IV*) prendendo T costante, indi $T = \pm 1$, ciò che rende identiche le (IV*) e riduce le (III*) alle formole della trasformazione complementare. Lasciando da parte questo caso ben noto, converrà ora suddistinguere secondo che $|T| > 1$, ovvero $|T| < 1$.

a) *Caso* $|T| > 1$. Pongasi $T = \coth \tau$ e le (III*), (IV*) assumeranno la forma normale

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} &= \sqrt{E} \operatorname{sen} \varphi \,.\, \coth \tau \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} &= -\sqrt{G} \cos \varphi \,.\, \coth \tau \end{aligned}\right\} \tag{B}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial u} = -\sqrt{E}\cos\varphi, \quad \frac{\partial \tau}{\partial v} = -\sqrt{G}\,\mathrm{sen}\,\varphi. \tag{B'}$$

Le $\tau = \mathrm{cost.}$ sono geodeticamente parallele ed, a causa della formola $\frac{1}{\rho_g} = \coth\tau$, la $\tau = 0$ si riduce ad un punto della superficie. Le caustiche sono geodetiche uscenti da questo punto O e τ è la distanza geodetica di un punto (u, v) della superficie dal centro O.

b) *Caso* $|T| < 1$. Pongasi ora $T = \mathrm{tgh}\,\tau$, e le (III*), (IV*) assumeranno la forma

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = \sqrt{E}\,\mathrm{sen}\,\varphi \,.\, \mathrm{tgh}\,\tau \\ &\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = -\sqrt{G}\cos\varphi \,.\, \mathrm{tgh}\,\tau \end{aligned}\right\} \tag{C}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial u} = -\sqrt{E}\cos\varphi, \quad \frac{\partial \tau}{\partial v} = -\sqrt{G}\,\mathrm{sen}\,\varphi. \tag{C'}$$

Qui le caustiche sono geodetiche tutte normali alla geodetica fissa $\tau = 0$, e la funzione τ rappresenta nuovamente la distanza geodetica del punto (u, v) dalla $\tau = 0$.

In tutti i casi la integrazione del sistema (III*), (IV*) è effettuata appena sulla superficie S siano note le linee geodetiche.

§ 8.

Riduzione del sistema differenziale (III), (IV) nel caso $K > 0$.

Ci proponiamo ora di dimostrare che l'integrazione del sistema (III), (IV) § 4, per K costante ed a qualunque, si riduce essenzialmente al caso di $a = 0$ studiato nel paragrafo precedente.

Supponiamo dapprima $K > 0$ e poniamo ancora $K = +1$. La ricerca di queste superficie (deformate della sfera) dipende come si sa dalla equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = -\,\mathrm{senh}\,\theta\cosh\theta, \tag{25}$$

ad ogni soluzione θ di questa corrispondendo una coppia di superficie a curvatura $K = +1$ legate dalla trasformazione involutoria di HAZZIDAKIS (Vol. II, § 392) (*). Una di queste, che diciamo S, ha per elemento lineare riferito alle linee di curvatura (u, v)

$$d s^2 = \operatorname{senh}^2 \theta \, d u^2 + \cosh^2 \theta \, d v^2,$$

e per raggi principali di curvatura

$$r_1 = \coth \theta, \qquad r_2 = \operatorname{tgh} \theta,$$

(*) Coll'adoperare le formole nel testo escludiamo il caso che la S sia una sfera. In questo caso la ricerca si esaurisce subito nel modo seguente:

In primo luogo si può risolvere in generale la questione di costruire tutte le congruenze W con una falda focale sferica. Assumendo le caustiche a linee $v = \text{cost.}$ e le trajettorie ortogonali a linee $u = \text{cost.}$, basta applicare la formola (19) del Vol. III delle *Lezioni* (pag. 219) per vedere che si avrà una congruenza W allora ed allora soltanto che sia soddisfatta la condizione

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\}\right] = \frac{\partial}{\partial u}\left[\left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\} + \frac{G}{E}\left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{matrix} \right\}\right],$$

ossia sostituendo i valori dei simboli

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial u} - \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}\right) = 0,$$

o in fine $\dfrac{\partial^2}{\partial u \, \partial v} \log\left(\dfrac{E}{G}\right) = 0$, formola che esprime essere il sistema (u, v) isotermo. Ne concludiamo:

Per costruire la più generale congruenza W con una falda focale sferica si tracci sulla sfera un qualunque sistema doppio ortogonale isotermo e si tirino le tangenti alle linee dell'uno o dell'altro sistema.

Venendo ora alla nostra ricerca speciale delle congruenze W a parametro medio costante a con una falda focale sferica, basta applicare il risultato superiore e le formole generali (III), (IV) § 4 per stabilire la proposizione seguente:

Per costruire le congruenze W di parametro medio costante a con una falda focale S sferica (di raggio $= 1$***), si consideri sulla sfera un sistema di meridiani e si tirino i raggi tangenti alla sfera ed inclinati dell'angolo costante*** $\alpha = \operatorname{arc\,tg} a$ ***sui meridiani.***

Si osservi che questa costruzione rientra come caso particolare in quella data al § 5 (1.° caso) per una superficie qualunque di rotazione. Qui le caustiche sono lossodromiche congruenti, e la seconda falda focale $\overline{S}$ è un iperboloide rotondo a due falde concentrico alla sfera e tangente a questa nei due vertici.

sicchè nelle formole del § 4 è da porsi

$$\sqrt{E} = \operatorname{senh}\theta, \quad \sqrt{G} = \cosh\theta,$$

$$\frac{D}{\sqrt{E}} = -\cosh\theta, \quad D' = 0, \quad \frac{D''}{\sqrt{G}} = -\operatorname{senh}\theta;$$

il sistema differenziale (III), (IV) assume pertanto la forma:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{\partial\theta}{\partial v} &= \frac{1}{\lambda}(\operatorname{senh}\theta \operatorname{sen}\varphi - a\cosh\theta \operatorname{sen}\varphi) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\theta}{\partial u} &= \frac{1}{\lambda}(-\cosh\theta\cos\varphi - a\operatorname{senh}\theta \operatorname{sen}\varphi), \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\lambda}{\partial u} &= -\frac{\lambda^2 + a^2 + 1}{a^2+1}(\operatorname{senh}\theta\cos\varphi + a\cosh\theta \operatorname{sen}\varphi) \\ \frac{\partial\lambda}{\partial v} &= \frac{\lambda^2 + a^2 + 1}{a^2+1}(-\cosh\theta \operatorname{sen}\varphi + a\operatorname{senh}\theta\cos\varphi). \end{aligned}\right\} \tag{26*}$$

Eseguiamo ora in questo sistema il cangiamento ortogonale di variabili indipendenti

$$\left.\begin{aligned} u &= u_1\cos\alpha - v_1\operatorname{sen}\alpha \\ v &= u_1\operatorname{sen}\alpha + v_1\cos\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

prendendo la costante α in guisa che sia

$$a = -\operatorname{tg}\alpha. \tag{27*}$$

Colla sostituzione lineare (27) abbiamo in generale

$$\frac{\partial}{\partial u_1} = \cos\alpha\frac{\partial}{\partial u} + \operatorname{sen}\alpha\frac{\partial}{\partial v}, \quad \frac{\partial}{\partial v_1} = -\operatorname{sen}\alpha\frac{\partial}{\partial u} + \cos\alpha\frac{\partial}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial v_1^2} = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2},$$

onde ponendo

$$\theta(u, v) = \Theta(u_1, v_1), \quad \varphi(u, v) = \Phi(u_1, v_1), \quad \lambda(u, v) = \Lambda(u_1, v_1),$$

il sistema (26), (26*) diventa

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial u_1} - \frac{\partial\Theta}{\partial v_1} &= \frac{\operatorname{senh}\Theta \operatorname{sen}\Phi}{\Lambda\cos\alpha} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial v_1} + \frac{\partial\Theta}{\partial u_1} &= -\frac{\cosh\Theta\cos\Phi}{\Lambda\cos\alpha} \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\Lambda}{\partial u_1} &= -\frac{\Lambda^2\cos^2\alpha + 1}{\cos\alpha}\operatorname{senh}\Theta\cos\Phi \\ \frac{\partial\Lambda}{\partial v_1} &= -\frac{\Lambda^2\cos^2\alpha + 1}{\cos\alpha}\cosh\Theta \operatorname{sen}\Phi. \end{aligned}\right.$$

Se in fine eseguiamo l'ulteriore cangiamento di funzione incognità Λ col porre

$$\Lambda = \frac{\cot \tau}{\cos \alpha}, \tag{28}$$

il nostro sistema differenziale assume la forma definitiva

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} - \frac{\partial \Theta}{\partial v_1} &= \operatorname{senh} \Theta \operatorname{sen} \Phi \,.\, \operatorname{tg} \tau \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v_1} + \frac{\partial \Theta}{\partial u_1} &= - \cosh \Theta \cos \Phi \operatorname{tg} \tau \end{aligned}\right\} (29) \qquad \left.\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial u_1} &= \operatorname{senh} \Theta \cos \Phi \\ \frac{\partial \tau}{\partial v_1} &= \cosh \Theta \operatorname{sen} \Phi, \end{aligned}\right\} (29^*)$$

che facilmente identificheremo col sistema (A), (A') del paragrafo precedente.

§ 9.

Interpretazione geometrica colla trasformazione di Lie-Bonnet.

La funzione $\Theta(u_1, v_1)$ soddisfa, per le osservazioni fatte sopra, alla equazione differenziale (25)

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v_1^2} = - \operatorname{senh} \Theta \cosh \Theta,$$

e per ciò l'elemento lineare

$$d s_1^2 = \operatorname{senh}^2 \Theta \, d u_1^2 + \cosh^2 \Theta \, d v_1^2 \tag{30}$$

appartiene ad una superficie S_1 di curvatura $K = +1$ riferita alle sue linee di curvatura (u_1, v_1). Questa superficie S_1, intrinsecamente determinata dalla S e dalla costante α, è appunto la derivata dalla S mediante la trasformazione L_α di Lie-Bonnet (Vol. II, § 394). Ora, se applichiamo le formole (A), (A') § 7 alla superficie S_1, ponendovi

$$\sqrt{E} = \operatorname{senh} \Theta, \qquad \sqrt{G} = \cosh \Theta,$$

col cangiarvi nel tempo stesso u, v, φ rispettivamente in u_1, v_1, Φ, le (A), (A') vengono appunto a coincidere colle (29), (29*).

L'integrazione del sistema (III), (IV) § 4 nel caso $K = +1$ equivale dunque perfettamente a quella del sistema (A), (A') § 7, ciò che possiamo formulare geometricamente così:

La determinazione delle congruenze W a parametro medio costante (non nullo), aventi una assegnata falda focale S a curvatura costante positiva, si riduce a quella delle congruenze W normali con una falda focale S_1 derivata dalla S per trasformazione di Lie-Bonnet. *Il problema si risolve completamente quando si conosca la trasformata S_1 e su questa le linee geodetiche.*

Volendo poi formulare più da vicino come si effettua il passaggio dalle congruenze W normali con falda focale S_1 alle congruenze W di parametro medio costante con falda focale S, si riguardino come punti corrispondenti sopra S, S_1 quelli dati dai medesimi valori di u, v (*). Sopra la S_1 si traccino le geodetiche uscenti da un punto qualunque e si indichi con φ il loro angolo d'inclinazione *sulle* $v_1 = cost.$ Per ogni punto di S si conduca quella tangente che è inclinata del medesimo angolo φ *sulle* $v = cost.$; i raggi così costruiti formano la congruenza W richiesta.

§ 10.

Riduzione a forma normale nel caso $K < 0$.

La prima falda focale S sia ora a curvatura costante K negativa e pongasi ancora per semplicità $K = -1$. Assumendo a linee coordinate (u, v) quelle di curvatura, avremo come al § 6

$$\sqrt{E} = \cos\theta, \qquad \sqrt{G} = \operatorname{sen}\theta,$$

$$\frac{D}{\sqrt{E}} = -\operatorname{sen}\theta, \qquad D' = 0, \qquad \frac{D''}{\sqrt{G}} = \cos\theta,$$

ed il sistema differenziale (III), (IV) diventerà

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\theta}{\partial v} &= \frac{1}{\lambda}(\cos\theta\operatorname{sen}\varphi - a\operatorname{sen}\theta\cos\varphi) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\theta}{\partial u} &= \frac{1}{\lambda}(-\operatorname{sen}\theta\cos\varphi + a\cos\theta\operatorname{sen}\varphi), \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

(*) Si osservi che questa corrispondenza fra i punti delle due superficie S, S_1 derivate l'una dall'altra per trasformazione di Lie-Bonnet gode della doppia proprietà di *conservare le aree ed i sistemi coniugati.*

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \lambda}{\partial u} &= \frac{1-a^2-\lambda^2}{a^2-1}(\cos\theta\cos\varphi + a\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi)\\ \frac{\partial \lambda}{\partial v} &= \frac{1-a^2-\lambda^2}{a^2-1}(\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi + a\cos\theta\cos\varphi).\end{aligned}\right\} \tag{31*}$$

Essendo qui escluso il caso speciale $a^2 = 1$ del § 6, distinguiamo secondo che $|a| > 1$, ovvero $|a| < 1$.

1.° caso $|a| > 1$.

Indicando con α una costante reale, poniamo

$$a = -\coth\alpha,$$

ed eseguiamo sulle variabili u, v la sostituzione lineare

$$\begin{aligned} u &= u_1\cosh\alpha + v_1\,\mathrm{senh}\,\alpha\\ v &= u_1\,\mathrm{senh}\,\alpha + v_1\cosh\alpha,\end{aligned}$$

onde risulta in generale

$$\frac{\partial}{\partial u_1} = \cosh\alpha\frac{\partial}{\partial u} + \mathrm{senh}\,\alpha\frac{\partial}{\partial v}, \qquad \frac{\partial}{\partial v_1} = \mathrm{senh}\,\alpha\frac{\partial}{\partial u} + \cosh\alpha\frac{\partial}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial v_1^2} = \frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{\partial^2}{\partial v^2}.$$

Trasformiamo il sistema (31), (31*) nelle variabili u_1, v_1, eseguendo inoltre il cangiamento di funzioni incognite

$$\theta(u, v) = \Theta(u_1, v_1), \quad \varphi(u, v) = \frac{\pi}{2} - \Phi(u_1, v_1), \quad \lambda(u, v) = \Lambda(u_1, v_1),$$

e le equazioni differenziali assumeranno la forma

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1} - \frac{\partial\Theta}{\partial v_1} &= -\frac{\mathrm{sen}\,\Theta\,\mathrm{sen}\,\Phi}{\Lambda\,\mathrm{senh}\,\alpha}\\ \frac{\partial\Phi}{\partial v_1} - \frac{\partial\Theta}{\partial u_1} &= \frac{\cos\Theta\cos\Phi}{\Lambda\,\mathrm{senh}\,\alpha},\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial\Lambda}{\partial u_1} &= \frac{\Lambda^2\,\mathrm{senh}^2\alpha + 1}{\mathrm{senh}\,\alpha}\,\mathrm{sen}\,\Theta\cos\Phi\\ \frac{\partial\Lambda}{\partial v_1} &= \frac{\Lambda^2\,\mathrm{senh}^2\alpha + 1}{\mathrm{senh}\,\alpha}\cos\Theta\,\mathrm{sen}\,\Phi.\end{aligned}\right.$$

In fine ponendo

$$\Lambda = -\frac{\cot\tau}{\operatorname{senh}\alpha},$$

con τ nuova funzione incognita, avremo la forma definitiva

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}-\frac{\partial\Theta}{\partial v_1}&=\operatorname{sen}\Theta\operatorname{sen}\Phi\,.\operatorname{tg}\tau\\ \frac{\partial\Phi}{\partial v_1}-\frac{\partial\Theta}{\partial u_1}&=-\cos\Theta\cos\Phi\,.\operatorname{tg}\tau,\end{aligned}\right\}\ (32)\qquad \left.\begin{aligned}\frac{\partial\tau}{\partial u_1}&=\operatorname{sen}\Theta\cos\Phi\\ \frac{\partial\tau}{\partial v_1}&=\cos\Theta\operatorname{sen}\Phi.\end{aligned}\right\}\ (32^*)$$

2.° caso $|a|<1$.

In questo caso poniamo

$$a = -\operatorname{tgh}\alpha$$

e facciamo il cangiamento lineare di variabili

$$u = u_1\operatorname{senh}\alpha + v_1\cosh\alpha$$
$$v = u_1\cosh\alpha + v_1\operatorname{senh}\alpha,$$

da cui segue

$$\frac{\partial}{\partial u_1}=\operatorname{senh}\alpha\frac{\partial}{\partial u}+\cosh\alpha\frac{\partial}{\partial v},\quad \frac{\partial}{\partial v_1}=\cosh\alpha\frac{\partial}{\partial u}+\operatorname{senh}\alpha\frac{\partial}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial v_1^2}=-\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}-\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right).$$

Trasformando nelle nuove variabili u_1, v_1, col porre ancora

$$\theta(u,v)=\Theta(u_1,v_1),\quad \varphi(u,v)=\frac{\pi}{2}-\Phi(u_1,v_1),\quad \lambda(u,v)=\Lambda(u_1,v_1),$$

il sistema differenziale diventa:

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}-\frac{\partial\Theta}{\partial v_1}&=\frac{\operatorname{sen}\Theta\operatorname{sen}\Phi}{\Lambda\cosh\alpha}\\ \frac{\partial\Phi}{\partial v_1}-\frac{\partial\Theta}{\partial u_1}&=-\frac{\cos\Theta\cos\Phi}{\Lambda\cosh\alpha},\end{aligned}\right.\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial\Lambda}{\partial u_1}&=\frac{\Lambda^2\cosh^2\alpha-1}{\cosh\alpha}\operatorname{sen}\Theta\cos\Phi\\ \frac{\partial\Lambda}{\partial v_1}&=\frac{\Lambda^2\cosh^2\alpha-1}{\cosh\alpha}\cos\Theta\operatorname{sen}\Phi.\end{aligned}\right.$$

In fine distinguendo secondo che $|\Lambda \cosh \alpha| < 1$, ovvero $|\Lambda \cosh \alpha| > 1$, si ponga nel primo caso

$$\Lambda \cosh \alpha = \operatorname{tgh} \tau,$$

e nel secondo

$$\Lambda \cosh \alpha = \coth \tau.$$

Avremo così il sistema differenziale ridotto alla forma normale

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} - \frac{\partial \Theta}{\partial v_1} &= \operatorname{sen} \Theta \operatorname{sen} \Phi \,.\, \coth \tau \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v_1} - \frac{\partial \Theta}{\partial u_1} &= - \cos \Theta \cos \Phi \coth \tau, \end{aligned}\right\} (33) \qquad \left.\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial u_1} &= - \operatorname{sen} \Theta \cos \Phi \\ \frac{\partial \tau}{\partial v_1} &= - \cos \Theta \operatorname{sen} \Phi. \end{aligned}\right\} (33^*)$$

nel primo caso, e rispettivamente all'altra

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} - \frac{\partial \Theta}{\partial v_1} &= \operatorname{sen} \Theta \operatorname{sen} \Phi \operatorname{tgh} \tau \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v_1} - \frac{\partial \Theta}{\partial u_1} &= - \cos \Theta \cos \Phi \operatorname{tgh} \tau, \end{aligned}\right\} (34) \qquad \left.\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial u_1} &= - \operatorname{sen} \Theta \cos \Phi \\ \frac{\partial \tau}{\partial v_1} &= - \cos \Theta \operatorname{sen} \Phi, \end{aligned}\right\} (34^*)$$

se ci troviamo nel secondo caso.

Ora dimostreremo facilmente che il sistema (32), (32*) si identifica nuovamente col sistema (A), (A') § 7, e gli altri due (33), (33*); (34), (34*) rispettivamente coi sistemi (B), (B'); (C), (C') (ibid.). Così anche per K negativa abbiamo il risultato stesso che per K positiva.

§ 11.

Interpretazione colla trasformazione di Lie.

Nel primo caso considerato al paragrafo precedente la funzione $\Theta(u_1, v_1)$ è una soluzione della (19) § 6

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u_1^2} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v_1^2} = \operatorname{sen} \Theta \cos \Theta$$

e per ciò l'elemento lineare

$$d s^2 = \cos^2 \Theta \, d u_1^2 + \operatorname{sen}^2 \Theta \, d v_1^2$$

appartiene ad una superficie pseudosferica S_1 (di raggio $= 1$) colle linee di curvatura u_1, v_1, e questa S_1 è una *trasformata di* Lie della S. L'altro elemento lineare

$$d s'^2 = \text{sen}^2 \Theta \, d u_1^2 + \cos^2 \Theta \, d v_1^2 \tag{35}$$

è quindi l'elemento lineare sferico rappresentativo di S_1 nella rappresentazione di Gauss.

Ora per quest'ultimo elemento lineare (35) costruiamo il sistema (A), (A') § 7, ponendo

$$\sqrt{E} = \text{sen}\, \Theta, \quad \sqrt{G} = \cos \Theta,$$

e cangiando u, v, φ rispettivamente in u_1, v_1, Φ; troviamo appunto il sistema (32), (32*).

L'integrazione del corrispondente sistema differenziale (III), (IV) è dunque effettuata in questo caso appena si conosca la trasformata S_1 della S per trasformazione di Lie.

Passando al secondo caso del paragrafo precedente, si vede che la $\Theta(u_1, v_1)$ soddisfa alla equazione

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u_1^2} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v_1^2} = -\,\text{sen}\, \Theta \cos \Theta,$$

e per ciò l'elemento lineare (35), anzichè alla sfera, appartiene ad una superficie pseudosferica S_1 (di raggio $= 1$), che può ancora riguardarsi come una trasformata di Lie della S. Ed ora basta porre nelle formole (B), (B'), o nelle (C), (C') del § 7

$$\sqrt{E} = \text{sen}\, \Theta, \quad \sqrt{G} = \cos \Theta,$$

scrivendovi u_1, v_1, Φ al posto di u, v, φ, e i detti sistemi vengono a coincidere rispettivamente coi sistemi (33), (33*), ovvero (34), (34*). L'integrazione si sa dunque effettuare appena si conosca la S_1 e su questa le linee geodetiche.

Riepiloghiamo nel risultato finale: *La determinazione delle ∞^2 congruenze W a parametro medio costante prefissato, con una data falda focale S a curvatura costante, si sa effettuare appena della S si conoscano le superficie derivate per trasformazione di* Lie-Bonnet *e su queste le linee geodetiche.*

§ 12.

Alcune formole generali per le congruenze W.

Le seconde falde focali $\overline{S}$ delle congruenze W a parametro medio costante che abbiamo studiato finora godono di alcune proprietà relative alla equazione di Moutard *associata* (*) alle loro linee asintotiche, che vogliamo ora stabilire ricorrendo ai teoremi ed alle formole generali della teoria (Vol. II, Cap. XVI).

Definiamo in generale una congruenza W a falde focali (S, S_1) reali colle formole dei §§ 241, 242 delle *Lezioni* (Vol. II), essendo

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = M \theta \tag{α}$$

l'equazione di Moutard relativa ad S quando le asintotiche (u, v) sono reali, ovvero

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = M \theta \tag{β}$$

quando le asintotiche $(u + i v = \text{cost.}, u - i v = \text{cost.})$ sono immaginarie.

Così i coseni *normalizzati* di direzione ξ, η, ζ per la S sono tre soluzioni della α) o della β), e quelli ξ_1, η_1, ζ_1 della seconda falda S_1 sono legati a ξ, η, ζ ed alla *soluzione trasformatrice* della α) o β) dalle relazioni (ivi pag. 50)

$$\left.\begin{aligned} (\xi - \xi_1) \frac{\partial \log R}{\partial u} &= \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \xi_1}{\partial u} \\ (\xi + \xi_1) \frac{\partial \log R}{\partial v} &= \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \xi_1}{\partial v} \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

(*) Con questa denominazione intendiamo l'*equazione per le deformazioni infinitesime* della superficie ridotta alle forme normali α) e β) del testo (Vol. II, § 226). Essa è altresì l'equazione cui soddisfano nelle formole di Lelieuvre (Vol. I, § 77) i coseni *normalizzati* ξ, η, ζ della normale, cioè i coseni stessi moltiplicati per $\sqrt{\rho}$, essendo $|K| = \frac{1}{\rho^2}$.

e analoghe al caso α), o dalle altre

$$\left.\begin{aligned}\xi_1\frac{\partial\log R}{\partial u}+\xi\frac{\partial\log R}{\partial v}=\frac{\partial\xi}{\partial v}-\frac{\partial\xi_1}{\partial u}\\ \xi\frac{\partial\log R}{\partial u}-\xi_1\frac{\partial\log R}{\partial v}=\frac{\partial\xi}{\partial u}+\frac{\partial\xi_1}{\partial v}\end{aligned}\right\}\tag{36*}$$

nel caso β).

In tutti i casi sussistono le formole

$$S\xi^2=\rho,\quad S\xi_1^2=\rho_1,\tag{37}$$

essendo $K=\mp\frac{1}{\rho^2}$, $K_1=\mp\frac{1}{\rho_1^2}$ le curvature delle due falde focali, e per l'angolo σ dei due piani focali abbiamo

$$\cos\sigma=\frac{S\xi\xi_1}{\sqrt{\rho}\sqrt{\rho_1}}.\tag{38}$$

La distanza focale λ si calcola da $\lambda^2=S(x_1-x)^2$, essendo (ivi pag. 51)

$$x_1-x=\begin{vmatrix}\eta_1 & \zeta_1\\ \eta & \zeta\end{vmatrix}$$

colle due analoghe, indi risulta

$$\lambda^2=\begin{vmatrix}\xi_1 & \eta_1 & \zeta_1\\ \xi & \eta & \zeta\end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix}\rho_1 & \rho\rho_1\cos\sigma\\ \rho\rho_1\cos\sigma & \rho\end{vmatrix}=\rho\rho_1\,\mathrm{sen}^2\,\sigma,$$

ossia

$$\lambda=\mathrm{sen}\,\sigma\sqrt{\rho\rho_1}.\tag{39}$$

Siccome $d=\frac{\lambda}{\mathrm{sen}\,\sigma}$ è la distanza dei punti limiti abbiamo

$$d=\sqrt{\rho\rho_1},\tag{40}$$

onde nuovamente il teorema di Ribaucour (§ 3)

$$KK_1=\frac{1}{d^4}.$$

Dalle (39), (40) deduciamo pel parametro medio H della congruenza $H=\sqrt{d^2-\lambda^2}$ la formola

$$H=\sqrt{\rho\rho_1}\cos\sigma,$$

o semplicemente per la (38)

$$H = S\,\xi\,\xi_1 . \tag{41}$$

Vediamo di qui che: Le congruenze W a parametro medio costante sono quelle per le quali le soluzioni ξ, η, ζ della equazione di Moutard per la prima falda sono legate alle trasformate ξ_1, η_1, ζ_1 per la seconda dalla relazione

$$\xi\,\xi_1 + \eta\,\eta_1 + \zeta\,\zeta_1 = \text{cost. (*)}.$$

§ 13.

Formole per le congruenze W a parametro medio costante.

Supponiamo ora che la congruenza W sia a parametro medio H costante, talchè, a causa della (41), avremo

$$\left.\begin{aligned} S\,\xi\,\frac{\partial \xi_1}{\partial u} + S\,\xi_1\,\frac{\partial \xi}{\partial u} &= 0 \\ S\,\xi\,\frac{\partial \xi_1}{\partial v} + S\,\xi_1\,\frac{\partial \xi}{\partial v} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Caso α. Valgono qui le (36) colle analoghe, dalle quali moltiplicandole ordinatamente per ξ, η, ζ; ξ_1, η_1, ζ_1 ed ogni volta sommandole, deduciamo le quattro formole:

$$(\rho - H)\,\frac{\partial \log R}{\partial u} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial \rho}{\partial u} + S\,\xi\,\frac{\partial \xi_1}{\partial u}$$

$$(H - \rho_1)\,\frac{\partial \log R}{\partial u} = S\,\xi_1\,\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial \rho_1}{\partial u},$$

$$(\rho + H)\,\frac{\partial \log R}{\partial v} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial \rho}{\partial v} - S\,\xi\,\frac{\partial \xi_1}{\partial v}$$

$$(\rho_1 + H)\,\frac{\partial \log R}{\partial v} = S\,\xi_1\,\frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial \rho_1}{\partial v}.$$

(*) In particolare se la costante del secondo membro è nulla, le due falde sono superficie (complementari) applicabili sopra superficie di rotazione.

Ed ora sommando le due prime e sottraendo le due seconde, coll'osservare le (42), abbiamo le due formole che volevamo stabilire

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}(\rho+\rho_1)&=2(\rho-\rho_1)\frac{\partial \log R}{\partial u}\\ \frac{\partial}{\partial v}(\rho+\rho_1)&=2(\rho-\rho_1)\frac{\partial \log R}{\partial v},\end{aligned}\right\}\tag{43}$$

le quali valgono per le congruenze W a parametro medio costante nel caso α) (*).

Caso β). Supponendo ora di essere nel caso β) e procedendo in modo analogo sulle (36*), otteniamo in questo caso:

$$\begin{aligned}\rho_1\frac{\partial \log R}{\partial u}+H\frac{\partial \log R}{\partial v}&=S\xi_1\frac{\partial \xi}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial \rho_1}{\partial u}\\ \rho\frac{\partial \log R}{\partial u}-H\frac{\partial \log R}{\partial v}&=\frac{1}{2}\frac{\partial \rho}{\partial u}+S\xi\frac{\partial \xi_1}{\partial v}\\ H\frac{\partial \log R}{\partial u}+\rho\frac{\partial \log R}{\partial v}&=\frac{1}{2}\frac{\partial \rho}{\partial v}-S\xi\frac{\partial \xi_1}{\partial u}\\ H\frac{\partial \log R}{\partial u}-\rho_1\frac{\partial \log R}{\partial v}&=S\xi_1\frac{\partial \xi}{\partial u}+\frac{1}{2}\frac{\partial \rho_1}{\partial v}.\end{aligned}$$

Di nuovo sommando le due prime e sottraendo le due seconde, nell'ipotesi di H costante (**), si hanno le due formole

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}(\rho-\rho_1)&=2(\rho+\rho_1)\frac{\partial \log R}{\partial u}\\ \frac{\partial}{\partial v}(\rho-\rho_1)&=2(\rho+\rho_1)\frac{\partial \log R}{\partial v},\end{aligned}\right\}\tag{43*}$$

che sono da sostituirsi nel caso attuale β) alle (43).

(*) Se H non è costante, le corrispondenti formole si scrivono

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}(\rho+\rho_1+2H)&=2(\rho-\rho_1)\frac{\partial \log R}{\partial u}\\ \frac{\partial}{\partial v}(\rho+\rho_1-2H)&=2(\rho-\rho_1)\frac{\partial \log R}{\partial v}.\end{aligned}$$

(**) Per H qualunque si ha

$$\frac{\partial}{\partial u}(\rho-\rho_1)+2\frac{\partial H}{\partial v}=2(\rho+\rho_1)\frac{\partial \log R}{\partial u},\quad \frac{\partial}{\partial v}(\rho-\rho_1)-2\frac{\partial H}{\partial u}=2(\rho+\rho_1)\frac{\partial \log R}{\partial v}.$$

Da queste formole (43), (43*) resta visibile che per le congruenze W a parametro medio costante le quantità ρ, ρ_1, R, quindi anche σ, λ sono funzioni l'una dell'altra, la qual cosa segue anche dalle proprietà stabilite nei primi paragrafi della presente Memoria.

§ 14.

Applicazione al caso in cui la prima falda S è a curvatura costante.

Supponiamo che la prima falda S della nostra congruenza W a parametro medio costante sia a curvatura costante K e distinguiamo a seconda del segno di K.

1.° Caso $K > 0$. Poniamo, come al solito, $K = 1$, indi $\rho = 1$. Le (43) dimostrano che per la soluzione trasformatrice R si avrà

$$R = \frac{c}{\sqrt{1+\rho_1}} \qquad (c \text{ costante}).$$

D'altra parte ricordiamo che in generale le due equazioni associate alle due falde focali S, S_1 derivano l'una dall'altra per trasformazione di Moutard e se la soluzione trasformatrice nel passaggio dalla prima alla seconda è R, nel passaggio inverso dalla seconda alla prima la soluzione trasformatrice R_1 è l'inversa $R_1 = \frac{1}{R}$ (Vol. II, § 241); qui adunque possiamo prendere

$$R_1 = \sqrt{1+\rho_1}\,.$$

Ma della seconda equazione di Moutard, oltre R_1, sono pure soluzioni ξ_1, η_1, ζ_1 ed è

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = \rho_1\,;$$

ne deriva la proprietà che volevamo stabilire per le seconde falde focali delle nostre congruenze:

L'equazione di Moutard *relativa alla seconda falda focale di una congruenza W a parametro medio costante, di cui la prima falda sia una superficie a curvatura costante positiva, possiede le quattro soluzioni* ξ_1, η_1, ζ_1, R_1

legate dalla relazione quadratica

$$R_1^2 - \xi_1^2 - \eta_1^2 - \zeta_1^2 = 1.$$

Ci troviamo così nel campo delle equazioni di MOUTARD con un gruppo di soluzioni quadratiche che si presentano in diverse questioni geometriche (*). È notevole poi che qui il passaggio dalla prima alla seconda falda trasforma un'equazione di MOUTARD con *tre* soluzioni quadratiche (ξ, η, ζ) in un'altra con *quattro* tali soluzioni (ξ_1, η_1, ζ_1, R_1).

2.° *Caso* $K < 0$. Poniamo ancora $K = -1$, indi $\rho = 1$ e dalle (43) deduciamo

$$R = \frac{c}{\sqrt{\pm(1-\rho_1)}},$$

dove c è una costante reale, e dobbiamo prendere il segno superiore o l'inferiore, secondo che $\rho_1 < 1$, ovvero $\rho_1 > 1$. Attualmente adunque la seconda equazione di MOUTARD ha le quattro soluzioni

$$\xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1,\quad R_1 = \sqrt{\pm(1-\rho_1)}$$

legate dalla relazione quadratica

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 + R_1^2 = 1, \quad \text{se} \quad \rho_1 < 1 \tag{44}$$

o dalla

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 - R_1^2 = 1, \quad \text{se} \quad \rho_1 > 1. \tag{44*}$$

Volendo meglio precisare quando ci troveremo nel primo e quando nel secondo caso, osserviamo che dalla (39) risulta

$$\rho_1 = \frac{\lambda^2}{\operatorname{sen}^2 \sigma}.$$

Se supponiamo dapprima che il parametro medio sia una costante a non nulla, abbiamo

$$\lambda = a \operatorname{tg} \sigma,$$

indi

$$\rho_1 = \frac{a^2}{\cos^2 \sigma}.$$

(*) Cf. particolarmente GUICHARD, *Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques* (Annales de l'École Normale Supérieure, T. XIV e T. XX), e la mia Memoria: *Sulle varietà a tre dimensioni deformabili entro lo spazio euclideo a quattro dimensioni* (Memorie della Società Italiana delle Scienze (dei XL), Serie 3.ª, T. XIII (1905).

Ne segue che quando $|a| \geqq 1$ è certamente $\rho_1 > 1$ e la relazione quadratica ha la seconda forma (44*); ciò vale in particolare per le congruenze del caso speciale (§ 6).

Nell'altro caso $|a| < 1$, ponendo come al § 10 (2.° *caso*) $a = -\operatorname{tgh} \alpha$, converrà suddistinguere secondo che $|\lambda \cosh \alpha| < 1$, o $|\lambda \cosh \alpha| > 1$, ponendo rispettivamente

$$\lambda \cosh \alpha = \operatorname{tgh} \tau, \quad \text{o} \quad \lambda \cosh \alpha = \coth \tau$$

nei due casi. Siccome si ha

$$\rho_1 = \frac{\operatorname{tgh}^2 \alpha}{\cos^2 \sigma} = \operatorname{tgh}^2 \alpha \left(1 + \frac{\lambda^2}{a^2}\right),$$

avremo nel primo caso

$$\rho_1 = \operatorname{tgh}^2 \alpha \left(1 + \frac{\operatorname{tgh}^2 \tau}{\operatorname{senh}^2 \alpha}\right) < 1$$

e la relazione quadratica avrà la forma (44). Nel secondo invece

$$\rho_1 = \operatorname{tgh}^2 \alpha \left(1 + \frac{\coth^2 \tau}{\operatorname{senh}^2 \alpha}\right) > 1$$

e la forma della relazione quadratica sarà la (44*).

Resta solo da considerarsi il caso delle congruenze W normali ($a = 0$). Allora ρ_1 combina col raggio di curvatura geodetica delle trajettorie ortogonali delle caustiche; vale perciò la (44) se il centro del fascio di geodetiche formato dalle caustiche è reale, invece la (44*) quando il centro è ideale.

§ 15.

Ricerca delle trasformazioni asintotiche.

In generale chiamiamo *trasformate asintotiche* l'una dell'altra due superficie S, $\bar{S}$ che siano le due falde focali di una congruenza W. Il teorema generale di permutabilità (Vol. II, § 248) stabilisce che ogni tale coppia $(S, \bar{S})$ si può tradurre per trasformazione asintotica in infinite altre tali coppie $(S', \bar{S}')$, così che sia ad un tempo S' trasformata asintotica di S ed $\bar{S}'$ di S'.

Diremo anche che la congruenza W colle falde focali $(S, \overline{S})$ si traduce, per trasformazione asintotica, in altre congruenze W colle falde focali $(S', \overline{S}')$.

Ora per le congruenze W a parametro medio costante, con una falda focale S pseudosferica, noi ci proponiamo di dimostrare: *che ogni tale congruenza può tradursi con ∞^2 trasformazioni asintotiche (di* Bäcklund) *in altre congruenze della medesima specie.*

Più precisamente dimostreremo la proposizione seguente:

A) *Abbiasi una congruenza W di parametro medio costante a colle due falde focali $(S, \overline{S})$, delle quali la prima S sia pseudosferica. Si trasformi la S, con una qualunque trasformazione B_σ di* Bäcklund, *in un'altra superficie pseudosferica S'. Esiste allora una ed una sola quarta superficie $\overline{S}'$, trasformata asintotica comune di S', $\overline{S}$, e tale che la congruenza W colle falde focali $(S', \overline{S}')$ abbia nuovamente costante $= a$ il parametro medio.*

A tale oggetto cercheremo le formole che fanno conoscere la quarta superficie $\overline{S}'$, supposte note le tre S, $\overline{S}$, S', e sulle formole così ottenute compiremo le necessarie verifiche.

Supponiamo al solito $=1$ il raggio della superficie pseudosferica S, e riferiamoci alle formole del § 10. La seconda falda $\overline{S}$ della nostra congruenza sarà definita dalle formole

$$\overline{x} = x + \lambda(\cos\varphi X_1 + \operatorname{sen}\varphi X_2), \tag{45}$$

le funzioni trasformatrici λ, φ soddisfacendo al sistema differenziale (31), (31*) del § 10. Osserviamo che i coseni di direzione $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ della normale alla $\overline{S}$, a causa delle (2) § 1 e per essere qui $\lambda = a \operatorname{tg}\sigma$, sono proporzionali alla espressione

$$\operatorname{sen}\varphi X_1 - \cos\varphi X_2 + \frac{a}{\lambda} X_3$$

ed alle due analoghe, onde noi scriviamo, omettendo il fattore di proporzionalità

$$\overline{X} \equiv \operatorname{sen}\varphi X_1 - \cos\varphi X_2 + \frac{a}{\lambda} X_3. \tag{46}$$

Essendo ora S' trasformata della S per una trasformazione di Bäcklund B_σ (dove σ indica attualmente un angolo costante), avremo

$$x' = x + \cos\sigma(\cos\theta' X_1 + \operatorname{sen}\theta' X_2), \tag{47}$$

dove θ' è legata a θ dalle formole della trasformazione B_σ di Bäcklund

(Vol. II, § 373)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\theta'}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v}&=\frac{\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta'+\mathrm{sen}\,\sigma\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta'}{\cos\sigma},\\ \frac{\partial\theta'}{\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial u}&=-\frac{\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta'+\mathrm{sen}\,\sigma\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta'}{\cos\sigma}.\end{aligned}\right\}\tag{48}$$

Per i calcoli che seguono conviene inoltre tenere presenti le formole che dànno i coseni X'_1, X'_2, X'_3, ecc. per la S', corrispondenti ad X_1, X_2, X_3 per la S, e cioè le seguenti:

$$\left.\begin{aligned}X'_1&=A\,X_1+B\,X_2-\cos\sigma\,\mathrm{sen}\,\theta\,X_3\\ X'_2&=C\,X_1+D\,X_2+\cos\sigma\cos\theta\,X_3\\ X'_3&=\cos\sigma\,\mathrm{sen}\,\theta'\,X_1-\cos\sigma\cos\theta'\,X_2-\mathrm{sen}\,\sigma\,X_3,\end{aligned}\right\}\tag{49}$$

dove si è posto

$$\left.\begin{aligned}A&=\cos\theta\cos\theta'-\mathrm{sen}\,\sigma\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\theta'\\ B&=\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta'-\mathrm{sen}\,\sigma\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta'\\ C&=\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta'+\mathrm{sen}\,\sigma\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta'\\ D&=\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\theta'-\mathrm{sen}\,\sigma\cos\theta\cos\theta'.\end{aligned}\right\}\tag{50}$$

Ciò premesso, siano φ', λ' le funzioni trasformatrici nel passaggio da S' alla quarta superficie supposta $\overline{S}'$, sicchè avremo le formole analoghe alle (45), (46)

$$\overline{x}'=x'+\lambda'(\cos\varphi'\,X'_1+\mathrm{sen}\,\varphi'\,X'_2),\tag{51}$$

$$\overline{X}'=\mathrm{sen}\,\varphi'\,X'_1-\cos\varphi'\,X'_2+\frac{a}{\lambda'}X'_3.\tag{52}$$

Se indichiamo con M, $\overline{M}$, M', $\overline{M}'$ quattro punti corrispondenti di S, $\overline{S}$, S', $\overline{S}'$, dovrà per ipotesi la congiungente $\overline{M}\,\overline{M}'$ toccare in $\overline{M}$ la $\overline{S}$ ed in $\overline{M}'$ la $\overline{S}'$, ciò che esprimiamo colle due condizioni

$$S\,\overline{X}(\overline{x}'-\overline{x})=0,\qquad S\,\overline{X}'(\overline{x}'-\overline{x})=0,$$

ossia per le (46), (52) colle equivalenti

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{sen}\,\varphi\,S\,X_1\,(\overline{x}'-\overline{x})-\cos\varphi\,S\,X_2\,(\overline{x}'-\overline{x})+\frac{a}{\lambda}S\,X_3\,(\overline{x}'-\overline{x})=0\\ &\mathrm{sen}\,\varphi'\,S\,X'_1\,(\overline{x}'-\overline{x})-\cos\varphi'\,S\,X'_2\,(\overline{x}'-\overline{x})+\frac{a}{\lambda}S\,X'_3\,(\overline{x}'-\overline{x})=0.\end{aligned}\right\}\tag{53}$$

Da queste due equazioni calcoleremo facilmente i valori delle funzioni trasformatrici φ', λ'.

§ 16.

Calcolo delle funzioni trasformatrici φ', λ'.

Se dalle formole (45), (47), (51) formiamo le differenze $\bar{x}' - \bar{x}$, abbiamo

$$\bar{x}' - \bar{x} = (\cos\sigma\cos\theta' - \lambda\cos\varphi) X_1 + (\cos\sigma\,\mathrm{sen}\,\theta' - \lambda\,\mathrm{sen}\,\varphi) X_2 + \\ + \lambda'(\cos\varphi' X'_1 + \mathrm{sen}\,\varphi' X'_2),$$

e di qui, avendo riguardo alle altre formole del paragrafo precedente, deduciamo:

$$S X_1(\bar{x}' - \bar{x}) = \cos\sigma\cos\theta' - \lambda\cos\varphi + \\ + \lambda'\left[\cos\theta'\cos(\varphi' - \theta) + \mathrm{sen}\,\sigma\,\mathrm{sen}\,\theta'\,\mathrm{sen}(\varphi' - \theta)\right]$$

$$S X_2(\bar{x}' - \bar{x}) = \cos\sigma\,\mathrm{sen}\,\theta' - \lambda\,\mathrm{sen}\,\varphi + \\ + \lambda'\left[\mathrm{sen}\,\theta'\cos(\varphi' - \theta) - \mathrm{sen}\,\sigma\cos\theta'\,\mathrm{sen}(\varphi' - \theta)\right]$$

$$S X_3(\bar{x}' - \bar{x}) = \lambda'\cos\sigma\,\mathrm{sen}(\varphi' - \theta)$$

$$S X'_1(\bar{x}' - \bar{x}) = \cos\sigma\cos\theta + \lambda'\cos\varphi' - \\ - \lambda\left[\cos\theta\cos(\varphi - \theta') + \mathrm{sen}\,\sigma\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}(\varphi - \theta')\right]$$

$$S X'_2(\bar{x}' - \bar{x}) = \cos\sigma\,\mathrm{sen}\,\theta + \lambda'\,\mathrm{sen}\,\varphi' - \\ - \lambda\left[\mathrm{sen}\,\theta\cos(\varphi - \theta') - \mathrm{sen}\,\sigma\cos\theta\,\mathrm{sen}(\varphi - \theta')\right]$$

$$S X'_3(\bar{x}' - \bar{x}) = \lambda\cos\sigma\,\mathrm{sen}(\varphi - \theta').$$

Le due condizioni (53) si traducono così nelle seguenti:

$$\cos\sigma\,\mathrm{sen}(\varphi - \theta') + \lambda'\left[\mathrm{sen}(\varphi - \theta')\cos(\varphi' - \theta) + \mathrm{sen}\,\sigma\cos(\varphi - \theta')\,\mathrm{sen}(\varphi' - \theta)\right] + \\ + \frac{a\lambda'}{\lambda}\cos\sigma\,\mathrm{sen}(\varphi' - \theta) = 0$$

$$\cos\sigma\,\mathrm{sen}(\varphi' - \theta) - \lambda\left[\mathrm{sen}(\varphi' - \theta)\cos(\varphi - \theta') + \mathrm{sen}\,\sigma\cos(\varphi' - \theta)\,\mathrm{sen}(\varphi - \theta')\right] + \\ + \frac{a\lambda}{\lambda'}\cos\sigma\,\mathrm{sen}(\varphi - \theta') = 0,$$

e dividendo la prima per λ', la seconda per λ, le scriviamo sotto la forma

$$\left.\begin{aligned}&\cos\sigma\,\mathrm{sen}\,(\varphi-\theta')\,.\,\frac{1}{\lambda'}+\frac{a\cos\sigma}{\lambda}\,\mathrm{sen}\,(\varphi'-\theta)+\\&\quad+\mathrm{sen}\,(\varphi-\theta')\cos(\varphi'-\theta)+\mathrm{sen}\,\sigma\cos(\varphi-\theta')\,\mathrm{sen}\,(\varphi'-\theta)=0\\&a\cos\sigma\,\mathrm{sen}\,(\varphi-\theta')\frac{1}{\lambda'}+\frac{\cos\sigma}{\lambda}\,\mathrm{sen}\,(\varphi'-\theta)-\\&\quad-\mathrm{sen}\,(\varphi'-\theta)\cos(\varphi-\theta')-\mathrm{sen}\,\sigma\cos(\varphi'-\theta)\,\mathrm{sen}\,(\varphi-\theta')=0.\end{aligned}\right\}\qquad(53^*)$$

Se moltiplichiamo la prima di queste per a e sottragghiamo la seconda, risulta

$$\cot(\varphi'-\theta)=\frac{\dfrac{(1-a^2)\cos\sigma}{\lambda}-(1+a\,\mathrm{sen}\,\sigma)\cos(\varphi-\theta')}{(a+\mathrm{sen}\,\sigma)\,\mathrm{sen}\,(\varphi-\theta')},\qquad(54)$$

e successivamente da una delle (53*) abbiamo

$$\frac{1}{\lambda'}=\frac{\mathrm{sen}(\varphi'-\theta)\cos(\varphi-\theta')+\mathrm{sen}\,\sigma\cos(\varphi'-\theta)\mathrm{sen}(\varphi-\theta')-\dfrac{\cos\sigma}{\lambda}\,\mathrm{sen}\,(\varphi'-\theta)}{a\cos\sigma\,\mathrm{sen}(\varphi-\theta')}.\qquad(55)$$

Con queste formole (54), (55), φ' è determinata a meno di multipli di π, e λ' a meno del segno, ciò che fissa perfettamente la quarta superficie $\overline{S}'$ domandata.

§ 17.

Indicazione delle verifiche.

Ci resta soltanto da verificare che la quarta superficie $\overline{S}'$ soddisfa in effetto alle condizioni richieste.

Cominciamo la verifica dal caso speciale (§ 6) quando $a=\pm 1$. In tal caso le congruenze colle falde focali $(S, \overline{S})$, $(S', \overline{S}')$ saranno formate la prima dalle normali principali alle asintotiche di un sistema di S, e medesimamente la seconda dalle normali principali alle asintotiche di un sistema di S'. Le equazioni di condizione (53*) risultano soddisfatte ove i due sistemi di asintotiche sopra S, S' siano corrispondenti. E infatti, ove si faccia secondo il § 6 p. e.:

$$a = 1, \qquad \varphi = \frac{\pi}{2} + \theta, \qquad \varphi' = \frac{\pi}{2} + \theta'$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v}, \qquad \frac{1}{\lambda'} = \frac{\partial \theta'}{\partial u} + \frac{\partial \theta'}{\partial v},$$

avendosi qui

$$\varphi' - \theta = \pi - (\varphi - \theta'),$$

le (53*) coincidono nell'unica

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} = \frac{1 - \operatorname{sen} \sigma}{\cos \sigma} \cos (\varphi - \theta'),$$

ovvero, essendo $\varphi - \theta' = \frac{\pi}{2} - (\theta' - \theta)$, nell'altra

$$\frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\partial \theta'}{\partial u} + \frac{\partial \theta'}{\partial v} = \frac{1 - \operatorname{sen} \sigma}{\cos \sigma} \operatorname{sen} (\theta' - \theta).$$

Ma questa è effettivamente verificata, come risulta dal sommare le formole (48) della trasformazione di Bäcklund. E poichè le (53*) sono così soddisfatte, dal modo stesso come furono dedotte risulta appunto che la congiungente $\overline{M}\,\overline{M}'$ tocca in $\overline{M}$ la $\overline{S}$, in $\overline{M}'$ la $\overline{S}'$.

Per fare la verifica nel caso generale $|a| \neq 1$, bisogna dimostrare che, mentre le funzioni trasformatrici φ, λ verificano le (31), (31*) § 10, le nuove φ', λ', calcolate dalle formole (54), (55), verificano le corrispondenti:

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial u} + \frac{\partial \theta'}{\partial v} = \frac{1}{\lambda'} (\cos \theta' \operatorname{sen} \varphi' - a \operatorname{sen} \theta' \cos \varphi')$$

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial v} + \frac{\partial \theta'}{\partial u} = \frac{1}{\lambda'} (- \operatorname{sen} \theta' \cos \varphi' + a \cos \theta' \operatorname{sen} \varphi'),$$

$$\frac{\partial \lambda'}{\partial u} = \frac{1 - a^2 - \lambda'^2}{a^2 - 1} (\cos \theta' \cos \varphi' + a \operatorname{sen} \theta' \operatorname{sen} \varphi')$$

$$\frac{\partial \lambda'}{\partial v} = \frac{1 - a^2 - \lambda'^2}{a^2 - 1} (\operatorname{sen} \theta' \operatorname{sen} \varphi' + a \cos \theta' \cos \varphi').$$

Si osservi che le due prime, a causa delle (48) possono scriversi sotto la forma equivalente:

$$\frac{\partial(\varphi'-\theta)}{\partial u}=\frac{1}{\lambda'}(\cos\theta'\,\mathrm{sen}\,\varphi'-a\,\mathrm{sen}\,\theta'\cos\varphi')+\frac{\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta'+\mathrm{sen}\,\sigma\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta'}{\cos\sigma}$$

$$\frac{\partial(\varphi'-\theta)}{\partial v}=\frac{1}{\lambda'}(-\mathrm{sen}\,\theta'\cos\varphi'+a\cos\theta'\,\mathrm{sen}\,\varphi')-\frac{\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta'+\mathrm{sen}\,\sigma\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta'}{\cos\sigma}.$$

Se si derivano rapporto ad u, v le (54), (55) (ovvèro anche le (53*)), e si tiene conto delle altre formole stabilite, le verifiche si riducono ad identità trigonometriche.

Alla proposizione A) così stabilita aggiungiamo ancora le osservazioni seguenti:

1.° Se la congruenza W considerata è pseudosferica, di guisa che anche la seconda falda $\overline{S}$ sia pseudosferica, le congruenze trasformate sono nuovamente pseudosferiche e le formole (54), (55) si cangiano in quelle del teorema di permutabilità delle trasformazioni di Bäcklund.

2.° Se si suppone $a=0$ le congruenze W considerate diventano normali e le seconde falde focali $\overline{S}$, $\overline{S}'$ sono rispettivamente complementari delle pseudosferiche S, S' ed applicabili sopra una medesima quadrica immaginaria che iperoscula l'assoluto. La trasformazione asintotica che dalla $\overline{S}$ conduce alla $\overline{S}'$ rientra in tal caso nelle generali trasformazioni B_k per le deformate delle quadriche (Cf. Vol. III, pag. 316).

§ 18.

Ricerca di una nuova classe di congruenze W a parametro medio costante.

Passiamo a trattare, in questa seconda parte della Memoria, di un'altra classe di congruenze W a parametro medio costante, alle quali arriviamo ponendo la questione seguente: *Quali sono le congruenze W a parametro medio costante per le quali le due equazioni di* Moutard *associate alle due falde focali (S, S_1) coincidono nella equazione*

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=0\,? \qquad (\alpha)$$

Colle formole generali ricordate al § 12, saranno ξ, η, ζ tre soluzioni della (α), indi

$$\xi = \varphi_1(v) + f_1(u), \quad \eta = \varphi_2(v) + f_2(u), \quad \zeta = \varphi_3(v) + f_3(u), \tag{56}$$

dove φ_1, φ_2, φ_3 sono funzioni della sola v, ed f_1, f_2, f_3 della sola u. La soluzione R trasformatrice, poichè l'equazione trasformata coincide colla (α) stessa, deve soddisfare insieme le due equazioni

$$\frac{\partial^2 R}{\partial u \partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\left(\frac{1}{R}\right) = 0,$$

e sarà quindi R funzione di u soltanto, ovvero di v soltanto; ma noi vogliamo provare che anzi, nella nostra ipotesi, *R è necessariamente una costante.* Suppongasi che sia p. e. R funzione di u, e si osservi che per le (36) § 12 si avrà

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \xi_1}{\partial u} = \frac{R'}{R}(\xi - \xi_1) \qquad \left(R' = \frac{dR}{du}\right) \\ &\frac{\partial \xi_1}{\partial v} = \frac{\partial \xi}{\partial v}, \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

e per ciò intanto

$$\xi_1 = \varphi_1(v) + F_1(u), \quad \eta_1 = \varphi_2(v) + F_2(u), \quad \zeta_1 = \varphi_3(v) + F_3(u), \tag{58}$$

essendo F_1, F_2, F_3 tre nuove funzioni di u.

Siccome la nostra congruenza è, per ipotesi, a parametro medio costante, dovremo avere (§ 12)

$$\xi \xi_1 + \eta \eta_1 + \zeta \zeta_1 = \text{cost.}$$

cioè per le (56), (58)

$$S \varphi^2 + S(f + F)\varphi + S f F = \text{cost.}$$

Derivando prima rapporto a v, abbiamo

$$2 S \varphi \varphi' + S(f + F)\varphi' = 0, \tag{59}$$

e derivando questa rapporto ad u, coll'osservare la prima delle (57)

$$\frac{R'}{R} S(f - F)\varphi' = 0,$$

quindi o $R' = 0$, cioè R costante come abbiamo asserito, ovvero

$$S(f - F)\varphi' = 0. \tag{60}$$

Se proviamo che la (60) è inammissibile sarà dimostrato quanto si voleva. Se si aggiunge la (60) alla (59), viene

$$S\varphi\varphi' + Sf\varphi' = 0,$$

e con una nuova derivazione rapporto ad u

$$f'_1(u)\,\varphi'_1(v) + f'_2(u)\,\varphi'_2(v) + f'_3(u)\,\varphi'_3(v) = 0. \tag{61}$$

Escludiamo il caso che $f_1(u)$, $f_2(u)$, $f_3(u)$, oppure $\varphi_1(v)$, $\varphi_2(v)$, $\varphi_3(v)$ siano tre costanti, perchè allora la falda focale S si ridurrebbe ad una linea. Allora la (61) esige che $f'_1(u)$, $f'_2(u)$, $f'_3(u)$ abbiano rapporti costanti, e medesimamente $\varphi'_1(v)$, $\varphi'_2(v)$, $\varphi'_3(v)$. Ciò risulta evidente ove si interpreti geometricamente la (61) introducendo le due linee di equazioni parametriche

$$x = f_1(u), \quad y = f_2(u), \quad z = f_3(u)$$

$$x = \varphi_1(v), \quad y = \varphi_2(v), \quad z = \varphi_3(v).$$

La (61) esprime infatti che *ogni* tangente dell'una deve essere ortogonale ad ogni tangente dell'altra e però le due linee debbono ridursi a due rette ortogonali. Cangiando i parametri u, v, potremo dunque scrivere le (56) semplicemente così:

$$\xi = a_1 u + b_1 v + c_1, \quad \eta = a_2 u + b_2 v + c_2, \quad \zeta = a_3 u + b_3 v + c_3, \tag{56*}$$

con a, b, c costanti, delle quali (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) coseni di direzione di due rette ortogonali (*). Per la ragione analoga le (58) si scriveranno

$$\xi_1 = \alpha_1 U + b_1 v + c_1, \quad \eta_1 = \alpha_2 U + b_2 v + c_2, \quad \zeta_1 = \alpha_3 U + b_3 v + c_3, \tag{58*}$$

con U funzione di u e le α costanti. Ma queste forme (56*), (58*) sono incompatibili colla condizione

$$\xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1 = \text{cost.},$$

giacchè il primo membro è, rispetto a v, un polinomio di secondo grado col coefficiente di v^2 dato da $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1$.

Concludiamo dunque che necessariamente $R' = 0$, e quindi

$$F'_1 = -f'_1, \quad F'_2 = -f'_2, \quad F'_3 = -f'_3;$$

(*) Alla forma (56*) di ξ, η, ζ corrisponde come superficie S un paraboloide iperbolico equilatero.

le (58) possono dunque scriversi

$$\xi_1 = \varphi_1(v) - f_1(u), \quad \eta_1 = \varphi_2(v) - f_2(u), \quad \zeta_1 = \varphi_3(v) - f_3(u) \text{ (*)}.$$

In fine la condizione

$$\xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1 = a \text{ (cost.)}$$

diventa

$$\left[\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2\right] - \left[f_1^2 + f_2^2 + f_3^2\right] = a,$$

ed esige quindi che siano separatamente costanti

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2, \quad f_1^2 + f_2^2 + f_3^2$$

con differenza $= a$. Possiamo dunque concludere:

Le più generali congruenze W richieste si ottengono colle formole

$$\xi = \varphi_1(v) + f_1(u), \quad \eta = \varphi_2(v) + f_2(u), \quad \zeta = \varphi_3(v) + f_3(u)$$
$$\xi_1 = \varphi_1(v) - f_1(u), \quad \eta_1 = \varphi_2(v) - f_2(u), \quad \zeta_1 = \varphi_3(v) - f_3(u),$$

supponendo costanti

$$f_1^2(u) + f_2^2(u) + f_3^2(u), \quad \varphi_1^2(v) + \varphi_2^2(v) + \varphi_3^2(v).$$

§ 19.

Le nuove congruenze come congruenze di Darboux.

Interpretando geometricamente i risultati ora ottenuti, si è condotti alla elegante costruzione di Darboux, per le deformate del paraboloide rotondo (**). Si sa che nelle congruenze W ottenute al paragrafo precedente la superficie media S_0 è una superficie di traslazione, sulla quale le curve generatrici $v =$ cost., $u =$ cost. hanno i rispettivi raggi di torsione (Vedi Vol. II, § 245):

$$T_v = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}, \quad T_u = -\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2}.$$

(*) Propriamente si dovrebbero aggiungere nei secondi membri tre costanti; ma con un semplice cangiamento nelle notazioni si ritorna alle formole del testo.

(**) Vedi Darboux, *Leçons*, T. III, pag. 372 e segg. e le mie *Lezioni*, Vol. II, §§ 245, 246.

Le due curve generatrici hanno qui adunque torsioni costanti e di segno contrario, ma del resto qualunque. Le congruenze W a parametro medio costante colle due falde focali associate alla equazione di MOUTARD

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = 0$$

si ottengono pertanto colla seguente costruzione di DARBOUX:

Si consideri una qualunque superficie S_0 di traslazione colle due curve generatrici di torsioni costanti qualunque $\frac{1}{c^2}$, $-\frac{1}{c_1^2}$, ma di segno contrario: se per ogni punto di S_0 si conduce il raggio d'intersezione dei due piani osculatori delle curve generatrici che vi passano, i raggi così costruiti formano le più generali congruenze W richieste.

Daremo pertanto a queste congruenze il nome di *congruenze di* DARBOUX (*). In particolare quando $c = c_1$, cioè quando le due curve generatrici hanno torsioni costanti *eguali e di segno contrario*, la congruenza di DARBOUX è normale, e le due falde focali S, S_1 dànno le più generali deformate del paraboloide rotondo immaginario.

Non sarà inutile confermare direttamente sulla costruzione geometrica di DARBOUX le proprietà sopra indicate della congruenza e delle due falde focali S, S_1.

Abbiasi una superficie di traslazione S_0 colle due curve generatrici C, C_1 aventi le rispettive torsioni costanti $\frac{1}{c^2}$, $-\frac{1}{c_1^2}$. Prendiamo per rispettivi parametri u, v gli archi delle curve C, C_1 e, colle solite notazioni della teoria delle curve, indichiamo con

$$(\alpha, \beta, \gamma), \quad (\xi, \eta, \zeta), \quad (\lambda, \mu, \nu)$$

i coseni di direzione della tangente, normale principale e binormale della C, e con notazioni analoghe coll'indice 1

$$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), \quad (\xi_1, \eta_1, \zeta_1), \quad (\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$$

le quantità corrispondenti per C_1; le prime saranno funzioni di u soltanto, le seconde della sola v.

(*) Durante la revisione delle bozze della presente Memoria mi sono accorto che la proprietà delle congruenze qui dette di DARBOUX, di avere costante il parametro medio, era già stata osservata dal SANNIA nel Vol. XLIII degli *Atti della R. Accademia di Torino* (19 Aprile 1908).

Le coordinate x_0, y_0, z_0 di un punto P_0 mobile sopra S_0 si potranno scrivere

$$x_0 = \int \alpha\, d u + \int \alpha_1\, d v, \quad y_0 = \int \beta\, d u + \int \beta_1\, d v, \quad z_0 = \int \gamma\, d u + \int \gamma_1\, d v, \tag{62}$$

ed avremo le formole di FRENET

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\lambda}{du} = \frac{\xi}{c^2}, \quad \frac{d\mu}{du} = \frac{\eta}{c^2}, \quad \frac{d\nu}{du} = \frac{\zeta}{c^2} \\ &\frac{d\lambda_1}{dv} = -\frac{\xi_1}{c_1^2}, \quad \frac{d\mu_1}{dv} = -\frac{\eta_1}{c_1^2}, \quad \frac{d\nu_1}{dv} = -\frac{\zeta_1}{c_1^2}. \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

Il raggio della congruenza avrà coseni di direzione proporzionali ai minori della matrice $\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}$ e le coordinate x, y, z di un punto qualunque del raggio saranno quindi date dalle formole:

$$x = x_0 + \tau \begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu & \nu \end{vmatrix}, \quad y = y_0 + \tau \begin{vmatrix} \nu_1 & \lambda_1 \\ \nu & \lambda \end{vmatrix}, \quad z = z_0 + \tau \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda & \mu \end{vmatrix}, \tag{64}$$

dove τ indica un parametro arbitrario che fissa il punto sul raggio.

Cominciamo dal ricercare quale valore compete a τ nell'uno o nell'altro dei due fuochi.

Per questo occorre determinare τ in guisa che si annulli il determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu & \nu \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} \nu_1 & \lambda_1 \\ \nu & \lambda \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda & \mu \end{vmatrix} \end{vmatrix},$$

ossia in modo che l'ultima linea sia una combinazione lineare omogenea delle prime due.

Ora dalle (62), (64) segue derivando

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \alpha + \frac{\tau}{c^2} \begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \eta & \zeta \end{vmatrix} + \frac{\partial \tau}{\partial u} \begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu & \nu \end{vmatrix}, \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= \alpha_1 - \frac{\tau}{c_1^2} \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \mu & \nu \end{vmatrix} + \frac{\partial \tau}{\partial v} \begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu & \nu \end{vmatrix}, \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

colle analoghe per y, z. La condizione sopra enunciata si traduce nell'esistenza di due moltiplicatori l, m tali che si abbia

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu & \nu \end{vmatrix} = l \left\{ \alpha + \frac{\tau}{c^2} \begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \eta & \zeta \end{vmatrix} \right\} + m \left\{ \alpha_1 - \frac{\tau}{c_1^2} \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \mu & \nu \end{vmatrix} \right\},$$

colle due analoghe. Moltiplicando prima per λ, μ, ν, poi per λ_1, μ_1, ν_1 e sommando risulta

$$\frac{l\tau}{c^2} \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} + m S \alpha_1 \lambda = 0$$

$$l S \alpha \lambda_1 - \frac{m\tau}{c_1^2} \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = 0.$$

Queste, per proprietà elementari dei determinanti si scrivono

$$\frac{\tau}{c^2} l S \alpha \lambda_1 + m S \alpha_1 \lambda = 0$$

$$l S \alpha \lambda_1 + \frac{\tau}{c_1^2} m S \alpha_1 \lambda = 0,$$

e siccome $l S \alpha \lambda_1$, $m S \alpha_1 \lambda$ non si annullano insieme, ne deduciamo $\tau^2 = c^2 c_1^2$, ossia

$$\tau = \pm c c_1 .$$

Dunque: *Le coordinate x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 dei due fuochi nelle congruenze considerate sono date dalle formole*

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_0 + c c_1 \begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu & \nu \end{vmatrix}, \quad y_1 = y_0 + c c_1 \begin{vmatrix} \nu_1 & \lambda_1 \\ \nu & \lambda \end{vmatrix}, \quad z_1 = z_0 + c c_1 \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda & \mu \end{vmatrix}, \\ x_2 &= x_0 - c c_1 \begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu & \nu \end{vmatrix}, \quad y_2 = y_0 - c c_1 \begin{vmatrix} \nu_1 & \lambda_1 \\ \nu & \lambda \end{vmatrix}, \quad z_2 = z_0 - c c_1 \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda & \mu \end{vmatrix}, \end{aligned}\right\} \quad (66)$$

che definiscono rispettivamente le due falde focali S, S_1 della congruenza di Darboux.

Si osservi ancora che le formole precedenti, pel modo come furono dedotte, valgono anche se le curve generatrici C, C_1 sono qualunque, sicchè c, c_1 siano funzioni di u, v rispettivamente.

§ 20.

Verifiche delle proprietà delle congruenze di Darboux.

Cominciamo dal calcolare i coseni di direzione delle rispettive normali in F, F_1 alle falde focali S, S_1, coseni che indicheremo con (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2).

Le tre direzioni (X_1, Y_1, Z_1), (λ, μ, ν), $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ giacciono in un piano e quindi si ha

$$X_1 = A\lambda + B\lambda_1, \quad Y_1 = A\mu + B\mu_1, \quad Z_1 = A\nu + B\nu_1,$$

dove i moltiplicatori A, B si calcoleranno dalle condizioni

$$S(A\lambda + B\lambda_1)\frac{\partial x_1}{\partial u} = 0, \quad S(A\lambda + B\lambda_1)\frac{\partial x_1}{\partial v} = 0. \tag{67}$$

Ma dalle (65), postovi $\tau = c\,c_1$, abbiamo

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \alpha + \frac{c_1}{c}\begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \eta & \zeta \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial v} = \alpha_1 - \frac{c}{c_1}\begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \mu & \nu \end{vmatrix}, \tag{68}$$

e quindi

$$S\lambda\frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{c_1}{c} S\alpha\lambda_1, \quad S\lambda_1\frac{\partial x_1}{\partial u} = S\alpha\lambda_1,$$

$$S\lambda\frac{\partial x_1}{\partial v} = S\alpha_1\lambda, \quad S\lambda_1\frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{c}{c_1} S\alpha_1\lambda;$$

pertanto le (67) diventano

$$(A c_1 + B c) S\alpha\lambda_1 = 0, \quad (A c_1 + B c) S\alpha_1\lambda = 0$$

e concordano nella

$$A c_1 + B c = 0.$$

Dunque $A : B = c : -c_1$, e quindi

$$X_1 : Y_1 : Z_1 = c\lambda - c_1\lambda_1 : c\mu - c_1\mu_1 : c\nu - c_1\nu_1,$$

e se indichiamo con Ω l'angolo di due qualunque binormali delle curve generatrici C, C_1, talchè

$$\cos\Omega = S\lambda\lambda_1, \tag{69}$$

$$\operatorname{sen}^2\Omega = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}^2, \tag{69*}$$

ne dedurremo finalmente

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \frac{c\lambda - c_1\lambda_1}{\sqrt{c^2 + c_1^2 - 2cc_1\cos\Omega}}, \quad Y_1 = \frac{c\mu - c_1\mu_1}{\sqrt{c^2 + c_1^2 - 2cc_1\cos\Omega}}, \\ Z_1 &= \frac{c\nu - c_1\nu_1}{\sqrt{c^2 + c_1^2 - 2cc_1\cos\Omega}}. \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

Di qui si deducono subito i corrispondenti valori di X_2, Y_2, Z_2 cangiando c_1 in $-c_1$, così

$$\left.\begin{aligned} X_2 &= \frac{c\lambda + c_1\lambda_1}{\sqrt{c^2 + c_1^2 + 2cc_1\cos\Omega}}, \quad Y_2 = \frac{c\mu + c_1\mu_1}{\sqrt{c^2 + c_1^2 + 2cc_1\cos\Omega}}, \\ Z_2 &= \frac{c\nu + c_1\nu_1}{\sqrt{c^2 + c_1^2 + 2cc_1\cos\Omega}}. \end{aligned}\right\} \tag{70*}$$

Verifichiamo ora che sulla falda focale S (analogamente su S_1) le linee u, v sono le asintotiche. Basta provare che sussistono le formole

$$S\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial X_1}{\partial u} = 0, \quad S\frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial X_1}{\partial v} = 0;$$

ma queste seguono subito dalle precedenti osservando che per le (68)

$$S\xi\frac{\partial x_1}{\partial u} = 0, \quad S\xi_1\frac{\partial x_1}{\partial v} = 0.$$

Indicando ora con σ l'angolo dei piani focali, abbiamo dalle (70), (70*)

$$\cos\sigma = SX_1X_2 = \frac{c^2 - c_1^2}{\sqrt{c^2 + c_1^2 - 2cc_1\cos\Omega}\sqrt{c^2 + c_1^2 + 2cc_1\cos\Omega}},$$

formola che possiamo scrivere

$$\cos\sigma = \frac{c^2 - c_1^2}{\sqrt{(c^2 - c_1^2)^2 + 4c^2c_1^2\operatorname{sen}^2\Omega}}, \tag{71}$$

indi

$$\operatorname{sen}\sigma = \frac{2cc_1\operatorname{sen}\Omega}{\sqrt{(c^2 - c_1^2)^2 + 4c^2c_1^2\operatorname{sen}^2\Omega}}. \tag{71*}$$

D'altra parte per la distanza focale λ risulta dalle (66)

$$\lambda^2 = S(x_1 - x_2)^2 = 4\, c^2\, c_1^2 \operatorname{sen}^2 \Omega,$$

cioè

$$\lambda = 2\, c\, c_1 \operatorname{sen} \Omega.$$

Se calcoliamo in fine il parametro medio $H = \lambda \cot \sigma$, otteniamo

$$H = c^2 - c_1^2. \tag{72}$$

Così è in effetto verificato che le nostre congruenze sono congruenze W a parametro medio costante.

§ 21.

Il caso $c = c_1$ e le deformate del paraboloide rotondo.

Quando $c = c_1$, indi $H = 0$, la congruenza di Darboux è una *congruenza W normale* e per ciò le due falde focali S, S_1 sono applicabili sopra una superficie di rotazione. Si sa che questa superficie è il paraboloide rotondo di parametro puramente immaginario $4\, i\, c^2$, e noi vogliamo qui nuovamente dimostrare questa proprietà servendoci delle formole sopra stabilite.

Nel caso attuale esiste una serie di superficie Σ (parallele) normali ai raggi della congruenza e noi cominciamo a cercare quale valore bisogna attribuire a τ nelle (64) per ottenere una tale superficie Σ. Bisogna perciò determinare τ in funzione di u, v in guisa che si abbia identicamente

$$S \begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu & \nu \end{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \quad S \begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu & \nu \end{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} = 0.$$

A causa delle (65), queste si traducono nelle formole

$$\operatorname{sen}^2 \Omega \frac{\partial \tau}{\partial u} + \frac{\tau}{c^2} \begin{vmatrix} 1 & \cos \Omega \\ S\, \xi\, \lambda_1 & 0 \end{vmatrix} + S\, \xi\, \lambda_1 = 0$$

$$\operatorname{sen}^2 \Omega \frac{\partial \tau}{\partial v} - \frac{\tau}{c^2} \begin{vmatrix} 0 & \cos \Omega \\ S\, \lambda\, \xi_1 & 1 \end{vmatrix} - S\, \lambda\, \xi_1 = 0,$$

e poichè dalle (69), derivando coll'osservare le (63), risulta

$$S \xi \lambda_1 = - c^2 \operatorname{sen} \Omega \frac{\partial \Omega}{\partial u}, \quad S \lambda \xi_1 = c^2 \operatorname{sen} \Omega \frac{\partial \Omega}{\partial v},$$

le nostre condizioni diventano

$$\operatorname{sen} \Omega \frac{\partial \tau}{\partial u} - c^2 \frac{\partial \Omega}{\partial u} + \tau \cos \Omega \frac{\partial \Omega}{\partial u} = 0$$

$$\operatorname{sen} \Omega \frac{\partial \tau}{\partial v} - c^2 \frac{\partial \Omega}{\partial v} + \tau \cos \Omega \frac{\partial \Omega}{\partial v} = 0.$$

Scrivendole sotto la forma

$$\frac{\partial}{\partial u} (\tau \operatorname{sen} \Omega) = c^2 \frac{\partial \Omega}{\partial u}, \quad \frac{\partial}{\partial v} (\tau \operatorname{sen} \Omega) = c^2 \frac{\partial \Omega}{\partial v},$$

l'integrazione è immediata e porge

$$\tau \operatorname{sen} \Omega = C + c^2 \Omega \quad (C \text{ costante}).$$

Per una tale superficie Σ, ortogonale ai raggi, i valori di τ corrispondenti ai due centri principali di curvatura (fuochi) sono per le (66): $\tau_1 = c^2$, $\tau_2 = - c^2$. Ora $\tau \operatorname{sen} \Omega$ è evidentemente l'ascissa misurata sul raggio a partire dal punto medio, e quindi i valori r_1, r_2 dei raggi principali di curvatura delle Σ sono

$$r_1 = \tau \operatorname{sen} \Omega - \tau_1 \operatorname{sen} \Omega = C + c^2 (\Omega - \operatorname{sen} \Omega)$$

$$r_2 = \tau \operatorname{sen} \Omega - \tau_2 \operatorname{sen} \Omega = C + c^2 (\Omega + \operatorname{sen} \Omega).$$

In particolare per la Σ corrispondente a $C = 0$ si ha

$$r_1 = c^2 (\Omega - \operatorname{sen} \Omega), \quad r_2 = c^2 (\Omega + \operatorname{sen} \Omega),$$

e perciò

$$r_1 - r_2 = 2 c^2 \operatorname{sen} \frac{r_1 + r_2}{2 c^2}.$$

Le superficie Σ sono quindi superficie W di quella classe particolare che Weingarten determinò completamente nel 1863. Le due falde focali sono applicabili sopra una medesima superficie di rotazione, per la quale si può prendere (Darboux) il paraboloide rotondo di parametro $= 4 i c^2$.

È molto notevole che in questo caso $c = c_1$ le due falde focali S, S_1 della congruenza di DARBOUX, comunque si variino le due curve generatrici C, C_1, conservano sempre lo stesso elemento lineare, cioè subiscono una deformazione come superficie flessibili ed inestendibili.

Si presenta ora spontanea la domanda se tale proprietà ha luogo anche per congruenze di DARBOUX *non normali*. La risposta è negativa, ma è importante riconoscerne la ragione perchè si ritrova così una notevole proprietà caratteristica delle deformate del paraboloide rotondo e si stabiliscono per altra via i risultati di WEINGARTEN e DARBOUX.

§ 22.

CALCOLO DEL COEFFICIENTE M NELL'EQUAZIONE DI MOUTARD $\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \partial \beta} = M\theta$.

Risponderemo alla domanda sopra formulata, risolvendo in primo luogo la questione generale seguente. Consideriamo una classe di superficie applicabili di elemento lineare dato

$$d s^2 = E d u^2 + 2 F d u d v + G d v^2 \tag{73}$$

e sulla moltiplicità a due dimensioni così definita consideriamo un sistema qualunque (α, β) di *asintotiche virtuali* (*). Indicando con $K = -\dfrac{1}{\rho^2}$ la curvatura, si sa che u, v considerate quali funzioni di α, β debbono soddisfare alle *equazioni di* DARBOUX caratteristiche per le asintotiche virtuali:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} &= \left[\frac{\partial \log \rho}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{Bmatrix}\right] \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta} + \\
&\quad + \left[\frac{1}{2}\frac{\partial \log \rho}{\partial v} - \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix}\right]\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right) - \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix}\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta}, \\
\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} &= -\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{Bmatrix}\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta} + \left[\frac{1}{2}\frac{\partial \log \rho}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix}\right]\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right) + \\
&\quad + \left[\frac{\partial \log \rho}{\partial v} - \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix}\right]\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta},
\end{aligned}\right\} \tag{D}$$

(*) Per le asintotiche virtuali e le equazioni (D) di DARBOUX vedi la traduzione tedesca delle mie *Lezioni* (2.ª edizione, pag. 214).

dove i simboli di Christoffel sono calcolati per l'elemento lineare (73). Inversamente se u, v sono funzioni *indipendenti* di α, β che soddisfano le (D), esiste una ed una sola superficie S d'elemento lineare (73), sulla quale le linee α, β sono le asintotiche effettive.

Ora la questione generale che ci proponiamo è: *di calcolare per l'equazione di* Moutard

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \partial \beta} = M \theta$$

associata alle asintotiche (α, β) *di S il valore del coefficiente M.*

Per questo ricordiamo che se si indica con

$$d s^2 = E_1 \, d \alpha^2 + 2 F_1 \, d \alpha \, d \beta + G_1 \, d \beta^2$$

l'elemento lineare di S in coordinate asintotiche (α, β) e con

$$d s'^2 = e \, d \alpha^2 + 2 f \, d \alpha \, d \beta + g \, d \beta^2$$

quello della sfera rappresentativa di Gauss, si ha

$$e = \rho^2 E_1 , \quad f = - \rho^2 F_1 , \quad g = \rho^2 G_1 ,$$

e pel calcolo di M si ha la formola (Vol. I, pag. 164)

$$\sqrt{\rho} M = \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial \alpha \partial \beta} - f \sqrt{\rho} = \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{F_1}{\rho^{\frac{3}{2}}} . \tag{74}$$

Ora abbiamo

$$F_1 = E \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial u}{\partial \beta} + F \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) + G \frac{\partial v}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} ,$$

e d'altronde

$$\frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial u}{\partial \beta} +$$

$$+ \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial u \partial v} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} .$$

Sostituendo questi valori nella (74), coll'osservare le (D), troviamo per la formola cercata

$$\sqrt{\rho}M=\left[\frac{\partial^2\sqrt{\rho}}{\partial u^2}-\begin{Bmatrix}1&1\\&1\end{Bmatrix}\frac{\partial\sqrt{\rho}}{\partial u}-\begin{Bmatrix}1&1\\&2\end{Bmatrix}\frac{\partial\sqrt{\rho}}{\partial v}+\frac{2}{\sqrt{\rho}}\left(\frac{\partial\sqrt{\rho}}{\partial u}\right)^2+\frac{E}{\rho^{\frac{3}{2}}}\right]\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta}+$$

$$+\left[\frac{\partial^2\sqrt{\rho}}{\partial u\,\partial v}-\begin{Bmatrix}1&2\\&1\end{Bmatrix}\frac{\partial\sqrt{\rho}}{\partial u}-\begin{Bmatrix}1&2\\&2\end{Bmatrix}\frac{\partial\sqrt{\rho}}{\partial v}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\sqrt{\rho}}\frac{\partial\sqrt{\rho}}{\partial u}\frac{\partial\sqrt{\rho}}{\partial v}+\frac{F}{\rho^{\frac{3}{2}}}\right]\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right)+$$

$$+\left[\frac{\partial^2\sqrt{\rho}}{\partial v^2}-\begin{Bmatrix}2&2\\&1\end{Bmatrix}\frac{\partial\sqrt{\rho}}{\partial u}-\begin{Bmatrix}2&2\\&2\end{Bmatrix}\frac{\partial\sqrt{\rho}}{\partial v}+\frac{2}{\sqrt{\rho}}\left(\frac{\partial\sqrt{\rho}}{\partial v}\right)^2+\frac{G}{\rho^{\frac{3}{2}}}\right]\frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta}.$$

Se poniamo per semplicità

$$\sqrt{\rho}=R^{\frac{1}{3}}, \tag{75}$$

possiamo scrivere la formola precedente così:

$$\left.\begin{aligned}3R.M&=\left(R_{11}+3ER^{-\frac{1}{3}}\right)\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta}+\\&+\left(R_{12}+3FR^{-\frac{1}{3}}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right)+\left(R_{22}+3GR^{-\frac{1}{3}}\right)\frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta},\end{aligned}\right\} \tag{76}$$

dove R_{11}, R_{12}, R_{22} significano le derivate seconde covarianti di R.

§ 23.

Ricerca delle superficie associate, in qualunque flessione, alla $\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta}=0$.

Applichiamo la formola ora stabilita alla risoluzione del problema seguente:

Esistono superficie per le quali, in qualunque deformazione, l'equazione *di* Moutard *associata alle asintotiche* (α, β) *coincide sempre colla*

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \, \partial \beta} = 0 ?$$

In tale ipotesi, per qualunque sistema (α, β) di asintotiche virtuali, dovremo avere sempre per la (76):

$$\left.\begin{aligned} \left(R_{11} + 3 E R^{-\frac{1}{3}}\right) \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \left(R_{12} + 3 F R^{-\frac{1}{3}}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right) + \\ + \left(R_{22} + 3 G R^{-\frac{1}{3}}\right) \frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

Ma si è già osservato sopra che u, v, come funzioni di α, β, non sono assoggettate ad altra condizione che a quella di soddisfare le equazioni del 2.° ordine (B). È quindi necessario (*) che si annullino nella precedente del 1.° ordine i tre coefficienti

$$R_{11} + 3 E R^{-\frac{1}{3}}, \quad R_{12} + 3 F R^{-\frac{1}{3}}, \quad R_{22} + 3 G R^{-\frac{1}{3}},$$

o in altre parole deve essere identicamente nulla la forma quadratica

$$R_{11}\, d u^2 + 2 R_{12}\, d u\, d v + R_{22}\, d v^2 + 3 R^{-\frac{1}{3}} (E\, d u^2 + 2 F\, d u\, d v + G\, d v^2),$$

che è manifestamente *covariante* alla forma data (73). Ponendo per R_{11}, R_{12}, R_{22} i loro valori effettivi, le condizioni del problema sono così espresse, *sotto forma invariantiva*, dal verificarsi delle tre equazioni

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 R}{\partial u^2} - \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial R}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial R}{\partial v} + 3 E R^{-\frac{1}{3}} = 0 \\ \frac{\partial^2 R}{\partial u \, \partial v} - \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial R}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial R}{\partial v} + 3 F R^{-\frac{1}{3}} = 0 \\ \frac{\partial^2 R}{\partial v^2} - \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial R}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial R}{\partial v} + 3 G R^{-\frac{1}{3}} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

(*) In modo più preciso si osservi, p. e., che nella risoluzione del *problema di* Cauchy pel sistema (D) possono assegnarsi in modo affatto arbitrario, lungo una curva *non caratteristica* $\beta = \varphi(\alpha)$, i valori di $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial u}{\partial \beta}$, $\frac{\partial v}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial v}{\partial \beta}$. Ciò esclude che la (67), se non è identica, possa essere una conseguenza delle (D).

Per vedere se esistono classi di superficie applicabili che le soddisfano cominciamo dal prendere per linee u le linee di egual curvatura $R = \text{cost.}$, e a linee v le loro trajettorie ortogonali, sicchè $\frac{\partial R}{\partial v} = 0$, $F = 0$. La media delle (78) dà $\left\{ {1\,2 \atop 1} \right\} = 0$, cioè $\frac{\partial \xi}{\partial v} = 0$; dunque E è funzione della sola u e, cangiando il parametro u, si può fare $E = 1$, inoltre le linee di egual curvatura sono geodeticamente parallele. Ora la terza delle (78) diventa

$$\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\frac{d R}{d u} + \frac{3\, G}{R^{\frac{1}{3}}} = 0$$

e dimostra che $\frac{\partial \log G}{\partial u}$ è funzione di u soltanto, e disponendo del parametro v, G stessa si può ridurre ad una funzione $r\,(u)$ di u soltanto. Abbiamo dunque questo primo risultato: *L'elemento lineare supposto ha la forma*

$$d s^2 = d u^2 + r^2\, d v^2 \qquad (r = r\,(u)),$$

appartenente ad una superficie di rotazione.

Osservazione. Nell'enunciato della questione al principio del paragrafo si potrebbe sostituire alla $\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha\, \partial \beta} = 0$ più in generale l'equazione di Moutard

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha\, \partial \beta} = f\,(\alpha,\ \beta)\,.\,\theta,$$

con $f\,(\alpha,\ \beta)$ funzione *fissa* di α, β. Allora nel secondo membro della (77), al posto dello zero dovremmo scrivere $3\, R\, f\,(\alpha,\ \beta)$, e le considerazioni stesse svolte sopra dimostrano che necessariamente $f\,(\alpha,\ \beta) = 0$, onde si ricade nel caso precedente.

§ 24.

Proprietà caratteristica delle deformate del paraboloide rotondo.

Resta che vediamo per quali superficie di rotazione le (78) risultano soddisfatte. Si osservi che i simboli $\left\{ {1\,2 \atop 2} \right\}$, $\left\{ {2\,2 \atop 1} \right\}$ di Christoffel hanno qui i valori

$$\left\{ {1\,2 \atop 2} \right\} = \frac{r'}{r}; \quad \left\{ {2\,2 \atop 1} \right\} = -\, r\, r',$$

mentre tutti gli altri sono nulli, ed inoltre essendo

$$K = -\frac{1}{\rho^2} = -R^{-\frac{4}{3}},$$

ed anche $K = -\frac{r''}{r}$, ne viene

$$R^{-\frac{4}{3}} = \frac{r''}{r}. \tag{79}$$

La media delle (78) è ora identicamente verificata e le altre due diventano

$$R'' + 3R^{-\frac{1}{3}} = 0, \quad R' + \frac{3r}{r'} R^{-\frac{1}{3}} = 0,$$

delle quali però possiamo omettere la prima come conseguenza della seconda e della (79).

Così restano da determinare le due funzioni $R(u)$, $r(u)$ in guisa da soddisfare le due equazioni

$$R^{\frac{4}{3}} = \frac{r}{r''}, \quad R^{\frac{1}{3}} R' = -\frac{3r}{r'}.$$

Se eliminiamo R derivando la prima ed osservando la seconda risulta

$$\frac{d}{du}\left(\frac{r}{r''}\right) + 4\frac{r}{r'} = 0,$$

che possiamo scrivere

$$\frac{d}{du}\left(\frac{r''}{r r'^4}\right) = 0.$$

Integrando, col ricordare che $\frac{r''}{r}$ deve essere positivo, abbiamo

$$r'' = k^2 r r'^4 \qquad (k \text{ costante reale}),$$

ovvero

$$\frac{d}{du}\left(\frac{1}{r'^2}\right) = -k^2 . 2 r r',$$

e con una nuova integrazione

$$\frac{1}{r'^2} = a^2 - k^2 r^2 \qquad (a \text{ costante reale}).$$

Di qui abbiamo

$$d\,u^2 = \frac{d\,r^2}{r'^2} = (a^2 - k^2\,r^2)\,d\,r^2,$$

e l'elemento lineare diventa

$$d\,s^2 = (a^2 - k^2\,r^2)\,d\,r^2 + r^2\,d\,v^2.$$

Senza alterare la generalità possiamo fare $a = 1$ e l'elemento lineare appartiene al paraboloide rotondo

$$r^2 = \frac{2\,i}{k}\,z,$$

di parametro immaginario $\frac{i}{k}$ ·

Possiamo dunque concludere:

Esiste una sola classe di superficie applicabili, tutte associate alla medesima equazione di Moutard: $\frac{\partial^2\,\theta}{\partial\,\alpha\,\partial\,\beta} = 0$, *ed è la classe delle deformate del paraboloide rotondo* (*).

Segue di qui nuovamente che la costruzione di Darboux (§ 20) fornisce *tutte* le deformate del paraboloide rotondo nelle falde focali delle congruenze normali di Darboux. E infatti, se S è una deformata del paraboloide rotondo, la sua complementare S_1 è pure applicabile sullo stesso paraboloide ed S, S_1 formano le due falde focali di una congruenza W, mentre le equazioni di Moutard relative ad S, S_1 coincidono nella $\frac{\partial^2\,\theta}{\partial\,\alpha\,\partial\,\beta} = 0$. Per quanto abbiamo dimostrato nei §§ 18, 19, la congruenza è quindi una congruenza di Darboux.

§ 25.

Trasformazioni di Bäcklund delle congruenze di Darboux.

Da ultimo ci proponiamo di dimostrare che anche per le congruenze W di Darboux esistono trasformazioni asintotiche come per le congruenze W a parametro medio costante con una falda pseudosferica (cf. § 15).

(*) Per l'osservazione fatta alla fine del paragrafo precedente si può dire anzi che questo è l'unico caso in cui, deformando comunque la superficie, l'equazione associata di Moutard resta sempre la stessa.

Sia (Γ) una qualunque congruenza di Darboux colle falde focali S, S_1 e colla superficie media S_0 di traslazione, le cui curve generatrici C, C_1 hanno le torsioni costanti $\frac{1}{c^2}$, $-\frac{1}{c_1^2}$. Proveremo che esistono ∞^2 congruenze $(\bar{\Gamma})$ di Darboux trasformate asintotiche della data (Γ), dimostrando la proposizione seguente:

Delle due curve generatrici C, C_1 si mantenga fissa p. e. la seconda C_1 e si sostituisca alla prima C una sua qualunque trasformata $\bar{C}$ per una trasformazione B_σ di Bäcklund (*). *Se colle due nuove curve $\bar{C}$, C_1 si genera una nuova superficie di traslazione $\bar{S}_0$, e la corrispondente congruenza $(\bar{\Gamma})$ di* Darboux, *questa sarà una trasformata asintotica della primitiva* (Γ).

Riteniamo le notazioni del § 19 per la congruenza (Γ) e per la trasformata $(\bar{\Gamma})$ adottiamo le notazioni corrispondenti con un sopra-segno. La curva $\bar{C}$ a torsione costante $\frac{1}{c^2}$ derivando dalla C per una trasformazione B_σ di Bäcklund, si ottiene da questa conducendo per ogni punto di C, nel piano osculatore, un segmento di lunghezza costante $= c^2 \cos\sigma$, inclinato sulla tangente a C di un angolo $\theta = \theta(u)$ che soddisfi all'equazione differenziale

$$\frac{d\theta}{du} + \frac{1}{\rho} = \frac{1 + \operatorname{sen}\sigma}{c^2 \cos\sigma} \operatorname{sen}\theta,$$

dove $\frac{1}{\rho}$ è la curvatura di C; il luogo dei termini dei detti segmenti è la curva trasformata $\bar{C}$ (V. m. c.). Le coordinate di un punto mobile sopra $\bar{C}$ sono date dalla espressione

$$\int \alpha\, du + c^2 \cos\sigma (\alpha \cos\theta + \xi \operatorname{sen}\theta)$$

e dalle analoghe. Siccome la seconda curva generatrice C_1 è lasciata inalterata, le formole che definiscono la nuova superficie media $\bar{S}_0$ saranno, per le (62) § 19

$$\bar{x}_0 = x_0 + c^2 \cos\sigma (\alpha \cos\sigma + \xi \operatorname{sen}\theta), \tag{80}$$

e le due falde focali $\bar{S}$, $\bar{S}_1$ della nuova congruenza $(\bar{\Gamma})$ di Darboux saranno

(*) Per le trasformazioni di Bäcklund delle curve a torsione costante vedi particolarmente il § 11 della mia Memoria: *Configurazioni mobili di* Möbius, ecc. (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, T. XXV (1908).

date per le (66) § 19 dalle formole

$$\overline{x}_1 = \overline{x}_0 + c\, c_1 \begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \overline{\mu} & \overline{\nu} \end{vmatrix}, \qquad \overline{x}_2 = \overline{x}_0 - c\, c_1 \begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \overline{\mu} & \overline{\nu} \end{vmatrix}, \text{ ecc.} \tag{81}$$

Ora pei coseni di direzione $\overline{\lambda}$, $\overline{\mu}$, $\overline{\nu}$ della binormale alla $\overline{C}$ abbiamo (m. c.)

$$\overline{\lambda} = -\cos\sigma\,\mathrm{sen}\,\theta\,.\,\alpha + \cos\sigma\cos\theta\,.\,\xi + \mathrm{sen}\,\sigma\,.\,\lambda, \text{ ecc.} \tag{82}$$

Sostituendo nelle (81), queste diventano

$$\begin{aligned} \overline{x}_1 = x_0 + c^2 \cos\sigma\,(\alpha\cos\theta + \xi\,\mathrm{sen}\,\theta) - c\, c_1 \cos\sigma\,\mathrm{sen}\,\theta \begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} + \\ + c\, c_1 \cos\sigma\cos\theta \begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \eta & \zeta \end{vmatrix} + c\, c_1\,\mathrm{sen}\,\sigma \begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu & \nu \end{vmatrix}, \\ \overline{x}_2 = x_0 + c^2 \cos\sigma\,(\alpha\cos\theta + \xi\,\mathrm{sen}\,\theta) + c\, c_1 \cos\sigma\,\mathrm{sen}\,\theta \begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} - \\ - c\, c_1 \cos\sigma\cos\theta \begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \eta & \zeta \end{vmatrix} - c\, c_1\,\mathrm{sen}\,\sigma \begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu & \nu \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

e sottraendo da queste i corrispondenti valori (66) § 19 di x_1, x_2, troviamo le formole

$$\left.\begin{aligned} \overline{x}_1 - x_1 = c^2 \cos\sigma\,(\alpha\cos\theta + \xi\,\mathrm{sen}\,\theta) - c\, c_1 \cos\sigma\,\mathrm{sen}\,\theta \begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} + \\ + c\, c_1 \cos\sigma\cos\theta \begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \eta & \zeta \end{vmatrix} - c\, c_1 (1 - \mathrm{sen}\,\sigma) \begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu & \nu \end{vmatrix}, \\ \overline{x}_2 - x_2 = c^2 \cos\sigma\,(\alpha\cos\theta + \xi\,\mathrm{sen}\,\theta) + c\, c_1 \cos\sigma\,\mathrm{sen}\,\theta \begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} - \\ - c\, c_1 \cos\sigma\cos\theta \begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \eta & \zeta \end{vmatrix} + c\, c_1 (1 - \mathrm{sen}\,\sigma) \begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu & \nu \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{83}$$

Con queste formole è facile verificare la proposizione enunciata dimostrando che se M, M_1, $\overline{M}$, $\overline{M}_1$ sono quattro punti corrispondenti di S, S_1, $\overline{S}$, $\overline{S}_1$: *i segmenti $M\overline{M}$, $M_1\overline{M}_1$ toccano rispettivamente il primo le S, $\overline{S}$ in M, $\overline{M}$, il secondo le S_1, $\overline{S}_1$ in M_1, $\overline{M}_1$.*

Dobbiamo per ciò provare che sussistouo le quattro identità

$$S\,X_1(\overline{x}_1 - x_1) = 0, \qquad S\,\overline{X}_1(\overline{x}_1 - x_1) = 0,$$
$$S\,X_2(\overline{x}_2 - x_2) = 0, \qquad S\,\overline{X}_2(\overline{x}_2 - x_2) = 0,$$

le quali, per le (70), (70*) § 20 equivalgono alle altre

$$\left.\begin{array}{ll} S(c\lambda - c_1\lambda_1)(\overline{x}_1 - x_1) = 0, & S(c\overline{\lambda} - c_1\overline{\lambda}_1)(\overline{x}_1 - x_1) = 0, \\ S(c\lambda + c_1\lambda_1)(\overline{x}_2 - x_2) = 0, & S(c\overline{\lambda} + c_1\lambda_1)(\overline{x}_2 - x_2) = 0. \end{array}\right\} \quad (84)$$

Ora dalle (82), (83), se si pone per brevità

$$L = \cos\theta\, S\,\alpha\,\lambda_1 + \operatorname{sen}\theta\, S\,\xi\,\lambda_1,$$

si ricava

$$\begin{array}{llll} S\lambda(\overline{x}_1 - x_1) = & c\,c_1\cos\sigma\, L, & S\lambda_1(\overline{x}_1 - x_1) = & c^2\cos\sigma\,.\,L, \\ S\lambda(\overline{x}_2 - x_2) = & -\,c\,c_1\cos\sigma\, L, & S\lambda_1(\overline{x}_2 - x_2) = & c^2\cos\sigma\, L, \\ S\overline{\lambda}(\overline{x}_1 - x_1) = & c\,c_1\cos\sigma\, L, & S\overline{\lambda}(\overline{x}_2 - x_2) = & -\,c\,c_1\cos\sigma\, L, \end{array}$$

e con queste le (84) si risolvono in altrettante identità.

Dimostrata così la nostra proposizione, noi rileviamo da ultimo il caso particolare che la congruenza di Darboux sia normale, e quindi le quattro falde focali S, S_1, $\overline{S}$, $\overline{S}_1$ siano applicabili sul paraboloide rotondo. In questo caso è facile provare che la trasformazione per il passaggio da S ad $\overline{S}$, ovvero da S_1 ad $\overline{S}_1$, coincide con quel caso particolare delle generali trasformazioni B_k per le deformate delle quadriche che corrisponde al caso del paraboloide rotondo.

Viareggio, Settembre 1913.

INDICE DEI PARAGRAFI

Opere matematiche di Luigi Cremona

pubblicate sotto gli auspicii della R. Accademia dei Lincei.

Tomo Primo - U. HOEPLI - Milano, 1914

(*Recensione di* Federigo Enriques, *a Bologna*) (*).

Un Comitato, costituito sotto il patrocinio dell'Accademia dei Lincei (presidente Ulisse Dini, direttore e coordinatore del lavoro Eugenio Bertini), ha impreso a pubblicare le opere del padre della Geometria italiana e ce ne porge ora, in nitida veste, il primo volume.

Dire, a proposito di questo, della vita e dei caratteri generali della produzione scientifica cremoniana, sarebbe per un verso ripetere ciò che fu fatto da molti nell'ora non lontana in cui il grande geometra fu tolto alla patria, per l'altro anticipare sullo studio che il Comitato ordinatore promette di darci nel terzo volume della pubblicazione.

Tuttavia il volume che abbiamo sott'occhio merita di essere salutato da una parola che lo richiami all'attenzione del pubblico e particolarmente dei giovani. Le dottrine che in esso sono trattate sono classiche; i principii della teoria delle curve piane, la cubica gobba, la quartica di seconda specie, la rigata del terzo grado, che ne costituiscono i principali argomenti, figurano ormai, in Italia, nei corsi propedeutici alla Geometria superiore. Ma lo sviluppo che si dà a questi insegnamenti riesce necessariamente limitato da molteplici esigenze; e gli studiosi delle Matematiche in generale o della Geo-

(*) Pubblichiamo volontieri questa *Recensione* del tomo 1.° delle Opere matematiche di L. Cremona, facendo un'eccezione alla massima costantemente seguita di accogliere soltanto lavori scientifici, non solo per l'altissima fama dell'Autore, ma altresì per un sentimento di gratitudine verso di Lui, che pose per lunghi anni nella direzione di questi *Annali* tanto amore e tanta attività.

La Direzione.

metria in particolare poco vi si attardano, richiamati — dai rapidi progressi della Scienza — verso più alti problemi che, superando la concezione puristica della Geometria, mirano ad illuminare il campo algebrico sotto diversi aspetti.

Ora a questi studiosi, ed in special modo ai più giovani, crediamo di raccomandare la lettura e lo studio dell'opera del CREMONA, quantunque e forse anzi per ciò che le vedute in essa dominanti possano apparire un po' lontane da quelle proprie del nostro tempo.

Il motivo di tale consiglio si riattacca ad una considerazione filosofica d'ordine generale e consiste nell'interesse che offre la storia delle scienze, nella tendenza ch'essa suggerisce o rafforza verso una concezione più libera dei problemi, nel freno salutare che ne deriva per ogni strettezza o particolarismo di scuola.

Ora, l'opera cremoniana non è un capitolo qualsiasi nella storia delle Matematiche italiane; è il capitolo che logicamente precede gli sviluppi della nostra scuola geometrica. E se — come ho ricordato poc'anzi — questa scuola è stata attratta da poderosi problemi, che sono ben degni dei nostri sforzi, non è detto che dallo stesso tronco su cui essa si è elevata, non possano sorgere altri rami fruttiferi. In ogni caso la riflessione e la comprensione della ricerca geometrica del CREMONA è necessaria all'intelligenza piena dello spirito nuovo, quale si formò per il confluire di varie correnti ideali, quando la Geometria proiettiva ebbe profondamente assimilati i concetti sintetici della teoria delle funzioni.

L'opera del CREMONA segna un primo passo verso questa assimilazione, se pure le idee attinte dall'Algebra appaiano talvolta in codesto organismo geometrico come un imprestito fatto tacitamente. Si spiega così l'atteggiamento diverso e quasi opposto che si palesa nei discepoli, immediati continuatori dell'opera del Maestro: la tendenza ad eliminare i concetti algebrici od analitici, edificando una teoria pura delle curve e delle superficie, e l'altra tendenza ad accogliere ed elaborare nella costruzione geometrica un più largo materiale analitico, sopprimendo infine la distinzione particolaristica.

Qui si rivelano istruttive perfino le mende che con savia e misurata prudenza gli editori hanno messo in vista nell'opera cremoniana; dico in ispecie qualche passaggio dove il requisito dell'algebricità non è esplicitamente enunciato come condizione necessaria per la validità dei teoremi; passaggio su cui richiamano l'attenzione del lettore opportune note poste in fine al volume.

Ma l'interesse più grande della lettura sta nella ricchezza di fantasia e nella concretezza dello spirito cremoniano; doti queste che spiegano l'ascendente esercitato dal Maestro sulle giovani generazioni e lo straordinario impulso degli studi geometrici che ne è conseguito.

L'ordine cronologico seguìto nella pubblicazione permette di vedere che — dopo una Nota attinente a ricerche di Geometria differenziale del Bordoni e un'altra di Algebra formale suggerita al Cremona dall'attività del Brioschi — il genio del Nostro si volse al campo della Geometria proiettiva, attrattovi dalle brillanti ricerche di Chasles. Ma — sebbene destinato a svolgere l'indirizzo più astratto della scienza (in rapporto colle trasformazioni birazionali) — il Cremona serbò pur sempre il gusto del metrico, caratteristico della scuola francese. Parimente congiunse nel suo interesse gli argomenti di pura teoria e le applicazioni pratiche, come appare già dal volume in esame, il cui art. 26 concerne appunto la Prospettiva in rilievo di Poudra.

Il lavoro principale del volume, uno dei più importanti del Cremona e probabilmente quello che esercitò la più larga influenza didattica, è l'« Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane » pubblicata già nelle Memorie dell'Accademia di Bologna del 1862.

Come è noto, questa non è una costruzione interamente originale. L'autore la presenta come un saggio, nato dal desiderio di dimostrare alcuni importanti teoremi enunciati da Steiner, e allargatosi ad un vero trattatello, in cui trovano posto nuovi resultati coordinati a quelli già conseguiti da Plücker, Cayley, Hesse, Clebsch, Salmon ... Pregio fondamentale dell'opera è il disegno sistematico della trattazione, che sostituisce al soccorso dell'analisi algebrica metodi sintetici di larga portata, ispirati dallo spirito geometrico di Poncelet, Chasles, Jonquières, Möbius.

Questo rapido cenno sembra sufficiente per lo scopo nostro, d'invogliare soprattutto i giovani alla approfondita lettura dell'opera cremoniana. Oltre alla bellezza delle ricerche e all'arte singolare dell'esposizione, vi troveranno essi un vivo sentimento del valore della scienza e dell'insegnamento. E qui basta ricordare il programma contenuto nella magnifica prolusione di Bologna del 1860, che è l'art. 25 del volume, e le Note storiche che ne costituiscono gli art. 22, 23.

Ci resta infine da rilevare la diligenza amorosa con cui l'edizione del volume è stata curata. La redazione originale del Cremona è stata rispettata scrupolosamente sia per la sostanza che per la forma, ma vi sono state introdotte opportunamente varie aggiunte che l'autore stesso appose manoscritte su qualche copia dei suoi lavori, probabilmente in vista di una nuova pubblicazione. Codeste aggiunte furono oggetto di rigoroso esame e di scelta per parte degli editori. Infine brevi e sobrie note, cui ho già accennato, servono a mettere davanti al lettore le lacune o le mende a cui non si sarebbe potuto riparare senza alterare il carattere genuino dell'opera.

Così dunque la pubblicazione, già da questo primo volume, promette di riuscire, sotto ogni riguardo, degna del Maestro che il concorde amore dei discepoli vuole far rivivere in mezzo alle più giovani generazioni scientifiche, e degna insieme della massima nostra Accademia che — onorando l'insigne geometra — ha felicemente espresso la gratitudine nazionale verso uno degli uomini che più hanno contribuito alla redenzione spirituale della nuova Italia.

Nel concetto del Cremona — come in quello dei grandi fattori del nostro risorgimento — l'amore della scienza e l'amore della patria libera si fondevano in un unico ideale. « O giovani felici », — esclamava egli chiudendo la sua prolusione sopra citata, — « cui fortuna concesse di assistere ne' più begli anni della vita alla resurrezione della patria vostra, svegliatevi e sorgete a contemplare il novello sole che fiammeggia sull'orizzonte! Se la doppia tirannide dello sgherro austriaco e del livido gesuita vi teneva oziosi e imbelli, la libertà invece vi vuole operosi e vigili. Nelle armi e ne' militari esercizii rinvigorite il corpo; negli studî severi e costanti spogliate ogni ruggine di servitù e alla luce della scienza imparate a esser degni di libertà ».

Bologna, Ottobre 1913.