

R. Clausius

Théorie

Mécanique

de la Chaleur

ÉLECTRICITÉ

2^e ED. PAR F. Folie & E. Ronkar

THÉORIE MÉCANIQUE
DE L'ÉLECTRICITÉ

ERRATA

—

Page 86, dernière ligne et lignes suivantes, *lisez* : ne se refusent pas à devenir électriques ou à admettre de l'électricité de tension, mais qu'ils se refusent etc...

- 125, ligne 9 du bas, *au lieu de* : précède, *lisez* : précédent.
- 331, ligne 8, *au lieu de* : l'un, *lisez* : l'une.

THÉORIE MÉCANIQUE
DE LA CHALEUR

PAR

R. CLAUDIUS

DEUXIÈME ÉDITION, REFONDUE ET COMPLÉTÉE
TRADUITE SUR LA 3^e ÉDITION DE L'ORIGINAL ALLEMAND

PAR

F. FOLIE & E. RONKAR

CHARGÉS DE COURS A L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE.

TOME DEUXIÈME

THÉORIE MÉCANIQUE DE L'ÉLECTRICITÉ

Y COMPRIS L'APPLICATION DES PRINCIPES FONDAMENTAUX
DE LA THÉORIE MÉCANIQUE DE LA CHALEUR

(DEUXIÈME TIRAGE)

BRUXELLES

SOCIÉTÉ BELGE D'ÉDITIONS

(SOCIÉTÉ ANONYME)

ANCIENNE MAISON H. MANCEAUX, A MONS

3, Rue des Minimes, 3.

1898

PRÉFACE DE LA DEUXIÈME ÉDITION ALLEMANDE

Le remaniement de mes précédentes recherches sur l'électricité, causé par la publication d'une nouvelle édition de mon ouvrage, m'a conduit à en faire de nouvelles qui forment un complément essentiel des premières et qui doivent par suite prendre place à côté de celles-ci. Je mentionnerai particulièrement la théorie des phénomènes électrodynamiques, qui manquait dans la première édition et qui occupe une place importante dans la présente. De cette manière, la partie de l'ouvrage relative à l'électricité a pris un tel développement, qu'il m'a paru utile d'en former un volume special, et de réserver pour un troisième volume les parties restantes de la théorie mécanique de la chaleur.

En même temps, les développements ainsi complétés, ne doivent plus être considérés comme une simple application de la théorie mécanique de la chaleur aux phénomènes électriques, mais comme formant une théorie mécanique de l'électricité indépendante en partie de la théorie de la chaleur. En me basant là-dessus, j'ai cru nécessaire d'ajouter, au titre qui la désigne comme un deuxième volume de la théorie mécanique de la chaleur, un autre titre, celui de théorie mécanique de l'électricité, pour indiquer que ce volume peut être pris comme un volume indépendant des autres volumes de la théorie de la chaleur, formant à lui seul un ouvrage spécial.

Bonn, novembre 1878.

R. CLAUDIUS.

CHAPITRE I.

INTRODUCTION A LA THÉORIE MATHÉMATIQUE DE L'ÉLECTRICITÉ.

§ 1.

La fonction potentielle.

Dans l'étude mathématique de l'électricité, il s'agit d'abord de déterminer de quelle manière une quantité d'électricité, que l'on communique à un corps conducteur, se distribue dans son intérieur ou à sa surface, soit que ce corps se trouve assez éloigné d'autres corps conducteurs pour que des forces électriques étrangères ne puissent pas agir sur lui, soit qu'il se trouve dans le voisinage d'autres corps conducteurs, qui sont ou isolés et chargés, comme lui, de quantités données d'électricité, ou mis en communication avec la terre. Cette détermination, comme tous les calculs relatifs à l'électricité, est considérablement simplifiée par l'introduction d'une certaine fonction, déjà employée par différents géomètres, comme Laplace et Poisson, et qui a été traitée d'une manière spéciale, en 1828, par

George Green, sous le nom de *fonction potentielle*¹; Gauss en a fait également plus tard l'objet de développements mathématiques très remarquables².

J'ai publié sur cette fonction, qui est d'une importance capitale en physique mathématique, un ouvrage dont il vient de paraître récemment une quatrième édition, augmentée en différents endroits³. J'ai développé dans cet ouvrage les propriétés principales de cette fonction, ainsi que celles d'une quantité que l'on en déduit par l'intégration et que l'on nomme le *potentiel*. Je puis donc me borner ici à rappeler brièvement quelques théorèmes qui sont nécessaires à l'intelligence des développements qui suivent, et je renverrai à cet ouvrage pour la démonstration de ces théorèmes et pour leurs applications ultérieures.

Pour plus de simplicité, je rapporterai toujours spécialement à l'électricité les considérations qui suivent, quoique, comme on le verra facilement, elles puissent aisément s'étendre, avec de légères modifications, à d'autres agents qui exercent des attractions ou des répulsions en raison inverse du carré de la distance.

1. *An Essay on the Application of mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism*; by George Green. Nottingham, 1828. Réimprimé dans le journal de Crelle, t. XLIV et XLVII.

2. *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte*. Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1839.

3. *Die Potentialfunction und das Potential, ein Beitrag zur mathematischen Physik*. Leipzig, bei J. A. Barth, 1885.

Une traduction française de cet ouvrage, par F. Folic, a paru chez Gauthier-Villars, Paris, 1870.

§ 2.

Hypothèse des deux électricités et expression de leurs forces.

Les recherches mathématiques sur l'électrostatique partent, en général, de l'hypothèse qu'il existe deux électricités différentes de telle nature que deux quantités d'électricité de même sens se repoussent, et que deux quantités d'électricité de sens contraires s'attirent. Ce n'est pas à dire que les résultats de ces recherches soient liés à cette hypothèse, de telle sorte qu'ils doivent subsister ou tomber avec elle ; on peut même affirmer que ces résultats doivent encore rester valables, quant à leur essence, si cette hypothèse vient à être remplacée par une autre également propre à expliquer les forces électriques que nous connaissons par l'expérience. C'est pour cette raison que les mathématiciens n'ont pas hésité à se servir de cette hypothèse, en réservant à l'avenir de décider si elle doit être regardée comme exacte dans le sens littéral.

Soient donc données deux quantités d'électricité que nous représenterons par q et q' , ces grandeurs étant positives ou négatives suivant que les quantités d'électricité appartiendront à l'une ou à l'autre des deux espèces. Imaginons que ces deux quantités d'électricité soient concentrées en deux points ; la force qu'elles exercent l'une sur l'autre devra d'abord être proportionnelle à chacune des deux quantités, et par suite à leur produit ; en second lieu, elle doit être considérée

comme inversement proportionnelle au carré de la distance, ainsi que l'expérience l'a suffisamment établi. Nous pouvons donc, si r désigne la distance des deux points, représenter la force par l'expression suivante :

$$\varepsilon \frac{qq'}{r^2},$$

où ε désigne un facteur constant, dépendant de l'unité qui servira de mesure aux quantités d'électricité.

Nous adopterons la mesure suivante. L'unité d'électricité sera pour nous la quantité d'électricité qui exerce sur une quantité égale, à l'unité de distance, une action égale à l'unité de force. Dans ce cas, le facteur constant sera, en valeur absolue, égal à 1. Mais il reste encore à décider si nous le ferons égal à + 1 ou à — 1. A cet effet, nous devons faire intervenir la différence entre la force attractive et la force répulsive, et les faire entrer dans le calcul, l'une comme positive, l'autre comme négative. Nous conviendrons de regarder une répulsion comme positive et une attraction comme négative, parce que la répulsion tend à produire un accroissement et l'attraction une diminution de r . Dans l'étude de l'électricité, nous devons donc rendre positif le facteur constant, puisque des électricités de même sens se repoussent, et nous le ferons égal à + 1, en vertu de la détermination précédente de sa valeur absolue. L'expression de la force que les quantités d'électricité q et q' exercent l'une sur l'autre deviendra ainsi :

$$\frac{qq'}{r^2}.$$

§ 3.

Expression de la fonction potentielle.

Supposons maintenant que la quantité d'électricité q' , concentrée en un point, n'agisse pas seule sur la quantité q , mais qu'il y ait des quantités d'électricité q' , q'_1 , q'_2 , etc., en nombre arbitraire, concentrées en différents points, et qui agissent toutes sur q ; ou bien que l'électricité qui exerce son action, au lieu d'être concentrée en des points isolés, soit répandue sur une ligne, sur une surface ou dans un espace solide. Pour déterminer dans ce cas, d'une manière aussi simple que possible, la force cherchée, en grandeur et en direction, commençons par former une grandeur que nous définirons de la manière suivante.

Désignons par p le point où se trouve la quantité d'électricité q soumise à l'action des autres quantités ; par r , r_1 , r_2 , etc., les distances de ce point aux points où sont concentrées les quantités d'électricité q' , q'_1 , q'_2 , etc. La grandeur dont il vient d'être question, et que l'on a coutume de représenter par V , sera déterminée par l'équation :

$$V = \frac{q'}{r} + \frac{q'_1}{r_1} + \frac{q'_2}{r_2} + \text{etc.}, \quad (1)$$

ou, en employant le signe sommatoire :

$$V = \sum \frac{q'}{r}. \quad (2)$$

Si l'électricité qui exerce son action n'est pas concentrée

en des points isolés, mais répandue d'une manière continue sur une ligne, sur une surface ou dans un espace solide, on se la représentera comme décomposée en éléments dq' ; on désignera par r la distance d'un élément au point p , et l'on emploiera, au lieu du signe sommatoire précédent, le signe d'intégration; on aura ainsi :

$$V = \int \frac{dq'}{r}. \quad (3)$$

Cette dernière expression de V est la plus générale, et elle renferme la précédente; car on peut évidemment effectuer l'intégration, même dans le cas où des quantités finies d'électricité sont concentrées en des points isolés.

D'après ce qui précède, il va de soi que l'on peut former une expression de cette espèce, non seulement pour l'électricité, mais pour tout autre agent qui attire ou repousse en raison inverse du carré de la distance; on conservera seulement, pour plus de généralité, le coefficient ϵ de la formule générale, dont la valeur dépend de l'unité de mesure de l'agent, et que nous avons remplacé par 1 pour l'électricité.

C'est cette quantité V que Green a nommée *fonction potentielle*. Gauss l'a ensuite appelée *potentiel*; toutefois cette dernière dénomination est sujette à quelque inconvénient. Il y a, en effet, encore une autre grandeur très importante, et dont il sera question plus bas, que l'on appelle, suivant les circonstances, *le potentiel d'une quantité sur une autre*, ou *le potentiel d'une quantité sur elle-même*. En adoptant la dénomination de Gauss, on emploierait donc le même mot *potentiel* pour deux notions qui ont sans doute de l'analogie entre elles, mais qui ne sont pas identiques. C'est pourquoi, dans

mes Mémoires sur l'électricité et dans l'ouvrage cité plus haut, j'ai repris le nom de *fonction potentielle*, proposé par Green pour la quantité définie par l'équation (3), et réservé celui de *potentiel* pour la quantité qui se déduit de la fonction potentielle par une seconde intégration.

§ 4.

Détermination des composantes de la force à l'aide de la fonction potentielle.

On peut, à l'aide de la fonction dont nous avons parlé dans le paragraphe précédent, déterminer de la manière suivante la force qui agit en un point quelconque p .

Commençons par supposer que la quantité d'électricité qui se trouve au point p , et qui reçoit l'action de cette force, soit une *unité d'électricité positive*, au lieu de celle que nous avons désignée plus haut par q . Décomposons la force exercée sur cette unité d'électricité en trois composantes dirigées suivant trois axes rectangulaires, et désignons ces composantes par X , Y , Z . En regardant V (la fonction potentielle de l'électricité qui agit sur le point considéré) comme une fonction des coordonnées x , y , z du point, nous aurons :

$$X = - \frac{\partial V}{\partial x}; \quad Y = - \frac{\partial V}{\partial y}; \quad Z = - \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (4)$$

On peut également exprimer la composante de la force suivant une direction quelconque, tout aussi simplement

que ses composantes suivant les axes des coordonnées. Imaginons une ligne quelconque passant par le point p , et désignons par s la distance du point p , comptée sur cette ligne, à un autre point pris pour origine; ensuite, désignons par $\frac{\partial V}{\partial s} ds$ l'accroissement infiniment petit que prend V , lorsque le point considéré p parcourt sur cette ligne le chemin élémentaire ds ; la composante de la force suivant la direction de cette ligne, composante que nous nommerons S , sera déterminée par l'équation

$$S = - \frac{\partial V}{\partial s}. \quad (5)$$

Si ce n'est pas une *unité*, mais une quantité quelconque d'électricité qui se trouve en p et qui reçoit l'action de la force, nous la représenterons, comme plus haut, par q , qui peut être positif ou négatif; et les expressions des composantes de la force dont cette quantité d'électricité reçoit l'action, suivant les axes des coordonnées x , y , z , et suivant la direction quelconque s , seront :

$$- q \frac{\partial V}{\partial x}, \quad - q \frac{\partial V}{\partial y}, \quad - q \frac{\partial V}{\partial z} \text{ et } - q \frac{\partial V}{\partial s}.$$

Lorsque l'on aura exprimé de cette manière les composantes de la force suivant les trois axes, on pourra en déduire aisément la force elle-même en grandeur et en direction.

§ 5.

Le niveau potentiel.

Une équation de la forme

$$V = A,$$

où A désigne une constante, est celle d'une surface qui jouit de cette propriété, que, pour tout point qui s'y trouve, la force qui serait exercée sur une quantité d'électricité concentrée en ce point est normale à cette surface. Celle-ci a donc, relativement à la force électrique considérée, la même propriété que celle dont jouit la surface libre d'un fluide en repos, relativement à la pesanteur ; c'est pour cette raison qu'elle s'appelle *surface de niveau*.

Si l'on donne à la fonction potentielle une autre valeur constante, en posant, par exemple,

$$V = B,$$

on déterminera ainsi une autre surface de niveau, et, de cette manière, on peut en obtenir une infinité. En conséquence, nous donnerons à la valeur que prend la fonction potentielle en un point quelconque de l'espace, et qui détermine la surface de niveau passant par ce point, le nom de *niveau potentiel* de ce point.

Pour l'électricité (de même que pour tout autre agent qui exerce des actions soit attractives, soit répulsives), les niveaux potentiels peuvent être ou positifs ou négatifs ; et les espaces dans lesquels l'un ou l'autre cas se

présente sont séparés entre eux par une surface de niveau dont le niveau potentiel est nul.

Imaginons maintenant une unité d'électricité positive, concentrée en un point quelconque de l'espace, et considérons la force qui agit sur elle, en déterminant la composante de cette force suivant chacune des directions qui partent de ce point; nous pourrions affirmer d'une manière générale ce qui suit. Dans les directions suivant lesquelles le niveau potentiel décroît, la composante de la force est positive; elle est négative dans celles suivant lesquelles il augmente; et elle est d'autant plus grande en valeur absolue, que le niveau potentiel varie plus rapidement dans la direction considérée, puisque, d'après ce qui précède, la composante de la force est représentée par le coefficient différentiel du niveau potentiel relatif à cette direction.

§ 6.

Expression différentielle du deuxième ordre qui détermine la répartition de l'agent actif dans l'espace.

Outre la propriété de représenter les composantes de la force d'une manière si simple, la fonction potentielle jouit encore d'une autre propriété très importante; nous l'exprimerons d'abord pour un agent quelconque, qui exerce des actions attractives ou répulsives en raison inverse du carré de la distance, et nous l'appliquerons ensuite immédiatement à l'électricité.

Si le point p est situé dans un espace dans lequel il ne

se trouve rien de l'agent dont la fonction potentielle est représentée par V , on a l'équation :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad (6)$$

Si, au contraire, le point p se trouve dans un espace qui est rempli par l'agent actif ou par une partie de celui-ci, l'équation prend une autre forme. En représentant la densité de l'agent au point considéré de cet espace par k (de sorte que la quantité de l'agent qui se trouve dans un élément d'espace $d\tau$ est représentée par $k d\tau$), on aura alors l'équation :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\epsilon k. \quad (7)$$

Cette dernière équation est la plus générale, et elle embrasse la précédente; car si le point p se trouve en dehors de l'espace rempli par l'agent actif, on a $k = 0$, ce qui change l'équation (7) en (6). Il résulte de l'équation (7) qu'au moyen de la fonction potentielle on peut déterminer, non seulement les forces qu'exerce l'agent actif, mais encore la distribution elle-même de cet agent.

Comme l'expression différentielle précédente se présente très fréquemment, on a introduit, pour la représenter, la notation simple ΔV . De cette manière les deux équations précédentes s'écrivent :

$$\Delta V = 0 \quad (6_a)$$

$$\Delta V = -4\pi\epsilon k. \quad (7_a)$$

Si l'on donne au coefficient ϵ la valeur 1 que nous avons adoptée pour l'électricité, conformément à l'unité choisie, l'équation (7_a) devient :

$$\Delta V = -4\pi k. \quad (8)$$

§ 7.

État d'équilibre électrique.

Considérons maintenant, comme nous l'avons dit au commencement de cette introduction, un corps formé d'une substance conductrice, mais entouré de corps non conducteurs ; et supposons qu'on lui communique une quantité quelconque d'électricité qui doive se mettre en équilibre, soit par elle-même, soit sous l'influence de quantités étrangères d'électricité répandues sur d'autres corps. Il s'agit de savoir comment on exprimera mathématiquement, de la manière la plus simple, la condition nécessaire à cet équilibre, et où se trouvera alors l'électricité qui existera comme électricité décomposée. On remarquera à ce sujet que l'on suppose qu'un corps à l'état neutre renferme, dans chacun de ses éléments, des quantités égales d'électricité positive et d'électricité négative, tandis qu'à l'état électrique, il existe, dans l'intérieur du corps ou à sa surface, des lieux où il y a un excès d'électricité positive ou négative. C'est cet excès, quelque part qu'il se trouve, que nous nommons électricité *décomposée*, comme nous l'avons déjà fait plus haut.

Dans un corps conducteur, il peut y avoir mouvement de l'électricité ; sous ce rapport, on peut faire diverses hypothèses. On peut s'imaginer, ou bien que les deux électricités sont mobiles, ou bien encore que l'une d'entre elles, que l'on considère comme positive, est mobile et que l'autre est fixée aux atomes pondérables. En ce qui concerne l'électrostatique, il n'y a pas de différence

essentielle, soit que l'on admette l'une, soit que l'on admette l'autre hypothèse; mais pour l'électrodynamique, il en résulte une différence importante, et nous en reparlerons plus tard d'une manière spéciale.

S'il doit y avoir équilibre dans le corps conducteur, les forces exercées dans l'intérieur de celui-ci, par les différentes quantités d'électricité décomposée, doivent se détruire mutuellement en chaque point, de telle sorte que leur résultante soit nulle; car, s'il y avait en un certain point une résultante d'une valeur appréciable, l'électricité positive y existante se mouvrait dans la direction de la résultante, et l'électricité négative (à supposer qu'elle soit mobile) en sens contraire; ce qui serait contradictoire avec l'hypothèse qu'il doit y avoir équilibre. De la condition que la résultante doit être nulle, il suit que ses composantes suivant trois axes rectangulaires doivent l'être séparément. Pour tout point pris à l'intérieur du corps conducteur, on doit donc avoir les trois équations suivantes :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0;$$

et de là résulte cette condition d'équilibre, que *la fonction potentielle doit avoir à l'intérieur du corps conducteur une valeur constante.*

D'après ce que nous venons de dire, nous pourrons également écrire les trois équations suivantes :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0;$$

et si l'on tient compte de ces équations, on déduira de l'équation (8), qu'en tout point de l'intérieur du corps on doit avoir :

$$k = 0.$$

On arrive ainsi à cette conséquence importante que, dans l'état d'équilibre, il ne peut se trouver nulle part dans l'intérieur du corps, pour autant qu'il soit conducteur, de l'électricité décomposée ; mais que ce n'est qu'à sa surface, là où il est limité par des corps non conducteurs, que de l'électricité décomposée peut être accumulée.

On doit donc imaginer à la surface une couche très mince comme remplie d'électricité décomposée. Il serait difficile de déterminer exactement l'épaisseur de cette couche, sans pénétrer d'une manière plus approfondie l'essence de l'électricité et la nature des milieux conducteurs et non conducteurs à la limite desquels l'électricité est accumulée. Aussi se contente-t-on ordinairement de ce résultat, que l'épaisseur de cette couche doit être très faible ; et, dans la plus grande partie des développements, on en fait abstraction et l'on regarde simplement l'électricité comme accumulée sur une surface.

§ 8.

Expression différentielle qui détermine la distribution de l'agent actif sur une surface.

Puisque, comme nous venons de le dire, on a affaire, dans la théorie de l'électricité, à un cas où l'on admet, du moins pour les recherches mathématiques, que l'agent actif (c'est-à-dire l'électricité décomposée) ne remplit pas un espace solide, mais se trouve répandu sur une surface, nous aurons encore à établir un théorème important qui se rapporte à ce cas.

Par un point de la surface sur laquelle l'agent est répandu, imaginons une normale à cette surface, et sur cette droite un point mobile p auquel se rapporte la fonction potentielle. Soit n la distance du point p à la surface, distance qui sera comptée comme positive d'un côté de celle-ci et comme négative de l'autre côté. Si nous formons, par rapport à cette droite, le coefficient différentiel $\frac{\partial V}{\partial n}$ dont la valeur négative représente la composante normale de la force, ce coefficient aura des valeurs différentes des deux côtés de la surface, en ce sens qu'il éprouvera, au moment où le point la traverse, un changement brusque de valeur, dont la grandeur dépend de la densité qui règne en ce lieu de la surface. Désignons par h la densité superficielle en ce lieu (de sorte qu'un élément de surface $d\omega$ y renferme une quantité $hd\omega$ de l'agent); soient, en outre, $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0}$ et $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{-0}$ les deux valeurs que prend le coefficient différentiel $\frac{\partial V}{\partial n}$, lorsque le point p s'approche du côté positif et du côté négatif jusqu'à la surface même; on aura l'équation :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{-0} = -4\pi\epsilon h. \quad (9)$$

Si l'on applique cette équation à l'électricité, on devra poser, comme plus haut, $\epsilon = 1$, ce qui donne :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{-0} = -4\pi h. \quad (10)$$

Si la surface considérée est celle d'un corps conducteur, on sait que dans l'intérieur de celui-ci la fonction potentielle V est constante jusqu'à la surface même. D'après

cela, si l'on compte la normale comme positive vers l'extérieur et comme négative vers l'intérieur, on aura :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{-0} = 0,$$

et l'équation précédente deviendra, par suite :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0} = -4\pi h. \quad (11)$$

On connaît ainsi la relation qui existe entre la force normale qui agit à la surface d'un corps conducteur, et la densité électrique qui règne au même lieu.

§ 9.

Distribution de l'électricité sur une sphère et sur un ellipsoïde.

Recherchons maintenant, dans quelques cas particuliers, de quelle manière l'électricité se distribue sur la surface d'un corps conducteur.

La condition, au moyen de laquelle on devra déterminer cette distribution, est toujours que la fonction potentielle de la quantité totale d'électricité doit être constante dans tout corps conducteur, d'où il suit que la résultante de toutes les forces électriques est nulle.

Considérons d'abord le cas suivant comme étant le plus simple. Soit donné un corps conducteur de la forme d'une *sphère* ; communiquons-lui une certaine quantité d'électricité Q , qui peut être positive ou négative, et supposons qu'il n'y ait dans le voisinage aucune

quantité d'électricité décomposée qui puisse agir sur la première.

Dans ce cas, on peut conclure immédiatement de la symétrie de la sphère en tous sens, que l'électricité doit se répandre *uniformément* sur sa surface. La grandeur de celle-ci étant $4\pi a^2$, a désignant le rayon, nous obtiendrons l'expression suivante de la densité superficielle que nous avons représentée par h :

$$h = \frac{Q}{4\pi a^2}. \quad (12)$$

Un second cas un peu plus général, qui renferme le précédent comme cas particulier, et qui conduit également à un résultat fort simple, est celui où le corps conducteur a la forme d'un *ellipsoïde*. Poisson a donné, dans ce cas, pour la détermination de la densité électrique aux différents points de la surface, la règle suivante, dont il est facile de démontrer l'exactitude.

Si l'on se représente autour de l'ellipsoïde donné un second ellipsoïde semblable, concentrique et dont les axes aient même direction et ne diffèrent que très peu des premiers en grandeur, de sorte qu'entre les deux ellipsoïdes se trouve renfermée une couche très mince que l'on s'imagine comme uniformément remplie d'électricité, la quantité d'électricité qui se trouvera, dans ces circonstances, répandue sur un élément de surface, sera égale à celle qui doit y exister dans l'état d'équilibre.

Il est aisé de déduire de cette règle l'expression mathématique de la densité superficielle en un lieu quelconque de la surface. Considérons un élément de surface $d\omega$ de l'ellipsoïde donné, et nommons γ l'épaisseur de la couche en ce lieu ; $\gamma d\omega$ sera la partie infiniment mince de la couche qui se trouve au-dessus de cet

élément de surface. Désignons en outre par k la densité en volume que l'on obtient en regardant la couche comme uniformément remplie de la quantité donnée d'électricité. La quantité d'électricité qui se trouve au-dessus de l'élément $d\omega$ sera $k\gamma d\omega$. D'un autre côté, en désignant par h la densité superficielle électrique en ce lieu, la quantité d'électricité qui se trouve sur l'élément de surface $d\omega$ sera représentée par $hd\omega$. De la comparaison de ces deux expressions résulte :

$$h = k\gamma.$$

Soient maintenant a, b, c les demi-axes de l'ellipsoïde donné ; $a(1 + \delta), b(1 + \delta), c(1 + \delta)$, où δ est une quantité très petite, ceux de l'ellipsoïde concentrique. Du centre, menons un rayon vers le point considéré de la surface, et désignons par u sa longueur ; prolongeons-le jusqu'à l'ellipsoïde concentrique ; sa longueur jusqu'au point d'intersection avec cette seconde surface sera $u(1 + \delta)$. La partie du rayon comprise entre les deux surfaces a donc pour longueur $\delta \cdot u$. En multipliant cette longueur par le cosinus de l'angle que le rayon fait avec la normale à la surface au point considéré, on obtiendra l'épaisseur de la couche, qui sera donc, en désignant cet angle par φ :

$$\gamma = \delta \cdot u \cos \varphi.$$

En substituant dans l'équation précédente, on aura :

$$h = k\delta \cdot u \cos \varphi. \quad (13)$$

Commençons par déterminer le produit $k\delta$. Le volume de l'ellipsoïde donné est $\frac{4}{3}\pi abc$. De même celui de

l'ellipsoïde concentrique est $\frac{4}{3}\pi abc (1 + \delta)^3$, qu'on peut remplacer par $\frac{4}{3}\pi abc (1 + 3\delta)$, puisque δ est supposé très petit. Retranchant le premier volume du second, on obtiendra le volume de la couche comprise entre les deux surfaces :

$$4\pi abc \cdot \delta.$$

Comme la densité en volume, à l'intérieur de cette couche, a été représentée par k , on peut écrire, en nommant Q la quantité d'électricité communiquée à notre ellipsoïde :

$$Q = 4\pi abc \cdot \delta \cdot k,$$

d'où il résulte :

$$k\delta = \frac{Q}{4\pi abc}.$$

En substituant cette expression dans (13), on aura :

$$h = \frac{Q}{4\pi abc} u \cos \varphi. \quad (14)$$

Il reste encore à exprimer le produit $u \cos \varphi$. Soient x, y, z les coordonnées du point de la surface où l'on veut déterminer la densité ; les cosinus des angles que le rayon fait avec les axes coordonnés seront :

$$\frac{x}{u}, \quad \frac{y}{u}, \quad \frac{z}{u}.$$

Les cosinus des angles que la normale fait avec les axes coordonnés sont exprimés par :

$$\frac{\frac{x}{a^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}; \quad \frac{\frac{y}{b^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}; \quad \frac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}};$$

d'où résulte l'expression suivante du cosinus de l'angle φ que le rayon fait avec la normale :

$$\cos \varphi = \frac{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}{u \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}.$$

Le numérateur de cette fraction a une valeur très simple. En effet, pour un point de la surface d'un ellipsoïde de demi-axes a , b , c , on a l'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (15)$$

En substituant cette valeur dans l'équation précédente et en multipliant les deux membres par u , on aura :

$$u \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}.$$

En remplaçant cette valeur dans l'équation (14), on obtiendra l'expression cherchée de la densité superficielle h :

$$h = \frac{Q}{4\pi abc} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}. \quad (16)$$

On peut encore éliminer l'une des coordonnées au moyen de l'équation (15), en posant, par exemple :

$$\frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2};$$

ce qui transforme l'équation précédente en :

$$h = \frac{Q}{4\pi ab} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{c^2 - a^2}{a^4} x^2 + \frac{c^2 - b^2}{b^4} y^2}}. \quad (17)$$

§ 10.

Distribution de l'électricité sur un plateau elliptique.

De ce qui précède, on peut encore déduire, dans un cas particulier, un résultat présentant un intérêt spécial.

On considère souvent le cas où le corps conducteur auquel on communique de l'électricité a la forme d'un plateau mince, et, comme limite, le cas où le plateau est infiniment mince. Il s'agit de savoir comment l'électricité se distribue sur un tel plateau. Pour des plateaux de forme elliptique, on peut, au moyen de ce qui précède, déterminer immédiatement la distribution de l'électricité, en considérant un plateau de cette forme comme un ellipsoïde très aplati.

Admettons que c soit le demi-axe qui est devenu très petit ; nous écrirons l'équation (17) sous la forme :

$$h = \frac{Q}{4\pi ab} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + c^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} \right)}}. \quad (18)$$

En général, des deux quantités sous le radical

$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \text{ et } c^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} \right),$$

la seconde est très faible vis-à-vis de la première, et ce n'est que dans le voisinage du bord, où celle-ci s'approche de zéro, que leurs valeurs sont comparables.

Si l'on regarde le plateau comme *infinitement* mince, de sorte que la quantité affectée du facteur c^2 soit négligeable, on aura :

$$h = \frac{Q}{4\pi ab} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}. \quad (19)$$

Si le plateau est circulaire, on doit poser $a = b$. On peut en même temps, en représentant par r la distance du point considéré au centre, écrire : $x^2 + y^2 = r^2$, et les équations (18) et (19) deviennent par là :

$$h = \frac{Q}{4\pi a^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2} + \frac{c^2 r^2}{a^4}}}. \quad (20)$$

$$h = \frac{Q}{4\pi a^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}}. \quad (21)$$

Ces dernières équations montrent d'une manière particulièrement claire l'accroissement de la densité électrique qui a lieu du centre à la périphérie. On reconnaît qu'elle croît d'abord lentement, puis de plus en plus rapidement vers le bord. Dans un plateau infinitement mince, au bord même, c'est-à-dire pour $r = a$, la densité serait infinitement grande. Mais il ne s'ensuit

pas que l'électricité se trouvant sur le plateau soit accumulée au bord en quantité si prépondérante, que l'on puisse négliger par comparaison la quantité qui se trouve sur les parties du milieu.

Pour en juger d'une manière précise, nous diviserons au moyen d'un cercle de rayon b plus petit que a , la surface totale en deux parties, savoir : la surface du cercle intérieur de rayon b , et la surface annulaire comprise entre son périmètre et le bord du plateau ; puis nous déterminerons les quantités d'électricité qui se trouvent sur ces deux parties. Nous les désignerons par R et S , en considérant simultanément les deux faces parallèles et infiniment rapprochées du plateau, et en réunissant les quantités d'électricité qui se trouvent sur ces deux faces. Alors nous devons poser :

$$\left\{ \begin{array}{l} R = \frac{Q}{2\pi a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{r dr d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}} = Q \left(1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right) \\ S = \frac{Q}{2\pi a^2} \int_0^{2\pi} \int_b^a \frac{r dr d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}} = Q \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}. \end{array} \right. \quad (22)$$

Posant, par exemple, $b = \frac{4}{5} a$, on a :

$$R = \frac{2}{5} Q \quad \text{et} \quad S = \frac{3}{5} Q;$$

et en posant $b = \frac{12}{13} a$, il vient :

$$R = \frac{8}{13} Q \quad \text{et} \quad S = \frac{5}{13} Q.$$

Coulomb a effectué des recherches expérimentales sur l'accroissement de la densité électrique dans un plateau métallique circulaire chargé ; les résultats en ont été publiés par Biot dans son *Traité de physique*, t. II, p. 277 (traduction allemande de Fechner, t. II, p. 191). Nous communiquerons ici ces valeurs pour les comparer à celles qu'on déduit de la formule précédente pour le cas où le plateau serait infiniment mince. Il faut remarquer que dans le plateau infiniment mince, l'accroissement de densité du milieu au bord est plus rapide que dans une plaque d'épaisseur finie ; cette différence devient particulièrement considérable dans le voisinage du bord, et au bord même il n'y a plus de comparaison possible, puisque dans le plateau infiniment mince, la densité est infiniment grande au bord, tandis que dans une plaque d'épaisseur finie elle y a une valeur finie, déterminée, qui ne peut être très grande pour des épaisseurs telles que celles des plateaux ordinaires des condensateurs, et probablement aussi des plateaux que Coulomb a utilisés (bien qu'il n'y ait aucune donnée à cet égard). En ayant égard à ces circonstances, on trouvera suffisante la concordance qui existe entre les valeurs observées et les valeurs calculées. Le rayon du plateau était de 5".

Distance au bord du plateau.	Densité observée.	Densité calculée.
5"	1	1
4"	1,001	1,020
3"	1,005	1,090
2"	1,17	1,250
1"	1,52	1,667
0,5"	2,07	2,294
0	2,90	∞

§ 11.

Théorème de Green.

Avant que nous n'entreprenions de considérer la manière dont se comportent les corps électriques sous l'action des corps voisins, qui agissent ainsi par influence, il ne sera pas inutile d'exposer quelques théorèmes généraux sur la fonction potentielle ; je rappellerai brièvement ceux d'entre eux que j'ai traités dans mon ouvrage sur la fonction potentielle.

Il y a d'abord à mentionner un théorème de géométrie exposé par Green, et qui trouve des applications multiples dans la théorie du potentiel.

Soient U et V deux fonctions des coordonnées de l'espace ; nous supposerons d'abord que ces fonctions mêmes, ainsi que leurs dérivées du premier et du second ordre, ne deviennent nulle part infinies à l'intérieur d'un certain espace donné à considérer. Pour simplifier les notations, nous introduirons un signe sommatoire dont nous ferons souvent usage dans la suite. Lorsqu'il se présentera une somme de trois termes qui se rapportent aux trois directions coordonnées, mais qui sont les mêmes à cela près, nous n'écrirons que le terme qui est relatif à la direction x , et nous le ferons précéder du signe sommatoire ; ainsi, par exemple :

$$\sum \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z}.$$

D'après Green, on a les trois équations suivantes :

$$\int \sum \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} d\tau = - \int U \frac{\partial V}{\partial n} d\omega - \int U \Delta V d\tau \quad (23)$$

$$\int \sum \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} d\tau = - \int V \frac{\partial U}{\partial n} d\omega - \int V \Delta U d\tau \quad (24)$$

$$\int U \frac{\partial V}{\partial n} d\omega + \int U \Delta V d\tau = \int V \frac{\partial U}{\partial n} d\omega + \int V \Delta U d\tau. \quad (25)$$

$d\tau$ représente un élément de volume, et les intégrales relatives à τ doivent être étendues à tout l'espace donné. Ensuite, $d\omega$ est un élément de la surface limitant l'espace, et dans les coefficients différentiels $\frac{\partial U}{\partial n}$ et $\frac{\partial V}{\partial n}$, n est la normale à la surface, considérée comme positive vers l'intérieur. Les intégrales relatives à ω doivent être étendues à la surface totale limitant l'espace donné.

Ces trois équations sont l'expression du théorème de Green.

Ces équations peuvent encore être généralisées dans un certain sens. On peut notamment laisser de côté la condition que les fonctions U et V et leurs dérivées des deux premiers ordres ne sont pas infinies à l'intérieur de l'espace entier considéré ; au lieu de cela, on peut supposer que ces fonctions contiennent des termes ayant la forme de la fonction potentielle d'un agent qui se trouve dans l'espace, et qui n'y est pas nécessairement distribué d'une façon continue, mais qui peut être distribué sur des surfaces et des lignes, ou concentré en certains points. Admettons que les fonctions U et V ont les formes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} U = u + \int \frac{dq_1}{r} \\ V = u + \int \frac{dq}{r} \end{array} \right. \quad (26)$$

u et v sont des fonctions satisfaisant à la condition précitée, qu'elles-mêmes et leurs premiers et seconds coefficients différentiels restent finis dans tout l'espace considéré. dq_1 et dq sont les éléments des agents que l'on suppose être distribués arbitrairement dans cet espace, et pour lesquels les unités de mesure ont été choisies de telle sorte que l'on a pu poser $\varepsilon = 1$, comme pour l'électricité. Enfin, r est la distance d'un tel élément au point (x, y, z) . Si maintenant, par exemple, une quantité finie q_1 ou q se trouve en un point p' , la partie correspondante de l'une ou l'autre intégrale sera $\frac{q_1}{r}$ ou $\frac{q}{r}$, et cette fraction de même que ses coefficients différentiels deviennent infiniment grands lorsqu'on s'approche indéfiniment du point p' . La même chose a lieu, si une quantité finie de l'agent se trouve sur une ligne ; tandis que dans le cas où elle se trouve sur une surface, on n'obtient pas de valeurs infinies pour l'intégrale et ses coefficients différentiels du premier ordre, mais bien pour ses coefficients du second. Ce n'est que quand l'agent est distribué dans l'espace avec une densité finie, que l'intégrale et ses coefficients différentiels des deux premiers ordres restent partout finis, et dans ce cas il est indifférent que l'on comprenne ou non l'intégrale dans u ou v .

Pour ces formes plus générales des fonctions U et V (26), les équations exprimant le théorème de Green sont les suivantes :

$$\int \sum \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} d\tau = - \int U \frac{\partial V}{\partial n} d\omega - \int U \Delta v d\tau + 4\pi \int U dq \quad (27)$$

$$\int \sum \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} d\tau = - \int U \frac{\partial V}{\partial n} d\omega - \int V \Delta u d\tau + 4\pi \int V dq_1 \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & \int U \frac{\partial V}{\partial n} d\omega + \int U \Delta v d\tau - 4\pi \int U dq \\ & = \int V \frac{\partial U}{\partial n} d\omega + \int V \Delta u d\tau - 4\pi \int V dq_1. \quad (29) \end{aligned}$$

§ 12.

Détermination de l'agent renfermé sous une surface.

Pour faire une première application très simple du théorème de Green, nous donnerons à U la valeur constante 1. Il en résulte que les quotients différentiels de U sont nuls, ainsi que le premier membre de l'équation (27); cette dernière devient alors :

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} d\omega + \int \Delta v d\tau - 4\pi \int dq = 0.$$

En outre, nous supposerons que V représente la fonction potentielle d'un agent distribué d'une manière quelconque, en partie à l'intérieur, en partie à l'extérieur de la surface fermée. En donnant à V la forme générale (26),

$$V = v + \int \frac{dq}{r}$$

nous admettrons que v est la fonction potentielle de l'agent extérieur et $\int \frac{dq}{r}$ celle de l'agent intérieur. Alors on a $\Delta v = 0$ pour tout l'espace renfermé sous la surface, et l'équation ci-dessus se simplifie et devient :

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} d\omega - 4\pi \int dq = 0.$$

La seconde intégrale n'est pas autre chose que la quantité totale de l'agent renfermé sous la surface, et nous obtiendrons, en désignant par Q cette quantité :

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} d\omega = 4\pi Q \quad (30)$$

ou :

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial V}{\partial n} d\omega. \quad (30a)$$

Si la surface elle-même est chargée d'une certaine quantité finie de l'agent, $\frac{\partial V}{\partial n}$ aura des valeurs différentes du côté intérieur et du côté extérieur de la surface, et, suivant que l'on adoptera l'une ou l'autre de ces valeurs, on obtiendra la quantité de l'agent, non compris ou y compris celui qui se trouve sur la surface.

§ 13.

Le principe de Green-Dirichlet et la fonction de Green.

Les autres applications du théorème de Green sont surtout fécondes, lorsqu'on le relie avec un certain autre théorème. Green a d'abord énoncé celui-ci sous une forme propre au but proposé, mais il ne l'a pas démontré d'une façon strictement mathématique ; il l'a seulement ramené à des bases, qu'au point de vue physique on considère généralement comme certaines. Dirichlet lui a donné plus tard une forme plus générale et l'a démontré mathématiquement d'une façon plus rigoureuse. Sous cette forme, on a l'habitude de le désigner sous le nom de principe de Green-Dirichlet, et il peut s'énoncer : *Pour un espace limité quelconque, il existe toujours une fonction u de x, y, z , et une seule, qui est continue, de même que ses coefficients différentiels du premier ordre, qui satisfait, dans cette espace entier à l'équation $\Delta u = 0$, et qui enfin a une valeur déterminée d'avance en chacun des points de la surface.*

Je ne reproduirai pas ici la démonstration de ce théorème ; je renvoie pour cela à mon ouvrage déjà cité sur la fonction potentielle. Il suffira de communiquer ici les bases établies par Green pour le théorème plus restreint.

Green ne pose pas la condition générale que la fonction u doit avoir en chaque point de la surface une valeur

prescrite quelconque, mais il donne d'une manière bien déterminée la valeur qu'elle doit y avoir. Choisissons notamment un point quelconque p' à l'intérieur de l'espace donné, et soit r la distance de ce point à un point de la surface ; u devra avoir en chaque point de la surface, la valeur $-\frac{1}{r}$, de sorte que la somme $u + \frac{1}{r}$ est nulle.

Green démontre comme suit l'existence bien déterminée de cette fonction u . Considérons la surface qui limite l'espace donné comme une surface conductrice de l'électricité, qui se trouve en communication avec le sol par un fil infiniment mince. Supposons une unité d'électricité positive concentrée en p' . Celle-ci agira par influence, repoussera de l'électricité positive de la surface dans la terre, et déterminera une distribution électrique négative telle, que la fonction potentielle totale aura en tous les éléments de la surface la valeur zéro qui existe dans le sol. La fonction potentielle se compose de deux parties, d'abord de la fonction potentielle $\frac{1}{r}$ due à l'unité d'électricité concentrée en p' , et ensuite de la fonction potentielle due à l'électricité accumulée par influence sur la surface. Si nous nommons u cette dernière fonction, nous aurons en tous les points de la surface l'équation :

$$u + \frac{1}{r} = 0;$$

cette fonction potentielle u satisfait de même, dans l'espace donné, à la condition posée relativement à la continuité ainsi qu'à l'équation $\Delta u = 0$. Si l'on admet comme évident en soi que, quand une unité d'électricité est concentrée en un point quelconque p' , il existe une

distribution électrique, et une seule, satisfaisant à la condition nécessaire pour l'équilibre, c'est-à-dire à la condition que la fonction potentielle totale est partout nulle sur la surface, on aura ainsi démontré l'existence unique de la fonction u , et on lui aura donné en même temps une signification physique bien déterminée, en tant qu'elle représente la fonction potentielle de l'électricité accumulée sur la surface dans les circonstances indiquées précédemment.

Green fait des considérations analogues pour le cas où le point p' est, non plus dans l'espace renfermé sous la surface, mais dans l'espace entourant celle-ci ; il imagine en p' une unité d'électricité positive, qui électrise négativement la surface considérée comme conductrice et reliée avec la terre, et il prend pour fonction u la fonction potentielle de l'électricité négative qui se trouve sur la surface. Cette fonction remplit de nouveau la condition d'être égale à $-\frac{1}{r}$ en tous les points de la surface, et elle a en outre la propriété que u et $\frac{\partial u}{\partial R}$ sont de petites quantités de l'ordre $\frac{1}{R}$ et $\frac{1}{R^2}$ à une distance infinie R de l'origine des coordonnées ; ceci est essentiel dans les cas où, pour avoir un espace limité dans tous les sens, on adjoint, à la surface donnée, une sphère infiniment grande qui sert de seconde surface limite.

On a l'habitude de désigner sous le nom de *fonction de Green* la fonction u ainsi déterminée pour l'espace intérieur ou extérieur.

§ 14.

**Détermination de la fonction potentielle d'un agent
circonscrit par une surface,
à l'aide des valeurs de cette fonction à la surface.**

Supposons donnée une surface fermée qui sépare un espace, renfermant un agent, d'un espace vide, soit que l'espace extérieur contienne l'agent et que l'intérieur soit vide, soit qu'inversement l'espace intérieur renferme l'agent et que l'extérieur soit vide. Dans les deux cas, il peut se trouver également une quantité finie de l'agent sur la surface même. Il s'agit de rechercher si l'on peut déterminer la fonction potentielle dans l'espace vide entier, lorsqu'on connaît cette fonction à la surface limite.

Considérons d'abord l'espace intérieur comme vide. En y appliquant l'équation de Green (29), nous supposons que V est la fonction potentielle à déterminer. Puisque cette fonction et ses quotients différentiels restent finis dans tout l'espace intérieur qui ne renferme pas d'agent, on peut laisser de côté l'intégrale en dq de l'expression générale de V , savoir : $v + \int \frac{dq}{r}$ (26), et considérer v et V comme équivalents. En ce qui concerne U , après avoir choisi arbitrairement dans l'espace un point p' de coordonnées x', y', z' , nous poserons

$$U = u + \frac{1}{r},$$

en désignant par r la distance de p' au point (x, y, z)

et par u la fonction de Green. Il résulte de la comparaison de cette expression avec l'expression générale (26) $u + \int \frac{dq_1}{r}$, que dans cette dernière on doit considérer dq_1 comme l'élément d'une unité de l'agent concentrée en p' ; d'où il suit que l'intégrale $\int V dq_1$ qui se présente dans l'équation de Green, n'est pas autre chose, dans ce cas, que la valeur de V particulière au point p' , que nous désignerons par V' . L'équation (29) de Green prend ainsi la forme suivante :

$$\int \left(u + \frac{1}{r} \right) \frac{\partial V}{\partial n} d\omega + \int \left(u + \frac{1}{r} \right) \Delta V d\tau$$

$$= \int V \frac{\partial \left(u + \frac{1}{r} \right)}{\partial n} d\omega + \int V \Delta u d\tau - 4\pi V'.$$

Puisque maintenant l'agent, dont la fonction potentielle est V , se trouve dans l'espace extérieur ou sur la surface, et que l'agent, dont la fonction potentielle est u , se trouve sur la surface, on a pour tout l'espace intérieur :

$$\Delta V = 0 \quad \text{et} \quad \Delta u = 0.$$

En outre, la fonction de Green satisfait, à la surface, à la condition :

$$u + \frac{1}{r} = 0,$$

de sorte que l'équation précédente se simplifie comme suit :

$$\int_V \frac{\partial \left(u + \frac{1}{r} \right)}{\partial n} d\omega - 4\pi V' = 0,$$

d'où l'on déduit :

$$V' = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\partial \left(u + \frac{1}{r} \right)}{\partial n} d\omega. \quad (31)$$

Si l'on considère que u , bien que n'étant pas connu, est cependant une fonction parfaitement déterminée, il résultera de l'équation précédente que, si la fonction potentielle V est connue à la surface, elle est déterminée en chaque point p' à l'intérieur de l'espace renfermé sous la surface, sans qu'il soit nécessaire de donner la nature de la distribution de l'agent. Pour le calcul réel de V' , il faut encore déterminer la forme particulière de u dans le cas spécial considéré.

En second lieu, considérons l'espace extérieur comme étant l'espace vide pour lequel nous voulons calculer la fonction potentielle de l'agent renfermé sous la surface. Afin de limiter cet espace dans tous les sens, imaginons une sphère d'un rayon R infiniment grand tracée autour de l'origine des coordonnées, de sorte que l'espace à considérer est compris entre la surface fermée donnée et cette surface sphérique infiniment grande.

Choisissons de nouveau dans cet espace un point quelconque p' ; nous pourrons alors déduire comme précédemment l'équation (31); mais seulement, dans ce cas, l'intégrale relative à la surface doit être étendue non seulement à la surface donnée, mais encore, au moins provisoirement, à la surface sphérique.

En ce qui concerne la partie de l'intégrale relative à

la surface donnée, nous avons encore quelques remarques à faire. Dans le coefficient différentiel

$$\frac{\partial \left(u + \frac{1}{r} \right)}{\partial n}$$

qui se trouve sous le signe d'intégration, on doit, conformément aux conventions ultérieures, compter comme positive la normale du côté de l'espace considéré. Ainsi, tandis que, dans le cas précédent, elle devait être prise positive vers l'intérieur, on doit, dans le cas actuel, la compter comme positive vers l'extérieur. Puisqu'en outre ce coefficient différentiel a des valeurs différentes des deux côtés de la surface, on doit toujours avoir soin d'employer la valeur qu'il a du côté de l'espace considéré. Ainsi, tandis que, dans le cas précédent, on devait se servir de celle qu'il prend du côté intérieur, on devra, dans le cas actuel, employer celle qui convient du côté extérieur.

Quant à la partie de l'intégrale relative à la surface infiniment grande de la sphère, il est facile de voir qu'elle disparaît. En effet, on doit négliger toutes les distances finies vis-à-vis du rayon infiniment grand de la sphère, et l'on peut par suite, dans toute l'étendue de celle-ci, employer pour $\frac{1}{r}$ et V , les valeurs qu'on obtiendrait si le point p' se trouvait au centre de la sphère, ainsi que tout l'agent compris dans la surface et dont nous désignerons la quantité par Q ; c'est-à-dire :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} \text{ et } V = \frac{Q}{R} ;$$

pour les coefficients différentiels en n , on peut poser :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial R} \text{ et } \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = \frac{1}{R^2},$$

puisque la normale vers l'intérieur a la direction opposée au rayon. Enfin, on peut remplacer l'élément de surface sphérique $d\omega$ par le produit $R^2 d\sigma$, où $d\sigma$ est un élément d'angle solide. On obtient ainsi, pour la partie de l'intégrale relative à la sphère, l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial \left(u + \frac{1}{r} \right)}{\partial n} d\omega &= \int \frac{Q}{R} \left(-\frac{\partial u}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \right) R^2 d\sigma \\ &= Q \int \left(-R \frac{\partial u}{\partial R} + \frac{1}{R} \right) d\sigma. \end{aligned}$$

Mais puisque, d'après ce qui a été dit au § 13 relativement à u , $\frac{\partial u}{\partial R}$ est une quantité infiniment petite de l'ordre $\frac{1}{R^2}$, le produit $R \frac{\partial u}{\partial R}$ est encore un infiniment petit de l'ordre $\frac{1}{R}$, et par suite, la partie entière de l'intégrale relative à la surface sphérique est infiniment petite et peut être négligée. Ainsi, dans l'équation (31), on ne doit étendre l'intégrale qu'à la surface donnée, soit qu'on applique cette équation à l'espace intérieur ou à l'espace extérieur.

En groupant les résultats précédents, nous pouvons énoncer le théorème suivant, applicable aux deux cas : *Les valeurs que la fonction potentielle a dans tout l'espace vide, soit intérieur, soit extérieur, sont complètement déterminées par les valeurs que prend cette fonction dans la surface donnée.*

Si l'agent ne se trouve que sur la surface même, le théorème aura lieu en même temps pour l'espace intérieur et pour l'espace extérieur, et nous pourrons l'énoncer comme suit : *Si l'on donne, pour un agent distribué sur une surface fermée, la fonction potentielle dans la surface même, cette fonction est par cela seul déterminée dans tout l'espace intérieur et extérieur.*

Enfin, il faut encore remarquer que les théorèmes, qui sont ici exprimés pour une surface fermée unique, peuvent visiblement s'étendre d'une manière très simple à plusieurs surfaces fermées.

§ 15.

Distribution superficielle qui correspond à une fonction potentielle donnée dans la surface.

Du théorème déduit dans le paragraphe précédent résulte immédiatement le suivant : *Sur une surface fermée, il y a toujours une distribution de l'agent, et une seule, dont la fonction potentielle a, en chaque point de la surface, une valeur donnée d'avance.*

Si, notamment, pour une distribution superficielle, la valeur de la fonction potentielle est donnée en tous les points de la surface, cette fonction est, d'après le paragraphe précédent, également déterminée dans l'espace entier intérieur et extérieur ; les coefficients différentiels de cette fonction sont donc aussi déterminés. Élevons maintenant en un point quelconque de la surface une normale, que nous considérerons comme positive dans un sens et comme négative dans l'autre ;

d'après le § 8, nous aurons, en vertu de l'équation (9) et en faisant $\varepsilon = 1$, l'équation suivante :

$$h = - \frac{1}{4\pi} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_{-0} \right],$$

dans laquelle h représente, pour le point considéré, la densité superficielle dans la distribution de l'agent dont la fonction potentielle est V . Par suite, la densité est complètement déterminée en chaque point de la surface, et le théorème ci-dessus est démontré.

On peut encore tirer de là une autre conclusion immédiate. Si une surface fermée sépare un espace rempli de l'agent d'un autre espace vide, soit que l'espace extérieur renferme l'agent et que l'intérieur soit vide, soit que ce dernier contienne l'agent et que l'extérieur soit vide, la fonction potentielle est déterminée dans l'espace vide tout entier par les valeurs qu'elle a dans la surface limite, ainsi que nous l'avons vu dans le paragraphe précédent. Or, puisqu'il y a constamment une distribution superficielle, et une seule, dont la fonction potentielle a, sur la surface même, des valeurs données d'avance, il y a aussi constamment une distribution superficielle, et une seule, dont la fonction potentielle a, à la surface, des valeurs correspondantes à celles de la fonction potentielle de l'agent donné, et coïncide aussi par suite avec cette dernière fonction dans l'espace vide entier.

Il en résulte qu'on peut énoncer le théorème suivant, souvent applicable comme simplification des précédents : *Si un agent est distribué d'une manière quelconque dans un espace séparé par une surface fermée de l'espace restant, cet agent pouvant être en partie situé sur la surface, il y a constamment une distribution*

superficielle, et une seule, qui a dans tout l'espace restant la même fonction potentielle que l'agent donné.

§ 16.

**Détermination, à l'aide de la fonction de Green,
de la fonction potentielle
et de la densité superficielle dans des conducteurs électriques.**

Aux conclusions précédentes s'en rattachent encore quelques autres, qui se rapportent spécialement à l'électricité.

Soit donné un corps conducteur A chargé d'électricité ; déterminons la fonction potentielle dans l'espace extérieur. Nous emploierons dans ce but l'équation générale (31) :

$$V' = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\partial \left(u + \frac{1}{r} \right)}{\partial n} d\omega.$$

Mais dans l'intérieur, ainsi que sur la surface entière d'un corps conducteur, la fonction potentielle est constante, et sa valeur peut sortir du signe d'intégration. Nous obtenons donc, en désignant par V_a cette valeur constante, que nous appellerons le *niveau potentiel du corps A* :

$$V' = \frac{V_a}{4\pi} \int \frac{\partial \left(u + \frac{1}{r} \right)}{\partial n} d\omega. \quad (32)$$

D'où il résulte que, pour chaque niveau potentiel du corps, la fonction potentielle dans tout l'espace extérieur peut être déterminée à l'aide de la fonction u .

Si la fonction potentielle est déterminée dans tout l'espace extérieur, il en est de même de la valeur de $\frac{\partial V}{\partial n}$ dans le voisinage de la surface, et, à l'aide de cette dernière, on peut exprimer, d'après l'équation (11), la densité superficielle, de sorte que la manière dont l'électricité communiquée au corps se répand sur la surface peut être déterminée au moyen de la fonction u .

Si, au lieu d'un corps A, on en donne plusieurs, A, B, C, etc., on obtient de la même manière :

$$V' = \frac{V_a}{4\pi} \int \frac{\partial \left(u + \frac{1}{r} \right)}{\partial n} d\omega_a + \frac{V_b}{4\pi} \int \frac{\partial \left(u + \frac{1}{r} \right)}{\partial n} d\omega_b + \frac{V_c}{4\pi} \int \frac{\partial \left(u + \frac{1}{r} \right)}{\partial n} d\omega_c + \text{etc.}, \quad (33)$$

équation dans laquelle, $d\omega_a$, $d\omega_b$, $d\omega_c$, etc., sont des éléments de la surface des corps A, B, C, etc., les intégrales s'étendant aux surfaces des divers corps. La fonction u doit naturellement être déterminée dans ce cas en considérant en même temps tous les corps. On se représentera, pour cela, tous ceux-ci comme étant en communication avec la terre par des fils infiniment minces, et l'on supposera au point p' une unité d'électricité positive, qui occasionnera, par influence, sur tous les corps, une charge négative ; la fonction potentielle de toute cette électricité négative est alors la fonction u .

§ 17.

Action d'une enveloppe conductrice et d'un écran conducteur.

Soit donné un corps en forme d'enveloppe, limité par une surface intérieure et une surface extérieure, et formé d'une substance conductrice de l'électricité. Nous pouvons alors distinguer trois espaces : l'espace intérieur creux, l'espace extérieur entourant le corps, et l'espace occupé par celui-ci même.

Supposons que l'espace creux intérieur renferme des corps quelconques chargés d'électricité ; il s'agit de rechercher l'état électrique qu'ils détermineront dans l'enveloppe, et l'action qu'ils exercent extérieurement.

Considérons d'abord la surface intérieure de l'enveloppe. Imaginons que l'on ait formé le coefficient différentiel $\frac{\partial V}{\partial n}$ dans le voisinage immédiat de la surface, mais toujours dans l'espace creux, en comptant la normale vers cet espace comme positive. A ce coefficient différentiel s'applique l'équation (30) du § 12 :

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} d\omega = 4\pi Q,$$

dans laquelle l'intégrale se rapporte à la surface limitant le creux, c'est-à-dire, à la surface interne de l'enveloppe ; Q est la quantité totale d'électricité renfermée sous la surface, c'est-à-dire, la quantité d'électricité dont sont chargés les corps électriques qui se trouvent dans

l'espace creux. En outre, le coefficient différentiel $\frac{\partial V}{\partial n}$, que l'on considère ici, est celui qui est désigné au § 8 par $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0}$, et auquel s'applique l'équation (11) donnée en cet endroit :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0} = -4\pi h,$$

où h est la densité superficielle de l'électricité. En substituant la valeur du second membre dans l'équation précédente, on obtient :

$$\int h d\omega = -Q, \quad (34)$$

c'est-à-dire que, sur la surface intérieure de l'enveloppe, il se trouve une quantité d'électricité qui est égale et contraire à celle qui se trouve sur les corps électriques enveloppés.

Il est indifférent, dans ce résultat, que l'enveloppe soit en communication avec le sol et soit, par suite, maintenue au niveau potentiel zéro, ou qu'elle soit isolée et mise à un autre niveau potentiel quelconque. Ceci aura seulement de l'influence sur la quantité d'électricité qui réside sur la surface extérieure.

Considérons maintenant la fonction potentielle dans l'espace extérieur entourant l'enveloppe. Pour un point quelconque p' de cet espace, si nous désignons par V_a le niveau potentiel de l'enveloppe, on a l'équation (32) du paragraphe précédent :

$$V' = \frac{V_a}{4\pi} \int \frac{\partial \left(u + \frac{1}{r}\right)}{\partial n} d\omega.$$

Il résulte de là que la fonction potentielle extérieure est complètement déterminée, dès que le niveau potentiel de l'enveloppe est donné, sans qu'il soit besoin de rien connaître sur la manière dont les corps qui sont dans l'espace creux sont conformés, arrangés, et chargés d'électricité.

Si l'enveloppe est en communication conductrice avec la terre, $V_a = 0$, et alors, pour tout point extérieur p' , on a $V' = 0$. D'où il résulte que les corps électriques qui se trouvent dans l'espace creux, n'exercent absolument aucune action à l'extérieur. Leur action est complètement annihilée par l'électricité contraire qui est accumulée par influence sur la surface intérieure de l'enveloppe.

Supposons maintenant, qu'au lieu d'une enveloppe entourant complètement les corps électrisés, on ait un plateau relativement grand, formé d'une matière conductrice et placé devant ces corps ; déterminons la fonction potentielle au delà du plateau. Il n'est pas nécessaire d'aborder l'examen spécial de ce cas pour reconnaître aussitôt, sans plus de détails, que le plateau, s'il est suffisamment grand, doit exercer une action analogue à celle de l'enveloppe, mais non aussi complète; et que, par suite, la fonction potentielle au delà du plateau ne peut guère dépendre que du niveau potentiel de ce dernier. Ainsi, s'il est en communication conductrice avec la terre, la fonction potentielle aura de ce côté sensiblement la valeur zéro, l'électricité contraire accumulée par influence sur le plateau compensant presque exactement l'action des corps électriques. On a l'habitude de désigner un plateau agissant de la sorte sous le nom d'écran électrique.

§ 18.

Théorème général relatif aux actions d'influence.

Pour terminer ces considérations générales, j'établirai encore un théorème que j'ai communiqué récemment dans les Annales de Wiedemann¹ ; ce théorème se rapporte à l'influence mutuelle de plusieurs corps conducteurs et renferme, comme cas particuliers, plusieurs théorèmes de réciprocité exposés par différents auteurs.

Soit donné un nombre quelconque de corps conducteurs $C_1, C_2, C_3, \text{etc.}$, qui agissent par influence les uns sur les autres. On les charge de deux manières différentes. Dans la première charge, soient

$$Q_1, Q_2, Q_3 \text{ etc.},$$

les quantités d'électricité se trouvant sur les divers corps, et :

$$V_1, V_2, V_3 \text{ etc.},$$

les niveaux potentiels résultants ; dans la seconde charge, soient

$$Q'_1, Q'_2, Q'_3 \text{ etc.}$$

$$V'_1, V'_2, V'_3 \text{ etc.}$$

les quantités d'électricité et les niveaux potentiels. On a alors l'équation suivante :

$$V_1 Q'_1 + V_2 Q'_2 + V_3 Q'_3 + \text{etc.} = V'_1 Q_1 + V'_2 Q_2 + V'_3 Q_3 + \text{etc.} \quad (35)$$

1. Tome I, p. 493.

ou plus simplement :

$$\Sigma VQ' = \Sigma V'Q. \quad (35_a)$$

Pour démontrer cette équation, imaginons que l'on trace autour d'un point situé dans le voisinage des corps une sphère infiniment grande, et appliquons la troisième équation de Green à l'espace infini compris entre les corps et la surface de la sphère, en prenant pour les deux fonctions qui interviennent dans cette équation les fonctions potentielles dans la première et la seconde charge, fonctions que nous désignerons par V et V' . Puisque ces deux fonctions potentielles et leurs dérivées du premier et du deuxième ordre sont partout finies dans l'espace considéré, nous pouvons écrire l'équation de Green sous la forme (25), savoir :

$$\int V \frac{\partial V'}{\partial n} d\omega + \int V \Delta V' d\tau = \int V' \frac{\partial V}{\partial n} d\omega + \int V' \Delta V d\tau.$$

Puisqu'en outre il n'y a pas d'électricité présente dans l'espace considéré, on a partout, dans cet espace, les équations :

$$\Delta V = 0 \quad \text{et} \quad \Delta V' = 0;$$

par là, l'équation précédente se réduit à :

$$\int V \frac{\partial V'}{\partial n} d\omega = \int V' \frac{\partial V}{\partial n} d\omega. \quad (36)$$

Dans cette équation, les intégrales doivent être étendues à la surface de tous les corps donnés et à la surface infinie de la sphère. Les parties des intégrales se rapportant à cette dernière surface sont infiniment petites,

en vertu des mêmes raisons que celles qui ont été développées pour un cas semblable au § 14; elles peuvent donc être négligées, de sorte qu'on n'a besoin d'étendre les intégrations qu'aux surfaces des corps donnés.

A la surface de chaque corps, la fonction potentielle est constante, et la valeur peut en être extraite du signe d'intégration, pour chaque partie de l'intégrale qui s'y rapporte. On peut, d'après cela, écrire l'équation précédente comme suit :

$$\begin{aligned} V_1 \int \frac{\partial V'}{\partial n} d\omega_1 + V_2 \int \frac{\partial V'}{\partial n} d\omega_2 + V_3 \int \frac{\partial V'}{\partial n} d\omega_3 + \text{etc.} \\ = V'_1 \int \frac{\partial V}{\partial n} d\omega_1 + V'_2 \int \frac{\partial V}{\partial n} d\omega_2 + V'_3 \int \frac{\partial V}{\partial n} d\omega_3 + \text{etc.} \end{aligned}$$

où $d\omega_1$, $d\omega_2$, $d\omega_3$, etc., sont des éléments superficiels des corps C_1 , C_2 , C_3 , etc., et où les différentes intégrales s'étendent aux surfaces des divers corps.

En vertu de l'équation (11), on a, comme au paragraphe précédent, à poser pour toutes les surfaces :

$$\frac{\partial V}{\partial n} = -4\pi h \quad \text{et} \quad \frac{\partial V'}{\partial n} = -4\pi h',$$

où h et h' représentent les densités superficielles dans les deux charges. Il vient ainsi :

$$\begin{aligned} V_1 \int h' d\omega_1 + V_2 \int h' d\omega_2 + V_3 \int h' d\omega_3 + \text{etc.} \\ = V'_1 \int h d\omega_1 + V'_2 \int h d\omega_2 + V'_3 \int h d\omega_3 + \text{etc.} \end{aligned}$$

Mais les intégrales qui se présentent encore ici ne sont pas autre chose que les quantités d'électricité qui

se trouvent sur les différents corps, et nous obtenons ainsi l'équation à démontrer :

$$V_1 Q'_1 + V_2 Q'_2 + V_3 Q'_3 + \text{etc.} = V'_1 Q_1 + V'_2 Q_2 + V'_3 Q_3 + \text{etc.}$$

Cette équation se simplifie beaucoup dans certaines circonstances qui se présentent souvent. Si nous considérons les termes qui se rapportent à l'un des corps donnés C_1 , savoir les deux produits :

$$V_1 Q'_1 \quad \text{et} \quad V'_1 Q_1,$$

ces termes deviennent nuls dans deux cas, de sorte qu'ils peuvent alors être laissés en dehors de l'équation. Si le corps est en communication conductrice avec le sol, son niveau potentiel reste nul, quelle que soit la charge du système ; nous devons poser, dans ce cas :

$$V_1 = V'_1 = 0,$$

et les produits précédents disparaissent. Si ensuite le corps est isolé et non électrisé primitivement, et s'il ne reçoit pas d'électricité de l'extérieur lors de la charge, mais s'il éprouve seulement par influence une distribution inégale de sa propre électricité, sa surface sera électrisée en partie positivement, en partie négativement, de telle sorte que la quantité totale d'électricité qui se trouve à la surface reste nulle. Nous avons alors à poser :

$$Q_1 = Q'_1 = 0,$$

et les deux produits précédents disparaissent de nouveau. En vertu de ce qui précède, on peut poser la règle suivante : dans la formation de l'équation (35), on peut laisser entièrement de côté les corps qui, dans les deux

charges, sont en communication avec la terre ou qui, étant isolés et non électrisés d'abord, ne reçoivent pas d'électricité dans les charges.

Supposons, comme cas particulier, que tous les corps, sauf C_1 et C_2 , satisfont à l'une des deux conditions indiquées. Alors l'équation se réduit à :

$$V_1 Q'_1 + V_2 Q'_2 = V'_1 Q_1 + V'_2 Q_2. \quad (37)$$

Si maintenant nous simplifions encore davantage cette équation, en faisant des hypothèses particulières sur la manière dont se comportent les corps C_1 et C_2 , nous parviendrons aux théorèmes de réciprocité mentionnés plus haut.

Imaginons d'abord que, dans la première charge, C_1 est chargé jusqu'au niveau potentiel K , tandis que C_2 est en communication avec le sol et reçoit par influence la quantité d'électricité Q_2 ; dans la seconde charge, C_2 atteint le niveau potentiel K , tandis que C_1 , en communication avec le sol, reçoit par influence la quantité d'électricité Q'_1 . Alors nous avons à poser :

$$V_2 = V'_1 = 0 ; \quad V_1 = V'_2 = K ;$$

l'équation (37) devient par là :

$$KQ'_1 = KQ_2$$

ou :

$$Q'_1 = Q_2. \quad (38)$$

Ainsi, la quantité d'électricité qui est accumulée par influence sur C_2 , lorsque C_1 est chargé jusqu'à un certain niveau potentiel, et celle qui est accumulée par influence sur C_1 , lorsqu'on charge C_2 jusqu'au même niveau potentiel, sont égales entre elles.

Supposons ensuite que les deux corps sont isolés et non électrisés primitivement ; admettons que, dans la première charge, C_1 reçoit la quantité d'électricité E , sous l'influence de laquelle C_2 prend le niveau potentiel V_2 , et que, dans la seconde charge, c'est C_2 qui reçoit la quantité d'électricité E déterminant par influence le niveau potentiel V'_1 dans C_1 . Nous aurons à poser dans ce cas :

$$Q_2 = Q'_1 = 0 ; \quad Q_1 = Q'_2 = E ;$$

l'équation (37) se transforme en :

$$V_2 E = V'_1 E,$$

ou :

$$V_2 = V'_1.$$

Ainsi le niveau potentiel que prend par influence le corps C_2 , lorsqu'on charge C_1 d'une certaine quantité d'électricité, et celui que prend par influence C_1 , lorsqu'on charge C_2 de la même quantité d'électricité, sont égaux entre eux.

Plus particulièrement encore, imaginons que les deux corps se réduisent à des points, et faisons en outre $E = 1$; admettons enfin qu'il y ait encore, outre C_1 et C_2 , d'autres corps conducteurs en communication conductrice avec le sol ; nous obtiendrons alors, comme cas particulier pour la fonction de Green, une équation analogue aux précédentes. Désignons notamment par u et u' la fonction de Green pour les deux cas où l'unité d'électricité se trouve dans le premier point et dans le second ; soient en outre r et r' les distances d'un point quelconque x, y, z au premier et au second point ; nous avons à poser :

$$V = u + \frac{1}{r}; \quad V' = u' + \frac{1}{r'};$$

l'équation ci-dessus devient par là :

$$u_2 + \frac{1}{r_2} = u'_1 + \frac{1}{r'_1}.$$

Mais maintenant r_2 et r'_1 sont égaux entre eux, puisque r_2 est la distance du second point au premier et r'_1 la distance du premier au second, de sorte, que l'équation se réduit à :

$$u_2 = u'_1, \quad (40)$$

c'est-à-dire, que si, pour deux points donnés, on suppose une première fois l'unité d'électricité au premier point et que l'on considère la fonction de Green au second, et si, la seconde fois, on suppose l'unité d'électricité au second point et que l'on considère la fonction de Green au premier, on obtient des valeurs égales de cette fonction.

Outre les conclusions que nous venons de tirer, comme exemples, de l'équation (35), et qui se rapportent à deux cas particuliers très simples, il est clair qu'on peut tirer de la même équation beaucoup d'autres conclusions analogues.

CHAPITRE II.

ÉQUATIONS APPLICABLES AUX BOUTEILLES DE LEYDE.

§ 1.

Considération de deux points très voisins situés en face l'un de l'autre sur les surfaces de corps conducteurs.

Après les considérations générales qui précèdent, nous examinerons d'une manière particulière un groupe d'appareils très importants dans la théorie de l'électricité, notamment le condensateur, le carreau de Franklin et la bouteille de Leyde. Nous considérerons d'abord la couche intermédiaire isolante de ces appareils comme étant simplement un isolateur parfait, qui n'éprouve aucune modification intérieure pendant la charge, et nous réserverons pour le chapitre suivant l'examen des modifications qui se présentent dans l'intérieur des isolateurs, et de l'influence qu'elles exercent extérieurement.

Au lieu d'un des appareils ci-dessus, soient d'abord donnés deux corps conducteurs quelconques C_1 et C_2 , dont les surfaces sont situées très près l'une de l'autre,

et supposées parallèles, en un certain endroit, de sorte que la normale à l'une d'elles est aussi normale à l'autre. Désignons par c la longueur de la normale commune aux deux surfaces comprises entre ces dernières, c'est-à-dire, l'écartement des surfaces, que nous supposerons très petit.

La fonction potentielle aura la valeur V_1 dans le corps C_1 , et la valeur V_2 dans le corps C_2 , tandis qu'elle est variable entre les deux corps, où nous la désignerons simplement par V . Pour l'exprimer en un point quelconque, nous choisirons le point donné à la surface du corps C_1 comme origine d'un système d'axes rectangulaires, dont l'axe des z est la normale élevée en ce point (comptée comme positive vers l'extérieur) et dont les axes des x et des y sont deux droites rectangulaires quelconques dans le plan tangent. Le point choisi comme origine appartenant encore au corps C_1 , la fonction potentielle aura la valeur V_1 en ce point. Si nous nous en écartons dans la direction de l'axe des z , la fonction potentielle varie, et nous pouvons, en vertu du théorème de Taylor, écrire, pour un point distant de z du corps C_1 :

$$V = V_1 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_1 z + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)_1 \frac{z^2}{1.2} + \left(\frac{\partial^3 V}{\partial z^3}\right)_1 \frac{z^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

où l'indice 1 qui affecte les coefficients différentiels indique qu'il s'agit des valeurs de ces coefficients dans le voisinage immédiat du corps C_1 . Si nous appliquons cette équation au point où l'axe des z rencontre l'autre corps C_2 , et pour lequel $z = c$, la fonction potentielle aura la valeur V_2 ; d'où il suit que l'on doit poser :

$$V_2 = V_1 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_1 c + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)_1 \frac{c^2}{1.2} + \left(\frac{\partial^3 V}{\partial z^3}\right)_1 \frac{c^3}{1.2.3} + \text{etc.} \quad (1)$$

On peut réduire à un seul les deux premiers coefficients différentiels du second membre, en appliquant l'équation :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \quad (2)$$

qui est vraie pour tout l'espace compris entre les deux corps.

Imaginons que nous avançons de l'origine des coordonnées, qui est située à la surface du corps C_1 , dans le plan des xz , vers un autre point infiniment voisin situé à l'extérieur du corps ou à sa surface, et dont les coordonnées sont dx et dz . La variation infiniment petite qui en résultera pour la fonction potentielle V sera représentée par :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial z} dz + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot \frac{dx^2}{2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} dx dz + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \cdot \frac{dz^2}{2} + \text{etc.},$$

où l'indice 1 des coefficients différentiels a été laissé de côté pour plus de simplicité. Pour particulariser davantage, admettons que cet autre point soit, comme l'origine des coordonnées, sur la surface du corps C_1 ; la fonction potentielle aura alors également la valeur V_1 , et la différentielle dV du premier membre sera nulle. En même temps on peut, dans ce cas, déduire de la forme de la courbe suivant laquelle le plan des xz coupe la surface du corps, une relation entre les différentielles dx et dz . Comme l'axe des x est la tangente à la courbe au point considéré, nous obtiendrons, en désignant par R_1 le rayon de courbure de celle-ci en ce point, l'équation suivante :

$$dz = \mp \frac{1}{2R_1} dx^2 + \text{etc.},$$

dans laquelle on devra prendre le signe supérieur ou le signe inférieur suivant que la courbe est convexe ou concave du côté des z positifs, c'est-à-dire du côté extérieur du corps. En substituant cette valeur de dz dans l'équation qui précède, et posant en même temps le premier membre égal à zéro, nous aurons :

$$0 = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \mp \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial V}{\partial z} \right) dx^2 + \text{etc.}$$

Comme cette équation doit être vraie pour toutes les valeurs dx , il en résulte que les coefficients des différentes puissances de dx doivent être séparément nuls, ce qui donne :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \mp \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Nous mettrons la seconde de ces équations sous la forme :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \pm \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (3)$$

On obtient de même pour le plan des yz , si la courbe suivant laquelle ce plan coupe la surface a le rayon de courbure R'_1 :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \pm \frac{1}{R'_1} \cdot \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (4)$$

En substituant ces valeurs de $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ dans l'équation (2), il vient :

$$\left(\pm \frac{1}{R_1} \pm \frac{1}{R'_1} \right) \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

ou :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \left(\mp \frac{1}{R_1} \mp \frac{1}{R'_1} \right) \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (5)$$

En mettant cette valeur de $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$, qui se rapporte à l'origine des coordonnées situées dans le corps C_1 , à la place de $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)_1$, on obtient :

$$V_2 = V_1 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)_1 c \left[1 + \frac{c}{2} \left(\mp \frac{1}{R_1} \mp \frac{1}{R'_1} \right) \right] + \left(\frac{\partial^3 V}{\partial z^3} \right)_1 \frac{c^3}{1.2.3} + \text{etc.} \quad (6)$$

On peut encore substituer à $\left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)_1$ une autre valeur. En effet, d'après l'équation (11) du chapitre précédent, si h_1 est la densité électrique au point en question de la surface du corps C_1 , on a :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)_1 = -4\pi h_1;$$

par là l'équation se transforme en :

$$V_2 = V_1 - 4\pi h_1 c \left[1 + \frac{c}{2} \left(\mp \frac{1}{R_1} \mp \frac{1}{R'_1} \right) \right] + \left(\frac{\partial^3 V}{\partial z^3} \right)_1 \frac{c^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Nous négligerons dans cette équation les termes en c du troisième ordre et ceux d'ordre supérieur, et nous l'écrirons sous la forme suivante :

$$V_1 - V_2 = 4\pi h_1 c \left[1 + \frac{c}{2} \left(\mp \frac{1}{R_1} \mp \frac{1}{R'_1} \right) \right]. \quad (7)$$

Après avoir obtenu ce résultat pour le corps C_1 , imaginons qu'on refasse entièrement le même développement, avec cette seule différence qu'on parte de la surface du corps C_2 pour se diriger vers la surface du corps C_1 . L'équation qu'on obtiendra ainsi peut être aussitôt déduite de la précédente, en changeant la différence $V_1 - V_2$ en $V_2 - V_1$, en introduisant au lieu de h_1 la notation h_2 qui représente la densité électrique au point considéré de la surface du corps C_2 , puis en remplaçant de même R_1 et R'_1 par R_2 et R'_2 , qui seront les rayons de courbure de la deuxième surface. Il vient ainsi :

$$V_2 - V_1 = 4\pi h_2 c \left[1 + \frac{c}{2} \left(\mp \frac{1}{R_2} \mp \frac{1}{R'_2} \right) \right]. \quad (8)$$

On peut encore mettre les équations (7) et (8) sous la forme suivante, en y négligeant, de même que ci-dessus, les termes d'ordre supérieur :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1 = \frac{V_1 - V_2}{4\pi c} \left[1 + \frac{c}{2} \left(\pm \frac{1}{R_1} \pm \frac{1}{R'_1} \right) \right] \\ h_2 = \frac{V_2 - V_1}{4\pi c} \left[1 + \frac{c}{2} \left(\pm \frac{1}{R_2} \pm \frac{1}{R'_2} \right) \right] \end{array} \right. \quad (9)$$

De là on conclut ce résultat particulier, exprimé par le premier et le plus important des termes de ces formules, savoir qu'en chacun des deux points situés l'un en face de l'autre sur les surfaces, la densité électrique dépend uniquement de la différence des niveaux potentiels existant entre les deux corps et de leur distance, et qu'elle est égale et de signe contraire pour ces deux

conducteurs. Le second terme est différent pour ces deux derniers, mais il dépend seulement, pour chacun d'eux, de ses propres rayons de courbure, la différence des niveaux potentiels étant donnée. Si, à l'endroit considéré, les surfaces étaient conformées de telle sorte que l'on eut :

$$\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1},$$

les deux derniers termes des deux formules seraient aussi égaux et de signes contraires ; et la différence entre h_2 et $-h_1$ pourrait alors seulement être exprimée par des termes d'ordre supérieur.

§ 2.

Application des équations au condensateur, au carreau de Franklin et à la bouteille de Leyde.

Nous pouvons appliquer immédiatement les équations précédentes aux deux plateaux d'un condensateur et aux deux armatures d'un carreau de Franklin, et puisque dans ces cas, les surfaces des deux plateaux des armatures placées en regard l'une de l'autre sont parallèles dans toute leur étendue, les équations sont valables non seulement pour un couple déterminé de points situés en face l'un de l'autre, mais aussi pour les surfaces entières. Il faut seulement en exclure les portions qui se trouvent assez près du bord, pour que leur distance

à celui-ci soit une grandeur du même ordre que c , parce qu'alors les coefficients différentiels supérieurs deviennent tellement grands, qu'on ne peut plus négliger dans les équations les termes que nous avons laissés de côté.

En ce qui concerne les bouteilles de Leyde, les surfaces des deux armatures situées en face l'une de l'autre, c'est-à-dire les surfaces limites du verre, sont généralement à peu près, mais non exactement, parallèles, ce qui produit un certain écart. Si, notamment, en un point d'une des surfaces, on mène une normale à cette surface ainsi qu'une normale à l'autre surface, ces deux normales ne coïncident pas exactement, et l'écartement des deux surfaces mesuré sur chacune d'elles n'est pas précisément le même. Toutefois la différence entre les deux longueurs ne peut être que très insignifiante, pour de faibles écarts de parallélisme. Si nous supposons que ce défaut de parallélisme, c'est-à-dire, l'angle entre les deux normales, soit une quantité de même ordre que c (en supposant c mesuré à l'aide d'une unité de longueur correspondante à l'une des dimensions des armatures), nous reconnaitrons aisément que la différence des écartements mesurés sur les deux normales doit être si minime, que si on désigne l'une par c , l'autre peut être représentée par une expression de la forme $c + mc^3$. La différence est donc une quantité du troisième ordre par rapport à c et peut être négligée dans nos équations, où nous nous arrêtons aux termes du deuxième ordre. Nous pouvons donc, dans l'hypothèse actuelle, appliquer les équations du paragraphe précédent à la bouteille de Leyde.

Si nous considérons maintenant les équations (9), il s'y présente encore, pour les appareils en question, d'autres simplifications relatives au terme qui contient les rayons

de courbure. Dans le condensateur et le carreau de Franklin, les surfaces sont planes, les rayons de courbure sont infinis et le terme est nul. Dans la bouteille de Leyde, ces rayons de courbure ont en réalité des valeurs finies, mais il existe entre eux une certaine relation, puisque les surfaces sont parallèles, ou du moins le sont approximativement. Dans des surfaces parallèles, les longueurs des rayons de courbure correspondants ne diffèrent que de la distance c , et si les surfaces ne sont pas entièrement parallèles, mais ne s'écartent du parallélisme que d'une quantité de l'ordre c , les longueurs des rayons de courbure ne peuvent encore différer que d'une grandeur de l'ordre c . Maintenant, puisque le terme qui renferme les rayons de courbure est celui de l'ordre le plus élevé que nous considérons dans les équations, nous pouvons y négliger une différence qui est de l'ordre c relativement à la grandeur de ce terme. Les rayons de courbure des deux surfaces sont opposés quant aux signes, car les courbes, suivant lesquelles un plan normal coupe les surfaces, se comportent inversement, en tant que vers l'extérieur l'une est convexe et l'autre concave. En laissant de côté les indices, nous pouvons donc, si nous désignons par R et R' les rayons de courbure de la première surface, représenter par $-R$ et $-R'$ ceux de la seconde. Les équations (9) se transforment ainsi en :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1 = \frac{V_1 - V_2}{4\pi c} \left[1 + \frac{c}{2} \left(\pm \frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'} \right) \right] \\ h_2 = \frac{V_2 - V_1}{4\pi c} \left[1 + \frac{c}{2} \left(\mp \frac{1}{R} \mp \frac{1}{R'} \right) \right], \end{array} \right. \quad (10)$$

et de là on déduit en outre :

$$h_2 = -h_1 \left[1 + c \left(\mp \frac{1}{R} \mp \frac{1}{R'} \right) \right]. \quad (11)$$

Il existe encore entre deux autres quantités, qui dépendent de h_2 et $-h_1$, une plus grande coïncidence qu'entre ces dernières mêmes. Considérons sur la première surface un élément $d\omega_1$. Imaginons un nombre infini de normales élevées à la surface le long de son périmètre ; ces normales détermineront sur la seconde surface un élément que nous regarderons comme correspondant, et que nous désignerons par $d\omega_2$. Les quantités d'électricité qui se trouvent sur ces deux éléments sont $h_1 d\omega_1$ et $h_2 d\omega_2$. On établit par de simples considérations géométriques que ces deux éléments de surface ont entre eux la relation suivante, en négligeant les termes d'ordre supérieur :

$$d\omega_2 = d\omega_1 \left[1 + c \left(\pm \frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'} \right) \right]. \quad (12)$$

Si l'on multiplie entre elles les équations (11) et (12), le terme affecté du facteur c disparaît, et si l'on néglige le terme affecté du facteur c^2 , on aura :

$$h_2 d\omega_2 = -h_1 d\omega_1, \quad (13)$$

c'est-à-dire que les quantités d'électricité qui se trouvent sur deux éléments de surface correspondants sont, abstraction faite du signe, égales entre elles à une quantité près, qui est de l'ordre de c^2 , relativement à la valeur totale.

Ce qui est vrai pour deux éléments de surface correspondants doit l'être aussi pour deux portions finies de surface qui sont telles, que les normales élevées sur le

contour de l'une déterminent celui de l'autre. Les quantités d'électricité qui se trouvent sur ces portions finies de surface doivent aussi être égales entre elles à une quantité près, dont le rapport à la quantité totale n'est que du second ordre relativement à c .

§ 3.

Compléments qui sont encore nécessaires dans les équations précédentes.

Les équations développées dans les deux paragraphes précédents sont celles que Green a déduites pour le condensateur, le carreau de Franklin et la bouteille de Leyde, et elles forment la base de la théorie relative à ces appareils. Mais en considérant la chose de plus près, on trouve que ces équations ne contiennent pas encore tout ce à quoi on doit avoir égard dans ces appareils.

Dans la suite, nous ne parlerons que de la *bouteille de Leyde* ; ce que nous en dirons s'appliquera également au carreau de Franklin et au condensateur, et deviendra même plus simple si, dans ces deux derniers, les deux plateaux métalliques sont supposés plans, parallèles, égaux et exactement situés l'un vis-à-vis de l'autre sur des perpendiculaires communes.

Il s'agit surtout, dans l'analyse mathématique de ces appareils, de déterminer les quantités d'électricité qui se trouvent sur les armatures lorsque l'on donne leurs niveaux potentiels (c'est-à-dire les valeurs de la fonction potentielle pour ces armatures) ; ou, d'une manière plus

générale, il s'agit de trouver les équations qui ont lieu entre les deux niveaux potentiels et les deux quantités d'électricité.

Les équations (10) de Green nous donnent les densités électriques h_1 et h_2 sur les deux faces des armatures tournées l'une vers l'autre ; et si l'on forme, au moyen de ces valeurs, les produits $h_1 d\omega_1$ et $h_2 d\omega_2$, où $d\omega_1$ et $d\omega_2$ représentent les éléments des deux surfaces, et si l'on intègre ces expressions pour des portions finies de surface, on obtiendra les quantités d'électricité qui se trouvent sur celles-ci. Mais il est à remarquer que les équations (10) ne sont pas tout à fait générales. Nous avons déjà dit plus haut que ces équations ne sont applicables que si la distance des deux surfaces dans l'endroit considéré est très faible relativement aux dimensions des armatures, puisque nous y avons négligé les termes d'ordres supérieurs relativement à c . Dans le cas actuel, on doit encore tenir compte d'une autre circonstance. Les armatures d'une bouteille de Leyde sont de minces feuilles de métal terminées par des bords aigus. Sur ces bords, l'électricité se comporte d'une manière particulière, en ce que, pour une même valeur de la fonction potentielle, elle s'accumule beaucoup plus sur les bords que sur les portions de surface qui en sont éloignées. On ne peut donc appliquer ces équations qu'aux parties des faces des armatures tournées l'une vers l'autre, qui sont assez éloignées des bords de celles-ci pour qu'on puisse regarder l'éloignement du bord comme considérable vis-à-vis de la distance des armatures, ou vis-à-vis de l'épaisseur du verre, comme nous pouvons le dire plus simplement dans le cas de la bouteille de Leyde. On pourra considérer la densité électrique comme constante sur ces parties, pour autant que l'épaisseur

du verre soit supposée constante. Mais, dans le voisinage des bords, la densité électrique aura des valeurs plus grandes.

On voit par là que les intégrales que l'on obtient en employant simplement pour h_1 et h_2 les valeurs (10), et en effectuant l'intégration pour les surfaces totales des armatures, doivent être affectées d'une inexactitude dont la grandeur dépend de l'étendue, de la forme et de la position des bords. En outre, il faut encore remarquer qu'en effectuant l'intégration pour les surfaces des armatures, on suppose tacitement que ces deux armatures s'étendent également loin, de telle sorte que leurs bords se trouvent perpendiculairement l'un vis-à-vis de l'autre. Mais, en réalité, cette condition n'est pas toujours exactement remplie, et, par suite de cette circonstance, il y aura également une erreur, à la vérité généralement assez faible, dans le résultat.

Green a commis une autre négligence importante. Il ne considère que les quantités d'électricité répandues sur les faces des deux armatures qui se trouvent l'une vis-à-vis de l'autre, et il ne tient pas compte des quantités d'électricité répandues sur les autres faces. Dans la charge ordinaire, ces dernières quantités sont, à la vérité, beaucoup moindres que les premières; toutefois, dans certains cas, elles ont de l'importance, en ce que ce sont elles surtout qui occasionnent la différence des quantités d'électricité répandues sur les deux armatures.

Les valeurs déduites des équations de Green devront donc être complétées par d'autres valeurs relatives aux circonstances précédentes, si l'on veut représenter exactement les quantités d'électricité répandues sur les armatures.

§ 4.

Examen de quelques cas particuliers simples.

Dans le but de faciliter l'exposition, nous considérerons, avant de passer à la recherche des équations générales pour des bouteilles de Leyde de forme quelconque, quelques formes spéciales qui peuvent se traiter d'une manière particulièrement simple.

La première forme que nous choisirons ne peut pas se présenter en réalité ; mais si on se la figure comme existante, elle doit être soumise essentiellement aux mêmes lois que les bouteilles ordinaires et elle conduit à des résultats très simples. Le vase de verre sera supposé être une *sphère creuse entièrement fermée*, ayant partout la même épaisseur ; elle sera recouverte d'étain sur toute sa surface tant intérieure qu'extérieure. Sur l'armature intérieure se trouve une certaine quantité d'électricité M , qui y est parvenue d'une façon quelconque, et sur l'armature extérieure se trouve la quantité d'électricité N . On demande quelles sont les valeurs de la fonction potentielle sur les deux armatures.

Chacune de ces deux armatures est limitée par deux surfaces sphériques, que nous nommerons face intérieure et face extérieure, et, puisqu'il ne peut y avoir d'électricité décomposée à l'intérieur d'un conducteur, les quantités d'électricité M et N se trouvent sur ces faces. Nous désignerons les quantités d'électricité qui se trouvent séparément sur les quatre surfaces respectivement par M_1 , M_2 , N_1 et N_2 , en partant de l'intérieur, de sorte que nous avons à poser :

$$M_1 + M_2 = M, \quad N_1 + N_2 = N. \quad (14)$$

On reconnaît de suite, en ce qui concerne ces quatre quantités d'électricité, que, pour autant que des forces électriques étrangères n'agissent pas en même temps, elles sont réparties uniformément sur les surfaces correspondantes, et, on peut ainsi appliquer à chacune les équations qui sont valables pour une quantité d'électricité distribuée d'une manière uniforme sur une sphère, équations que nous ne citerons que brièvement ici¹.

Dans l'espace creux enfermé par une surface sphérique recouverte uniformément d'électricité, la fonction potentielle est constante, et, si l'on désigne par r le rayon de la sphère, par h la densité électrique et par V_i la fonction potentielle intérieure, on a l'équation

$$V_i = 4\pi hr. \quad (15)$$

Puisque l'aire de la surface sphérique est $4\pi r^2$, la quantité totale d'électricité qui se trouve sur cette surface s'exprime par $4\pi r^2 h$, et en désignant par Q cette quantité d'électricité, nous pouvons écrire :

$$V_i = \frac{Q}{r}. \quad (15a)$$

A l'extérieur, la fonction potentielle, que nous désignerons par V_e , est variable, et si l représente la distance du point considéré au centre, on devra poser :

$$V_e = 4\pi h \cdot \frac{r^2}{l} = \frac{Q}{l}. \quad (16)$$

1. Voir mon ouvrage sur la fonction potentielle, p. 103.

Appliquons maintenant ces équations aux quatre surfaces sphériques désignées ci-dessus. Pour en exprimer les rayons, désignons par a le rayon de la face intérieure de la sphère de verre, par c l'épaisseur du verre et par β et γ les épaisseurs des deux armatures ; les rayons des diverses surfaces sont alors, en partant de l'intérieur : $a - \beta$, a , $a + c$, $a + c + \gamma$.

Considérons maintenant un point quelconque dans l'armature intérieure et soit l sa distance au centre ; ce point se trouve dans l'espace extérieur par rapport à la face interne de l'armature intérieure et dans l'espace intérieur relativement aux trois autres surfaces sphériques. Nous avons donc à appliquer l'équation (16) à la quantité d'électricité M_1 et l'équation (15_a) aux quantités M_2 , N_1 et N_2 , en introduisant pour r les rayons convenables. Désignant par F la fonction potentielle totale dans l'armature intérieure, il vient :

$$F = \frac{M_1}{l} + \frac{M_2}{a} + \frac{N_1}{a+c} + \frac{N_2}{a+c+\gamma}. \quad (17)$$

Considérons ensuite un point à l'intérieur de l'armature extérieure, et soit l sa distance au centre ; ce point est dans l'espace intérieur relativement à la face externe de l'armature extérieure, et dans l'espace extérieur par rapport aux trois autres surfaces sphériques. Nous devons donc appliquer l'équation (15_a) à la quantité d'électricité N_2 et l'équation (16) aux quantités M_1 , M_2 et N_1 ; de sorte que nous obtenons, en désignant par G la fonction potentielle dans l'armature extérieure :

$$G = \frac{M_1}{l} + \frac{M_2}{l} + \frac{N_1}{l} + \frac{N_2}{a+c+\gamma}. \quad (18)$$

Dans l'intérieur de chaque armature, la fonction

potentielle doit être constante, c'est-à-dire, indépendante de l . Cela n'est possible pour F , que si

$$M_1 = 0; \quad (19)$$

d'où il suit, en vertu de (14) :

$$M_2 = M. \quad (20)$$

Si, en outre, G doit être indépendant de l , on doit avoir :

$$M_1 + M_2 + N_1 = 0;$$

d'où il suit, en ayant égard aux deux équations précédentes :

$$N_1 = -M, \quad (21)$$

et à l'aide de cette équation, on tire de (14) :

$$N_2 = M + N. \quad (22)$$

En substituant ces quatre valeurs dans les équations (17 et 18), celles-ci se transforment en

$$\left\{ \begin{array}{l} F = \frac{c}{a(a+c)} M + \frac{M+N}{a+c+\gamma} \\ G = \frac{M+N}{a+c+\gamma}. \end{array} \right. \quad (23)$$

Résolvant ces équations par rapport à M et N , on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \frac{a(a+c)}{c} (F - G) \\ N = \frac{a(a+c)}{c} (G - F) + (a+c+\gamma) G. \end{array} \right. \quad (24)$$

Si on désigne l'aire de la face interne de la sphère de verre par s , on a $s = 4\pi a^2$, et on peut, par suite, écrire comme suit les équations précédentes :

$$\begin{cases} M = \frac{s}{4\pi c} \left(1 + \frac{c}{a}\right) (F - G) \\ N = \frac{s}{4\pi c} \left(1 + \frac{c}{a}\right) (G - F) + (a + c + \gamma) G. \end{cases} \quad (25)$$

Si l'armature extérieure est en communication conductrice avec le sol, on a à poser : $G = 0$. Par là, il vient $N = -M$ et on a entre M et F la relation simple :

$$M = \frac{s}{4\pi c} \left(1 + \frac{c}{a}\right) F. \quad (26)$$

Un autre cas spécial, qui est relativement facile à traiter, est celui du carreau de Franklin à armatures circulaires. Je l'ai considéré d'une manière approfondie dans un mémoire paru en 1852¹, dont je communiquerai ici quelques résultats. Si a est le rayon des armatures circulaires et c leur distance mutuelle, les équations en question sont :

$$\begin{cases} M - N = \frac{a^2}{2c} \left(1 + \frac{c}{a\pi} \log \frac{17,68 a}{c}\right) (F - G) \quad 2) \\ M + N = \frac{a}{\pi} (F + G). \end{cases} \quad (27)$$

1. *Ann. de Pogg.* t. 86, p. 161.

2. Il a paru plus récemment un beau mémoire de Kirchhoff, « *zur Theorie des Condensators* » (*Monatsberichte der Berliner Academie*, mars 1877), dans lequel on donne, pour le même cas, l'équation suivante :

$$M - N = \frac{a^2}{2c} \left(1 + \frac{c}{a\pi} \log \frac{16\pi a}{ec}\right) (F - G)$$

Ajoutant ces équations l'une à l'autre et les retranchant l'une de l'autre ; introduisant en outre la notation s pour l'aire d'une des armatures, c'est-à-dire pour la quantité πa^2 , nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \frac{s}{4\pi c} \left[1 + \frac{c}{a\pi} \left(l \frac{17,68 a}{c} - 2 \right) \right] (F - G) + \frac{a}{\pi} F \\ N = \frac{s}{4\pi c} \left[1 + \frac{c}{a\pi} \left(l \frac{17,68 a}{c} - 2 \right) \right] (G - F) + \frac{a}{\pi} G. \end{array} \right. \quad (28)$$

De même, on peut aussi exprimer F et G par M et N et en général deux des quatre quantités M , N , F , G par les deux autres.

Pour le cas où une des armatures, que nous considérons comme la seconde, est en communication conductrice avec le sol, et où, par suite, G a une valeur nulle, il suffit de connaître une des trois quantités restantes M , N et F , pour déterminer les deux autres. On obtient, par exemple :

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \frac{s}{4\pi c} \left[1 + \frac{c}{a\pi} \left(l \frac{17,68 a}{c} + 2 \right) \right] F \\ N = - \frac{s}{4\pi c} \left[1 + \frac{c}{a\pi} \left(l \frac{17,68 a}{c} - 2 \right) \right] F. \end{array} \right. \quad (29)$$

dans laquelle e représente la base des logarithmes népériens. Cette équation concorde, comme on le voit, avec la mienne quant à la forme, et de même le facteur constant $\frac{16\pi}{e}$ diffère peu du nombre 17,68 que j'ai calculé comme valeur approchée d'un développement en série.

§ 5.

Équations générales pour deux corps quelconques.

Pour pouvoir former les expressions correspondantes pour les deux armatures d'une bouteille de Leyde de forme quelconque, nous considérerons d'abord la chose d'une manière plus générale et nous admettrons que l'on donne, au lieu des deux armatures, deux corps conducteurs quelconques A et B. Dans le voisinage de ces corps peuvent se trouver encore d'autres conducteurs quelconques, que nous supposerons soit en communication conductrice avec le sol, soit isolés, en ajoutant, dans le dernier cas, la condition qu'ils ne reçoivent pas d'électricité. Nous déduirons pour ces corps A et B certaines équations générales relatives à leur influence réciproque, équations que nous pourrons ensuite appliquer aux deux armatures de la bouteille de Leyde.

Mettons d'abord le corps A en communication avec le sol et isolons l'autre B ; dans ces circonstances, chargeons B d'électricité jusqu'au niveau potentiel — K. Sur le corps A, dont le niveau potentiel doit rester nul à cause de sa communication avec le sol, il s'accumulera par influence une certaine quantité d'électricité qui sera, dans tous les cas, proportionnelle à la quantité K, et que nous désignerons en conséquence par aK . Nous représenterons par $-bK$ la quantité d'électricité qui se trouve simultanément sur B, et qui doit être également proportionnelle au niveau potentiel K, mais en signe contraire. Les facteurs a et b , qui entrent dans ces deux

expressions, sont des constantes positives qui dépendent de la grandeur et de la forme des corps A et B, ainsi que de la position que chacun occupe par rapport à l'autre et par rapport aux autres corps conducteurs qui se trouvent dans la sphère d'influence.

Après que cette charge est effectuée, qu'on s'imagine que la communication entre le corps A et le sol soit interrompue, de sorte que les deux corps A et B sont maintenant isolés. Dans ces circonstances, communiquons aux deux corps autant d'électricité de même nature qu'il est nécessaire pour que le niveau potentiel varie d'une quantité K' sur les deux corps. Ces quantités d'électricité sont les mêmes que celles que l'on devrait employer si les deux corps isolés n'avaient pas été d'abord électrisés, et si l'on voulait les porter au même niveau potentiel K' . Comme ces quantités d'électricité sont proportionnelles au niveau potentiel K' , nous les représenterons par $\alpha K'$ et $\beta K'$ où α et β sont de nouveau deux constantes positives dépendant de la grandeur, de la forme et de la position des corps.

Les états des deux corps, résultant de ces deux opérations consécutives, peuvent s'exprimer de la manière suivante :

$$\begin{array}{l} \text{Corps A} \\ \text{Corps B} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Niveau potentiel : } K' \\ \text{Quantité d'électricité : } \alpha K + \alpha K'. \\ \text{Niveau potentiel : } -K + K' \\ \text{Quantité d'électricité : } -\beta K + \beta K'. \end{array} \right.$$

Admettons, comme cas particulier, que

$$-K + K' = 0,$$

d'où :

$$K' = K ;$$

alors les états des corps, après les deux opérations, seront les mêmes que ceux qu'ils auraient pris, si le corps B avait été simplement mis en communication avec la terre, et maintenu ainsi au niveau potentiel zéro, tandis que l'on aurait isolé le corps A et qu'on l'aurait chargé d'électricité jusqu'au niveau potentiel K. D'après l'équation (38) du chapitre précédent, la quantité d'électricité accumulée, par influence, dans ces circonstances, sur B, doit être égale et de signe contraire à la quantité d'électricité aK , que prend le corps A lorsqu'il est en communication avec la terre, tandis que B est chargé jusqu'au niveau potentiel K. Nous pouvons donc, en remplaçant dans l'expression de la quantité d'électricité qui se trouve sur B, la quantité K' par K , former l'équation suivante :

$$- bK + \beta K = - aK,$$

d'où résulte :

$$b = a + \beta.$$

Nous avons ainsi déterminé l'une des quatre constantes introduites plus haut ; nous pouvons retourner maintenant au cas plus général, dans lequel K' n'est pas égal à K , et remplacer b par la valeur trouvée, dans les expressions qui représentent les états des deux corps. Nous obtiendrons ainsi :

$$\begin{array}{l} \text{Corps A} \left\{ \begin{array}{l} \text{Niveau potentiel : } K' ; \\ \text{Quantité d'électricité : } aK + aK'. \end{array} \right. \\ \text{Corps B} \left\{ \begin{array}{l} \text{Niveau potentiel : } -K + K' ; \\ \text{Quantité d'électricité : } -aK + \beta(-K + K'). \end{array} \right. \end{array}$$

Nous allons mettre sous une autre forme un peu plus commode le résultat de l'analyse précédente, qui se

trouve consigné dans ces expressions. Au lieu de conserver dans les formules les niveaux potentiels relatifs aux deux opérations successives, nous représenterons par une lettre le niveau potentiel final de chacun des deux corps. Soient F celui de A , et G celui de B . Nous aurons à poser :

$$K' = F,$$

$$-K + K' = G,$$

et par suite :

$$K = F - G.$$

Désignons en outre par M et N les quantités d'électricité qui se trouvent définitivement sur les deux corps. Nous pourrons alors, d'après ce qui précède, former les deux équations suivantes, qui sont valables pour chaque couple de deux corps conducteurs soumis à leur influence mutuelle, tandis que tous les autres corps conducteurs, qui se trouvent dans la sphère d'influence, ou bien sont en communication avec le sol ou, au cas où ils sont isolés, ne contiennent aucune électricité communiquée :

$$\begin{cases} M = a(F - G) + \alpha F. \\ N = a(G - F) + \beta G. \end{cases} \quad (30)$$

§ 6.

Détermination du coefficient α pour des bouteilles de Leyde.

Si nous appliquons ces équations aux deux armatures d'une bouteille de Leyde, nous pourrions déterminer, d'une manière plus précise, les quantités α , α et β . Nous considérerons l'armature intérieure comme étant le corps A, et l'extérieure comme étant le corps B.

Admettons d'abord que l'armature extérieure soit chargée jusqu'au niveau potentiel G, tandis que l'intérieure est en communication avec la terre. La quantité d'électricité qui se trouve, dans ces circonstances, sur l'armature intérieure, se trouvera par la première des équations (30), en y faisant $F = 0$; on aura donc :

$$M = - \alpha G. \qquad (31)$$

En outre, on peut déterminer dans ce cas, par des considérations directes, la quantité d'électricité M avec un certain degré d'exactitude.

En effet, il n'y a, sur l'armature intérieure, que la quantité d'électricité qui est retenue par l'attraction de celle qui charge l'armature extérieure ; on peut donc en conclure que l'électricité qui se trouve sur l'armature intérieure est concentrée tout entière sur la face de celle-ci qui est tournée vers l'armature extérieure. On peut déterminer la densité de l'électricité sur cette

surface au moyen de l'équation (10), en y faisant $V_2 = G$, et $V_1 = 0$. Cette équation deviendra ainsi :

$$h_1 = -\frac{G}{4\pi c} \left[1 + \frac{c}{2} \left(\pm \frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'} \right) \right].$$

Soit maintenant $d\omega$ un élément de la surface externe de l'armature intérieure, ou, comme on a l'habitude de le dire plus simplement, un élément de surface de l'armature intérieure, en considérant comme égales entre elles la surface interne et la surface externe d'une même armature. Multiplions les deux membres de l'équation précédente par cet élément de surface, et formons les intégrales, qui doivent être étendues à toute la surface de l'armature intérieure ; nous obtiendrons ainsi l'équation :

$$\int h_1 d\omega = -\frac{G}{4\pi} \left[\int \frac{d\omega}{c} + \frac{1}{2} \int \left(\pm \frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'} \right) d\omega \right]. \quad (32)$$

On peut déterminer immédiatement la première des intégrales du second membre, dans le cas où l'épaisseur c du verre est constante. Si l'on représente par s la surface de l'armature intérieure, on aura :

$$\int \frac{d\omega}{c} = \frac{s}{c}. \quad (33)$$

Si l'épaisseur c du verre n'est pas constante, nous introduirons une valeur moyenne c_m , déterminée par l'équation :

$$\int \frac{d\omega}{c} = \frac{s}{c_m}. \quad (34)$$

En substituant cette valeur dans l'équation (32), celle-ci devient :

$$\int h_1 d\omega = - \frac{G}{4\pi} \left[\frac{s}{c_m} + \frac{1}{2} \int \left(\pm \frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'} \right) d\omega \right].$$

ou bien :

$$\int h_1 d\omega = - G \frac{s}{4\pi c_m} \left[1 + \frac{c_m}{2s} \int \left(\pm \frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'} \right) d\omega \right]. \quad (35)$$

Cette expression de l'intégrale $\int h_1 d\omega$ n'est pas complètement identique à la quantité d'électricité M qui se trouve dans les circonstances mentionnées sur l'armature intérieure ; elle s'en écarte un peu, parce que, dans le voisinage du bord, la densité électrique est plus grande que celle qui est donnée par l'expression de h_1 . Mais, d'après ce qui a été dit au paragraphe 3, cet écart est une quantité telle, que, si on l'exprime comme une fraction de l'intégrale, elle décroît avec l'épaisseur de verre, de telle sorte qu'elle devient infiniment petite pour une épaisseur de verre infiniment mince (à supposer que le verre puisse s'amincir à ce point, sans perdre son pouvoir isolant). Comme il existe dans la parenthèse carrée de l'équation précédente un terme qui est affecté du facteur c_m , et qui jouit donc aussi de la propriété de diminuer et de devenir infiniment petit en même temps que l'épaisseur du verre, nous pourrions renfermer ce terme, ainsi que l'écart précédent, sous un seul signe, et nous représenterons par δ la quantité résultante qui devra être ajoutée à 1, à l'intérieur de la parenthèse. Nous aurons ainsi :

$$M = - G \frac{s}{4\pi c_m} (1 + \delta). \quad (36)$$

Puisque, d'après l'équation (31), on peut poser pour M l'expression $- \alpha G$, l'équation précédente devient :

$$- aG = - G \frac{s}{4\pi c_m} (1 + \delta),$$

et si nous éliminons la quantité $- G$, nous obtenons l'équation :

$$a = \frac{s}{4\pi c_m} (1 + \delta). \quad (37)$$

Le coefficient a est ainsi déterminé à la quantité δ près, qui est très faible relativement à 1.

§ 7.

Signification des coefficients α et β pour des bouteilles de Leyde.

Voyons maintenant jusqu'à quel point on peut déterminer les coefficients α et β .

Conformément à ce que nous avons dit de ces deux coefficients, nous pouvons les définir de la manière suivante pour une bouteille de Leyde : *Si l'on veut charger les deux armatures de la bouteille, de telle sorte que la fonction potentielle ait pour toutes les deux la valeur commune 1, les quantités d'électricité nécessaires seront α et β .*

Imaginons maintenant qu'après que cette charge des deux armatures à un niveau potentiel commun est effectuée, on les mette en communication par un conducteur, par exemple au moyen d'un fil très fin traversant la couche isolante ; cela n'occasionnera aucune différence, ni dans la distribution de l'électricité, ni dans le niveau

potentiel. Imaginons en outre que les plateaux métalliques qui forment les deux armatures se rapprochent de plus en plus, de sorte qu'ils arrivent enfin au contact, et peuvent être considérés comme un simple plateau métallique de la forme d'une des armatures ; de cette manière, le niveau potentiel commun ne pourra varier que d'une quantité qui est de l'ordre $\frac{c}{\sqrt{s}}$ par rapport à sa valeur primitive 1, c'est-à-dire de l'ordre du rapport de la distance des plateaux à leurs dimensions. Si le niveau potentiel devait rester constamment égal à 1, tandis que les plateaux se rapprochent jusqu'au contact, la quantité totale d'électricité $\alpha + \beta$ devrait subir une petite variation qui serait également de l'ordre $\frac{c}{\sqrt{s}}$ par rapport à la valeur primitive de cette quantité. Mais comme la quantité $\alpha + \beta$ est déjà faible relativement à a , puisque son expression ne renferme pas, comme celle de a , la distance c au dénominateur, nous négligerons une variation qui est de l'ordre $\frac{c}{\sqrt{s}}$, relativement à la valeur totale de $\alpha + \beta$, et nous pourrons énoncer la proposition suivante comme approximativement vraie : *Si l'on imagine que l'une seulement des deux armatures existe, la quantité $\alpha + \beta$ sera approximativement égale à la quantité d'électricité que l'on devrait communiquer à cette seule armature pour la charger jusqu'au niveau potentiel 1.*

De cette manière, la somme des deux coefficients α et β est, sinon réellement déterminée, du moins ramenée à un cas plus simple, au moyen duquel on peut se faire une idée de la grandeur dont il s'agit, à supposer même qu'on ne pousse pas plus loin le calcul.

Pour ce qui regarde le rapport des deux coefficients

α et β entre eux, il dépend surtout de la courbure des deux armatures. Si elles sont planes comme dans le carreau de Franklin, et si en outre elles sont parfaitement égales entre elles, et que leurs bords se trouvent partout perpendiculairement l'un vis-à-vis de l'autre, les deux coefficients α et β seront égaux entre eux. Pour le cas encore plus spécial où les armatures sont circulaires, α et β ont, comme on le voit par (28), la valeur commune $\frac{a}{\pi}$, où a est le rayon du cercle. Si les deux armatures sont courbées de telle sorte que l'une renferme entièrement l'autre, le coefficient α , relatif à l'armature intérieure, sera égal à zéro, et le coefficient β , relatif à l'extérieure, aura la valeur déterminée précédemment pour la somme. Pour la surface sphérique traitée dans le § 4, β a, ainsi qu'on le voit par les équations (25), la valeur $a + c + \gamma$, où a représente le rayon de la face intérieure de la sphère de verre, c l'épaisseur du verre et γ l'épaisseur de l'armature extérieure. Si enfin, comme c'est le cas dans les bouteilles de Leyde ordinaires, l'une des armatures entoure l'autre en partie seulement, il est aisé de voir, en comparant ce cas aux deux autres, que le coefficient α , relatif à l'armature intérieure, doit être plus petit que le coefficient β relatif à l'extérieure.

§ 8.

Forme commode des équations.

Revenons maintenant aux équations (30). Remplaçons le coefficient α par l'expression (37), et écrivons simplement c au lieu de c_m , en entendant par c l'épaisseur moyenne du verre, déterminée par l'équation (34). Nous ne changerons rien aux coefficients α et β . Nous aurons alors les deux équations suivantes, relatives à une bouteille de Leyde chargée :

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \frac{s}{4\pi c} (1 + \delta) (F - G) + \alpha F ; \\ N = \frac{s}{4\pi c} (1 + \delta) (G - F) + \beta G ; \end{array} \right. \quad (38)$$

Nous poserons, pour abrégier :

$$z = \frac{4\pi c}{1 + \delta}, \quad (39)$$

d'où il résulte que cette quantité z dépend surtout de l'épaisseur du verre, et est approximativement égale à $4\pi c$. Nos deux équations prendront ainsi la forme plus simple :

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \frac{s}{z} (F - G) + \alpha F ; \\ N = \frac{s}{z} (G - F) + \beta G. \end{array} \right. \quad (40)$$

Quand on fait usage des bouteilles de Leyde, l'armature extérieure est généralement en communication avec la terre. Dans ce cas, on doit poser $G = 0$, et les deux équations deviennent ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \left(\frac{s}{z} + \alpha \right) F ; \\ N = - \frac{s}{z} F. \end{array} \right. \quad (41)$$

Comme, dans ce dernier cas, il est utile de pouvoir comparer aussi simplement que possible la quantité d'électricité M , qui se trouve sur l'armature intérieure, avec la valeur F du niveau potentiel sur cette même armature, nous introduirons, outre la lettre grecque z , la lettre k , dont la signification est déterminée par l'équation suivante :

$$\frac{s}{k} = \frac{s}{z} + \alpha, \quad (42)$$

d'où il résulte :

$$k = \frac{z}{1 + \alpha \frac{z}{s}} = \frac{4\pi c}{1 + \delta + \alpha \frac{4\pi c}{s}}. \quad (43)$$

Les équations générales (40) deviendront par là :

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \frac{s}{k} (F - G) + \alpha G, \\ N = \left(\frac{s}{k} - \alpha \right) (G - F) + \beta G, \end{array} \right. \quad (44)$$

et les équations plus particulières (41), qui se rapportent au cas où l'armature extérieure est en communication avec la terre, se transforment en :

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \frac{s}{k} F, \\ N = -\left(\frac{s}{k} - \alpha\right) F. \end{array} \right. \quad (45)$$

Au moyen des équations (40), ou de ces mêmes équations mises sous leur forme (44), on pourra, étant données deux des quatre quantités M, N, F et G, déterminer les deux autres. De même, dans le cas particulier où l'armature extérieure est en communication avec la terre, on pourra, au moyen des équations (41) ou (45), déterminer deux des quantités M, N et F en fonction de la troisième.

CHAPITRE III.

THÉORIE DES MILIEUX DIÉLECTRIQUES.

§ 1.

Manière dont se comporte la couche isolante interposée.

Dans le chapitre précédent, nous avons considéré la couche qui sépare l'un de l'autre les deux plateaux d'un condensateur, ou les deux armatures d'un carreau de Franklin ou d'une bouteille de Leyde, comme étant simplement un isolateur parfait, dont l'état électrique ne se modifie pas sous l'influence de l'électricité qui se trouve sur les plateaux ou sur les armatures ; par suite, cette couche ne peut non plus exercer aucune réaction électrique. Déjà Faraday, et après lui Wern. Siemens, ont observé que la manière de se comporter d'un condensateur électrique dépend essentiellement encore, pour un même écartement des plateaux, de la nature de l'isolateur qui se trouve entre eux. Faraday a même tiré de là l'idée que les plateaux chargés d'électricité n'agissent pas directement l'un sur l'autre

à distance, mais que l'action ne peut avoir lieu que par l'intermédiaire de la substance qui se trouve entre eux, et il a appelé *diélectrique* une substance qui, sans conduire l'électricité, transmet l'action exercée à distance par celle-ci. On peut d'ailleurs conserver cette dénomination, même si l'on ne se rallie pas entièrement à la manière de voir de Faraday, et si l'on admet qu'il existe en réalité une action directe de l'électricité à distance, mais que cette action est modifiée par la substance qui se trouve interposée.

Plus récemment Boltzmann¹, Wüllner², etc. ont fait progresser, par des recherches expérimentales ingénieuses, nos connaissances sur la manière dont se comportent les substances isolatrices de l'électricité ; et l'on peut conclure sans aucun doute, des résultats de ces expériences, que l'action de l'électricité à travers différentes substances isolantes a lieu avec des intensités très différentes.

A ce changement d'état, éprouvé par le verre employé comme couche isolante dans une bouteille de Leyde sous l'influence des électricités qui se trouvent sur les armatures, changement en vertu duquel il agit réciproquement sur ces électricités, se rattache aussi le résidu que l'on observe après la décharge d'une bouteille de Leyde ; la formation de ce résidu, au sujet de laquelle R. Kohlrausch³ a exécuté des expériences de mesure de grande valeur, a donné plusieurs fois l'occasion de discuter la manière dont se comportent les substances isolantes.

Toutes les recherches sur ce sujet sont rendues considérablement plus difficiles par ce fait que le verre

1. *Sitzungsberichte der Wiener Academie*, 1873 et 1874.

2. *Ann. de WIEDEMANN*, t. 1, p. 247 (1877).

3. *Ann. de POGG*, t. 91.

et les autres substances employées comme isolantes ne sont pas des isolants parfaits. Certaines espèces de verre conduisent si bien, qu'elles sont absolument inutilisables à la confection des bouteilles de Leyde ; les électricités des armatures pénètrent très rapidement dans le verre et s'y compensent, de sorte que la charge se perd presque complètement en très peu de temps. D'autres espèces de verre conduisent en réalité beaucoup moins, mais ne sont pas cependant entièrement exemptes de conductibilité. Même quand cette conductibilité est faible, la pénétration, qui en résulte, de la substance par l'électricité, a pour conséquence des actions qui ont lieu en même temps que celles qui sont propres à la substance considérée comme diélectrique ; les phénomènes qui en dépendent deviennent par là plus compliqués et il est très difficile de distinguer jusqu'à quel point les phénomènes sont dus à l'une ou à l'autre cause.

C'est pour cette raison que des opinions très diverses ont en effet été émises par rapport aux phénomènes en question. Certains auteurs ont voulu expliquer la formation du résidu uniquement par la pénétration de l'électricité dans le verre, von Bezold entre autres, qui a fait des expériences d'une grande valeur sur le décroissement de la charge disponible dans des bouteilles de Leyde et des carreaux de Franklin¹. Mais je ne crois pas qu'il soit possible d'expliquer suffisamment par cette circonstance la formation du résidu, si l'on n'admet pas, comme Riemann l'a fait², le concours d'une force particulière entre le verre et l'électricité. Riemann fait à ce sujet l'hypothèse que les corps pondérables « résistent pour devenir électriques ou pour

1. *Ann. de Pogg*, t. 114, 125 et 157.

2. *Amtlicher Bericht über die 31 deutsche Naturforscher-versammlung im Jahre 1854 et Nachgelassene Werke*, p. 48 et 345.

admettre de l'électricité de tension, mais qu'ils ne se refusent pas à être électriques ou à renfermer de l'électricité de tension ». Mais une telle hypothèse me paraît trop étrange pour que je puisse m'y rallier.

C'est pourquoi nous ne considérerons, dans la suite, le pouvoir isolant imparfait que comme une circonstance accessoire, qui peut avoir lieu en même temps que les actions diélectriques proprement dites, et de la détermination de laquelle il n'est pas question actuellement. Nous ferons, par conséquent, entièrement abstraction des pertes d'électricité qui en résultent et nous ne porterons notre attention que sur les actions diélectriques des isolateurs.

§ 2.

Hypothèses possibles relativement à la polarisation intérieure des isolateurs.

Pour expliquer les actions diélectriques des isolateurs, et spécialement de la couche qui se trouve entre les deux armatures, il paraît nécessaire d'admettre que les forces exercées sur l'intérieur de la couche par les électricités qui se trouvent sur ces armatures, y déterminent un état de polarité, qui peut alors à son tour réagir sur les armatures. On peut se représenter la formation de cette polarité de diverses manières.

D'abord, on peut s'imaginer que, tandis que le verre n'est pas conducteur, il renferme pourtant de petits corpuscules qui sont un peu conducteurs. Il se produit

dans ces corpuscules une décomposition par influence des deux électricités, de sorte qu'ils se chargent d'électricité négative du côté de l'armature électrisée positivement, et d'électricité positive du côté de l'autre armature. Pour déterminer l'état électrique que prendrait un tel corpuscule conducteur, on ne doit pas seulement prendre en considération l'effet immédiat de l'électricité qui se trouve sur les armatures, mais encore l'effet que les autres corpuscules, qui ont également acquis une polarité électrique, exercent sur le premier.

En second lieu, on peut imaginer que ces corpuscules aient déjà une polarité électrique dans l'état naturel du verre, avant qu'il subisse une action électrique extérieure, mais que la disposition de ces particules soit tout à fait irrégulière, de sorte que les pôles positifs et négatifs soient dirigés indifféremment dans tous les sens, et que, par suite, ces particules ne puissent pas produire un effet commun dans un sens déterminé. Mais si le verre se trouve soumis à une force électrique, ces particules se dirigeront de telle sorte que les pôles positifs se tournent d'une manière prédominante d'un côté, et les pôles négatifs de l'autre, ce qui rend naturellement possible une action commune. Cette direction régulière des particules sera d'autant plus complète et plus générale que la force électrique qui agit sera plus considérable.

Relativement aux forces qui agissent dans ce dernier cas, c'est-à-dire qui entrent en action lorsque les particules douées de polarité électrique, et d'abord disposées irrégulièrement, acquièrent une disposition régulière, on peut de nouveau faire deux hypothèses différentes. On peut admettre que la cohésion retient ces particules dans leur position primitive, de telle sorte qu'il naisse, de la rotation d'une particule, une réaction élastique qui tend à la remettre dans sa position primitive, et

que cette réaction, comme les autres forces élastiques, croît avec la grandeur de la rotation. Ou bien on peut admettre que la résistance que la cohésion oppose à la rotation des particules n'est qu'une résistance passive de la nature d'un frottement considérable, de sorte qu'il n'en résulte aucune force qui tende à faire reprendre aux particules leur position primitive. Dans ce cas, la seule force tendant à produire cet effet, résulterait de l'action électrique mutuelle des particules douées de polarité électrique et orientées.

Outre ces hypothèses, il en est encore une autre possible, qui a été faite par Maxwell, et qui a conduit ce physicien à des conclusions très intéressantes, dont il a déjà été fait mention; il en sera encore question plus loin.

§ 3.

Choix d'une hypothèse pour le calcul mathématique.

Les données d'observation que nous possédons jusqu'ici ne me paraissent pas encore assez complètes et assez sûres pour établir une théorie entièrement certaine de ce qui se passe sous l'influence des forces électriques extérieures dans l'intérieur de la couche interposée. Néanmoins, dans la première édition de ce livre, parue en 1867, j'ai cru nécessaire d'exposer, dans l'adoption d'une certaine hypothèse, un calcul propre à fournir une notion des actions extérieures dues à une telle polarité. J'ai, pour cela, choisi l'hypothèse qu'il se trouve, dans l'intérieur de la couche, des corpuscules

un peu conducteurs, séparés les uns des autres par des intervalles non conducteurs, de sorte que l'électricité ne peut se mouvoir qu'à l'intérieur des corpuscules isolés, et ne peut passer d'un corpuscule à l'autre.

Dans le cas de l'autre hypothèse ci-dessus mentionnée, d'après laquelle les corpuscules sont supposés polarisés tout d'abord et ne sont orientés que par les forces qui agissent sur eux, on peut aussi considérer comme valables les résultats de la première hypothèse, si l'on admet en outre que, lors de la déviation des particules de leurs positions primitives irrégulières, il se produit une réaction élastique proportionnelle à la déviation, et si, en outre, on admet que, même dans le cas des forces agissantes les plus fortes qui puissent se présenter, les déviations qui se produisent restent toujours très petites par rapport à celles qui devraient se produire pour que les particules fussent orientées d'une manière entièrement régulière. Il faudrait effectuer le calcul mathématique d'une manière un peu différente, si, au contraire, dans cette seconde hypothèse, on voulait admettre que la résistance que présente la cohésion à la rotation des particules, n'est que de la nature d'un fort frottement, de sorte qu'il ne peut en résulter aucune force rotative en sens inverse, et que, par suite, la seule force, qui tende à ramener les particules dans les positions irrégulières, est celle qui est déterminée par l'action électrique réciproque des particules électriques polarisées.

Mosotti, qui a également fait un travail mathématique sur la manière dont se comporte un milieu diélectrique (*Memorie di Mat. e di Fis. della Soc. ital. delle Scienze in Modena*, T. XXIV, p. 49), est parti d'un autre point de vue encore. Il imagine chaque molécule du milieu diélectrique entourée d'une atmosphère

d'éther, où l'éther tient lieu d'un fluide électrique. Cette atmosphère d'éther change de forme et de position sous l'influence des forces électriques étrangères, et produit par là la polarité électrique de la molécule.

L'hypothèse susmentionnée, que j'ai adoptée pour le calcul mathématique, est la même que celle que Poisson et Green ont choisie pour traiter mathématiquement le magnétisme, et nous pouvons par suite utiliser pour nos déterminations les équations fondamentales développées par ces mathématiciens, en appliquant tout ce qui est dit du fluide magnétique nord et sud à l'électricité positive et négative. Il n'est donc pas inutile de présenter ici brièvement la partie essentielle de ces développements.

§ 4.

Recherche des équations fondamentales de Poisson.

La fonction potentielle extérieure d'un des corpuscules conducteurs, que nous admettons se trouver dans l'intérieur du diélectrique et que nous considérons comme très petits, peut être déterminée de la manière suivante, lorsqu'on les suppose devenus électriques par influence, de sorte que leur surface est couverte d'une couche électrique en partie positive, en partie négative.

Soit un point p de coordonnées x, y, z dans l'intérieur du corpuscule, par exemple, le centre de gravité de l'espace qu'il occupe, et soient $x + \xi, y + \eta, z + \zeta$

les coordonnées d'un point de sa surface. Considérons ensuite un point p' de coordonnées x', y', z' à l'extérieur du corpuscule; désignons par r sa distance au point p et par r_1 sa distance au point de la surface; en négligeant les termes d'ordre supérieur, nous pouvons poser :

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \xi + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \eta + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \zeta.$$

Prenons maintenant au point de la surface un élément $d\omega$, et désignons par $hd\omega$ la quantité d'électricité qui se trouve sur cet élément; soit u la fonction potentielle du corpuscule et u' sa valeur au point p' ; on devra poser :

$$u' = \int \frac{hd\omega}{r_1},$$

où l'intégration s'étendra à la surface entière du corpuscule. Substituant à $\frac{1}{r_1}$ l'expression précédente, il vient :

$$u' = \frac{1}{r} \int hd\omega + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \int \xi hd\omega + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \int \eta hd\omega + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \int \zeta hd\omega.$$

La première intégrale du second membre est nulle, puisque l'électricité distribuée par influence à la surface du corpuscule consiste en électricité positive et négative, de telle manière que leur somme est nulle. Nous

introduirons pour les trois autres intégrales, qui représentent les *moments électriques*, une notation particulière ; nous écrirons :

$$a = \int \xi h d\omega ; \quad b = \int \eta h d\omega ; \quad c = \int \zeta h d\omega ; \quad (1)$$

l'équation précédente se transforme alors en :

$$u' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} a + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} b + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} c. \quad (2)$$

Prenons maintenant, au lieu où se trouve le corpuscule considéré, un élément de volume $d\tau$; nous pourrions en déterminer comme suit la fonction potentielle. Représentons par $Nd\tau$ le nombre de corpuscules conducteurs renfermés dans $d\tau$. Si ceux-ci diffèrent entre eux, quant à la grandeur, la forme et l'orientation de leurs dimensions principales, les quantités a, b, c auront des valeurs différentes pour les divers corpuscules, soient a_1, b_1, c_1 leurs valeurs moyennes. La fonction potentielle de l'élément de volume est alors :

$$\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} a_1 + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} b_1 + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} c_1 \right) Nd\tau$$

et si l'on pose, pour simplifier :

$$\alpha = Na_1 ; \quad \beta = Nb_1 ; \quad \gamma = Nc_1, \quad (3)$$

il vient :

$$\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \alpha + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \beta + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \gamma \right) d\tau.$$

Pour obtenir la fonction potentielle du diélectrique entier, en état de polarité, il faut intégrer cette expression par rapport à tout l'espace qu'il occupe. Nous choisirons la lettre U pour désigner cette fonction potentielle, et, si nous appelons U' sa valeur au point p' de coordonnées x', y', z', nous aurons l'équation :

$$U' = \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \alpha + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \beta + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \gamma \right) d\tau. \quad (4)$$

Il s'agit maintenant en outre de déterminer les quantités α , β , γ , ce qui exige que nous considérons les quantités a , b , c , qui représentent les moments électriques d'un des corpuscules. Ces moments sont produits par la force à laquelle le corpuscule est soumis ; il s'en suit que les composantes de cette force, que nous désignons par X, Y, Z, doivent se trouver dans une relation déterminée avec ces moments. Cette relation dépend de la grandeur, de la forme et de l'orientation du corpuscule, et il n'est, par suite, pas nécessaire qu'elle soit très simple ; cependant il est facile de reconnaître que, si les composantes de la force croisaient toutes trois dans un même rapport, les quantités a , b , c , devraient croître dans le même rapport, d'où il suit que chacune de ces trois grandeurs est une fonction homogène du premier degré en X, Y, Z, et qu'on peut former ainsi pour la première d'entre elles l'équation

$$a = eX + fY + gZ,$$

dans laquelle les coefficients e, f, g sont indépendants de la force. En vertu des équations (3), on peut tirer aussitôt de là l'équation suivante :

$$\alpha = N (e_1 X + f_1 Y + g_1 Z)$$

dans laquelle e_1, f_1, g_1 , sont les valeurs moyennes de e, f, g , pour les divers corpuscules qui se trouvent dans le voisinage les uns des autres.

Mais on doit admettre que, dans un corps isotrope, si les corpuscules n'ont pas eux mêmes une forme identique dans toutes les directions, c'est-à-dire la forme sphérique, ils sont au moins orientés si différemment que, pour chaque corpuscule, chaque direction est également probable. Il s'en suit que les moments relatifs à la direction x que peut déterminer dans les divers corpuscules une force agissant suivant la direction y , ont une valeur moyenne nulle, puisque les moments positifs et les moments négatifs sont également probables, et on doit, par suite, poser : $f_1 = 0$. On peut dire la même chose d'une force agissant suivant la direction z , d'où il résulte : $g_1 = 0$. Il ne reste donc dans la parenthèse de l'équation précédente que le premier terme, et si nous introduisons pour le produit Ne_1 la simple notation η , l'équation sera :

$$\alpha = \eta X. \tag{5}$$

D'une manière absolument semblable, on peut poser, pour un corps isotrope :

$$\beta = \eta Y ; \quad \gamma = \eta Z. \tag{5a}$$

En ce qui concerne la force en vertu de laquelle les corpuscules se polarisent, force dont nous avons désigné

les composantes par X, Y, Z, elle provient en partie de l'électricité qui n'appartient pas au diélectrique et qui se trouve n'importe où, et en partie du diélectrique lui-même.

Si V représente la fonction potentielle de l'électricité qui n'appartient pas au diélectrique, les composantes de la première partie de la force seront simplement :

$$-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Pour déterminer ensuite les composantes de la deuxième partie de la force, c'est-à-dire les composantes de la force exercée sur le corpuscule par le diélectrique qui l'environne, nous nous reporterons à la fonction potentielle du diélectrique que nous avons considérée plus haut. Puisqu'il s'agit ici de la valeur que la fonction potentielle a au point (x, y, z) , nous permuterons, dans l'équation (4) qui détermine la fonction potentielle du diélectrique au point (x', y', z') , les coordonnées avec accent avec les coordonnées sans accent, en attribuant les coordonnées x', y', z' à un élément $d\tau'$, et en désignant par x, y, z , les coordonnées du point pour lequel on détermine la fonction potentielle. Conformément à cette manière de faire, nous emploierons aussi la notation U au lieu de U' pour la fonction potentielle, et les notations α', β', γ' au lieu de α, β, γ pour les coefficients qui se trouvent dans le second membre et qui se rapportent à l'élément $d\tau'$. L'équation devient ainsi :

$$U = \int \left(\frac{\partial}{\partial x'} \frac{1}{r'} \alpha' + \frac{\partial}{\partial y'} \frac{1}{r'} \beta' + \frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{r'} \gamma' \right) d\tau'. \quad (6)$$

En ce qui concerne la manière dont on doit déduire

de cette fonction potentielle, les composantes de la force en question, il faut faire une remarque particulière. Ces composantes ne peuvent pas être simplement représentées par :

$$-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Quand il est question de la force que subit un corpuscule conducteur, et qui cause une distribution inégale de son électricité, on ne doit pas y comprendre la force exercée par l'électricité même du corpuscule. On doit, par suite, retrancher de la fonction potentielle du diélectrique, la partie qui provient de l'électricité du corpuscule considéré. L'expression de U ci-dessus étant une intégrale relative à l'espace, nous pouvons nous fonder sur la considération suivante. L'espace occupé par le diélectrique n'est, d'après, notre supposition, rempli que partiellement par les corpuscules conducteurs ; la partie restante consiste en interstices non conducteurs. Mais on peut toujours s'imaginer que l'espace entier est divisé en petits espaces, dont chacun contient un corpuscule conducteur et peut être pris comme cette partie de l'espace entier, qui correspond à ce corpuscule. Si maintenant on se figure que le corpuscule pour lequel on doit déterminer la force est enlevé, le petit espace qui lui correspond formera une cavité, et c'est la force qui règne dans celle-ci qu'il s'agit de déterminer. Pour exprimer les composantes de la force, nous devons, au lieu de l'intégrale (6) donnée pour la fonction potentielle, employer une intégrale qui ne comprend pas la petite cavité.

Quant à la forme de cette cavité, on peut se figurer que pour les divers corpuscules conducteurs, les espaces correspondants présentent des différences accidentelles,

soit quant à la forme même, soit quant à l'orientation de leurs dimensions principales. Des différences de cette nature entraînent aussi des différences dans la force pour les diverses cavités. Mais dans notre détermination, qui se rapporte à la force agissant *en moyenne*, nous pouvons faire abstraction de ces écarts accidentels, et nous y arriverons de la façon la plus simple, en considérant la cavité comme sphérique.

Nous supposons donc, dans le diélectrique, un petit espace limité par une sphère, et nous formerons la fonction potentielle du diélectrique extérieur à cet espace pour un point quelconque (x, y, z) se trouvant dans cet espace. En nommant, comme jusqu'ici, U la fonction potentielle du diélectrique entier, nous désignerons par U_1 la fonction potentielle du diélectrique qui se trouve en dehors de la petite sphère. Alors les composantes de la force en question seront représentées par

$$-\frac{\partial U_1}{\partial x}, \quad -\frac{\partial U_1}{\partial y}, \quad -\frac{\partial U_1}{\partial z}.$$

Pour pouvoir rechercher la relation entre U et U_1 , employons la notation U_0 pour désigner la fonction potentielle du diélectrique contenu dans la petite sphère, fonction pour la détermination de laquelle nous avons à effectuer l'intégration indiquée dans (6) pour le petit espace sphérique. Alors nous pourrons poser

$$U_1 = U - U_0, \quad (7)$$

et il s'agit simplement encore d'effectuer réellement le calcul nécessaire à la détermination de U_0 .

Si l'on doit seulement étendre l'intégration indiquée dans (6) à l'espace sphérique supposé très petit, on

pourra considérer comme constantes les quantités α' , β' , γ' , et leur attribuer les valeurs qui conviennent au point (x, y, z) situé à l'intérieur de la sphère, valeurs que nous désignons par α , β , γ . En conséquence, nous pouvons faire sortir ces quantités du signe intégral, et écrire l'équation :

$$U_0 = \alpha \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} d\tau + \beta \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} d\tau + \gamma \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} d\tau. \quad (8)$$

Mais maintenant, en vertu de l'équation

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2},$$

on doit poser :

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} = - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x},$$

et si l'on introduit cette valeur dans la première intégrale, on peut indiquer en dehors du signe d'intégration la différentiation par rapport à x , (quantité indépendante de la position de l'élément $d\tau$), et poser ainsi :

$$\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} d\tau = - \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{d\tau}{r}.$$

Pour les deux autres directions des coordonnées, on a des équations correspondantes ; par là, l'équation (8) se transforme en :

$$U_0 = - \alpha \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{d\tau}{r} - \beta \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{d\tau}{r} - \gamma \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{d\tau}{r}. \quad (9)$$

L'intégrale qui se présente encore ici se trouve aisément, et peut même être supposée connue, puisqu'elle n'est pas autre chose que la fonction potentielle d'une sphère homogène de densité 1 pour un point intérieur. Désignons par x_0, y_0, z_0 les coordonnées du centre de la sphère et par r_0 son rayon ; nous obtenons¹ :

$$\int \frac{d\tau}{r} = 2\pi \left\{ r_0^2 - \frac{1}{3} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2] \right\}.$$

De là résulte ensuite :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{d\tau}{r} &= -\frac{4\pi}{3} (x - x_0); & \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{d\tau}{r} &= -\frac{4\pi}{3} (y - y_0); \\ & & \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{d\tau}{r} &= -\frac{4\pi}{3} (z - z_0), \end{aligned}$$

et l'équation (9) se transforme en

$$U_0 = \frac{4\pi}{3} [\alpha (x - x_0) + \beta (y - y_0) + \gamma (z - z_0)], \quad (10)$$

en substituant cette valeur dans (7), on obtient :

$$U_1 = U - \frac{4\pi}{3} [\alpha (x - x_0) + \beta (y - y_0) + \gamma (z - z_0)]. \quad (11)$$

Comme le rayon r_0 n'entre pas dans cette expression, il en résulte qu'il n'est pas nécessaire, pour la détermination de U_1 , de connaître la grandeur de l'espace correspondant à un corpuscule conducteur unique.

1. Voir mon ouvrage sur la fonction potentielle, § 34, équation (125a), dans laquelle on remplace A par r_0 et l'on fait $\alpha = 0$.

En différentiant l'équation précédente, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{4\pi}{3} \alpha \\ \frac{\partial U_1}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{4\pi}{3} \beta \\ \frac{\partial U_1}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{4\pi}{3} \gamma \end{array} \right. \quad (12)$$

Revenons maintenant aux équations qui déterminent les composantes de la force entière qui agit sur le corpuscule conducteur, savoir :

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U_1}{\partial x}; \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U_1}{\partial y}; \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial U_1}{\partial z},$$

et remplaçons les derniers coefficients différentiels par les valeurs données dans (12); il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = -\frac{\partial (V + U)}{\partial x} + \frac{4\pi}{3} \alpha \\ Y = -\frac{\partial (V + U)}{\partial y} + \frac{4\pi}{3} \beta \\ Z = -\frac{\partial (V + U)}{\partial z} + \frac{4\pi}{3} \gamma \end{array} \right. \quad (13)$$

Nous allons maintenant faire usage de ces expressions des composantes de la force dans les équations (5) et (5_a). L'équation (5) se transforme en :

$$\alpha = \eta \left(-\frac{\partial (V + U)}{\partial x} + \frac{4\pi}{3} \alpha \right),$$

d'où l'on tire :

$$\alpha = - \frac{\eta}{1 - \frac{4\pi}{3} \eta} \frac{\partial (V + U)}{\partial x}. \quad (14)$$

Nous ferons, pour simplifier :

$$E = \frac{\eta}{1 - \frac{4\pi}{3} \eta}. \quad (15)$$

Formant alors en même temps les équations correspondantes pour les deux autres directions coordonnées, nous obtiendrons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = - E \frac{\partial (V + U)}{\partial x} \\ \beta = - E \frac{\partial (V + U)}{\partial y} \\ \gamma = - E \frac{\partial (V + U)}{\partial z} \end{array} \right. \quad (16)$$

Après avoir ainsi déterminé les quantités α , β , γ , nous substituerons leurs valeurs dans l'équation (4), et nous obtiendrons :

$$U' = - \int E \left(\frac{\partial (V + U)}{\partial x} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{\partial (V + U)}{\partial y} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \frac{\partial (V + U)}{\partial z} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\tau. \quad (17)$$

Employant ici, pour abrégier, le signe sommatoire introduit au chapitre I, § 11, nous pourrons écrire :

$$U' = - \int d\tau \cdot E \sum \frac{\partial (V + U)}{\partial x} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}. \quad (17a)$$

Telle est l'équation qui sert à la détermination de la fonction potentielle U du diélectrique, telle qu'elle résulte des recherches de Poisson sur le magnétisme et des recherches concordantes de Green.

En ce qui concerne la quantité E qui se présente ici, sa valeur peut varier entre 0 et ∞ suivant la nature du diélectrique. La valeur 0 convient aux substances qui sont absolument non conductrices et qui, par suite, ne peuvent admettre aucune polarité par influence ; la valeur ∞ convient aux substances tout-à-fait conductrices. Pour des substances telles que celles que nous avons prises comme diélectriques, c'est-à-dire constituées en partie de corpuscules conducteurs, en partie d'interstices non conducteurs, on peut établir une relation entre les quantités désignées par η et E et l'espace rempli par les corpuscules conducteurs, tout au moins pour le cas où l'on suppose les corpuscules sphériques. En effet, si cet espace est une fraction g de l'espace total occupé par le diélectrique, on a pour η l'équation :

$$\eta = \frac{3}{4\pi} g, \quad (18)$$

d'où résulte, en vertu de (15), l'expression suivante de E :

$$E = \frac{3g}{4\pi (1 - g)}. \quad (19)$$

§ 5.

Formes variées de l'équation obtenue.

On peut transformer de différentes manières l'équation (17) obtenue dans le paragraphe précédent.

Si l'on considère d'abord le premier seulement des termes qui se trouvent dans la parenthèse, on peut poser :

$$E \frac{\partial(V+U)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E}{r} \frac{\partial(V+U)}{\partial x} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left(E \frac{\partial(V+U)}{\partial x} \right). \quad (20)$$

Cette expression doit être multipliée par $d\tau$, puis intégrée pour tout l'espace occupé par le diélectrique. Si on remplace $d\tau$ par $dx dy dz$, on peut effectuer l'intégration en x dans le premier des termes du second membre, et il vient :

$$\int \int \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E}{r} \frac{\partial(V+U)}{\partial x} \right) dx dy dz = \int \int \left[\left(\frac{E}{r} \frac{\partial(V+U)}{\partial x} \right)_2 - \left(\frac{E}{r} \frac{\partial(V+U)}{\partial x} \right)_1 \right] dy dz, \quad (21)$$

où les indices 1 et 2 expriment que, pour les expressions qui se trouvent dans la parenthèse, il faut prendre les valeurs qui correspondent aux lieux où une parallèle à l'axe des x , et dont les autres coordonnées sont y et z , coupe la surface qui limite le diélectrique. Si cette

droite coupait la surface plus de deux fois, et elle ne pourrait en tout cas le faire qu'un nombre pair de fois, il faudrait, à raison de ce fait, introduire plus de termes dans le second membre.

Désignons maintenant par $d\omega_1$ l'élément découpé, dans la surface du diélectrique, par un prisme infiniment mince de section $dy dz$ situé le long de la parallèle x , au lieu indiqué par l'indice 1 ; on a alors :

$$dy dz = \cos \lambda d\omega_1,$$

où λ est l'angle que fait avec l'axe des x la normale à l'élément $d\omega_1$, dirigée vers l'intérieur. Mais en désignant par n_1 la normale, on peut écrire :

$$\cos \lambda = \frac{\partial x}{\partial n_1};$$

l'équation précédente devient par là :

$$dy dz = \frac{\partial x}{\partial n_1} d\omega_1.$$

Pour le lieu indiqué par l'indice 2, l'équation correspondante est, si l'on remarque que la direction positive de l'axe des x n'y est pas dirigée vers l'intérieur, mais bien vers l'extérieur :

$$dy dz = - \frac{\partial x}{\partial n_2} d\omega_2.$$

Par la substitution de ces valeurs, l'équation (21) se transforme en :

$$\iiint \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E}{r} \frac{\partial(V+U)}{\partial x} \right) dx dy dz = - \int \frac{E}{r} \frac{\partial(V+U)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} d\omega,$$

où, dans le second membre, l'intégration doit être effectuée pour la surface totale qui limite le diélectrique.

Si nous revenons maintenant à l'équation (20), qui doit être multipliée par $d\tau$ puis intégrée, nous obtenons l'équation suivante, en substituant la valeur qui précède :

$$\int E \frac{\partial(V+U)}{\partial x} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\tau = - \int \frac{E}{r} \frac{\partial(V+U)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} d\omega \\ - \int \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left(E \frac{\partial(V+U)}{\partial x} \right) d\tau.$$

On a des équations semblables pour les directions des y et des z . Si on fait la somme de ces trois équations, et si on change le signe de l'équation ainsi obtenue, le premier membre est égal à U' en vertu de (17). Dans le second membre, nous pouvons poser sous le premier signe d'intégration :

$$\frac{\partial(V+U)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial(V+U)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial(V+U)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\partial(V+U)}{\partial n};$$

sous le second signe intégral, nous pouvons indiquer la somme par l'emploi du signe sommatoire, et nous obtenons :

$$U' = \int \frac{E}{r} \frac{\partial(V+U)}{\partial n} d\omega + \int \frac{1}{r} \sum \frac{\partial}{\partial x} \left(E \frac{\partial(V+U)}{\partial x} \right) d\tau. \quad (22)$$

Il résulte de cette équation que l'on peut considérer la fonction potentielle du diélectrique comme la fonction potentielle d'une quantité d'électricité qui se trouve en partie à la surface du diélectrique, en partie répandue d'une manière continue dans l'espace qu'il occupe ; la densité superficielle étant :

$$E \frac{\partial (V + U)}{\partial n},$$

et la densité par rapport à l'espace

$$\sum \frac{\partial}{\partial x} \left(E \frac{\partial (V + U)}{\partial x} \right).$$

Mais puisque, d'autre part, pour l'électricité distribuée de cette manière, et dont U est à considérer comme la fonction potentielle, la densité superficielle peut se représenter par :

$$- \frac{1}{4\pi} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_{+0} - \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_{-0} \right]$$

et la densité par rapport à l'espace par :

$$- \frac{1}{4\pi} \Delta U,$$

on obtient les équations :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_{+0} - \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_{-0} = - 4\pi E \frac{\partial (V + U)}{\partial n}, \quad (23)$$

$$\Delta U = - 4\pi \sum \frac{\partial}{\partial x} \left(E \frac{\partial (V + U)}{\partial x} \right). \quad (24)$$

Si le diélectrique est homogène, et si, par suite, E est constant, la dernière équation se simplifie et devient

$$\Delta U = - 4\pi E \sum \frac{\partial^2 (V + U)}{\partial x^2} = - 4\pi E \Delta (V + U); \quad (25)$$

on peut aussi lui donner la forme suivante :

$$\Delta U = - \frac{4\pi E}{1 + 4\pi E} \Delta V. \quad (25a)$$

Si, en outre, on suppose que l'électricité qui n'appartient pas au diélectrique, et dont V est la fonction potentielle, se trouve entièrement en dehors du diélectrique, on aura partout à l'intérieur de celui-ci $\Delta V = 0$ et, par suite, aussi $\Delta U = 0$. Dans ces hypothèses, l'équation (22) prend la forme simple suivante :

$$U' = E \int \frac{1}{r} \frac{\partial (V + U)}{\partial n} d\omega. \quad (26)$$

Une autre transformation de l'équation (17) peut s'obtenir en posant

$$E \frac{\partial (V + U)}{\partial x} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[E(V + U) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right] - (V + U) \frac{\partial}{\partial x} \left(E \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right).$$

Si l'on procède avec cette équation, ainsi qu'on l'a fait ci-dessus avec l'équation (20), on obtient :

$$U' = \int E(V + U) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\omega + \int (V + U) \sum \frac{\partial}{\partial x} \left(E \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right) d\tau.$$

ou, sous une autre forme :

$$\begin{aligned} U' &= \int E(V + U) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\omega + \int E(V + U) \Delta \frac{1}{r} d\tau \\ &+ \int (V + U) \sum \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial E}{\partial x} d\tau. \end{aligned} \quad (27)$$

Or l'intégrale :

$$\int E (V + U) \Delta \frac{1}{r} d\tau$$

peut se déterminer de suite. Si le point (x', y', z') , à partir duquel on mesure la distance r et pour lequel U a la valeur U' , se trouve en dehors du diélectrique, il vient $\Delta \frac{1}{r} = 0$, et l'intégrale est également nulle. Si, au contraire, ce point est à l'intérieur du diélectrique, on a :

$$\int E (V + U) \Delta \frac{1}{r} d\tau = -4\pi E' (V' + U')$$

où $E' (V' + U')$ doit représenter la valeur de $E (V + U)$ au point (x', y', z') ¹. D'après cela, l'équation (27) donne pour un point situé en dehors du diélectrique :

$$U' = \int E (V + U) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\omega + \int (V + U) \sum \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial E}{\partial x} d\tau, \quad (28)$$

et pour point situé à l'intérieur :

$$U' = -4\pi E' (V' + U') + \int E (V + U) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\omega + \int (V + U) \sum \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial E}{\partial x} d\tau. \quad (28a)$$

1. Voyez mon livre « La fonction potentielle et le potentiel », 3^e édition, § 41, équation (149).

Si le diélectrique est homogène, et si, par suite, E est constant, on obtient, pour le cas du point situé à l'extérieur :

$$U' = E \int (V + U) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\omega \quad (29)$$

et pour le cas du point situé à l'intérieur :

$$U' = -4\pi E (V' + U') + E \int (V + U) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\omega. \quad (29a)$$

§ 6.

Application des équations obtenues aux carreaux de Franklin et aux bouteilles de Leyde.

Dans mon article publié en 1867¹, j'ai fait usage de l'équation (29) pour déterminer la relation entre les quantités d'électricité qui se trouvent sur les armatures d'un carreau de Franklin ou d'une bouteille de Leyde, et la différence de niveau potentiel qui en résulte ; je reproduirai également ici ces calculs.

Pour plus de simplicité, supposons d'abord un carreau de Franklin muni d'armatures *circulaires*. Le plateau de verre à faces parallèles qui sépare les deux armatures est le corps à considérer ; il est inutile que nous

1. Voir ma collection de mémoires, t. II, Paris, E. Lacroix, Addition au Mémoire X.

envisagions le plateau tout entier, et nous pouvons nous borner à en considérer la partie circulaire qui est entre les armatures ; car la partie qui dépasse et qui forme le bord libre, ne subira par la charge des armatures qu'une modification très faible de son état intérieur, et, par conséquent, ne contribuera que très peu à changer la valeur de la fonction potentielle U . La surface à laquelle doit s'étendre l'intégration est donc celle d'un cylindre à bases circulaires et d'une faible hauteur.

Le point p' , pour lequel nous avons à déterminer d'abord la valeur de U , désignée par U' , sera choisi de la manière suivante. Imaginons une normale élevée vers l'extérieur au centre du cercle sur lequel se trouve l'armature A, plaçons p' sur cette normale, et tellement près du cercle que sa distance à celui-ci soit infiniment petite relativement aux dimensions du plateau. Le point p' ainsi déterminé se nommera simplement le milieu de l'armature A.

Afin d'effectuer l'intégration indiquée dans l'équation (29), et relative à la surface du cylindre de verre, nous pourrions partager cette surface en trois parties : 1° le cercle qui est recouvert de l'armature A, 2° le cercle opposé qui est recouvert par l'armature B, 3° la surface latérale du cylindre.

Pour les deux cercles, l'intégration est très facile à effectuer, parce que, sur chacune des armatures, la fonction potentielle totale, représentée par la somme $V + U$, doit avoir une valeur constante.

Pour effectuer le calcul relativement au cercle recouvert de l'armature A, nous supposerons d'abord que le point p' , au lieu d'être infiniment voisin de la surface, soit à une distance arbitraire l de celle-ci, sur la partie extérieure de la normale élevée au centre. Imaginons

maintenant, en un autre point quelconque du cercle, distant du centre d'une quantité ρ , une normale élevée à sa surface et pénétrant dans le verre d'une quantité n . En représentant par r la distance de l'extrémité de cette normale au point p' , on aura :

$$r = \sqrt{\rho^2 + (l + n)^2}.$$

D'où résulte :

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} = - \frac{l + n}{[\rho^2 + (l + n)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

Si l'on pose $n = 0$, comme on doit le faire quand le coefficient différentiel est relatif à la surface du verre, il viendra :

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} = - \frac{l}{(\rho^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Représentons actuellement par K la valeur constante qu'a la somme $V + U$ sur ce cercle, et nommons a le rayon de celui-ci ; nous obtiendrons, pour la partie de l'intégrale relative à ce cercle, et que nous distinguerons de l'intégrale totale en affectant de l'indice 1 l'élément de surface $d\omega$ qui se trouve sous le signe :

$$\begin{aligned} \int_{(V + U)} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} d\omega_1 &= - 2\pi K \int_0^a \frac{l\rho d\rho}{(\rho^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= - 2\pi K \left(1 - \frac{l}{\sqrt{a^2 + l^2}} \right). \end{aligned}$$

Imaginons maintenant, comme nous l'avons dit plus haut, que le point p' , que nous avons pris à une distance arbitraire l de la surface, se rapproche de celle-ci de telle sorte que l devienne infiniment petit relativement aux dimensions du plateau ; l'équation précédente deviendra alors :

$$\int (V + U) \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} d\omega_1 = - 2\pi K. \quad (30)$$

Formons de la même manière la seconde partie de l'intégrale, qui est relative au cercle recouvert de l'armature B, et choisissons immédiatement le point p' infiniment voisin de la surface du premier cercle. En un point du second, distant du centre de la quantité ρ , élevons-lui une normale qui pénètre dans le verre de la quantité n ; nous aurons, en désignant par r la distance de l'extrémité de la normale au point p' , et par c celle des deux cercles, l'équation :

$$r = \sqrt{\rho^2 + (c - n)^2},$$

d'où résulte :

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} = \frac{c - n}{[\rho^2 + (c - n)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

ou, si nous posons $n = 0$ dans cette expression, afin qu'elle se rapporte à la surface même du cercle :

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} = \frac{c}{(\rho^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Soit K_1 la valeur constante qu'a la somme $V + U$ sur ce cercle ; nous obtiendrons, pour la seconde partie de l'intégrale, que nous distinguerons de l'intégrale totale en affectant de l'indice 2 l'élément $d\omega$, l'expression :

$$\int (V + U) \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} d\omega_2 = 2\pi K_1 \int_0^a \frac{c\rho d\rho}{(\rho^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}} \\ = 2\pi K_1 \left(1 - \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}\right).$$

Si l'on développe cette expression suivant les puissances de $\frac{c}{a}$, et que l'on néglige les termes d'ordre supérieur, il vient :

$$\int (V + U) \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} d\omega_2 = 2\pi K_1 \left(1 - \frac{c}{a}\right). \quad (31)$$

Nous avons enfin à considérer encore la surface latérale du cylindre. En un point de cette surface, distant de la quantité z de la circonférence du premier cercle, imaginons une normale de longueur n , élevée vers l'intérieur ; la distance r de son extrémité au point p' sera déterminée par l'équation :

$$r = \sqrt{(a - n)^2 + z^2},$$

d'où résulte :

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} = \frac{a - n}{[(a - n)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}},$$

ou, en posant $n = 0$:

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} = \frac{a}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

La valeur de la somme $V + U$ n'est pas partout la même sur la surface du cylindre, mais varie le long d'une génératrice. Si la distance c des deux cercles est faible relativement à leur rayon a , on peut admettre avec une grande approximation que la valeur de la somme $V + U$ varie uniformément le long d'une génératrice ; et l'on pourra par conséquent poser, pour un point distant de la première circonférence de la quantité z :

$$V + U = K + \frac{K_1 - K}{c} z.$$

D'après cela, on obtiendra, pour la partie de l'intégrale relative à la surface latérale du cylindre, dans laquelle nous affecterons $d\omega$ de l'indice 3 :

$$\begin{aligned} \int (V + U) \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} d\omega_3 &= 2\pi a \int_0^c \left(K + \frac{K_1 - K}{c} z \right) \frac{adz}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{2\pi a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \left[K \frac{c}{a} + (K_1 - K) \frac{\sqrt{a^2 + c^2} - a}{c} \right]. \end{aligned}$$

En développant cette expression suivant les puissances de $\frac{c}{a}$, et négligeant les termes d'ordre supérieur, elle devient :

$$\int (V + U) \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} d\omega_3 = \pi (K + K_1) \frac{c}{a}. \quad (32)$$

Réunissant les trois parties de l'intégrale données par les expressions (30), (31) et (32), nous obtiendrons :

$$\int (V + U) \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} d\omega = -2\pi K + 2\pi K_1 \left(1 - \frac{c}{a}\right) + \pi (K + K_1) \frac{c}{a},$$

ou bien :

$$\int (V + U) \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} d\omega = 2\pi (K_1 - K) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{c}{a}\right). \quad (33)$$

La valeur de cette intégrale, substituée dans l'équation (29), donnera :

$$U' = 2\pi E (K_1 - K) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{c}{a}\right). \quad (34)$$

Il sera bon d'introduire ici quelques changements de notation. Comme nous n'aurons à considérer les fonctions potentielles V et U que pour le milieu des deux armatures, nous désignerons simplement par V et U les valeurs des fonctions potentielles pour le milieu de l'armature A , et par V_1 et U_1 leurs valeurs pour le milieu de l'armature B . Nous aurons donc à poser :

$$K = V + U,$$

$$K_1 = V_1 + U_1,$$

et en même temps, comme le point p' doit se trouver au milieu de l'armature A :

$$U' = U.$$

Par là, l'équation (34) devient :

$$U = 2\pi E (V_1 + U_1 - V - U) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{c}{a}\right). \quad (35)$$

Afin d'obtenir l'équation correspondante pour le cas où le point p' se trouve au milieu de l'armature B, il suffira d'intervertir les lettres avec et sans indices dans l'équation précédente, ce qui donnera :

$$U_1 = 2\pi E (V + U - V_1 - U_1) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{c}{a}\right). \quad (36)$$

En soustrayant ces deux équations l'une de l'autre, on obtient :

$$U - U_1 = -4\pi E (V + U - V_1 - U_1) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{c}{a}\right),$$

d'où résulte l'équation qui sert à déterminer la différence de niveau potentiel $U - U_1$, et qui, en négligeant les termes d'ordre supérieur, peut s'écrire sous la forme suivante :

$$U - U_1 = -\frac{4\pi E}{1 + 4\pi E} \left(1 - \frac{1}{2(1 + 4\pi E)} \cdot \frac{c}{a}\right) (V - V_1). \quad (37)$$

Nous ferons usage, par la suite, de cette équation.

Nous avons encore une remarque essentielle à faire. La différence $V - V_1$, qui entre dans cette équation, n'a pas, pour un carreau de Franklin chargé, exactement la même valeur que celle qu'on obtiendrait dans le cas où les deux armatures seraient chargées des mêmes quantités d'électricité, mais où le verre n'aurait acquis aucune

polarité électrique. Cette polarité produit en effet, sur les armatures, une disposition de l'électricité un peu différente de celle qu'elle prendrait sans cette polarité. Mais cette différence ne peut être que très faible.

En effet, dans le cas même où le verre agirait simplement comme isolant, l'électricité se répandrait sur les deux faces d'une manière tellement uniforme, qu'à l'exception des points qui sont dans le voisinage immédiat du bord, la densité en un point quelconque ne différerait de la densité moyenne que d'une quantité de l'ordre $\frac{c}{a}$ par rapport à la densité totale. Or, la polarité du verre ne peut produire d'autre effet que de répandre l'électricité sur les armatures plus uniformément encore que cela n'aurait lieu sans cette polarité ; les modifications qui en résultent dans la densité ne peuvent donc être que des quantités de l'ordre $\frac{c}{a}$. La modification que ces petits changements de distribution de l'électricité occasionnent dans la différence de niveau potentiel $V - V_1$ ne pourra donc être qu'une quantité du même ordre, à savoir de l'ordre $\frac{c}{a}$ relativement à sa valeur totale.

Dans les calculs qui précèdent, nous avons tenu compte des termes du premier ordre en $\frac{c}{a}$ dans les développements en série, et nous avons négligé les termes d'ordre supérieur. Mais, si nous nous contentons d'un moindre degré d'exactitude, et si nous négligeons également les termes du premier ordre, nous pourrions regarder la valeur de $V - V_1$ dans l'équation ainsi simplifiée comme concordant avec celle que l'on obtiendrait au moyen des mêmes quantités d'électricité, sans polarité électrique du verre.

En outre, on peut dire que cette équation, ainsi simplifiée, ne s'applique pas seulement à un carreau de Franklin à armatures circulaires, mais encore à ceux dont les armatures ont une autre forme, ainsi qu'aux bouteilles de Leyde. On voit en effet, par les calculs précédents, que les termes relatifs à la circonférence, et qui dépendent seuls de la forme circulaire que nous avons admise, sont de l'ordre $\frac{c}{a}$; et l'on peut dire en général que les termes qui dépendent de la forme des armatures sont de l'ordre $\frac{c}{\sqrt{s}}$, en représentant par s la superficie des armatures. Pour ce qui regarde les termes qui dépendent de la courbure des faces, ils ne pourront non plus être que de l'ordre $\frac{c}{\sqrt{s}}$, pourvu que les courbures ne soient pas tellement fortes que les rayons de courbure deviennent très petits par rapport à \sqrt{s} . Il résulte de là, qu'en négligeant les termes de l'ordre $\frac{c}{\sqrt{s}}$, on obtient une équation qui est indépendante de la forme et de la courbure des armatures.

L'équation (37), ainsi simplifiée, prend la forme :

$$U - U_1 = - \frac{4\pi E}{1 + 4\pi E} (V - V_1). \quad (38)$$

Nous pouvons immédiatement joindre à cette équation celle qui exprime la différence totale de niveau potentiel existant réellement entre les deux armatures. La fonction potentielle totale de toutes les quantités d'électricité décomposée (aussi bien de celles qui se trouvent sur les armatures que de celles qui se trouvent sur les particules de verre polarisées) est, à l'intérieur de la première armature, $V + U$, et, à l'intérieur de la seconde,

$V_1 + U_1$; la différence totale de niveau potentiel entre les deux armatures sera donc $V + U - V_1 - U_1$. Nous obtiendrons cette quantité en ajoutant $V - V_1$ aux deux membres de l'équation précédente, ce qui donnera

$$V + U - V_1 - U_1 = \frac{1}{1 + 4\pi E} (V - V_1). \quad (39)$$

Cette équation exprime que la différence de niveau potentiel, qui surgit dans la charge d'un carreau de Franklin ou d'une bouteille de Leyde, est plus petite, dans le rapport de $\frac{1}{1 + 4\pi E}$ à 1, que celle que l'on obtiendrait en employant les mêmes quantités d'électricité, si le verre n'acquerrait aucune polarité, mais agissait simplement comme isolant.

On peut encore transformer les deux équations précédentes en introduisant dans le second membre, au lieu de $V - V_1$, une des quantités d'électricité considérées. Pour le degré d'exactitude dont nous nous contentons, nous pouvons regarder les quantités d'électricité qui se trouvent sur les deux armatures comme égales entre elles en valeur absolue, et par suite, les représenter par Q et $-Q$. Pour déterminer Q nous emploierons l'équation suivante, qui correspond à la première des équations (38) du chapitre précédent, si l'on y néglige δ vis-à-vis de 1, ainsi que le terme qui ne renferme pas c au dénominateur :

$$Q = \frac{s}{4\pi c} (V - V_1). \quad (40)$$

Au moyen de cette équation, les deux précédentes se changent en :

$$U - U_1 = - \frac{4\pi c}{s} \frac{4\pi E}{1 + 4\pi E} Q. \quad (41)$$

$$V + U - V_1 - U_1 = \frac{4\pi c}{s} \frac{1}{1 + 4\pi E} Q. \quad (42)$$

§ 7.

Equations complètes pour les deux armatures d'une bouteille de Leyde.

Après avoir déterminé dans le paragraphe précédent la relation entre la différence de niveau potentiel $V + U - V_1 - U_1$, et les quantités d'électricité qui se trouvent sur les armatures, en négligeant la petite différence qui existe entre les valeurs absolues de ces deux quantités d'électricité, nous pouvons également former les expressions complètes des quantités d'électricité, dans lesquelles en réalité quelques constantes restent indéterminées, mais qui correspondent entièrement aux expressions que nous avons établies à la fin du chapitre précédent, dans le cas où la couche qui sépare les armatures est considérée comme un simple isolateur.

Désignons, comme alors, par F et G les valeurs de la fonction potentielle totale sur l'armature intérieure et sur l'extérieure, en posant :

$$V + U = F \quad \text{et} \quad V_1 + U_1 = G; \quad (43)$$

désignons, en outre, par M et N les quantités d'électricité qui se trouvent sur les deux armatures ; entre les quantités F, G, M et N, doivent en tout cas subsister les équations (30) obtenues au chapitre précédent :

$$\begin{cases} M = \alpha(F - G) + \alpha F \\ N = \alpha(G - F) + \beta G. \end{cases} \quad (44)$$

Ces équations sont, en effet, valables pour deux corps conducteurs quelconques, dans le voisinage desquels peuvent se trouver d'autres corps conducteurs quelconques, qui sont en communication avec le sol, ou qui, s'ils sont isolés, ne reçoivent pas d'électricité du dehors. Cette dernière condition de ne recevoir du dehors aucune électricité est remplie pour les corpuscules conducteurs qui se trouvent dans l'intérieur du verre, et la présence de ces corpuscules ne peut donc détruire la validité des équations.

Quant aux constantes qui se présentent dans les équations, la quantité α a été représentée dans le chapitre précédent par l'expression suivante :

$$\alpha = \frac{s}{4\pi c} (1 + \delta),$$

pour le cas où un simple isolateur se trouve entre les armatures ; δ est une quantité dont la valeur n'est pas la même pour toutes les bouteilles, mais qui est en tout cas toujours très petite vis à vis de l'unité. Nous devons maintenant modifier un peu cette expression dans le cas où un diélectrique se trouve entre les armatures, c'est-à-dire que nous devons, ainsi qu'on le reconnaît de suite par l'équation (42) donnée au paragraphe précédent, remplacer la quantité $\frac{s}{4\pi c}$ par $\frac{s}{4\pi c} (1 + 4\pi E)$,

tandis que nous pouvons conserver simplement δ comme une quantité indéterminée, mais petite vis-à-vis de l'unité. L'expression de a prend ainsi la forme ci-après :

$$a = \frac{s}{4\pi c} (1 + 4\pi E) (1 + \delta). \quad (45)$$

D'après cela, nous obtenons les équations suivantes pour une bouteille de Leyde :

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \frac{s}{4\pi c} (1 + 4\pi E) (1 + \delta) (F - G) + \alpha F \\ N = \frac{s}{4\pi c} (1 + 4\pi E) (1 + \delta) (G - F) + \beta G, \end{array} \right. \quad (46)$$

au lieu des équations (38), données dans le chapitre précédent.

On peut répéter ici ce qui a été dit, au § 7 du même chapitre, sur la signification des constantes α et β , c'est-à-dire que celles-ci représentent les quantités d'électricité, que l'on devrait communiquer aux armatures de la bouteille, *si on voulait les charger toutes deux au niveau potentiel commun* 1.

Pour rendre les équations ci-dessus plus commodes dans l'application, nous introduisons de nouveau une notation plus simple, comme dans le § 8 du chapitre précédent. Faisons en effet :

$$x = \frac{4\pi c}{(1 + 4\pi E) (1 + \delta)}; \quad (47)$$

alors ces équations deviendront, comme les équations (40) du chapitre précédent :

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \frac{s}{\alpha} (F - G) + \alpha F \\ N = \frac{s}{\alpha} (G - F) + \beta G. \end{array} \right. \quad (48)$$

En outre, pour traiter le cas spécial qui se présente très souvent, où l'armature extérieure est en communication conductrice avec le sol et où, par suite, $G = 0$, nous introduirons, outre la lettre grecque α , le caractère latin k , dont la signification sera déterminée par l'équation :

$$\frac{s}{k} = \frac{s}{\alpha} + \alpha, \quad (49)$$

d'où il résulte :

$$\bar{k} = \frac{\alpha}{1 + \alpha \frac{\alpha}{s}} = \frac{4\pi c}{(1 + 4\pi E)(1 + \delta) + \alpha \frac{4\pi c}{s}}. \quad (50)$$

Par là les équations (48) prennent de nouveau la forme (44) du chapitre précédent, savoir :

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \frac{s}{\bar{k}} (F - G) + \alpha G \\ N = \left(\frac{s}{\bar{k}} - \alpha \right) (G - F) + \beta G, \end{array} \right. \quad (51)$$

qui deviennent, dans le cas ci-dessus mentionné, où $G = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \frac{s}{k} F \\ N = - \left(\frac{s}{k} - \alpha \right) F. \end{array} \right. \quad (52)$$

On voit ainsi que les équations qui expriment les relations entre les quantités F, G, M et N ont la même forme pour une bouteille de Leyde, dans laquelle un diélectrique se trouve entre les armatures, que pour une bouteille de Leyde, dans laquelle elles sont séparées par un simple isolateur ; la différence réside uniquement dans les valeurs différentes des constantes qui se présentent dans les équations.

§ 8.

Théorie des diélectriques, d'après Helmholtz et Maxwell.

Quoique les développements qui précède soient déjà suffisants pour les applications à traiter dans le chapitre suivant, il ne sera pas sans intérêt de communiquer, comme annexe, les extensions dues à Helmholtz et Maxwell des équations relatives aux diélectriques.

Dans son beau mémoire bien connu « *Sur le mouvement de l'électricité dans des conducteurs au repos* », qui parut¹ quelques années après ma note sur les diélectriques ci-dessus reproduite, Helmholtz a appliqué,

1. *Journal de Borchardt*, t. 72. 1870.

tout comme je l'ai fait, aux diélectriques le même procédé que celui par lequel Poisson a essayé de déduire la manière dont se comportent des corps magnétiques sous l'influence de forces magnétiques.

Maxwell a exposé une idée entièrement neuve relative, non seulement à la manière dont se comportent les corps diélectriques, mais aussi à toute l'essence de l'électricité ; il en avait déjà communiqué les points principaux dans un mémoire paru en 1865¹, et il en a donné le développement complet dans son important ouvrage publié en 1873 « *A Treatise of Electricity and Magnetism* ».

Maxwell considère l'électricité comme un fluide incompressible qui remplit tout l'espace. Si l'on se figure qu'un corps est chargé, en outre, d'une quantité d'électricité qui lui est communiquée en particulier, l'électricité du milieu ambiant est par là refoulée vers l'extérieur, de sorte que, dans chaque partie de l'espace, il existe simplement la même quantité d'électricité qu'auparavant, c'est-à-dire, que lorsque le corps était encore non électrisé. Mais du refoulement de l'électricité du milieu résulte une réaction élastique, qui tend à ramener les particules d'électricité dans leurs positions primitives. Maxwell explique, par cette élasticité électrique du milieu, les forces qu'exercent les uns sur les autres les corps électrisés. D'après lui, les divers milieux diélectriques se distinguent les uns des autres en ce que leurs *coefficients d'élasticité électrique* sont différents.

Malgré cette différence de notion fondamentale, les équations, auxquelles Maxwell parvient, concordent cependant tout-à-fait avec celles usitées autrefois, et cela a lieu spécialement aussi pour les équations

1. *Philosophical Transactions for 1865*, p. 459.

relatives aux diélectriques ; on doit seulement attribuer, aux constantes qui interviennent dans les équations, les significations correspondantes à la manière de voir de Maxwell.

Il définit une quantité fondamentale, qu'il nomme, d'après Faraday, *the Specific Inductive Capacity of the dielectric medium*, et qu'il désigne par K, comme étant le rapport de la capacité d'un accumulateur, qui a comme couche isolante le diélectrique en question, à celle d'un accumulateur de même forme et de même grandeur qui a de l'air comme couche isolante. Maxwell admet, par là, que la densité de l'air n'a pas d'influence sensible sur la capacité d'un accumulateur. Si l'on ne veut pas faire cette hypothèse, qui n'est qu'approximativement exacte, et si l'on veut aussi considérer les petits écarts, qui peuvent être causés par des densités différentes de l'air, il vaut mieux se figurer que, dans l'accumulateur choisi pour la comparaison, l'intervalle n'est pas rempli d'air, mais bien qu'il est exempt de toute masse pondérable et occupé par l'éther. Cette quantité K se trouve dans la relation suivante avec son coefficient d'élasticité électrique désigné par p :

$$K = \frac{4\pi}{p}.$$

Pour déduire la relation de cette grandeur K avec la grandeur E employée dans le paragraphe précédent, il nous suffira de comparer les résultats des calculs que nous y avons effectués, avec la définition donnée par Maxwell. En vertu de (40) et (42), nous devons poser, pour un carreau de Franklin ou une bouteille de Leyde :

$$Q = \frac{s}{4\pi c} (V - V_1)$$

$$Q = (1 + 4\pi E) \frac{s}{4\pi c} (V + U - V_1 - U_1).$$

La quantité $V - V_1$ représente ici la différence de niveau potentiel, qui aurait lieu entre les deux armatures chargées des quantités d'électricité $+ Q$ et $- Q$, si la couche interposée ne contenait aucune matière pondérable ; et la quantité $V + U - V_1 - U_1$, la différence de niveau potentiel qui se produit avec le concours de la matière pondérable contenue dans cette couche. Les facteurs qui se trouvent devant les parenthèses expriment donc dans les deux cas les capacités correspondantes de l'accumulateur ; et, en posant le rapport de ces facteurs égal à K , nous obtenons :

$$K = 1 + 4\pi E. \quad (53)$$

Substituant à E l'expression (19) que nous avons déduite au § 4 dans certaines hypothèses, il vient :

$$K = \frac{1 + 2g}{1 - g}. \quad (54)$$

Dans la recherche des équations relatives aux milieux diélectriques, on peut considérer aussi l'espace, exempt de matière pondérable et ne contenant que de l'éther, comme étant un diélectrique, pour lequel la capacité spécifique inductive de Maxwell a la valeur particulière 1, et les quantités E et g , la valeur 0.

On peut de même déduire, des équations précédentes, celles qui ont lieu pour le cas où l'on donne plusieurs diélectriques de nature différente se limitant les uns

les autres ; nous ferons connaître aussi les formes que Helmholtz et Maxwell ont données aux équations dans ce cas général.

Soient donnés d'abord deux milieux diélectriques se limitant l'un l'autre, pour lesquels E a les valeurs E_1 et E_2 , et qui se sont polarisés électriquement sous l'influence d'électricités données, et en même temps sous leur influence réciproque ; il s'agit, de déterminer, dans ces conditions, les fonctions potentielles U_1 et U_2 des deux milieux. Nous utiliserons pour cela les équations (22), mais nous devons prendre garde à cette circonstance que, outre les électricités données dont la fonction potentielle est V , chacun des milieux agit sur l'autre. Nous avons donc à poser, à la place de V , $V + U_2$, lorsqu'il s'agit du premier milieu, et $V + U_1$, pour le second. Nous obtenons, d'après cela, les deux équations :

$$\begin{aligned}
 U'_1 &= \int \frac{E_1}{r} \frac{\partial (V + U_2 + U_1)}{\partial n_1} d\omega_1 \\
 &+ \int \frac{1}{r} \sum \frac{\partial}{\partial x} \left(E_1 \frac{\partial (V + U_2 + U_1)}{\partial x} \right) d\tau_1, \\
 U'_2 &= \int \frac{E_2}{r} \frac{\partial (V + U_1 + U_2)}{\partial n_2} d\omega_2 \\
 &+ \int \frac{1}{r} \sum \frac{\partial}{\partial x} \left(E_2 \frac{\partial (V + U_1 + U_2)}{\partial x} \right) d\tau_2,
 \end{aligned}$$

dans lesquelles les intégrales en ω_1 et τ_1 se rapportent à la surface et au volume du premier milieu, et celles en ω_2 et τ_2 , à la surface et au volume du second. Si nous additionnons ces équations et désignons par U la

fonction potentielle des deux milieux pris ensemble, c'est-à-dire, la somme $U_1 + U_2$, nous obtiendrons :

$$\begin{aligned}
 U' = & \int \frac{E_1}{r} \frac{\partial(V+U)}{\partial n_1} d\omega_1 + \int \frac{E_2}{r} \frac{\partial(V+U)}{\partial n_2} d\omega_2 \\
 & + \int \frac{1}{r} \sum \frac{\partial}{\partial x} \left(E_1 \frac{\partial(V+U)}{\partial x} \right) d\tau_1 \\
 & + \int \frac{1}{r} \sum \frac{\partial}{\partial x} \left(E_2 \frac{\partial(V+U)}{\partial x} \right) d\tau_2. \quad (55)
 \end{aligned}$$

En ce qui concerne les intégrales de volume, il ne résulte de cette équation rien qui ne se tire déjà de l'équation (22) donnée au § 5 et relative à un seul milieu. On peut en effet réunir les deux intégrales qui renferment $d\tau_1$ et $d\tau_2$, et qui doivent s'étendre aux espaces remplis par les deux milieux, en une seule intégrale :

$$\int \frac{1}{r} \sum \frac{\partial}{\partial x} \left(E \frac{\partial(V+U)}{\partial x} \right) d\tau,$$

qui s'étend à l'espace total occupé conjointement par les deux milieux et où E , qui s'applique aux deux milieux, est égal à E_1 dans l'un, et à E_2 dans l'autre. Il résulte de cette forme de l'intégrale que l'équation (24) du § 5, s'étend aussi à deux milieux, et ajoutons-le tout de suite, à plusieurs milieux quelconques. Nous écrirons de nouveau cette équation avec cette signification généralisée :

$$\Delta U = -4\pi \sum \frac{\partial}{\partial x} \left(E \frac{\partial(V+U)}{\partial x} \right). \quad (56)$$

Quant aux intégrales de surface qui se présentent dans (55), il intervient, pour la surface de séparation des deux milieux, une circonstance dont il n'a pas été parlé jusqu'ici. Puisque cette surface limite les deux milieux, les deux intégrales superficielles s'y rapportent. Ainsi, si nous voulons former l'équation qui correspond à l'équation (23) du § 5 pour cette surface, nous devons poser deux termes dans le second membre, notamment :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_{-0} = -4\pi E_1 \frac{\partial (V + U)}{\partial n_1} - 4\pi E_2 \frac{\partial (V + U)}{\partial n_2}.$$

On peut ici faire en sorte que la forme du premier membre se rapporte encore davantage à celle du second. Les notations n_1 et n_2 représentent les normales à un même élément de surface dirigées vers les deux milieux. Considérant comme positive la normale dirigée vers le premier milieu, nous pouvons poser :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_{+0} = \frac{\partial U}{\partial n_1}; \quad \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_{-0} = -\frac{\partial U}{\partial n_2},$$

et l'équation précédente se transforme par là en :

$$\frac{\partial U}{\partial n_1} + \frac{\partial U}{\partial n_2} = -4\pi \left(E_1 \frac{\partial (V + U)}{\partial n_1} + E_2 \frac{\partial (V + U)}{\partial n_2} \right). \quad (57)$$

Cette équation a été déduite d'abord pour la surface de séparation de deux diélectriques. On peut aussi lui donner une signification plus générale. On peut notamment traiter, comme un diélectrique dans lequel E est nul, l'espace exempt de masse pondérable et ne renfermant que de l'éther. On peut en outre traiter les corps conducteurs comme des diélectriques dans lesquels

E est infiniment grand. De cette manière, on peut appliquer l'équation précédente à toutes les surfaces limites qui se présentent.

Les équations (56) et (57) expriment des relations entre la grandeur U et la somme V + U. On peut facilement en tirer des équations qui expriment des relations entre V et V + U.

Dans ce but, ajoutons et soustrayons ΔV dans le premier membre de l'équation (56) ; il vient :

$$-\Delta V + \Delta(V + U) = -4\pi \sum \frac{\partial}{\partial x} \left(E \frac{\partial(V + U)}{\partial x} \right),$$

cette équation peut se transformer comme suit :

$$\begin{aligned} \Delta V &= \Delta(V + U) + 4\pi \sum \frac{\partial}{\partial x} \left(E \frac{\partial(V + U)}{\partial x} \right) \\ &= \sum \left[\frac{\partial^2(V + U)}{\partial x^2} + 4\pi \frac{\partial}{\partial x} \left(E \frac{\partial(V + U)}{\partial x} \right) \right], \end{aligned}$$

ce que l'on peut encore écrire plus simplement :

$$\Delta V = \sum \frac{\partial}{\partial x} \left[(1 + 4\pi E) \frac{\partial(V + U)}{\partial x} \right]. \quad (58)$$

Introduisant encore pour $1 + 4\pi E$ la notation K de Maxwell, il vient :

$$\Delta V = \sum \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial(V + U)}{\partial x} \right) \quad (58a)$$

De même, dans l'équation (57), ajoutons et soustrayons dans le premier membre $\frac{\partial V}{\partial n_1} + \frac{\partial V}{\partial n_2}$; puis, opérons comme précédemment ; nous obtiendrons :

$$\frac{\partial V}{\partial n_1} + \frac{\partial V}{\partial n_2} = K_1 \frac{\partial (V + U)}{\partial n_1} + K_2 \frac{\partial (V + U)}{\partial n_2}. \quad (59)$$

Nous pouvons encore introduire dans ces équations les grandeurs qui expriment la densité que possède, au lieu considéré, l'électricité dont la fonction potentielle est V . Désignons, comme précédemment, la densité par rapport à l'espace par k et la densité superficielle à la surface limite considérée, par h ; nous aurons à poser :

$$\Delta V = -4\pi k$$

$$\frac{\partial V}{\partial n_1} + \frac{\partial V}{\partial n_2} = \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{-0} = -4\pi h,$$

et les équations précédentes deviennent par là :

$$\sum \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial (V + U)}{\partial x} \right) + 4\pi k = 0. \quad (60)$$

$$K_1 \frac{\partial (V + U)}{\partial n_1} + K_2 \frac{\partial (V + U)}{\partial n_2} + 4\pi h = 0. \quad (61)$$

Telles sont les équations établies par Helmholtz et Maxwell. Maxwell a écrit simplement V au lieu de $V + U$, en désignant par V la fonction totale, dont les coefficients différentiels négatifs représentent les composantes de la force totale qui agit dans le diélectrique.

CHAPITRE IV.

ÉQUIVALENT MÉCANIQUE D'UNE DÉCHARGE ÉLECTRIQUE.

§ 1.

Effet total d'une décharge.

Il a été question, dans le chapitre précédent, des *charges électriques* qui ont lieu dans différentes circonstances, et de la manière correspondante de se comporter de la fonction potentielle; nous devons maintenant considérer la *décharge* et les actions qui en résultent; nous entendons ici par *décharge électrique*, toute modification dans la distribution de l'électricité, par laquelle l'équilibre s'établit en tout ou en partie dans l'état électrique des diverses parties d'un système de corps conducteurs, auquel peut aussi appartenir la terre.

Pendant le changement qui a lieu dans la distribution de l'électricité et le mouvement des particules d'électricité qui y est relié, il y a du travail effectué par les forces électriques. Ce travail effectué par des forces,

qui sont inversement proportionnelles au carré de la distance, se détermine d'une manière très simple¹. Il est entièrement indépendant de la manière dont les mouvements des particules d'électricité ont lieu ; il ne dépend que de leurs positions initiales et finales, et même, il est représenté par *la diminution*, qui se produit dans la décharge, *du potentiel de toute l'électricité sur elle-même*.

Au moyen de ce travail fait par les forces électriques, il peut d'abord se produire certains effets, dans lesquels d'autres forces doivent être surmontées, et dont les plus ordinaires sont les suivants. Des étincelles jaillissent en un ou plusieurs endroits, où une couche d'air, ou un autre corps non conducteur, est percé par l'électricité. — Si, à un endroit, le courant électrique traverse un fil très mince, celui-ci éprouve des modifications mécaniques qui peuvent varier, depuis de petits plissements à peine visibles jusqu'à une pulvérisation complète. — Si le courant traverse des corps électrolytiques, il survient des décompositions chimiques. — Dans des corps, qui se trouvent dans le voisinage des conducteurs parcourus par le courant, il peut se produire des courants d'induction ou des actions magnétiques, — etc.

Une partie du travail total effectué par les forces électriques est dépensée pour produire ces divers effets. La partie restante du travail se transforme en chaleur dans les conducteurs.

Si nous mesurons la chaleur en unités mécaniques, c'est-à-dire, par le travail mécanique qui lui correspond, et si de même, nous exprimons les actions mentionnées

1. Voyez à ce sujet mon livre « La fonction potentielle et le potentiel, » 4^e édition, § 65.

ci-dessus par les quantités de travail y consacrées, nous pourrons réunir toutes ces quantités dans une somme algébrique, et désigner simplement celle-ci comme la somme de tous les effets produits par la décharge électrique. Relativement à cette dernière, nous aurons alors, d'après ce qui précède, le simple théorème suivant, que nous prendrons comme principe fondamental dans les développements ultérieurs :

La somme de tous les effets produits par une décharge électrique est égale à la diminution qui est survenue dans le potentiel de la quantité totale d'électricité sur elle-même.

§ 2.

Potentiel d'une bouteille de Leyde ou d'une batterie chargée.

Choisissons maintenant la bouteille de Leyde comme exemple d'un système de corps, qui peut être chargé d'électricité, puis déchargé ; il s'agira, pour une bouteille de Leyde chargée, de déterminer le potentiel de l'électricité totale sur elle-même, en comprenant dans l'électricité totale, non seulement les quantités qui se trouvent sur les deux armatures, mais aussi toutes les petites quantités d'électricité qui se trouvent dans l'intérieur du verre sur les corpuscules polarisés électriquement.

Soient dq et dq' deux éléments quelconques d'électricité, et r leur distance mutuelle ; le potentiel de toute

l'électricité sur elle-même, que nous désignerons par W , sera déterminé par l'équation suivante :

$$W = \frac{1}{2} \int \int \frac{dq \cdot dq'}{r}, \quad (1)$$

dans laquelle les deux intégrations indiquées sont à effectuer pour toutes les quantités données d'électricité, en partie positives, en partie négatives. Puisque maintenant, en désignant d'autre part par V la fonction potentielle de toutes les quantités données d'électricité au point (x, y, z) , où se trouve l'élément dq , on a l'équation :

$$V = \int \frac{dq'}{r}, \quad (2)$$

on pourra aussi écrire l'équation précédente comme suit :

$$W = \frac{1}{2} \int V dq. \quad (3)$$

Mais, dans le cas actuel, il est utile de donner à cette dernière équation une forme un peu différente, en séparant la fonction potentielle des quantités d'électricité, qui se trouvent sur les armatures de la bouteille, de celle des quantités d'électricité se trouvant dans l'intérieur du verre sur les corpuscules polarisés, puis en représentant chacune d'elles par une notation spéciale. Nous désignerons la première par V et la seconde par U , de sorte que la fonction potentielle de toutes les électricités, auxquelles il faut avoir égard, sera représentée par $V + U$. Alors l'équation ci-dessus prend la forme suivante :

$$W = \frac{1}{2} \int (V + U) dq, \quad (4)$$

où l'intégration est à effectuer pour toutes les quantités d'électricité se trouvant sur les armatures et les particules de verre polarisées.

L'intégration s'effectue très rapidement, en ce qui concerne d'abord les quantités d'électricité qui sont sur les particules polarisées du verre. Si une particule conductrice du verre est devenue polarisée électriquement par influence jusqu'à l'état d'équilibre, le niveau potentiel est constant dans son intérieur. Puisque, ensuite, les électricités décomposées qui se trouvent sur la particule se composent de quantités égales d'électricité positive et négative, la partie de l'intégrale qui se rapporte à ces deux quantités d'électricité est nulle. La même chose est applicable, de la même manière, à toutes les particules conductrices du verre, et l'on peut, par suite, sans entrer dans plus de détails, égaler à zéro la partie entière de l'intégrale relative aux électricités décomposées qui se trouvent sur les particules conductrices du verre.

Ensuite, en ce qui concerne les quantités d'électricité se trouvant sur les armatures, on peut aussi introduire une simplification, puisque le niveau potentiel de chaque armature est constant. Désignons, comme au § 7 du chapitre précédent, par F la valeur du niveau potentiel sur l'armature intérieure, et par G , sur l'armature extérieure. Appelons, de même, M la quantité d'électricité se trouvant sur l'armature intérieure, et N celle qui est sur l'armature extérieure; l'équation (4) se transforme en :

$$W = \frac{1}{2} FM + \frac{1}{2} GN. \quad (5)$$

Si l'on substitue ici, pour M et N, les valeurs données dans les équations (48) ou (51) du chapitre précédent, on obtient W exprimé en fonction de F et G. De même, on peut exprimer W en fonction de M et N, ou de deux quelconques des quatre quantités F, G, M et N.

Si l'on suppose que l'armature extérieure de la bouteille est en communication conductrice avec la terre, on a à poser $G = 0$. Alors (5) devient simplement :

$$W = \frac{1}{2} FM. \quad (6)$$

On peut ici, à l'aide de l'équation (52) donnée au chapitre précédent,

$$M = \frac{s}{k} F, \quad (7)$$

éliminer M ou F, et l'on obtient :

$$W = \frac{1}{2k} sF^2 \quad (8)$$

$$W = \frac{k}{2} \frac{M^2}{s}. \quad (9)$$

Si, au lieu d'une seule bouteille de Leyde, on donne une batterie de n bouteilles égales, on peut aisément déduire, des équations précédentes, celles qui se rapportent à cette batterie. Si l'on réunit toutes les armatures intérieures et toutes les armatures extérieures, après que les n bouteilles sont séparément également chargées, il ne se produira, par là, aucune modification dans les valeurs de la fonction potentielle sur les armatures (pour autant qu'on néglige la petite

influence de l'électricité qui se trouve sur les pièces de jonction). Les quantités d'électricité se trouvant sur l'armature intérieure et sur l'armature extérieure de la batterie entière sont, au contraire, naturellement n fois aussi grandes que celles qui se trouvent sur les armatures d'une seule bouteille. Ceci peut s'exprimer simplement dans l'équation donnée sous le n° 7, et qui se rapporte au cas où l'armature extérieure est en communication conductrice avec le sol, en remplaçant la surface de l'armature intérieure d'une bouteille, qui est désignée par s , par la surface totale de l'armature intérieure de la batterie entière, que nous appellerons S , et en écrivant :

$$M = \frac{S}{k} F. \quad (10)$$

Si, à l'aide de cette équation, on élimine M ou F de l'équation (6), on obtient :

$$W = \frac{1}{2k} SF^2. \quad (11)$$

$$W = \frac{k}{2} \frac{M^2}{S}. \quad (12)$$

§ 3.

Diminution du potentiel lors de la décharge, et résidu.

Si nous considérons, d'après cela, comme connu le potentiel d'une bouteille de Leyde ou d'une batterie chargée, la diminution qu'il éprouvera, lors de la décharge, pourra aisément aussi se déterminer. Si la batterie se décharge complètement, de sorte que la valeur finale du potentiel est nulle, la diminution de ce potentiel sera simplement égale à W . Mais si une décharge partielle seulement a lieu, de sorte qu'après la décharge il subsiste encore un potentiel W' , on a à former la différence $W - W'$.

Si, dans une batterie dont l'armature extérieure est en communication conductrice avec le sol, on produit la décharge en mettant cette armature en communication conductrice avec l'armature intérieure, et en laissant subsister cette communication un certain temps, il y aura une décharge complète. Si, au contraire, on n'établit la communication que momentanément et qu'on l'enlève aussitôt, la décharge n'a pas lieu complètement, comme on le sait, mais il reste encore un résidu, qui, après quelque temps, rend possible une seconde décharge plus faible, lors de laquelle il reste de nouveau un résidu d'importance moindre, qui peut alors donner une troisième décharge, et ainsi de suite.

La formation du résidu s'explique sans aucun doute

par ce fait, que le verre ne perd pas de suite complètement, au moment de la décharge, l'état de polarité électrique qu'il a pris sous l'influence des quantités d'électricité se trouvant sur les armatures, mais qu'une partie de cette polarité intérieure continue à subsister d'abord, et que par là une partie de l'électricité est retenue sur les armatures. Cette polarité intérieure encore existante immédiatement après la décharge se perd ensuite en peu de temps, jusqu'à ce qu'il reste encore une polarité d'intensité telle, qu'elle corresponde aux quantités d'électricité qui se trouvent encore actuellement sur les armatures, et qu'elle puisse être maintenue par ces quantités. Cette polarité plus faible n'est naturellement pas suffisante pour retenir les électricités se trouvant sur les armatures, quand on rétablit une communication conductrice entre ces dernières ; c'est pourquoi il se produit de nouveau une décharge, lors de laquelle il reste derechef une partie de la dernière polarité existante : par suite un certain reste d'électricité beaucoup plus petit est retenu sur les armatures, et ainsi de suite.

On ignore encore comment il se fait que la polarité intérieure disparaît en partie, en un temps presque incommensurablement court, pendant la décharge, c'est-à-dire simultanément avec la force qui l'a engendrée, tandis qu'en partie, elle ne se perd au contraire qu'à la fin petit à petit. Boltzmann a comparé cette modification, qui se produit ensuite dans l'état électrique intérieur, à la *rémanence élastique*¹, et cette comparaison a beaucoup en sa faveur, quoiqu'elle puisse encore donner lieu à diverses interprétations quant au véritable fondement du phénomène.

1. *Sitzungsberichte der Wiener Academie* ; t. 68, juillet 1873.

Pour juger plus exactement de l'état de la batterie immédiatement après la décharge et des quantités qui s'y rapportent, il est nécessaire de passer encore par quelques considérations spéciales.

§ 4.

**Examen du cas où les niveaux potentiels
des deux armatures sont égaux,
tandis qu'il subsiste encore une polarité intérieure.**

Si l'on réunit entre elles, pour un temps très court et d'une manière conductrice, les armatures d'une batterie, il s'écoule de l'une à l'autre assez d'électricité pour qu'elles aient toutes deux un même niveau potentiel, que nous pouvons poser simplement égal à zéro, en négligeant un petit écart qui pourrait exister. Il s'agit de savoir combien il doit encore rester d'électricité sur les armatures lors de cette égalisation des niveaux potentiels, si la polarité intérieure du verre subsiste partiellement.

Si nous désignons par u et u_1 les niveaux potentiels que les armatures auraient seulement à cause de la polarité intérieure du verre encore existante, les quantités d'électricité doivent être assez grandes pour que, par elles seules, elles amènent les armatures aux niveaux potentiels $-u$ et $-u_1$. Nous pouvons appliquer, à la détermination des quantités d'électricité nécessaires à cet effet, les équations (38) du chapitre II, dans lesquelles nous avons à remplacer F et G par

— u et, — u_1 , et en outre, s par S , si nous considérons une batterie d'un nombre quelconque de bouteilles au lieu d'une seule de celles-ci. En négligeant également ici des différences relativement petites et laissant, par suite, de côté la quantité δ et les termes affectés des coefficients α et β , nous obtenons, pour les deux armatures, des quantités d'électricité égales et contraires, que nous pourrions désigner par m et — m , m étant déterminé par l'équation suivante :

$$m = \frac{S}{4\pi c} (u_1 - u). \quad (13)$$

Pour pouvoir ensuite appliquer, à la détermination du potentiel relatif à cet état de la batterie, nos équations antérieures relatives à l'état d'équilibre, nous introduirons encore, à côté de la grandeur m , la grandeur μ , qui aura la signification suivante ; μ et — μ sont les quantités d'électricité qui devraient se trouver sur les deux armatures, pour amener et maintenir la polarité intérieure dont il a été parlé précédemment, et qui existe encore immédiatement après la décharge. Cette grandeur μ se trouve avec la différence $u - u_1$ dans le même rapport que celui qui est exprimé dans l'équation (41) du chapitre précédent entre Q et $U - U_1$, et nous pouvons, par suite, écrire :

$$\mu = \frac{S}{4\pi c} \frac{1 + 4\pi E}{4\pi E} (u_1 - u). \quad (14)$$

Si, après la décharge, les quantités d'électricité μ et — μ se trouvaient sur les deux armatures au lieu des quantités m et — m , nous aurions un état d'équilibre de même nature que celui auquel se rapportent les

équations (46) du chapitre précédent. Nommons f et g les niveaux potentiels totaux qui se produiraient, dans ces circonstances, sur les armatures ; nous obtiendrons, en vertu de ces équations, en négligeant la quantité δ et les termes affectés des coefficients α et β :

$$\mu = \frac{S}{4\pi c} (1 + 4\pi E) (f - g), \quad (15)$$

et si nous remplaçons μ par l'expression donnée dans (14), il vient :

$$f - g = \frac{u_1 - u}{4\pi E}. \quad (16)$$

Le potentiel de toute l'électricité sur elle-même, qui existerait dans ces circonstances, et que nous désignons par Ω , se tire de l'équation (5), en y changeant F et G en f et g , et M et N en μ et $-\mu$; ce qui donne :

$$\Omega = \frac{1}{2} \mu (f - g). \quad (17)$$

Remplaçant μ et $f - g$, par les expressions (14) et (16), il vient :

$$\Omega = \frac{S}{8\pi c} (1 + 4\pi E) \left(\frac{u_1 - u}{4\pi E} \right)^2. \quad (18)$$

Pour passer de ce potentiel à celui que nous cherchons, imaginons-nous la grandeur μ divisée en deux parties $\mu - m$ et m , et ensuite toutes les quantités d'électricité, que nous avons considérées ci-dessus et dont le potentiel est Ω , décomposées en deux systèmes. Le premier système S_1 comprend seulement les deux quantités d'électricité $(\mu - m)$ et $-(\mu - m)$. Le second système S' comprendra, par contre, les quantités

m et $-m$, et, de plus toutes les quantités d'électricité se trouvant sur les particules polarisées du verre (c'est-à-dire précisément ces quantités d'électricité, qui sont présentes immédiatement après la décharge). Ainsi le potentiel Ω se compose des trois parties constitutives suivantes :

1° Le potentiel du système S_1 sur lui-même, que nous appellerons W_1 .

2° Le potentiel du système S' sur lui-même, que nous nommerons W' .

3° Le potentiel du système S_1 sur le système S' , qui s'appellera W'_1 .

D'après cela, on peut poser :

$$\Omega = W_1 + W' + W'_1.$$

La valeur du dernier potentiel W'_1 du second membre, peut se déterminer immédiatement. Nous l'obtenons en multipliant chacun des éléments d'électricité qui appartiennent à l'un des systèmes par la fonction potentielle de l'autre système pour le point considéré, puis en effectuant l'intégration. Mais tous les éléments d'électricité appartenant au premier système se trouvent sur les armatures, et la fonction potentielle du second système est précisément nulle sur ces dernières ; en conséquence, l'intégration conduit à une valeur nulle, et nous obtenons :

$$W'_1 = 0.$$

Par là, l'équation précédente devient :

$$\Omega = W_1 + W',$$

équation que nous écrivons sous la forme suivante :

$$W' = \Omega - W_1. \quad (19)$$

Des deux quantités du second membre, la première est déterminée par l'équation (18). Pour déterminer l'autre quantité W_1 , il est à remarquer que si les quantités d'électricité $(\mu - m)$ et $-(\mu - m)$ étaient seules présentes, elles détermineraient sur les armatures les niveaux potentiels f et g , puisque toutes les autres quantités d'électricité donnent à ces armatures des niveaux potentiels nuls. D'où il suit :

$$W_1 = \frac{1}{2} (\mu - m) (f - g).$$

D'après (13) et (14), on peut ici poser :

$$\mu - m = \frac{S}{4\pi c} \cdot \frac{u_1 - u}{4\pi E},$$

et pour $f - g$, on peut employer la valeur donnée par (16) ; on obtient par là :

$$W_1 = \frac{S}{8\pi c} \left(\frac{u_1 - u}{4\pi E} \right)^2, \quad (20)$$

En utilisant cette valeur, (19) se transforme en :

$$W' = \frac{S}{8\pi c} \cdot \frac{(u_1 - u)^2}{4\pi E}, \quad (21)$$

équation qu'on peut aussi écrire en vertu de (13) :

$$W' = \frac{c}{2E} \cdot \frac{m^2}{S}. \quad (22)$$

Le potentiel cherché de toute l'électricité sur elle-même, existant immédiatement après la décharge, est déterminé par ces équations.

Quand il s'est écoulé un certain temps après la décharge, et que la polarité intérieure a décrû, jusqu'à ce qu'il n'en reste plus que la partie qui peut être maintenue par les quantités d'électricité m et $-m$ se trouvant sur les armatures, il existe de nouveau un état d'équilibre de même nature que celui auquel se rapportent les équations (5) à (12). On obtient le potentiel de toute l'électricité sur elle-même, qui correspond à cet état et que nous désignerons par W'' , en posant simplement m au lieu de M dans l'équation (12), où, de nouveau, on peut remplacer k par $\frac{4\pi c}{1 + 4\pi E}$, eu égard au degré d'exactitude qui est suffisant pour le résidu ; on a ainsi :

$$W'' = \frac{2\pi c}{1 + 4\pi E} \cdot \frac{m^2}{S}. \quad (23)$$

Substituant ici à m sa valeur (13), il vient :

$$W'' = \frac{S (u_1 - u)^2}{8\pi c (1 + 4\pi E)}. \quad (24)$$

§ 5.

**Travail des forces électriques
pendant la décharge et après celle-ci.**

Après avoir déterminé, dans les paragraphes précédents, le potentiel de toute l'électricité sur elle-même dans les divers états à considérer, il est facile d'exprimer aussi le travail que les forces électriques ont effectué pendant la décharge et après celle-ci.

Imaginons que la décharge soit obtenue en approchant, d'un endroit relié d'une manière conductrice avec l'armature intérieure, l'autre extrémité d'un conducteur partant de l'armature extérieure, et en établissant le contact pendant un temps très court. Nous avons ainsi, avant la décharge, l'état dans lequel le potentiel est W , et, immédiatement après la décharge, l'état dans lequel le potentiel est W' . Pendant la décharge il s'est ainsi effectué le travail :

$$W - W'.$$

Quand il s'est écoulé quelque temps après la décharge, il a surgi un état, dans lequel le potentiel est W'' , et, jusqu'à ce que cet état se soit établi, les forces électriques ont encore effectué, après la décharge, le travail :

$$W' - W''.$$

Si on laisse maintenant s'effectuer de nouveau une décharge, on obtiendra les deux mêmes phénomènes avec des proportions réduites, et ainsi de suite.

Pour pouvoir mieux indiquer les quantités de travail dans leur rapport avec le potentiel total primitivement existant, on doit savoir comment W' et W'' se comportent vis-à-vis de W , et, pour cela, on doit connaître la relation entre la différence $u_1 - u$ et la différence $F - G$. On obtient tout de suite pour $u_1 - u$ une valeur limite, qui ne peut certes pas être dépassée, par ce fait que la polarité du verre, après la décharge, ne peut pas être plus grande que ce qu'elle était pendant la charge. Par suite, si, comme dans le chapitre précédent, nous désignons par U et U_1 les niveaux potentiels que la polarité du verre, existant pendant la charge, amènerait à elle seule sur les armatures, $u_1 - u$ ne peut en aucun cas être plus grand que $U_1 - U$. Mais on ne peut indiquer d'une manière précise de combien il est plus petit. Cependant on peut toujours admettre sans aucun doute que, dans une batterie déterminée, $u_1 - u$ croît avec $U_1 - U$, et puisqu'il n'est pas question d'une grande exactitude, dans les quantités relatives au résidu, qui ne sont pas importantes, il est permis de considérer les différences $u_1 - u$ comme proportionnelles à $U_1 - U$, et par suite, de poser :

$$u_1 - u = p (U_1 - U), \quad (25)$$

où p représente un coefficient dont la valeur est comprise entre 0 et 1 et qui dépend de la nature des bouteilles formant la batterie. En ce qui concerne maintenant la différence $U_1 - U$, on déduit d'abord

de l'équation (39) du chapitre précédent l'équation :

$$U_1 - U = 4\pi E (V + U - V_1 - U_1),$$

et si nous y posons pour $V + U$ et $V_1 + U_1$ les notations F et G introduites postérieurement, il vient :

$$U_1 - U = 4\pi E (F - G); \quad (26)$$

l'équation (25) se transforme par là en :

$$u_1 - u = p \cdot 4\pi E (F - G). \quad (27)$$

De cette équation, on peut déduire la suivante à l'aide de l'équation (46) du chapitre précédent et de l'équation (13) de ce chapitre :

$$m = p \cdot \frac{4\pi E}{1 + 4\pi E} M. \quad (28)$$

Revenant maintenant aux équations (22) et 23) établies pour les potentiels W' et W'' , et remplaçant m par l'expression précédente, il vient :

$$W' = 2\pi c p^2 \frac{4\pi E}{(1 + 4\pi E)^2} \cdot \frac{M^2}{S}. \quad (29)$$

$$W'' = 2\pi c p^2 \frac{(4\pi E)^2}{(1 + 4\pi E)^3} \cdot \frac{M^2}{S}. \quad (30)$$

Nous pouvons encore remplacer par $\frac{h}{2}$ le produit $2\pi c$ qui se présente dans ces deux équations, puisque nous avons négligé jusqu'ici, en traitant des quantités relatives au résidu, la petite différence existant entre h et $4\pi c$.

Nous pouvons maintenant utiliser ces expressions de W' et W'' pour la recherche du travail, en déterminant W au moyen des équations développées au § 2.

Pour effectuer le calcul dans un cas particulier, nous choisirons celui où l'armature extérieure de la batterie se trouve en communication conductrice avec la terre, et où l'équation (12) est applicable à W . Alors nous obtenons :

$$W - W' = \frac{k}{2} \left(1 - p^2 \frac{4\pi E}{(1 + 4\pi E)^2} \right) \frac{M^2}{S}. \quad (31)$$

$$W' - W'' = \frac{k}{2} p^2 \frac{4\pi E}{(1 + 4\pi E)^3} \cdot \frac{M^2}{S}. \quad (32)$$

Dans ce qui précède, nous avons supposé que la décharge a lieu de telle sorte que les extrémités de l'arc de fermeture ne sont mises en contact l'une avec l'autre que pendant un temps très court. Si, au contraire, on met en communication conductrice permanente l'armature extérieure reliée au sol avec l'armature intérieure, il y a décharge complète. Dans ce cas, cependant, il se produit aussi cette circonstance, que la décharge totale ne s'achève pas au moment même où la liaison s'établit, mais qu'une partie de cette décharge ne s'accomplit qu'après qu'un certain temps s'est écoulé. On peut, par suite, distinguer aussi deux parties dans le travail qui est représenté en tout par W , savoir la partie $W - W'$ qui s'effectue aussitôt après l'établissement de la liaison, et la partie W' , qui ne s'effectue que petit à petit pendant que cette liaison subsiste.

§ 6.

Effets de la décharge.

Si nous examinons maintenant les effets produits par la décharge, ils peuvent, comme nous l'avons déjà mentionné ci-dessus au § 1, être de nature très diverse. En toute rigueur, il faut, aux effets indiqués, en ajouter encore un autre qui a lieu déjà avant la décharge proprement dite. Ainsi, pendant que l'extrémité de l'arc de fermeture partant de l'armature extérieure se rapproche de l'endroit relié d'une manière conductrice à l'armature intérieure, il y a déjà une petite action de la part de l'électricité, puisque les extrémités de l'arc de fermeture s'attirent en vertu de l'électricité qui s'y trouve, ce qui facilite le rapprochement. Mais cet effet est tellement faible dans ce cas-ci, où la plus grande partie de l'électricité est fixée sur les armatures et ne peut contribuer à cette attraction, que nous pouvons le négliger sans scrupule.

De plus, nous excluons, pour le moment, de notre recherche, pour plus de simplicité, la production de courants d'induction ou de magnétisme en dehors du système de corps considéré, ainsi que toutes les modifications persistantes de nature mécanique, chimique ou magnétique à l'intérieur de ce système ; et nous admettons que *le travail qui est dépensé aux lieux où le circuit est interrompu et où doit jaillir une étincelle, ainsi que la chaleur engendrée dans tout le*

ystème soient les seuls effets qui se présentent. Alors, en vertu du théorème fondamental, *la somme de ces deux effets doit être égale à la diminution du potentiel.*

Ce résultat théorique doit être maintenant comparé avec l'expérience. A cet effet, la série des essais que Riess a exécutés avec beaucoup de soin, de circonspection et de jugement nous présente particulièrement des données aussi abondantes que sûres, et la comparaison avec la théorie est encore considérablement facilitée par cette circonstance, que Riess lui-même a déduit, des faits qu'il a observés, des lois formulées d'une manière très précise.

Supposons d'abord que, dans une série d'expériences, *la grandeur de la décharge, c'est-à-dire, la diminution du potentiel, reste la même, mais que l'on change le circuit de fermeture ; alors la somme des deux effets devra rester constante.*

En ce qui concerne la production de chaleur, Riess a donné, sur sa dépendance vis-à-vis du circuit, ces deux théorèmes très importants¹ :

1° *Les quantités de chaleur produites par une même décharge dans deux fils continus différents, faisant partie du circuit de fermeture, sont entre elles comme les longueurs réduites de ces fils ; en entendant par longueur réduite la quantité $\frac{\lambda}{\rho^2} x$, où λ est la longueur réelle, ρ le rayon, et x une quantité dépendant de la nature du fil, à laquelle Riess a donné le nom de force retardatrice, et qui est inversement proportionnelle à la conductibilité.*

2° *Si, les autres circonstances restant les mêmes, on*

1. *Ann. de Pogg.*, t. XLIII et XLV.

allonge le circuit en y intercalant un fil de longueur réduite l , l'échauffement d'un autre fil faisant partie du circuit est diminué dans le rapport de $1 + bl$ à 1 , b étant une constante à déterminer par l'expérience.

Ces deux théorèmes peuvent s'exprimer par l'équation suivante¹ :

$$C = \frac{l}{1 + bl} A, \quad (33)$$

où l est la longueur réduite du fil considéré, C la chaleur qui y est engendrée, tandis que b et l ont la signification indiquée ci-dessus, et que A représente une quantité dépendant de la grandeur de la décharge, quantité qui est constante pour le cas actuel, où nous n'avons affaire qu'à des décharges égales.

Cette équation confirme la conclusion que nous avons donnée précédemment. Le fil l intercalé est naturellement aussi échauffé par la décharge, et, d'après l'équation précédente, la quantité de chaleur qu'il reçoit est $\frac{l}{1 + bl} A$. Pour que la somme des effets reste constante, il faudra donc que les autres effets éprouvent une diminution, et celle-ci est en effet démontrée par le second théorème de Riess et par l'équation. Nous devons nous contenter pour le moment de cette concordance générale. Il me paraît impossible, sans nouvelles données expérimentales, de rechercher si le décroissement de tous les autres effets réunis est réellement égal à cette quantité de chaleur exprimée par $\frac{l}{1 + bl} A$.

Vorsselman de Heer déduit de cette équation (33) un

1. *Ann. de Pogg.*, t. XLV, p. 23.

théorème général qu'on pourrait regarder, au premier abord, comme une confirmation complète de notre résultat. D'après lui, *la chaleur totale qui est produite dans tout le circuit de fermeture par une décharge électrique, serait indépendante de la nature du circuit*¹. Helmholtz donne aussi ce théorème comme concordant en effet avec la théorie² ; cependant, je ne puis admettre cette concordance, parce que le théorème renferme plusieurs inexactitudes.

D'abord, Vorsselman de Heer ne considère expressément que « l'arc qui relie les deux armatures de la batterie »³. Mais la production de chaleur s'étend aussi aux autres corps du système ; une partie de celle-ci est engendrée à l'intérieur de la batterie elle-même ; une autre partie, pour le cas où la batterie et le circuit ne sont pas isolés, mais sont mis en communication avec la terre, sera produite dans ce fil conducteur et dans la terre elle-même. Cette dernière partie sera, en général, insignifiante, parce qu'il n'y a que l'excès de l'une ou l'autre électricité qui s'écoule dans la terre, et que cet excès est faible, relativement à la quantité totale d'électricité ; on pourrait peut-être même admettre qu'il en est ainsi de la première partie, à condition que le circuit ait une longueur réduite considérable. Mais il n'en serait plus de même pour un circuit très court, et nous devons jusqu'à présent, en général, considérer cette partie comme inconnue.

Ensuite, il n'a pas pris en considération les endroits

1. *Ann. de Pogg.*, t. XLVIII, p. 298.
2. *Ueber die Erhaltung der Kraft*, p. 44 (trad. en français par L. PERARD, professeur à l'université de Liège).
3. *Ann. de Pogg.*, t. XLVIII, p. 297.

où le circuit de fermeture est interrompu et où jaillit une étincelle. En ces lieux, il se produit un effet mécanique extérieur que l'on doit commencer par retrancher de l'effet total, comme travail consommé, pour obtenir la partie qui est réellement transformée en chaleur, à l'intérieur du système de corps considéré.

En ce qui concerne la grandeur de cette consommation de travail et son influence sur la production de chaleur, j'indiquerai d'abord une nouvelle confirmation de la théorie par l'expérience. Il est en effet évident que le travail consommé dépend de la résistance qu'oppose la couche non conductrice, qui forme l'interruption, et qu'il sera par conséquent plus considérable, si les extrémités du circuit sont séparées par un *corps solide* non conducteur, que si de *l'air* seul est interposé entre elles. Il résulte de là qu'un thermomètre électrique à air qui se trouve en un autre endroit du circuit, doit s'échauffer moins dans le premier cas que dans le dernier, et c'est ce que confirme, en effet, la série d'expériences entreprises par Riess¹.

Au point d'interruption, il y avait, soit deux petits disques, soit deux sphères, soit deux pointes en face l'une de l'autre, chaque fois à la distance de 0,2 ligne. On intercalait entre elles successivement les corps énumérés dans la première colonne du tableau suivant ; et dans des circonstances identiques, on a observé dans le thermomètre à air les échauffements indiqués dans les colonnes suivantes. Dans les cas où Riess donne plusieurs nombres, j'en ai pris la moyenne.

1. *Ann. de Pogg.*, t. XLIII, p. 82.

CORPS INTERCALÉS	ÉCHAUFFEMENTS DANS LE THERMOMÈTRE A AIR, suivant que l'étincelle jaillissait entre		
	LES DISQUES.	LES SPHÈRES.	LES POINTES.
Couche d'air.	15,9	15,4	15,1
Une carte	11,7	12,0	11,6
Deux cartes séparées par une couche de tain. . . .	9,7	9,3	—
Deux cartes	8,0	8,8	10,4
Feuille de mica.	6,8	4,7	4,8

Dans ce tableau, on voit clairement ressortir l'influence de la solidité du corps intercalé qui doit être traversé par l'étincelle. Le cas seul, où deux cartes étaient séparées par une couche de tain, paraît d'abord former une exception, puisque ces trois corps ont exercé un effet moindre que les deux cartes seules. D'après cela, on doit admettre que le tain, quoiqu'il ait été percé également, n'a pas augmenté la consommation de travail, mais l'a au contraire diminué, ce qui paraît impliquer une contradiction. Je crois cependant que, quoiqu'on ne puisse pas expliquer pour le moment ce fait, on ne doit pas précisément le considérer comme contradictoire ; car, relativement à la consommation de travail, il ne s'agit pas seulement de savoir *quels* corps sont traversés, mais aussi *comment* ils le sont, et un corps conducteur

intercalé produit en tout cas une modification sous ce rapport. On voit en même temps, par la grande différence des autres nombres de la table, combien le travail consommé par l'étincelle peut devenir considérable dans des circonstances défavorables. Mais on ne pourrait pas encore déduire de là une mesure exacte de ce travail, et il me semble que, jusqu'à présent, nous ne possédons pas encore une telle mesure, même pour le cas le plus simple et le plus important, celui où l'étincelle jaillit à travers l'air seul.

Au premier abord, on pourrait peut-être croire *que, pour une égale densité de l'air, ce travail devrait être simplement proportionnel à l'épaisseur de la couche d'air traversée*. Toutefois, si, sans changer la distance des corps entre lesquels jaillit l'étincelle, on modifie la charge de la batterie ou la nature du circuit, il se présente dans les étincelles de si grandes différences, déjà reconnaissables à l'intensité de la lumière et de la crépitation, qu'il est impossible de regarder ces étincelles comme égales entre elles, relativement au travail qu'elles consomment.

Ensuite, on pourrait vouloir tirer de quelques expériences de Riess¹ la conclusion *que le travail consommé par une étincelle qui jaillit à travers l'air est en général si faible, qu'on peut le négliger*. Riess a en effet disposé ses expériences sur les petits disques et les sphères, de telle sorte qu'il mettait d'abord ceux-ci en contact, puis à différentes distances l'un de l'autre ; dans le premier cas, l'électricité passait sans étincelles, dans le second, avec étincelles ; et il a observé dans les deux cas la chaleur produite dans le circuit, quand les

1. *Ann. de Pogg.*, t. XLIII, p. 78.

autres circonstances restaient identiques. En général, lors de l'écartement, cette chaleur ne s'est guère montrée moindre que lors du contact, et même, dans quelques cas, elle a été un peu plus grande. Je crois cependant que ces observations ne justifient pas encore la conclusion précédente.

Outre les étincelles que l'on produisait à volonté en éloignant les disques ou les sphères, nous devons en effet encore examiner celles qui tenaient déjà au mode de décharge. Afin de rendre les décharges aussi régulières que possible, Riess les produisait au moyen d'un appareil construit exprès¹ et disposé de telle sorte qu'il jaillissait chaque fois *deux* étincelles. Il résulte d'autres expériences de Riess² qu'une interruption apportée dans le circuit amoindrit la distance explosive en un autre endroit : et, par suite, dans le cas actuel, en même temps que la nouvelle étincelle jaillit entre les disques ou les sphères, les deux autres doivent être raccourcies dans l'excitateur, d'où l'on peut conclure à une compensation partielle de la consommation de travail. Dans certains cas même, les deux dernières étincelles disparaissaient complètement, et « la décharge n'avait lieu qu'au contact des sphères de l'excitateur »³. Il s'était produit *une* nouvelle étincelle, et *deux* des précédentes avaient disparu, d'où l'on peut s'attendre à une diminution du travail consommé, et par conséquent, à un accroissement de la chaleur produite ; et en effet, ce sont *précisément ces cas* dans lesquels Riess a observé une chaleur plus considérable dans le circuit. On voit donc qu'il n'est pas nécessaire, pour expliquer ces phénomènes, d'admettre que la grandeur du travail

1. *Ann. de Pogg.*, t. XL, p. 339.

2. *Id.*, t. LIII, p. 11.

3. *Id.*, t. XLIII, p. 79.

consommé par une étincelle est très faible ; au reste, les expériences ne me semblent pas permettre une conclusion certaine sur cette grandeur.

S'il est impossible, à cause des inconnues qui se présentent dans l'effet total, de prouver la concordance *quantitativement exacte* de l'équation (33) avec le théorème fondamental, on pourrait peut-être essayer, en les admettant et les combinant ensemble, de déterminer ces inconnues ou du moins leur somme, et la forme de l'équation (33) établie par Riess semble y engager. Mais on doit remarquer que, comme elle est empirique, on ne peut pas lui accorder une exactitude absolue, comme le montrent du reste les nombres obtenus par Riess. Dans deux séries d'expériences, il a intercalé dans le circuit des fils de longueur et d'épaisseur différentes, ce qui ne changeait que la quantité l qui se trouve au dénominateur dans le second membre de l'équation (33) ; et il a chaque fois déterminé la constante b au moyen de l'échauffement observé. Les valeurs ainsi trouvées varient dans la première série entre 0,01358 et 0,01101 et dans la seconde entre 0,00000926 et 0,00000840¹ ; et quoique ces différences puissent être regardées comme peu importantes à cause de la grande variété des fils intercalés et de la difficulté des expériences, elles méritent cependant qu'on y ait quelque égard, parce qu'elles ont lieu avec une certaine régularité. En effet, dans les deux séries les valeurs de b diminuent en général lorsque la longueur réduite l du fil augmente.

1. *Ann. de Pogg.*, t. XLIII, pp. 68 et 73. La grande différence entre les nombres de la première et de la seconde série provient d'un choix différent des unités.

§ 7.

Comparaison dans l'hypothèse de charges diverses.

Nous passons au second point de comparaison entre la théorie et l'expérience, c'est-à-dire au cas où *le circuit reste le même, mais où la grandeur de la batterie et de la quantité d'électricité qui y est accumulée, varie.*

Ici encore se reproduit l'inconvénient dont nous venons de parler. Comme il y a une partie des effets de la décharge que nous ne connaissons pas, nous ne pouvons pas déterminer de quelle manière cette partie varie avec la grandeur de la batterie et la quantité d'électricité, et par suite nous ne pouvons pas encore conclure avec assurance de l'effet observé à un endroit du circuit à l'effet *total*. Seulement, relativement à la chaleur engendrée dans les parties continues du circuit, nous pouvons admettre comme certain que toute modification observée dans une partie aura lieu proportionnellement dans les autres.

Mais si le circuit a une grande longueur réduite, on pourra admettre que la plus grande partie de l'effet total est employée à l'échauffer, et, dans ce cas, si même les autres effets s'écartent de cette proportionnalité, les différences qui en résulteront seront relativement faibles, de sorte que l'on pourra regarder avec assez d'exactitude les échauffements observés à

un certain endroit comme proportionnels à l'effet total correspondant.

Or, d'après l'équation (12), l'effet total pour une décharge complète est exprimé par

$$\frac{M^2}{S} \text{ const.},$$

et c'est là précisément l'expression que Riess a trouvée expérimentalement pour l'échauffement dans le circuit, puisque l'équation (33) est sous sa forme complète¹:

$$C = \frac{al'}{1 + bl} \cdot \frac{M^2}{S}, \quad (33a)$$

où a désigne une constante².

§ 8.

Décharge incomplète.

Les cas considérés jusqu'ici se rapportent à la décharge complète. Nous examinerons maintenant le cas de la décharge incomplète.

1. *Ann. de Pogg.*, t. XLV, p. 23.

2. Helmholtz cite également cette confirmation de la théorie par l'expérience (v. p. 43 de son ouvrage), mais je ne comprends pas bien le développement de sa formule, parce qu'il y introduit une grandeur qu'il appelle *Ableitungsgrösse* (valeur de déduction) et qu'il dit être proportionnelle à la surface de l'armature de la batterie, mais sans s'expliquer davantage sur sa signification et sur la raison de cette proportionnalité.

Nous possédons aussi, sous ce rapport, des expériences de mesure de Riess¹, qui déchargeait partiellement une batterie chargée, en reliant par deux circuits ses deux armatures aux armatures correspondantes d'une autre batterie non chargée, de sorte que les quantités d'électricité, qui étaient d'abord accumulées sur la première batterie, se répandaient sur toutes les deux. Il variait les expériences en composant les batteries de différents nombres de bouteilles, et observait chaque fois l'échauffement soit dans l'un, soit dans les deux circuits. Les bouteilles de chaque batterie étaient naturellement égales entre elles, mais malheureusement les bouteilles de l'une n'étaient pas égales à celles de l'autre. Il trouve comme résultat de ses expériences que « la formule suivante représente parfaitement les échauffements observés à un endroit constant du circuit tant intérieur qu'extérieur² ».

$$C = \frac{aM^2}{\left(\frac{n}{n'} + \frac{s'}{s}\right)ns} \quad (34)$$

J'ai seulement un peu changé les lettres de cette formule pour pouvoir la comparer plus aisément avec les miennes. C y représente la chaleur observée, M la quantité d'électricité employée, *s* la superficie de l'armature intérieure d'une bouteille de la première batterie, et *n* le nombre de ses bouteilles, *s'* et *n'* les quantités correspondantes pour la seconde batterie, et enfin *a* une constante qui devait être prise un peu plus grande pour le circuit intérieur que pour l'extérieur,

1. *Ann. de Pogg.*, t. LXXX, p. 214.

2. *Id.*, p. 217.

ce qui s'explique par ce fait qu'il se trouvait un peu plus d'électricité sur l'armature intérieure que sur l'extérieure.

Comparons maintenant cet échauffement à la diminution du potentiel.

L'équation (12) donne l'expression suivante pour le potentiel de la première batterie avant la décharge, en désignant par M la quantité d'électricité, et remplaçant la superficie totale S par sa valeur ns :

$$W = \frac{k}{2} \cdot \frac{M^2}{ns}. \quad (35)$$

Pour déterminer maintenant de quelle manière la quantité totale d'électricité M se répand sur les deux batteries par la décharge, on a la condition que sur les armatures reliées entre elles, la fonction potentielle doit avoir des valeurs égales. Soient, après la décharge, F_1 et F'_1 les valeurs de la fonction potentielle sur les armatures intérieures, M_1 et M'_1 les quantités d'électricité cherchées qui sont répandues sur elles ; on aura d'après (10) :

$$F_1 = k \frac{M_1}{ns},$$

$$F'_1 = k' \frac{M'_1}{n's'},$$

où k' représente, pour les bouteilles de la seconde batterie, la même quantité que représente k pour celles de la première. En égalant entre elles ces deux expressions, et observant que :

$$M_1 + M'_1 = M,$$

on aura :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1 = \frac{\frac{ns}{k}}{\frac{ns}{k} + \frac{n's'}{k'}} M \\ M'_1 = \frac{\frac{n's'}{k'}}{\frac{ns}{k} + \frac{n's'}{k'}} M. \end{array} \right. \quad (36)$$

On déduira de là, en représentant par W_1 le potentiel total des deux batteries après la décharge :

$$W_1 = \frac{1}{2} (M_1 F_1 + M'_1 F'_1) = \frac{\frac{1}{2} M^2}{\frac{ns}{k} + \frac{n's'}{k'}}, \quad (37)$$

et l'on obtiendra ainsi, pour la diminution du potentiel :

$$W - W_1 = \frac{\frac{1}{2} \frac{k^2}{k'} \cdot \frac{s'}{s} \cdot M^2}{\left(\frac{n}{n'} + \frac{k}{k'} \cdot \frac{s'}{s} \right) ns}. \quad (38)$$

La quantité $\frac{1}{2} \frac{k^2}{k'} \cdot \frac{s'}{s}$ est constante pour toute la série des expériences, et l'on peut donc écrire :

$$W - W_1 = \frac{A \cdot M^2}{\left(\frac{n}{n'} + \frac{k}{k'} \cdot \frac{s'}{s} \right) ns}. \quad (39)$$

Si l'on compare cette expression avec celle (34) que Riess a donnée pour l'échauffement, on voit que, pour les rendre proportionnelles entre elles, il suffit

d'admettre que, pour les bouteilles des deux batteries, quoiqu'elles ne fussent pas égales, les quantités k et k' avaient à peu près les mêmes valeurs ; on est d'autant plus fondé à l'admettre que Riess déclare plus bas¹ avoir trouvé, par des mesures directes, qu'en faisant communiquer les deux batteries, l'électricité se répandait dans le rapport de leurs surfaces, ce qui ne pouvait avoir lieu, d'après les équations (24), que si k était égal à k' ².

Riess a varié également ses expériences en allongeant le circuit, et il a observé le décroissement de chaleur qui se produisait à un endroit déterminé. Les résultats de ces expériences concordent en général avec ceux que nous avons donnés plus haut, et nous ne nous y arrêterons pas, non plus qu'à quelques autres expériences mentionnées dans le même travail.

1. *Loc. cit.*, p. 220.

2. Comme les quantités k et k' dépendent surtout, d'après ce qui précède, des épaisseurs de verre des deux batteries, il m'a paru intéressant de connaître ces épaisseurs, et pendant l'impression, dans les *Ann. de Pogg.*, du travail dans lequel j'ai donné ces développements, j'avais déjà prié M. Riess de vouloir bien les mesurer ; il a eu la bonté de me faire la communication suivante. Dans les petites bouteilles (celles de la seconde batterie) l'épaisseur varie considérablement, et est en moyenne de $1\frac{1}{2}$ ligne de Paris. Les grandes bouteilles (celles de la première batterie) n'ont pu être mesurées parce qu'elles sont fermées par le haut ; mais il en a mesuré deux de la même espèce qu'on avait fabriquées en surcroît en même temps que celles qui étaient en usage ; l'épaisseur de verre y est à peu près uniforme et égal à $1\frac{1}{3}$ ligne. Comme on ne peut pas attendre une égalité absolue des épaisseurs de verre dans les circonstances que mentionne M. Riess, et qu'elle n'est du reste pas nécessairement exigée pour l'égalité supposée de k et de k' , qui dépendent en outre, quoiqu'à un degré moindre, de la forme et de la grandeur des bouteilles, qui sont différentes dans les deux batteries, je crois qu'on peut regarder comme satisfaisante la concordance des nombres $1\frac{1}{3}$ et $1\frac{1}{2}$.

§ 9.

Équations applicables à la batterie à cascade.

Nous considérerons maintenant la *batterie à cascade de Franklin* ou *pile de bouteilles*. Elle consiste en un certain nombre de bouteilles ou de batteries, qui sont isolées et ensuite réunies entre elles de telle sorte que l'armature extérieure de la première est en communication conductrice avec l'intérieure de la seconde, l'extérieure de celle-ci avec l'intérieure de la troisième, et ainsi de suite. L'armature intérieure de la première batterie et l'armature extérieure de la dernière sont libres, et sont traitées pendant la charge comme celles d'une batterie unique.

La charge ayant eu lieu, désignons les quantités d'électricité qui se trouvent sur les deux armatures des différentes batteries, ainsi que les valeurs correspondantes de la fonction potentielle, suivant leur ordre respectif, par :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1, N_1 ; M_2, N_2 ; M_3, N_3 ; \text{etc.} \\ F_1, G_1 ; F_2, G_2 ; F_3, G_3 ; \text{etc.} \end{array} \right. \quad (40)$$

Puisque, quand de l'électricité positive est transmise par un conducteur à l'armature intérieure de la première batterie, l'armature extérieure de celle-ci ne peut recevoir d'électricité négative que de l'armature intérieure de la seconde, qui se trouve ainsi chargée positivement, on aura :

$$N_1 = -M_2;$$

comme en outre, dans deux corps reliés par un conducteur la fonction potentielle doit avoir des valeurs égales, on a, pour ces mêmes armatures :

$$G_1 = F_2;$$

pour tout autre couple de deux armatures reliées, on aura deux équations analogues, ce qui donnera la série d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = -M_2; N_2 = -M_3; N_3 = -M_4; \text{etc.} \\ G_1 = F_2; G_2 = F_3; G_3 = F_4; \text{etc.} \end{array} \right. \quad (41)$$

En outre, pour chacune des batteries, les quantités M, N, F et G sont dans une relation telle que deux quelconques d'entre elles sont déterminées par les deux autres. On peut notamment, en vertu des équations (51) du chapitre précédent, poser, pour une batterie qui se compose de n bouteilles égales :

$$\left\{ \begin{array}{l} M = n \frac{s}{k} (F - G) + n\alpha G, \\ N = n \left(\frac{s}{k} - \alpha \right) (G - F) + n\beta G. \end{array} \right. \quad (42)$$

Au moyen des systèmes d'équations (41) et (42), on peut, aussitôt que deux des quantités (40) sont données, déterminer les autres, et calculer ensuite par là le potentiel de toute l'électricité sur elle-même.

Pour comparer la théorie avec l'expérience, nous possédons également des essais de mesure de Riess. Les essais comportent deux séries. Dans la première, le nombre des bouteilles était le même dans toutes les batteries reliées entre elles, mais le nombre de ces dernières variait : dans la seconde, le nombre des batteries employées était toujours de *deux*, mais le nombre des bouteilles variait dans chacune de ces batteries.

§ 10.

Batterie à cascade de deux éléments inégaux.

Nous considérerons d'abord la seconde des séries d'essais et nous la comparerons avec la théorie.

Les expériences étaient disposées de telle sorte que les deux batteries étaient isolées, et que l'armature intérieure de la première communiquait avec la machine électrique, l'armature extérieure de la seconde avec une bouteille de mesure de Lane. De cette manière, la quantité d'électricité de la seconde armature extérieure était donnée par le nombre des étincelles de la bouteille de mesure ; et en même temps, on peut considérer comme égale à zéro la fonction potentielle sur cette armature, après chaque étincelle de la bouteille de mesure, puisqu'on ne néglige ainsi que la fonction potentielle du résidu qui reste dans la bouteille de mesure après chaque décharge.

Nous connaissons donc, comme cela est exigé plus haut, deux des quantités (40) ; et, pour en déduire les autres, nous pouvons successivement passer de la seconde armature extérieure à la seconde intérieure, puis à la première extérieure, et enfin à la première intérieure. Si l'on désigne par $-Q$ la quantité d'électricité déterminée au moyen de la bouteille de mesure, par n_1 et n_2 les nombres des bouteilles des deux batteries, toutes les bouteilles étant supposées égales ; et si l'on néglige tous les termes d'un ordre supérieur au premier par rapport à k , on obtiendra la série des expressions suivantes :

$$G_2 = 0,$$

$$N_2 = -Q,$$

$$F_2 = \left(1 + \alpha \frac{k}{s}\right) \frac{k}{n_2 s} Q,$$

$$M_2 = \left(1 + \alpha \frac{k}{s}\right) Q,$$

$$G_1 = \left(1 + \alpha \frac{k}{s}\right) \frac{k}{n_2 s} Q,$$

$$N_1 = -\left(1 + \alpha \frac{k}{s}\right) Q,$$

$$F_1 = \left\{ 1 + \frac{n_2}{n_1 + n_2} \left[2\alpha + (\alpha + \beta) \frac{n_1}{n_2} \right] \frac{k}{s} \right\} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \frac{k}{s} Q,$$

$$M_1 = \left\{ 1 + \left[2\alpha + (\alpha + \beta) \frac{n_1}{n_2} \right] \frac{k}{s} \right\} Q.$$

Si l'on forme maintenant, pour déterminer le potentiel de toute la batterie composée, l'équation :

$$W = \frac{1}{2} (F_1 M_1 + G_1 N_1 + F_2 M_2 + G_2 N_2),$$

et si l'on y substitue les expressions précédentes, on obtient :

$$W = \left\{ 1 + \frac{n_1 + 2n_2}{n_1 + n_2} \left[2\alpha + (\alpha + \beta) \frac{n_1}{n_2} \right] \frac{k}{s} \right\} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \frac{k}{2s} Q^2. \quad (43)$$

Si l'on se contente d'un degré d'exactitude moindre, en négligeant une quantité de l'ordre k par rapport à la valeur totale, on peut écrire :

$$W = \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \frac{k}{2s} Q^2. \quad (43a)$$

Comme le potentiel est nul après la décharge, W sera la diminution du potentiel qui a lieu par cette décharge ; et si nous admettons comme précédemment que, dans des circonstances semblables, l'échauffement en un point déterminé du circuit est proportionnel à l'effet total, nous pourrons écrire :

$$C = A \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \frac{Q^2}{2s}, \quad (44)$$

où C désigne la chaleur produite, et A une constante.

Si nous comparons cette formule avec les résultats de l'expérience, nous verrons d'abord qu'ici, comme dans tous les autres cas, la proportionnalité de la chaleur produite au carré de la quantité d'électricité employée, se trouve confirmée. En outre, en ce qui concerne la dépendance qui existe entre la chaleur et les nombres de bouteilles n_1 et n_2 , la concordance résulte des tables suivantes.

La première fois, n_2 a été laissé constant tandis que n_1 variait, de telle sorte que :

$$n_1 = n_2, = 2n_2, = 3n_2 \text{ et } = 4n_2 ;$$

une autre fois, n_1 a été laissé constant et n_2 a varié de sorte que :

$$n_2 = n_1, = 2n_1, = 3n_1 \text{ et } = 4n_1^1.$$

Afin de pouvoir mieux comparer les résultats, j'ai pris pour unité, dans les deux cas, l'échauffement observé dans la première expérience où n_1 était égal à n_2 , et j'y ai réduit les autres échauffements. J'ai pris la moyenne des deux valeurs que Riess donne comme résultats de chacune de ses expériences.

(I.) n_1 VARIABLE, n_2 CONSTANT.

n_1	ÉCHAUFFEMENTS	
	CALCULÉS.	OBSERVÉS.
n_2	1	1
$2 n_2$	0,75	0,76
$3 n_2$	0,67	0,69
$4 n_2$	0,63	0,66

1. *Ann. de Pogg.*, t. LXXX, p. 356.

(II.) n_2 VARIABLE, n_1 CONSTANT.

n_2	ÉCHAUFFEMENTS	
	CALCULÉS.	OBSERVÉS.
n_1	1	1
2 n_1	0,75	0,78
3 n_1	0,67	0,72
4 n_1	0,63	0,68

On voit que, dans le premier tableau, il y a une concordance satisfaisante entre les nombres de la deuxième et de la troisième colonne. Dans le second tableau, les différences sont, à la vérité, plus considérables ; mais si l'on réfléchit combien il serait difficile de réaliser complètement les conditions supposées dans la formule théorique, surtout celle d'une isolation parfaite, et qu'en outre, dans ce cas même, la formule n'est qu'approximativement exacte, on trouvera que ces différences ne sont pas telles qu'elles doivent faire douter de la théorie.

§ 11.

Batterie à cascade de plusieurs éléments égaux.

Passons maintenant à la seconde série d'essais indiquée plus haut, dans laquelle les éléments reliés en batterie à cascade (bouteilles isolées ou batteries se composant de quelques bouteilles) étaient égaux entre eux, tandis que leur nombre variait. Dove et Riess ont employé comme éléments trois ou quatre bouteilles ou batteries égales, qui, dans la charge, étaient toujours réunis en batterie à cascade; la décharge, au contraire, se faisait soit pour la première seule, soit pour les deux premières ensemble, soit pour les trois premières ensemble, etc... Lors de chaque décharge, on observait l'échauffement dans le circuit de fermeture.

Pour déterminer, dans une batterie à cascade, composée d'un nombre quelconque d'éléments égaux, les niveaux potentiels des diverses armatures, ainsi que les quantités d'électricité qui se trouvent sur celles-ci, lorsqu'on connaît deux de ces quantités, nous pouvons utiliser de nouveau les systèmes d'équations (41) et (42). Nous nous contenterons ici du degré d'exactitude moindre que l'on atteint, quand on ne considère que le premier terme dans chacune des expressions M ou N. Alors on peut considérer comme égales en valeur absolue les quantités d'électricité sur toutes les armatures; d'après

cela, si nous désignons par $-Q$ celle qui se trouve sur la dernière armature extérieure, nous pourrons représenter ces quantités par la série $-Q, +Q, -Q, +Q$, etc. Si le niveau potentiel de la dernière armature extérieure est nul, nous obtenons la série suivante des valeurs des niveaux potentiels :

$$0, k \frac{Q}{S}, k \frac{Q}{S}, 2k \frac{Q}{S}, 2k \frac{Q}{S}, 3k \frac{Q}{S}, \text{ etc.}$$

où S est égal à ns .

En ce qui concerne le potentiel de toute l'électricité sur elle même pour une batterie à cascade d'un nombre quelconque d'éléments, il est à remarquer que, pour le degré d'exactitude dont nous nous sommes contenté, les potentiels des bouteilles seules ou des batteries utilisées comme éléments sont égaux entre eux, chacun d'eux étant représenté par $\frac{k}{2} \cdot \frac{Q^2}{S}$. Si l'on emploie un seul élément, ou une réunion de deux, trois, etc., éléments, on obtient comme valeurs des potentiels :

$$\frac{k}{2} \cdot \frac{Q^2}{S}, 2 \frac{k}{2} \cdot \frac{Q^2}{S}, 3 \frac{k}{2} \cdot \frac{Q^2}{S}, \text{ etc.}$$

Ce sont ces valeurs, procédant suivant les rapports des nombres entiers 1, 2, 3, etc., qui représentent les quantités de travail effectuées par les forces électriques dans les décharges faites par Dove et Riess ; on doit, par suite, y comparer les échauffements observés.

Mais, dans cette série d'essais, on ne doit pas s'attendre à une aussi grande concordance que dans la précédente, parce qu'ici se présentent quelques inconvénients dont les expériences antérieures n'étaient pas tout à fait dépourvues, mais qui ne pouvaient pas y exercer

une influence aussi considérable. L'un de ceux qui méritent une mention plus particulière consiste en ce que chaque batterie nouvelle, ajoutée pour la décharge, allonge aussi le circuit. En effet, dans la première série d'expériences, lorsqu'on augmentait le nombre des bouteilles d'une batterie, les nouvelles bouteilles étaient introduites *à côté* des autres ; et, si le système de corps soumis à l'action de l'électricité était augmenté de ces bouteilles et de leurs fils conducteurs, cette augmentation ne devait pas compter, toutefois, comme un *allongement* du circuit lui-même ; c'est pourquoi j'ai négligé plus haut cette circonstance, de même que la circonstance analogue, qui s'est présentée antérieurement dans l'accroissement du nombre des bouteilles d'une seule batterie. Dans la série d'expériences actuelle, au contraire, chaque batterie ajoutée est placée *à la suite* des autres, de sorte que son fil conducteur et ses deux armatures font alors partie intégrante du circuit.

Il résulte de là que l'hypothèse que nous avons faite dans le cas d'un circuit *constant*, à savoir, que la production de chaleur, en un lieu déterminé, est proportionnelle à l'effet total, ne peut plus être admise dans le cas où cet effet est augmenté par l'accroissement des éléments d'une batterie à cascade, mais que, dans ce dernier cas, le rapport des productions de chaleur observées doit être un peu moindre. Or, comme les équations précédentes font voir que l'effet total, ou la diminution du potentiel, est proportionnel au nombre des éléments déchargés simultanément, on devra s'attendre à ce que, quand le nombre des éléments augmentera progressivement, les indications d'un thermomètre électrique, placé dans le circuit, restent un peu au dessous des nombres entiers successifs correspondants.

Les expériences de Riess¹ montrent aussi en réalité un écart assez notable, puisque, pour quatre batteries, les nombres, au lieu de croître de 1 à 4, ne vont jamais que de 1 à 3, et pour trois batteries de 1 à 2,5 seulement, au lieu de croître de 1 à 3. On ne peut naturellement pas énoncer de loi déterminée relativement à cette série de nombres, puisqu'elle doit dépendre de la constitution des batteries employées, ainsi que de celle des conducteurs qui les relient entre elles.

L'exactitude de l'hypothèse faite précédemment, que chaque liaison entre deux éléments doit être considérée comme une partie intégrante du circuit, se vérifie du reste encore spécialement en ce que, d'après les observations des deux physiciens, l'échauffement a lieu, dans ces fils intermédiaires, à peu près comme dans le circuit principal, et en ce que l'introduction d'un mauvais conducteur dans l'une de ces liaisons diminue l'échauffement, en un point quelconque du circuit principal, presque autant que si ce conducteur était introduit dans celui-ci même.

On ne doit pas perdre de vue cette dernière circonstance, si l'on veut se rendre compte de l'accroissement de la quantité totale de chaleur engendrée, qui a lieu lors de l'augmentation des éléments d'une batterie à cascade. Si l'on a, par exemple, une batterie à cascade de quatre éléments, il existe, dans celle-ci, quatre parties distinctes du circuit de fermeture, savoir : le circuit principal qui relie la première armature intérieure à la dernière extérieure, et les trois parties intermédiaires qui relient une armature extérieure à l'armature intérieure suivante. Puisqu'on peut intercaler dans chacun de ces circuits un thermomètre électrique à air, et qu'on

1. *Ann. de Pogg.*, t. LXXX, p. 351.

obtient chaque fois une quantité de chaleur qui se rapproche au moins du quadruple de celle qu'un seul élément y eût produite, on pourrait peut-être, comme cela est en effet arrivé, en tirer la conclusion que l'on obtiendrait une quantité de chaleur seize fois plus grande en intercalant simultanément des thermomètres électriques à air dans tous les quatre circuits. Mais il ne faut pas oublier que, si l'on n'introduit qu'un seul thermomètre, dont le fil a une longueur réduite importante, presque toute l'action de la décharge s'y concentrera ; si l'on introduit quatre thermomètres, l'effet se répartira sur les quatre, et deviendra moindre, dans chacun, d'une manière correspondante. La production totale de chaleur ne peut pas être plus grande que la diminution du potentiel qui a lieu pendant la décharge, et d'après ce qui précède, cette diminution, est, non pas seize fois, mais seulement quatre fois plus grande dans une batterie de quatre éléments que dans un élément unique.

En jetant un coup d'œil d'ensemble sur le résultat de toutes les expériences faites jusqu'à présent, nous verrons que la plupart des cas sont, en général, trop compliqués pour se prêter à une comparaison rigoureuse avec la théorie ; mais, pour autant que cette comparaison fût possible, elle a toujours été à l'avantage du théorème fondamental, et je ne connais aucun fait expérimental bien établi qui le contredise. Je pense donc que l'on peut regarder ce théorème comme confirmé par l'expérience, si tant est que cette confirmation soit encore nécessaire à côté de son fondement théorique.

CHAPITRE V.

PRODUCTION DE TRAVAIL ET DE CHALEUR DANS UN COURANT ÉLECTRIQUE STATIONNAIRE.

§ 1.

Caractère distinctif du cas à considérer.

Dans le chapitre précédent, nous avons considéré les effets du mouvement de l'électricité, dans un cas particulièrement simple sous un certain rapport. Nous avons supposé, en effet, que l'état initial de l'électricité, aussi bien que l'état final, était un état de repos. Dans ce cas, il n'est absolument pas besoin d'examiner la loi du mouvement par lequel l'électricité passe d'un état à l'autre ; il suffit de connaître le potentiel de toute l'électricité sur elle-même pour les deux états de repos ; le travail effectué par les forces électriques pendant le passage est représenté par la différence des deux potentiels. Nous considérerons maintenant, au contraire,

l'électricité dans son mouvement même, mais en faisant d'autres hypothèses pour simplifier la recherche. Nous supposons que le mouvement est *stationnaire* ; nous entendons par là, qu'il est tel, que l'état de mouvement du système considéré reste toujours le même dans la suite du temps, ou tout au moins qu'il n'éprouve que des modifications dont la durée est si petite, relativement aux intervalles de temps que l'on considère dans l'observation, qu'on n'a affaire dans celle-ci qu'à un état de mouvement moyen, qui est invariable. Un tel mouvement stationnaire a lieu dans un courant galvanique ou thermoélectrique, et nous nous occuperons maintenant de courants de cette nature. Mais nous introduirons encore une restriction. Nous ne considérerons pas tout d'abord le circuit entier, y compris les points où les forces électromotrices agissent, et les phénomènes engendrant ces forces, mais nous restreindrons notre examen à une portion de conducteur dans laquelle aucune force électromotrice n'a son siège, et qui n'éprouve pas de modifications chimiques ou mécaniques. Nous supposons aussi qu'il n'y a pas d'actions d'induction entre le conducteur considéré et d'autres conducteurs ou aimants.

Dans ce cas, l'échauffement du conducteur est le seul effet produit par le courant électrique. Les lois de cette production de chaleur ont été constatées expérimentalement par Joule¹, Lenz² et Becquerel³, pour le cas le plus simple, où le conducteur est un fil ; ils ont trouvé que la chaleur, engendrée pendant l'unité de temps dans un fil, est proportionnelle à sa résistance

1. *Phil. Mag.*, S. 3, t. 19, p. 264 et Sér. 4, t. 3, p. 486.

2. *Ann. de Pogg.*, t. 61, p. 44.

3. *Ann. de chim. et de phys.*, S. 3, t. 9, p. 21.

à la conductibilité et au carré de l'intensité. Il s'agit maintenant de considérer, à un point de vue théorique général, le travail fait dans le conducteur par les forces électriques, et la chaleur engendrée qui s'ensuit, et de les rattacher aux effets considérés dans le chapitre précédent.

§ 2.

La loi d'Ohm, et son interprétation par Kirchhoff.

La loi d'Ohm, en tant qu'elle est relative aux phénomènes qui se passent à l'intérieur d'un conducteur homogène, peut s'énoncer d'une manière générale sous la forme suivante. Soit $d\omega$ un élément de surface à l'intérieur du conducteur, N la normale à cet élément et $i d\omega$ la quantité d'électricité qui le traverse pendant l'unité de temps, i étant positif ou négatif, suivant que l'électricité se meut, relativement à N, du côté négatif au côté positif, ou *vice-versa* ; on aura l'équation :

$$i = -k \frac{\partial V}{\partial N}, \quad (1)$$

où k désigne le pouvoir conducteur du corps, et V une fonction qui ne dépend que des coordonnées, du moment où le courant est arrivé à l'état stationnaire.

En effet, en chaque point du conducteur parcouru par le courant, doit agir une force qui maintient l'électricité en mouvement, malgré la résistance qu'elle

a continuellement à vaincre ; et le coefficient différentiel négatif $-\frac{\partial V}{\partial N}$ représente évidemment la composante de cette force estimée suivant la direction de la normale N. Mais, à part ce point, la signification physique de la fonction V était auparavant douteuse. Ohm nomme la quantité représentée par cette fonction la *force électroscopique*, et il la définit la *densité de l'électricité* au point considéré du conducteur¹. Mais Kirchhoff² a objecté avec raison que cette manière de voir est en contradiction avec un théorème connu d'électrostatique. D'après elle, en effet, l'électricité devrait rester en repos dans un conducteur, si elle était répandue, dans tout son volume, avec la même densité ; tandis qu'il est bien connu que l'électricité *libre* d'un corps (c'est-à-dire celle qui n'est pas liée à une égale quantité d'électricité contraire), la seule dont il puisse être ici question, puisqu'elle est la seule qui exerce une action, que cette électricité, disons-nous, à l'état de repos, n'est répandue *que sur la surface* du corps.

Cette objection pourrait peut-être faire naître des doutes sur l'exactitude théorique de la loi d'Ohm ; toutefois Kirchhoff lui-même a démontré que cette loi peut parfaitement se mettre en harmonie avec les principes de l'électrostatique, et il a fait voir quelle est la signification que l'on doit attribuer, dans ce but, à la fonction V.

Comme nous l'avons dit, $-\frac{\partial V}{\partial N}$ représente la composante, estimée suivant la direction de la normale N, de

1. *Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet* von Dr G. S. Ohm, p. 95 et autres.

2. *Ann. de Pogg.*, t. LXXVIII, p. 506.

la force agissant, au point considéré, sur une unité d'électricité qu'on y suppose concentrée ; de même, les composantes de cette force suivant les trois axes seront naturellement représentées par $-\frac{\partial V}{\partial x}$, $-\frac{\partial V}{\partial y}$, $-\frac{\partial V}{\partial z}$. Cela indique que cette force provient d'attractions et de répulsions exercées par des points fixes, et dont l'intensité ne peut être fonction *que de la distance*, et non de la direction dans laquelle se trouve le point agissant ; mais la loi de cette action reste encore arbitraire. Cette loi peut se déduire d'autres considérations, puisque ces attractions et répulsions ne peuvent être exercées, dans le cas qui nous occupe, que par l'électricité elle-même ; et que, pour celle-ci, les attractions et les répulsions sont *inversement proportionnelles au carré de la distance*. De là il résulte que la fonction V doit être simplement considérée comme *la fonction potentielle de la quantité totale d'électricité libre*¹.

L'objection mentionnée plus haut est donc levée ; car, au moyen de cette signification de la fonction V , l'équation $V = \text{const.}$, qui exprime, en vertu de (1), qu'il n'y a pas de courant, est la même que l'équation de condition que donne l'électrostatique pour l'état d'équilibre.

1. C'est pourquoi j'ai représenté cette fonction, que Ohm et Kirchoff désignent par u , par la lettre V , que j'ai déjà employée dans mes recherches antérieures sur la fonction potentielle.

§ 3.

**Distribution de l'électricité décomposée
et état électrique dans l'intérieur du conducteur.**

Au moyen de la signification donnée ci-dessus à V , il est facile, comme Kirchhoff l'a montré, de déterminer où se trouve l'électricité libre dans le cas d'un courant stationnaire. En effet, pour que le courant soit stationnaire, il faut que la quantité d'électricité contenue dans chaque élément de volume soit constante ; et, par suite, la quantité d'électricité, qui entre dans un élément de volume pendant un certain temps, doit être égale à celle qui sort de cet élément pendant le même temps. Si nous considérons un élément $dx dy dz$ en un point (x, y, z) , nous aurons, d'après l'équation (1), pour la quantité d'électricité qui entre dans cet élément par la première des deux faces $dy dz$:

$$- k dy dz \frac{\partial V}{\partial x},$$

et pour la quantité qui sort par l'autre face :

$$- k dy dz \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx \right);$$

l'excès de la seconde sur la première sera donc :

$$k dx dy dz \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}.$$

Pour les deux faces $dx dz$ on obtiendra de même l'excès :

$$k dx dy dz \frac{\partial^2 V}{\partial y^2},$$

et pour les deux faces $dx dy$:

$$k dx dy dz \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

La somme de ces trois expressions donne l'excès de toute la quantité d'électricité qui sort de l'élément sur celle qui y entre ; et comme cet excès doit être nul, on aura :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad (2)$$

Or, d'après un théorème connu sur la fonction potentielle, cette équation prouve que le point (x, y, z) est *extérieur* à la masse dont V est la fonction potentielle ; et comme ce résultat s'applique à tous les points du conducteur, il s'ensuit que l'électricité libre ne peut pas se trouver à l'intérieur de celui-ci, et que, dans un courant stationnaire, comme dans l'état d'équilibre, elle est accumulée à la surface.

La circonstance que l'électricité en mouvement dans l'intérieur du conducteur n'exerce ni attraction ni répulsion, doit s'expliquer différemment, suivant qu'on suppose qu'il existe *deux* électricités ou qu'il n'en existe *qu'une seule*. Dans la première hypothèse, on doit admettre qu'il se trouve à chaque instant, dans chaque

élément de volume à l'intérieur du conducteur, la même quantité des deux électricités. Dans l'autre hypothèse on suppose, comme on sait, qu'un élément de volume d'un corps, qui renferme une certaine quantité normale d'électricité, n'exerce aucune action sur une autre particule d'électricité, parce que la répulsion de l'électricité est compensée par une certaine autre force, et, d'un autre côté, qu'il ne se présente de répulsion ou d'attraction effective que quand l'élément de volume renferme trop ou trop peu d'électricité ; dans cette hypothèse, on doit admettre, pour le cas d'un courant stationnaire, que chaque élément de volume à l'intérieur du conducteur renferme constamment la quantité d'électricité normale.

Dans la première hypothèse, c'est-à-dire dans celle des deux électricités, on peut encore faire différentes suppositions relativement à la manière dont elles se comportent. Si l'on considère les deux électricités comme également mobiles, on doit en conclure qu'elles se meuvent avec des vitesses égales dans des sens opposés. On peut aussi, comme C. Neumann l'a fait, admettre qu'une seule des deux électricités, la positive, par exemple, est mobile de telle sorte qu'elle peut se mouvoir dans les conducteurs solides, et que l'électricité négative est reliée invariablement aux atomes pondérables. Cette hypothèse concorde avec l'autre, c'est-à-dire avec celle d'une seule électricité, en ce que le courant galvanique ne consiste qu'en un simple mouvement, celui de l'électricité positive ; mais elle est, quant au reste, plus commode pour la théorie mathématique, en ce que les forces exercées par l'électricité fixe en repos se laissent exprimer d'une manière mieux déterminée et plus simple.

Nous admettrons toujours, dans ce qui suit, qu'il n'y a

qu'une électricité en mouvement. Pour traduire toutes les considérations, qui se présenteront ici, dans l'autre hypothèse, où les deux électricités sont également mobiles, on n'aura, au lieu d'admettre un seul courant, qui transporte pendant l'unité de temps à travers une surface donnée la quantité d'électricité Q dans une seule direction, qu'à admettre deux courants qui transportent les quantités d'électricité $\frac{1}{2} Q$ et $-\frac{1}{2} Q$ en sens contraires, et à appliquer à ces deux courants séparément les résultats qui se rapportent ici au courant unique.

En outre, il faut encore signaler ici une autre circonstance. Dans ce qui précède, nous ne nous sommes occupé, en parlant des forces que l'électricité mobile subit, que de celles que l'on considère ordinairement, et que les particules d'électricité exercent les unes sur les autres indépendamment de leur mouvement. Mais les particules électriques mobiles exercent aussi, les unes sur les autres, des forces qui naissent de leur mouvement et que nous nommerons simplement forces *électrodynamiques*. Il y a lieu de se demander si une particule électrique, se mouvant dans le conducteur, éprouve, de la part de toutes les autres particules en mouvement, une force électrodynamique, qui, en s'ajoutant à la force dont il a été parlé jusqu'ici, modifie les lois ci-dessus mentionnées.

Sous ce rapport j'indiquerai d'abord provisoirement, comme résultat d'une recherche qui sera faite dans un chapitre ultérieur, que la force électrodynamique qu'une particule d'électricité en mouvement éprouve de la part d'un courant fermé, au repos, et constant, ne peut avoir qu'une direction perpendiculaire à la direction de son mouvement, et que, par conséquent, pendant que celui-ci a lieu, elle ne peut effectuer aucun travail. D'après cela, nous pouvons faire entièrement abstraction

de la force électrodynamique dans la détermination du travail ici considéré et de la production de chaleur qui en dépend.

Mais, dans la question de savoir où se trouve l'électricité décomposée, et comment elle est distribuée, la force électrodynamique doit être prise, en tout cas, en considération. On peut, en effet, se représenter, si une telle force existe, qu'outre l'électricité décomposée, dont la fonction potentielle est V , il existe encore une autre électricité décomposée, dont la force tient en équilibre la force électrodynamique. La discussion plus précise de ce point ne serait pas à sa place ici, puisqu'il n'a pas encore été question de la force électrodynamique, et c'est pourquoi je me contenterai d'indiquer, par une distinction dans la terminologie, que je ne veux pas anticiper sur cette discussion par ce que je dirai ici. Je nommerai V , non pas simplement la fonction potentielle de l'électricité décomposée, mais bien la fonction potentielle de l'*électricité décomposée motrice* ; par là, je veux exprimer qu'outre cette électricité décomposée, il en existe encore une autre, qui n'agit pas comme motrice, parce que la composante de la force qu'elle exerce suivant la direction de la trajectoire est nulle.

§ 4.

Détermination du travail effectué dans le conducteur.

Cherchons maintenant à déterminer le travail effectué par la force qui agit, à l'intérieur du conducteur, dans le mouvement de l'électricité.

Considérons, pour cela, un élément d'électricité dq , se mouvant sur le chemin s . La composante de la force agit sur une unité d'électricité qui, suivant la direction de la trajectoire, sera représentée, en chaque point de cette dernière, par $-\frac{\partial V}{\partial s}$, et la force qui agit sur l'élément dq sera $-dq \cdot \frac{\partial V}{\partial s}$. Il faut remarquer que l'élément d'électricité se meut dans la direction dans laquelle agit la force, et que, par suite, la composante de la force dans la direction de la trajectoire est en même temps la force totale. Si nous imaginons maintenant comme donnée la trajectoire de l'élément d'électricité dq , nous pouvons regarder V simplement comme une fonction de la longueur s du chemin, et nous pouvons, par suite, écrire aussi $\frac{dV}{ds}$ au lieu de $\frac{\partial V}{\partial s}$, et représenter, en conséquence, la force ci-dessus par $-dq \cdot \frac{dV}{ds}$. Le travail effectué par la force, dans le mouvement le long de l'élément de chemin ds , est, par suite :

$$- dq \cdot \frac{dV}{ds} ds,$$

et le travail effectué ainsi sur le trajet de s_0 à s_1 :

$$- dq \int_{s_0}^{s_1} \frac{dV}{ds} ds = (V_0 - V_1) dq,$$

où V_0 et V_1 sont les valeurs de V correspondantes à s_0 et s_1 .

On voit d'abord par là que ce travail est complètement déterminé par les valeurs de la fonction potentielle qui répondent aux points initial et final de la portion de trajectoire, sans qu'il soit nécessaire de connaître le chemin parcouru entre ces deux points. En outre, le produit $V \cdot dq$ est le *potentiel* de l'électricité décomposée motrice sur l'élément dq , de sorte que l'expression précédente représente la diminution qu'a subie ce potentiel depuis s_0 jusqu'à s_1 ; et, comme cette même expression s'applique à tout autre élément d'électricité, et peut s'étendre, par suite, à une quantité finie d'électricité, on aura le théorème suivant :

Le travail effectué pendant un mouvement déterminé d'une quantité d'électricité, par la force qui agit dans le conducteur, est égal à la diminution qu'a subie, pendant ce mouvement, le potentiel de cette quantité d'électricité et de l'électricité décomposée motrice l'une sur l'autre.

Dans ce qui précède, nous nous sommes représenté le mouvement de l'électricité comme si une quantité déterminée de celle-ci parcourait tout le chemin considéré ; mais il peut se faire que ce mouvement affecte un tout autre caractère. Si l'on suppose, par exemple, que chaque molécule matérielle soit pourvue d'une certaine

quantité d'électricité, et si l'on imagine un nombre de molécules semblables 1, 2, 3, 4, etc., disposées à la suite les unes des autres, le mouvement de l'électricité pourra se faire de telle sorte qu'une petite quantité passe de 1 à 2, qu'une autre quantité égale passe de 2 à 3, une autre égale de 3 à 4, et ainsi de suite. Mais, pour la validité du théorème précédent, il est indifférent que l'on admette l'un ou l'autre de ces mouvements, car il suffit que toutes les parties du chemin soient parcourues par une quantité *égale*, mais non nécessairement, par la *même* quantité d'électricité.

Au moyen de ce théorème, il sera facile de déterminer le travail effectué, pendant l'unité de temps, dans une portion quelconque d'un conducteur parcouru par un courant stationnaire.

Soit donnée une surface fermée, limitant une partie de l'espace occupé par le conducteur ; il suffira de déterminer la diminution du potentiel pour chaque particule d'électricité qui traverse cet espace fermé pendant l'unité de temps ; ou bien, ce qui revient au même, on n'aura qu'à multiplier cette quantité d'électricité par les valeurs que prend la fonction potentielle aux points d'entrée et de sortie, et à soustraire ces deux produits l'un de l'autre. La somme de toutes ces différences donne la quantité de travail cherchée, et l'on peut la représenter aisément sous la forme suivante. Soient $d\omega$ un élément de surface de l'espace fermé, et $id\omega$ la quantité d'électricité qui le traverse pendant l'unité de temps, quantité qui sera positive ou négative suivant qu'elle sort de cet espace ou qu'elle y entre ; enfin, soit W le travail effectué à l'intérieur de cet espace ; on aura :

$$W = \int Vid\omega, \quad (I)$$

où l'intégrale doit s'étendre à toute la surface. Si l'on y fait, d'après (1) :

$$i = -k \frac{\partial V}{\partial N},$$

où la normale N est comptée comme positive vers l'extérieur, on pourra écrire cette équation sous la forme :

$$W = -k \int V \frac{\partial V}{\partial N} d\omega. \quad (I_a)$$

§ 5.

Détermination de la chaleur engendrée dans le conducteur.

A ces équations se relie immédiatement celles qui déterminent la *chaleur produite* à l'intérieur de l'espace fermé.

Le travail effectué dans celui-ci doit, en effet, être accompagné d'un égal accroissement de force vive. Ce travail, est représenté complètement, dans le cas actuel, par l'équation (I) ou (I_a), puisque nous avons exclu tous les autres effets dans lesquels se présente un travail, comme, par exemple, l'électrolyse. Dans la force vive, nous devons, à la rigueur, considérer non-seulement la masse matérielle du conducteur, mais encore l'électricité. Les particules d'électricité peuvent être, en effet, accélérées ou retardées sur leur trajectoire, car la condition de l'état stationnaire exige bien que la vitesse soit invariable en chaque lieu du

conducteur, mais non qu'elle soit la même en différents lieux. Si, par exemple, le courant parcourt un conducteur présentant des sections très différentes, le mouvement de l'électricité peut être plus rapide dans les sections étroites que dans les plus larges, de même que l'eau d'un fleuve coule plus rapidement aux endroits où son lit se rétrécit.

Il s'agirait donc de décider si l'on doit attribuer de l'inertie à l'électricité, et, par suite, de la force vive à celle qui est en mouvement, et comment on doit déterminer cette force vive. Sous ce rapport, il faut maintenant remarquer qu'on a déjà fait tacitement une hypothèse en admettant la loi d'Ohm. Car si l'équation (1) :

$$i = -k \frac{\partial V}{\partial X}$$

est exacte, la vitesse de l'électricité en un point donné ne dépend, en grandeur et en direction, que de la force qui agit en ce point, et par suite l'inertie de l'électricité doit être ou nulle ou tellement faible, que la force nécessaire pour produire les accélérations qui ont lieu dans le conducteur, est négligeable à côté de celle qui est nécessaire pour vaincre la résistance à la conductibilité. C'est pourquoi nous pouvons faire abstraction de toute considération de la force vive de l'électricité dans la détermination que nous faisons ici.

Nous n'avons donc à considérer que la force vive de la masse du conducteur ; et comme, par hypothèse, il ne se produit aucun mouvement appréciable dans sa masse, il ne reste que l'accroissement ou la diminution de la quantité de chaleur. Ce résultat peut s'exprimer brièvement comme suit : tout le travail est employé à vaincre la résistance à la conductibilité, et il a pour résultat la

production d'une quantité de chaleur équivalente, absolument comme le travail qui est employé à vaincre le frottement.

Si nous imaginons que l'on mesure la chaleur en unités mécaniques, la quantité de chaleur produite est simplement égale au travail fait par les forces électriques, et les formules données pour W sont également applicables à cette quantité de chaleur. Si nous supposons, au contraire, que l'on mesure la chaleur en unités ordinaires, et si nous nommons E le travail correspondant à l'unité de chaleur, ou l'équivalent mécanique de la chaleur, nous avons à poser, en désignant par H la quantité de chaleur engendrée pendant l'unité de temps dans l'espace limité :

$$H = \frac{1}{E} W,$$

et de même, d'après (I) et (I_a)

$$H = \frac{1}{E} \int V i d\omega \quad (\text{II})$$

$$H = - \frac{k}{E} \int V \frac{\partial V}{\partial N} d\omega. \quad (\text{II}_a)$$

§ 6.

Examen de cas particuliers.

Les intégrales qui se présentent dans les équations (I), (I_a), (II) et (II_a) se simplifient généralement beaucoup dans l'application.

Si la surface qui délimite l'espace considéré est en partie celle du conducteur, et si nous négligeons la faible quantité d'électricité que celui-ci cède à l'air ambiant, vis à vis de la quantité d'électricité qui le parcourt, nous n'aurons pas à tenir compte, dans l'intégration, de cette partie de la surface. Si le conducteur, comme c'est ordinairement le cas, est un corps de forme très allongée, que l'électricité parcourt dans le sens de sa longueur, et si nous considérons, par exemple, une partie de ce corps comprise entre deux sections, nous n'aurons à étendre les intégrales qu'aux surfaces de ces deux sections.

Si, en outre, le conducteur a une forme approximativement prismatique ou cylindrique, à l'endroit où se trouve l'une de ces sections, de sorte qu'on peut admettre que les particules d'électricité se meuvent toutes parallèlement à l'axe, la force motrice devra avoir cette même direction. Si l'on choisit donc un système de coordonnées rectangulaires tel que l'axe des x soit parallèle à l'axe du conducteur, — $\frac{\partial V}{\partial x}$ représentera

toute la force motrice, et $\frac{\partial V}{\partial y}$ ainsi que $\frac{\partial V}{\partial z}$ seront nuls. Il s'ensuit que, si la section est normale à l'axe, V doit être constant à l'intérieur de celle-ci, et l'on peut donc écrire :

$$\int V id\omega = V \int id\omega.$$

L'intégrale $\int id\omega$, prise négativement ou positivement, suivant que cette section est la première ou la seconde relativement à la direction du courant, représente toute la quantité d'électricité qui traverse cette section pendant l'unité de temps ; cette quantité s'appelle habituellement l'*intensité* du courant, et nous la représenterons par J, de sorte que l'expression précédente deviendra :

$$\pm V . J.$$

Admettons maintenant que les mêmes conditions soient remplies pour l'autre section, et désignons respectivement par V_0 et V_1 les valeurs de V correspondantes à la première et à la seconde section ; le travail effectué à l'intérieur de toute cette portion du conducteur sera :

$$W = (V_0 - V_1) . J, \quad (3)$$

et la chaleur produite :

$$H = \frac{1}{E} (V_0 - V_1) . J. \quad (4)$$

Or, d'après la loi d'Ohm :

$$J = \frac{V_0 - V_1}{l}, \quad (5)$$

où l désigne la résistance à la conductibilité de la portion comprise entre les deux sections ; de sorte que les deux équations précédentes deviendront :

$$V = l . J^2. \quad (6)$$

$$H = \frac{1}{E} . l . J^2. \quad (7)$$

La dernière de ces équations renferme les deux lois, trouvées par Joule et confirmées par Lenz et Becquerel, que nous avons mentionnées au début de ce chapitre.

Après que, dans un Mémoire publié dans les *Annales de POGGENDORF*¹, j'eus déduit cette équation (7), dans laquelle E est l'équivalent mécanique de la chaleur, en me basant seulement sur la loi d'Ohm², comme je l'ai fait ci-dessus, von Quintus-Idilius en a tiré une détermination numérique de E (³). Par une série de mesures très soignées, il est parvenu à la valeur 399,7 ou en chiffres ronds 400 kilogrammètres ; eu égard à la grande difficulté des observations à faire, cette valeur concorde d'une manière suffisamment exacte avec la valeur 424, déterminée par Joule au moyen du frottement de l'eau.

1. T. 87, p. 164.

2. Dans une recherche sur ce sujet, (*Phil. Mag.*, Sér. 4, t. 2, p. 581) Thomson a utilisé, outre la loi d'Ohm, les lois de l'induction électromagnétique.

3. *Ann. de Pogg.*, t. 101, p. 69.

§ 7.

**Manière dont se comportent, dans différents gaz,
des fils échauffés galvaniquement.**

En 1854¹, Grove a fait cette observation, que, si l'on porte un fil au rouge blanc à l'aide d'un courant galvanique, sa lumière s'éteint brusquement, comme le ferait la flamme d'une bougie, si on le plonge dans un vase contenant de l'hydrogène. Dans un travail ultérieur², il a examiné plus spécialement ce sujet, pour lequel l'essai suivant est important. Il intercala, dans le circuit de fermeture d'une batterie de Volta, deux morceaux entièrement égaux de fil de platine qui, enroulés en spirale, étaient enfermés dans deux petits tubes de verre, dont l'un contenait de l'oxygène et l'autre de l'hydrogène ; puis il plaça les tubes ainsi disposés dans des réservoirs contenant des quantités égales d'eau et servant de calorimètres. Établissant la communication avec la batterie, de sorte que les deux fils étaient traversés par le même courant, le fil plongé dans l'oxygène passa au rouge blanc, tandis que celui qui se trouvait dans l'hydrogène ne rougit pas visiblement. En même temps, la température monta d'une quantité différente dans les calorimètres, par suite de la chaleur cédée

1. *Phil. Mag.*, Sér. 3, t. 27, p. 445.

2. *Phil. Mag.*, Sér. 3, t. 35, p. 144 et *Ann. de Pogg.*, t. 78, p. 366.

par les fils ; elle monta, de 60° F. jusque 70° dans celui qui entourait le tube à hydrogène, et de 60° à 81° dans celui qui entourait le tube à oxygène.

D'une manière analogue, Grove compara d'autres gaz à l'hydrogène, et il trouva, entre autres, les nombres suivants, que j'ai réduits pour en faciliter l'examen, de telle sorte que j'ai toujours pris comme unité la quantité de chaleur observée, dans le même essai, pour l'hydrogène.

Gaz dans lesquels se trouvait le fil.	Azote.	Oxygène.	Acide carbonique.	Gaz oléfiant.	Hydrogène.
Chaleur cédée.	2,26	2,10	1,90	1,57	1

À la suite de la traduction d'un Mémoire qui contenait la première observation ci-dessus mentionnée, Poggendorff a fait remarquer¹ que le refroidissement d'un fil, rougi galvaniquement dans différents milieux, a lieu, *mutatis mutandis*, d'après les mêmes lois que celles que Dulong et Petit ont établies pour le refroidissement d'un corps échauffé de la manière ordinaire, et d'après lesquelles le gaz hydrogène a le plus fort pouvoir refroidissant. Mais lorsque l'essai ultérieur de Grove avec les deux calorimètres fut publié, J. Müller repoussa la manière de voir de Poggendorff, en disant² : « Cet essai démontre catégoriquement que, si le fil rougit plus faiblement dans l'hydrogène pour des

1. *Ann. de Pogg.*, t. 71, p. 197.

2. *Bericht über die neuesten Fortschritte der Physik. Braunschweig*, 1849, p.397.

intensités de courant parfaitement égales, cela ne tient pas à ce que le gaz hydrogène lui soutire plus rapidement sa chaleur, sinon l'eau qui entoure le tube à hydrogène devrait précisément s'échauffer plus vite. Tout indique qu'une production de chaleur moindre a réellement lieu dans le fil, quand il est entouré d'hydrogène. » Après quelques autres considérations, il termine son explication par ce propos : « à mon avis, le phénomène est entièrement isolé et complètement inexpliqué. »

Ces remarques de Müller me fournirent le motif d'une considération plus étendue du sujet¹, où, à côté de la différence du pouvoir refroidissant des différents gaz mentionnée par Poggendorff, je tins compte encore de la dépendance de la résistance à la conductibilité vis à vis de la température, et de la dépendance de la production de chaleur vis à vis de cette résistance.

L'explication que j'ai donnée peut s'exposer brièvement comme suit. Si deux gaz, l'air atmosphérique et l'hydrogène, par exemple, agissent différemment, de telle manière que l'hydrogène soutire, plus rapidement que l'air, sa chaleur à un corps chaud, le fil de platine s'échauffera moins dans l'hydrogène que dans l'air, même pour une égale production de chaleur. Mais, en outre, la résistance à la conductibilité est moindre dans le fil le plus froid, et par suite, à égale intensité de courant, il y a moins de chaleur engendrée dans ce fil. De là résulte, pour le fil de platine qui se trouve dans l'hydrogène, une température encore plus basse que celle qu'on obtiendrait pour une égale production de chaleur. De cette manière s'expliquent en même temps, d'une part la température beaucoup plus basse, et d'autre part, la

1. *Ann. de Pogg.*, t. 87, p. 501.

quantité moindre de chaleur produite et cédée au calorimètre.

Pour pouvoir faire également une comparaison numérique approximative, on établit les calculs de la manière suivante.

La quantité de chaleur H , qui est engendrée dans le fil par un courant galvanique pendant l'unité de temps, peut se représenter par l'équation (7) :

$$H = \frac{1}{E} l J^2.$$

La résistance à la conductibilité l qui se présente ici est déterminée comme fonction de la température par l'équation :

$$l = l_0 (1 + kt),$$

dans laquelle l_0 est la résistance pour le point de congélation de l'eau, et t la température en degrés C. comptée à partir de ce point, tandis que k est une constante, que nous pouvons prendre égale à 0,00327 pour le platine, d'après Arndtsen¹. D'après cela, l'équation applicable à H se transforme en :

$$H = \frac{1}{E} l_0 J^2 (1 + kt). \quad (8)$$

En ce qui concerne maintenant la quantité de chaleur H' que le fil perd dans l'unité de temps, en partie par rayonnement, en partie par contact avec le gaz

1. Dans mon mémoire de 1882, cité ci-dessus, j'ai employé pour k la valeur 0,0023, qui était alors la plus probable, d'après les essais de Lenz ; aujourd'hui, je crois devoir y préférer la valeur trouvée plus tard par Arndtsen.

environnant, et qu'il cède au calorimètre, nous avons à appliquer, pour sa détermination, l'équation donnée par Dulong et Petit. En réalité, je regarde cette équation comme totalement fautive, si l'on veut la considérer comme applicable à toutes les températures ; mais pour l'intervalle de température, dans lequel les essais de Dulong et Petit ont été exécutés, c'est-à-dire de 0° à 300°, on peut bien la considérer comme approximativement exacte. L'équation est établie pour un corps dont la surface est *d'argent*, mais nous admettrons qu'elle peut s'appliquer au platine. Si, pour plus de simplicité, nous faisons encore, en outre, la supposition que la température des calorimètres ait été constamment égale à 0° (comme c'eût été le cas, si Grove avait utilisé le calorimètre à glace au lieu du calorimètre à eau), nous pourrions écrire l'équation de Dulong et Petit sous la forme suivante :

$$H' = B (a^t - 1 + pt^b), \quad (9)$$

où B est une constante dépendant de la forme et de la grandeur du corps employé (dans le cas actuel, le fil de platine). Dans la parenthèse, la différence $a^t - 1$ se rapporte à la chaleur cédée au gaz environnant. Ici b a, une fois pour toutes, la valeur 1,233, tandis que p dépend de la nature du gaz, et a les valeurs suivantes, sous la pression d'une atmosphère, pour les gaz sur lesquels ont expérimentés Dulong et Petit :

	Dans l'acide carbonique.	Dans l'air atmosphérique.	Dans le gaz oléfiant.	Dans l'hydrogène.
p	0,0220	0,0227	0,0305	0,0784

Si maintenant, comme c'était le cas dans les essais de Grove, l'état stationnaire s'est établi relativement à la température du fil, l'équation :

$$H - H' = 0$$

doit être satisfaite ; et, par la substitution à H et H' des expressions (8) et (9), et l'emploi de la notation C au lieu de la fraction $\frac{l_0 J^2}{EB}$, cette équation prend la forme suivante :

$$C(1 + kt) - a_2^t + 1 - \rho t^b = 0. \quad (10)$$

On peut calculer, à l'aide de cette équation, les températures que le fil prend, pour une intensité de courant déterminée, dans les divers gaz, et cela, en utilisant, pour une valeur invariable de la grandeur C, les diverses valeurs de ρ indiquées dans la table. La quantité C, qui dépend de l'intensité du courant, doit avoir ici une valeur telle, qu'aucune des températures ne soit plus élevée que 300°, parce que, sans cela, l'équation (9), et par suite aussi l'équation (10), ne seraient plus applicables.

J'ai effectué un calcul de cette nature pour l'air atmosphérique et l'hydrogène, en admettant que l'intensité du courant soit choisie de telle sorte que le fil prenne, dans l'air atmosphérique, précisément la température

$$t_1 = 300^\circ ;$$

j'ai calculé alors la température t_2 qu'il prendrait, pour la même intensité, dans l'hydrogène. Pour déterminer d'abord la valeur de C correspondant à l'intensité

choisie, on pose, dans (10), pour t la valeur 300 et pour p la valeur 0,0227 se rapportant à l'air atmosphérique. L'équation qui en résulte donne à C la valeur 17,52. Introduisant cette valeur de C dans l'équation (10), et prenant maintenant pour p la valeur 0,0784 applicable au cas de l'hydrogène, on peut calculer, à l'aide de cette équation, la température t_2 , que prend le fil dans l'hydrogène, pour la même intensité de courant ; on obtient :

$$t_2 = 97^\circ.$$

On voit par là qu'en réalité le fil doit prendre dans l'hydrogène une température beaucoup plus basse que dans l'air atmosphérique.

Après avoir déterminé les températures t_1 et t_2 , on peut aussi calculer aisément le rapport des quantités de chaleur H_1 et H_2 , qui sont engendrées dans le fil pendant l'unité de temps et cédées au calorimètre. On n'a pour cela qu'à poser dans l'équation (8) successivement pour t les valeurs 300 et 97 ; on obtient par là :

$$H_1 : H_2 = 1,981 : 1,317 = 1,5 : 1.$$

Ainsi, le résultat du calcul concorde aussi, sous ce rapport, avec l'observation de Grove, en ce sens que la quantité de chaleur produite par le courant, et cédée au calorimètre, se trouve être moindre pour le fil qui se trouve dans l'hydrogène que pour celui qui est dans l'air atmosphérique.

Une comparaison exacte des nombres n'est, en tout cas, pas possible, parce que, vu la validité restreinte des formules empiriques, nous devons borner nos calculs à des limites de température beaucoup plus petites que celles qui se sont présentées dans les essais

de Grove, où le fil qui se trouvait dans l'air a passé au rouge blanc. Puisque, cependant, pour ces limites restreintes de température, l'explication répond d'une manière non douteuse à l'expérience, on n'hésitera pas à l'accepter comme exacte pour des limites de températures plus étendues. Cela faisant, on peut inversement employer les observations de Grove à rechercher si la formule donnée par Dulong et Petit peut encore être considérée comme admissible pour des températures allant jusqu'au rouge blanc. Je ne veux pas entrer ici dans ces considérations, et je renverrai, sur ce sujet, à mon Mémoire cité plus haut.

Pour terminer, je ferai encore remarquer que tout autre moyen, par lequel la chaleur cédée par le fil peut être modifiée, doit avoir essentiellement comme conséquence les mêmes phénomènes que l'emploi de divers gaz. Un moyen très simple de cette espèce consiste à modifier la grandeur de la surface du fil. Si l'on prend, par exemple, deux fils de même substance, ayant même longueur et même section, et différant seulement l'un de l'autre en ce que l'un est cylindrique et l'autre aplati, le dernier possède une plus grande surface, et, par suite, cède plus vite sa chaleur que le premier. Ces deux fils se comporteront, dans un seul et même gaz, comme deux fils égaux dans divers gaz, le fil plat s'échauffant moins et donnant lieu à une moindre production de chaleur.

§ 8.

**Accroissement de la résistance à la conductibilité des métaux
simples solides avec la température.**

La résistance à la conductibilité électrique des métaux varie, comme on sait, avec la température. Dans des alliages de deux ou plusieurs métaux, cette variation est très diverse ; dans les métaux simples solides, au contraire, l'accroissement proportionnel de la résistance est approximativement le même. Cette dernière concordance se montre d'une façon particulièrement claire dans une recherche pleine de mérite, publiée en 1858 et due à Arndtsen¹ ; il l'indique à la fin de son *Mémoire*, sans cependant mettre en relation la grandeur de cette action de la chaleur, exercée sur les propriétés électriques des métaux, avec les autres actions de la chaleur.

Lorsque je lus cette indication, il me vint à l'esprit que, si l'accroissement proportionnel de la résistance à la conductibilité est indépendant de la nature de la substance, et ne dépend que de l'accroissement de la température, il devait être nécessairement dans un rapport simple avec la température *absolue*. J'en trouvai, en effet, la confirmation par une comparaison des nombres. Si l'on désigne par t la température en degrés C. comptée à partir du point de congélation de

1. *Ann. de Pogg.*, t. 104, p. 1.

l'eau, la température absolue croît, comme on le sait, dans le rapport de $1 + 0,003665t$ à l'unité. L'accroissement de la résistance à la conductibilité des métaux simples solides se comporte absolument de même avec la température. Pour cinq métaux (platine, aluminium, argent, cuivre et plomb) Arndtsen put représenter cet accroissement par une formule linéaire relativement à la température ; pour le fer seulement il dut ajouter un terme du second degré, qui toutefois, dans les limites de température de ses essais, est insignifiant vis-à-vis du terme linéaire. Les coefficients de t (en prenant pour chaque métal la résistance à 0° pour unité) se trouvent compris, pour les six métaux, entre 0,00327 et 0,00413, et leur valeur moyenne est 0,00366. Les essais, exécutés un an auparavant par Matthiessen¹ sur le potassium et le sodium, avaient donné des accroissements de la résistance à la conductibilité tombant entre les mêmes limites.

Ceci me détermina, dans une courte notice publiée dans les Annales de Pogg.², à appeler l'attention sur ce fait, que la dépendance de la résistance à la conductibilité des métaux simples solides vis à vis de la température peut s'exprimer avec une certaine approximation par cette proposition simple : *la résistance à la conductibilité est proportionnelle à la température absolue*. Si cette proposition n'est qu'approximativement exacte (comme le sont aussi la plupart des autres propositions physiques) elle m'a paru propre à servir de point de départ à des recherches ultérieures sur la résistance à la conductibilité électrique, et, en ce sens, à présenter quelque intérêt.

1. *Ann. de Pogg.*, t. 100, p. 178.

2. T. 104, p. 650.

§ 9.

**Rapport qui existe
entre l'action chimique qui a lieu dans une pile voltaïque,
et les effets produits par le courant.**

Dans les considérations développées, en ce chapitre, sur le travail effectué et la chaleur engendrée pendant un courant stationnaire, il n'a été question que de conducteurs homogènes, et il a été admis que le courant qui a lieu dans ceux-ci n'exerce vers l'extérieur aucune action et n'en subit aucune. Mais il ne sera peut être pas inutile, pour terminer, de jeter un coup d'œil sur la chaîne galvanique dans son ensemble, et de voir comment les forces chimiques, qui déterminent le courant, doivent entrer en ligne de compte dans la considération de l'équivalence de la chaleur et du travail, et ce qui se passe, si le courant effectue un travail en dehors du conducteur, et éprouve la réaction correspondante.

Lorsqu'un courant électrique est produit par une pile voltaïque, il se passe dans celle-ci une action chimique, qui ne développe pas immédiatement la chaleur qu'elle pourrait développer, si elle avait lieu dans d'autres circonstances. Nommons simplement *travail consommé* celui qui est effectué dans cette action par les forces moléculaires, et qui, au lieu de produire immédiatement

de la chaleur, engendre le courant électrique. Le courant, de son côté, en surmontant la résistance à la conductibilité, engendre de la *chaleur* dans les conducteurs. Pour autant qu'il ne produise pas d'effets extérieurs, la *chaleur produite* est équivalente au *travail consommé*.

Si, au contraire, le courant doit produire un effet extérieur, comme, par exemple, mettre en mouvement une machine électro-magnétique, l'intensité du courant décroît, et par là, d'un côté l'action chimique et la consommation de travail qui y est liée, d'un autre côté la chaleur produite en surmontant la résistance à la conductibilité, deviennent moindres. Il s'agit de savoir quel est le rapport de ces deux quantités entre elles, et si la chaleur produite est encore équivalente au travail consommé, ou bien si, en appliquant les lois de l'électricité, on peut démontrer qu'il y a dans la pile un excès de travail consommé, qui peut être considéré comme l'équivalent des effets extérieurs produits.

On peut répondre très brièvement à la question de la manière suivante. Si l'intensité du courant décroît dans un certain rapport, tandis qu'il effectue un travail extérieur, l'action chimique décroît suivant la simple puissance, et la chaleur produite, suivant le carré de ce rapport. Par conséquent, la chaleur produite doit devenir moindre que le travail consommé. Il reste donc dans la pile un excès de travail consommé, qui est l'équivalent du travail extérieur effectué.

Ce fait deviendra encore plus clair au moyen de quelques formules simples.

Soit α la quantité de zinc qui est dissoute, pendant l'unité de temps, dans un élément galvanique, par un courant d'une intensité égale à l'unité. Si Z représente la quantité de zinc qui est dissoute, pendant l'unité de

temps, dans une pile de n éléments, par un courant d'intensité I , nous aurons l'équation :

$$Z = an I. \quad (11)$$

Les autres actions chimiques, qui accompagnent la dissolution du zinc, sont différentes dans les différents éléments galvaniques, et il en est par suite de même du travail consommé dans ces éléments. Soit e la quantité de travail consommée par unité de poids du zinc, quantité qui diffère d'après les éléments, et qui est plus grande, par exemple, dans un élément de Grove que dans un élément de Daniell. Soit, de plus, W le travail qui est consommé pendant l'unité de temps dans toute la pile, lorsque le courant a l'intensité I ; on aura l'équation :

$$W = eZ = aen I. \quad (12)$$

La quantité de chaleur H , qui est produite par le même courant tandis qu'il surmonte la résistance à la conductibilité, est déterminée par l'équation :

$$H = \frac{1}{E} l I^2, \quad (13)$$

où l représente la résistance du circuit, et E l'équivalent mécanique de la chaleur, à supposer que l'intensité du courant et la résistance soient mesurées en unités mécaniques.

Si un circuit, qui renferme une pile galvanique, se trouve dans des circonstances telles qu'il n'exerce ni ne

subisse aucune action extérieure, le courant prendra de lui-même l'intensité nécessaire pour que la chaleur produite soit équivalente au travail consommé. Si donc W_1 et H_1 sont les valeurs particulières de W et H qui répondent à ce cas, on aura :

$$H_1 = \frac{1}{E} W_1, \quad (14)$$

équation qui sert à déterminer l'intensité I_1 du courant qui naît dans ces circonstances. En effet, elle devient, au moyen des équations (12) et (13) :

$$\frac{1}{E} H_1^2 = \frac{1}{E} aen I_1, \quad (15)$$

d'où il résulte :

$$I_1 = \frac{aen}{l}. \quad (16)$$

La quantité aen qui entre dans cette équation est ce que l'on nomme habituellement la force électro-motrice de la pile.

Supposons maintenant que le courant effectue un travail extérieur, et que, par là, son intensité décroisse de i . Pour plus de simplicité nous admettons que ce décroissement soit constant, car, s'il était variable, nous devrions, au lieu de l'unité de temps, n'en considérer qu'un élément. L'intensité actuelle du courant est donc :

$$I = I_1 - i.$$

En substituant cette valeur dans les équations (12) et (13), l'on obtient :

$$W = aen (I_1 - i). \quad (17)$$

$$H = \frac{1}{E} l (I_1 - i)^2 \quad (18)$$

$$= \frac{1}{E} [lI_1 (I_1 - i) - li (I_1 - i)].$$

Si, dans cette dernière équation, on remplace la première des quantités I_1 qui y entrent, par sa valeur tirée de (16), on pourra écrire :

$$H = \frac{1}{E} [aen (I_1 - i) - li (I_1 - i)],$$

et ensuite, en vertu de (17) :

$$H = \frac{1}{E} [W - li (I_1 - i)]. \quad (19)$$

On voit, par cette équation, que la chaleur produite est trop petite pour être équivalente au travail consommé. *L'excès de ce dernier, à savoir la quantité*

$$li (I_1 - i),$$

représente la consommation qui répond au travail extérieur effectué.

On trouve de même que, dans le cas où l'intensité du courant est accrue par une influence extérieure, la chaleur produite surpasse le travail consommé dans la pile. Il suffit, pour ce cas, de donner le signe *plus* à la quantité i , et l'on obtiendra ainsi au lieu de (19) :

$$H = \frac{1}{E} [W + li (I_1 + i)]. \quad (20)$$

Si le circuit, dans lequel le courant i est induit, ne renferme pas de source de courant propre, on devra poser $W = 0$ et $I_1 = 0$, ce qui changera la dernière équation en :

$$H = \frac{1}{E} li^2,$$

équation qui est, pour un courant induit, la même que l'équation (13) pour un courant quelconque.

CHAPITRE VI.

CONDUCTIBILITÉ ÉLECTRIQUE DANS LES ÉLECTROLYTES.



§ 1.

Travail effectué et chaleur produite dans un conducteur électrolytique.

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié les effets d'un courant galvanique à l'intérieur d'un conducteur de la première classe (c'est-à-dire qui conduit l'électricité sans électrolyse), sans avoir égard au mode de production du courant. Il est résulté de cette étude que les lois, d'après lesquelles la production de chaleur a lieu dans ces conducteurs, sont une conséquence immédiate de la loi d'Ohm et du principe de l'équivalence de la chaleur et du travail. Si l'on considère en lui-même, abstraction faite des autres parties de la chaîne, un conducteur de la seconde classe, qui conduit par

électrolyse, on pourra déduire, d'une manière analogue, des conséquences, en partie rigoureusement fondées, en partie au moins probables, qui me semblent intéressantes et que je donnerai ici, telles que je les ai développées dans un Mémoire paru dans les *Annales de POGGENDORFF*¹.

D'abord, en ce qui concerne les lois du *travail effectué*, les conclusions du chapitre précédent peuvent s'étendre, sans aucune modification, aux conducteurs de la seconde classe, si l'on admet que la loi d'Ohm leur est applicable. Pour maintenir l'électricité en mouvement, malgré la résistance à la conductibilité, il faut qu'en chaque lieu du conducteur agisse une force qui tende à mouvoir, dans une direction déterminée, l'électricité qui l'occupe, ou qui, dans le cas où l'on admet deux électricités, tende à mouvoir l'électricité positive dans un sens, et la négative, avec la même intensité, dans le sens opposé. Cette force est exercée par de l'électricité libre qui se trouve, comme Kirchoff l'a démontré, non à l'intérieur du conducteur, mais seulement à sa surface, ou à la surface de séparation de deux conducteurs différents, tandis que, dans l'intérieur d'un conducteur homogène, on peut admettre que les particules électriques positives et négatives sont mêlées si régulièrement, que l'on peut considérer chaque espace appréciable comme non électrique. Le travail effectué par cette force motrice peut se déterminer par les mêmes formules que celles qui sont développées dans le chapitre précédent.

Si l'on voulait actuellement déterminer la *chaleur* produite par le courant, il pourrait sembler, au premier abord, qu'il doit y avoir sous ce rapport une différence

1. T. 101, p. 338.

entre les conducteurs de la première classe et ceux de la seconde. Dans ceux de la première, les molécules matérielles restent invariablement dans leur position, et l'électricité seule est en mouvement ; dans ceux de la seconde, au contraire, les parties constituantes des molécules matérielles sont aussi mises en mouvement, et il se produit des décompositions et des recompositions dans lesquelles, sans aucun doute, les forces moléculaires, que les parties constituantes exercent les unes sur les autres, développent une activité considérable. Mais, en examinant le phénomène de plus près, on se convaincra toutefois aisément que, dans la détermination de la chaleur produite, on n'a pas à tenir compte des quantités de travail effectuées par les forces moléculaires, quelque importantes qu'elles puissent être isolément, parce qu'elles se compensent mutuellement.

Si, tandis que le conducteur est parcouru par un courant stationnaire, on examine, au commencement et à la fin d'une unité de temps, l'état de la portion considérée, limitée par une surface fermée, on verra qu'il n'a subi, pendant ce temps, aucune modification essentielle. A la vérité, les parties constituantes électropositives d'un grand nombre de molécules se sont séparées des électro-négatives avec lesquelles elles étaient combinées, mais, en revanche, elles se sont combinées avec d'autres parties entièrement semblables, et le travail que les forces moléculaires effectuent dans cette combinaison est indubitablement aussi grand que celui qu'elles subissent (ou qu'elles effectuent négativement) dans la décomposition. De même, autant il est sorti d'un côté de particules matérielles de cet espace, autant il en est entré de l'autre, de sorte que toute la masse qui se trouve, à la fin de cette unité de temps,

dans l'espace considéré, a la même densité, la même composition et la même disposition moléculaires qu'au commencement. Sans connaître les quantités de travail effectuées par les forces moléculaires dans chacun des phénomènes particuliers, on peut donc conclure avec certitude que la somme algébrique de ces quantités est nulle. Il ne reste donc que le travail effectué par la force motrice de l'électricité pour vaincre la résistance à la conductibilité, travail qui doit s'être transformé en force vive, puisqu'il ne s'est produit aucune modification persistante dans le conducteur, et par conséquent en chaleur, puisqu'il ne se présente pas d'autre force vive dans le phénomène.

§ 2.

État électrique des molécules partielles.

Étudions maintenant plus particulièrement la manière dont on doit se représenter la conductibilité électrique à l'intérieur d'un électrolyte.

Les molécules de l'électrolyte sont décomposées par le courant en deux parties constituantes, qui peuvent être, ou des atomes simples, ou même aussi des molécules composées de plusieurs atomes ; c'est ainsi que, dans le sulfate de cuivre, l'une des parties constituantes Cu est simple, tandis que l'autre SO_4 est composée. Je nommerai ces parties constituantes, qu'elles se composent d'un ou plusieurs atomes,

molécules partielles, et une molécule entière de l'électrolyte, dans le cas où la distinction sera nécessaire, *molécule totale*.

De la manière dont la décomposition de l'électrolyte est liée à la conductibilité, on doit conclure que les deux molécules partielles ont, dans leur combinaison en une molécule totale, des états électriques opposés qui persistent après leur séparation. Si l'on part de l'hypothèse de deux électricités, on doit donc admettre que l'une des molécules partielles a un excès d'électricité positive, et l'autre un excès égal d'électricité négative ; en partant, au contraire, de l'hypothèse d'une seule électricité, on devra admettre que l'une des molécules partielles a plus, et l'autre, moins d'électricité qu'à l'état neutre.

On imagine aisément que deux molécules de nature différente puissent prendre, au contact, des états électriques opposés. De même, il n'y a aucune difficulté à imaginer que les états persistent après la séparation, pourvu que l'on admette qu'en aucun lieu, à l'intérieur du conducteur, il n'y ait une accumulation de molécules partielles positives ou négatives séparées, mais qu'au contraire les deux espèces de molécules soient répandues uniformément, de sorte qu'il en existe un nombre égal des deux espèces dans tout volume appréciable. Dans ce cas, en effet, les actions que la quantité d'électricité inhérente à une molécule partielle éprouve de la part des quantités d'électricité des molécules partielles qui l'environnent, ne peuvent, à cause des effets opposés des molécules partielles positives et négatives, avoir une résultante capable de mouvoir cette première quantité d'électricité dans un sens déterminé, et, par suite, de la séparer de sa molécule, si le mouvement de celle-ci était empêché.

Si, au contraire, il y avait, dans un certain volume, un grand nombre de molécules qui fussent toutes chargées de la même électricité, la quantité d'électricité de l'une d'entre ces molécules serait repoussée par les quantités d'électricité de toutes les autres, et ces forces, si la molécule n'était pas précisément au centre de la masse, pourraient, par leur réunion, produire une force considérable, agissant de l'intérieur vers l'extérieur. Comme les quantités d'électricité inhérentes aux autres molécules seraient soumises à des effets tout à fait analogues, puisque chacune d'elles serait poussée vers l'extérieur par l'action totale de toutes les autres, il y aurait, dans l'état électrique de toute la masse, une tension qui ne pourrait rester invariable, que si cette masse n'était absolument pas conductrice. Mais, si elle l'était, l'électricité libre de toutes les molécules se répandrait avec plus ou moins de rapidité vers l'extérieur, suivant le degré de conductibilité, d'abord à la surface de la masse, et de là, si la masse n'était pas complètement isolée, dans les corps environnants.

§ 3.

Condition que l'on doit supposer satisfaite.

Considérons maintenant le phénomène de la décomposition lui-même, tel qu'il a lieu dans le liquide qui sert d'électrolyte ou qui renferme celui-ci en dissolution ; on peut d'abord regarder comme établi, que ce ne sont pas les molécules partielles devenues libres à l'une des

électrodes qui se meuvent jusqu'à l'autre à travers le liquide, mais que, dans toute la masse de liquide qui se trouve entre les deux électrodes, il y a partout des décompositions et de nouvelles combinaisons, de sorte que les molécules partielles positives qui arrivent à la cathode pendant l'unité de temps, sont bien égales *en nombre* à celles qui partent de l'anode, mais ne sont pas *les mêmes* ; il en est ainsi également des molécules partielles négatives qui arrivent à l'anode.

Mais il faut encore déterminer d'une façon plus précise la manière dont les décompositions, qui ont lieu dans les différentes couches du liquide, sont reliées entre elles ; et, tout d'abord, nous avons, en particulier, à exclure une explication qui semble assez naturelle, mais qui est complètement inexacte.

On pourrait, en effet, imaginer que la décomposition part de l'une des électrodes, de l'anode par exemple ; que les molécules partielles négatives des molécules totales décomposées y sont retenues, que les positives au contraire passent à la couche voisine de liquide et y opèrent une nouvelle décomposition, en se combinant avec les molécules partielles négatives de cette couche, et rendant les positives libres ; que ces dernières passent ensuite à la couche suivante, où elles produisent de nouveau le même effet, et ainsi de suite. D'après cela, la décomposition d'une couche serait la cause de la décomposition de la couche suivante, et l'effet de la force motrice qui existe dans le conducteur se bornerait d'abord à mouvoir les molécules partielles positives, devenues libres, d'une couche à la suivante, et ensuite à faciliter la décomposition, en poussant en avant les molécules partielles positives de cette couche.

Mais l'inexactitude de cette manière de voir résulte immédiatement de ce que, d'après elle, il y aurait à

l'intérieur du liquide, pendant toute la durée du courant, un excès de molécules partielles positives, et par suite aussi d'électricité positive libre, ce qui est, comme nous l'avons déjà dit, tout aussi inadmissible pour un courant stationnaire que pour l'état d'équilibre, en vertu des lois de la distribution de l'électricité libre. On trouverait de même, si l'on admettait que les décompositions se propagent de cette manière en sens opposé, de la cathode à l'anode, un excès de molécules partielles négatives à l'intérieur du liquide, ce qui est également inadmissible.

Nous devons admettre, comme condition fondamentale de toutes les considérations suivantes, *qu'à l'intérieur de tout volume appréciable du liquide, il existe un nombre égal de molécules partielles positives et négatives*, que celles-ci soient combinées deux à deux comme molécules totales, ou qu'un certain nombre d'entre elles soient répandues, sans être combinées, parmi les molécules totales.

De là il résulte que, dans un liquide électrolytique qui se trouve à l'état naturel, en ce sens qu'aucune espèce de molécules partielles n'y prédomine, il peut se présenter de ces décompositions et recompositions alternatives, telles qu'elles sont nécessaires pour la conductibilité électrique, sous la seule influence de la force qui sert à vaincre la résistance à la conductibilité¹.

L'explication de ce fait présente une difficulté

1. Pour obtenir un cas dans lequel il ne se présente pas d'électrodes, on peut faire l'hypothèse suivante. Imaginons un anneau complet formé d'un conducteur électrolytique. Faisons mouvoir dans le voisinage de cet anneau conducteur un courant électrique circulaire ou un aimant ; approchons-le ou éloignons-le, par exemple. Il se produira par là, dans l'anneau, un courant d'induction, et l'on aura ainsi dans l'électrolyte un courant électrique qui ne se meut pas

particulière, qui ne peut, me semble-t-il, être levée qu'en admettant que les liquides se comportent d'une tout autre manière qu'on ne l'a généralement cru jusqu'à présent. C'est ce que je tâcherai d'exposer dans les paragraphes suivants.

§ 4.

Difficulté de l'explication.

Soit donné un liquide, composé en tout ou en partie de molécules électrolytiques ; commençons par admettre que ces molécules, dans l'état naturel du liquide, aient pris une disposition déterminée, dans laquelle elles persistent aussi longtemps qu'aucune force étrangère n'agit sur elles, c'est-à-dire que les différentes molécules peuvent bien osciller autour de leurs positions d'équilibre, mais ne peuvent pas en sortir entièrement ; supposons en outre, comme on doit l'admettre pour toute disposition de cette espèce, que l'attraction des deux molécules partielles qui forment, par leur combinaison, une molécule totale, et qui sont par suite très rapprochées l'une de l'autre, soit plus grande que l'attraction exercée par la molécule partielle positive d'une molécule totale sur la molécule partielle négative d'une autre. Si, dans l'intérieur de cette masse, agit une

d'une électrode à l'autre, mais qui parcourt en cercle un anneau homogène, et qui est produit par une force électro-motrice qui n'agit pas seulement en des lieux déterminés de l'anneau, mais dans toutes ses parties.

force électrique qui tend à mouvoir les molécules partielles douées d'électricité positive dans un sens, et celles qui sont douées d'électricité négative en sens contraire, il s'agit de savoir quelle influence cette force exercera sur la manière d'être des molécules.

Le premier effet, pour autant que les molécules soient supposées capables de rotation, consisterait évidemment à les orienter toutes de la même manière, de sorte que les deux parties constituantes de chaque molécule totale, qui sont douées d'électricités contraires, se tourneraient du côté vers lequel elles sont poussées par la force motrice.

En outre, cette force tendrait à séparer les deux molécules partielles qui constituent une molécule totale, et à les mouvoir en sens contraires ; puis, lorsque ce mouvement se produirait, la molécule partielle positive d'une molécule totale irait rencontrer la molécule partielle négative de la suivante, et se combiner avec elle. Or, pour séparer les molécules partielles combinées, il faut que l'attraction qu'elles exercent l'une sur l'autre soit vaincue, et pour cela, il faut une force d'une intensité déterminée ; on est ainsi amené à cette conclusion *que, aussi longtemps que la force agissante ne possède pas cette intensité, il ne peut y avoir aucune décomposition des molécules ; qu'au contraire, lorsque la force aura atteint cette intensité, un grand nombre de molécules devront se décomposer à la fois, puisqu'elles sont toutes sous l'influence de la même force, et qu'elles occupent à peu près la même position les unes par rapport aux autres.* Relativement au courant électrique, on peut énoncer cette conclusion sous la forme suivante, en supposant que le conducteur ne puisse conduire que par électrolyse : *Aussi longtemps que la force motrice qui agit dans le conducteur est au-dessous d'une certaine*

limite, elle ne produit pas de courant; mais lorsqu'elle a atteint cette limite, il naît tout à coup un courant intense.

Mais cette conclusion est tout à fait en contradiction avec l'expérience. La moindre force¹ produit déjà un courant qui se propage par des décompositions et des recompositions alternatives, et l'intensité de ce courant croît, d'après la loi d'Ohm, proportionnellement à la force.

D'après cela l'hypothèse précédente, consistant en ce que les molécules partielles d'un électrolyte sont combinées d'une manière stable en molécules totales, et en ce que celles-ci ont une disposition régulière déterminée, doit être inexacte. On peut encore exprimer ce résultat d'une manière plus générale sous la forme suivante. Toute hypothèse qui consiste en ce que l'état naturel d'un liquide électrolytique est un état d'équilibre dans lequel chaque molécule partielle positive est liée d'une manière stable à une molécule négative, et en ce qu'en outre, pour faire passer ce liquide de cet état d'équilibre à un autre, qui ne diffère du précédent qu'en ce qu'un certain nombre de molécules partielles positives sont combinées avec des molécules négatives autres que les primitives, il faut une force d'une intensité déterminée agissant sur les molécules qui subissent ce changement, toute hypothèse de cette nature, disons-nous, est en contradiction avec la loi d'Ohm.

1. Je ferai encore une fois remarquer expressément qu'ici, comme dans tout ce chapitre, il ne s'agit pas des forces qui agissent aux électrodes, où les produits de la décomposition se dégagent et où la polarisation doit être vaincue, mais exclusivement de la force qui agit à l'intérieur de l'électrolyte lui-même, où chaque molécule partielle, séparée de la molécule partielle avec laquelle elle était combinée jusqu'alors, se recombine aussitôt avec une autre molécule partielle de même espèce, de sorte que la masse reste invariable dans son essence, et qu'il n'y a à vaincre que la résistance à la conductibilité.

Mais je pense que l'hypothèse suivante, qui ne prête pas à cette objection, et qui me semble également conciliable avec les autres faits connus, mérite d'être prise en considération.

§ 5.

Autre hypothèse sur l'état moléculaire des liquides électrolytiques.

Dans mon Mémoire « sur la nature du mouvement que nous nommons chaleur¹, » j'ai exprimé l'idée que les molécules des fluides n'occupent pas des positions d'équilibre déterminées, autour desquelles elles oscillent, mais qu'au contraire leurs mouvements sont tellement rapides, qu'elles se rencontrent dans des positions variant sans cesse et toujours nouvelles, et qu'elles se meuvent irrégulièrement les unes parmi les autres.

En nous basant sur cette manière de voir, imaginons qu'il se trouve dans le liquide électrolytique une molécule partielle isolée, soit, par exemple, une molécule électro-positive; nous supposerons que son état électrique est encore tout à fait le même qu'au moment où elle s'est séparée de la molécule totale. Je pense que, tandis que cette molécule partielle se meut entre les molécules totales, parmi toutes les positions qu'elle peut prendre, il s'en trouve parfois dans lesquelles elle attire la molécule partielle négative d'une molécule totale avec une force plus intense que celle avec

1. *Ann. de Pogg.*, t. 100, p. 353.

laquelle s'attirent en ce moment les deux molécules partielles qui en constituent une totale, et qui, du reste, n'occupent pas, l'une par rapport à l'autre, une position tout à fait invariable. Aussitôt que la molécule considérée occupe l'une de ces positions, elle se combine avec cette molécule partielle négative, et la molécule partielle positive, qui était combinée jusqu'alors avec cette dernière, redevient libre. Celle-ci, à son tour, se meut seule, et décompose, après un certain temps, de la même manière, une autre molécule totale, et ainsi de suite ; tous ces mouvements et ces décompositions ont du reste lieu tout aussi irrégulièrement que les mouvements de la chaleur qui les occasionnent.

Si nous considérons en outre la manière dont les molécules totales se comportent les unes par rapport aux autres, je pense qu'ici également il arrive parfois que la molécule partielle positive d'une molécule totale se trouve dans une position plus favorable vis-à-vis de la molécule négative d'une autre molécule totale, que vis-à-vis de la sienne propre à ce même instant. Alors ces deux molécules, jusqu'à présent étrangères l'une à l'autre, se combineront en une molécule totale, et les deux molécules partielles rendues libres (la négative de la première et la positive de la seconde), ou se combineront également entre elles, ou, si le mouvement de la chaleur les en empêche, elles se mêleront aux autres molécules totales, et y produiront des décompositions semblables à celles que nous avons décrites plus haut pour une molécule isolée.

La fréquence de ces décompositions mutuelles dans un liquide dépendra d'abord de la nature de celui-ci, de la liaison plus ou moins intime des parties des molécules totales entre elles, et ensuite de la rapidité du mouvement moléculaire, c'est-à-dire de la température.

§ 6.

Nouvelle explication de la conductibilité électrolytique.

Considérons actuellement un liquide dont les molécules ont déjà d'elles-mêmes un semblable mouvement, dans lequel il s'opère un échange irrégulier de molécules partielles, et supposons qu'à l'intérieur de ce liquide agisse une force électrique, qui tende à mouvoir toutes les molécules partielles positives dans un sens, et les négatives en sens contraire ; on verra aisément quelle est la différence que cette force doit apporter dans la nature du mouvement moléculaire.

Une molécule libre ne suivra plus alors entièrement les directions irrégulières et variables dans lesquelles elle est entraînée par les mouvements de la chaleur, mais elle changera la direction de son mouvement dans le sens de la force agissante, de sorte qu'entre les directions des molécules partielles positives libres, tout irrégulières qu'elles sont encore, il y a une certaine direction prédominante, et que les molécules négatives se meuvent de même, d'une manière prépondérante, dans la direction opposée. En outre, dans l'action d'une molécule partielle sur une molécule totale, et de deux molécules totales l'une sur l'autre, les décompositions qui permettront aux molécules partielles d'obéir également à la force électrique seront facilitées, et deviendront, par suite, plus fréquentes qu'elles ne le

seraient sans cette force, de façon que, dans des cas où la position des molécules n'est pas encore assez favorable pour que la décomposition puisse avoir lieu d'elle-même, l'action de la force électrique peut l'occasionner. Réciproquement, les décompositions, dans lesquelles les molécules partielles devraient se mouvoir en sens contraire de la force électrique, sont contrariées par cette force, et par là deviennent plus rares.

Si l'on considère à l'intérieur de ce liquide, tandis que la force électrique agit, une petite portion de surface normale à la direction de cette force, *elle sera traversée, pendant l'unité de temps, par plus de molécules partielles positives dans le sens positif que dans le sens négatif, et par plus de molécules partielles négatives dans le sens négatif que dans le sens positif.* Or, comme, pour chaque espèce de molécules partielles, deux passages qui s'effectuent en sens inverse se compensent mutuellement quant à leur effet, et que nous n'avons par suite à considérer que l'excès des passages qui s'effectuent dans l'une des directions, on peut donner à l'énoncé précédent cette forme plus simple : *la portion de surface est traversée dans le sens positif par un certain nombre de molécules positives, et dans le sens négatif par un certain nombre de molécules négatives.* Ces deux nombres ne doivent pas nécessairement être égaux, parce qu'ils dépendent non-seulement de la force électrique, qui a la même grandeur pour les molécules partielles positives et négatives, mais encore du degré de mobilité qui peut être différent, pour plusieurs raisons, dans des molécules d'espèces différentes.

Ces mouvements opposés des deux espèces de molécules partielles forment le courant galvanique à l'intérieur du fluide. Pour déterminer l'intensité du

courant, il n'est pas nécessaire de connaître séparément le nombre des molécules partielles positives qui traversent la portion de surface dans le sens positif, et le nombre des molécules partielles négatives qui la traversent dans le sens négatif, mais il suffit de connaître la somme de ces deux nombres. Que l'on parte en effet de l'hypothèse qu'il existe deux électricités, et qu'une molécule partielle électro-négative est douée d'une certaine quantité d'électricité libre négative; ou que l'on suppose qu'il n'existe qu'une électricité, et qu'une molécule électro-négative en possède une quantité moindre que celle qui convient à l'état neutre, on devra admettre, dans les deux cas, que l'accroissement d'un courant galvanique est tout aussi considérable par suite du mouvement d'une molécule partielle électro-positive dans le sens du courant, que par celui d'une égale molécule partielle électro-négative en sens contraire. En conséquence, pour le cas où le mouvement moléculaire serait de telle nature, que le mouvement des molécules partielles positives fût prépondérant dans un sens, et qu'il en passât n pendant l'unité de temps à travers la portion de surface dans le sens positif, si nous désignons par $C.n$ l'intensité du courant produit par le mouvement, nous devons de même, pour un mouvement dans lequel il passe simultanément n molécules partielles positives dans le sens positif et n' négatives dans le sens négatif, désigner l'intensité du courant par $C(n + n')$.

§ 7.

**Concordance de la nouvelle explication avec l'expérience,
et différence qu'elle présente avec celle de Grotthuss.**

Dans cette manière de concevoir l'état du liquide, la difficulté mentionnée plus haut disparaît. On voit aisément que l'influence, que la force électrique exerce sur les décompositions et les mouvements de molécules qui ont déjà lieu d'eux-mêmes, mais qui sont encore irréguliers, ne se fera pas sentir seulement lorsque cette force aura atteint une certaine intensité, mais que la moindre force, agissant de la manière décrite plus haut, exercera sur eux un effet, et que la grandeur de celui-ci croîtra avec l'intensité de cette force. Tout le phénomène concorde donc très bien avec la loi d'Ohm.

On n'a pas encore pu expliquer d'une manière satisfaisante pourquoi le pouvoir conducteur électrique, qui dépend de la facilité avec laquelle les décompositions des molécules ont lieu à l'intérieur du liquide, est si différent dans différents liquides ; pourquoi, par exemple, les décompositions des molécules du sulfate hydrique ont lieu beaucoup plus aisément que celles des molécules d'eau ; ni d'où provient l'influence considérable que le délaïement de l'acide sulfurique exerce sur le degré de conductibilité ; mais je ne vois dans cette difficulté rien qui puisse être regardé comme étant en contradiction avec la théorie précédente.

Au contraire, cette théorie explique d'une manière très naturelle l'accroissement du pouvoir conducteur avec la température, dans les conducteurs de la seconde classe, puisque la rapidité plus grande du mouvement intérieur doit contribuer à faciliter les décompositions mutuelles des molécules.

Comparons l'ancienne théorie de Grotthuss avec celle que nous venons de développer ; dans celle-là, on admet que le mouvement n'est produit que par la force électrique, et n'a lieu que dans deux directions déterminées, puisque les décompositions se propagent régulièrement de molécule à molécule ; dans celle-ci, au contraire, les mouvements déjà existants sont seulement modifiés, non de telle sorte qu'ils deviennent complètement réguliers, mais de manière que, dans la grande variété de mouvements qui existe encore, les deux directions déterminées sont prédominantes.

§ 8.

Relation de l'explication précédente avec l'état chimique des substances composées.

Lorsque, par mes considérations sur la conductibilité électrolytique, je me vis obligé d'abandonner l'explication, jusqu'alors généralement répandue, qu'en avait donnée Grotthuss, et de la remplacer par l'explication exposée précédemment, j'étais confirmé dans ma manière de voir sur l'état moléculaire des liquides chimiquement composés, qui lui sert de base, par ce fait qu'elle trouve

une surprenante confirmation dans un phénomène connu déjà longtemps auparavant et discuté à plusieurs reprises par Berthollet. Le phénomène dont il s'agit est le suivant : si deux combinaisons, ayant deux éléments électro-positifs et deux éléments électro-négatifs différents, sont dissoutes dans un liquide, les deux combinaisons primitivement existantes ne peuvent plus simplement subsister, pas plus qu'il ne se forme une autre distribution de nature telle qu'un élément électro-positif soit combiné exclusivement avec l'un des deux éléments électro-négatifs, et réciproquement ; mais toutes les quatre combinaisons possibles se forment dans une certaine proportion, d'où il suit que, si l'une quelconque des quatre combinaisons est insoluble, elle se sépare. Cette propriété s'explique naturellement par ce fait que les combinaisons de deux molécules partielles ne sont pas stables, mais variables à un certain degré, et qu'une molécule partielle positive peut déplacer non seulement une molécule partielle positive de même nature, mais aussi une molécule positive d'autre nature, d'où résulte la formation des autres combinaisons qui n'existaient pas primitivement.

Dans son travail sur la théorie de la formation de l'éther¹, que je n'ai connu qu'après avoir écrit mon Mémoire, Williamson a tiré la conclusion que les combinaisons des atomes en molécules ne sont pas stables, mais variables ; il l'a déduite aussi bien des phénomènes qui ont lieu dans la formation de l'éther que des phénomènes déjà connus auparavant et discutés par Berthollet. Il va même plus loin que je ne le crois nécessaire dans la manière dont il représente cette

1. *Annalen der Chemie und Pharmacie*, t. 77, p. 37. Lu à la *British Association*, à Édimbourg.

mutabilité. Il dit notamment, entre autres¹ : « nous sommes ainsi amené à admettre que, dans un agrégat de molécules de chaque combinaison, il s'effectue un échange perpétuel entre les éléments qu'elle contient. Supposons, par exemple, qu'un vase, renfermant de l'acide chlorhydrique, soit rempli d'un grand nombre de molécules de la composition ClH ; les considérations que nous avons exposées nous conduiraient à admettre que chaque atôme d'hydrogène ne reste pas en repos dans sa position par rapport à l'atôme de chlore avec lequel il était d'abord combiné, mais qu'il change perpétuellement de place avec d'autres atômes d'hydrogène. »

Je ne puis pas me rallier à cette manière de s'exprimer, à savoir qu'un atôme d'hydrogène échange continuellement sa place avec d'autres atômes d'hydrogène. Je suis plutôt d'avis, qu'en général les atômes d'hydrogène restent avec les atômes de chlore avec lesquels ils se sont d'abord combinés, et que, lors des chocs des molécules, le cas est relativement rare où un atôme d'hydrogène échange sa place avec un autre, et que la même chose a lieu pour les molécules partielles d'autres combinaisons gazeuses et liquides. Puisque le nombre des chocs entre deux molécules est extraordinairement grand, le nombre des échanges peut encore être suffisamment grand, tout en étant minime par rapport au nombre des chocs, pour pouvoir servir comme base de l'explication que j'ai établie pour la conductibilité électrique dans les électrolytes. A part ce point, dans lequel nos vues exposées ci-dessus concordent entre elles partiellement, le contenu du Mémoire de Williamson est entièrement différent de celui du mien, en ce

1. Id. p. 46.

qu'il se rapporte aux phénomènes purement chimiques, lesquels n'ont rien à faire avec la conductibilité de l'électricité.

§ 9.

Conductibilité métallique dans les électrolytes.

On a récemment agité plusieurs fois la question de savoir si, dans les conducteurs de la seconde classe, à côté de la conductibilité par électrolyse, il y en a encore une de la même nature que celle qui existe dans les conducteurs de la première classe.

Au point de vue théorique, il n'y a rien qui me paraisse contraire à l'hypothèse que les deux espèces de conductibilité puissent exister simultanément dans le même corps. Mais à cause du manque de faits bien établis, qui pourraient servir de base à des déductions théoriques, on devra laisser jusqu'à présent à l'expérience de déterminer quel est le rapport des deux espèces de conductibilité dans des cas particuliers.

Pour les corps sur lesquels on a fait des expériences dans ce sens, et qui sont les plus importants à cause de la fréquence de leurs applications, il est établi que la conductibilité sans électrolyse, pour autant qu'elle existe, est en tout cas très faible ; et, par suite, il ne sera pas nécessaire de nous arrêter à cette espèce de conductibilité, qui du reste ne nous offrirait rien d'essentiellement neuf pour la théorie.

CHAPITRE VII.

COURANTS THERMOÉLECTRIQUES.

§ 1.

Etat électrique à la surface de contact de deux substances.

Tandis que nous n'avons traité, dans les deux chapitres précédents, que des phénomènes qui ont lieu dans un conducteur homogène durant un courant électrique stationnaire, nous considérerons maintenant une réunion de plusieurs substances, conduisant sans électrolyse, qui donnent un courant thermoélectrique lorsqu'elles forment un circuit fermé et que les points de réunion sont maintenus à des températures différentes.

On admet généralement que les points de liaison sont le siège des forces électromotrices qui produisent le courant thermoélectrique, tandis qu'on ne suppose aucune force électromotrice à l'intérieur d'une même

substance, même si ses parties sont à différentes températures. Nous ferons aussi cette hypothèse, qui est la plus simple, et nous rechercherons à quelles conséquences elle conduit. La comparaison de ces conséquences avec l'expérience établira alors d'elle-même si cette simple hypothèse suffit pour l'explication de tous les faits observés, ou si elle doit être modifiée, et de quelle manière.

Nous ferons la supposition qu'il se produit une différence de tension entre deux substances, à leur surface de contact, l'électricité se partageant inégalement entre elles. D'après cela, on doit admettre, pour l'état d'équilibre, que la fonction potentielle, constante à l'intérieur de chaque substance, a des valeurs différentes dans deux substances en contact¹ ; et, pour l'état qui correspond à un courant continu, on devra admettre que la fonction potentielle varie d'une manière continue à l'intérieur de chaque substance, et d'une manière brusque à la surface du contact. Si donc nous désignons par V_a et V_b les valeurs de la fonction potentielle à l'intérieur de deux conducteurs, que nous nommerons a et b , nous aurons pour deux points situés respectivement de chaque côté

1. Dans les recherches électrostatiques, on prend généralement pour base ce théorème : dans un système de conducteurs reliés entre eux, la fonction potentielle a partout la même valeur dans l'état d'équilibre ; ce n'est pas à dire que l'on nie les différences produites par la diversité des substances, on les néglige seulement à cause de leur petitesse, parce que dans l'électrostatique on a habituellement affaire à des différences beaucoup plus considérables.

de la surface de contact, très voisins et vis-à-vis l'un de l'autre, l'équation

$$V_b - V_a = E_{ab}, \quad (1)$$

où E_{ab} est une quantité qui dépend de la nature des deux substances en contact, et que nous nommerons simplement, par la suite, la *différence de niveau potentiel*.

On ne peut naturellement pas regarder cette variation subite de la fonction potentielle comme étant, dans un sens rigoureusement mathématique, un saut qui aurait lieu dans une surface idéale, mais seulement comme une variation très rapide dans le voisinage de cette surface. Pour l'expliquer, on doit admettre, comme on l'a déjà fait plusieurs fois, et comme Helmholtz surtout l'a exprimé récemment d'une manière précise¹, qu'il existe, des deux côtés de la surface du contact, deux couches électriques opposées, c'est-à-dire une disposition analogue à celle d'une bouteille de Leyde chargée, ou d'un carreau de Franklin. Nous donnerons à l'espace, qui renferme les deux couches électriques ainsi que l'intervalle et qui forme en tout une couche très mince, le nom de *couche intermédiaire* des deux substances.

1. *Ann. de Pogg.*, t. LXXXIX.

§ 2.

Origine de la différence de niveau potentiel.

Or, puisque ces deux couches ne sont séparées par aucun corps non conducteur, il s'agit maintenant de savoir quelle est la force qui les empêche d'équilibrer leurs états électriques, et qui, même dans le cas où l'électricité peut s'équilibrer par une autre voie, fait constamment passer une nouvelle quantité d'électricité du côté négatif au côté positif, et donne ainsi naissance à un courant continu.

Dans son ouvrage « *Sur la conservation de la force* », Helmholtz s'exprime de la manière suivante (p. 47) : « En effet, tous les phénomènes qui se passent dans les conducteurs de la première classe (c'est-à-dire dans ceux où le courant a lieu sans électrolyse), peuvent évidemment se déduire de l'hypothèse que les différentes substances chimiques exercent des attractions différentes sur les deux électricités, et que ces attractions n'agissent qu'à des distances inappréciables, tandis que les deux électricités agissent aussi l'une sur l'autre à de plus grandes distances. D'après cela, la force de contact consisterait dans la différence des attractions que les particules de métal les plus voisines de la surface de contact exercent sur les électricités de cette surface, et l'équilibre s'établirait lorsqu'une particule électrique qui passe de l'une à l'autre des deux particules métalliques, ne perd ni ne gagne de force vive. »

Les idées de la plupart des autres physiciens concordent, autant que je sache, avec cette explication, quoiqu'ils s'expriment à ce sujet d'une manière moins claire et moins précise ; néanmoins, je crois devoir la combattre, du moins en partie. Nous pouvons laisser provisoirement indéciſe la question de savoir s'il existe différentes attractions exercées sur l'électricité par différentes substances chimiques, et produisant une différence de niveau potentiel de la manière qui vient d'être indiquée ; mais que l'on en puisse déduire, comme on l'affirme, *tous* les phénomènes qui se passent dans les conducteurs de la première classe, c'est ce que je ne puis accorder. Pour l'explication des courants thermoélectriques et de la production de chaleur et de froid occasionnée au contact de deux substances par un courant électrique, et découverte par Peltier, il ne suffit pas d'admettre cette hypothèse, mais on est obligé d'adopter la suivante : *que la chaleur elle-même agit dans la formation et dans la conservation de la différence de niveau potentiel au contact, en ce que le mouvement moléculaire, que nous nommons chaleur, pousse l'électricité d'une substance vers l'autre, et que son action ne peut être contre-balancée que par l'action contraire des deux couches électriques ainsi produites, lorsque celles-ci ont atteint une certaine densité.*

Pour le démontrer au moyen des courants thermoélectriques, imaginons une chaîne formée de deux substances que nous pouvons supposer métalliques. Si toute la chaîne se trouve à la même température, les différences de niveau potentiel, aux deux contacts opposés, sont égales, et, par suite, la fonction potentielle peut avoir une valeur constante dans chaque métal, comme cela doit être pour l'équilibre. Mais si les températures sont différentes aux deux contacts, il

naîtra un courant, et l'on doit en conclure qu'il a surgi, relativement à la distribution de l'électricité, des conditions particulières, qui ne peuvent être remplies par aucun état d'équilibre.

Ces conditions ne peuvent pas se déduire de l'hypothèse, que les différences de niveau potentiel ne sont dues qu'aux attractions différentes, exercées sur l'électricité par des substances chimiquement distinctes. D'abord il est très peu probable que ces attractions varient avec la température ; et si ce n'est pas le cas, la distribution de la chaleur ne peut exercer aucune influence sur celle de l'électricité. Mais en laissant même de côté cette objection, et en regardant comme possible la dépendance entre les attractions et la température, on n'y aura rien gagné pour l'explication d'un mouvement continu de l'électricité ; car, alors, chaque partie de la chaîne attirerait simplement la quantité d'électricité qui correspond à sa force attractive actuelle, et la conserverait aussi longtemps que les températures resteraient les mêmes dans la chaîne. On peut également exprimer la même conclusion de la manière suivante. Si une substance exerçait différentes attractions sur l'électricité à différentes températures, deux parties inégalement chaudes de la même substance se comporteraient, sous ce rapport, l'une vis-à-vis de l'autre comme deux substances différentes à la même température ; de la sorte, il devrait naître également entre elles une différence de niveau potentiel, et cela de telle manière, qu'une différence de température entre les parties d'une chaîne thermoélectrique agirait précisément *comme un accroissement de diversité de substances à la même température* ; cette diversité peut bien produire une variation dans l'état d'équilibre électrique, mais jamais un courant électrique persistant.

Il en est autrement, si l'on admet que la chaleur elle-même intervient dans la formation des différences de niveau potentiel aux points de contact. D'après cette hypothèse, il est non-seulement possible, mais encore très probable, que la grandeur des différences dépende des températures qui existent aux contacts ; et il n'en résulte cependant, en aucune manière, qu'il doive naître également des différences de niveau potentiel correspondantes entre les parties d'une seule et même substance, qui auraient des températures différentes. Cette hypothèse présente donc ce caractère particulier que, d'un côté, l'inégalité des différences de niveau potentiel aux deux contacts fait que la fonction potentielle a nécessairement des valeurs *différentes*, dans les différentes parties de chacune des substances, et que, d'un autre côté, l'état électrique tend à s'équilibrer à l'intérieur de chaque substance, de telle sorte que, dans toutes les parties de celle-ci, la fonction potentielle prenne *la même* valeur. Ces deux conditions ne peuvent pas être remplies simultanément par un état d'équilibre ; au contraire, elles exigent un courant continu, ce qui est entièrement conforme à l'expérience.

Abordons maintenant le second des phénomènes mentionnés plus haut, découvert par Peltier, c'est-à-dire, la production de chaleur ou de froid occasionnée à la surface de contact de deux substances par un courant électrique. Nous pouvons naturellement dire de cet effet, comme nous l'avons dit de la variation de la fonction potentielle, qu'il ne peut pas être limité à une surface mathématique, mais qu'il doit se distribuer dans le volume de cette couche, que nous avons désignée ci-dessus sous le nom de *couche intermédiaire*. Pour expliquer la production ou la destruction de chaleur

qui a lieu dans cette couche, *il faut démontrer qu'il y a un travail mécanique correspondant, positif ou négatif, qui est effectué par une certaine force.*

Pour voir comment les deux hypothèses, opposées l'une à l'autre, se comportent par rapport à cette exigence, nous partirons d'abord de nouveau de l'hypothèse émise par Helmholtz. D'après celle-ci, deux forces différentes agissent sur une particule d'électricité renfermée dans cet espace : en premier lieu, une force purement électrique, provenant de ce que la particule située entre les deux couches électriques est attirée par l'une, et repoussée par l'autre ; en second lieu, une force moléculaire, provenant de ce que la particule est attirée avec une intensité différente par les molécules de nature différente qui se trouvent des deux côtés de la couche intermédiaire. Lorsque l'équilibre s'est établi, ces deux forces agissent en sens contraire avec une même intensité, de sorte que, dans la transmission de la particule, l'une subit un travail égal à celui qui est effectué par l'autre ; par suite, comme Helmholtz le déclare lui-même, il n'y a ni perte ni gain de force vive. Dans un courant, au contraire, la force électrique est un peu plus grande ou plus petite que la force moléculaire, de sorte que la particule d'électricité doit obéir à l'une ou à l'autre. La manière la plus simple d'exprimer ce rapport consiste à regarder comme invariables les deux forces égales qui agissent dans l'équilibre, et à y ajouter en outre une troisième force électrique, dirigée dans l'un ou dans l'autre sens, et précisément capable de vaincre la résistance à la conductibilité dans la couche intermédiaire, et à maintenir ainsi l'électricité en mouvement. Cette force est identique à celle qui doit exister dans chaque couche d'un conducteur homogène doué de la même résistance,

dans le cas d'une égale intensité du courant ; et par conséquent, le travail effectué par cette force, et la chaleur produite, ne peuvent pas être différents de ceux qui ont lieu dans cette couche homogène, et que nous pouvons négliger ici à cause de la faiblesse de la résistance d'une couche aussi mince. Le phénomène *particulier* qui a lieu au contact, et qui a été observé par Peltier, reste donc inexpliqué dans cette hypothèse.

Partons maintenant de l'autre hypothèse, d'après laquelle c'est la chaleur qui tend à faire passer l'électricité d'un côté à l'autre de la couche intermédiaire, et qui agit ainsi en sens contraire de la force électrique. Dans l'état d'équilibre, cette tendance est exactement compensée par la force électrique ; dans un courant, au contraire, cette dernière, comme nous l'avons dit plus haut, est un peu augmentée ou diminuée, ce qui produit la transmission d'électricité dans l'un ou l'autre sens. La force électrique effectue ou subit alors un certain travail, qui ne peut pas être compensé par le travail d'une autre force, puisque, par hypothèse, il n'existe pas de seconde force, et que les effets que Helmholtz croyait devoir lui attribuer sont produits par la chaleur, c'est-à-dire par un *mouvement*. D'après cela, tout le travail doit avoir pour conséquence une augmentation ou une diminution équivalente de la force vive, et nous obtenons ainsi la production de chaleur ou de froid constatée par Peltier, puisque la force vive ne se manifeste ici que sous forme de chaleur.

Je crois pouvoir comparer l'état de la couche intermédiaire avec celui d'une certaine quantité de gaz, maintenu, par une pression extérieure, dans une enveloppe extensible que le mouvement calorifique de ses molécules cherche à dilater. Si la force extérieure, qui faisait précisément équilibre à la tension produite

par la chaleur, devient un peu plus forte ou plus faible, elle comprime le gaz ou le laisse se dilater ; elle effectue ou subit alors un certain travail, et en même temps une quantité de chaleur équivalente est produite ou anéantie dans le gaz.

Si l'on veut employer, relativement au travail, la manière de s'exprimer qui est usitée dans la théorie mécanique de la chaleur, c'est-à-dire, si l'on veut désigner comme travail *gagné* celui qui résulte de ce que la chaleur surmonte une force, et comme travail *consommé*, celui fait par la force même, on peut dire : quand l'électricité se meut, sous l'influence de la chaleur, dans le sens opposé à la force électrique, il y a du travail gagné, et une quantité de chaleur consommée qui y correspond. Si, au contraire, le mouvement de l'électricité a lieu dans le sens de la force électrique, il y a du travail consommé, et, par suite, de la chaleur gagnée, précisément comme quand un gaz se détend et surmonte la contrepression, il y a du travail gagné et de la chaleur consommée, tandis que dans la compression du gaz, il y a du travail consommé et de la chaleur gagnée.

§ 3.

**Distinction à faire
entre la différence de niveau potentiel ici admise et une autre.**

Nous avons donc trouvé que si l'on admet, au contact de deux substances, une différence de niveau potentiel produite par la chaleur, il en résultera nécessairement une production de chaleur ou de froid, selon la direction du courant. Nous pourrions donc réciproquement considérer ce dernier phénomène comme une preuve de l'existence, et en même temps comme une mesure de cette différence de niveau. Mais il y a un autre fait qui paraît être en contradiction avec cette hypothèse. Car, comme c'est entre le bismuth et l'antimoine qu'a lieu la plus grande production de chaleur ou de froid, on doit en conclure que c'est aussi entre ces métaux que la différence de niveau potentiel est la plus grande ; mais des expériences électroscopiques constatent de plus grandes différences entre d'autres métaux, par exemple le cuivre et le zinc, qu'entre le bismuth et l'antimoine. Cette contradiction peut s'expliquer de deux manières différentes.

En premier lieu, on peut admettre qu'outre la différence de niveau occasionnée par la chaleur, il en existe simultanément une autre, qui, dans l'explication de Helmholtz, ne serait produite que par la différence des attractions moléculaires, et que cette dernière

différence de niveau, quoiqu'elle n'exerce aucune influence sur les phénomènes thermoélectriques, a son plein effet dans les phénomènes électroscopiques, et s'y montre même, en général, la plus considérable des deux. En second lieu, on peut admettre que la différence observée dans les expériences électroscopiques, ne résulte pas du contact immédiat des deux substances, le cuivre et le zinc par exemple, et n'appartient même pas, en général, au nombre des phénomènes qui ont lieu au contact de conducteurs de la *première* classe seulement, mais, au contraire, au nombre de ceux qui sont dus à l'action de conducteurs de la *seconde* classe (c'est-à-dire de ceux qui conduisent l'électricité par électrolyse). Sous ce rapport, on peut remarquer que, dans une expérience électroscopique, même lorsque les métaux que l'on y soumet ne sont en contact avec aucun corps étranger, comme la main, mais seulement entre eux, l'action de substances étrangères ne peut cependant pas être complètement exclue ; car les métaux mêmes sont couverts à leur surface d'une couche de gaz comprimés, et peut-être aussi de vapeurs condensées, qui empêche le contact métallique réel entre des pièces qui ne sont pas soudées, mais seulement pressées l'une contre l'autre, et qui modifie essentiellement, par son interposition, les phénomènes électroscopiques.

Nous ne rechercherons pas ici laquelle de ces deux explications est à préférer, parce que c'est indifférent dans l'étude des courants thermoélectriques et de leurs effets. Pour ceux-ci, il suffit que l'on admette, conformément à la conclusion précédente, l'existence d'une différence de niveau potentiel *occasionnée par la chaleur* ; car ce n'est qu'à celle-ci que nous avons affaire ; et quand, par la suite, il sera simplement

question de la différence de niveau potentiel, c'est toujours de celle-là qu'il s'agira, qu'il en existe du reste une autre à côté d'elle, ou non.

§ 4.

Intensité du courant dans une chaîne thermoélectrique formée de deux substances.

Considérons maintenant la chaîne thermoélectrique dans son ensemble, et, à cet effet, choisissons-en d'abord une qui se compose de deux substances. Nous ferons la supposition qu'elle n'exerce ni ne subit aucune action inductrice extérieure, et qu'elle est simplement abandonnée à elle-même.

Appelons, pour simplifier, a et b les deux conducteurs supposés linéaires, p' et p'' leurs points de contact, et désignons par T' et T'' les températures absolues qui règnent en ces points. Considérons comme positive une direction déterminée pour le courant, aussi bien que pour la force électromotrice ; et choisissons pour cela la direction $p'a, p''b, p'$. Désignons par V_a la fonction potentielle dans le conducteur a , et par V'_a et V''_a ses valeurs-limites aux points p' et p'' ; de même, soit en général V_b la fonction potentielle dans le conducteur b , et soient V'_b et V''_b ses valeurs-limites. Les différences de niveau potentiel existant aux lieux de contact, prises dans le sens du courant positif, seront désignées par E''_{ab} en p'' , et par E'_{ab} en p' ; nous avons ainsi à poser :

$$\left\{ \begin{array}{l} E''_{ab} = V''_b - V'_a, \\ E'_{ba} = V'_a - V'_b. \end{array} \right. \quad (2)$$

Pour déterminer l'intensité du courant causée par ces différences de niveau potentiel, nous formerons d'abord les deux équations suivantes :

$$\text{Intensité en } a = \frac{V'_a - V''_a}{l_a},$$

$$\text{Intensité en } b = \frac{V''_b - V'_b}{l_b},$$

en désignant par l_a et l_b les résistances à la conductibilité dans les deux conducteurs a et b .

Ces deux intensités doivent être égales entre elles, et nous désignerons par J leur valeur commune, que nous nommerons simplement l'intensité du courant de la chaîne thermoélectrique. En égalant à J les deux fractions précédentes, et en multipliant par l_a et l_b les équations qui en résultent, nous obtenons :

$$Jl_a = V'_a - V''_a.$$

$$Jl_b = V''_b - V'_b.$$

L'addition de ces deux équations donne :

$$J(l_a + l_b) = V'_a - V''_a + V''_b - V'_b.$$

Si nous introduisons ici, en vertu de (2), les notations E''_{ab} et E'_{ba} , et si nous désignons par L la somme $l_a + l_b$ qui représente la résistance totale de la chaîne, il vient :

$$JL = E''_{ab} + E'_{ba},$$

ou :

$$J = \frac{E''_{ab} + E'_{ba}}{L}. \quad (3)$$

Il résulte de cette équation, d'après la loi d'Ohm, que la somme des deux différences de niveau potentiel, qui forme le numérateur de la fraction, est la force électromotrice totale de la chaîne thermoélectrique. Si nous désignons celle-ci par F , nous pourrions poser :

$$F = E''_{ab} + E'_{ba}. \quad (4)$$

§ 5.

Travail effectué et chaleur produite dans la chaîne thermoélectrique.

Puisque chaque particule d'électricité, circulant dans la chaîne, passe successivement en des lieux de niveaux potentiels différents, les forces électriques effectuent un travail qui est positif en certains lieux, et négatif en d'autres.

Si nous considérons d'abord une couche intermédiaire, par exemple celle qui se trouve en p'' , chaque particule d'électricité dq passe du niveau potentiel V''_a au niveau V''_b , en se mouvant au travers de cette couche. Le travail ainsi effectué par les forces électriques, étant représenté par la diminution du potentiel

de l'électricité libre, présente sur la particule dq , est égal à $(V''_a - V''_b) dq$ ou à $- E''_{ab} dq$. Si nous appliquons ceci à toute l'électricité qui traverse la couche dans l'unité de temps, et dont la quantité est égale à J , nous obtenons l'expression $- E''_{ab} J$ pour le travail effectué par les forces électriques, dans cette couche intermédiaire, pendant l'unité de temps. Nous obtenons de même l'expression $- E'_{ba} J$ pour le travail effectué, dans la couche intermédiaire, en p' . Substituant à J , dans ces expressions, sa valeur (3), nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Travail dans la couche intermédiaire en } p'' = - E''_{ab} \frac{E''_{ab} + E'_{ba}}{L} \\ \text{Travail de la couche intermédiaire en } p' = - E'_{ba} \frac{E'_{ab} + E'_{ba}}{L} \end{array} \right. \quad (5)$$

Ces quantités de travail sont négatives ou positives suivant que l'électricité qui traverse la couche passe d'un niveau potentiel moindre à un niveau plus élevé, ou inversement.

Si l'on réunit les deux expressions, on obtient :

$$\text{Travail dans les deux couches intermédiaires} = - \frac{(E''_{ab} + E'_{ba})^2}{L} \quad (6)$$

Cette expression est, dans tous les cas, négative, et le passage de l'électricité à travers les deux couches intermédiaires, prises ensemble, a donc lieu à l'encontre des forces électriques ; ce qu'on peut s'expliquer par la circonstance que les forces électriques sont surmontées par l'action de la chaleur.

Si nous considérons ensuite les conducteurs homogènes a et b , les forces électriques y effectuent, lors du mouvement de l'électricité, le travail qui est nécessaire

pour surmonter la résistance à la conductibilité. En vertu de l'équation (6) du chapitre V, ce travail est égal à $l_a J^2$ dans le conducteur a et à $l_b J^2$ dans le conducteur b . Nous obtenons donc, pour l'ensemble des deux conducteurs, l'expression LJ^2 , en désignant de nouveau par L la somme $l_a + l_b$; et si nous substituons à J sa valeur (3), il vient :

$$\text{Travail dans les conducteurs} = \frac{(E''_{ab} + E'_{ba})^2}{L}. \quad (7)$$

Puisque cette expression est égale et de signe contraire à l'expression (6), donnée pour le travail effectué dans l'ensemble des deux couches intermédiaires, il en résulte que la somme de toutes les quantités de travail, effectuées par les forces électriques dans la chaîne thermoélectrique, est égale à zéro. Ceci est aussi évident à priori. Si les forces électriques devaient, pendant un temps donné, effectuer ou subir un travail à l'intérieur de la chaîne thermoélectrique prise dans son ensemble, cela ne pourrait avoir lieu que par une modification dans la distribution de l'électricité, et une telle modification est exclue par l'hypothèse que le courant est stationnaire.

Au travail, en partie positif, en partie négatif, dont il vient d'être question, et qui est effectué par les forces électriques, se rapporte aussi une production et une consommation de chaleur. Dans les couches intermédiaires, il y a de la chaleur produite ou consommée, suivant que le mouvement de l'électricité a lieu dans le sens de la force électrique ou dans le sens opposé. Pour l'ensemble des deux couches intermédiaires, il y a consommation de chaleur, parce que, d'après ce qui précède, la somme des quantités de travail qui

y sont effectuées est négative. Dans les conducteurs homogènes, où les forces électriques ont à vaincre la résistance à la conductibilité, il y a production de chaleur. Quant aux quantités de chaleur produite et de chaleur consommée, elles sont équivalentes aux quantités de travail ci-dessus déterminées, dans l'hypothèse faite par nous, que la chaîne thermoélectrique est uniquement abandonnée à elle-même, sans exercer ou subir aucune action extérieure, et qu'à côté des modifications calorifiques, il n'y a en elle aucune autre modification de nature mécanique ou chimique. Si nous supposons que la chaleur soit mesurée en unités *mécaniques*, les quantités de chaleur seront représentées simplement par les mêmes expressions que les quantités de travail, et il n'est pas nécessaire de nous y arrêter davantage. Il nous suffira seulement encore de signaler que la somme algébrique de toutes les quantités de chaleur produites dans la chaîne thermoélectrique (en comptant négativement les quantités de chaleur consommées) est nulle, aussi bien que la somme de toutes les quantités de travail effectuées par les forces électriques.

Ces parties de la chaîne thermoélectrique, dans lesquelles la chaleur agit elle-même, soit en imprimant à l'électricité un mouvement dans un certain sens, soit en s'opposant à son mouvement, c'est-à-dire, dans le cas simple actuel, les deux couches intermédiaires en p et p' , peuvent être comparées à une machine parfaite, mue par la chaleur. De même, par exemple, que la machine soulève un poids, c'est-à-dire le meut en sens contraire de la pesanteur, auquel cas la pesanteur subit un travail, de même ici, l'électricité est forcée à se mouvoir en sens contraire de la force électrique, de sorte que celle-ci subit aussi un travail. De même aussi

qu'on peut laisser retomber le poids en l'abandonnant à l'action de la pesanteur, auquel cas celle-ci effectue un travail précisément égal à celui qu'elle a subi, travail qu'on peut utiliser à la production de différents effets, de même ici l'électricité retourne au point de départ, en obéissant, à l'intérieur des conducteurs homogènes, à la force électrique, et le travail, que celle-ci effectue dans ce cas, peut, de même, être employé à la production de différents effets, puisque les courants électriques peuvent produire une force motrice mécanique. Si, pour rendre la concordance encore plus parfaite, nous introduisons dans la machine des conditions limitatives analogues à celles auxquelles nous avons soumis plus haut les effets du courant, nous devons admettre que tout le travail de la machine n'est utilisé qu'à vaincre du frottement. Dans ce cas, le frottement engendre précisément autant de chaleur que la machine en consomme ; et si, pour avoir un système comparable à la chaîne complète, nous regardons les corps frottants comme faisant partie de la machine, il n'y aura, dans ce système, ni gain ni perte de chaleur.

§ 6.

**Existence d'une transmission de chaleur
par l'intermédiaire de la chaîne thermoélectrique.**

En comparant ci-dessus les parties de la chaîne thermoélectrique, où la chaleur même est active, c'est-à-dire les deux couches intermédiaires, à une machine thermodynamique, nous n'avons porté notre attention que sur la consommation et la production de chaleur. Mais, dans une machine thermodynamique, outre la modification de la chaleur totale existante, il y a *un passage de chaleur d'un corps chaud à un corps froid*, qui est déterminé d'une manière plus précise par le second principe de la théorie mécanique de la chaleur; c'est pourquoi nous devons aussi examiner la chaîne thermoélectrique à ce point de vue.

Recherchons d'abord, d'une manière générale, s'il existe réellement, dans la chaîne, une transmission de chaleur d'un corps chaud à un corps froid. Considérons, comme nous l'avons fait jusqu'à présent, une chaîne composée de deux substances homogènes seulement, et où la chaleur n'agit que dans les deux couches intermédiaires. Nous avons montré plus haut que l'expression de la chaleur engendrée dans l'ensemble des deux couches est négative; on ne peut pas conclure de là qu'il en est de même dans chaque

couche prise isolément, mais on doit plutôt, du moins pour de faibles différences de température, admettre comme règle que les deux expressions sont de signes contraires. En effet, à températures égales, les différences de niveau sont, aux deux contacts, égales et contraires ; si la température varie dans l'un d'eux, la différence de niveau variera aussi, et comme cette variation a lieu d'une manière continue, elle ne peut du moins pas produire tout d'abord un changement de signe ; et aussi longtemps que ceci n'aura pas lieu, les différences de niveau conserveront des signes contraires, de même que les quantités correspondantes de travail et de chaleur. Nous supposerons qu'il en est ainsi dans notre chaîne, et nous reviendrons plus tard sur les exceptions qui peuvent se présenter pour de grandes différences de température. Comme, par hypothèse, l'état de la chaîne entière doit être stationnaire, et que, par suite, les températures des deux contacts, que nous appellerons T' et T'' , doivent être constantes, imaginons que ceci soit dû à ce que les deux contacts sont mis en communication avec deux corps maintenus aux températures T' et T'' , et dont l'un restitue à l'un des contacts la chaleur détruite, tandis que le second absorbe celle qui est engendrée à l'autre. De cette manière, l'un des corps éprouve une perte, l'autre un gain de chaleur, et nous obtenons ainsi une transmission réelle de chaleur, effectuée par la chaîne, d'un corps à un autre.

Il s'agit de savoir si cette transmission satisfait également à la condition de s'effectuer d'un corps chaud à un corps froid, ou si elle ne suit peut-être pas la voie inverse. Considérons sous ce rapport les deux substances dont on a le plus étudié les effets thermo-électriques, et qui, par suite, laissent le moins de prise

au doute, c'est-à-dire le bismuth et l'antimoine; c'est, en effet, dans le premier sens que s'effectue la transmission, car, dans une chaîne composée de ces deux substances, le courant va, au contact le plus chaud, du bismuth à l'antimoine, et, au plus froid, de l'antimoine au bismuth; et, d'un autre côté, l'on sait qu'un courant qui traverse les lieux de contact dans le premier sens consomme de la chaleur, et que celui qui les traverse en sens inverse en produit. Il en résulte, comme cela doit être, que le corps le plus chaud éprouve une perte, et le plus froid un gain de chaleur; et les autres substances sur lesquelles on a fait des expériences conduisent également au même résultat. On voit aisément combien ceci rend plus parfaite encore l'analogie que nous avons établie plus haut entre une chaîne thermoélectrique et une machine mue par la chaleur, par exemple, une machine à vapeur; car, évidemment, le contact maintenu chaud correspond à la chaudière, et celui qui est maintenu froid, au condenseur de la machine à vapeur.

§ 7.

**Application du second principe fondamental
de la théorie mécanique de la chaleur.**

Après avoir ainsi démontré l'existence du passage de chaleur, nous y appliquerons le second principe de la théorie mécanique de la chaleur. On obtient une forme très simple de ce théorème, si l'on considère comme infiniment peu différentes les températures des deux corps, qui cèdent et absorbent la chaleur. Nous désignerons simplement par T la température en p'' , que nous supposerons la plus élevée et que nous avons désignée jusqu'ici par T'' , et nous poserons égale à $T - dT$ la température qui règne en p' , et que nous avons désignée jusqu'ici par T' . Pour le cycle complet, dans lequel une certaine quantité de chaleur est transformée en travail, ou, comme on peut le dire aussi, consommée par du travail, et où une autre quantité de chaleur passe d'un corps plus chaud à un corps plus froid, nous aurons alors l'équation :

$$\frac{\text{Chaleur consommée}}{\text{Chaleur transmise}} = \frac{dT}{T}. \quad (8)$$

Pour déterminer maintenant les quantités de chaleur se trouvant au numérateur et au dénominateur dans le premier membre de cette équation, nous devons

utiliser les équations (5), qui sont relatives aux deux couches intermédiaires, et qui ont été d'abord établies pour les quantités de travail y effectuées, mais qui sont aussi valables pour les quantités de chaleur produites ; nous avons seulement à y substituer aux notations, représentant les différences de niveau potentiel, les valeurs qui se rapportent à notre cas. Nous désignerons simplement par E la différence de niveau potentiel en p'' , de sorte que nous avons à poser :

$$E''_{ab} = E.$$

En ce qui concerne la différence de niveau potentiel E'_{ba} en p' , il faut d'abord remarquer qu'elle a un signe contraire à cause du renversement de la suite des corps a et b ; ensuite que sa valeur absolue diffère de la précédente de la quantité correspondante à l'abaissement de température dT . -On doit donc poser :

$$E'_{ba} = - \left(E - \frac{dE}{dT} dT \right).$$

De la combinaison de ces deux équations il résulte :

$$E''_{ab} + E'_{ba} = \frac{dE}{dT} dT.$$

Substituant ces valeurs dans les équations (5), il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chaleur engendrée en } p'' = - \frac{E}{L} \frac{dE}{dT} dT. \\ \text{Chaleur engendrée en } p' = \frac{E}{L} \frac{dE}{dT} dT - \frac{1}{L} \left(\frac{dE}{dT} \right)^2 dT^2, \end{array} \right. \quad (9)$$

d'où il résulte ensuite :

$$\text{Chaleur engendrée en } p' \text{ et } p'' = -\frac{1}{L} \left(\frac{dE}{dT} \right)^2 dT^2. \quad (10)$$

Puisque la dernière expression est négative, il s'ensuit, comme nous l'avons dit plus haut, que, pour l'ensemble des deux couches intermédiaires, il y a une *consommation* de chaleur: la valeur absolue de l'expression représente la quantité de chaleur consommée, c'est-à-dire, la quantité qui forme le numérateur de la fraction du premier membre de l'équation (8).

En ce qui concerne en outre la quantité de chaleur transmise, qui figure au dénominateur, il faut considérer comme telle la quantité de chaleur produite en p' et qui est déterminée par la seconde des équations (9); et il est encore à remarquer que nous pouvons négliger, dans cette expression, le terme du second ordre en dT , vis-à-vis du terme linéaire. L'équation (8) se transforme ainsi en :

$$\frac{\frac{1}{L} \left(\frac{dE}{dT} \right)^2 dT^2}{\frac{E}{L} \frac{dE}{dT} dT} = \frac{dT}{T};$$

cette équation se réduit à la suivante :

$$\frac{dE}{E} = \frac{dT}{T}; \quad (11)$$

d'où il résulte par l'intégration :

$$E = \varepsilon T, \quad (12)$$

où ε est une constante dépendant de la nature des substances en contact.

Nous sommes ainsi parvenu, en ce qui concerne la manière dont varie, avec la température, la différence de niveau potentiel qui se présente entre deux substances différentes, à cette loi simple, que la *différence de niveau potentiel est proportionnelle à la température absolue*. Mais il est à observer que l'équation (12), exprimant la loi sous cette forme simple dans laquelle ϵ est constant, ne peut être considérée comme valable que pour autant que soit exacte l'hypothèse prise pour base de notre développement ci-dessus, savoir : qu'aucune force électromotrice ne se produit à l'intérieur des substances isolées.

Appliquant cette expression obtenue pour E à une chaîne thermoélectrique, où les points de contact p' et p'' ont des températures quelconques T' et T'' , nous avons à poser :

$$E''_{ab} = \epsilon_{ab}T''$$

$$E'_{ba} = \epsilon_{ba}T' = - \epsilon_{ab}T'.$$

Par là, l'équation (4), qui donne la force électromotrice totale de la chaîne, se transforme en :

$$F = \epsilon_{ab}(T'' - T'). \quad (13)$$

Au lieu de la chaîne thermoélectrique composée de deux substances, imaginons-en une qui se compose d'un nombre quelconque n de substances conductrices, que nous nommerons a, b, c, \dots, h . En partant de l'origine du conducteur a , désignons par $p', p'', p''', \dots, p^{(n)}$ les lieux de contact, de sorte que p'' est le lieu de contact entre a et b , p''' celui entre b et c , et enfin p' celui entre h et a . Appelons $E''_{ab}, E'''_{bc}, \dots, E'_{ha}$ les différences de niveau potentiel en ces points. Comme pour

l'équation (4), nous aurons à poser, pour déterminer la force électromotrice de la chaîne thermoélectrique :

$$F = E''_{ab} + E'''_{bc} + \dots + E'_{ha}. \quad (14)$$

Si nous désignons, en outre, respectivement par ε_{ab} , ε_{bc} ,... ε_{ha} , les facteurs constants qui se présentent dans les expressions des différences de niveau potentiel, et si nous nommons T' , T'' , T''' ,... $T^{(n)}$, les températures des lieux de contact, en partant de celui que forme l'origine du conducteur a , l'équation ci-dessus se transforme en :

$$F = \varepsilon_{ab}T'' + \varepsilon_{bc}T''' + \dots + \varepsilon_{ha}T'. \quad (15)$$

§ 8.

Concordance entre le résultat ci-dessus et l'expérience.

Si l'on compare le résultat des développements précédents, exprimé dans l'équation (12), avec l'expérience, on trouve une concordance non douteuse sous plusieurs rapports.

Le premier point que je veux faire remarquer, c'est que l'expression donnée (12) satisfait à une exigence générale. Si, dans une chaîne thermoélectrique formée d'un nombre quelconque de substances a , b , c ,... h , tous les lieux de contact ont une seule

et même température T, il n'en résulte aucun courant, et la force électromotrice de la chaîne doit, par suite, être nulle. En vertu de (14), on devra donc à poser pour ce cas :

$$E_{ab} + E_{bc} + \dots + E_{ha} = 0 ;$$

et les différences de niveau potentiel doivent satisfaire à cette équation pour toute valeur quelconque de la température commune T. Si l'on substitue aux différences de niveau potentiel leurs expressions (12), en leur appliquant à toutes la même température T, l'équation ci-dessus se transforme en :

$$(\varepsilon_{ab} + \varepsilon_{ba} + \dots + \varepsilon_{ha}) T = 0,$$

et il résulte immédiatement de la forme de cette équation que, si les constantes ont des valeurs telles qu'elles satisfassent à l'équation pour une température donnée, elles y satisferont pour toutes les températures.

Nous comparerons maintenant avec l'expérience quelques conséquences particulières qui résultent de (12).

1° D'après (12) les différences de niveau potentiel croissent avec la température et ne décroissent pas. Pour vérifier l'exactitude de cette conclusion, rappelons-nous que le courant prend toujours la direction suivant laquelle la somme des différences de niveau est positive, et par suite, dans le cas où il n'y a que deux différences, la direction suivant laquelle la plus grande des deux est positive. Pour prouver que c'est au contact le plus chaud que la différence de niveau est la plus grande, il suffit donc de montrer qu'elle est positive relativement à la direction du courant ; et c'est ce que nous avons vu plus haut, puisque l'expérience prouve qu'au contact le plus chaud il y a consommation

de chaleur, ce qui correspond à un travail négatif, et, par suite, à un accroissement du niveau potentiel dans le sens du courant.

2° *D'après (12), les variations de chaque différence de niveau sont proportionnelles aux variations de température correspondantes.* Il en résulte, comme on le voit aisément par (13), que, dans toute chaîne composée de deux substances homogènes, la force électromotrice¹ doit être proportionnelle à la différence de température qui a lieu entre les deux contacts ; ce que l'on peut regarder en général comme la règle, dans le cas où les différences de température ne sont pas trop considérables.

3° *D'après (12), les différences de niveau qui croissent le plus rapidement avec la température doivent aussi être celles dont la valeur totale est la plus considérable.* Considérons notamment deux combinaisons quelconques de deux substances quelconques, soit *a* et *b*, *c* et *d* ; nous avons à poser :

$$E_{ab} = \epsilon_{ab}T \quad \text{et} \quad E_{cd} = \epsilon_{cd}T,$$

d'où résulte :

$$\frac{dE_{ab}}{dT} = \epsilon_{ab} \quad \text{et} \quad \frac{dE_{cd}}{dT} = \epsilon_{cd} ;$$

et de ces équations résulte la proportion :

$$\frac{dE_{ab}}{dT} : \frac{dE_{cd}}{dT} :: E_{ab} : E_{cd}.$$

1. On ne pourrait pas remplacer simplement ici la force électromotrice par l'intensité du courant, parce que cette dernière dépend aussi de la résistance à la conductibilité, laquelle varie avec la température.

Cette conclusion est également confirmée par l'expérience; les combinaisons de substances qui donnent les plus forts courants, pour une différence de température déterminée, comme la combinaison du bismuth et de l'antimoine, présentent en effet aussi ce caractère qu'un courant qui passe par leurs contacts y engendre ou y détruit plus de chaleur; la première de ces propriétés conduit à une valeur considérable du coefficient différentiel $\frac{dE}{dt}$, la seconde à une valeur considérable de la fonction E elle-même.

§ 9.

Écarts du résultat ci-dessus d'avec l'expérience et leur explication.

Ces confirmations ne permettent pas de douter que l'expression donnée dans l'équation (12) n'offre pas tout simplement, comme le ferait une formule empirique, entre certaines limites, une ressemblance extérieure peut-être accidentelle avec la loi que suivent les différences de niveau, mais qu'elle est fondée sur la nature même des choses. Néanmoins, à elle seule, elle ne représente pas encore les phénomènes avec une exactitude complète; en analysant ceux-ci, surtout dans les cas où il se présente de hautes températures, on trouve en effet, des écarts notables, qui montrent que, dans la production de ces phénomènes, il y a des circonstances

accessoires qui agissent, et dont il n'a pas été tenu compte dans la déduction de cette expression. Ce fait se manifeste surtout dans une chaîne composée de fer et de cuivre : on sait que, lorsqu'on chauffe progressivement l'un des contacts, l'intensité du courant, au lieu d'augmenter constamment, décroît à partir d'une certaine température, et qu'à la chaleur rouge il y a même un renversement du courant.

Ces écarts font conclure que l'hypothèse prise comme base de nos développements ci-dessus, savoir que les forces électromotrices, qui se présentent dans une chaîne thermoélectrique, n'ont leur siège qu'aux lieux de contact des différentes substances, tandis que dans l'intérieur d'une même substance, même quand ses parties ont des températures différentes, il ne se présente pas de forces électromotrices, que cette hypothèse, disons-nous, doit être inexacte. Si l'on voulait, par exemple, expliquer la production du courant dans la chaîne fer-cuivre au moyen des seules différences de niveau qui ont lieu aux contacts, on devrait conclure qu'à la température à laquelle s'effectue le renversement du courant, la différence de niveau au contact le plus chaud serait redevenue précisément égale à celle qui existe à l'autre contact, et se trouverait ainsi à un point où elle passe d'une valeur plus grande à une plus petite ou *vice versa*. Dans ce changement de valeur, elle garderait évidemment tout d'abord son signe, et par suite, dans le renversement du courant, les effets thermiques de celui-ci aux deux contacts devraient également se renverser, de telle sorte que, si d'abord la chaleur passait d'un corps chaud à un corps froid, ce serait actuellement la transmission inverse qui aurait lieu, résultat qui est en contradiction manifeste avec le second principe de la théorie

mécanique de la chaleur. On est donc obligé d'admettre que, dans l'intérieur des deux métaux réunis dans la chaîne, ou de l'un d'entre eux, il a surgi des différences de niveau qui concourent comme forces électromotrices à la production du courant ; et la condition que le second principe de la théorie mécanique de la chaleur doit toujours se vérifier, fournit en même temps un moyen de tirer du moins une certaine conclusion sur le rapport qui doit exister entre ces diverses différences de niveau.

Mais cela ne veut pas dire *que toute différence de température, par cela seul qu'elle existe, doive être nécessairement accompagnée d'une différence de niveau* ; je pense, au contraire, que, pour expliquer les écarts observés jusqu'aujourd'hui, il suffit de considérer la différence de niveau, qui a lieu dans l'intérieur d'un métal, comme étant seulement un effet *secondaire* de la différence de température, qui se produit *lorsque le changement de température d'une de ses parties occasionne un changement dans l'état moléculaire de celle-ci*, de sorte que cette dernière partie du métal, et celle qui n'a pas subi le changement, se comportent, l'une par rapport à l'autre, comme des métaux différents. Cela a naturellement lieu aussi, quand les deux parties ont changé leur état moléculaire, et que les changements ne sont pas égaux.

Dans plusieurs cas, on peut prouver avec assez de certitude qu'il se présente des modifications de ce genre dans une mesure considérable ; nous citerons comme exemple l'acier, dans lequel les effets de la chaleur sont particulièrement remarquables. L'acier trempé et l'acier doux se comportent, dans leurs propriétés les plus importantes, telles que la dureté, l'élasticité et la fragilité, comme deux métaux tout à fait différents ;

et l'on sait qu'à leur contact il se produit une différence de niveau, puisqu'on peut en composer une chaîne thermoélectrique, et même, par une multiplication convenable, une pile thermique assez puissante. Or, comme toute la différence qui existe entre eux n'a pour cause que la rapidité plus ou moins grande du refroidissement, on doit admettre que la combinaison du fer avec le carbone, qui a lieu à une température élevée, et l'état moléculaire corrélatif de toute la masse, tendent à se modifier pendant le refroidissement, mais que cette modification a besoin d'un certain temps, et que, par suite, elle peut être arrêtée en tout ou en partie par la rapidité du refroidissement, tandis qu'elle s'effectue par un refroidissement lent. Conformément à ce résultat, on peut conclure de la différence observée entre l'acier refroidi lentement et l'acier refroidi brusquement, à une différence correspondante entre l'acier refroidi lentement et l'acier chaud; et, en effet, Seebeck a tiré cette conclusion de ses expériences thermoélectriques.¹

Au reste, tous les courants thermoélectriques que l'on obtient par l'emploi d'un seul métal, en en échauffant des parties isolées, témoignent de la fréquence ainsi que de l'influence électrique de ces différences dans l'état moléculaire. Elles sont surtout considérables dans des métaux qui offrent une texture cristalline bien caractérisée. C'est ainsi que Seebeck² a observé qu'un anneau d'antimoine, fondu d'une pièce, se comportait comme s'il était formé de deux métaux différents, dont les limites pouvaient se déterminer exactement

1. *Ueber die magnetische Polarisation der Metalle und Erz, durch Temperatur-Differenz*, von Dr T.-J. Seebeck. Mém. de l'Acad. de Berlin pour 1822 et 1823; et *Ann. de Pogg.*, t. VI, § 47.

2. *Loc. cit.*, § 46.

Lorsqu'il fut brisé, on constata que l'une des parties avait une structure stelliforme, tandis que l'autre était formée d'un grain fin, et une recherche subséquente assigna comme cause de cette différence l'inégale rapidité de leur refroidissement. Des expériences faites avec beaucoup de soin par Magnus¹ sur les métaux ductiles l'ont également conduit à ce résultat, que les courants qui naissent dans un seul métal ont pour cause une différence dans l'état de ses parties, et surtout dans leur dureté. Or, si la manière dont on traite les différentes parties d'un métal peut occasionner, d'une façon permanente, une différence d'état telle que ces parties se comportent comme des métaux différents quant à la formation des courants thermoélectriques, on pourra admettre comme une hypothèse assez probable qu'une différence de température peut aussi produire, d'une manière passagère, une différence d'état analogue.

Supposons que ce cas se présente dans une chaîne thermoélectrique, c'est-à-dire qu'une partie de l'un des métaux change d'état moléculaire; il surgira d'abord, comme nous venons de le dire, entre cette partie et celle qui n'a pas changé d'état, une différence de niveau qui ne se présentait pas précédemment; en outre, au lieu où cette partie est en contact avec un autre métal, la différence de niveau qui existe déjà éprouvera une variation qui n'est pas comprise dans l'équation (12), et que l'on devra introduire en outre dans le calcul; or ces deux circonstances se réunissent dans leur action sur le courant. Pour rester d'accord avec le second principe de la théorie mécanique de la chaleur dans des cas semblables, on n'aura qu'à décomposer en deux

1. Mém. de l'Acad. de Berlin pour 1851, et *Ann. de Pogg.*, t. LXXXIII, p. 469.

parties les effets électriques produits par la chaleur dans la chaîne : les effets immédiats, et ceux qui sont occasionnés par des changements dans l'état moléculaire ; on traitera ces derniers comme s'ils étaient dus à des différences réelles de substances ; quant aux premiers, l'équation (12) y est applicable sans modification ; et il suffira de l'appliquer également après chaque modification de l'état moléculaire à la chaîne dans son état varié, de la même manière qu'on l'a appliquée précédemment à la chaîne dans son état primitif. Que le changement dans l'état moléculaire se fasse subitement à une température déterminée, ou qu'il y ait un passage continu d'un état à l'autre, cela n'occasionnera aucune différence essentielle ; dans ce dernier cas, en effet, au lieu d'une différence de niveau finie, on n'aura qu'à admettre une série infinie de différences infiniment petites.

§ 10.

Extension de la théorie.

J'ai exposé la théorie ci-dessus des courants thermo-électriques dans un Mémoire publié d'abord en 1853 et réimprimé plus tard ; à la fin de ce Mémoire, j'ai donné, pour les écarts existant encore entre les résultats et l'expérience, l'explication contenue dans le paragraphe précédent, et j'ai indiqué en même temps comment il faudrait étendre les développements

ci-dessus pour établir une concordance complète avec l'expérience. M. Budde a repris le même sujet et effectué cette extension dans un beau Mémoire publié en 1874¹. J'en donnerai ici la partie essentielle, en renvoyant au Mémoire même, en ce qui concerne une exposition plus détaillée.

Les différences de l'état moléculaire ou de la structure, dont il a été question dans le paragraphe précédent, qui se présentent dans une substance de même nature chimique et peuvent alors agir de telle sorte que deux parties de cette substance se comportent, l'une par rapport à l'autre, au point de vue thermoélectrique, comme deux substances distinctes ; ces différences, disons-nous, peuvent dépendre, de deux manières différentes, de la température.

Il y a des cas, où une modification de la structure de la substance est déterminée par un changement de température, mais où la température et la structure ne se trouvent pas dans une relation déterminée l'une avec l'autre, de sorte que la substance ne reprend pas nécessairement aussi sa structure primitive, lorsqu'elle revient à sa température primitive. Il est, par exemple, connu que des corps, qui peuvent cristalliser de différentes manières, éprouvent parfois une modification de texture cristalline par une élévation de température, sans que la texture cristalline primitive se rétablisse par le refroidissement ultérieur. De même, on sait que l'acier peut éprouver une notable modification de dureté, quand on l'échauffe et qu'on le refroidit ensuite à la température primitive. Il serait difficile de représenter par des équations générales la manière dont se comportent des substances de cette espèce dans la chaîne

1. *Ann. de Pogg.*, t. 153, p. 243.

thermoélectrique ; nous dirons seulement qu'on n'a qu'à faire entrer en ligne de compte, pour chaque partie d'une telle substance, les propriétés thermoélectriques correspondant à la structure qu'elle a au moment considéré.

Mais il existe aussi des substances, dont la structure se modifie avec la température de telle sorte qu'une même structure, au moins approximativement, se représente aussi toujours à la même température. Si l'on considère comme réellement exacte cette réapparition de la même structure, on peut, pour de telles substances, considérer les quantités dépendantes de la structure comme des fonctions de la température, ce qui est important quand on étudie la manière dont ces substances se comportent au point de vue thermoélectrique. Les développements effectués par Budde se rapportent à des substances de cette espèce.

§ 11.

Expression généralisée de la force électromotrice.

La différence de niveau potentiel E qui a lieu au contact de deux substances a été déterminée au § 7, par l'équation (12) :

$$E = \epsilon T,$$

dans laquelle ϵ a été considéré comme une constante dépendant de la nature des substances en contact.

Si la structure des substances change avec la température, il n'est plus nécessaire que ε soit une quantité constante, mais elle doit être considérée comme une fonction de la température. Si, en outre, des parties différentes d'une seule et même substance sont différemment chaudes, et si, par là, des différences se sont produites dans leur structure, il peut aussi régner entre elles des différences de niveau potentiel.

Pour pouvoir représenter commodément la différence de niveau potentiel entre deux substances quelconques ou entre deux parties quelconques d'une substance, nous comparerons d'abord toutes les substances avec une substance, pour laquelle nous admettrons qu'elle a une structure toujours et partout uniforme et aussi invariable par les changements de température, de sorte qu'il ne peut exister de différences de niveau potentiel entre deux parties différemment chaudes de cette substance. Il est sans importance, pour la validité de ce qui suit, de savoir si une telle substance invariable existe réellement, puisqu'elle doit uniquement nous servir à posséder, pour la détermination de tous les niveaux potentiels, une origine commune dont la position n'influe pas sur les équations relatives aux chaînes thermoélectriques, dans lesquelles il ne s'agit que des *différences* des niveaux potentiels existants. Nous désignerons par r cette substance hypothétique de comparaison. Considérant maintenant une autre substance quelconque a , imaginons qu'elle soit mise en contact avec r , et formons, conformément à (12), l'équation :

$$E_{ra} = \varepsilon_{ra}T, \quad (16)$$

donnant la différence de niveau potentiel E_{ra} régnant au lieu de contact à la température T .

D'une manière entièrement correspondante, nous avons alors aussi à former pour une autre substance b , l'équation :

$$E_{rb} = \varepsilon_{rb}T ; \quad (16a)$$

et de ces deux équations il suit :

$$E_{ab} = E_{rb} - E_{ra} = T (\varepsilon_{rb} - \varepsilon_{ra}). \quad (17)$$

Comme, d'autre part, en vertu de (12), on peut poser :

$$E_{ab} = \varepsilon_{ab}T,$$

il vient :

$$\varepsilon_{ab} = \varepsilon_{rb} - \varepsilon_{ra}, \quad (18)$$

équation par laquelle la fonction de température ε_{ab} , qui dépend de la nature des deux substances a et b , est ramenée à deux fonctions de la température, dont chacune ne dépend que de la nature d'une de ces deux substances. Pour obtenir une simplification dans la notation, de telle sorte que nous n'ayons pas toujours besoin d'écrire la lettre r relative à la substance de comparaison, nous poserons, en introduisant la nouvelle notation η :

$$\varepsilon_{ra} = \eta_a \quad \text{et} \quad \varepsilon_{rb} = \eta_b, \quad (19)$$

de sorte que nous pouvons écrire l'équation ci-dessus comme suit :

$$\varepsilon_{ab} = \eta_b - \eta_a. \quad (20)$$

L'équation (17) se transforme alors par-là en :

$$E_{ab} = T (\eta_b - \eta_a). \quad (21)$$

Considérons maintenant une chaîne thermoélectrique formée de deux conducteurs linéaires a et b , dont les points de contact ont les températures T' et T'' .

Déterminons d'abord, pour le conducteur a , dont la température varie de T' jusque T'' en allant de l'origine vers l'extrémité, comment se comportent entre eux les niveaux potentiels en ses différents points, lors du circuit ouvert. S'il règne en deux points du conducteur infiniment voisins l'un de l'autre les températures T et $T + dT$, les deux valeurs correspondantes de η_a différeront de $\frac{d\eta_a}{dT} dT$, et la différence correspondante des niveaux potentiels, régnant aux deux points, est :

$$\frac{dV_a}{dT} dT = T \frac{d\eta_a}{dT} dT. \quad (22)$$

D'où il suit :

$$V''_a - V'_a = \int_{T'}^{T''} T \frac{d\eta_a}{dT} dT, \quad (23)$$

si nous désignons par V'_a et V''_a les valeurs initiales et finales de V_a .

Si le circuit est fermé, et que, par suite, un courant électrique continu traverse le conducteur a , il règne naturellement, sur ce conducteur, d'autres niveaux potentiels, qu'en circuit ouvert. Mais les différences de niveau potentiel régnant, en circuit ouvert, suffisent pour la détermination des forces électromotrices.

Entre deux lieux, dont les températures sont T et $T + dT$, agit une force électromotrice représentée par $\frac{dV_a}{dT} dT$ ou par $T \frac{d\eta_a}{dT} dT$, et par suite, l'expression (23) :

$$\int_{T'}^{T''} T \frac{d\eta_a}{dT} dT,$$

donne la somme de toutes les forces électromotrices agissant à l'intérieur du conducteur a . Par la forme de cette expression, on voit de suite que sa valeur dépend seulement de la température de l'origine et de celle de l'extrémité du conducteur, et non de la manière, dont les températures intermédiaires sont distribuées sur ce conducteur.

D'une manière correspondante, pour le conducteur b , qui a à son origine la température T'' et à son extrémité la température T' , la somme des forces électromotrices agissant en lui est représentée par l'expression :

$$\int_{T''}^{T'} T \frac{d\eta_b}{dT} dT.$$

Si nous considérons maintenant la chaîne thermo-électrique entière, outre les forces électromotrices ci-dessus déterminées, agissent encore celles qui règnent aux lieux de contact p' et p'' . Désignant par η'_a et η'_b et η''_a , η''_b les valeurs des quantités η_a , η_b aux températures T' et T'' , les forces électromotrices agissant aux lieux de jonction sont :

$$T'' (\eta''_b - \eta''_a) \quad \text{et} \quad T' (\eta'_a - \eta'_b).$$

En réunissant les quatre expressions ci-dessus, nous obtenons, pour la force électromotrice entière de la chaîne, l'équation :

$$F = \int_{T'}^{T''} T \frac{d\gamma_a}{dT} dT + T'' (\gamma''_b - \gamma''_a) + \int_{T''}^{T'} T \frac{d\gamma_b}{dT} dT + T' (\gamma'_a - \gamma'_b). \quad (24)$$

En effectuant l'intégration partielle, on peut poser :

$$\int_{T'}^{T''} T \frac{d\gamma_a}{dT} dT = T''\gamma''_a - T'\gamma'_a - \int_{T'}^{T''} \gamma_a dT$$

$$\int_{T''}^{T'} T \frac{d\gamma_b}{dT} dT = T'\gamma'_b - T''\gamma''_b - \int_{T''}^{T'} \gamma_b dT.$$

Alors la plupart des termes disparaissent et il reste :

$$F = - \int_{T'}^{T''} \gamma_a dT - \int_{T''}^{T'} \gamma_b dT, \quad (25)$$

ou autrement :

$$F = \int_{T'}^{T''} (\gamma_b - \gamma_a) dT = \int_{T'}^{T''} \varepsilon_{ab} dT. \quad (25a)$$

Si l'on fait, dans cette équation, l'hypothèse particulière que ε_{ab} est constant, elle se transforme en l'équation (13) :

$$F = \varepsilon_{ab} (T'' - T').$$

Si, au contraire, on considère ε_{ab} comme une fonction de la température encore à déterminer, on peut, par un choix convenable de la forme de cette fonction, expliquer très bien, à l'aide de cette équation, les observations qui, pour différentes chaînes, s'écartent de la loi ordinaire en ce qui concerne la dépendance entre la force électromotrice et la température.

Les équations (24) et (25) peuvent être facilement étendues, de telle sorte qu'elles soient valables pour une chaîne thermoélectrique formée d'un nombre quelconque de substances. Si n conducteurs $a, b, c \dots h$, constituent la chaîne et si les températures de leurs lieux de jonction sont respectivement $T', T'', T''', \dots T^{(n)}$ à partir, de l'origine du conducteur a , les équations généralisées sont :

$$F = \int_{T'}^{T''} T \frac{d\gamma_a}{dT} dT + T'' (\gamma''_b - \gamma''_a) + \int_{T''}^{T'''} T \frac{d\gamma_b}{dT} dT$$

(26)

$$+ T''' (\gamma'''_c - \gamma'''_b) + \dots + \int_{T^{(n)}}^{T'} T \frac{d\gamma_h}{dT} dT + T' (\gamma'_a - \gamma'_h).$$

$$F = - \int_{T'}^{T''} \gamma_a dT - \int_{T''}^{T'''} \gamma_b dT - \dots - \int_{T^{(n)}}^{T'} \gamma_h dT. \quad (27)$$

§ 12.

**Chaleur consommée et chaleur produite dans la chaîne
thermoélectrique.**

Après avoir exprimé les forces électromotrices qui se présentent dans la chaîne thermoélectrique, nous pouvons aussi déterminer aisément la disparition et la production de chaleur dans ses différentes parties.

Ainsi que nous l'avons déjà exposé au § 5, il y a lieu, en cela, de considérer deux phénomènes : d'abord, celui dans lequel la chaleur est active, en produisant des forces électromotrices qui ont lieu, en certaines places, dans le sens du courant et, en d'autres, en sens opposé ; ce qui entraîne alors une consommation ou une production de chaleur ; ensuite, le phénomène qui consiste à vaincre la résistance à la conductibilité, dans lequel il y a de la chaleur engendrée tout comme quand on surmonte un frottement. Dans le cas simple précédemment considéré, où les forces électromotrices n'ont leur siège qu'aux surfaces de contact, les deux phénomènes étaient distincts, dans l'espace. Mais si des forces électromotrices se présentent aussi à l'intérieur des diverses substances, les deux phénomènes ont lieu à côté l'un de l'autre dans le même espace. Malgré cela on peut les séparer l'un de l'autre pour les considérer.

Ils se distinguent essentiellement en ceci : que l'un éprouve un renversement par un renversement du courant, la consommation de chaleur et sa production

se remplaçant réciproquement, tandis que l'autre ne change pas lors du renversement du courant, parce que, pour lui, il ne peut toujours y avoir qu'une production de chaleur. Il devient par là possible de déterminer séparément, par l'observation, les quantités de chaleur engendrées par les deux phénomènes (les quantités de chaleur consommée étant comptées comme des quantités négatives de chaleur engendrée). Après qu'on a observé la quantité totale de chaleur engendrée, dans la partie considérée, par le courant produit par les forces thermoélectromotrices, on fait parcourir la chaîne par un courant de même intensité, mais de sens opposé, produit par des forces électromotrices étrangères, et l'on observe alors de nouveau la chaleur totale engendrée dans cette partie. Si l'on ajoute les deux quantités de chaleur, la moitié de la somme représentera la quantité de chaleur produite par le courant thermoélectrique en surmontant la résistance à la conductibilité. Si, au contraire, on retranche la quantité de chaleur engendrée, dans la partie considérée, par le second courant, de celle qui y est engendrée par le premier, la moitié de la différence représentera la quantité de chaleur, engendrée par le courant thermoélectrique, qui correspond à l'action exercée par la chaleur elle-même.

Ces deux quantités de chaleur peuvent aussi s'exprimer mathématiquement pour un conducteur linéaire. La quantité de chaleur engendrée dans une partie quelconque du conducteur, qui correspond à l'effet de la chaleur active par elle-même, et dont dépend par suite la production des forces électromotrices, est représentée par le produit, pris négativement, de la force électromotrice agissant dans cette partie du conducteur et de l'intensité du courant. Par contre,

la chaleur engendrée par le courant en surmontant la résistance à la conductibilité est représentée par le produit de la résistance de la partie considérée et du carré de l'intensité.

Considérons maintenant d'abord la chaîne thermo-électrique dans son ensemble, et nommons F la force électromotrice totale, L la résistance totale à la conductibilité et J l'intensité du courant qui s'y produit; la quantité totale de chaleur engendrée dans la chaîne par le premier phénomène est :

$$- FJ,$$

et celle qui y est engendrée par le second :

$$L J^2.$$

Posant :

$$J = \frac{F}{L},$$

les deux expressions se transforment en :

$$- \frac{F^2}{L} \text{ et } \frac{F^2}{L}.$$

Elles sont donc de signes opposés (la chaleur étant consommée dans l'un des phénomènes et engendrée dans l'autre), et égales en valeur absolue, de sorte que leur somme algébrique est nulle, ainsi que cela doit être en vertu du premier principe de la théorie mécanique de la chaleur.

Pour examiner ensuite s'il est satisfait au second principe de la théorie mécanique de la chaleur, nous avons à porter notre attention sur les quantités de chaleur qui sont engendrées par le premier phénomène, dans lequel la chaleur agit par elle-même.

Divisant les quantités de chaleur que produit ce phénomène, dans les différentes parties de la chaîne, par les températures absolues de ces parties, et formant la somme des quotients ainsi obtenus, cette somme doit être nulle en vertu du second principe de la thermodynamique.

Considérons d'abord le conducteur a , et prenons en une partie infiniment petite, dont le point initial a la température T et le point final la température $T + dT$. La force électromotrice agissant dans cette partie est $T \frac{dr_a}{dT} dT$, et par suite la quantité de chaleur qui y est engendrée dans l'unité de temps : — $J T \frac{dr_a}{dT} dT$. Cette quantité divisée par T donne — $J \frac{dr_a}{dT} dT$. Imaginons que l'on forme ces expressions pour tous les éléments du conducteur a , dont le point d'origine a une température T' et le point final une température T'' , et que l'on prenne la somme de toutes ces expressions, laquelle sera dans ce cas une intégrale, on obtiendra :

$$- J \int_{T'}^{T''} \frac{dr_a}{dT} dT = J (r'_a - r''_a).$$

Nous obtiendrons de même successivement pour les conducteurs suivants $b, c, d, \dots h$, les expressions :

$$J (r''_b - r'''_b), \quad \dots \quad J \left(r^{(n)}_h - r'_h \right).$$

Nous avons ensuite à considérer les points de liaison des différents conducteurs. La force électromotrice qui a lieu au point de liaison des conducteurs a et b

est $T'' (\eta''_b - \eta''_a)$, et par suite la quantité de chaleur qui y est engendrée est $+ JT'' (\eta''_a - \eta''_b)$; la division par T'' donne :

$$J (\eta''_a - \eta''_b).$$

Nous obtenons de même, successivement pour les autres points de contact, les expressions :

$$J (\eta''_b - \eta''_c), \quad . \quad . \quad . \quad , \quad J (\eta''_h - \eta''_a).$$

Si nous formons maintenant la somme de toutes les expressions applicables aux n conducteurs et aux n points de contact, les sommes s'entredétruisent et on obtient une somme nulle. Il est donc satisfait au second principe de la théorie mécanique de la chaleur, et on ne peut par suite, en partant de cette théorie, rien objecter contre les équations posées.

Budde les a également soumises à une vérification expérimentale, en choisissant pour cela un cas particulier, qui se rapporte à la chaîne fer-cuivre. Comme nous l'avons déjà dit, la force électromotrice de cette chaîne ne croît pas quand on augmente continuellement la température de la soudure chaude, mais elle atteint un maximum à partir duquel elle décroît. Si l'on considère en particulier la température où la force électromotrice a son maximum, on trouve pour celle-ci une particularité caractéristique. Différentiant l'équation (25_a) par rapport à T'' , il vient :

$$\frac{dF}{dT''} = \varepsilon''_{ab},$$

où ε''_{ab} est la valeur de ε_{ab} correspondante à la température T'' . De là résulte, en vertu de l'équation $E_{ab} = \varepsilon_{ab} T$

et en désignant par E''_{ab} , la valeur de E_{ab} correspondante à la température T'' :

$$E''_{ab} = T'' \frac{dF}{dT''}.$$

Pour la valeur de la température à laquelle F est un maximum, le coefficient différentiel $\frac{dF}{dT''}$ doit être nul, et il en résulte que la différence de niveau potentiel E''_{ab} est nulle. Si, d'après cela, à cette température, il n'existe aucune différence de niveau potentiel à la soudure du fer et du cuivre, le phénomène de Peltier (la consommation ou la production de chaleur lors du passage du courant) ne peut y avoir lieu à cette température. Budde a essayé de prouver expérimentalement ce résultat de la théorie et l'a trouvé confirmé, pour autant que les difficultés des essais ont permis de décider la question.

Pour terminer, je ferai encore remarquer que W. Thomson et F. Kohlrausch ont émis, sur le fonds même de la production de la force électromotrice d'une chaîne thermoélectrique, des vues qui s'écartent de mon explication. Je les discuterai en détail dans le dernier chapitre de ce volume.

CHAPITRE VIII.

FORCES PONDÉROMOTRICES ET ÉLECTROMOTRICES ENTRE COURANTS LINÉAIRES ET CONDUCTEURS.

§ 1.

Les formules fondamentales d'Ampère.

Ampère a, comme on le sait, commencé le développement de sa théorie des forces pondéromotrices, en déduisant une formule pour l'action mutuelle de deux éléments de courants. Pour cela, il est parti de certains faits établis expérimentalement, mais il a en outre fait l'hypothèse que les forces exercées par deux éléments de courant l'un sur l'autre, *ne peuvent consister qu'en une attraction ou une répulsion mutuelle.*

Il a donné à la formule déduite de cette manière différentes formes, dont tantôt l'une, tantôt l'autre,

est plus commode, suivant les calculs que l'on veut effectuer avec son aide. Soient ds et ds' les deux éléments de courant, i et i' leurs intensités, r la distance des deux éléments l'un de l'autre, et (ss') l'angle compris entre leurs directions; la force que ces éléments exercent l'un sur l'autre est, d'après Ampère, une attraction dont l'intensité est :

$$k i i' ds ds' \left(\frac{\cos (ss')}{r^2} + r \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial s \partial s'} \right),$$

où k est une constante positive. Une valeur négative de cette formule représente naturellement une répulsion, celle-ci pouvant être considérée comme une attraction négative.

Si l'on veut déduire de là la force que l'élément de courant ds éprouve de la part d'un courant fini s' , on doit considérer les composantes de la force dans des directions déterminées, et alors on peut, pour ces composantes, effectuer l'intégration. Choisissons pour cela un système de coordonnées rectangulaires, dans lequel les deux éléments de courant ont les coordonnées x, y, z , et x', y', z' . Les composantes suivant les axes des coordonnées de la force qu'éprouve l'élément ds de la part de ds' , seront désignées par $\xi ds ds'$, $\eta ds ds'$, $\zeta ds ds'$; alors il résulte de là formule d'attraction ci-dessus :

$$\xi = k i i' \left[\frac{x' - x}{r^3} \cos (ss') + (x' - x) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial s \partial s'} \right]$$

qu'on peut écrire :

$$\xi = k i i' \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos(ss') + (x' - x) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial s \partial s'} \right], \quad (1)$$

et de même pour les deux autres directions des coordonnées

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = k i i' \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \cos(ss') + (y' - y) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial s \partial s'} \right] \\ \zeta = k i i' \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \cos(ss') + (z' - z) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial s \partial s'} \right] \end{array} \right. \quad (1a)$$

Désignons maintenant les trois composantes de la force qu'éprouve l'élément ds' , de la part d'un courant fini s' , par Ξds , $H ds$, $Z ds$, nous aurons pour Ξ l'équation :

$$\Xi = \int \xi ds'.$$

Pour l'intégration qui est indiquée ici, il est utile de transformer l'expression (1) donnée pour ξ dans son équivalente :

$$\xi = k i i' \left\{ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos(ss') - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} + \frac{\partial}{\partial s'} \left[(x' - x) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \right] \right\}. \quad (2)$$

Dans celle-ci, le dernier terme peut être immédiatement intégré relativement à s' , et donne simplement la différence des valeurs que prend l'expression qui se trouve dans la parenthèse carrée, pour les deux valeurs-limites de s' , que nous nommerons s'_0 et s'_1 ;

nous désignerons ces valeurs en posant les indices 0 et 1 à côté de l'expression. Nous obtenons ainsi l'équation :

$$\Xi = k i i' \left\{ \int \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos (ss') - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{dx'}{ds'} \right] ds' + \left[(x' - x) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \right]_1 - \left[(x' - x) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \right]_0 \right\}. \quad (3)$$

Si nous admettons, que le courant s' soit un courant *fermé*, les valeurs-limites s'_0 et s'_1 du circuit se rapportent à un seul et même point de l'espace, et les deux valeurs, dont la différence se présente dans l'équation précédente, sont égales entre elles et s'entredétruisent. Il reste donc seulement le terme qui contient l'intégrale non encore effectuée. Ce que nous avons dit de la quantité Ξ est naturellement applicable aux quantités H et Z, et on obtient par suite, pour déterminer les trois composantes de la force exercée par un courant fermé sur un élément de courant, les équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Xi = k i i' \int \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos (ss') - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{dx'}{ds'} \right] ds' \\ H = k i i' \int \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \cos (ss') - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{dy'}{ds'} \right] ds' \\ Z = k i i' \int \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \cos (ss') - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{dz'}{ds'} \right] ds'. \end{array} \right. \quad (4)$$

Quant au degré de certitude des formules ci-dessus, on doit dire que les formules qui se rapportent à la force exercée par un élément de courant sur un autre, sont entachées d'une incertitude notable. L'hypothèse faite pour les déduire, savoir que la force ne peut être qu'une attraction ou une répulsion, et doit par suite agir dans la direction de la ligne de jonction des deux éléments, cette hypothèse n'est justifiée par rien, ainsi que H. Grassmann l'a déjà fait ressortir, en 1845, dans son beau Mémoire¹. Pour deux *points*, on peut, en tout cas, admettre d'avance que les forces qu'ils exercent l'un sur l'autre, indépendamment de leurs mouvements possibles, ne peuvent avoir que la direction de la ligne de jonction puisque, pour deux points, si l'on fait abstraction de leurs mouvements, il n'existe aucune autre direction marquée. Au contraire, pour deux éléments de courant, les directions des deux éléments sont également des directions marquées, et il n'est guère à prévoir pourquoi les directions des forces doivent être indépendantes des directions des éléments de courant.

C'est pourquoi on ne peut considérer comme démontrée l'exactitude des équations (1) et (1_a) qui déterminent la force exercée par un élément de courant sur un autre élément. La même chose est applicable à l'équation (3) qui se rapporte à la force exercée sur un élément de courant par un courant non fermé. Au contraire, les équations (4), qui déterminent la force exercée par un courant *fermé* sur un élément de courant sont accessibles à la vérification expérimentale, et peuvent être regardées comme suffisamment confirmées par l'expérience, pour être considérées comme certaines. C'est pourquoi nous les prendrons comme base des développements suivants.

1. *Ann. de Pogg.*, t. 64, p. 1.

§ 2.

Transformation des équations précédentes.

On peut encore donner aux équations (4), d'autres formes commodes pour les applications ultérieures. Nous avons les expressions suivantes pour $\cos (ss')$

et $\frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{r}$:

$$\cos (ss') = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial y'}{\partial s'} + \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial z'}{\partial s'}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial s}$$

Si l'on substitue ces expressions dans les équations (4), deux termes s'entredétruisent dans chacune d'elles sous le signe d'intégration, et les autres peuvent se grouper comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Xi = kii' \left[\frac{\partial y}{\partial s} \int \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \frac{\partial y'}{\partial s'} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) ds' - \frac{\partial z}{\partial s} \int \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \frac{\partial z'}{\partial s'} \right) ds' \right] \\ \text{H} = kii' \left[\frac{\partial z}{\partial s} \int \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} \frac{\partial z'}{\partial s'} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \frac{\partial y'}{\partial s'} \right) ds' - \frac{\partial x}{\partial s} \int \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \frac{\partial y'}{\partial s'} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) ds' \right] \\ \text{Z} = kii' \left[\frac{\partial x}{\partial s} \int \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \frac{\partial z'}{\partial s'} \right) ds' - \frac{\partial y}{\partial s} \int \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} \frac{\partial z'}{\partial s'} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \frac{\partial y'}{\partial s'} \right) ds' \right] \end{array} \right. \quad (5)$$

Dans les six intégrales qui se présentent ici, il y a trois fois deux d'entre elles qui sont égales, de sorte qu'il ne reste que trois intégrales différentes. Pour abrégé, nous introduirons, d'après Ampère, des notations simples pour ces intégrales, multipliées par ki' , en posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = ki' \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{\partial z'}{\partial s'} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{\partial y'}{\partial s'} \right) ds' \\ B = ki' \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{\partial x'}{\partial s'} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial z'}{\partial s'} \right) ds' \\ C = ki' \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial y'}{\partial s'} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) ds'. \end{array} \right. \quad (6)$$

Puisque maintenant en vertu de l'équation :

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2},$$

on doit poser :

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{x - x'}{r^3}; \quad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} = -\frac{y - y'}{r^3}; \quad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} = -\frac{z - z'}{r^3},$$

on peut aussi écrire les équations précédentes :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = ki' \int \left(\frac{z - z'}{r^3} \frac{\partial y'}{\partial s'} - \frac{y - y'}{r^3} \frac{\partial z'}{\partial s'} \right) ds' \\ B = ki' \int \left(\frac{x - x'}{r^3} \frac{\partial z'}{\partial s'} - \frac{z - z'}{r^3} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) ds' \\ C = ki' \int \left(\frac{y - y'}{r^3} \frac{\partial x'}{\partial s'} - \frac{x - x'}{r^3} \frac{\partial y'}{\partial s'} \right) ds'. \end{array} \right. \quad (6a)$$

Par l'introduction de ces notations, les équations (5) prennent la forme simple suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Xi = i \left(C \frac{\partial y}{\partial s} - B \frac{\partial z}{\partial s} \right) \\ H = i \left(A \frac{\partial z}{\partial s} - C \frac{\partial x}{\partial s} \right) \\ Z = i \left(B \frac{\partial x}{\partial s} - A \frac{\partial y}{\partial s} \right). \end{array} \right. \quad (7)$$

§ 3.

Réduction des trois quantités A, B, C, à une même quantité.

Dans l'hypothèse que nous avons faite, les trois quantités A, B et C peuvent se ramener à une quantité unique, dont elles sont les coefficients différentiels partiels en x , y et z , pris négativement. On parvient le plus aisément à cette quantité, en utilisant une équation de transformation connue en géométrie analytique, équation que je ne démontrerai pas, mais que je citerai simplement.

Soit donnée une surface limitée par une courbe fermée. Soit ds un élément de la courbe et soit $d\omega$ un élément de la surface. Désignons par dn un élément de la normale élevée sur l'élément de surface $d\omega$, dn étant compté comme positif d'un côté, et comme négatif de l'autre côté de la surface. Le sens de

la normale, dans lequel nous comptons dn comme positif, dépend de la direction de circulation relative à la courbe fermée, dans laquelle nous comptons ds comme positif; de telle sorte qu'une circulation, ayant lieu dans la courbe dans le sens positif, étant observée du côté positif de la normale, apparaît comme une rotation positive, c'est-à-dire apparaît de la même manière que dans le plan des xy , lorsqu'on observe du côté z positif, une rotation allant de l'axe x positif vers l'axe y positif. Pour fixer plus complètement les idées, nous ferons encore une hypothèse sur le sens positif des axes des coordonnées; nous les choisirons de telle sorte que la rotation ci-dessus mentionnée du plan des xy allant de l'axe x positif vers l'axe y positif et vue des z positifs, apparaisse comme une rotation à gauche, laquelle est opposée à la rotation de l'aiguille d'une montre. Représentons ensuite par L , M et N trois fonctions de x , y , z ; alors nous aurons l'équation suivante :

$$\int \left(L \frac{dx}{ds} + M \frac{dy}{ds} + N \frac{dz}{ds} \right) ds \quad (8)$$

$$= \int \left[\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \right) \frac{dx}{dn} + \left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \frac{dy}{dn} + \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \right) \frac{dz}{dn} \right] d\omega,$$

où la première intégrale s'étend à la courbe fermée entière, et la deuxième à la surface limitée par la courbe.

Nous appliquerons maintenant cette équation à la transformation des intégrales (6_a) , en imaginant une surface quelconque menée par la courbe de courant s' . Puisque, dans (6_a) , les quantités relatives au circuit s' sont désignées par les lettres avec accents,

il est utile de faire de même pour les quantités qui se rapportent à la surface menée par s' ; nous placerons donc des accents à toutes les quantités qui se présentent dans l'équation (8). Pour appliquer d'abord l'équation ainsi modifiée à la première des équations (6a), posons :

$$L' = 0; M' = \frac{z - z'}{r^3}; N' = -\frac{y - y'}{r^3};$$

par là, (8) devient :

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{z - z'}{r^3} \frac{\partial y'}{\partial s'} - \frac{y - y'}{r^3} \frac{\partial z'}{\partial s'} \right) ds' \quad (9) \\ &= \int \left\{ \left[-\frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{y - y'}{r^3} \right) - \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{z - z'}{r^3} \right) \right] \frac{\partial x'}{\partial n'} + \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{y - y'}{r^3} \right) \frac{\partial y'}{\partial n'} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{z - z'}{r^3} \right) \frac{\partial z'}{\partial n'} \right\} d\omega'. \end{aligned}$$

Le second membre de cette équation devient lorsqu'on a effectué les différentiations indiquées :

$$\begin{aligned} & \int \left[\left(3 \frac{(x - x')^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) \frac{\partial x'}{\partial n'} + 3 \frac{(x - x')(y - y')}{r^5} \frac{\partial y'}{\partial n'} \right. \\ & \quad \left. + 3 \frac{(x - x')(z - z')}{r^5} \frac{\partial z'}{\partial n'} \right] d\omega', \end{aligned}$$

ce qu'on peut aussi écrire :

$$- \int \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial x} \frac{1}{r} \frac{\partial x'}{\partial n'} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{1}{r} \frac{\partial y'}{\partial n'} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \frac{1}{r} \frac{\partial z'}{\partial n'} \right) d\omega'$$

ou enfin :

$$- \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{r} d\omega'.$$

On obtient des expressions correspondantes, si l'on applique l'équation (8) aux deux dernières des équations (6 a). Si l'on substitue ces expressions aux intégrales contenues dans (6 a), il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = - k i' \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n'} d\omega' \\ B = - k i' \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n'} d\omega' \\ C = - k i' \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n'} d\omega'. \end{array} \right. \quad (10)$$

D'après ceci, $k i' \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n'} d\omega'$ est la quantité mentionnée au commencement de ce paragraphe, dont les coefficients différentiels partiels pris négativement représentent les quantités A, B et C.

§ 4.

**La force magnétique et la fonction potentielle magnétique
d'un courant fermé.**

Nous n'avons déduit jusqu'ici que les expressions mathématiques des quantités A , B et C ; nous y relierons maintenant une certaine manière de voir, qui est très commode pour des études de physique.

Imaginons que A , B et C soient les composantes d'une force exercée au point (x, y, z) par le courant fermé s' ; puisqu'une force agit sur quelque chose, nous nous figurerons que la force est exercée sur l'unité d'un certain agent qui se trouve au point (x, y, z) ; nous nommerons cet agent : du magnétisme, en ne désignant préalablement sous ce nom que quelque chose d'hypothétique commode pour nos considérations, mais qui n'a pas besoin d'exister réellement. En introduisant cet agent, nous pouvons nommer la force dont les composantes sont A , B et C la *force magnétique* du courant fermé s' .

Ensuite l'expression, qui se présente dans les équations (10) et dont les coefficients différentiels négatifs représentent les composantes A , B et C de la force, est l'intégrale du coefficient différentiel de $\frac{1}{r}$ par rapport à n' ;

cette circonstance permet de remplacer le courant fermé exerçant la force par une conception caractéristique, déterminée seulement pour les considérations mathématiques.

Nous imaginerons qu'il y ait, comme pour l'électricité, deux espèces différentes de l'agent, que nous avons nommé magnétisme, qui se comportent de telle sorte que deux quantités d'une même espèce se repoussent, et que deux quantités d'espèces différentes s'attirent. En concordance avec la dénomination employée pour l'électricité, on peut nommer les deux espèces de magnétisme : magnétisme positif et magnétisme négatif, ou encore, conformément à l'usage provenant d'autres raisons : magnétisme Nord et magnétisme Sud. Nous admettons que la force avec laquelle deux quantités se repoussent ou s'attirent est inversement proportionnelle au carré de la distance, et, quant à la grandeur de la force, nous admettrons que k soit la force avec laquelle deux unités de magnétisme positif se repoussent à l'unité de distance.

Revenons maintenant à la surface considérée au paragraphe précédent et menée par la courbe fermée du courant, et imaginons encore à côté d'elle, du côté où la normale est comptée comme positive, une seconde surface parallèle, qui n'en soit éloignée que d'une distance infiniment petite ϵ . Nous imaginons que la première surface est couverte de magnétisme négatif et la seconde de magnétisme positif et ce, de la manière suivante. Sur la première, la densité superficielle est constante et égale à $-\frac{i'}{\epsilon}$, de sorte que la quantité $-\frac{i'}{\epsilon} d\omega'$ se trouve sur l'élément de surface $d\omega'$. Considérant maintenant l'élément de la seconde surface situé normalement en face de celui-là, il se trouvera sur cet

élément une quantité égale de magnétisme positif, et la même chose a lieu pour deux autres éléments quelconques situés normalement en face l'un de l'autre, de sorte que la seconde surface renferme tout autant de magnétisme positif que la première de négatif¹.

Considérons maintenant d'abord les deux quantités de magnétisme infiniment petites, qui se trouvent sur l'élément de surface $d\omega'$ et sur l'élément situé normalement en face sur l'autre surface, savoir les quantités $-\frac{i'}{\varepsilon}d\omega'$ et $+\frac{i'}{\varepsilon}d\omega'$. Formons la fonction potentielle au point (x, y, z) pour ces deux quantités. Conformément à nos notations antérieures, r représente la distance de l'élément $d\omega'$ au point (x, y, z) , et soit r_1 la distance de l'élément en face au même point. Alors la fonction potentielle des deux quantités de magnétisme est :

$$-\frac{k}{r} \frac{i'}{\varepsilon} d\omega' + \frac{k}{r_1} \frac{i'}{\varepsilon} d\omega'$$

ou :

$$\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right) \frac{ki'}{\varepsilon} d\omega'.$$

Mais, puisque le second élément est distant du premier de ε dans la direction n , on peut poser :

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{r};$$

par là, l'expression précédente devient

$$ki \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{r} d\omega'.$$

1. *Note du Traducteur.* — Une telle disposition est habituellement désignée sous le nom de *feuillelet magnétique*.

Si l'on intègre cette expression pour toute la première surface, c'est-à-dire, si l'on forme l'expression :

$$ki' \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n'} d\omega',$$

celle-ci représentera la fonction potentielle, au point (x, y, z) , de toutes les quantités de magnétisme se trouvant sur les deux surfaces. Il s'en suit en outre, que les composantes de la force que ces deux quantités de magnétisme exercent sur une unité de magnétisme supposée au point (x, y, z) , sont représentées par :

$$\begin{aligned} -ki' \frac{\partial}{\partial n'} \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n'} d\omega' ; & \quad -ki' \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n'} d\omega' ; \\ & \quad -ki \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n'} d\omega'. \end{aligned}$$

Ce sont là les mêmes expressions que celles qui ont été données en (10) pour les composantes A, B, C de la force que le courant fermé s'exerce sur l'unité de magnétisme. D'après cela, par rapport à la force magnétique exercée, les deux surfaces magnétiques et le courant peuvent se remplacer mutuellement, et on peut rapporter au courant la fonction potentielle déterminée ci-dessus pour les deux surfaces magnétiques, de sorte que nous la nommerons *la fonction potentielle magnétique du courant fermé*.

Comme cette fonction peut être souvent utilisée, il est utile, d'introduire pour elle une notation simple, et nous poserons :

$$P = ki' \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n'} d\omega'. \quad (11)$$

Alors nous pouvons écrire brièvement les équations (10) :

$$A = -\frac{\partial P}{\partial x}; \quad B = -\frac{\partial P}{\partial y}; \quad C = -\frac{\partial P}{\partial z}. \quad (12)$$

Si l'on substitue ces valeurs de A, B et C dans les équations (7), il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Xi = i \left(\frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial s} - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial y}{\partial s} \right) \\ \text{H} = i \left(\frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial s} \right) \\ \text{Z} = i \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial s} \right). \end{array} \right. \quad (13)$$

Ainsi, la détermination de la force exercée par un courant fermé sur un élément de courant est ramenée à la fonction potentielle magnétique du courant.

§ 5.

**Introduction de surfaces magnétiques
pour le courant éprouvant l'action.**

Supposons maintenant, que le courant s qui subit l'action soit aussi fermé, et qu'il s'agisse de déterminer quelle action totale les forces pondéromotrices agissant sur tous ses éléments exercent sur le courant entier, le conducteur étant considéré comme rigide.

Cette action totale peut se décomposer en deux actions relatives au courant entier; l'une tend à déplacer un point quelconque relié invariablement au conducteur, et comme tel nous pouvons choisir l'origine des coordonnées, tandis que l'autre tend à produire une rotation autour de ce point; il s'agit donc de déterminer les trois composantes de la force de translation suivant les axes coordonnés et les moments de rotation autour des mêmes axes.

La composante de la force de translation dans la direction x est $\int \Xi ds$, et en vertu de (13), nous avons :

$$\int \Xi ds = i \int \left(\frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial s} - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial y}{\partial s} \right) ds. \quad (14)$$

Pour pouvoir transformer l'intégrale du second membre de cette équation en une intégrale de surface, imaginons qu'elle soit d'abord écrite sous la forme :

$$\int \left(L \frac{\partial x}{\partial s} + M \frac{\partial y}{\partial s} + N \frac{\partial z}{\partial s} \right) ds,$$

en attribuant aux lettres L, M et N, qui se présentent ici, les significations suivantes :

$$L = 0; M = -\frac{\partial P}{\partial z}; N = \frac{\partial P}{\partial y};$$

puis appliquons, à cette intégrale, l'équation de transformation (8). Nous obtenons ainsi :

$$\int \Xi ds = i \int \left[\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right) \frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial n} - \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} \frac{\partial z}{\partial n} \right] d\omega,$$

équation à laquelle nous pouvons donner la forme suivante :

$$\int \Xi ds = i \int \left[\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right) \frac{\partial x}{\partial n} - \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} \frac{\partial z}{\partial n} \right) \right] d\omega. \quad (15)$$

La quantité P qui se présente ici est la fonction potentielle dont il a été parlé dans le paragraphe précédent et qui est celle des quantités de magnétisme qui se trouvent sur la surface délimitée par le courant s et celle qui lui est infiniment voisine et parallèle. Imaginons maintenant que la surface, dont l'élément $d\omega$ se présente dans l'équation précédente, soit placée

de telle sorte qu'elle ne coupe pas les deux surfaces ci-dessus, ce qui est toujours possible, si les courbes s et s' ne sont pas entrelacées l'une avec l'autre; alors pour tous les éléments de surface $d\omega$ qui se présentent dans l'intégrale, nous avons l'équation :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0.$$

Ensuite on peut écrire :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} \frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right).$$

Par là l'équation (15) se transforme en :

$$\int \Xi ds = -i \int \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) d\omega. \quad (16)$$

On a naturellement des équations correspondantes pour les deux autres direction des coordonnées.

En ce qui concerne maintenant les moments, celui qui est relatif à l'axe x est représenté par $\int (yZ - zH) ds$, et d'après (13), on a l'équation :

$$\begin{aligned} \int (yZ - zH) ds &= i \int \left[y \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial s} \right) \right. \\ &\quad \left. - z \left(\frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial s} \right) \right] ds. \quad (17) \end{aligned}$$

Pour pouvoir transformer de nouveau l'intégrale du second membre en une intégrale de surface, nous l'écrirons sous la forme :

$$\int \left(L \frac{\partial x}{\partial s} + M \frac{\partial y}{\partial s} + N \frac{\partial z}{\partial s} \right) ds,$$

en attribuant maintenant à chacune des lettres L, M et N les significations suivantes :

$$L = - \left(y \frac{\partial P}{\partial y} + z \frac{\partial P}{\partial z} \right); \quad M = y \frac{\partial P}{\partial x}; \quad N = z \frac{\partial P}{\partial x}.$$

Si nous appliquons alors l'équation de transformation (8), et si nous transformons l'équation qui en résulte d'une manière analogue à celle ci-dessus, nous obtenons :

$$\int (yZ - zY) ds = i \int \frac{\partial}{\partial n} \left(z \frac{\partial P}{\partial y} - y \frac{\partial P}{\partial z} \right) d\omega. \quad (18)$$

On obtient naturellement des équations correspondantes pour les moments par rapport aux deux autres axes coordonnés.

On obtient les mêmes expressions que celles qui sont données par les équations (16) et (18) pour la composante suivant l'axe des x de la force de translation et pour le moment autour du même axe, si l'on introduit aussi pour le courant s , deux surfaces magnétiques, en procédant absolument comme cela a lieu au paragraphe précédent pour le courant s' .

On imaginera pour cela à côté de la surface passant par le courant s et dont l'élément est $d\omega$, une seconde surface parallèle et en éloignée d'une longueur infiniment petite ε ; on supposera que la première surface est couverte de magnétisme négatif et la seconde de magnétisme positif. Sur l'élément $d\omega$ de la première se trouvera la quantité de magnétisme $-\frac{i}{\varepsilon} d\omega$ et sur l'élément situé en face dans la seconde une toute aussi grande quantité de magnétisme positif, en valeur absolue.

La quantité $-\frac{i}{\varepsilon} d\omega$ qui se trouve sur $d\omega$, subit une force dont la composante suivant l'axe des x a pour expression :

$$\frac{i}{\varepsilon} \frac{\partial P}{\partial x} d\omega,$$

et dont le moment par rapport au même axe est représenté par :

$$\frac{i}{\varepsilon} \left(y \frac{\partial P}{\partial z} - z \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

La quantité de magnétisme $\frac{i}{\varepsilon} d\omega$, située sur l'élément en face du premier à la distance ε de celui-ci dans la direction n , subit une force dont la composante suivant l'axe des x et le moment par rapport au même axe ont les expressions suivantes :

$$-\frac{i}{\varepsilon} \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) \varepsilon \right] d\omega,$$

$$-\frac{i}{\varepsilon} \left[y \frac{\partial P}{\partial z} - z \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial n} \left(y \frac{\partial P}{\partial z} - z \frac{\partial P}{\partial y} \right) \varepsilon \right] d\omega.$$

Pour l'ensemble des deux éléments de surface, la composante de la force suivant l'axe des x est donc représentée par :

$$-i \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) d\omega,$$

et son moment par rapport au même axe sera :

$$i \frac{\partial}{\partial n} \left(y \frac{\partial P}{\partial z} - y' \frac{\partial P}{\partial z'} \right) d\omega.$$

Par l'intégration de ces deux expressions on obtient exactement les expressions (16) et (18), et il en résulte qu'au point de vue de la force pondéromotrice qu'il éprouve, le courant fermé s peut être remplacé par un couple de surfaces magnétiques, tout comme le courant s' , au point de vue de la force qu'il exerce.

§ 6.

Le potentiel magnétique de deux courants fermés l'un sur l'autre.

L'action totale que subit le feuillet magnétique¹ représentant le courant s , de la part du feuillet magnétique s' , se détermine le plus commodément en formant d'abord le potentiel de l'un des feuillets sur l'autre, et en recherchant ensuite la variation qu'éprouve ce potentiel lorsque le feuillet représentant le courant s fait un mouvement infiniment petit quelconque.

On déduit très facilement ce potentiel de la fonction potentielle P , déjà déterminée, du feuillet représentant

1. *N. du T.* On désigne habituellement sous le nom de *feuillet magnétique* un couple de surfaces magnétiques tel que celui que nous avons rencontré jusqu'ici dans cette théorie.

le courant s' . Le potentiel de ce feuillet sur la surface magnétique négative appartenant à l'autre feuillet est :

$$- \int P \frac{i}{\varepsilon} d\omega,$$

et le potentiel sur la surface magnétique positive :

$$\int \left(P + \frac{\partial P}{\partial n} \right) \frac{i}{\varepsilon} d\omega.$$

De là, il résulte pour le potentiel de l'ensemble des deux surfaces, potentiel que nous nommerons Q :

$$Q = i \int \frac{\partial P}{\partial n} d\omega. \quad (19)$$

Substituant à P la valeur (11), il vient :

$$Q = kii' \int d\omega \frac{\partial}{\partial n} \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n'} d\omega',$$

ou, autrement :

$$Q = kii' \iint \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial n \partial n'} d\omega d\omega'. \quad (20)$$

Cette quantité, qui représente, d'après la manière dont elle a été déduite, le potentiel des deux feuillets l'un sur l'autre, peut être appelée *le potentiel magnétique des deux courants fermés l'un sur l'autre*, puisque les feuillets peuvent, par leurs actions mutuelles, remplacer les actions mutuelles des deux courants fermés.

On peut encore donner à ce potentiel d'autres formes, dans lesquelles les intégrations se rapportent directement aux deux circuits.

Nous partirons pour cela de l'expression suivante :

$$\int \int \frac{1}{r} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial y'}{\partial s'} + \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial z'}{\partial s'} \right) ds ds',$$

à laquelle nous appliquerons deux fois de suite l'équation de transformation (8), pour transformer les intégrales relatives à des lignes en intégrales relatives à des surfaces.

D'abord, nous l'écrirons sous la forme :

$$\int ds' \int \frac{1}{r} \left(\frac{\partial x'}{\partial s'} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial y'}{\partial s'} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial z'}{\partial s'} \cdot \frac{\partial z}{\partial s} \right) ds,$$

et nous obtiendrons, en vertu de (8) :

$$\int ds' \int \left[\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \cdot \frac{\partial z'}{\partial s'} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{\partial y'}{\partial s'} \right) \frac{\partial x}{\partial n} + \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{\partial x'}{\partial s'} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial z'}{\partial s'} \right) \frac{\partial y}{\partial n} + \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial y'}{\partial s'} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \frac{\partial z}{\partial n} \right] d\omega.$$

Donnons maintenant à cette expression la forme suivante :

$$\int d\omega \int \left[\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{\partial y}{\partial n} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial n} \right) \frac{\partial x'}{\partial s'} + \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial n} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial n} \right) \frac{\partial y'}{\partial s'} + \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial n} \right) \frac{\partial z'}{\partial s'} \right] ds',$$

et appliquons une seconde fois l'équation de transformation (8) ; nous obtenons ainsi :

$$\int d\omega \int \left[\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial y'} \frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y'} \frac{\partial y}{\partial n} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z'} \frac{\partial z}{\partial n} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \partial z'} \frac{\partial x}{\partial n} \right) \frac{\partial x'}{\partial n'} \right. \\ + \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \partial z'} \frac{\partial y}{\partial n} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z'} \frac{\partial z}{\partial n} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial x'} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial x'} \frac{\partial y}{\partial n} \right) \frac{\partial y'}{\partial n'} \\ \left. + \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial x'} \frac{\partial z}{\partial n} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \partial x'} \frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \partial y'} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial y'} \frac{\partial z}{\partial n} \right) \frac{\partial z'}{\partial n'} \right] d\omega'.$$

Cette expression peut être considérablement simplifiée.

Nous porterons d'abord notre attention sur le facteur de $\frac{\partial x'}{\partial n'}$, que nous pouvons écrire comme suit, en ajoutant

et retranchant le terme $\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial x'} \frac{\partial x}{\partial n}$

$$\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial x'} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial y'} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \partial z'} \right) \frac{\partial x}{\partial n} \\ - \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial x'} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y'} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z'} \frac{\partial z}{\partial n} \right).$$

Maintenant il est à remarquer que, dans la quantité $\frac{1}{r}$, les coordonnées x, y, z, x', y', z' se présentent seulement dans les combinaisons $x - x', y - y'$ et $z - z'$,

et que, par suite, on peut remplacer tout coefficient différentiel relatif à une des quantités avec accent par le coefficient différentiel relatif à la quantité correspondante sans accent, pris en signe contraire, et réciproquement, de sorte qu'on peut, par exemple, écrire :

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial x'} = - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x'^2} \text{ et } \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y'} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x' \partial y}.$$

D'après cela, on peut donner à l'expression ci-dessus la forme suivante :

$$- \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) \frac{\partial x}{\partial n} - \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x' \partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x' \partial y} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x' \partial z} \frac{\partial z}{\partial n} \right).$$

Des deux termes de cette expression, le premier est nul et le second peut s'écrire :

$$- \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n} \right);$$

ce qui revient à :

$$- \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right).$$

De même, on peut mettre les facteurs de $\frac{\partial y'}{\partial n'}$ et $\frac{\partial z'}{\partial n'}$, sous les formes simples correspondantes :

$$- \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) \text{ et } - \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right),$$

et l'intégrale double totale ci-dessus prend par suite la forme :

$$-\int d\omega \int \left[\frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) \frac{\partial x'}{\partial n'} + \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) \frac{\partial y'}{\partial n'} + \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) \frac{\partial z'}{\partial n'} \right] d\omega',$$

qui peut s'écrire simplement :

$$-\int d\omega \int \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial n \partial n'} d\omega',$$

ou encore :

$$-\iint \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial n \partial n'} d\omega d\omega'.$$

Par suite, comme résultat de la transformation entreprise, nous obtenons l'équation :

$$\iint \frac{1}{r} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial y'}{\partial s'} + \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial z'}{\partial s'} \right) ds ds' = - \iint \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial n \partial n'} d\omega d\omega'.$$

En appliquant cette équation à (20), il vient :

$$Q = -kii' \iint \frac{1}{r} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial y'}{\partial s'} + \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial z'}{\partial s'} \right) ds ds'. \quad (21)$$

Or, si l'on désigne par (ss') l'angle compris entre les deux éléments de courants ds et ds' , on a :

$$\cos (ss') = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial y'}{\partial s'} + \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial z'}{\partial s'} ;$$

de plus l'équation

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

donne :

$$\frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} = -2 \left(\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial y'}{\partial s'} + \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial z'}{\partial s'} \right),$$

et l'on peut, par suite, mettre l'équation (21) sous les formes suivantes :

$$Q = - kii' \iint \frac{\cos (ss')}{r} ds ds', \quad (21_a)$$

$$Q = \frac{1}{2} kii' \iint \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} ds ds'. \quad (21_b)$$

Si l'on pose dans la dernière :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} = \frac{2}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} + 2 \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'},$$

en faisant attention que l'intégrale du dernier terme est nulle pour des courants fermés, on obtient :

$$Q = kii' \iint \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} ds ds'. \quad (22)$$

Si l'on désigne ensuite par (rs) et (rs') les angles compris entre la direction de r , comptée positivement dans le sens de ds' vers ds , et les directions de ds et ds' , on a :

$$\cos (rs) = \frac{\partial r}{\partial s} \text{ et } \cos (rs') = - \frac{\partial r}{\partial s'},$$

ce qui permet de donner à l'équation (22) la forme suivante :

$$Q = - kii' \int \int \frac{\cos (rs) \cos (rs')}{r} ds ds'. \quad (22_a)$$

Les expressions (21), (21_a), (21_b), (22) et (22_a) sont celles que F. Neumann a établies pour le potentiel magnétique de deux courants fermés l'un sur l'autre.

Comme il sera utile, par la suite, de pouvoir désigner brièvement le facteur qui, dans l'expression du potentiel, est indépendant des intensités des courants, et qui, sauf la quantité k , dépend seulement de la configuration des deux conducteurs, nous introduirons la notation

$$w = k \int \int \frac{\cos (ss')}{r} ds ds'. \quad (23)$$

Alors nous pourrons écrire très simplement l'équation qui sert à la détermination du potentiel magnétique :

$$Q = - ii'w. \quad (24)$$

Si l'on imagine maintenant que le courant s fasse un mouvement quelconque sous l'influence des forces pondéromotrices que ses éléments subissent de la part

du courant s' , ces forces pondéromotrices feront par là un travail, qui peut se représenter par la diminution du potentiel magnétique. Cela a aussi lieu dans le cas inverse, où le courant s' se meut sous l'influence des forces exercées sur ses éléments par le courant s , et de même pour le cas plus général, où les deux courants se meuvent sous l'influence des forces pondéromotrices qu'ils exercent mutuellement l'un sur l'autre. Ici, on doit entendre par diminution du potentiel uniquement celle qui est causée par les changements de position des conducteurs, et non celle qui aurait lieu en même temps, comme cela est possible, par le changement des intensités de courant. Si nous désignons donc par A_p le travail fait par les forces pondéromotrices, et par dA_p l'accroissement de ce travail qui a lieu pendant un élément de temps dt , nous ne pouvons pas poser généralement :

$$dA_p = - dQ,$$

mais nous avons à former l'équation suivante :

$$dA_p = i' dw. \quad (25)$$

§ 7.

**L'induction et le potentiel électrodynamique
de deux courants fermés l'un sur l'autre.**

L'induction a été, comme on sait, traitée d'une manière très complète par F. Neumann¹; nous nous bornerons ici à la discussion du cas où les deux conducteurs sont fermés, parce que la loi posée par Neumann, pour ce cas, peut être considérée sans aucun doute comme exacte.

Imaginons donc deux conducteurs fermés s et s' , et supposons qu'un courant d'intensité i circule dans s' . Si maintenant les deux conducteurs que nous considérerons, pour plus de simplicité, comme rigides, se meuvent d'une façon quelconque, et si, en même temps, l'intensité i se modifie, on peut se demander quelle est la force électromotrice induite dans s . Nous pourrions appliquer ici la loi suivante de Neumann : *La force électromotrice induite dans le conducteur s est égale au coefficient différentiel, pris par rapport au temps, du potentiel magnétique du courant i , circulant dans le conducteur s' , sur un courant fictif dans le conducteur s , courant d'une certaine intensité provisoirement nommée c .*

1. *Abhandlungen der Berliner Akademie*, 1845 et 1847.

Cette constante c , laissée provisoirement indéterminée, est nommée la *constante d'induction*.

Le potentiel magnétique des courants i' et c l'un sur l'autre est représenté par $-ci'w$, d'après l'équation (24). En vertu de la loi précédente, en désignant par E la force électromotrice induite dans s , on aura donc :

$$E = -c \frac{d(i'w)}{dt}. \quad (26)$$

Si maintenant le conducteur s , pour lequel, dans ce qui précède, on considère seulement un courant fictif d'intensité donnée c , est aussi parcouru par un courant réel, qui peut être variable avec le temps, il y aura, dans le conducteur s' , une force électromotrice induite, que nous désignerons par E' , et qui sera de même représentée par :

$$E' = -c \frac{d(iw)}{dt}. \quad (27)$$

La force électromotrice induite étant déterminée, le travail fait par cette force dans l'élément de temps dt peut être facilement exprimé. Il suffit pour cela de multiplier la force électromotrice induite, d'abord par l'intensité du courant dans le conducteur en question, puis par l'élément de temps ; ainsi nous avons à former pour le conducteur s le produit $Eidt$, et pour le conducteur s' le produit $E'i'dt$, produits dans lesquels on peut substituer à E et E' leurs valeurs. En désignant par dA_e le travail fait, pendant le temps dt , par les forces électromotrices dans l'ensemble des deux conducteurs, on obtient ainsi l'équation :

$$dA_e = -ic \frac{d(i'w)}{dt} dt - i'c \frac{d(iw)}{dt} dt,$$

ou plus simplement :

$$dA_e = -c [id (i'w) + i'd (iw)] \quad (28)$$

On peut aussi donner à l'expression qui se trouve dans la parenthèse carrée une forme telle qu'un de ses termes soit une différentielle exacte, savoir :

$$dA_e = -c [d (ii'w) + ii'dw]. \quad (29)$$

Nous ferons encore la somme de ce travail effectué par les forces électromotrices, et de celui qui est fait par les forces pondéromotrices et qui est déterminé par (25). Appelons simplement A le travail total, de sorte que :

$$dA_p + dA_e = dA ;$$

alors il vient :

$$dA = ii'dw - c [d (ii'w) + ii'dw],$$

ou autrement :

$$dA = -cd (ii'w) + (1 - c) ii'dw. \quad (30)$$

Si nous admettons maintenant que le principe de la conservation de l'énergie est applicable aux courants électriques et au travail qu'ils effectuent, il faudra que le travail fait, pendant l'élément de temps par les forces pondéromotrices et électromotrices ensemble, puisse se représenter par la différentielle d'une certaine quantité qui ne dépend que de l'état actuel des courants, c'est-à-dire, de leurs positions et de leurs intensités. Conformément au procédé employé

dans l'électrostatique et dans le magnétisme, nous choisirons une dénomination et une notation particulières pour cette quantité dont la différentielle *négative* représente le travail. Nous appellerons cette quantité le *potentiel électrodynamique* des deux courants l'un sur l'autre, et nous la représenterons par W , de sorte que nous poserons :

$$dA = - dW. \quad (31)$$

Comparant cette équation avec l'équation (30), nous voyons que, dans le second membre de la dernière, le dernier terme, savoir $(1 - c) i' dw$, qui n'est pas une différentielle exacte, doit disparaître ; d'où il suit que la constante d'induction doit avoir la valeur 1 dans nos équations, où nous employons la mesure *mécanique* pour les intensités de courant. Le terme qui reste alors seul dans le second membre de (30) doit donc concorder avec $- dW$, et nous obtenons par suite, pour déterminer le potentiel électrodynamique des deux courants l'un sur l'autre, l'équation :

$$W = i' w. \quad (32)$$

Ainsi, le potentiel électrodynamique des deux courants l'un sur l'autre est égal et de signe contraire au potentiel *magnétique* des deux courants l'un sur l'autre, celui qui est désigné ci-dessus par Q et qui est déterminé par l'équation (24).

CHAPITRE IX.

DÉDUCTION D'UN NOUVEAU PRINCIPE D'ÉLECTRODYNAMIQUE.

§ 1.

Généralisation de la loi des actions électriques et différentes manières de voir sur l'électricité dynamique.

Les forces pondéromotrices et électromotrices, dont il a été question dans le chapitre précédent, dépendent du mouvement de l'électricité, et l'on doit en conclure que des particules électriques en mouvement agissent autrement les unes sur les autres que des particules au repos. La question est de savoir si l'on peut établir, pour les forces qu'exercent l'une sur l'autre deux particules d'électricité en mouvement, une loi générale, qui explique toutes les actions électrostatiques et électrodynamiques, sans qu'elle soit en contradiction avec aucun phénomène connu.

Le premier qui ait considéré les actions électriques à ce point de vue général est W. Weber qui, comme on sait, a établi, pour les forces que deux particules électriques en mouvement exercent l'une sur l'autre, une loi fondamentale qui doit suffire à l'explication de toutes les actions électriques. Soient e et e' deux particules d'électricité supposées concentrées chacune en un point, et r leur distance mutuelle au temps t ; l'action exercée par ces particules l'une sur l'autre consiste, d'après Weber, en une répulsion mesurée par l'expression :

$$\frac{ee'}{r^2} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{2}{c^2} r \frac{d^2r}{dt^2} \right],$$

dans laquelle c représente une constante.

Pour la déduction de cette formule, Weber est parti de cette idée que, dans un courant galvanique, des quantités égales d'électricité positive et d'électricité négative se meuvent en sens contraires, avec des vitesses égales, dans chaque élément conducteur. Cette idée est si compliquée, que déjà beaucoup de physiiciens l'ont rejetée. Aussi longtemps, en effet, qu'il n'y a pas de motifs impérieux d'accepter l'hypothèse de ce double mouvement, il n'est pas permis d'abandonner cette idée plus simple, qu'un courant consiste dans le mouvement d'un seul fluide, et l'on doit chercher à en déduire l'explication des effets du courant galvanique.

Cette idée, qui a déjà été exprimée souvent et depuis longtemps, a reçu récemment, de M. C. Neumann¹.

1. *Berichte der k. sächsischen Gesellschaft der Wiss., Math.-phys. Classe*, 1871; p. 394 et 417.

une forme plus déterminée; ce dernier ajoute, à ce sujet, que ses réflexions concordent complètement avec celles que Riemann a déjà exprimées en 1854, dans la trente et unième réunion des naturalistes allemands. M. Neumann admet qu'un conducteur métallique renferme, à la vérité, dans chaque élément de volume, de l'électricité positive et de l'électricité négative, mais que la première seule est mobile, en ce sens qu'elle peut produire un courant dans le conducteur, tandis que la dernière est invariablement liée aux atomes pondérables.

Quant au point de savoir s'il est absolument nécessaire d'admettre, à côté de l'électricité positive mobile, une électricité négative liée aux atomes pondérables, ou bien si les forces attribuées à cette dernière électricité peuvent s'expliquer d'une autre manière, il y aurait encore peut-être différentes considérations à faire valoir. Toutefois, en traitant le sujet au point de vue mathématique, puisque les forces s'exercent absolument de la même manière qu'elles le feraient s'il y avait une électricité négative liée aux atomes, on peut admettre qu'il en est ainsi, sans pour cela rien décider quant à son existence réelle. C'est dans ce sens que je prendrai pour base des développements suivants cette manière de voir, telle qu'elle a été formulée par M. Neumann.

§ 2.

**Contradiction entre le principe de Weber
et l'hypothèse d'une seule électricité mobile
dans un conducteur fixe.**

Posons-nous d'abord la question de savoir si le principe de Weber n'est pas en contradiction avec l'idée qu'il n'y a qu'une seule électricité qui puisse parcourir un conducteur fixe. Nous choisirons, à cette fin, le fait expérimental *qu'un courant galvanique fermé et constant, qui se trouve dans un conducteur au repos, n'exerce aucune force motrice sur de l'électricité en repos*, et nous rechercherons si le principe de Weber conduit encore à cette proposition, lorsque l'on ne considère que l'une des deux électricités comme mobile.

Imaginons, au point x, y, z , une certaine quantité d'électricité, par exemple, *une unité* d'électricité positive, et au point x', y', z' un élément ds' d'un courant galvanique. Désignons par $h'ds'$ la quantité d'électricité positive en mouvement dans celui-ci. Cette quantité exerce, d'après Weber, sur l'unité d'électricité au repos, une répulsion qui est exprimée par :

$$\frac{h'ds'}{r^2} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{2}{c^2} r \frac{d^2r}{dt^2} \right],$$

expression qui, pour une valeur négative, indique naturellement une attraction. Dans le cas actuel, où la quantité r ne varie que par le mouvement de l'électricité qui se trouve dans l'élément de conducteur, nous pourrions poser :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial s'} \frac{ds'}{dt},$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{\partial^2 r}{\partial s'^2} \left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 + \frac{\partial r}{\partial s'} \frac{d^2s'}{dt^2},$$

et, dans cette dernière formule, nous devons faire, pour un courant constant, $\frac{d^2s'}{dt^2} = 0$, si nous supposons le conducteur du courant homogène et partout de même section, de sorte que h' a, pour toutes ses parties, une seule et même valeur. De cette manière, l'expression de la répulsion devient :

$$\frac{h' ds'}{r^2} \left\{ 1 + \frac{1}{c^2} \left[- \left(\frac{\partial r}{\partial s'}\right)^2 + 2r \frac{\partial^2 r}{\partial s'^2} \right] \left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 \right\}.$$

Si l'on admet d'abord, avec Weber, que, dans l'élément de conducteur ds' , il se meut une aussi grande quantité d'électricité négative en sens contraire, avec la même vitesse, on devra, pour obtenir la répulsion que celle-ci exercerait sur l'unité d'électricité au repos, affecter du signe moins toute l'expression précédente, et en outre changer le signe du coefficient différentiel $\frac{ds'}{dt}$. Mais, comme ce coefficient différentiel n'entre qu'au carré, son changement de signe n'apportera aucune modification dans l'expression. L'action exercée par l'électricité négative serait donc égale et de signe contraire

à celle qui est exercée par l'électricité positive, de sorte que ces deux forces se détruisent, et que l'élément de courant n'exercerait aucune action sur l'unité d'électricité au repos. Il en résulte donc que le principe de Weber, combiné avec l'idée de Weber sur le double mouvement de l'électricité, concorde avec la proposition expérimentale énoncée plus haut, puisque la force est nulle, non seulement pour un courant fermé, mais encore pour tout élément de celui-ci en particulier.

Adoptons maintenant l'autre hypothèse, à savoir que l'électricité négative, qui se trouve dans le conducteur, ne s'écoule pas, mais soit invariablement fixée aux atomes pondérables. Alors l'action qu'elle exerce sur l'unité d'électricité au repos est simplement représentée par l'expression $-\frac{h'ds'}{r^2}$, donnée en électrostatique.

Il s'ensuit que les deux forces ne se détruisent pas dans ce cas, mais qu'il reste une répulsion donnée par l'expression :

$$\frac{h'ds'}{c^2r^2} \left[- \left(\frac{\partial r}{\partial s'} \right)^2 + 2r \frac{\partial^2 r}{\partial s'^2} \right] \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2.$$

On trouvera la composante de cette force, suivant l'axe des x , en multipliant cette expression par $\frac{x-x'}{r}$, et il en résulte l'équation suivante, si l'on représente cette composante par $\frac{d\mathbf{x}}{ds'} ds'$:

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds'} ds' = \frac{h'}{c^2} \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 \frac{x-x'}{r^3} \left[- \left(\frac{\partial r}{\partial s'} \right)^2 + 2r \frac{\partial^2 r}{\partial s'^2} \right] ds'. \quad (1)$$

On doit intégrer cette équation, relativement à s' , dans toute l'étendue du courant fermé, pour obtenir.

la quantité \mathfrak{x} , c'est-à-dire la composante, suivant l'axe des x , de l'action que le courant tout entier exerce sur l'électricité au repos.

A cet effet, nous opérerons quelques transformations dans le second membre de cette équation. On peut poser :

$$\frac{x-x'}{r^{\frac{3}{2}}} = 2 \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}} \left[- \left(\frac{\partial r}{\partial s'} \right)^2 + 2r \frac{\partial^2 r}{\partial s'^2} \right] = 4 \frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s'^2}.$$

L'équation (1) devient ainsi :

$$\frac{d\mathfrak{x}}{ds'} ds' = \frac{8h'}{c^2} \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial x} \frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s'^2} ds'. \quad (2)$$

Dans celle-ci, on peut de plus poser :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial x} \frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s'^2} &= \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{\partial \sqrt{r}}{\partial x} \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s'} \right) - \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s'} \frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s' \partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{\partial \sqrt{r}}{\partial x} \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s'} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s'} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

ce qui transforme l'équation (2) en :

$$\frac{d\mathfrak{x}}{ds'} ds' = \frac{8h'}{c^2} \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{\partial \sqrt{r}}{\partial x} \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s'} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s'} \right)^2 \right] \right\} ds'. \quad (3)$$

Si l'on intègre cette équation pour un circuit fermé, le premier terme de la parenthèse, qui est un coefficient différentiel, par rapport à s' , donnera une valeur nulle. Le second terme, qui est un coefficient différentiel par rapport à x , peut être intégré sous le signe

de la différentiation, puisque la variable x est indépendante de la variable s' ; on trouvera ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= -\frac{4h'}{c^2} \left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 \frac{\partial}{\partial x} \int \left(\frac{\partial \sqrt{r'}}{\partial s'}\right)^2 ds' \\ &= -\frac{h'}{c^2} \left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{1}{r'} \left(\frac{\partial r'}{\partial s'}\right)^2 ds'. \end{aligned} \quad (4)$$

On aura des expressions analogues pour les composantes de la force, suivant les axes des y et des z .

On voit immédiatement que l'intégrale qui entre dans ces expressions n'est pas nulle, et qu'en général ses coefficients différentiels, par rapport à x , y , z , ne seront pas nuls non plus. D'après cela, un courant fermé et constant, dans un conducteur au repos, devrait exercer une action sur de l'électricité au repos; et cette action aurait un ergal, puisque ses composantes suivant les axes seraient représentées, en vertu de l'équation précédente, par les coefficients différentiels négatifs d'une quantité qui dépend des coordonnées de l'unité d'électricité au repos considérée. Le courant galvanique devrait donc, à la façon d'un corps chargé d'un excès d'électricité positive ou négative, produire une modification de la distribution de l'électricité, dans tout corps conducteur qui se trouve dans son voisinage¹. Si l'on explique le magnétisme par des courants moléculaires électriques, on trouvera qu'un aimant exerce des actions analogues sur les corps conducteurs qui l'environnent.

1. La même conclusion a déjà été tirée par M. Riecke en 1873 (*Annales de Göttingue*, 5 juillet 1873). Je ne connaissais pas cette circonstance lorsque j'ai écrit mon travail, et ne l'ai appris que pendant l'impression de celui-ci dans le *Journal de Borchardt*, par un nouveau Mémoire de M. Riecke, qui parut précisément alors (*Annales de Göttingue*, 28 juin 1876), et dans lequel le Mémoire précédent était cité.

Or de semblables actions n'ont jamais été observées, malgré les nombreuses occasions que l'on aurait eues de le faire, et, par conséquent, on doit reconnaître comme une proposition expérimentale bien établie la proposition précédente qui exprime qu'elles n'ont pas lieu ; et puisque le résultat exprimé dans l'équation (4) est contradictoire avec cette proposition, on en déduit cette conclusion *que le principe de Weber est incompatible avec l'idée que l'électricité positive seule se meut dans un courant galvanique qui circule dans un conducteur fixe.*

§ 3.

Discussion d'une loi posée par Riemann relativement à la force, et envisagée au point de vue précédent.

Tout récemment, après que ma première communication sur le principe que j'ai posé avait été publiée, il a paru un ouvrage¹ dans lequel on expose une autre loi électro-dynamique donnée par Riemann dans ses Leçons ; il sera utile, comme suite à ce qui précède, de considérer cette loi au même point de vue, c'est-à-dire de rechercher si elle est compatible avec l'hypothèse d'une seule électricité mobile dans le conducteur fixe.

1. *Schwere, Electricität und Magnetismus.* Nach den Vorlesungen von Bernhard Riemann bearbeitet von Karl Hatterdorff; Hannover, 1876

Soient, comme plus haut, e et e' deux particules d'électricité supposées concentrées chacune en un point; x, y, z et x', y', z' leurs coordonnées rectangulaires au temps t ; la composante suivant l'axe des x de la force qui s'exerce sur e est, suivant Riemann (p. 327), exprimée par :

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} = & \frac{ee'}{c^2} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{ee'}{c^2} \frac{d \left[\frac{2}{r} \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt} \right) \right]}{dt} \\ & + \frac{ee'}{c^2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} \left[\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy'}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz'}{dt} \right)^2 \right]; \quad (5) \end{aligned}$$

et les composantes suivant les autres axes sont données par des expressions analogues.

Nous allons encore déterminer, au moyen de cette équation, l'action qu'un courant galvanique fermé exerce sur une unité d'électricité au repos. Posons donc :

$$e = 1 \text{ et } \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0.$$

En outre, pour déterminer d'abord l'action exercée par l'électricité positive en mouvement dans l'élément du conducteur ds' , remplaçons e' par $h'ds'$. L'expression précédente deviendra :

$$\begin{aligned} h'ds' \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{d \left(\frac{2}{r} \frac{dx'}{dt} \right)}{dt} \right. \\ \left. + \frac{1}{c^2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} \left[\left(\frac{dx'}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt} \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned}$$

La dernière parenthèse peut se remplacer par $\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2$; et, dans le second terme de l'expression, on peut considérer x' et r comme fonctions de s' , et s' comme fonction de t ; cela fait, on devra poser $\frac{d^2s'}{dt^2} = 0$, puisque le courant est constant, et l'on aura :

$$h' ds' \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \left(\frac{2}{r} \frac{dx'}{ds'} \right)}{\partial s'} \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 + \frac{1}{c^2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 \right].$$

Partons d'abord de l'hypothèse que, dans l'élément du conducteur ds' , une même quantité d'électricité négative circule, avec la même vitesse, en sens contraire ; pour trouver la composante, suivant l'axe des x , de la force exercée par cette quantité d'électricité sur l'unité d'électricité au repos, nous n'aurons qu'à prendre l'expression précédente en signe contraire. Les deux forces se détruiront donc ; et il en résulte que, dans l'hypothèse de deux électricités qui se meuvent dans le conducteur, la loi de Riemann est d'accord avec notre proposition expérimentale.

Partons au contraire de l'hypothèse que l'électricité négative qui se trouve dans l'élément de conducteur ds' est au repos : la composante, suivant l'axe des x , de l'action qu'elle exerce sur l'unité d'électricité au repos, sera représentée par :

$$- h' ds' \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x},$$

et nous aurons, par suite, en représentant par $\frac{d\mathbf{x}}{ds'} ds'$ la composante, suivant l'axe des x , de l'action que

l'élément de courant ds' exerce sur l'unité d'électricité au repos :

$$\frac{d\mathfrak{X}}{ds'} ds' = \frac{h'}{c^2} \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 \left[- \frac{\partial \left(\frac{2}{r} \frac{dx'}{ds'} \right)}{\partial s'} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} \right] ds'. \quad (6)$$

Si nous intégrons cette équation pour un courant fermé, le premier terme du second membre donnera une valeur nulle, et il viendra :

$$\mathfrak{X} = \frac{h'}{c^2} \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 \int \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} ds'.$$

ou bien :

$$\mathfrak{X} = - \frac{h'}{c^2} \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{ds'}{r}.$$

On obtiendrait naturellement des expressions analogues pour les composantes suivant les deux autres axes.

L'intégrale précédente n'est pas nulle, et ses coefficients différentiels ne le sont généralement pas non plus. La loi de Riemann nous conduit donc au même résultat que celle de Weber, à savoir qu'un courant galvanique fermé, de même qu'un aimant, devrait exercer une action analogue à l'influence électrostatique, sur tout corps conducteur situé dans son voisinage. Et, comme ce résultat est en contradiction avec notre proposition expérimentale, nous pouvons dire également de la loi de Riemann *qu'elle est incompatible avec l'hypothèse d'une seule électricité mobile dans un conducteur fixe.*

§ 4.

**Admissibilité de certaines présuppositions
lors de la détermination des forces.**

Si maintenant nous voulons essayer de trouver un autre principe fondamental, exempt de la contradiction expérimentale ci-dessus mentionnée, nous devons d'abord nous convaincre s'il est admissible, et jusqu'à quel point, de faire certaines présuppositions relativement à la direction et à la grandeur des forces.

Weber a considéré comme évident en soi que les forces qu'exercent l'un sur l'autre deux parties d'électricité supposées concentrées en des points, ne peuvent consister qu'en des attractions ou des répulsions réciproques; qu'elles sont donc égales et opposées et qu'elles doivent agir dans la direction de la ligne de jonction des deux points. Sous ce rapport, je dois revenir sur ce que j'ai dit déjà, au § 1 du chapitre précédent, au sujet des forces exercées par deux éléments de courants l'un sur l'autre.

Si Newton a considéré, sans entrer dans plus de détails, les forces que deux points matériels exercent l'un sur l'autre indépendamment du mouvement qu'ils peuvent avoir comme étant une attraction mutuelle, et si l'on admet de même, que les forces qu'exercent l'une sur l'autre deux particules d'électricité au repos ne peuvent

consister qu'en une attraction ou répulsion réciproque, cela est parfaitement justifié ; car on ne peut certainement attribuer à deux points au repos aucune force, qui s'écarte latéralement de la ligne de jonction, puisqu'il ne se présente aucune circonstance qui distingue une direction latérale d'une autre. Mais lorsqu'il s'agit, au contraire, des forces que deux particules d'électricité exercent l'une sur l'autre à cause de leurs mouvements, il en est tout autrement. En effet, dans ce cas, outre la ligne de jonction des particules, il existe d'autres directions prédominantes, notamment les deux directions des mouvements des particules, et l'on peut très bien concevoir que ces directions exercent une influence sur les directions des forces. Si Newton avait dû poser une loi pour de telles forces qui sont causées par les mouvements des points, il n'aurait pas certes admis à priori, vu la précaution avec laquelle il évitait des hypothèses non justifiées, que les forces doivent avoir une direction déterminée indépendante des directions des mouvements.

Je ne puis, par suite, reconnaître comme un avantage la simplicité qu'a sous ce rapport la loi de force de Weber, parce que cette simplicité ne correspond pas à la nature de la chose, mais a été introduite arbitrairement par une supposition étrangère à la question.

Aussi Riemann, en recherchant sa loi de force, ne s'est-il pas astreint à la condition que les directions des forces étaient celles de la ligne de jonction des deux points. Mais il a pourtant maintenu cette autre condition que les deux forces qu'exercent les deux points l'un sur l'autre, sont égales et opposées. Par là, il arrive à ceci, que les deux forces ont une résultante nulle si on les suppose transportées en un même point d'application, ce qui concorde avec la manière de se comporter

des forces que l'on considérait habituellement autrefois, lesquelles sont indépendantes du mouvement. Mais je crois qu'on ne gagne pas grand chose par là, car, si les deux forces ne donnent pas aussi une résultante agissant suivant une direction déterminée, elles donnent pourtant un *moment de rotation*, ce qui constitue un écart essentiel avec la manière dont se comportent les forces indépendantes du mouvement. Si cependant un tel écart essentiel peut être admis sous un certain rapport, il n'y a aucune raison, d'après ma manière de voir, pour considérer comme impossible l'écart correspondant sous un autre rapport.

C'est pourquoi dans la suite nous ne ferons tout d'abord aucune hypothèse sur la direction et la grandeur des forces que deux particules d'électricité en mouvement exercent l'une sur l'autre ; nous essaierons seulement de parvenir à la détermination des forces par un raisonnement basé sur des faits expérimentaux.

§ 5.

Expressions des composantes de la force dans un système particulier de coordonnées.

Conformément à l'hypothèse que cette force dépend de la position mutuelle des particules, ainsi que des conditions de mouvement déterminées par les composantes de leur vitesse et de leur accélération, formons, pour chacune des trois composantes suivant les axes,

une expression générale qui dépende des coordonnées relatives de l'une des particules par rapport à l'autre, et des coefficients différentiels du premier et du second ordre, par rapport au temps, des coordonnées des deux particules. Nous ferons entrer provisoirement dans cette expression tous les termes possibles jusqu'au second ordre inclusivement, en entendant par là tous ceux qui proviennent d'une double différentiation par rapport au temps, et qui renferment comme facteurs, ou un coefficient différentiel du second ordre, ou deux coefficients différentiels du premier ordre.

Choisissons un système particulier de coordonnées. Soit prise, pour l'un des axes, la droite qui unit les deux points où se trouvent les particules d'électricité au temps t , comptée comme positive dans le sens de e' vers e . Soient l et l' les coordonnées, suivant cet axe, des deux particules. Les deux autres axes peuvent être pris arbitrairement, pourvu qu'ils soient perpendiculaires entre eux et au premier. Si l'on représente par m, n, m', n' les coordonnées des deux particules suivant ces axes, on devra poser, au temps t ,

$$m = n = m' = n' = 0.$$

D'après cela, les coordonnées relatives, suivant ces deux axes, $m - m'$ et $n - n'$, sont aussi nulles au temps t , et l'ordonnée relative suivant la première direction, $l - l'$, a seule une valeur assignable, qui est égale à la distance mutuelle des deux particules, et peut être, par suite, représentée par r , conformément à la notation précédente. Il résulte de là que, dans ce système de coordonnées, les fonctions des coordonnées relatives, qui entrent dans les expressions des composantes de la force, ne peuvent être fonctions que de r .

Ce système de coordonnées offre encore l'avantage d'autres simplifications; on voit immédiatement, en effet, par la manière dont les coefficients différentiels entreront dans les termes de l'expression, que certains termes ne peuvent avoir aucune influence sur la composante cherchée, et que certains couples de termes doivent avoir une influence égale.

Commençons par chercher la composante suivant l'axe des l ; représentons-la par Lee' et formons l'expression qui détermine la quantité L .

Cette expression doit d'abord renfermer un terme qui est indépendant des mouvements des particules, et qui représente la force électrostatique. Ce terme est parfaitement connu: c'est $\frac{1}{r^2}$.

Parmi les autres, considérons d'abord ceux qui ne renferment que des coefficients différentiels des coordonnées de la particule e .

Ceux qui ne renferment qu'un seul coefficient différentiel du premier ordre seront en général de la forme :

$$A \frac{dl}{dt}, \quad A' \frac{dm}{dt}, \quad A'' \frac{dn}{dt},$$

où A , A' , A'' représentent des fonctions de r ; mais, relativement aux deux derniers, nous pouvons tirer immédiatement l'une des conclusions annoncées plus haut: car le terme $A' \frac{dm}{dt}$ change de signe avec $\frac{dm}{dt}$. Or, la direction positive de l'axe des m se comporte, relativement à un point situé sur l'axe des l , absolument de la même manière que la direction négative; et, par suite, dans le cas actuel, où les deux points se trouvent sur l'axe des l , il n'y a pas de raison

pour qu'un mouvement dans un sens ait pour conséquence suivant l'axe des l , une autre force qu'un mouvement dans l'autre sens. D'après cela, ce terme doit disparaître de l'expression, c'est-à-dire qu'on doit avoir $A' = 0$. On peut conclure de même que $A'' = 0$. Des trois termes précédents, il ne reste donc que $A \frac{dl}{dt}$.

La même chose peut se dire des trois termes :

$$A_1 \frac{d^2 l}{dt^2}, \quad A'_1 \frac{d^2 m}{dt^2}, \quad A''_1 \frac{d^2 n}{dt^2},$$

dont les deux derniers doivent aussi disparaître, de sorte que le premier reste seul.

Enfin, en ce qui concerne les termes qui renferment comme facteurs les produits de deux coefficients différentiels du premier ordre, égaux ou inégaux, et dans lesquels entre par conséquent l'un des carrés ou des produits suivants :

$$\left(\frac{dl}{dt}\right)^2, \quad \left(\frac{dm}{dt}\right)^2, \quad \left(\frac{dn}{dt}\right)^2, \quad \frac{dl}{dt} \frac{dm}{dt}, \quad \frac{dl}{dt} \frac{dn}{dt}, \quad \frac{dm}{dt} \frac{dn}{dt},$$

on peut appliquer aux termes qui renferment les trois derniers produits ce qui vient d'être dit. En effet, ces produits changent de signe avec $\frac{dm}{dt}$ et $\frac{dn}{dt}$, tandis que, dans la direction des m ou dans celle des n , le côté négatif se comporte, vis-à-vis des deux autres axes, absolument de la même manière que le côté positif. Des termes qui contiendraient ces produits ne peuvent donc pas entrer dans l'expression. De plus, comme la position géométrique des axes des m et des n est

la même, relativement à l'axe des l , les carrés $\left(\frac{dm}{dt}\right)^2$ et $\left(\frac{dn}{dt}\right)^2$ doivent avoir le même coefficient. Les termes considérés donneront donc une somme de la forme

$$A'_2 \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + A_3 \left[\left(\frac{dm}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dn}{dt}\right)^2 \right],$$

que nous transformerons en :

$$A_2 \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + A_3 \left[\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dm}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dn}{dt}\right)^2 \right],$$

A_2 remplaçant la différence $A'_2 - A_3$. Mais, si nous désignons par v la vitesse de la particule e , nous aurons :

$$\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dm}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dn}{dt}\right)^2 = v^2,$$

de sorte que la somme précédente pourra s'écrire :

$$A_2 \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + A_3 v^2.$$

Si nous composons ensemble tous les termes qui ne renferment que des coefficients différentiels des coordonnées de la particule e , et que nous en représentions la somme par L_1 , il viendra :

$$L_1 = A \frac{dl}{dt} + A_1 \frac{d^2l}{dt^2} + A_2 \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + A_3 v^2. \quad (8)$$

De même, nous pourrons écrire, si nous désignons par L_2 la somme des termes qui ne renferment que

des coefficients différentiels des coordonnées de la particule e' ,

$$L_2 = A_4 \frac{dl'}{dt} + A_5 \frac{d^2l'}{dt^2} + A_6 \left(\frac{dl'}{dt}\right)^2 + A_7 v^2. \quad (9)$$

Il reste encore à considérer les termes qui renferment un produit de coefficients différentiels des coordonnées des deux particules, c'est-à-dire un des produits suivants :

$$\frac{dl}{dt} \frac{dl'}{dt}, \frac{dm}{dt} \frac{dm'}{dt}, \frac{dn}{dt} \frac{dn'}{dt},$$

$$\frac{dl}{dt} \frac{dm'}{dt}, \frac{dl'}{dt} \frac{dm}{dt}, \frac{dl}{dt} \frac{dn'}{dt}, \frac{dl'}{dt} \frac{dn}{dt}, \frac{dm}{dt} \frac{dn'}{dt}, \frac{dm'}{dt} \frac{dn}{dt}.$$

Mais, de cette circonstance que les six derniers produits changent de signe avec $\frac{dm}{dt}$, $\frac{dm'}{dt}$, $\frac{dn}{dt}$, $\frac{dn'}{dt}$, on peut de nouveau conclure, comme plus haut, que les termes affectés de ces produits ne peuvent pas entrer dans l'expression des composantes de la force. Cette même conclusion n'est pas applicable au deuxième ni au troisième produit, quoique le changement de signe y ait lieu également ; car, quand le coefficient différentiel $\frac{dm}{dt}$ change de signe, et que, par suite, la particule e change de direction dans son mouvement estimé suivant l'axe m , le nouveau mouvement se comporte à la vérité de la même manière que l'ancien, relativement à l'axe l , mais il se comporte autrement relativement au mouvement de la particule e' , estimé suivant l'axe m et exprimé par $\frac{dm'}{dt}$. Si ces deux mouvements avaient lieu d'abord dans le même sens, ils ont lieu maintenant

en sens contraires, et vice versa. Il n'est donc pas nécessaire que les coefficients de ces deux produits soient nuls, mais il faut qu'ils soient égaux entre eux, puisque les directions m et n ont la même position géométrique par rapport à l'axe l .

Si nous appelons L_3 la somme des termes qui renferment des coefficients différentiels des coordonnées des deux particules, il résulte de ce qui précède que nous aurons :

$$L_3 = A'_8 \frac{dl}{dt} \frac{dl'}{dt} + A_9 \left(\frac{dm}{dt} \frac{dm'}{dt} + \frac{dn}{dt} \frac{dn'}{dt} \right).$$

Nous allons procéder à la transformation de cette expression d'une manière analogue à celle dont nous avons déjà fait usage. Nous écrivons :

$$L_3 = A_8 \frac{dl}{dt} \frac{dl'}{dt} + A_9 \left(\frac{dl}{dt} \frac{dl'}{dt} + \frac{dm}{dt} \frac{dm'}{dt} + \frac{dn}{dt} \frac{dn'}{dt} \right),$$

en posant A_8 au lieu de $A'_8 - A_9$. Or, si ε désigne l'angle des directions des deux particules e et e' , on a :

$$\frac{dl}{dt} \frac{dl'}{dt} + \frac{dm}{dt} \frac{dm'}{dt} + \frac{dn}{dt} \frac{dn'}{dt} = vv' \cos \varepsilon,$$

et l'équation précédente s'écrira, par suite :

$$L_3 = A_8 \frac{dl}{dt} \frac{dl'}{dt} + A_9 vv' \cos \varepsilon. \quad (10)$$

Nous venons de déterminer les différents groupes de termes dont la somme forme la quantité tout entière L , qui a pour expression :

$$L = \frac{1}{j^2} + L_1 + L_2 + L_3. \quad (11)$$

Nous pourrons traiter d'une manière analogue les composantes de la force suivant les axes m et n , composantes que nous représenterons par Mee' et Nee' ; il n'est pas nécessaire que nous entrions de nouveau dans le détail du procédé, et il suffira d'écrire simplement les systèmes d'équations qui servent à la détermination de M et N . Ces systèmes sont :

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= B \frac{dm}{dt} + B_1 \frac{d^2m}{dt^2} + B_2 \frac{dl}{dt} \frac{dm}{dt}, \\ M_2 &= B_3 \frac{dm'}{dt} + B_4 \frac{d^2m'}{dt^2} + B_5 \frac{dl'}{dt} \frac{dm'}{dt}, \\ M_3 &= B_6 \frac{dl}{dt} \frac{dm'}{dt} + B_7 \frac{dl'}{dt} \frac{dm}{dt}, \\ M &= M_1 + M_2 + M_3; \end{aligned} \right\} (12)$$

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= B \frac{dn}{dt} + B_1 \frac{d^2n}{dt^2} + B_2 \frac{dl}{dt} \frac{dn}{dt}, \\ N_2 &= B_3 \frac{dn'}{dt} + B_4 \frac{d^2n'}{dt^2} + B_5 \frac{dl'}{dt} \frac{dn'}{dt}, \\ N_3 &= B_6 \frac{dl}{dt} \frac{dn'}{dt} + B_7 \frac{dl'}{dt} \frac{dn}{dt}, \\ N &= N_1 + N_2 + N_3. \end{aligned} \right\} (13)$$

§ 6.

**Expressions des composantes de la force
dans un système quelconque de coordonnées.**

Ayant exprimé les trois composantes de la force dans un système particulier de coordonnées, il nous sera facile de les exprimer dans un système quelconque.

Considérons un système d'axes rectangulaires, dans lequel les deux particules d'électricité ont les coordonnées x, y, z et x', y', z' . Représentons par Xee', Yee', Zee' les composantes, suivant les axes, de l'action que la particule e' exerce sur la particule e ; il s'agit de déterminer les quantités X, Y, Z .

Pour exprimer X , désignons par $(lx), (mx), (nx)$ les angles que l'axe des x fait avec les axes primitifs des l, m , et n ; nous aurons :

$$X = L \cos \{lx\} + M \cos \{mx\} + N \cos \{nx\}. \quad (14)$$

Mais on peut aussi exprimer les différentes parties constituantes de X , au moyen des parties correspondantes de L, M et N . Si l'on représente par X_1 la somme des termes de X , qui ne renferment que des coefficients différentiels des coordonnées de e ; par X_2 la somme de ceux qui ne renferment que des coefficients différentiels des coordonnées de e' ; par X_3 la somme de ceux

qui renferment des produits des coefficients différentiels des coordonnées des deux particules, X_1 sera donné par l'équation :

$$X_1 = L_1 \cos (lx) + M_1 \cos (mx) + N_1 \cos (nx), \quad (15)$$

et l'on aura des équations analogues pour X_2 et X_3 .

Si l'on remplace, dans l'équation précédente, L_1 , M_1 et N_1 par leurs valeurs données dans (8), (12) et (13), et si l'on tient compte, dans l'addition, des relations :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dl}{dt} \cos (lx) + \left(\frac{dm}{dt} \right) \cos (mx) + \frac{dn}{dt} \cos (nx) &= \frac{dx}{dt}, \\ \frac{d^2l}{dt^2} \cos (lx) + \frac{d^2m}{dt^2} \cos (mx) + \frac{d^2n}{dt^2} \cos (nx) &= \frac{d^2x}{dt^2}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

il viendra :

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= B \frac{dx}{dt} + B_1 \frac{d^2x}{dt^2} + B_2 \frac{dl}{dt} \frac{dx}{dt} \\ &+ \left[(A - B) \frac{dl}{dt} + (A_1 - B_1) \frac{d^2l}{dt^2} \right. \\ &\left. + (A_2 - B_2) \left(\frac{dl}{dt} \right)^2 + A_3 x^2 \right] \cos (lx). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Nous substituerons à $\cos (lx)$ sa valeur $\frac{x - x'}{r}$, en multipliant par $\frac{1}{r}$ tous les termes de la parenthèse carrée, et laissant $x - x'$ en facteur commun.

En outre, nous introduirons, au lieu des coefficients différentiels de l , ceux de r . Nous avons déjà dit plus haut que la distance mutuelle, au temps t , des particules e et e' est simplement représentée par la différence $l - l'$,

parce qu'à cet instant les coordonnées m, n, m' et n' sont nulles. Mais, pour différentier r , on doit partir de l'expression générale :

$$r = \sqrt{(l - l')^2 + (m - m')^2 + (n - n')^2},$$

et ce n'est qu'après la différentiation qu'on peut faire $m - m' = n - n' = 0$. Il y a encore à observer, relativement à cette différentiation, que les coordonnées l, m et n ne varient que par le mouvement de la particule e ; l', m', n' par celui de la particule e' , tandis que r varie par le mouvement des deux particules. On pourra distinguer les variations de r qui correspondent à ces deux mouvements particuliers, en regardant r comme fonction des deux arcs des trajectoires s et s' , et ceux-ci mêmes comme fonctions de t . Les différentiations qui ne se rapportent qu'au mouvement de la particule e pourront alors s'effectuer comme suit :

$$\frac{\partial r}{\partial s} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{r} \left[(l - l') \frac{dl}{dt} + (m - m') \frac{dm}{dt} + (n - n') \frac{dn}{dt} \right],$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 r}{\partial s^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{\partial r}{\partial s} \frac{d^2 s}{dt^2} &= -\frac{1}{r^3} \left[(l - l') \frac{dl}{dt} + (m - m') \frac{dm}{dt} + (n - n') \frac{dn}{dt} \right]^2 \\ &+ \frac{1}{r} \left[\left(\frac{dl}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dm}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dn}{dt} \right)^2 \right] \\ &+ \frac{1}{r} \left[(l - l') \frac{d^2 l}{dt^2} + (m - m') \frac{d^2 m}{dt^2} + (n - n') \frac{d^2 n}{dt^2} \right] \end{aligned}$$

Posant, dans ces équations, $m - m' = n - n' = 0$, $l - l' = r$, et, en même temps :

$$\left(\frac{dl}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dm}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dn}{dt} \right)^2 = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2,$$

on obtiendra, pour les coefficients différentiels de l , les expressions suivantes :

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\partial r}{\partial s} \frac{ds}{dt}, \quad (18)$$

$$\frac{d^2l}{dt^2} = \left[\frac{\partial^2 r}{\partial s^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 - 1 \right] \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{\partial r}{\partial s} \frac{d^2s}{dt^2}, \quad (19)$$

Substituons ces expressions dans (17), en y remplaçant v^2 par $\left(\frac{ds}{dt} \right)^2$ pour l'uniformité, et désignons, pour abrégé, par C, C_1, C_2, C_3 les fonctions de r qui se trouvent entre parenthèses carrées dans cette équation, celle-ci deviendra :

$$\begin{aligned} X_1 = & B \frac{dx}{dt} + B_1 \frac{d^2x}{dt^2} + B_2 \frac{\partial r}{\partial s} \frac{dx}{dt} \frac{ds}{dt} \\ & + \left\{ C \frac{\partial r}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \left[C_1 \frac{\partial^2 r}{\partial s^2} + C_2 \left(\frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 + C_3 \right] \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \right. \\ & \left. + C_4 \frac{\partial r}{\partial s} \frac{d^2s}{dt^2} \right\} (x - x'). \end{aligned} \quad (20)$$

On obtiendra de même :

$$\begin{aligned} X_2 = & B_3 \frac{dx'}{dt} + B_4 \frac{d^2x'}{dt^2} + B_5 \frac{\partial r}{\partial s'} \frac{dx'}{dt} \frac{ds'}{dt} \\ & + \left\{ C_4 \frac{\partial r}{\partial s'} \frac{ds'}{dt} + \left[C_5 \frac{\partial^2 r}{\partial s'^2} + C_6 \left(\frac{\partial r}{\partial s'} \right)^2 + C_7 \right] \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 \right. \\ & \left. + C_5 \frac{\partial r}{\partial s'} \frac{d^2s'}{dt^2} \right\} (x - x'). \end{aligned} \quad (21)$$

Il reste encore à déterminer les quantités X_3 ; on devra, pour cela, remplacer, dans l'équation

$$X_3 = L_3 \cos (lx) + M_3 \cos (mx) + N_3 \cos (nx),$$

L_3 , M_3 et N_3 , par leurs valeurs (10), (12) et (13). Mais si, dans l'addition, on a égard à la première des équations (16), il viendra :

$$\begin{aligned} X_3 = & B_6 \frac{\partial r}{\partial s} \frac{dx'}{dt} + B_7 \frac{dl'}{dt} \frac{dx}{dt} \\ & + [(A_8 - B_6 - B_7) \frac{dl}{dt} \frac{dl'}{dt} + A_9 vv' \cos \varepsilon] \cos (lx), \end{aligned}$$

équation qui, conformément à ce qu'on a vu plus haut, peut s'écrire :

$$\left. \begin{aligned} X_3 = & B_6 \frac{\partial r}{\partial s} \frac{dx'}{dt} \frac{ds}{dt} + B_8 \frac{\partial r}{\partial s'} \frac{dx}{dt} \frac{ds'}{dt} \\ & + \left(C_8 \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} + C_9 \cos \varepsilon \right) (x - x') \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Les quantités X_1 , X_2 , X_3 étant connues, on obtiendra X par l'équation :

$$X = \frac{x - x'}{r^3} + X_1 + X_2 + X_3. \quad (23)$$

On pourra naturellement représenter de même les quantités Y et Z ; on n'aura, pour cela, qu'à changer, dans les équations précédentes, les quantités qui se rapportent à l'axe des x en celles qui se rapportent aux axes des y et des z , sans rien modifier à celles qui se rapportent à r .

Il s'agit actuellement de déterminer les fonctions de r , qui entrent dans les équations (20), (21) et (22), et qui sont, jusqu'à présent, indéterminées.

§ 7.

Détermination des fonctions qui entrent dans X_2 .

Pour déterminer, tout d'abord, partiellement les fonctions qui entrent dans l'expression de X_2 , nous ferons usage de la proposition qui a déjà été employée dans les §§ 2 et 3, savoir : *qu'un courant quelconque fermé et constant dans un conducteur fixe n'exerce aucune force motrice sur l'électricité au repos.*

Pour éviter tout malentendu, il ne sera pas inutile d'ajouter encore quelques commentaires à cette proposition.

Lorsque de l'électricité d'une espèce, par exemple de l'électricité positive, est accumulée quelque part, elle exerce par influence une action électrostatique sur tout corps conducteur placé dans son voisinage, et elle subit par suite la réaction de l'électricité accumulée par influence sur le conducteur. Ce genre d'action réciproque a naturellement lieu aussi entre le conducteur d'un courant galvanique et l'électricité présente considérée comme en repos. Mais cette action est entièrement indépendante du courant qui circule dans le conducteur, et c'est pourquoi elle ne doit pas être prise en considération.

Ensuite, pendant qu'un courant parcourt un conducteur, il se trouve, à la surface de ce dernier, une certaine quantité d'électricité décomposée, d'où provient la force motrice qui agit sur l'électricité en mouvement et qui est nécessaire pour surmonter la résistance à la conductibilité. Cette électricité peut également exercer une action sur la quantité d'électricité présente considérée comme au repos ; mais nous pouvons encore ici faire abstraction de cette force, car elle n'a aucune relation avec la force que nous considérons, et que l'électricité du courant exerce à cause de son mouvement, et elle peut être séparée de cette dernière force, tant dans la théorie que dans l'expérience. On peut notamment donner au conducteur du courant galvanique une forme telle que les parties qui sont le plus électriques positivement se trouvent très voisines de celles qui sont le plus électriques négativement ; par exemple, on peut lui donner la forme d'une spirale, comprenant deux rangs de spires enroulées de telle sorte que les spires du second rang reviennent du côté dont partent celles du premier rang. Alors la plus grande partie de la force exercée par l'électricité décomposée disparaît, tandis que celle qui est exercée par l'électricité du courant demeure. En outre, il est à remarquer que, dans un aimant, dont les courants moléculaires peuvent, quant à la force qu'ils exercent, être soumis à la même analyse que des courants galvaniques fermés, cette électricité décomposée, qui fait mouvoir l'électricité du courant dans le courant galvanique, n'existe pas.

Par suite, nous pouvons faire complètement abstraction de ces actions secondaires, et nous limiter aux actions exercées par le courant lui-même.

Imaginons donc, comme au §2, une unité d'électricité positive au repos, au point x, y, z , et, au point x', y', z' , un élément de courant ds' , qui se compose de la quantité $h' ds'$ d'électricité positive en mouvement, et de la quantité $-h' ds'$ d'électricité négative en repos. Ces deux quantités d'électricité exercent, sur l'unité d'électricité au repos, des actions dont les composantes, suivant l'axe des x , sont :

$$h' ds' \left(\frac{x - x'}{r^3} + X_2 \right) \text{ et } - h' ds' \frac{x - x'}{r^3}.$$

La somme de ces dernières est la composante, suivant le même axe, de l'action exercée par l'élément du courant sur l'unité d'électricité, composante que nous représenterons, comme plus haut, par $\frac{d\mathbf{x}}{ds'} ds'$. Nous aurons donc l'équation :

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds'} ds' = h' ds' X_2,$$

expression dans laquelle nous devons remplacer X_2 par sa valeur (21). Mais en même temps, nous écrirons, au lieu de

$$\frac{dx'}{dt} \text{ et } \frac{d^2x'}{dt^2},$$

les expressions équivalentes

$$\frac{dx'}{ds'} \frac{ds'}{dt} \text{ et } \frac{d^2x'}{ds'^2} \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 + \frac{dx'}{ds'} \frac{d^2s'}{dt^2},$$

et nous pourrons faire $\frac{d^2 s'}{dt^2} = 0$, à cause de l'hypothèse que le courant est constant. Nous obtiendrons ainsi :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s'} ds' &= h' ds' \left\{ \left[B_3 \frac{dx'}{ds'} + C_4 (x - x') \frac{\partial r}{\partial s'} \right] \frac{ds'}{dt} \right. \\ &+ \left[B_4 \frac{d^2 x'}{ds'^2} + B_5 \frac{\partial r}{\partial s'} \frac{dx'}{ds'} \right. \\ &\left. \left. + \left(C_5 \frac{\partial^2 r}{\partial s'^2} + C_6 \left(\frac{\partial r}{\partial s'} \right)^2 + C_7 \right) (x - x') \right] \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 \right\} \end{aligned} \right\} (24)$$

Cette expression, intégrée pour un courant fermé quelconque, doit donner une valeur nulle, d'après la proposition précédente. Mais, si l'intégrale de l'expression complète doit être nulle, quelle que soit l'intensité du éourant, il faut que les intégrales des termes multipliés par $\frac{ds'}{dt}$ et par $\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2$ soient nulles séparément. Les expressions entre parenthèses, qui forment ces termes, doivent, d'après cela, être exactement des coefficients différentiels par rapport à s' , sans qu'il soit nécessaire d'admettre une relation particulière entre r et x' .

Pour que la première expression soit un coefficient différentiel par rapport à s' , il faut, comme on le voit immédiatement à l'inspection de sa forme, qu'elle soit égale à :

$$-\frac{\partial}{\partial s'} [B_3 (x - x')];$$

et pour cela, il est nécessaire que l'équation :

$$C_4 = - \frac{dB_3}{dr}$$

soit vérifiée.

De même, si l'on considère les termes de la seconde expression qui renferment des coefficients différentiels du deuxième ordre, on voit immédiatement qu'elle doit être identiquement égale au coefficient différentiel

$$\frac{\partial}{\partial s'} \left[B_4 \frac{dx'}{ds'} + C_5 (x - x') \frac{\partial r}{\partial s'} \right];$$

et, pour que cette condition soit remplie, il faut que les équations

$$\left. \begin{aligned} B_5 &= \frac{dB_4}{dr} - C_5, \\ C_6 &= \frac{dC_5}{dr}, \\ C_7 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

se vérifient.

De cette manière, les sept fonctions indéterminées qui entrent dans l'équation (21) se réduisent à trois, et cette équation peut s'écrire :

$$\begin{aligned} X_2 = & - \frac{\partial [B_3(x - x')]}{\partial s'} \frac{ds'}{dt} + \frac{\partial}{\partial s'} \left[B_4 \frac{dx'}{ds'} + C_5 (x - x') \frac{\partial r}{\partial s'} \right] \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 \\ & + \left[B_4 \frac{d^2 x'}{ds'^2} + C_5 (x - x') \frac{\partial^2 r}{\partial s'^2} \right] \frac{d^2 s'}{dt^2} \end{aligned} \quad (27)$$

§ 8.

Détermination des fonctions qui entrent dans X_1 .

Pour traiter la quantité X_1 , nous pouvons faire usage d'une proposition expérimentale analogue à la précédente, savoir : qu'une quantité d'électricité en repos n'exerce aucune action sur un courant quelconque fermé et constant qui se meut dans un conducteur en repos.

Les éclaircissements que nous avons donnés sur la proposition dont il a été fait usage au paragraphe précédent sont également valables pour celle-ci.

Pour appliquer cette proposition, imaginons au point x', y', z' , une unité d'électricité en repos, et au point x, y, z un élément de courant ds , qui renferme la quantité d'électricité en mouvement hds , et la quantité d'électricité en repos $-hds$. Les composantes, suivant l'axe des x , des actions que ces deux électricités subissent de la part de l'unité d'électricité au repos, sont

$$hds \left(\frac{x - x'}{r^3} + X_1 \right) \text{ et } -hds \frac{x - x'}{r^3}.$$

D'après cela, la composante de l'action que l'élément de courant subit de la part de l'unité d'électricité sera

représentée par le produit $hdsX_1$, dans lequel nous aurons à remplacer X_1 par l'expression (20). Et si, en même temps, nous écrivons de nouveau, au lieu de $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{d^2x}{dt^2}$,

$$\frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt} \text{ et } \frac{d^2x}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{dx}{ds} \frac{d^2s}{dt^2},$$

et que nous posions $\frac{d^2s}{dt^2} = 0$, puisque le courant doit être constant, cette expression deviendra :

$$hds \left\{ \left[B \frac{dx}{ds} + C (x - x') \frac{\partial r}{\partial s} \right] \frac{ds}{dt} + \left[B_1 \frac{d^2x}{ds^2} + B_2 \frac{\partial r}{\partial s} \frac{dx}{ds} + \left[C_1 \frac{\partial^2 r}{\partial s^2} + C_2 \left(\frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 + C_3 \right] (x - x') \right] \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \right\}.$$

De là nous pouvons tirer des conclusions tout à fait analogues à celle du paragraphe précédent. En effet, si l'unité d'électricité ne doit exercer, sur le courant tout entier, aucune action dirigée dans le sens de l'axe des x , l'intégrale de cette expression, étendue à tout le courant, doit être nulle, et l'on en conclut les équations suivantes, analogues aux équations (25) et (26) qui précèdent :

$$C = \frac{dB}{dr}, \quad B_2 = \frac{dB_1}{dr} + C_1, \quad C_2 = \frac{dC_1}{dr}, \quad C_3 = 0. \quad (28)$$

En outre, on peut tirer d'autres conclusions dans le cas actuel. La proposition, en effet, ne dit pas seulement que l'unité d'électricité ne tend à mouvoir le courant dans aucune direction, mais encore qu'elle

ne tend à le faire tourner autour d'aucun axe, et de là on peut encore déduire certaines équations.

Comme le choix de l'axe est arbitraire, nous prendrons pour celui-ci la droite menée par le point x', y', z' , parallèlement à l'axe des z . Déterminons le moment de rotation autour de cet axe. L'expression précédente de la composante, suivant l'axe des x , de l'action que l'élément de courant ds subit de la part de l'unité d'électricité, peut, en vertu des équations (28), se mettre sous la forme :

$$h ds \frac{\partial P}{\partial s},$$

P étant une quantité déterminée par l'équation

$$P = B(x - x') \frac{ds}{dt} + \left[B_1 \frac{dx}{ds} + C_1 (x - x') \frac{\partial r}{\partial s} \right] \left(\frac{ds}{dt} \right)^2. \quad (29)$$

De même on a, pour la composante de cette force suivant l'axe des y , l'expression

$$h ds \frac{\partial Q}{\partial s},$$

dans laquelle Q est déterminé par l'équation

$$Q = B(y - y') \frac{ds}{dt} + \left[B_1 \frac{dy}{ds} + C_1 (y - y') \frac{\partial r}{\partial s} \right] \left(\frac{ds}{dt} \right)^2. \quad (30)$$

De là résulte, pour le moment de cette force autour de l'axe considéré, l'expression :

$$h \left[(x - x') \frac{\partial Q}{\partial s} - (y - y') \frac{\partial P}{\partial s} \right] ds.$$

Or, si l'unité d'électricité en repos ne tend pas à faire tourner un courant fermé, l'intégrale de cette expression doit être nulle pour tout courant fermé. Mais cette expression peut s'écrire :

$$h \frac{\partial}{\partial s} [(x-x') Q - (y-y') P] ds - h \left(Q \frac{dx}{ds} - P \frac{dy}{ds} \right) ds,$$

et, comme le premier terme est une différentielle exacte, qui donnera une valeur nulle par l'intégration, il faut que le second donne aussi une valeur nulle. Celui-ci, si l'on y remplace P et Q par leurs valeurs (29) et (30), prend la forme :

$$h \left[(x-x') \frac{dy}{ds} - (y-y') \frac{dx}{ds} \right] \left[B \frac{ds}{dt} + C_1 \frac{\partial r}{\partial s} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \right] ds,$$

et l'on voit immédiatement que cette expression n'est pas une différentielle exacte, et que, par suite, son intégrale ne peut être nulle, pour tout courant fermé, que si le second facteur entre parenthèses carrées devient lui-même nul ; mais, pour qu'il en soit ainsi, indépendamment de l'intensité du courant, il faut que :

$$B = 0 \quad \text{et} \quad C_1 = 0. \quad (31)$$

Si l'on combine ces nouvelles équations avec celles données sous le numéro (28), ces dernières deviendront :

$$C = 0, \quad B_2 = \frac{dB_1}{dr}, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 0. \quad (32)$$

De cette manière, les sept fonctions indéterminées qui entrent dans X_1 se réduisent à une seule, et l'équation (20) se transforme en

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial s} \left(B_1 \frac{dx}{ds} \right) \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + B_1 \frac{dx}{ds} \frac{d^2s}{dt^2}. \quad (33)$$

§ 9.

Détermination des fonctions qui entrent dans X_3 .

Pour déterminer les fonctions qui entrent dans l'expression de X_3 , nous considérerons l'action mutuelle de deux courants qui ont lieu dans des conducteurs en repos.

Soient, aux points x, y, z et $x' y', z'$, deux éléments de courant ds et ds' , qui renferment les quantités d'électricité en mouvement hds et $h'ds'$, et les quantités d'électricité en repos $-hds$ et $-h'ds'$. Pour déterminer l'action que l'élément de courant ds' exerce sur l'élément ds , nous avons à considérer les actions que la quantité d'électricité hds subit de la part de $h'ds'$ et de $-h'ds'$, et celles que la quantité d'électricité $-hds$ subit également de la part de celles-ci. Les composantes, suivant l'axe des x , de ces quatre forces, sont

$$\begin{aligned} & hh' ds ds' \left(\frac{x - x'}{r^3} + X_1 + X_2 + X_3 \right), \\ & - hh' ds ds' \left(\frac{x - x'}{r^3} + X_1 \right), \\ & - hh' ds ds' \left(\frac{x - x'}{r^3} + X_2 \right), \\ & hh' ds ds' \frac{x - x'}{r^3}. \end{aligned}$$

Leur somme donne, pour la composante, suivant l'axe des x , de l'action que l'élément de courant ds' exerce sur l'élément ds , le produit

$$hh' ds ds' X_3,$$

dans lequel X_3 doit être remplacé par sa valeur (22).

Mais auparavant, nous donnerons à cette dernière une forme plus commode pour l'intégration. Nous pouvons remplacer la quantité $\cos \varepsilon$, qui y entre, par un coefficient différentiel. De l'égalité :

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

on tire, en effet, par une double différentiation ;

$$\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s \partial s'} = -2 \left(\frac{dx}{ds} \frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds} \frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds} \frac{dz'}{ds'} \right), \quad (34)$$

et, comme l'expression entre parenthèses n'est autre que $\cos \varepsilon$, il vient :

$$\cos \varepsilon = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2(r^2)}{\partial s \partial s'}. \quad (35)$$

Si nous remplaçons $\cos \varepsilon$ par cette valeur, et, en même temps, $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dx'}{dt}$ par $\frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt}$ et $\frac{dx'}{ds'} \frac{ds'}{dt}$, comme dans les paragraphes précédents, l'équation (22) s'écrira :

$$X_3 = \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt} \left[B_6 \frac{\partial r}{\partial s} \frac{dx'}{ds'} + B_7 \frac{\partial r}{\partial s'} \frac{dx}{ds} \right. \\ \left. + \left(C_5 \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} - \frac{1}{2} C_9 \frac{\partial^2(r^2)}{\partial s \partial s'} \right) (x - x') \right]. \quad (36)$$

Il s'agit d'en faire disparaître le produit $C_s \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'}$.

Dans ce but, introduisons une fonction de r , liée à C_s par la relation :

$$E = \int r dr \int \frac{C_s}{r} dr;$$

il en résulte :

$$\frac{1}{r} \frac{dE}{dr} = \int \frac{C_s}{r} dr \quad \text{et} \quad r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{dE}{dr} \right) = C_s.$$

Si nous différencions cette fonction E par rapport à s et s' , nous pourrions donner à ses coefficients différentiels les formes suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial s} &= \frac{dE}{dr} \frac{\partial r}{\partial s} = \frac{1}{2r} \frac{dE}{dr} \frac{\partial(r^2)}{\partial s}, \\ \frac{\partial^2 E}{\partial s \partial s'} &= \frac{1}{2r} \frac{dE}{dr} \frac{\partial^2(r^2)}{\partial s \partial s'} + \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{dE}{dr} \right) \frac{\partial r}{\partial s'} \frac{\partial(r^2)}{\partial s} \\ &= \frac{1}{2r} \frac{dE}{dr} \frac{\partial^2(r^2)}{\partial s \partial s'} + C_s \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'}, \end{aligned}$$

et nous obtiendrons par là :

$$C_s \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} = - \frac{1}{2r} \frac{dE}{dr} \frac{\partial^2(r^2)}{\partial s \partial s'} + \frac{\partial^2 E}{\partial s \partial s'}.$$

Si l'on substitue cette valeur de $C_s \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'}$ dans l'équation (36), et que l'on dénote, pour abrégé, par E_1 l'expression :

$$- \left(C_s + \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} \right),$$

il viendra :

$$X_3 = \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt} \left[B_6 \frac{\partial r}{\partial s} \frac{dx'}{ds'} + B_7 \frac{\partial r}{\partial s'} \frac{dx}{ds} + \left(E_1 \frac{\partial^2(r^2)}{\partial s \partial s'} + \frac{\partial^2 E}{\partial s \partial s'} \right) (x - x') \right]. \quad (37)$$

En outre, on peut poser :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial s \partial s'} (x - x') = \frac{\partial^2 [E(x - x')]}{\partial s \partial s'} + \frac{\partial E}{\partial s} \frac{dx'}{ds'} - \frac{\partial E}{\partial s'} \frac{dx}{ds};$$

et si l'on écrit, pour abrégé :

$$B_6 + \frac{dE}{dr} = E_2, \quad B_7 - \frac{dE}{dr} = E_3,$$

l'équation (37) deviendra :

$$X_3 = \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt} \left\{ E_1 (x - x') \frac{\partial^2(r^2)}{\partial s \partial s'} + E_2 \frac{\partial r}{\partial s} \frac{dx'}{ds'} + E_3 \frac{\partial r}{\partial s'} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2 [E(x - x')]}{\partial s \partial s'} \right\}. \quad (38)$$

Nous aurons à multiplier l'expression ainsi transformée de X_3 par $h h' ds ds'$, pour obtenir la composante, suivant l'axe des x , de l'action que l'élément de courant ds' exerce sur l'élément ds .

Si, pour obtenir la composante, suivant cet axe, de l'action que le courant s' tout entier, supposé fermé, exerce sur ds , on effectue l'intégration par rapport à s' , il se présentera quelques simplifications. Le dernier terme de l'expression précédente est, en effet, un coefficient différentiel par rapport à s' , l'avant-dernier renferme le facteur $\frac{dx}{ds}$, indépendant de s' , et qui peut être regardé comme constant dans l'intégration, et son autre facteur $E_3 \frac{\partial r}{\partial s'}$ est de nouveau un coefficient différentiel par rapport à s' . Ces deux termes donnent donc

une valeur nulle, lorsqu'on intègre relativement à un circuit fermé, et il reste :

$$hh' ds \int X_3 ds' = hh' \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt} ds \int \left[E_1 (x - x') \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} + E_2 \frac{\partial r}{\partial s} \frac{dx'}{ds'} \right] ds'. \quad (39)$$

Si l'on intègre encore cette expression par rapport à s , on aura la force avec laquelle le courant s' tend à écarter le courant s tout entier dans le sens de l'axe des x . Cette intégration fait de nouveau disparaître un terme dans le cas où le courant s est aussi fermé. Dans le terme $E_2 \frac{\partial r}{\partial s} \frac{dx'}{ds'}$, le facteur $\frac{dx'}{ds'}$ est, en effet, indépendant de s , et l'autre facteur $E_2 \frac{\partial r}{\partial s}$, étant un coefficient différentiel exact par rapport à s , donne un résultat nul, par l'intégration. On a donc :

$$hh' \int \int X_3 ds ds' = hh' \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt} \int \int E_1 (x - x') \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} ds ds'. \quad (40)$$

Nous pouvons comparer ce résultat avec une conséquence parfaitement établie de la théorie d'Ampère, puisque cette théorie peut être considérée comme tout à fait irréprochable, en tant qu'elle se rapporte aux actions exercées par des courants fermés les uns sur les autres. Or, d'après cette théorie, la force avec laquelle un courant fermé s' tend à mouvoir un autre courant fermé s , dans le sens de l'axe des x , est donnée par l'expression :

$$- k i i' \int \int \frac{x - x'}{r^3} \cos \varepsilon ds ds',$$

dans laquelle i et i' sont les intensités des deux courants, et k une constante. Si l'on remplace, dans cette expression, i et i' par $h \frac{ds}{dt}$ et $h' \frac{ds'}{dt}$, et $\cos \varepsilon$ par $-\frac{1}{2} \frac{\partial^2(r^2)}{\partial s \partial s'}$, conformément à l'identité (35), elle prendra la forme :

$$hh' \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt} \iint \frac{k}{2r^3} (x-x') \frac{\partial^2(r^2)}{\partial s \partial s'} ds ds',$$

et, en la comparant avec l'expression (40), on voit qu'il faut que :

$$E_1 = \frac{k}{2r^3}. \quad (41)$$

Pour déterminer encore l'autre fonction E_2 , qui entre dans (39), nous ferons usage de cette proposition, bien établie par l'expérience, qu'un courant galvanique fermé et constant, qui a lieu dans un conducteur en repos, ne tend pas à modifier, en intensité, un autre courant galvanique fermé qui a lieu dans un conducteur en repos.

L'expression (39), qui, après la substitution de la valeur trouvée pour E_1 , s'écrit :

$$hh' \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt} ds \int \left[\frac{k(x-x')}{2r^3} \frac{\partial^2(r^2)}{\partial s \partial s'} + E_2 \frac{\partial r}{\partial s} \frac{dx'}{ds'} \right] ds',$$

représente, d'après ce que nous avons vu, la composante, suivant l'axe des x , de l'action que le courant fermé s' exerce sur l'élément de courant ds , c'est-à-dire sur les deux quantités d'électricité hds et $-hds$ qui se trouvent dans l'élément de conducteur ds . Or, la quantité d'électricité négative $-hds$ est en repos ;

et, d'après la proposition dont il a été fait usage au § 6, le courant galvanique fermé ne peut exercer aucune action sur l'électricité en repos. D'après cela, l'expression précédente peut aussi s'entendre en ce sens qu'elle représente la composante, suivant l'axe des x , de l'action que le courant fermé s'exerce sur la quantité d'électricité positive hds qui se trouve dans l'élément de conducteur ds .

Pour pouvoir représenter également, d'une manière commode, la composante de cette force qui est dirigée suivant l'élément ds , et qui tend, par suite, à augmenter l'intensité du courant, nous donnerons une forme un peu différente à notre expression. De l'égalité :

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

on tire :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial (r^2)}{\partial x} &= 2(x - x'), \\ \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial x \partial s'} &= -2 \frac{dx'}{ds'}. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Éliminant $x - x'$ et $\frac{dx'}{ds'}$ de l'expression précédente, au moyen de ces relations, et en écrivant $\frac{1}{2r} \frac{\partial (r^2)}{\partial s}$ au lieu de $\frac{\partial r}{\partial s}$, cette expression devient :

$$\frac{1}{4} hh' \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt} ds \int \left[\frac{k}{r^3} \frac{\partial (r^2)}{\partial x} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} - \frac{E_2}{r} \frac{\partial (r^2)}{\partial s} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial x \partial s'} \right] ds'.$$

Pour obtenir maintenant, au lieu de la composante de la force suivant l'axe arbitraire des x , la composante

dirigée suivant l'élément ds , il suffira de remplacer les coefficients différentiels relatifs à x par les coefficients correspondants relatifs à s , et l'on aura :

$$\frac{1}{4} h h' \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt} ds \int \left[\frac{k}{r^3} \frac{\partial(r^2)}{\partial s} \frac{\partial^2(r^2)}{\partial s \partial s'} - \frac{E_2}{r} \frac{\partial(r^2)}{\partial s} \frac{\partial^2(r^2)}{\partial s \partial s'} \right] ds'.$$

ou, plus simplement :

$$\frac{1}{8} h h' \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt} ds \int \left(\frac{k}{r^3} - \frac{E_2}{r} \right) \frac{\partial}{\partial s'} \left[\frac{\partial(r^2)}{\partial s} \right]^2 ds'.$$

Cette expression représente la force qui agit, en un élément ds , dans le sens de l'accroissement de l'intensité du courant. Pour que celle-ci reste constante, il faut que l'intégrale de cette expression, étendue à tout le circuit fermé s , soit nulle. L'intégrale relative à s' ,

$$\int \left(\frac{k}{r^3} - \frac{E_2}{r} \right) \frac{\partial}{\partial s'} \left[\frac{\partial(r^2)}{\partial s} \right]^2 ds',$$

qui entre déjà dans l'expression, et qui multiplie l'élément ds , doit donc, ou bien être un coefficient différentiel exact par rapport à s , ou bien être nulle. Et, comme la première de ces conditions ne peut être remplie par aucune forme de la fonction E_2 de r , on devra déterminer cette dernière de telle sorte que l'intégrale soit nulle, ce qui exige qu'on ait :

$$\frac{k}{r^3} - \frac{E_2}{r} = c,$$

c désignant une constante ; car ce n'est qu'à cette condition que la quantité sous le signe intégral

est une différentielle exacte, et que l'intégrale peut, par suite, être nulle pour tout circuit fermé.

De cette relation, il résulte

$$E_2 = \frac{k}{r^2} - cr;$$

mais, comme le terme $- cr$ donnerait, dans l'expression de X_3 , un terme qui croîtrait en même temps que r , et qu'un pareil terme ne peut entrer dans l'expression de la composante de la force, la constante c doit être nulle, et l'on obtient ainsi pour E_2 l'expression :

$$E_2 = \frac{k}{r^2}. \quad (43)$$

Des quatre fonctions indéterminées de r , qui entraient dans l'expression (38) de X_3 , il y en a donc deux qui sont déterminées ; et, si on les remplace par leurs valeurs (38), cette expression devient :

$$X_3 = \left\{ \frac{k(x-x')}{2r^3} \frac{\partial^2(r^2)}{\partial s \partial s'} + \frac{k}{r^2} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{dx'}{ds'} + E_3 \frac{\partial r}{\partial s'} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2[E(x-x')]}{\partial s \partial s'} \right\} \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt}. \quad (44)$$

§ 10.

Application des lois relatives à l'induction.

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que des courants constants dans des conducteurs au repos ; nous allons maintenant laisser de côté la restriction relative à la constance du courant, et supposer, en outre, que le conducteur se déplace en mouvement. Pour plus de simplicité, nous supposerons toutefois que le conducteur ne change pas de forme, et qu'il se meut seulement parallèlement à lui-même, de sorte que tous ses éléments parcourent, pendant l'élément de temps dt , un même élément de chemin $d\sigma$ dans une même direction.

Dans ce cas, chaque particule d'électricité positive, qui se trouve dans le conducteur s , est animée à la fois de deux mouvements, celui qu'elle a dans le conducteur, et dont la vitesse est $\frac{ds}{dt}$, et celui du conducteur lui-même, dont la vitesse est $\frac{d\sigma}{dt}$. Il s'ensuit que les coefficients différentiels, par rapport au temps, qui sont relatifs au mouvement de cette particule d'électricité, doivent maintenant être exprimés autrement que nous ne l'avons fait plus haut. Au lieu d'une expression de la forme

$$\frac{\partial U}{\partial s} \frac{ds}{dt},$$

dans laquelle U désigne une quantité qui dépend de la position de la particule d'électricité, nous aurons à poser

$$\frac{\partial U}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial U}{\partial \tau} \frac{d\tau}{dt};$$

et, au lieu d'une expression de la forme

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(V \frac{\partial U}{\partial s} \right) \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + V \frac{\partial U}{\partial s} \frac{d^2s}{dt^2},$$

dans laquelle V désigne une seconde quantité qui dépend de la position de la particule d'électricité, nous devons poser :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial s} \left(V \frac{\partial U}{\partial s} \right) \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \left(V \frac{\partial U}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(V \frac{\partial U}{\partial \tau} \right) \right] \frac{ds}{dt} \frac{d\tau}{dt} \\ & + \frac{\partial}{\partial \tau} \left(V \frac{\partial U}{\partial \tau} \right) \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 + V \frac{\partial U}{\partial s} \frac{d^2s}{dt^2} + V \frac{\partial U}{\partial \tau} \frac{d^2\tau}{dt^2}. \end{aligned}$$

Si nous cherchons à déterminer la composante, suivant l'axe des x , de l'action que la particule d'électricité positive $h' ds'$, qui se trouve en ds' , exerce sur la particule d'électricité positive $h ds$, qui se trouve en ds , nous aurons à former, comme plus haut, pour exprimer cette composante, l'expression générale :

$$hh' ds ds' \left(\frac{x-x'}{r^3} + X_1 + X_2 + X_3 \right),$$

dans laquelle X_1 , X_2 et X_3 devront être remplacés par les expressions (33), (27) et (44), après que nous y aurons

fait les modifications que nous venons d'indiquer, ce qui donnera :

$$X_1 = \left. \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial s} \left(B_1 \frac{\partial x}{\partial s} \right) \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \left(B_1 \frac{\partial x}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(B_1 \frac{\partial x}{\partial \tau} \right) \right] \frac{ds}{dt} \frac{d\tau}{dt} \\ & + \frac{\partial}{\partial \tau} \left(B_1 \frac{\partial x}{\partial \tau} \right) \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 + B_1 \frac{\partial x}{\partial s} \frac{d^2 s}{dt^2} + B_1 \frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{d^2 \tau}{dt^2}, \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

$$X_2 = \left. \begin{aligned} & - \frac{\partial [B_3(x-x')]}{\partial s'} \frac{ds'}{dt} + \frac{\partial}{\partial s'} \left[B_4 \frac{dx'}{ds'} + C_5(x-x') \frac{dr'}{ds'} \right] \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 \\ & + \left[B_4 \frac{dx'}{ds'} + C_5(x-x') \frac{dr'}{ds'} \right] \frac{d^2 s'}{dt^2}, \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

$$X_3 = \left. \begin{aligned} & \left\{ \frac{k(x-x')}{2r^3} \frac{\partial^2(r^2)}{\partial s \partial s'} + \frac{k}{r^2} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{dx'}{ds'} + E_3 \frac{\partial r}{\partial s'} \frac{\partial x}{\partial s} \right. \\ & + \frac{\partial^2[E(x-x')]}{\partial s \partial s'} \left. \right\} \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt} + \left\{ \frac{k(x-x')}{2r^3} \frac{\partial^2(r^2)}{\partial \tau \partial s'} + \frac{k}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \tau} \frac{dx'}{ds'} \right. \\ & + E_3 \frac{\partial r}{\partial s'} \frac{\partial x}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2[E(x-x')]}{\partial \tau \partial s'} \left. \right\} \frac{d\sigma}{dt} \frac{ds'}{dt}, \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Si nous cherchons, en outre, à déterminer la composante, suivant l'axe des x , de l'action que la particule d'électricité négative $-h'ds'$, qui se trouve en ds' , exerce sur la particule d'électricité positive hds , qui se trouve en ds , nous n'aurons qu'à remplacer, dans l'expression précédente, $h'ds'$ par $-h'ds'$, et à faire en outre $\frac{ds'}{dt} = 0$, puisque l'électricité négative qui se trouve en ds' est en repos. On trouvera ainsi $X_2 = 0$ et $X_3 = 0$, tandis que X_1 ne changera pas.

L'expression de cette composante se réduit donc à :

$$- hh' ds ds' \left(\frac{x-x'}{r^3} + X_1 \right).$$

De là résulte l'expression suivante de la composante, suivant l'axe des x , de l'action que la quantité d'électricité positive $h ds$, qui se trouve en ds , subit de la part de l'élément de courant ds' , c'est-à-dire des deux quantités d'électricité $h' ds'$ et $- h' ds'$ à la fois :

$$hh' ds ds' (X_2 + X_3).$$

Si l'on intègre cette expression par rapport à s' , on aura la composante, suivant l'axe des x , de l'action que la quantité d'électricité positive $h ds$, qui se trouve en ds , subit de la part du courant s' tout entier ; et, si nous représentons cette composante par $\mathfrak{x} h ds$, nous aurons l'égalité :

$$\mathfrak{x} = h' \int (X_2 + X_3) ds', \quad (48)$$

dans laquelle on devra substituer à X_2 et X_3 leurs expressions (46) et (47). Si l'on effectue l'intégration, tous les termes de ces expressions, qui ont la forme de coefficients différentiels par rapport à ds' , donneront zéro, et pourront être supprimés ; on aura ainsi :

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{x} = h' \frac{d^2 s'}{dt^2} \int \left[B_4 \frac{dx'}{ds'} + C_5 (x - x') \frac{\partial r}{\partial s'} \right] ds' \\ + kh' \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt} \int \left[\frac{x-x'}{2r^3} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{dx'}{ds'} \right] ds' \\ + kh' \frac{d\sigma}{dt} \frac{ds'}{dt} \int \left[\frac{x-x'}{2r^3} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial \sigma \partial s'} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \sigma} \frac{dx'}{ds'} \right] ds'. \end{aligned} \right\} (49)$$

On peut transformer cette égalité au moyen des équations

$$x - x' = r \frac{\partial r}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{dx'}{ds'} = - \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial x \partial s'},$$

données au paragraphe précédent; elle devient alors :

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{x} = & \frac{1}{2} h' \frac{d^2 s'}{dt^2} \int \left[-B_1 \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial x \partial s'} + C_5 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial (r^2)}{\partial s'} \right] ds' \\ & + \frac{1}{2} kh' \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt} \int \left[-\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial x \partial s'} \right] ds' \\ & + \frac{1}{2} kh' \frac{d\sigma}{dt} \frac{ds'}{dt} \int \left[-\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial \sigma \partial s'} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial x \partial s'} \right] ds'. \end{aligned} \right\} (50)$$

Pour déduire de cette expression, relative à la direction x , l'expression correspondante relative à la direction de l'élément ds , nous n'aurons de nouveau qu'à changer les coefficients différentiels relatifs à x en ceux relatifs à s . Alors les deux termes qui figurent dans la seconde intégrale se détruisent, et nous obtenons, en désignant par $\mathfrak{h} ds$ la composante, suivant la direction de l'élément ds , de l'action que la quantité d'électricité $h ds$ subit de la part du courant s' , l'égalité

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{G} = & \frac{1}{2} h' \frac{d^2 s'}{dt^2} \int \left[-B_4 \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} + C_5 \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial (r^2)}{\partial s'} \right] ds' \\ & + \frac{1}{2} kh' \frac{d\sigma}{dt} \frac{ds'}{dt} \int \left[-\frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial \sigma \partial s'} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} \right] ds'. \end{aligned} \right\} (51)$$

Le produit $\mathfrak{E}ds$ est ce qu'on appelle la *force électromotrice induite dans l'élément de conducteur ds* , et, par suite, l'intégrale $\int \mathfrak{E}ds$ est la force électromotrice induite dans le courant s tout entier.

L'intégration, effectuée par rapport à s , fait de nouveau disparaître un terme. Considérons en effet l'intégrale double :

$$\int \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial \sigma \partial s'} ds ds' ;$$

il est à remarquer que la quantité

$$\frac{\partial^2 (r^2)}{\partial \sigma \partial s'} = -2 \left(\frac{\partial x}{\partial \sigma} \frac{dx'}{ds'} + \frac{\partial y}{\partial \sigma} \frac{dy'}{ds'} + \frac{\partial z}{\partial \sigma} \frac{dz'}{ds'} \right),$$

qui peut s'écrire $-2 \cos(\sigma s')$, $(\sigma s')$ désignant l'angle compris entre l'élément de chemin $d\sigma$, parcouru par ds , et l'élément de courant ds' , est indépendante de s , puisque le conducteur s se meut tout entier parallèlement à lui-même, et que tous ses éléments se meuvent, par suite, dans la même direction. On peut donc écrire l'intégrale précédente sous la forme :

$$\int ds' \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial \sigma \partial s'} \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} ds.$$

L'intégration relative à s s'effectue ici immédiatement, et donne un résultat nul pour un courant fermé.

Considérons maintenant l'autre intégrale double :

$$\int \int \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} ds ds' ;$$

puisque le coefficient différentiel $\frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'}$, qui, en vertu de l'équation (35), est égal à $2 \cos \epsilon$, ne varie pas pendant le mouvement du conducteur s , et qu'il est, par suite, indépendant de σ , nous pourrons poser :

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} \right] ;$$

puisque en outre la quantité σ , par rapport à laquelle la différentiation doit être effectuée, est indépendante des quantités s et s' , par rapport auxquelles nous aurons à intégrer toute l'expression, nous pourrons effectuer la différentiation en dehors du signe intégral, et écrire, au lieu de l'intégrale double qui précède :

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \int \int \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} ds ds'.$$

Nous aurons donc, pour déterminer la force électromotrice induite dans le conducteur s , l'équation :

$$\left. \begin{aligned} \int \epsilon ds &= \frac{1}{2} h' \frac{d^2 s'}{dt^2} \int \int \left[-B_4 \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} + C_5 \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial (r^2)}{\partial s'} \right] ds ds' \\ &+ \frac{1}{2} k h' \frac{ds'}{dt} \frac{d\sigma}{dt} \frac{\partial}{\partial \sigma} \int \int \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} ds ds'. \end{aligned} \right\} (52)$$

Nous allons maintenant appliquer à cette équation la proposition suivante : *si le conducteur s'arrête dans une position déterminée, dans le voisinage du conducteur s', et que l'intensité du courant croisse, dans ce dernier, depuis zéro jusqu'à une valeur déterminée, ou bien si l'intensité du courant en s' a constamment cette valeur, et que s s'en rapproche jusqu'à cette même position, à partir d'un point infiniment éloigné, dans ces deux cas il se produit en s une égale force d'induction.*

Pour déterminer la force d'induction qui se produit pendant un certain temps, nous avons à multiplier par dt l'expression de la force électromotrice, et à intégrer entre les limites de l'intervalle de temps donné. Dans le premier des deux cas énoncés plus haut on a $\frac{d\tau}{dt} = 0$, de sorte que le second terme de l'expression (52) disparaît ; dans le premier terme, l'intégrale double est indépendante du temps, et le coefficient différentiel $\frac{d^2 s'}{dt^2}$, qui entre comme facteur dans ce terme, doit seul être intégré par rapport à t , et donne $\frac{ds'}{dt}$. La force d'induction qui se produit dans ce cas est donc :

$$\frac{1}{2} k' \frac{ds'}{dt} \iint \left[-B_4 \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} + C_5 \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial (r^2)}{\partial s'} \right] ds ds'.$$

Dans le second cas on a $\frac{d^2 s'}{dt^2} = 0$, de sorte que le premier terme de l'expression disparaît ; le second s'intègre immédiatement par rapport à t , et donne :

$$\frac{1}{2} k h' \frac{ds'}{dt} \iint \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} ds ds'.$$

Ces deux quantités devant être égales, en vertu de la proposition précédente, leur différence sera nulle, et l'on aura, par suite :

$$\int \int \left(\left[\frac{h}{r} + B_4 \right] \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} - C_5 \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial (r^2)}{\partial s'} \right) ds ds' = 0. \quad (53)$$

Le second terme de la parenthèse carrée peut se transformer comme suit :

$$C_5 \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial (r^2)}{\partial s'} = \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial (r^2)}{\partial s'} \int C_5 dr \right] - \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} \int C_5 dr,$$

et, puisque le premier des termes du second membre donne un résultat nul, lorsqu'on effectue l'intégration pour un circuit fermé, l'équation précédente devient :

$$\int \int \left[\frac{h}{r} + B_4 + \int C_5 dr \right] \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} ds ds' = 0. \quad (54)$$

Si cette équation doit se vérifier pour deux courants fermés quelconques, l'expression qui y entre comme facteur du coefficient différentiel du second ordre doit être constante ; nous pourrions donc écrire, a désignant une constante :

$$\frac{h}{r} + B_4 + \int C_5 dr = a. \quad (55)$$

Et, si nous représentons par un seul signe l'intégrale, diminuée de la constante a , en posant :

$$G = \int C_5 dr - a,$$

nous aurons :

$$\left. \begin{aligned} B_4 &= - \left(\frac{k}{r} + G \right), \\ C_5 &= \frac{dG}{dr}. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Nous avons ainsi ramené à une seule deux des fonctions indéterminées qui entrent encore dans l'expression de X_2 , et l'équation (27), qui sert à la détermination de cette quantité X_2 , deviendra :

$$\begin{aligned} X_2 &= - \frac{\partial [B_3(x-x')]}{\partial s'} \frac{ds'}{dt} + \frac{\partial}{\partial s'} \left[- \left(\frac{k}{r} + G \right) \frac{dx'}{ds'} + \frac{dG}{dr} (x-x') \frac{\partial r}{\partial s'} \right] \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 \\ &+ \left[- \left(\frac{k}{r} + G \right) \frac{dx'}{ds'} + \frac{dG}{dr} (x-x') \frac{\partial r}{\partial s'} \right] \frac{d^2 s'}{dt^2}, \end{aligned}$$

ou bien :

$$\left. \begin{aligned} X_2 &= - \frac{\partial [B_2(x-x')]}{\partial s'} \frac{ds'}{dt} + \frac{\partial}{\partial s'} \left\{ - \frac{k}{r} \frac{dx'}{ds'} + \frac{\partial [G(x-x')]}{\partial s'} \right\} \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 \\ &+ \left\{ - \frac{k}{r} \frac{dx'}{ds'} + \frac{\partial [G(x-x')]}{\partial s'} \right\} \frac{d^2 s'}{dt^2}. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

§ 11.

Résumé des résultats obtenus.

Après avoir donné, au moyen des considérations exposées dans les §§ 7 à 10, aux expressions de X_1 , X_2 , X_3 , les formes plus simples (33), (57) et (44), nous les substituerons dans l'équation (23)

$$X = \frac{x - x'}{r^3} + X_1 + X_2 + X_3.$$

Nous obtiendrons ainsi l'équation suivante, qui déterminera la composante, suivant l'axe des x , de l'action qu'une particule d'électricité, qui parcourt le chemin ds' pendant le temps dt , exerce sur une autre particule, qui parcourt le chemin ds pendant le même temps :

$$\begin{aligned} X = & \frac{x - x'}{r^3} + \frac{\partial}{\partial s} \left(B_1 \frac{dx}{ds} \right) \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + B_1 \frac{dx}{ds} \frac{d^2s}{dt^2} - \frac{\partial [B_3(x - x')]}{\partial s'} \frac{ds'}{dt} \\ & + \frac{\partial}{\partial s'} \left\{ -\frac{k dx'}{r} + \frac{\partial [G(x - x')]}{\partial s'} \right\} \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 + \left\{ -\frac{k dx'}{r} + \frac{\partial [G(x - x')]}{\partial s \partial s'} \right\} \frac{d^2s'}{dt^2} \\ & + \left\{ \frac{k(x - x')}{2r^3} \frac{\partial^2(r^2)}{\partial s \partial s'} + \frac{k}{r^2} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{dx'}{ds'} + E_3 \frac{\partial r}{\partial s'} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2 [E(x - x')]}{\partial s \partial s'} \right\} \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt}. \end{aligned}$$

On peut effectuer quelques simplifications dans cette expression. Si l'on tient compte de ce que x' ne dépend que de s' , tandis que r dépend de s et de s' , on voit qu'on peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{h}{r} \frac{dx'}{ds'} \right) \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 - \frac{h}{r} \frac{dx'}{ds'} \frac{d^2 s'}{dt^2} + \frac{h}{r^2} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{dx'}{ds'} \frac{ds'}{dt} = -h \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \frac{dx'}{dt} \right),$$

de sorte que trois des termes précédents se ramènent à un seul. En outre, on peut écrire, pour les mêmes raisons :

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(B_1 \frac{dx}{ds} \right) \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + B_1 \frac{dx}{ds} \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(B_1 \frac{dx}{dt} \right) - \frac{dB_1}{dr} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt}.$$

Et si l'on pose, pour abrégier :

$$E_3 \frac{\partial r}{\partial s'} - \frac{dB_1}{dr} \frac{\partial r}{\partial s'} = \frac{\partial F}{\partial s'},$$

et qu'on remplace B_1 et $-B_3$ par les signes plus simples H et J, l'équation qui détermine X prendra la forme :

$$\left. \begin{aligned} X = & \frac{x-x'}{r^3} + \frac{\partial [J(x-x')]}{\partial s'} \frac{ds'}{dt} + \frac{\partial^2 [G(x-x')]}{\partial s'^2} \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 \\ & + \frac{\partial [G(x-x')]}{\partial s'} \frac{d^2 s'}{dt^2} + \frac{d}{dt} \left(H \frac{dx}{dt} \right) - h \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \frac{dx'}{dt} \right) \\ & + \left\{ \frac{k(x-x')}{2r^3} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} + \frac{\partial F}{\partial s'} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2 [E(x-x')]}{\partial s \partial s'} \right\} \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt}. \end{aligned} \right\} (58)$$

Dans la déduction de cette équation, outre l'hypothèse qu'il n'y a qu'une seule électricité qui se meut dans un conducteur fixe, nous n'avons appliqué que des propositions relatives à l'action réciproque de deux courants fermés l'un sur l'autre ; et, comme ces propositions peuvent être considérées comme parfaitement certaines, il est permis d'affirmer que l'expression de X, donnée dans cette équation, est la *seule possible* dans l'hypothèse d'une seule électricité mobile dans un conducteur solide.

Il est encore à remarquer que cette formule est admissible, non seulement dans le cas où l'on suppose que, dans le courant, il n'y a qu'une seule électricité en mouvement, mais dans le cas même où l'on admet que le courant galvanique consiste en deux courants, l'un d'électricité positive, l'autre d'électricité négative, se mouvant en sens contraire, auquel cas il est indifférent que l'on considère ces deux courants comme égaux ou comme inégaux en intensité.

Si l'on voulait ajouter, aux propositions dont il a été fait usage ci-dessus, la condition que la loi suivant laquelle la force dépend de la distance a une forme unique, on pourrait déduire, de la seule comparaison des termes qui renferment encore des fonctions indéterminées de r , avec ceux dans lesquels les fonctions sont déjà déterminées, d'autres conséquences sur la forme de ces fonctions ; on arriverait, par des considérations de cette nature, à ce résultat que les fonctions E, F, G et H doivent toutes avoir la forme $\frac{1}{r} \text{ const.}$, de sorte qu'au lieu de ces fonctions indéterminées il ne resterait plus que des constantes indéterminées dans l'expression de X. Mais nous éviterons, pour le moment, de tirer des conséquences de cette sorte ; nous allons plutôt faire usage encore d'une proposition générale.

§ 12.

Application du principe de la conservation de l'énergie.

Nous admettrons maintenant que les actions, que deux particules d'électricité en mouvement exercent l'une sur l'autre, satisfont, par elles-mêmes, au principe de la conservation de l'énergie ; il faut, pour cela, que le travail effectué par ces forces dans le mouvement des particules, pendant l'élément de temps dt , puisse se représenter par la différentielle d'une quantité qui dépend des positions actuelles et de l'état de mouvement des particules.

Afin de pouvoir déterminer ce travail, supposons que l'on forme, à côté de l'expression de X , les expressions correspondantes de Y et de Z ; supposons de même formées les expressions des quantités X' , Y' , Z' qui sont relatives à l'action que la particule e exerce sur la particule e' , ce qui n'exige que la permutation des lettres accentuées et non accentuées. Au moyen de ces expressions, formons la quantité :

$$ee' \left(X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt} + X' \frac{dx'}{dt} + Y' \frac{dy'}{dt} + Z' \frac{dz'}{dt} \right) dt.$$

Pour que le principe de la conservation de l'énergie soit vérifié, il faut que cette quantité soit une différentielle

exacte, c'est-à-dire que la somme des six produits entre parenthèses soit le coefficient différentiel, par rapport à t , d'une fonction des coordonnées et des vitesses composantes des deux particules.

Comme l'expression (58) de X est un peu longue, nous allons en considérer les termes, soit isolément, soit par petits groupes, afin de voir de quelle manière la somme des six produits en est formée.

Le *premier* terme est :

$$\frac{x - x'}{r^3} \quad \text{ou} \quad -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x},$$

et la somme correspondante des six produits sera :

$$-\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \frac{dx'}{dt} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \frac{dy'}{dt} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \frac{dz'}{dt} \right);$$

on peut la réduire à :

$$-\frac{d \frac{1}{r}}{dt}.$$

Le *second* terme est

$$\frac{\partial [J(x - x')]}{\partial s'} \frac{ds'}{dt}.$$

Pour le multiplier par le coefficient différentiel $\frac{dx}{dt}$, décomposons ce dernier dans le produit $\frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt}$,

et multiplions sous le signe de la différentiation par le facteur $\frac{dx}{ds}$, qui est indépendant de s' ; nous aurons :

$$\frac{\partial \left[(J(x-x')) \frac{dx}{ds} \right]}{\partial s'} \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt}.$$

Formons les produits analogues relatifs aux axes des y et des z , et commençons par ajouter ces trois produits seulement, en tenant compte de la relation :

$$(x-x') \frac{dx}{ds} + (y-y') \frac{dy}{ds} + (z-z') \frac{dz}{ds} = r \frac{dr}{ds};$$

nous obtiendrons :

$$\frac{\partial \left(Jr^r \frac{\partial r}{\partial s} \right)}{\partial s'} \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt}.$$

Les trois autres produits donneront de même :

$$\frac{\partial \left(Jr^r \frac{\partial r}{\partial s'} \right)}{\partial s} \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt}.$$

Ces deux expressions sont égales entre elles; car, si nous posons :

$$K = \int Jr^r dr, \quad (59)$$

le coefficient différentiel qui figure comme premier facteur dans ces expressions, pourra se représenter

par $\frac{\partial^2 K}{\partial s \partial s'}$, et la somme des six produits prendra, en conséquence, la forme :

$$2 \frac{\partial^2 K}{\partial s \partial s'} \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt}.$$

Le troisième et le quatrième terme de (58), savoir :

$$\frac{\partial^2 [G(x-x')]}{\partial s'^2} \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 + \frac{\partial [G(x-x')]}{\partial s'} \frac{d^2 s'}{dt^2},$$

pourront se traiter d'une manière tout à fait analogue. La somme des trois premiers produits donne :

$$\frac{\partial^2 \left[Gr \frac{\partial r}{\partial s} \right]}{\partial s'^2} \frac{ds}{dt} \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 + \frac{\partial \left[Gr \frac{\partial r}{\partial s} \right]}{\partial s'} \frac{ds}{dt} \frac{d^2 s'}{dt^2};$$

si l'on pose

$$R = \int Gr dr, \tag{60}$$

cette somme pourra s'écrire :

$$\frac{\partial^3 R}{\partial s \partial s'^2} \frac{ds}{dt} \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 + \frac{\partial^2 R}{\partial s \partial s'} \frac{ds}{dt} \frac{d^2 s'}{dt^2};$$

et les trois autres produits donneront de même :

$$\frac{\partial^3 R}{\partial s^2 \partial s'} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \frac{ds'}{dt} + \frac{\partial^2 R}{\partial s \partial s'} \frac{ds'}{dt} \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

La somme des six produits sera donc :

$$\left(\frac{\partial^2 R}{\partial s \partial s'^2} \frac{ds'}{dt} + \frac{\partial^3 R}{\partial s^2 \partial s'} \frac{ds}{dt} \right) \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt} + \frac{\partial^2 R}{\partial s \partial s'} \left(\frac{ds}{dt} \frac{d^2 s'}{dt^2} + \frac{ds'}{dt} \frac{d^2 s}{dt^2} \right);$$

cette somme peut se réduire à :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial s \partial s'} \right) \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt} + \frac{\partial^2 R}{\partial s \partial s'} \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt} \right)$$

et enfin à :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial s \partial s'} \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt} \right).$$

Le *cinquième* terme

$$\frac{d}{dt} \left(H \frac{dx}{dt} \right)$$

donne, si l'on effectue d'abord la différentiation et qu'on multiplie ensuite par $\frac{dx}{dt}$,

$$\frac{dH}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + H \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2};$$

cette somme peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[H \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \frac{dH}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2.$$

On obtiendra de la même manière, pour l'autre produit relatif à l'axe des x , mais renfermant x' au lieu de x ,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[H \left(\frac{dx'}{dt} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \frac{dH}{dt} \left(\frac{dx'}{dt} \right)^2.$$

Formant enfin les produits correspondants, relatifs aux axes des y et des z , on pourra réduire la somme des six produits à :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ H \left[\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 \right] \right\} + \frac{1}{2} \frac{dH}{dt} \left[\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 \right].$$

Le *sixième* terme

$$- k \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \frac{dx'}{dt} \right)$$

donne, si l'on effectue la différentiation indiquée et qu'on multiplie par $\frac{dx}{dt}$,

$$- k \frac{d}{dt} \frac{1}{r} \frac{dx}{dt} \frac{dx'}{dt} - k \frac{1}{r} \frac{dx}{dt} \frac{d^2x'}{dt^2}.$$

On obtient de la même manière, pour l'autre produit relatif à l'axe des x , mais renfermant x' au lieu de x :

$$- k \frac{d}{dt} \frac{1}{r} \frac{dx}{dt} \frac{dx'}{dt} - k \frac{1}{r} \frac{dx'}{dt} \frac{d^2x}{dt^2}.$$

La somme de ces deux produits peut s'écrire :

$$- k \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \frac{dx}{dt} \frac{dx'}{dt} \right) - k \frac{d}{dt} \frac{1}{r} \frac{dx}{dt} \frac{dx'}{dt}.$$

Formant les produits correspondants, relatifs aux axes des y et des z , et tenant compte de la relation :

$$\frac{dx}{dt} \frac{dx'}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{dy'}{dt} + \frac{dz}{dt} \frac{dz'}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2(r^2)}{\partial s \partial s'} \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt},$$

on obtiendra, pour la somme des six produits :

$$\frac{h}{2} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2(r^2)}{\partial s \partial s'} \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt} \right] + \frac{k}{2} \frac{d^1}{dt} \frac{\partial^2(r^2)}{\partial s \partial s'} \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt}.$$

Le septième terme :

$$\frac{k(x-x')}{2r^3} \frac{\partial^2(r^2)}{\partial s \partial s'} \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt},$$

qui peut s'écrire

$$-\frac{k}{2} \frac{\partial^1}{\partial x} \frac{\partial^2(r^2)}{\partial s \partial s'} \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt},$$

donne, pour la somme des six produits :

$$-\frac{k}{2} \frac{d^1}{dt} \frac{\partial^2(r^2)}{\partial s \partial s'} \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt}.$$

Cette expression, et une partie de celle que nous avons obtenue pour le sixième terme, se détruisent ; de sorte que le sixième et le septième terme réunis donnent simplement, pour la somme des six produits :

$$\frac{h}{2} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2(r^2)}{\partial s \partial s'} \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt} \right].$$

Le huitième terme

$$\frac{\partial F}{\partial s'} \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt}$$

donne, pour la somme des six produits, comme on le voit aisément :

$$\frac{\partial F'}{\partial s'} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{ds'}{dt} + \frac{\partial F}{\partial s} \frac{ds}{dt} \left(\frac{ds'}{dt}\right)^2.$$

Le neuvième et dernier terme

$$\frac{\partial^2 [E(x-x')]}{\partial s \partial s'} \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt}$$

peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial s'} \left[\frac{\partial E}{\partial s} (x-x') + E \frac{dx}{ds} \right] \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt},$$

ou bien

$$\frac{\partial}{\partial s'} \left[r \frac{dE}{dr} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial x} + E \frac{dx}{ds} \right] \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt}.$$

En remplaçant encore $\frac{dx}{dt}$ par $\frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt}$, nous effectuerons la multiplication par $\frac{dx}{ds}$ sous le signe de la différentiation. Si nous formons ensuite les produits correspondants, relatifs aux axes des y et des z , et que nous fassions la somme de ces trois produits, nous obtiendrons :

$$\frac{\partial}{\partial s'} \left[r \frac{dE}{dr} \left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2 + E \right] \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{ds'}{dt},$$

et par suite, pour la somme des six produits :

$$\frac{\partial}{\partial s'} \left[r \frac{dE}{dr} \left(\frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 + E \right] \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \frac{ds'}{dt} + \frac{\partial}{\partial s} \left[r \frac{dE}{dr} \left(\frac{\partial r}{\partial s'} \right)^2 + E \right] \frac{ds}{dt} \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2.$$

Réunissant enfin toutes les expressions trouvées pour la somme des six produits, dans les différents termes de (58), nous obtiendrons la somme totale :

$$\begin{aligned} & - \frac{d^1}{dt} \frac{1}{r} + 2 \frac{\partial^2 K}{\partial s \partial s'} \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial s \partial s'} \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt} \right) \\ & + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ H \left[\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 \right] \right\} + \frac{1}{2} \frac{dH}{dt} \left[\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 \right] \\ & + \frac{k}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt} \right) + \frac{\partial F}{\partial s'} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \frac{ds'}{dt} + \frac{\partial F}{\partial s} \frac{ds}{dt} \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 \\ & + \frac{\partial}{\partial s'} \left[r \frac{dE}{dr} \left(\frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 + E \right] \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \frac{ds'}{dt} + \frac{\partial}{\partial s} \left[r \frac{dE}{dr} \left(\frac{\partial r}{\partial s'} \right)^2 + E \right] \frac{ds}{dt} \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2. \end{aligned}$$

Cette somme pourra s'écrire, en réunissant les termes qui sont des coefficients différentiels par rapport à t , et en ordonnant les autres :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ - \frac{1}{r} + \left[\frac{k}{2r} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} + \frac{\partial^2 R}{\partial s \partial s'} \right] \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt} + \frac{1}{2} H \left[\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 \right] \right\} \\ + 2 \frac{\partial^2 K}{\partial s \partial s'} \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial s} \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 + \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial s'} \left(\frac{ds'}{dt} \right)^3 \\ + \frac{\partial}{\partial s'} \left[r \frac{dE}{dr} \left(\frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 + E + F + \frac{1}{2} H \right] \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \frac{ds'}{dt} \\ + \frac{\partial}{\partial s} \left[r \frac{dE}{dr} \left(\frac{\partial r}{\partial s'} \right)^2 + E + F + \frac{1}{2} H \right] \frac{ds}{dt} \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2. \end{aligned}$$

Pour que les actions que les deux particules d'électricité exercent l'une sur l'autre satisfassent, par elles-mêmes, au principe de la conservation de l'énergie, il faut que toute cette expression soit un coefficient différentiel par rapport à t . Or cette condition est déjà manifestement remplie par la première partie de l'expression; nous n'avons donc plus qu'à en considérer la seconde partie, composée de cinq termes. Ces termes sont tous d'un degré supérieur au premier relativement aux coefficients différentiels du premier ordre $\frac{ds}{dt}$ et $\frac{ds'}{dt}$, tandis que les coefficients différentiels du second ordre $\frac{d^2s}{dt^2}$ et $\frac{d^2s'}{dt^2}$ n'y entrent pas comme facteurs. Il en résulte que ni l'un de ces termes, ni aucun groupe d'entre eux, ne peut être un coefficient différentiel par rapport à t . La somme de ces cinq termes doit donc être nulle, et il n'en peut être ainsi, pour des valeurs arbitraires de $\frac{ds}{dt}$ et $\frac{ds'}{dt}$, que si chacun des cinq termes est nul séparément. Nous obtenons ainsi les cinq équations de condition suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 K}{\partial s \partial s'} &= 0, \\ \frac{\partial H}{\partial s} &= 0, \\ \frac{\partial H}{\partial s'} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial s} \left[r \frac{dE}{dr} \left(\frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 + E + F + \frac{1}{2} H \right] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial s'} \left[r \frac{dE}{dr} \left(\frac{\partial r}{\partial s'} \right)^2 + E + F + \frac{1}{2} H \right] &= 0, \end{aligned} \right\} (61)$$

La première de ces équations, qui peut s'écrire aussi

$$\frac{dK}{dr} \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} + \frac{d^2 K}{d^2 r} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} = 0,$$

ne peut être vérifiée, pour des trajectoires arbitraires des particules d'électricité, que si

$$\frac{dK}{dr} = 0,$$

d'où il résulte, en vertu de (59),

$$J = 0. \tag{62}$$

La seconde et la troisième des équations (61)

$$\frac{\partial \Pi}{\partial s} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Pi}{\partial s'} = 0$$

donnent d'abord :

$$H = \text{const.}$$

Mais, comme l'expression (58) de X renferme le terme $H \frac{d^2 x}{dt^2}$ qui, pour le cas où H aurait une valeur assignable, représenterait une partie constituante de la force, indépendante de la distance mutuelle des particules d'électricité, ce qui ne peut pas être, on doit avoir :

$$H = 0. \tag{63}$$

Les deux dernières des équations (61) s'écrivent, si l'on y fait $H = 0$, et si l'on effectue les différenciations indiquées :

$$\frac{d\left(r\frac{dE}{dr}\right)}{dr} \left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2 \frac{\partial r}{\partial s'} + 2r \frac{dE}{dr} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} + \frac{d(E+F)}{dr} \frac{\partial r}{\partial s'} = 0,$$

$$\frac{d\left(r\frac{dE}{dr}\right)}{dr} \frac{\partial r}{\partial s} \left(\frac{\partial r}{\partial s'}\right)^2 + 2r \frac{dE}{dr} \frac{\partial r}{\partial s'} \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} + \frac{d(E+F)}{dr} \frac{\partial r}{\partial s} = 0.$$

Ces équations ne peuvent être vérifiées, pour des trajectoires quelconques des particules d'électricité, que si l'on a :

$$\frac{dE}{dr} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dF}{dr} = 0, \quad (64)$$

équations qui déterminent suffisamment E et F , puisque leurs coefficients différentiels seulement entrent dans l'équation (58).

Au moyen de ces déterminations, l'expression du travail effectué, pendant l'élément de temps dt , par les actions mutuelles des deux particules d'électricité, prendra cette forme simple :

$$ee' \frac{d}{dt} \left\{ -\frac{1}{r} + \left[\frac{k}{2r} \frac{\partial^2(r^2)}{\partial s \partial s'} + \frac{\partial^2 R}{\partial s \partial s'} \right] \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt} \right\} dt,$$

et l'équation (58) deviendra :

$$X = \frac{x-x'}{r^3} + \frac{\partial^2 \left(\frac{dR}{dr} \frac{x-x'}{r} \right)}{\partial s'^2} \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 + \frac{\partial \left(\frac{dR}{dr} \frac{x-x'}{r} \right)}{\partial s'} \frac{d^2 s'}{dt^2} \left. \vphantom{\frac{\partial^2 \left(\frac{dR}{dr} \frac{x-x'}{r} \right)}{\partial s'^2}} \right\} (65)$$

$$- k \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \frac{dx}{dt} \right) + \frac{k(x-x')}{2r^3} \frac{\partial^2(r^2)}{\partial s \partial s'} \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt}.$$

Cette équation pourra encore s'écrire, plus simplement :

$$X = - \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{r} \left[1 + \frac{k}{2} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt} \right] - k \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \frac{dx'}{dt} \right) \right] + \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial^2 R}{\partial s'^2} \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 + \frac{\partial R}{\partial s'} \frac{d^2 s'}{dt^2} \right]. \quad (66)$$

§ 13.

Le potentiel électrodynamique.

D'après le résultat auquel notre exposition vient de nous conduire, le travail effectué, pendant l'élément de temps dt , par les actions que deux particules d'électricité en mouvement exercent l'une sur l'autre, est représenté par la différentielle de l'expression suivante :

$$- ee' \left\{ \frac{1}{r} - \left[\frac{k}{2r} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} + \frac{\partial^2 R}{\partial s \partial s'} \right] \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt} \right\}.$$

Or, dans la considération des forces électrostatiques, on sait que la quantité, dont la différentielle négative représente le travail, s'appelle le *potentiel* des deux particules d'électricité l'une sur l'autre; par analogie, on pourra donc envisager l'expression précédente,

abstraction faite du signe —, comme un *potentiel*, dans un sens plus étendu. On pourra, de plus, considérer isolément la partie de ce potentiel qui se rapporte aux forces électrostatiques, et celle qui se rapporte aux forces dépendant du mouvement ou électrodynamiques, c'est-à-dire le potentiel *électrostatique* et le potentiel *électrodynamique*. Si nous représentons le premier par U et le second par V, nous aurons :

$$U = \frac{ee'}{r}, \quad (67)$$

$$V = - ee' \left[\frac{k}{2r} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} + \frac{\partial^2 R}{\partial s \partial s'} \right] \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt}. \quad (68)$$

L'expression du potentiel électrodynamique que nous donnons ici est la seule possible dans l'hypothèse d'une seule électricité en mouvement dans un conducteur solide.

La fonction indéterminée de r , qui y entre encore, et qui est désignée par R, ne peut pas se déterminer au moyen des effets des courants fermés ; par suite, dans le cas où l'on voudrait la déterminer aussi, on en serait réduit, pour le moment, à se fonder sur des probabilités.

Si l'on fait l'hypothèse énoncée à la fin du § 11, d'après laquelle la force dépendrait de la distance suivant une loi unique, on arrive à la conclusion que

$$R = k_1 r, \quad (69)$$

k_1 désignant une constante. L'équation (68) devient alors :

$$V = - ee' \left[\frac{k}{2r} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} + k_1 \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} \right] \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt}. \quad (70)$$

Si l'on cherche, en outre, par la détermination de la constante k_1 , à rendre cette expression aussi simple que possible, on trouve d'abord deux valeurs qui fixent particulièrement l'attention en ce sens : ce sont les valeurs $k_1 = 0$ et $k_1 = -k$, qui donnent :

$$V = -k \frac{ee'}{2r} \frac{\partial^2(r^2)}{\partial s \partial s'} \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt}, \quad (71)$$

$$V = -k \frac{ee'}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt}. \quad (72)$$

Ces deux formules sont, dans leur aspect extérieur, à peu près d'une égale simplicité ; mais, si l'on en fait usage dans le calcul, pour en déduire les composantes des forces, on trouve que la première donne des résultats beaucoup plus simples que la seconde, et, par suite, si l'on veut obtenir la loi de force qui est la plus simple possible, tout en satisfaisant aux phénomènes connus jusqu'à ce jour, on devra poser $k_1 = 0$, ou, ce qui revient au même, $R = 0$.

Comme l'expression du potentiel électrodynamique est plus courte et plus facile à embrasser que celles des composantes des forces, elle est particulièrement propre à la comparaison des différentes formules fondamentales de l'Électrodynamique posées jusqu'à ce jour (à l'exception de celle de Gauss, qui ne satisfait pas au principe de la conservation de l'énergie). Nous nous proposons de faire ici cette comparaison. L'équation qui sert à la détermination du potentiel électrodynamique est :

1° D'après Weber¹,

$$V = -\frac{1}{c^2} \frac{ee'}{r} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2,$$

1. *Ann. de Pogg.*, volume jubilaire, p. 212.

2° D'après Riemann¹,

$$V = -\frac{1}{c^2} \frac{ee'}{r} \left[\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy'}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz'}{dt} \right)^2 \right].$$

3° D'après l'analyse que je viens de faire :

a) sous la forme la plus générale :

$$V = -ee' \left[\frac{k}{2r} \frac{\partial^2(r^2)}{\partial s \partial s'} + \frac{\partial^2 R}{\partial s \partial s'} \right] \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt};$$

b) sous une forme plus simple :

$$V = -ee' \left[\frac{k}{2r} \frac{\partial^2(r^2)}{\partial s \partial s'} + k_1 \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} \right] \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt};$$

c) sous la forme la plus simple et, par suite, la plus probable :

$$V = -k \frac{ee'}{2r} \frac{\partial^2(r^2)}{\partial s \partial s'} \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt}.$$

On peut aussi mettre la dernière expression sous la forme :

$$V = k \frac{ee'}{r} \left(\frac{dx}{dt} \frac{dx'}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{dy'}{dt} + \frac{dz}{dt} \frac{dz'}{dt} \right), \quad (73)$$

ou bien, si l'on représente par v et v' les vitesses des deux particules d'électricité, et par ϵ l'angle compris entre leurs directions :

$$V = k \frac{ee'}{r} v v' \cos \epsilon. \quad (74)$$

1. Schwere, Electricität und Magnetismus, nach den Vorlesungen von Bernh. Riemann, bearbeitet von Hattendorff, Hannover, 1876, p. 326.

§ 14.

Recherche des composantes de la force au moyen du potentiel.

Pour déduire maintenant, du potentiel électrostatique et électrodynamique, les composantes de la force, on aura à employer des équations, dans lesquelles le potentiel électrodynamique intervient de la même manière que la force vive dans les équations fondamentales de la Mécanique, données par Lagrange pour un système quelconque de coordonnées. Pour la composante, suivant l'axe des x , de l'action subie par la particule e , nous aurons l'équation :

$$X_{ee'} = \frac{\partial (V - U)}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \frac{dx}{dt}} \right). \quad (75)$$

Dans celle-ci, nous devons remplacer U et V par leurs expressions (67) et (68). De la première de ces expressions, on tire simplement :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = ee' \frac{\partial 1}{\partial x}. \quad (76)$$

La seconde devant être traitée, dans la différentiation, comme une fonction des six coordonnées et des six vitesses composantes, nous la transformerons de telle

sorte que les vitesses composantes y entrent explicitement. Pour plus de facilité, nous décomposerons d'abord V en deux parties, en posant :

$$V = V_1 + V_2; \quad (77)$$

V_1 et V_2 représentent les expressions suivantes :

$$V_1 = -\frac{kee' \partial^2(r^2) ds ds'}{2r \partial s \partial s' dt dt} = \frac{kee'}{r} \left(\frac{dx dx'}{dt dt} + \frac{dy dy'}{dt dt} + \frac{dz dz'}{dt dt} \right),$$

$$V_2 = -ee' \frac{\partial^2 R ds ds'}{\partial s \partial s' dt dt}$$

$$= -ee' \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial x'} \frac{dx dx'}{dt dt} + \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y'} \frac{dx dy'}{dt dt} + \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z'} \frac{dx dz'}{dt dt} \\ + \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x'} \frac{dy dx'}{dt dt} + \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial y'} \frac{dy dy'}{dt dt} + \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial z'} \frac{dy dz'}{dt dt} \\ + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial x'} \frac{dz dx'}{dt dt} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial y'} \frac{dz dy'}{dt dt} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial z'} \frac{dz dz'}{dt dt} \end{array} \right.$$

Nous obtiendrons ainsi, pour la première partie :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial x} &= kee' \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \left(\frac{dx dx'}{dt dt} + \frac{dy dy'}{dt dt} + \frac{dz dz'}{dt dt} \right) \right) \\ &= -\frac{k}{2} ee' \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2(r^2) ds ds'}{\partial s \partial s' dt dt} \right), \end{aligned} \right\} (78)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial \frac{dx}{dt}} = \frac{kee'}{r} \frac{dx'}{dt},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V_1}{\partial \frac{dx}{dt}} \right) = kee' \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \frac{dx'}{dt} \right); \quad (79)$$

et pour la seconde partie :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial V_2}{\partial x} &= -ee' \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial s \partial s'} \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt} \right), \\
 \frac{\partial V_2}{\partial x} &= -ee' \left(\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial x} \frac{dx'}{dt} + \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y'} \frac{dy'}{dt} + \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z'} \frac{dz'}{dt} \right) \\
 &= -ee' \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial x'} \frac{dx'}{dt} + \frac{\partial R}{\partial y'} \frac{dy'}{dt} + \frac{\partial R}{\partial z'} \frac{dz'}{dt} \right) \\
 &= -ee' \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial s'} \frac{ds'}{dt} \right), \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} \right) &= -ee' \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial s'} \frac{ds'}{dt} \right) \right],
 \end{aligned} \tag{80}$$

ce qui pourra s'écrire :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} \right) = -ee' \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial s'} \frac{ds'}{dt} \right) \right],$$

ou bien enfin :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} \right) = -ee' \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 R}{\partial s \partial s'} \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt} + \frac{\partial^2 R}{\partial s'^2} \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 + \frac{\partial R}{\partial s'} \frac{d^2 s'}{dt^2} \right]. \tag{81}$$

Si l'on porte dans l'équation (75) les expressions (76), (78), (79), (80) et (81), après avoir substitué à V, dans cette équation $V_1 + V_2$, on obtient :

$$X = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \left[1 + \frac{k}{2} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt} \right] - k \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \frac{dx'}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 R}{\partial s'^2} \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 + \frac{\partial R}{\partial s'} \frac{d^2 s'}{dt^2} \right],$$

ce qui est l'équation (66) donnée plus haut.

Le calcul se simplifie évidemment beaucoup, si l'on attribue à R la valeur zéro, que nous avons regardée au §13 comme la plus probable. On obtient, dans ce cas :

$$\begin{aligned} X &= -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \left(1 - \frac{k}{2} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt} \right) - k \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \frac{dx'}{dt} \right) \\ &= -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \left[1 - k \left(\frac{dx}{dt} \frac{dx'}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{dy'}{dt} + \frac{dz}{dt} \frac{dz'}{dt} \right) \right] - k \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \frac{dx'}{dt} \right) \\ &= -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} (1 - k v v' \cos \epsilon) - k \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \frac{dx'}{dt} \right). \end{aligned} \quad (82)$$

C'est sous cette forme que j'ai d'abord donné, dans une communication du mois de février 1876, l'équation qui sert à la détermination de la composante de la force suivant l'un des axes coordonnés, et qui se forme naturellement d'une manière analogue relativement aux deux autres axes.

§ 15.

Loi de force pour des éléments de courant.

Si l'on veut déterminer la composante, suivant l'axe des x , de l'action qu'un élément de courant ds' exerce sur un élément ds , on devra appliquer l'équation (66) aux quatre combinaisons suivantes des quantités d'électricité, prises deux à deux, hds et $h'ds'$, hds et $-h'ds'$, $-hds$ et $h'ds'$, $-hds$ et $-h'ds'$, en considérant les quantités hds et $h'ds'$ comme étant en mouvement, et $-hds$ et $-h'ds'$ comme étant en repos. On aura à faire la somme algébrique des quatre expressions ainsi obtenues. De cette manière on arrivera à l'expression suivante de la composante cherchée :

$$hh' ds ds' k \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{dx'}{ds'} \right] \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt}$$

ou bien

$$hh' ds ds' k \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos \varepsilon - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{dx'}{ds'} \right) \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt}$$

Si l'on représente, pour les deux courants respectivement, par i et par i' l'intensité du courant, c'est-à-dire la quantité d'électricité qui traverse, pendant l'unité de temps, la section normale du conducteur, cette quantité étant mesurée d'après la même unité mécanique que celle qui a été usitée dans toutes les équations précédentes, on pourra substituer i et i' aux produits $h \frac{ds}{dt}$ et $h' \frac{ds'}{dt}$, et l'on trouvera, pour la composante, suivant l'axe des x , de l'action que l'élément de courant ds' exerce sur l'élément ds , l'expression :

$$k i i' ds ds' \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos \varepsilon - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{dx'}{ds} \right).$$

Dans cette expression ne figure pas la fonction indéterminée R , qui a disparu dans la formation de la somme mentionnée plus haut. Nous sommes donc arrivé, pour la composante, suivant une direction déterminée, de l'action qu'un élément de courant exerce sur un autre, à une expression entièrement déterminée, dont nous pouvons dire qu'elle est la seule qui soit compatible avec les deux hypothèses suivantes : qu'il n'y a qu'une seule électricité en mouvement dans un conducteur solide, et que les actions réciproques des deux particules d'électricité satisfont, par elles-mêmes, au principe de la conservation de l'énergie.

Déjà, en 1845 (Ann. de Pogg. t. 64, p. 1), H. Grassmann a déduit, par des considérations très ingénieuses d'un tout autre ordre, une expression de la force exercée par un élément de courant sur un autre, expression qui concorde parfaitement avec la précédente; c'est une heureuse confirmation de la théorie que nous avons développée ci-dessus.

CHAPITRE X.

APPLICATION DU NOUVEAU PRINCIPE D'ÉLECTRODYNAMIQUE AUX FORCES PONDÉROMOTRICES ET ÉLECTROMOTRICES QUI ONT LIEU ENTRE DES COURANTS LINÉAIRES ET DES CONDUCTEURS.

§ 1.

Particularités qui distinguent le nouveau principe d'électrodynamique.

Dans le chapitre précédent, nous avons déduit, relativement à l'action réciproque de deux particules électriques en mouvement, un nouveau principe qui se distingue très essentiellement des principes exposés antérieurement. Au § 13 de ce chapitre, nous avons déjà rendu cette différence sensible en réunissant les formules correspondantes du potentiel électrodynamique suivant les différentes lois ; mais il ne sera pas inutile d'entreprendre encore ici cette comparaison à un point de vue plus particulier.

Quand deux points se meuvent, on peut, comme on le sait, outre les mouvements absolus des deux points isolés, considérer encore leur mouvement relatif. Mais on peut encore se faire deux conceptions essentiellement différentes du *mouvement relatif*. Soient x, y, z et x', y', z'

les coordonnées rectangulaires des deux points, de sorte que $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ et $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$ représentent les composantes des vitesses dans les deux mouvements absolus; alors :

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} - \frac{dy'}{dt}, \quad \frac{dz}{dt} - \frac{dz'}{dt},$$

sont les composantes de la vitesse du mouvement relatif dans le sens usuel du mot. Mais plusieurs auteurs, et en particulier W. Weber, n'ont entendu par ces mots que l'augmentation ou la diminution de la distance des deux points, en sorte que, si r désigne cette distance, au temps t , la vitesse relative est représentée par $\frac{dr}{dt}$. Pour exprimer cette dernière vitesse relative, en fonction des composantes des vitesses absolues, on doit différencier l'équation :

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

par rapport à t , et l'on obtient :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r} \left[(x-x') \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt} \right) + (y-y') \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy'}{dt} \right) + (z-z') \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz'}{dt} \right) \right]. \quad (1)$$

Les trois formules données par Weber, par Riemann, et par moi, pour exprimer le potentiel électrodynamique de deux particules électriques en mouvement l'une sur l'autre, ne se distinguent essentiellement les unes des autres qu'en ce que l'une ou l'autre espèce de vitesse relative ou les vitesses absolues s'y présentent.

La formule de Weber ne contient que la vitesse relative de la seconde espèce, cette formule étant :

$$V = -\frac{1}{c^2} \frac{ee'}{r} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2.$$

Si l'on remplace $\frac{dr}{dt}$ par l'expression ci-dessus, cette formule devient :

$$V = -\frac{1}{c^2} \frac{ee'}{r^3} \left[(x-x') \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt} \right) + (y-y') \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy'}{dt} \right) + (z-z') \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz'}{dt} \right) \right]^2. \quad (2a)$$

Dans la formule de Riemann, c'est la vitesse relative de la première espèce qui intervient, car cette formule est :

$$V = -\frac{1}{c^2} \frac{ee'}{r} \left[\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy'}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz'}{dt} \right)^2 \right]. \quad (3)$$

Enfin, dans ma formule, se présentent les composantes des vitesses absolues puisque

$$V = k \frac{ee'}{r} \left(\frac{dx}{dt} \frac{dx'}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{dy'}{dt} + \frac{dz}{dt} \frac{dz'}{dt} \right). \quad (4)$$

On reconnaît tout de suite, par la comparaison des formules (2a), (3) et (4), que la dernière de ces formules est de beaucoup la plus simple, quant aux vitesses absolues, puisqu'elle est homogène et du premier degré aussi bien en $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$ qu'en $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$ et $\frac{dz'}{dt}$, tandis

que les deux premières formules contiennent les composantes de la vitesse sous forme quadratique. Cette circonstance contribue beaucoup à la simplification des calculs à effectuer à l'aide du potentiel, et, à côté de cela il y a cet avantage, que je considère comme fondamental, que la loi de force exprimée par ma formule est plus généralement admissible que les deux autres.

Les lois exposées par Weber et par Riemann ne peuvent, comme nous l'avons vu au commencement du chapitre précédent, être mises en harmonie avec l'expérience que si l'on fait l'hypothèse particulière qu'un courant galvanique est formé de deux courants opposés d'électricité positive et négative. Il en est autrement de la loi que j'ai posée. Dans la manière dont je l'ai déduite ci-dessus, j'ai, pour simplifier, fait aussi une hypothèse particulière sur la nature du mouvement électrique dans les conducteurs, savoir que l'électricité positive seule se meut, tandis que la négative reste fixée aux atomes pondérables. Mais j'ai déjà montré au § 11 que la formule ainsi obtenue n'est pas seulement valable pour le cas où une seule électricité se meut, mais qu'elle l'est encore lorsqu'on admet que le courant électrique comprend deux courants d'électricité positive et négative marchant dans des sens opposés, et il est même indifférent que ces deux courants aient des intensités égales ou différentes. En effet, on peut aisément se convaincre qu'on satisfait encore à tous les faits expérimentaux invoqués dans le chapitre précédent comme bases du calcul, lorsqu'on applique l'expression obtenue pour la force à une combinaison de deux courants opposés d'électricité positive et négative dont les intensités sont quelconques.

Cette généralité plus grande de la validité de ma formule est très importante. Si l'on se rallie notamment, comme je le fais, à l'hypothèse faite par C. Neumann que l'électricité négative reste fixée aux atomes pondérables, le courant d'électricité négative n'est exclu que pour les conducteurs qui conduisent l'électricité sans que les atomes se meuvent en même temps. Au contraire, dans les conducteurs électrolytiques, pour lesquels la conductibilité a lieu par l'intermédiaire du mouvement des molécules partielles positives et négatives, on doit admettre des mouvements dans des sens opposés pour les molécules partielles électrisées aussi d'une manière opposée, mouvements qui n'ont pas besoin d'avoir lieu avec des vitesses égales à cause de la mobilité différente des différentes molécules partielles. Il s'ensuit qu'une loi de force, dont la validité est liée à une hypothèse bien déterminée sur le mouvement de l'électricité négative (soit que cette électricité se meuve tout aussi vite que la positive, ou qu'elle ne se meuve pas), qu'une telle loi, disons-nous, ne peut être appliquée à tous les courants dans les conducteurs métalliques et électrolytiques ; cela ne peut se faire qu'avec une loi de force dont la validité est indépendante de la question de savoir si l'électricité négative se meut et avec quelle vitesse.

Dans les développements généraux qui suivent, nous introduirons par suite non-seulement un courant pour l'électricité positive, mais aussi un courant pour la négative, mais nous laisserons indéterminé le rapport des vitesses des deux électricités, en introduisant deux notations différentes pour ces deux vitesses, auxquelles nous pourrions ultérieurement donner des valeurs quelconques. De la sorte, nous pouvons, pour chaque conducteur électrolytique, admettre un rapport des deux vitesses tel que le comporte la nature du conducteur,

et pour les conducteurs métalliques, nous pouvons, d'après la manière de voir de Neumann, évaluer à zéro la vitesse de l'électricité négative. On pourrait aussi, si l'on voulait se rallier à la manière de voir de Weber, poser, pour les conducteurs métalliques, la vitesse de l'électricité négative égale à celle de la positive. Les formules que nous obtiendrons de cette manière auront donc l'avantage que l'on peut également bien les accommoder aux diverses sortes de conducteurs et aux diverses manières de voir sur le mouvement de l'électricité.

§ 2.

Application du nouveau principe aux électricités se mouvant dans des conducteurs linéaires en mouvement.

Appliquons maintenant le nouveau principe à déterminer les forces pondéromotrices s'exerçant entre deux courants linéaires, et les actions d'induction exercées par un courant linéaire sur un conducteur linéaire.

D'après ce principe, si $X_{ee'}$ représente la composante suivant l'axe des x de la force qu'éprouve au temps t une particule électrique e mobile, au point x, y, z , de la part d'une autre particule e' mobile, au point x', y', z' , distant du premier de r , on aura l'équation :

$$X = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{r} \left[1 - k \left(\frac{dx}{dt} \frac{dx'}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{dy'}{dt} + \frac{dz}{dt} \frac{dz'}{dt} \right) \right] - k \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \frac{dx'}{dt} \right) \right]. \quad (5)$$

Pour pouvoir écrire plus commodément cette équation ainsi que celles qui suivront, nous introduirons un signe sommatoire d'une signification spéciale. Lorsqu'une somme comprendra trois termes se rapportant aux trois axes coordonnés, mais identiques entre eux pour le reste, nous n'écrirons que le terme relatif à la direction des x et nous indiquerons l'existence des autres par le signe sommatoire, ainsi qu'on le voit dans l'équation suivante :

$$\sum \frac{dx}{dt} \frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{dx'}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{dy'}{dt} + \frac{dz}{dt} \frac{dz'}{dt}.$$

Par là, l'équation ci-dessus devient :

$$X = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \left(1 - k \sum \frac{dx}{dt} \frac{dx'}{dt} \right) - k \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \frac{dx'}{dt} \right) \right). \quad (5a)$$

Appliquons maintenant cette équation aux électricités en mouvement dans deux conducteurs linéaires. Soient donc donnés deux conducteurs s et s' parcourus par des courants galvaniques ; ces conducteurs peuvent se mouvoir et les intensités des courants peuvent être variables. Dans l'élément de conducteur ds , imaginons deux quantités égales d'électricité positive et négative, que nous désignerons par hds et $-hds$. La vitesse de circulation de l'électricité positive sera c dans le sens où nous considérons l'arc s comme croissant, tandis que la vitesse de circulation de l'électricité négative sera $-c$, dans le sens opposé. De même, nous désignerons par $h'ds'$ et $-h'ds'$ les quantités d'électricité contenues dans l'élément de conducteur ds' , et par c' et $-c'_1$ les vitesses des courants correspondants.

Considérons d'abord deux particules électriques quelconques se mouvant dans les deux conducteurs et qui se trouvent, au temps t , aux points x, y, z et x', y', z' à une distance r l'une de l'autre; chacune d'elles a d'abord un mouvement dans le conducteur, que nous appellerons simplement mouvement de *circulation* et dont la vitesse sera désignée comme ci-dessus, pour l'électricité positive, par c dans l'un des conducteurs et par c' dans l'autre; outre ce mouvement, chacune de ces particules en possède un autre du à ce que le conducteur se meut. Pour distinguer ce qui revient à chacun de ces deux mouvements dans la variation des coordonnées et de la distance, nous introduirons la notation suivante.

Nous considérerons les coordonnées d'un point fixe dans un des conducteurs comme étant simplement des fonctions du temps t , tandis que nous imaginerons que les coordonnées d'une particule électrique circulant dans s seront représentées par des fonctions de s et de t , où s sera de nouveau considéré comme une fonction de t . De la sorte, la dérivée totale par rapport à t de la coordonnée x sera :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial s} \frac{ds}{dt},$$

ou bien, en introduisant la notation c pour le coefficient différentiel $\frac{ds}{dt}$ qui représente la vitesse de circulation :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t} + c \frac{\partial x}{\partial s}. \quad (6)$$

De même, on aura pour la particule circulant dans le conducteur s' avec la vitesse c' :

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{\partial x'}{\partial t} + c' \frac{\partial x'}{\partial s'}. \quad (7)$$

On aura naturellement à former des équations analogues pour les deux autres directions des coordonnées.

La distance r qui sépare les deux particules électriques dépend immédiatement de t à cause du mouvement des deux conducteurs et ensuite de s et de s' , et par là intermédiairement de t , à cause du mouvement des particules dans les conducteurs s et s' . La dérivée totale de $\frac{1}{r}$ par rapport à t est donc :

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dt} = \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial t} + c \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial s} + c' \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial s'}. \quad (8)$$

Comme il se présente dans l'équation (5_a) une seconde différentiation par rapport à t , nous avons encore à examiner de près les vitesses c et c' . Dans un courant galvanique, la vitesse de circulation des électricités peut varier, avec le temps, en chaque lieu du conducteur, parce que l'intensité du courant peut être variable, et ensuite la vitesse peut être différente en différents lieux du conducteur, dans le cas où celui-ci n'est pas partout identique en section et en nature. Si, conformément à cela, nous traitons comme une fonction de s et de t la vitesse de circulation dans le conducteur de la particule électrique que nous avons considérée, nous aurons à poser :

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial c}{\partial s}. \quad (9)$$

De même, nous aurons pour la particule électrique se mouvant dans le conducteur s' :

$$\frac{dc'}{dt} = \frac{\partial c'}{\partial t} + c' \frac{\partial c'}{\partial s'}. \quad (10)$$

Après ces remarques préliminaires sur la manière de traiter les quantités auxquelles nous aurons affaire, nous déterminerons la force, qu'un *élément de courant* ds' exercerait sur une *unité d'électricité supposée concentrée en un point*, si celle-ci circulait avec la vitesse c dans le conducteur s .

Déterminons d'abord la force exercée, sur cette unité d'électricité, par la quantité d'électricité *positive* $h'ds'$ contenue dans l'élément ds' et circulant avec la vitesse c' . La composante — x de cette force sera représentée par le produit $h'ds' X$, où X sera remplacé par l'expression (5_a), ce qui donne

$$- h' ds' \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \left(1 - k \sum \frac{dx}{dt} \frac{dx'}{dt} \right) - kh' ds' \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \frac{dx'}{dt} \right) \right).$$

Examinons de plus près le dernier terme. La quantité $\frac{1}{r} \frac{dx'}{dt}$ prend, par la substitution de l'expression (7) de $\frac{dx'}{dt}$, la forme :

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial x'}{\partial t} + c' \frac{\partial x'}{\partial s'} \right);$$

elle doit être considérée comme une fonction de t , s et s' ; et par suite, la différentiation totale par rapport à t donne :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \frac{dx'}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r} \frac{dx'}{dt} \right) + c \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{r} \frac{dx'}{dt} \right) + c' \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{1}{r} \frac{dx'}{dt} \right).$$

On aura à multiplier cette équation par h' , et alors le dernier terme pourra être transformé comme suit :

$$h' c' \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{1}{r} \frac{dx'}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{h' c' dx'}{r dt} \right) - \frac{1}{r} \frac{dx'}{dt} \frac{\partial (h' c)}{\partial s'}.$$

En même temps, on aura à considérer dans les différenciations indiquées dans le terme précédent que r seul dépend de s . Il viendra ainsi :

$$h' \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \frac{dx'}{dt} \right) = h' \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r} \frac{dx'}{dt} \right) + h' c \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{dx'}{dt} + \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{h' c'}{r} \frac{dx'}{dt} \right) - \frac{1}{r} \frac{d\omega'}{dt} \frac{\partial (h' c')}{\partial s'}. \quad)11)$$

Le coefficient différentiel $\frac{\partial (h' c')}{\partial s'}$ peut être remplacé par un autre. L'élément de conducteur ds' est limité par deux sections, qui se trouvent aux points déterminés par les arcs s' et $s' + ds'$. Par la première section pénètre, dans l'élément, pendant le temps dt , la quantité d'électricité positive $h' c' dt$. Par la seconde section, il en sort la quantité :

$$\left(h' c' + \frac{\partial (h' c')}{\partial s'} ds' \right) dt.$$

L'accroissement de la quantité d'électricité positive dans l'élément est donc :

$$- \frac{\partial (h' c')}{\partial s'} ds' dt.$$

pendant le temps dt .

Mais cet accroissement est d'autre part aussi représenté par :

$$\frac{\partial h'}{\partial t} ds' dt,$$

et l'on obtient ainsi l'équation :

$$\frac{\partial(h'c')}{\partial s'} = - \frac{\partial h'}{\partial t}; \quad (12)$$

ce qui permet de transformer l'équation (11) en :

$$h' \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \frac{dx'}{dt} \right) = h' \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r} \frac{dx'}{dt} \right) + h' c' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'} \frac{dx'}{dt} + \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{h' c'}{r} \frac{dx'}{dt} \right) + \frac{1}{r} \frac{dx'}{dt} \frac{\partial h'}{\partial t}.$$

On peut ici réunir, en un seul, le premier et le dernier terme du second membre, ce qui donne :

$$h' \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \frac{dx'}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h' c'}{r} \frac{dx'}{dt} \right) + h' c' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'} \frac{dx'}{dt} + \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{h' c'}{r} \frac{dx'}{dt} \right). \quad (13)$$

En substituant cette valeur dans le dernier terme de l'expression ci-dessus de la composante de la force, celle-ci devient :

$$- h' ds' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \left(1 - k \sum \frac{dx}{dt} \frac{dx'}{dt} \right) - h' ds' \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h' c'}{r} \frac{dx'}{dt} \right) + h' c' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'} \frac{dx'}{dt} + \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{h' c'}{r} \frac{dx'}{dt} \right) \right].$$

Nous avons encore enfin à substituer ici pour $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dx'}{dt}$ leurs valeurs (6) et (7), et nous obtenons ainsi l'expression

suyvante de la force exercée par la quantité d'électricité positive $h' ds'$:

$$\begin{aligned}
 & - h' ds' \frac{\partial^{\frac{1}{r}}}{\partial x} \left[1 - k \sum \left(\frac{\partial x}{\partial t} + c \frac{\partial x}{\partial s} \right) \left(\frac{\partial x'}{\partial t} + c' \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \right] \\
 & - k ds' \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h' c'}{r} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{h' c'}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) + c \frac{\partial^{\frac{1}{r}}}{\partial s} \left(h' \frac{\partial x'}{\partial t} + h' c' \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{h' c'}{r} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{h' c'^2}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Si l'on veut ensuite exprimer la composante suivante, l'axe x de la force exercée par la quantité d'électricité négative $- h' ds'$ contenue dans l'élément ds' , sur l'unité d'électricité supposée située dans le conducteur s , il suffira de remplacer dans l'expression précédente h' et c' par $- h'$ et $- c'_1$, et l'on obtiendra :

$$\begin{aligned}
 & h' ds' \frac{\partial^{\frac{1}{r}}}{\partial x} \left[1 - k \sum \left(\frac{\partial x}{\partial t} + c \frac{\partial x}{\partial s} \right) \left(\frac{\partial x'}{\partial t} - c'_1 \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \right] \\
 & - k ds' \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(- \frac{h' c'_1}{r} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{h' c'_1}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) + c \frac{\partial^{\frac{1}{r}}}{\partial s} \left(- h' \frac{\partial x'}{\partial t} + h' c'_1 \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{h' c'_1}{r} \frac{\partial x'}{\partial t} - \frac{h' c'^2_1}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \right].
 \end{aligned}$$

En ajoutant ces deux expressions, nous obtenons la composante suivant l'axe x de la force à déterminer, savoir celle que l'élément de courant ds' exercerait sur une unité d'électricité supposée dans le conducteur s et circulant avec la vitesse c . En faisant cette somme,

on considèrera que la somme $h'c' + h_1c_1$ représente l'intensité du courant dans s' , intensité que nous désignerons par i' et que nous supposerons la même dans toutes les parties du conducteur. Si nous représentons cette composante x par la notation $r ds'$, nous obtenons :

$$r = k \left[i' \frac{\partial^1}{\partial x} \sum \left(\frac{\partial x}{\partial t} + c \frac{\partial x}{\partial s} \right) \frac{dx'}{\partial s'} - \frac{\partial}{\partial t} \left(i' \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) - c i' \frac{\partial^1}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} - i' \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{c' - c_1}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \right].$$

Les équations qui déterminent les composantes x et y de la même force ont naturellement des formes analogues.

§ 3.

Force pondéromotrice entre deux éléments de courants.

A l'aide de la force ainsi déterminée, qui est celle qu'exercerait un élément de courant ds' sur une unité d'électricité supposée dans le conducteur s , nous pouvons facilement rechercher les forces que les quantités d'électricité $h ds$ et $-h ds$, réellement contenues dans l'élément de conducteur ds , éprouvent de la part de l'élément de courant ds' .

Pour obtenir la composante suivant l'axe des x de la force que subit la quantité d'électricité positive $h ds$, dont la vitesse est c , il suffit de multiplier l'expression ci-dessus de \mathbf{r} par $h ds ds'$, de sorte que cette composante est représentée par :

$$kh ds ds' \left[i' \frac{\partial^{\frac{1}{r}}}{\partial x} \sum \left(\frac{\partial x}{\partial t} + c \frac{\partial x}{\partial s} \right) \frac{\partial x'}{\partial s'} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{i'}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) - c i' \frac{\partial^{\frac{1}{r}}}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} - i' \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{c' - c_1}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \right].$$

Pour obtenir ensuite la composante x de la force que subit la quantité d'électricité négative $-h ds$, nous n'avons qu'à remplacer dans l'expression précédente h et c par $-h$ et $-c_1$, et nous obtenons :

$$-kh ds ds' \left[i' \frac{\partial^{\frac{1}{r}}}{\partial x} \sum \left(\frac{\partial x}{\partial t} - c_1 \frac{\partial x}{\partial s} \right) \frac{\partial x'}{\partial s'} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{i'}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) + c_1 i' \frac{\partial^{\frac{1}{r}}}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} - i' \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{c' - c_1}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \right].$$

La somme de ces deux expressions donne la composante x de la force pondéromotrice que l'élément de courant ds subit de la part de l'élément ds' . Dans cette somme, tous les termes où c et c_1 n'entrent pas comme facteurs s'entredétruisent, et il reste :

$$kh ds ds' (c + c_1) i' \left(\frac{\partial^{\frac{1}{r}}}{\partial x} \sum \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} - \frac{\partial^{\frac{1}{r}}}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s} \right).$$

On peut encore remplacer par i le produit $h(c + c_1)$, qui représente l'intensité du courant dans s . Conformément à notre notation antérieure, nous égalerons cette expression à $\xi ds ds'$ et nous obtiendrons l'équation qui détermine ξ , à laquelle nous adjoindrons les équations correspondantes en η et ζ ; nous aurons :

$$\left. \begin{aligned} \xi &= k i v \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \sum \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} - \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \\ \eta &= k i i, \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} \sum \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} - \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{r} \frac{\partial y'}{\partial s'} \right) \\ \zeta &= k i z \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \sum \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} - \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{r} \frac{\partial z'}{\partial s'} \right) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

On peut encore transformer ces équations en substituant aux sommes qui y figurent des expressions équivalentes. De l'équation :

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

il résulte :

$$\frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} = -2 \left(\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial y'}{\partial s'} + \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial z'}{\partial s'} \right) = -2 \sum \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'}.$$

Si l'on désigne ensuite, comme ci-dessus, par $(s s')$ l'angle des deux directions des éléments ds et ds' , il vient :

$$\cos (s s') = \sum \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'}.$$

En vertu de ces deux équations, on peut donner à la première des équations (15) les formes suivantes :

$$\xi = -kii' \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{r} \frac{\partial x'}{\partial s} \right) \quad (16)$$

$$\xi = kii' \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \cos (ss') - \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{r} \frac{\partial x'}{\partial s} \right), \quad (17)$$

et les deux autres équations (15) peuvent naturellement aussi être transformées d'une façon analogue.

En ce qui concerne les expressions que nous venons d'obtenir et qui sont celles que nous avons déjà déduites, dans le dernier paragraphe du chapitre précédent, pour les composantes de la force pondéromotrice que subit l'élément ds de la part de l'élément ds' , il est à remarquer qu'elles ne sont pas influencées par l'une ou l'autre circonstance suivante, à savoir : que le courant galvanique consiste dans le mouvement d'une seule électricité ou des deux, que les éléments de courants soient au repos ou en mouvement, et que les intensités soient constantes ou variables.

Quant à la direction, la force déterminée par ces expressions se distingue essentiellement de celle admise par Ampère, car elle n'agit pas suivant la ligne de jonction des deux éléments de courant.

On peut facilement déterminer géométriquement la droite passant par le milieu de ds , suivant laquelle la force agit. D'après la forme des expressions ci-dessus, qui comprennent chacune deux termes, on peut décomposer la force en deux composantes, dont l'une est une attraction dont la grandeur est

$$kii' ds ds' \frac{\cos (ss')}{r^2},$$

et dont l'autre a la direction de ds' et a pour grandeur :

$$- kii' ds ds' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \quad \text{ou} \quad kii' ds ds' \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial s}.$$

De là résulte que la ligne d'action de la force est dans le plan passant par r et ds' . Dans ce plan, sa direction est déterminée par ce fait, qu'elle doit être perpendiculaire à l'élément ds . En effet, la composante de la force suivant la direction ds est représentée par :

$$ds ds' \left(\xi \frac{\partial x}{\partial s} + \eta \frac{\partial y}{\partial s} + \zeta \frac{\partial z}{\partial s} \right),$$

et si l'on substitue ici pour ξ , η , ζ les expressions (15), en tenant compte de l'équation :

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s},$$

tous les termes se détruisent de sorte que l'expression est nulle, et que la force ne peut être que perpendiculaire à l'élément.

Un autre point essentiel, dans lequel la force déduite du nouveau principe diffère de celle d'Ampère, est le suivant. Quand deux éléments de courant sont dirigés de telle sorte qu'ils coïncident avec leur ligne de jonction, ils exercent l'un sur l'autre, d'après la formule d'Ampère, une répulsion ou une attraction, suivant que les courants les parcourent dans le même sens ou dans des sens opposés. Au contraire, d'après la formule précédente, la force est nulle dans ce cas.

Je ne pense pas qu'aucun fait expérimental bien établi aille à l'encontre de ce résultat. On considère généralement comme une démonstration de l'exactitude du phénomène déduit de la formule d'Ampère, le mouvement que prend un flotteur métallique posé sur deux rigoles parallèles remplies de mercure, lors du passage d'un courant; mais une telle conclusion ne paraît pas fondée, car ce mouvement peut aussi s'expliquer autrement, notamment par l'action que l'électricité exerce sur les atomes pondérables, lors de son passage du mercure dans le conducteur et inversement, action qui a lieu aussi dans les conducteurs cohérents, mais qui ne peut alors produire aucun mouvement sensible, et se transforme en chaleur.

Pour poursuivre la comparaison de la formule ci-dessus avec celle d'Ampère, on peut se servir de l'équation (2) du chapitre XIII qui est déduite de cette dernière :

$$\xi = kii' \left\{ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos(ss') - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} + \frac{\partial}{\partial s'} \left[(x' - x) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \right] \right\}.$$

Cette équation ne diffère de l'équation (17) que par le dernier terme. Comme celui-ci est un quotient différentiel en s' , il donne un résultat nul lors de l'intégration pour un courant fermé s' , ou encore pour un système quelconque de courants fermés. De là il résulte que, dans tous les cas où il s'agit des forces pondéramotrices dues à des courants fermés (et par suite aussi à des aimants), les résultats déduits de la formule d'Ampère concordent avec ceux qui se déduisent du nouveau principe.

§ 4.

Détermination de la force électromotrice induite.

Revenons maintenant à l'équation (14) :

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = k \left[i' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \sum \left(\frac{\partial x}{\partial t} + c \frac{\partial x}{\partial s} \right) \frac{\partial x'}{\partial s'} - \frac{\partial}{\partial t} \left(i' \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) - c i' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right. \\ \left. - i' \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{c' - c_1}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \right]. \end{aligned}$$

La quantité \mathbf{r} déterminée par cette équation est définie de telle sorte que le produit $\mathbf{r} ds'$ représente la composante de la force qu'exerce l'élément de courant ds' sur une unité d'électricité circulant dans le conducteur s avec la vitesse c . Si l'on désigne les composantes y et z de la même force par $\mathfrak{y} ds'$ et $\mathfrak{z} ds'$, les quantités \mathfrak{y} et \mathfrak{z} seront déterminées par des équations entièrement analogues. Si l'on désigne ensuite par $\mathfrak{s} ds'$ la composante de la même force suivant la direction du conducteur s , on aura l'équation :

$$\mathfrak{s} = \mathbf{r} \frac{\partial x}{\partial s} + \mathfrak{y} \frac{\partial y}{\partial s} + \mathfrak{z} \frac{\partial z}{\partial s}.$$

Cette quantité, qui, comme on le verra par la suite, est indépendante de c , est en rapport immédiat avec une autre, de la détermination de laquelle il va être question. Le produit $s ds ds'$ représente en effet *la force électromotrice induite par l'élément de courant ds' dans l'élément de conducteur ds* . Si l'on désigne par E la force électromotrice induite par un courant fini s' dans un conducteur fini s , et par suite par $\frac{\partial^2 E}{\partial s \partial s'}$ $ds ds'$ la force électromotrice induite par l'élément de courant ds' dans l'élément du conducteur ds , on devra poser :

$$\mathfrak{z} = \frac{\partial^2 E}{\partial s \partial s'}.$$

L'équation ci-dessus devient donc :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial s \partial s'} = \mathfrak{r} \frac{\partial x}{\partial s} + \mathfrak{y} \frac{\partial y}{\partial s} + \mathfrak{z} \frac{\partial z}{\partial s}. \quad (18)$$

Si l'on remplace \mathfrak{r} par l'expression donnée plus haut, et \mathfrak{y} et \mathfrak{z} par les expressions correspondantes, les termes affectés du facteur c s'entredétruisent, et il reste :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial s \partial s'} = k \left[i' \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{r} \sum \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial x'}{\partial s'} - \sum \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{i'}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \right. \\ \left. - i' \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{1}{r} \sum \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{c' - c_1}{r} \sum \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \right]. \end{aligned}$$

On peut poser :

$$i' \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{r} \sum \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial x'}{\partial s'} = i' \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{r} \sum \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) - \frac{i'}{r} \sum \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'};$$

puis :

$$-\frac{i'}{r} \sum \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} - \sum \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{i'}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{i'}{r} \sum \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right);$$

et l'équation ci-dessus devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial s \partial s'} = k & \left[-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{i'}{r} \sum \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) + i' \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{r} \sum \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \right. \\ & \left. - i' \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{1}{r} \sum \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{c' - c_1}{r} \sum \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \right]. \quad (19) \end{aligned}$$

On peut donner à cette équation une forme un peu différente. Si $d\sigma$ et $d\sigma'$ sont les trajectoires infiniment petites parcourues dans le temps dt par les éléments de conducteur ds et ds' , on peut poser :

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{\partial x'}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial \sigma'} \frac{d\sigma'}{dt},$$

ou, plus simplement :

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \gamma \frac{\partial x}{\partial \sigma} \quad \text{et} \quad \frac{\partial x'}{\partial t} = \gamma' \frac{\partial x'}{\partial \sigma'},$$

en posant :

$$\gamma = \frac{d\sigma}{dt} \quad \text{et} \quad \gamma' = \frac{d\sigma'}{dt},$$

L'équation (19) se transforme ainsi en :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial s \partial s'} = k & \left[-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{i'}{r} \sum \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) + i' \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{r} \sum \frac{\partial x}{\partial \sigma} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \right. \\ & \left. - i' \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{1}{r} \sum \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial \sigma'} + \frac{c' - c_1}{r} \sum \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \right]. \quad (20) \end{aligned}$$

Si l'on désigne de nouveau par (ss') l'angle des deux directions des deux éléments de conducteur ds et ds' , et ensuite par $(s\sigma')$ et $(\sigma s')$ les angles des directions de ds et ds' d'une part et de $d\sigma$ et ds' d'autre part, on pourra remplacer les sommes ci-dessus par les cosinus de ces angles, et on obtiendra :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial s \partial s'} = k \left[- \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{i' \cos(ss')}{r} \right) + i' \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\gamma \cos(\sigma s')}{r} \right) - i' \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{\gamma' \cos(s\sigma')}{r} + \frac{(c' - c'_1) \cos(ss')}{r} \right) \right]. \quad (21)$$

On pourra par l'intégration de l'équation différentielle exprimée sous les formes (19), (20) et (21), calculer la force électromotrice induite pour chaque portion du courant inducteur et pour chaque portion du conducteur induit.

Si le courant inducteur s' est fermé, le dernier terme donne une valeur nulle par l'intégration en s' , et l'on obtient :

$$\frac{\partial E}{\partial s} = -k \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{i' \cos(ss')}{r} ds' + ki' \frac{\partial}{\partial s} \int \frac{\gamma \cos(\sigma s')}{r} ds'. \quad (22)$$

Cette équation concorde avec les lois d'induction établies par Fr. Neumann.

Si le conducteur induit est fermé, le deuxième terme donne une valeur nulle par l'intégration en s , et il vient :

$$\frac{\partial E}{\partial s'} = -k \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{i' \cos(ss')}{r} ds - ki' \frac{\partial}{\partial s'} \int \left(\frac{\gamma' \cos(s\sigma')}{r} + \frac{(c' - c'_1) \cos(ss')}{r} \right) ds. \quad (23)$$

Eufin si s et s' sont tous deux fermés, les deux derniers termes disparaissent dans la double intégration en s et s' , et l'on obtient ainsi, pour la force électromotrice induite par un courant fermé s' dans un conducteur fermé s , l'équation très simple :

$$E = -k \frac{\partial}{\partial t} \iint \frac{i' \cos(ss')}{r} ds ds', \quad (24)$$

dans laquelle on peut aussi, dans l'indication de la différentiation en t , faire usage du d droit au lieu du ∂ rond, puisque l'expression à différentier ne dépend que de t .

On peut naturellement, d'une manière analogue à celle que nous avons développée pour déterminer la force électromotrice induite dans le conducteur s par le courant s' , déterminer la force électromotrice induite dans le conducteur s' par le courant s . Si nous appelons E' cette dernière, et $\frac{\partial^2 E'}{\partial s \partial s'} ds ds'$, la force électromotrice induite par l'élément de courant ds' dans l'élément de conducteur ds , nous devons poser :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E'}{\partial s \partial s'} = k \left[-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{i \cos(ss')}{r} \right) + i \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{\gamma' \cos(s\tau')}{r} \right) \right. \\ \left. - i \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\gamma \cos(\tau s')}{r} + \frac{(c - c_1) \cos(ss')}{r} \right) \right]. \quad (25) \end{aligned}$$

§ 5.

Travail des forces pondéromotrices et électromotrices.

Après avoir déterminé les forces pondéromotrices qu'exercent l'un sur l'autre deux éléments de conducteur ds et ds' parcourus par des courants électriques, ainsi que les forces électromotrices qu'ils induisent réciproquement l'un dans l'autre, il est facile de rechercher le travail effectué par ces forces.

Les composantes de la force pondéromotrice exercée par ds' sur ds étaient représentées par $\xi ds ds'$, $\eta ds ds'$ et $\zeta ds ds'$, les quantités ξ , η , ζ étant déterminées par les équations (15) ; si l'on représente de même par $\xi' ds ds'$, $\eta' ds ds'$ et $\zeta' ds ds'$ les composantes de la force pondéromotrice exercée par ds sur ds' , on pourra utiliser, pour déterminer ξ' , η' et ζ' , les mêmes équations, en y permutant les lettres avec et sans accent.

Si l'on veut ensuite déterminer le travail que ces forces effectuent, dans le temps dt , par le mouvement des éléments, on aura à former l'expression suivante :

$$ds ds' dt \left(\xi \frac{\partial x}{\partial t} + \eta \frac{\partial y}{\partial t} + \zeta \frac{\partial z}{\partial t} + \xi' \frac{\partial x'}{\partial t} + \eta' \frac{\partial y'}{\partial t} + \zeta' \frac{\partial z'}{\partial t} \right).$$

Si l'on y substitue à ξ , η , ζ , ξ' , η' , ζ' leurs valeurs, on obtient :

$$kii' ds ds' dt \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{r} \sum \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} - \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{r} \sum \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial x'}{\partial s'} - \frac{\partial}{\partial s'} \frac{1}{r} \sum \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial t} \right).$$

Ensuite, on peut poser :

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{r} \sum \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r} \sum \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) - \frac{1}{r} \sum \frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} \frac{\partial x'}{\partial s'} - \frac{1}{r} \sum \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial^2 x'}{\partial s' \partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{r} \sum \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{r} \sum \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) - \frac{1}{r} \sum \frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} \frac{\partial x'}{\partial s'}$$

$$\frac{\partial}{\partial s'} \frac{1}{r} \sum \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{1}{r} \sum \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial t} \right) - \frac{1}{r} \sum \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial^2 x'}{\partial s' \partial t},$$

d'où il résulte :

$$kii' ds ds' dt \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r} \sum \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{r} \sum \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) - \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{1}{r} \sum \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial t} \right) \right];$$

et si l'on effectue encore les mêmes transformations que pour (19), on obtient l'expression suivante pour *le travail des forces pondéromotrices effectué pendant le temps dt entre deux éléments de courant* :

$$kii' ds ds' dt \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\cos(ss')}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\gamma \cos(\tau s')}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{\gamma' \cos(s\tau')}{r} \right) \right].$$

Pour exprimer le travail effectué, pendant le temps dt , par la force électromotrice induite dans un conducteur, nous avons à multiplier la force électromotrice par l'intensité du courant dans le conducteur et par l'élément de temps. Appliquant ceci aux deux forces élémentaires, induites réciproquement par les éléments ds et ds' , il vient :

$$ds ds' dt \left(i \frac{\partial^2 E}{\partial s \partial s'} + i' \frac{\partial^2 E'}{\partial s \partial s'} \right).$$

Si l'on substitue ici les expressions (21) et (25), plusieurs termes se détruisent, et il reste :

$$-k ds ds' dt \left\{ i \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{i' \cos(ss')}{r} \right) + i' \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{i \cos(ss')}{r} \right) + i i' \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{(c - c_1) \cos(ss')}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{(c' - c'_1) \cos(ss')}{r} \right) \right] \right\}.$$

Les deux premiers termes de la grande parenthèse peuvent être remplacés par les suivants :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{i i' \cos(ss')}{r} \right) + i i' \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\cos(ss')}{r} \right),$$

de sorte que l'on obtient l'expression suivante *du travail, pendant le temps dt , des forces électromotrices induites que les éléments ds et ds' provoquent l'un dans l'autre* :

$$-k ds ds' dt \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{i i' \cos(ss')}{r} \right) + i i' \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\cos(ss')}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{(c - c_1) \cos(ss')}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{(c' - c'_1) \cos(ss')}{r} \right) \right] \right\}.$$

Si l'on ajoute les deux quantités de travail obtenues, on obtient l'expression *du travail effectué, pendant le temps dt, par toutes les forces agissant entre les éléments ds et ds'* :

$$k ds ds' dt \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{ii' \cos(ss')}{r} \right) + ii' \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\gamma \cos(\sigma s)}{r} + \frac{(c - c_1) \cos(ss')}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{\gamma' \cos(s\sigma')}{r} + \frac{(c' - c'_1) \cos(ss')}{r} \right) \right] \right\}.$$

Dans l'intégration de ces expressions en s et en s' , il se présente, pour le cas de conducteurs et de courants fermés, les mêmes simplifications que celles obtenues pour d'autres expressions dans le paragraphe précédent, les termes qui sont des coefficients différentiels en s et en s' donnant des valeurs nulles lors de l'intégration correspondante, quand le conducteur est fermé. Si s et s' sont fermés tous deux, il ne reste que les intégrales des termes qui renferment des coefficients différentiels en t . Posant alors :

$$w = k \int \int \frac{\cos(ss')}{r} ds ds', \quad (26)$$

et désignant par dA_p le travail des forces pondéromotrices, par dA_c le travail des forces électromotrices, et simplement par dA le travail de toutes les forces, pendant le temps dt , on a les équations :

$$dA_p = ii' dw \quad (27)$$

$$dA_c = - d(ii' w) - ii' dw \quad (28)$$

$$dA = - d(ii' w), \quad (29)$$

lesquelles concordent avec celles que nous avons données dans les deux derniers paragraphes du chapitre VIII.

§ 6.

**Le potentiel électrodynamique de deux courants fermés
l'un sur l'autre.**

En établissant le nouveau principe, j'ai formé une quantité que j'ai nommée le *potentiel électrodynamique* de deux particules électriques en mouvement c et c' et que j'ai représentée par :

$$k \frac{ee'}{r} \left(\frac{dx}{dt} \frac{dx'}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{dy'}{dt} + \frac{dz}{dt} \frac{dz'}{dt} \right),$$

expression que l'on peut écrire plus brièvement

$$k \frac{ee'}{r} \sum \frac{dx}{dt} \frac{dx'}{dt}.$$

En ce qui concerne cette grandeur, j'ai démontré que son coefficient différentiel négatif par rapport à t représente le travail effectué pendant le temps dt des forces qu'exercent l'une sur l'autre les particules.

Mais puisque, dans des courants fermés, les quantités d'électricité qui s'y trouvent à un certain moment y restent, on peut, en appliquant l'expression ci-dessus, former aussi le *potentiel électrodynamique de deux courants fermés l'un sur l'autre*; et ce potentiel doit également satisfaire à la condition que son coefficient différentiel par rapport à t représente le travail effectué.

pendant le temps dt , par toutes les forces que les courants exercent l'un sur l'autre.

Pour exprimer le potentiel, considérons d'abord deux éléments ds et ds' des deux courants. Ces éléments renferment les quantités d'électricité $h ds$, $-h ds$, $h' ds'$ et $-h' ds'$. Les vitesses de ces quantités d'électricité ont été déterminées au § 2, et leurs composantes suivant la direction x sont représentées

$$\begin{aligned} \text{pour la quantité } h ds \text{ par } & \frac{\partial x}{\partial t} + c \frac{\partial x}{\partial s} \\ \text{'' } -h ds \text{ '' } & \frac{\partial x}{\partial t} - c_1 \frac{\partial x}{\partial s} \\ \text{'' } h' ds' \text{ '' } & \frac{\partial x'}{\partial t} + c' \frac{\partial x'}{\partial s'} \\ \text{'' } -h' ds' \text{ '' } & \frac{\partial x'}{\partial t} - c'_1 \frac{\partial x'}{\partial s'}; \end{aligned}$$

on aura des expressions correspondantes pour les directions des autres axes coordonnés. En formant maintenant les quatre combinaisons de chacune des quantités d'électricité contenues dans ds et dans ds' , nous pouvons, pour chaque combinaison, exprimer le potentiel électrodynamique des deux quantités l'une sur l'autre. Ces potentiels sont représentés

$$\begin{aligned} \text{pour } h ds \text{ et } h' ds', \text{ par } & k \frac{hh' ds ds'}{r} \sum \left(\frac{\partial x}{\partial t} + c \frac{\partial x}{\partial s} \right) \left(\frac{\partial x'}{\partial t} + c' \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \\ \text{'' } h ds \text{ '' } -h' ds' \text{ '' } & -k \frac{hh' ds ds'}{r} \sum \left(\frac{\partial x}{\partial t} + c \frac{\partial x}{\partial s} \right) \left(\frac{\partial x'}{\partial t} - c'_1 \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \\ \text{'' } -h ds \text{ '' } h' ds' \text{ '' } & -k \frac{hh' ds ds'}{r} \sum \left(\frac{\partial x}{\partial t} - c_1 \frac{\partial x}{\partial s} \right) \left(\frac{\partial x'}{\partial t} + c' \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \\ \text{'' } -h ds \text{ '' } -h' ds' \text{ '' } & k \frac{hh' ds ds'}{r} \sum \left(\frac{\partial x}{\partial t} - c_1 \frac{\partial x}{\partial s} \right) \left(\frac{\partial x'}{\partial t} - c'_1 \frac{\partial x'}{\partial s'} \right). \end{aligned}$$

La somme de ces quatre expressions représente le potentiel des deux quantités d'électricité contenues dans l'un des éléments de courant sur celles contenues dans l'autre ; cette somme est simplement

$$k \frac{hh' ds ds'}{r} (c + c_1) (c' + c'_1) \sum \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'},$$

ou encore, en remplaçant par i et i' les produits $h(c + c_1)$ et $h'(c' + c'_1)$ qui représentent les intensités et par $\cos(ss')$ la somme indiquée :

$$kii' \frac{\cos(ss')}{r} ds ds'.$$

En intégrant cette expression pour les deux circuits fermés, nous obtenons le potentiel des deux courants l'un sur l'autre. Désignons ce dernier par W , nous trouverons

$$W = kii' \iint \frac{\cos(ss')}{r} ds ds', \quad (30)$$

expression qui peut s'écrire plus simplement en faisant usage de la notation (26) :

$$W = ii' w. \quad (31)$$

Dans le chapitre VIII, § 6, nous avons mentionné une quantité introduite par Fr. Neumann, que nous avons nommée le potentiel *magnétique* de deux courants

l'un sur l'autre et que nous avons désigné par Q ;
l'expression de cette quantité est :

$$- \hbar i i' \iint \frac{\cos(ss')}{r} ds ds',$$

ou

$$- i i' w,$$

en appliquant la notation w .

En comparant cette expression avec celle trouvée pour W , on voit que le potentiel *électrodynamique* de deux courants fermés l'un sur l'autre, déduit du nouveau principe, est égal en valeur absolue, mais de signe contraire au potentiel introduit par Neumann.

Si nous considérons enfin l'expression, donnée à la fin du paragraphe précédent, du travail effectué, pendant le temps dt , par toutes les forces que des courants fermés exercent l'un sur l'autre, nous voyons que ce travail est en effet représenté par la différentielle négative de leur potentiel électrodynamique. L'expression obtenue pour le travail des forces pondéromotrices seules $i i' dw$ n'est au contraire que la différentielle négative du potentiel magnétique, si les intensités des courants sont constantes, ou tout au moins si leur produit est constant.

CHAPITRE XI.

DISCUSSIONS SUR LA THÉORIE MÉCANIQUE DE LA CHALEUR ET DE L'ÉLECTRICITÉ.

§ 1.

Objection de Tait, tirée de la considération des phénomènes thermoélectriques.

A la fin du premier volume de cet ouvrage, il a déjà été question de ce que Tait a motivé sa manière d'agir à l'égard de mes travaux sur la théorie mécanique de la chaleur, qu'il plaçait après les travaux correspondants des auteurs anglais malgré leur priorité reconnue par lui-même, en prétendant que l'axiome établi par moi, savoir que la chaleur ne peut d'elle-même passer d'un corps froid dans un corps chaud, est faux. Mais comme nous n'avions pas encore traité alors des phénomènes électriques, je n'ai pu entrer dans la discussion de son assertion tirée d'arguments relatifs aux phénomènes thermoélectriques, et j'ai réservé ce point pour le second volume. J'y reviendrai donc ici, en communiquant la partie essentielle d'une réponse que j'ai publiée antérieurement¹.

1. *Ann. de Pogg.*, t. 146, p. 208.

Des deux phénomènes que cite Tait pour réfuter mon axiome, j'examinerai d'abord celui dont il dit qu'il fournit une preuve notoire de l'inexactitude du principe. C'est notamment le phénomène qui consiste en ce qu'une batterie thermoélectrique, dans laquelle les températures des soudures sont celles du point de fusion et du point d'ébullition de l'eau, est en état de porter au rouge un fil fin.

Pour démontrer l'absence complète de fondement de cette objection, je n'ai qu'à rappeler ce que j'ai déjà exposé en 1853 dans mon Mémoire sur les phénomènes thermoélectriques¹ et que l'on retrouve dans le chapitre VII de ce volume. J'ai montré alors que l'on peut comparer un élément thermoélectrique (et naturellement aussi une batterie thermoélectrique) à une machine à vapeur, la soudure chaude correspondant à la chaudière, et la soudure froide au condenseur. A la soudure chaude, de la chaleur est soutirée à un réservoir dont nous appellerons t_1 la température, tandis qu'à la soudure froide, de la chaleur est cédée à un autre réservoir dont t_0 est la température. La quantité de chaleur cédée est moindre que la chaleur reçue; et nous désignerons par suite par Q la chaleur reçue et par $Q + q$ la chaleur cédée dans l'unité de temps. L'une des parties q de cette dernière quantité de chaleur est consommée par le travail nécessaire à la production du courant électrique, et l'autre partie Q passe d'un corps de température t_1 dans un autre de température t_0 .

Si l'on dépense le travail, qui est effectué par une machine à vapeur, à vaincre des résistances de frottement ou d'autres résistances passives, on la retransformera en chaleur et l'on pourra, dans des circonstances

1. *Ann. de Pogg.*, t. 90, p. 513.

appropriées, engendrer une température bien supérieure à celle de la chaudière à vapeur. De même, dans la batterie thermoélectrique, le travail, qui devait être effectué pour mettre l'électricité en mouvement, peut se transformer de nouveau en chaleur par l'effet des résistances à la conductibilité vaincues, et l'on peut aussi, dans des circonstances appropriées, produire une température de beaucoup plus élevée que celle des soudures chaudes. Par exemple, il se peut, comme le cite M. Tait, qu'un fil soit échauffé jusqu'à l'incandescence, alors que les soudures chaudes n'ont que la température de l'eau bouillante.

Si nous désignons par t_2 la température que le fil prend et qui peut être maintenue constante pendant un temps quelconque, nous pouvons dire : une partie de cette quantité de chaleur q , qui est consommée en travail dans la batterie, réapparaît comme chaleur dans un autre corps de température t_2 . Comme cette chaleur consommée en travail provient d'un réservoir de température t_1 , nous obtenons, comme un des résultats du cycle, le transport d'une certaine quantité de chaleur d'un corps de température t_1 dans un corps de température plus élevée t_2 .

La question qu'il s'agit maintenant de trancher est de savoir, si ce passage de chaleur, d'une température plus basse à une température plus élevée, a eu lieu *de lui-même*.

Sous cette courte dénomination : *de lui-même*, j'entends comme je l'ai souvent expliqué : *sans qu'il se produise en même temps une autre modification servant de compensation*. Tant que l'on a affaire à des cycles fermés, il y a deux sortes de modifications qui peuvent servir de compensation, d'abord le passage de chaleur d'un corps chaud dans un corps froid, ensuite

la consommation de travail, ou pour être plus précis, la transformation de travail en chaleur.

Si nous considérons à ce point de vue notre batterie thermoélectrique avec le fil fin porté au rouge, nous voyons que, d'une part, la quantité de chaleur q est en partie passée de la température t , à la température plus élevée t_2 , mais qu'en même temps l'autre quantité de chaleur Q passe de la température t , à la température plus basse t_0 . Ce dernier passage de chaleur constitue la compensation du premier, et nous ne pouvons donc pas dire que le premier passage a eu lieu de *lui-même*.

Le cas que nous venons d'examiner est si simple et si clair, qu'on pourrait le choisir comme un exemple bien approprié à l'exposition et à la confirmation de mon axiome, et c'est précisément ce cas que M. Tait a choisi pour démontrer son inexactitude.

Comme autre cas, qui contredirait mon axiome, M. Tait cite une chaîne thermoélectrique dans laquelle la soudure chaude a une température qui est supérieure à celle du point neutre. Il s'agit donc d'une chaîne thermoélectrique, dans laquelle le courant n'est pas continuellement renforcé par l'échauffement croissant d'une soudure, mais dans laquelle le courant décroît à partir d'une certaine température, et change même de direction lorsque l'on dépasse encore suffisamment celle-ci.

J'ai également discuté ce phénomène dans le Mémoire cité ci-dessus. J'ai cherché à l'expliquer par ce fait, que, dans un des métaux dont une telle chaîne se compose (ou même dans tous les deux), la modification de température amène un changement de l'état moléculaire, qui fait que la partie modifiée du métal se comporte, sous le rapport électrique, avec la partie non modifiée, comme deux métaux différents. Aussitôt

qu'une modification de cette nature a lieu, des forces électromotrices agissent, non plus seulement aux points de contact des différents métaux, mais aussi là où des parties différemment constituées d'un même métal se touchent. D'après cela, de la chaleur est engendrée ou consommée, non seulement aux soudures, mais aussi en d'autres places, qui se trouvent à l'intérieur des métaux isolés, et, pour déterminer tous les passages de chaleur existants, nous devons par suite considérer, outre les températures des soudures, les températures de ces autres places.

Par là, la chose devient naturellement plus compliquée. Bien que l'existence de ces modifications soit démontrée dans des cas particuliers, nous ne possédons sur elles que des connaissances trop restreintes pour pouvoir examiner isolément tous les phénomènes qui ont lieu dans une chaîne thermoélectrique de cette nature. Cependant, on ne contestera pas qu'il y a, dans l'hypothèse que j'ai faite, au moins la possibilité d'une explication des phénomènes en question, et par les développements de Budde, que j'ai communiqués à la fin du chapitre VII, on reconnaît comment cette explication peut être conduite de manière à être entièrement en concordance avec mon axiome. On ne peut donc tirer de ces phénomènes aucune objection contre cet axiome.

§ 2.

Objections de F. Kohlrausch.

Dans un intéressant mémoire sur la thermoélectricité et la conductibilité électrique et calorifique¹, F. Kohlrausch soulève contre ma théorie des courants thermoélectriques, une objection s'appuyant sur une contradiction qui semble ressortir de la théorie mécanique de la chaleur, et qui exige par suite un examen approfondi. Comme le passage qui contient cette objection est court, il vaut mieux le citer textuellement.

Après avoir dit que la théorie mécanique de la chaleur n'a pas égard, dans la détermination du travail effectué par la chaleur, à l'égalisation de celle-ci produite par la conductibilité, et que si l'on regarde ce procédé comme permis dans tous les cas, on en déduira une objection importante contre son hypothèse qu'un courant de chaleur peut effectuer du travail, Kohlrausch continue ainsi :

« Mais il se présente dans le domaine de l'électricité un autre cas, qui d'après ma manière de voir, ne peut être mis en concordance avec les principes de la théorie mécanique de la chaleur ou, en d'autres termes,

1. Göttinger Nachrichten; fév. 1874 et *Ann. de Pogg.*, t. 156; p. 601.

avec l'axiome de Clausius, à savoir que la chaleur ne passe pas d'elle-même d'une température moindre à une température plus élevée, autrement qu'en attribuant à la conductibilité de la chaleur un rôle *essentiel* dans le phénomène. Tait avait présenté le dit axiome comme inexact, parce qu'on peut, au moyen d'une pile thermoélectrique de température peu élevée, porter un fil à l'incandescence. Clausius réfute aisément cette objection, l'élévation de température de la chaleur développée dans le fil étant accompagnée, d'après Peltier, du passage d'une autre quantité de chaleur de la soudure chaude à la soudure froide de la pile thermoélectrique (*Ann. de Pogg.*, t. CXLVI, p. 310). Dans cette réfutation, on suppose cependant que la température développée dans le fil échauffé a une limite, ce qui arrive toujours en réalité; si l'on pouvait accroître à volonté cette température, on pourrait, dans la pile thermoélectrique, par le passage d'une quantité finie de chaleur d'une température à une température plus basse, mais différant de la première d'une quantité finie, élever une autre quantité finie de chaleur à une température aussi haute qu'on le veut. »

C'est cette élévation d'une quantité finie de chaleur à une température arbitrairement élevée, que Kohrausch regarde comme une contradiction existant dans sa théorie, et cela l'a porté à faire entrer la conductibilité de la chaleur dans le champ de ses considérations. Mais je crois pouvoir démontrer que, par une conception entièrement conforme à l'esprit de la théorie mécanique de la chaleur, bien que n'ayant pas jusqu'ici été exprimée d'une manière aussi précise, cette contradiction disparaît, même sans faire entrer en ligne de compte la conductibilité de la chaleur.

Pour mieux juger de la nature du phénomène en question, que Kohlrausch a mis en évidence pour la pile thermoélectrique, il ne sera pas inutile de montrer qu'il peut aussi se présenter dans d'autres machines thermodynamiques, par exemple, dans la machine à vapeur. Dans celle-ci, la matière médiatrice de l'action de la chaleur (l'eau) absorbe de la chaleur dans la chaudière, dont nous appellerons T_1 la température absolue ; elle en cède au condenseur dont T_0 sera la température absolue. Mais la quantité de chaleur cédée est moindre que la quantité reçue, et nous pouvons, en faisant abstraction des pertes causées par les imperfections des machines, considérer l'excès de la chaleur reçue comme transformé en travail. Si nous désignons par $Q + q$ la quantité de chaleur absorbée dans la chaudière et par Q la quantité cédée au condenseur, pendant l'unité de temps, q sera la quantité de chaleur transformée en travail, tandis que Q sera la quantité de chaleur qui passe de la température T_1 à la température T_0 .

Si maintenant le travail effectué par la machine est utilisé à vaincre une résistance de frottement, il se retransforme en chaleur et la quantité de chaleur q , qui avait été consommée en travail, réapparaît comme chaleur dans les corps frottants, dont nous désignerons par T_2 la température absolue. On peut donc dire que cette quantité de chaleur est passée de la température T_1 , à laquelle elle a été reçue par la machine, à la température T_2 . Comme la température T_2 des corps frottants peut être arbitrairement élevée, nous parvenons également ici à ce résultat que, par le passage d'une quantité finie de chaleur (Q) à une température inférieure d'une quantité donnée (de T_1 à T_0), on peut élever une autre quantité finie de chaleur (q) à une température arbitrairement élevée (T_2).

Pour voir ensuite de quelle manière la température T_2 intervient dans les équations de la théorie mécanique de la chaleur, nous avons à former l'expression de la valeur d'équivalence du passage de la quantité de chaleur q , de la température T_1 à la température T_2 , savoir :

$$q \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right).$$

Cette expression représente, si $T_2 > T_1$, une quantité négative dont la valeur absolue croît lorsque T_2 augmente ; mais cet accroissement n'a pas lieu d'une manière indéfinie, puisque l'expression tend vers la valeur finie et déterminée

$$- \frac{q}{T_1},$$

quand T_2 croît indéfiniment ; cette dernière valeur est la valeur d'équivalence de la transformation en travail de la quantité de chaleur q de température T_1 . Ce caractère des formules concorde entièrement avec cette circonstance qu'une quantité de chaleur transformée d'abord en travail, peut être ensuite retransformée en chaleur de température aussi élevée qu'on le veut.

Mais s'il s'agit ici de température arbitrairement élevée, on ne doit pas entendre par là une température *infiniment élevée* dans le sens strictement mathématique ; à cet égard, la nature même de la chose implique une limite.

Pour le reconnaître, et pour nous faire une idée approchée de la nature des grandeurs dont il est question, imaginons que le travail produit par une machine à vapeur soit d'abord utilisé à mettre en mouvement

un corps de masse donnée, par exemple, une unité de masse, et que ce soit ce mouvement qui doit être transformé en chaleur. Alors nous aurons encore ici simplement affaire à la transformation d'une espèce de mouvement en une autre espèce, de sorte que la conclusion sur l'élévation de la température qui peut être atteinte sera simplifiée.

Si l'on entend par température absolue d'un corps la force vive moyenne des diverses particules du corps, qui se meuvent indépendamment dans le mouvement désigné comme chaleur, c'est-à-dire des atomes, on peut énoncer comme suit le principe qu'un corps ne peut en échauffer un autre à une température plus élevée que la sienne : les atomes d'un corps ne peuvent communiquer aux atomes d'un autre des mouvements, dont la force vive est en moyenne supérieure à la leur. Appliquons ce résultat au cas où une unité de masse, se mouvant comme un tout, doit imprimer un mouvement plus rapide aux parties les plus petites d'un corps, par exemple, aux molécules d'un gaz, qui en vertu de la chaleur sont animées d'un mouvement progressif, et engendrer par là de la chaleur ; nous pourrions dire que la plus haute température développée par ce moyen serait celle par laquelle une molécule unique aurait, par son mouvement progressif, une force vive précisément la même que celle de l'unité de masse entière. Nous parvenons ainsi à une valeur extraordinairement grande, mais pas précisément à une valeur *infiniment* grande, de même que la masse d'une molécule est excessivement petite vis-à-vis d'une unité de masse, mais pas précisément infiniment petite.

Naturellement cette considération ne peut pas servir à nous donner, une fois pour toutes, une valeur de la limite de température qui peut être atteinte, puis qu'avec

la grandeur du travail, change aussi la grandeur du mouvement qui peut être mis à sa place ; néanmoins, on obtient au moins ainsi une idée de l'ordre des grandeurs en question.

La restriction dont il vient d'être question par rapport aux températures accessibles n'est pas exprimée dans les équations de la théorie mécanique de la chaleur. Comme nous l'avons vu dans les valeurs d'équivalence considérées ci-dessus, ce sont notamment les valeurs réciproques des températures qui interviennent dans ces équations, et les valeurs réciproques de ces hautes températures limites sont négligées à cause de leur petitesse. Il y a naturellement là une inexactitude ; cependant on reconnaîtra sans doute que, vis-à-vis de l'énorme élévation de ces températures limites, il n'y a là qu'une inexactitude analogue à celle qui est inhérente à presque chaque équation de la physique, en tant qu'il y a peu d'équations de cette sorte qui, applicables dans les phénomènes qui se présentent dans la réalité, le soient encore en toute rigueur jusqu'à l'infini.

Avant d'écrire, au sujet des objections de Kohlrausch, les considérations communiquées ci-dessus et publiées d'abord dans le tome 160 des *Ann. de Pogg.*, je m'étais déjà du reste exprimé d'une manière analogue à une autre occasion. Dans un mémoire publié en 1865¹, lorsque j'ai parlé de la notion introduite par moi de la valeur de transformation de la chaleur, il a été question de la manière de déterminer la valeur de transformation d'un mouvement d'une grande masse pondérable qui se meut d'une seule pièce. Cette valeur

1. Ueber verschiedene für die Anwendung bequeme Formen der Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie. *Ann. de Pogg.*, t. 125, p. 353, et *Théorie mécanique de la chaleur*, 1^{re} édition ; mém. IX ; t. I, p. 377.

de transformation est, eu égard à sa petitesse, négligée dans les formules de la théorie mécanique de la chaleur; je n'ai pas dit qu'elle était nulle, mais je me suis exprimé comme suit¹ : « Lorsqu'une masse, à côté de laquelle un atome peut être considéré comme infiniment petit, se meut d'une seule pièce, la valeur de transformation de ce mouvement peut de même être considérée comme infiniment petite relativement à sa force vive. » De la sorte, je n'indique pas seulement que la grandeur en question n'est pas *infiniment* petite dans le sens strictement mathématique, mais l'ordre de grandeur est fixé d'une manière bien déterminée par la comparaison citée de la masse d'un atome avec celle de la masse entière, du mouvement de laquelle il s'agit.

§ 3.

Vues de W. Thomson et de F. Kohlrausch sur les phénomènes thermoélectriques.

W. Thomson a publié plusieurs mémoires très intéressants, en partie de nature théorique, en partie de nature expérimentale, sur la manière dont se comportent, sous le rapport thermoélectrique, les substances et spécialement les métaux. Une première petite notice

1. *Ann. de Pogg.*, t. 125, p. 399, et *Théorie mécanique de la chaleur*, 1^{re} édition, t. I, p. 420.

parut déjà avant mon mémoire publié en 1853, et le contenu s'en trouve réexposé dans le chapitre VII'. Au contraire les mémoires plus étendus, qui renferment le développement de la théorie et qui donnent communication de séries d'essais très nombreuses, parurent un peu plus tard, notamment en 1854 et 1856². Par les recherches expérimentales, une série des faits relatifs aux propriétés thermoélectriques des métaux jusqu'alors connus partiellement et incomplètement, ont été établis et étudiés en détail, et la grande valeur de ces recherches ne peut naturellement être influencée d'aucune manière par les divergences d'opinions qui peuvent surgir au sujet des causes des phénomènes en question. Mais en ce qui concerne les considérations théoriques, je dois avouer que je ne puis me rallier à quelques-unes d'entre elles.

Dans l'étude des phénomènes thermoélectriques, il s'agit d'abord de la production du courant thermoélectrique, et sous ce rapport, on peut distinguer deux choses. En premier lieu, il y a le processus régulier, dans lequel, une chaîne formée de deux métaux ou autres conducteurs de la première classe, donne lieu, par une différence de température des deux soudures, à un courant dont l'intensité croît régulièrement avec la grandeur de cette différence de température. En second lieu, il y a les anomalies à ce processus régulier, qui se présentent dans maintes combinaisons de métaux, particulièrement dans la chaîne fer-cuivre, et qui consistent en ce que le courant ne croît pas toujours pour une différence de température croissante, mais

1. Proc. of the Edinb. R. Soc., Déc. 1851 et Phil. Mag. Ser. IV. vol. III, 1852.

2. Transactions of the Edinb. R. Soc. for 1854 et Phil. Trans. for 1836. — Continué dans les Phil. Trans. for 1875.

décroit dès qu'une des températures a atteint une certaine valeur, et peut même changer de sens lorsque cette température est très grande.

Un autre phénomène est lié à la production du courant thermoélectrique ; outre la quantité de chaleur engendrée de ce chef que le courant surmonte la résistance à la conductibilité dans toute la chaîne, quantité proportionnelle au carré de l'intensité du courant, il disparaît à certains endroits de la chaleur, et à d'autres, il en apparaît, et les quantités de chaleur en question sont simplement proportionnelles à l'intensité. S'il ne s'agit que du processus régulier, on n'a besoin d'admettre de tels phénomènes qu'aux points de contact des différentes substances, et c'est en cela que consiste ce qu'on a l'habitude d'appeler le phénomène de Peltier. Mais si, au contraire, les irrégularités mentionnées ci-dessus se produisent, on doit admettre que ces effets dont la grandeur est proportionnelle à l'intensité du courant, ont lieu en différents endroits, même dans l'intérieur des métaux séparés.

La théorie de Thomson se rapporte surtout à ces disparitions et apparitions de chaleur à l'intérieur des métaux séparés. Il essaie de ramener ce phénomène à une action particulière de l'électricité, ce qu'il exprime en disant que *par un courant, l'électricité transporte de la chaleur à travers un conducteur inégalement chaud* (carries heat with it). En particulier, il s'exprime comme suit au sujet du fer et du cuivre : *l'électricité résineuse transporte de la chaleur dans un conducteur en fer inégalement chaud, et l'électricité vitreuse agit de même dans un conducteur en cuivre*. Par l'expression ici employée de transport de chaleur dans un conducteur

inégalement chaud, il faut entendre une chose que je ne crois pas facile à saisir sans une explication spéciale; savoir que, dans le cas où l'électricité circule d'un endroit plus chaud à un endroit plus froid du conducteur, il y a de la chaleur développée dans le conducteur, et inversement qu'il y a de la chaleur soutirée au conducteur, dans la circulation inverse.

Conjointement à cette manière de voir, Thomson introduit une nouvelle grandeur qu'il nomme la *chaleur spécifique de l'électricité* et qu'il définit comme suit¹ : si un courant d'intensité infiniment petite γ circulant dans un métal, d'un endroit de température $t + dt$ vers un endroit de température t , développe entre ces deux points une quantité de chaleur $\gamma\sigma dt$ pendant l'unité de temps, σ est la chaleur spécifique de l'électricité dans ce métal. D'après Thomson, la quantité ainsi définie a des valeurs différentes dans différents métaux, et même des signes opposés. D'après les conventions ci-dessus, la chaleur spécifique de l'électricité vitreuse est positive dans le cuivre; celle de l'électricité résineuse est positive dans le fer, de sorte que celle de l'électricité vitreuse y est négative.

J'ignore si ces conventions et définitions ne doivent servir qu'à exprimer d'une façon commode et simple la manière dont se comportent les différents métaux relativement à la production ou la disparition de chaleur qui y a lieu pendant qu'ils sont traversés par un courant électrique, ou si elles sont sensées contenir une *explication réelle* des phénomènes. Dans ce dernier cas, je dois dire que je ne suis pas en état de me faire de cette explication une représentation physique qui me paraisse acceptable.

1. *Loc. cit.*, p. 133.

De plus, dans ce cas, la production et la consommation de chaleur qui ont lieu aux points de contact de différentes substances, c'est-à-dire, le phénomène de Peltier, serait de tout autre nature que la production et la consommation de chaleur à l'intérieur d'un métal, et une explication spéciale serait encore nécessaire pour ce phénomène.

Enfin, en ce qui concerne la production du courant thermoélectrique, Thomson n'en a, que je sache, donné aucune explication.

F. Kohlrausch¹ a plus récemment exposé une théorie plus complète des différents phénomènes que nous considérons; cette théorie pose également en principe une nouvelle propriété de l'électricité, et en même temps une nouvelle propriété correspondante de la chaleur.

Kohlrausch admet notamment, qu'à un courant de chaleur est relié un courant électrique dans un rapport déterminé dépendant de la nature du conducteur, et qu'inversement, la chaleur se meut par l'effet d'un courant électrique. La dernière propriété attribuée par Kohlrausch à l'électricité, de faire mouvoir la chaleur par le courant, doit être entendue autrement que celle admise par Thomson, savoir celle qu'il exprime en disant que l'électricité transporte la chaleur. D'après Thomson, l'action du courant, dont il est question, n'a lieu sur la chaleur existante dans le conducteur que dans le cas où il est inégalement chaud, et même cette action a lieu dans des sens opposés, suivant que l'électricité circule du chaud au froid, ou du froid au chaud; il y a dégagement de chaleur dans un cas, absorption dans l'autre. Au contraire, l'effet admis par Kohlrausch doit avoir lieu aussi dans un conducteur

1. Göttinger Nachrichten. Février 1874, et *Ann. de Pogg.*, t. 156, p. 601.

uniformément échauffé, et il n'y a pas de renversement de l'espèce mentionnée en dernier lieu.

A l'aide des propriétés qu'il attribue à l'électricité et à la chaleur, Kohlrausch explique la production du courant thermoélectrique et l'absorption et la production de chaleur aux points de contact de différentes substances; il montre ensuite comment, à l'aide d'une hypothèse particulière accessoire, on peut aussi expliquer l'absorption et la production de chaleur à l'intérieur d'un même métal. Malgré cela, je ne puis pas me rallier à ce qui précède, parce qu'il faudrait admettre autant de nouvelles propriétés de la chaleur et de l'électricité qu'il y a de phénomènes à expliquer; l'une de ces propriétés, à savoir que la chaleur, peut effectuer un travail dans le passage qui a lieu par conductibilité d'une place chaude à une place froide, est en contradiction avec les hypothèses actuelles de la théorie mécanique de la chaleur; ma théorie, au contraire, est conforme aux hypothèses faites actuellement dans la thermodynamique sur les circonstances dans lesquelles la chaleur peut effectuer du travail.

En outre, je rappellerai que, dans le deuxième paragraphe de ce chapitre, j'ai réfuté l'objection que Kohlrausch a faite à ma théorie et à cause de laquelle il a cru devoir se prononcer contre elle. C'est pourquoi je n'ai aucune raison d'abandonner ma théorie qui rend compte de tous les phénomènes observés, si on l'étend de la manière que j'avais primitivement indiquée, et que Budde a développée ensuite.

§ 4.

**Objections de Zöllner
contre les considérations d'électrodynamique
contenues dans le chapitre IX.**

Zöllner a soulevé diverses objections, dont je relèverai ici les principales, contre les considérations d'électrodynamique, contenues dans le chapitre IX, qui m'ont conduit à formuler le nouveau principe d'électrodynamique ¹.

J'ai montré que le principe de Weber conduit, dans l'hypothèse du mouvement d'une seule électricité dans un courant galvanique, à l'existence d'une force exercée par un courant fermé, au repos et constant, sur de l'électricité au repos, force qu'on n'observe pas en réalité. Zöllner reconnaît l'exactitude des équations que j'ai posées, et qui avaient déjà précédemment été établies par Riecke; mais il pense que la force qu'elles déterminent est si petite, qu'elle échappe à l'observation.

La composante x de cette force est déterminée par l'équation (4) du chapitre IX, savoir :

$$x = - \frac{4h'}{c^2} \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 \frac{J}{Jx} \int \left(\frac{J' \sqrt{r}}{Js'} \right)^2 ds',$$

1. *Ann. de Pogg.*, t. 160, p. 514, et *Ann. de Wied.*, t. 2, p. 604.

Une particularité caractéristique de cette formule est que le coefficient différentiel $\frac{ds'}{dt}$, qui représente la vitesse du mouvement ne s'y présente pas en facteur à la première puissance, mais bien au carré. Il résulte de là que, si l'on se donne l'intensité du courant, c'est-à-dire la quantité d'électricité qui traverse, pendant l'unité de temps, une section et qui est exprimée par le produit $h' \frac{ds'}{dt}$, la valeur de la formule varie essentiellement avec la manière dont on considère le courant, c'est-à-dire suivant que l'on attribue une très grande valeur à la quantité d'électricité qui circule et une valeur minime à sa vitesse, ou que l'on regarde la quantité d'électricité comme minime et la vitesse comme très grande.

Zöllner s'appuie, dans ses considérations, sur les recherches bien connues de R. Kohlrausch et Weber, sur la réduction aux unités mécaniques des mesures d'intensité des courants¹, d'où les auteurs ont, entre autres, tiré la conclusion (p. 281) que la vitesse de circulation dans les conducteurs électrolytiques est si faible, que l'on n'obtient qu'un mouvement progressif de $\frac{1}{2}$ mm. par seconde, en faisant certaines hypothèses sur l'intensité du courant et la section du conducteur. C'est cette valeur de la vitesse que Zöllner utilise, et il parvient par là à une valeur de α qui n'est plus appréciable à l'observation, à cause de sa petitesse. Mais il y a des objections très sérieuses à faire à cette manière de procéder.

Si nous ne considérons d'abord que les conducteurs électrolytiques, la conclusion de Weber et Kohlrausch

1. Abh. der. K. sächs. Ges. der Wiss. III, p. 221.

indiquée ci-dessus se rapporte à *la vitesse moyenne de toutes les molécules partielles contenues dans l'électrolyte*, c'est-à-dire à cette vitesse que l'on obtiendrait, si l'on imaginait que toutes les molécules partielles positives et négatives contenues dans l'électrolyte se meuvent de la même manière suivant les deux directions opposées. Si l'on fait, au contraire, d'après ma manière de voir, l'hypothèse beaucoup plus vraisemblable que relativement peu de molécules partielles exécutent le mouvement en question par lequel l'électricité est transportée, et que par suite ces molécules ont par cela même des vitesses d'autant plus grandes, on obtient naturellement aussi de plus grandes valeurs pour α , qui dépend du carré de la vitesse.

Si, au lieu d'électrolytes, nous considérons ensuite des conducteurs métalliques, on a pour ceux-ci à tenir compte de cette autre circonstance que les molécules ne se meuvent pas avec toutes les quantités d'électricités qui y sont adhérentes, mais qu'il y a un passage d'électricité de molécule à molécule. Il n'est certes pas nécessaire d'admettre que toute la quantité d'électricité appartenant à une molécule abandonne celle-ci et passe à la molécule voisine, mais il est beaucoup plus probable que des parties relativement petites des quantités totales d'électricité se transportent, et c'est ce qui nous conduit à de beaucoup plus grandes vitesses.

Si donc d'une part, comme Weber et Kohlrausch l'ont indiqué avec raison, on ne doit pas penser à considérer comme vitesse du mouvement de l'électricité, la vitesse prodigieuse de plusieurs centaines de milles, que Wheastone et d'autres savants ont trouvée dans la propagation de l'action électrique, on ne doit pas, d'autre part, d'après ma conviction, surtout s'il s'agit de conducteurs métalliques, utiliser comme vitesse réelle

du mouvement de l'électricité, cette valeur minime de $\frac{1}{2}$ mm. que Weber et Kohlrausch ont calculée comme étant une certaine vitesse moyenne. Dans ce cas, la vitesse est probablement plus grande, dans une proportion très élevée, de sorte que la démonstration de Zöllner tombe alors complètement.

La question se présente encore sous un jour plus défavorable à la démonstration de Zöllner, quand l'on considère les aimants au lieu des courants galvaniques. On parvient alors à un résultat directement opposé à celui que cet auteur a obtenu.

Remarquons d'abord que, pour les courants moléculaires, par lesquels on explique d'après Ampère le magnétisme, la double circulation admise par Weber est encore plus invraisemblable que pour les courants galvaniques dans des conducteurs solides. Que l'on imagine que l'électricité positive se meut en tourbillonnant autour d'un noyau électrique négatif, il n'y a là qu'une idée entièrement conforme aux autres phénomènes mécaniques que nous voyons. Mais que deux fluides différents se meuvent continuellement autour du même centre et dans deux directions opposées, cela me paraît presque inconcevable.

D'ailleurs Weber lui-même, qui, pour faire regarder au moins comme possible la double circulation moléculaire, avait émis l'idée que peut-être l'un des fluides décrivait un circuit plus restreint et l'autre un circuit plus étendu, s'est fait plus récemment des courants moléculaires d'Ampère une autre représentation entièrement conforme à celle que nous avons des autres phénomènes mécaniques. Weber admet notamment ¹

1. Electrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über das Princip der Erhaltung der Energie. Leipzig 1871, p. 41.

qu'une particule électrique positive et une autre négative tout aussi grande font partie d'un atome pondérable. Quand il considère le mouvement des deux particules d'électricité l'une autour de l'autre, il dit que le rapport dans lequel ces deux parties participent au mouvement dépend du rapport de leurs masses, et que, quand une particule d'électricité adhère à un atome pondérable, la masse de ce dernier doit entrer en ligne de compte avec celle de la particule électrique. Après qu'il a désigné par $+e$ la particule positive et par $-e$ la négative, il dit expressément : « C'est seulement à cette dernière qu'adhère un atome pondérable, de sorte que sa masse est tellement augmentée, que la masse de la particule positive peut être considérée comme négligeable vis-à-vis d'elle. La particule $-e$ peut donc être considérée comme au repos, tandis que la particule $+e$ seule est en mouvement autour de la première. »

Dans cette manière de voir, la double circulation admise autrefois par Weber n'existe pas; il n'y a qu'un simple mouvement rotatif de l'électricité positive autour d'un noyau électrique négatif; et, à cette sorte de mouvement, l'équation déduite ci-dessus de la formule de Weber est applicable. Si l'on peut maintenant démontrer que la force déterminée par cette équation est si grande qu'elle ne pourrait échapper à l'observation, si elle existait, il faut conclure, du fait que cette force ne s'observe pas dans la réalité, que le principe adopté par Weber est en contradiction avec l'expérience pour la nature du mouvement admise par lui-même dans les courants moléculaires.

Il est d'abord à remarquer que l'action électrodynamique totale ordinaire des courants moléculaires d'un aimant est si grande que, si l'on voulait remplacer un aimant tant soit peu puissant par un solénoïde

l'entourant extérieurement et d'égal effet électrodynamique, on devrait utiliser un courant très puissant ou un très grand nombre de spires.

A cette circonstance favorable pour le cas de l'aimant s'en ajoute encore une autre qui donne une telle prédominance à la force, qu'il devrait exercer sur de l'électricité au repos d'après le principe de Weber, que même celle des plus forts courants dans des conducteurs de dimensions ordinaires est complètement négligeable vis-à-vis d'elle.

De la formule obtenue précédemment pour la composante \mathfrak{X} , c'est-à-dire :

$$\mathfrak{X} = - \frac{4h'}{c^2} \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 \frac{J}{dx} \int \left(\frac{J \sqrt{r}}{Js'} \right)^2 ds',$$

il résulte que la force dont il s'agit ici se comporte, sous certain rapport, d'une toute autre manière que les forces électrodynamiques que l'on considère ordinairement. Si l'on détermine la force qu'exerce un très petit courant fermé, que nous considérerons comme circulaire pour la simplicité, sur un autre petit courant fermé ou sur un pôle magnétique, c'est-à-dire la force électrodynamique ordinaire, on la trouve proportionnelle à l'aire du circuit. Si l'on détermine, par contre, la force exercée, d'après la formule précédente, par le courant circulaire, sur une unité d'électricité au repos, on trouve qu'elle est proportionnelle au périmètre du cercle. Le raisonnement suivant montre combien cette différence est essentielle.

Construisons, à l'intérieur d'un grand cercle, un très grand nombre de petits cercles qui soient si voisins les uns des autres qu'ils remplissent, pour la grande partie, l'aire totale; imaginons d'une part le grand-cercle

et d'autre part l'ensemble des petits cercles parcourus dans le même sens par des courants d'égale intensité, et comparons les forces exercées par les deux systèmes de courants. En ce qui concerne la force électrodynamique ordinaire, nous trouverons que la force totale exercée par tous les petits courants est moindre que celle exercée par le grand courant, puisque l'ensemble des aires entourées par tous les petits courants est moindre que l'aire entourée par le grand. Si nous faisons, au contraire, la comparaison en ce qui concerne la force qui, d'après la formule, est exercée sur de l'électricité au repos, nous trouverons que la force exercée par l'ensemble des petits courants dépasse de beaucoup celle exercée par le grand, puisque l'ensemble des longueurs des circuits des premiers dépasse de beaucoup la longueur du circuit du dernier. Cette prédominance de la force totale des petits courants sur celle du grand est d'autant plus forte que les courants sont plus petits et que, par suite, leur nombre est grand.

Si nous en revenons maintenant à considérer un aimant, et que nous imaginons un solénoïde qui l'entoure, ayant assez de spires et parcouru par un courant assez intense pour que, en tant qu'il soit question de la force électrodynamique ordinaire, il agisse avec la même intensité que l'aimant, c'est-à-dire que l'ensemble de tous les courants moléculaires y contenus, cette égalité d'action n'aura plus lieu, en vertu de la formule ci-dessus, pour la force exercée sur de l'électricité au repos ; l'action exercée par les courants moléculaires sera de beaucoup supérieure à celle exercée par le solénoïde, et cela dans un rapport excessivement grand à cause du nombre des courants moléculaires qui dépasse toute imagination.

Il résulte de ce qui précède que, si même on introduit dans la formule une vitesse de l'électricité aussi petite que celle que Zöllner admet, et qui conduit pour le solénoïde à une force très petite, on parviendra pourtant inversement à une force très grande pour l'aimant. Le fait qu'une telle force ne s'observe ni pour les aimants permanents, ni pour les électro-aimants, dans lesquels on peut produire et faire disparaître subitement l'aimantation, peut être considéré comme une preuve certaine que le principe de Weber est incompatible avec l'hypothèse que, dans les courants moléculaires des aimants, l'électricité positive seule se meut.

Dans ses deux écrits, dont nous venons de reproduire les considérations les plus importantes, qui ont purement rapport à la question, Zöllner, qui combat ouvertement et avec une certaine violence mon principe, en arrive à un autre endroit à essayer de montrer que ce principe n'est pas, à proprement parler, nouveau, mais qu'il concorde dans sa partie essentielle avec celui de Weber, quelques « simplifications rationnelles » pouvant ramener ma formule du potentiel à celle de Weber.

Sous ce rapport, je me contenterai de rappeler la comparaison des formules du potentiel données par Weber, par Riemann et par moi, que j'ai exposée dans le premier paragraphe du chapitre précédent (p. 400). Un simple coup d'œil jeté sur les trois formules (2_a), (3) et (4) suffit pour démontrer qu'elles diffèrent essentiellement l'une de l'autre, et que les opérations que Zöllner indique comme des *simplifications rationnelles*, pour ramener ma formule à celle de Weber, sont des *transformations complètes de principe*.

§ 5.

Objections de W. Weber.

Dans la deuxième partie du second volume des Mémoires scientifiques de Zöllner, paru récemment, une autre objection a été soulevée contre mon principe d'électrodynamique. Zöllner y dit qu'il est redevable de la recherche en question à Wilhem Weber, qui l'a autorisé à la publier en cet endroit. En même temps, il annonce qu'une addition, qu'il avait faite à son mémoire précédent et qui contenait également une objection à mon principe, provenait aussi de Weber.

Dans ces conditions, il faut attribuer une importance toute particulière à ces objections, et nous les considérerons de près. D'abord nous porterons notre attention sur l'addition au mémoire antérieur de Zöllner.

Cette addition contient expressément ce qui suit :

« Clausius, dans sa formule du potentiel,

$$\frac{ee'}{r} (1 + kvv' \cos \varepsilon),$$

désigne par v et v' les vitesses absolues des particules e et e' , et par ε l'angle de leurs directions. Ces vitesses peuvent se décomposer en deux autres u égales et *directement opposées*, qui font entre elles l'angle $\varepsilon = \pi$, et en deux autres w égales et *de même direction* qui font

entre elles l'angle $\varepsilon = 0$. Si $u = 0$, alors $v = v' = w$ et $\cos \varepsilon = +1$; de sorte que le potentiel est $= \frac{ee'}{r} (1 + kw^2)$. Si $w = 0$, $v = v' = u$ et $\cos \varepsilon = -1$; alors le potentiel est $= \frac{ee'}{r} (1 - ku^2)$. Le *premier* cas se présente pour deux particules au repos sur la terre, qui se meuvent avec celle-ci dans l'espace. Pour de telles particules, la loi de l'électrostatique est démontrée *expérimentalement* et, d'après cela, le potentiel est $\frac{ee'}{r}$, ce qui est en contradiction avec la loi de Clausius. Dans le *second* cas, la vitesse relative des deux particules est $2u$ et la loi de Clausius est en concordance *parfaite* avec celle de Weber si l'on prend la constante de Clausius k égale à $\frac{4}{c^2}$. En modifiant la loi de Clausius, conformément au principe de l'électrostatique, on en tirera celle de Weber comme *loi générale*. »

Il y a, dans ces considérations, deux points à rencontrer.

En premier lieu, il y a cette circonstance que deux particules d'électricité au repos sur la terre se déplacent avec celle-ci dans l'espace et ont des vitesses égales et de même direction, dont Weber désigne par w la grandeur. Dans ce cas, ma loi donne la formule $\frac{ee'}{r} (1 + kw^2)$ pour le potentiel, et Weber dit que ceci est en contradiction avec la loi expérimentale de l'électrostatique, d'après laquelle le potentiel est $\frac{ee'}{r}$.

Si l'on examine la chose de plus près, cette contradiction apparente avec l'expérience disparaît complètement. Désignons par x, y, z et x', y', z' les coordonnées, par rapport à un système de coordonnées fixe dans l'espace,

des deux particules électriques e et e' au repos sur la terre; comme on peut, dans le cas de la recherche expérimentale regarder la vitesse w du point de la terre comme constante en grandeur et direction, ma formule du potentiel donnera les expressions suivantes pour les composantes de la force que e' exerce sur e :

$$- ee' \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} (1 - kw^2); \quad - ee' \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} (1 - kw^2); \quad - ee' \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} (1 - kw^2),$$

tandis que la formule $\frac{ee'}{r}$ du potentiel électrostatique donnerait les expressions :

$$- ee' \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r}; \quad - ee' \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r}; \quad ee' \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r}.$$

Les expressions obtenues pour ces deux cas ne diffèrent par conséquent que par le facteur constant $1 - kw^2$. Ce facteur constant a, sur les formules, la même influence que si l'unité avec laquelle on mesure les quantités d'électricité e et e' , était un peu modifiée. Mais puisque nous ne déduisons l'unité, avec laquelle nous mesurons l'électricité, que de la force qu'elle exerce, nous ne pouvons remarquer une modification de la force qui a lieu d'une manière constante, de sorte que cette contradiction disparaît.

En second lieu, Weber dit que, si l'on modifie ma formule, en raison de cette contradiction (supposée) avec la loi d'électrostatique, de telle sorte qu'on ne considère plus, dans sa formation, les deux vitesses w égales et de même direction, et qu'on ne fasse entrer en ligne de compte que les vitesses u égales et de directions

opposées, ce qui lui donne ainsi la forme $\frac{ee'}{r} (1 - ku^2)$, cette dernière formule concorde avec sa formule du potentiel de sorte que, par cette rectification, on tire, de ma formule, la sienne comme loi *générale*. Mais ceci est une méprise, car la formule $\frac{ee'}{r} (1 - ku^2)$ n'est pas celle de Weber, mais bien celle de Riemann, puisque la quantité $2u$ n'est pas égale à $\frac{dr}{dt}$, mais représente la vitesse relative, dans le sens ordinaire du mot.

Il ne peut naturellement y avoir aucun doute que cette méprise n'a été causée que par l'examen trop superficiel du sujet, et, en effet, Weber lui-même a complété sa théorie dans un travail publié par Zöllner dans la seconde partie du second volume de ses mémoires. A la vérité, il ne dit pas que son assertion antérieure, d'après laquelle la formule $\frac{ee'}{r} (1 - ku^2)$ concorde avec sa formule du potentiel, est inexacte, mais il entreprend pourtant la décomposition de la vitesse u , qui est nécessaire, pour obtenir la quantité $\frac{dr}{dt}$ qui intervient dans sa formule. Il décompose u en deux composantes, dont l'une est dirigée suivant la ligne de jonction des deux particules et qui est égale à $\frac{1}{2} \frac{dr}{dt}$, et dont l'autre est normale à cette ligne de jonction. Désignons dans la suite par u_1 et u_2 ces deux composantes.

Après avoir fait cette décomposition, Weber émet une autre considération, de laquelle il déduit une nouvelle objection contre ma formule du potentiel.

Il forme notamment mon potentiel électrodynamique aussi bien pour les vitesses totales v et v' , que pour

les composantes séparées de ces vitesses, puis il compare les dernières expressions avec la première. Le potentiel électrodynamique relatif aux vitesses totales est déterminé par l'équation :

$$V = k \frac{ee'}{r} vv' \cos \varepsilon.$$

Si l'on décompose les vitesses dans les *deux* composantes w et u , et qu'on désigne par W et U les potentiels qui s'y rapportent, on a les équations :

$$W = k \frac{ee'}{r} w^2; \quad U = -k \frac{ee'}{r} u^2.$$

Si l'on décompose les vitesses dans les *trois* composantes w , u_1 et u_2 , et qu'on désigne par W , U_1 , U_2 , les potentiels qui s'y rapportent, on aura :

$$W = k \frac{ee'}{r} w^2; \quad U_1 = -k \frac{ee'}{r} u_1^2; \quad U_2 = -k \frac{ee'}{r} u_2^2.$$

Weber dit maintenant qu'on doit s'attendre à ce que, dans la première décomposition, la somme $W + U$ et, dans la seconde, la somme $W + U_1 + U_2$ soit égale à V ; mais que ceci n'est pas le cas, car la quantité $vv' \cos \varepsilon$ n'est pas égale aux sommes algébriques $v^2 - u^2$ et $v^2 - u_1^2 - u_2^2$, mais est représentée par une expression beaucoup plus compliquée.

Si cela était réellement vrai, ma formule du potentiel deviendrait, en effet, par là même invraisemblable. Mais en considérant la chose de plus près, on trouve que cela est inexact, et que l'assertion de Weber n'a été causée que par un examen trop superficiel du sujet, puisqu'elle repose sur une simple faute de calcul.

Des deux sommes algébriques $w^2 - u^2$ et $u^2 - u_1^2 - u_2^2$, nous n'avons besoin de considérer en détail que la première, puisque la seconde peut être ramenée à celle-ci, au moyen de l'équation $u_1^2 + u_2^2 = u^2$ qui est évidente par elle-même. On peut aisément démontrer (malgré l'assertion contraire de Weber) que l'équation :

$$vv' \cos \varepsilon = w^2 - u^2, \quad (1)$$

est exacte.

Pour cela, considérons les composantes suivant les axes coordonnés de v , v' , w et u . Les composantes x des vitesses v et v' sont $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dx'}{dt}$. Il en résulte que les composantes x des vitesses w , égales et de même direction, sont pour les deux particules $\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} + \frac{dx'}{dt} \right)$, et que les composantes x des vitesses u , égales et de directions opposées, sont respectivement $\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt} \right)$ et $\frac{1}{2} \left(\frac{dx'}{dt} - \frac{dx}{dt} \right)$ pour la première et la seconde particule.

On a des expressions analogues pour les autres axes coordonnés. D'après cela, on a pour w et u les équations suivantes :

$$w^2 = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dx'}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} + \frac{dy'}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} + \frac{dz'}{dt} \right)^2 \right]$$

$$u^2 = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy'}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz'}{dt} \right)^2 \right].$$

En retranchant la seconde de ces équations de la première, on obtient :

$$w^2 - u^2 = \frac{dx}{dt} \frac{dx'}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{dy'}{dt} + \frac{dz}{dt} \frac{dz'}{dt},$$

et l'expression contenue dans le second membre est bien $vv' \cos \varepsilon$, de sorte que l'équation (1) est démontrée.

Au lieu de ce calcul très simple, Weber en fait un beaucoup plus compliqué, dont je ne donnerai ici que ce qui est nécessaire pour montrer la faute de calcul. Désignant par γ l'angle compris entre la direction de w et celle d'une des directions u , il forme les équations :

$$\left. \begin{aligned} v^2 &= u^2 + w^2 - 2uw \cos \gamma \\ v'^2 &= u^2 + w^2 + 2uw \cos \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Appelant ensuite α et β les angles formés par la direction w avec les directions v et v' , il écrit les équations :

$$\sin \gamma = \frac{v}{u} \sin \alpha = \frac{v'}{u} \sin \beta;$$

d'où il résulte :

$$u \cos \gamma = \sqrt{u^2 - v^2 \sin^2 \alpha} = \sqrt{u^2 - v'^2 \sin^2 \beta}. \quad (3)$$

Puis Weber dit que, de ces équations, résultent les suivantes :

$$\left. \begin{aligned} v^2 &= u^2 + w^2 \cos 2\alpha \left(1 \pm \sqrt{\frac{u^2}{w^2} - \sin^2 \alpha} \right) \\ v'^2 &= u^2 + w^2 \cos 2\beta \left(1 \pm \sqrt{\frac{u^2}{w^2} - \sin^2 \beta} \right), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

et les valeurs de v et v' déterminées par ces équations sont celles qu'il pense devoir substituer dans ma formule

du potentiel $k \frac{ee'}{r} v v' \cos \varepsilon$, de sorte que celle-ci prendrait une forme très compliquée.

En réalité, les équations (4) ne résultent pas des équations (2) et (3), qui donnent plutôt :

$$\left. \begin{aligned} v^2 &= u^2 + w^2 \left(\cos 2\alpha \pm 2 \cos \alpha \sqrt{\frac{u^2}{w^2} - \sin^2 \alpha} \right) \\ v'^2 &= u'^2 + w'^2 \left(\cos 2\beta + 2 \cos \beta \sqrt{\frac{u'^2}{w'^2} - \sin^2 \beta} \right). \end{aligned} \right\} (5)$$

De ces équations, on peut déduire la relation :

$$v v' \cos (\alpha + \beta) = w^2 - u^2,$$

en tenant compte encore d'une certaine relation qui existe entre les vitesses u et w et les angles α et β ; on remarquera que la somme des angles α et β est bien l'angle que j'ai désigné par ε . Ainsi, par ce développement, bien qu'il soit indirect, on parvient encore à l'équation (1) contestée par Weber; l'objection de ce dernier tombe donc.

§ 6.

Recherche de Lorberg.

Dans la deuxième partie du second volume des mémoires scientifiques de Zöllner, que j'ai déjà citée au commencement du paragraphe précédent, l'auteur mentionne aussi le mémoire publié par Lorberg dans le tome 84 du Journal de Borchardt, et il dit que, dans ce mémoire, on démontre que ma loi est insoutenable et (sous certaines suppositions évidentes d'elles-mêmes) que la loi de Weber est *nécessaire*. On verra clairement ce qu'il faut retenir de cette affirmation en examinant de plus près le résultat obtenu par Lorberg.

Dans son mémoire, Lorberg applique d'abord la loi de Weber et la mienne à quelques cas particuliers. Dans cette application, il se présente naturellement certaines différences dans les forces qui en résultent, mais toujours seulement dans des cas tels, qu'il n'est pas possible, par n'importe quelle expérience faite jusqu'ici, de décider de l'exactitude de l'un ou de l'autre des résultats divergents. Il ne peut donc être question de démontrer que ma loi est insoutenable.

Ensuite, Lorberg effectue une recherche semblable à celle que j'ai faite; et il déduit la forme mathématique du principe en se basant sur certaines propositions.

Celles-ci sont, pour autant qu'elles reposent sur des expériences, essentiellement les mêmes que celles que j'ai faites; mais il y a en plus une proposition, qui va expressément à l'encontre des vues que j'ai exprimées; c'est celle d'après laquelle les forces électrodynamiques ne dépendent que du mouvement *relatif* des particules d'électricité et même du mouvement relatif dans le sens attribué à ce mot par Weber, c'est-à-dire, celui qui se rapporte au rapprochement ou à l'éloignement mutuel des particules.

J'ai dit de prime abord que mes développements se distinguent des autres semblables faits antérieurement en ce que j'y considère, non seulement le mouvement relatif, mais aussi les mouvements absolus des particules. Pour montrer comment cette différence se manifeste dans les résultats, j'ai fait une comparaison des formules du potentiel données par Weber, par Riemann et par moi, comparaison que j'ai reproduite dans le § I du chapitre X; j'ai montré, par là, que ces formules se distinguent, en ce que celle de Weber renferme la vitesse relative dans le sens lui attribué par cet auteur, en ce que celle de Riemann renferme la vitesse relative dans le sens ordinaire, et en ce que la mienne renferme les composantes des vitesses absolues. Quiconque, comme Zöllner, considère comme *évidente par elle-même* l'hypothèse que les forces électrodynamiques ne dépendent que du mouvement relatif, dans le sens attribué à ce mot par Weber, n'a pas besoin de faire de nouvelles recherches pour décider entre les trois formules; il peut le faire immédiatement à la simple lecture.

La recherche de Lorberg est cependant précieuse pour la clarté du sujet, parce qu'elle établit d'une manière plus nette qu'on ne l'avait fait jusque là, les conséquences qui découlent de certaines hypothèses;

mais elle ne peut pas être en contradiction avec ma recherche, parce qu'elle repose précisément sur d'autres hypothèses.

Ce qu'il y a de mieux pour faire voir clairement dans quelle relation se trouvent les résultats des deux recherches, c'est de les mettre en regard sous des formes aussi semblables que possible. Le résultat de la recherche de Lorberg peut s'exprimer comme suit : *si l'on part de l'hypothèse que seul, le mouvement relatif, dans le sens pris par Weber, peut avoir une influence sur les forces électrodynamiques, on parvient à la conclusion que le principe de Weber est le seul possible, et que dans un courant électrique, les deux électricités doivent circuler avec des vitesses égales et opposées.* Au contraire, le résultat de ma recherche est le suivant : *si l'on ne veut pas faire l'hypothèse que, dans les courants galvaniques et dans les autres courants électriques, auxquels les lois électrodynamiques sont applicables, les deux électricités circulent avec des vitesses égales et opposées, on ne peut non plus admettre que seul, le mouvement relatif (dans le sens pris par Weber ou dans le sens ordinaire) a une influence sur les forces électrodynamiques, mais l'on doit aussi attribuer une influence aux mouvements absolus, et l'on parvient alors à mon principe, qui est le seul possible.*

FIN DU DEUXIÈME VOLUME.

TABLE DES MATIÈRES

	PAGES.
ERRATA	IV
PRÉFACE DE LA DEUXIÈME ÉDITION ALLEMANDE	V

CHAPITRE I.

INTRODUCTION A LA THÉORIE MATHÉMATIQUE DE L'ÉLECTRICITÉ.

§ 1. La fonction potentielle	1
§ 2. Hypothèse des deux électricités et expression de leurs forces	3
§ 3. Expression de la fonction potentielle	5
§ 4. Détermination des composantes de la force à l'aide de la fonction potentielle	7
§ 5. Le niveau potentiel.	9
§ 6. Expression différentielle du deuxième ordre qui détermine la répartition de l'agent actif dans l'espace	10
§ 7. État d'équilibre électrique	12
§ 8. Équation différentielle qui détermine la distribution de l'agent actif sur une surface	14
§ 9. Distribution de l'électricité sur une sphère et sur un ellipsoïde	16
§ 10. Distribution de l'électricité sur un plateau elliptique.	21
§ 11. Théorème de Green.	25
§ 12. Détermination de l'agent renfermé sous une surface.	28
§ 13. Le principe de Green-Dirichlet et la fonction de Green.	30
§ 14. Détermination de la fonction potentielle d'un agent circonscrit par une surface à l'aide des valeurs de cette fonction à la surface.	33
§ 15. Distribution superficielle qui correspond à une fonction potentielle donnée dans la surface	38
§ 16. Détermination, à l'aide de la fonction de Green, de la fonction potentielle et de la densité superficielle dans des conducteurs électriques	40
§ 17. Action d'une enveloppe conductrice et d'un écran conducteur.	42
§ 18. Théorème général relatif aux actions d'influence.	45

CHAPITRE II.

ÉQUATIONS APPLICABLES AUX BOUTEILLES DE LEYDE.

§ 1. Considération de deux points très voisins situés en face l'un de l'autre sur les surfaces de corps conducteurs.	52
§ 2. Application des équations au condensateur, au carreau de Franklin et à la bouteille de Leyde.	58
§ 3. Compléments qui sont encore nécessaires dans les équations précédentes.	62
§ 4. Examen de quelques cas particuliers simples.	65
§ 5. Équations générales pour deux corps quelconques.	71
§ 6. Détermination du coefficient α pour des bouteilles de Leyde.	75
§ 7. Signification des coefficients α et β pour des bouteilles de Leyde.	78
§ 8. Forme commode des équations.	81

CHAPITRE III.

THÉORIE DES MILIEUX DIÉLECTRIQUES.

§ 1. Manière dont se comporte la couche isolante interposée.	84
§ 2. Hypothèses possibles relativement à la polarisation intérieure des isolateurs.	87
§ 3. Choix d'une hypothèse pour le calcul mathématique.	89
§ 4. Recherche des équations fondamentales de Poisson.	91
§ 5. Formes variées de l'équation obtenue.	104
§ 6. Application des équations obtenues aux carreaux de Franklin et aux bouteilles de Leyde.	110
§ 7. Équations complètes pour les deux armatures d'une bouteille de Leyde.	121
§ 8. Théorie des diélectriques, d'après Helmholtz et Maxwell.	125

CHAPITRE IV.

ÉQUIVALENT MÉCANIQUE D'UNE DÉCHARGE ÉLECTRIQUE.

§ 1. Effet total d'une décharge.	134
§ 2. Potentiel d'une bouteille de Leyde ou d'une batterie chargée.	136
§ 3. Diminution du potentiel lors de la décharge, et résidu.	141
§ 4. Examen du cas où les niveaux potentiels des deux	

armatures sont égaux, tandis qu'il subsiste encore une polarité intérieure	143
§ 5. Travail des forces électriques pendant la décharge et après celle-ci	149
§ 6. Effets de la décharge	153
§ 7. Comparaison dans l'hypothèse de charges diverses	162
§ 8. Décharge incomplète	163
§ 9. Équations applicables à la batterie à cascade	168
§ 10. Batterie à cascade de deux éléments inégaux	170
§ 11. Batterie à cascade de plusieurs éléments égaux	175

CHAPITRE V.

PRODUCTION DE TRAVAIL ET DE CHALEUR DANS UN COURANT ÉLECTRIQUE STATIONNAIRE.

§ 1. Caractère distinctif du cas à considérer	180
§ 2. La loi d'Ohm, et son interprétation par Kirchhoff.	182
§ 3. Distribution de l'électricité décomposée et état électrique dans l'intérieur du conducteur	185
§ 4. Détermination du travail effectué dans le conducteur.	190
§ 5. Détermination de la chaleur engendrée dans le conducteur.	193
§ 6. Examen de cas particuliers	196
§ 7. Manière dont se comportent, dans différents gaz, des fils échauffés galvaniquement	199
§ 8. Accroissement de la résistance à la conductibilité des métaux simples solides avec la température.	207
§ 9. Rapport qui existe entre l'action chimique qui a lieu dans une pile voltaïque, et les effets produits par le courant	209

CHAPITRE VI.

CONDUCTIBILITÉ ÉLECTRIQUE DANS LES ÉLECTROLYTES.

§ 1. Travail effectué et chaleur produite dans un conducteur électrolytique	215
§ 2. État électrique des molécules partielles	218
§ 3. Condition que l'on doit supposer satisfaite	220
§ 4. Difficulté de l'explication	223
§ 5. Autre hypothèse sur l'état moléculaire des liquides	

électrolytiques	226
§ 6. Nouvelle explication de la conductibilité électrolytique.	228
§ 7. Concordance de la nouvelle explication avec l'expérience, et différence qu'elle présente avec celle de Grotthuss	231
§ 8. Relation de l'explication précédente avec l'état chimique des substances composées	232
§ 9. Conductibilité métallique dans les électrolytes	235

CHAPITRE VII.

COURANTS THERMOÉLECTRIQUES.

§ 1. État électrique à la surface de contact de deux substances	236
§ 2. Origine de la différence de niveau potentiel.	239
§ 3. Distinction à faire entre la différence de niveau potentiel ici admise et une autre	246
§ 4. Intensité du courant dans une chaîne thermoélectrique formée de deux substances	248
§ 5. Travail effectué et chaleur produite dans la chaîne thermoélectrique.	250
§ 6. Existence d'une transmission de chaleur par l'intermédiaire de la chaîne thermoélectrique	255
§ 7. Application du second principe fondamental de la théorie mécanique de la chaleur.	258
§ 8. Concordance entre le résultat ci-dessus et l'expérience.	262
§ 9. Écart du résultat ci-dessus d'avec l'expérience et leur explication	266
§ 10. Extension de la théorie	270
§ 11. Expression généralisée de la force électromotrice.	272
§ 12. Chaleur consommée et chaleur produite dans la chaîne thermoélectrique	279

CHAPITRE VIII.

FORCES PONDÉROMOTRICES ET ÉLECTROMOTRICES ENTRE COURANTS LINEAIRES ET CONDUCTEURS.

§ 1. Les formules fondamentales d'Ampère	285
§ 2. Transformation des équations précédentes	290

§ 3. Réduction des trois quantités A, B, C, à une même quantité	292
§ 4. La force magnétique et la fonction potentielle magnétique d'un courant fermé	296
§ 5. Introduction de surfaces magnétiques pour le courant éprouvant l'action	301
§ 6. Le potentiel magnétique de deux courants fermés l'un sur l'autre	306
§ 7. L'induction et le potentiel électrodynamique de deux courants fermés l'un sur l'autre.	315

CHAPITRE IX.

DÉDUCTION D'UN NOUVEAU PRINCIPE D'ÉLECTRÔDYNAMIQUE.

§ 1. Généralisation de la loi des actions électriques et différentes manières de voir sur l'électricité dynamique	319
§ 2. Contradiction entre le principe de Weber et l'hypothèse d'une seule électricité mobile dans un conducteur fixe	222
§ 3. Discussion d'une loi posée par Riemann, relativement à la force et envisagée au point de vue précédent.	327
§ 4. Admissibilité de certaines présuppositions lors de la détermination des forces	331
§ 5. Expressions des composantes de la force dans un système particulier de coordonnées	333
§ 6. Expressions des composantes de la force dans un système quelconque de coordonnées	341
§ 7. Détermination des fonctions qui entrent dans X_1	346
§ 8. " " " " X_2	351
§ 9. " " " " X_3	355
§ 10. Application des lois relatives à l'induction	364
§ 11. Résumé des résultats obtenus	374
§ 12. Application du principe de la conservation de l'énergie	377
§ 13. Le potentiel électrodynamique	389
§ 14. Recherche des composantes de la force au moyen du potentiel	393
§ 15. Loi de force pour des éléments de courant	397

CHAPITRE X.

APPLICATION DU NOUVEAU PRINCIPE D'ÉLECTRODYNAMIQUE
AUX FORCES PONDÉROMOTRICES ET ÉLECTROMOTRICES QUI ONT LIEU
ENTRE DES COURANTS LINÉAIRES ET DES CONDUCTEURS.

§ 1. Particularités qui distinguent le nouveau principe d'électrodynamique	399
§ 2. Application du nouveau principe aux électricités qui se meuvent dans des conducteurs linéaires en mouvement	404
§ 3. Force pondéromotrice entre deux éléments de courants	412
§ 4. Détermination de la force électromotrice induite	418
§ 5. Travail des forces pondéromotrices et électromotrices	423
§ 6. Le potentiel électrodynamique de deux courants fermés l'un sur l'autre	427

CHAPITRE XI.

DISCUSSIONS SUR LA THÉORIE MÉCANIQUE DE LA CHALEUR
ET DE L'ÉLECTRICITÉ.

§ 1. Objection de Tait, tirée de la considération des phénomènes thermoélectriques	431
§ 2. Objection de F. Kohlrausch	436
§ 3. Vues de W. Thomson et de F. Kohlrausch, sur les phénomènes thermoélectriques	442
§ 4. Objections de Zöllner contre les considérations d'électrodynamique contenues dans le chapitre IX	448
§ 5. Objections de W. Weber	456
§ 6. Recherche de Lorberg	464
Table des matières	467

