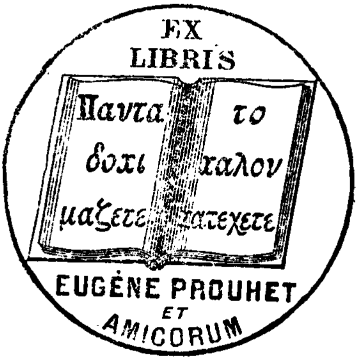


CORRESPONDANCE

MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE.

TOME II.

Daniel Bernoulli.

Correspondance
MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE
DE QUELQUES CÉLÈBRES GÉOMÈTRES
DU XVIII$^{\text{ème}}$ SIÈCLE

PRÉCÉDÉE

D'UNE NOTICE SUR LES TRAVAUX DE **LÉONARD EULER,**

TANT IMPRIMÉS QU'INÉDITS

ET PUBLIÉE

SOUS LES AUSPICES DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE SAINT-PÉTERSBOURG

PAR

P.-H. Fuss,

Conseiller d'état actuel de S. M. l'Empereur de toutes les Russies, membre et secrétaire perpétuel de l'Académie impériale des sciences de St.-Pétersbourg, docteur en philos., membre de plusieurs académies et sociétés savantes russes et étrangères, Chevalier des ordres impériaux et royaux de St.-Stanislas, de St.-Vladimir et de Ste-Anne.

Tome II.

Avec le portrait de Daniel Bernoulli, *gravé sur acier,* 4 *planches de figures et* 5 *fac-similés.*

ST.-PÉTERSBOURG,

1843.

CORRESPONDANCE

MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE.

TOME II.

=

TABLE DES MATIÈRES.

I. Lettres de Jean Bernoulli, le père, à Léonard Euler.

Bâle 1728 — 1746. pag. 1 — 94.

II. Correspondance entre Nicolas Bernoulli (fils aîné de Jean) et Goldbach.

1721 — 1725. pag. 95 — 170.

III. Correspondance entre Daniel Bernoulli et Goldbach.

1723 — 1730. pag. 171 — 406.

IV. Lettres de Daniel Bernoulli à Léonard Euler.

1726 — 1755. pag. 407 — 655.

(Toutes ces lettres sont datées de Bâle, excepté les lettres 1, 2 et 32).

V. Lettres de Daniel Bernoulli à Nicolas Fuss.

1773 — 1778. pag. 657 — 677.

VI. Lettres de Nicolas Bernoulli (neveu de Jacques et de Jean) à Léonard Euler.

1742. 1743. pag. 679 — 713.

LETTRES

DE

JEAN BERNOULLI

(né le 27 juillet 1667, mort le 1 janvier 1748).

À

LÉONARD EULER

1728 — 1746.

Fac-simile de l'écriture de Jean Bernoulli 1741.

Viro Celeberrimo atq; Excellentissimo
Leonhardo Eulero
S. P. D.
Joh. Bernoulli

Jam duo elapsi sunt menses et amplius cum ad me perferrentur Litteræ Tuæ novissima, quo ipso tempore in lecto decumbebam misere laborans doloribus podagricis, chiragricis, ut et tussi asperrima, asthmate aliisq; symptomatibus, præsertim quadam paralysi, quæ manum dextram ita corripuit ut per plures hebdomadas calamo ad scribendum uti non potuerim, imo ne nunc quidem possim expedite exarare litteras quas non tam scribo quam pingo ob vehementem manus tremorem, jam à longo tempore me infestantem atq; indies ingravescentem; talia sunt senectutis incommoda, à quibus curari posse nulla spes affulget. Sed ne Te molestem importunis meis querelis, festino, at lente, ad Litterarum Tuarum contenta:

Vix credideris Vir Excell. quanto me gaudio perfuderit elogium quo decorare voluisti meditationes meas hydraulicas, à Te enim laudari, qui omnium es perspicacissimus simul etiam Judex integerrimus, potiori mihi duco honori quam si à mille aliis laudarer; inserviet mihi judicium Tuum, tanquam omni exceptione majus contra quosvis cavillatores, sive sint invidi sive ignari; facile enim præcipio, non defuturos, præsertim in Anglia, qui more suo extenuabunt inventum non aliam ob causam quam quia debetur extraneo.

Lith par A Davignon.

LETTRE I.

Sommaire. Nomination de Hermann à la chaire d'Ethique à Bâle. — Recherches d'Euler sur le mouvement des eaux et la vitesse du son. — Expériences faites à St.-Pétersbourg sur la projection verticale des boulets de canon. Réflexions de Daniel et de Jean Bernoulli sur cette matière. — Mémoire de Fatio sur le centre d'oscillation et de percussion. — Valeur de la formule $y = (-1)^x$. — P. S. Rectification d'une erreur de Daniel dans le problème du mouvement des projectiles. — Mémoire *sur le mouvement*, envoyé par Jean Bernoulli. — Exhortation.

Doctissimo atque ingeniosissimo Viro Juveni Leonhardo Eulero S. P. D. Joh. Bernoulli.

Pergratae fuerunt litterae Tuae Petropoli ad me datae die 5. Novembris st. v., quae me certiorem reddiderunt meam memoriam in Te nondum esse obliteratam neque temporis, neque loci longinquitate; si quid, ut agnoscis, in sublimiori mathesi a me profecisti, gaudeo, eoque magis, quod pro ea qua es ingenii felicitate, mirum in modum illud amplificas, quo spero futurum ut semina a me sparsa brevitempore in immenses abeant segetes, quid enim a fundi Tui fertilitate expectare non licet? Dedi 20. praeteriti mensis Decembris

*

litteras ad filium meum Danielem, quas eum accepisse spero: significabam in illis electionem Celeb. Hermann*) ad professionem Ethices, atque monebam ut huic viro meo nomine ea de re gratularetur, quod factum fuisse non dubito; nunc idem ut repetas apud illum enixe Te rogo, cum plurima salute meis verbis illi denuncianda, non minus quam Filio meo. Gratias ago pro perscripta crisi iniqua et fastuosa quam H...**) noster de me meisque editis scriptis tam inhumaniter ad Te dixit. Dabitur occasio, eam illi pro merito exprobrandi, atque invidi hominis judicio opponendi judicium mihi perquam honorificum tot aliorum virorum in mathematicis et anatomicis celeberrimorum. Quae de motu aquarum effluentium ut et de velocitate soni memoras, digna utique sunt ut excolas. Nullus dubito quin si recte tractentur, omnia quae experientia monstrat ex Theoria mea virium vivarum deduci possint. Scripsit nuper Daniel meus facta fuissa experimenta, circa globos tormentarios in altum verticaliter explosos, eaque occasione communicavit quaedam a se commenta de modo supputandi tempora ascensus et descensus, habita ratione resistentiae aëris: Dicit inter alia se demonstrare posse globum verticaliter explosum, licet vi infinita, hoc est, cujus velocitas initialis infinita sit, impendere tamen tempus tantum finitum in totum ascensum absolvendum in aëre resistente; Ego vero ex eo tempore meditatus detexi methodum determinandi quaecunque circa hanc materiam desiderabat Filius. Notabo hic summatim tantum pro casu proposito principaliora, communicaturus methodum

*) Jacques Hermann, membre de l'Académie de St.-Pétersbourg, Auteur de la *Phoronomie* (Amsterdam 1716. 4°.), né à Bâle en 1678, † dans cette même ville en 1733.

**) Ce nom propre est illisible dans la lettre originale.

ipsam forsan proxima vice qua ad Danielem scribam. Esto globus ferreus, qualis Petropoli adhibitus fuit, habens diametrum 3 poll. seu $\frac{1}{4}$ ped. Paris. (assumo hic mensuram Paris. quia haec mihi nota est, non item anglica). Suppono aërem per omnes dimensiones uniformiter densum, cujus densitas se habeat ad densitatem ferri ut 1 ad 7000, quemadmodum Filius assumit (quamvis verius se habeat ut 1 ad 6000), suppono etiam aërem esse perfecte elasticum, cujus nempe minimae particulae, ceu globuli consideratae, potentissimo elaterio sint praeditae; aliter enim se res haberet, quam hic descripturus sum, si aër esset instar fluidi non elastici ut aquae, cujus nempe particulae post impulsum in corpora non resilirent sed tantum a sequentibus ad latera removerentur et postea praeterlaberentur. Suppono item quod calculus et experientia ab Hugenio instituta docet, corpus grave a quiete cadens in vacuo descendere primo minuto secundo per $15\frac{1}{12}$ ped. Paris. Ponamus jam exempl. gr. globum tanta vi sursum explodi ut in vacuo ascendere posset per 1000 ped. His ita praemissis dico sequentia: 1. Ad ascensum 1000 ped. in vacuo requiritur tempus $8\frac{1}{6}$ sec. est enim

$$\sqrt{15\tfrac{1}{12}} . \sqrt{1000} :: 1 . 8\tfrac{1}{6}$$

quam proxime. 2. Idem globus eadem vi explosus in aëre resistente ascendet ad altitudinem $587\frac{5}{8}$ ped. 3. Pro hoc ascensu in aëre requiruntur $5\frac{3}{4}$ sec. quam proxime. 4. Pro subsequente descensu insumuntur $6\frac{17}{27}$ sec. ita ut uno fere secundo citius ascendat quam descendat. 5. Hinc a momento explosionis ad momentum recidentiae globi elabentur $12\frac{83}{100}$ sec. in aëre, sed in vacuo $16\frac{1}{3}$ sec.; differentia est $3\frac{149}{300}$, seu proxime $3\frac{1}{2}$ sec. quibus in vacuo serius recidit quam in aëre. 6. Si globus noster careret pondere et suam tantum quantitatem materiae retineret, ille pergeret moveri in infinitum, sed ita retardaretur, ut post percursos pedes 4667 $l.\,n.$: 17371780 ipsi residua foret velocitas quae se haberet ad velocitatem initialem ut 1 ad n (per $l.\,n.$ intelligo logarithmum numeri n ex tabulis logarithm. sumendum). Hoc nihil aliud est quam casus particularis formulae illius generalis quam dedi in dissertatione meâ de motu Cap. XII §. 13. 7. Tempus vero, quo globus noster non gravis percurreret hanc altitudinem, foret $= 228683 \times \overline{n - 1} : 48000$ sec. 8. Velocitas maxima, ad quam globus descendens in aëre continuo vergit, et quidem data quavis quantitate propius, si in infinitum descenderet, se habet ad velocitatem initialem quacum exploditur ut 61 ad 80. Adeoque descendendo in aeternum primam suam velocitatem nunquam recuperabit globus. 9. Hinc velocitas illa, quae tempore infinito acquireretur in aëre, aequalis est illi, quam globus acquireret si in vacuo caderet ex altitudine $583\frac{3}{8}$ ped. h. e. uno tantum pede majore quam est ascensus in aëre quem quippe invenimus esse $582\frac{3}{8}$ ped. 10. Velocitas initialis est ad velocitatem finalem, quam nempe acquirit globus recidens ad eundem locum unde fuit explosus, ut 135 ad 82. Hinc velocitas finalis ad velocitatem maximam *ad quam non* ut 1312 ad 1645, h. e. proxime ut 4 ad 5.

Communica haec quaeso cum Daniele meo, ut conferat cum suis, dicasque ei Illustr. Comitem à Pergen desiderare, ut describi curet dissertationem illam gallicam de centro oscillationis et percussionis, quam olim Ill. Christophorus Fatio sub ductu et auspiciis meis conscripserat et cujus apographum mihi traditum mei filii Petropolim abeuntes secum deportarunt. Quando descripta erit, poterit Daniel alteruter exemplar commoda sed promta et tuta occasione ad me transmittere, alterum sibi retinere.

Quaeris de $y = (-1)^x$, quid illa sit? Ego sic statuo:

sit $y = (-n)^x$, erit $ly = xl(-n)$, adeoque $\frac{dy}{y} = dxl(-n)$. Est vero $l(-n) = l(+n)$, nam in genere

$$dl(-z) = \frac{-dz}{-z} = \frac{+dz}{+z} = dl(z),\ \text{hinc}\ l(-z) = l(z);$$

adeoque $\frac{dy}{y} = dxl(+n)$, et integrando $ly = xln$, unde $y = n^x =$ (in casu quo $n = \pm 1$) $1^x = 1$. Ergo $y = 1$.

Caeterum novi anni auspicia, decursum ac finem cum multis aliis sequentibus ex animi sententia Tibi procedere voveo. Vale et fave. Dabam Basileae a. d. 9 Jan. 1728.

P. S. Filius meus credit globum in aëre sursum explosum vi licet infinita vel cujus velocitas initialis infinite sit magna, tamen nonnisi tempus finitum insumere in ascensum totalem, sed fallitur; invenio enim in hoc casu tempus ascensus esse etiam infinitum, quamvis (quod forsan illum fefellit) sit infinities minus, quam tempus ascensus in vacuo, si eadem illa velocitate initiali infinita exploderetur. Misi nuper per cursorem publicum specimen meum gallicum de Motu ad Clar. Schumacherum, Bibliothecarium vestrum, ab Illustri Academia vestra examinandum. Adventaverit fortassis ante has litteras. Spero te alere pacem et concordiam cum Filio meo, ita enim ambo excitabitis admirationem vestri apud minus exercitatos in profundiori mathesi: praeter quam quod hoc suadeat obligatio erga Filium qui unicus Petropolim te protraxit.

LETTRE II.

Sommaire. Sur la théorie de la musique d'Euler. Critique des principes de cette théorie.

Clarissime et Doctissime Domine Professor,
Amice Carissime.

Dessen letzteres vom 25. Mai ist mir von Seinem Herrn Vatter zurecht überlieffert worden; Er hat nicht nöthig sich wegen Saumseligkeit im Schreiben zu excusiren, da ich selbsten eine Antwort schuldig wäre: hoffe aber Er werde mir zu gut halten, was ich dissorts an meiner Pflicht etwas lasse abgehen, in Betrachtung meiner vielfältigen Occupationen, sonderlich bei dem mir neulich aufgetragenen, oder vielmehr aufgedrungenen Decanat, welches mir in meinem angehenden hohen Alter sehr beschwerlich ist.

Es ist mir sehr lieb gewesen zu vernehmen, dass der Herr Prof. an Verfertigung eines Systematis Musici (welches fast zu Ende soll gekommen seyn) arbeitet*); ich zweifle nicht, es werde ein schönes Werk zu Tage kommen, so des Auctors fürtreffliches ingenium sattsam zeigen wird; Ich kann mir leicht einbilden, dass dergleichen opus kaum wird gefunden werden, darin alles auss mathematischen Gründen hergeholet ist, da wenig Scriptores Musici oder wohl gar keine zu finden sind, welche mit so grosser und aussbündiger mathematischer Wissenschaft begaabet sind, wie der Hr. Professor ist, desswegen mich sehr verlanget Sein Werk selbsten dermahleneins zu sehen. Ich könnte zwar nicht leicht errathen, worin derjenige Grundsatz bestehe, so metaphysisch seyn solle, wie Er sagt, dadurch die Ursach könnte gegeben werden, warum Einer an einer Music ein Wohlgefallen haben könne, und dass uns eine Sach angenehm, eine andere aber unangenehm vorkomme: Man hat zwar eine General-idée von der Harmonie, dass sie lieblich ist, wenn sie wohl eingerichtet und die Consonanzen wohl menagirt seind, denn, wie bekandt, so haben auch die Dissonanzen in der Music ihren Gebrauch, damit die Lieblichkeit der gleich darauf folgenden Consonanzen desto besser herauskomme, nach dem gemeinen Sprichwort: opposita juxta se posita magis elucescunt; also verhält sich es auch mit dem Schatten in der Malereykunst, welcher das Licht releviren muss. Es kommt, glaub ich, in musica practica meistens auf die Art und Modification an, daran man gewöhnet ist, und diese Art dependiret viel von dem Naturel und Temperament der Leute, deren einige dieses, andere ein anderes für süss und angenehm halten; also ist die Italienische Music-

*) L'ouvrage: Tentamen novae theoriae Musicae, ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae (un vol. in 4.), parut à St.-Pétersbourg en 1739.

Art discrepant von der Französischen, und diese von der Englischen. Mit einem Wort, de gustibus non est disputandum. Wenn hiemit die Lieblichkeit eines Musicstückes in der Natur selbsten soll gegründet seyn, so muss man wohl definiren, was man durch Lieblichkeit verstehe und nicht sagen: dies oder jenes ist lieblich, weil es mir gefällt, denn eben dieses könnte einem andern missfallen, zum Exempel dem Midae hat des Pans Schnader-Music besser gefallen, als des Appollinis Harfenklang. Der Hr. Professor sagt, man könne urtheilen von dem Wohlgefallen oder Missfallen der viel zusammengefügten Töne, wenn man die Verhältniss der Höhe und Tiefe derselben, nämlich die rationem intervallorum pulsuum, welche die Saiten geben, ansiehet; daraus habe Er die Regeln gezogen, wie die Töne müssen zusammengefügt werden, dass sie ein verständiges Ohr belustigen können. Dieses lasse ich gelten für einen Meister, der mehr auf die Accuratesse eines Musicstückes Achtung gibt, als auf den Effect, den es auf die Zuhörer thut; ein Solcher wird sich ohne Zweifel daran ergötzen und belustigen, wenn er es nur auf dem Papier geschrieben siehet und examiniret, und befindet dass es nach den Grundregln wohl componirt ist; aber da ein Musicstück meistens gespielet wird vor unverständigen Ohren, welche die rationem intervallorum pulsuum der Saiten nicht einsehen, viel weniger zählen können, so wird, glaube ich, dergleichen Ohren das Musicstück entweder gefallen oder missfallen, je nachdem sie an diese oder jene Gattung der Music gewöhnt sind. Im übrigen gefället mir sein dessein ganz wohl, weilen aufs wenigste die Theoria musices dadurch perfectionniret und gewiesen wird, dass ein Mathematicus schier alle Wissenschaften auszuführen im Stande ist, dahingegen andere Meister, die nur Practici seind von ihrer eignen Kunst nicht anderst schreiben als wie ein Blinder von der Farb.

Wenn dieser Tractatus Musices zu End seyn wird, wird der Hr. Professor seine vorhabende Mechanicam*) (von deren mir ist geschrieben worden) ohne Zweifel mit Ernst für die Hand nehmen, von deren ich mir etwas Sonderbares promittire, darzu ich denn beharrliche Gesundheit von Herzen anwünsche. Verbleibe indessen unter Empfehlung Göttl. Protection des hochgeehrten Hrn. Professors

bereitwilligster J. Bernoulli Dr.

Basel, d. 11. August 1731.

*) Cet ouvrage parut déjà en 1736 sous le titre: Mechanica sive motus scientia analytice exposita, 2 vol. in 4.

LETTRE III.

Sommaire. Envoi du mémoire de Jean Bernoulli II*) *Sur la propagation de la lumière.* — Jugement d'Euler sur les pièces de Jean et de Daniel, relatives aux déclinaisons des orbites planétaires. La publication de la Mécanique d'Euler est attendue avec impatience; la haute idée que s'en forme J. B. — Le principe des forces vives, contesté par les Anglais — Polémique à ce sujet entre Jurin et J. B. dans les Actes de Leipzig. — Sommation des séries des puissances réciproques paires des nombres naturels.

Viro Clarissimo ac Mathematico longe acutissimo
Leonhardo Eulero S. P. D. Joh. Bernoulli.

Annus propemodum est quod postremas Tuas litteras accepi; ne credas quaeso, diuturni silentii causam fuisse aliquam animi mei alienationem, nosti enim et fateris ipse, quot quantaque Tibi olim dederim benevolentiae testimonia, ut plane non sit, cur ullam in me erga Te suspiceris mutationem: Vera potius dilationis causa est partim locorum longinquitas, partim sumtus erogandi in litteras mittendas et

*) Troisième fils de Jean, né le 18 mai 1710, † le 17 juillet 1790.

accipiendas per cursorem publicum. Utor itaque hac occasione commoda, qua citra sumtus ad Te amandare possim dissertationem filii mei Johannis de propagatione Luminis, condecoratam praemio superioris anni ab Academia regia Parisina, de qua, postquam eam perlegeris, judicium Tuum (quod ferre soles ex animi sententia) praestolabimur. Vidi quae perscripsisti filio meo Danieli de utriusque nostrûm dissertationibus super declinationibus orbitarum planetariarum*), id quod judicas de Danielis opere, videri scilicet deproperatum fuisse summa cum festinatione, idem et mihi visum fuerat, quod etiam statim ipsi exprobraveram. Si dicere licet quod sentio, credo ipsum ad optatum finem non perventurum fuisse, nisi paucis mensibus ante praemiorum distributionem reditum suum ex Moscovia per Lutetiam sumsisset, ubi occasionem invenit prensandi quorundam benevolentiam aut aliquid aliud moliendi, sicuti Tu ipse festive jocaris, quando dicis, in dissertatione Danielis hoc unum praecipue laude dignum reperiri, quod praemium reportaverit. In solidiorem mihi vergit gloriam honorifica quam fers sententia de mea dissertatione, *eam nempe elaboratam esse magna diligentia atque insigni ingenio*; quod vero addis Te dubitare an ipse credam, quaestionem per Theoriam meam plenarie solutam esse; ad hoc respondeo a nemine exigi posse, ut in rebus mere physicis promittat solutiones omni exceptione majores atque ad rigorem geometricum demonstrabiles; sufficit si secundum principia clara et semel stabilita ratiocinando recte procedat: Certe non puto, Cartesium vel Newtonum, vel alium quemvis ex Philosophis, qui systema physicum condidit, ausum fuisse vitam aut animam suam oppignerare pro

*) v. Histoire génér. des mathém p. Bossut T. II pag. 367 etc.

systematis sui exacta convenientia cum rerum existentia . . . . . Accepi a Filio, novam Mechanicam a Te parari ejusque tomum primum jamjam e prelo evasisse, id quod intelligere summo me gaudio afficit, spero namque me in hoc opere visurum multa singularia ex sagacissimi Tui ingenii promtuario depromta atque ab aliis Mechanicae Scriptoribus intacta; a Tuo quippe mentis acumine, quod ad profundissima penetrat naturae mysteria, nihil non novi, nihil non limatissimi mihi promitto: facile sane provideo Te non haerere tantum in explicandis vulgaribus istis et trivialibus Staticae legibus atque machinarum viribus ab aliis dudum occupatis; dabis operam haud dubie, ut sublimior Mechanicae pars, quae est Dynamica, hactenus segniter admodum tractata, a Te in plena sua luce prodeat, ubi praesertim ansam habebis naturam virium vivarum ita penitus excutiendi, ut nullus vel pertinacissimis adversariis relinquatur locus, quo suis cavillationibus ex invidia an imperitia an ex utraque identidem nobis obtrusis veram earum virium aestimationem arrodere non desinunt, id quidem ego nunc obtinui meis demonstrationibus, in dissertatione mea de motu tum et alibi expositis, ut nunc in Gallia passim veritas triumphet, sed Anglis usque adeo adhuc stomachum movet (ex livore credo contra Leibnitium, primum virium vivarum assertorem) ut cum unum alterumve ad silentium redactum atque e medio sublatum esse putamus, statim duo tresve alii prorumpant vehementius declamantes, non secus ac esset in Anglia Hydra Lernaea ad quam domandam Te tanquam Hercule opus erit. Jurinus imprimis, ut in Act. Lips. legi, horribilem strepitum excitat contra virium vivarum Patronos, sed insulsis adeo atque jejunis argumentis utitur, ut commiserationem potius quam indignationem commoveat: lepidum fuit vidisse in Actis

Lips. 1735. m. Majo recensionem quarundam dissertationum Jurini in quarum ultima inepte debacchatur contra vivium vivarum Defensores et nominatim quidem contra me, sed cui recensioni immediate subjecta est mea aliqua Dissertatio *De vera notione virium vivarum earumque usu in Dynamicis,* quasi eam dedita opera scripsissem in refutationem praecedentis dissertationis Jurinianae, etiamsi revera mihi nondum innotuerit a Jurino quicquam ea de re scriptum fuisse.

Percepi porro te invenisse modum summandi seriem fractionum $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+$ etc. h. e. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+$ etc. cujus nempe denominatores procedunt ut quadrata numerorum naturalium 1, 2, 3, 4, etc. id quod olim fratri meo Jacobo imperscrutabile fuit, sicuti ipse fatetur in Tractatu suo de seriebus infinitis p. 254; invenisti namque summam illius seriei $= \frac{cc}{6}$, nominando scilicet diametrum circuli $= 1$, ejusque circumferentiam $= c$; volebat meus Daniel fontem ejus indagare, sed irrito successu, quanquam in postremis Tuis litteris ad ipsum aliquid ni fallor de fundamento ei aperueris, cum primum vero mihi nominasset summam a Te inventam $\frac{cc}{6}$, praetereaque nihil, indeque ego intellexissem summam seriei reduci ad quadraturam circuli, curiosus unde petenda esset analysis, mox ipse proprio meo Marte totum detexi mysterium, in subsidium vocato elegantissimo aliquo theoremate Newtoni, quod sine demonstratione extat in ejus Algebra p. 251 edit. Lond. an. 1707, cujus autem demonstrationem etiam ego inveni, ubi traditus modus, quo ex coëfficientibus terminorum datae alicujus aequationis determinatur summa non tantum radicum, sed et ex radicibus summa quadratorum, cuborum, quadrato-quadratorum, etc. Ut itaque judicare possis an rem acu tetigerim, exprimam hic summas serierum ubi denominatores progrediuntur ut potentiae quartae, tum etiam ut potentiae sextae numerorum naturalium 2, 3, 4, 5, etc. Inveni enim (instituendo pro singulis novum calculum) $1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{etc.} = \frac{c^4}{90}$, item $1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \text{etc.} = \frac{c^6}{940}$. ex istis porro elicietur summa $1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \text{etc.}$ atque ita successive progredi licebit ad altiores dimensiones. Sed calculus gradatim fit operosior, extenditurque tantum ad exponentes dimensionum pares; quod si vero sint impares, fateor me quaesiti nondum esse compotem. Si quem possideas modum pro imparibus, ex. gr. pro hac serie summanda $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.}$ gratum erit a Te edoceri. Caeterum scrupulus aliquis subest in hoc negotio ex eo oriundus, quod pro hypothesi assumitur ex coëfficientibus terminorum alicujus aequationis, etiam infinitae, dependere radicum determinationem, id quod quidem in genere verissimum est, sed saepissime accidit ut in aequatione proposita lateant praeter radices utiles (quae problema solvunt) etiam inutiles seu peregrinae, imo quoque impossibiles seu imaginariae: Adeoque in hac aequatione ad quam pervenitur $e - x + \frac{x^3}{2.3} - \frac{x^5}{2.3.4.5} + \frac{x^7}{2.3\ldots7.} - \text{etc.} = 0$ ubi x denotat arcum circuli incognitum sinui dato e respondentem, demonstrandum esset nullam contineri radicem impossibilem, nullamque aliam, quam quae revera alicui ex infinitis arcubus ad sinum e pertinentibus respondeat; Habeo quidem in hoc casu aliquam demonstrationis speciem, quae mihi rem utcunque probabilem reddit: alias innumera possem afferre exempla, in quibus ita ratiocinando ad manifestam absurditatem delaberemur, ut si posito radio circuli $= 1$, arcu quodam dato a, tangente incognita $= t$, nosti utique hanc haberi aequationem $a = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + $ etc. adeoque $a - t + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{7}t^7 -$ etc. $= 0$; haec ergo aequatio infinitas radices t habebit, ex illis tamen omnibus unica tantum satisfacere ipsique arcui a respondere potest. Sed Te diutius detinere nolo. Vale, Vir Clarissime, et me quod facis amare perge. Dabam Basileae a. d. 2 April 1737.

LETTRE IV.

SOMMAIRE. J. B. envoie la première partie de ses Recherches hydrauliques. Exposé de sa méthode qu'il nomme *directe*, et des avantages qu'elle offre sur celle employée par Daniel, dans son Hydrodynamique. — Contenu de la seconde partie de ces mêmes recherches. — J. B. excuse l'insuffisance de son mémoire *De motu corporum in orbitis mobilibus*. — Travaux d'Euler sur la théorie de la musique et sur le mouvement des corps flottans. — Conditions du repos ou de l'équilibre des corps, et application de ces conditions aux corps flottans. — Sur les oscillations verticales et leur application à la recherche du poids des vaisseaux. — Problème des isopérimètres. — Recherches d'Euler sur la courbe élastique rectangulaire et autres. — Plainte sur sa situation à Bâle.

Viro Excellentissimo atque Acutissimo LEONHARDO EULERO S. P. D. JOH. BERNOULLI.

Exoptatissimae Tuae litterae d. 20. Decembris st. v. mihi traditae sunt atque a me perlectae summa cum voluptate. Ecce! nunc ad Te mitto partem priorem meditationum mearum hydraulicarum*), quas tantopere Te desiderare testa-

*) Dissertatio hydraulica de motu aquarum per vasa aut per canales, quamcumque figuram habentes, fluentium. Comment. Petrop. IX p. 3 — 49.

ris, et vel ideo desideras, quod cognoveris imperfectionem, qua haec doctrina etiamnunc ab aliis tractari soleat, immo, ut candide fateris, Tu ipse frustra omne studium in genuina methodo detegenda collocaveris, invita omni, qua polles, perspicacia. Videbis, originem sequioris successus Scriptorum hydraulicorum ex eo unice venisse, quod nemo hactenus attenderit, partem aliquam finitam virium prementium insumi ad formandum gurgitem, quando aqua cogitur ex uno tubo in alium diversae amplitudinis transire, licet gurges ipse constare concipiatur ex portiuncula aquae infinite parva. Post pertinacem diutinamque pensitationem animadverti tandem, non sufficere, ut attendatur ad solam illam vim seu pressionem, qua liquor in tubis in motum localem seu progressivum excitetur data cum velocitate, sed praeterea in considerationem trahi debere principium *Continuitatis,* quo fit ut nulla mutatio in effectibus producendis fiat per saltum, sed successive per gradus infinite parvos, ut in hoc negotio accidit, ubi liquor a velocitate minori ad majorem, vel vicissim a majori ad minorem transire debet; unde omnino necesse est, ut prope transitum, vel ante vel post, concipiatur aliqua portiuncula liquoris, quantumvis parva, cujus stratula infinite parva vel accelerando vel retardando procedant, atque haec portiuncula, inaequabili velocitate gaudens, in stratulis est, quam voco gurgitem: haec omnia uberius et clarius ex ipso scripto intelliges.

Videbis etiam methodum hanc directam mirifice conspirare cum indirecta (qua sola usus est Filius meus in sua Hydrodynamica) etenim ambae dant eandem solutionem problematum hydraulicorum. Posset autem aliquis mirari, cur, qui ista solvere vult per theoriam virium vivarum, non pariter teneatur rationem habere formandi gurgitis, utpote

*

qui videatur requirere ad sui generationem aliquam partem virium vivarum, aeque ac requiritur partem virium mortuarum; sed causam discriminis explico in scripto meo, monstrans, quantitatem materiae quae componit gurgitem, etsi sit infinite parva, nihilominus opus habere vi finita et determinata pressionis ad acquirendam accelerationem vel retardationem in stratulis, sive ad id, ut sese gradatim accommodet ad motum quem liquor jam habet in tubo, in quem ingredi debet. At vero vim vivam quae est in omni materia gurgitis, quippe quae quantitatis est infinite parvae et tantum finitam celeritatem in singulis stratulis habens, oppido patet fore illam vim vivam gurgitis infinite parvam ideoque prorsus incomparabilem cum totali vi viva totius massae aqueae in tubis motae. Hoc ergo notari debuisset a Filio, antequam aggrederetur tractationem Hydraulicae per theoriam conservationis virium vivarum, ne quis scrupulum habere possit, videns negligi considerationem gurgitis, quae in methodo directa citra paralogismum negligi non potest; sed quomodo potuisset hoc praecavere, cum nequidem ideam habuerit naturae gurgitis, quotempore librum suum scripsit.

Vides, Vir Clariss., figuras rudi admodum et crassa Minerva esse delineatas, sine ullo ornamento, nedum ad Stereographiae regulas repraesentatas, id sane efficere non potui, si vel maxime voluissem, ob tremorem manuum mearum qui cum aetate continuo ingravescit. Fortassis dabitur apud Vos aliquis amanuensis qui, Te dirigente, figuras elegantius et majore cum gratia delineare poterit, ita ut ad mentem meam respondeant.

Ceterum si videro, primam hanc partem hydraulicae meae exercitationis Tibi non displicuisse, transmittam protinus alteram partem, quam interea temporis, dum responsio

Tua ad me venerit, absolvam, ut ad mittendum sit parata: Deprehendes, illam adhuc magis esse curiosam, dum ita modifico theoriam meam, ut fere opus non sit idea gurgitis, quem sub alia notione involvo; unde nascitur novum principium hydraulicum, a nemine antea animadversum, cujus auxilio statim pervenio ad motum aquae determinandum fluentis per vasa vel canales, non tantum ex tubis cylindricis conflatos, sed quamcunque figuram, etiam irregularem habentes, aliaque explico phaenomena jucunda et utilia, quae in Physicis quoque suum usum habebunt. — — —

Vides, Vir Celeb., post tot scriptorum expeditionem parum temporis mihi superesse ad excutienda pro merito singula epistolae Tuae capita; attingam tamen tumultuarie quae tum permittit mentis distractio, oculorum hebetudo, atque imprimis manuum lassitudo et tremor. Quod in conventu Vestro praelegeris solutionem meam succinctam problematis de motu corporum in orbitis mobilibus*), gratias ago, quamvis eam non scripserim ut publice proponeretur, alias majori eam cura elaborassem atque extendissem magis. Dabitur forsan occasio alia vice communicandi quae mihi sunt meditata alia circa hanc materiam, et praesertim quae mihi subnata sunt ex lectione Newtonianorum non semper recte se habentium. Gratum erit accipere tomos, quos promittis, Commentariorum, quae post quartum mihi desunt.

In Musicis non valde sum exercitatus, neque hujus scientiae fundamenta satis mihi sunt perspecta, ut de inventis Tuis judicare queam. Videntur sane egregiae, quae in litteris Tuis obiter tantum attingis; sed cum videro ipsum

*) Compendium analyseos pro inventione vis centralis in orbibus mobilibus planetarum. Comment. Acad. Petrop. X. p. 95 — 100.

tractatum Tuum, quam de harmoniae principiis edere statuisti, spero fore ut exinde lux clarior mihi affulgeat ad inventorum Tuorum praestantiam penitius introspiciendam. Eandem ob causam nolo nunc diutius inhaerere iis, quae hactenus inter nos agitata sunt de situ et motu corporum aquae innatantium antequam visus mihi sit Tuus hac de re tractatulus, quem ad finem perductum esse ais. Interim bene est quod nunc agnoscas veritatem nonnullorum, quae monueram tam de situ obliquo coni et conoidis parabolici, quam de modo multiplicandi corporis particulas per quadrata distantiarum, non a centro ejus gravitatis, sed ab axe horizontali, per centrum transeunte, circa quem fiunt oscillationes. Corpus aliquod tribus utique modis in quiete vel aequilibrio conservatur: 1°) Si corpus duabus viribus aequalibus sed oppositis et ad se invicem tendentibus sollicitatur, fiet aequilibrium, quod olim in alia occasione vocavi *coactum*, idque est quod nunc vocas *firmum*. 2°) Quodsi vires illae duae aequales et oppositae a se invicem tendunt, hoc est, quae corpus non premunt, sed trahere conantur, fiet iterum aequilibrium, quod a Te vocatur *infirmum*, mihi vero pro scopo, quem olim tunc habueram, illud aequilibrium iterum vocabatur *coactum*. 3°) Si nullis omnino viribus oppositis corpus sollicitatur, nec premendo ad se invicem nec trahendo a se invicem, erit utique aequilibrium, quod a me dicebatur *otiosum*, ideo quia, si tale corpus a causa aliqua externa ex situ suo tantisper disturbatur, non amplius affectabit ad pristinum suum situm redire. Sic ex. gr. corpus sphaericum et homogeneum aquae insidens ac quiescens, si nonnihil circa centrum suum rotetur, manebit in hoc novo situ et non repetet priorem. Patet autem tale aequilibrium nec firmum esse nec infirmum, quodque ideo commode vocavi *otiosum*, quia est quasi in statu indifferentiae. Utrum vero corpus aquae insidens et quiescens sit in aequilibrio firmo vel infirmo, ex hoc utique cognoscitur, si nimirum nonnihil ex situ aequilibrii inclinetur, et ita quidem ut pars immersa idem semper volumen in aqua occupet, tunc centrum gravitatis corporis vel ascendisse in recta verticali, vel descendisse observabitur; si prius, concludendum erit corpus esse in aequlibrio firmo; si posterius, erit aequilibrium infirmum; si neque ascendit neque descendit, erit in statu neutro, seu indifferentiae, quod, ut dixi, mihi vocatur aequilibrium otiosum. In casu firmitatis attendendum est, quantum ex assumta inclinatione centrum gravitatis ascendat, tum enim ex utriusque collatione calculari potest lex accelerationis oscillationum corporis, atque inde determinari longitudo penduli isochroni. Sufficit theoriam ac fundamentum detexisse, calculum instituere non vacat tot aliis laboribus et negotiis distracto. De caetero gratissimum mihi fuit intelligere, quod ad admirationem usque Tibi placuerint, quae scripsi de oscillationibus verticalibus, propter simplicitatem expressionis et insignem usum quem praestare possunt in explorandis navium ponderibus; maluissem autem ut ipse quoque calculum fecisses ex Tuo ingenio, quo mihi patuisset, annon erraverim in ratiocinando, nam ingenue fateor, me Tuis luminibus plus fidere quam meis.

Quae nunc uberius affers, Vir Exc., de Isoperimetricis, credo equidem, Te omnia probe ruminasse atque ad veritatis trutinam expendisse, ita ut vix quicquam restet, quod acerrimam Tuam sagacitatem subterfugere potuerit; ad me quod attinet, diu adeo est quod haec seposui, ut mihi ea plane non amplius sint praesentia, quare ab his desisto.

Lectu jucundissimum fuit, quod addis in fine litterarum Tuarum de proprietate Tibi observata circa Elasticam rectangulam (vel etiam Linteariam, ambae enim eandem faciunt curvam) in qua si abscissa ponatur x, est applicata $= \int \frac{xxdx}{\sqrt{(a^4-x^4)}}$ et longitudo curvae $= \int \frac{aadx}{\sqrt{(a^4-x^4)}}$, quas expressiones ita comparatas dicis, ut inter se comparari nequeant. At invenisti si abscissa ponatur $= a$, rectangulum sub applicata et arcu comprehensum aequale esse areae circuli, cujus diameter sit abscissa $= a$. Est utique haec observatio notatu dignissima, *sed vellem scire*, an hanc proprietatem a priori et de industria quaesiveris et inveneris, aut an illam, ut saepe accidere solet, aliud quaerendo detexeris per casum fortuitum. Ego jam olim observavi circa has lineas duas aliquam proprietatem, etsi inventu faciliorem, quae in hoc consistit, quod earum, non quidem rectangulum, sed summa sit aequalis quadranti circumferentiae ellipseos, cujus axis minor $= 2a$ et axis major $= 2a\sqrt{2}$. Vid. Act. Lips. 1694. m. Octob. Hoc autem valet non tantum de tota curva cujus abscissa $x = a$ ejusque applicata maxima, sed indefinite de quibuscunque partibus earum ad se invicem spectantibus, quarum utique summa semper aequalis est arcui elliptico qui pro abscissa habet x in axe minori a centro sumtam, a cujus arcus longitudine etiam dependere demonstravi loco citato dimensionem arcus Lemniscatae curvae, quam adhibui ad construendam Isochronam paracentricam Leibnitii, quae tum temporis multum rumoris excitaverat. Quando autem affirmas applicatam $\int \frac{xxdx}{\sqrt{(a^4-x^4)}}$ et longitudinem curvae $\int \frac{aadx}{\sqrt{(a^4-x^4)}}$ ita esse comparatas, ut inter se comparari nequeant, nescio an hoc intellectum velis generaliter et sine ulla exceptione; an vero non putes posse quidem comparari pro aliqua x determinatae longitudinis, sed non indefinite pro singulis x, sicuti revera datur aliqua hujusmodi expressio, nempe haec: $\int \frac{x^4 dx}{aa\sqrt{(a^4 - x^4)}}$, quam in casu $x = a$ inveni aequalem esse trienti curvae totius, adeo ut habeatur

$$\int \frac{aadx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}} = 3 \int \frac{x^4 dx}{aa\sqrt{(a^4 - x^4)}}.$$

Optarim ut ad hoc investigandum aliquid temporis colloces, siquidem non minus notatu dignum videtur, quod Tuum illud alterum: $\int \frac{xxdx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}} \cdot \int \frac{aadx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}} =$ circulo.

Quod supra scripsi his verbis: *sed vellem scire* etc., id nunc didici ex litteris Tuis ad filium Danielem datis, quas mihi legendas exhibuit, postquam totam meam epistolam hucusque jam absolvissem.

Curiosa sunt theoremata in illis Tuis litteris contenta: ego jam olim similia inveni, sed mea magis geometrica sunt, ex consideratione curvarum deducta, Tua vero analytica magis, ope calculorum eruta. Combinando haec nostra in corpus commune, poterimus doctrinam de curvis inter se comparandis mirum quantum augere.

Quod denique doleas frequens damnum ex tot iteratis decoctionibus mercatorum mihi illatum, facis quidem, quod Christiana inculcat charitas, idque mihi solaminis loco erit, sed cum cogito, me hic Basileae esse, ubi perpetuis vexationibus fortunae obnoxius sum, ubi omni mea scientia vix minimam jacturae partem reparare possim, dum alibi honoribus et bonorum copia abundare potuissem, parum abest, quin tandem animum despondeam atque scientiarum culturae, quoad vixero, valedicam.

Valeas vero et Tu, Vir Excell., diutissime, mihique favere perge. Dabam Basileae a. d. 7. Mart. 1739.

LETTRE V.

Sommaire. Causes qui ont retardé l'envoi de la seconde partie des Recherches hydrauliques. — Impatience de voir le traité de Musique. — Sommation de la série $\frac{1}{1 \pm n} + \frac{1}{4 \pm n} + \frac{1}{9 \pm n}$ etc. — Renvoi à des problèmes analogues résolus par Jacques B. — Intégration des équations différentielles des degrés supérieurs. — Recherches sur la longueur du pendule isochrone. — Descente extraordinaire du mercure dans le baromètre.

Viro Celeberrimo atque longe Eximio Leonhardo Eulero S. P. D. Joh. Bernoulli.

Jam per aliquot menses valetudine usus minus prospera, ut mihi fieri solet hac imprimis anni tempestate, ac subinde lecto affixus ob insultus podagricos, promtius respondere non potui ad litteras Tuas novissimas multa eruditione refertas; quam ipsam ob causam ne nunc quidem adhuc transmittere possum secundam partem meditationum mearum hydraulicarum, utpote nondum omnino descriptam, etiamsi materiam a longo jam tempore in parato habeam: Adde quod multo copiosior erit haec altera pars atque sui triente superabit primam, unde facile intelliges describendi laborem non posse non esse mihi molestissimum, cum ob hebetudinem oculorum tum ob tremorem manuum, quae duo sunt mala quotidie fere ingravescentia; quodque pessimum accidit hac in re est, quod ipse cogor describere, cum nullus mihi detur amanuensis, qui talia describere velit vel possit. — — —

Filius meus professor Lipsiam misit chirographum Exc. Schumacheri ad repetenda exemplaria Commentariorum Tuique tractatus de Musica, pro quo debitas Tibi gratias ago, quem, ubi accepero, legem magna cum voluptate, et eo majore quidem, quod de hac materia hactenus nihil mihi videre contigit, quod mihi ex asse satisfacere potuerit.

Methodus, qua uteris, Vir Exc., ad summandam seriem $\frac{1}{1 \pm n} + \frac{1}{4 \pm n} + \frac{1}{9 \pm n} +$ etc. est omnino curiosa et extraordinaria, sed simul postulans calculum longum et intricatum, a cujusmodi instituendis jam a multo tempore absterreor, ob senectutis incommoda superius memorata, contentus iis, quae sola vi meditationum, sine longa analysi, eruere possum. Daretur forsan, si velles sagacitatem Tuam consuetam consulere, alia via brevior magisque trita idem praestandi; sunt enim infiniti casus jam dudum soluti, nimirum omnes illi, quos olim communi opera cum Fratre meo defuncto tractavimus, in quibus Tuum n significat numerum quadratum cum praefixo signo —; Aperi modo, si habes, tractatulum posthumum Fratris mei de arte conjectandi, ubi pag. 252 reperies hoc problema solutum: *Invenire summàm serierum Leibnitianarum aliarumque, quarum denominatores sunt numeri quadrati aut trigonales, minuti aliis quadratis vel trigonalibus.* Exemplum habetur pag. 252 hujus seriei:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \text{ etc.},$$

hoc est hujus: $\frac{1}{4-1}+\frac{1}{9-1}+\frac{1}{16-1}+\frac{1}{25-1}+$ etc. quae est $=\frac{3}{4}$. Item pag. seq. 254 hoc exemplum habetur: $\frac{1}{7}+\frac{1}{16}+\frac{1}{27}+\frac{1}{40}+$ etc. seu $\frac{1}{16-9}+\frac{1}{25-9}+\frac{1}{36-9}+\frac{1}{49-9}+$ etc. quae series est $=\frac{49}{120}$. Tuum est examinare, an Tua sublimia cum hisce trivialibus quadrent.

Non minus quoque curiosus videtur modus Tuus aequationes differentiales altiorum graduum una vice ita integrandi, ut statim ad signationem finitam perveniatur. Memini me jam ante multos annos simile quid invenisse, quod in adversariis meis consignavi, sed nunc inquirere non vacat. Ex paucis quae in hanc rem adumbrationis causa adjicis sine demonstratione, concludo fere, Tibi ad has meditationes occasionem praebuisse ea, quae olim publice dedi pro solutione problematis Cotesiani a Tayloro propositi omnibus geometris non Anglis, ubi modum tradidi, resolvendi quantitates integrandas in factores reales, eosque discernendi a non realibus: Quod vero attinet ad generalem Tuam formulam:

$$y+\frac{ady}{dx}+\frac{bddy}{dx^2}+\frac{cd^3y}{dx^3}+\frac{dd^4y}{dx^4}+\text{etc.}=0,$$

posita dx pro constante, huic quidem satisfacere potest semper aliqua ex curvis logarithmicis, cujus tantum subtangens est quaerenda, quod ita facio: Aequatio generalis pro istis curvis haec est: $y=n^{x:p}$, ubi p denotat subtangentem generalis Logarithmicae, et n numerum, cujus logarithmus $=$ unitati, ita ut $l\,n=1$. Hoc ita exprimendi morem primus ego introduxi jam ante exitum superioris saeculi, id quod nunc magnum usum habere compertum est. Differentiando ergo continuo $n^{x:p}$ habebuntur valores ipsarum dy, ddy, d^3y, d^4y, etc. nimirum: $dy=\frac{dx}{p}\cdot n^{x:p}$, $ddy=\frac{dx^a}{pp}\cdot n^{x:p}$,

$d^3y = \frac{dx^3}{p^3} \cdot n^{x:p}$, $d^4y = \frac{dx^4}{p^4} \cdot n^{x:p}$, etc. Quibus valoribus substitutis in formula Tua $y + \frac{a\,dy}{dx} + \frac{b\,ddy}{dx^2} +$ etc. mutabitur illa in hanc: $n^{\frac{x}{p}} \cdot \left(1 + \frac{a}{p} + \frac{b}{p^2} + \frac{c}{p^3} + \frac{d}{p^4} + \text{etc.}\right) = 0$. Diviso itaque per $n^{x:p}$ et multiplicato per maximam dimensionem ipsius p, orietur aequatio algebraica, cujus quaelibet radix p dabit subtangentem Logarithmicae quaesitae. Exemplum quod das aequationis differentialis quarti gradus

$$y\,dx^4 = k^4 d^4 y, \text{ seu } y - \frac{k^4 d^4 y}{dx^4} = 0$$

ita facillime solvitur. Cum enim hic litterae a, b, c deficiant atque sit $d = -k^4$, habebis hanc aequationem quatuor dimensionum, sed non affectam, $p^4 - k^4 = 0$ seu $p = k$. Dico igitur, logarithmicam, cujus subtangens $= k$, satisfacere aequationi propositae $y - \frac{k^4 d^4 y}{dx^4} = 0$. Fateor interim hoc modo pro hoc exemplo unam tantum exhiberi logarithmicam, a Te vero exhibentur plures curvae

$$y = Ce^{-\frac{x}{k}} + De^{\frac{x}{k}} + E \sin A\frac{x}{k} + F \cos A\frac{x}{k}.$$

Fateor etiam, si proponeretur $y + \frac{k^4 d^4 y}{dx^4} = 0$, fore meam logarithmicam impossiblem seu imaginariam; sed idem etiam in Tua solutione, licet universaliore, contingeret, nam apud Te foret pariter k impossible, seu non reale.

Cum nuper mihi aliquantulum plus otii nacto in mentem rediret id quod scripseras de oscillationibus corporum in aqua natantium, volebam per me ipsum inquirere in longitudinem penduli isochroni oscillationibus quas subeunt hujusmodi corpora in aqua natantia, postquam ex statu quietis nonnihil deturbata fuerunt per vim, cujus directio est horizontalis: Post aliquot horarum meditationem compos factus sum perfectae solutionis, ut mihi quidem videtur, quae Tuae, ceu apparet, satis similis est; Ecce eam: Retentis litteris et Schema quibus usus es pro parte in epistola data 30 Julii 1738, voco praeterea g vim gravitatis acceleratricis qua corpora naturaliter ad descensum verticalem animantur, item n angulum minimum, quo corpora ex situ verticali OG paululum inclinantur, eritque vis motrix applicanda in O horizontaliter ad restituendum corpus ad situm quietis pro quolibet angulo minimo $\omega = \frac{ngV}{OG}\left(OG + \frac{\int(y^3+z^3)dx}{3V}\right)$; longitudinem penduli simplicis isochroni invenio

$$= \frac{3\int rr\delta p}{3V \cdot OG + \int(y^3+z^3)dx},$$

ubi per p intelligo volumen singularum particularum, quae totum corpus innatans heterogeneum componunt, δ exprimit densitatem cujuslibet particulae p, r distantiam cujusque, perpendicularem, ab axe, circa quem fit oscillatio, tandem aquae densitas supponitur $= 1$ seu unitati, atque ita tota expressio longitudinis quaesitae erit geometrica, nil nisi lineas exprimens. Si corpus innatans est homogeneum, hoc est si ubique δ est constans, seu habens ad unitatem rationem invariabilem, erit G supra O, adeoque OG negativa; quod si praeterea OG tum sit etiam major quam $\int(y^3+z^3)\,dx : 3\,V$, fiet vis motrix negativa, adeoque corpus inclinatum non restituetur, sed praecipitabitur, quousque labi potest. Sciendum quoque est rectam AB inter oscillandum eum semper situm capere debere, ut ab una parte $\int yy\,dx$ sit $= \int zz\,dx$ ab altera parte, quod sine omni dubio Tu, Vir Cel., etiam observasti. Denique id etiam non est omittendum, quod centrum gravitatis G secundum vigorem non omnino immobile maneat durante oscillatione corporis, sed alternatim ascendat et descendat, quamvis isti ascensus et descensus sunt infinities minores quam excursiones puncti O, quae ipsae jam sunt infinite parvae. Hinc tuto considerari potest centrum gravitatis G tanquam omnino immobile, dum centrum gravitatis voluminis aquei O facit suas oscillationes laterales. Theoria mea extenditur quoque ad alios casus cognatos; ex. gr. si in vase aliquo quiescente datae figurae contineatur data quantitas aquae, cujus tota massa a causa quadam incipiat fluctuare, ascendendo nempe ab uno latere super horizontem, dum a latere opposito descendit infra eundem, mox postea motu contrario refluendo ad hoc latus ultra limitem horizontalem, de hinc iterum ad partem oppositam redeundo, atque ita porro. Reciprocantes istae fluctuationes repraesentant speciem oscillationum, quibus inveniri potest longitudo penduli simplicis isochroni. Alia item foret species oscillationum non minus curiosa. Si nempe pelvis aliqua habens ansam, ut lebetes solent habere, impleretur aqua, sed non ad summitatem usque, et deinde si ad ansam suspenderetur pelvis ex clavo firmiter fixo, expectando parumper donec aqua contenta ad quietem sese composuerit, ita ut ejus superficies suprema induerit situm horizontalem: Concipe nunc pelvim ita pendentem ex situ quietis tantillum dimoveri, sed placide, ne aqua ad fluctuandum concitetur. Facile utique intelligis, pelvim, sibi relictam, esse inchoaturam oscillationes minimas, sed ita, ut aquae superficies semper maneat horizontalis, secus ac fieret, si aqua esset congelata, quo casu pendulum non differet ab ordinario pendulo composito. Quaeritur ergo in nostra suppositione fluiditatis aquae, quanta sit longitudo penduli simplicis isochroni, abstrahendo facilitatis gr. a gravitate et a materialitate ipsius pelvis et ansae; video meam methodum huc pertingere, quamvis quia inter scribendum modo mihi in mentem venit, solutionem nondum tentaverim: non dubito quin pro sagacitate Tua quaesitum facile sis assecuturus. Sed abrumpo jam nimium fatigatus scribendo, ut Tu, Vir Exc., forsan fatigaberis legendo inconcitam meam scripturam. En tamen adhuc paucis observationem meteorologicam. Nupero scil. 6. Dec. st. v. qui dies consecratus est divo Nicolao, gentis Russicae patrono, hora circiter nona matutina, deprehendi mercurium in barometro ad tantam profunditatem descendisse, ad quam non memini unquam pervenisse. At vero in hoc statu non diu permansit, nam sub vesperem ejusdem diei rediit ascendendo ad mediocrem fere altitudinem, quae hic est 26 poll. 10 lin. Paris. tempestas non fuit valde procellosa, nisi quod ventus solito violentior spiraverit. Vale, Vir Celeberrime. Dabam Basileae a. d. 9. Decembr. 1739.

LETTRE VI.

SOMMAIRE. Plainte sur la nécessité dans laquelle se trouve l'auteur de copier lui-même ses travaux. — Continuation sur la sommation des séries et l'intégration des équations différentielles — Continuation sur les oscillations horizontales des corps flottans. — Problème d'Hydrodynamique. — P. S. Promesse d'envoyer sous peu la seconde partie des Recherches hydrauliques. — L'équation $yxxdx^2 + addy = 0$ peut-elle être réduite aux différences premières, dx étant supposée constante.

Viro Celeberrimo atque Excellentissimo, LEONHARDO EULERO S. P. D. JOH. BERNOULLI.

Non ita facile eluctatus sum asperrimam hyemem, quin magnam ejus partem in lecto transigere coactus fuerim, vehementi laborans tussi, nec non asthmate et podagra, quibus malis, nondum omnino liberatus, non potui satis attente considerare cuncta, quae mihi perscripsisti, elegantissima atque ex profundissimo Tuo ingenio depromta, in litteris 19 Jan. sine dubio styli veteris, exaratis, in quibus inveneram alias ad Filium meum datas, quas sine mora ipsi transmisi. — — — Juvenis ille, quo usus fuerat Filius meus ad describendum suam dissertationem, nunc mortuus est ex febre ardente; sed

3

etiam si adhuc viveret, non tamen possem ejus opera uti, neque cujusquam alius, ad describendas meas meditationes, quia soleo eas admodum confuse et abruptis verbis in chartam conjicere, atque tum demum inter describendum corrigere et in ordinem redigere; unde vides neminem alium, nisi memet ipsum, id operis suscipere posse et exequi. — —

Transeo nunc ad analytica Tua: Quae habes circa series hujusmodi: $\frac{1}{1 \pm n} + \frac{1}{4 \pm n} + \frac{1}{9 \pm n} +$ etc. sapiunt certe singularem ingenii sagacitatem; animo quidem meo concepi quasdam vias, quibus ad earum summam eruendam in omni extensione pervenire liceat, sed quia praevideo, multum laboris et calculi requiri ad executionem, non audeo rem aggredi, aliis occupationibus distractissimus; malo igitur talia a Te discere, quando suo tempore evulgaveris, quam hisce diu insudare et fortassis sine successu.

Hac tamen occasione aliquid monebo: Non est difficile demonstratu, quod summa hujus seriei:

$$\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \text{etc.},$$

ubi termini omnes affirmativi sunt, sit ad summam ejusdem, sed signis terminorum alternative sumtis:

$$\frac{1}{1^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \text{etc.},$$

ut se habet 2^n ad $2^n - 2$. Nosti vero procul dubio, me dedisse olim modum exprimendi hanc seriem:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \text{etc.},$$

per hanc quantitatem finitam: $\int x^x\,dx$, cui illa series est aequalis, quando nempe fit x aequalis unitati. Quaero nunc, an pariter invenire possis rationem, quam illa habet ad eandem seriem terminorum signis continuo affirmative procedentium:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \text{etc.}$$

Memini Leibnitio, olim me roganti, an habeam compendium expedite summandi progressionem harmonicam

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots\frac{1}{x}$$

ad terminos numero x continuatam, dedisse pro responso hoc, non quidem compendium, sed theorema, scilicet:

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots\frac{1}{x}$ erit $=$ huic alteri progressioni

$$x-\frac{x.x-1}{2.2}+\frac{x.x-1.x-2}{2.3.3}-\frac{x.x-1.x-2.x-3}{2.3.4.4}$$

$$+\frac{x.x-1.x-2.x-3.x-4}{2.3.4.5.5}\ldots\ldots\pm\frac{1}{x},$$

cujus termini nil aliud sunt quam coefficientes binomii ad numerum x elevati, dividendo singulos per respective numeros $2, 3, 4, 5 \ldots\ldots x$. Ex. gratia

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$$

erit aequalis huic

$$5-\frac{10}{2}+\frac{10}{3}-\frac{5}{4}+\frac{1}{5}=\frac{10}{3}-\frac{5}{4}+\frac{1}{5}.$$

Quod attinet ad methodum Tuam, Vir Excel., integrandi aequationes differentiales, quae hac forma generali continentur:

$$o=y+\frac{a\,dy}{dx}+\frac{b\,ddy}{dx^2}+\frac{c\,d^3y}{dx^3}+\text{etc.},$$

video ex paucis quae dicis, meam solutionem problematis Cotesiani a Tayloro propositi habere aliquid analogi cum Tua ipsa solutione, quamvis non attenderis ipse; nam quod ais, aequationem algebraicam $p^4+k^4=0$ resolvi posse in factores reales hos duos: $pp+kp\sqrt{2}+kk$ et $pp-kp\sqrt{2}+kk$, id ipsum est, quod ego jam dudum animadverti contra Taylorum, qui credidit haec nobis incognita fuisse, ideo, quia Leibnitius alicubi dixerat $\int dx:(x^4+a^4)$ neque ad circuli neque ad hyperbolae quadraturam reduci posse. Respondi autem, Leibnitium hoc non asseverasse absolute, sed tantum

*

relative ad methodum, qua usus fuerit in illo loco, ubi ita locutus est: „ego vero monstravi Tayloro, binomium x^4+a^4 revera resolvi posse in hos duos factores reales: $xx+ax\sqrt{2}+aa$ et $xx-ax\sqrt{2}+aa$, praeter duos alteros imaginarios $xx+aa\sqrt{-1}$ et $xx-aa\sqrt{-1}$." Inspice modo Acta Lips. Anni 1719 p. 257, ubi haec, quae dico, expressissimis verbis invenies, fluuntque ex fundamento totius meae solutionis problematis Cotesiani. Miror interim Te dicentem, aequationem algebraicam $p^4+k^4=0$ resolvi in *has duas aequationes* duarum dimensionum *reales* $p^2+kp\sqrt{2}+k^2=0$ et $p^2-kp\sqrt{2}+k^2=0$; debebas dicere: *resolvi in duos factores reales*, non vero in aequationes reales; nam $p^2\pm kp\sqrt{2}+k^2$ non possunt esse $=0$, alias foret radix $p=\mp k\sqrt{\frac{1}{2}}\pm k\sqrt{-\frac{1}{2}}=$ imaginario, ergo nullus casus datur, ubi fieri possit $p^2\pm kp\sqrt{2}+k^2=0$, hoc est, nulla relatio realis dabilis est inter p et k, ut inde formari queat $p^2\pm kp\sqrt{2}+k^2=0$, nisi velis utrumque p et k sumere $=0$, sed non est hic sensus verborum Tuorum.

Alteram, cujus mentionem facis, aequationem differentialem indefiniti gradus nimirum hanc:

$$o=y+\frac{axdy}{dx}+\frac{bxxddy}{dx^2}+\frac{cx^3d^3y}{dx^3}+\text{etc.}$$

posita ut supra dx constante, ego quoque jam ante initium hujus saeculi reduxi ad aequationem integralem finitam, quae quidem est generalis; sed fateor, in illa contineri mixtim tam reales quam non reales; interim possunt a se invicem distingui, ideoque non puto meam solutionem eandem esse cum Tua. Quidquid sit, exscribam meam methodum in Schedam separatam, quam examinare poteris, ex adversariis meis antiquis, ita tamen ut ad litteras Tuas, a, b, c etc., x et y accommodem scriptum meum.

Conspirant utique re ipsa nostrae duae solutiones de oscillationibus horizontalibus corporum aquae insidentium; sunt tamen quaedam monenda circa minus essentialia: Bene notas, quod et ego notaveram, eandem esse proprietatem rectae AB in suprema aquae sectione sumtae, sive dicatur esse $\int yydx = \int zzdx$, ut ego enunciavi, sive concipiatur AB, ut Tu fecisti, tanquam transiens per centrum gravitatis sectionis corporis in aquae superficie factae. Malebam autem rem ipsam exprimere per proprietatem pure geometricam, quam per mechanicam, eoque magis, quod hic superficies sola, in imaginatione tantum subsistens, nihilque materiae habens, non nisi improprie dici possit habere centrum gravitatis.

Secundo, Tecum non sentio, quod pace Tua dixerim, quando asseris, motum centri gravitatis totius navis, vel cujusque corporis innatantis, pendere a *distantia* rectae verticalis per centrum gravitatis *sectionis* aquae ductae, a recta verticali per centrum gravitatis totius corporis ducta; nam mihi clare videtur, considerari debere distantiam rectae verticalis per centrum gravitatis non sectionis aquae, sed (NB.) ipsius voluminis, quod corpus in aqua occupat, hujus, inquam *distantiam* a recta verticali per centrum gravitatis totius corporis ducta; etenim in centro voluminis (quod volumen inter oscillandum perpetuo ejusdem magnitudinis est supponendum) concentratur tota vis motrix, agens sursum verticaliter, ad restituendum corpus in situm pristinum quietis, quamdiu durant oscillationes: interim fateor, propter variabilitatem figurae voluminis, centrum ejus gravitatis non semper eundem locum occupare in corpore oscillante, sed hinc inde evagari in singulis oscillationibus ab uno latere in alterum respectu rectae lineae quae, dum corpus adhuc est in quiete, verticaliter transit per ejus centrum gravitatis.

Tertio non nego quod dicis, centrum gravitatis corporis totius oscillantis non manere omnino immotum; nam, secundum rigorem loquendo, revera mutat suum situm tam in directione horizontali quam verticali, magisque in illa quam in hac; sed cum supponantur oscillationes corporis totius quamminimae, hoc est quasi infinite parvae, potest demonstrari, mutationes illas centri gravitatis corporis, quas nominare vellem trepidationes, non tantum esse insensibiles, sed omnino infinities minores, quam sunt ipsae oscillationes minimae corporis ipsius, adeoque tuto negligendae, ut jam monui in praecedentibus meis litteris.

Quarto. In iisdem volebam sciscitari, sed quod dein obliviscebar, quid nempe intelligas proprie per vim firmitatis, de qua in litteris Tuis 30. Julii 1738 agis dicisque, quod sit illa quae resistit inclinationi corporis, eamque esse

$$= M\left(GO + \frac{\int (y^3 + z^3)\,dx}{3V}\right).$$

Si per vim firmitatis intellectam cupis vim illam, per quam corpus inter oscillandum continuo verticaliter sursum urgetur a pressione aquae, et quam vim dixi concipiendam esse tanquam concentratam in centro gravitatis voluminis aquae a corpore occupati, tunc credo, Te voluisse dicere hanc vim esse

$$= \frac{M}{GO}\left(GO + \frac{\int (y^3 + z^3)\,dx}{3V}\right),$$

omittendo per incuriam subjicere GO pro denominatore infra M; sic enim scribendum esse inveni ex mea solvendi methodo, in qua conjectura eo magis obfirmor, quod alioquin vis Tua firmitatis compararetur cum pondere M, multiplicato per lineam $GO + \frac{\int (y^3 + z^3)\,dx}{3V}$, quae duo inter se sunt incomparabilia; talis autem incongruentia non reperitur in mea expressione, quippe in qua linea $GO + \frac{\int (y^3 + z^3)\,dx}{3V}$, divisa per lineam GO, dat numerum, quisquis ille sit, qui indicat, quoties sumendum sit pondus M, ut fiat aequale vi firmitatis, vel, ut ego voco, vi motrici ex oscillatione oriundae et sursum tendenti; atque ita vis cum pondere comparatur, homogeneum cum homogeneo, quae utique non sunt asystata. Quod cum ita sit, judicandum relinquo, an vis Tua correcta

$$\frac{M}{GO}\left(GO+\frac{\int(y^3+z^3)dx}{3V}\right)$$

commode satis appellari possit *vis firmitatis reluctans inclinationi corporis*; ut enim proprie dici possit *vim vi resistere*, oportet sane alteram alteri esse directe oppositam: hic vero *vis firmitatis* dicta, habens directionem verticalem, alteri vi, quae corporis inclinationem molitur, et quae ideo agit secundum directionem horizontalem nullatenus resistere potest, etiamsi illa maxima esset, haec minima; haud secus ac videmus magnum pondus ex filo pendens dimoveri posse a situ verticali per vim quantumlibet exiguam a latere horizontali impingentem. Meo igitur judicio melius esset, *pro vi firmitatis* adhibere eandem quidem expressionem, sed multiplicatam per n seu per angulum inclinationis: inveni enim

$$\frac{n.M}{GO}\left(GO+\frac{\int(y^3+z^3)dx}{3V}\right)$$

esse vim motricem horizontalem, qua corpus inclinatum ad situm aequilibrii restituitur, proportionalem sane ipsi n, atque adeo etiam distantiae centri gravitatis voluminis a situ aequilibrii, uti requiritur in oscillationibus tautochronis. Quae in hac quarta annotatione dico exscripsi ex manuscripto, quod paravi circa hanc materiam juxta multa alia nova et curiosa ad dynamicam spectantia, quae aliquando, si otium daretur, in ordinem redigere et Vobiscum communicare possem.

Problemata illa duo de oscillationibus fluidorum, unum in vase quiescente, alterum in pelvi vel situla ex ansa suspensa reciprocante, quae inter scribendum mihi in mentem inciderunt ac Tibi proposui, statim post abitum litterarum mearum prorsus deserui atque neglexi, quia attentius rem considerans animadverti, problemata illa solvi non posse, nisi faciendo suppositiones quae mere sunt precariae nullumque habent fundamentum in ipsa rei natura, ita ut aliae atque aliae inde emergant solutiones, prout haec vel illa hypothesis adhibetur, dum interim una aeque ac altera eundem obtinet probabilitatis gradum. Sic Tuae solutiones videntur bonae et cum meis conspirantes; quia eadem generali hypothesi usi sumus, supponendo scilicet, in ejusmodi oscillationibus totam massam simul moveri, et quidem moveri certo modo, quod verum esse demonstrari nequit, propterea quod hoc pendeat a circumstantiis accessoriis, ex. gr. a quantitate fluidi, figura vasis, etc. Et vel hinc colligi potest, massam integram fluidi non semper in oscillationibus partium superiorum simul moveri, quod si vera sunt, quae legi et audivi, in maximis tempestatibus, cum suprema maris superficies vehementer agitetur et fluctuet, urinatores experiri tamen in profunditate 200 vel 300 pedum omnimodam aquaram tranquillitatem, imo se nullum plane motum sentire: unde praesumi potest, in nostris vasibus simile quid fieri, ut nempe superiores tantum partes in motum cieantur, reliquis inferioribus locum suum non mutantibus, cum praesertim superiorum motus sit tam languidus, tam placidus, ut non sit credibile, ab illis turbari posse situm inferiorum. Oporteret igitur prius inquirere, quousque se extendat superficies illa, quae separet partem aquae mobilis ab immobili, item quamnam habeat figuram illa superficies, et alia multa, quae vix definiri possunt a sagacitate humana. Adde quod in problemate secundo pelvis, scilicet ex unco pendentis et oscillantis, si ejus figura haberet ventrem tumidum et desineret superius in collum oblongum et angustum, ad cujus medium usque aqua pertingeret, annon facile percipimus, aquam cum vase et in vase sensibiliter haud aliter oscillaturum, quam si illa esset congelata et ita repraesentaret pendulum ordinarium. Ob has itaque multasque alias difficultates inseparabiles abstinui ab ulteriori scrutinio et animi applicatione tanquam frustanea. — — — Vale, Vir Excellentissime, atque mihi favere perge. Dabam Basileae a. d. 16 April. 1740.

P.S. Vides ex iis, quae ab initio hujus epistolae dixi, me ob valetudinem adversam non fuisse in statu absolvendi alteram partem meditationum mearum hydraulicarum; spero autem, nisi recidiva me capiat, tantum effici posse, ut prima vice, qua ad Te sum scripturus post acceptam responsionem sine longa mora transmittere queam in scripto partem secundam omnium quae circa hanc materiam a me dicendum restabant, quae quidem talia sunt ut ad multa plura detegenda viam pandant, Tibi praesertim, qui in sagacitate nullum parem habes. Potest ne reduci haec aequatio: $yxxdx^2 + addy = 0$ ad differentias primas? supponitur dx constans.

LETTRE VII.

SOMMAIRE. Envoi de la seconde partie des Recherches hydrauliques. — Recherches ultérieures sur la sommation des séries, sur l'équation différentielle, traitée dans la lettre précédente, et sur le mouvement des corps flottans. — Réduction d'une équation différentielle du second ordre au premier, en sorte qu'elle devienne intégrable ou, du moins, constructible.

Viro Eximio atque Celeberrimo LEONHARDO EULERO S. P. D. JOH. BERNOULLI.

Ut tandem promissi fidem liberem, ecce! Tibi partem alteram meditationum mearum hydraulicarum mitto; scriptura non admodum est nitida et figurae rudi omnino Minerva delineatae, omnia quippe tremente manu peracta: Res ipsa vero, ut spero, Tibi Tuoque judicio ideo non minus placebit. Methodum meam investigandi velocitates aquarum fluentium ita adornavi, ut esset generalissima, inserviens pro vasis et canalibus cujuscunque figurae atque modo quocunque inter se adaptatis. Abstinui in explicatione fundamentali ab idea gurgitis, ne scilicet Angli possent captare ansam confundendi gurgitem meum cum Newtoni catarracta, quasi ego illum ab hac mutuatus fuissem, etiamsi inter se toto coelo differant. Usum vero et actionem gurgitis involvi duobus principiis, *hydrostatico* uno, altero *hydraulico*, ex quorum debita combinatione tota mea theoria absolvitur; id cum ante me nemini in mentem venerit, mirum non est, quod pariter ante me nemo dederit veram et directam methodum determinandi velocitates fluidorum ex vasis et canalibus erumpentium: Tu, Vir Clar., primus fuisti, qui eo, quo polles, ingenii acumine, visis quae communicavi in prima scripti mei parte, statim eruisti solutionem velocitatis quaesitae fluidi ex quolibet vase prosilientis. Quod si nunc talia, hactenus tam densa caligine obsepta, nunc vero demum in lucem feliciter a me protracta, non mereantur, ut aliquando promissum obtineant honorarium annuum, certe non video quid sit in posterum mihi sperandum. — — — —

Transeo nunc ad jucundiora: Gratias ago pro communicatione methodi Tuae summandi hanc seriem:

$$\frac{1}{1+n} + \frac{1}{4+n} + \frac{1}{9+n} + \frac{1}{16+n} + \text{etc.}$$

Intelligo quidem modum reducendi illam ad hanc formam: $1 \cdot \alpha \pi^2 - n \beta \pi^4 + n^2 \gamma \pi^6 - n^3 \delta \pi^8 + n^4 \varepsilon \pi^{10}$ — etc. sed non satis bene capio legem progressionis coefficientium $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc.; quae enim disseris de eorum origine, obscura mihi sunt; aliquando Davus sum, non Oedipus, hoc praesertim tempore, quo praeter alia negotia, quibus distrahor, tam publica quam domestica, nunc ea accedunt, quae quotidie subnascuntur ex munere Decanatus oriunda, quod munus nuper meis ingratiis mihi fuit impositum, per integrum annum gerendum; unde vides attentionem, quae ad talia probe penetranda singulariter requiritur, saepissime interrumpi, id quod Tibi, qui hisce unice vacare potes, non aeque ac mihi contingit; adde incommoda senectutis meae, quae memoriam et attentionis facultatem mirum quantum debilitat.

Quod vero attinet ad rationem quam habet series

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \text{etc.}$$

ad eandem, sed alternis signis sumtam:

$$1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} - \text{etc.}$$

vidisti in praecedentibus meis litteris, quod dixi non esse difficile demonstratu, summam prioris esse ad summam alterius ut 2^n ad $2^n - 2$. Hoc quidem jam olim perscripseram Leibnitio, ante initium hujus saeculi, ut ex nostris litteris patet. Existente $n = 1$, oritur progressio harmonica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{etc.},$$

quae erit ad $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{etc.}$ ut 2 ad 0; unde sequitur, progressionem harmonicam habere summam infinitam, quod alio modo ego olim, et postea Frater meus sed per ambages demonstrabamus, etsi veritas ejus tam facile ex ipsa ratione 2^n ad $2^n - 2$ fluat.

Placent quae habes de summis serierum

$$1 \pm \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} \pm \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} \pm \frac{1}{6^6} + \text{etc.}$$

sed suspicor Te non alia methodo fuisse usum, quam quae ex mea derivata est, cujus specimen jam dedi in Actis Lipsiensibus anni 1697. Ipsam vero analysin exposui in iisdem Actis 1737, mense Februarii; ubi vidisti, fundamentum totius artificii in hoc consistere, ut ex dato quantitatis x^x logarithmo xlx per reversionem redeatur ad ipsam x^x, ope seriei notissimae, quae ex logarithmo dat numerum, ita ut sit

$$x^x = 1 + x\,l x + \frac{x^2 lx^2}{2} + \frac{x^3 lx^3}{2.3} + \frac{x^4 lx^4}{2.3.4} + \text{etc.}$$

Poteram utique, si vel tantillum attendissem, generalius ponere x^{mx}, vel etiam $x^{mx}.x^n$, et tum utique, sequendo methodum meam, eadem facilitate invenissem, quod Tu nunc mihi proponis, nempe $\int x^{mx}\ x^n\, d\,x$, seu quod idem est: $\int x^{mx+n} d\,x = \frac{1}{n+1} - \frac{m}{(n+2)^2} + \frac{mm}{(n+3)^3} - \frac{m^3}{(n+4)^4} + \frac{m^4}{(n+5)^5} - \frac{m^5}{(n+6)^6} +$ etc., posito nempe post integrationem $x = 1$. Hinc nunc sponte fluit, quod tum temporis animadvertere negligebam, posito scilicet $m = -1$ et $n = 0$, prodíturum esse

$$\int x^{-x} d\,x \text{ seu } \int \frac{d\,x}{x^x} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} + \text{etc.}$$

Vellem autem scire, an fortasse per aliam viam huc perveneris, quam per meam ipsam; nam si Tua non esset diversa a mea, certe nihil fecisses quam mihi reddere meum cum foenore. En nunc par pari refero, et foenus foenore: Sit integrandum $\int x^{m\,x^p}\, d\,x$ per seriem, ubi p est exponens constans ipsius x in exponente $m x^p$, dico fore

$$\int x^{mx^p} dx = x - \frac{m}{(p+1)^2} x^{p+1} + \frac{mm}{(2p+1)^3} x^{2p+1} - \frac{m^3}{(3p+1)^4} x^{3p+1} + \text{etc.}$$

Expressionem, quam aequivalere inveneram huic seriei:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \cdot \cdot \cdot + \frac{1}{x},$$

dedi tantum pro theoremate, quod terminorum summam accurate exhibet, non tantum proxime, neque dedi pro compendio, quale Leibnitius a me petebat, sed, ut dixi, pro theoremate. Quod si vero duntaxat postuletur modus approximandi ad summam terminorum ad ingentem numerum continuatorum, mihi videtur id effici posse quodammodo simplicius quam mihi perscripsisti; ecce quo pacto procedo: Addantur actu, ut Tu facis, Vir Excell., aliquot termini primores, quorum numerus sit n, quo major autem est hic numerus, eo propius pervenietur ad desideratum. Sit igitur summa horum terminorum $= C$, dicaturque $x = n + y$, erunt termini reliqui summandi sequentes:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}+\cdots\cdot+\frac{1}{n+y}.$$

Pono $dy = 1$, ut scilicet exprimatur haec series per

$$\frac{dy}{n+1}+\frac{dy}{n+2}+\frac{dy}{n+3}+\frac{dy}{n+4}+\cdots\cdot+\frac{dy}{n+y},$$

cujus integrale, seu summa est $l(n+y)-ln$, qui duo logarithmi sumendi sunt in logarithmica, quae habet subtangentem = unitati; ut autem accommodentur ad quam tabula logarithmorum Vlaccii supputata est, cujus subtangens est 4342945, erit summa terminorum post terminum $\frac{1}{n}$ subsequentium $\frac{l(n+y)-ln}{4342945}$, cui addatur summa terminorum praecedentium, actu sumta, quae supponitur $= C$, habebitur summa totius seriei $= \frac{l(n+y)-ln}{4342945}+C$.

Exemplum 1. Quod Tuum est: Proponatur series ad terminum millionesimum prolongata:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdot\frac{1}{1000000},$$

hoc est, sit $n+y = 1000000$, sitque numerus terminorum praecedentium $n = 10$, invenietur horum summa actu addendo, nempe $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdot\frac{1}{10}=\frac{7381}{2520}=C$. Item $l(n+y)=$ $l\,1000000 = 6{,}0000000$, atque $ln = l10 = 1{,}0000000$, adeoque $l(n+y)-ln = 5{,}0000000$, unde summa totius seriei, seu $\frac{l(n+y)-ln}{4342945}+C=\frac{50000000}{4342945}+\frac{7381}{2520}=14\frac{967235489}{2188844280}$, qui numerus tantillo major est quam Tuus $14\frac{392726722865723 29}{1000000000000000000}$.

Exempl. 2. Esto numerus terminorum decem milliones: erit summa totius seriei $=\frac{60000000}{4342945}+\frac{7381}{2520}=16+\frac{967235489}{2188844280}+\frac{262822}{868589}=16\frac{2}{3}$ proxime.

Exempl. 3. Sit numerus terminorum centum milliones, erit summa totius seriei $= \frac{70000000}{4342945} + \frac{7381}{2520} = 18 + \frac{967235489}{2188844280} + \frac{525644}{868589} = 19$ quam proxime.

Coroll. Crescente numero terminorum per decuplum, crescet summa seriei per $2\frac{262822}{868589}$, hoc est fere per $2\frac{1}{3}$.

Scholion. Quo major sumitur numerus primorum terminorum actualiter summandorum et quo longius continuata supponitur tota series, eo propius ad verum accedet regula colligendi seriem totam in unam summam. Ratio hujus est evidens, quia, quo major est numerus n totusque $n+y$, eo magis considerari potest unitas tanquam dy, seu elementum ipsius $n+y$.

Miror Te nunc dicentem, Vir Clarissime, methodum meam, pro tractanda aequatione

$$o = y + \frac{a\,dy}{dx} + \frac{b\,ddy}{dx^2} + \frac{c\,d^3y}{dx^3} + \text{etc.}$$

fere congruere cum Tua, cum tamen antea illam tanquam non satis generalem (utpote ad solas logarithmicas sese extendentem) praedicaveris; Est ne forsan ejus rei ratio, quod me monente nunc demum intellexisti, Te perperam putasse quod aequationes duae $pp+kp\sqrt{2}+kk=0$ et $pp-kp\sqrt{2}+kk=0$, in quas resolvitur aequatio algebraica $p^4+k^4=0$, habeant radices duas ipsius k *reales*, cum tamen sint mere imaginariae, seu impossibiles? Hoc si supposuisti principium erroneum, oportet ut agnoscas, formulas illas, quas in anterioribus Tuis litteris mihi dedisti, non posse subsistere. Hoc unicum ergo sciscitor, an praeter meas logarithmicas habeas adhuc alias curvas possibiles, quae satisfaciant aequationi

$$o = y + \frac{a\,dy}{dx} + \frac{b\,ddy}{dx^2} + \frac{c\,d^3y}{dx^3} + \text{etc.},$$

an vero formulae illae Tuae, pro exemplo particulari

$$y + \frac{ed^4y}{dx^4} = 0$$

datae, sint erroneae? rogo ut cathegorice respondeas, sicuti decet inter amicos. Factores quidem sunt reales $pp + kp\sqrt{2} + kk$ et $pp - kp\sqrt{2} + kk$, ex quibus componitur $p^4 + k^4$, sed non sunt aequationes reales, quia neutra habet radicem k possibilem. Quod spectat ad solutionem meam alterius aequationis differentialis gradus indefiniti

$$o = y + \frac{axdy}{dx} + \frac{bxxddy}{dx^2} + \frac{cx^3d^3y}{dx^3} + \text{etc.},$$

gaudeo illam Tibi perplacuisse, atque quaedam compendia suppeditasse. Interim parum refert, quod promiscue praebeat casus reales et imaginarios (debet utique omnes praebere) sed in potestate est secernere reales ab imaginariis, quod sufficit.

Non opus esse censeo ut serram diutius reciprocemus inutiliter disputando de motu oscillatorio corporum aquae innatantium; video enim alterum ab altero non intelligi, quamvis forsan ambo recte sentiamus. Non dixi considerandam esse rectam verticalem eam, quae transeat per centrum gravitatis *portionis corporis* aquae submersae, sed eam volui, quae transeat per centrum gravitatis, non quidem *portionis corporis*, sed *voluminis aquei*, quod portio ista occupat, et ita, ni fallor, locutus sum. Tu vero statuis rectam illam verticalem concipiendam esse tanquam transeuntem per centrum gravitatis *sectionis aquae*: interim quid, si ista duo centra essent in eadem recta verticali ex necessitate rei, foret utique nostra disputatio mera logomachia. Similiter dissentimus, uti videtur, tantum verbis, agentes de firmitate. Tu intelligis momentum ejusdem quam ego sumsi in sensu absoluto, haud aliter quam dicerem, vim firmitatis penduli simplicis ordinarii, oscillationes minimas facientis, esse ipsam fili tensionem, cujus vis aequalis est ipsi ponderi oscillanti et hac quidem vi, vel potius propter hanc vim affectat pendulum redire ad situm quietis, hoc est, ad situm verticalem, quod sufficit ad naturam firmitatis explicandam, etsi non improbam, pro accurata mensura habenda, vim illam multiplicari posse per arculum minimum, quem pondus excurrendo describit, ut ejus momentum prodeat.

Non me fugiebat, posse quidem aequationem secundi gradus $yx^2dx^2+addy=0$ reduci ad aequationem simpliciter differentialem; est enim ex earum numero, pro quarum reductione inveni jam diu regulam generalem, sed optabam talem, ut reducta esset integrabilis, vel saltem, concessa quadratura, construibilis; tali enim opus habebam ad certum aliquem scopum obtinendum.

Vale, Vir Excellentissime, meque porro ama. Dabam Basileae a. d. 31. Aug. 1740.

LETTRE VIII.

=

SOMMAIRE. Jugement flatteur d'Euler sur les Recherches hydrauliques. — Détermination de la force rétroactive de l'eau qui coule d'un vase par un canal horizontal. — Non-accord entre les résultats de Jean et de Daniel B. — Euler est prié de rectifier quelques passages des Recherches hydrauliques. — Intégration de la formule $x^x dx$, pour le cas de $x = 1$ et d'une autre qui s'y rapporte. — Encore sur l'intégration de l'équation différentielle des lettres précédentes et réflexions qui s'y rattachent. — Invitation qu'a reçue Euler de la part du roi de Prusse, Frédéric II. — Protestations d'amitié.

Viro Celeberrimo atque Excellentissimo LEONHARDO EULERO S. P. D. JOH. BERNOULLI.

Jam duo elapsi sunt menses et amplius cum ad me perferrentur litterae Tuae novissimae, quo ipso tempore in lecto decubui misere laborans doloribus podagricis, chiragricis, ut et tussi asperrima, asthmate aliisque symtomatibus, praesertim quadam paralysi, quae manum dextram ita corripuit ut per plures hebdomadas calamo ad scribendum uti non potuerim, imo ne nunc quidem possim expedite exarare litteras quas non tam scribo quam pingo, ob vehementem manus tremorem, jam a longo tempore me infestantem atque indies ingravescentem; talia sunt senectutis incommoda, a quibus curari posse nulla spes affulget. Sed ne Te molestem importunis meis querelis, festino, at lente, ad litterarum Tuarum contenta:

Vix credideris, Vir Excell., quanto me gaudio perfuderit elogium quo decorare voluisti meditationes meas hydraulicas, a Te enim laudari, qui omnium es perspicacissimus simul etiam judex integerrimus, potiori mihi duco honori quam si a mille aliis laudarer; inserviet mihi judicium Tuum, tanquam omni exceptione majus, contra quosvis cavillatores, sive sint invidi sive ignari; facile enim percipis, non defuturos, praesertim in Anglia, qui more suo extenuabunt inventum non aliam ob causam quam quia debetur extraneo. Interim probe observasti ἀβλεψίαν meam, in determinanda vi retroactionis aquae ex vase per canalem horizontalem erumpentis; notasti quoque, uti decet, lapsum illum meum plane non promanasse ex fundamentis meae theoriae, sed tantum ex ejusdem perversa applicatione per meram inadvertentiam facta: En hujus rei originem. Cum in describendo alteram partem Hydraulicae meae pervenissem ad hunc locum, ubi de vi retroactionis ago, de qua materia ne cogitaveram quidem adhuc, ex improviso contigit ut inciderem in quasdam litteras veteres Filii mei, ubi praeter expectationem inveni aliquas formulas (sed sine analysi vel demonstratione) expositas; curiosus itaque videndi an respondeant principiis a me positis, festinanter feci calculum, quo tempore vestigia theoriae meae fere jam erant in ideis meis obliterata, quod ob memoriae labilitatem hac qua sum aetate saepissime mihi accidit; unde factum est ut putarem quemadmodum aqua erumpens ex vase per orificium in tubum primum, suam

*

exerit vim in latus vasis tubo oppositum, ita quoque considerandam esse vim retrourgentem aquae transeuntis ex quolibet tubo per foramen suum in tubum proxime sequentem, quod autem nunc video verum non esse, quia illa vis quaelibet sustinetur vel potius absorbetur ab aqua jugiter pone sequente, adeo ut illa vis omnis jam contineatur in vi primitiva, quacum ex vase ipso in tubum primum pellitur et quae in latus oppositum vasis retroagit; sed quod incautus neglexi hoc fuit, quod debebam sumere vim aquae prementem fundum vel laminam perforatam, cum transit ex quolibet tubo in sequentem contiguum; hinc patet omnes istas vires, utpote antrorsum agentes, debere subtrahi a vi illa primitiva retrourgente, adeoque residuum tantum dare veram et absolutam vim qua vas retropellitur; proin tantum abest, ut quemadmodum putâram augeatur vis illa primitiva a multitudine tuborum adaptatorum in amplitudine decrescentium, ut potius diminuatur eadem prout numerus tuborum crescit, decrescentibus amplitudinibus. Haec est rei gestae narratio: Cur autem mentionem fecerim Filii mei a me abludentis, id factum est, quia credebam ipsius solutionem a mea discrepantem extare in sua Hydrodynamica, atque ideo absurdum fore si silentio praeterirem, quando videret publicum nos esse in contradictoriis. Rogaris ergo, Vir Clariss., ut supprimas in scripto meo transmisso quatuor articulos erroneos, nimirum art. 28, 29, 30 et 31 una cum duobus subjunctis corollariis, eorumque loco substituas totidem alios in separata charta Tibi transmittendos. Videbis nunc me conspirare cum Filio pro casu unius tubi in § 28 explicato, ut et quod attinet ad duos tubos vasi adaptandos, qui casus est § 29, ubi pariter non est dissensus inter nos; unum tamen credere me facit, Filium ipsummet suo solvendi modo non satisfactum esse, quia non video causam cur de tribus tubis pluribusve numero determinatis nihil omnino dixerit, totamque istam materiam in opere suo hydrodynamico omiserit. Quod dedit de numero infinito tuborum seu de canali conoidico decurtato, qui casus est facilis, mecum convenit.

Pergo, Vir Excel., ad reliqua epistolae tuae capita: Accepi tandem nuper per manus Filii libros inter quos inveni quoque Musicam Tuam, pro qua, si missa est ex Tua liberalitate, debitas refero gratias. Legam eam quam primum licuerit per valetudinem. Optarim vero ut quae imposterum mittenda sunt, non per mercatores sed alia via commodiori transmittantur; hi enim lucripeti homines, qui nil faciunt nisi quaestus gratia, tot sumtus exigunt variis sub titulis, ut dubitem an non exsuperaturi essent pretium quod valerent libri ipsi si in auctione aliqua statim divendi deberent. Fortassis melius et promtius Tubingam dirigerentur, ut olim jam factum memini, ad Clar. Bulffingerum, qui a nobis non plus peteret quam quod ipse erogaturus esset.

Ob distractiones alienas viresque ex morbo adhucdum prostratas non licet profundius tentare jam serierum materiam, in quibus tanquam in elemento Tuo versaris felicissime; habeo interim de quo mihi gratulor, videns inventa mea olim facta Tibi saepissime ansam dare eruendi exquisitissimas veritates, aliaque producendi inventa ex meis deducta; inter talia refero quae nunc habes de sequestrandis integralibus imaginariis a realibus, quae utique omnia fluunt ex eo, quod expressiones quadraturae circuli reduci possunt ad logarithmos imaginarios et vicissim, quod me primum patefecisse, et quidem jam ab initio hujus saeculi, ingenue agnoscis. Tale quid etiam est, quod jam in superiori saeculo dedi pro integratione $\int x^x dx$ in casu quo $x = 1$, eo artificio usus ut ex logarithmo ipsius x^x, nempe ex xlx, iterum formarem, regrediendo ad numerum, valorem ipsius x^x per seriem

$$1+\frac{xlx}{1}+\frac{xx(lx)^2}{1.2}+\frac{x^3(lx)^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

quod usque adeo placuit Klingenstiernio, professori matheseos Upsaliensi, ut sciscitaturus originem meae seriei

$$\int x^x dx = 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^4}+\text{etc.},$$

casu $x=1$, quam suo Marte nullatenus invenire poterat, praecipue hunc in finem iter ad me fecerit, per 6 menses postea commoratus, mea institutione usurus. Miror vero quod dicis, Vir Celeb., Te *ingenti* labore elicuisse methodum eam inveniendi, cum tamen ego non magnum laborem adhibuerim pro isto negotio, ut vidisti ex methodo mea quam demum A. 1737 publicavi, postquam fere per 40 annos eam suppresseram. Lemma illud pro inveniendo valore ipsius $\int x^m dx(lx)^n$, quod dicis in subsidium vocasse, jam tum temporis mihi innotuisse, cum solutionem ipsam integrationis formulae $\int x^x dx$ adinveni, facile percipis siquidem unum sine altero vix fieri potest: cujus rei ut Tibi fidem faciam, transcribam quod in schedula scriptum inveni inter chartas meas antiquas; calculus est brevis et perfacilis atque methodus similis illi per quam inveni seriem meam universalem pro integrando $\int n\,dz$ quam dedi in Actis Lips. 1694 ni fallor. Ecce ergo retentis meis symbolis integrationem formulae $\int x^p dx(lx)^q$, ubi p et q idem sunt quod apud Te m et n. Operatio est ut sequitur:

$$\int x^p dx(lx)^q = \frac{1}{p+1}x^{p+1}.lx^q - \frac{1}{(p+1)^2}x^{p+1}q\,lx^{q-1}+$$
$$\frac{1}{(p+1)^3}x^{p+1}.q-1.q.lx^{q-2}-\frac{1}{(p+1)^4}x^{p+1}.q-2.q-1.q\,lx^{q-3}+$$
$$\frac{1}{(p+1)^5}x^{p+1}.q-3.q-2.q-1.qlx^{q-4}-\dots\dots$$
$$\pm\frac{1}{(p+1)^{q+1}}x^{p+1}.1.2.3.4\dots q.$$

Nota. Si numerus terminorum, seu $q+1$, est par, finietur progressio signo —, sin vero $q+1$ sit impar, finietur signo $+$.

Coroll. In casu, quo x evadit $=1$, evanescunt omnes termini excepto solo ultimo, singuli enim, in quibus est lx ejusque aliqua potestas, aequantur zero ex natura logarithmorum, nam exponens q supponitur affirmativus; adeoque erit in hoc casu

$$\int x^p dx lx^q = \frac{\pm 1}{(p+1)^{q+1}} x^{p+1} \,.\, 1.2.3.4\ldots q = \frac{\pm 1}{(p+1)^{q+1}} 1.2.3.4\ldots q$$

Vides expressionem meam ante tot annos inventam Tuae quidem omnino esse consentaneam, sed non notasti quod requiratur meum q vel Tuum n debere esse affirmativum: Dubito an inveniri possit formula aliqua pro casu in quo q vel n esset negativum. Inveni quidem hanc aliam seriem

$$\int x^p\, dx (lx)^q = x^{p+1} \left(\frac{1}{1+q} (lx)^{1+q} - \frac{p+1}{1+q.2+q} (lx)^{2+q} + \frac{(p+1)^2}{1+q.2+q.3+q} (lx)^{3+q} - \frac{(p+1)^3}{1+q.2+q.3+q.4+q} (lx)^{4+q} + \ldots\right)$$

quae pro negativo q aeque valet ac pro affirmativo, mutando tantum signa ante q posita. Sed nihil inde in rem nostram hactenus elicere potui.

Quod attinet ad methodum meam integrandi hanc aequationem $o = y + \frac{ady}{dx} + \frac{bddy}{dx^2} + \frac{cd^3y}{dx^3} +$ etc., non amplius scio an dixeris eam non satis esse generalem, de hoc vero non agebatur, nam ipsemet ego dubitavi de ejus legitima generalitate, siquidem pro fundamento posui curvam satisfacientem esse ex classe Logarithmicarum, cujus subtangens tantum quaerenda sit, etiamsi nondum pro demonstrato habuerim, imo ne nunc quidem habeam, nullam curvam ex alio curvarum genere dabilem esse, quae forsan etiam respondeat propositae aequationi. At vero scandalum mihi facesserat (hinc enim oborta est nostra controversia) quod in aliqua Tua anteriori epistola dixisti aequationem algebraicam, ad quam ego etiam dudum perveneram, $p^4+k^4=0$, resolvi in has duas aequationes duarum dimensionum *reales*: $pp+kp\sqrt{2}+kk=0$ et $pp-kp\sqrt{2}+kk=0$. Ad quod ego respondi, has quantitates esse quidem factores reales, in quos altera illa $p^4+k^4=0$ resolvi potest, quod jam olim demonstratum dedi Tayloro, sed illos factores utut reales non tamen posse esse aequationes reales, hoc est, non posse habere radices reales, adeoque impossibile esse ut $pp\pm kp\sqrt{2}+kk$ fieri possit $=$ zero; fortassis autem mentem Tuam non satis clare expressisti. Caeterum facile concipio, quomodo ex logarithmis imaginariis perveniri possit ad valores reales per quadraturam circuli exprimendos, et quî ignorare possem, cum primus hanc materiam in scenam produxerim. Cavendum interim suspicor ne quod hic de imaginariis primi gradus intelligitur idem extendi debeat ad imaginaria altiorum graduum, dubito, inquam, an si reperiretur $y=e^{+x\sqrt[b]{-1}}+e^{-x\sqrt[b]{-1}}$, idem reduci posset ad quadraturam circuli realem.

Audivi cum voluptate, Te, Vir Celeb., invitatum esse nomine Regis Borussiae ad novam Academiam Berolini stabiliendam, imo Te jamjam acceptasse invitationem, de quo honore Tibi ex animo gratulor; Velit Deus secundare Tua coepta atque Te comitari in itinere, jam proximo, ut intelligo, mense Junii suscipiendo: Rogo ut mihi scribas quantum Tibi promissum sit salarium annuum. Etiam ego et ambo mei Filii accepimus litteras invitatorias jussu regio, sed mihi grandior est aetas et valetudo nimis vacillans, quam ut possim, quemadmodum optarem, auscultare tam honorificae atque illecebrosae ablectationi. Si vicenis annis junior essem, mehercle, ne per momentum quidem cunctarer; mihi adeo sordent omnia in Patria. Quid consilii capturis sint Filii mei, nondum scio; expectabunt credo significationem magis praecisam conditionum offerendarum, id quod fiet, si conjectare licet, finita expeditione in Silesiam suscepta. Quando veneris Berolinum, habebimus Te multo viciniorem, quod me sperare facit, Te aliquando ad Patrios Lares exspatiaturum, salutandorum Parentum gratia, quo ipso Tui videndi copia mihi daretur, quod vehementer desidero priusquam morior: Interim Vale, Vir Amicissime, et me amare perge. Dabam Basileae d. 18. Febr. st. n. 1741.

P. S. Sicuti scribis, pars prior hydraulicorum meorum jam erit impressa in IX Comment. tomo; pars altera sine dubio typis mandabitur pro tomo X. Sed cura quaeso ut correcte prodeat atque immunis a vitiis typographicis, quod monere necesse duco, quia vidi in tomo V exercitationem meam de triangulo retrocedente a pressione ponderis, hypothenusae impositi, tot scatere erroribus a typotheta commissis, ut ipse me vix cognoscere potuerim vel cogitata mea intelligere. Imprimis optarim ut figurae, Hydraulicae meae inservientes, a chalcographo caelentur cum aliqua venustatis gratia, quales ego exprimere non potui, quia nunquam didici delineandi artem, et omnes tremula manu, ut cunque potui, in chartam conjeci: Ad hoc autem opus erit ut Tu, Vir Excell., vel alius quispiam harum rerum peritus explicet chalcographo quid in singulis locis observandum sit ad res ipsas menti meae convenientes nitide probeque repraesentandas.

Hasce jam scriptas dimissurus eram mense Februario, Vir Celeb., cum nuncius paulo ante ad nos deferretur de descessu Tuo tanquam proxime instanti, id quod fecit, ut retinuerim donec scirem adventum Tuum Berolinum, veritus ne Te non amplius inveniant Petropoli, quanquam ut nunc video sat temporis ante abitum Tuum superfuisset quo meas litteras (si misissem) ibi adhuc accipere potuisses; mitto tamen nunc, etsi sero, ne responsione careat ad Tuas anteriores: Rogo ut schediasma adjectum quantocius Petropolin transmittas, spero enim satis mature illuc venire posse, ut inseri queat parti secundae Hydraulicae meae, antequam tomus X Comment. eousque impressus sit. Caeterum jucundissimum fuit intelligere ex novissimis Tuis litteris Berolini datis et nudius tertius acceptis, Te una cum Tua familia felicissime adventasse in locum novae Tuae stationis, de quo Tibi gratulor voveoque ut omnia Tibi ex animi sententia eveniant: Gratulor et mihi Te nobis viciniorem factum, indeque spem affulgere futurum ut aliquando huc excurras ad salutandum Parentes et Amicos, quod ut fiat ante meam mortem est quod ardentissime desidero. Non possum satis admirari excessum Tuae erga me benevolentiae, videns Tibi res meas usque adeo cordi esse, ut ultro et non rogatus easdem deferri curaveris ad Illustrissimum Comitem Ostermannum, quam in partem quoque adduxisti, sicuti ais, Clariss. Prof. et Consiliarium Grossium, qui hoc onus in se suscepturum promiserit. Nihil jam reliquum est hac vice, quam ut Te, Amice exoptatissime, quamvis absentem, animo exosculer, donec id, si Superis placet, coram facere possim. Vale, iterumque vale. Basil. a. d. 1. Sept. 1741.

LETTRE IX.

Sommaire. Nouvelles rectifications à apporter au mémoire d'hydraulique. — Félicitations à l'occasion de la situation heureuse d'Euler à Berlin. — Regrets de ne pas pouvoir accepter l'appel qui lui a été également adressé par le gouvernement de Prusse. — Remercie Euler de la communication de ses recherches ultérieures sur les équations différentielles des ordres supérieurs.

Viro Celeberrimo atque Excellentissimo Leonhardo Eulero S. P. D. Joh. Bernoulli.

Ignosce, quaeso, tardiuscule respondenti ad litteras Tuas Berolini datas d. 16. Sept. Tam gratae mihi sunt litterae Tuae quam quod maxime, nosti vero quae mihi sint senectutis incommoda, ut adeo non opus sit pluribus excusare meam in scribendo segnitiem; Etsi hanc praeteritam aestatem triverim solito mitioribus molestiis, quas alias pariunt corporis mei infirmitas et languor, tamen non desunt negotia quam plurima, quibus quotidie obruor ab incumbente onere rectoratus academici, in me hoc anno devoluti atque adhuc duraturi usque ad sequentis anni solstitium aestivum: Vides quam parum temporis suppelat vacandi meditationibus mathematicis. Gratias ago pro promta missione ad Cl. Goldbachium mearum correctionum ad retroactionem fluidorum spectantium, optarem autem nunc eas nondum fuisse missas; inest enim adhuc aliquid ad quod non attenderam, rogo igitur ut, quam primum licuerit Petropolin scribere, cures supprimi illas correctiones una cum toto capite de retroactionibus aquarum fluentium; omittantur ergo §§ 26, 27, 28, 29, 30, 31 ut et dua subjuncta corollaria: quo facto mutandi sunt numeri §§ sequentium 32, 33, 34 etc. in 26, 27, 28 etc. ad finem usque totius scripti; Erit itaque circa finem dissertationis in scholio 5. citatio (§ 61) mutanda in (§ 55). Mirari non debes meam inconstantiam in tractatione hujus materiae, eam enim operi meo hydraulico interpolaveram longo tempore post scriptionis finem, cum fere obliteratum esset theoriae fundamentum in memoria mea, praeterquam quod non multum affinitatis habeat cum corpore hydraulico. Interim spero, si tranquilliori otio frui dabitur, me dissipatis obscuritatis nebulis omnia ad amussim pervestigaturum; et tunc quod invenero conjecturus sum in singulare schediasma sub forma supplementi: ita ut nihil referat sive separatim imprimatur, sive conjunctim cum ipso scripto hydraulico, si hoc forte nondum fuerit impressum.

Gratulor Tibi, Vir Exc., de egregio et vere Regio salario 2400 flor. quod Rex potentissimus meritis Tuis assignavit, sed et imprimis gratulor favorem et gratiam qua usque adeo flagras apud Clementissimum Principem ut Hic inter medios belli strepitus ad Te litteras propria manu exarare non fuerit dedignatus*). Fateor profecto mirabundus insolitas esse vir-

*) Cette lettre est la première dans une collection de 57 lettres autographes

tutes tanti Herois, qui cum incredibili fortitudine bellica conjungit pariter incredibilem in scientias et artes propensionem; ô si talis Princeps esset immortalis in corpore, sicut immortalis erit ejus gloria, atque ab Illo rerum gestarum porroque gerendarum memoria ad finem mundi celebranda! Tam belle, tam graphice mihi depingis felicitatem qua fruiturus essem, si exemplo Tuo locum dare vellem invitationi Regiae ad acceptandam stationem Berolinensem, ut fere mihi saliva moveatur et appetitus tentandi fortunam tam illecebrosam; sed reprimitur impetus statim ac cogito de innumeris impedimentis insuperabilibus, quae ipsemet melius intelliges ad rerum mearum statum attendens quam si vellem longa seria Tibi enarrare: Vel sola mea grandaeva senectus, tot undique infirmitat bus quas nosti infestata, spem omnem adimit commutandi clima nostrum cum alieno; fortassis ne itineris quidem satis longi molestiam perferre possem, quin in ipso durante itinere defatigatus succumbens in mortis praedam cederem. Nec est quod me excitare velis exemplo venerabilis senis De Vignola, annum jam agentis nonagesimum tertium; non enim cuivis homini hanc aetatis Corinthum adire contingit; et cum iste Vir fortunatus vix ulla sentiat, ut ipse dicis, senectutis incommoda, annon vigore junior

---

de Frédéric-le-Grand à Euler, collection qui se conserve aux archives de l'Académie. La voici:

„Monsieur Euler, J'ai été bien aise d'apprendre que vous êtes content de votre sort et établissement présent. J'ai donné les ordres nécessaires au grand Directoire pour la pension de 1600 écus que Je vous ai accordée. S'il y a encore quelque chose dont vous aurez besoin, vous n'avez qu'à attendre mon retour à Berlin. Je suis

Au camp de Reichenbach
ce 4 Sept. 1741.

Votre bien affectionné Roy
Fédéric."

est censendus quam ego, etsi sit annosior aetate? Interim si adhuc idoneus judicarer ad praestandum aliquid in re mathematica et physica, sed ita ut liceat in Patria manere et per commercium litterarium meditationes et inventa mea cum illustri vestra Academia communicare, promitterem certe pro modico subsidio annuo omnem meam operam in id unice collocandam ut inservirem pro viribus splendori Academiae vestrae procurando et promovendo, idque ut efficacius exequi possem, valedicerem omnibus aliis meis laboribus, imo quod plus est resignarem professionem meam Basilensem, non alium in finem, quam ut omne meum tempus vestris Musis consecrare possem. Videbis, Vir Celeb., an tale aliquid pro me fieri possit, sicuti aliis in locis fieri solet, vel in ipsa quam deseruisti Academia Petropolitana, ubi absentes quoque viri quidam gaudent honorariis annuis, ut Wolfius, Bulffingerus, Filius meus, olimque Hermannus, et nunc haud dubie Tu etiam, qui prae caeteris hac gratificatione dignus es.

Gratias ago pro communicatione meditationum Tuarum circa aequationem differentialem cujusvis gradus:

$$o = y + \frac{ady}{dx} + \frac{bddy}{dx^2} + \frac{cd^3y}{dx^3} + \text{etc.}$$

spirant omnia profundissimam ingenii Tui sagacitatem, sed doleo quod nunc non liceat singula satis attente examinare, ob negotiorum quotidie denovo mihi succrescentium multitudinem. Quaeris quae sint illa negotia? dicam; sunt illa quae solet facessere munus rectoris Academiae nostrae, quod pronuper in humeros meos devolutum est, quodque adhuc durabit usque ad solstitium aestivum anni sequentis; haud facile credideris, quantum molestiae ea de re singulis diebus mihi devorandum sit: vix una peracta est scena, cum ecce alia oboritur ludenda, non grata, non jucunda, sed fastidii plena, temporisque mei vorax et furax. Dum haec scribo, audio pulsari fores; sunt sine dubio quidam rabulae in jus vocantes reos suos; iturus ergo sum ad dirimendas liticulas, parvi saepissime momenti. Vale, Vir Amicissime, et me quod facis amore reciproco amplectere. d. 28. Octob. 1741.

Vide quam mihi labilis sit memoria: Priorem hujus epistolae paginam heri sub vesperam scripsi, alteram hodie mane scribens repetii ex oblivione quod jam scriptum erat de molesto rectoratus munere.

LETTRE X.

SOMMAIRE. Considérations sur les évènemens politiques en Russie et en Prusse et leur influence sur le sort des lettres et des arts. — Recherches sur la rétroaction des fluides. — Solution d'un problème de mécanique proposé par Euler, et d'un problème analogue proposé par König de Berne.

Viro Celeberrimo et Excellentissimo, LEONHARDO EULERO S. P. D. JOH. BERNOULLI.

Distuli aliquantisper responsionem ad litteras Tuas die 26. Decembris datas, ut parcerem sumtui utrinque faciendo si utendum fuisset cursori publico; meas enim litteras tanti non aestimo ut Tibi sint onerosae. Spero nuperam illam subitamque revolutionem in Imperio Russico obortam non fore damnosam Academiae Petropolitanae, scripsit namque Clairautius, academicus Parisiensis, meus quondam discipulus una cum Maupertuisio et Koenigio Bernensi, scripsit inquam ille, se audivisse ex ore Principis Cantemiri, legati Russici ad aulam Gallicam, quod nova Russorum Imperatrix sibi firmiter proposuerit omnia religiose exequi ac promovere quaecunque a Parente Petro Magno fuerint instituta ac prae caeteris quidem res academicas, quod si ita se habeat, ut verisimile est, non dubito quin mutatio ista rebus Tuis futura sit utilis potius quam noxia: quare expectandum erit donec fermentationes Imperii deferbuerint omniaque pervenerint ad tranquillitatis statum permanentem.

Magis anxius haereo circa tumultus turbulentos in Imperio Romano excitatos, qui non videntur tam promte sedari posse, ut Rex vester potentissimus, qui pro ardore suo heroico ipsis maxime implicitus est, cogitare queat de restauratione Academiae Regiae scientiarum hoc adhuc anno suscipienda, siquidem bellum undiquaque magis magisque exardescere audimus, quod si ita per totam pene Europam serpere pergit, nescio ubinam quaerendus sit pacificator, qui tantas possit componere lites. Interim optandum esset ut Heros vester pro prudentia sua minus se exponeret in vitae periculum quam facit cum praelio se committit; Quid si enim in periculo occumberet, bone Deus! Quis resurgeret scientiarum Patronus? Quis Academiam vestram restauraret? Quis item omnia, quae optimus Princeps in bonum publicum meditatus est, effectui daret aut dare posset? Haec utique maxima ex parte dependerent ab indole successoris; quis autem scit, an eodem animo futurus esset affectus erga scientias et artes, an simili amore esset prosecuturus Eruditos, aut annon potius relicturus esset in squalore et torpore culturam bonorum studiorum.

Sed pergo ad privata, quae nos propius tangunt: et quidem quod attinet ad Hydraulica nostra, deprehendi tandem totum negotium de retroactione fluidorum ex vase erumpentium esse perquam facile et ex eorum numero quae, cum sint nimis obvia et, ut ita dicam, ante pedes posita, praeterimus quasi laterent in recessibus longe remotis; Interim error meus, si unquam error est nominandus, non tam consistit in falso ratiocinio quam in sinistra idea sub qua rem ipsam aspiciebam: Nunc autem observo ex natura virium motricium omnium stratorum ad supremam aquae amplitudinem translatarum producere pressionem $= gha$, hoc est, $=$ ponderi columnae aqueae cujus basis est h seu suprema amplitudo, et altitudo vasis a; Hinc sequitur ex communi principio hydrostatico vim actionis, qua expellitur aqua per amplitudinem infimam, hoc est per orificium w, debere esse aequalem ponderi columnae aqueae, cujus altitudo eadem a sed amplitudo w, adeoque $=$ ponderi gwa. Cum autem pro vasis, quorum centricae habent situm verticalem, canales vero situm horizontalem, generaliter inventum sit

$$\frac{vv(hh-ww)}{2h} + \frac{hwvdv}{dx}\int\frac{dt}{y} = gha$$

$=$ constanti pro vasis jugiter plenis, et cum praeterea vis reactionis in directione horizontali sit etiam constans nempe $= gwa$, erit haec $= \frac{vv(hhw-w^3)}{2hh} + \frac{wwvdv}{dx}\int\frac{dt}{y}$; patet utique vim illam retroagendi constanter esse eandem a primo effluxus momento per omnia velocitatis incrementa usque ad maximam seu aequabilem velocitatem, utpote quae vis semper est $=$ ponderi cylindri gwa, neque paradoxum hoc videbitur esse illi, qui attenderit nihil impedire quominus crescente primo termino $\frac{vv(hhw-w^3)}{2hh}$, alter $\frac{wwvdv}{dx}\int\frac{dt}{y}$ tantundem decrescat, et vice versa; Revera existente velocitate initiali, evanescet primus terminus, remanebitque alter $\frac{wwvdv}{dx}\int\frac{dt}{y}$ qui solus invenietur $= gwa$, si substituatur valor ipsius dx, et vicissim, si velocitas v est maxima, terminus posterior $\frac{wwvdv}{dx}\int\frac{dt}{y}$ evanescet, superstite priori $\frac{vv(hhw-w^3)}{2hh}$, cui soli tunc aequabitur gha. Quod si nullo influente in vas novo liquore, vas ipsum gradatim depleatur, perspicuum est retroactionem gradatim quoque imminui et ita quidem ut semper proportionalis sit altitudini aquae remanentis in vase, dicatur enim altitudo variabilis $= A$, eritque vis retroactionis $= gwA$.

Quae olim dedi pro determinatione descensus corporis gravis super plano inclinato mobili, bona quidem sunt, sed methodus, qua usus fueram in solutione per progressiones geometricas descendentes in infinitum, non satis est naturalis, neque adeo digna elogio sagacitatis, quo me pro urbanitate Tua eam ob rem mactare voluisti; inveni namque ex illo tempore citra hujusmodi progressiones alium solvendi modum magis naturalem et longius procedentem, cujus ope solvere potui sine magno labore novum problema, quod Tu, Vir Excell., mihi proponis in litteris Tuis, his verbis: „Sit „tubus seu canalis (sive gravis, sive gravitatis expers) mobilis „circa axem fixum, in quo versetur globus, qui ob gravita- „tem in tubo sine frictione descendat (*et quidem, quod sine „dubio subintelligis, non rotando, sed fluendo*), simulque tubo, „motum inducat: quovis tempore determinare situm tubi et „globi in tubo, itemque utriusque celeritatem.“ Ponamus, brevitatis tantum gratia, casum simplicissimum: Sit scilicet tubus geometricus, hoc est, sine materia, sed materiae loco affixum sit in extremitate corpus q gravitatis expers, in altera vero extremitate sit axis, circa quem tubus est mobilis; In cavitate tubi concipiatur globus gravis cujus pondus sit p, a cujus magnitudine abstrahitur, vel potius cujus magnitudo ut infinite parva supponitur: effectus itaque hujus ponderis est duplex, nimirum in situ obliquo tubi, primo ut pondus descendat secundum longitudinem, seu directionem tubi, deinde ut ipsi tubo motum circa axem inducat, simulque adeo promoveat corpus q in extremitate tubi annexum; Proinde globus p ex duplici hoc motu acquiret per compositionem motum verum et realem, describetque eo lineam aliquam curvam, cujus natura exprimitur hac aequatione

$$\frac{dx^2}{aa-xx}\int x\,dy = p\,dy^2\int\frac{y\,dx}{qaa+pyy};$$

Per a intelligo longitudinem tubi, restat ut explicem quid significent indeterminatae x et y: Per axem fixum esse ductam concipe rectam horizontalem, ad quam agatur porro recta verticalis ab extremitate canalis ubi est corpus q; quemcunque habeat situm canalis vel tubus, erit haec verticalis ea, quam voco x, distantia vero ponderis p in tubo ab axe fixo est y. Velocitates, quas in quocunque situ habent corpus q et pondus p, inveni ut sequitur: Posito scilicet g designare vim acceleratricem qua gravia animantur naturaliter ad descensum verticalem, erit quadratum velocitatis corporis q circa axem fixum $= 2\,g\,a\,p\int\frac{y\,dx}{qaa+pyy}$, quadratum velocitatis ponderis p in directione ipsius tubi $= \frac{2g}{a}\int x\,dy$, tandemque quadratum velocitatis actualis ponderis p in directione tangentis curvae quam describit $= \frac{aady^2-xxdy^2+yydx^2}{(aa-xx)dy^2}\cdot\frac{2g}{a}\int x\,dy$.

Si tubus ipse esset materialis, nullum vero corpus sibi annexum haberet, solutio non ideo foret difficilior; Sit enim quantitas materiae in eo uniformiter diffusa, quae dicatur r, dico eodem modo se rem habere, ac si tubus careret materia sed haberet in extremitate sibi annexum corpus $= \frac{1}{3}r$; Quod si tubus sit materialis et insuper habeat in extremitate annexum corpus q, hic casus considerari debet tanquam esset tubus immaterialis, sed qui haberet in extremitate annexum corpus $= q + \frac{1}{3}r$. Porro si quantitas materiae sit non uniformiter diffusa per longitudinem tubi, sed in data quacunque lege se habeat diffusio, poterit semper, concessa integrabilitate, res reduci ad suppositionem tubi immaterialis cum annexo corpore addendo ad corpus q. Ex. gr. procedant diffusiones materiae tubi transversim secti in ratione distantiarum y ab axe fixo, quo casu poterit substitui tubus immaterialis qui in extremitate annexum habeat corpus $= q + \frac{1}{2} r$, atque tunc omnia aequivalenter fient. Si diffusiones transversales materiae essent ut quadrata distantiarum ab axe fixo, haberetur tunc pro corpore annectendo $q + \frac{3}{5} r$. Et ita in aliis.

Quae scripsi in postremis hisce lineis vera sunt et certo vera, independenter ab ipsa solutione, quam dedi Tui problematis, quod forsan non in eo sensu accepi, in quo ipse accipiendum voluisti. Hac occasione lubet mentionem facere ulterius alicujus problematis olim a Koenigio supra memorato mihi propositi, eo tempore, cum apud me essent bini ejus socii Maupertuisius et Clairautius, quod problema aliquam habet affinitatem cum Tuo, quamvis non interveniat consideratio gravitatis globi tubo inclusi, utpote motum acquirentis a circulatione tubi circa alterutram extremitatem uniformiter rotati in plano horizontali. Ecce ipsam propositionem gallice mihi factam: *Déterminer la courbe que décrit un corps renfermé dans un tuyau, pendant que le tuyau se meut uniformément autour d'un centre sur un plan horizontal.* Paulo post dederam solutionem satis elegantem una cum constructione concinna, quae supponit descriptam esse logarithmicam spiralem, cujus ope exhibui innumeras curvas quaesito satisfacientes, quas inter in casu quodam particulari existit ipsissima logarithmica. Non dubito, quin pro mira Tua dexteritate mox sis soluturus propositum. Vale, mi Charissime! et me, ut soles, amare perge. Dabam Basileae a. d. 15. Martii 1742.

P. S. Vides, Vir Excell., pro solutione Tui problematis me etiam esse deductum ad aequationes differentiales non satis commode tractabiles; unum est imprimis, quod mihi scrupulum facessit: an scilicet liceat assumere directiones mutabiles, in quibus quaesivi vires acceleratrices, ut est ea, quae generatur in corpore in tubo, dum tubus ipse mutat suam inclinationem, et dein altera vis acceleratrix, cujus directio priori est normalis, adeoque etiam mutabilis. Sed huic scrupulo medelam inveni, resolvendo scilicet utramque illarum virium in duas collaterales secundum directiones duas immutabiles, unam horizontalem, alteram verticalem, atque ita conjungendo utrobique duas horizontales, habeo vim acceleratricem, unam horizontalem, qua mobile in horizonte promovetur aut repellitur; conjungendo autem utrobique duas verticales, acquiro unam verticalem, qua idem mobile ad descensum verticalem animatur. Pono nunc coordinatas r et z curvae quaesitae, quam corpus grave p actualiter describit, nimirum r pro abscissa in recta horizontali per axem fixum transeunte, et z pro applicata verticali; quo posito inveni, salvo errore calculi, vim acceler. horiz. $= \frac{gqaarz}{(zz+rr).(pzz+prr+qaa)}$ et vim acceleratr. verticalem $= g - \frac{gqaarr}{(zz+rr.(pzz+prr+qaa)}$: Vocetur quantitas prior $= R$, et posterior $= Z$, eritque $2\int R\,dr =$ quadrato velocitatis accedendi vel recedendi in directione horizontali, et $2\int Z\,dz =$ quadrato velocitatis descendendi in directione verticali. Hinc ergo, quia dr et dz eodem tempusculo percurruntur, prodibit $\frac{dr^2}{\int Rdr} = \frac{dz^2}{\int Zdz}$

pro natura curvae quaesitae, quam mobile grave p descendendo actu describit, hoc est,

$$dr^2 \int Z\,dz = dz^2 \int R\,dr.$$

Habetur quoque velocitas corporis q, est enim elementum curvae inventae ad elementum contemporaneum, quod percurrit corpus q in circumferentia circuli, ut velocitas illius ad velocitatem hujus. Ergo etc.

LETTRE XI.

Sommaire. Continuation sur le problème de mécanique d'Euler, résolu dans la lettre précédente. — Rapport entre ce problème et le principe de la conservation des forces vives. — Théorème de mécanique, proposé par J. B., et critique d'une démonstration indirecte qu'en a donnée Daniel. — Solution du problème de König et différence entre celui-ci et celui d'Euler. Explication du non-accord qui existe dans la manière d'envisager la nature de la rétroaction des fluides d'Euler et de J. B.

Viro Celeberrimo atque Excellentissimo, Leonhardo Eulero S. P. D. Joh. Bernoulli.

Dab. Basil. a. d. 27. Aug. 1742.

Jam propemodum quadrimestre effluxit ex quo ultimas Tuas litteras accepi, quo tempore misere cruciabar consuetis meis doloribus, praesertim ex asthmate et tussi pertinacissima oriundis; affixus lecto sat longo tempore opem medici adhibui, quod non statim facere soleo nisi summa necessitas urgeat. Ordinaria senectutis incommoda, a quibus nunquam liber sum, non multum curo, neque adeo inutilibus meis querelis aures Tuas perpetuo obtundere volo, quare etiam ex silentio meo non recte concludis valetudinem meam esse corroboratam; Te vero in aetatis flore viventem velit Deus conservare per longam annorum seriem, quod votum esse debet omnium quibus cordi est rei mathematicae propagatio.

Speramus hic Russiae Imperatricem id facturam propediem, ut restituatur Academia Petropolitana in pristinum splendorem, siquidem Illa voluerit Magni Parentis vestigia sequi ejusque laudabilem intentionem exequi. Speramus pariter fore ut Monarcha vester, cui nunc addictus es, post pacem tam gloriose confectam cum Regina Hungariae, jam cogitaturus sit serio de Musarum castris amplificandis in sua Ditione: Nullus dubito quin Tu inter primos sis eorum, qui Illius munificentiam sunt experturi.

Nolo mordicus affirmare nullum errorem irrepsisse in calculum, quem institui pro solutione Tui problematis de motu determinando tum globi gravis, tum tubi intra quem ille descendit; puto autem methodum meam esse bonam: Interim rem gratam faceres si velles examinare quae dedi in *Postscripto* anterioris meae epistolae pro determinatione coordinatarum curvae, quam pondus in tubo descendens describit, quod ut commodius fiat, lubet exprimere vires acceleratrices, tam horizontalem quam verticalem, per solas litteras in ipso contextu epistolae adhibitas, ubi nimirum $p =$ massae globi gravis in tubo descendentis, $q =$ massae corporis affixi extremitati tubi, $a =$ longitudini tubi seu radio circuli, quem corpus q describit, $x =$ sinui anguli, quem facit quaelibet positio tubi cum linea horizontali per punctum fixum, circa quod rotatur tubus, transeunte, $y =$ distantiae globi a centro in quolibet situ tubi; praeterea $g =$ vi acceleratrici gravitatis naturalis; tandemque $t =$ cosinui $= \sqrt{(aa - xx)}$. Dico, si analysis mea rite se habet, fore curvam quam describit globus in tubo talem, quam describeret libere in vacuo corpus aliquod per se non grave, sed quod sollicitaretur a duabus viribus acceleratricibus, una in directione horizontali, altera in directione verticali, quarum illa horizontalis $\frac{gqtx}{qaa+pyy}$, altera vero verticalis $= g - \frac{gqtt}{qaa+pyy}$ seu $= \frac{gqxx+gpyy}{qaa+pyy}$; Hinc omnia reliqua fluunt; Nam vis acceleratrix in ipsa curva, quam globus descendens describit $=$

$$\frac{g\sqrt{[qqttxx+qqx^4+2pqyyxx+ppy^4]}}{qaa+pyy} = \frac{g\sqrt{(qqaaxx+2pqyyxx+ppy^4)}}{qaa+pyy}$$

adeoque posito elemento curvae $= ds$, erit globi gravis descendentis in tubo quadratum velocitatis actualis in directione elementi

$$2g\int\frac{ds\sqrt{(qqaaxx+2pqyyxx+ppy^4)}}{qaa+pyy};$$

Est autem $ds = \frac{1}{t}\sqrt{(ttdy^2+yydx^2)}$, hoc itaque valore substituto, erit quadratum hujus velocitatis

$$= 2g\int\left[\frac{\sqrt{(ttdy^2+yydx^2).(qqaaxx+2pqyyxx+ppy^4)}}{t(qaa+pyy)}\right].$$

Porro ds^2 seu $\frac{ttdy^2+yydx^2}{tt}$ se habet ad $\frac{aadx^2}{tt}$, hoc est quadratum elementi curvae a pondere p descriptae ad quadratum elementi arcus circularis descripti a corpore non gravi q, erit ut quadratum velocitatis actualis ponderis p ad quadratum velocitatis actualis corporis q, quia nempe haec duo elementa eodem tempusculo percurruntur; ex quo habetur quadratum velocitatis actualis corporis $q =$

$$\frac{2gaadx^2}{ttdy^2+yydx^2}\cdot\int\left[\frac{\sqrt{(ttdy^2+yydx^2).(qqaaxx+2pqyyxx+ppy^4)}}{t(qaa+pyy)}\right],$$

Simili modo inveniretur, si opus esset, velocitas ponderis p non actualis, sed quae concipitur in directione tubi; superest denique ut determinetur natura curvae, quam pondus p actu describit, id est, ut determinetur relatio inter x et y per convenientem aequationem, haec autem obtinetur, si ex viribus acceleratricibus collateralibus supra inventis

$$\frac{gqtx}{qaa+pyy} \text{ et } \frac{gqxx+gpyy}{qaa+pyy}$$

quaerantur quadrata velocitatum tam in directione horizontali quam in directione verticali: Quadratum nempe velocitatis horizontalis erit ad quadratum velocitatis verticalis ut

$$\int\frac{qtx(tdy+ydt)}{qaa+pyy} \text{ ad } \int\frac{(qxx+pyy)(xdy+ydx)}{qaa+pyy}.$$

Quoniam igitur elementa coordinatarum curvae simul percurruntur, erunt eorum quadrata ut velocitatum quadrata, hoc est, $(tdy+ydt)^2 \cdot (xdy+ydx)^2 ::$

$$\int\frac{qtx(tdy+ydt)}{qaa+pyy} \cdot \int\frac{(qxx+pyy)(xdy+ydx)}{qaa+pyy}$$

unde haec oritur aequatio $(tdy+ydt)^2 \int\frac{(qxx+pyy)(xdy+ydx)}{qaa+pyy}$

$$= (xdy+ydx)^2 \int\frac{qtx(tdy+ydt)}{qaa+pyy}$$

ubi tantum sunt indeterminatae x et y, nam tertia $t = \sqrt{(aa-xx)}$ non est nova indeterminata*).

Quousque jam haec conspirent cum conservatione virium vivarum examinare non vacat; Hoc negotium Tibi relinquo, Vir Exc., qui in calculando polles majori facilitate et patientia: interim haud aegre perspicio ex solo hoc principio conservationis virium vivarum problema istud solvi non posse, in quo quippe principio non continentur sufficientia data, nisi aliunde petatur aliquod in auxilium quod sit specificum. Permitte nunc quaeso, ut vicissim proponam aliquam quaestionem ex dynamicis: Finge Tibi corpus aliquod datae figurae positum esse super plano horizontali perfecte polito, ita ut

*) Observo nunc quae in his paginis continentur, potuisse simplicius exprimi, sed diutius immorari me taedet.

sine ulla frictione super illo plano moveri possit; Concipe jam applicari ad hoc corpus movendum aliquam vim motricem in directione horizontali, quae si transeat per centrum gravitatis corporis, manifestum est corpus acquirere motum sibi in cunctis partibus parallelum: Quodsi vero directio impulsionis non transeat per centrum gravitatis, acquiret corpus motum rotatorium circa punctum aliquod, quod perseverabit in quiete, saltem ab initio, quod ideo vocare soleo *centrum rotationis spontaneum*; hoc centrum (ut Tibi sine dubio et forsan paucis aliis jam notum est) idem erit cum centro oscillationis, quod existit in recta per centrum gravitatis normaliter ducta ad lineam directionis potentiae propellentis, sumendo scilicet punctum, in quo ista normalis secet lineam directionis, pro puncto suspensionis, et corpus ipsum ex eo suspensum pro pendulo, vel vicissim hoc pro illo. Quaero itaque an habeas hujus theorematis demonstrationem directam, quae nempe deducta sit ex solis principiis dynamicis seu mechanicis, qualem ego possideo omni exceptione majorem; Filius meus Daniel habet quidem demonstrationem (quam et ego facile inveneram), sed est indirecta, petita ex principio metaphysico de Natura per viam simplicissimam operante, supponit enim centrum spontaneum rotationis eo in loco esse debere, circa quod a vi minima possibili corpus rotari possit eadem cum velocitate angulari; sed hoc est confugere ad causam finalem, quam saniores physici, ut nosti, proscriptam volunt ex Philosophia naturali; nec male, quid si enim in aliquo phaenomeno explicando duae se offerrent praerogativae, quae autem simul a natura observari non possent, quamnam ergo ex illis affectaret natura? quomodo ejus intentionem divinare possemus, praesertim si ambae praerogativae suam peculiarem utilitatem haberent in aequali gradu? quae si ita se habeant, non dubito Te in meam sententiam iturum ac proin inquisiturum in demonstrationem directam ex legibus mechanicis necessario fluentem pulcherrimi hujus theorematis: Si consueta Tua sagacitas aliquam suggesserit, rogo ut mecum illam communices, ex cujus collatione cum mea, ubi videro consensum, maxima mihi creabitur voluptas. Ecce, ut Te invitem ad officii paritatem, mitto hic Tibi apographum solutionis meae problematis Koenigiani, quam olim dederam, gallice conscriptam, ipsi Proponenti ejusque Condiscipulis Maupertuis et Clairaut; videtur multum affinitatis habere cum Tua, cui autem cum non adjeceris analysin, melius ipse examinabis, quam ego, utrum ambae inter se sint consentaneae, de quo quidem non dubito; Interim non video quid hujus problematis solutio contribuat ad solutionem alterius problematis a Te propositi de globo gravi in tubo descendente: Etenim nihil fere commune habent, nisi quod in utroque casu globi moveantur in tubis, ast ingens est discrimen in essentialibus, nam 1° in Koenigiano nulla est consideratio gravitatis; in Tuo gravitas sola motum moderatur; 2° in illo circulatio tubi supponitur uniformis et a motore externo producta; in altero tubi circulatio est inaequabilis et accelerata; 3° in illo, motus globi dependet a motu tubi, in altero vice versa, motus tubi, quem ego sine pondere et sine materia considero, dependet a motu globi gravitantis super tubum.

Natura retroactionis fluidorum varios admittit conceptus, qui nisi probe discernantur, facile in errorem deducunt, quare non miror Te, Vir Excell., qui ipse fateris quod hac de re non multum sis meditatus, adhuc discrepare a mea sententia, quam tandem amplexus sum post longam atque maturam omnium circumstantiarum considerationem: mihi quidem ab initio idem accidit, quod nunc Tibi, ut crederem attendendum esse ad vim compressionis (nominatam π in dissertatione mea hydraulica), qua strata liquoris constipantur quando fluit ex locis amplioribus in angustiora, sed postmodum animadverti has vires premere quidem latera canalis, facereque ut liquor ascendat in fistula aliquo in loco canalis inserta et verticaliter erecta, nihil autem omnino conferre ad retroactionem; nam cum liquor in canali horizontaliter sito sit quasi gravitatis expers, evidens sane est omnes istas vires comprimentes aliasque liquorem protrudentes, quae in canali generantur, eminenter jam contineri in sola illa vi, qua liquor ex vase per primam amplitudinem (quam vocavi m) in canalem ingredi cogitur; verum demonstravi (Te approbante) vim illam aequivalere ponderi cylindri liquoris, cujus basis est m et altitudo a liquoris in vase amplitudini m superincumbentis, quod pondus expressi per gam. Haec igitur vis premens vel urgens dum agit antrorsum, simul etiam agit retrorsum, sed ea tantum ejus pars sumenda est pro retroactione, quae nullam invenit resistentiam in exitu per foramen w, reliquum enim utrinque aequaliter agendo antrorsum et retrorsum in aequilibrio manet; Et sic vis retroactionis aequalis erit gaw, hoc est, ponderi cylindri liquoris altitudinis a super basi w. Caeterum non capio, quid Tibi velis, Vir Cl., quando dicis „Experimenta docuisse, pressionem aquae contra fundum vasis primo effluxus momento quasi esse nullam:“ Concipe ergo vas cylindricum perquam magnae amplitudinis et altitudinis, aqua plenum, et finge in imo hujus vasis prope fundum aperiri foramen quantumvis exiguum, per quod aqua effluere incipiat; Potuissem ne eo absurditatis procedere, ut dicerem secundum theoriam meam aquae gravitationem seu pressionem in fundum subito cessaturam esse, cum potius contrarium dixerim.

Antequam finiam, hoc adhuc dicere lubet de problemate Tuo ponderis p in tubo descendentis; Si nimirum corpus q in extremitate tubi abesset, ipseque tubus nullam haberet quantitatem sensibilem materiae respectu ejus, quae est in pondere p, descenderet utique hoc pondus in linea recta verticali: Quid si autem in tubo plura essent pondera p aequalia sive inaequalia in diversis distantiis a centro rotationis tubi; In hoc casu, quantum per transennam video, commune centrum gravitatis ponderum p describet rectam verticalem, ipsa vero singula p describent totidem conchoides, quarum illa verticalis erit communis asymtotus, earumque communis umbilicus in ipso centro rotationis. Vale, Vir Excell., et me ama.

(Solution du problème de Koenig, par Jean Bernoulli, annexée à la lettre précédente).

Lemme. Si d'un point C (fig. 1.) l'on tire les droites CA, CB, CD qui coupent sur PD les parties AB, BD, infiniment petites et égales, la différence des angles ACB et BCD, c'est-à-dire, $ACB - BCD = \frac{2ps\,ds^2}{(pp+ss)^2}$, en nommant la constante $CP = p$ perpendiculaire sur la droite variable $PA = s$; Cela se démontre facilement en différentiant l'angle ACB dans la supposition de ds constante.

Problème. Déterminer la courbe que décrit un corps renfermé dans un tuyau, pendant que le tuyau se meut uniformément autour d'un centre sur un plan horizontal.

Soit (fig. 2.) la courbe ABE que décrit le corps pendant que le tujau CA tourne sur le point C. Soit $CA = x$, $AB = ds$, BH ou $Bh = dy$. Lorsque le corps a décrit la petite ligne AB dans un certain tems, s'il était libre, il continuerait à se mouvoir dans la même direction et parcourrerait, dans un tems égal, une autre partie $BD = AB$: Mais à cause que le tuyau se meut et se trouve dans le même tems dans la situation CE, qui fait avec CB l'angle $ECB = BCA$, le corps, au lieu d'être en D, sera en E, à même distance du centre que le point D.

Ayant donc décrit du centre C l'arc DE, et tiré sur les deux tangentes BP, ER, les perpendiculaires CP, CR, l'on aura, par le lemme, la différence entre les angles ACB et BCD, en substituant, dans $\frac{2ps\,ds^2}{(pp+ss)^2}$, $\frac{x\,dy}{ds}$ pour p, et $\frac{x\,dx}{ds}$ pour s, et l'on aura $BCA - BCD = \frac{2dy\,dx}{xx}$. Maintenant $\frac{RQ}{QB} = \frac{DF}{BF}$, c'est-à-dire $\frac{d\left(\frac{x\,dy}{ds}\right)}{\frac{x\,dx}{ds}} = \frac{DF}{ds}$, donc $DF = \frac{ds^2 . d\left(\frac{x\,dy}{ds}\right)}{x\,dx}$, et à cause des triangles semblables HDB, FDE:

$$dx\ ds :: \frac{ds^2.d.\left(\frac{x\,dy}{ds}\right)}{x\,dx} . DE = \frac{ds^3.d.\left(\frac{x\,dy}{ds}\right)}{x\,dx^2};$$

Donc $\frac{DE}{EC} = \frac{ds^2 d(x\,dy)}{xx\,dx^2}$ = l'angle DCE, savoir, en prenant maintenant ds pour constante.

Or cet angle DCE est évidemment = à l'angle ECB ou $BCA - DCB$. Donc $\frac{ds^2 d(x\,dy)}{xx\,dx^2} = \frac{2dy\,dx}{xx}$; ou

$$(dx^2 + dy^2)(dx\,dy + x\,ddy) = 2dy\,dx^3,$$

$$\text{ou } x\,dx^2\,ddy + x\,dy^2\,ddy = dy\,dx^3 - dx\,dy^3.$$

Retranchant du premier membre, et rajoutant après $2x\,dy^2\,ddy$, l'on a $x\,dx^2\,ddy - x\,dy^2\,ddy + 2x\,dy^2\,ddy = dy\,dx\,(dx^2 - dy^2)$, c'est-à-dire $x\,ddy(dx^2 - dy^2) + 2x\,dy^2\,ddy = dy\,dx(dx^2 - dy^2)$; Donc $x\,ddy + \frac{2x\,dy^2\,ddy}{dx^2 - dy^2} = dy\,dx$, ou $\frac{ddy}{dy} + \frac{2dy\,ddy}{dx^2 - dy^2} = \frac{dx}{x}$, ou (mettant pour $dx^2 - dy^2$ sa valeur $ds^2 - 2dy^2$)

$$\frac{ddy}{dy} + \frac{2dyddy}{ds^2 - 2dy^2} = \frac{dx}{x},$$

et intégrant, $l(ndy) - \frac{1}{2}l(ds^2 - 2dy^2) = lx$, ce qui donne $\frac{ndy}{\sqrt{(dx^2 - dy^2)}} = x$, d'où l'on tire $dy = \frac{xdx}{\sqrt{(nn+xx)}}$ ou, rapportant les dy à une circonférence dont le rayon CM a, et $MN = dz$, l'on aura enfin $dz = \frac{adx}{\sqrt{nn+xx)}}$.

Construction de la courbe. Faisant $a = 1$, l'équation précédente se réduit à $z = l(x + \sqrt{(nn+xx)})$, et prenant c tel que $lc = 1$, l'on a $c^z = x + \sqrt{(nn+xx)}$, ou $c^z - x = \sqrt{(nn+xx)}$, d'où l'on tire $x = \frac{c^z - nnc^{-z}}{2}$. Ayant donc (fig. 3) décrit la spirale logarithmique HGK semirectangle, et du même centre C et du rayon $CK = 1$ le cercle KMN, nommant $CG = x$ et l'arc $KM = z$, on prendra de part et d'autre du point K les arcs KM, Km égaux, et l'on aura $CG = c^z$ et $Cg = c^{\ z}$. Retranchant donc de CG une partie $GO = nnCg$, on partagera CO en deux également au point B qui sera à la courbe cherchée ABE.

LETTRE XII.

SOMMAIRE. Affaires des académies de St.-Pétersbourg et de Berlin. — Problème de mécanique sur le mouvement d'un poids descendant dans un tube, mobile autour de l'une de ses extrémités, dans un plan vertical. — Sur un problème analogue de mécanique, annoncé par Euler avec trop d'emphase et qui, selon J. B, n'est qu'un cas très particulier du théorème fort connu, relatif au mouvement gyratoire d'un corps ou d'un système de corps sur un plan horizontal. — Solution directe du probleme du mouvement d'un corps sollicité par une force dont la direction ne passe pas par le centre de gravité du corps. — Soupçons contre la justesse des expériences, rapportées par Daniel, dans son Hydrodynamique, relativement a la rétroaction des fluides. P. S. Recommandation du libraire-éditeur Bousquet.

Viro Celeberrimo atque Excellentissimo LEONHARDO EULERO S. P. D. JOH. BERNOULLI.

Etsi dolores ex adversa valetudine enati videantur aliquando inducias concedere, tam cito tamen recurrunt, ut continuo quasi filo aegrotandum mihi sit; Partem anni praeteriti cum alia parte hujus anni conjunctam in lecto transegi, quantam inde voluptatem perceperim, sc. facile judicabis. Defectus attentionis non permittit aliter respondere ad litteras Tuas d. 22. Sept. 1742 scriptas, quam obiter tantum eas perstringendo: De ancipiti statu Academiae Petropolitanae, de qua scribis, etiam relationes publicae varia nobis referunt, sed ita tamen ut spem relinquant, Academiam istam tandem iterum emersuram, fortassis invita Russorum machinatione; Hanc in rem legi non ita pridem in novellis Belgicis, Dnum Consil. Schumacherum, qui fuerat retentus, a retentione fuisse liberatum utpote innoxium deprehensum a peculii academici depraedatione imputata.

Gratum fuit intelligere, Serenissimum Regem vestrum tandem serio cogitare de Musarum domicilio exstruendo, sed cur tam sero? regeris continua itinera atque gravissima negotia impedimento esse quominus Rex majori festinatione in promovendis litteris ac scientiis utatur: admitterem excusationem, sed quî fit quod eadem non pariter impediverit promtissimam aedificationèm Palatiorum habendis comoediis aliisque spectaculis destinatorum? de quibus fert fama quod tam sint splendida, tam sumtuosa, ut plura centena millia florenorum eam in rem fuerint erogata: Utinam Musis contingeret sedem habere simili splendore ornatam!

Frequentes meae infirmitates corporis afficiunt quoque mentem usque adeo ut ei stuporem inducant qui non permittit examinare quae tanta subtilitate ratiocinaris de motu globi in tubo circa alterum suum terminum in plano verticali mobili descendentis; cum praesertim maximam et ut videtur praecipuam solutionis Tuae partem explicare omittas. Ob eandem rationem nolo negare quod addis contra meam solutionem, eam scilicet peccare contra conservationem virium vivarum, nisi fortassis apparentiam pro rei veritate sumseris: Sed suspendo judicium meum, donec me in statu deprehendam omnia minutatim explorandi; Interim si quid deferendum est auctoritati, fateor lubens Tuam apud me tantum habere pondus, quantum universus Mathematicorum orbis habere vix potest. Memini vero, Vir Excell., me Tibi proposuisse in litteris praecedentibus d. 27. Aug. 1742, in ipso fine, casum aliquem tubi omni materia carentis et sine annexo ullo corpore, sed in quo tubo duo plurave pondera et quidem in diversis distantiis a centro rotationis descendere incipiant pergantque; Dixi ex conjectura mihi videri, quod horum ponderum commune centrum gravitatis debeat descendendo describere lineam rectam verticalem, dum ipsa pondera singula describent totidem conchoides circa communem umbilicum qui erit in centro rotationis. Ad hunc autem casum, quod miror, ne verbum quidem reposuisti; forsan ideo, quia festinanter scribens litteras Tuas, nihil adhuc de eo determinatum habueras.

Quod attinet ad problema illud Tuum *de tubo circulari AOB* (utor Tua figura quam Te ad manus habere posse suppono, ego vero ob manuum tremorem delineare non possum) *in quo tubo gyretur corpus A sine frictione, ut ejus motus sit uniformis cum celeritate debita altitudini b*: ubi fingis *tubum circularem AOBA cujus pondus = M, et centrum gravitatis in ipsius centro C, primum super horizontali plano jacere fixum; subito autem dum corpus in A versatur, solvi tubum circularem a plano cui incumbit, ut super eo libere sine frictione moveri possit*; quae inde deducis non addo, — quod, inquam, attinet ad problema hoc, miror Te tam magnifice de eo sentire, ut illud vocare audeas *argumentum prorsus novum et adhuc intactum*, cum tamen nihil aliud sit quam casus particularis theorematis tritissimi de corpore vel systemate corporum plurium gyrando progrediente super plano horizontali, ubi id semper obtinetur ut commune centrum gravitatis totius systematis progrediatur in linea recta et quidem velocitate uniformi, dum interim reliqua puncta systematis describunt singula aliquam ex cycloïdibus sive ordinariam sive protractam seu contractam. Haec Te monere volui, Vir Celeb., ne Te praecipites protrudendo in publicum magna pompa rem quandam leviculam, quae ansam daret inimicis Tuis (nam et Tu tales habes, praesertim inter scurras Anglicanos qui omnes extraneos odio prosequuntur) carpendi indiscriminatim omnia Tua elegantissima inventa, atque hac occasione imprimis in Te torquendi Ciceronis proverbium *Laureolam in mustaceo quaerere.* Haec omnia quae Tibi hic scribo communicavi (Te ita volente) cum Filio meo, qui approbavit promisitque se ea Tibi prima scribendi occasione perscripturum, an steterit promissis a Te intelligam: Nihil autem in hoc casu singulari video, nisi quod tubus circularis $AOBA$ debeat moveri motu sibi semper parallelo, hoc est, meo loquendi more, moveri motu reptorio; verum hujus rei ratio statim manifesta est attendenti ad causam hujus motus, quae unice consistit in vi centrifuga corporis A, cujus directio perpetuo transit per C, centrum gravitatis tubi circularis; nosti interim corpus cujuscunque figurae, quod urgetur a potentia applicata in centro gravitatis, debere acquirere motum reptorium, qualemcunque demum describat curvam ipsum centrum gravitatis. Ecce nunc casum vulgarem systematis rotando progredientis eundem cum Tuo effectum habentis: Finge in plano horizontali bacillum AC primo quiescentem et oneratum in extremitatibus A et C duobus ponderibus, quorum illud $= A$, hoc vero $= M$; Concipe jam ponderi vel corpori A imprimi velocitatem $= \sqrt{b}$ in directione normali ad AC; Dico omnia heic evenire, quae in novo Tuo casu cum admiratione observas, scilicet pondus M describet cycloidem vulgarem $CMEc$, eandem illam quam Tu determinas, cujus nempe circulus genitor ENF

habet semidiametrum $EG = \frac{AC.A}{A+M}$; non autem observasti centrum G esse ab initio in communi centro gravitatis ponderum A et M, conformiter ei quod supra monui. Ex his vides novum hoc Tuum problema non esse tam mysteriosum quin ad rem tritam reduci possit: Interim fateor, si qnid mutetur in datis, fieri posse problema difficillimum forteque supra humanas vires; Ponatur ex. gr. tubus $AOBA$ non circularis sed ellipticus, cujus centrum gravitatis sit in ipso ejus centro C, manentibus reliquis datis ut posuisti, evadet sane problema in omnibus partibus solutu impossibile; excepto forsan hoc unico, quod punctum G seu commune centrum gravitatis ponderum A et M debeat hic etiam moveri celeritate uniformi in directione normali ad AC, quae celeritas hic iterum erit $= \frac{AC.A}{A+M}$; Scribo quidem haec dubitanter ex allucente quadam analogia, sed quod mihi non licet, in eo quo sum statu, accuratius inquirere, relinquo omnia incredibili Tuae sagacitati, quam nihil subterfugere potest.

Admitto solutionem Tuam directam problematis, quo quaeritur motus corporis sollicitati a vi, cujus directio non per ipsius centrum gravitatis transit; Dicis eandem illam jam reperiri in dissertatione Tua *Sur le cabestan*, sed illa dissertatio nondum impressa est, aut saltem ad manus meas nondum pervenit. Mea hujus problematis solutio comparebit in quarto tomo Opusculorum meorum, permissu meo Lausannae impressorum typis Dni Bousqueti, ex cujus manibus accipies meo nomine unum exemplar, quod rogo ut aequi bonique consulas, etsi nihil contineant isti tomi quod cum limatissimis Tuis meditationibus comparari mereatur: Exhibeo enim mathesin sublimem, qualis fuit in infantia, Tu vero eam nobis sistis in virili aetate. Ut redeam ad problema inveniendi centrum, ut voco, spontaneum rotationis in corpore sollicitato a vi, cujus directio non per ipsius centrum gravitatis transit: Cum primum hoc problema mihi proponeretur a Filio meo, illudque solvissem directe et indirecte; quaesivit porro, in quo haesitare videbatur, si corpus sollicitetur, non ab una tantum vi sed a pluribus viribus in diversis distantiis applicatis sibique invicem parallelis; statim respondi, si omnes istae vires colligantur in unam, haecque applicetur in earum centro gravitatis, oriri tunc casum simplicem et aequipollentem quaesito.

Nolo nunc aliquid Tibi regerere circa retroactionem fluidorum, stamus ut videtur in diversis principiis, ita ut mirum non sit, si quoque diversimode de re ipsa sentiamus: Id tantum monere convenit, non satis tuto recurri posse ad experimenta a Filio meo in suis Hydrodynamicis allegata, tam promte enim velocitas aquae effluentis ex vase ab initio mutatur, ut facillime in observando *quid pro quo* fieri credamus. Vale, Vir Excell., et mihi favere perge. Dabam Basileae d. . Martii 1743.

P. S. Si qua in re consilium Tuum imploraverit Dus Bousquetus, rogo ut ei Te exhibeas benevolum et ad officia paratum; est enim vir honestissimus, cui nihil magis in votis erit, quam ut ingenii Tui foetus ope sui praeli in lucem edere possit, utpote commercium habens cum omnibus fere totius Europae bibliopolis, praeterquam quod non parcit sumtibus, ut impressionem suam reddat venustam et gratam, sive spectes chartae nitorem, sive characterum elegantiam, sive ornamenta figurarum, omnia placent oculis.

LETTRE XIII*).

Sommaire. Plainte contre les infirmités croissantes de l'âge. — Remercîments de l'envoi de l'Artillerie de Robins et de la Théorie du mouvement des planètes et des comètes. — Expectoration contre les Anglais a l'occasion de la lecture du premier de ces ouvrages et surtout du problème ballistique. — Traité des Isopérimètres d'Euler et Commerce littéraire entre Leibnitz et J. B.

Viro Incomparabili Leonhardo Eulero, Mathematicorum Principi S. P. D. Joh. Bernoulli.

— — — — — — — — — — — — —

Deberem nunc etiam ex nostris mathematicis Tecum conversari, sed vix credideris si Tibi dico quam turmatim me obruant senectutis incommoda, quae et animi et corporis vires mirum quantum obtundunt; memoria namque tam labilis est ut vix revocare possim quae paulo ante cogitaveram, attentio item tam molesta fit mihi, ut malim non incipere meditationes quam easdem continuare non posse; praeterea

*) C'est la seule lettre, écrite d'une main étrangère, revue et corrigée cependant par l'auteur.

acies oculorum hebescit, membra corporis aegre peragunt functiones suas, tremor manuum vix mihi permittit calamum dirigere, et quod omnium est pessimum, tussis perpetua et pectoris oppressio me tantum non enecat, usque adeo scilicet respirationem reddit difficilem. At vero patientia vincit omnia.

Accepi nuper ex liberalitate Tua binos tractatus, unum scilicet qui agit de tormentis bellicis, et de viribus pulveris pyrii, alterum autem qui continet theoriam motuum Planetarum et Cometarum, pro quo duplici munere debitas Tibi gratias ago. Priorem horum librorum jam fere totum perlegi, ita tamen ut calculorum Tuorum bonitatem supposuerim, non vero per me calculando examinaverim, quia plerique nimis perplexi videbantur, quos adeo ob adversae valetudinis statum in me suscipere non audebam. Putasne autem Robinsium, utpote Anglum, posse intelligere annotationes Tuas germanice scriptas contra ipsius tractatum hac de re editum? Miror Tuam lenitatem et urbanitatem erga Robinsium, qui tamen de Te, de me et de omnibus non-Anglis scoptice loquitur, Te nimirum vocat, ut audio, *machinam mathematicam*, quasi non aliter ageres quam solet machina vi sacomatis coacta. Me vero scurriliter admodum perstrinxit, cum vires vivas adstruxissem in dissertatione mea gallica *Sur le mouvement.* Gratias vero ago, Vir Clariss., pro honorificis elogiis quibus me in hoc Tuo opere aliquoties cumulare voluisti. Quod interim attinet ad problema illud de invenienda curva, quam describit corpus grave projectum in medio resistente in duplicata ratione velocitatis, quod problema a Keillio mihi propositum fuerat, quamvis nec ab ipso Keillio nec ab alio quocunque Anglo, imo ne a magno quidem Newtono solvi potuerit: Erras autem quando pag. 64

solutori mihi hujus problematis in ampliori sensu sumti adjungis praeter Hermannum etiam Taylorum, a quo certe nullam usque invenies solutionem, imo ne umbram quidem solutionis alicujus; Ut dicam quod res est, credo hujus Tui erroris originem a me ipso esse profectam; ecce quomodo! Cum vellem Keillio provocanti vices reddere, responderam sine mora me compotem esse factum solutionis sui problematis, sed aequum esse ut antequam exhibeam in publicum meam solutionem, ipse quoque deponat suam solutionem ad manus Monmortii, cui ego meam etiam submiseram; aut si solvere non possit, ut impotentiam suam publice confiteatur: ad haec siluit Keillius, magis mutus quam piscis, nisi quod dixerit, non agi inter nos, uter nostrûm possit melius problemata solvere; cur ergo per viam problematum me prius tentare voluit, si ad talionem se non teneri credidit? Non diu post illum prodiit in scenam Taylorus, amicus familiaris Monmortii, cui per litteras persuadere volebat se invenisse aliquam solutionem sub hoc characterum involucro:

$$(r^4 - 1 + 4nr^2 + 4ur^2)$$

tectam, vid. tom. II. pag. 399 Opuscul. meorum. Ego tum temporis genium fastuosum et impudentissimum Taylori nondum cognoscens, credidi bona fide illum et ex animi sententia locutum fuisse quasi sub illa characterum expressione $(r^4 - 1 + \ldots)$ latitaret aliqua problematis solutio, quam esset publice expositurus, statim ac mea in lucem prodiisset; interim prodiit mea, sed nihil in hunc usque diem ab illo vidimus pro explicatione inepti sui involucri. Quo agendi modo facile patet, Thrasonem nostrum hoc suo fuco id tantum intendisse, ut aliquandiu nobis persuaderet se solum ex Britannica gente extitisse, qui resolvere potuerit nodum hunc Gordium, tametsi magno quoque Newtono insuperabilem, id quod postea impotenti Tayloro non sine sale fuit exprobratum, vid. Opusculorum meorum tom. II. pag. 498, ubi incipiunt verba *lepidum est te videre triumphantem* etc. Ante aliquod tempus bibliopola Bousquetus tradidit jussu Tuo, uti dixit, duobus meis filiis exemplar unum utrique libri Tui de Isoperimetris, rogatus vero annon fortassis alterutrum horum duorum exemplarium mihi potius, quam filio meo juniori, cum quo non adeo familiariter uteris, fuerit destinatum, respondit hanc fuisse voluntatem Tuam quam executus sit, Tuum est decidere, utrum Bousquetus mentem Tuam recte perceperit; Da quaeso veniam curiositati meae, ut si forte me fuisse dixeris, cui haec donatio fuisset tradenda, ego vicissim gratias agere possim. Prodiit hoc anno Commercium philosophicum et mathematicum in duobus tomis in 4°, quod mihi olim cum Leibnitio usque ad ejus mortem intercesserat. Nescio an aliquid Tua lectione dignum ibi sis reperturus; mittam tamen Tibi exemplar, si qua mittendi occasio sese obtulerit, id quod forsan fieri poterit per bibliopolam aliquem, qui ad nundinas paschales Lipsienses profecturus est, nisi forsan Tu mihi aliam promtiorem occasionem indicaveris. Vale et fave. Dabam Basileae d. 23. Sept. 1745.

LETTRE XIV.

Sommaire. Triomphe du principe des forces vives en France.

Mathematicorum Principi Leonhardo Eulero S. P. D.
Joh. Bernoulli.

— — — — — — — — — — — — —
— — — — — — — — — — — — —

Non memini, an Tibi jam perscripserim, Bousquetum tandem ad me quoque misisse Tuo nomine tractatum ingeniosissimum de solutione problematis isoperimetrici etc. Quicquid sit vel non sit, refero vel repeto gratiarum actionem, donec aliquid habeam quod remunerationis loco Tibi offerri dignum sit. Quod interim Bousquetus jussu meo ad Te miserit commercium epistolicum Leibnitium inter et me, gaudeo certe etiamsi insint in hac farragine multa quae hodie scribi non mererentur, *sunt bona mixta malis, sunt mala mixta bonis.*

Robinsonius ille Tuus sive, ut se vocabat, Robinsius ille meus, qui me olim sugillabat propter vires vivas a me defensas et demonstratas, indignus est ut cum eo nos metiamur. Nam jam ante 20 circiter annos, cum in dissertatione mea gallica *Sur le mouvement*, defendissem vires vivas easque geometrice demonstrassem in illa dissertatione pro praemio scripta, statim et ipsi judices meam dissertationem condemnarunt, quibus applauserunt quidam ex Anglis interque eos ipse Robinsius, qui omnium ineptissime simul et acerbissime mecum egit; sed, quod intolerabile fuit, adjudicarunt judices praemium duabus dissertationibus, hanc unam ob causam quia refutarunt (at quam belle sc.) vires vivas: Scripseram ego ad Dnum Demairan, qui unus fuit ex judicibus (viribus vivis maxime intensus) eique vaticinatus fui, tempus venturum, quo qui negaverint vires vivas, eos non minus exagitatum iri quam qui motum terrae vellent negare; id certe nunc hodie fit in Gallia; heic enim doctrina de viribus vivis primum subiit martyrium, dum judices Galli condemnarunt eam a me assertam in dissertatione pro praemio, praeferentes duas alias non aliam ob causam quam quia ineptissime refutabant vires vivas, sicuti jam dixi. Possem itaque summo jure petere restitutionem in integrum, sed nolo movere camarinam.

Quod superest rogo ut illustri vestro Praesidi Maupertuisio plurimam dicas salutem, ad eum utique darem etiam litteras, nisi ad anteriores ad ipsum datas etiamnum responsum expectarem. Vale, Vir Clarissime et amicissime, meque amare perge. Dabam Basileae a. d. 24. Maj. 1746.

CORRESPONDANCE

ENTRE

NICOLAS BERNOULLI

fils aîné de JEAN

(né le 27 janvier v. st. 1695, mort le 26 juillet 1726).

ET

CHRÉTIEN GOLDBACH

1721 — 1725.

Correspondance mathématique et physique. Tome II page 97.

Fac-simile de l'écriture de Nicolas Bernoulli Joh. F. 1721.

Vir Clarissime

Epistolam hanc ex Rure ad te mitto, quo paucis diebus post tuum ab Urbe Veneta discessum me contuli cum Illustr. Comite Vezzi, crastina die cum eo iter prosecuturus ad acidulas Solisvallenses quadraginta circiter milliaribus italicis ultra Tridentum sitas. Recte se habent quæ mecum communicasti circa æquationem ab Illustr. Com. Riccato propositam $ax^m dx + byydx = dy$ Ad stuporem usque miratus sum profundam sagacitatem, cujus ope in re per biduum tibi nota tam arduum eruisti inventum. Etsi enim (ut jam monui, et ipsemet facile observabis) tua qua usus es argumentandi ratio non conducat ad optatam indeterminatarum separationem, exhibet tamen curvas algebraicas quæ propositæ æquationi differentiali satisfaciunt. Si bene meministi, Patrem aliquid huic simile reperisse asseveravi; evolutis postea scriptis meis idem plane illud esse compertus sum; en verba ejus quæ ad Agnatum Patavii tunc temporis commorantem scripsit: Es ist ein casus in welchem die æquatio ab Illustr. Riccato proposita $as^m ds + bu^q s^p ds = du$ (quæ eadem est ac tua generalior $ay^{f} x^m dx + by^n x^p dx = dy$, si f ponatur $= 0$) ad algebraicam kan reducirt werden.

Vale meque amare perge

Dabam a.d. 16. Julij 1721.

Tui Studiosissimum

Nicolaum Bernoulli.

Lith. par Davignon

LETTRE I.

GOLDBACH à N. BERNOULLI.

=

SOMMAIRE. Sur l'équation du Comte Riccati.

Patavio Junio 1721.

Non solum semper magna cum voluptate recordabor me paucarum horarum spatio plurimum a Te didicisse, sed etiam in id incumbam sedulo ut ne officium Tuum in negligentem ingratumve cecidisse videatur. Tractavi nuper aequationem $ax^m dx + by^2 x^p dx = dy$, in qua dicebas Illustr. Comitem Riccatum invenisse $m = -3p - 4$, quod tamen si examinaveris non succedat, nisi loco y^2 ponatur $y^{\frac{4}{3}}$ *). Invenio enim paulo generalius si fuerit

$$a y^f x^m dx + b y^n x^p dx = dy$$

*) Emendatur epistola sequente. G.

rationem y ad x erui posse quoties $m = \frac{fp+f-p-n}{n-1}$, scilicet determinata quantitate c per aequationem hanc $b c^n + a c^f + \frac{(p-m)c}{n-f} = 0$, fit $y = c x^{\frac{-p-1}{n-1}}$, ideo in casu aequationis a Riccato consideratae, ubi $f=0$, $n=2$, requiritur $m = -p-2$; determinato denique c per aequationem $b c^2 + \frac{cp-cm}{2} = 0$, fit $y = \left(\frac{-(p+1)}{2b} \pm \left(\left(\frac{p+1}{2b}\right) - \frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}\right) x^{-p-1}$.

Vale, meque amare perge Tui studiosissimum

Goldbach.

LETTRE II.

N. Bernoulli à Goldbach.

Sommaire. Sur le même sujet. Extrait d'une lettre de Jean Bernoulli. — Expérience de Riccati sur les cordes sonnantes.

Ex rure a. d. 16. Julii 1721.

Vir Clariss., Epistolam hanc ex rure ad Te mitto, quo paucis diebus post Tuum ab urbe Veneta discessum me contuli cum Illustr. Comite Vezzi, crastina die cum eo iter prosecuturus ad acidulas Solisvallenses quadraginta circiter milliaribus italicis ultra Tridentum sitas. Recte se habent quae mecum communicasti circa aequationem ab Illustr. Com. Riccato propositam $ax^m dx + byydx = dy$. Ad stuporem usque miratus sum profundam sagacitatem, cujus ope in re per biduum Tibi nota tam arduum eruisti inventum. Etsi enim (ut jam monui, et ipsemet facile observabis) Tua qua usus es argumentandi ratio non conducat ad optatam indeterminatarum separationem, exhibet tamen curvas algebraicas, quae propositae aequationi differentiali satisfaciunt. Si bene meministi, Patrem aliquid huic simile reperisse asseveravi, evolutis postea scriptis meis idem plane illud esse compertus sum. En verba ejus quae ad Agnatum Patavii tunc temporis commorantem scripsit: „Es ist ein casus, in welchem die aequatio ab Illustr. Riccato proposita

$$a\,s^m\,d\,s + b\,u^q\,s^p\,d\,s = du$$

(quae eadem est ac Tua generalior $ay^f x^m dx + by^n x^p dx = dy$, si f ponatur $= 0$) ad algebraicam kann reducirt werden. Ich sage dann, dass in dem casu secundo separabilitatis a Riccato memorato, quando nimirum $m = \frac{p+q}{1-q}$ (tum enim pro sua aequatione nondum infinitos separabilitatis casus invenerat, sed solos hos quatuor 1. quando $q = 1$, 2. quando $m = \frac{p+q}{1-q}$, 3. quando $m = -1$ et $q = \frac{1}{2}$, 4. quando $m = -3p-4$ et $q = 2$) die differentialia nicht nur separabilia seyn, sondern die curva, cui respondet aequatio, könne eine curva algebraica seyn, deren aequatio diese ist: $\pi\, s^{\frac{1+p}{1-q}} = u$, allwo π gleich ist der radici dieser Aequation

$$b\,\pi^q + \frac{p+1}{q-1}\,\pi + a = 0.\text{“}$$

Doleo quod epistolam Tuam Venetiis per oblivionem reliquerim; Tuum itaque erit investigare utrum haec cum Tuis conveniant. Caeterum quomodo separatio indeterminatarum ad aequationem differentialium constructiones per quadraturas curvarum conducat, opportuniori loco et tempore, si cupis, explicabo. Invenisti procul dubio, quae Pater de separatione indeterminatarum publicavit anno, ni fallor, 1697. p. 115. Viam haec Tibi sternere possent ad indagandos separabilitatis casus infinitos ab Illustr. Riccato inventos. Quod ad me attinet, ex eo tempore, quo nos reliquisti, nihil adhucdum profeci in hac materia. Si eorum, quae in discessu Tuo promiseras, prima data occasione recordaberis, mirum quantum me obstringes, quotidie enim nova sese mihi praebent invitamenta has regiones cum Germania, si daretur, mutandi.

Vale, meque amare perge Tui studiosissimum

Nic. Bernoulli.

P.S. Ne pagina haec in totum vacua ad Te perveniat, transcribam excerptum ex Nob. Riccati litteris 29. Junii ad me datis, experimentum curiosissimum referens de chordis sonoris. Ecce ejus verba: „Dubito, inquit, d'una asserzione del fu Sgr. Jacopo Bernoulli in una sua famosa dissertazione registrata nelle memorie dell' Accademia Reggia di Parigi dell' anno 1715 pag. 231 dell' edizione d'Olanda. Nel lemma 3° egli cosi s'esprime „„Il en doit être de même des extensions des fibres etc.““ E pregata VS. vedere il luogo con l'esperienza registrata nell' annesso scolio. Jo replicandola varie volte in corde di materia diversa e di differente lunghezza, spesso ho trovato vero il detto di cosi Celebre auttore, ma frequentemente l'esperienza mi mostrava tutto all' opposto, cio è che attacando allo stesso nervo è corda i pesi crescenti (notes velim haec verba) in proporzione aritmetica, la distensione cagionata dal secondo peso era talora maggiore di quella prodotta dal primo, e cosi quella del terzo rispetto all' altra fatta dal secondo. Aggiungendo pero sempre nuovi pesi uguali sino al spezzarsi della fune, le distensioni che andavano sino ad un certo segno crescendo tornavano poi con ordine inverso a calare." Rescripsi ad haec, tam mirabile mihi videri hoc experimentum opinionique primum obviae tam contrarium, ut si justum sit, dubitem imposterum ulli axiomati physico niti. Tuam, Vir Claris., et Celeberrimi Hermanni hac de re sententiam scire percuperem, unde rogo ut haec cum eo communicare ac Virum meo nomine salutare haud graveris. Iterum vale.

LETTRE III.

GOLDBACH à N. BERNOULLI.

SOMMAIRE. Sur les mêmes sujets.

Vindobonae d. 30. Julii 1721.

Redditae mihi fuere nudius tertius litterae Tuae primae quibus vehementer gavisus sum, cum viderem qualiacunque cogitata mea cum iis, quae dudum a Celeberrimo Parente Tuo tradita fuerant, conspirare, quod si enim, ut ipse vidisti, pro f in mea formula ponatur 0, reliqua omnino eadem reperio. Dixeram in primis meis non procedere casum Ill. Riccati, ubi $m = -3p - 4$, sed hoc utique limitandum est; non procedit ea via quam iniveram, sed optime procedit, si alia via eligatur, ut mox dicam. In verbis illis Clar. Parentis Tui: „Es ist ein casus etc.“ observo intelligi debere casum *aliquem*, non autem *unicum*, cum revera plures uno, imo omnes quatuor casus Ill. Riccati (quamvis tertius non sit nisi casus particularis secundi $m = \frac{p+n}{1-n}$, posito $n = \frac{1}{2}, p = -1$) admittant aequationes ad curvas algebraicas. Scilicet resumendo aequationem $ax^m dx + by^n x^p dx = dy$, pro casu primo, ubi $n = 1$, si fiat $p = -1$, invenio $y = \frac{a}{m-b+1} x^{m+1} + f x^b$, ubi f notat quantitatem constantem quamcunque. Pro casu quarto, ubi $n = 2$, $m = -3p - 4$, fit

$$y = \left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} x^{-2p-2} - \left(\frac{p+1}{b}\right) x^{-p-1};$$

et praeterea si $n = 2$, $m = \frac{-p-4}{3}$, fit

$$y = \frac{1}{\left(\frac{-b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{2p+2}{3}} - \left(\frac{p+1}{3a}\right) x^{\frac{p+1}{3}}}.$$

Occasione experientiae ab Ill. Riccato factae sic ratiocinatus sum: Concipiatur (fig. 4) lamina quaecunque elastica CD incurvata usque in B appenso pondere A. Ut porro incurvetur versus E, requiritur novum pondus F addendum ad A, quod pondus F tam magnum esse debet, ut gravitate sua versus E superet renitentiam laminae CD, qua sc. resistit tensioni a B versus E. Quotiescunque igitur contingit gravitatem additamenti illius F minorem esse quam requiratur ad superandam renitentiam laminae a B versus E, cum mutato pondere appenso necessario etiam mutari debeat figura laminae, mutatio ista degenerabit in descensum negativum, hoc est, in ascensum (quamvis nonnunquam insensibilem) a B versus G. De negotio quod scis, jam ad amicum aliquem generatim scripsi, plus praestiturus quam primum licuerit, Tu modo eam rem mihi curae futuram ne dubita. Quod superest, oro Te, cum ad. Celeb. Parentem Tuum et Consobrinum scribes, me utrique quam potes maxime commendes. Vale. — Nondum legi quae in Actis Erud. A. 1697 de separatione indeterminatarum publicata sunt, spero tamen magnam inde lucem mihi orturam. Goldbach.

LETTRE IV.

N. Bernoulli à Goldbach.

Sommaire. Annonce la solution complète du problème de Riccati et engage G. à l'essayer aussi.

Venetiis a. d. 30. Augusti 1721.

Hesterna die ex acidulis Venetias redux, hodie mane mihi traditae fuere litterae Tuae Vindobonae 30. Julii datae, ex quibus summo cum gaudio vidi egregia illa, quae circa aequationem Riccatianam invenisti, quae etsi ob temporis brevitatem examinare nondum licuerit, credidi tamen e re fore responsorias hasce non differre, ne quum Lipsiam pervenient, Te ab illa urbe profectum reperiant, ante omnia consideraturus quando per otium licebit. Interim certiorem Te volo, me problema Riccatianum in totum solvisse, prout propositum erat, quare si et Tu rem tentare velis, rem mihi gratam Tibique jucundam efficies. Caeterum gratias Tibi debeo maximas, quod rem meam Tibi curae fore promittas, Tu modo summam officii partem in promtitudine positam esse considera. Vale et amare perge Tui observantissimum

Nic. Bernoulli.

LETTRE V.

GOLDBACH à N. BERNOULLI.

=

SOMMAIRE. Continuation sur l'équation et l'expérience de Riccati.

Dresdae d. 11. Septbr. 1721.

Non dubito quin redditae Tibi sint quas Vindobona dedi. In iis pro aequatione III. Riccati $ax^m dx + by^n x^p dx = dy$ praeter casum jam antea commemoratum, ubi $m = \frac{p+n}{1-n}$, tres alios dedi, quibus aequatio fieret ad curvam algebraicam, videlicet si $n = 1$, $p = -1$, vel si $n = 2$, $m = -3p-4$, vel denique si $n = 2$, $m = \frac{-p-4}{3}$. Deinde vidi y posse reduci ad x infinitis modis dato pro m numero quocunque, id quomodo invenerim nemini libentius quam Tibi dicam, a quo nisi calculum differentialem didicissem, haec omnia haud dubie ignorarem.

1) Pono $y = cx^e + fx^{e+k} + gx^{e+2k} + hx^{e+3k} +$ etc., in qua sint c, e, f, k etc. quantitates constantes nondum cognitae.

2) hanc seriem methodo jam ab aliis tradita elevo ad potestatem n, ut fiat $y^n = \alpha x^{en} + \beta x^{en+k} + \gamma x^{en+2k} + \delta x^{en+3k} +$ etc., ubi α, β, γ etc., sunt determinatae per c, f, g etc.

3) his valoribus in ipsam aequationem substitutis divisaque eadem per dx, fit

$$\underset{(I)}{ax^m}+\underset{(II)}{\alpha b x^{en+p}}+\underset{(III)}{\beta b x^{en+p+k}}+\underset{(IV)}{\gamma b x^{en+p+2k}}+\text{etc.}=$$

$$\underset{(I)}{cex^{e-1}}+\underset{(II)}{f(e+k)x^{e+k-1}}+\underset{(III)}{g(e+2k)x^{e+2k-1}}+\underset{(IV)}{h(e+3k)x^{e+3k-1}}+\text{etc.}$$

4) facio singulos terminos seriei unius aequales singulis terminis seriei alterius, unde fit

I. $ax^m = cex^{e-1}$, ergo $e = m+1$, $c = \frac{a}{e}$.

II. $k = en+p-e+1$, f vero determinatur per $f = \frac{ab}{e+k}$.

III. g determinatur per $\frac{\beta b}{e+2k} = g$.

IV. h determinatur per $h = \frac{\gamma b}{e+3k}$ et sic reliquae.

5) Omnes hi valores substituti in seriem $cx^e + fx^{e+k} +$ etc. expriment valorem y per x. Sit ex. gr. $n = 1$, fiet $\alpha = c$, $\beta = f$, $\gamma = g$ etc. Igitur I. $e = m+1$, $c = \frac{a}{e} = \frac{a}{m+1}$.

II. $k = p+1$, $f = \frac{ab}{e+k} = \frac{cb}{e+k}$.

III. $g = \gamma = \frac{\beta b}{e+2k} = \frac{fb}{e+2k}$.

IV. $h = \delta = \frac{\gamma b}{e+3k} = \frac{gb}{e+3k}$.

etc.

Itaque $y = \frac{a}{e}x^e + \frac{cb}{e+k}x^{e+k} + \frac{cb^2}{(e+k)(e+2k)}x^{e+2k} +$
$\frac{cb^3}{(e+k)(e+2k)(e+3k)}x^{e+3k} +$ etc.

vel $y = \frac{a}{m+1}x^{m+1} + \frac{ab}{(m+1)(m+p+2)}x^{m+p+2} +$
$\frac{ab^2}{(m+1)(m+p+2)(m+2p+3)}x^{m+2p+3} +$ etc.

Si data esset $n=2$, fieret

$$y^n = c^2 x^{2e} + 2cf x^{2e+k} + (2cg+f^2) x^{2e+2k} + (ch+2fg) x^{2e+3k} + \text{etc.}$$

ergo $\alpha = c^2$, $\beta = 2cf$, $\gamma = 2cg + f^2$ etc.

Ergo I. ut supra $e = m+1$, $c = \frac{a}{e} = \frac{a}{m+1}$.

II. $k = e + p + 1$ et $f = \frac{ab}{e+k} = \frac{c^2 b}{e+k}$.

III. $g = \frac{\beta b}{e+2k} = \frac{2b^2 c^3}{(e+k)(e+2k)}$.

IV. $h = \frac{\gamma b}{e+3k} = \frac{b(2cg+f^2)}{e+3k}$.

$$\text{Ergo } y = \frac{a}{m+1} x^{m+1} + \frac{a^2 b}{(m+1)^2 (2m+p+3)} x^{2m+p+3} + \frac{2a^3 b^2}{(m+1)^3 (2m+p+3)(3m+2p+5)} x^{3m+2p+5} + \frac{(11m+6p+17) a^4 b^3}{(m+1)^4 (2m+p+3)^2 (3m+2p+5)(4m+3p+7)} x^{4m+3p+7} + \text{etc.}$$

Caeterum hac eadem methodo quantitates variabiles etiam in aequatione generaliori $a y^f x^m dx + b y^n x^p dx = dy$ et infinitis aliis intricatioribus separari posse certum est. Vale.

Mentem meam de experimento III. Riccati melius fortasse sic expressissem: Quoniam aucto pondere A augetur in lamina vis sese restituendi versus G, nihil obstat quin aliquando ita augeri possit pondus A, ut per sollicitationem ad descensum, quae fit ab augmento F ponderi A adjecto, adeo augeatur in lamina elastica conatus sese restituendi versus G, ut hoc augmentum ipsius conatus tollat integrum pondus A cum augmento F, quod etsi rarius fiat, tamen contingere potest, si lamina jam ante a pondere A valde tensa fuerit et modicum sit augmentum F.

Goldbach.

LETTRE VI.

N. Bernoulli à Goldbach.

=

Sommaire. Continuation sur les mêmes sujets.

Ex rure a. d. 15. Septbr. 1721.

Paucis diebus post exaratas ad Te postremas meas per aliquot tempus Venetias relinquens iterum huc me contuli, ubi statim vita rustica tempus et otium mihi praebuit ad penitiorem considerationem eorum, quae mihi perscripsisti de aequationibus algebraicis formulae $ax^m dx + byyx^p dx = dy$ (quae ea est, de qua nunc praecipue agitur) satisfacientibus, nec prorsus sine successu, cum praeter casus a Te memoratos modum invenerim peculiarem alios quot libuerit reperiendi et pro eis aequationem algebraicam assignandi. Unicum casum afferam, quando nimirum $m = \frac{-5p-8}{3}$, quo in casu formulae satisfaciet haec aequatio

$$y = \frac{x^{-2p-2} + \frac{p+1}{-b} x^{\frac{-5p-5}{3}} \sqrt{\frac{b}{-a}} + \frac{(p+1)^2}{-3ab} x^{\frac{-4p-4}{3}}}{x^{\frac{-2p-2}{3}} \sqrt{\frac{b}{-a}} + \frac{p+1}{3a} x^{\frac{-p-1}{3}}}$$

quae, sicut omnes a Te exhibitae, algebraicae erunt, quotiescunque p erit numerus rationalis.

Alios adhuc praeter hunc adducere liceret casus cum suis aequationibus, nisi calculi nimia prolixitas hucusque a plenaria rei executione me absterruisset. Tibi ergo, Vir Clariss., quae restant peragenda relinquo si tantillum temporis in horum ulteriori examine impendere velis. Nondum haec cum Com. Riccato communicare licuit, spero tamen, ubi viderit, ei non displicitura, nec scio an primo intuitu mysterium detegere facile poterit.

Habent quidem secundus et tertius Riccati casus, de quibus dicis, casum particulariorem inter se communem, sed si attentim rem perpendas neutrum neutrius casum particularem esse deprehendes. Quae scribis de lamina elastica non satis capio, nec assequor quam relationem habeant cum eis, quae Tecum communicavi circa chordam a diversis ponderibus perpendiculariter tensam, quare rem melius intelligere cuperem. Vale.

Nic. Bernoulli.

LETTRE VII.

N. Bernoulli à Goldbach.

=

Sommaire. Continuation sur l'équation Riccati et critique de la méthode de Goldbach.

Venetiis a. d. 10. Octb. 1721.

Rite quidem sed tarde, sub initio nimirum hujus hebdomadae, accepi ultimas Tuas Dresdae datas, quibus perlectis collegi nondum tunc temporis ad manus Tuas pervenisse epistolam meam, quam 30. Augusti ad Te exaraveram, ut (quod recens tunc ex acidulis redux ob brevitatem temporis unum poteram) litteras Tuas Vindobonae datas traditas mihi fuisse significarem. Postea vero tempus et otium nactus ruminari incepi quaedam, quae ex occasione eorum, quae mihi de aequationibus algebraicis formulae Riccatianae in casibus diversis satisfacientibus communicaveras, in mentem venerunt, et quae invenire contigit per postremas meas ruri conceptas

Tibi indicavi. Ambas, ad D. Mascou Lipsiam directas, Te nunc accepisse spero me brevi intellecturum.

Elegentia admodum et acuta plane sunt quae scribis de serie valorem ipsius y in formula $ax^m dx + by^n x^p dx = dy$ exprimente, et probe mones hanc methodum generalem esse, quae ad infinitos alios casus intricatiores applicari queat, sed dolendum est quod nova non sint; modos enim transformandi aequationes differentiales in series, vel per elevationem ad potestates, vel per divisionem continuam, a plurimis hinc inde in usum vocatos videmus. Caeterum quod series Tuas in specie concernit, non nihil difficultatis mihi movet modus, quo aequales efficere contendis illam, quae oritur ex substitutione valoris ipsius y^n in termino $by^n x^p dx$ additam termino $ax^m dx$, et illam, quae prodit ex differentiatione seriei valorem ipsius y per hypothesin exprimentis. Ut clarius me explicem, rem altius repetam. Ponis

$$y = c\,x^e + f\,x^{e+a} + g\,x^{e+2a} + h\,x^{e+3a} + \text{etc.}$$

ex quo, ut bene dicis, oritur

$$y^n = \alpha x^{en} + \beta x^{en+a} + \gamma x^{en+2a} + \delta x^{en+3a} + \text{etc.}$$

ubi $\alpha, \beta, \gamma,$ etc. erunt determinatae per $c, f, g,$ etc. His valoribus in formula proposita substitutis omnibusque divisis per dx, emerget haec series

$$ax^m + \alpha\,bx^{en+p} + \beta\,bx^{en+p+a} + \gamma\,bx^{en+p+2a} + \text{etc.}$$

Differentiata vero serie pro y assumta et divisa itidem per dx, prodit haec altera

$$cex^{e-1} + f(e+a)x^{e+a-1} + g(e+2a)x^{e+2a-1} + h(e+3a)x^{e+3a-1} + \text{etc.}$$

Aequas porro, ut hae duae series aequales evadant et hoc modo formulae satisfiat, singulos terminos unius cum singulis alterius, quod quidem recte fieret si hinc inde termini essent numero aequales, sed cum prioris seriei multo copiosiores sint termini quam porterioris, utpote aucti per elevationem ad potestatem n, mihi videtur fore ut exhaustis hujus seriei terminis, superessent in illa qui cum quibus aequari possint non invenirent. Rogatum igitur Te velim, ut scrupulum hunc, si forte mentem Tuam non bene assecutus fuerim, mihi tollere haud graveris.

Ex scheda postremis Tuis juncta intellexi summa cum voluptate quantum res meae Tibi cordi sint. Te vicissim persuasum cuperem me, quum dabitur occasio, totis viribus conaturum ut cum fructu Tibi inservire possim. Vale.

Nic. Bernoulli.

P. S. Circa experimentum a Riccato instructum alia vice fortassis scribendi ansa dabitur.

LETTRE VIII.

GOLDBACH à N. BERNOULLI.

SOMMAIRE. Continuation sur les mêmes sujets.

Lipsiae d. 23. Octobr. 1721.

Redditae mihi sunt litterae 30. Aug. Venetiis et ruri 15. Sept. ad me datae, quibus pulcherrime a Te observatum video, quod ego de duobus tribusve casibus affirmaveram extendi ad infinitos alios posse, id enim statim conspecto quod mecum communicas exemplo animadverti ac sine magno labore judicavi aequationem ad curvam algebraicam in hac $ax^m dx + by^2 x^p dx = dy$ obtineri posse quoties $m = \frac{-ap-a-\beta}{\beta}$, si I. p fuerit numerus rationalis; II. α et β numeri integri, affirmativi, impares; III. α non sit minor quam $\beta - 2$, nec major quam 3β, cujus canonis veritatem exemplis quotlibet, si opus esset, confirmarem. Incidi etiam in theorema valorem quemcunque ipsius y (expressum per x et constantes a, b, p) commutandi in alium, qui tot habeat diversas potestates ipsius x in numeratore, quot prior habet in denominatore et ex converso. Scilicet, si (I) pro p substituatur valor ipsius m determinatus per p et constantes; (II) pro a substituatur b, et pro b substituatur a; (III) ex numeratore fiat denominator, et contra. Sic valor y a Te inventus pro $m = \frac{-5p-8}{3}$

$$\frac{x^{\frac{-5p-5}{3}} + \left(\frac{p+1}{-b}\right)\left(\frac{b}{-a}\right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{-4p-4}{3}} + \frac{(p+1)^2}{-3ab}\, x^{-p-1}}{\left(\frac{b}{-a}\right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{-p-1}{3}} + \frac{p+1}{3a}}$$

transformabitur in hunc

$$\frac{\left(\frac{a}{-b}\right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{-5p-5}{9}} - \left(\frac{5p+5}{9b}\right)}{x^{\frac{25p+25}{9}} + \frac{5(p+1)}{3a}\left(\frac{a}{-b}\right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{20p+20}{9}} - 25\,\frac{(p+1)^2}{27ab}\, x^{\frac{5p+5}{3}}}$$

qui erit valor ipsius y, posita $m = \frac{-3p-8}{5}$. Ita ut quaelibet alia formula suam quasi sororem habeat excepta $m = -p-2$, ubi coincidunt.

Credo ad Te pervenisse epistolam 11. Sept. Dresdae scriptam qua planissime explicavi methodum a me forte inventam separandi quantitates variabiles in aequatione Riccatina generaliore, ubi est y^n dato pro m numero quocunque, antequam accepissem litteras Tuas, quae me ad idem, quod Tibi jam successerat investigandum hortabantur, methodosque nostras non multum differre arbitror. Quod haec cum Ill. Comite Riccato Te communicaturum scribis gratum fuit intelligere, sed multo magis opto ut judicium Celeb. Patris Tui subeant, quodsi enim ille in his eruendis nos utrosque non

*

omnino inutilem operam insumsisse censuerit, ad alia, quae in eadem aequatione adhuc restare videntur inquirenda magnopere incitabor. Vale.

Goldbach.

P. S. In chorda duas qualitates plane diversas considero, alteram, qua se patitur extendi (quam vocabo *extensivam* ortam ex ductilitate materiae), alteram, qua se conatur restituere seu contrahere, quam vocabo *contractivam*, ortam ex elasticitate fibrarum quibus constat. Si jam (fig. 5.) ponatur chorda A in tantum extensa per pondus appensum B, ut, si adhibita vi porro extendatur, rumpi debeat, h. e. ut porro extendi non possit, adeoque exhausta sit illa qualitas extensiva, non propterea sequitur exhaustam quoque esse qualitatem alteram contractivam (cum haec ab extensiva nullo modo pendeat, sed, ut dixi, diversae originis sit), itaque si ponderi B modicum aliquod augmentum C adjiciatur, non necesse erit chordam rumpi, sed poterit gravitati illius augmenti C sufficienter resisti per reliquum conatus contractivi, quem ponimus nondum exhaustum fuisse, ita ut ipsa chorda hoc pacto minus extensa majus pondus sustineat.

LETTRE IX*).

GOLDBACH à N. BERNOULLI.

SOMMAIRE. Réponse à la lettre 7ème

Dresdae d. 27. Octobr. 1721.

Jam has Lipsiae nundinarum tempore scripseram, cum Tuae mihi hodie redduntur, quibus perlectis gavisus sum Tibi placuisse methodum, qua ad determinandum y per x et constantes usus eram; novam non esse facile credo, mihi vero tunc nova nulloque monstrante inventa fuit. Mirum est Ill. Riccatum hanc methodum jam aliunde notam non elegisse, qua tamen, praeter quatuor casus tunc inventos, subito infiniti alii sese obtulissent. Certum est y^n pluribus constare terminis quam y, si utrumque per diversas potestates ipsius x, sed finito terminorum numero exprimatur, hoc vero ad nostrum casum, ubi utrumque exprimitur per terminos in

*) Annexée à la lettre précédente

finitos, non pertinet, quoniam in alterutra serie nullus poterit dari terminus, cui non possit, methodo illa, assignari in altera terminus aequalis; igitur cum singuli series utriusque termini aequales sint, series ipsas aequales esse constat.

Quae de differentia casus Riccatini secundi et tertii mones tam vera sunt ut mirer quomodo non viderim, ideoque rogo ut illam oscitantiam meam excuses. Vale.

Goldbach.

LETTRE X.

N. Bernoulli à Goldbach.

=

Sommaire. Continuation. Réponse aux deux lettres précédentes.

Ex rure d. 6. Decemb. 1721.

Quod meditationes meae in formulam $ax^m dx + byyx^p dx = dy$ ansam Tibi dederint ad ejus penitiorem considerationem laetus ex postremis Tuis intelligo, eoque magis gaudeo, quod diversa repererim, quae circa hanc materiam mihi perscribis ab iis quae mihi detegere contigit, ita ut magnum emolumentum ex horum mutua collatione sperare liceat. Dicis aequationem ad curvam algebraicam in formula proposita obtineri posse quoties $m = \frac{-\alpha p - \alpha - \beta}{\beta}$ si 1° p fuerit numerus rationalis, 2° α et β numeri affirmativi impares, 3° si α non sit minor quam $\beta - 2$ nec major quam 3β, ego vero aequationem algebraicam dictae formulae satisfacientem assigno quoties $m = \frac{-2np - 4n \pm p}{2n \pm 1}$, ubi per p itidem intelligo numerum rationalem, per n vero quemvis integrum sive parem, sive imparem, affirmativum vel negativum. Quomodo hi nostri canones differant facile ipse videbis. Sic ex. gr. si in Tuo ponatur $\alpha = 7$ et $\beta = 3$ (quae hypothesis conditionibus a Te requisitis convenit, cum ambo numeri sint integri et affirmativi, ac praeterea α seu 7 non sit minor quam $\beta - 2$ seu 1, nec major quam 3β seu 9) fiet $m = \frac{-7p-10}{3}$, qui casus in meo canone non continetur. Quodsi igitur aequationem algebraicam huic casui satisfacientem una cum methodo Tua mihi significare dignaberis, rem mihi gratissimam ac officio reciproco demerendam praestabis. Caeterum convenirent hi nostri canones, si α et β numeros impares binario differentes constituisses. Animadvertendum quoque praeter necessitatem a Te exigi ut α et β sint numeri affirmativi, sufficit enim utrosque esse vel simul affirmativos, vel simul negativos, quia valor fractionis non alteratur si signa tam numeratoris quam denominatoris mutentur. Sic ex. gr. idem proveniet sive α et β respective $+7$ et $+3$, sive -7 et -3 ponantur; in priori enim casu prodit fractio jam memorata $\frac{-7p-10}{3}$, in posteriori vero $\frac{+7p+10}{-3}$, quae in totum priori aequalis est, et sic de caeteris.

Perquam acute observasti theorema cujus ope valorem quemvis ipsius y expressum per x et constantes commutare licet in alium. Quod si enim (ut Tibi, cum Venetiis esses, si meministi, indicavi) formula $ax^m dx + byyx^p dx = dy$, ponendo $y = \frac{1}{z}$ et multiplicando postea per zz, mutetur in hanc sibi similem $-bx^p dx - azzx^m dx = dz$, liquet 1° pro z in hac posteriori formula inveniri valorem in x et constantibus expressum eodem modo, quo in priori inveniebatur ipsius y; cum enim formulae, tam proposita quam ex ea deducta, in totum sibi similes sint, patet quod substituendo in valore ipsius y pro m ipsum p et vicissim, sicut etiam pro a ponendo $-b$, et vice versa pro b surrogando $-a$, proditura sit alia expressio, quae valorem ipsius z in x et constantibus designabit; 2° manifestum est quod valor ipsius z satisfaciet etiam formulae propositae si retrogrado ordine pro z resubstituatur $\frac{1}{y}$, ita ut hoc modo ortura sit alia aequatio inter y et x ac constantes, quam prioris sororem aequo jure appellas. Ut melius mentem meam explicem, rem exemplo dilucidabo. Ponamus casum de quo locuti sumus, nimirum $m = \frac{-5p-8}{3}$, ubi invenimus aequationem formulae propositae satisfacientem esse

$$y = \frac{x^{\frac{-6p-6}{3}} + \frac{p+1}{-b}\, x^{\frac{-5p-5}{3}} \sqrt{\frac{b}{-a}} + \frac{(p+1)^2}{-3ab}\, x^{\frac{-4p-4}{3}}}{x^{\frac{-2p-2}{3}} \sqrt{\frac{b}{-a}} + \frac{p+1}{3a}\, x^{\frac{-p-1}{3}}}$$

adeoque per eandem rationem si in posteriori formula ponatur $p = \frac{-5m-8}{3}$, satisfaciet ei haec aequatio

$$z = \frac{x^{\frac{-6m-6}{3}} + \frac{m+1}{a}\, x^{\frac{-5m-5}{3}} \sqrt{\frac{-a}{b}} + \frac{(m+1)^2}{-3ab}\, x^{\frac{-4m-4}{3}}}{x^{\frac{-2m-2}{3}} \sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{m+1}{3b}\, x^{\frac{-m-1}{3}}}$$

seu ponendo pro z et m eorum valores $\frac{1}{y}$ et $\frac{-3p-8}{5}$, haec altera

$$\frac{1}{y} = \frac{x^{\frac{6p+6}{5}} + \frac{3(p+1)}{-5a}\, x^{\frac{5p+5}{5}} \sqrt{\frac{-a}{b}} + \frac{3(p+1)^2}{-25ab}\, x^{\frac{4p+4}{5}}}{x^{\frac{2p+2}{5}} \sqrt{\frac{-a}{b}} + \frac{p+1}{5b}\, x^{\frac{p+1}{5}}}$$

$$\text{seu} \quad y = \frac{x^{\frac{2p+2}{5}}\sqrt{\frac{-a}{b}} + \frac{p+1}{5b}x^{\frac{p+1}{5}}}{x^{\frac{6p+6}{5}} + \frac{3(p+1)}{-5a}x^{\frac{5p+5}{5}}\sqrt{\frac{-a}{b}} + \frac{3(p+1)^2}{-25ab}x^{\frac{4p+4}{5}}}$$

quae aequatio formulae propositae satisfaciet in casu quo $m = \frac{-3p-8}{5}$. Instituto calculo justam reperi hanc aequationem, ita ut jam ex processu pateat quod, ad eruendam pro y *sororem* suam,

1° mutandum sit m in p et vicissim, ut formetur nova aequatio inter z et x, surrogato nimirum etiam pro b, $-a$, et pro a, $-b$;

2° in hac hypothesi quaerendus valor ipsius m et in aequatione secunda substituendus;

3° ex numeratore faciendus denominator, et contra.

Harum regularum duas priores a Tuis differre vides, nescio quam ob causam, revera enim aequationem Tuam ex illis emanantem

$$y = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5p+5}{9}} - \left(\frac{5p+5}{9b}\right)}{x^{\frac{25p+25}{9}} + \frac{5(p+1)}{3a}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{20p+20}{9}} - \frac{25(p+1)^2}{27ab}x^{\frac{5p+5}{3}}}$$

inito calculo laborantem reperies..

Communicavi, ut hortaris, jam ante acceptas postremas Tuas, haec omnia cum Patre in epistola 23. Octobr. proxime elapsi exarata, ad quam tamen nihil adhucdum responsi accepi, quod ubi appulerit, quid hac de re sentiat Tibi aperiam. Fortassis aliquando occasio dabitur haec omnia in Actis Lipsiensibus publicandi.

Ex iis, quae circa experimentum Riccatianum mihi perscribis, nihil aliud colligi posse video, nisi quod chorda, postquam per appensa pondera ad summum extensa est, possit per vim suam elasticam adhuc majus pondus sustinere, ita ut nec rumpatur nec ulterius extendatur; sed non satis capio, quomodo explicetur quod extensiones chordarum nonnunquam crescant per appensiones ponderum in progressione arithmetica crescentium, in quo (ut, ni fallor, Tibi scripsi) consistit experimentum supra dictum.

Mirari Te dicis (ut ad posteriorem epistolae Tuae partem respondeam) quod Ill. Riccatus non usus fuerit methodo Tua, utpote jam nota, ad detegendos ope seriei non solum infinitos casus (ut Tu mones) sed plane omnes qui problemati satisfaciant; ex quo concludo Te sensum problematis prout ab Auctore propositum fuit nondum recte assecutum esse. Non quaeritur de inveniendis aequationibus algebraicis inter x, y et constantes, formulae propositae satisfacientibus, sed de modo separandi a se invicem indeterminatas cum suis differentialibus, quod quid sit in Actis Lips. loco a me citato videre poteris. Ut rem exemplo illustrem: Sit in formula nostra $ax^m dx + byyx^p dx = dy$ (in qua absolute variabiles, quoad constat, separari non possunt) $m = p$, ut ea desineret in hanc $ax^p dx + byy x^p dx = dy$, ubi, ut vides, x et y secum invicem confusae sunt, sed dividendo per $a + byy$ prodit haec $x^p dx = \frac{dy}{a + byy}$, ubi variabiles x et y una cum suis differentialibus dx et dy separatas esse observas. Jam quaeruntur infiniti valores ipsius m quibus hoc modo indeterminatae separari possint. Vides itaque problema in hoc sensu toto coelo differre ab illo, quod hactenus inter nos agitatum fuit. Praeterea nondum acquiescere possum rationibus quas allegas ad corroborandam validitatem seriei Tuae et ad evertendum argumentum quod in contrarium adduxi. Convenis mecum

y^n pluribus constare terminis quam y seu dy si utrumque per diversas potestates ipsius x exprimatur, sed affirmas hoc non pertinere nisi ad illum casum, quo numerus terminorum finitus est, quoniam si infinitus sit in alterutra serie, nullus poterit dari terminus, cui non possit in altera assignari aequalis. Nec quidem verum est, sed idem ratiocinium etiam locum haberet quando termini sunt numero finiti. Videndum igitur est, utrum termini restantes sensibilem proportionem habeant ad alterutram seriem, nec ne. Posterior casus methodi Tuae validitatem argueret, prior vero eandem everteret. Ponamus igitur, ut rem examinemus, $n = 2$, ut habeamus formulam nostram $ax^m dx + byyx^p dx = dy$, et sit numerus terminorum seriei valorem ipsius y exprimentis $= t$, quo posito constabit yy ex terminis expressis per hunc numerum $\frac{t(t+1)}{2}$, dy vero continebit terminos t. Superabit ergo una series alteram (omisso termino $ax^m dx$) terminis $\frac{tt-t}{2}$, qui ad numerum terminorum ipsum dy exprimentium habent rationem ut $t - 1$ ad 2. Ex quo patet tantum abesse quod posito t infinito, differentia terminorum inter yy et dy pro nihilo reputari possit, ut potius infinities superet ipsos terminos seriei valorem ipsius dy exprimentis. Si rem examinare velis, idem esse deprehendes quando n ponitur $= 3$ etc. Fortassis mentem Tuam non recte assecutus sum adeoque haec omnia judicio Tuo subjecta volo. Vale.

Nic. Bernoulli.

LETTRE XI.

GOLDBACH à N. BERNOULLI.

SOMMAIRE. Continuation — Développement des quantités irrationelles en séries et interpolation des séries.

Vindobonae d. 2. Januar. 1722.

Die 29. Decembris cum Vindobonam redirem Tuas 6. ejusd. datas accepi. Aaequationem illam nostram ab eo tempore quo postremas ad Te scripsi, non attigi, sed re tota denuo expensa, fateor canonem meum ea limitatione opus habere quam suppeditas, scilicet ut α et β sint numeri binario differentes, atque ut videas quam ingenue Tecum agam, fontem ipsum erroris indicabo, putabam enim v. gr. posito

$$y = \frac{x^{3e+q} + b\,x^{2e+q} + c\,x^{e+q} + f\,x^{q}}{g\,x^{e} + h}$$

fore valorem ipsius m alium quam $-3p-4$ vel $\frac{-p-4}{3}$, quod tamen cum ad examen revocarem secus esse deprehendi.

Quod ais non opus fuisse ut α et β affirmativi exigerentur, cum etiam negativi eandem fractionem efficiant, id hactenus quidem verum est, sed oblitus eras requiri simul α non majorem quam 3β, si jam v. gr. ponas $\alpha = -5$ et $\beta = -3$ erit $3\beta = -9$ at -5 utique est > -9; si vero ponatur $\alpha = 5$, $\beta = 3$ satisfit requisitis.

Sororem formulae a Te inventae tam similem profers ut dubitare non possim quin germana sit, illa vero, quae perperam se mihi festinanti obtulit ignotae prorsus familiae est, quod statim videre poteram si vel minimum in ejus genus inquisivissem. Circumspectior imposterum ero.

In iis, quae de experimento Riccati commemoravi, praecipue explicare conatus sum quomodo chorda auctis ponderibus appensis nonnunquam adhuc magis contrahi possit, quae vero Riccatus de ponderibus in arithmetica proportione crescentibus observavit, fateor me non satis capere, neque enim adhuc scio quae differentia apparuerit in extensione chordarum per pondera quae in arithmetica, et ea quae geometrica ratione crescunt.

Non puto Te negaturum data v. gr. aequatione

$$ax^{-3p-4}dx + byyx^p dx = dy$$

quantitates variabiles perfecte separatas esse, si aequatio reducatur ad hanc $y = \left(\frac{-a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} x^{-2p-2} - \left(\frac{p+1}{b}\right) x^{-p-1}$; est enim ex una parte nil nisi y, ex altera nil nisi x cum constantibus; nullum igitur dubium est separationem, quam pro hoc casu se invenisse dixit Ill. Riccatus, vel eandem esse, vel (si forte seriem infinitam contineat) ad hanc reduci posse. Contra vero, sicut ejusmodi aequatio $x^2 = ax + b$ nondum plane reducta perfectaque est, usque dum ex altera parte aequationis nil nisi x, ex altera nil nisi a et b existat, ita ausim dicere separationem ejusmodi (posito $m = p$) $x^p dx = \frac{dy}{a+yy}$ etsi vera sit, tamen nondum recepisse ultimam manum, nec satis evolutam esse usque dum in alterutra aequationis parte x vel y solum appareat. Cum vero concedas dato pro m numero quocunque determinari posse valorem y per x saltem in seriebus infinitis, concedes etiam recte hoc modo separari quantitates variabiles dato m quocunque. Ego quoque, cum aliquando scriberes Te problema, sicut a Riccato propositum erat, in totum solvisse, existimavi Te eadem via per series processisse, de quo, si me fefellit conjectura, doceri cupio.

Certum praeterea est duas series ita comparatas, ut in neutra detur terminus, cui non possit assignari in altera terminus aequalis, ipsas quoque esse aequales, etiamsi concedam alteram seriem continere terminos infinitos, alteram vero bis, ter, vel etiam infinities infinitos, quae assertio exemplis clarior fiet. Ponatur series continens terminos ∞ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} +$ etc., sequitur hanc

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{4} + \frac{c}{6} + \frac{d}{8} + \text{etc.},$$

quae continet alternos tantum prioris, constare ex terminis $\frac{\infty}{2}$ et tamen poterit fieri $\frac{a}{2} = 1$, $\frac{b}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{c}{6} = \frac{1}{3}$ etc. ita ut posterior terminorum $\frac{\infty}{2}$ ubique existat aequalis priori. Idem locum habet in seriebus quarum termini in continuo crescunt; finge enim seriem $A \ldots 1 + 2 + 3 + 4 +$ etc. terminorum infinitorum seu ∞, et seriem $B \ldots 1 + 2 + 3 + 4 +$ etc. terminorum infinities infinitorum ∞^2; nihilominus dicam alteram alteri aequalem esse, quia in neutra potest assignari terminus ullus cui non detur in altera terminus aequalis, itaque ista pluralitas terminorum seriei B supra terminos seriei A non est nisi imaginaria, cum revera termini in serie A crescere possint usque ad numerum omnium possibilium maximum, quem si designare placuerit ∞, fatendum erit ∞^2 esse $= \infty$, quoniam ex hypothesi numerus major quam ∞ est impossiblis.

Scio Newtonum invenisse canonem ad extrahendas radices potestatis cujuscunque ex dato binomio, sed quinam ille canon sit non recordor, nec libros ad manum habeo unde petere possim. Tibi vero non erit ignotus, itaque rogo ut mihi significes, liceatne illius canonis ope quantitatem quamcunque surdam v. gr. $a^{\frac{1}{2}}$ vel $a^{\sqrt{2}}$ vel $a^{\sqrt{2}^{\sqrt{3}}}$ et generatim $a^{b^{c^{d^{\text{etc.}}}}}$ commutare in seriem cujus omnes termini sint rationales: id si per canonem Newtoni non succedat, communicabo Tecum methodum, qua rem praestari posse fateberis; hac methodo, ut in simplici exemplo maneam, fit

$$\sqrt{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2.4} + \frac{3}{2.4\ 6} - \frac{5}{2.4.6.8} + \frac{7}{2.4.6.8.10} - \text{etc.}$$

Possum etiam determinare, saltem per seriem infinitam, valorem cujuscunque termini intermedii datae seriei cujuscunque; id si jam ab aliis inventum est, scire cuperem data serie $1 + 1.2 + 1.2.3 + 1.2.3.4 + \text{etc.}$ seu $1 + 2 + 6 + 24 + \text{etc.}$ quisnam sit valor termini medii inter primum et secundum. Sin id putas ab aliis nondum inventum esse, methodum meam libenter indicabo.

Michelottum Venetiis degentem audio et mathematicum insignem esse et Clar. Parentis Tui amicum singularem, quamobrem eum cum in urbe essem mihi non innotuisse aegre fero.

Quod superest, in ea re quam mihi curae futuram promisi minime otiosus sum, fortasse aliquando voti compos fiam. Vale. Goldbach.

LETTRE XII.

Goldbach à N. Bernoulli.

=

Sommaire. Continuation sur le développement des radicaux en séries.

Vindobonae d. 10. Januarii 1722.

Ne ex serie in ultimis meis litteris male descripta errorem in ipsa methodo latitare conjiceres, tempestive Te monendum duxi; erat enim sic scribenda series

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2.4} + \frac{1.3}{2.4.6} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10} - \text{etc.}$$

et poteram facere multo generalius

$$a^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{(a^{3c-1}-1)}{2} - \frac{(a^{10c-2}-2a^{3c-1}+1)}{2.4} + \frac{(a^{21c-3}-3a^{10c-2}+3a^{3c-1}-1)}{2.4.6} - \text{etc.}$$

ubi potestas maxima ipsius a pro quovis termino invenitur $2cx^2-(3c+1)x+c+1$, posito $x =$ exponenti terminorum. Reliquae leges progressionis Tibi sine explicatione facile patebunt, requiruntur autem a et c integri ut termini omnes fiant rationales. Hunc canonem si Tibi placuisse intellexero, demonstrationem ejusdem dabo, qua cognita infinitis modis generalior fieri potest. Videbis omnia ex simplici quodam theoremate fluere. Vale. Goldbach.

LETTRE XIII.

N. Bernoulli à Goldbach.

=

Sommaire. Réponse aux deux lettres précédentes.

Venetiis a. d. 31. Januarii 1722.

In eo jam eram, ut ad penultimas Tuas 2. Januarii datas ad tabellarium deferri curarem, cum ecce ad manus meas perveniebant ultimae 10 ejusd. exaratae, quibus perlectis supprimenda duxi quae tunc scripseram, ut per hanc epistolam ad ambas simul responderem; quatenus saltem hoc anni tempore licet, quo quisque Bacchanalia vivens non tam Musis quam Amasiae suae incumbere studet.

Doleo canonem Tuum non eousque se extendere quo existimaveras; magna enim inde sperare licuisset ad perfectionem hujus materiae spectantia. Ego quidem suspicabar genuinum non esse canonem Tuum, sed idem temere affirmare non ausus fueram. Modi etiam, quo in horum omnium cognitionem venisti, ignarus capere non possum quae de fonte erroris narras. Libenter igitur totam methodi Tuae descriptionem ex proximis Tuis intelligam, meam postea vicissim Tecum communicaturus. Caeterum existimo plura ad huc detegenda restare, de quibus, elapsis Bacchanalibus, melius cogitare vacabit.

Dubium non est quin certo modo separatae dici possint indeterminatae in aequatione $ax^m dx + byyx^p dx = dy$ si reducatur ad aequationem algebraicam. Interim tamen magna interest differentia (ut quum per otium magis licebit indicabo) inter has duas quaestiones, cum nonnunquam separari possint indeterminatae, et tamen aequatio differentialis ad algebraicam reduci nequeat. Sic in exemplo quod jam attuli et quod Tu repetis, ubi nimirum $m = p$, variabiles separantur faciendo $x^p dx = \frac{dy}{a+yy}$, cum per methodum meam aequatio ad algebraicam reduci nequeat.

Dicis certum esse duas series ita comparatas, ut in neutra detur terminus cui non possit in altera assignari aequalis, ipsas quoque aequales esse, etiamsi concedas alteram seriem continere terminos infinitos, alteram vero bis, ter, vel etiam infinities infinitos. Tibi ipse in his verbis contradicere videris, nam qua ratione, quaeso, concipi possunt duae series sive finitae sive infinitae, quarum una contineat terminos infinities plures, quam altera, ita tamen ut nihilominus in neutra detur terminus, cui in altera non possit assignari aequalis? sane infiniti supererunt, vel infinities infiniti, qui non invenient cum quibus comparari possint in altera serie. Totus ratiocinii Tui error in eo consistit, quod gradus infinitorum non consideres, ac credas quantitatem finitam infinities infinitae aequalem esse, quod tamen, si verum esset, totum calculum differentialem, qui praecipue huic fundamento nititur, everteret. Ponitur enim in hoc calculo pro hypothesi quod dentur gradus infinitorum, ita ut omnes quantitates diverso respectu tanquam infinitae, tanquam finitae, et etiam tanquam infinite parvae considerari possint. Sic exempli gr. dx, seu differentiale ipsius x, infinitum erit respectu ddx seu secundi differentialis ipsius x, finitum respectu dy seu differentialis alterius quantitatis y, et infinite parvum respectu ipsius x. Ita ut idem dx, nonnunquam in processu calculi tanquam infinitum, alias quantitates se infinities minores ut nihilum evanescere faciat, nonnunquam ut finitum cum aliis comparetur et earum inter se proportio consideretur, multoties vero tanquam quantitas infinite parva pro nihilo negligatur. Haec si probe consideres, facile ipse videbis binas Tuas series, unam infinitorum, alteram infinities infinitorum terminorum, aequales non fieri per singulorum ab utraque parte aequiparationem.

Quae proponis de extrahendis radicibus per series infinitas, ecce quae meditatus eram. Ad elevandam quamcunque fractam $\frac{\alpha}{\beta}$ dispescatur quantitas proposita in duas partes b et c, quarum prior b elevata ad potestatem $\frac{1}{\beta}$ producat quantitatem rationalem, quo facto elevetur binomium $b+c$ modo Newtoniano ad potentiam $\frac{\alpha}{\beta}$, ut habeamus $(b+c)^{\frac{\alpha}{\beta}}$ seu

$$\sqrt[\beta]{(b+c)^{\alpha}} = b^{\frac{\alpha}{\beta}} + \frac{\alpha}{\beta} b^{\frac{\alpha-\beta}{\beta}} c + \frac{\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha-\beta}{\beta}}{2} b^{\frac{\alpha-2\beta}{\beta}} cc + \text{etc.}$$

qui termini, ut facile observabis, omnes rationales erunt. Dum haec mecum volvebam, in mentem incidit tractatus Patrui mei Jacobi Bernoulli de seriebus infinitis, operi posthumo de arte conjectandi annexus, quo consulto inveni idem problema duobus modis solutum, altero per interpolationes Wallisianas, altero, ut ego feceram, per elevationem binomii, hoc tantum discrimine quod pro quantitate β ponat unitatem, numerum nimirum cujus omnes radices cujuscunque potestatis sunt rationales, quo adhibito et posito $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2}$, ac $a = 2$, abit mea series modo allata in illam quam in posteriori epistola exhibes, hac tantum differentia, quod primus seriei terminus sit unitas, non vero ut Tu (haud dubie per errorem calami) scripsisti, binarius. Si locum memoratum ipse videre cupias, lege quae pag. 294 et seqq. citati libri habentur. Nimis laconicus es in serie

$$1 + \left(\frac{a^{3c-1} - 1}{2}\right) - \left(\frac{a^{10c-2} - 2a^{3c-1} + 1}{2.\ 4}\right) + \left(\frac{a^{21c-3} - 3a^{10c-2} + 3a^{3c-1} - 1}{2.\ 4.\ 6}\right) - \text{etc.}$$

quam exhibes pro $a^{\frac{1}{2}}$, nec scribes quid per c intellectum velis. Hoc tamen monere possum, ad rationalitatem terminorum non requiri, ut dicis, ut a et c sint numeri integri, sufficit enim, si c talis sit, cum a exponentes non subintret. Quod ad seriem attinet, quae exhiberet valorem $a^{\sqrt{2}}$, vel $a^{2^{\sqrt{3}}}$, vel generaliter $a^{b^{c^{d^{\text{etc}}}}}$ nondum mihi patet modus illas inveniendi nisi forte convertatur $\sqrt{2}$ in seriem s, et postea a^s in infinitas series resolvatur; sed haec aliquando attentius considerare licebit.

Vera sunt quae de Michelotto hic Venetiis degente scribis, est enim et Mathematicus acutus et amicus noster singularis. Si Tibi apud eum aliquid officii praestare potero, mihi id erit gratissimum. Vale.

Nic. Bernoulli.

LETTRE XIV.

GOLDBACH à N. BERNOULLI.

SOMMAIRE. Encore sur la résolution de l'équation Riccati. — Suite de la controverse sur l'équabilité des séries. — Rectification d'une erreur de la lettre précédente. — Problème de géométrie du Marquis de l'Hôpital. — Remarque sur les quadratures.

Vindobonae d. 25. Februarii 1722.

Cum per Bacchanalia Venetiarum non tam Musis quam Amasiae Tuae, uti ex postremis litteris Tuis colligo, incumberes, gratulatus mihi sum, quod inter tam dulces incubitus mei quoque recordatus esses exaratis iis litteris, quae casu quodam non prius quam 14 Februarii mihi redditae fuerunt. Methodum Tuam, qua in resolvenda aequatione Riccati usus es, libentissime videbo, dum vero et de mea methodo quaeris tantum abest ut eam Tibi denegare possim, ut potius gaudeam dignam Tibi videri quam penitius cognoscas. Sed ut rem totam breviter expediam, meditatiuncula illa Patavina quam scis, cum pro y posuissem cx^e, foecunda mater fuit eorum, quae mihi postea in hac re detegere licuit, cum enim animadverterem multis aliis modis valorem y exprimi posse per

x et constantes, sensim progrediendo feci $y = ex^e + fx^g$; quod exemplum nunc solum pertractabo ut ex ejus processu de reliquis omnibus judicare possis: Fit igitur secundum conditiones aequationis (divisis omnibus per dx)

$$ax^m + bc^2x^{2e+p} + 2bcfx^{e+g+p} + bf^2x^{2g+p} = cex^{e-1} + fgx^{g-1}$$
$$\text{I} \qquad \text{I} \qquad \text{II} \qquad \text{III} \qquad \text{II} \qquad \text{III}$$

Jam si (I) fiat $ax^m = -bc^2x^{2e+p}$ habebitur $c = \left(\frac{-a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$ et $e = \frac{m-p}{2}$

(II) $2bcfx^{e+p+g} = cex^{e-1}$ ergo $f = \frac{m-p}{4b}$ et $g = -p-1$

(III) $bf^2x^{2g+p} = fgx^{g-1}$ ergo $f = \frac{-p-1}{b}$, ergo

$$m = -3p-4, \; e = -2p-2$$

atque haec jam tunc cum Mestris a secundo ad quartum diem Julii praeterito anno morarer per otium observavi, deinde alia hypothesi faciendo $y = \frac{1}{cx^e + fx^g}$, alter ille valor pro $m = \frac{-p-4}{3}$, quem dudum ad Tē perscripsi, sese obtulit, finxi deinde quoque duas diversas potestates ipsius x in numeratore et denominatore ejus formulae quam aequalem ipsi y statuebam, sed quum ex hac hypothesi nihil novi prodiret neque ego scirem an hujusmodi inventa magni facturus esses, imprudens a coepto destiti, quodsi enim unum adhuc passum fecissem ad hypothesin $\frac{cx^{2e+q} + fx^{e+q} + gx^q}{hx^e + k}$ subito se manifestasset formula a Te deinde inventa, ex qua facile Tibi fuit colligere infinitas restare similes. Quantum vero postea observare potui, hypotheses istae seligi debent, quarum denominator contineat unum x plus quam numerator, vel contra numerator unum x plus quam denominator contineat, itaque dato quocunque $m = \frac{-np-2n\mp2}{n\pm2}$, ubi n

sit numerus quicunque integer impar, prout denominator fuerit $= n \pm 2$

erunt diversae potestates x $\left\{\begin{array}{l}\text{in numeratore ipsius } y \ldots \frac{n+2\pm 1}{2}\\ \text{in denominatore } y \ldots\ldots \frac{n+2\mp 1}{2}.\end{array}\right.$

In eo quoque separationis genere, quod non recta ad aequationem algebraicae curvae ducit, nonnulla tentavi ad casum primum Riccati; video enim si variabilis y transmutetur in aliam $u - \frac{a}{b} x^{p+1}$ et ponatur $m = 2p + 1$, variabiles x et u ductu hujus aequationis $ax^m dx + byx^p dx = dy$ sic separari posse ut fiat $x^p dx = \dfrac{du}{bu + \frac{a}{b}(p+1)}$.

Simili ratione dato $m = 3p + 2$

si y fiat $= u - \frac{2a}{bb}(p+1) x^{p+1} - \frac{a}{b} x^{2p+2}$, habebitur

$$x^p dx = \frac{du}{bu + \frac{2a}{bb}(p+1)^2}.$$

Si $m = 4p + 3$, y ponatur

$$= u - 6(p+1)^2 a x^{p+1} - 3\frac{(p+1)a}{b} x^{2p+2} - \frac{a}{b} x^{3p+3}$$

$$\text{erit } x^p dx = \frac{du}{bu + \frac{6a}{b^3}(p+1)^3}$$

ita pergendo quousque libuerit nullum est dubium quin separationes fiant dato quovis $m = np + n - 1$, si n sit numerus integer affirmativus.

Quamvis aegre semper a Te dissentiam tamen non possum quin de aequatione illa serierum, quarum altera A infinitos, altera B infinities infinitos terminos continet, mentem meam clarius explicem, scilicet ratio cur easdem aequales statuam est *inassignabilitas erroris*, convenit enim inter nos excessum illum, quisquis sit, seriei B supra seriem A non posse assignari nisi post terminum infinitesimum ipsius seriei A. Sed quoniam nunquam perveniri potest usque ad terminum infinitesimum ipsius seriei A (post quem terminum demum inciperet error esse sensibilis) patet etiam errorem illum, quisquis sit, nunquam fieri assignabilem, ideoque ejusmodi aequationes in praxi tuto et utiliter usurpari. Ut simplici comparatione utar, fingamus nobis duos cursores, alterum A qui constituerit currere in infinitum, alterum B qui currere tendat in infinities infinitum sed hac lege ut ambo singulis horis singula milliaria emetiantur, putas ne cursorem B plus spatii emensurum esse quam cursorem A? Concedo autem Tibi postquam finitus fuerit cursus A, excessum B supra A progressurum esse ad dato quocunque majorem, sed nego usquam finitum iri cursum A, quapropter res eodem recidit ac si nihil concessissem.

Quo in allegata serie 2 pro 1 scripseram is utique calami error fuit prout facile conjicere potuisti; altera vero series sic scribenda erat

$$k^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\left(k^{3c-1} - 1\right) + \frac{1.3}{2.4}\left(k^{10c-2} - 2k^{3c-1} + 1\right) -$$

$$\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(k^{21c-3} - \text{etc.}\right) + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\left(k^{36c-4} - \text{etc.}\right) - \text{etc.}$$

ubi coefficientes ipsius k iidem sunt qui in $(k-1)^{x-1}$ apparerent posito $x =$ exponenti terminorum. Pro k et c substitui possunt numeri quicunque, ut vero termini seriei sint rationales, requiritur c integra, k saltem rationalis. Progressio potestatum k jam in antecedentibus litteris explicata fuit, sed demonstrationem hujus et aliarum, quae ad hunc modum pro lubitu confici possunt, serierum proxime dabo.

Curvam quam Hospitalius quondam Cl. Parenti Tuo, ut ni fallor, Venetiis mihi narrabas, proposuit, sic ego omnibus libris destitutus investigavi: Sit (Fig. 6) horologium A alligatum catenae BA, et ducatur extremitas catenae B versus C perpendiculariter ipsi AB, quaeritur curva quam centro describet horologium A. Sit abscissa quaevis $AD = y$, applicata quaevis $DE = x$ et sit longitudo catenae constans $AB = a$, erit quaevis $EI = HG = a - x$ et quaevis EG tangens $= a$, erit autem porro ut $GH = a - x$ ad $EH = \sqrt{(aa - (a-x)^2)} = \sqrt{(2ax - xx)}$, ita dx ad $\frac{(2ax - xx)^{\frac{1}{2}} dx}{a-x} = dy$. Si vero ponatur $y = cx^{\frac{3}{2}} + fx^{\frac{5}{2}} + gx^{\frac{7}{2}} + \text{etc.}$ fiet $dy = \frac{3c}{2} x^{\frac{1}{2}} dx + \frac{5f}{2} x^{\frac{3}{2}} dx + \frac{7g}{2} x^{\frac{5}{2}} dx + \text{etc.}$ hoc divisum per dx et multiplicatum per $a - x$ producit seriem

$$\left.\begin{matrix} \frac{3}{2} acx^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{2} afx^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2} agx^{\frac{5}{2}} + \text{etc.} \\ - \frac{3}{2} cx^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{2} fx^{\frac{5}{2}} - \text{etc.} \end{matrix}\right\} = \sqrt{(2ax - xx)} =$$

$$(2a)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2(2a)^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{8(2a)^{\frac{3}{2}}} - \text{etc.}$$

unde per continuam terminorum aequationem determinantur c, f, g, etc.

In quadraturis quoque curvarum nonnihil me vidisse arbitror, sic v. gr. observavi si posita abscissa $= x$, semiordinata $= y = \frac{1}{1+f+m} x^m + \frac{1}{2+f+m} x^{m+1} + \frac{1}{3+f+m} x^{m+2} + \frac{1}{4+f+m} x^{m+3} + \text{etc.}$ cujus formula generalis (posito $\pi =$ exponenti terminorum) est $\frac{1}{\pi+f+m} x^{m+\pi-1}$, observavi, inquam, hanc curvam semper esse quadrabilem si f sit numerus integer affirmativus, m numerus quicunque. Item si fuerit

$$y = \frac{a^2-a+1}{a+1}\,x^{a^2+1} + \frac{a^3-a^2+1}{a^2+2}\,x^{a^3+2} + \frac{a^4-a^3+1}{a^3+3}\,x^{a^4+3} + \text{etc.}$$

cujus formula generalis est $\frac{a^{\pi+1}-a^{\pi}+1}{a^{\pi}+\pi}\,x^{a^{\pi+1}+\pi}$, ubi pro a poni potest numerus quicunque. Quae Cl. Parens Tuus de aequatione Riccatina ad Te scripserit, rogo, ut promisisti, mecum communices. Vale.

Goldbach.

P.S. Quid Tibi videtur de hoc separandi modo? — Pro y pono uz, quo valore in aequationem substituto fiet $ax^m dx = z du$, $bx^p dx = u dz : u^n z^n = \frac{u^{1-n} dz}{z^n}$, ubi in utraque aequatione x cum sua differentiali separata est a variabilibus u et z valorem y constituentibus.

LETTRE XV.

N. Bernoulli à Goldbach.

Sommaire. Méthode de N. B. pour la résolution de l'équation Riccati.

Venetiis die 14. Martii 1722.

Non ita stricte interpretanda esse, et de solito potius Bacchanalium tempore hic Venetiis vivendi more intelligenda, quae nuper Tibi perscripseram, haud difficulter conjeceris. Interim quamvis etiam Venerem, si se obtulisset, facile postposuissem dulcissimo quod mihi Tecum est commercio.

Summa cum voluptate perlegi ingeniosissimam methodum qua usus es ad eruendas aequationes algebraicas formulae Riccatianae $ax^m dx + byyx^p dx = dy$ in diversis casibus satisfacientes, et quo plus difficultatis in ea reperi, eo magis admiratus sum; quomodo enim nisi per taediosissimam variarum hypothesium tentationem, et laboriosissimum inde emanantem calculum, in genuinas incidere potueris non video, ut itaque mirum non sit si aliquando nimii forsan laboris impatiens a coepto destitisti. Alia ego prorsus via, et non per assumtionem coefficientium et exponentium incognitorum (qui modus nisi forma expressionis assumendae quodammodo innotescat, semper esse solet operosissimus) uno ictu quaesitum obtinui. Hanc subministravit uniformitatis quaedam lex, quam detexi dum in modum separandi indeterminatas dictae formulae inquirerem; si enim in ea pro y ponas $x^{-2p-2}z+\frac{p+1}{-b}x^{-p-1}$, et secundum hanc hypothesin loco yy et dy eorum valores substituas, prodibit haec altera formula

$(A)\, ax^n dx + bzzx^r dx = dz$, ubi $n = m+2p+2$ et $r = -p-2$. Rursus posito in formula Riccatiana $y = s^{-1}$, mutabitur illa per debitam substitutionem in hanc tertiam

$$(B)\ -bx^p dx - assx^m dx = ds.$$

Minima adhibita attentione observabis plenam inter formulam propositam et inde deductas A et B uniformitatem, ita ut quicquid de illa affirmabitur, de his eodem jure affirmari possit per debitam coefficientium et exponentium homogeneorum surrogationem. Ex solo hoc uniformitatis principio ad separandas indeterminatas, ut dixi, excogitato, sponte jam fluunt omnia reliqua, quae hactenus circa saepe citatam Riccati formulam inter nos agitata fuere. Facile enim quisque (ut ab ipsa indeterminatarum separatione initium faciam) animadvertit, quod existente in proposita $m = p$ sua sponte variabiles separentur, faciendo $x^p dx = \frac{dy}{a+byy}$, et hoc modo ejus constructio reducatur ad rectificationem arcus circularis, ex quo manifestum est eandem separationem obtineri in formula A si ponatur $n = r$, seu $m+2p+2 = -p-2$, id est $m = -3p-4$. Verum cum haec formula ex proposita sit deducta, patet in hac quoque separari indeterminatas existente $m = -3p - 4$, qui casus ille est, quem ipse Riccatus accennaverat. Considerando posthac formulam B, novum reperiemus separabilitatis casum. Cum enim, ut modo invenimus, obtineatur intentum ponendo $m = -3p - 4$, idem ob uniformitatem succedit in formula B faciendo $p = -3m - 4$, seu $m = \frac{-p-4}{3}$. Adeoque, cum et haec ex proposita oriatur, variabiles separamus etiam in modo memorato casu ipsius $m = \frac{-p-4}{3}$. Haec jam premendo vestigia et alternatim comparando formulas A et B cum proposita, reliquos casus, qui omnes in eadem generali formula continentur, quam invenimus pro determinandis valoribus ipsius m, quibus proposita ad aequationem algebraicam reduci possit, eruemus, utrumque enim praestari potest posito $m = \frac{-2np-4n \pm p}{2n \pm 1}$, ita ut haec aequatio $a x^{\frac{-2np-4n \pm p}{2n \pm 1}} dx + b y y x^p dx = dy$ construi simul possit per quadraturam circuli seu arcus circularis rectificationem, et per curvas algebraicas, dummodo n sit numerus integer et p rationalis.

Ex hoc processu facile liquet quod, si aliunde constaret in casu simplici aequatio quaedam algebraica formulae satisfaciens, ex hac tanquam ex fonte scaturirent aliae infinitae. Hinc denuo facio $m = p$, ut habeam formulam simplicissimam $ax^p dx + byyx^p dx = dy$, et observo quod posito $y = \sqrt{\frac{-a}{b}}$, haec aequatio algebraica formulae satisfaciat. Conveniat igitur expressioni A haec altera $z = \sqrt{\frac{-a}{b}}$ existente nimirum $n = r$, seu $m + 2p + 2 = -p - 2$ i. e. $m = -3p - 4$ et substituto loco z ejus valore, ut aequationem pro y inveniam, prodit $x^{2p+2} y + \frac{p+1}{b} x^{p+1} = \sqrt{\frac{-a}{b}}$, quae aequatio dat $y = x^{-2p-2} \sqrt{\frac{-a}{b}} + \frac{p+1}{-b} x^{-p-1}$. Verum, ut in superioribus jam dictum est, cum formula A ex proposita fuerit deducta, eidem etiam aequatio modo inventa satisfaciet in casu quo $m = -3p - 4$, et simul subministrabit aliam si formula B in auxilium vocetur. Cum enim una ex quaesitis aequationibus sit

$$y = x^{-2p-2} \sqrt{\frac{-a}{b}} + \frac{p+1}{-b} x^{-p-1},$$

quadrabit etiam, mutatis debito modo coefficientibus et exponentibus, haec altera

$$s = x^{-2m-2} \sqrt{\frac{b}{-a}} + \frac{m+1}{a} x^{m+1}$$

quando $p = -3m - 4$ seu $m = \frac{-p-4}{3}$, et substituto loco s ejus valore $\frac{1}{y}$, ac pro m, $\frac{-p-4}{3}$ reductaque more solito aequatione, prodibit nova aequatio

$$y = \frac{1}{x^{\frac{2p+2}{3}} \sqrt{\frac{b}{-a}} + \frac{p+1}{-3a} x^{\frac{p+1}{3}}}.$$

Continuato igitur hoc processu reperientur successive aequationes algebraicae ad formulam Riccatianam in iisdem casibus quos pro variabilium separatione invenimus, excepto solo casu quo $m = p$, quia aequatio pro hoc casu inventa $y = \sqrt{\frac{-a}{b}}$, etsi satisfaciat et ad reliquas indagandas inserviat, dum tamen y aequat constanti, et eo ipso conditionem hypothesi contrariam involvit, ipsa in satisfacientium numerum referri non potest.

Habes igitur quam desideras methodum qua usus sum ad indaganda quae hactenus circa aequationem Riccatianam inveni. Ubi Tibi placuisse intellexero, habebo de quo mihi gratuler.

Exigeret jam ordo ut ad reliqua, quae litteris Tuis continentur, responderem, sed instans Tabellarii discessus tempus mihi praeripiens, haec in aliud tempus reservare jubet. Restat ut debitas Tibi referam gratias, quod mihi tam sedulo prospicere cures. Gratissimum fuit quod in schedula germanica epistolae Tuae occlusa (mihi enim applicanda esse quae de amico scribis censeo) significas, et facile me a Magno Russiae Imperatore conduci patiar, dummodo, ut cum Venetiis esses jam monui, a me non exigantur, quod saepe fieri solet, certa quaedam a praxi potius quam a theoria mathematica dependentia. Cathedra quaedam Basileae vacans fortassis Hermannum nostrum in Patriam revocabit. Si hoc in casu ad ejus successionem cura Tua vocarer, officium mihi praestares nullo gratitudinis testimonio satis demerendum. Hisce vale.

Nic. Bernoulli.

LETTRE XVI.

N. Bernoulli à Goldbach.

Sommaire. Regrets qu'éprouve l'auteur de quitter la carrière mathématique pour embrasser celle du droit, selon la volonté de son Père.

Venetiis d. 11. Aprilis 1722.

Quam 14. Martii Tibi promiseram uberiorem responsionem ad litteras Tuas 25 Februarii datas, dudum jam misissem, nisi animum a studio mathematico ad juridicum penitus traxissent litterae a Patre paulo post acceptae, quibus in Patriam quantocyus me reverti jubet ad ambiendam cathedram juridicam in Academia nostra brevi abhinc tempore vacantem. Aegre admodum fero hanc studiorum toto coelo differentium permutationem, nec nisi invitus plane in memoriam revoco quae, dum legibus operam darem, didiceram. Et eo ipso iter adhuc differre statui donec ad responsorias meas, quibus propositum Patris mutare totis viribus conatus sum, ultimam ejus decisionem novis litteris accipiam, rei eventum illico

10

Tibi significaturus, ut scias quo imposterum epistolae Tuae sint dirigendae. Tu, Vir Clarissime, vitam multo feliciorem transigere videris, dum nunc hic nunc illic agens integram fere Europam (ut ex binis posterioribus Tuis epistolis, altera Posonii, altera Budae datis video) perlustraris, iis tantum studiis intentus quae Tibi ipse animi oblectandi causa seligis. Utinam et mihi aliquando Deus daret ut mei juris non amplius alterius arbitrio vivere cogerer! De Hermanno nostro nihil adhuc mihi relatum fuit. Si in Patriam vocaretur me Tibi denuo commendo. Transmitto, ut jubes, schediasma Tuum *de interpolandis serierum terminis* etc. et pro ejus communicatione debitas ago gratias. Quantum ex ejus transcriptione colligere potui (nec enim debita attentione perlegere hucusque vacavit) pulcherrima sunt et publica luce sane digna quae ibi continentur. Quae, ubi per negotia licebit, circa haec et posteriores Tuas epistolas fortassis observavero opportuniori tempore perscribam. Interim vale.

Nic. Bernoulli.

LETTRE XVII.

GOLDBACH à N. BERNOULLI.

=

SOMMAIRE. Réponse à la lettre XV. Recommandation à La Croze.

Essecino d. 27. Aprilis 1722.

Si verba Tua, cum ais Te *uno ictu quaesitum obtinuisse*, de aequatione $m = \frac{(-2n \pm p) - 4n}{2n \pm 1}$ intelligenda sunt, methodum Tuam summis laudibus efferam agnoscamque illam ita a mea distare ut methodum magistri a methodo discipuli decebat, sed ex iis quae scribis colligere non possum quomodo sine multis tentaminibus tandem eo perveneris, nec intelligo qua ratione asseras Te non processisse *per assumtionem coefficientium et exponentium incognitorum*, etsi enim non dicas qua occasione in exponentes $-p-2$ et $-p-1$ item in coefficientem $\frac{p+1}{-b}$ incideris, tamen credibile non est invenire posse $y = x^{-2p-2} z + \left(\frac{p+1}{-b}\right) x^{-p-1}$, nisi antea per

*

hypothesin fuerit $y = x^{e+q} z + f x^q$ et deinde per conditiones problematis determinentur f, e, q, porro nova ratiocinatione opus habes ut invenias $z = \sqrt{\frac{-a}{b}}$ ac tandem $y = \left(\frac{-a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} x^{-2p-2} + \left(\frac{p+1}{-b}\right) x^{-p-1}$, quod videtur brevius obtineri posse per hypothesin $y = c\, x^{e+q} + f x^q$, itaque cardinem rei in hac quaestione versari puto. an dato v. gr. $m = \frac{-5p-8}{3}$ ubi methodo mea fiet

$$y = \frac{x^{2e+q} + c\, x^{e+q} + f x^q}{g\, x^e + h}$$

et c, e, f etc. determinabuntur per conditiones problematis, ut habeatur valor y expressus per x et constantes, eundem valorem brevius quam per hujusmodi hypothesin methodo Tua determinare possis. Observavi nuper aequationem

$$a\, x^{\frac{-5p-8}{3}}\, d x + b y^2 x^p\, d x = d y$$

construi etiam posse per curvam algebraicam diversam ab ea quam invenisti, satisfacit enim aequationi

$$y = \frac{x^{\frac{-p-1}{3}} + \frac{6ab}{(p+1)^2} x^{-p-1} - \frac{9ab^2}{(p+1)^3}\left(\frac{-a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{-4p-4}{3}}}{-\frac{b}{p+1} x^{\frac{2p+2}{3}} - \frac{9ab^2}{(p+1)^3}}$$

unde simul patet pro $a x^m\, d x + b y^2 x^{\frac{-5m-8}{3}}\, d x = d y$ satisfacere

$$y = \frac{\frac{a}{m+1} x^{\frac{2m+2}{3}} + \frac{9a^2 b}{(m+1)^3}}{x^{\frac{-m-1}{3}} + \frac{6ab}{(m+1)^2} x^{-m-1} + \frac{9a^2 b}{(m+1)^3}\left(\frac{b}{-a}\right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{-4m-4}{3}}}$$

Satisfacit etiam pro $m = \frac{-5p-8}{3}$

$$y = \frac{x^{-2p-2} - \frac{2(p+1)}{3\sqrt{-ab}}\, x^{\frac{-5p-5}{3}} - \frac{(p+1)^3}{9\sqrt{-a^3b^3}}\, x^{-p-1}}{\left(\frac{-b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{-2p-2}{3}} + \frac{(p+1)^2}{9\sqrt{-a^3b}}}$$

Hac occasione recordor me aliquando regulas dedisse ad inveniendam *sororem* formulae aequalis ipsi y, quae regulae, si bene memini (nam retinui quidem exempla epistolarum quas ad Te dedi, sed Vindobonae remanserunt) sic se habebant:

I. pro p ponatur m. a convertatur in $-b$ et b in $-a$.

II. ex numeratore fiat denominator, ex denominatore fiat numerator.

Hae regulae justissimae fuerunt etsi in exemplo, cui eas applicaveram, nescio qua incuria hallucinatus eram, nam sicut in altera sorore y exprimitur per x et constantes a, b, p, ita in altera exprimi debet per x et constantes a, b, m; sed in his novis curvis algebraicis animadverti velim easdem ab omnibus, quas antea invenimus, prorsus diversas esse, in iis enim differentia omnium exponentium x tam in numeratore quam denominatore valoris variabilem y exprimentis constans est, in his variat; nec dubito quin ejusmodi diversae curvae in infinitis aliis valoribus $m = \frac{-2np-4n \pm p}{2n \pm 1}$ haberi possint si n sit numerus integer praeter unitatem.

Utinam Tibi reddita non esset epistola quam Buda dedi*), nihil enim fere praeter calculi errores continet quibus emendandis Te nollem tempus perdere, formulam vero casuum,

---

*) La minute de cette lettre manque.

quibus inveni aequationem $ax^m dx + byx^p dx = dy$ esse ad curvam algebraicam, hanc statuo $m = (h + 1)p + h$ ubi h sit numerus integer affirmativus. Si constiterit Cl. H.. F.. abiturum esse, suaderem ut sine mora libellum supplicem ad Regem Prussiae directum (in quo allegare poteris specimina a Te in Actis Erudit. vel alibi edita) ad Lacrosum una cum litteris meis eum in finem scriptis*) mitteres, mallem vero litteras Gallicas ad ipsum dares, ut citius respondeat; is certe rem Tuam sedulo curabit. Vale.

Goldbach.'

---

*) Voici cette lettre: „*Essecino* d. 27. Apr. Cum nunciatum mihi esset J. H... Prof. F... Basileam revocari illico optavi ut locus ab eo relictus Cl. Nicolao Bernoullio obtingeret, vix enim vel illa Academia in Mathesi sublimore exercitatiorem Virum, vel hic aptiorem suis litteris suaeque diligentiae sedem inveniat; sed quia neminem habet Berolini, cujus ope utatur, auctor ei fui ut tempestive consilia Tecum communicaret. Equidem ob summam Tuam in Eruditos benevolentiam dubitare non possum quin etiamsi meae commendationi nihil tribueres, tamen et publicae utilitatis causa, cujus interest viros dignos muneribus praefici et praecipue memoria amicitiae quam cum Incomparabili Viro Johanne Bernoullio (Parente ejus de quo scripsi) quondam Basileae coluisti, omnem operam ac studium Tuum in Nicolaum nostrum collaturus sis. Vale.

Goldbach".

LETTRE XVIII.

N. Bernoulli à Goldbach.

Sommaire. Mande son départ pour Bâle.

Venetiis d. 6. Junii 1722.

Responsionem ad ultimas hucusque distuli ut jam instantis mei itineris in Patriam plane certus, ejus diem Tibi significare possem. Proximus dies Jovis erit mihi in hac urbe supremus, et fortassis hujus mensis vigesimus quartus in Patria primus, ubi legibus ad humeros usque immersus, mathesi valedicere cogar, donec solitis ibi speciminibus defunctus ad hanc reverti liceat. Varias jam ab aliquo tempore ad Te direxi epistolas, quarum tamen in mundi finibus nonnisi antepenultimam, ut colligo, acceperas eotempore quo postremum ad me scripsisti. Nunc fortassis et reliquae ad manus Tuas pervenere, adeoque iis perlectis non miraberis si methodum meam quam perscripseram de inveniendis aequationibus algebraicis ad formulam Riccatianam inpraesentiarum non fusius explano. Instans iter et leges iniquae hoc vetant, sed brevi earum dominio subtractus ad omnia Tua, quae hactenus intacta reliqui, litteris ex Patria ad Te mittendis respondebo. Interim gratias Tibi persolvo quam possum maximas pro transmissis mihi commendatitiis ad Cl. La Croze. Non dubito quin plenum sortitae fuissent effectum, si, ut accidere potuisset, sors Cl. Hermannum Agnato meo praetulisset. Sed quia contrarium, ut 21. Aprilis jam Tibi significaveram*), accidit, rogo ne propensae Tuae erga me voluntatis testimonia imposterum opportuniori occasione mihi deesse sinas. Gratissimum foret rescire quid legatus Moscoviae qui Vindobonae est de me constituerit. Vale.

Nic. Bernoulli.

P. S. Cum Licentiati Juris Persona mihi in Patria sit agenda, ut ab aliis mecum idem nomen gerentibus distinguar, proximas Tuas ita si placet inscribas: — — Bernoulli, Licencié en droit, à Bâle.

---

* Cette lettre manque.

LETTRE XIX.

GOLDBACH à N. BERNOULLI.

=

SOMMAIRE. Recherches ultérieures sur l'équation Riccati.

Vindobonae d. 1. Julii 1722.

Epistolas quas 14. Martii et 11. Aprilis scripsisti redditas mihi fuisse jam Essecino significaveram, ultimam quoque die 6. Junii scriptam accepi, ita ut nonnisi una, die 21. Apr. data, periisse videatur, cujus tamen jacturam, cum omnes quae mihi a Te veniunt gratissimae sint, aegre admodum fero. Ab illo viro de quo quaeris nihil adhuc effectum est. Equidem doleo Te iis studiis distrahi ad quae invitus adeo accedis, sed parendum tantisper fatis erit, dum meliora eveniant. Ad ea quae litteris meis tetigi et quae mox de aequatione Riccati dicam obsecro Te ne respondeas nisi cum ab aliis negotiis, quibus Te obrutum video vacaverit. Animadverti data aequatione $ax^m dx + byx^p dx = dy$, si ponatur

$\frac{m-p}{p+1}=k$, posse y exprimi per seriem infinitam quae toties abrumpatur seu finita fiet, quoties k est numerus integer affirmativus, hoc est, quae sola contineat omnes curvas algebraicas hujus aequationis, quas in litteris prioribus dixeram obtineri dato $m=(h+1)p+h$, si h esset numerus integer affirmativus. Series vero haec est:

$$y=-\frac{a}{b}x^{k(p+1)}-\frac{ak}{b^2}(p+1)x^{(k-1)(p+1)}-$$
$$\frac{ak(k-1)}{b^3}(p+1)^2x^{(k-2)(p+1)}-\frac{ak(k-1)(k-2)}{b^4}(p+1)^3x^{(k-3)(p+1)}-$$
etc.

Separationem dictae aequationis, qui est casus primus Riccati, sic puto peragi:

I. fiat $\frac{u}{du}=\frac{1}{bx^p dx}$, quo facto u separatum est ab x.

II. fiat $dz=\frac{ax^m dx}{u}$, quo facto etiam z separatum est ab x.

atque his positis dico esse $y=uz$, adeoque et y separatum ab x. Casum tertium Riccati, ubi in aequatione

$$ax^m dx+by^n x^p dx=dy$$

ponitur $m=-1$, $n=\frac{1}{2}$, generalius solvi posse arbitror hoc modo

I. ponatur $y=z+\frac{a}{m+1}x^{m+1}$, transmutabitur aequatio data in hanc $x^p dx=\frac{dz}{b\left(z+\frac{a}{m+1}x^{m+1}\right)^n}$

II. fiat $m=-1$, erit $x^p dx=\frac{dz}{b\left(z+\frac{a}{o}\right)^n}$.

Igitur separatio procedit dato $m=-1$, $n=$ numero cuicunque. Litteras quas ad me dabis eodem ut ante modo inscribes. Vale. Goldbach.

LETTRE XX.

N. Bernoulli à Goldbach.

=

Sommaire. L'auteur a fait une maladie grave. Problème des lunules quarrables.

Basileae d. 7. Octobris 1722.

Miraris scio, tanta esse negotia mea, de quibus scripsi, quae a sexto praeteriti mensis Junii, quam diem ultimis meis ad Te exaratis inscriptum video, in hoc usque tempus ne verbum quidem litterarum Tibi perscribere permiserint. Sed mirari desines ubi resciveris iis accessisse morbum, quo per integrum vitae cursum non sum passus graviorem. Post duos quibus laboravi menses tandem maxima ex parte restitutus pennam arripio, non quidem ut ad ea respondeam quae a Te mihi ab aliquo tempore perscripta, intacta reliqui, nec enim vires a morbo mihi relictae hoc patiuntur; sed ut sciam an etiamnum epistolae Vindobonam ad D^{m} Felz directae rite ad manus Tuas perveniant. Interea post restitutas vires licebit responsionem parare quam exiget epistolarum Tuarum materia. Interim ne nihil scripsisse videar, proponam Tibi problema quod Pater occasione alius problematis in Craigii libro reperti Fratri meo, dum ego adhuc peregre abessem, et hic Adgnato meo ac postea mihi proposuerat. Problema hoc est: *Invenire infinita spatia duobus arcubus circularibus comprehensa quadrabilia*; vel, quod idem est, invenire lunulas infinitas quadrabiles, diversas ab iis quas Hyppocrates, ut procul dubio noveris, exhibuit. Vale.

Nic. Bernoulli.

LETTRE XXI.

Goldbach à N. Bernoulli.

Sommaire. Solution du problème des lunules.

Posonio d. 17. Octobris 1722.

Non sine magna laetitia ex litteris Tuis die 7. Octobr. ad me datis quas 13 sub vesperum accepi Te ex gravi morbo convaluisse intelligebam, quoniam vero nullam mentionem facis earum quas Calendis Julii ad Te Basileam scripsi et in quibus de aequatione Riccati nonnulla protuli simulque indicavi ad me non pervenisse Tuas d. 11. (21.?) Aprilis Venetiis datas valde vereor ne perierint, quod si ita acciderit, contenta illarum alia occasione Tibi significabo. D. 15. Octbr. Vindobona discessi, heri huc adveni et paulo post nescio quo felici casu pulchrum illud problema a Te propositum hunc in modum solvi: Sint (Fig. 7) duo circuli sese intersecantes A et C. Circulus $AGC = \alpha$, pars circuli $ADCE = \frac{\alpha}{p}$, triangulum

$AEC = b$, erit segmentum $ADC = \frac{\alpha}{p} - b$. Similiter circulus $AHC = \beta$, pars circuli $FABC = \frac{\beta}{q}$, triangulum $ACF = c$, erit segmentum $ABC = \frac{\beta}{q} - c$. Adeoque

$$\text{lunula } ABCG = \alpha - \frac{\alpha}{p} + b - \frac{\beta}{q} + c$$

et ponendo $\alpha - \frac{\alpha}{p} - \frac{\beta}{q} = 0$ (ut scilicet destruantur quantitates quadraturam circuli involventes) erit eadem lunula $ABCG = b + c$.

Itaque sumtis numeris quibuscunque unitate majoribus pro p et q, si ratio circulorum sese intersecantium fuerit ut 1 ad $\frac{p}{pq-q}$, semper quadrari poterit lunula ex circulo $\alpha = \frac{p\beta}{pq-q}$ resecta; sin praeterea fuerit $p = \frac{q}{q-1}$, utraque lunula $ABCG$ et $ADCH$ erit quadrabilis. Hoc pacto non solum infinitis modis variari possunt quantitates p et q ut infinitas exhibeant lunulas quadrabiles, sed ex superiore demonstratione etiam patet nullam aliam lunulam quadrari posse nisi admissa quadratura circuli. Optarem hoc problema a pluribus solvi ut diversae methodi invicem comparari possent. Quodnam sit nomen D. Fratris Tui quemque aetatis annum attigerit percupio scire. Vale.

Goldbach.

LETTRE XXII.

GOLDBACH à N. BERNOULLI.

=

SOMMAIRE. Amendement à la solution précédente. Autre problème relatif aux lunules. — Problème de la théorie des nombres.

Posonio d. 22. Octobr. 1722.

In iis quae nuper ad Te scripsi, iterum festinando a via aberravi, haec enim verba: *sin praeterea fuerit* $p = \frac{q}{q-1}$ *utraque lunula ABCG et ADCH erit quadrabilis* inutilia sunt; in ipsa quoque solutione video me potius regulam dedisse ex qua constet, utrum data quaevis lunula sit quadrabilis, nec ne? quam modum infinitas lunulas quadrabiles inveniendi detexisse. Jam vero non solum infinitas, sed plane omnes lunulas quadrabiles sic inveniri posse arbitror: Sit (retento schemate ex prioribus litteris) dato quovis circulo $AGC = a$, pars ejus quaecunque data $AEDC = \frac{a}{p}$, determinandus est circulus AHC ea lege ut transiens per puncta A et C relinquat lunulam quadrabilem $ABCG$.

Quoniam data est subtensa AC f, investiganda erit ratio generalis dati cujusque circuli β ad partem suam $AFCB$ cui competit subtensa $AC = f$, sive, quod eodem redit, data subtensa $= f$ et radio circuli quocunque, invenire oportebit rationem arcus ad circulum, quod fieri poterit per ea, quae a Celeb. Patre Tuo jam dudum in Actis Erudit. tradita sunt; atque ita determinabitur q per incognitam β et cognitam f (vid. litt. priores). Sed quia requiritur $\alpha = \frac{p\beta}{pq-q}$, si in hanc aequationem valor pro q inventus substituatur, habebitur ratio quaesita circuli α ad β expressa per p et f jam cognitas. Itaque si non solvi problema, saltem reduxi ad aliud cujus solutio jam extabat.

Haec de lunulis cogitatio in memoriam mihi revocat problema, quod jam ante 12 annos amico cuidam solvendum commendaveram, is vero cum Cl. Wolfio, ut postea ex hoc audivi, communicavit, cujus solutionem tamen Wolfium, quod diceret se nullam problematis utilitatem videre, non quaesivisse puto. Problema hoc est:

> *Exhibere duas lunulas ex duobus circulis sese intersecantibus ortas, atque ex iisdem lunulis abscindere duas partes aequales hac lege ut recta abscindens utrobique aequalis sit.*

Sic verbi gr. satisfactum esset quaestioni, si (Fig. 8) demonstrari posset partem lunulae ABC esse aequalem parti alterius lunulae CDE; sunt enim lunulae ex duobus circulis ortae nempe radii FC et GC, et praeterea rectae, partes lunularum abscindentes sunt aequales (scil. $AB = DE$).

Solutionem ipsam, quae mihi olim casu aliquo obtigit et regula atque circino perfici potest, si problema Tibi placuerit, libenter communicabo, scio enim Te nunc longe aliis rebus occupari quam ut ad haec animum divertes, etsi vero adhuc nonnisi unum casum problemati satisfacientem sciam, tamen ob certas causas mihi persuadeo, si quis alius solutionem tentaverit, eum aut nihil inventurum aut solutiones omnino infinitas. Quod superest, si quid imposterum mihi proponere visum fuerit, memento me in iis, quae numeris solis peraguntur, feliciorem esse quam in aliis quae schematibus indigent, ut Tibi Venetiis narravi; sic v. gr. non magno labore inveni solutionem propositionis *nullum numerum triangularem, praeter* 1, *esse quadrato-quadratum*, cujus demonstrationem jam olim inter difficiliores suas habuit Fermatius, etsi, quantum constat, nunquam publicaverit. Eam adscriberem, nisi vererer ne alia aliis cumulando Tibi molestus fierem, itaque differendum puto donec jusseris. Vale.

Goldbach.

LETTRE XXIII.

N. Bernoulli à Goldbach.

Sommaire. Excuse son long silence par sa nomination à la chaire de droit de Berne. Offre à G. d'entrer en correspondence avec son frère Daniel.

Bernae d. 11. Aprilis 1723.

Si post exaratas ad me ultimas Tuas, die 17. Octob. anni praeterlapsi Posonio datas, me mortuum credideris, non miror; si vero ex silentio meo me Tui oblitum existimaveris, certe doleo. En Tibi hujus silentii causam. Cathedra juridica in Bernatum Academia ab illo tempore vacans movit Amicos et Patronos ut auctores mihi essent eam ambiendi eo ipso tempore, quo in Italiam, qua paulo ante descesseram, redeundi animus erat. Infinitis igitur (ut facile ipse conjicies) distractus negotiis, a re Mathematica alienissimis, commercio nostro incumbere non potui. Nunc vero obtenta sparta quam nudius tertius auspicatus sum lectione inaugurali, statim ad Te redeo, ut genio meo, quam primum licuit, satisfacerem. Senties me posthac quam possum maxime in scribendis Tibi epistolis assiduum. Sed annon in munere meo obeundo plurimas sim passurus difficultates, quae a quaestionibus mathematicis considerandis me arcebunt, valde suspicor, in hisce si me minus expeditum senties condonabis. Miratus sum maxime elegantem quam communicasti solutionem Tuam de inveniendis aliis lunulis quadrabilibus praeter notissimas illas ab Hyppocrate inventas. Ubi haec materia iterum in mentem venerit, solutionem meam Tibi perscribam. Frater qui hic mecum agit et aget adhuc per aliquot dies, donec hinc Venetias provinciam a me relictam occupandi causa proficiscetur, quam officiosissime Te saluere jubet. Est hic aetatis 23 annorum, studiorum nostrorum supra aetatem peritus. Si cum eo epistolicum aliquod commercium colere cupias, gratum ipsi hoc erit. Poteris inscribere litteras Tuas sicut illas quas ad me olim dederas et dirigere eas ad Gabrielem Herz. Eas vero, quas mihi destinabis, Bernam imposterum mittes cum hac inscriptione:

A M. Bernoulli, professeur en droit à Berne.

Vale et fave

Nic. Bernoulli.

LETTRE XXIV.

Goldbach à N. Bernoulli.

Sommaire. La correspondance avec Dan. B. acceptée avec reconnaissance. Récapitulation de la 22ème lettre supposée perdue.

Cremnitio d. 10. Maii 1723.

De collato Tibi in Bernensi Academia munere ex animo gratulor, mihi vero de oblata Cl. Fratris Tui amicitia vehementer gaudeo et utar propediem occasione ad eum scribendi quam mihi suppeditas. Quamvis iniquum putem de rebus a praesenti studiorum Tuorum ratione alienis verba facere, tamen non possum, quia methodum meam inveniendi lunulas probasti, quin hic repetam quae 22. Octobr. ad Te Posonio scripsi, quandoquidem eas litteras Tibi redditas non fuisse ex ultimis Tuis intelligo (Suit la copie de la lettre 22ème). Haec, ut dixi, antea ad Te scripseram, quae si Tibi examinare jam non vacat, fortasse cum aliis harum rerum intelligentibus per Te communicari poterunt. Nondum scio an acceperis meas 11. Aprilis Venetias et Calend. Julii 1722 Basileam datas. Vale meque amare perge Goldbach.

LETTRE XXV.

N. Bernoulli à Goldbach.

=

Sommaire. Exprime le désir d'accompagner son frère Daniel à St.-Pétersbourg.

Bernae d. 3. Februar. 1725.

Quis fuerit hucusque negotii status quo Frater ad cathedram mathematicam in Academia Petroburgensi occupandam invitatur, et quomodo hic intempestive Patavii aegrotans detineatur, ex litteris Paternis haud dubie intellexeris. Resciveris quoque quaenam ex accidenti interveniens ambiguitas incertos nos reddiderit cuinam ex nobis Fratribus haec oblatio facta fuerit, eousque ut suspicio quoque nobis oboriretur utrumque fortassis intendi. In eo proin jam eram, ut Tibi significarem me in hoc casu, dummodo Patris accessisset consensus, facile inductum iri ad praesentem meam stationem cum Petroburgensi commutandam, ob arctissimum, non tam consanguinitatis, quam tenerrimae inter nos Fratres amicitiae vinculum, quod nihil nobis sinit esse jucundius, quam si aliquando invicem cohabitare daretur. Sed cum manum jam in hunc finem pennae admoverem, ecce dubium sublatum per varias epistolas nunciantes solum expeti Fratrem. Quo effectum est ut spe quidem grata qua me antea blandiebar exciderem, non tamen spei conceptae successum ardentissime anhelare cessarem. Tu ergo, Vir Clarissime, si quod potes (plurimum autem Te posse abunde jam habemus compertum) hunc in finem impendere velles, et Fratrem et me ultra modum obligares. Fieret inde ut vires nostras jungendo tanto fortiores felicioresque evaderemus ad studiorum nostrorum in illa regione incrementa promovenda. Laetus admodum amatissima mihi gentique nostrae Mathemata per aliquod jam tempus acerbo, quod nosti, fato derelicta, denuo amplecterer, commerciumque nostrum litterarium, alienis negotiis pene suffocatum, revivisceret novasque summo meo gaudio acquireret vires. Quod superest obsecro ut quam primum fieri possit ad haec respondeas. Vale . .

Nic. Bernoulli.

LETTRE XXVI.

N. Bernoulli à Goldbach.

═

Sommaire. Théorème de l'hypocycloïde, proposé par Dan. B.

Bernae d. 2. Junii 1725.

Postremas litteras meas 24 praeteriti mensis Martii aut in itinere deperditas, aut (quod summo quoque dolore mihi fuisset acerbius) mei memoriam in Te prorsus deletam existimaveram, cum praeterito die Jovis in utroque me hallucinatum fuisse laetus admodum comperui per responsorias Tuas 18 mensis praeteriti Berolino datas*), quibus inclusam deprehendi epistolam aliam ad Fratrem directam**), quamque per ipsum hunc Tabellarium hodie proficiscentem eidem transmittam Basileam.

---

*) Cependant ces deux lettres, celle de Bernoulli de 24. Mars, et celle de Goldbach du 18. Mai, manquent dans notre collection.

**) Manque également.

Quod quae Tibi perscripseram me rogante communicaveris cum Berndisio, habeo quod Tibi gratias agam. Spero fore ut exoptatum haec omnia nactura sint exitum.

Professorem aliquem Francofurtanum uni ex collegis meis huc perscripsisse me cum duobus aliis nominatum fuisse ad cathedram mathematicam a Cl. Hermanno derelictam, ab eodem collega meo intellexi. Quis autem ex nobis tribus postea ad stationem hanc occupandam a Rege fuerit electus nondum rescivi.

Formulam Tuam $x(2x+1)$ quam ponis numerorum triangularium in demonstratione theorematis Fermatiani si examinaveris, non omnes sed alternativos tantum comprehendere deprehendes.

Accepi nuper a Fratre theorema sequens absque ulla demonstratione: (Fig. 9) Circuli $ABCR$ et $CDEQ$ rotatione sua in circulo $AMEN$ eandem describunt puncto C hypocycloidem MCN.

Asserit Frater simul theorema hoc pulchrum et novum. Sed demonstratu facile ipse postea compertus sum. Si attentione Tua dignum judicaveris, suppeditabit fortassis nobis tribus haec meditatio plura et nova et curiosa. Vale.

Nic. Bernoulli.

LETTRE XXVII.

GOLDBACH à N. BERNOULLI.

=

SOMMAIRE. Attend avec impatience l'arrivée prochaine des Bernoulli à St.-Pétersbourg. Démonstration du théorème de l'hypocycloïde de Dan. B.

Petropoli d. 18. Septembris 1725.

Litteras Tuas, 2. Junii scriptas, 10. Septembris accepi; in Felzio quidem nihil morae fuit, sed itineris mei ratio postulabat ut aliquamdiu expectarem donec certum illi locum, quo mittendae essent litterae significare possem. Affirmavit mihi nuper Cl. Blumentrostius et Te et Cl. Fratrem Tuum jam itineri paratos esse, quamobrem gratum mihi foret si has litteras frustra scriberem mihique prius quam redditae fuerint, Te hic salutare contingeret, spero autem me unum alterumve mensem Petropoli adhuc commoraturum esse. Deus Te salvum atque incolumem huc perducat ut et ipse ex animi sententia hic vivas et gens haec olim eruditionis Tuae singularis fructum percipiat!

Formulam $x(2x+1)$ ais non omnes exprimere numeros triangulares; ego vero in hac formula non sumsi x pro exponente terminorum, sed diserte monui posse in locum x substitui numeros quosvis integros, adeoque et negativos. Sed, ut verum fatear, demonstratio illa mihi ipsi non satisfacit, ideo aliam excogitavi, quam cum perlegeris una cum litteris ad Cl. Fratrem Tuum mittas oro . . . .*). Veritatem theorematis ab eo inventi deduco ex similitudine trium segmentorum FH, GH, et FG (segmenta enim brevitatis causa denominabo a subtensis, circulos a centris suis).

Sit (Fig. 9) diameter circuli $P =$ diametris circulorum S et T. Si circulus S sit provolutus usque ad punctum quodcunque F, et ducatur linea quaecunque FG ex puncto contactus F ad circumferentiam circuli P, patet fieri duo segmenta similia FH et FG. Sed quia semicirculus CE progrediendo ab E in G relinquit tantam circumferentiae partem quantam semicirculus CA progrediendo eodem tempore ex A in F, sequitur residua semicirculorum, seu segmenta FH et HG, etiam esse similia, ergo FH ad HG ut AC ad CE, ergo segmenta circulorum provolutorum semper concurrent in communi puncto H, quo describitur hypocyclois; inde etiam patet lineam FG secare ad angulos rectos tangentem hypocycloidis. Vale.

Goldbach.

---

*) Cette démonstration se trouvant rayée dans la minute de cette lettre, comme étant erronnée (ce qu'elle est en effet), nous avons jugé convenable de la supprimer.

CORRESPONDANCE

ENTRE

DANIEL BERNOULLI

(né le 29 janvier 1700, mort le 17 mars 1782)

ET

GOLDBACH

1723 — 1730.

Fac-simile de l'écriture de **Daniel Bernoulli** *Joh. F. 1745*

Hochedelgeborner
Hochgeehrtester Herr Professor!

Überbringer dieses ist Hl. Licentiat Ramspeck welcher mich ersucht ihm einen brief an Ew. HEdgb. mit-zugeben; ich hab ihm solches umb so viel weniger abschlagen wollen, als ich versichert bin, daß Ew. HEdgb. von sich selbsten aller liebe und freündschaft für ihn fassen werden; wan meine recommendation noch etwas dazu beytragen kan, so will ich solche von hertzen beygefügt haben. Dem Hl. Maupertuis bitte mein compliment abzulegen. Hl. Clairaut ist nun beschäftiget elementa algebræ zu schreiben. Übrigens referire mich auf mein letzteres und verbleibe mit aller ersinnlichen hochachtung

Ew. Hochedelgebornen

Basel den 25. Xbris
1745.

gehorsamster diener
Daniel Bernoulli.

Lith. par Davignon

LETTRE I.

GOLDBACH à D. BERNOULLI.

=

SOMMAIRE. Ouverture du commerce littéraire. — Sommation des séries de fractions dont les numérateurs et les dénominateurs forment une progression arithmétique quelconque.

Cremnitio d. ult. Maii 1723.

Etsi semper litteras D. Fratris Tui magna cum voluptate lego, tamen insolita laetitia nuper affectus sum, quod post alia sua in me merita Tuam quoque amicitiam mihi obtulit, quam equidem omni studio ac deligentia assidue colam. Interea ne inanes Tibi litteras mittam, significo me incidisse in methodum summandi seriem infinitam quamcunque, cujus numeratores ac denominatores proportione quavis arithmetica progrediantur, vel demonstrandi seriem datam omnino non esse summabilem, si hoc unum postulatum concedatur, videlicet seriem $\frac{1}{f+1}+\frac{1}{2f+4}+\frac{1}{3f+9}+\frac{1}{4f+16}+$ etc. (cujus formula generalis, posito x pro exponente terminorum, sic exprimi potest $\frac{1}{xx+fx}$) non esse summabilem si f sit numerus non integer. Sed ignosces mihi, si aliquid a me inventum dicam, quod fortasse jam alii me ignaro invenerunt, sin ab aliis hoc praestitum nondum est, methodum meam libentissime Tecum communicabo. Vale.

Goldbach.

LETTRE II.

D. Bernoulli à Goldbach.

Sommaire. Réponse à la lettre précédente. — Théorème des lunules. — Méthode de Newton pour trouver les diviseurs composés.

Venetiis d. 10. Julii 1723.

Litterae Tuae, quibus me cohonestare voluisti, acceptissimae mihi fuerunt summaque laetitia semper, quas porro dabis, accipiam. Doleo autem illas tam longam in itinere moram nectere, nam nudius tertius demum mihi redditae fuerunt, quas ultimo Maii scripsisti. Nescio an mentem Tuam bene assecutus fuerim, cum significas, *Te in methodum incidisse summandi seriem infinitam quamcunque, cujus numeratores ac denominatores proportione quavis arithmetica progrediantur vel demonstrandi seriem* datam omnino *non esse summabilem si etc.* (ubi per *infinitam* sine dubio intelligis *infinitos terminos habentem*). Nam summam talis seriei semper infinitam neque proin summabilem esse facile demonstro. Methodum itaque Tuam, quam promittis, avide expecto.

Memini Te in penultimis ad Fratrem meum datis (in quibus elegantissime infinitas lunulas quadrabiles exhibes) meam idem praestandi methodum desiderasse. Duas inveni, quarum altera generalior, altera vero concinnior et elegantior videtur et consistit in eo, ut (Fig. 10) circulo *ABC* inscribantur duae lineae *AB*, *AC*, tales, ut quadratum primae bis, ter, quater etc. sumtum sit aequale quadrato secundae, deinde super linea *AB* construatur segmentum circuli *ADB*, segmento *ABC* simile, quo facto erit lunula *ADBE* quadrabilis.

Nuper Mathematicus quidam a me petiit demonstrationem methodi Newtonianae inveniendorum divisorum compositorum, Newtoni Arithmeticae universali pag. 43 et seqq. insertae, addens se frustra ex Hermanno et Nicolao Bernoullio (dum professoris munere Patavii fungerentur) illam quaesivisse. Demonstrationem inveni eamque non ita nodosam, ut prima fronte videtur, deprehendi. Tecum, si volueris, illam lubenter communicabo. Vale, Vir Clarissime, et amicitia Tua dignari perge Tui observantissimum

Dan. Bernoulli.

LETTRE III.

GOLDBACH à D. BERNOULLI.

SOMMAIRE. Séries infinies et sommabilité des séries. Problème des lunules quarrables.

Cremnitio d. 26. Augusti 1723.

Cur tam diu in itinere morentur epistolae nostrae non intelligo, nam et gratissima Tua, 10. Julii scripta, 22. Aug. mihi demum reddita est. Hanc ad Felzium dirigam, Tuam si ita placuerit, Rotenhofero, mercatori germano Venetiis degenti, amico Felzii, tradi curabis, sic spero utraeque multo citius advenient. — Nomine seriei infinitae utique intelligo infinitos terminos habentem, et cujus summa infinita est, eam inter insummabiles numero; utrum vero infinita sit, nec ne? facile ex ipsa formula generali terminorum dignoscitur, hic enim nobis sermo tantum est de iis seriebus, quae habent exponentem terminorum in formula generali, evectum ad potestates numerorum integrorum, v. gr. $\frac{1}{x^2+4x+5}$ et similibus, non vero de aliis ubi vel fracti vel surdi numeri loco

12

potestatum reperiuntur ut $\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{7}{3}}+x^{\sqrt{2}}}$ et similes, cujusmodi series per se insummabiles forent. Ubi autem in formula generali habetur x evecta ad potestates numerorum integrorum, illico apparet, an summa ejus seriei finita sit an infinita. Quodsi enim maxima potestas ipsius x in denominatore plus quam unitate excedat maximam in numeratore $\left(\text{v. gr. } \frac{x^2}{x^5+x+1} \text{ vel } \frac{1}{x^2} \text{ etc.}\right)$ seriei summa erit finita, sin secus, infinita, ut $\frac{1}{x}$ vel $\frac{x}{x^2+2}$ et sim. Sed ut ad rem redeam, data quaecunque series hujus formulae $\frac{e}{x^2+px+q}$, vel quod eodem redit, $\left(\frac{e}{x+m}-\frac{e}{x+m+f}\right)$, summabilis erit quoties f fuerit numerus integer, v. gr. si detur series

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\text{etc.}$$

cujus formula generalis $\frac{1}{x^2+2x}$, ubi $e=\frac{1}{2}$, $m=0$, $f=2$, quia f est numerus integer, certo constat seriem datam esse summabilem; atque ultra progrediendo si detur formula

$$\frac{x^2+Ax+B}{x^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F}$$

fiat haec aequalis duabus simplicibus

$$\left(\frac{e}{x+m}-\frac{e}{x+m+f}\right)+\left(\frac{h}{x+n}-\frac{h}{x+n+k}\right)$$

et videatur an haberi possint f et k in numeris integris expressae per quantitates datas A, B etc. quod, si obtineatur, series certo erit summabilis, sin minus, summari non poterit, saltem ex hypothesi quam in prioribus litteris meis adduxi. Si potestas maxima ipsius x in denominatore esset 5 vel 6, formula generalis fieri deberet aequalis tribus simplicibus, atque sic porro. Methodum Tuam infinitas lunulas quadrabiles inveniendi disertius aliquanto explicatam cuperem, nam sic ut verba Tua habent, res mihi non visa est succedere; fiat enim (ut facili exemplo utar) in Fig. 10. linea $AB = 1$, $AC = \sqrt{3}$, segmentum $ABE = k$. Invenietur per vulgarem Geometriam lunula $ADBE = \frac{k}{3} + \frac{5\sqrt{3}}{12}$, quae si esset quadrabilis, ipsius quoque segmenti k, atque adeo totius circuli quadratura inventa foret. — Quae sit Newtoni methodus inveniendorum divisorum compositorum plane ignoro, itaque mihi tanto gratius erit et hanc ipsam et demonstrationem ejus ex litteris Tuis discere. Vale . .

Goldbach.

LETTRE IV.

D. Bernoulli à Goldbach.

Sommaire. Méthode de Jacques Bernoulli pour la sommation des séries de Leibniz. Rectification de la méthode précédente des lunules quarrables. Autre problème des lunules.

Venetiis d. 2. Octobr. 1723.

Magna cum voluptate perlegi methodum Tuam egregiam inveniendi summam seriei, cujus terminorum numeratores et denominatores progressionem quandam arithmeticam formant, vel ejus impossibilitatem demonstrandi. In omnibus quae dixisti Tecum sentio; non tamen ita liquent quin profundiore examine indigeant. Videris procul dubio Jac. Bernoulli tractatum de seriebus, ubi eodem fere artificio utitur ad serierum aliquarum (praesertim earum, quarum Leibnitius in Actis Lips. pro quadratura circuli et hyperbolae mentionem facit) summam inveniendam, id nimirum tentans ut seriem propositam in duas alias resolvat, quarum termini se invicem destruant, exceptis aliquibus primis in alterutra serie manentibus. Videbis quoque in tractatu illo, auctorem reperire non potuisse summam hujus seriei $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} +$ etc.; sed video idem exemplum regulam Tuam subterfugere; nec satis perspectum habeo an regula se extendat ad exempla ubi x duas dimensiones transcendit, si enim illa in series simplices resolvere velimus, plures se offerrent aequationes (quibus satisfaciendum est) quam adhiberi possunt litterae arbitrariae in formulis series simplices exprimentibus.

Recte monuisti, Vir Clar., methodum meam infinitas lunulas quadrabiles determinandi esse erroneam. Error ex praecipitantia venit; debebam enim in litteris meis addere: *arcubus AEB et ABC* (Fig. 10.) *eam assignandam esse rationem, quae assumta fuit inter quadrata AB et AC*; sic (ut exemplum a Te propositum retineam) si ratio inter $\square\, AB$ et $\square\, AC$ assumitur subtripla, AB ponenda est $= \sqrt{(3 - \sqrt{3})}$ supposito radio $= 1$. Intellexi ex Fratre meo, problema sibi a Te propositum fuisse tale: A duabus lunulis, ex duobus circulis se invicem secantibus ortis, resecare partes aequales, ita ut rectae spatia aequalia resecantes simul sint aequales. Problema curiosum mihi visum est et cujus solutio non statim obvia: Infinitos casus ita circino et norma construo: (Fig. 11.) Centro G radio GH describatur circulus HLI, deinde centro F ad libitum sumto describantur circuli $BLCA$ et EN; radius circuli $HLI = 1$, radius circuli $BLCA = \sqrt{2}$ et radius circ. $EN = \frac{1}{2}$. Per punctum G ducatur linea HE tangens minorem circulum; ducatur FC transiens per punctum contactus E; sumatur $DE = EF$ et agatur AB perpendicularis ad CF. Ductis dein rectis AI et BH, erit spatium $HLB =$ spatio ALI et recta $BH = AI$. Q. E. F. Demonstrationem nisi vides, libenter communicabo. Infiniti hoc modo exhibentur casus, sed infinitos alios superaddere possum magis tamen compositos.

Methodus Newtoni inveniendorum divisorum compositorum aequationum ad cyphram reductarum extat in ipsius Arithmetica universali p. 45 et seqq. Demonstratio illius perfacilis est, neque dubito quin illico sis eam inventurus, si Newtoni methodum perlegeris; caeterum nimis prolixa est quam ut litteris transcribi possit. Vale et fave . .

Dan. Bernoulli.

P. S. Si rarius a Fratre litteras accipis, ne mireris; est enim negotiis obrutus, neque meditationibus mathematicis multum vacare potest.

LETTRE V.

Goldbach à D. Bernoulli.

=

Sommaire. Continuation sur les séries et les problèmes des lunules.

Novosolio d. 4. Novemb. 1723.

Litteras a Te datas Venetiis die 2. Oct., 27mo ejusd. accepi. Vehementer gavisus sum Tibi probari quae de seriebus infinitis scripseram. Cum Oxonii agerem A. 1712 atque per unum alterumve diem communi diversorio uterer cum consobrino Tuo Cl. Nicolao Bernoullio, donavit me dissertatione quadam Jacobi Bernoullii de seriebus infinitis quae, ut puto, pars est integri libri de hoc argumento conscripti, sed tum temporis illa adeo sive difficilia, sive obscura mihi videbantur, animus praeterea rebus aliis distractus erat, ut meditationi locus non fuerit. Igitur primum de serierum summis aliquid cognoscere coepi cum eas, quas Leibnitius in Actis Erud., occasione quadraturae circuli commemorat, attentius considerarem anno circiter 1717, quod ut facerem promovebar Hugenii notis manuscriptis ad Acta Erud. mecum communicatis a Cl. Georgio Henrico Rastio, nunc Math. Professore extraord. Regiomonte in Prussia. Is Hugenius seriei, cujus summam Leibnitius invenerat, aliam assignavit, secundum Wallisium, ut ait, quanquam locus ille Wallisii nec allegatus erat nec a me unquam visus est. Itaque cum seriem illam pro meo captu examinarem, non solum deprehendi Leibnitium summam ex vero enunciasse, sed simul incidi in formulam generalem summarum, quae scilicet summa ad datum quemcunque terminum complecteretur. Postea in Suecia familiariter usus sum Cl. Duhrio in Arithmetica et Mechanica valde exercitato, cui cum aliquando dicerem non facile excogitatum iri seriem numerorum integrorum, cujus summae ad datum quemvis terminum non possent generali formula exprimi, idque multis exemplis serierum quas ipse mihi proposuerat comprobarem, illius hortatu cogitare etiam coepi de seriebus numerorum fractorum ad certas leges redigendis, ex quibus de ipsarum serierum summabilitate constare posset; unde mihi subnatum est *Specimen methodi ad summas serierum,* quod cum nonnullis amicis communicavi, et eorum nescio quis Actis Erud. A. 1720 curavit inserendum, quin et Cl. Rastius idem specimen peculiari dissertatione, mihi necdum visa, illustravit. Interea ego, paulo post editum specimen, apud bibliopolam germanum qui Lipsia Holmiam venerat in Jacobi Bernoullii artem conjectandi incido, cui junctus est liber de seriebus, quem cum paucis diebus apud me habuissem, facile cognovi auctorem id, quod in specimine meo praecipuum erat, jam tradidisse et reliqua, quae protuleram, sine dubio perspecta habuisse, hoc solo quantum recordor discrimine, quod ille potius summam seriei totius, ego vero summam ad datum quemvis terminum respexeram; memini quoque eum, uti ais, reperire non potuisse summam hujus seriei $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} +$ etc., cujus tamen determinationem jam tum cognovi aeque esse difficilem, ne dicam impossibilem, quam circuli quadraturam; sed non satis scio an ad eos casus progressus sit auctor, qui duas potestates ipsius x superant, quin imo de hoc tanto magis dubito, quod ipse ambigere videris an mea methodus eo extendi possit, qua de re mentem meam ut potero explicabo: In prioribus litteris omnes series hujus formulae $\left(\frac{e}{x+m} - \frac{e}{x+m+f}\right)$ vocavimus simplices, jam vero et has in diversos ordines distribuere commodum erit, scilicet ubi $f = 1$ vocabimus seriem seu formulam *primi ordinis*, ubi $f = 2$ *secundi ordinis*, et sic porro. Quo posito certum est omnes series *secundi, tertii et reliquorum ordinum* resolvi posse in totidem series *primi ordinis*, quot ipsa f continet unitates. Sed omnes formulae generales summarum (in seriebus quarum numeratores et denominatores proportione arithmetica crescunt) redigi poterunt ad sequentes, posita summa $= a$

$$A \dots \frac{ax}{x+m}, \quad B \dots \frac{ax^2+bx}{x^2+mx+n}, \quad C \dots \frac{ax^3+bx^2+cx}{x^3+mx^2+nx+p},$$

atque sic porro, ubi A convenit uni seriei *primae*, B continet duas *primas*, C continet tres *primas*, etc. Quodsi igitur ostendi poterit seriei datae summam generalem neque esse A neque B, neque caeteras, sine dubio ostensum erit seriem prorsus summari non posse; igitur si, ex. gr., series hujus formulae $\frac{x^2+Ax+B}{x^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F}$ fiat aequalis duabus simplicibus

$$\left(\frac{e}{x+m} - \frac{e}{x+m+f}\right) + \left(\frac{h}{x+n} - \frac{h}{x+n+k}\right)$$

ex tribus his unum necessario eveniet, nempe quantitates f et k

vel (I) aequales fieri poterunt numeris integris, eoque casu series erit summabilis,

vel (II) aequales fient numeris constantibus, sed non integris, quare series ipsa non erit summabilis,

vel (III) alterutra harum quantitatum non poterit reduci ad numerum constantem, ergo nec series summabilis erit.

De tertio praesertim casu sic argumentari licebit: Si formula seriei $\frac{x^2 + Ax + \text{etc.}}{x^4 + Cx^3 + \text{etc.}}$ aequari non potest duabus simplicibus, multo minus aequari poterit tribus simplicibus (quoniam hoc pacto adhuc plures aequationes offerrentur quam adhiberi possent litterae arbitrariae in formulis serierum simplicium) multo minus quatuor et sic porro, quae ratiocinatio cum in infinitum procedat, patet ejusmodi seriem datam nullam formulam summarum admittere, adeoque nec summabilem esse. Objici quidem posset dari nonnunquam summam seriei etiam si non detur formula generalis summarum, ut, si ex singulis terminis seriei $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} +$ etc. (cujus denominatores sunt series numerorum primorum) subtrahantur singuli termini seriei $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11}$ etc. fiatque series $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{2}{15} +$ etc., nullum est dubium quin summa seriei sit 1. Verum hic casus plane a nostro diversus est, nam talis seriei nequidem termini generali formula finita exprimi possunt, ergo multo minus summae, adeo ut exemplo Archimedis qui, da mihi, inquit, locum extra terram, terram movebo, hic dicere liceret, da mihi formulam generalem terminorum, dabo tibi formulam summarum. Sed ut ad rem redeam, non dissimili argumento posset ostendi seriem nullam, ubi f sit numerus non integer, esse summabilem, propterea quod ejus formula summarum neque esset A neque B neque caeterarum ulla, ex. gr. si fiat $f = \frac{1}{2}$, quod contingit in serie

Leibnitiana pro quadratura circuli, adeo ut postulatum illud, quod primis meis litteris significavi, jam pro demonstrato haberi posse videatur. Sed haec omnia Tuo judicio subjecta sunto.

Valde mihi placuerunt problematum duorum constructiones, quas mecum communicasti, quandoquidem eas non solum veras sed perquam ingeniosas deprehendi. Priorem, quae infinitas lunulas quadrabiles exhibet, deduco ex theoremate sequenti: Sint duo circuli semet secantes, alter c, alter $\frac{c}{p}$. Inscribatur circulo c area quaecunque quadrabilis a (in Fig. 12. $ABCK$) ea lege, ut spatium residuum $c - a$ sit ad spatium $ADBE$ ut c ad $\frac{c}{p}$, erit spatium $ADBN$ ad aream circulo c inscriptam ut $\frac{c}{p}$ ad c, hoc est lunula $ADBN = \frac{a}{p}$.

De altero problemate jam in litteris ad Cl. Fratrem Tuum conjeceram si quis solutionem tentaverit, eum aut nullam inventuram aut infinitas, et si mihi tantum unica nota esset antequam Tuas viderem, quae omnes ex hoc theoremate fluunt: (Fig. 13.) Parti cuicunque circuli, $ABCD$, sit aequalis semicirculus EFG et triangulum ABD fiat $=$ quadrilineo $FDBE$ hac lege, ut latus BE sit $= DF$, erunt lunularum partes BEG et DFG aequales, a rectis aequalibus abscissae.

Habeo in Prussia Newtoni Arithmeticam universalem. Cum occasio erit evolvendi librum, inquiram in methodum de qua scribis. Nunc recordor Franciscum a Schooten, in Commentar. ad Geom. Cartesii, methodum alicujus Batavi commendare ad inveniendos divisores ultimi termini, sed eam fallacem esse jamdudum expertus sum. Cl. Fratrem Tuum, negotiis multis impeditum, ad alia revocare iniquum foret, si vero ulla in re illi utilis esse potero, paratum me quovis tempore inveniet. Vale . . Goldbach.

LETTRE VI.

D. Bernoulli à Goldbach.

Sommaire. Séries de nombres entiers dout ni la somme jusqu'à un terme quelconque donné, ni ce terme non plus ne peuvent être exprimés par une formule générale. Série de Montmort et ses propriétés. Problème de Diophante. Ressentiment contre quelques géomètres italiens.

Venetiis d. 18. Decembr. 1723.

Jam ante aliquot septimanas ultimas Tuas ad me datas accepi; citius nisi negotiis impeditus ad eas respondissem; semper in votis habui, ut libere meditationibus mathematicis indulgere liceret, sed rerum mearum conditio medicis potius quam mathematicis studiis ut incumbam jubet. De notis Hugenianis ad Acta Lips. manuscriptis multa ab diversis audivi, sed aliam summam seriei (cujus veram Leibnitius invenit) ab Hugenio assignatam esse, ignoravi; adeo verum est, quod inquit Horatius, *quandoque bonus dormitat Homerus.* An et ubi Wallisius, quem Hugenius citat, de serie illa scripserit, non recordor, etsi pleraque Wallisii opera attente satis perlegerim. Elegantissimi speciminis Tui

Actis Lips. A. 1720 inserti non meminissem, nisi illius mentionem fecisses in ultima Tua epistola; illud de novo perlectum valde placuit et quidem eo magis, quod nunc omnium demonstrationem facile perspexerim, quam prima lectione tantum obscure et quasi per transennam videram. Gratias quoque habeo Tibi de uberiori communicatione et explicatione ingeniosissimarum meditationum Tuarum circa series; nimis methodo Tuae confidere mihi videris, cum putas non facile excogitatum iri seriem numerorum integrorum, cujus summa non possit ad datum quemvis terminum generali formula exprimi. Infinitae occurrunt, quarum nec summam ad datum quemvis terminum nec ipsum terminum illum generali formula exprimere datur. Monmortius (ni fallor) alicujus seriei mentionem facit, quam ex hac classe censeo, nimirum hujus 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, etc. ubi quilibet terminus duorum praecedentium summa est. Nec haec series consideratu indigna est, utpote quae multis proprietatibus gaudet, sic v. gr. mihi observatum est, eam inservire pro radice quinarii quam proxime invenienda; si enim inter tres terminos qualescunque contiguos summa duorum extremorum dividatur per medium, accedet quotiens eo magis ad radicem quinarii, quo remotiores tres dicti termini selecti fuerint, qui si sumantur v. gr. 21, 34, 55 erit $\frac{21+55}{34}$ proxime $= \sqrt{5}$. Haec facile ex ipsa seriei natura demonstrantur, nec refert quales sint duo primi seriei termini. Si alia series simili facilitate construi et excogitari posset omnium numerorum radicum approximationi inserviens, illa in praxi utilissima foret, quin etiam scio Leibnitium talem desiderasse.

Habet porro praedicta series proprietatem curiosam et elegantem a Patrueli meo Nicolao Bernoullio observatam;

nempe si ex terminis ejus alternis et numero imparibus nova formatur series talis 0, 1, 3, 8, 21, 55 etc. erunt semper tres termini contigui ita constituti, ut producta singulorum per singulos unitate aucta faciant totidem numeros quadratos, veluti si sumantur 3, 8, 21 erunt $3.8+1$, $3.21+1$, $8.21+1$ quadrati numeri, et si formetur ex primae seriei terminis numero paribus talis 1, 2, 5, 13, 34 etc., illa eandem habebit proprietatem, si producta unitate diminuantur. Sex circiter abhinc annis, cum Heidelbergae medicinae addiscendae ergo agerem, problema mihi propositum fuit prorsus simile sed difficillimis Diophanteis annumerandum, cujus solutiones tamen infinitas dedi; problema tale est: invenire numeros quatuor tales, ut sex producta ex singulis per singulos unitate aucta semper sint quadrata. Haud raro mihi contingit, quod Leibnitio (si licet exemplis in parvis grandibus uti) nempe, ut facilia mihi sint difficilia, et ut difficilia deveniant facilia. Problemata hujusmodi Diophantea saepe magnum usum obtinent pro integrandis quantitatibus differentialibus, et iis saepius in diversis problematibus integrationem postulantibus usus sum, unde miror illa adeo inexculta jacere. Olim a Roberwallo, Wallisio, Fermatio etc. vel nimio fervore agitata fuerunt, etsi usus eorum ipsis lateret.

Magnopere gaudeo, meas duorum problematum solutiones Tibi non displicuisse; illas quidem ex aliis, quam putas, theorematis deduxi, sed tamen illis a Te allegatis affinibus. Posterioris solutiones toties infinitas quot prioris simplices exhibere possum, sed etiam aliis methodis insistens particulares casus habeo. Forsan his, quamvis ex communi geometria depromtis, uti cogar ad quorundam malevolorum Italorum, quibus haec proposueram, invidiam reprimendam. In Newtoni Arithmetica universali non quaeritur modus inveniendorum divisorum alicujus termini sed integrae aequationis: Sic aequatio $x^4 + x^3 - 2xx - 3x - 3 = 0$ se dividi patitur per divisorem arte determinandum $xx - 3$.

Forsan hac hyeme per aliquot menses Patavii commorabor pro Anatomia sub Cel. Morgagni auspiciis facienda. Multos mechanismos in corpore humano observavi, et deprehendi Borellum minime materiam illam exhausisse.

Vale et fave . .

Dan. Bernoulli.

LETTRE VII.

Goldbach à D. Bernoulli.

Sommaire. Réponse à la lettre précédente. Continuation sur les séries de nombres entiers. Problèmes de Diophante.

Vindobona d. 2. Februar. 1724.

Redditae mihi fuerunt ultimae Tuae 2. Januarii Novosolii in Hungaria. Pauca quidem continent, sed dignissima quae cum cura legantur atque examinentur. Inveni nuper in libello quodam meo verba Hugenii ex notis MS. ad Acta Erud. A. 1682 p. 46 l. ult. (quae jam memoria exciderant)

Immo $\frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{96} + \frac{1}{216}$ etc. *secundum Wallisium*

adeo ut seriei Leibnitianae non quidem aliam summam, sed potius summae a Leibnitio inventae aliam seriem assignaverit, quanquam ex verbis ejus colligere licet eum et de veritate summae Leibnitianae dubitasse. Praeterea ista designatio quatuor terminorum, utpote infinitis seriebus communis, satis ostendit quam lubrica sit ejusmodi designandi consuetudo, nisi lex progressionis omnium terminorum describatur, vel potius formula generali terminorum, si id fieri possit, exprimatur. Cum dixi non facile dari seriem numerorum integrorum, quae summari nequeat, utique eas intellexi series, quae formula generali exprimi possunt, nam cum termini non sint nisi differentiae summarum, perspicuum est, si termini ipsi formulam generalem non admittant, eam pro summis terminorum quaerendam non esse. Unde ergo dignoscimus, utrum data series terminorum integrorum, quae formulam generalem admittit, sit summabilis nec ne? Hanc quaestionem haud quidem scio an quis unquam deciderit; mihi autem videtur ex ipsa formula datae seriei decidi posse; nam si in formula potestas aliqua ipsius x (quam pono pro exponente terminorum) sit indeterminata, series data non erit summabilis, ut $a^x x^b$ summari non poterit, quatenus b, potestas ipsius x, est indeterminata. Sin fuerit $a^x x$, summari poterit (ad datum quemvis terminum) ob contrariam causam. Quodsi exemplum Tibi occurrit, quo hanc regulam destrui putas, gratissimum mihi facies, si communicaveris. Consideravi cum voluptate seriem quam producis 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, etc. antea mihi plane ignotam, et incidi ejus ductu in aliam seriem 3, 7, 18, 47, 123, 322, etc., ubi si sumantur tres termini contigui, aggregatum extremorum semper erit triplum medii, cujus seriei haec est singularis proprietas, quod cum ipsa formulam generalem non admittat atque ex terminis rationalibus constat, tamen terminos medios surdos habeat, cujusmodi seriem haud scio an quis unquam protulerit, quamvis hac jam cognita, aliae quotlibet similes excogitari possint. Est autem terminus medius inter 3 et $7 = 2\sqrt{5}$, inter 7 et $18 = 5\sqrt{5}$, inter 18 et $47 = 13\sqrt{5}$ atque sic porro, multiplicando terminos pares seriei a Te allegata per $\sqrt{5}$.

Caeterum desiderato Leibnitiano conveniet series hujus naturae, ut datis duobus quibuscunque terminis contiguis a et b, tertius sit vel $a+b$, vel $a+(f-2)b$, alternatim, scilicet sint m et n numeri quicunque et fiat series

$$m, n-m, n, nf-m-n, nf-m, nf^2 \quad mf-nf-n+m,$$
$$nf^2-mf-n, \text{ etc.}$$

sed compendii causa ponamus $m=0$, $n=1$, fiet eadem series

$$0, 1, 1, f-1, f, f^2-f-1, f^2-1, f^3-f^2-2f+1,$$
$$f^3-2f, f^4-f^3-3f^2+2f+1, \text{ etc.}$$

Sumtis autem ex hac serie duobus quibuscunque terminis contiguis a et b, si a sit ex locis terminorum imparibus, fiet $\frac{2a+b}{b}$ numerus, qui eo propius accedet ad $\sqrt{(f+2):(f-2)}$, quo major fuerit a. Contra, si a sumatur ex locis terminorum paribus, fiet $\frac{2a:(f-2)+b}{b}$ numerus, qui eo propius accedet ad idem $\sqrt{(f+2):(f-2)}$, quo major fuerit a: hoc tamen discrimine, quod priori casu semper habetur valor deficiens, posteriori, excedens. Sic v. gr. pro $\sqrt{2}$, ubi fit $f=6$, si a sit terminus nonus seriei $=204$, $b=985$, fiet $\frac{2a+b}{b}=1\frac{408}{985}$; sin a sit terminus octavus $=169$, $b=204$, erit $\frac{2a:(f-2)+b}{b}=1\frac{338}{816}$; hic major quam $\sqrt{2}$, ille minor, totus vero excessus et defectus non erit nisi $\frac{1}{406380}$.

Alterum quod commemoras problema paulo generalius proponi potest: *Dato quovis numero integro, invenire tres alios ea lege, ut sex producta ex singulis per singulos, unitate aucta, semper sint quadrata,* nam et sic propositum infinitas solutiones continet. Sit datus quicunque integer $=a$. Sumatur alius quicunque integer (praeter ± 1) $=m$, fiat $n=\frac{a-am-1}{a}$, $p=2am^2-2am+4m-2$, satisfacient quaesito reliqui tres numeri infinite variabiles am^2+2m, an^2+2n et ap^2+2p*). Quomodo vero ejusmodi problemata de numeris in calculo integrali adhiberi possint, non satis intelligo, nisi exemplo aliquo declares. Quae de aliis duobus problematibus geometricis scribis, abunde testantur quam in his rebus sis exercitatus. Optarem ut ea publici juris in Actis Erud. faceres, quo facto non solum malevolorum, uti ais, invidiam reprimes, sed etiam eos, qui eruditionem Tuam ex merito aestimant, obligabis. Interea ut aliquid etiam de meo addam, quod ad numerorum mysteria pertineat, observavi nuper, si quantitates a, n, p, x sint numeri integri, in hac aequatione $a^x = 2np - n$ fieri posse, ut determinata n, determinetur etiam x, licet a et p maneant indeterminatae; nam si ponatur $n = 2$, erit x necessario $= 1$; si $n = 4$, erit $x = 2$; si $n = 8$, erit $x = 3$. Vale.

Goldbach.

---

*) Radices sex sunt $am+1$, $an+1$, $ap+1$, $amn+1$, $anp+n+1$, $amp+p+1$.

LETTRE VIII.

GOLDBACH à D. BERNOULLI.

SOMMAIRE. Amendement à la lettre précédente. Théoreme des courbes quarrables.

Vindobonae (sans date) 1724.

Cum rursus considerarem quatuor illos numeros inventos, observavi me pro a et m, ut res eo, quo dixeram, modo succederet, requirere debuisse non solum numeros integros, sed etiam affirmativos, si enim alter negativus sit, alter affirmativus, patet quaesito non satisfieri, quem errorem, etsi exiguus est, tamen emendandum hisce duxi.

Ante duos circiter annos ad Cl. Fratrem Tuum scripsi, si in curva aliqua sit abscissa x, semiordinata

$$y = \frac{1}{1+f+m} x^m + \frac{1}{2+f+m} x^{m+1} + \frac{1}{3+f+m} x^{m+2} + \text{etc.}$$

(cujus formula generalis, posito π pro exponente terminorum est $\frac{1}{\pi+f+m} x^{m+\pi-1}$), curvam semper esse quadrabilem, si f sit numerus integer affirmativus, m numerus quicunque, item si fuerit $y =$ seriei

$$\frac{a^2-a+1}{a+1}x^{a^2+1}+\frac{a^3-a^2+1}{a^2+2}x^{a^3+2}+\frac{a^4-a^3+1}{a^3+3}x^{a^4+3}+\text{etc.},$$

cujus formula generalis est

$$\frac{a^{\pi+1}-a^{\pi}+1}{a^{\pi}+\pi}x^{a^{\pi+1}+\pi}$$

ubi pro a poni potest numerus quicunque. Si in his putas esse aliquid, quod ulteriori meditatione sit dignum, multo generaliora invenire possem; sin haec jam ab aliis exhausta sunt, nollem actum agere. Vale.

Goldbach.

LETTRE IX.

GOLDBACH à D. BERNOULLI.

SOMMAIRE. Restriction de l'amendement précédent.

Vindobonae d. 19. Februar. 1724.

Nescio quare mihi nuper in mentem venerit emendare errorem, qui nullus erat. Nunc re melius perspecta, in illius problematis solutione haec duo tantum cavenda esse observo: 1. ne sumatur $m = 1$, 2. ne dato $a = \pm 1$, sumatur $m = [-(\text{vel} +) 3 \pm (\text{vel} +) 1] : 2$, hoc est, ne dato $a = 1$, sumatur $m = -1$ vel $m = -2$, nec dato $a = -1$, sumatur $m = 2$*). His nimirum casibus exceptis, dato pro a numero quovis integro, pro m sumi poterit integer quivis, ut primo scripseram. Quod superest rogo ut iteratis litteris ignoscas, mihique favere pergas. Vale . .

Goldbach.

*) Addendum: ne dato $a = 2$, sumatur $m = -1$.

LETTRE X.

D. Bernoulli à Goldbach.

Sommaire. Querelle avec les savans italiens. Problème du calcul des probabilités. Continuation sur les séries de nombres entiers. Problème de Diophante, proposé par Goldbach, et son usage dans le calcul intégral. Limitation du théorème proposé à la fin de la 7ème lettre. Théorème des courbes quarrables.

Venetiis d. 18. Martii 1724.

Tres epistolas Tuas accepi successive: Ignosce, quaeso, quod responsionem ad illas aliquandiu distuli; multis taediosissimis occupationibus immersus, citius respondere non potui. Totus ab aliquo tempore sum in retundendis Priccati, Prizetti aliorumque calumniis, quibus non solum me, sed Patrem, Patruumque accumularunt modo unum, modo alium in bibliothecis hujus civitatis erroris commissi accusando, non sine acribus intermistis salibus, quasi scilicet soli saperent. Haec et alia diu ex aliis summa patientia intellexi, sed tandem mihi mota bilis fuit atque, ut errata illa in chartam conjicerent, inculcare feci: quo facto, difficile non fuit ostendere, se nequidem intellexere, quae tanta indignatione damnarunt. Inter alia nobis sermo fuit de ludo quodam ex arte conjectandi tali: Petrus et Paulus colludunt pro deposito $2A$, ita ut Petrus duos casus habeat favorabiles, Paulus unum, et unus sit casus, in quo ludus a novo incipiendus, donec evenerit unus ex tribus primis casibus. Petrus autem tenetur deposito addere successive A, $2A$, $4A$, $8A$ etc. quoties quartus contigerit casus. Per casum Petro vel Paulo favorabilem intelligo talem, quo unus vel alter depositum totum (quod erit vel $2A$, vel $3A$, vel $5A$, vel etc.) recipit simulque ludo finem imponit. In hoc ludo inveni sortes Petri et Pauli esse ut 7 ad 5. Si calculum instituere volueris, libenter ex Te scirem, an in eandem rationem incideris.

Jam ad epistolas Tuas respondebo, in quibus omnia sunt elegantissima et acutissima. Seriem Tuam

$$(A)\ 3,\ 7,\ 18,\ 47,\ 123,\ 322,\ \text{etc.}$$

constare deprehendi ex terminis numero imparibus seriei, cujus legem in ultimis explicui, (B) 3, 4, 7, 11, 18, 29, etc. Consideretur nunc series (C) 0, 1, 1, 2, 3, etc. supponanturque in illa tres termini contigui a, b, $a+b$, quorum exponentes sint m, $m+1$, $m+2$, inveni fore tres terminos contiguos eosdem exponentes habentes in serie

$$(B)\ 3a-b,\ 2b-a,\ 2a+b.$$

Posito nunc m aequali numero infinito, apparet fore terminos tres in utraque serie continue proportionales, ex qua consideratione fluit $b=\frac{a+a\sqrt{5}}{2}$, unde habentur tres termini contigui ex serie (C) a, $\frac{a+a\sqrt{5}}{2}$, $\frac{3a+a\sqrt{5}}{2}$, et tres termini correspondentes ex serie (B) $\frac{5a-a\sqrt{5}}{2}$, $a\sqrt{5}$, $\frac{5a+a\sqrt{5}}{2}$, quorum primus et tertius formabunt duos terminos contiguos seriei a Te allegatae (A), qui pro termino medio habent $a\sqrt{5}$, id est $\sqrt{5}$ multiplicatum per terminum (cujus exponens est m) depromtum ex serie (C). Et haec est theorematis Tui demonstratio atque fundamentum. Jam de meo aliquid addam circa hujusmodi series: 1° sit series (D) $a, b, a+b, a+2b, 2a+3b, 3a+5b, 5a+8b, 8a+13b$, etc. formeturque nova series ex terminis alternis incipiendo a quolibet termino, sintque in illa tres termini contigui m, n, p, erit $p = 3n - m$; porro iisdem factis hypothesibus, sed formata serie ex terminis ternis, erit $p = 4n + m$; si ex quaternis, erit $p = 7n - m$; notandum autem coefficientes ipsius n formare hanc progressionem 3, 4, 7, 11, 18, etc. et m sumi alternatim affirmative vel negative. 2° Positis in serie (D) duobus ultimis terminis p et q, erit summa omnium terminorum $= 2q + p - b$. 3° Unde sequitur requiri pro summatione seriei (D), ut dentur duo termini ultimi, qui ut eo facilius habeantur, inserviet solutio hujus problematis: Datis in serie (D) duobus terminis (quorum exponentes sint $m, m+1$), invenire in eadem serie terminos, quorum exponentes sint $2m, 2m+1$. Solutio problematis calculum postulat prolixum, qui compendiosior fit in hoc exemplo 1, 3, 4, 7, etc., in quo terminus, cujus exponens sit m, ponatur $= a$, erit terminus, cujus exponens est $2m, = aa \pm 2$; signum affirmativum sumitur, cum m est numerus impar, negativum, cum est par. 4° In serie 1, 1, 2, 3, 5, 8, etc. semper summa terminorum numero imparium aequatur termino pari ultimo termino impari succedenti. Hujusmodi proprietates multas addere possem, nisi temporis et spatii ratio habenda esset.

Series Tua desiderato Leibnitiano recte satisfacit; credo autem Leibnitium desiderasse seriem facile continuendam, qualis est series modo recensita. Tua vero paululum intricata est; satisfaceret etiam haec alia mox dicenda: Sit numerus, cujus radix invenienda, $4m+1$; fiat progressio talis $a, b, ma+b, mb+ma+b$, etc., ubi inter tres terminos contiguos, ultimus est aequalis aggregato ex medio et primo multiplicato per m; formata hac serie et sumtis in illa tribus terminis contiguis, erit summa duorum posteriorum, divisa per primum et diminuta quantitate $m+1$, aequalis $\sqrt{(4m+1)}$, id est, existentibus tribus terminis A, B, C, erit

$$\frac{B+C}{A} - m - 1 = \sqrt{(4m+1)}.$$

Id quod praesertim in hac serie notandum venit, est quod existente $4m+1$ aequali numero quadrato et factis

$$a = 1, \ b = \frac{1+\sqrt{(4m+1)}}{2},$$

progressio illa fiat geometrica perfecte quaesito satisfaciens. Sit $4m+1=9$, seu $m=2$, $a=1$, $b=2$, habebitur progressio $1, 2, 4, 8$, etc., in qua semper summa duorum terminorum contiguorum, divisa per praecedentem et diminuta ternario, dat radicem novenarii. Colligere exinde est, quinam numeri pro litteris a et b sint substituendi, ut series fiat instituto aptissima.

Solutio Tua quaestionis Diophanteae ingeniosa est. Quamvis enim analysin non perscripseris, vidi tamen, quibus artificiis in solvendo usus es; nam illud de novo solvens, incidi in easdem circiter formulas, quas mecum communicasti. Problema hoc difficilius mihi visum fuerat, cum prima vice illud solverem; eram autem tunc temporis, annum aetatis sextum vel septimum agens, in his studiis minus, etsi etiamnum parum versatus. Nunc considerans, posse tres numeros commode ex serie saepe nominata haberi, problema ita generalissime solvi: Datis tribus numeris quibuscunque a, b, c, invenire quartum q talem, ut $aq+1=\square$, $bq+1=\square$, et $cq+1=\square$, et inveni pro q non quidem valores infinitos, quod impossibile censeo, sed unicum per sequentem aequationem habendum $q = \frac{4app - 4p^3 - 4abp + 4bpp}{p^4 - 2abpp + aabb}$, ubi $p = \frac{2ab}{a + b - c}$.

Quomodo haec problemata Diophantea usui venire possunt in calculo integrali, videre est ex sequenti, quod primum se obtulit, exemplo: Sit sumendum integrale quantitatis $\frac{a^3 dx}{x\sqrt{(ax - xx)}}$, fiat $ax - xx = \square = \frac{aaxx}{mm}$, erit $x = \frac{amm}{aa + mm}$, et proinde $\sqrt{(ax - xx)} = \frac{aam}{aa + mm}$, $dx = \frac{2a^3 mdm}{(aa + mm)^2}$, adeoque tota quantitas proposita $\frac{a^3 dx}{x\sqrt{(ax - xx)}} = \frac{2a^3 dm}{mm}$, cujus integrale est $\frac{-2a^3}{m} = \frac{-2aa\sqrt{(a-x)}}{\sqrt{x}} = \int \frac{a^3 dx}{x\sqrt{(ax - xx)}}$. *Q. E. F.* Si bene memini quadratura circuli eo reducitur, ut inveniantur duo numeri quadrati, quorum summa pariter ac differentia faciant numerum quadratum.

Observatio Tua, quod a, n, p, x existentibus numeris integris in aequatione $a^x = 2np - n$, fieri possit, ut determinata n, determinetur etiam x, etsi a et p maneant indeterminatae, curiosa est atque magna cum voluptate theorema consideravi; sed vidi esse illud quodammodo limitandum. Sic cum dicis, quod n existente $= 4$, necessario sit $x = 2$, debuisset potius dici esse x necessario aequalem vel unitati vel binario; theorema ita enunciandum fuisset: in aequatione $a^x = 2np \pm n$ (ubi a, n, p et x ponuntur numeri integri), si sit $n = 2^m$, necessario erit x aequalis divisoribus ipsius m; ut si m sit $= 12$, dico non posse x alios habere valores quam 1, 2, 3, 4, 6, 12; potest autem unicuique esse aequalis. Horum demonstrationem Tu, qui theorematis es Auctor, nullo negotio perspexeris: Exemplum facilis calculi pro confirmatione regulae sit tale: $m = 4$, $n = 16$, satisfiet aequationi posito $x = 1$, $a = 16, p = 1$, vel $x = 2$, $a = 4, p = 1$, vel $x = 4, a = 2, p = 1$.

Duo theoremata circa quadraturam curvarum videntur facile deduci posse ex iis, quae jam ante aliquod tempus perscripsisti de seriebus; sumto enim valore $y\,dx$ et integrato quolibet seriei primae termino, oritur nova series, quam in casu $f =$ numero integro, summari posse ostendisti; ast nondum video quomodo series nova generaliter summari possit, posito pro x quocunque valore. Quaero itaque ex Te aream spatii, cum x ponitur aequalis dimidiae quantitati assumtae pro constante; quodsi x fuerit aequalis integrae huic quantitati, tunc posito pro f quocunque numero integro, area spatii illius curvilinei determinari potest, secus nihil de quadratura curvae mihi constat; rem per otium examinabo. Sed vereor ne patientia Tua abutar.

His igitur vale . .

Dan. Bernoulli.

LETTRE XI.

Goldbach à D. Bernoulli.

Sommaire. Essai d'une solution du problème du calcul des probabilités. Théorème de la théorie des nombres.

Dresdae d. 17. Aprilis 1724.

Litteras Tuas ultimas 13. Aprilis Dresdae accepi. Quae ad meas rescripsisti pergrata mihi sunt omnia; expendam singula accuratius cum Berolini ero, quo cras vel perendie proficiscar. Nunc tantum de ludo, cujus mentionem facis, dicam, etsi enim hujusmodi problema, quod ex arte conjectandi derivaretur, nunquam solverim, tamen in hoc, occasione a Te data, vires meas, nescio quam feliciter tentavi, atque ut generatim obtinerem rationem lucri Petri ad lucrum Pauli, finxi ludum illum in infinitum continuari et universum lucrum Petri esse $= 2a$. Porro, si ludus finiretur jactu uno, vocavi casum primum; si jactibus duobus, casum secundum; si tribus, tertium etc., unde ex conditionibus problematis argumentatus sum, si ludus, ut dixi, infinite produceretur, Petrum per casum primum lucraturum esse $\frac{6a}{4}$, Paulum vero per casum primum $\frac{3a}{4}$; deinde Petrum lucraturum esse per casum secundum $\frac{6a}{16}$, Paulum itidem $\frac{6a}{16}$; Petrum lucraturum esse per casum tertium $\frac{6a}{64}$, Paulum $\frac{12a}{64}$, ita ut summa totius lucri pro Petro reducatur ad hanc seriem

$$\frac{6a}{4}+\frac{6a}{16}+\frac{6a}{64}+\frac{6a}{256}+\text{etc.}=2a;$$

summa totius lucri pro Paulo, ad hanc

$$\frac{3a}{4}+\frac{6a}{16}+\frac{12a}{64}+\frac{24a}{256}+\text{etc.}=\frac{3a}{2},$$

quamobrem sors Petri ad sortem Pauli erit ut 4 ad 3.

Vale . .

Goldbach.

P. S. Causa erroris, quem rectissime emendas, in theoremate meo haec fuit, quod quaererem numeros infinitos, qui vel nullam radicem haberent vel quadratam, quales inveni $8p-4$; item numeros infinitos, qui vel nullam haberent radicem vel cubicam, quales inveni $16p-8$, quae dum ad formulam $a^x = 2np - n$ revocarem, sane attendere debebam, quovis valore dato pro n, sumi posse $x = 1$. Non tamen me poenitet erroris, qui Te, uti conjicio, ad rem omnem altius repetendam invitavit, unde theorema infinite generalius prodiret, id quod me quoque impulit, ut novum hoc invenirem: Si a, b, m, n, p, x sint numeri integri in hac aequatione

$$a^x = n^{m+1}p \pm bn^m,$$

n numerus primus quicunque, $b < n$, fore semper x aequalem alicui ex divisoribus m. Si ponamus $n = 3$, $m = 1$, ipsa aequatio suppeditat observationem, de qua plura, si vacat, in supplementis Lipsiens. ad ann. 1717 vel 1718 leges, videlicet, numerum, qui divisus per 9, relinquat 3 vel 6, non habere radicem rationalem ullius potestatis.

LETTRE XII.

GOLDBACH à D. BERNOULLI.

SOMMAIRE. Continuation sur les mêmes sujets.

Berolini d. 23. Julii 1724.

Quamobrem in casu, a Te proposito, sortes Petri et Pauli putarem esse ut 4 ad 3, jam 18. Aprilis Dresda ad Te perscripsi, et iisdem litteris theorema ex aequatione $a^x = 2np - n$ multo generalius proposui, quas litteras cum Tibi redditas esse non dubitem, ad reliqua epistolae Tuae argumenta nunc transeo: Seriem, quam desiderato Leibnitii satisfacientem invenisti, meae praefero, tum ob legem progressionis quodammodo faciliorem, tum ob proprietatem elegantem, qua in progressionem geometricam vertitur, quoties radix investiganda rationalis est. Si his meditationibus diutius immorari placeret, puto rem eo deduci posse, ut loco serierum quaesito satisfacientium, ubi priores duo termini sunt arbitrarii, quemadmodum in utraque nostra, inveniantur series, quarum tres termini a principio sint arbitarii. Nullum mihi dubium est, quin conspecta solutione mea, fontem ejus illico detexeris, in altera vero quam suppeditas, hoc quidem praestas, ut problema, quemadmodum ante sex annos Tibi propositum fuerat, infinitis modis solvatur, sed hoc ipsum jam tunc praestiteras, imo ego solutionem Tuam veterem, si infinitos casus problematis per formulam generalem expressit, longe anteponerem huic novae, in qua solutiones infinitae ex serie, per formulam generalem non designabili, repetendae sunt, perinde ut non improbo methodum, quae lineam curvam per puncta quotvis determinat, sed multo praestantiorem puto eam, quae eandem curvam continuo ductu describit. Quod ad alterum problema attinet, quo datis quibuscunque numeris a, b, c, quaeritur q hac lege, ut $aq+1$, $bq+1$, $cq+1$ sint quadrati; adeo Tecum sentio infinitas solutiones non esse possibiles, ut ne unicam quidem generalem dari credam, Tua enim solutio, quantumvis egregia, infinitos quidem casus, non vero omnes continet, certe casum quo $c=a+b$ tanquam lapidem offensionis mente praeterit. Via commodissima ad solutionem Tuam haec mihi visa est: Fingantur tres radices quadratorum inveniendorum $am+1$, $fm+1$, $pm+1$, erit $q=am^2+2m=\frac{f^2m^2+2fm}{b}=\frac{p^2m^2+2pm}{c}$, ergo

$$m=\frac{2f-2b}{ab-f^2}=\frac{2p-2c}{ac-p^2},$$

ubi aequatis ambarum fractionum numeratoribus et denominatoribus, habebitur $f^2=p^2+2(b-c)p+(b-c)^2=p^2+ab-ac$, ergo $p=\frac{a-b+c}{2}$. Possum etiam pervenire ad aequationem Tuam $p=\frac{2ab}{a+b-c}$, sed per ambages quas ipse nosti. Si ab aliquo ostensum esset quadraturam circuli eo reduci, ut inveniantur duo numeri quadrati, quorum summa simul et differentia dent numerum quadratum, eam demonstrationem libentissime viderem; ego, si illa vera est, demonstrabo quadraturam circuli non esse possibilem; tales enim numeros non dari deducere possum ex eo, quod posito $n =$ numero rationali cuicunque, nunquam fieri potest $n(n+1)(n+2)$ numerus quadratus, hoc rursus sic demonstro: Si n^3+3n^2+2n esset numerus quadratus, radix ejus necessario simul foret multiplus ipsius n et divisor quantitatis n^2+3n+2, sed ne ipse quidem numerus n potest esse divisor dividendi n^2+3n+2, nisi sit $n = 2$ vel $n = 1$. Ergo, praeter hos duos casus, nunquam poterit n^3+3n^2+2n esse numerus quadratus; sed quia in his duobus casibus haberentur numeri 6 et 24, qui quadrati non sunt, patet n^3+3n^2+2n nunquam esse quadratum in rationalibus; pono enim extra controversiam quod hic demonstratur de n numero integro, idem etiam demonstratum esse de n fracto.

In seriebus, quas allegaveram, putavi ad quadraturam curvae satis esse, si sumeretur $x =$ constanti 1; ita etiam, ni fallor, Leibnitius ad seriem suam pro quadratura circuli pervenit, saltem eo perveniri posse ex iis, quae in Newtoni tractatu de quadratura curvarum jam ante multos annos legi, quasi per somnium recordor. Quid Tibi videtur de hujusmodi seriebus $1-2+4-8+16-32+$ etc. quas, opinor, Varignonus explosit tanquam ex divisione vitiosa ortas? ego tolerandas arbitror propterea, quod quantitatem finitam aeque ut aliae series, modo licet minus usitato, continent; id verum esse apparet, si per seriem aliquam unitati aequalem multiplicatae, in novas series ex meris terminis affirmativis constantes transformentur.

Quod superest plane Tibi persuadeas me litteris Tuis vehementer delectari; quas porro ad me dabis Vindobonam, rogo, sicut antea dirigantur. Vale . . Goldbach.

LETTRE XIII.

D. Bernoulli à Goldbach.

Sommaire Réponse aux articles de la lettre précédente. Considérations sur la sommation des séries $1 \pm 2 + 4 \pm 8 + 16 \pm 32 +$ etc.

Venetiis d. 12. Augusti 1724.

In epistolarum Tuarum penultima perscripsisti methodum inveniendae rationis inter sortes Petri et Pauli, quam fallacem scio eo, quod diversis viis in eandem semper rationem, nimirum quae est inter 7 et 5, inciderim. Ubique vero tantum a methodis ordinariis recedis, ut difficile esset fontem erroris indigitare: sed suspicor, Te problematis sensum non recte percepisse. Id clarius expositum videbis in Exercitationibus meis mathematicis, quas nuper publicavi, quasque propediem per amicum Vindobonam profecturum Tibi mittam. Videbis illas vix aliud continere quam lites (a quibus tamen sum alienissimus) hominibus ingenuis parum dignas: Illa vero, quae a controversiis sunt soluta, maxima parte ex

*

epistolis nostris mutuis, quas tunc praesentes animo habebam, sunt delibata. Nihil adeoque Te attentione digni in illis esse deprehensurum praemoneo; attamen rudem libellum Tibi mittendum duxi, ut signum qualecunque animi mei erga Te ad omnia officia paratissimi: Rogo tantum, ne mihi imputes, si quid acrius a me dictum repereris, atque Tibi persuadeas, quod, si meo indulgere licuisset ingenio, nihil prorsus de his fuissem publicaturus; sic enim natura sum comparatus, ut nihil tranquillitate dulcius, nihil gloriae ambitu vanius habeam. Ignosce hanc digressionem, quam ingenuitas mea expressit.

Ex formula mea $a^x = 2^{m+1} \pm 2^m$ facile deducitur haec altera $a^x = n^{m+1} p \pm b n^m$, ad quam theorema Tuum se extendere observasti. Cum tamen dicis oportere, ut b sit minor quam n, excipiendus erat casus $b = 0$; melius autem usurparetur simplex formula $a^x = n^m p$, ubi n est numerus primus et p numerus quicunque, modo non sit multiplus ipsius n, qua formula totum simul rei mysterium haud obscure indicatur. Hoc theoremate aliud illud Tuum, quod extat in Supp. tom. 6., demonstrari ut corollarium, recte animadvertisti. Ego cum prima vice illud perlegerem, talem pro ejus demonstratione iniveram viam: Singuli horum numerorum 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ad quamcunque potestatem elevati et divisi per 9, nunquam relinquere possunt 3 aut 6, quod examinanti facile se manifestat; ergo nec $9n+1$, $9n+2$, $9n+3$, $9n+4$, $9n+5$, $9n+6$, $9n+7$, $9n+8$, qui omnes numeros integros possibiles indicant; et vicissim numero quocunque diviso per 9, si remanet 3 aut 6, patet numerum illum non habere radicem rationalem ullius potestatis.

Demonstratio Tua, quod existente n numero rationali, nunquam fieri possit $n(n+1)(n+2)$ numerus quadratus, non mihi satisfacit in numeris fractis; non video enim, quid sibi velint in hoc casu verba Tua: *sed ne ipse quidem numerus n potest esse divisor dividendi* n^3+3n+2; nam admissis numeris fractis, singulos numeros singulos dividere dicendum est.

Certum est non posse spatium curvilineum generaliter quadratum dici, nisi quadratura obtineri possit in quacunque hypothesi pro abscissa x. Potest enim fieri, ut in aliquibus valoribus ipsius x curva fiat quadrabilis, cum eadem curva generaliter considerata dependeat a quadratura circuli, aut prorsus nihil de ejus quadratura constet. Cum vero Leibnitius, Newtonus, Craigius etc. series dederunt in certa hypothesi particulari, id fecerunt, ut exemplum quoddam conspicuum seriei universalis darent; tale exemplum in curvis in se redeuntibus vulgo exhibetur pro quadratura totius spatii curvilinei: Sic in serie universali Leibnitiana pro quadratura circuli (quae est $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+$ etc., ubi radius vocatur 1 et abscissa in tangente x, quaeque exprimit duplum sectorem circularem, cujus tangens est x) posita $x=1$, prodit $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+$ etc. pro quadrante circuli, eademque series exprimet totum circulum, si per unitatem intelligitur quadratum diametri.

Quid de hujusmodi seriebus $1-2+4-8+$ etc. sentiam, libenter dicam. Si illas ut productas ex divisione per quantitatem compositam consideramus, multae difficultates se offerunt explanandae: nam si $\frac{1}{1+2}=1-2+4-8+$ etc. esset quoque $\frac{1}{1-2}=1+2+4+8+$ etc. quod certe omnem absurdi speciem prae se fert. In utroque autem casu, cum inaequalitas eo major fiat, quo magis series continuetur, quomodo differentia tandem evanescere possit, non video. Recte ergo, mea quidem sententia, Varignonus series illas tanquam ex divisione vitiosa (imperfecta, potius dixissem) ortas rejecit, si modo rejecerit, quod in ejus scriptis legisse non memini. In memoriam autem revoco, sermonem de dictis seriebus fuisse Guidoni Grando atque Leibnitio. Sed ut ad rem propius accedam, videtur mihi, nihil posse de illarum vera summa affirmari; nam in infinitum continuatas infinitae esse magnitudinis constat, utrum vero affirmativae, utrum negativae, hoc nos latet, nec ulla est ratio pro uno potius quam pro altero pugnans. Unde si aequationes dari possent in his seriebus, deberent earum radices utramque quantitatem tam affirmativam quam negativam indicare, non secus ac v. gr. aequatio $xx - x - 2 = 0$ determinat tam $x = 2$, quam $x = -1$. Cum vero hujusmodi aequationes in quantitatibus infinitis non habeantur, non poterunt verae aequationes pro talium serierum summis exhiberi. Sed quid facimus pro serierum infinitorum terminorum summatione? Nimirum consideramus esse illas constantis magnitudinis, sive numerus terminorum sit x, sive $x + 1$, modo x sit infinita. Haec autem infinitatis idea non procedit in nostro casu. Si enim in serie $1 + 2 + 4 + 8 +$ etc. numerus terminorum sit x, erit semper summa minor dimidio ejusdem summae, si numerus terminorum ponitur $x + 1$. Ecce nunc contradictionem: vidimus supra esse

$$1 + 2 + 4 + 8 + \text{etc.} = -1;$$

illud vero quasi ignotum quaerendum fingamus. Fiat ergo series infinita $A \ldots . \; 1 + 2 + 4 + 8 + \text{etc.} = x$, unde

$$2 + 4 + 8 + \text{etc.} = x - 1, \text{ et}$$

$$B \ldots . \quad 1 + 2 + 4 + \text{etc.} = \frac{x-1}{2} = x = -1.$$

In hac itaque methodo, quam *a posteriori* veram scio, ponitur summa serierum A et B eadem, attamen posteriorem prioris dimidio minorem esse constat, eo quod numerus terminorum in A unitate excedat numerum terminorum in B. Quid ad haec respondendum? Quod si autem negetur esse

$$1+2+4+8+\text{etc.}=-1,$$

negandum pariter est esse $1-2+4-8+\text{etc.}=\frac{1}{3}$, nam utraque propositio eodem nititur fundamento. Si tamen hujusmodi methodi ut genuinae ponantur, non difficile erit dare ad illarum imitationem aliam longe universaliorem, cujus ope serierum infinitarum quarumcunque numerorum integrorum et ex terminis alternatim affirmative atque negative sumtis constantium, summa determinari possit. Prius vero aliquam serierum summam aliis viis indagabo, quo valor methodi generalis eo magis elucescat:

I. $1-2+4-8+16-32+\text{etc.}=x$

$$4-8+16-32+\text{etc.}=x+1$$

$$1-2+4-8+\text{etc.}=\frac{x+1}{4}=x=\frac{1}{3}$$

II. $a-a+a-a+a-a+\text{etc.}=y$

$$-a+a-a+a-a+\text{etc.}=y-a$$

$$a-a+a-a+a-\text{etc.}=-y+a=y=\tfrac{1}{2}a$$

III. $1-2+3-4+5-6+\text{etc.}=z$

$$-2+3-4+5-6+\text{etc.}=z-1$$

$$2-3+4-5+6-\text{etc.}=-z+1$$

$$1-1+1-1+1-\text{etc.}=\tfrac{1}{2}$$

$$1-2+3-4+5-\text{etc.}=-z+\tfrac{1}{2}=z=\tfrac{1}{4}$$

IV. $1-3+5-7+9-11+\text{etc.}=s$

$$-3+5-7+9-11+\text{etc.}=s-1$$

$$3-5+7-9+11-\text{etc.}=-s+1$$

$$2-2+2-2+2-\text{etc.}=1$$

$$1-3+5-7+9-\text{etc.}=-s=s=0$$

V. $1-4+9-16+25-36+\text{etc.}=t$

$1-4+9-16+25-\text{etc.}=t$

$1-3+5-7+9-11+\text{etc.}=0=2t$, seu $t=0$.

Regula autem pro generali hujusmodi serierum summatione talis est: Ponatur numerus terminorum x impar, quaeraturque seriei summa (quod semper fieri potest, si positis omnibus terminis affirmativis, series sit summabilis); idem dein fiat posito rursus numero terminorum x, sed pari, et erit medium arithmeticum inter utramque summam aequale summae absolutae seriei in infinitum continuatae. In serie prima summa terminorum est $\frac{2^x+1}{3}$, si x est impar, et $\frac{-2^x+1}{3}$, si x est par (per x semper intelligo numerum terminorum), ergo summa illius seriei infinitae est $=\frac{1}{3}$. In serie secunda summa terminorum est $=a$, si x est impar, et $=0$, si x est par, ergo summa seriei infinitae $=\frac{1}{2}a$. In tertia serie summa terminorum est $\frac{x+1}{2}$ vel $\frac{-x}{2}$, prout x fuerit impar vel par, ergo series infinita $=\frac{1}{4}$. In quarta serie habetur pro summa terminorum x, si x est impar, vel $-x$, si x est par: unde summa seriei infinitae $=0$. In ultima denique serie summa terminorum est $\frac{\pm xx \pm x}{2}$, prout iterum x fuerit impar vel par, ergo summa seriei infinitae $=0$.

Et haec sunt, quae circa has series Tecum communicare volui. Tuam sententiam intelligere mihi quoque pergratum erit. Vale . .

Dan. Bernoulli.

LETTRE XIV.

GOLDBACH à D. BERNOULLI.

=

SOMMAIRE. Nouvelle considération du problème du calcul des probabilités des lettres précédentes. Equations impossibles. Réfutation des considérations précédentes sur les séries. Problème de la théorie des nombres.

Berolini d. 13. Septemb. 1724.

Lites, in quas Te invitum incidisse doleo, saltem eo nomine publice utiles arbitror, quod Exercitationes Tuas in lucem protulerunt, quas equidem avidissime expecto, sed cum amico Vindobonam eunti tradendas significes, multa praevideo, quae spem meam differre possint. Scripsi tamen ad Felzium, ut si quem fasciculum mihi reddendum acceperit, confestim per publicos tabellarios huc mitteret.

Solutiones nostras non convenire mirum est, sed tamen ludum omnem tam accurate in litteris Tuis descripseras, ut vix credere possim me ejus leges non satis intellexisse. Concepi enim animo tetraëdrum, cujus duo latera insignita essent littera A, tertium B, quartum C, ita ut de eventu ludi judicaretur ex eo latere in quo requieverit tetraëdrum, scil. ut quocunque jactu basis fuerit A, finiretur ludus vincente Petro, et pariter jactu B finiretur ludus vincente Paulo; jactu C remitteretur ludus in jactum sequentem donec A vel B ceciderit. Jam vero si observatis legibus quas commemorasti, hanc unam legem addamus, ut si ludus non finiatur jactu v. gr. tertio, denuo incipiendus sit, donec scil. vel jactu primo, vel secundo, vel tertio finiatur per basin A vel B. Hac sancita lege, perspicuum est sortem Petri ad sortem Pauli fore ut 3 ad 2, per similem quoque legem, si jactu quarto non finitus sit ludus, ut denuo semper incipiatur, apparet sortem Petri ad sortem Pauli esse ut 17 ad 12 et generatim sancita lege, ut ludus nisi finitus fuerit numero jactuum x, denuo incipiatur, erit sors Petri ad sortem Pauli ut $4 \,.\, 2^{2x} - 4$ ad $3 \,.\, 2^{2x} - 3 \,.\, 2^{x}$. Igitur si ponamus legem modo dictam nonnisi in jactu infinitesimo, id est nunquam, obtinere, adeoque nihil in toto ludo, sicut a Te descriptus fuit, mutari, habebitur sors Petri ad sortem Pauli ut $4 \,.\, 2^{2\infty} - 4$ ad $3 \,.\, 2^{2\infty} - 3 \,.\, 2^{\infty}$, hoc est (evanescente 4 et 2^{∞} prae $2^{2\infty}$) ut 4 ad 3.

Cum dixi positis numeris a, b, m, n, p, x integris, n primo, $\frac{m}{x}$ fracto et $b < n$, semper esse $a^{x} \mathrel{\neq} n^{m+1} p + b n^{m}$ (liceat enim mihi tantisper uti signo $\mathrel{\neq}$ ad denotandam aequationem impossibilem) patet in hoc theoremate non dari casum ubi $b = 0$, adeoque nec excipi potuisse. E contrario in altera formula quam producis $a^{x} \mathrel{\neq} n^{m} p$, ubi pro n requiris numerum primum, pro p numerum quemcunque, modo non sit multiplus ipsius n, excipiendum quoque erat ne esset $p = n$, sed haec quidem laeviora sunt. Interea recte animadvertis hoc posterius theorema, etsi non tam generale sit quam prius, tamen ad percipiendam demonstrationem magis accomodatum esse. Illud vero, quod tomo VI Suppl. extat $9n \pm 3 = p^2$, eadem methodo olim detexi, qua Te in demonstrando usum esse scribis.

Venit mihi nuper in mentem theorema illud (posito $a^2 + b^2 = n^2$, esse $a^2 - b^2 = p^2$, si pro a, b, n, p sumantur numeri rationales quicunque) per solam multiplicationem reduci ad hoc $a^4 - b^4 = n^2 p^2$, id est differentiam duorum quadratoquadratorum non esse numerum quadratum, quod recordabar me ab Ozanamo demonstratum legisse Tom. VIII. Diarii Gallici, itaque in hac tota re nihil novi est.

Quae de quadraturis curvarum scribis quodammodo intelligo, sed melius intellexissem ante duos annos, nam postquam ad Clar. Fratrem Tuum scribere desii, calculi differentialis pene oblitus sum, adeo ut nunc ipse vix ac ne vix quidem intelligam quae olim cum eo communicavi quaeque is probare solebat; sed tamen haec omnia in memoriam revocare imposterum licebit.

De seriebus, quarum termini continuo crescunt, sive iisdem sive alternantibus signis, nescio an probaturus sis sententiam meam; in hac enim aequatione $\frac{1}{1-2} = 1 + 2 + 4 + 8 +$ etc. nihil absurdi video, etiamsi absurdissima esset, si series illa fieret $= -1$. Totum vero paradoxon in eo consistit quod $\frac{1}{1-2}$ toto coelo distat a -1, quanquam vulgo confunduntur. Certum enim est hanc fractionem $\frac{1}{1-a}$ tanto majorem fieri quanto major ponitur a, sed posito $a = 1$ jam fit fractio infinite magna, quippe $=$ seriei $1 + 1 + 1 + 1 + 1 +$ etc., ergo adhuc adaucto valore a necesse est eandem fractionem fieri valoris plus quam infiniti, qualem supponere vel fingere nemo recusare potest, qui quantitatem nihilo minorem admittit.

Ad haec si attendamus, patet fallacem esse regulam vulgo receptam $+$ per $-$ multiplicatum dare $-$; etiamsi falsitas ejus in praxi vix unquam appareat, ibi enim signum $-$ accurate loquendo nunquam multiplicat, sed manet signum subtractionis, verbi gratia si multiplicandus sit 12 per $3-2$, utraque multiplicatio tam 3.12 quam 2.12 est affirmativa, sed quia in multiplicante subtrahebatur 2 a 3, necesse est in producto etiam subtrahi 2.12 a 3.12. Sed, ut dixi, ubi totae formulae numerorum per $+$ et $-$ conjunctorum sunt positivae, ibi falsitas ejus regulae non apparet; contra, ubi instituitur comparatio ut 1 ad -1 ita -1 ad 1, adeo manifesta est absurditas regulae, ut qui eam explodere noluerint, partim confugere coacti sint ad hypothesin per $+1$ et -1 eandem quantitatem designari, partim credere maluerint inter quantitates affirmativas et negativas rationem nullam dari, quasi vero id opus esset, ac non potius quaereretur, supposita ratione inter quantitates affirmativas et negativas, quomodo ea ratio designanda esset. Ego autem in ea sum haeresi, comminiscendas esse quantitates negativas secundi, tertii etc. graduum hoc modo ut, quemadmodum -1 impossibiliter parva ponitur prae $+1$, ita $(-1)^2$, seu negativa secundi gradus, impossibiliter parva ponatur prae -1, seu negativa primi gradus, atque hoc pacto fiet uti 1 ad -1, ita -1 ad $(-1)^2$. In schemate Tuo

$$\begin{array}{lr} A \ldots & 1+2+4+8+\text{etc.} \\ a \ldots & 2+4+8+\text{etc.} \\ B \ldots & 1+2+4+\text{etc.} \end{array}$$

concedo, si ponatur $A=x$ esse $a=x-1$ et $B=\frac{x-1}{2}$, sed valde dubio an sit $x=\frac{x-1}{2}$; nam series A et B utcunque similes videantur, tamen prorsus differunt; hanc differentiam, qualis mihi quidem videtur, exemplo illustrabo. Fingatur corpus aliquod *A* prima hora percurrere unum milliare, quiescente interim corpore *B*; secunda hora corpus *A* percurrere duo milliaria, *B* unum; tertia hora *A* quatuor milliaria, *B* duo, atque sic porro; tantum abest ut haec corpora in infinitum promota simul ad eundem terminum conveniant (quod tamen fieri necesse erat ad inferendam aequalitatem serierum) ut potius in infinitum magis magisque distent. Quod ad ejusmodi series attinet $1-2+4-8+$ etc., quas, si bene memini, rejecit Varignon in Actis Gallicis (Mém. de l'Acad. des sciences A. 1715), etiamsi extra divisionem, ex qua ortae sunt, considerentur, tamen finitus earum valor, multiplicando per seriem $=1$, hoc modo elici potest

$$
\begin{array}{llllllll}
1-2 & +4-8 & +16-32 & +64-\text{etc.} \\
1+\frac{5}{4} & -\frac{5}{4}+\frac{5}{16} & -\frac{5}{16}+\frac{5}{64} & -\frac{5}{64}+\text{etc.} \\
\hline
1-2 & +4-8 & +16-32 & +64-\text{etc.} \\
+\frac{5}{4} & -\frac{10}{4}+\frac{20}{4} & -\frac{40}{4}+\frac{80}{4} & -\frac{160}{4}+\text{etc.} \\
 & -\frac{5}{4}+\frac{10}{4} & -\frac{20}{4}+\frac{40}{4} & -\frac{80}{4}+\text{etc.} \\
 & +\frac{5}{16} & -\frac{10}{16}+\frac{20}{16} & -\frac{40}{16}+\text{etc.} \\
 & & -\frac{5}{16}+\frac{10}{16} & -\frac{20}{16}+\text{etc.} \\
 & & +\frac{5}{64} & -\frac{10}{64}+\text{etc.} \\
 & & & -\frac{5}{64}+\text{etc.} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
\frac{1}{4} & +\frac{1}{16} & +\frac{1}{64} & +\text{etc.} = \frac{1}{3}
\end{array}
$$

Quod vero de hoc singulari exemplo dictum est, multo generalius ad infinitas similes series accomodari posse facile intelligitur.

Problema datis tribus numeris a, b, $a+b$, invenire quartum q hac lege, ut per quemvis datorum trium multiplicatus, si producto addatur unitas, det quadratum, pulchrius est quam ut illud tam cito relinquamus; nam licet non semper possibilis sit ejus solutio, tamen infinitis casibus possibilis est. Sit $g = \frac{b \pm (b-h)}{2}$, $b = \frac{4a^2 + h^2}{2h}$ (ubi h ponitur pro numero rationali quocunque) sit $m = \frac{2g - 2a \quad 2b}{a^2 + ab - g^2}$, erit $q = \frac{g^2 m^2 + 2gm}{a+b}$.

Si quid forte in hac epistola minus probaveris, rogo ut ignorantiae meae ignoscas, mihi enim uti semper utile erit discere, ita a Te doceri quam gratissimum. Vale.

Goldbach.

LETTRE XV.

D. Bernoulli à Goldbach.

Sommaire. Suite de la controverse sur le problème des probabilités. Considérations sur les quantités négatives et infinies, à l'occasion des séries précédentes. Réponse à d'autres points de la lettre 14ème.

Venetiis d. 12. Octobris 1724*).

Pluribus methodis usus sum pro solvendo problemate ad calculum probabilitatum pertinente atque constanter in rationem 7 ad 5 incidi; reperies in Exercitationibus meis solutionem indicatam potius quam expositam. Communicabo nunc aliam methodum faciliorem, quam ample deducam. Per lucrum intelligitur id, quod Paulus Petro dare debet, ut ab incerti sibique minus favorabilis ludi sortem subeundi nesescitate liberetur. Ante omnia inquiram, quantum Petrus a Paulo expectare possit, et dein quantum Paulus a Petro;

*) Cette lettre, bien que de la main de Dan. Bernoulli, est inscrite: *Excerpta ex litteris, quas ad Virum Clar. Christ. Goldbach dedi Venetiis die 12. Octobr. 1724.* Vraisemblablement Goldbach, ayant égaré l'original, s'est fait donner, plus tard, un extrait de la minute.

quo facto erit lucrum aequale differentiae expectationum; prior quaestionum facillima est, et ita solvitur: Sit expectatio Petri $= x$; erunt jam duo casus, quibus Petrus a Paulo accipit a: unus casus, in quo nihil accipit, et unus, quo ludus in sequentem remittitur jactum, et quo per consequens Petrus in pristinum reducitur expectationis statum, id est, qui ipsi valet x, ergo $\frac{2.a+1.0+1.x}{4} = x = \frac{2}{3}a$. Videamus nunc quantum Paulus a Petro expectare possit; ponam successive quartum casum evanescere jactu primo, secundo, tertio etc., adeo ut numerus jactuum excedere nequeat unum, vel duo, vel tres, etc. Si autem jactu primo auferatur quartus casus, erit expectatio Pauli $= \frac{1}{3}a$; si secundo, erit eadem $= \frac{1}{3}a + \frac{1}{12}a$, si tertio $= \frac{1}{3}a + \frac{1}{12}a + \frac{1}{24}a$; si infinitesimo, id est, si nunquam auferatur, valebit expectatio Pauli

$$\frac{1}{3}a + \frac{1}{12}a + \frac{1}{24}a + \frac{1}{48}a + \text{etc.} = \frac{1}{2}a.$$

Cum itaque Petrus a Paulo exigere possit $\frac{2}{3}a$, hic vero ab illo tantum $\frac{1}{2}a$, patet priorem lucrum facere $\frac{1}{6}a$, ac adeoque, si unius depositum vocetur a, habebit Petrus jus in $\frac{7}{6}a$ et Paulus in $\frac{5}{6}a$, eritque ratio sortium ut 7 ad 5.

Non video, quomodo in formula mea $a^x = n^m p$ excipere potuissem aut debuissem casum $p = n$, nam quilibet numerus sui ipsius multiplus est; neque perspicio, quomodo Tua $a^x = n^{m+1}p + bn^m$ mea citata universalior dici queat. Mihi potius eaedem videntur.

Paradoxa illa, quorum in ultimis mentionem feci, alio modo dilui posse, quam Tu ingeniose quidem, sed mea sententia minus apte facis, existimo; etenim plane credo, esse $\frac{1}{1-2} = -1$, nihilque absurdi reperio in analogia $1 : -1 :: -1 : 1$, modo dicatur quantitates plus quam infinitas easdem prorsus esse ac negativas; neque enim sua natura existunt quantitates plus quam infinitae, neque negativae. Finge (Fig. 14) lineam infinitam AD, ac in illa punctum B, a quo erecta fuerit perpendicularis BE: Concipe porro regulam indefinitam FG, mobilem circa punctum E. Sic linea BC crescit crescente angulo BEC, fitque infinita, cum idem angulus fit rectus; quid autem, si augulus crescere pergat? fiat ne BC plus quàm infinita. Ita quidem affirmamus in quantitatibus discretis seu numeris; verum patet, rem secus se habere in quantitatibus continuis, nam linea BC eo ipso instante, quo angulus BEC, seu BEQ, fit recto major, incipit esse negativa, si quidem punctum intersectionis M regulae FG cum linea AD existit ab altera parte. Quae dixi applica ad exemplum $\frac{1}{1-a}$, et talem habebis ad argumentum Tuum responsionem: Assumto constanter principio: *crescente* a, *crescit valor fractionis*, erit fractio plus quam infinita, si a unitatem excedit; erit autem in eodem casu negativa, concesso altero principio modo explicato: *transitum quantitatum affirmativarum ad negativas fieri aeque posse et per infinitum et per nihilum*, ita ut infinitum ad modum nihili aeque pronum sit ad affirmativum et ad negativum, id est, sicut $+0 = -0$, ita est $+\infty = -\infty$. Quod autem ad analogiam $1 . -1 :: -1 . 1$, respondeo duplici sensu accipi duas quantitates intermedias -1 et -1, priore significante quantitatem negativam, posteriore plus quam infinitam, sicque analogia nullam absurdi speciem prae se fert. Miror quod in schemate meo

$$\begin{array}{lrl} A \ldots & 1 + 2 + 4 + 8 + \text{etc.} & = x \\ a \ldots & 2 + 4 + 8 + \text{etc.} & = x - 1 \\ B \ldots & 1 + 2 + 4 + \text{etc.} & = x = \frac{x-1}{2} \end{array}$$

dubites esse series A et B prorsus similes. Indicavi in

15

postremis meis, hoc mihi quoque paradoxon esse, attamen de ejus veritate me nullum dubitare; scio enim *a posteriori*, ratiocinium illud ad verum valorem ipsius x perducere, et nunquam uno paralogismo verum divinari posse constat. Assumto ergo $A = \frac{1}{1-2} = -1$, sequitur ut corollarium etiam $B = -1$. Exemplum autem, quod in contrarium affers, probat quod supra haud obscure innui, posse considerari $\infty = 0$; nam si $\infty = -\infty$ et $\infty = \infty$, sequitur $\infty + \infty = \infty - \infty =$ cuicunque quantitati; potest adeoque contingere, ut $\infty = 0$.

Si $b = \frac{r^4 \quad 4ar^3 + 4aarr - ss}{4r^3 - 6arr + 4aar + 4sr - 2as}$ et $q = \frac{4arr + 4brr - 4r^3 - 4abr}{(rr - ab)^2}$ erit $aq + 1 = \square$, $bq + 1 = \square$, et $aq + bq + 1 = \square$. Si $s = rr + 2ar$, fit $b = -a$, qui casus per formulam Tuam excluditur, unde suspicor non esse illam universalem.

Dan. Bernoulli.

LETTRE XVI.

D. Bernoulli à Goldbach.

Sommaire. Convalescence d'une maladie grave Appel à l'académie de St.-Pétersbourg. Confusion apparente des noms. Caractéristique de D. B. Trait d'amour fraternel. Lettre de Jean B. à Goldbach.

Padoue 25 janvier 1725.

Je vous écris au lit, étant encore tout abattu d'une fièvre chaude qui a manqué de me faire aller dans l'autre monde; mais grâces à ma jeunesse, je suis échappé heureusement: je suis encore extrêmement foible, mais hors de danger. Si les choses vont toujours le même train, je serai encore un couple de mois, avant que de pouvoir me tenir sur les pieds.

Je suis fort surpris de ne point recevoir de vos nouvelles. Seriez vous peut-être fâché contre moi de certaines paroles que j'ai dites, en passant, dans mes *Exercitations* dont je me suis donné l'honneur de vous envoyer un exemplaire; j'en serois infiniment mortifié; mais j'aurai occasion de réparer le tort que je vous ai fait, si vous le prenez, Monsieur, pour tel. On voit, par ce que j'ai dit de ces séries, que j'ai écrit le livre à la hâte et par complaisance.

M. Wolf a fait l'honneur d'écrire une lettre à mon Père, dans laquelle il m'offre, de la part de S. E. Monseigneur le Comte de Galovkine, ambassadeur de S. M. Czarienne et impériale, une chaire de mathématiques à Pétersbourg. Si vous êtes encore à Berlin, je vous recommande de tout mon coeur mes intérêts. Je ne sais pas si vous êtes en commerce de lettres avec M. Blumentrost, médecin de S. M. Czarienne; en ce cas, je vous supplie de l'informer de mon nom, parce que j'ai vu, par une lettre fort honnête qu'il a écrite à Bâle, qu'il confond les Bernoulli. Ni mon cousin, ni mon frère, dont l'un et l'autre sont déjà fort avantageusement placés dans leur patrie, n'iront jamais chercher si loin ce qu'ils ont déjà chez eux. Pour moi, j'aurois tout le plaisir imaginable à servir S. M. si l'on m'en croit digne. Vous pourriez donc, Monsieur, s'il vous plaît, informer M. Blumentrost que je m'appelle Daniel Bernoulli Joh. Fil. Med.

Enfin, Monsieur, je vous supplie de me pardonner mon importunité; excusez aussi ma mauvaise écriture; mes forces sont encore si petites qu'à peine puis-je gouverner ma main. J'ai pris la liberté de vous écrire en langue française (que je sais que vous entendez en perfection) parce qu'elle me donne un peu moins de peine que le latin.

Dan. Bernoulli.

P. S. Si vous voulez m'honorer d'une réponse, ayez la bonté d'adresser la lettre à Venise à la Vezzi.

Si vous voulez peut-être donner quelque information à ces Messieurs (dont je vous ai parlé dans ma lettre) de ma personne et de mes forces quelles qu'elles soient, dans les mathématiques, vous savez à peu près *quid valeant humeri, quid ferre recusent.* Je vous prie seulement de ne point me flatter par amitié, et de dire votre sentiment sincèrement, quelque désavantageux qu'il pût être. Au reste, je suis un jeune homme de 25 ans que je ne montre même pas, ayant de certains traits de visage et une petite taille qui me font croire plus jeune que je ne suis. — Je viens de recevoir, dans ce moment, une lettre de mon frère qui, par une amitié véritablement fraternelle, me dit qu'il ne peut se résoudre à me laisser aller en Moscovie, ou que, si j'y veux aller absolument, il est prêt à sacrifier ses intérêts (il a une chaire laquelle lui vaut pour le moins 150 Louisd'or) et à m'accompagner. Là dessus j'ai pensé que facilement on pourroit nous placer tous deux à Pétersbourg, d'autant plus qu'il n'y a rien de plus vaste que l'étude des mathématiques. Si vous pouviez seconder ce projet, vous auriez le mérite de ne point séparer deux frères que l'amitié la plus étroite du monde lie si fort*).

---

*) Nous croyons faire plaisir à nos lecteurs en leur communiquant ici une lettre de Jean Bernoulli, le père, à Goldbach, de la même époque, et relative à la nomination de ses fils à l'Académie de St.-Pétersbourg. La voici:

Viro Amplissimo atque Excellentissimo Christiano Goldbach S P D. Joh. Bernoulli

Jam ante aliquot menses ad me scripsit Cl. Wolfius, sibi in commissis datum, ut nomine Imperatoris Russiae offerret filio meo cathedram mathematicam in Academia Petropolitana; cum vero non indicaret nomen filii, cui illa destinaretur, nonnisi ex circumstantiis quibusdam conjectare licuit, intelligi filium meum natu minorem, apud Italos cum maxime degentem, Danielem puta, cui, ni fallor, Tecum intercedit litterarum commercium ipsi perquam honorificum, quo honore fruebatur etiam olim alter filius Nicolaus, qui nunc jura docet in lyceo Bernensi, postquam Venetiis in Tui notitiam et consuetudinem venisset. Paulo post Wolfianas litteras advolarunt quoque aliae ab Amplissimo Blumentrostio tum et quae illas includebant a Cl. Doppelmaiero: Offerebatur in illis salarium lautius quam in Wolfianis, sed non satis patebat utri filiorum meorum, erat namque epistolae Blumentrostianae inscriptio sine cognominis expressione *à Mr. N. Bernoulli*, altera vero a Cl. Doppelmaiero inscribebatur hunc in modum *à Monsieur Nicolas Bernoulli, professeur en Droit;* ita ut incertus essem multo magis quam ante usque nescius an Nicolaus, an Daniel, an forsan uterque invitaretur. Sed vidi demum ex nuperrimis Tuis, Vir Amplissime, quas ad me scribere dignatus es, ut et ex Berndisianis ad Te datis et mecum communicatis, nec non ex novissimis Wolfianis uno eodemque die acceptis, desiderari utique Danielem, quamvis a Nob. Berndisio per errorem Andream vocatum; is enim est filius meus secundo genitus, is Medicus, is nuperrime adhuc Venetiis agens apud Nobilem Venetum. Credo et hunc quoque fuisse, quem antea commendaveras Cl. Doppelmaiero, ut eundem porro commendaret Blumentrostio. Interim non intermisi statim atque acceperam primas de hac re Wolfii litteras, ex quibus Danielem a Russis peti colligebam, eidem notitiam dare per litteras, quae autem nescio quo infortunio ad ipsum nunquam pervenerunt. Cum in eo essem, ut ad iteratas meas litteras aliquo post tempore ad ipsum datas, responsum ab eo expectarem, defertur ecce! ad me nuncius non minus tristis quam inopinatus de Daniele meo periculose laborante Patavii febre ardente. Addunt litterae a Cl. Poleno exaratae, aegrum postquam per aliquot dies in extremo vitae discrimine versatus fuisset, oborta quadam crisi ad se rediisse et nunc paullo se melius habere. Hanc inter spem metumque suspensus, proximas praestolor litteras, visurus qualem habiturus sit exitum morbus filii mei. Percipis, Vir Amplissime, ejus silentii causam, eandem si libuerit indicaturus Illustr. Comiti de Galovkin nec non Ampl. Blumentrostio, ne sinistre interpretentur responsionis moram. Indulgebunt, uti spero, pro ea qua sunt benignitate, aegrotanti meo filio sufficiens convalescendi tempus, ut recuperatis viribus in Patriam se recipere et mecum de honorifica oblatione, ceu par est, deliberare possit, quod ubi factum fuerit, animi sui sententiam ocyssime perscribet. Quod superest vale, Vir Amplissime, atque mihi ac filiis meis proporro fave. Dabam Basileae d. 20. Januar. 1725.

LETTRE XVII.

D. Bernoulli à Goldbach.

Sommaire. Indécision de l'auteur s'il doit, ou non, accepter l'appel à St.-Pétersbourg. G. est prié d'intercéder à ce que Nic. B. soit reçu à la même Académie.

Venetiis d. 17. Febr. 1725.

Ad epistolam Tuam 13. Septembris jam ante quatuor menses respondi, simulque *Exercitationes* meas *mathematicas* ad Te misi directo fasciculo ad Felzium: Verum ex ultimis Tuis conjicio non Felzio sed Marinono fuisse traditum: Quod si nunc eundem acceperis, rogo ut imposterum meditata Tua mathematica mecum communicare pergas iisdemque me porro erudire haud dedigneris.

Est quod Tibi gratias agam pro Tuo erga me amore, quem mihi occasione negotii Petroburgensis luculenter testatum dedisti: Scripsi praeterita septimana ad comitem Galovkin, litterasque ad Patrem direxi ut illas per Celeb

Wolfium Berolinum mitti curaret. Si vis ut verum fatear, haesito etiamnum, utrum locum mihi in Petroburgensi Academia oblatum accipere debeam, nec ne? Etsi enim conditiones sint lautissimae longeque tenuissimam meam praestantiam superantes, multa tamen et gravia obstacula me deterrent cum promissis facile aequiparanda; adde, quod a multis, qui diuturnam Petropolis moram nexerunt, mihi relatum fuerit, nec salarium promissum mihi solutum, nec dimissionem post quinquennium, si illam petiero, concessum iri. Nescio autem quantum relationibus hisce sit tribuendum, nec unquam ipsis fidem facere potui; Attamen libenter ex Te audirem, quid hac in re sentias; posteaque consilium Tuum subjungas rogo, cui amore Tuo sincero confisus me multum daturum promitto.

Caeterum significavi in ultima mea, fratrem Nicolaum Petropolin mecum abire, stationemque suam, qua nunc Bernae gaudet, utut multis praerogativis distinctam relinquere non haesitaturum, si illam cum alia in Academia Petroburgensi commutare posset: Hoc si Tu efficere valeres, utrique nostrum gratissimum foret, mallemque ego praesertim cum Fratre mediocribus, quam sine illo longe lautissimis conditionibus iter aggredi. Conjuncti Petropolin ut alteram Patriam consideraremus, eamque forte nunquam relinqueremus. Visum mihi fuit, esse scientiam Matheseos adeo vastam, ut duo professores ad illam edocendam vix sufficiant, nedum numero excedant: possem etiam, relicta Fratri mathematica, physicam docere, quo in casu tenues, quos in mathematicis et anatomicis feci, progressus, simul collocandi occasionem haberem: poteris itaque, cum ita judicaveris, rem comiti Galovkin proponere.

Libenter viderem programma, de quo Cl. Blumentrostius in litteris ad Cl. Doppelmaierum datis mentionem facit, quoque indicat, quid cuilibet in Academia Petroburgensi Professorum agendum incumbat; rogo itaque, ut illud mihi mittas, vel saltem officium professoris Matheseos excerptum communices: credo nihil ab eo requiri, quam quae ad puram theoriam spectant. Vale . .

Dan. Bernoulli.

LETTRE XVIII.

D. Bernoulli à Goldbach.

═

Sommaire. Conditions de l'engagement à St.-Pétersbourg. Soupçons naissans. Mémoire couronné sur les clepsydres. Théorème de Fermat.

Bâle ce 13 juin 1725.

Comme je sais que vous prenez part à tout ce qui me regarde, je dois vous aviser que j'ai accepté la chaire de mécanique qu'on a eu la bonté de m'offrir avec une pension annuelle de 800 roubles et 300 écus d'Allemagne ou 450 fl. pour les frais de voyage. Je me suis déclaré envers M. Wolf qui, après m'avoir fait les dites offres, m'a marqué d'avoir commission de finir l'affaire. Je vous avoue pourtant, M., que je n'ai pu prendre cette résolution sans avoir été plongé auparavant dans de terribles combats, me présentant au vif tantôt les avantages que j'ai lieu d'espérer d'une si honorable vocation, tantôt les sacrifices que je fais en l'acceptant. Mais enfin, l'ambition a eu le dessus, et je me veux maintenant du mal d'avoir pu délibérer. Je suis mortifié que l'affaire ait traîné si longtems, ayant été privé par là de la compagnie de M. Bülffinger dans ce grand voyage; j'espère pourtant qu'on ne m'attribuera point la cause de ce délai, n'ayant jamais fait aucune difficulté sur les conditions avec lesquelles on m'a offert la chaire; j'ai même d'abord trouvé les premières offres de 600 roubles fort généreuses et loin au dessus de mon peu de mérite dont je suis fort dépourvu, et quand même je serois assez présomptueux pour m'en attribuer, je n'aurois pa l'âme si mercenaire que d'y fonder des prétentions. Mon premier motif a toujours été l'ambition et non pas l'intérêt. Mais aussi j'ai jugé que ce n'est pas à moi à refuser des grâces; c'est pourquoi j'ai pris la liberté de demander à S. E. M^gr^ le C^te^ de Galovkine la confirmation de 1000 roubles par an que je croyais m'avoir été offerts vu la lettre de M. Berndis qui dit expressément: „mi pare che sia l'ultimo genito chiamato Andrea Bernoulli per hora Governatore d'un Nobile di Venetia.“ J'ai pourtant appris depuis, par une lettre de M. Wolf, que cette pension a été offerte à mon frère, et qu'en cas que celui-ci ne trouvât pas à propos de quitter sa place à Berne, on offroit la même chaire à moi avec un appointement annuel de 800 roubles; au reste il ne changea rien aux 300 roubles pour les frais du voyage, que j'avais par conséquent lieu d'attribuer tant à moi qu'à mon frère. M. Wolf ajouta aussi que, pour les deux dernières années du *quinquennium*, on pourroit augmenter ma pension jusqu'à mille roubles. Je suis donc surpris que le même M. Wolf ait changé ces 300 roubles pour le voyage en 300 écus d'Allemagne, et qu'il ne parle plus de l'augmentation de 200 roubles pour les deux dernières années en cas qu'on fût satisfait de moi. Le premier article m'étonne d'autant plus que 300 roubles me semblent à peine suffisans pour un si grand voyage, particulièrement si j'y comptais les frais que j'ai déjà faits en venant de Venise à Bâle. Ne croyez pas, M., que je vous dise cela pour témoigner quelque mécontentement; vous me feriez grand tort; même bien loin de là, je vous avoue naturellement que je me serois contenté des premières offres, quoique fort inférieures aux dernières. Mais en vous racontant au long toutes ces choses, je voulois vous demander en confidence si vous ne vous êtes peut-être aperçu de quelque changement. N'auroit-on point perdu, ou en partie ou en tout, le penchant qu'on a eu la bonté de témoigner pour ma personne? A Dieu ne plaise que je voulusse m'ingérer; on useroit d'une honnêtete pour moi dont je suis indigne et qui ne me seroit aucunement agréable, si on ne me conféroit maintenant la charge que par manière d'acquit. Ayez la bonté de m'éclaircir là-dessus et montrez même, si vous le trouvez à propos, cette lettre à M. Berndis en l'assurant de mes obéissances. Au reste, je crois partir encore cette année, si la réponse vient encore à tems. J'aurai l'honneur de vous rendre mes devoirs à Berlin et de vous présenter un exemplaire de mes Exercitations. Je prendrai aussi la liberté de vous offrir une pièce de ma composition, qui roule sur la manière de conserver l'égalité du mouvement des clepsydres sur mer à laquelle l'Académie royale des sciences a adjugé le prix de 2000 L. et qu'elle imprime maintenant à Paris selon sa coutume ordinaire d'imprimer les pièces couronnées. J'espère que vous aurez reçu à présent ma réponse à la vôtre du 13 septembre. Que vous semble-t-il de ma manière d'envisager l'analogie $1 . -1 :: -1 . 1$. Quand je passerai par Berlin, j'aurai l'honneur de vous communiquer mes réflexions sur votre démonstration du théorème de Fermat; je suis trop pressé pour vous les marquer ici; il suffit de vous dire qu'en appliquant votre démonstration à cette formule $x(2x+6)$, on trouve qu'il ne peut y avoir un nombre entier tel que x, en sorte que $x(2x+6)$ fasse un bicarré; cependant je sais que 24 a la propriété qu'on demande.

Dan. Bernoulli.

LETTRE XIX.

GOLDBACH à D. BERNOULLI.

SOMMAIRE. G. rassure B. au sujet dans doutes conçus par lui des la lettre précédente Théorème de Fermat. Nouvelle condition du problème des lunules. Formule dont la signification n'est pas expliquée.

St.-Pétersbourg ce 18 septembre 1725.

Toutes les difficultés que vous alléguez dans votre lettre du 13 juin (reçue le 10 sept.) étant enfin levées, je me réjouis avec vous, M., de la résolution que vous avez prise. Je fais état de rester encore un ou deux mois en ce pays, et vous y attends avec la dernière impatience. J'avois déjà appris de M. Schumacher ce que vous me mandez d'une pièce de votre façon qui a remporté le prix dans l'Académie des sciences; je vous félicite, M., de cet heureux succès, et je serai ravi de profiter d'une découverte qui a mérité les éloges de tant de savans.

Pour ce qui est de la démonstration du théorème de M. Fermat, j'avoue à cette heure qu'elle ne me satisfait pas, mais je crois que vous serez content d'une autre que vous verrez ci-jointe*). Tout ce que j'avois avancé touchant les nombres triangulaires de 1, 2, 3 etc. est incontestable.

Je n'ai encore reçu ni votre livre ni la réponse en question dont je voudrois bien voir copie. M. Bulffinger, qui a lu vos Exercitations et qui les attend ici avec d'autres livres par la voie d'Amsterdam, me raconta l'autre jour que vous parlez dans ce traité d'un Italien qui a résolu le problème des lunules, mais quand il l'auroit résolu d'une infinité de manières, je pense qu'il y a certain cas particulier qui le pourroit embarasser encore et qui, à ce qu'il m'en souvient, n'est pas compris dans vos solutions infinies; c'est qu'outre les conditions requises, on demande *que les deux lignes droites prolongées s'entrecoupent à angles droits.* Si vous preniez la peine de résoudre ce problème, je suis persuadé que vous en viendriez aisément à bout, cependant pour vous en épargner le tems, voici la solution: (Fig. 15) Soit $AB = BD = BE = a$, $AC = BF = \sqrt{2}\,a$. Les parties des lunules CBG et CDF sont celles qu'on demande, puisque les lignes droites CB et DF prolongées s'entrecoupent à angle droit en B.

Au reste, j'espère de votre amour pour la vérité que vous ne prendrez pas en mauvaise part la formule que voici:

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{x+1} \mp \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{x+1} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{x} \mp \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{x}}{\sqrt{5}}$$

Elle n'est pas trouvée par hazard, mais c'est un cas particulier d'une formule infiniment plus générale.

Goldbach.

---

*) Voir la note à la page 170.

LETTRE XX.

GOLDBACH à D. BERNOULLI.

SOMMAIRE. Examen ultérieur du problème précédent du calcul des probalités.

Petropoli d. 13. Decembr. 1725.

Ne diutius differam responsum ad litteras Tuas 12. Oct. 1724 scriptas quas eo majore cum voluptate legi quo impatientius expectaveram, a principio earum incipiam, reliqua imposterum pertractabo.

Percipio jam differentiam, quae inter solutiones nostras in illa aestimatione sortium intercedit, quod si enim casum, quo Petrus vincit, vocamus A, quo Paulus B, quo ludus in sequentem jactum differtur C. Quaeritur, si primo jactu ceciderit C, an hoc ipso Petrus in priorem expectationis statum reducatur? Id nisi affirmasses, mihi dubium videretur, propterea quod probabilitas casus C continuo decrescit, nam ante jactum primum erat $\frac{1}{4}$ probabilitatis pro casu C, postquam vero jactu primo jam cecidit C, est tantum $\frac{1}{16}$ probabilitatis ut C cadat jactu secundo; postquam cecidit jactu secundo, est tantum $\frac{1}{64}$ probabilitatis ut cadat jactu tertio, etc. atque ex isto ratiocinio fluxit solutio mea hunc fere in modum:

Quoniam sunt $\frac{3}{4}$ probabilitatis ludum finitum iri jactu primo, et in jactu primo lucrum Petri ad lucrum Pauli est ut $2a$ ad a, erit hactenus lucrum Petri ad lucrum Pauli ut $\frac{6a}{4}$ ad $\frac{3a}{4}$.

Quoniam sunt $\frac{3}{16}$ probabilitatis ludum finitum iri jactu secundo, et in jactu secundo lucrum Petri est ad lucrum Pauli ut $2a$ ad $2a$, erit pro hoc casu lucrum Petri ad lucrum Pauli ut $\frac{6a}{16}$ ad $\frac{6a}{16}$.

Quoniam sunt $\frac{3}{64}$ probabilitatis ludum finitum iri jactu tertio, et in jactu tertio lucrum Petri est $2a$, Pauli $4a$, erit pro hoc jactu lucrum Petri ad lucrum Pauli ut $\frac{12a}{64}$ ad $\frac{6a}{64}$ et ita in infinitum.

Quoniam vero singuli hi jactus pro rata suae possibilitatis simul, ut ita loquar, existere contendunt, conjungendo omnes, obtinetur spes Petri ad spem Pauli

$$\text{ut } \frac{6a}{4} + \frac{6a}{16} + \frac{6a}{64} + \text{etc.} = 2a$$

$$\text{ad } \frac{3a}{4} + \frac{6a}{16} + \frac{12a}{64} + \text{etc.} = \frac{3a}{2}.$$

Rem mihi gratissimam facies si erroris fontem indicaveris.

Goldbach.

LETTRE XXI.

GOLDBACH à D. BERNOULLI.

SOMMAIRE. Deux problèmes de géométrie.

Petropoli d. 30. Octobr. 1726.

Cogitavi, Vir Clar., de utroque problemate quod heri proposuisti. (Fig. 16.) Inter datos circulos AB et AF se tangentes in A, determinare trajectoriam BDE hac lege, ut a quovis medio circulo CA abscindat partem DA, semicirculo AB vel parti AE aequalem.

Hujus trajectoriae determinatio pendet a divisione circuli in datas quascunque partes; sit enim diameter circuli AB partium a. Diameter AC similium partium b, dividatur semicirculus AC in partes b et inde auferantur partes ejusdem semicirculi a, restabit arcus CD, cujus extremitas D determinabit punctum quaesitum in trajectoria BDE.

Quod ad alterum problema attinet, data longitudine arcus circuli quacunque, invenire subtensam arcui respondentem ea lege, ut area segmenti sit maxima possibilis, dico subtensam quaesitam esse diametrum, adeoque semicirculum esse segmentum, quod maximam aream possibilem sub data arcus longitudine comprehendat, idque demonstrari potest sine usu calculi differentialis. Rogo igitur ut revideas demonstrationem, qua ostendere volebas semicirculum quaesito non satisfacere.

Goldbach.

LETTRE XXII.

D. Bernoulli à Goldbach.

=

Sommaire. Réponse à la lettre précédente.

Petropoli d. 31. Octobr. 1726.

Perlegendo schedulam heri ad me missam, animadverti quae sequuntur:

Cum trajectoriam *BDE* petii, non ejus constructionem mechanicam ope infinitorum punctorum *D*, *D* (quorum determinatio utique pendet a divisione circuli in datas quascunque partes), sed naturam aequatione sive algebraica, sive transcendente inter abscissam quandam et correspondentem applicatam exprimendam postulavi. Pro meo enim judicio non differt problema inveniendae trajectoriae a problemate determinandae curvae, quae omnes circulos *ADC* ita secet in *D*, ut sit $AD . DC :: AB . BC$, quam enunciatione.

Verum est semicirculum esse segmentum, quod maximam aream possibilem sub data arcus longitudine comprehendat; id ego quoque geometrice demonstrare possum. Sed vellem ex Te scire analysin; facile enim demonstrantur hujusmodi propositiones, sed saepius difficulter eruuntur seu inveniuntur. Saepe quoque contingit, ut aliquid demonstrandum aggrediamur synthetice, quod vix aliter quam conjecturis assecuti sumus. Haec autem methodus videtur non satis geometrica.

Quodsi vero analysi rem evolvisti, rogo ut illam applices ad hujusmodi problema: Data longitudine arcus circuli quacunque, invenire subtensam arcui respondentem ea lege, ut area segmenti *plus quadrato subtensae* sit maxima, sive ut solidum generatum ex revolutione arcus circa subtensam, tanquam axem, sit maximum. Si ad posterius animum appellere velles, id mihi foret gratius, quia illud in usum convertere possum. Vale, Vir praestantissime.

Dan. Bernoulli.

LETTRE XXIII.

D. Bernoulli à Goldbach.

=

Sommaire. Sur les quantités exponentielles. Séries convergentes pour exprimer les termes moyens des suites dont on a le terme général. Critique d'un raisonnement relatif à l'égalité de deux séries et contenu dans une lettre de G. qui manque.

St.-Pétersbourg ce 30 janvier 1728.

J'ai lu avec plaisir vos belles découvertes. Le problème ($x^y = y^x$) n'est rien moins que difficile; j'ai plutôt considéré la chose comme un joli théorème, paraissant d'abord que x doit nécessairement être $= y$. Au reste, votre solution est la même que la mienne. Ces sortes de quantités ($x^{\frac{1}{x}}$) ont un *maximum*, mais qui ne se peut déterminer que par des séries ou par d'autres approximations qui demandent la quadrature de l'hyperbole. Voici pourtant un théorème là-dessus: c'est que $x^{\frac{1}{x}}$ sera le plus grand lorsque $x = \left(\frac{A+1}{A}\right)^A$ où $A = \infty$; et ainsi, si l'on prend pour A un grand nombre, on aura à peu près la valeur de x. Il est facile de démontrer que $\left(\frac{A+1}{A}\right)^A$ est $=$

$$1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\text{etc. (posito } A=\infty).$$

Il est un peu plus difficile de trouver une série pour le plus grand $x^{\frac{1}{x}}$. Voici ce que j'ai trouvé là-dessus:

$$\text{Soit } 1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\text{etc.}=s,$$

et on aura le plus grand

$$x^{\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{1.s}+\frac{1}{1.2ss}+\frac{1}{1.2.3s^3}+\text{etc.}$$

ou bien

$$x^{\frac{1}{x}}=1+\left(\frac{A}{A+1}\right)^A+\frac{1}{1.2}\left(\frac{A}{A+2}\right)^A+\frac{1}{1.2.3}\left(\frac{A}{A+3}\right)^A+\text{etc.}$$

Je m'étois aussi servi de votre méthode pour approcher à la valeur de la série $\frac{1}{xx}$.

Il est vrai, à ce que j'ai vu, depuis l'honneur de votre dernière*), qu'on peut toujours trouver une série convergente pour exprimer les termes moyens des suites dont on a le terme général, mais je n'en vois pas votre intention; car, si l'on pose, dans le terme général, la valeur de x, on aura, en quantités finies, le terme qu'on souhaite. Si p. ex. le terme général est xx, le terme moyen entre le premier et le second sera $\frac{9}{4}$; pourquoi donc exprimer cela par des suites? et s'il y a des x dans l'exposant, comme p. ex. x^{xx+x}, j'aimerois encore mieux dire qu'alors ce terme est $\frac{3}{2}^{\frac{15}{4}}$ que de l'exprimer par une suite, quoique convergente. Je me fais fort pourtant aussi d'exprimer toutes ces sortes de quantités pas des suites convergentes. Mais il seroit difficile de dire un terme moyen dans la suite $Ax=B$, tant qu'on n'a

*) Cette lettre manque.

pas le terme général; si on le pouvoit sans cela, ce serait quelque chose de beau. Si vous aviez été, M., moins envieux et que vous m'eussiez enfin fait part de votre belle invention, peut-être aurois-je comparu à votre défi en vous marquant, par une suite convergente, ces sortes de termes. Au reste, je ne sais si je vous ai bien compris; je m'attends que vous ayez exprimé le terme général pour la suite $Ax = B$ par une expression finie, et non par des expressions indéfinies; car, pour ce dernier, je ne le prends pas pour fort difficile, n'y ayant à faire autre chose qu'à prendre la valeur de $x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots.(x-x+1)$ qui aura une telle forme $x^x + \alpha x^{x-1} + \beta x^{x-2} +$ etc., et je crois que α, β, etc. se détermineront avec assez de facilité. Je me souviens même que M. Meyer m'a dit de les avoir déterminées. Il se peut pourtant que la chose soit plus difficile que je ne pense.

Je crois bien qu'il y a une infinité de cas, hors ceux de M. Moivre, auxquels on peut trouver les racines des équations. L'exemple que vous alléguez, M., saute aux yeux, car si

$$u^6 - 6u^4 + au^3 + 9u^2 - 3au + f = 0, \text{ on aura}$$

$$u^3 - 3u + \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - f)},$$

Quand vous aurez eu la bonté de m'envoyer la démonstration du théorème de votre *Postscriptum*, je verrai ce qu'il en est; car je crains que ce ne soit un théorème *d'à peu près*.

Dan. Bernoulli.

P. S. Après avoir fini cette lettre, j'examinois votre théorème, et j'ai trouvé que vous vous êtes précipité en deux endroits, car je crois avoir deviné votre raisonnement. Vous dites, M., que

$$A \ldots \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{25} + \text{etc. est égal à}$$

$$B \ldots \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{8} + 0 + \tfrac{1}{24} + \tfrac{1}{35} + \tfrac{1}{48} + 0 + 0 + \tfrac{1}{99} + \text{etc.}$$

Pour en faire voir le contraire, prenons la suite B toute complète, en faisant cette autre

$$C \ldots \tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{15}+\tfrac{1}{24}+\tfrac{1}{35}+\tfrac{1}{48}+\tfrac{1}{63}+\tfrac{1}{80}+\tfrac{1}{99}+\text{etc.};$$

il faudrait maintenant que $C-A$ fût $= C-B$; or le terme général pour $C-A$ est $\frac{1}{(xx+2x)(xx+2x+1)}$. Voyons ce que c'est que $C-B$. Or on voit que $C-B$ est $=$ à la somme de toutes ces suites

$$D \ldots \frac{1}{\square 2.2-1}+\frac{1}{\square 2.2.2-1}+\frac{1}{\square 2.2.2.2-1}+\text{etc.}$$

$$E \ldots \frac{1}{\square 3.3-1}+\frac{1}{\square 3.3.3-1}+\frac{1}{\square 3.3.3.3-1}+\text{etc.}$$

. . . .

$$G \ldots \frac{1}{\square 5.5-1}+\frac{1}{\square 5.5.5-1}+\frac{1}{\square 5.5.5.5-1}+\text{etc.}$$

etc.

au lieu de ces suites, vous aurez pris ces autres, en omettant toujours l'unité dans les dénominateurs:

$$d \ldots \frac{1}{\square 2.2}+\frac{1}{\square 2.2.2}+\frac{1}{\square 2.2.2.2}+\text{etc.}=\frac{1}{3.4}$$

$$e \ldots \frac{1}{\square 3.3}+\frac{1}{\square 3.3.3}+\frac{1}{\square 3.3.3.3}+\text{etc.}=\frac{1}{8.9}$$

$$f \ldots \frac{1}{\square 4.4}+\frac{1}{\square 4.4.4}+\frac{1}{\square 4.4.4.4}+\text{etc.}=\frac{1}{15.16}$$

$$g \ldots \frac{1}{\square 5.5}+\frac{1}{\square 5.5.5}+\frac{1}{\square 5.5.5.5}+\text{etc.}=\frac{1}{24.25}$$

etc.

et en ce cas on auroit $C-A=C-B$, ou $A=B$; mais selon la construction de votre suite B, on doit omettre les suites telles que f, étant déjà comprises sous des précédentes telles que d.

Mais je suis sûr que vous vous serez aperçu avant moi du défaut de ce raisonnement, si vous y avez songé depuis, et que vous me l'avez marqué fort à la hâte, puisque ce n'était qu'en forme de *postscriptum*.

LETTRE XXIV.

D. Bernoulli à Goldbach.

=

Sommaire. Méthode de D. B. pour trouver les racines des équations par approximation. Théorème du Postscriptum précédent. Découverte de Jean B.

St. Pétersbourg ce 20 février 1728.

Je suis toujours de l'opinion qu'on avance plus en une minute en approchant d'une racine d'une équation quelconque, qu'on ne feroit en une heure par la méthode ordinaire. Les exemples que j'ai apportés dans ma dissertation ont été pris au hasard, et si vous voulez, M., me proposer un autre exemple quelconque en me disant même les nombres de la série, par lesquels je dois commencer, je vous ferai voir qu'on avance très vitement et sans tâtonner, pourvu que la plus grande racine ou la plus petite soit réelle: que si aucune de ces deux racines ne soit réelle, on remédie à cet inconvénient en mettant $x = z + a$. Si dans toute l'équation il n'y a point de racine réelle, ma méthode le montre; au lieu qu'on ne peut jamais rien voir de clair par les autres méthodes, et qu'on ne fait que tâtonner comme des aveugles. Je fais donc consister le mérite de ma méthode 1° en ce qu'elle est plus *expéditive*, 2° qu'elle ne fait rien en tâtonnant et 3° qu'elle montre toujours une même espèce de racines, savoir ou les plus petites ou les plus grandes, selon qu'on veut, ce qui plusieurs fois peut être d'une grande utilité; au lieu que par les autres méthodes, on ne sait pas quelle racine on obtient. Mais quand il n'y auroit aucune utilité, je n'en serois pas moins satisfait, et la considérerois alors comme un des plus beaux théorèmes qu'on ait sur ces sortes de matières. Je m'assure aussi que plusieurs y perdroient leur latin en recherchant seulement les démonstrations de mes propositions.

Je suis bien aise qu'il y ait quelque chose dans ma dissertation que vous ayez trouvé digne de votre approbation, quoique nous ne soyons pas tout à fait d'un même goût là-dessus. Pour trouver le terme général de cette série: 1, 73, 4681 etc. dont la loi consiste en ce que $64A+9=B$, je me propose cette équation $\alpha\alpha = 64\alpha + 9$ qui donne ces deux racines $\alpha = 32+\sqrt{1033}$ et $\alpha = 32-\sqrt{1033}$. Je dis donc que le terme général de la suite proposée sera

$$A(32+\sqrt{1033})^x + B(32-\sqrt{1033})^x;$$

les lettres A et B se déterminent en comparant le terme général avec des termes de la suite pris à plaisir, c'est à dire en faisant par exemple $A(32+\sqrt{1033})+B(32-\sqrt{1033})=1$ et $A(32+\sqrt{1033})^2 + B(32+\sqrt{1033})^2 = 73$, ou, ce qui vaut mieux $A+B=-\frac{1}{8}$; et ainsi on trouve $A=\frac{5}{2\sqrt{1033}}-\frac{1}{16}$ et $B=-\frac{5}{2\sqrt{1033}}-\frac{1}{16}$, et per conséquent, le terme général sera

$$\left(\frac{5}{2\sqrt{1033}}-\frac{1}{16}\right)(32+\sqrt{1033})^x - \left(\frac{5}{2\sqrt{1033}}+\frac{1}{16}\right)(32-\sqrt{1033})^x.$$

Votre méthode de trouver les termes moyens de la suite $Ax = B$ me paroît très ingénieuse, et je crois qu'on auroit de la peine à le faire d'une autre manière.

Votre observation, que $\alpha + \beta + \gamma + \delta +$ etc. est $=$ à $\frac{3}{4}$, est jolie; mais c'est aussi dommage qu'elle soit aussi facile à être démontrée; car on voit d'abord que tous les premiers termes des suites α, β, γ, δ etc. sont $= \frac{1}{1+2}$, tous les seconds $= \frac{1}{4+4}$, tous les troisièmes $= \frac{1}{9+6}$ etc. ce qui fait une nouvelle suite dont le terme général est $\frac{1}{xx+2x}$ et dont la somme est $= \frac{3}{4}$. Mais je doute plus que jamais de la proposition du *postscriptum* de votre pénultième. Si vous voulez, M., lire avec quelque attention mes remarques que j'ai faites là-dessus dans ma dernière, peut-être tomberez vous d'accord avec moi: ou bien, prenez une trentaine de termes de cette suite $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} +$ etc. et les termes correspondants de l'autre $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} +$ etc., exprimés en cinq ou six figures de fractions décimales, vous y trouverez de la différence.

Vous avez raison, M., de dire qu'il faut écrire *rationelle* et non *rationale*; je l'ai ainsi trouvé dans M. de Fontenelle: aussi bien dit-on *différentiel*, et dans la logique, *formel*, *matériel* etc., dans le langage commun on dit *universel*; cependant on dit aussi *général*, *martial*, *national* etc.; il n'y a donc point de règle générale et ce n'est que l'usage qui a établi le mot *rationel*.

Avant que de finir, j'aurai l'honneur de vous communiquer une belle découverte que mon frère à Bâle a faite, et dont j'ai aussi trouvé la démonstration, qu'il ne m'a pas envoyée. La voici: Soit cette suite continuée à l'infini $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} +$ etc., si on la coupe en deux parties de manière que la raison des nombres des termes soit donnée, la somme de la dernière partie pourra s'exprimer en quantités finies. Cette détermination est même vraie très à peu près, pourvu que le nombre des termes soit un peu grand. Prenez p. ex. neuf termes; les six derniers seront moins que 1,098612288; si vous prenez douze termes, les huit derniers seront encore moins que ledit nombre, mais ils y approcheront davantage; si vous prenez trois mille termes; les deux mille derniers ne différeront enfin plus sensiblement de ce nombre 1,098612288, et ces nombres asymtotes se déterminent en moins de rien. De tout cela, il a tiré un très beau corollaire qui est tel: on peut donner le terme général fini pour la somme de cette série

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \text{etc.}$$

non infinie, tel que la différence de la somme marquée par le terme général et la véritable somme ne surmonte jamais la moitié d'une unité. Je l'ai trouvé aussi ce terme général, et je trouve (chose très remarquable à mon avis) que la somme d'un million de termes de cette suite $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} +$ etc. est moindre que $13\frac{4}{5}$, mais pourtant plus grande que $13\frac{3}{10}$. Cela n'est-il pas paradoxe pour une suite en soi infinie? En général, si le nombre des termes est n, la somme de tous les termes est moindre que $1 + \ldots$ et plus grande que $\frac{1}{2} + \ldots$

Votre dissertation de transformatione serierum est achevée; j'y avais trouvé deux fautes au manuscrit que je me suis pris la liberté de corriger, voyant que ce n'étaient que de faux coups de plume.

Dan. Bernoulli.

LETTRE XXV.

D. Bernoulli à Goldbach.

Sommaire. Travail de G. sur l'équation de Riccati. Différentiation des exponentielles.

Petropoli d. 18. Martii 1728.

Accepi litteras Tuas, atque libenter perlegam quae de novo commentatus es circa aequationem Riccatianam statim ac dissertationem Tuam habuero, operamque simul dabo ut correcta in publicum prodeat. Vix recordor quae manu scripsi de reductione formulae $a z^m d z + b y d z = d y$. Si bene memini, docueram, quomodo integranda sit formula vel separanda, si m sit numerus integer. Hic tamen casus non aliam habet praerogativam, quam quod paullo fiat simplicior aliis; potest enim formula separari, quicunque numerus fuerit m, imo quaecunque fuerit functio ipsius z. Haec separatio me perduxit ad egregia theoremata circa motum corporum in mediis resistentibus et praesertim circa oscillationes pendulorum in aëre.

Hanc separationem Tu quoque facile perspicies, Vir Clarissime, modo substitutiones facias quantitatum non algebraicarum sed exponentialium velut ponendo $z = c^y y^n$, et his in casibus theoremata observanda sunt. Si $z = c^y$, erit logarithmus ipsius z, id est, $l z = y$. Si velimus differentiale sumere quantitatis logarithmicae, oportet simpliciter dividere quantitatis differentiale per ipsam quantitatem, ita $d.lz = \frac{dz}{z}$, unde si $l z = y$ erit quoque $\frac{dz}{z} = dy$. Exinde quoque patet, quaenam sit quantitas differentialis hujusmodi quantitatum c^y; est nimirum $d \,.\, c^y = c^y\, dy$ ita quoque

$$d \,.\, c^{xx} = 2\, c^{xx}\, x\, dx \text{ etc.}$$

Vale . . .

Dan. Bernoulli.

LETTRE XXVI.

D. Bernoulli à Goldbach.

=

Sommaire. Remarques ultérieures sur la dissertation de Goldbach relative à l'équation de Riccati.

Petropoli d. 19. Aprilis 1728.

Avide perlegi dissertationes Tuas a Cl. Schumachero mihi traditas; id quoque cumprimis mihi placuit, placuerunt autem omnia, est elegantissimum illud theorema, quo aequationes algebraicas eruis aequationi Riccatianae, quotiescunque est integrabilis, satisfacientes, quod antea sine summo labore fieri minime potuit. Gratuler Tibi hoc inventum et coram omnibus collegis testatus sum, quantum eo fuerim delectatus. Dubito an alii methodis suis generalibus id unquam fuissent praestaturi. Caeterum gratias Tibi ago, quod Fratris beate defuncti meique tam honorificam mentionem injicere volueris; id nemo meritis nostris, sed humanitati Tuae omnes dabunt;

erit autem mihi gratissimum ut etiam exteri noscant, quantum me ames amaverisque Fratrem.

Rescidi schedulam manu mea scriptam de aequatione $ax^m dx + y dx = b dy$ integrabili quotiescunque m est numerus integer positivus, quia multa alia inveni generaliora. Hac vice illud tantum indicasse sufficiat, posse generaliter in illa indeterminatas separari, non solum pro quocunque casu ipsius m, sed et pro quacunque functione ipsius x: Dein separatis indeterminatis facilius dignoscantur requisita, ut aequatio integrari possit. Sit aequatio $X dx + y dx = b dy$, ubi X denotat quamcunque functionem ipsius x; sit c numerus, cujus logarithmus est unitas, ponaturque $y = c^{\frac{x}{b}} q$, et erit dy (dedit Parens meus methodum differentiandi quantitates exponentiales in Actis Lips. a. 169?)

$$= \frac{1}{b} c^{\frac{x}{b}} q\, dx + c^{\frac{x}{b}} dq;$$

mutabitur proin aequatio proposita in hanc

$$X dx + c^{\frac{x}{b}} q\, dx = c^{\frac{x}{b}} q\, dx + b\, c^{\frac{x}{b}} dq, \text{ vel } X dx = b\, c^{\frac{x}{b}} dq,$$

et denique $dq = X dx : b\, c^{\frac{x}{b}}$, quae ultima aequatio jam est separata, et possum integrare $X dx : b\, c^{\frac{x}{b}}$ quoties

$$X = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{ etc.}$$

ubi per $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ etc. possunt intelligi quaecunque quantitates constantes; fit itaque in his casibus aequatio prima integrabilis, et si in integratione constans omittatur, prodeunt aequationes Tuae algebraicae; si addatur aliae, insuper accedunt non minus satisfacientes, sed quantitatibus exponentialibus fucatae. Cum scivero, id Te approbante fieri posse, interjiciam illis verbis, quibus promittis aequationes integrales, talia quae ostendant propositum Tibi fuisse illos solum casus considerare, quibus aequatio resultans integrata fit pure algebraica, id est a quantitatibus exponentialibus libera. Rescribas autem ipse verba, si quae addi cupis. Spero brevi Actorum nostrorum tom. I in lucem proditurum.

Vale . . .

Dan. Bernoulli.

LETTRE XXVII.

Goldbach à D. Bernoulli.

Sommaire. G. proteste contre tout changement dans son mémoire, ne voulant pas faire accroire à ses lecteurs comme si le calcul exponentiel lui était familier.

Moscuae d. 10. Maii 1728.

In schediasmate meo dixi aequationem differentialem

$$a x^m d x + y d x = b d y$$

esse integrabilem si m sit numerus integer positivus, nam de integratione exponentialium (in qua adhuc non satis sum exercitatus) nihil mihi tunc in mentem venit, idcirco si monere vellem me tantum de algebraicis integrationibus solicitum fuisse, lectori persuadere viderer me exponentiales possibiles scivisse quidem, sed commemorare noluisse, quod quia secus est, nihil illic mutandum puto. Cum Petropolin rediero, integrationem exponentialium mihi magis familiarem reddam. Si typis imprimantur schediasmata, litteras C. G. nomini exprimendo sufficere censeo. De reliquis gratias ago maximas. Vale. Goldbach.

LETTRE XXVIII.

D. Bernoulli à Goldbach.

=

Sommaire. Suite sur l'intégrabilité de l'équation de Riccati.

St.-Pétersbourg ce 28 mai 1728.

— — Pour vous dire la vérité, M., je n'avois pas examiné vos expressions*) pour les cas intégrables du C. Riccati; mais quand même il s'y est glissé quelque bévue, cela n'a rien dérogé au mérite de votre méthode, car je voyois assez, qu'elle suffisoit pour satisfaire entièrement au problème. Mais j'allois l'examiner quand je reçus votre pénultième, et cela à l'occasion d'une pièce que je faisois par des extraits des manuscrits de feu mon frère que plusieurs m'ont exhorté de faire. J'entrevis d'abord qu'il falloit faire attention aux coefficiens, ce qui me sembloit ne point être exécuté dans votre mémoire. Mais encore une fois, votre méthode me sembloit mériter les mêmes éloges alors même que je doutois du succès de l'exécution.

J'aurai l'honneur de vous dire ici que j'ai fait des extraits des manuscrits de feu mon frère et que j'en ai formé un

*) Il s'agit du mémoire: De casibus, quibus integrari potest aequatio differentialis $ax^m dx + byx^p dx + cy^2 dx = dy$ observationes quaedam. Comment. om. I. pag. 185.

mémoire qui sera imprimé immédiatement après le vôtre auquel il servira de commentaire, puisqu'il donne l'analyse. Il y a un seul lemme qui n'a pas cette incommodité que les miens, donnant tout seul une infinité de cas: il y a bien d'autres choses qui vous plairont à ce que j'espère; je suis curieux d'en savoir votre sentiment, car je ne voudrois pas que le sujet se fût avili entre mes mains: ce seroit faire tort à la mémoire de mon frère à qui ces choses ont été fort familières. Quand on applique bien ledit lemme de mon frère, il n'est plus difficile de voir la manière générale de trouver les équations algébriques, comme vous avez fait; mais je n'ai pas voulu exécuter la chose et j'ai mieux aimé citer votre manière de le faire.

Vous verrez à la fin du mémoire une méthode de trouver directement les équations algébriques sans supposer des coefficiens ou des exposans inconnus, méthode qui est de mon crû, et je l'ai trouvée par le calcul exponentiel. Je vous conjure de vous rendre ce calcul plus familier, il est d'un grand usage et il ne faut qu'une heure pour cela, car votre pénétration vous fera voir bien clair tout le mystère en moins de rien, et vous y ferez ensuite, à votre ordinaire, les plus belles découvertes. — — Votre démonstration du théorème de Fermat est bonne et ingénieuse — — —

Avez vous remarqué cette propriété

numeri naturales:	1	2	3	4	5	etc.
eorum cubi:	1	8	27	64	125	etc.

erit summa cuborum semper = quadrato summae numerorum, id est, v. gr. $1 + 8 + 27 + \text{etc.} = (1 + 2 + 3 + \text{etc.})^2$; c'est une observation d'Adadouroff.

Dan. Bernoulli.

LETTRE XXIX.

D. BERNOULLI à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Problème de la théorie des nombres.

St.-Pétersbourg 29 juin 1728.

— — — Je finirai par un problème qui m'a paru fort curieux et que j'ai résolu. Le voici: Trouver deux nombres inégaux x, et y tels que $x^y = y^x$. Il n'y a qu'un cas où ces nombres soient entiers, savoir $x = 2$ et $y = 4$ (car $2^4 = 4^2$), mais on peut donner une infinité de nombres rompus qui satisfont au problème. Il y a aussi d'autres espèces de quantités dont je ne dirai rien.

Dan. Bernoulli.

LETTRE XXX.

D. Bernoulli à Goldbach.

=

Sommaire. Sommation d'une série. Problème de physique. Résolution d'une certaine espèce d'équations exponentielles.

St.-Pétersbourg ce 29 août 1728.

— — J'ai trouvé, ces jours passés, une méthode d'approcher très vite à la somme de cette progression

$$1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \text{etc.},$$

elle est fort à peu près égale à $\frac{8}{5}$. Voici un théorème de physique assez joli et qui donne un peu à connoître la nature des fluides: Si massa solida dividatur in globulos aequales et infinite parvos atque contiguos, erit volumen, quod occupant omnes globuli, ad volumen massae non divisae, ut latus quadrati circulo inscripti ad sextantem peripheriae circuli, id est, proxime ut 4 ad 3.

Je ne sais si je vous ai déjà marqué que j'ai une méthode d'approcher aux racines de toutes les équations imaginables, quelque composées qu'elles soient, comme p. ex. $x^n + x^{xx} + b^x + C =$ arcui circulari, cujus radius est 1 et cujus sinus $= x$. Quoiqu'il semble impossible qu'on puisse parvenir à des équations si bizarres, je suis pourtant tombé sur des équations encore moins traitables dans lesquelles j'ai trouvé les racines jusqu'aux millièmes parties près. C'étoit dans la dissertation que j'avois composée à l'occasion des expériences de M. le général Gynther, où je m'étois proposé de trouver la hauteur du jet d'une boule dans l'air par le tems que la boule a employé à monter et à descendre, et par là j'ai ensuite montré que la résistance de l'air est si grande que, bien souvent, un globe ne fait que la centième partie de la hauteur à laquelle il seroit arrivé s'il avoit été jeté avec la même force dans le vide. Par cette méthode, je trouve que ces sortes d'équations $a^x + bx^m = c$ ont toujours deux racines; ainsi p. ex. dans l'équation $3^x = 54x - 135$ les deux racines sont $x = 3$ et $x = 4$.

Dan. Bernoulli.

LETTRE XXXI.

D. Bernoulli à Goldbach.

Sommaire. Notice biographique sur Nicolas Bernoulli.

St.-Pétersbourg ce 9 novembre 1728.

Vous avez eu la bonté de me faire dire par M. Bayer que je vous envoie des mémoires sur la vie de mon frère; je m'en acquitte dans l'espérance que vous vous en servirez. Je vous demande pardon si la mémoire d'un frère que j'ai chéri par dessus ma vie et dont j'ai toujours admiré les belles qualités, m'a entraîné à faire son panégyrique. Je ne veux vous rien préscrire, M., et je vous prie de considérer mes paroles comme de simples instructions. Vous pouvez en raisonner avec la dernière liberté, mais je sais que vous ne direz de mon frère rien qui ne tourne à sa louange. Vous l'avez honoré de votre estime et de votre amitié pendant sa vie, et je sais aussi qu'il vous estimoit infiniment;

j'espère pourtant que la considération de ses mérites vous sera un assez grand motif pour faire son éloge. S'il y a dans ce mémoire quelque endroit qui serve plutôt à me déprécier qu'à hausser les louanges dues à feu mon frère, je vous prie de ne pas l'omettre pour cela; car je dois cette reconnoissance à sa mémoire, et vous pourrez, M., si vous le trouvez à propos, dire ces articles comme des choses que vous m'avez entendu dire.

Je vous rends grâces, M., de la peine que vous vous êtes donnée à écrire sur ce sujet à mon Père. Je vous assure qu'il n'auroit pas manqué de répondre s'il avait reçu votre lettre.

Dan. Bernoulli.

(Notice biographique sur Nicolas Bernoulli, par son frère Daniel, jointe à la lettre précédente*).

Feu mon frère, M. Nicolas Bernoulli, naquit à Bâle le 27 janvier v. st. 1695. Son père est M. Jean Bernoulli, son grand-père M. Nicolas Bernoulli, membre du Grand-Conseil et assesseur à la Chambre de justice. Sa mère est Mme. Dorothée Falkner dont les ancêtres ont eu, depuis plusieurs siècles, sans interruption, les présidences et premières charges de notre république, et dont le frère est actuellement l'un des quatre Chefs de la ville.

Il n'avait que huit mois lorsqu'il alloit avec son père et sa mère à Groningue, et dix ans après, cette famille, multipliée de

*) Voir la biographie de Nic. Bernoulli, par Goldbach. Comment. tom. II. pag. 428.

trois personnes s'en retourna à Bâle. Comme il étoit l'aîné et qu'il fit voir en sa jeunesse une grande vivacité, son père et sa mère eurent une attention singulière pour son éduction et pour lui faire apprendre tout ce qui peut rendre l'homme agréable et utile à la société humaine. Il avait une grande facilité pour les langues, et à l'âge de 8 ans, il parloit très bien le hollandois, l'allemand et le français et assez bien le latin, et on remarquoit à son retour en Suisse que, toutes les fois qu'on s'arrêta quelque tems dans un endroit considérable, il en prenoit l'accent et les manières de parler. Etant de retour à Bâle, il continua à s'appliquer aux études, de sorte que, l'an 1708, il sortit du gymnase, et l'an 1711, le 9 juin n. st., il fut reçu docteur en philosophie, mon père étant chaque fois doyen de la faculté. Il avoit, lors de cette dernière réception, 16 ans passés et il fallut qu'il choisît un genre de vie. Il aimoit les études, mais cette vie sédentaire qu'elles demandent le rebutoit un peu, et peut-être les auroit-il abandonnées entièrement sans l'exhortation de son père. Il se voua donc aux droits. Cependant il étoit déjà, dans ce tems-là, assez bon géomètre, et même excellent pour son âge; on trouve dans ses manuscrits de ces tems-là des morceaux qui demandent une parfaite connoissance des nouveaux calculs différentiel, intégral et exponentiel avec les solutions des problèmes les plus recherchés qui avaient été en vogue depuis que ces calculs avaient été trouvés. Son père se déchargeoit aussi d'une bonne partie de ses correspondances sur lui. Mais il étoit devenu mathématicien insensiblement et malgré lui; non qu'il ne chérît les mathématiques et qu'il ne les comprît avec beaucoup de facilité, mais que chaque moment d'application le gênoit. Peut-être ne se seroit-il point aperçu lui-même de tous ses progrès, sachant combien ils lui ont peu coûté, si une amitié fraternelle n'avoit forcé son naturel à m'enseigner les mathématiques, à moi qui n'avois que 11 ans. Il crut d'abord me faire comprendre en peu de tems tout ce qu'il avoit appris de son père et qu'il avoit trouvé de soi-même; il y mettoit toutes ses forces pour pouvoir pousser ensuite nos études conjointement; mais malgré tous ses efforts de m'avoir pour compagnon d'études, je fus toujours, depuis ce tems-là, son disciple, de sorte que, se voyant tellement au dessus de son écolier, il eut assez bonne opinion de lui, pour se croire mathématicien tout formé. Cependant, il ne laissait pas de s'appliquer au droit, et peut-être plus qu'on n'auroit pu le présumer d'un mathématicien jeune et volage. Ce fut sous la direction de feu M. Jacques Battier, très savant professeur en droit à Bâle. Enfin, la faculté lui donna les *licences* de docteur en droit après qu'il eut soutenu, le **13** novembre **1715**, des thèses *de jure detractionis*. Peu de tems après, mon père lui proposa de faire un tour en des pays étrangers, comme c'est la coutume chez nous presque généralement introduite. Il embrassa cette proposition avec beaucoup de plaisir dans l'espérance d'en tirer un grand usage. Il s'arrêta long-tems en Italie où il gagna la connoissance de MM. Poleni, les frères Manfredi, Riccati, Michelotti, etc., tous très connus des savans. Ses amis de coeur qu'il voyoit pour se délasser étoient MM. Reghini et Fabris; il les connoissoit très hommes de bien, d'une grande pénétration, de beaucoup de mérite et qui ne lui parlèrent jamais de mathématiques, car jusque là il ne les aimait que pour sa propre satisfaction. De l'Italie il s'en alla en France et il demeura quelque tems à Paris où il reçut beaucoup de civilités, surtout de MM. de Montmort et Varignon, tous deux défunts depuis. Enfin il tomba malade à Paris, ce qui rompa ses desseins de voir d'autres pays, et il se vit forcé de s'en retourner dans sa patrie pour prendre plus de soin de sa santé. Etant de retour à Bâle, l'an **1718**, il eut tout le loisir de se perfectionner dans les mathématiques dont il se sentoit tellement épris qu'il n'y avoit plus rien qui pût le retenir; il avait plus de soin de ses cahiers, à mettre en ordre ses découvertes et à entretenir ses correspondances. Cependant son ami, M. Fabris travailloit incessamment à le faire revenir en Italie, et enfin il le persuada de se rendre à l'invitation de M. Vezzi, noble Vénitien, qui avait grande envie de joindre aux belles connoissances qu'il possédoit, celle des mathématiques. Mon frère s'en trouva fort bien, car il avoit à faire à un cavalier des plus honnêtes. Il gagna à ce second voyage la connoissance de M Goldbach qu'il a fort entretenue depuis. Il resta deux ans à Venise et il y seroit resté davantage sans les ordres très exprès de son père de revenir dans sa partie. A son retour à Bâle, il trouva une place vacante dans notre université qui étoit la chaire en droit; il se mit sur les rangs des prétendans et il y réussit antant qu'on le peut par nos loix qui portent qu'on choisisse parmi les concurrens trois par les suffrages, entre lesquels le sort doit décider. Il fut des trois, mais il eut le sort contraire. Peu après vaquoit une semblable place à Berne; il y alloit et l'emportoit après avoir donné les preuves de son savoir. Il étoit très content de cet emploi qu'il pensoit ne pas quitter; il avait de bons appointemens et, parmi plusieurs agrémens, celui d'être comme dans sa patrie. Trois ans après, il reçut une vocation pour être de l'Académie des sciences de St.-Pétersbourg en qualité de professeur de mathématiques avec des offres très avantageuses qu'il refusa d'abord; mais lorsqu'il apprit que j'avois reçu une pareille vocation, nous primes la résolution de l'accepter, chacun pour avoir le plaisir d'être ensemble, plaisir que nous ne croyions pouvoir acheter trop cher à cause de la parfaite union qui régnoit entre nous deux. Je dois donner ici cette louange à la mémoire de mon frère que, quoiqu'il eut toujours de grands avantages sur moi, il auroit été très faché que j'en eusse profité moins que lui; tant son amitié étoit sincère! Il vint à Bâle et nous en partîmes ensemble, le 5 septembre n. st. 1725, pour St.-Pétersbourg où nous arrivâmes le 27 octobre. Mon frère se trouva d'abord assez bien de l'air de ce pays-ci, mais huit mois après son arrivée il commençoit à se porter mal et fut obligé de s'aliter; il fut fort abattu dès le commencement de sa maladie, sans qu'on remarquât extérieurement beaucoup d'indices de sa triste situation; ce n'étoit jusque là qu'une fièvre lente sans autres symptômes facheux. Mais le 27 juillet, il eut des convulsions avec des tranchées très douloureuses qui ne durèrent pourtant pas, et deux jours après, le 29 juillet 1726, il mourut le matin à 3 h. agé de 31 ans et 6 mois, ayant conservé jusqu'au dernier moment de sa vie une présense d'esprit admirable. Une semaine avant sa mort il sentit bien qu'il ne releveroit pas de sa maladie, il s'en entretint avec moi sans témoigner la moindre inquiétude; il se fit apporter ses papiers qu'il tria, et brûla quelques lettres. M. Duvernoy qui l'a ouvert après sa mort lui a trouvé un abscès aux intestins. Son père, sa mère et surtout son frère de Pétersbourg en furent inconsolables et je crois qu'il a été regretté de tous ceux qui l'ont connu, car, en vérité, il étoit sans fard, très honnête homme, d'une agréable conversation et n'aimant point la dispute. Ses mérite sont assez connus sans que j'en parle. Il a donné des échantillons de son savoir dans les Actes de Leipsic et dans nos Mémoires; ses manuscrits sont entre les mains de son frère. L'Impératrice défunte eut la grâce de lui donner encore des marques de distinction, car S. M. I. ordonna de l'enterrer à Ses dépens et destina cent ducats pour cela, Elle témoigna au frère du défunt la part qu'Elle daigna prendre à sa perte dans une assemblée publique des professeurs que S. M. a voulu honorer de son Auguste présence.

Bernoulli.

LETTRE XXXII.

D. Bernoulli à Goldbach.

=

Sommaire. **Mémoire sur les séries récurrentes.**

St.-Pétersbourg sans date.

Je viens d'achever une petite dissertation sur les séries où j'espère que vous trouverez des choses qui vous plairont. J'ai remis l'exemplaire à M. Müller et je n'ai pas le tems de copier ce brouillon; je prends la liberté de vous l'envoyer tel qu'il est*), mais je suis mortifié de ne pas pouvoir vous envoyer une copie de l'exemplaire, car j'y ai corrigé et ajouté plusieurs choses que vous ne trouverez pas dans le présent écrit. Je vous prie de me dire, M., votre sentiment sur le théorème du 3me §, particulièrement si vous

*) Il se trouve effectivement annexé à la lettre. Nous ne le reproduisons pas, le mémoire étant imprimé dans le 3 tome des Comment. pag. 85, sous le titre: *De seriebus recurrentibus observationes.*

ne croyez pas qu'un autre l'aît déjà trouvé. Je sais que ces matières vous sont fort familières et j'en estimerai d'autant plus votre jugement. Je dis, dans l'exemplaire que j'ai donné à M. Müller, que vous avez trouvé avant moi le terme général pour les séries recurrentes et que j'ai eu tort à vous réfuter dans mes *Exercitations*. Vous voyez, M., que je suis bien éloigné des manières de certains W. — —

Vous trouverez, dans l'écrit que j'ai l'honneur de vous envoyer, un théorème de mon cousin M. Nic. Bernoulli. En vérité, il est très beau; j'en ai donné une petite démonstration. Vous avez trouvé aussi des expressions générales pour les sections angulaires, mais elles sont indéfinies.

Je me suis donné l'honneur d'écrire à M. le premier Médecin*) pour le prier de m'envoyer ses ordres pour le livre que chaque professeur doit composer. A-t-il reçu ma lettre?

Dan. Bernoulli.

*) Blumentrost, président de l'Académie.

LETTRE XXXIII.

GOLDBACH à D. BERNOULLI.

=

SOMMAIRE. Termes généraux des séries. Séries recurrentes. Identité des théorèmes de Moivre et de Nic. Bernoulli.

Moscou ce 18 novembre 1728.

J'ai parcouru avec beaucoup de plaisir vos observations sur les séries, et je les lirai plus attentivement encore lorsqu'elles paroîtront avec les augmentations que vous y avez faites. Pour ce qui est de cette thèse: *Series omnes, modo certam progressionis legem servent, ad formulam aliquam seu terminum generalem revocari possunt*, je vous prie de considérer 1° qu'il sera très difficile de faire voir le contraire, à cause de l'infinité des combinaisons possibles entre les formules algébriques et exponentielles, 2° que plusieurs séries, dont on a jusqu'ici envain cherché les formules générales, en ont effectivement, pourvu qu'on admette dans ces formules certaines expressions dont on ne s'est pas encore avisé de faire usage; c'est ainsi que je crois pouvoir donner le terme général de la suite $1 + 1.2 + 1.2.3 + 1.2.3.4 +$ etc. 3° que chaque série, de quelle progression qu'elle soit, se peut

18

exprimer par une formule générale, mais infinie, comme je l'ai fait voir par un théorème que je communiquai, il y a quelques années, à feu M. votre frère et dont je vous envoie le même exemplaire. Il me semble que votre théorème § 3 approche fort du mien § 2, et il est très naturel de se rencontrer en épluchant ces mystères des progressions.

La méthode dont vous vous servez, M., pour trouver le terme général des suites recurrentes, me paroît fort belle et fort bien expliquée, cependant vous ne devez pas vous adresser à moi pour savoir, si quelqu'un avant vous a dit la même chose. J'ai si peu lu les auteurs qui traitent cette matière, que le nom même des séries recurrentes m'est nouveau, quoiqu'il me paroisse assez propre et expressif en cette occasion; aussi ne sais-je pas si la définition des séries recurrentes demande que les quantités m, n, p, etc. (§ 2 de votre diss.) soient constantes, ou si la quantité variable de l'exposant x y peut entrer. Les séries de la prmière façon pourroient s'appeler *series recurrentes ordine constanti* et les autres *series recurrentes ordine variabili*, comme si A représente un terme quelconque de la série, et B le terme suivant immédiatement après, et que la loi de progression s'exprime par $Ax = B$, c'est la même suite dont j'ai parlé ci-dessus, et dont j'avoue qu'il sera difficile de trouver le terme général fini par les expressions vulgaires *algébrique-exponentielles*: Cependant il y a plusieurs autres séries recurrentes de cette classe qui sont plus traitables, comme si p. ex., la loi de la progression est exprimée par cette égalité

$$Ax + (x+1)^m - x(x+1)^{m+1} = B$$

ou $Ax + (x+1)^{x+1} - x(x-1)^x = B$

ou $m(A - a^x) + a^{x+1} = B$

(a et m sont des quantités constantes arbitraires), on peut trouver le terme général de chacune de ces trois séries.

M. Mayer me dit, il y a plus de deux ans, que le théorème de M. Moivre, en vertu duquel on tire de l'équation

$$y^a + my^{a-2} + \frac{(a-3)m^2}{2a} y^{a-4} + \frac{(a-4)(a-5)m^3}{2.3a^2} y^{a-6} + \frac{(a-5)(a-6)(a-7)m^4}{2.3.4a^3} y^{a-8} + \text{etc.} + p = 0$$

la racine

$$y = \left(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} + \frac{m^a}{a^a}\right)}\right)^{\frac{1}{a}} - \left(\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} + \frac{m^a}{a^a}\right)}\right)^{\frac{1}{a}}$$

pouvoit servir à la division d'un arc de cercle en parties quelconques; mais comme, peu de tems après, il m'avertit qu'il s'étoit mépris, je n'y ai plus fait réflexion. A présent il se trouve que l'expression de M. votre cousin

$$(2\sqrt{-1})\,nA = (z\sqrt{-1} + \sqrt{(1-zz)})^n - (-z\sqrt{-1} + \sqrt{(1-zz)})^n$$

et celle de M. Moivre se ressemblent comme deux gouttes d'eau: il n'y a qu'à faire $\frac{p^2}{4} = z^2$, $m = a = \frac{1}{n}$, et voilà l'une métamorphosée dans l'autre.

Vous faites d'ailleurs, M., en ma faveur, une rétractation qui est d'autant plus louable que je ne l'aurois jamais exigée, ayant appris par ma propre expérience combien il est facile de se méprendre dans ces sortes de raisonnemens. M. le premier Médecin n'est pas encore de retour à Moscou, c'est pourquoi je n'ai pu lui parler au sujet de la lettre que vous lui avez écrite.

Goldbach.

LETTRE XXXIV.

D. Bernoulli à Goldbach.

Sommaire. Continuation sur les séries.

St.-Pétersbourg ce 18 novembre 1728.

Votre approbation m'a fait un plaisir proportionné à l'estime que j'attache à tout ce qui part de vous; mais je ne m'attendois pas que vous fixassiez votre attention sur ma méthode de trouver le terme général des séries recurrentes; pour moi, je ne trouve dans tout cela que des choses tolérables, et je vous assure, M., que je n'aurois pas pris la peine de faire une dissertation sur cette matière sans la remarque que j'avois faite de la belle propriété de ces séries, par le moyen desquelles on peut sans peine et très vitement et sûrement approcher à toutes les racines de toutes les équations tant numériques qu'algébriques. C'est en ce seul point que je fais consister tout le mérite de ma pièce; aussi n'est-ce qu'à cet égard que j'ai fait plusieurs additions. Comme vous me paroissez, M., sensible au point qui vous regarde, je transcrirai ici tout l'article: „Nescius illas (series) primo a Keplero, postea a D. Cassini fuisse adhibitas, et denique a Cel. Geometris DD. Montmort, Moivre, Goldbach, Nic. Bernoulli aliisque omni successu exploratas, et quidem sub facie multo generaliori; imo praestiterunt Viri Doctissimi, quod fieri posse tunc nondum putabam: nimirum terminum generalem invenerunt pro omnibus istius modi seriebus, quarum exemplum a me allatum fuerat contra sententiam Eruditissimi D. Goldbach, series omnes, modo certam progressionis legem servent, ad terminum generalem reduci posse asserentis. Horum me primo certiorem fecit D. N. Bernoulli, dein ipse D. Goldbach, uterque addens formulas suas pro termino generali serierum, de quibus sermo est."*) S'il y avoit quelque-chose à changer ou à ajouter, je vous prie de me le dire très librement. Quand vous aurez examiné, M., de plus près votre théorème § 2 et le mien § 3, vous n'y trouverez aucune ressemblance. Cependant je trouve votre théorème très beau, et il sera aussi d'un grand usage, pourvu qu'on puisse changer les progressions divergentes en des convergentes réelles, ce dont je doute fort. Pour me convaincre du contraire, dites moi seulement, comment on peut approcher par votre méthode à la racine quarrée de 2. Quant à mon théorème § 3, je le trouve beau à cause de sa nouveauté, et parce qu'il montre très bien l'universalité de la loi des séries recurrentes auxquelles j'ai montré que

---

*) l. c. au commencement même, pag. 85 et suiv.

toutes les séries algébriques appartiennent aussi bien que les géométriques, c'est-à-dire en général toutes les séries, dans le terme général desquelles on ne trouve que des expressions comprises sous cette formule générale $a x^m b^{cx+d}$. Il suit aussi du même théorème un beau corollaire, savoir, que toutes les séries algébriques d'un même ordre sont composées d'une même manière par les termes précédens. Quant au passage latin, que je viens de citer, j'avoue qu'il sera presque impossible d'en démontrer le contraire; mais peut-être tout-à-fait impossible d'en démontrer la nécessité; je suis pourtant de votre avis. Mais au reste, je vous rends M., cette justice de croire que vous n'êtes aucunement allarmé de ce que j'ai mis dans mes Exercitations. Vous êtes un savant trop galant pour cela, et vous savez d'ailleurs que mon nom n'étoit pas, dans ce tems-là, d'un grand poids, ni même aprésent, surtout dans ces pays-ci. Je m'assure aussi que, des 50 exemplaires qui ont été imprimés, si je me souviens bien, il y en a plus des deux tiers employés à d'autres usages; et plût à Dieu qu'ils l'eussent été tous. Je ne leur aurois pas envié ce bonheur, comme Ovide fit à ses livres tristes. J'attends avec grande impatience de voir votre formule générale pour cette série $Ax \doteq B$, où A et B marquent des termes voisins de la série; mais je veux dire une expression finie, car pour vos expressions indéfinies, puisque dans l'expression du millième terme, on suppose le millième terme et tous les précédens connus, je n'en comprends pas l'usage. Je doute fort aussi, si ces expressions donnent jamais rien de réel. Les autres séries que vous alléguez comme plus traitables, ni celle que je viens de citer, n'ont jamais été comptées parmi les recurrentes; cependant je n'en vois pas le terme général. M. Mayer a deviné juste en disant que le théorème de M. de Moivre pouvoit servir à la section angulaire; mais vous aurez vu que mon cousin a tiré son équation d'un autre principe. Cependant je lui marquerai l'observation que vous avez faite là-dessus. — — Nous avons tous admiré vos nobles pensées et belles expressions dans la préface et la dédicace pour nos Mémoires.

Dan. Bernoulli.

LETTRE XXXV.

GOLDBACH à D. BERNOULLI.

SOMMAIRE. Solution de l'équation : $x^y = y^x$. Sommation des séries par approximation. Suite convergente pour $\sqrt{2}$. Théorème de la doctrine des séries.

Moscou ce 31 janvier 1729.

Je me servirai avec plaisir du mémoire que vous m'avez envoyé touchant les particularités de la vie de feu M. votre frère.

Je ne trouve pas la moindre difficulté à faire voir que, dans l'équation $x^y = y^x$, les nombres x et y ne peuvent être entiers à moins que l'un ne soit $= 2$, et l'autre $= 4$, et que, pour les nombres rompus, on peut donner une infinité de solutions. Voici comment je m'y prends: Je fais $y = a\,x$, donc $x^{ax} = a^x x^x$ et enfin $x = a^{\frac{1}{a-1}}$. Or, il est visible que x ne peut être un nombre entier que dans la supposition de $a = 2$; car si a est un nombre entier plus grand que 2, on voit d'abord que x devient irrationel; d'un autre côté, a étant un nombre rompu, toutes ses puissances seront autant de nombres rompus, et par conséquent x ne peut être un nombre entier; mais pour exprimer la valeur de x par des nombres rompus, il n'y a qu'à faire

$$x = f^{\frac{g}{f-g}} : g^{\frac{g}{f-g}}$$

où f et g soient des nombres entiers.

Pour trouver à peu près la somme de la suite

$$B \dots \frac{1}{x^2 + 2x + 1},$$

j'en choisis deux autres qui ont des sommes générales connues, par ex.

$$A \dots \frac{1}{x^2 + 2x + \frac{3}{4}}$$

(dont tous les termes sont plus grands que ceux de la suite B)

et

$$C \dots \frac{1}{x^2 + \frac{17}{8}x + \frac{225}{256}}$$

(dont tous les termes sont moindres que ceux de la suite B), la somme générale de A étant $\frac{4x}{6x+9}$, et celle de C $\frac{256x}{400x+625}$. Après quoi je prends la somme de quelques termes de la suite B (p. ex. de cinq termes) que je trouve par l'addition ordinaire $\frac{1769}{3600} = e$; il est évident que, si j'ajoute la somme du sixième et de tous les termes suivans de la suite A à la somme de cinq termes de la suite $B = e$, la somme totale sera plus grande que la somme de la suite B; comme au contraire, en ajoutant la somme du sixième et de tous les termes suivans de la suite C à la somme e, on trouvera cette somme moindre que la somme totale de la suite B. Il ne reste donc qu'à trouver les deux sommes des suites A et C depuis le sixième terme à l'infini, ce qui est très facile par le moyen des sommes générales, car la somme totale de la suite A étant $\frac{2}{3}$, et la somme de cinq termes $\frac{4.5}{6.5+9}=\frac{20}{39}$, la somme de tous les termes suivans sera $\frac{2}{3}-\frac{20}{39}=\frac{2}{13}$. De l'autre côté, la somme totale de la suite C étant $\frac{16}{25}$, et celle de cinq termes $\frac{256.5}{400.5+625}=\frac{256}{525}$, la somme de tous les termes suivans sera $\frac{16}{25}-\frac{256}{525}=\frac{16}{105}$, d'où je conclus que la somme de la suite B est $< e+\frac{2}{13}$ et $> c+\frac{16}{105}$, c'est-à-dire, entre $\frac{30197}{46800}$ et $\frac{16223}{25200}$. Si, au lieu de prendre cinq termes de la suite B, on vouloit se donner la peine d'en prendre dix, on pourroit faire voir par cette méthode que leur somme étant $=f$, la somme de la suite B seroit entre $f+\frac{2}{23}$ et $f+\frac{16}{185}$. Vous voyez bien, M., sans que je vous en avertisse, que cette méthode est générale et qu'elle est surtout d'un grand usage pour trouver à peu près les sommes des suites que vous appelez *algébriques*; il n'est pas même besoin de choisir scrupuleusement les suites approchantes A et C, car si on avoit pris pour A une suite plus grande et pour C une plus petite, on pourroit prendre plus de cinq termes pour arriver à la même précision.

Il est très facile d'exprimer $\sqrt{2}$ par une suite convergente, en cherchant selon ma méthode le terme moyen entre le premier et le second de cette suite $1+2+4+8+$ etc. pour trouver

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2.4}+\frac{3}{2.4.6}-\frac{3.5}{2.4.6.8}+\frac{3.5.7}{2.4.6.8.10}-\text{etc.}$$

Mais ce n'est qu'un cas particulier; la même somme de $\sqrt{2}$ peut s'exprimer par une infinité d'autres suites convergentes, toutes trouvables par ma méthode. Il me semble aussi qu'il vous sera difficile d'imaginer aucune suite de nombres (dont la loi de progression soit réductible à une formule générale) où je ne puisse déterminer les termes moyens par des suites convergentes. Mais si vous dites, M., que cela peut se faire par une méthode déjà connue, je vous prie de l'essayer sur la suite $1+2+6+24+$ etc. dont la loi de progression $Ax=B$ est assez simple, et d'en exprimer la valeur du terme moyen entre le premier et le second, par une suite convergente.

Il y a un nombre infini d'équations algébriques qui ne sont pas comprises dans le théorème de M. Moivre et dont cependant on peut déterminer les racines. Un seul exemple suffira pour vous faire une idée de tous les autres. On peut déterminer la racine de l'équation

$$u^6+6u^4+au^3+9u^2-3au+f=0,$$

a et f étant des nombres donnés.

Pour ce qui est du terme général de la suite

$$1+2+6+24+\text{etc.}$$

dont la loi de progression est $Ax=B$, je vous l'enverrai en peu de tems, *sat cito si sat bene*. La méthode étant nouvelle, j'aurai en même tems soin de répondre aux objections qu'on y pourroit d'abord faire. Goldbach.

P.S. Si dans la suite $A \ldots \frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+$ etc., dont le terme général est $\frac{1}{x^2+2x+1}$, on efface tous les termes dont les dénominateurs ont, outre la racine quarrée, une ou plusieurs autres racines du 3^{me}, 4^{me}, etc. degrés et que l'on ôte une unité à chaque dénominateur des termes qui restent, pour faire

$B \ldots \frac{1}{3}+\frac{1}{8}+0+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}+\frac{1}{48}+0+0+\frac{1}{99}+$ etc.

la somme de tous les termes B sera $=$ à la somme de tous les termes A.

LETTRE XXXVI.

GOLDBACH à D. BERNOULLI.

=

SOMMAIRE. Recherches ultérieures sur les suites.

Moscou ce 21 février 1729.

Votre méthode d'approcher des racines des équations algébriques par le moyen des suites recurrentes, est sans doute très considérable, si elle avance plus dans une minute que la manière ordinaire des extractions n'en ferait dans une heure, comme vous l'assurez dans votre écrit, et je suis persuadé qu'elle a cet avantage à l'égard des exemples que vous y alléguez. Cependant je remarque là-dessus 1° que par l'extraction ordinaire de $m^{\frac{n}{p}}$, où m, n, p soient des nombres entiers, on obtient toujours une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10, ce qui abrège beaucoup les multiplications et les divisions où une telle valeur peut entrer; 2° que par la méthode ordinaire, on voit d'abord si le nombre que l'on trouve est plus grand ou plus petit que la racine qu'on cherche : je ne sais si cela est aussi visible dans votre méthode ; du moins il ne me paraît pas que vous ayez donné des règles pour cet effet.

Je ne comprends pas bien votre manière de construire les termes généraux ; mais je ne dis pas pour cela que vous ne l'ayez pas bien expliquée, je dis seulement que je l'entendrais bien mieux par l'application à un exemple, tel que voici : On demande le terme général de cette suite :

$$1 + 73 + 4681 + \text{etc.}$$

dont la loi de progression est $64\,A + 9 = B$. Je ne saurois pourtant dissimuler que la découverte que vous avez faite à l'égard des suites recurrentes, me paroît plus estimable que celle des approximations, parce qu'en fixant le terme général d'une série, on suit une méthode infaillible et démonstrative, au lieu que, dans les approximations, la méthode est un peu tâtonneuse par rapport aux nombres convenables qu'il faut choisir pour cet effet, ou extrêmement prolixe en cas que l'on s'obstine à poursuivre l'approximation sur des nombres peu convenables qu'on aura pris au hazard.

Le terme général fini de la suite $Ax = B$ étant connu, j'avoue, M., qu'il est facile de trouver le terme moyen entre le premier et le second, car on en seroit quitte pour avoir mis $\frac{3}{2}$ à la place de x ; mais ce n'est pas de quoi il s'agit ; il est question d'exprimer ce terme par une suite convergente indépendamment du terme général fini. Je parle de cette méthode dans une petite dissertation *De seriebus* que je vous enverrai sous peu. Il n'y a qu'à tourner les numérateurs de la suite donnée en dénominateurs

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} + \text{etc.}$$

et à chercher le terme moyen entre 1 et $\frac{1}{2}$ (suivant le terme général indéfini que je vous ai communiqué) dans la supposition de $x = \frac{3}{2}$. Si vous voulez, M., vous donner la peine de l'essayer, vous verrez que les termes de la suite qui en résulte, vont toujours en diminuant, ce qui suffit dans cette occasion pour s'assurer que la suite trouvée est convergente, non obstant l'embarras que les changemens de + et — y peuvent causer. Cette suite enfin étant $= \frac{1}{m}$, le terme qui appartient à l'exposant $\frac{3}{2}$ dans la suite $Ax = B$, sera $= m$.

Bien loin de rétracter la proposition du *postscriptum*, je vais l'augmenter d'une autre découverte toute fraîche, savoir que la somme de la suite $\frac{1}{(x+1)^2}$ étant α, celle de $\frac{1}{(x+1)^4} = \beta$, celle de $\frac{1}{(x+1)^6} = \gamma$ et ainsi de suite, l'assemblage de toutes les sommes des suites réductibles à $\frac{1}{(x+1)^{2n}}$ (où n soit un nombre entier et affirmatif) c'est à dire

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.} = \tfrac{3}{4}.$$

Le beau de cette affaire est qu'on trouve la somme d'une infinité de termes a, β, γ, etc. sans connaître la juste valeur de ces termes en particulier.

Vous dites, M., qu'il vaut mieux exprimer p. ex. la racine de 2 par $\sqrt{2}$, que de la convertir en séries, quoique convergentes. Si cela est vrai au pied de la lettre, les approximations ne sont pas d'un grand usage. D'ailleurs, il me semble qu'il est utile d'exprimer par des séries les quantités rationelles mêmes, pour faire voir que la somme d'une telle série (en cas que le calcul nous y eût conduits par d'autres détours) est effectivement une quantité rationelle; (je crois du moins qu'il faut dire *rationelle*, et non pas *rationale*, et je ne sais, si l'on doit suivre M. Leibnitz qui dit en plus d'un endroit *les nombres rationaux*). Goldbach.

LETTRE XXXVII.

GOLDBACH à D. BERNOULLI.

SOMMAIRE. G. envoie la notice biographique de Nic. Bernoulli pour les Commentaires.

Moscou ce 21 mars 1729.

En écrivant la vie de feu M. votre frère, je ne me suis presque point écarté du mémoire que vous m'avez envoyé sur ce sujet, c'est pourquoi je me flatte que vous n'y trouverez pas beaucoup à changer. — Je n'ai pas employé le mot de professeur, parce que M. le président aime mieux donner à l'Académie la forme d'une société qui lui convient en effet. Si d'ailleurs vous trouvez dans mon écrit quelques expressions que vous n'approuvez pas, vous ne devez pas, M., faire scrupule de me les passer *meo periculo*; si cependant il y a quelque chose qu'il faut indispensablement corriger, je vous prie de m'en marquer l'endroit, afin que je puisse faire ce changement à ma fantaisie. Je souhaite fort de savoir si votre méthode pour les formules des suites recurrentes $mA + nB +$ etc. $= N$ s'étend généralement à toutes les formules, composées, en quelque manière que ce soit, des termes donnés A, B, etc. et des quantités constantes, par ex. $\frac{1 + A^m B^m}{A^p + B^q} = C$, parce que j'aurai occasion d'alléguer votre méthode dans ma petite dissertation. Je diffère le reste à une autre fois.

Goldbach.

LETTRE XXXVIII.

D. Bernoulli à Goldbach.

Sommaire. Réclamation contre un passage de la vie de Nic. Bernoulli. Remarque sur les séries recurrentes.

St.-Pétersbourg ce 20 (31) mars 1729.

Je suis très sensible aux marques d'amitié que vous donnez à notre famille dans la description de la vie de feu mon frère, et je ne manquerai jamais de vous en témoigner ma reconnoissance. Cependant permettez moi de vous dire que vous me faites faire une figure peu honorable à l'article de la 6me page que j'ai marqué à la marge. A quoi bon, je vous supplie, M., dire que sans un malentendu et une certaine générosité de M. le Président j'eusse été fort indigne du poste que je possède, et qu'on n'eût conféré de place dans ce corps qu'à mon frère. Un tel langage n'est pas tout à fait conforme à celui qu'on a tenu avant notre funeste départ de Bâle qui m'a coûté un frère que je voudrois pouvoir racheter avec tout mon bien et mon sang, et par lequel j'ai renoncé à des avantages qui m'auroient valu autant que ceux dont je jouis à St.-Pétersbourg. Vous voulez dire, ce me semble, que sans une erreur de nom, mon frère seroit venu sans moi. Je vous jure, M., par tout ce que l'homme a de sacré, qu'il ne l'auroit pas fait pour le double salaire. Si on ne veut pas se rapporter là-dessus à M. Euler, qui étoit alors à Bâle et assez informé de nos affaires, et à certaines lettres qui sont à Bâle, je n'ai que Dieu que je puisse prendre à témoin et qui me fera le dernier des malheureux, si je parle contre ma conscience. Il me semble que ce sont là des traits d'amitié uniques, qu'on trouveroit avec peine au siècle où nous vivons et qui peuvent même donner du relief au lustre de cette Académie, puisqu'on voit par là que les places ne s'y donnoient pas aux premiers venants, mais au mérite. Ne seroit-il donc pas plus honorable à l'Académie, à la mémoire du défunt et à notre nom de dire „qu'il menoit une vie très agréable à Berne où il étoit bien vu de tout le monde, très estimé et chéri; car, partout où il venoit, on voyoit briller en lui un certain caractère d'homme de bien et une connoissance du monde qui prévenoit en sa faveur. Surtout il s'étoit gagné l'amitié de MM. Tellier et Sinner, premiers magistrats de leur république. C'étoit sa maxime de se choisir, parmi le gros des amis, dont on ne manque jamais, un ou deux desquels il ne se laissait jamais arracher. Enfin il se plaisait tellement dans cet endroit de sa patrie, que non obstant plusieurs offres qu'on lui faisoit dans d'autres pays pour l'y attirer, il faisoit tous ses efforts pour s'y fixer. Cependant, comme il n'y a rien de parfait en ce monde, une chose l'inquiétoit fort; c'étoit l'absence de son frère qui étoit pour lors en Italie et qu'il aimoit plus que soi-même, — non comme frère, ni élève, mais comme ami. Qu'il ne s'est jamais vu une union si parfaite, tout étant commun entre ces deux frères jusqu'aux découvertes mathématiques dont ils faisoient une boîte commune, mêlant leurs manuscrits sans se ressouvenir lequel des deux y avait eu la plus grande part, et qu'ils avaient dessin de publier un jour sous le nom de *par fratrum Bernoulliorum J. F.* (Remarquez, M., qu'il en est ainsi au pied de la lettre; quelle âme généreuse!). Qu'on peut juger par là du plaisir avec lequel ces deux frères embrassoient l'occasion qui s'offroit à eux de passer la vie ensemble à St.-Pétersbourg, plaisir auprès duquel ils ne comptoient pour rien tous les autres avantages qui leur en revenoient, quelque éclatans qu'ils étoient. Que le charmant séjour de Berne et les établissemens qui s'offroient en même tems au cadet n'avoient plus aucun lien pour les arrêter, et tous les deux ne pouvoient assez bénir leur destin qui, les tenant séparés comme au milieu de leur patrie, les réunissait dans un pays aussi éloigné. Aussi témoignoient-ils envers M. le Président la plus vive reconnoissance, en le révérant toujours comme la source de leur bonheur etc.“ Il me paroît que vous ne deviez avoir aucun scrupule de donner cet autre tour audit article, et il ne sera pas mauvais de s'arrêter un peu sur l'article de notre amitié, afin qu'on ne croie pas que les disputes de feu mon oncle et de mon père nous aient servi d'exemple. Ces sortes de particularités sont toujours goûtées du public, surtout lorsqu'elles sont dites avec cette grâce, avec laquelle vous savez si bien embellir les choses les plus sèches. — —

La méthode pour les suites recurrentes ne s'étend pas si loin comme vous pensez; elle ne s'étend que sur les cas $E = mD + nC + pB +$ etc., mais si l'on prend garde, on peut en déduire d'autres. Avez vous remarqué, M., qu'il

*

n'y a que la progression harmonique descendente qui soit faite en sorte qu'étant continuée à l'infini, et le nombre des termes étant coupé en raison donnée, la somme de tous les derniers termes soit finie; car dans toute autre progression, cette somme est ou infinie ou nulle; ce qui fait une belle propriété jusqu'à présent inconnue pour ces suites. Cette suite $\frac{a}{x^n}$ est finie, dès que n est plus grand que 1, ce que je puis maintenant démontrer à la rigueur. Ne souhaitez vous pas qu'on imprime encore quelque pièce de votre façon, p. ex. la démonstration du théorème de M. Moivre?

Goldbach.

LETTRE XXXIX.

GOLDBACH à D. BERNOULLI.

SOMMAIRE. Réponse à la précédente.

Moscou ce 14 avril 1729.

N'ayant reçu la vie de feu M. votre frère que dans ce moment, je la communiquerai aujourd'hui à M. le Président et je tâcherai de vous satisfaire sur l'article en question autant qu'il me sera possible. La démonstration du théorème de M. Moivre est si facile, à mon avis, qu'elle ne mérite pas d'être publiée; mais je crois que l'autre mémoire *De divisione curvae in data ratione subtensarum* pourroit passer la revue. J'envoyai ce mémoire l'année passée à Pétersbourg soit à vous, soit à M. Schumacher, et j'espère qu'on l'aura gardé aux archives de l'Académie. Je répondrai à la première occasion aux autres articles de vos lettres.

Goldbach.

LETTRE XL.

Goldbach à D. Bernoulli.

Sommaire Explication sur le passage de la biographie qui a blessé Daniel B. Suite des considérations sur les séries. Découverte de Jean B. II.

Moscou ce . . avril 1729.

Je suis fâché du scandale que vous ont causé les paroles, très innocentes en elles-mêmes, dont je m'étois servi sur l'article de la vocation de feu M. votre frère. Je me croyois assez autorisé, à dire ce que j'en ai dit, par une lettre que M. votre Père me fit l'honneur de m'écrire en ce tems-là*), dans laquelle, bien loin d'alléguer la répugnance invincible que M. votre frère auroit eue de venir seul en Russie, il marqua l'envie qu'il avoit de savoir lequel de MM. ses fils on demandoit? et fit en même tems une conjecture (dont notre

*) Il ne peut-être question ici que de la lettre de J. Bernoulli, le père, communiquée à la page 229 de ce volume. Or cette lettre prouve évidemment que le père rapportait l'invitation à son second fils Daniel, ou du moins qu'il faisait semblant de la comprendre ainsi, peut-être par une sorte de prédilection pour son premier né.

Académie lui aura toujours de très grandes obligations) si on les appeloit tous deux. Car jusqu'à cette heureuse équivoque (heureuse au moins par rapport à notre société, si vous ne voulez pas qu'elle l'ait été à votre égard) M. le Président ne savoit point qu'il y eût deux MM. Bernoulli, frères, capables de remplir le poste dont il s'agit, et par conséquent il lui étoit impossible de vous appeler tous deux. Je fus donc surpris de ce prétendu refus (dont vous parlez, M., dans votre premier écrit, et sur lequel il paroît que vous vous relâchez dans le second), étant informé de bonne part que M. votre Père n'en a point donné connoissance à M. le Président, même dans un tems où il étoit plus convenable d'en parler qu'à cette heure. J'avoue que je pris d'abord le passage dont il s'agit pour une petite exagération, pardonnable à l'extrême tendresse que vous avez pour la mémoire de feu M. votre frère; et si vous êtes à présent en humeur de rire, je ne vous dissimulerai pas que je vous croyois assez malicieux pour inventer une circonstance de cette nature, ne fût-ce que pour faire le discours un peu plus pathétique; mais après les assurances très positives que vous me donnez du contraire, je vous prie à mains jointes de me pardonner ces soupçons mal fondés, dont je vous promets de me corriger avec le tems, surtout à l'égard des circonstances qui m'intéresseront aussi peu que celle-ci, comme en effet vous voyez, M., que j'ai changé tout le passage à votre souhait et j'espère que M. le Président l'approuvera.

Votre terme général

$$\left(\frac{5}{2\sqrt{1033}}-\frac{1}{16}\right)(32+\sqrt{1033})^x-\left(\frac{5}{2\sqrt{1033}}+\frac{1}{16}\right)(32-\sqrt{1033})^x$$

pour la série $64A+9=B$ n'est pas juste. Il me semble qu'au lieu de cette formule $64\,A + 9 = B$ (dont la série n'est pas en effet recurrente, ni par conséquent du ressort de votre théorème), vous avez, par méprise, considéré la formule $64\,A + 9\,B = C$. Cependant le véritable terme général de la série en question $\frac{2^{6x-3}-1}{7}$ n'est qu'un cas particulier de la formule $\frac{(m+n-1)m^{x-1}-n}{m\quad 1}$ que j'ai donnée, dans ma dissertation, pour les séries $mA + n = B$.

Il est vrai que ma remarque sur la somme connue d'une infinité de suites infinies dont chacune en particulier est d'une valeur inconnue, se peut démontrer fort aisément, mais en récompense je me plais beaucoup à voir que la proposition de mon *postscriptum* ne subit pas le même sort; elle me paroît effectivement plus belle à mesure qu'elle vous semble douteuse. Comme ce n'est aussi qu'un cas particulier d'un théorème général, je vais vous en donner un autre exemple: La somme de la suite:

$$\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{24} + \tfrac{1}{31} + \text{etc.}$$

(qui a pour numérateurs l'unité et pour dénominateurs tous les nombres affirmatifs possibles n dont $(n+1)^{\frac{1}{x}}$ donne pour x un nombre entier rationel) est $= 1$, et si j'en ôte tous les termes $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} +$ etc. (réductibles à la formule $\frac{1}{x^2+2x}) = \frac{3}{4}$, le reste sera $= \frac{1}{4}$. Quand vous m'aurez marqué, M., que vous trouvez cela digne de votre attention, je vous communiquerai tout le théorème avec la démonstration.

La nouvelle découverte de M. votre frère me paroît des plus jolies qu'on ait faites en ce genre, et vous feriez bien, M., de l'encourager à la publier. Il est vrai que, si l'on coupe la suite $\frac{1}{x}$ infinie en tant de parties que l'on voudra, la somme de la première de ces parties sera infinie, et celle de toutes les autres finie. Il me semble que, pour trouver ces sommes finies par la voie d'approximation, vous vous êtes servi des logarithmes, cependant j'ai trouvé, sans les mettre en usage, que la suite $\frac{1}{x}$ étant par ex. coupée en 1000000001 parties égales par rapport au nombre des termes qu'elles contiennent, la somme de la dernière de ces parties sera plus grande que $\frac{16000000008}{160000000016000000003}$ et moindre que $\frac{2000000001}{200000000020000000000}$, la différence de ces nombres n'étant que de $\frac{60000000003}{3200000000640000000038000000000060000000000}$.

Je vous remercie de tout mon coeur, M., du soin que vous avez eu de l'impression de mon mémoire; je n'ose plus vous causer le même embarras par celui *De terminis generalibus serierum*, cependant je vous prie de lire ce mémoire et de le communiquer à notre assemblée. — — —

Je souhaiterais d'apprendre plus de particularités de M. votre frère qui est à Bâle*), et s'il a déjà publié quelque mémoire de sa façon. Si sa méthode s'étendoit jusqu'à prouver que les sommes finies des parties de la suite $\frac{1}{x}$, dont j'ai parlé ci-dessus, ne sauroient être exprimées en nombres rationels, comme il est vraisemblable, la découverte en seroit d'autant plus importante**).

Goldbach.

---

*) Jean, né en 1710, donc âgé à peine de 19 ans

**) L'on voit par plusieurs passages de cette lettre qu'une lettre de Bernoulli, qui doit l'avoir précédée, manque.

LETTRE XLI.

D. Bernoulli à Goldbach.

Sommaire. Explications ultérieures sur l'article de G. relatif à la vie de Nic. Bernoulli. Réponse aux autres articles de la lettre précédente Remarques sur le mémoire de G. *De terminis generalibus serierum.*

St.-Pétersbourg ce 28. avril 1729.

Je vous demande pardon de la liberté que j'avois prise de vous contredire par rapport à l'article de notre vocation; je vois maintenant que j'ai eu tort de m'alarmer, car ayant mieux considéré vos paroles, j'ai vu qu'elles ne faisoient pas de tort à la mémoire de feu mon frère, mais que tout au plus elles pouvoient être un peu préjudiciables à ma réputation, à laquelle je commence à être fort insensible. Vous disiez, M., qu'on avoit d'abord offert une chaire à mon frère, sans penser à moi; — à la bonne heure! je n'ai rien à redire, puisque la chose est ainsi. Au reste je ne sais ce que mon père peut vous avoir marqué; mais assurément il auroit fait le compte sans l'hôte, s'il vous avoit dit qu'en cas de besoin mon frère viendroit tout seul. Croyez moi, M., qu'il ne l'auroit pas fait, car je le connoissois mieux que mon père ne le connoissoit. Je m'en vais, pour vous en convaincre, extraire un passage d'une lettre du mois d'avril 1725 que je me suis donné l'honneur d'écrire à M. le C^te^ Galovkine à Berlin, après en avoir reçu une, dans laquelle on offroit à mon frère un salaire de 1000 roubles et à moi de 800 roubles; voici donc le passage: „Quant à mon frère de Berne je serois ravi de l'avoir pour collègue et compagnon de voyage; je l'ai persuadé de venir avec moi, si on nous désire tous deux; mais sans cela, il est trop bien placé pour changer de situation." Il me semble qu'on ne sauroit couper plus court, ni dire plus positivement qu'à moins qu'on ne nous veuille tous deux, il ne changeroit jamais. J'espère que M. le C^te^ Galovkine aura envoyé une copie de cette lettre à M. le Président et que par là je serai mis hors de soupçon de nouvelle malice qui, en cet endroit mériteroit le nom d'imposture*). Cependant, je vois maintenant que tout ce que vous avez dit auparavant n'étoit pas pour me reprocher le peu d'honneur que pourroit me faire la source de l'emploi que je tiens, puisque vous avez la complaisance de nommer cette source ou cette équivoque *heureuse*: aussi, quoiqu'elle m'ait mené dans ce pays, fatal à cause de la mort de mon frère, je ne saurois que d'en être fort content, puisqu'il faut croire que le destin de mon frère vouloit sa mort, et que, sans ce triste coup, je n'y ai goûté que des plaisirs et des marques d'estime de M. le Président qui auroient peut-être été plus

*) Voir, pour bien comprendre cette affaire, les lettres 16, 17 et 18 de cette correspondance (p. 227 et suiv.), et la lettre 25 (p. 165) de la correspondance de Nicolas.

éclatantes, si la situation des affaires l'eût permis. Aussi peut-il s'assurer d'une reconnoissance très vive et éternelle de ma part. Je suis fâché de me voir presque à la veille de mon départ sans que j'aie eu occasion de travailler avec plus de succès à l'honneur de cette Académie. Peut-être serai-je plus en état de le faire quand je serai de retour dans ma patrie, où je trouverai un père, un cousin et un frère, tous également disposés à me secourir, et où je serai sans emploi qui puisse me détourner, et sans en briguer.

Votre mémoire *De divisione curvae* etc. est actuellement imprimé. — Vous avez raison de dire que le terme général que je vous envoyai est pour la suite $64\,A + 9\,B = C$: aussi avois-je expliqué ainsi votre question. Il y a longtems que je sais trouver le terme général pour les suites $B = m\,A + n$, $C = m\,A + n\,B + g$ etc. et pour une infinité d'autres pareilles; et ainsi j'aurois pu vous l'envoyer d'abord (le terme général pour la suite $64\,B + 9 = C$) si j'avais bien entendu votre demande, ou plutôt si j'y avois fait plus d'attention, car elle étoit claire. Je suis très curieux de savoir la démonstration de votre théorème du *postscriptum*, ou de cet autre: $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{31} +$ etc. $= 1$. Je crois que la remarque de mon frère sur les progressions harmoniques est en effet curieuse, et même qu'elle peut avoir quelque utilité; il y a une infinité de raisonnemens dont on ne peut savoir s'ils sont justes ou non, sans cette remarque, et c'est d'ailleurs une propriété jolie, puisqu'il n'y a que cette seule sorte de progressions qui en soit douée. Voici toute la solution telle que mon frère me l'avoit envoyée: Soit la raison des nombres de termes dans la première et seconde partie comme m à n, la somme de tous les termes de cette seconde partie sera $= \log.\left(\frac{m+n}{n}\right)$; mais on entend ici les logarithmes hyperboliques et non pas ceux des tables de Brigg; on s'en peut pourtant servir en les multipliant par 2,302585093, car les produits donneront les logarithmes hyperboliques de pareils nombres. Au reste, ces sommes finies non seulement ne peuvent être exprimées en nombres rationels, mais pas même en nombres radicaux ou irrationels. Vous savez qu'on peut exprimer par une suite $\log.\frac{m+n}{n}$, car il est $=\frac{n}{m}-\frac{nn}{2mm}+\frac{n^3}{3m^3}-\frac{n^4}{4m^4}+$ etc. Par le moyen de cette suite on trouve d'abord que le nombre des termes de la progression $\frac{1}{x}$ étant divisé en 10000000001 parties, la somme de la dernière partie sera

$$\frac{1}{10000000000}-\frac{1}{2.0000000000^2}+\frac{1}{3.10000000000^3}.$$

Si l'on prend les deux premiers termes, on aura cette somme $=\frac{19999999999}{2.10000000000^2}$ qui est à peu près la même chose que votre nombre $\frac{20000000001}{200000000020000000000}$, car les numérateurs ne diffèrent que de deux unités et les dénominateurs de 20000000000, en sorte que les différences peuvent être censées proportionelles aux termes de la fraction, ce qui fait que les fractions ne diffèrent par sensiblement l'une de l'autre. On a donc aprésent une manière d'approcher dont on ne s'étoit point avisé auparavant; car si je souhaite p. ex. le log. 2, je dis qu'il sera à peu près $=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$, ou $=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$, ou $\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+$ etc. $+\frac{1}{2m-2}$ et plus grand qu'on prendra m, plus on trouvera exactement ce que l'on cherche. Vous n'aurez pas manqué d'observer que toutes les progressions harmoniques ont de semblables propriétés. Dans cette progression $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}+$ etc. la somme de la dernière partie est $= \frac{1}{b} \log. \left(\frac{m+n}{m}\right)$ ou $= \log. \left(\frac{m+n}{m}\right)^{\frac{1}{b}}$. Voilà à peu près ce que mon frère m'a marqué de plus curieux sur cette matière. Vous voulez savoir, M., à cette occasion, des particularités de lui; c'est bien de l'honneur que vous lui faites auquel il sera très sensible quand il le saura. J'aurai donc l'honneur de vous dire que c'est une jeune homme de quelques vingt ans qui porte le nom de mon père, duquel il s'est toujours attiré les applaudissemens préférablement à moi et à ses autres frères, eu égard à l'âge. Il y a quelque tems qu'il a obtenu la licence pour être docteur en droit, et je crois qu'il se fera recevoir tel dans peu: il n'a rien publié encore que je sache. Je crois que, quant aux mathématiques, son fort est la synthèse; il entend pourtant assez l'analyse, surtout le calcul intégral. Enfin j'espère retrouver bientôt en lui ce que j'ai perdu en feu mon frère.

J'ai lu à M. Bayer l'article de votre lettre*) qui le regarde; il se chargera avec plaisir du soin de l'impression de la vie de feu mon frère. Quant à votre dissertation *De terminis generalibus* etc.**), elle est tres belle, et il n'auroit tenu qu'à vous de la rendre plus belle. Vous avez raison, M., de dire qu'il faudrait adopter dans la géométrie plusieurs autres sortes de quantités telles que a^x, comme per ex. e^x. Voici quelques remarques qui vous intéresseront et qui ont fait que j'ai différé la lecture de votre dissertation devant l'assemblée de MM. les académiciens: 1° vous dites „terminus generalis seriei, cujus terminus primus est $= 1$, lex progressionis $mA + n = B$, deprehenditur $\frac{(m+n-1)\,m^{x-1} - n}{m-1}$;"

*) C'est encore une lettre qui manque, ou simplement un passage de la dernière lettre qui ne se trouve pas dans le livre des copies.

**) *De terminis generalibus serierum.* Comment. T. III. pag. 164.

n'aimeriez vous pas mieux dire „terminus generalis seriei, cujus terminus primus est $= \alpha$ . . . . . . deprehenditur $\left(\alpha + \frac{n}{m-1}\right) m^{x-1} - n$.“ 2⁰ Je ne sais si je suis le premier qui ait publié une méthode générale pour les suites recurrentes, quoique je le croie; on pourroit donc, pour le plus sûr, omettre les paroles „primus quod sciam“ lorsque vous me faites l'honneur de me citer. 3⁰ Votre terme général pour la suite $\frac{mBB}{A} = C$ est très juste, mais je doute fort de vos termes généraux pour les suites $Ax + (x+1)^m - x(x+1)^{m-1} =$ (ce que vous avez omis dans le manuscrit) B; ou pour cette autre $m(A - a^x) + a^{x+1} = B$, et enfin pour

$$Ax + (x+1)^{x+1} - x(x-1)^x = B.$$

J'ai examiné ces termes généraux et j'ai trouvé qu'ils ne satisfont pas; et comment pourroient-ils satisfaire n'y étant point fait mention du premier terme qui doit nécessairement y entrer; je crois donc qu'il y a du malentendu là-dedans. 4⁰ Quant au terme général indéfini que vous donnez pour toutes les suites a, b, c, d, etc. disant que ce terme général est $a + (b-a)(x-1) + (c - 2b + a)(x-1)\frac{(x-2)}{2} + (d - 3c + 3b - a)(x-1)\frac{(x-2)}{2}\frac{(x-3)}{3} +$ etc., cette formule est conforme à la verité, mais souvent elle n'a pas tout l'usage, que vous lui supposez. 5⁰ Vous donnez pour la même suite a, b, c, d etc. cet autre terme général

$$a^{1-\alpha}\, b^{\alpha-\alpha\beta}\, c^{\alpha\beta-\alpha\beta\gamma}\, d^{\alpha\beta\gamma-\alpha\beta\gamma\delta} \text{ etc. où}$$

$$\alpha \text{ est} = x - 1,\ \beta = \frac{x-2}{2},\ \gamma = \frac{x-3}{3}, \text{ etc.};$$

mais je dis qu'il ne vaut rien. Permettez moi de vous dire en ami que vous donnez souvent les choses trop légèrement; les plus grands hommes ne doivent jamais rien avancer sans avoir examiné trois ou quatre fois leurs raisonnemens d'un bout à l'autre. Pourquoi vous faire dire par d'autres ce que vous pourriez vous dire vous même mieux que qui que ce soit? vous pourriez trouver des gens qui ne vous rendissent pas la même justice que moi, surtout dans le pays où nous sommes, où chacun tâche à triompher sur l'autre. Voici le véritable lemme que vous vouliez dire

$$a\,\frac{x}{1} - \frac{x(x-1)}{1} + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.} - \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.} + \text{etc.} \times$$

$$b\,\frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)(x-2)}{1} + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.} - \text{etc.} \times$$

$$c\,\frac{(x-1)(x-2)}{1.2} - \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2} + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3} - \text{etc.} \times$$

$$d\,\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3} - \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1.2.3} + \text{etc.} \quad \text{etc.}$$

On pourrait donner à ce terme général une autre forme, mais au fond les résultats ne seroient par différens. 6° Vous dites que $1^{\frac{1}{2}}\, 2^{\frac{5}{8}}\, 3^{\frac{15}{32}}\, 4^{\frac{975}{4096}}$ etc. in infin. $= \frac{3}{2}$; cependant le seul facteur $3^{\frac{15}{32}}$ est plus grand que $\frac{3}{2}$, aussi bien le second $2^{\frac{5}{8}}$.

Voilà, M., mes remarques que j'espère que vous prendrez de bonne part. Ayez la bonté de me dire si je dois vous renvoyer votre dissertation pour y faire quelques petits changemens, ou ce que j'en dois faire.

Dan. Bernoulli.

LETTRE XLII.

GOLDBACH à D. BERNOULLI.

=

SOMMAIRE. Sommation des séries. Réponse aux observations de B.

Moscou le 26 mai 1729.

Après ma petite dissertation *De terminis serierum*, j'ai dessein d'écrire une autre *De summis*, où je rapporterai quelques observations que j'ai faites sur cette matière et parmi lesquelles se trouvera aussi le théorème dont je vous ai parlé dans mes lettres précédentes. Le voici en attendant tel que je l'ai écrit dans mon livre:

Summa seriei $A \cdots \frac{1}{(x+1)^m}$ aequalis est summae seriei $B \cdots \frac{1}{(x+1)^m - 1}$, si in hac ommittantur omnes termini, in quibus $x+1$ habet radicem rationalem cujuscunque potestatis, et m utrobique sit numerus positivus. Posito v. gr. $m = 1$, erit series

$$A \ldots \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{9}+\text{etc.}$$
$$= B \ldots \tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}+0+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+0+0+\text{etc.}$$

posito $m = 2$, erit series

$$A \ldots \tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{25}+\tfrac{1}{36}+\tfrac{1}{49}+\tfrac{1}{64}+\tfrac{1}{81}+\text{etc.}$$
$$= B \ldots \tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{8}+0+\tfrac{1}{24}+\tfrac{1}{35}+\tfrac{1}{48}+0+0+\text{etc.}$$

Demonstratio. Si ex serie $A \ldots \frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\frac{1}{5^m}+\text{etc.}$ excerpantur omnes termini $\frac{1}{2^m}+\frac{1}{4^m}+\frac{1}{8^m}+\frac{1}{16^m}+\text{etc.}$, erit eorum summa $= \frac{1}{2^m-1}$, termino primo seriei B; si excerpantur omnes termini $\frac{1}{3^m}+\frac{1}{9^m}+\frac{1}{27^m}+\frac{1}{81^m}+\text{etc.}$, erit eorum summa $= \frac{1}{3^m-1}$, termino secundo seriei B; terminus $\frac{1}{4^m}$ praeteritur ut jam excerptus; termini autem

$$\frac{1}{5^m}+\frac{1}{25^m}+\frac{1}{125^m}+\frac{1}{625^m}+\text{etc.}$$

fiunt $= \frac{1}{5^m-1}$, termino quarto seriei B (posito tertio $= 0$), atque hoc modo tota series A transfertur in seriem B.

Le second exemple est, comme vous voyez, la série de mon *postscriptum*. La somme de cette autre série

$$C \ldots \tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{15}+\tfrac{1}{24}+\text{etc.}$$

(dont j'ai parlé dans ma dernière lettre) suit fort naturellement du premier exemple, car si on ajoute la suite B à la suite C, on aura visiblement $B+C = A+1$. Or $B = A$, donc $C = 1$.

Selon vous, M., on ne peut jamais exprimer la somme $\frac{n}{m}-\frac{n^2}{2m^2}+\frac{n^3}{3m^3}-\frac{n^4}{4m^4}+\text{etc.}$ en nombres rationels ni irrationels; c'est de quoi je souhaiterois voir une démonstration claire et précise. Pour votre terme général, qui approche si bien des sommes de la suite $\frac{1}{x}$, je ne sais pas encore si vous l'avez effectivement réduit à quelque formule finie, ou si vous vous contentez de dire qu'il consiste en logarithmes.

J'ai lu avec bien du plaisir les particularités que vous avez eu la bonté de me mander à l'égard de M. votre frère qui est à Bâle. La belle découverte qu'il a faite sur la série $\frac{1}{x}$, qui peut être considérée comme la source de toutes les autres séries algébriques, me persuade qu'il a un talent tout particulier pour réussir en ce genre de calculs.

Je vous suis très obligé, M., de l'attention avec laquelle vous avez lu mon mémoire, et je vous remercie du passage que vous accordez aux expressions $e^{\underline{x}}$ etc. Les mathématiciens, qui voudront chicaner un peu sur une telle nouveauté, pourront s'en moquer à leurs aise; je me tiendrai toujours à votre approbation. A l'égard de vos remarques, j'y réponds 1° que je ne voudrois pas changer le terme général $\frac{(m+n-1)m^{x-1}-n}{m-1}$ en $\left(\alpha+\frac{n}{m-1}\right)m^{x-1}-\frac{n}{m-1}$ (c'est ainsi que je redresse votre $\left(\alpha+\frac{n}{m-1}\right)m^{x-1}-n$, par la même charité avec laquelle vous avez suppléé un B qui manquoit dans mon manuscrit), parce que je l'ai seulement allégué comme un exemple que l'on peut (s'il est besoin) rendre plus général d'une infinité de manières; 2° j'omettrai, pour plus grande sûreté, les paroles *primus quod sciam*; 3° j'avois écrit par mégarde $m-1$ au lieu de $m+1$, dans la loi de progression qui doit être $Ax+(x+1)^m-x(x-1)^{m+1}=B$; à cela près tous les termes généraux répondent exactement aux lois de progression que j'ai marquées dans le mémoire, et vous me permettrez, M., de vous accuser à mon tour de les avoir examiné trop légèrement; ce qui me confirme dans cette pensée, c'est que vous me demandez, comment ces termes généraux pourroient satisfaire, n'y étant pas fait mention du premier terme de la série? Vous conviendrez, M., après un moment de réflexion, que lorsqu'on demande une série qui satisfasse à la loi d'une progression donnée, il n'est nullement besoin d'y faire mention du premier terme, et que, dans ces trois exemples, il est seulement question de trouver une série dont le second terme aussi bien que tous les autres suivans, répondent à la progression donnée, laquelle étant indifférente au premier terme de la série, il est permis de le prendre tel qu'on le juge à propos pour le ranger avec tous les autres sous un même terme général; 4° je n'entends pas votre pensée quand vous dites que le terme général indéfini, quoique véritable, n'a pas tout l'usage que je crois; 5° il est aisé de voir que le terme général, qu'on peut obtenir par la voie de multiplication tel que je l'avois écrit, est faux, et que je ne m'étois pas donné le tems de l'examiner; cependant il n'est pas difficile non plus de trouver les exposans pour les quantités a, b, c etc. tels que vous les avez marqués, à l'aide de mon terme général indéfini qui donne d'abord pour a l'exposant

$$1 - (x - 1) + (x - 1)\left(\frac{x-2}{2}\right) - \text{etc.}$$

lequel il est inutile de multiplier par x, quoique on puisse le multiplier par x^m (où m signifie toutes les fonctions possibles de tous les nombres possibles), sans rien changer à l'essentiel de la formule. Mais quelle qu'ait été ma bévue, je n'ai point cherché un terme général où tous les exposans consistent en séries dont les sommes ne sont pas rationelles.

Goldbach.

LETTRE XLIII.

D. Bernoulli à Goldbach.

=

Sommaire. Même sujet. Réponse à la lettre précédente.

St.-Pétersbourg*)

Votre théorème me paroît très beau; je m'étonne maintenant qu'il ait pu m'être suspect, d'autant plus que vous m'avouerez que j'étois sur le bon chemin lorsque je vous en écrivis la première fois ma pensée. Je ne demande point de grâce; je me précipite, comme un autre, dans mes jugemens. Mais je suis sur mes gardes lorsqu'il s'agit de rendre quelque chose publique, je ne crois pas que qui que ce soit y trouvera le moindre paralogysme. Pour les lettres, je les écris sans y penser, presque ne les considérant que comme

*) Le second feuillet de cette lettre, deux pages entières dont la dernière portait vraisemblablement la date, est découpé à dessein.

un entretien de bouche. Je vous prie, M., de les considérer de même.

Vous souhaitez une démonstration précise qu'il est impossible d'exprimer la somme de $\frac{n}{m} - \frac{nn}{2mm} + \frac{n^3}{3m^3}$ — etc. en nombres rationels ni irrationels. A cela j'aurai l'honneur de vous dire qu'on ne le sauroit démontrer, car peut-être n'est-il pas impossible en soi, mais seulement à l'esprit des géomètres. Si on le pouvoit faire, on auroit la quadrature de l'hyperbole que les géomètres ont recherchée avec le même soin que celle du cercle. Ces deux quadratures ont même une certaine dépendance entre elles par des nombres imaginaires; en sorte que si l'on avoit l'une, on auroit aussi l'autre, ou bien on pourroit en démontrer l'impossibilité. Je vous renvoie, M., votre dissertation. Je dis encore, après la correction que vous avez faite, que vos termes généraux pour la série $Ax + (x+1)^m - x(x-1)^{m+1} = B$ et pour les autres ne sont pas justes; vous mettez pour le terme général $x^m + (x-1)^{m+1}$, mais il aurait fallu mettre $(x+1)^m + x^{m+1}$. Je sais bien la source de votre petite bévue; c'est que vous avez confondu les x des deux termes voisins, pendant que ces x ont différentes significations. Voilà donc encore une faute d'attention, et non d'esprit ni de méthode, mais un autre ne se seroit pas donné la peine d'en chercher la source; ainsi vous voyez, M., que ma charité n'étoit pas mal placée. Je suis sûr que vous en profiterez et que vous ne m'en voudrez point de mal. Si vous aviez fait un seul exemple, vous auriez trouvé vous même le défaut de ces termes généraux. Si ce que je dis ici vous paroît trop libre, vous n'avez qu'à brûler la lettre; je vous jure, foi d'honnête homme, que je n'en garde pas de copie. Je m'étonne que vous ne veuillez pas convenir avec moi qu'il faille faire attention aux premiers termes dans ces sortes de suites. A mon avis, il faut le faire et surtout dans cet exemple, car NB. le terme général ne satisfait que pour les suites qui commencent par $2^m + 1$. Si vous en doutez, M., je vous prie de me donner le terme général pour cette suite 4, 7, 16, 53, etc. dont la loi est

$$Ax + (x+1)^0 - x(x-1)^1 = B$$

qui n'est qu'un cas particulier de votre loi générale. Peut-être pourra-t-on trouver par une autre manière facilement ce terme général, mais il n'est pas compris dans celui que je viens de donner. Comme j'ai de tout autres occupations que sur ces suites, je n'aime pas examiner de plus près cette matière.

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

Dan. Bernoulli.

LETTRE XLIV.

GOLDBACH à D. BERNOULLI.

SOMMAIRE. Suite des recherches précédentes.

Moscou ce 18 août 1729.

Vous m'aviez écrit, dans votre précédente lettre, que la somme de la dernière partie de la suite $\frac{1}{x}$ (qu'on suppose divisée en deux, trois, etc. parties) ne peut s'exprimer en nombres rationels ni irrationels. Cette proposition m'a d'abord paru sujette à caution, d'autant qu'on pourroit inférer de là que la somme $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} +$ etc. n'est ni rationelle ni racine d'aucun nombre rationel, et dans cette vue j'ai dit que ce seroit une découverte importante. Je vois pourtant que vous vous expliquez un peu autrement sur ce sujet dans votre dernière lettre; aussi suis-je persuadé qu'on ignore jusqu'ici profondément si la somme d'une suite $\frac{1}{x^2 + fx}$, où f est un nombre rompu, peut se réduire à une racine d'un nombre rationel ou non? Qui plus est, je doute si personne a jamais produit une suite de nombres rationels dont il eût démontré que la somme ne peut s'exprimer en nombres rationels ni irrationels, cependant la chose n'est pas impossible, et je puis donner une infinité de telles suites dont les sommes ne sauroient être racines d'aucune puissance rationelle de nombres rationels.

A l'égard des formules générales de la justesse desquelles vous n'êtes pas encore convaincu, je vous prie, M., de remarquer 1° que je prends A dans la loi de progression pour un terme donné quelconque de la suite; 2° B pour le terme suivant immédiatement après A; 3° x pour l'exposant du terme A, comme il est clair par le § 3 de ma dissertation. Cela posé, je dis 1° que la suite $x^m+(x-1)^{m+1}$ satisfait à la loi de progression $Ax+(x+1)^m-x(x-1)^{m+1}=B$; 2° que la suite $(x+1)^m+x^{m+1}$ n'y satisfait pas, mais que 3° elle satisfait à loi de progression

$$(A-x^{m+1})(x+1)+(x+2)^m=B.$$

Soit le terme donné $x^m+(x-1)^{m+1}=A$, le terme, suivant immédiatement après, sera

$$(x+1)^m+x^{m+1}=B;$$

donc $Ax[=x^{m+1}+x(x-1)^{m+1}]+(x+1)^m-x(x-1)^{m+1}=B$. *Quod erat primum.*

Soit le terme donné $(x+1)^m+x^{m+1}=A$, le terme suivant $(x+2)^m+(x+1)^{m+1}=B$; donc $Ax[=x(x+1)^m+x^{m+2}]+(x+1)^m-(x-1)^{m+1}x$ n'est pas $=B$. *Quod erat secundum.*

Mais

$A(x+1)[=(x+1)^{m+1}+(x+1)x^{m+1}]-(x+1)x^{m+1}+(x+2)^m=B$. *Quod erat tertium.*

Si, dans la loi de progression, il vous plaît de faire $m = 0$, on aura $Ax + (x+1)^0 - x(x-1)^1 = Ax - x^2 + x + 1 = B$, et pour la suite qui y satisfait $x^0 + (x-1)^1 = x = A$, donc $Ax[= x^2] - x^2 + x + 1 = x + 1 = B$. Tout cela est très juste, et par conséquent cette progression n'a nul rapport à la série que vous lui assignez 4, 7, 16, 53, etc.

Pareillement la loi de progression étant

$$m(A - a^x) + a^{x+1} = B,$$

le terme général qui satisfait à cette loi: $a^x + m^x = A$, le terme suivant sera

$$a^{x+1} + m^{x+1} = m(a^x + m^x - a^x) + a^{x+1} = B.$$

La loi de progression étant

$$Ax + (x+1)^{x+1} - x(x-1)^x = B,$$

le terme général qui satisfait à cette loi: $x^x + (x-1)^x = A$, le terme suivant sera

$$x^{x+1} + x(x-1)^x + (x+1)^{x+1} - x(x-1)^x = x^{x+1} + (x+1)^{x+1} = B.$$

Quand je dis, dans ma précédente lettre, que je n'avois pas cherché un terme général où tous les exposans fussent autant de séries dont on ignore les sommes, je ne prétendois pas donner incontinent le terme général exempt de ce défaut; je me contentai de vous avertir que je changerai l'endroit, dont il s'agit, à votre satisfaction; ce sera à vous, M., de lire, s'il vous plaît, le § 10 tel que je l'ai réformé, et de voir si j'y ai réussi.

Quel est le problème dont M. Hermann vous a contesté la solution?*) et cette solution est-elle déjà publiée? Comment a-t-on redressé les fautes dont vous me parlez dans votre dernière lettre?

---

*) Se rapporte vraisemblablement à un passage du feuillet découpé de la lettre 43ème. Voir ci-dessous la lettre 46ème.

Si vous pouvez démontrer que le terme général indéfini ne sert pas toujours à trouver les interpolations, il vous sera facile, M., de confirmer votre thèse par un seul exemple. Je ne l'attends que pour ma propre satisfaction, et votre crainte que nous ne nous accordions pas de longtems est bien superflue; quand même l'exemple que je vous demande me paroîtroit insuffisant, j'aurai la discrétion de le passer sous silence pour ne pas vous engager à une dispute ennuyante.

Goldbach.

LETTRE XLV.

GOLDBACH à D. BERNOULLI.

SOMMAIRE. Conditions de l'intégrabilité d'une formule différentielle. Deux problèmes de géométrie.

Moscou ce 19 septembre 1729.

Vous aurez sans doute reçu ma lettre datée du 18 août n. st. avec la dissertation que je recommande à vos soins.

Je serois bien aise de savoir les cas intégrables de l'équation $x^{mn-1}(a+bx^m)^p dx = du$ que M. votre cousin et M. Bülffinger ont trouvée ou démontrée dans les Acta Lips. A. 1720. Ceux de p et $n =$ à un nombre entier affirmatif sont visibles; il y a une infinité de cas intégrables de cette équation où p et n sont des nombres non entiers.

Je viens de trouver les solutions des deux problèmes suivans:

I. Duabus curvis positione datis, quaeritur radius circuli tangentis curvam alteram in puncto dato, alteram in puncto inveniendo.

II.*) On demande (Fig. 17.) quatre points dont les deux C et D soient dans la cycloïde ordinaire ABG, le troisième E dans l'axe BK, et le quatrième F placé en sorte que les lignes droites DE, CF s'entrecoupant en H, le triligne DCH soit égal au triangle rectiligne EFH. Ce problème peut être résolu d'une infinité de manières en variant la distance des points C et D.

Si vous croyez, M., que ces solutions puissent piquer la curiosité de Messieurs les Académiciens, je vous les enverrai pour les communiquer à la société.

Goldbach.

*) Comme l'énoncé de ce problème est rectifié dans une lettre du 29 septembre qui ne contient que cette rectification, nous ne donnons que ce dernier énoncé en supprimant l'autre inexact.

LETTRE XLVI.

D. Bernoulli à Goldbach.

Sommaire. Insinuations calomnieuses contre B. à l'occasion de la question proposée par l'Académie de Paris, pour 1729. Réponse aux lettres précédentes.

St.-Pétersbourg ce 22 septbr. (3 octbr.) 1729.

J'ai reçu, dans l'espace de 10 ou 12 jours les trois lettres que vous m'avez fait l'honneur de m'écrire du 7 (18) août, du 8 (19) septembre et du 18 (29) septembre. Je ne m'étonne pas qu'on puisse inférer de mes expressions pour les sommes des dernières parties des progressions harmoniques, que la somme de $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} +$ etc. n'est ni rationelle ni racine d'aucun nombre rationel ; je ne m'en étonne pas, dis-je, puisque cette somme est égale au logarithme de 2, c'est-à-dire $= 0{,}963147180\ldots$ Je ne vous entends pas bien, M., quand vous dites que vous pouvez donner des suites dont vous pouvez démontrer que la somme ne peut s'exprimer en nombres rationels ni irrationels. Si cette suite a pour terme général une quantité algébrique, la découverte ne sera pas sans utilité. Je vous prie de me marquer ces suites pour m'éclaircir là-dessus.

Je vois que je vous ai fait tort en soupçonnant vos formules générales de quelque défaut; mais vous voyez que vous en êtes vous même cause, puisque, contre la coutume ordinaire, vous entendez par x un autre nombre que *l'exposant* du terme qu'on cherche; je ne dis pas pour cela que vous ayez mal fait de quitter, dans cette occasion, le sens dans lequel on prend ordinairement le nombre de x, mais je crois aussi que vous n'avez pas mal fait d'en faire ressouvenir le lecteur par les deux paroles que vous avez ajoutées à votre dissertation. Je ferai demain la lecture de cette dissertation à la conférence. Les Académiciens l'ont lue et je sais qu'un chacun en a été très satisfait, hors un certain Momus à qui rien ne plaît que son crachat*). Sachez aussi, M., s'il vous plaît, qu'on vous accuse d'un grand vol; c'est sur le calcul que vous avez envoyé pour savoir la force centrifuge d'une sphère hétérogène qui nage dans l'eau. On traite cela d'un vol de grand chemin: patience que notre homme traite tout le monde de prétendus plagiaires; mais j'enrage quand il se donne pour homme plagiable! Pardonnez moi cette petite digression que je n'ai faite que pour rire.

J'ai l'honneur de vous envoyer le problème dont M. Hermann m'a contesté la possibilité d'être résolu; j'y joins ma solution**) que je n'ai trouvée qu'après notre conférence publique, mais pourtant 3 ou 4 jours après. Celle que j'en ai trouvée, il y a 2 ou 3 ans, demande pour le moins dix

---

*) Bülffinger?

**) Ces annexés manquent. Voir, du reste, la solution de Bernoulli, à la page 89 du IV tome des *Commentarii.* Elle est suivie de celle de Hermann p. 94 et de celle d'Euler p. 98.

fois plus de calcul, c'est pourquoi je ne faisois pas d'abord grand cas ni du problème ni de la solution. Il faut, avec votre permission, que je vous conte l'histoire de ce problème: Il y a passé deux ans, que mon père me marqua la question proposée par l'Académie de Paris pour 1729; le même jour j'en fis la lecture à M. Euler que j'exhortois à faire quelques réflexions de combien de manières le problème de trouver la hauteur du pôle par les étoiles fixes, devenoit déterminé. Le lendemain je lui parlai d'abord de celle-ci qui m'est contestée; le problème lui plût, nous songeâmes chacun à une solution; j'en trouvai une quelques jours après, que j'ai couchée par écrit: M. Euler me donna d'abord un exemple *à posteriori* que j'avois fort bien résolu, mais par de pénibles calculs: pour M. Euler, il ne m'a jamais montré ce qu'il a trouvé sur cette matière. Cependant M. Euler en parla à M. Meyer qui a inséré le problème ensuite dans la dissertation qu'il a envoyée à Paris, laquelle m'étant communiquée par M. Meyer, je fus fort surpris d'y trouver ce problème, et j'en fis mes plaintes à M. Euler. Ce problème m'étant donc contesté par M. Hermann, je disois pour couper court, haïssant mortellement les disputes, que M. Meyer l'avoit aussi résolu. On me nia que M. Meyer eût jamais pensé à ce problème, et que, séduit par ma crasse ignorance, j'avois fait un *qui pro quo*: M. Meyer nia lui-même la chose (apparemment parce qu'il se fioit trop sur M. Hermann) et courant, autant que sa maladie le lui permettoit, chez M. Hermann (chez qui M. Euler étoit), il dit en entrant: „Ah! Monsieur le professeur, que je vous suis obligé de m'avoir tiré d'une erreur où j'ai été jusqu'à présent: j'ai aussi examiné s'il étoit possible de trouver la hauteur du pôle par trois hauteurs et les intervalles de tems, et je trouve maintenant, comme vous, que c'est un problème indéterminé." Après notre conférence, commençant à avoir, depuis cette affaire, plus d'estime pour le problème, je pensai à une autre solution, plus facile que mes deux premières (car j'en avais trouvé deux), et j'eus le bonheur d'en trouver une si facile que j'en étois charmé: je la montrai à M. Delisle, le priant de me donner quelques exemples pour faire une épreuve de ma nouvelle règle sur ces exemples: il le fit, et quelques heures après, je lui marquai la hauteur du pôle avec la déclinaison de l'étoile et toutes les circonstances. Il faut apparemment que ces Messieurs en aient eu le vent, et ainsi il falloit changer de batterie. On eut donc soin de publier, du consentement de l'agonisant Meyer (O mores!) que c'étoit lui qui avoit inventé le problème et qui me l'avoit communiqué, que je n'en ai jamais eu de solution, mais que pourtant, étant persuadé, de l'autorité de M. Meyer, que le problème pouvoit être résolu, j'avois écrit, immédiatement après la conférence publique, à mon père, en le priant de m'envoyer, par le premier ordinaire, une solution de ce problème, et qu'on savoit fort bien qu'en effet j'avois reçu, 7 semaines après, une solution de mon père que j'allois donner sur mon compte. — Voilà, M., toute l'histoire dont je puis prouver les plus petites particularités par des preuves irréprochables. Vous voyez quel tort M. Bülffinger me fait dans ses *notamina*, et cependant je vous assure que tout cela blanchit auprès de ses autres médisances. Je m'attendois que M. le Président chatiât son insolence comme il le mérite, et je suis surpris qu'il tarde si longtems à le faire. M. Hermann avoit donné des cahiers pour changer quelques feuilles dans nos mémoires; c'étoit la meilleure manière de redresser ses fautes. Cependant M. Meyer l'en a détourné, et ses fautes seront dans l'*errata*. C'est fort mal fait à mon avis, car il y en a qui lui feront grand tort: la faute la plus grossière, c'est la section algébrique de la parabole. La source de l'erreur ne peut lui faire du tort, puisqu'on voit que ce n'est qu'une faute de calcul; mais c'est une honte pour le moindre géomètre de ne pas voir, au premier coup d'oeil, la fausseté de sa conclusion: car enfin s'il eût trouvé: ergo $3 = 4$, — n'auroit-il pas retouché son calcul? Il me semble aussi que c'est se moquer que de montrer si prolixement l'intégration de $dy \sqrt{(4y + a)}$, et que bientôt il fera des substitutions pour trouver l'intégrale de dy. Quand je marquois ces choses à mon père, il ne pouvoit les croire. Au reste, il y a d'autres fautes dans les écrits de M. Hermann, guères moins palpables, qu'il ne sait pas encore. Je sais aussi que ce n'est qu'une gasconnade, lorsqu'il dit pag. 199 qu'il a fait ce que personne, surtout ni moi, ni mon frère n'ont pu faire; — mais laissons là ce bon vieillard pour qui je ne laisse pas d'avoir beaucoup d'estime. Je n'ai point lu ce que M. Hermann dit, au tome 1, sur les intégrations, ni ai envie d'y donner l'attention que ces choses demandent. — Je ne saurois bien vous mander les cas intégrables de $dv = x^{mn-1}(a + bx^m)^p$: vous feriez mieux, si vous n'avez pas les Actes de Leipsic, de demander à M. Schumacher qu'il fasse prendre une copie de ce qu'il y a dans les Actes sur cette matière: vous y trouverez des anecdotes curieuses. Votre premier problème est bien imaginé, mais il n'est pas difficile: si vous voulez, M., que je vous envoie ma solution, je le ferai. Puisque vous me marquez que je vous doive renvoyer votre lettre, et que je ne sais pas de laquelle vous voulez parler, je vous renvoie les deux dernières. Comme je ne m'applique nullement, non plus que vous, sur mes lettres, et qu'il m'arrive souvent de nommer *chat* un chat, et B. un fripon, je vous prie de ne pas en faire usage. Dans la persuasion que vous remplirez ma demande, je n'en garderai point de copie, aimant mieux vous envoyer mes brouillons tels qu'ils sont. Je joins ici une lettre pour M. le Président que j'avois déjà remise à la chancellerie de l'Académie le 13 juillet, mais qui a été retardée pour des raisons dont il seroit superflu de vous entretenir. Je la recommande fort à vos soins, vous suppliant de la lui remettre en mains propres, et de me marquer si vous avez eu la bonté de le faire. Il y avoit dans votre dissertation quelques nombres mal posés par mégarde que j'ai jugé à propos de corriger n'étant pas de conséquence, sans quoi je l'aurois abandonné à votre soin. Le terme général $\frac{x}{\underline{x-1}}$ peut aussi être exprimé ainsi, comme vous avez sans doute remarqué, $\frac{1}{e^{\underline{x-1}}(x+1)}$.

Dan. Bernoulli.

P.S. Je vous prie de faire quelques réflexions sur le terme général de cette suite a, $a - aa$, $a - aa - (a - aa)^2$, etc où chaque terme est la différence de la racine et du quarré de son précédent, si au moins il peut être exprimé par une suite.

LETTRE XLVII.

D. Bernoulli à Goldbach.

=

Sommaire. Solution du problème de la cycloïde. Terme général de la suite $1 + 2 + 6 + 24 +$ etc.

St.-Pétersbourg ce 6 octobre 1729.

J'ai eu l'honneur de vous envoyer une grande lettre, lundi passé, que j'espère que vous aurez reçue. Avant-hier j'ai fait la lecture de votre dissertation qui a fort plû à Messieurs les Académiciens, autant que j'ai pu voir par leur attention, mais la lecture finie, personne n'a rien dit. Voici, Monsieur la solution de votre problème: Soit (Fig. 18.) ABG la cycloïde donnée dont le cercle générateur est $BLKR$. Qu'on prenne, dans le diamètre BK, deux points O et M également éloignés du centre N et du sommet B, et qu'on tire MSC et LOD perpendiculaires à BK; qu'on tire par les points D et C une droite indéfinie DCI dans laquelle on peut prendre un point quelconque P duquel on érigera la perpendiculaire

$PH = \frac{MS.MK}{DC}$; qu'on tire ensuite, par le point H, la ligne DHE et l'indéfinie $CHFT$. Du point D, il faut tirer, perpendiculairement à DHE, la ligne $DU = \frac{OL.OK}{HE}$. Du point U, il faut tirer la ligne UFQ, parallèle à DE, qui coupera la ligne $CHFT$ en F. Tirez la droite EF, et l'on aura le triangle mixtiligne $DCH =$ au triangle rectiligne EFH. *C. Q. F. F.*

Puisque les points O et P sont arbitraires, il y a une infinité de solutions.

Dan. Bernoulli.

P.S. Voici le terme général pour la suite $1+1.2+1.2.3+$etc. Soit x l'exposant du terme, et A un nombre infini, je dis que le terme général sera

$$\left(A+\frac{x}{2}\right)^{x-1}\left(\frac{2}{1+x}\cdot\frac{3}{2+x}\cdot\frac{4}{3+x}\cdot\cdots\cdot\frac{A}{A-1+x}\right)$$

Si au lieu de prendre A infiniment grand, on le fait $=$ à un nombre un peu grand, on aura le terme général à peu près. Si $x = \frac{3}{2}$ et qu'on fait $A = 8$ on aura

$$\sqrt{\tfrac{19}{2}}\left(\tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{6}{7}\cdot\tfrac{8}{9}\cdot\tfrac{10}{11}\cdot\tfrac{12}{13}\cdot\tfrac{14}{15}\cdot\tfrac{16}{17}\right) = 1,3005$$

par le moyen des logarithmes on approche très vitement. Si $x = 3$ et $A = 16$, au lieu de 6 on trouve $(6 \cdot 17\tfrac{1}{2} \cdot 17\tfrac{1}{2}) : 17 \cdot 18 = 6\tfrac{1}{204}$.

LETTRE XLVIII.

GOLDBACH à D. BERNOULLI.

SOMMAIRE. Remarques sur différentes suites.

Moscou ce 20 octobre 1729.

Il me semble qu'il faudroit démontrer à la rigueur que le logarithme 0,96147189 ... n'est ni rationel ni irrationel, pour conclure que la somme de $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} +$ etc. tombe dans la même irrationalité.

Voici une suite de fractions telles que vous me les avez demandées, dont la somme n'est ni rationelle ni racine d'aucun nombre rationel $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{100000000} +$ etc. Le terme général en est $\frac{1}{10^{2^{x-1}}}$.

Je vous suis très obligé, M., de la solution que vous m'avez envoyée. Quand j'aurai l'honneur de vous revoir, je la lirai sous vos yeux et j'en profiterai. Ce n'étoit pourtant pas mon intention de vous demander la solution même, je souhaitois seulement de savoir si vous étiez déjà d'accord sur cette solution avec M. Hermann, ou s'il prétend encore qu'il est impossible de résoudre le problème en question.

Je crois que la suite, qui a pour premier terme a, et pour loi de progression $mA + nA^2 = B$, peut se réduire à un terme général montant par les puissances de a à l'infini; en voici les trois premiers degrés: $m^{x-1} a + m^{x-2} \frac{(m^{x-1}-1)}{m-1} n a^2 + 2m^{x-3} \frac{(m^{x-2}-1)(m^{x-1}-1)}{(m^2-1)(m-1)} n^2 a^3 +$ etc. mais il est plus remarquable, à mon avis, que ce terme général devient fini dans les trois cas $m = \pm 1 \pm 3$, de sorte que si l'on fait $a =$ à la quantité variable y, $x =$ au nombre constant c, les coefficiens $m^{c-1} = \alpha$, $m^{c-2} \frac{(m^{c-1}-1)}{m-1} = \beta$, et ainsi de suite, l'équation différentielle $\alpha dy + 2\beta ny dy + 3\gamma n^2 y^2 dy +$ etc. $= dz$ sera toujours intégrable dans les trois cas que je viens de marquer.

Quoique dans le cas de $m = 1$ le précédent terme général ne soit plus intelligible, on y peut remédier par la formule suivante

$$a+(x-1)na^2+(x-1)(x-2)n^2a^3+(x-1)(x-2)\left(\frac{2x-5}{2}\right)n^3a^4+$$
$$(x-1)(x-2)(x-3)\left(\frac{3x-7}{3}\right)n^4a^5+$$
$$(x-1)(x-2)(x-3)\left(\frac{12x^2-65x+84}{3.4}\right)n^5a^6+\text{etc.}$$

C'est un plaisant vol que celui dont vous me parlez. Ces calculs là sont de M. Bülffinger; je n'ai fait que les repasser.

Goldbach.

LETTRE XLIX.

D. Bernoulli à Goldbach.

=

Sommaire. Réponse à la lettre précédente.

St.-Pétersbourg ce 20 (31) octobre 1729.

Je vois, par votre dernière du 9 (20) octobre, que vous n'aviez pas encore reçu celle que j'ai eu l'honneur de vous écrire en réponse à votre pénultième. J'espère que vous l'aurez reçue depuis: il y avoit une solution de votre problème sur la cycloïde et une espèce de terme général pour les suites $A(x+1)=B$ qui donne, avec une extrême accuratesse, les termes moyens. M. Euler a trouvé depuis, par le calcul intégral, une méthode de donner exactement les termes moyens entre deux entiers, qui dépend de la quadrature du cercle. Cette observation est jolie, mais elle ne s'étend qu'aux exposans $\frac{x}{2}$, en prenant x pour un nombre entier. Il vous a marqué lui même sa découverte, et si vous voulez approcher par ma méthode, en prenant seulement 3 ou 4 termes, vous remarquerez une grande conformité dans ces nombres; mais celui que je vous ai marqué dans ma dernière doit être corrigé.

Je ne saurois démontrer qu'il est impossible d'exprimer algébriquement la somme de $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} +$ etc. Si je le pouvois, j'aurois démontré l'impossibilité de la quadrature de l'hyperbole et même de celle du cercle, car l'une dépend de l'autre par les logarithmes imaginaires. Mais je conçois bien que la somme de la suite $1 : 10^{2^{x-1}}$ n'est ni rationelle, ni racine d'aucun nombre rationel; car chaque fraction qu'on change en fraction décimale prend une certaine période de chiffres que la somme de cette suite

$$\tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{100} + \tfrac{1}{10000} + \tfrac{1}{100000000} + \text{etc.}$$

n'a pas, non plus qu'une puissance quelconque d'un nombre quelconque, ensorte que cette même somme ne sauroit être racine d'aucun nombre rationel.

Je ne crois pas que M. Hermann prétende encore que mon problème astronomique soit indéterminé. Cependant M. Meyer, pour lui faire avoir raison malgré lui, a trouvé le plus heureux expédient du monde: il dit que M. Hermann a appelé ce problème indéterminé, parce qu'il a deux racines (il en devoit nommer quatre), entre lesquelles l'observateur pourra toujours hésiter. A ce prix cette équation $xx - 5x + 6 = 0$ seroit pour un problème indéterminé, puisqu'on ne sauroit dire si $x = 2$, ou si $x = 3$, et désormais tous les problèmes déterminés se traiteront dans les écoles. Il me semble que c'est pousser la hardiesse bien loin, car si une telle réponse étoit sue hors de Pétersbourg, il y auroit de quoi rendre ridicule tout un corps: comme si, dans notre Académie, on ne savoit pas ce que c'est qu'un problème indéterminé et un problème de plusieurs dimensions et susceptible de plusieurs solutions.

Si vous voulez, M., que j'aie encore l'honneur et la satisfaction de vous revoir, il faudra que vous hâtiéz un peu votre retour; car je compte m'en retourner chez moi planter des choux dans 8 mois, à moins que M. le Président ne me veuille refuser une petite grâce de 3 mois d'anticipation que je lui demande dans la lettre que j'ai pris la liberté de vous adresser. S'il avoit quelque difficulté à me l'accorder, j'espère, M., que vous voudrez bien être mon bon avocat auprès de lui. J'attends avec grande impatience la résolution de M. le Président pour pouvoir prendre mes mesures; si vous pouviez me la faire obtenir bientôt, vous m'obligeriez très sensiblement.

Je ne vois pas comment on puisse réduire à un terme général fini la suite $mA + nAA = B$, dans les trois cas de $m = \pm 1 \pm 3$. Je vous prie donc, M., de me marquer ce que vous avez trouvé là-dessus; pour moi, je n'en saurois trouver le terme général fini que lorsque $m = 0$ et $n = 1$, auquel cas le terme général se voit d'abord être a^{2^x}, sans parler des cas où $n = 0$ qui comprennent les progressions géométriques. Si je me souviens bien, M. Wallis a dit que la circonférence d'un cercle, dont le diamètre étoit $= 1$, pouvoit être exprimée par cette fraction infinie, dont le numérateur et le dénominateur ont un même nombre de facteurs savoir $\frac{3.5.7.9.11.13.\text{ etc.}}{2.4.6.8.10.12.\text{ etc.}}$. Mais cette fraction est infiniment grande. Cependant je puis démontrer que, si cette fraction est continuée à l'infini, et qu'on la coupe en deux également, le produit de toute la fraction postérieure est $= \sqrt{2}$, c'est-à-dire, si x est un nombre infini, on aura

$$\frac{(2x+3)(2x+5)(2x+7)\ldots(2x+2x+1)}{(2x+2)(2x+4)(2x+6)\ldots(2x+2x)} = \sqrt{2}.$$

Parmi les suites recurrentes sont aussi comprises celles-ci p. ex. $1 + 2 + 1.2 + 2.1.2 + 1.2.2.1.2 +$ etc. où chaque terme est le produit des deux précédens; car si les deux premiers termes sont a et b, on aura

$$a + b + a^1 b^1 + a^1 b^2 + a^2 b^3 + \text{etc.}$$

dont les exposans forment une progression recurrente, mais l'application aux cas particuliers demande quelque attention: par exemple, si les deux premiers termes sont 1 et 8, le terme général est

$$2^{\frac{3}{2\sqrt{5}}\left[(1+\sqrt{5})\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x + (\sqrt{5}-1)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x\right]}$$

Mais je m'aperçois que l'envie de ne pas rien dire, me fait dire des bagatelles; j'aime mieux finir.

Dan. Bernoulli.

LETTRE L.

D. Bernoulli à Goldbach.

Sommaire. Rectification d'une erreur commise dans la lettre précédente relativement à la formule de Wallis.

St.-Pétersbourg ce 10 novembre 1729.

Je viens de recevoir une lettre de mon père à qui j'avois envoyé en manuscrit ce beau morceau que vous avez fait pour honorer la mémoire de feu mon frère. Il me témoigne dans sa réponse de n'être pas moins sensible aux marques de bonté et d'amitié que vous avez pour notre famille, qu'il est charmé de tout ce qui fera votre éloge auprès des savans, et il m'a chargé très expressément de vous marquer, M., sa reconnoissance très vive et cette haute estime qu'il a pour votre rare mérite, en vous priant de nous conserver votre bienveillance. Je m'en acquitte avec un très sensible plaisir, et surtout de ce dernier point qui m'intéresse très particulièrement.

Dan. Bernoulli.

P. S. J'apprends que la Cour pourroit rester encore quelque tems à la campagne. Je vous prie, M., en ce cas, d'envoyer ma lettre à M. le Président par une occasion sûre, ce qui ne vous sera pas difficile, et de m'en avertir quand vous l'aurez fait. Je vous ai envoyé deux lettres auxquelles je n'ai point encore eu de réponse. Dans la dernière, je soupçonnois à faux M. Wallis d'avoir donné pour la quadrature du cercle cette fraction, continuée à l'infini $\frac{3.5.7.9.11.\text{ etc.}}{2.4.6.8\ 10.\text{ etc.}}$; voici la véritable qu'il donne $\frac{3.3.5.5.7.7.9.\ 9.11.11.\text{ etc.}}{2.4.4.6.6.8.8.10.10.12.\text{ etc.}}$. Il m'est échappé aussi, dans cette lettre, de dire que je ne pouvois trouver le terme général de la suite $nAA \mp B$: cependant rien n'est plus facile que de dire le terme général pour cette suite, plus générale $nA^m \mp B$ que je crois pouvoir étendre encore davantage. Je n'ai pas le tems maintenant d'y penser; quand on doit être auteur d'un livre, et qu'on le doit être un peu malgré soi, on n'a guère du tems de reste . . . .

LETTRE LI.

GOLDBACH à D. BERNOULLI.

SOMMAIRE. Solution du problème de la cycloïde. Continuation sur les séries.

Moscou ce 28 novembre 1729.

Le 22 novembre n. st. je rendis à M. le Président la lettre que vous lui avez écrite; nous étions assemblés chez M. l'Archiatre pour y jouer une prise d'hombre; je n'avois pas alors l'occasion de sonder M. le Président au sujet des trois mois d'anticipation, mais je m'en acquittai le lendemain le mieux que je pus; il m'assura là-dessus qu'il vous répondra lui-même, ce que j'aime mieux aussi qu'il le fasse, afin que vous ayez un document authentique en main sur lequel vous puissiez compter plus sûrement que sur le rapport de ce qui s'est dit dans une simple conversation.

Nos solutions s'accordent au fond, et vous remarquerez bien que nous avons puisé à la même source. Voici la solution du problème telle que je l'avois conçue et qui porte sa démonstration avec elle. Soit (Fig. 19.) la cycloïde ABG, son axe BK, et le centre du cercle générateur N. Je prends (comme vous faites) $BE = MN$, et ayant mené les ordonnées EC et MD, je suppose l'aire du segment cycloïdal CD (qui est quarrable, comme vous savez) $= a$, et la distance $EM = b$; je tire à BK une perpendiculaire $MP = \frac{2a}{b}$, et du point P l'indéfinie PQ, parallèle à l'axe BK. La droite CM prolongée rencontrera PQ en F, quatrième point qu'on demande; il est évident que le triangle rectiligne CDH est $=$ au $\triangle HEM$ et que $MEF = a =$ au segment cycloïdal CD.

Il me semble, M., que vous n'avez pas fait attention à la difficulté qu'il y a de continuer le terme général dont je vous ai envoyé le commencement dans ma dernière lettre. Voici les trois cas auxquels ce terme là devient fini:

I. Soit le premier terme donné α: la loi de progression $2A + A^2 = B$ (si je mettois $2A + nA^2 = B$, le nombre n n'y feroit aucune difficulté; ainsi j'aime mieux le faire, dans cet exemple et dans les suivans, $= 1$ que d'en embarasser inutilement les formules). Le terme général sera $(\alpha + 1)^{2^{x-1}} - 1$.

II. Soit le premier terme donné α; la loi de progression $-2A + A^2 = B$: le terme général sera

$$\left[\frac{(\alpha-1) \pm \sqrt{(\alpha^2 - 2\alpha - 3)}}{2}\right]^{2^{x-1}} + \left[\frac{(\alpha-1) \pm \sqrt{(\alpha^2 - 2\alpha - 3)}}{2}\right]^{+2^{x-1}} + 1.$$

III. Soit le premier terme donné α; la loi de progression $4A + A^2 = B$; le terme général sera

$$[(\alpha+2) \pm \sqrt{(\alpha^2 + 4\alpha)}]^{-2^{x-1}} + [(\alpha+2) \pm \sqrt{(\alpha^2 + 4\alpha)}]^{+2^{x-1}} - 2.$$

Je doute fort que M. Wallis ait défini par le nombre $\frac{3.5.7.9.\text{etc.}}{2.4.6.8.\text{etc.}}$ la circonférence du cercle dont le diamètre est $= 1$; mais il pourroit bien avoir dit que le nombre

$$\frac{2.4}{3.3}\cdot\frac{4.6}{5.5}\cdot\frac{6.8}{7.7}\cdot\frac{8.10}{9.9}\ \text{etc.}$$

est égal à l'aire du cercle dont le diamètre est 1; car cette proposition est aussi vraie que l'autre est fausse.

J'étois précisément à cet endroit de ma lettre, quand je reçus hier la vôtre du 9 novembre par laquelle je vois que vous avez déjà remarqué ce que je voulois vous dire dans ce dernier article. Je suis d'ailleurs ravi d'apprendre que M. votre père soit satisfait de ce que j'ai dit au sujet de feu M. votre frère. Je vous prie, M., de marquer à M. votre père, aussitôt que vous lui écrirez, la joie que j'ai de son approbation et de l'assurer que j'embrasserai toutes les occasions qui se présenteront pour mériter l'honneur de sa bienveillance.

Si les théorèmes ci-joints*) vous agréent, j'en pourrai augmenter le nombre à loisir. Ayez la bonté de faire mes complimens à M. Euler; je répondrai dans huit jours à la belle lettre qu'il m'a écrite.

Goldbach.

*) Ces théorèmes manquent

LETTRE LII.

D. Bernoulli à Goldbach.

Sommaire. Théorème d'analyse. Théorème de Jean B. II. Réduction d'une formule différentielle irrationelle à la rationalité. Défi proposé par Euler.

St.-Pétersbourg ce 28. décembre v. st. 1729.

Je reconnois très sensiblement l'exactitude avec laquelle vous vous êtes acquitté de la commission dont j'avois pris la liberté de vous charger. J'attends avec impatience la réponse que vous me promettez de la part de M. le Président, et dans la situation, où sont mes affaires, ce seroit la plus grande grâce qu'il pourroit me faire maintenant que de m'honorer au plus vite d'une réponse. Il y a six mois que j'amuse continuellement mon père en lui promettant une réponse positive sur mon retour, et le priant de différer certaines choses jusqu'à ce tems-là.

Je ne doutois nullement que nos solutions du problème de la cycloïde ne s'accordassent entièrement; le principe en saute aux yeux; mais je ne laisse pas de l'estimer comme venant de votre main et de m'applaudir de vous avoir si bien rencontré sur ce point. Je fais encore plus de cas de vos termes généraux dont la loi est exprimée par cette formule $\left(\mp 1 \mp 3\right) A + n\,A\,A = B$. Je vous avoue, M., que je n'en vois pas la source; je n'en entreprendrai pas même la recherche de peur d'y échouer, et aimant mieux l'apprendre de vous.

N'avez vous pas pensé, M., à la démonstration du théorème que j'ai eu l'honneur de vous mander dans ma dernière touchant la fraction infinie, divisée en raison donnée. Voici ce théorème plus général et prononcé un peu autrement: Soit m et n des nombres infinis, et a et b des nombres finis, je dis que cette fraction, ou plutôt le produit de toutes ces fractions dont le nombre est infini, savoir

$$\left(1+\frac{b}{m}\right)\left(1+\frac{b}{m+a}\right)\left(1+\frac{b}{m+2a}\right)\left(1+\frac{b}{m+3a}\right)\cdots\left(1+\frac{b}{m+na}\right)=\left(1+\frac{na}{m}\right)^{b}$$

et ainsi, p. ex., si $n=m$, $a=1$, $b=\frac{1}{2}$, on aura

$$\left(1+\frac{1}{2m}\right)\left(1+\frac{1}{2m+2}\right)\left(1+\frac{1}{2m+4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{4m}\right)=\sqrt{2}.$$

Si, au lieu de prendre m et n infiniment grands, on les fait finis, mais pourtant un peu grands, le théorème sera vrai à peu près, mais en ce cas, au lieu de la somme $\left(1+\frac{na}{m}\right)^{b}$, on fera mieux de prendre $\left(1+\frac{na+a}{m}\right)^{b}$.

Comme je me suis entretenu, depuis quelque tems, avec mon frère sur ces sortes de suites composées d'un nombre infini de termes infiniment petits (auxquelles ont peut réduire celles que je viens de dire), il m'a envoyé le théorème général que voici: Soient derechef m et n des nombres infinis, a et b des nombres finis, on aura

$$\frac{m^b}{(m+a)^{b+1}}+\frac{m^b}{(m+2a)^{b+1}}+\frac{m^b}{(m+3a)^{b+1}}+\ldots\ldots+\frac{m^b}{(m+na)^{b+1}}=\frac{1}{ab}-\frac{m^b}{ab(m+na)^b}.$$

Si n est infiniment plus grand que m, cette somme sera $=\frac{1}{ab}$, et si, au lieu de faire m infiniment grand, on le prend encore égal à un nombre fini, mais assez grand, cette proposition sera totalement vraie; d'où il suit qu'en faisant p. ex. a 1, $m=100$, on aura la somme de cette suite

$$\left(\frac{1}{101}\right)^{b+1}+\left(\frac{1}{102}\right)^{b+1}+\left(\frac{1}{103}\right)^{b+1}+\text{etc. à l'infini},$$

à fort peu près $=\frac{1}{100^b.b}$. Si vous considérez, M., attentivement ce théorème, je m'assure qu'il ne vous plaira pas moins qu'à moi qui en suis assez satisfait. Ces sortes de suites, dont la somme est finie, sont nouvelles et peuvent servir à bien des approximations.

Vous savez, M., que toutes les formules différentielles dont les numérateurs et les dénominateurs sont rationels, comme $\frac{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+\text{etc.}}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\text{etc.}}dx$ peuvent être ou intégrées, ou réduites aux quadratures du cercle et de l'hyperbole. Là-dessus M. Euler a remarqué que cette formule $\frac{dx}{\sqrt[n]{(a+bx^n)}}$, qui est irrationelle, peut être réduite à la formule générale nommée, croyant cette réduction fort difficile, quoique je l'aie faite sur le champ (ce dont il fut un peu surpris, car cela lui coûta un bon ducat de gageure qu'il avoit faite avec moi, en prétendant que je ne le ferais pas dans 15 jours de tems). Mais comme je ne vois qu'une méthode pour cela, qui est en effet fort facile, il se peut

*

que, sans cette méthode, le problème seroit fort difficile et digne de vous. M. Euler me dit pour s'excuser de la légèreté de son défi, que sa solution est fort embarassée et qu'il ne croyoit pas d'abord qu'on pût résoudre le problème autrement qu'il l'a fait. Peut-être voudrez vous bien y employer quelques coups de plume en faveur de ces circonstances.

Vos deux théorèmes sont sans doute très beaux et peut-être fort difficiles, mais comme le point de la question revient aux sommations des progressions, j'aurois mieux aimé (si je ne déférois plus à votre goût qu'au mien) proposer la chose comme appartenante à la matière des sommations des suites, qu'à celle des intégrations, laissant au lecteur à en faire tel usage qu'il trouvera à propos. Car comme, dans la solution des problèmes, on ne parvient jamais ou fort rarement à ces sortes de progressions infinies qu'on puisse changer en des expressions finies, et qu'au contraire, on change souvent à dessein les expressions finies en des suites infinies après la solution du problème, je n'en vois pas assez l'utilité. Toutefois, quand même cette réflexion passagère auroit été de quelque poids, elle n'auroit rien dérogé à la beauté de vos théorèmes que je lirai, si vous le trouvez bon, à l'Académie.

Dan. Bernoulli.

LETTRE LIII.

GOLDBACH à D. BERNOULLI

SOMMAIRE. Transformation des formules différentielles. Considérations sur les séries.

Moscou ce 5 janvier n. st. 1730.

Le lendemain après avoir reçu l'honneur de votre lettre, j'en communiquai le commencement à M. le Premier Médecin, sur quoi il me promit une seconde fois qu'il vous répondroit. Comme M. Schumacher arrivera bientôt ici, j'espère que vous l'aurez suffisamment instruit au sujet de votre demande et qu'il emploira ses bons offices pour vous procurer une résolution dans les formes.

En relisant la copie de ma dernière lettre, j'y remarquai quelques *spropositi**) que je vous prie, M., de corriger, en cas qu'ils se trouvent dans l'original.

*) Sic!

Il est fort facile de réduire à la formule

$$\frac{A}{B} = \frac{a + bx^m + cx^{2m} + dx^{3m} + \text{etc.}}{\alpha + \beta x^m + \gamma x^{2m} + \delta x^{3m} + \text{etc.}}\, dx$$

non seulement la différentielle $\frac{dx}{(a+bx^m)^n}$, mais généralement

$$\frac{C}{D} = \frac{(f + gx^m + hx^{2m} + \text{etc.})^p}{(r + sx^m + tx^{2m} + \text{etc.})^q}\, dx$$

où C et D sont multinomia quaecunque ad potestates quascunque p et q elevata. Pour cet effet, il faut convertir les deux multinomes C et D élevés aux puissances p et q en des suites infinies (C) et (D), après quoi, sans se donner plus de peine, on prendra (C) pour A, (D) pour B. Mais si l'on veut que les coefficiens a, b, c etc. ou bien α, β, γ etc. restent indéterminés, il n'y a qu'à faire $A\,(D) = B\,(C)$.

N'ayant jamais considéré des séries qui, outre le nombre infini de leurs termes, demandent encore un autre nombre infini dans chaque terme, pour que la somme de tous ces termes devienne égale à une quantité constante, je vous avoue à mon tour, M., que je ne sais pas le mystère de celle que vous m'avez proposée, quelque jolie qu'elle me paroisse:

$$\frac{m^b}{(m+a)^{b+1}} + \frac{m^b}{(m+2a)^{b+1}} + \cdots \frac{m^b}{(m+na)^{b+1}} = \frac{1}{ab} - \frac{m^b}{ab(m+na)^b}$$

Cependant, le peu d'attention que j'ai fait à la méthode de produire de telles séries me suffit pour comprendre qu'il est plus facile d'en inventer mille sommables, que de trouver *a posteriori* la démonstration d'une seule. Pour vous en persuader par un exemple, soient m et n des nombres infinis, a un nombre quelconque plus grand ou plus petit que 1, je dis que la somme de cette suite

$$\frac{(a-1)(16m^2-1)-2a^n}{a^n(16m^2-1)} + \frac{(a-1)(16(m-1)^2-1)-2a^{n-1}}{a^{n-1}(16(m-1)^2-1)} +$$
$$\frac{(a-1)(16(m-2)^2-1)-2a^{n-2}}{a^{n-2}(16(m-2)^2-1)} + \text{etc.}$$

(qui a pour terme général $\frac{(a-1)(16(m-x+1)^2-1)-2a^{n-x+1}}{a^{n-x+1}(16(m-x+1)^2-1)}$) est égale à l'aire du cercle dont le diamètre $= 1$.

Voici la démonstration des termes généraux pour la loi de progression $(1 \pm 3)A + A^2 = B$. Je suppose ce terme général $A \ldots a^{-2^{x-1}} + c + a^{2^{x-1}}$, les quantités a et c étant jusqu'ici indéterminées; la loi de progression donne

$$\begin{aligned} (1\pm 3)A = &\quad (1\pm 3)a^{-2^{x-1}} + (1\pm 3)c + (1\pm 3)a^{2^{x-1}} \\ + A^2 = a^{-2^x} &+ 2ca^{-2^{x-1}} + (c^2+2) + 2ca^{2^{x-1}} + a^{2^x} \\ = B = a^{-2^x} &\qquad\qquad + c \qquad\qquad + a^{2^x} \end{aligned}$$

et par conséquent, $c = \frac{-(1\pm 3)}{2}$. Dans cette supposition, le premier terme donné α étant $= a^{-1} - \frac{(1\pm 3)}{2} + a$, la quantité a se détermine enfin par

$$\frac{2\alpha + (1\pm 3) \pm \sqrt{(4\alpha^2 + 4(1\pm 3)\alpha + (1\pm 3)^2 - 16)}}{4}.$$

La loi de progression $A^2 + f m^{2^{x-1}} = B$ n'est pas moins curieuse que celle que nous venons de considérer. Si $f = \pm 2$ et m un nombre quelconque, le terme général dépend de cette formule $a^{2^{x-1}} \pm b^{2^{x-1}}$. Soit le premier terme donné α, on aura $a \pm b = \alpha$ et $ab = m$. Si $f = \pm 1$, le terme général sera $a^{n \cdot 2^{x-1}} \pm a^{2^{x-1}}$; la quantité n étant déterminée par cette équation exponentielle $m^{\frac{n}{n+1}} \pm m^{\frac{1}{n+1}} = \alpha$, ce qui me paroît bien remarquable. J'ai résolu de placer ces exemples dans ma dissertation où ils ne viendront pas mal, d'autant que ces sortes de formules peuvent frayer le chemin à bien d'autres découvertes en ce genre.

A l'égard des deux théorèmes, je vous prie, M., de ne pas les communiquer à MM. les Académiciens jusqu'à ce que j'en aie ajouté quelques autres pareils que j'ai déjà en idée, vous laissant le choix du nom et du titre qu'il vous plaira de leur donner; car enfin savoir intégrer une suite infinie de différentielles n'est autre chose que de trouver la somme de la suite infinie de leurs intégrales.

Goldbach.

LETTRE LIV.

D. Bernoulli à Goldbach.

=

Sommaire. Problème proposé par Euler. Réponse à la lettre précédente.

St.-Pétersbourg ce 1 janvier v. st. 1730.

Je ne saurois vous dire combien je suis charmé de l'empressement que vous témoignez à me rendre de bons offices. Je vois bien que je vous suis presque uniquement redevable d'une lettre que M. Blumentrost m'a fait l'honneur de m'écrire, et dans laquelle il me fait espérer une réponse positive aux premiers jours. Je n'ai pas manqué d'exposer à M. Schumacher la situation de mes affaires, mais il sera trop occupé pour penser à moi; je suis pourtant persuadé qu'il a beaucoup d'amitié pour moi et peut-être quelque estime; je me fierai donc entièrement en lui, pourvu que vous veuilliez avoir la bonté de le faire ressouvenir de moi de tems en tems.

Il n'y avait dans votre pénultième aucune autre faute d'écriture que celle de $2^x - 2^{x-1}$, au lieu de 2^{x-1}, que j'ai corrigée sur votre avis: pour les autres fautes, quand même elles y auroient été, j'y aurois suppléé de moi-même, sans vous les imputer en aucune manière.

Je vois par la solution que vous donnez, M., du problème de M. Euler, que vous n'êtes aucunement entré dans le sens de ce problème. Toute la question est de rendre cette formule $\frac{dx}{\sqrt[n]{(a+cx^n)}}$ rationelle par une substitution algébrique quelconque qu'il faut trouver, p. ex. soit la formule $\frac{dx}{\sqrt{(bb+xx)}}$ qui est comprise dans la précédente; je fais ici $x = \frac{bb-zz}{2z}$ et $dx = \frac{-zzdz-bbdz}{2zz}$, et on aura changé la formule irrationelle $\frac{dx}{\sqrt{(bb+xx)}}$ en cette rationelle $\frac{-dz}{z}$ dont l'intégrale est log. z. Il faudroit maintenant, pour satifaire au problème, faire la même chose pour la formule générale $\frac{dx}{\sqrt[n]{(a+cx^n)}}$ ou seulement pour ce cas $\frac{dx}{\sqrt[3]{(a+x^3)}}$, car la méthode sera la même pour tous les autres cas

La source des théorèmes des progréssions dont les termes sont infiniment petits et dont la somme est partout finie, n'est pas fort difficile à voir, et vous l'eussiez vue sans doute, si vous aviez voulu. Il ne s'agit que de trouver une quantité dans laquelle si l'on met $x+1$, au lieu de x, et qu'on prenne la différence des quantités avant et après la substitution, cette différence soit égale, ou puisse l'être censée, au terme dont l'exposant est $x+1$. Mais j'avoue qu'il faut bien souvent de grandes précautions pour ne pas se tromper. Cependant je trouve toutes ces formules *a priori*, et non *a posteriori* comme vous pensez; et ainsi je souhaiterois que vous trouvassiez une seule sommable *a posteriori* que je ne puisse sommer *a priori.* Celle que vous me mandez, M., n'est pas comprise dans cette classe; car si dans cette expression

$$\frac{(a-1)(16(m-x+1)^2-1)-2a^{n-x+1}}{a^{n-x+1}(16(m-x+1)^2-1)},$$

on met $a=1$, toute cette expression peut être censée égale à $\frac{-2}{(4m-4x)^2}$; si a est plus grand que 1, elle se change encore de la même manière, et si a est plus petit que 1, on obtient une quantité infinie, posé que partout $n-x$ soit encore infiniment grand, si x est plus grand que n, ou s'il est un infini d'un autre degré que n, la somme de la suite change toujours et devient ou nulle ou infiniment grande. Enfin cette suite n'a aucun rapport avec celles de mon frère.

Vos découvertes sur les progressions sont très belles, surtout cette remarque que le terme général pour la progression $AA \pm m^{2^{x-1}} = B$ est $a^{n.2^{x-1}} \pm a^{2^{x-1}}$, en prenant pour n un nombre tel que $m^{\frac{n}{n+1}} \pm m^{\frac{1}{n+1}}$ soit égal au premier terme de cette progression. Il semble qu'il y a quelque chose de mystérieux caché là-dessous. Quand vous aurez mis le tout au net dans votre dissertation, j'en profiterai aussi.

Dan. Bernoulli.

LETTRE LV.

GOLDBACH à D. BERNOULLI.

SOMMAIRE. Solution du problème d'Euler. Considérations ultérieures sur les séries des lettres précédentes. Solution d'une équation indéterminée. Généralisation du problème d'Euler. Transformation d'une formule différentielle.

Moscou ce 20 mars 1730.

Il vous a plû de me marquer, par votre précédente lettre, que vous avez exposé à M. Schumacher la situation de vos affaires et que cependant vous craignez qu'il ne soit trop occupé pour penser à vous. Je me serois fait un extrême plaisir de recommander, comme vous le souhaitez, vos intérêts à M. Schumacher, mais malheureusement pour moi et fort heureusement pour vous, Monsieur, je le trouve si disposé à vous rendre de bons services, que la commission dont vous avez bien voulu me charger expirant d'elle même, je me vois réduit à garder les bonnes intentions que j'ai pour vous à une occasion plus pressante.

Le problème de M. Euler de rendre cette formule $\frac{dx}{(x^n+1)^{\frac{1}{n}}}$ (où n soit un nombre entier et affirmatif quelconque) rationelle, me plaît beaucoup. En voici la solution: Soit

$$u = 2\left[nz^{n-1} + A \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} z^{n-3} + B \cdot \frac{n-3}{4} \cdot \frac{n-4}{5} z^{n-5} + C \cdot \frac{n-5}{6} \cdot \frac{n-6}{7} z^{n-7} + \text{etc.}\right].$$

Soit $x = \frac{z-1}{u^{\frac{1}{n}}}$; l'expression $\frac{dx}{(x^n+1)^{\frac{1}{n}}}$ se changera en cette rationelle $\frac{-\frac{1}{n}(z-1)du + udz}{(z+1)u}$. Soit p. ex. $n = 3$; la différentielle $\frac{dx}{(x^3+1)^{\frac{1}{3}}}$ sera transformée pas cette substitution en $\frac{(z+1)dz}{3z^2+1}$. J'ai mieux aimé représenter la différentielle en question sous cette forme $\frac{dx}{(x^n+1)^{\frac{1}{n}}}$, parce que l'autre $\frac{dy}{(ay^n+b)^{\frac{1}{n}}}$ (comme vous l'aviez exprimée), par la simple substitution de $y = (b:a)^{\frac{1}{n}}x$, devient $= \frac{(1:a)^{\frac{1}{n}}dx}{(x^n+1)^{\frac{1}{n}}}$. C'est par la même raison que j'aime mieux considérer l'équation $du = x^{mn-1}dx(a+bx^m)^p$ sous cette forme $du = (1-x^{\frac{1}{n}})^p dx$, et dire que l'intégrale en est

$$u = \left[x + \frac{p+n+1}{n+1} A x^{\frac{n+1}{n}} + \frac{p+n+2}{n+2} B x^{\frac{n+2}{n}} + \frac{p+n+3}{n+3} C x^{\frac{n+3}{n}} + \text{etc.}\right] (1-x^{\frac{1}{n}})^{p+1}$$

ou bien

$$u = \left[\frac{-n}{p+n} x^{\frac{n-1}{n}} + \frac{n-1}{p+n-1} A x^{\frac{n-2}{n}} + \frac{n-2}{p+n-2} B x^{\frac{n-3}{n}} + \frac{n-3}{p+n-3} C x^{\frac{n-4}{n}} + \text{etc.}\right] (1-x^{\frac{1}{n}})^{p+1},$$

que de traîner inutilement les quantités indéterminées a, b, m par tous les termes de l'intégrale. On voit d'abord que l'une de ces deux intégrales devient finie dans le cas de $p + n =$ à un nombre entier négatif, et l'autre dans le cas de $n =$ à un nombre entier affirmatif. Sur ce pied là, M. Hermann a raison de dire que l'équation est intégrable „cum $-n-p$ aequat numerum quemcunque integrum affirmativum," mais je ne sais si l'on conviendra de la remarque qu'il y ajoute „hoc autem fieri nequit nisi n sit numerus integer et p quoque, sed negativus." (Tom. I. de nos Mémoires p. 157).

A l'occasion des suites qui consistent en termes infiniment petits, je vous prie, M., de vous souvenir de ce que j'en ai dit dans ma précédente lettre; il ne me reste ici que de donner quelques éclaircissemens sur la suite dont le terme général est

$$\frac{(a-1)(16(m-x+1)^2-1)-2a^{n-x+1}}{a^{n-x+1}(16(m-x+1)^2-1)}$$

Pour éviter toute équivoque, on peut prendre $m = n =$ à un nombre infini (quoique l'égalité des nombres m et n ne soit pas absolument nécessaire), mais il faut continuer la suite jusqu'à ce que m soit $= x$, c'est à dire à l'infini. Tous ces termes

$$\frac{(a-1)(16m^2-1)-2a^m}{a^m(16m^2-1)} + \frac{(a-1)(16(m-1)^2-1)-2a^{m-1}}{a^{m-1}(16(m-1)^2-1)} + \text{etc.}$$

in infin., pris ensemble exprimeront l'aire du cercle dont le diamètre est $= 1$. Si l'on prend pour m un nombre entier affirmatif et fini, et que l'on prenne de cette suite autant de termes que le nombre m contient d'unités, la somme de ces mêmes termes approchera d'autant plus de l'aire du cercle dont le diamètre est 1, que le nombre m sera plus grand. Si vous doutez encore, M., de ce que j'avancé, je suis prêt à vous en envoyer la démonstration. Au reste, je crois bien que cette suite est, comme vous remarquez, un peu différente de celles que vous avez considérées autrefois, et c'est à cause de cela que je vous l'avois communiquée pour servir d'exemple de ce qu'il est quelquefois difficile de juger, si tel nombre et la véritable somme de telle suite.

J'ai, depuis longtems, la solution de ce problème: Dans l'équation $n^3 + a n^2 + b n + c^2 = q^2$ tous les nombres étant rationels, a, b, c sont donnés, n et q sont ceux que l'on demande. Ma solution satisfait à tous les cas possibles de l'équation, à la réserve de ces deux

$$a = \frac{b^2}{4c^2} \text{ et } a = \frac{8c^4 + b^3}{4bc^2}.$$

Je souhaite de savoir si ces mêmes cas seront exceptés de la solution que vous trouverez. Cependant il n'y a rien qui presse et vous pourrez différer de répondre à cet article tant qu'il vous plaira.

Goldbach.

P.S. 1. Le problème de M. Euler paroît plus général si on le conçoit en ces termes: Délivrer des signes radicaux la différentielle

$$dy\,(y^{\frac{n}{mn-n+1}} + 1)^{\frac{n-pn-1}{n}}$$

où m, n, p soient des nombres entiers quelconques. Dans le cas que nous avons considéré jusqu'ici, on suppose $m = p = 1$.

P.S. 2. Ma lettre ayant été retardée de quelques jours, j'en profite pour y faire encore cette addition. Je me souviens d'avoir trouvé, dans les Elémens des mathématiques de M. Wolf, deux démonstrations par lesquelles il fait voir que $\int \frac{dx}{1+x^2}$ est l'intégrale de l'aire du cercle dont le diamètre est $= x$; il y ajoute qu'ayant communiqué ces démonstrations à M. Leibniz, celui-ci les avoit approuvées avec cette clause que la démonstration dont il s'agit pouvoit se trouver d'une manière bien plus aisée. Ce préambule, qui d'ailleurs seroit superflu, servira peut-être à exciter votre attention sur la méthode dont je me sers pour réduire la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{(x - x^2)}}$ à $\frac{4dz}{1+zz}$, et qui ne consiste que dans la simple substitution de

$$x = 4(z^{-1} + z)^{-2}.$$

LETTRE LVI.

D. Bernoulli à Goldbach.

═

Sommaire. Critique de la solution de G. du problème d'Euler, et d'une intégration de Hermann. Problème indéterminé de la lettre 55ème.

St.-Pétersbourg ce 6 (17) avril 1730

Il y a des erreurs de calcul dans votre solution du problème de M. Euler. Dans l'exemple que vous alléguez, vous dites que, si l'on suppose $x = (z - 1) : v^{\frac{1}{n}}$, l'expression irrationelle $\frac{dx}{(x^3+1)^{\frac{1}{3}}}$ se change en cette rationelle $\frac{-(z-1)dv+vdz}{n(z+1)v}$. Si vous voulez, M., vous donner la peine de repasser vos calculs, vous trouverez, au lieu de cette dernière formule, cette autre irrationelle $\frac{-(z-1)dv+vdz}{n((z-1)^n+1)^{\frac{1}{n}}v}$. Voici ma solution, avec toute la méthode: Je pose premièrement $x^n = z$, et ainsi j'ai

$$\frac{dx}{(x^n+1)^{\frac{1}{n}}} = \frac{dz}{n(z^n+z^{n-1})^{\frac{1}{n}}}.$$

Il est maintenant facile de rendre cette dernière formule rationelle; on n'a qu'à poser $z^n + z^{n-1} = s^n z^n$, c'est à dire $z = \frac{1}{s^n - 1}$; et alors on obtient $\frac{dx}{(x^n+1)^{\frac{1}{n}}} = \frac{-ds}{ss - s^{2-n}}$. Il paroît de cette solution qu'il n'est pas nécessaire que n soit un nombre entier, car posé $n = \frac{f}{m}$, on peut faire $s = t^m$ et on aura $\frac{dx}{(x^n+1)^{\frac{1}{n}}} = \frac{m\,dt}{t^{m+1} - t^{m+1-f}}$. Quant à la formule plus générale dont vous faites mention savoir

$$dy\,(y^{n:(mn-n+1)} + 1)^{(n-np-1):n},$$

si les nombres m, n, p sont supposés entiers, je doute si l'on pourra jamais la rendre rationelle dans cette supposition générale: Cependant mon père m'a marqué, depuis, une autre formule qu'on peut rendre généralement rationelle et qui comprend la présente en question comme un cas particulier, savoir celle-ci $\frac{dx}{(ax^n + bx^m)^{\frac{1}{n}}}$. Vous avez raison, M., de dire que les coefficiens ne rendent pas la formule plus difficile; mais il ne faut pas, à mon avis, laisser de les mettre d'abord, sauf à tout autre de les exterminer, s'il le veut: et cela d'autant moins qu'on ne sauroit réduire cette formule $\frac{dx}{(x^n+1)^{\frac{1}{n}}}$ à ces cas particuliers $\frac{dy}{ay}$ ou $\frac{dy}{b^{\frac{1}{n}}}$. Je ne suis pas de votre avis quand vous dites, M., que M. Hermann a raison d'affirmer que la formule $dv = x^{mn-1}\,dx(a + bx^m)^p$ est intégrable généralement, lorsque n est un nombre entier affirmatif: car on voit bien que M. Hermann n'admet pas les intégrations logarithmiques, puisque, sans cela, il ne répèteroit pas à tout bout de champ sa distinction d'affirmatif et de négatif. Qu'il fasse donc, par ex., $n = 1$ et $p = -1$, la formule qu'il prétend être intégrable sera

$\frac{x^{m-1}dx}{a+bx^m}$ qu'on ne sauroit intégrer sans logarithmes ou sans la quadrature de l'hyperbole, non plus que p. ex. $\frac{dz}{1-zz}$; ou bien qu'il suppose $p = -2$, $p = -3$ etc., ce sera toujours la même chose. Par la même raison on ne sauroit dire que l'équation est toujours intégrable, lorsque $-n-p$ est $=$ à un nombre entier affirmatif, ainsi si $n = 2$ et $p = -3$, ce cas n'est point intégrable: même tant il est loin que cette règle soit généralement vraie, que je la crois plutôt généralement fausse. Ce seroit la même chose de ses autres règles. Je ne sais pas bien ce que M. Hermann veut dire par ces paroles „hoc autem fieri nequit, nisi n sit numerus integer et p quoque, sed negativus:" s'il entend par là que $-n-p$ ne sauroit faire un nombre entier sans cela, il est bien clair qu'il a tort, et s'il veut dire que sa formule n'est pas intégrable sans la même condition, il se trompe encore, car par ex. la formule est intégrable si $p=2$ et $n=\frac{1}{2}$, car on auroit $dv = x^{-\frac{1}{2}m-1}dx(a+bx^m)^2$ que tout le monde voit être intégrable, non obstant que ni n ne soit un nombre entier, ni p négatif: il n'est pas nécessaire non plus que p soit un nombre entier, car soit p. ex. $n = 2$, et $p = \frac{1}{3}$, on obtiendra cette formule

$$dv = x^{2m-1}\,dx(a+bx^m)^{\frac{1}{3}}$$

dont l'intégrale est

$$v = \left[\tfrac{3}{4}(a+bx^m)^{\frac{4}{3}} - \tfrac{3}{7}(a+bx^m)^{\frac{7}{3}}\right]\cdot\frac{-aa}{bbm} + C\cdot$$

Si je n'ai pas bien calculé, votre bonté y suppléera, n'ayant pas le tems de répéter le calcul, ou pour mieux dire, n'en ayant pas la patience. Voici maintenant, M., mon sentiment sur cette formule $dv = x^{mn-1}\,dx\,(a+bx^m)^p$, savoir, qu'on peut toujours la rendre rationelle, pourvu que les nombres

*

n et p ne soient pas tous les deux rompus en même tems, et par conséquent on peut toujours, en ce cas, ou en donner l'intégration absolue, ou la réduire aux quadratures de l'hyperbole et du cercle. Cette seule règle contient tous les cas intégrables connus, et je crois même qu'elle est réciproque, c'est à dire que, hors de ce cas, il n'y en a point d'intégrables: Je n'ai pourtant pas encore assez examiné cette conjecture.

Il y a deux méthodes dont chacune donne une infinité de valeurs différentes pour n et q dans l'équation toute composée de nombres rationels $n^3 + ann + bn + cc = qq$; si p. ex. on pose $a = b = c = 1$, on peut prendre $n = -\frac{3}{4}$, ou $n = \frac{561}{400}$ etc. ce qui donne $q = \frac{5}{8}$, ou $q = \frac{21359}{8000}$ etc. L'une de ces méthodes s'étend jusqu'à donner un nombre infini de valeurs pour n et q dans cette équation:

$$an^4 + bn^3 + cnn + en + ff = qq$$

(je donne un coefficient au premier terme, parce qu'en effet, la formule en devient plus générale); mais chacune de ces méthodes donne n ou $q = 0$, ou $= \infty$ dans les cas

$$a = \frac{bb}{4cc} \text{ et } a = \frac{8c^4 + b^3}{4bcc},$$

pour votre équation s'entend, qui sont les cas que vous avez exceptés, car on voit bien que, quant au second cas, de $a = \frac{8c^4 + b^3}{4bcc}$, vous l'avez voulu mettre de même au lieu de $a = \frac{4c^4 + b^3}{4bcc}$, comme vous avez écrit*). — Vous dites, M., qu'on peut réduire la formule différentielle $\frac{dx}{\sqrt{(x - xx)}}$ à cette autre $\frac{4dz}{1 + zz}$ par la simple substitution de $x = 4(z^{-1} + z)^{-2}$,

*) Corrigé, plus tard, dans le livre des copies, par la main de Goldbach.

c'est à dire $x = 4\left(\frac{z}{1+zz}\right)^2$. Là-dessus j'aurai l'honneur de vous dire qu'il y a une substitution encore plus simple qui change $\frac{dx}{\sqrt{(x-xx)}}$ en $\frac{2dz}{1+zz}$, savoir celle de $x = \frac{1}{1+zz}$. On pourroit demander ici une substitution pour x qui change la formule $\frac{dx}{\sqrt{(x-xx)}}$ en $\frac{dz}{1+zz}$ sans coefficient, ou eu $\frac{ndz}{1+zz}$ avec la coefficient donné n. Ce problème seroit fort difficile à résoudre à celui qui ne voulût consulter que l'analyse, mais la question devient plus facile en la considérant synthétiquement.

Dan. Bernoulli.

LETTRE LVII.

GOLDBACH à D. BERNOULLI.

SOMMAIRE. Défense de Goldbach.

Moscou ce 1 mai (n. st.) 1730.

Il n'y a point d'erreur de calcul dans ma solution du problème de M. Euler. Vous en serez persuadé, M., quand vous verrez que $dx(x^n+1)^{-\frac{1}{n}}$, en vertu de la substitution $x=(z-1)\,u^{-\frac{1}{n}}$, ne devient pas $\frac{-(z-1)du+udz}{n((z-1)^{-n}+1)^{\frac{1}{n}}u}$ comme vous pensez, mais plutôt $\frac{-(z-1)du+nudz}{n((z-1)^{n}+u)^{\frac{1}{n}}u}$ qui est l'expression la plus rationelle du monde, puisqu'elle ne diffère pas de celle que je vous avois marquée dans ma lettre $\frac{-\frac{1}{n}(z-1)du+udz}{n(z+1)u}$. Je reconnais pourtant que votre solution du même problème est plus courte et, par conséquent, bien meilleure que la mienne.

La différentielle $\frac{dx}{(x^n + x^m)^{\frac{1}{n}}}$, si on y fait $x = y^{\frac{nn}{m}}$, se réduit à $\frac{n^2 y^{-1} dy}{m(1-y^n)^{\frac{1}{n}}}$ qui, par la substitution de $y = (1-v^n)^{\frac{1}{n}} v^{-1}$, devient $\frac{nn}{m}(-v^{n+1}(1-v^n)^{-1}dv - dv)$.

Je suis bien aise, M., de voir que vous doutez si la différentielle $dy\,(y^{\frac{n}{mn-n+1}} + 1)^{\frac{n-pn-1}{n}}$ peut se réduire à une expression rationelle (les nombres m, n, p étant entiers), et cette circonstance me persuade que le problème vaut son prix. Voici la solution que j'en ai trouvée:

1° J'abrège un peu la formule en mettant m pour $m - 1$, et p pour $p - 1$ ce qui fait

$$\frac{dy}{(y^{\frac{n}{mn+1}} + 1)^{\frac{pn+1}{n}}}.$$

2° Je prends $y = x^{mn+1}$, $dy = (mn + 1)\,x^{mn}\,dx$, et mettant 1 à la place du coefficient $mn + 1$, inutile en cette occasion, j'obtiens

3° la différentielle

$$\frac{x^{mn}\,dx}{(x^n + 1)^{\frac{pn+1}{n}}}$$

dans laquelle je suppose $x = \frac{z-1}{u^{\frac{1}{n}}}$ prenant toujours pour u la formule que j'ai déterminée dans ma précédente lettre, ce qui produit

4° cette expression

$$\frac{-(z-1)^{mn-1}\,u^{p-m-1}\,du + n(z-1)^{mn}\,u^{p-m}\,dz}{n(z+1)^{\frac{pn+1}{n}}}$$

où il suffit que mn, np, et $p-m$ soient des nombres entiers ou 0. Vous voyez bien, M., que la différentielle

$$\frac{x^{mn}\,dx}{(x^n+1)^{\frac{pn+1}{n}}}$$

comprend aussi celle de M. votre père (exprimée comme ci-dessus), si on fait $mn = -1$ et $p = 0$.

C'est la solution à laquelle j'étois parvenu suivant ma première route. Pour couper court, on peut d'abord faire $n =$ à un nombre rompu $\frac{e}{f}$ où e et f soient entiers, $x = (v^e - 1)^{-\frac{f}{e}}$ ce qui change la formule

$$\frac{x^{mn}\,dx}{(x^n+1)^{\frac{np+1}{n}}} \text{ en } -f(v^e-1)^{p-m-1}\,v^{e-ep-1}\,dv$$

qui sera toujours rationelle si $p - m$ et ep sont des nombres entiers ou 0.

Il est vrai que la seconde formule que j'avois marquée pour l'intégrale de $(1 - x^{\frac{1}{n}})^p\,dx$ ne détermine rien dans le cas de $n = 1$, $p = -1$; mais dans les hypothèses $n = 1$, $p = -2$, $p = -3$ etc. on aura toujours pour intégrale

$$-\frac{1}{p+1}(1 - x^{-1})^{p+1},$$

et je pense que, lorsqu'une proposition est généralement vraie, à la réserve d'un seul cas, que tout le monde voit, d'abord il n'est pas besoin de faire expressément cette exception, — comme quand on dit que $x^n dx$ est toujours intégrable, l'exception du cas $n = -1$ y est sousentendue. Il me semble que feu M. votre frère s'est expliqué de la même manière sur ce sujet dans un endroit de l'Acta Eruditorum.

Je suis presque d'accord avec vous, M., sur la remarque *hoc autem fieri nequit* etc., cependant je crois que vous poussez un peu trop loin votre critique. Quand M. Hermann veut que $-n-p$ soit $=$ à un nombre entier et affirmatif, il exige cette condition comme nécessaire pour obtenir l'intégrale algébrique déterminemment à la formule qu'il explique dans le même endroit, car il n'a pas oublié de dire que $dx(1-x^{\frac{1}{n}})^p$ est intégrable dans tous les cas de $p=$ à un nombre entier.

Je ne sais comment j'ai écrit dans ma lettre $4c^4$ au lieu de $8c^4$; la solution que j'avois marquée dans mon livre donne expressément

$$n=\frac{bb-4acc}{4cc} \text{ et } q=\frac{b^3-4abcc+8c^4}{8c^3}.$$

La substitution de $x=\frac{1}{1+zz}$ est bonne pour réduire $\frac{dx}{\sqrt{(x-xx)}}$ à la différentielle négative $\frac{-2dz}{1+zz}$, mais elle ne produit pas $\frac{2dz}{1+zz}$ comme vous l'aviez marqué. Le problème de réduire $\frac{dx}{\sqrt{(x-xx)}}$ à $\frac{ndz}{1+zz}$ me paroît très beau, et je suis curieux d'en savoir la solution que j'estimerai beaucoup si elle consiste en substitutions algébriques, mais fort peu, s'il faut avoir recours à d'autres expédiens. Cependant il m'a été facile de voir que $\frac{ndv}{1+vv}$ se change en $\frac{-2ndz}{1+zz}$ par la seule substitution de $v=\frac{1}{2}(1-zz)z^{-1}$; comme au contraire $\frac{ndz}{1+zz}$ se change en $\frac{-\frac{1}{2}ndv}{1+vv}$ par la substitution de

$$z=-v\pm\sqrt{(vv+1)},$$

d'où l'on peut tirer une infinité de coefficiens

$$n, -2n, +4n, -8n \text{ etc. et } n, -\frac{n}{2}, +\frac{n}{4}, -\frac{n}{8}, \text{ etc.}$$

Goldbach.

LETTRE LVIII.

D. Bernoulli à Goldbach.

Sommaire. Rétraction de Bernoulli. Reponse à la lettre précédente.

St.-Pétersbourg ce 30 avril v. st. 1730.

Vous avez raison de dire qu'il n'y a point d'erreur de calcul dans la solution de votre pénultième, et je me sais fort mauvais gré d'avoir pu y en soupçonner. A vous dire vrai, M., cette valeur que vous donnez à v par une suite m'en a imposé, ne pouvant concevoir que, dans une chose que j'avais résolue par une substitution fort simple, on pût s'embarquer sur cette grande mer pour la rendre moins générale qu'elle peut être, puisque vous supposiez n être un nombre entier ce qui n'est point nécessaire. J'espère donc, M., que vous excuserez la légèreté avec laquelle j'ai jugé de votre solution, et je l'espère avec d'autant plus de confiance, qu'effectivement on peut se passer de cette suite sans s'écarter d'un pas de votre première méthode qui sans fard n'a d'autre défaut que celui d'être trop ingénieuse, en vous forgeant des difficultés là où il n'y en avoit plus; car après avoir changé l'expression $dx(x^n+1)^{-\frac{1}{n}}$ en celle-ci $\frac{-(z-1)dv+nv\,dz}{n((z-1)^n+v)^{\frac{1}{n}}v}$, il ne reste plus rien à faire qu'à rendre rationelle la quantité $((z-1)^n+v)^{\frac{1}{n}}$, ce qu'on peut supposer être connu à tout le monde, puisque v n'est plus que d'une dimension. Qu'on pose $((z-1)^n+v)^{\frac{1}{n}}=p$, c'est à dire $v=p^n-(z-1)^n$, et tout sera fait. De cette manière il vaut mieux poser simplement z au lieu de $z-1$, et selon votre méthode il faudroit d'abord poser $x=(p^n-z^n)^{-\frac{1}{n}}z$, ou bien $x=(p^n z^{-n}-1)^{-\frac{1}{n}}$, ce qui change la formule proposée $dx(x^n+1)^{-\frac{1}{n}}$ en celle-ci (si j'ai bien calculé)

$$\frac{p^{n-1}z^{-n}dz-p^{n-2}z^{-n+1}dp}{p^n z^{-n}-1},$$

ou bien $\frac{p^{n-1}dz-p^{n-2}z\,dp}{p^n-z^n}$ qui est rationelle si n est un nombre entier, et qui se change facilement en une rationelle si n est un nombre rompu, comme vous savez. Ainsi, M., quand vous considérerez bien votre solution, vous trouverez qu'elle ne cède en rien à la mienne, ni par rapport à la généralité, ni par rapport à la brièveté ou simplicité; j'avoue même, pour vous donner une satisfaction entière là-dessus, que la vôtre mérite toute la préférence, car vous donnez dans une seule formule une infinité de solutions différentes, puisqu'il y a deux indéterminées, savoir z et p, ce qui fait que, dans les cas particuliers, on peut choisir une valeur qui rende la solution la plus simple, et même plus simple que la mienne. En effet, si l'on fait $p=1$, vous changez $\frac{dx}{\sqrt[n]{(1+x^n)}}$ en $\frac{dz}{1-z^n}$ qui est plus simple que la mienne $\frac{-s^{n-2}ds}{s^n-1}$ et, ce qui est remarquable, vous obtenez ma formule en faisant $p = zz$. Si vous aviez parié comme moi, vous eussiez gagné une infinité de ducats, puisque vous donnez une infinité de solutions. J'espère qu'après cet aveu, vous serez, M., content de moi; car il semble que vous étiez un peu fâché, c'est en quoi vous aviez, si j'ose le dire, tort, car je croyois pouvoir vous écrire librement; je ne considère notre commerce que comme un entretien familier qui ne tirera jamais à conséquence, et si vous ne produisez pas mes lettres, vous ne devez pas appréhender que je le fasse, puisque j'en garde fort rarement une copie. Je n'ai pas le tems maintenant de penser à votre problème de réduire à une expression rationelle la formule

$$dy\,(y^{\overline{mn}\;\frac{n}{n+1}}+1)^{\frac{n-pn-1}{n}},$$

et ce que j'en avois dit dans ma précédente n'étoit fondé que sur une première apparence: Cependant je vous promets d'y penser une autre fois. Je ne crois point avoir critiqué à tort M. Hermann, ni vous, M., si vous voulez vous ranger de son côté. Vous dites, p. ex., que la formule $dv = (1 - x^{\frac{1}{n}})^p dx$ est intégrable toutes les fois que n est un nombre entier affirmatif; là-dessus je vous ai allégué que, si n est $= 1$, et $p = -1$, cela n'est pas. Vous croyez que c'est là l'unique exception; je souhaiterois donc que vous me donniez l'intégrale de $(1 - x^{\frac{1}{2}})^{-2} dx$, où $n = 2$ et $p = -2$, ou de $(1 - x^{\frac{1}{3}})^{-1} dx$ etc. Voici, M., selon ma règle, l'exception générale: *si n est un nombre entier affirmatif, p ne sauroit être un nombre entier négatif égal ou* *moindre que* n; et ainsi, si l'on suppose $n = 5$, on ne peut point donner l'intégrale dans les cas $p = -1$, $p = -2$, $p = -3$, $p = -4$, $p = -5$, mais on le peut dans tous les autres possibles. Je ne sais si votre méthode vous fait connoître toutes ces circonstances: si vous le souhaitez, je vous communiquerai la mienne, et vous verrez que je n'ai pas dit légèrement ce que j'ai critiqué là-dessus dans ma précédente.

Vous dites, M., que l'expression $\frac{dx}{\sqrt{(x-xx)}}$ est changée non en $\frac{2dz}{1+zz}$, comme je prétends, mais en $\frac{-2dz}{1+zz}$, par la substitution de $x = \frac{1}{1+zz}$. Cette remarque ne me paroît pas trop bien fondée, car, à proprement parler, $\frac{dx}{\sqrt{(x-xx)}}$ donne $\frac{\pm 2dz}{1+zz}$, puisque $\sqrt{(x-xx)}$ a deux racines, et que par conséquent on doit considérer $\frac{dx}{\pm\sqrt{(x-xx)}}$. Quoique ceci soit généralement vrai et très clair en soi même, on peut pourtant prouver particulièrement dans cet exemple que le signe ambigu $\pm$ doit être sousentendu; car posé que $\frac{dx}{\sqrt{(x-xx)}}$ se change, comme vous dites, simplement en $\frac{-2dz}{1+zz}$; faites $z = -s$ et vous aurez $\frac{+2ds}{1+ss}$ et cependant on a

$$x = \frac{1}{1+zz} = \frac{1}{1+ss},$$

de sorte que la substitution de $x = \frac{1}{1+ss}$ change aussi la quantité $\frac{dx}{\sqrt{(x-xx)}}$ en $\frac{+2ds}{1+ss}$. Il n'y a rien à répondre, comme je crois; cependant comme il n'est pas impossible de donner plus d'une substitution, vous pourrez supposer $x = \frac{zz}{1+zz}$, et vous obtiendrez, suivant vos principes, $\frac{dx}{\sqrt{(x-xx)}} = \frac{+2dz}{1+zz}$. Voici, M., la solution du problème de changer $\frac{dx}{\sqrt{(x-xx)}}$ en $\frac{nds}{1+ss}$ qui sera telle que vous la demandez dans tous les cas particuliers, quoique dans l'expression générale, il y ait des quantités imaginaires, ce qui n'est pas rare dans l'algèbre et ne doit causer aucune difficulté. Soit $\frac{dx}{\sqrt{(x-xx)}}$, et qu'on pose

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{(zz+1)}}, \text{ et on aura } \frac{dx}{\sqrt{(x-xx)}} = \frac{dz}{1+zz},$$

et si l'on fait $z = \frac{(1+s\sqrt{-1})^n - (1-s\sqrt{-1})^n}{[(1+s\sqrt{-1})^n + (1-s\sqrt{-1})^n]\sqrt{-1}}$, on aura $\frac{dx}{\sqrt{(x-xx)}} = \frac{dz}{1+zz} = \frac{nds}{1+ss}$. Ainsi, si l'on veut changer $\frac{dx}{\sqrt{(1+xx)}}$ en $\frac{2ds}{1+ss}$, il faut supposer $x = \frac{2s}{1-ss}$; et si c'est en $\frac{3ds}{1+ss}$, il faut faire $x = \frac{3s-s^3}{1-3ss}$ etc.

Je ne sais si vous laisserez passer la substitution générale pour algébrique, sans quoi vous dites que vous l'estimerez fort peu; je pourrai, en ce cas, donner des substitutions générales par des suites; mais en tout cas, je ne veux pas vous forcer à avoir quelque estime pour une découverte qui n'est pas grand'chose.

Je vous prie de faire mille complimens à M. Schumacher; sa dernière lettre m'a fait un véritable plaisir, parce que je vois que je pourrai désormais me reposer sur lui. J'aimerois pourtant mieux partir au premier juillet, si je pouvois le faire sans rompre les mesures de M. le Président.

Dan. Bernoulli.

LETTRE LIX.

GOLDBACH à D. BERNOULLI.

SOMMAIRE. Considérations ultérieures sur le même sujet

Moscou le 1 juin 1730.

J'ai lu avec plaisir le beau commentaire que vous avez fait sur ma solution du problème de M. Euler. Comme je ne m'étois jamais appliqué à résoudre un problème de ce genre, il faut pardonner si je ne considérois pas bien toute l'étendue de ma méthode. Là-dessus je me souviens d'avoir trouvé, dans les Acta Eruditorum, (il y a bien 12 ans), au sujet d'une méthode rendue plus générale, deux expressions différentes dont voici à peu près le sens: Si p. ex., un autre a rendu ma méthode plus générale, je dis alors *nullum esse theorema quod non additione aliqua generalius fieri possit*; si c'est moi-même qui a rendu la méthode d'autrui plus générale, je dis *Newtonum non omnem amplitudinem quam* *poterat theoremati suo dedisse*. Cependant je fais, en cette occasion, un usage fort différent de ces expressions, et bien loin de vous payer de la première, j'avoue sans peine que je suis à votre égard dans le cas de la seconde.

Si auparavant je me suis écarté mal à propos du chemin qu il falloit suivre, je crois du moins aller droit au but par la méthode que je vais dire. Je mets en fait que les formules

$$A \ldots \frac{dx}{(x^a+1)^{\frac{1}{n}}}, \quad B \ldots \frac{u^b du}{(u^c+1)^{\frac{1}{n}}}, \quad C \ldots \frac{dv}{(v^e+v^f)^{\frac{1}{n}}}$$

ne sont qu'une même chose, car si le numérateur aussi bien que le dénominateur de C est multiplié par $v^{-f:n}$ on aura $\frac{v^{-f:n}dv}{(v^{e-f}+1)^{\frac{1}{n}}}$ qui appartient à la formule B, et si dans B on fait $u = (b+1)^{\frac{1}{b+1}} x^{\frac{1}{b+1}}$, il en résulte

$$\frac{dx}{\left((b+1)^{\frac{c}{b+1}} x^{\frac{c}{b+1}} + 1\right)^{\frac{1}{n}}}$$

qui dépend de la formule A; de sorte que toute la difficulté est de savoir en quels cas la formule $A \ldots \frac{dx}{(x^a+1)^{\frac{1}{n}}}$ peut devenir rationelle, et il se trouve qu'en faisant

$$x = (u^a - z^a)^{-\frac{1}{a}} z,$$

A devient rationelle dans tous les cas de $\frac{a-n}{an} =$ à un nombre entier ou 0. Si donc on pose $\frac{a-n}{an} = m =$ à un nombre entier quelconque ou $= 0$, la formule

$$D \ldots \frac{dx}{\left((x^{\frac{n}{1 \pm mn}} + 1)\right)^{\frac{1}{n}}}$$

deviendra toujours rationelle par ladite méthode. Vous voyez bien, M., qu'il y a une différence très considérable entre la formule D et cette autre $F \ldots \frac{dv}{(v^n + vg)^{\frac{1}{n}}}$ que vous aviez pris, ce me semble, pour plus générale que $G \ldots \frac{dx}{(x^n+1)^{\frac{1}{n}}}$, mais qui s'y réduit par une simple substitution, comme je viens de dire, et ne représente que le seul cas de $m = 0$ dans la formule D. Tout cela s'accorde parfaitement avec ce que je vous avois écrit touchant la formule

$$\frac{x^{mn}\,dx}{(x^n+1)^{\frac{np+1}{n}}}.$$

Je suis encore d'opinion que, quand on exprime l'intégrale d'une différentielle par une formule générale, on n'est pas obligé d'avertir que l'on en excepte tous les cas particuliers où le dénominateur de quelque coefficient devient $= 0$, parce que c'est une chose assez connue; on ne sauroit donc faire usage de la première formule que j'ai donnée pour intégrale de $dx(1-x^{\frac{1}{n}})^p$ dans ma lettre du 20 mars, si n est un nombre entier négatif, et l'on ne sauroit faire usage de la seconde formule si $p+n$ est un nombre entier affirmatif.

Je n'ai pas encore examiné la solution que vous donnez, M., pour réduire $\frac{dz}{1+zz}$ à $\frac{n\,dv}{1+vv}$, cependant elle me paroît très belle, et je souhaiterois que vous voulussiez proposer ce même problème à quelques uns de vos amis pour voir s'ils le résoudroient avec la même facilité, et si vous croyez qu'il leur paroîtra trop facile, on peut y obvier provisionellement en leur offrant le problème de changer $\frac{dz}{1+zz}$ en $\frac{nv^p\,dv}{1+vv}$; n et p étant des nombres constans quelconques, il y a des cas particuliers dont la solution est assez facile, p. ex. si le nombre donné $n = -\sqrt{-1}$ et $p = -1$.

Pour revenir à votre solution, quelque facile qu'elle vous semble à cette heure, certaines circonstances me persuadent que vous l'auriez jugée plus difficile au tems où parurent vos Exercitations mathématiques. Voici la manière dont je crois que vous avez cherché ladite solution: Ayant fait $z =$ à la fraction indéfinie $\frac{av + bv^3 + cv^4 + \text{etc.}}{1 + \alpha v^2 + \beta v^3 + \text{etc.}}$, vous avez déterminé les constantes a, b, c, etc., α, β, etc. par les conditions du problème, après quoi vous avez exprimé le numérateur et le dénominateur de cette fraction par des termes généraux dans lesquels la quantité v est considérée comme constante, et n comme l'exposant variable des termes.

Voici une autre découverte sur la formule $\frac{dx}{(x^a + 1)^{\frac{1}{n}}}$; c'est qu'elle peut toujours devenir rationelle pourvu que

$$a = \frac{2}{1 \pm m}, \quad n = \frac{1 \pm p}{2},$$

où m et p soient des nombres entiers ou 0. Cette formule est très différente de la formule D, parce qu'ici le nombre n n'entre pas dans la composition du nombre a.

Item la formule

$$\frac{dx}{\left(x^{\frac{1}{1 \pm m}} + 1\right)^{\frac{1}{n}}}$$

devient toujours rationelle si m est un nombre entier ou 0.

Je vous envoie ma dissertation ci-jointe où je n'ai ajouté que les deux ou trois exemples que vous savez; ayez la bonté, M., d'ordonner que nos imprimeurs la traitent aussi favorablement qu'ils pourront. Goldbach.

LETTRE LX.

D. Bernoulli à Goldbach.

Sommaire. Réponse à la lettre précédente. Problème d'Hydrodynamique. Transformation des formules différentielles.

St.-Pétersbourg ce 17 juillet n. st. 1730.

Je n'aurois pas cru, il y a quelques mois, de vous écrire encore de St.-Pétersbourg au tems où nous sommes; cependant m'y voici encore. Vous savez sans doute, M., vous qui êtes à la source, ce qui s'est passé à mon égard. Je vous prie de me continuer vos bons offices auprès de M. le Premier Médecin et de faire en sorte qu'il m'envoie bientôt mon nouveau contrat signé de sa main tel que je l'ai conçu. J'espère que m'étant rendu du premier coup aux offres qu'il a eu la bonté de me faire, il ne voudra pas me faire trouver des difficultés sur quelques bagatelles; s'il s'en trouvoit pourtant, contre toute mon attente, je serois bien aise d'en être

*

averti au plus tôt. Voila, M., ce que je vous prie de lui dire de ma part en lui rendant mes témoignages de respect et d'obéissance.

Je viens maintenant à la lettre que vous m'avez fait l'honneur de m'écrire et qu'il vous a plû de dater du 1er avril n. st.*). Je sens bien, M., que vous me donnez par-ci, par-là sur les doigts, mais vous le faites si finement et si agréablement que je m'en suis diverti et que je vous en ai toutes les obligations. Il est vrai que les deux expressions que vous avez tirées des Acta Lipsiensia paroissent fort différentes; je crois pourtant qu'il peut y avoir des cas où chacune peut être bien employée, quand ce seroit d'une même personne. Quant à la première, elle est encore à mon avis trop douce par rapport aux généralités qu'ont affectées MM. Varignon, H . . . et quelques autres, et qui rendent quelquefois les propositions non seulement embarassées et inintelligibles presque, mais encore ridicules, attribuant à la nature des propriétés contradictoires, sans qu'ils enseignent rien de nouveau par ces généralités, la proposition généralissime n'étant pas plus difficile que le cas le plus simple. La seconde expression dont vous faites mention, M., pourroit à mon avis être de mise, quand par la généralité la proposition non seulement ne perd rien de sa beauté et de sa simplicité, mais qu'elle en prend même davantage et que la nature de la question en est mieux éclaircie et expliquée: Ainsi, p. ex., je ne doute pas que vous ne la trouvassiez, M., bien placée, si quelqu'un ayant dit *planetarum superiorum tempora periodica esse in sesquiplicata ratione eorundem distantiarum a sole*, un autre répli-

*) Cette faute ne se trouve pas dans la minute que j'ai sous les yeux.

quoit que cette proposition peut être rendue plus générale en parlant *de temporibus periodicis singulorum planetarum circa solem.* Je ne sais quel instinct secret m'a engagé à faire l'apologie de celui qui peut avoir écrit les deux passages en question dont vous avez été assez frappé pour ne pas les oublier dans 12 ans de tems.

Vos découvertes sur la formule $\frac{dx}{(1+x^{a})^{\frac{1}{n}}}$ sont très belles, et surpassent tout ce que nous autres avons trouvé là-dessus, puisque vous montrez qu'elle peut être rendue rationnelle toutes les fois que $a = \frac{n}{1 \pm mn}$ où m est un nombre entier quelconque, de sorte que, quand on fait $m = 0$, il en résulte le cas qui nous avoit été connu. M. Euler en a été aussi très satisfait. Ces autres valeurs $a = \frac{2}{1 \pm m}$ pour les cas de $n = \frac{1 \pm p}{2}$ et de $a = \frac{1}{1 \pm m}$ que vous avez trouvées, peuvent aussi être d'une grande utilité dans le calcul intégral (je ne vois pas pourquoi vous ne mettez pas simplement m ou p au lieu de $1 \pm m$, $1 \pm p$, disant que m et p peuvent être tels nombres entiers qu'on voudra; — pardon à la naïveté de la remarque!) et je les ai proposées à M. Euler pour qu'il s'y exercé. Pour moi, je me suis entièrement plongé dans les eaux qui font mon unique occupation, et renoncé depuis quelque tems à tout ce qui n'est pas hydrostatique ou hydraulique. Je me flatte pourtant, M., que cela ne vous empêchera pas de me communiquer toujours vos belles découvertes, m'offrant de même, si cela peut m'en rendre moins indigne, de vous parler hydrostatique tant que vous demanderez grâce. Pour en faire le commencement, j'aurai l'honneur de vous dire, que j'ai fait, ces jours passés, quelque nouvelle découverte qui peut être d'un grand usage pour la structure des conduits des eaux, mais qui surtout apportera un nouveau jour à la physiologie; c'est d'avoir trouvé la statique des eaux courantes, science que personne n'a considérée avant moi, autant que je sache, et qui, quand même on auroit voulu l'entreprendre, seroit sans doute demeurée fort imparfaite, puisqu'on ne s'étoit pas encore avisé de ces principes dont je me sers et qu'un grand nombre d'expériences m'a fait trouver très justes. Il s'agit ici de trouver l'effort des eaux qui sont poussées avec une force quelconque par un tuyau quelconque. Voici un cas des plus simples:

Soit (Fig. 20) *AGHB* un vaisseau avec un tuyau cylindrique horizontal *LMPQ* dont le fond *PM* a une ouverture *on*; à ce tuyau est ajouté un autre tuyau vertical *SDCR*. Si on bouche l'ouverture *on*, et qu'on emplisse le tout d'eau jusqu'en *AB*, on sait que l'eau se mettra de niveau dans le tuyau vertical, jusqu'en *CD*, mais si l'on débouche l'ouverture *on*, de sorte que l'eau commence à couler à travers le tuyau horizontal d'une vitesse plus ou moins grande, selon que l'ouverture *on* est plus ou moins grande, je dis que la surface d'eau, dans le tuyau vertical, descendra comme jusqu'en *EF*, quoique la surface *AB* ne descende pas, soit que le vaisseau soit fort grand, soit qu'on y verse continuellement autant d'eau qu'il en écoule. Cela étant, il est clair que l'effort d'une eau courante est moindre que de l'eau dormante, et que ces efforts sont précisément comme *SF* à *SD*. Il étoit donc nécessaire que l'on déterminât au juste la hauteur de *SF*, et voici ce que j'ai trouvé par ma nouvelle théorie : Soit le cercle dont le rayon est *QL* ou *PM* au cercle de l'ouverture dont le rayon est *on*, comme n à 1; soit la hauteur $SD = a$, je dis qu'on trouvera toujours

$SF = \frac{nna-a}{nn}$; de sorte que s'il n'y avoit point de fond, c'est à dire si tout le tuyau étoit percé, la surface descendroit jusqu'en RS, marque que, dans ce cas, le tuyau horizontal ne souffre aucun effort, ce qui donne de nouvelles règles pour la structure des tuyaux qui conduisent l'eau, et ce que M. Bülffinger ne pouvoit s'imaginer jusqu'à ce que je lui en fis l'expérience en présence des autres Académiciens. Je faisois les expériences moyennant un cylindre très poli de fer que je me fis faire avec différens couvercles qui avoient des trous de différentes grandeurs tel qu'est $\alpha PM\beta$; au milieu du cylindre étoit soudé un petit bout de tuyau $\gamma RS\delta$ propre à embrasser un tuyau de verre $CRSD$. Toutes les expériences ont parfaitement réussi.

Mais je vois qu'il m'arrive la même chose qu'à ceux qui ont un procès, et qui veulent le conter à tout le monde. Pardonnez moi, M., cette digression, ou plutôt cette indiscrétion. Quant au problème de changer $\frac{dz}{1+zz}$ en $\frac{ndv}{1+vv}$, je vous prie de ne les pas croire ces circonstances qui ont voulu vous persuader qu'il m'auroit été difficile, du tems que parurent mes Exercitations. Comme tout le mystère ne dépend que des logarithmes, dont je savois parfaitement bien le calcul alors, je crois qu'il m'auroit aussi été également facile; mais je comprends bien quelles sont ces circonstances: c'est que vous croyez que j'aie employé les séries recurrentes, et véritablement on peut s'en servir, mais on peut aussi s'en passer; marque de cela, c'est que pour transformer p. ex. $\frac{dz}{1-zz}$ en $\frac{ndx}{1-xx}$, il faut poser $z = \frac{(1+x)^n-(1-x)^n}{(1+x)^n+(1-x)^n}$ qui n'a point de ressemblance avec les termes généraux des suites recurrentes. Quant au problème de changer

$\frac{dz}{1+zz}$ en $\frac{nv^p dv}{1+vv}$, on ne sauroit donner des substitutions générales, mais on peut bien donner des substitutions pour chaque valeur particulière de p. Ainsi, soit $p=1$, on changera $\frac{dz}{1+zz}$ en $\frac{nvdv}{1+vv}$ par la substitution de

$$z=\frac{1-(1+vv)^n\sqrt{-1}}{(1+vv)^n-\sqrt{-1}}.$$

Pour votre cas particulier de $n=-\sqrt{-1}$ et $p=-1$, il faut poser $z=\frac{\sqrt{-1}}{1+2vv}$. On parvient à ces substitutions sans aucune inconnue et en ne travaillant que synthétiquement, et chaque substitution à trouver ne coûte qu'une minute de tems. J'aurai l'honneur de vous entretenir sur ces sortes de problèmes quand j'aurai le plaisir de vous revoir; j'espère que ce sera dans peu. Je ne manquerai pas d'apporter tout le soin afin que votre dissertation soit bien imprimée.

Dan. Bernoulli.

LETTRE LXI.

GOLDBACH à D. BERNOULLI.

=

SOMMAIRE. Envoie un mémoire sur les lunules quarrables.

Moscou ce 17 juillet 1730.

J'espère que vous aurez reçu ma lettre du 1 juin. Voici une méthode nouvelle, comme je crois, de trouver des lunules quarrables; je vous prie de l'examiner et de la communiquer à MM. les Académiciens pour savoir s'ils jugent qu'elle mérite d'être publiée pour l'an 1728. Vous croirez d'abord, M., que cette méthode approche fort de celle que vous me communiquâtes, il y a quelques années, mais ces deux méthodes sont en vérité si différentes que, si l'une est vraie, l'autre doit être fausse. Vous n'avez qu'à considérer le cas des rayons donnés comme $\sqrt{3}$ à 1: non seulement vous verrez que la corde qu'on trouve par votre méthode n'est pas juste, mais aussi que les deux segmens semblables, qu'il faut trouver suivant votre méthode, ne sont ni compatibles avec les autres conditions qu'elle exige, ni nécessaires pour la solution du problème. Ces circonstances m'ont obligé à ne pas faire mention de cette méthode-là dans mon mémoire. J'attends votre sentiment sur tout cela.

Goldbach.

LETTRE LXII.

D. Bernoulli à Goldbach.

Sommaire. Sur différentes solutions du problème des lunules quarrables.

St.-Pétersbourg ce 24 juillet n. st. 1730.

Votre solution des lunules quarrables est très juste, et les deux que j'en ai données dans mes Exercitations le sont aussi. Je ne sais quelle solution je puis vous avoir communiquée, il y a quelques années*), car jamais je n'en ai trouvée d'autre que celles qui sont dans ce livre, et j'ai jugé par cette expression ou que vous avez oublié qu'elles y sont, ou que vous avez égaré les dites Exercitations. Je suis fâché de ne les avoir point chez moi les ayant prêtées à M. Verkerson. Cependant j'aurai l'honneur de vous en donner quelque idée, autant que ma mémoire me remettra les deux solutions. La première donc consiste, M., en ce que je démontre que, pour trouver une lunule quarrable, il

*) Voir les premières lettres de cette correspondance.

faut nécessairement se servir de deux secteurs de cercle égaux qui aient une même corde ou dont les moitiés aient un même sinus. De tels secteurs ont deux propriétés qui ne diffèrent que quant à l'énonciation, dont la première est que les arcs doivent être réciproquement proportionnels aux rayons, et l'autre, que les angles au centre sont réciproquement proportionnels aux quarrés des rayons. Je ne sais laquelle de ces deux propriétés j'aurai choisie, je crois pourtant que c'est la première, étant un peu plus simplement énoncée que la seconde. Enfin, par les formules que mon père a données, dans les Actes de Leipsic, pour la division ou multisection des arcs circulaires, j'ai satisfait généralement à cette condition, soit (ce dont je ne me souviens plus) en cherchant la corde commune, le rapport des rayons étant donné, soit que j'ai cherché l'autre rayon, l'un étant donné avec la corde. J'appelle cette solution générale, n'y ayant point de solution possible qui n'y soit comprise. J'ai vu, M., avec plaisir que nous nous sommes si bien rencontrés, et cet amour, que l'homme a naturellement pour soi-même, fait, si j'ose le dire, que je l'en estime davantage, et suis bien aise que vous voulez la donner dans nos mémoires, à condition s'entend que vous n'y changiez ni ajoutiez rien pour me citer, n'aimant pas trop que l'on me parle de mes Exercitations, sans quoi une telle citation me feroit beaucoup d'honneur. La seconde solution, quoique moins générale, me plaît autant que la première, y ayant un certain tour d'esprit que mon père approuvoit extrêmement, quand je la lui montrai: car j'étois à Bâle quand je la fis, et il y a bien 10 ans de cela. La voici: Je cherche dans un cercle donné (Fig. 21) la corde AB, laquelle étant repliquée n fois, et les deux extrémités étant jointes par la droite AD, le quarré sur AD soit égal aux quarrés sur AB, BC, etc. ou au simple quarré sur AB pris n fois. Ceci étant, imaginez vous qu'il y ait sur chaque côté AB, BC, etc. un arc de cercle semblable à tout l'arc $ABCD$. En ce cas, tous les segmens sur AB, BC, etc. seront égaux au segment sur AD, et toutes les lunules égales à l'espace rectiligne $ABCD$. et une seule lunule $=$ à cet espace divisé par le nombre n. Je ne sais, M., quelle difficulté vous pouvez avoir sur cette solution; et bien loin de n'être pas confirmée par cette autre solution, qui nous est commune, elle l'est entièrement: car, si vous nommez le rayon du grand cercle $\sqrt{3}$, et qu'on prenne 3 pour n, qui est l'exemple sur lequel vous provoquez, c'est à dire si l'on cherche AB ou x telle qu'étant inscrite dans le cercle trois fois, comme AB, BC, CD, et les deux points A et D étant joints par la droite AD. on ait $AB^2 + BC^2 + CD^2 = AD^2$ ou $3AB^2 = AD^2$, on trouvera $x = \sqrt{(9 - 3\sqrt{3})}$, comme vous trouvez votre corde que vous appelez CF. Quand on me rapportera les Exercitations, je ne laisserai pas de repasser cette solution; je ne saurois pourtant croire que dans une affaire assez facile, j'aie pu permettre qu'on imprimât une chose dont je ne fusse entièrement sûr; car je suis naturellement assez sur mes gardes quand je publie une chose. Au reste, comme nous avons commencé nos vacances, je ne pourrai pas lire sitôt votre mémoire à l'Académie, et quand je le ferai, il y a apparence que MM. Hermann et Bulffinger seront déjà partis. Mais je le donnerai à lire en particulier à tous ceux qui s'entendent en ces matières, et comme il est impossible qu'ils ne l'approuvent pas tous, je vous promets, M., d'avance mes soins pour l'impression. Dan. Bernoulli.

LETTRE LXIII.

GOLDBACH à D. BERNOULLI.

=

SOMMAIRE. Réponse à la lettre 60ème.

Moscou ce 31 juillet 1730.

Je reçus l'honneur de votre dernière lettre le 23 juillet dimanche; lundi étoit jour de poste, et mardi j'eus occasion de communiquer à M. le Premier Médecin l'article de votre nouveau contrat. Quoique sa réponse fût favorable, il est plus dans l'ordre que vous la receviez par le canal de M. Schumacher que je pourrois désobliger si je prétendois me mêler, sans son ordre, d'une négociation qu'il a entamée et qu'il finira peut-être en peu de jours. Si cependant vous voulez m'honorer de quelques autres commissions auprès de M. le Président qui n'aient point de rapport à cette affaire-là, je vous prie, M., de disposer de moi et d'être persuadé que je m'aquitterai de mon devoir avec tout le soin possible.

Je ne disconviens pas de l'explication que vous donnez aux deux manières d'envisager un problème rendu plus général, ni du bon usage qu'on peut faire de l'une aussi bien que de l'autre; si j'en ai parlé autrement, ce n'a été que pour vous divertir.

Puisque votre curiosité s'étend, M., jusqu'à me demander pourquoi j'ai écrit $1 \pm m$ au lieu de m qui auroit suffi, représentant en cet endroit-là un nombre entier quelconque, c'est avec beaucoup de plaisir que je vais dire comment cela est arrivé, et j'y ajouterai *ex abundanti* qu'il y a des cas où de telles expressions sont en effet plus simples qu'elles ne paroissent. La différentielle $\frac{dx}{(1+x^a)^{\frac{1}{n}}}$ s'étant présentée rationelle après être changée en une formule où les exposans $\frac{2-a}{a}$ et $\frac{n-2}{n}$ sont des nombres entiers quelconques, je fis d'abord $\frac{2-a}{a}=m$ et $\frac{n-2}{n}=p$, supposant m et p des nombres entiers quelconques; de là sont venus les exposans $\frac{2}{1\pm m}$ et $\frac{1\pm p}{2}$. Après cette exposition sincère du fait, je prétends qu'il y a des occasions où p. ex. l'exposant $\frac{-q+2}{2}$ est, à certains égards, plus simple que $\frac{p}{2}$, quoique p et q signifient également des nombres entiers quelconques. Soit la même différentielle sous les deux formes:

$$A \ldots \frac{dx}{\left(x^{\frac{2}{m}}+1\right)^{\frac{-q+2}{2}}} \text{ et } B \ldots \frac{dx}{\left(x^{\frac{2}{m}}+1\right)^{\frac{p}{2}}},$$

on peut dire que la formule A est intégrable si m et q sont des nombres entiers affirmatifs; mais il faut plus de verbiage pour dire la même chose de la formule B, parce que p, dans ce cas, doit être égal ou à un nombre entier négatif quelconque, ou $= 0$, ou $= 1$, de sorte que, si l'expression B satisfait plus la vue, l'expressien A, à son tour, choque moins l'oreille, outre que la simplicité de l'expression B n'est qu'apparente, car si elle raccourcit l'exposant dans la différentielle, on voit qu'elle surcharge celui de l'intégrale.

Voici les deux transformations dont j'avois parlé dans ma lettre du 1 juin: 1° Soient, dans la différentielle

$$\frac{dx}{(1+x^{\frac{1}{m}})^{\frac{p}{q}}},$$

m, p, q des nombres entiers quelconques: si l'on fait

$$x = (z^q - 1)^m,$$

on aura la différentielle réduite à ces termes rationels

$$mq(z^q - 1)^{m-1} z^{-p+q-1} dz$$

qui sera, par conséquent, intégrable si m est affirmatif.

2° Soient, dans la différentielle

$$\frac{dx}{(x^{\frac{2}{m}}+1)^{\frac{-q+2}{2}}},$$

m et q des nombres entiers quelconques; soit $x = \frac{(z-z^{-1})^m}{2}$, l'on aura

$$\frac{dx}{(x^{\frac{2}{m}}+1)^{\frac{-q+2}{2}}} = \frac{m\left(\frac{z-z^{-1}}{2}\right)^{m-1}\left(\frac{1+z^{-2}}{2}\right)dz}{\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^{-q+2}} =$$

$$m\left(\frac{z-z^{-1}}{2}\right)^{m-1}\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^{q-1}\cdot z^{-1}\,dz$$

qui sera intégrable si m et q sont affirmatifs.

L'expérience hydrostatique qui vous a si bien réussi me paroît conforme à ce raisonnement: Puisque la résistance que l'eau trouve en PM, tout le tuyau étant bouché, soutient l'eau du tuyau DR à la hauteur SD, et que, cette résistance étant nulle, c'est à dire, tout ce cercle PM étant ouvert, la hauteur SD devient aussi nulle, il s'en suit que plus l'ouverture on sera petite et plus la hauteur SD sera grande; or, le cercle on étant $= 1$, et le cercle $PM = n$, la résistance que l'eau trouve au cercle on sera à la résistance de tout le cercle PM comme 1 est à nn, et par conséquent à la résistance de la zône $PonM$ comme 1 à $nn - 1$, donc le cercle on étant ouvert, et la résistance que l'eau souffre ne venant que de la zône $PonM$, on a l'analogie suivante:

Toute la résistance du cercle PM	à	la résistance de la zône $PonM$	: :	toute la hauteur SD	à	la hauteur cherchée SF
nn	:	$nn - 1$	: :	a	:	$\frac{(nn-1)a}{nn}$

Tout cela va bien. Je voudrois pourtant qu'on fit le couvercle PM (Fig. 22) de sorte que l'eau passant librement par la moitié PT, ne fût arrêtée que par l'autre moitié TM. La question est, si l'expérience fait voir (comme votre hypothèse le demande) que la hauteur de l'eau dans le tuyau DR demeure toujours la même SF, soit que l'eau coule par le demicercle supérieur, soit qu'elle coule par le demicercle inférieur (le couvercle étant tourné). Je me sens porté à croire que l'eau coulant par le demicercle supérieur, le tuyau DR se videra jusqu'en RS; et l'eau coulant par le demicercle inférieur, celle du tuyau DR restera à une hauteur assignable SF. Si l'expérience confirme ma conjecture, j'en donnerai de fort belles raisons, et si elle ne les confirme pas, je vous épargnerai la peine de les entendre.

Votre méthode de trouver les substitutions pour changer $\frac{dz}{1+zz}$ en $\frac{nv^p dv}{1+vv}$ me plaît beaucoup et me semble plus courte que l'autre où l'on emploie les séries recurrentes.

Goldbach.

P. S. J'ai trouvé une méthode de transformer

$$\frac{dz}{1\pm zz} \text{ en } \frac{ndv}{1\pm vv}$$

par le seul calcul intégral, sans y employer les logarithmes ni les suites recurrentes.

LETTRE LXIV.

D. Bernoulli à Goldbach.

Sommaire. Renvoie à G. son premier mémoire sur les lunules qu'il a remplacé par un autre.

St.-Pétersbourg ce 31 juillet 1730.

Il y a huit jours que je me suis donné l'honneur de répondre à votre pénultième: le lendemain je reçus votre dernière*). J'avais déjà donné à lire à MM. les Professeurs votre premier écrit sur les lunules; je n'ai pourtant pas manqué de leur communiquer aussi le dernier en redemandant ce premier que je vous renvoie, M., ci-joint, conformément à vos ordres. Ce que vous avez ajouté a été résolu de la même manière par plusieurs autres avant nous. Je n'ai pas encore retiré mes Exercitations de M. Verkerson pour pouvoir vous en dire davantage; vous y verrez, M., vous même ce que j'en dis, si vous voulez vous en donner la peine.

Dan. Bernoulli.

*) Cette lettre, par laquelle G. paraît redemander son mémoire sur les lunules, manque.

LETTRE LXV.

GOLDBACH à D. BERNOULLI.

=

SOMMAIRE. Reconnaît la jusesse de la solution du problème des lunules, donnée par B. et prie de supprimer son mémoire.

Moscou ce 3 août 1730.

Je suis réduit à vous confesser que je vous ai donné une fausse alarme à l'égard de votre seconde solution du problème dont il s'agit, et j'avoue que ce problème est épuisé par ce que vous en avez dit dans vos Exercitations mathématiques. Je savois fort bien que vous y donnez la résolution de celui des deux secteurs des lunules dont j'avois fait mention dans une lettre à feu M. votre frère, mais je ne me souvenois pas de la méthode générale de trouver les lunules quarrables que vous avez publiée dans le même livre. Ainsi, ne jugeant de votre solution qu'à la hâte sur ce que vous m'en aviez communiqué dans une de vos lettres où la corde qu'il faut trouver (les cercles étant comme

1 à 3) étant $\sqrt{(3 - \sqrt{3})}$, et partant différente de celle que je trouvois, savoir $\sqrt{(9 - 3\sqrt{3})}$, je pensois qu'il y avoit de la méprise dans la méthode, sans faire réflexion que l'une et l'autre de ces valeurs sont justes à divers égards. Tout cela me détermine à vous adresser, M., la très humble prière de supprimer tout à fait le mémoire en question; je tâcherai de le remplacer par quelque autre.

Goldbach.

LETTRE LXVI.

D. Bernoulli à Goldbach.

Sommaire Mémoire sur les lunules. Critique de la conjecture de G. sur le problème d'hydrodynamique. Transformation des formules différentielles.

St.-Pétersbourg ce 24 août n. st. 1730.

Je n'avois pas encore remis votre mémoire sur les lunules quarrables à notre Chancellerie, quand je reçus l'honneur de votre dernière du 3 août n. st. et le retiendrai jusqu'à ce que je sache ce que je dois en faire. Cependant, s'il m'est permis d'en dire mon avis, je ne vois pas, M., ce qui peut vous empêcher de le faire imprimer tel que vous l'avez envoyé en dernier lieu; de grands géomètres, tels que M. le Marquis de l'Hôpital, ayant fait insérer dans les Mémoires de Paris et ailleurs des solutions de ce problème qui ne sont que particulières, pendant que la vôtre est générale. Et quant à ce que j'ai donné une semblable solution dans mes Exercitations, je puis vous assurer que personne ne le sait, puisque vous l'avez bien ignoré vous même qui êtes peut-être le seul qui avez eu de la complaisance pour ce livre.

Je viens maintenant, M., à votre pénultième du 31 juillet n. st. Votre conjecture hydrostatique est bien éloignée de l'expérience et de ma proposition, que vous n'avez pas bien entendue, car j'entends (voyez, s'il vous plaît, votre figure) par n tout le cercle PM que vous appelez nn; et ainsi, en retenant vos significations, c'est à dire en dénotant le cercle PM, dont le diamètre est PM, par nn, et l'ouverture, dont le diamètre est on, par 1, j'ai trouvé, et l'expérience l'a confirmé, que la hauteur SF est toujours $\frac{(n^4-1)a}{n^4}$, et non pas $\frac{(nn-1)a}{nn}$. Si la chose avoit été si facile que d'être résolue par une simple analogie telle que la vôtre, ç'auroit été un miracle qu'elle eût échappé à tous ceux qui ont écrit sur cette matière. Ma méthode demande un bien plus grand appareil tant de mécanique et d'hydrostatique que de géométrie pure, puisqu'on parvient souvent à des équations presque intraitables. Je considère d'abord comme si le tuyau QM s'étoit rompu tout d'un coup en R, et il est clair qu'après la rupture l'eau en QR s'accélèrera; après cela il faut savoir calculer cette accélération pour un instant infiniment petit (ce qu'on n'a su faire jusqu'à présent) et de là on peut tirer quelle pression cette eau QR soutient, laquelle est proportionnelle à la hauteur SF.

Je n'ai pas fait l'expérience du couvercle de cette façon; mais je suis entièrement convaincu que, de quelle manière qu'on le mette, soit que M soit dessus ou dessous ou de côté, la hauteur SF n'en sera pas changée. C'est une chose qui choque d'abord l'esprit, mais que je m'assure pourtant être très vraie, quoique je n'en aie point encore fait l'expérience, savoir que la hauteur *SF* peut devenir négative, en sorte que, bien loin que les côtés du tuyau *QM* soient poussées en dehors, ils sentent une compression, et par ce moyen on peut faire monter l'eau de soi-même à une hauteur quelconque. Imaginez vous, M., que le tuyau *QPLM* (Fig. 23) est un cône renversé; soit p. ex. le diamètre *ST* au diamètre *MP* comme 1 à $\sqrt{2}$, ou bien leurs cercles comme 1 à 2; je dis que, si l'on fait une petite ouverture en *RS*, à laquelle répond un tuyau *RSFE* dont le bout en *Q* est sous l'eau, cette eau montera continuellement et sans être aucunement poussée par dehors, et se déchargera par *PM*, pourvu que la hauteur *SF* soit moindre que $3BQ$, sans quoi l'eau descendra par le tuyau *SF*. Il faut pourtant dans ces expériences avoir égard à quelques circonstances qu'il seroit trop long d'exposer et qui font que, dans la pratique, le tuyau *SF* doit être pris un peu plus court pour que l'eau puisse monter.

Vous avez, M., la complaisance d'approuver ma méthode de trouver les substitutions pour changer $\frac{dz}{1+zz}$ en $\frac{nv^p dv}{1+vv}$, et cependant je ne sache pas de vous l'avoir marquée. Quant à la vôtre, dont vous faites mention dans le *P. S.* disant que vous pouvez transformer $\frac{dz}{1\pm zz}$ en $\frac{n\,dv}{1\pm vv}$ par le seul calcul intégral sans employer les logarithmes ni les suites recurrentes, je serais bien aise de la savoir pour voir si elle est différente des miennes.

Dan. Bernoulli.

LETTRE LXVII.

GOLDBACH à D. BERNOULLI.

=

SOMMAIRE. Transformation des formules différentielles. Problème d'hydrodynamique.

Moscou ce 2 octobre 1730.

Dans le sentiment où je suis qu'il ne faut jamais rien publier dans les Mémoires qui ait déjà été publié ailleurs, je vous prie de brûler celui que je vous ai envoyé *De quadratura lunularum.*

Voici ma méthode de transformer $\frac{dy}{1-yy}$ en $\frac{ndx}{1-xx}$ par le moyen du calcul intégral: Je cherche l'intégrale de

$$\frac{dy}{1-yy}-\frac{ndx}{1-xx}=0$$

que je trouve $(1+y)(1-y)^{-1}(1-x)^n(1+x)^{-n}=C$ et faisant $(1-x)^n(1+x)^{-n}=z$, j'ai $y=\frac{C-z}{C+z}$ où C est une constante arbitraire. Si après cela on fait $y = z\sqrt{-1}$ et $x = v\sqrt{-1}$, la même méthode servira à tranformer

$$\frac{dz}{1+zz} \text{ en } \frac{ndv}{1+vv}.$$

Pour ce qui est de la méthode plus générale par laquelle vous transformez $\frac{dz}{1-zz}$ en $\frac{nv^p dv}{1-vv}$, je conviens que vous ne me l'aviez pas communiquée, mais cela n'empêche pas que je ne l'aie devinée, parce que je sais aussi cette transformation dans tous les cas où p est un nombre entier, comme je le ferai voir dans tel cas particulier qu'il vous plaira de me proposer. Je pense que votre méthode ne va pas plus loin; cependant, si vous savez trouver des substitutions générales pour chaque valeur de p, comme vous vous expliquez, M., dans votre lettre du 17 juillet, prenez, s'il vous plaît, $p = \sqrt{2}$.

L'analogie dont j'ai fait mention dans ma précédente lettre subsiste certainement pourvu que les résistances, par lesquelles l'eau est arrêtée, soient en raison quarrée des surfaces qui l'arrêtent; sur ce pied-là, soit (Fig. 20) l'aire du cercle PM (dont le diamètre est PM) $= n$; soit la résistance que l'eau souffre à la surface $PM = rn^2$, et pareillement la résistance que l'eau souffre au petit cercle on (dont le diamètre est 1) $= r$, on aura la résistance de la zône $PonM = r(nn-1)$, et par conséquent

$$rnn : r(nn-1) :: a : \frac{(nn-1)a}{nn},$$

supposant $a =$ à toute la hauteur SD.

Ce que vous dites, M., p. 200 du tome 1 Comment., à l'égard de l'équation $ax^m y^n dx + bx^p y^q dx = dy$ vient d'une fausse apparence. Posons p. ex. $n = p = 0$, l'équation

$$A \ldots ax^m dx + by^q dx = dy$$

sera, par votre méthode, transformée en

$$B \ldots \frac{a}{s} x^m z^{-s+1} dx + \frac{b}{s} z^{2s+1} dx = dz \text{ ou}$$

$$C \ldots \frac{a}{s} x^m dx + \frac{b}{s} z^{3s} dx = z^{s-1} dz,$$

mais il s'en faut bien que cette équation soit aussi générale que A, parce qu'en faisant $z = v^{\frac{1}{s}}$ dans l'équation C, elle se réduit à $\frac{a}{s} x^m dx + \frac{b}{s} v^3 dx = dv$, c'est à dire au seul cas de l'équation A dans lequel $q = 3$.

L'égalité des deux suites $\frac{1}{(x+1)^2}$ et $\frac{1}{xx(x+1)}$ me paroît remarquable quoiqu'elle ne soit pas difficile à démontrer.

Goldbach.

P.S. Je voudrois bien savoir, si on n'a jamais trouvé la quadrature d'aucune courbe qui rentre en elle même: *curvae in se redeuntis*?

LETTRE LXVIII.

D. Bernoulli à Goldbach.

=

Sommaire. Mêmes sujets. Réponse à la lettre précédente. Courbes rentrantes en elles-mêmes et quarrables. Observation sur une espèce de suites infinies.

St.-Pétersbourg ce 8 octobre v. st. 1730.

J'ai exécuté vos ordres, quoique trop rigoureux, touchant le mémoire des lunules. Vous ne vous expliquez pas assez sur votre méthode de changer la formule $\frac{dy}{1-yy}$ en $\frac{ndx}{1-xx}$; mais je vois pourtant assez qu'elle est fort différente des miennes qui sont aussi beaucoup plus courtes. Je doute fort que vous ayez deviné une de mes méthodes: par exemple, si $\frac{dy}{1-yy}$ doit être $=\frac{ndx}{1-xx}$, je prends l'intégrale de cette équation qui est $\frac{1}{2}l(1+y)-\frac{1}{2}l(1-y)=\frac{n}{2}l(1+x)-\frac{n}{2}l(1-x)$, et prenant les nombres des logarithmes, on obtient

$$\frac{1+y}{1-y}=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n.$$

Vous voyez, M., qu'il n'y a rien de si facile. Mais je vous demande en conscience, quand vous dites que vous cherchez, par le moyen du calcul intégral, l'intégrale de

$$\frac{dy}{1-yy} - \frac{ndx}{1-xx} = 0,$$

et que vous trouvez cette intégrale être

$$(1+y)(1-y)^{-1}(1-x)^{n}(1+x)^{-n} = C,$$

qui vous a dit cette intégrale? puisqu'enfin vous ne vous servez pas des logarithmes qui font que tout cela n'est qu'un jeu d'enfant quand on s'en sert. Je ne sais, M., si j'ai dit dans une de mes lettres qu'on peut changer $\frac{dz}{1-zz}$ en $\frac{nv^{p}dv}{1-vv}$ pour *chaque valeur* de p. Je vous prie de voir si j'ai dit pour *chaque valeur* de *p* ou pour *chaque nombre* de *p*. En tout cas, j'ai voulu dire le dernier et exclure par là les valeurs irrationelles en marquant en même tems qu'on peut résoudre le problème tant pour les nombres entiers que pour les nombres rompus, quoique vous disiez dans votre lettre que vous le pouvez quand *p* est un nombre entier et que vous semblez exclure par là les nombres rompus; essayez donc votre méthode p. ex. sur le cas de $p = \frac{1}{2}$.

Ayant cherché dans le premier tome de nos Mémoires l'endroit que vous alléguez, je n'y ai rien trouvé qui me regarde. Cependant je me suis donné la peine de parcourir ce qu'il y a, et j'ai trouvé qu'il n'y a pas une syllabe qui ne soit vraie à la dernière rigueur; et je m'assure que vous trouverez, M., la même chose, si vous voulez bien lire attentivement toutes les paroles. Je ne sais pourtant si nous convenons du sens du mot *également général.* Il me semble que deux formules sont également générales, quand l'une peut être changée en l'autre; j'avoue pourtant qu'elles ne sont pas telles en elles-mêmes, mais par rapport à l'intégration ou à la séparation : et ainsi les formules A et C dont vous parlez doivent par là même être dites également générales, puisque l'une peut être changée en l'autre, et que l'une pouvant être intégrée ou séparée, l'autre le puisse aussi. Au moins voit-on bien que c'est dans ce sens que mon frère l'a avancé, et il savoit apparemment bien qu'en soi-même dx n'est pas si générale que $x^m dx$, mais qu'en fait de formules intégrables ou séparables l'un est aussi général que l'autre; car ne seroit-on pas ridicule si, ayant appris que $dx = \frac{dy}{(1-ay^n)^{\frac{1}{n}}}$ peut être intégré, on répliquoit que cette formule peut être plus généralement intégrée en faisant $x^m dx = \frac{dy}{(1-ay^n)^{\frac{1}{n}}}$. Pour moi, j'aimerois mieux dire, à l'imitation de mon frère, que ces deux formules sont également générales, quoique tout le monde sache bien qu'à proprement parler, la première n'est qu'un cas particulier de la seconde. J'ai bien vu que l'intention de mon frère étoit de dire que la formule $A \ldots a x^m dx + by^q dx = dy$ peut être changée toujours en $B \ldots ax^m dx + bz^r dx = dz$, quelques nombres qu'on prenne pour q et r, excepté le seul cas de q ou $r = 1$; et ainsi, s'il y avoit un seul cas pour q qui rendît la formule A intégrable ou séparable, excepté celui de $q = 1$, la formule B seroit généralement intégrable ou séparable. Je trouve cette remarque, quoique dite seulement en passant, assez sensée et aucunement fondée sur une fausse apparence. Je ne dis rien du cas q ou $r = 0$, puisqu'on parle de nombres et non de riens. L'égalité des suites $\frac{1}{(x+1)^2}$ et $\frac{1}{xx(x+1)}$ fait une propriété assez jolie, mais qui saute aux yeux quant à la démonstration, puisque $\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{xx(x+1)} = \frac{x}{(x+1)^2} - \frac{x-1}{xx} = 0$.

Il y a sans doute une infinité de courbes rentrantes en elles-mêmes et quarrables, comme p. ex. $y = \frac{(z-a)\sqrt{(2az-zz)}}{b}$ (Fig. 24) dont la continuité se fait à l'infini selon le sens des nombres 1, 2, 3, 4. Mais on peut dire, en un certain sens, qu'il n'y en a point de rectifiables, ce que mon père a avancé quelque part, non sans raison. Il est vrai qu'il y en a aussi de cette dernière sorte, mais elles ont toutes des points de rebroussement qui font qu'en les développant, on obtient de nouvelles courbes rentrantes en elles-mêmes. Cependant la courbe, dont je viens de donner la figure, n'a pas cet inconvénient, car on peut la développer à l'infini. Je finirai, M., par une petite remarque que j'ai faite sur ces suites $\frac{1}{x^\alpha}$, continuées à l'infini, qu'on partage en deux parties dont les nombres de termes aient une raison donnée. Je dis: si $\alpha = 1$, ou plus grand que 1, la première partie sera infiniment plus grande que la seconde, mais si α est plus petit que 1, il y a une raison finie entre les deux parties que je puis facilement donner. Soit par ex. $\alpha = \frac{1}{2}$, on aura la suite $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots \frac{1}{\sqrt{x}}$ où x est un nombre infini. Qu'on la coupe en deux, en sorte qu'il y ait deux fois plus de termes dans la partie des termes postérieurs que dans celle des premiers termes, je dis que la partie des premiers termes $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \dots + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}x}}$ aura une raison finie à l'autre

$$\frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{3}x+1)}} + \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{3}x+2)}} + \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{3}x+3)}} + \dots \frac{1}{\sqrt{x}};$$

je demande cette raison. — On pourroit encore demander comment il faudroit couper la suite pour que les deux parties soient égales entre elles. Dan. Bernoulli.

LETTRE XLIX.

GOLDBACH à D. BERNOULLI.

SOMMAIRE Suite sur les transformations des différentielles.

Moscou ce 30 octobre 1730.

Je me contente de répondre, à cette heure, au seul article de votre lettre qui regarde la transformation des différentielles, et réserve le reste à une autre occasion.

Par un théorème fort facile à démontrer, je trouve que, si l'équation

$$A \ldots \frac{dx}{x} = \frac{u^p\, du}{1 - uu}$$

est intégrable, l'équation

$$B \ldots \frac{dx}{x} = \frac{u^{\frac{p \pm 1}{2}}\, du}{1 - uu}$$

l'est aussi (je prends $\frac{dx}{x}$ au lieu de $\frac{dx}{1 - xx}$ parce que cela sert à abréger le calcul sans altérer la nature de l'équation différentielle). En vertu de ce théorème, le seul cas $p=0$ donne l'équation

$$C \ldots \frac{dx}{x} = \frac{u^{\pm(a-1):2^b}\, du}{1-uu}$$

toujours intégrable, pourvu que a et b soient des nombres entiers affirmatifs et $a-2<2^b$. Soit p. ex. $b=1$, $a=2$, l'intégrale de l'équation $\frac{dx}{x} = \frac{nu^{-\frac{1}{2}}du}{1-uu}$ sera

$$x(1-u^{\frac{1}{2}})^{\frac{n}{2}}(1+u^{\frac{1}{2}})^{-\frac{n}{2}}(1-u^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1})^{\frac{-n\sqrt{-1}}{2}}(1+u^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1})^{\frac{n\sqrt{-1}}{2}} = C.$$

Il est vrai que le cas de $\frac{dx}{x} = \frac{u^{\frac{1}{3}}du}{1-uu}$ n'est pas compris dans ce théorème, et je vous avoue, avec mon ingénuité ordinaire, que je ne sais pas encore l'intégrale de cette équation-là. Si votre méthode embrasse tous les cas des exposans rationels, comme vous l'avancez, M., dans votre dernière lettre, ayez la bonté de déterminer l'intégrale de $\frac{dx}{x} = \frac{nvvdv}{1-vv}$. Je crains un peu que vous n'y trouviez des obstacles imprévus; quoi qu'il en soit, je l'attends avec impatience.

Goldbach.

LETTRE LXX.

D. Bernoulli à Goldbach.

Sommaire. Suite sur la transformation des formules différentielles.

St.-Pétersbourg ce 13 novembre 1730.

J'ai reçu, dans ce moment, l'honneur de votre dernière du 30 octobre n. st. Les glaces que la rivière charrie et qui nous ont séparé entièrement, pendant quelques jours, d'avec ceux de l'autre côté, l'ont apparemment retardée de quelques jours. Comme je me sens assez d'humeur à me donner la peine de faire les petits calculs que vos formules demandent, et que je crains de ne l'être pas tant une autre fois, je me donne l'honneur de vous répondre sur le champ.

Je vois, M., par votre méthode de transformer les différentielles, que vous y avez été conduit par votre propre pénétration qui vous est toujours naturelle, quoique destitué d'ailleurs de l'aide des logarithmes; et je ne doute pas que cette même pénétration vous conduise enfin à une entière solution. Quant à l'exemple $\frac{dx}{x} = \frac{v^{\frac{1}{3}}dv}{1-vv}$ dont vous dites ne savoir pas l'intégrale, il ne devoit pas assurément vous rebuter puisque vous étiez sur un si bon chemin. Comme vous me paroissez, M., avoir quelque défiance en ma méthode, je vous communiquerai le résultat de cet exemple, aussi bien que de l'autre $\frac{dx}{x} = \frac{nvvdv}{1-vv}$ qui fait le sujet, soit de votre défi, soit de votre défiance. Quant au premier $\frac{dx}{x} = \frac{v^{\frac{1}{3}}dv}{1-vv}$, je trouve

$$x = G\left((m + v^{\frac{2}{3}})^{\alpha}\,(n + v^{\frac{2}{3}})^{\beta}\,(l + v^{\frac{2}{3}})^{\gamma}\right)^{\frac{3}{2}}$$

où l'on peut prendre pour G une constante quelconque; pendant que les six autres constantes sont déterminées par ces six équations

$$\begin{array}{ll} mnl = -1, & \alpha n + \alpha l + \beta m + \beta l + \gamma m + \gamma n = -1, \\ mn + ml + nl = 0, & \alpha nl + \beta ml + \gamma mn = 0, \\ m + n + l = 0, & \alpha + \beta + \gamma = 0; \end{array}$$

en développant ces six équations, on trouve

$$\begin{array}{ll} l = -1, & \alpha = \frac{1}{6} \pm \frac{1}{2\sqrt{-3}}, \\ m = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} & \beta = \frac{1}{6} \mp \frac{1}{2\sqrt{-3}}, \\ n = \frac{1 \mp \sqrt{-3}}{2} & \gamma = -\frac{1}{3}. \end{array}$$

Pour l'autre exemple, qui est $\frac{dx}{x} = \frac{nvvdv}{1-vv}$, je trouve cette intégrale

$$x = \frac{G(1+v)^{\frac{1}{2}n}}{(1-v)^{\frac{1}{2}n}\,c^{nv}}$$

dans laquelle G est encore une constante arbitraire, mais où c est une quantité constante limitée que l'on ne peut donner que par des suites infinies, en quoi pourtant elle ne diffère pas des quantités irrationelles. Voici une telle suite

$$c = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

J'espère, M., que vous ne trouverez rien à redire à la solution de ces exemples. Si l'envie vous prenoit de les examiner, vous le ferez facilement, en observant seulement que la différentielle de c^v est $c^v\, dv$.

Dan. Bernoulli.

LETTRE LXXI.

Goldbach à D. Bernoulli.

Sommaire Même sujet. Théorème de géométrie.

Moscou ce 29 novembre 1731.*)

J'ai bien reçu la lettre que vous me fites l'honneur de m'écrire l'année passée. Comme M. Euler a généralement trouvé l'intégrale de cette expression $\int\frac{dx\,(a-x)\,(b-x)\text{ etc.}}{(\alpha+x)\,(\beta+x)\text{ etc.}}$, il est visible que, pour trouver l'intégrale de $\frac{dx}{x}=\frac{nv^{p}dv}{1-vv}$, on n'a qu'à chercher par ladite méthode les intégrales de ces deux termes. Pour ce qui est de l'intégrale de $\frac{dx}{x}=\frac{nvvdv}{1-vv}$,

*) Cette réponse tardive à la lettre précédente n'est point expliquée. Le lecteur remarquera aussi qu'elle ne contient pas un mot de réponse à la plupart des articles de la lettre de Bernoulli du 8 octobre 1730 (Nr. 68). Est-ce peut-être ce retard qui engage B de couper la correspondance, car elle finit brusquement par cette dernière lettre de Goldbach, bien que B. ne quitte St.-Pétersbourg que deux ans après (1733).

vous me pardonnerez si j'ai cru que vous y trouveriez des difficultés imprévues, et vous vous souviendrez en même tems, M., que, dans vos lettres précédentes, vous aviez toujours parlé de substitutions algébriques; c'est précisément en quoi je voyois des difficultés qui me paroissoient insurmontables; aussi ne crois-je pas que vous veuillez faire passer pour algébrique une substitution qui renferme la quantité exponentielle c^v quoique c soit une quantité constante.

Il m'est venu une pensée qui peut-être ne vous déplaira pas. Soit (Fig. 25.) le rayon du cercle $AB = 1$; la perpendiculaire (ou le sinus de l'arc DB) $BC = a$; l'aire du secteur ABD sera $=$

$$m\Big(\big(\sqrt{(1-aa)}+a\sqrt{-1}\big)^{\frac{1}{m}}-\big(\sqrt{(1-aa)}-a\sqrt{-1}\big)^{\frac{1}{m}}\Big):4\sqrt{-1}$$

si on prend pour m un nombre infiniment grand.

Goldbach.

LETTRES

DE

DANIEL BERNOULLI

À

LÉONARD EULER

1726 — 1755.

LETTRE I.

SOMMAIRE. Nouvelle de la réception d'Euler a l'Académie et invitation de se rendre à St.-Pétersbourg.

Sans date, mais à en juger par le contenu:
St.-Petersbourg 1726.

Monsieur,

Il y a quelques mois que je vous écrivis par ordre de notre Président, M. Blumentrost et que je vous invitai en son nom de venir prendre la place d'Elève dans notre Académie avec 200 roubles de pension; je savois fort bien que ce salaire étoit au-dessous de votre mérite, et quoique vous ayez agréé vous même les conditions, je n'ai pourtant pas manqué d'observer vos intérêts, et j'ai été assez heureux pour le faire avec quelque succès. Vous en jugerez vous même, Monsieur, par la lettre que M. Blumentrost m'a fait l'honneur de m'écrire et que je vous envoie en original*). Vous

*) Elle ne s'est pas trouvée

êtes attendu avec grande impatience; venez donc au plus vîte et s'il est possible, partez encore cet hiver: Mais si la saison vous effraye, je vous conseille de profiter du peu de tems qui vous reste pour vous exercer en anatomie et pour lire les livres qui ont traité sur la physiologie, fondée sur les principes de géométrie, tels que sont Bellini, Borelli, Pitcairne etc. En attendant ne manquez pas d'envoyer à l'Académie au plus tôt quelque pièce de votre façon, et faites lui voir par là que, quelque bien que j'aye dit vous, je n'en ai pas encore assez dit, car je prétends avoir rendu un service beaucoup plus considérable à notre Académie qu'à vous. Je n'y aurais pourtant jamais réussi sans les belles qualités de notre digne Président qui est pénétrant, généreux, qui ne se laisse point éblouir par un faux clinquant, qui reconnoît facilement le mérite et qui ne manque jamais de le récompenser. Quelle consolation d'avoir un tel Protecteur!

Je suis, Monsieur, très parfaitement, votre etc.

Bernoulli.

LETTRE II.

SOMMAIRE. Rapport à établir entre les académies de Paris et de St.-Pétersbourg. — Problème de la Toutochrone dans un milieu résistant en raison des carrés des vitesses. — Clairaut sur le problème des isopérimètres. — Recherches pour déterminer l'épaisseur d'une lame enfoncée horizontalement dans un mur et assujétie à diverses conditions. — Problème de construction. — Epreuve d'une machine pour l'observation des hauteurs des astres — Considérations sur la vitesse d'un vaisseau.

Paris d. 22. Septbr. 1733.

Hochedelgeborner
Hochzuverehrender Herr Professor

Ew. werden ohne Zweifel unsere glückliche Ankunft in Paris schon vernommen haben: Es hat sich auch mein Bruder*) die Ehre gegeben Ihnen einen Brief aus Amsterdam zu adressiren durch den Hrn. Prof. Gross. Unsere Landreise ist allzeit sehr glücklich gewesen und habe viel dadurch profitirt, worüber aus Basel mehrern Rapport abstatten werde. In Paris sind viele gute Mathematici und Physici, so dass

*) Jean B. 2d, frère cadet de Daniel, et qui fit avec celui-ci le voyage de St.-Pétersbourg à Bâle.

es unserer Akademie in Petersburg lieb und nützlich seyn wird mit hiesiger Akademie in einer genauen Verbündniss zu stehen, worüber hoffentlich in Petersburg in einem neuen Reglement die nöthigen Verfassungen werden gemacht werden, indem dergleichen Correspondenten die Seele einer wohleingerichteten Akademie sind. Sollte ich von dem Hrn. Präsidenten im Stand befunden werden hierzu etwas beitragen zu können, so werde ich solches mit vielem Vergnügen thun. Es sind auch allhier einige Subjecta, welche vielleicht nicht refusiren würden sich bei unserer Akademie zu engagiren. Das problema de invenienda tautochrona in medio resistente in ratione quadrata velocitatum ist allhier von einigen solvirt worden: Mein Vater hat auch eine Solution in den hiesigen Mémoires hiervon drucken lassen: Man kann hierdurch sehen wie präjudicirlich es unsern Commentariis ist, so langsam gedruckt zu werden, indem wir allzeit als die alte Fastnacht nach den andern kommen werden. Als ich dem Hrn. Clairaut redete von Ew. solutione isoperimetricorum, antwortete er gleich, solches problema müsse nicht schwerer seyn, als das problema ordinarium, indem man allzeit numerum elementorum multipliciren könne pro numero conditionum: woraus zu sehen, dass dergleichen problemata den hiesigen Mathematicis nicht schwer fallen. Aber in mechanicis ist man hier bei weitem nicht so weit gekommen. Unterwegs habe ich einige meditationes mathematicas gemacht de determinandis utique crassitiebus laminae muro horizontaliter infixae, ita ut ubique aequaliter sit rupturae obnoxia lamina, die lamina mag proprio pondere agiren oder noch von einem superincumbente pondere utcunque geladen seyn. Man kann über dieses Thema viele curiose Sachen annotiren, worüber ein sonderbares mémoire ab-fassen werde und solches unserer Akademie überschicken, sobald ich mich in meinem Vaterland werde arrangirt haben. Inzwischen zweifle ich nicht, es werden Ew. das problema auch leicht solviren. Ich habe auch einige artige observationes gemacht de foliis sive aequaliter sive inaequaliter crassis sibi invicem superimponendis ut supremum folium ab infimo maxime reclinet, als in beigesetzter Figur (Fig. 26). Wenn man nun dergleichen Quadersteine sollte, als in beigesetzter Figur legen, und zugleich in locis *a, a, a,* etc. vincula ferrea aequalia, um allen casibus fortuitis zu occurriren, anlegen, würde solches eine wunderliche Architectur machen. Man kann aber dieses zu andern Sachen gebrauchen. — Auf der See habe ich einige observationes gemacht und gemerkt dass meine angegebene Maschine de observandis astrorum altitudinibus einen guten Effect haben würde. Ich hab auch die velocitatem navis ex globo e filo suspenso et aquae submerso gar genau gemessen, und ist meine Methode mit der ordinären Methode allzeit übereingekommen: diese aber ist weit operoser und hat nicht den Vortheil, dass man die velocitatem navis sine ulla operatione gleichsam als an einer Uhr sehen kann, welches dazu dienen würde, dass man positionem velorum maxime favorabilem gar leicht abnehmen könnte. Allhier in Paris hab ich gehört, dass auch der Herr Poleni diese Methode inveniendi navis velocitatem angegeben habe in seiner dissertatione, so das praemium erhalten. Ich habe auch gesehen die wahre Ursach, warum das Schiff caeteris paribus geschwinder geht mit halbem Winde, als mit vollem Winde. Die Ursach ist gar nicht, wie man bishero geglaubt, dass man alle Segel mit halbem Winde employiren könne; denn die obliquitas velorum derogirt mehr als man a numero velorum gewinnt, welches gewiss ist. Die wahre Ursach ist, dass mit einem vent en pouppe en faisant force de voile, das Schiff schier dimidiam velocitatem venti, oder auf das wenigste tertiam ejus partem erlangt. Weil nun die ratio velocitatum notabel ist, so ist velocitas respectiva venti bei einem halben Winde viel grösser als bei vollem Winde, und kann also in dem ersten Falle das Schiff geschwinder getrieben werden, als in dem andern. Aber die Zeit lässt mir nicht zu, von dergleichen Materien weitläuffiger zu seyn. Aus Basel schreibt man mir, dass für die professionem Rhetorices et Moralis nächstens soll disputirt werden; hab aber nicht haben wollen, dass man mich in meinem Namen dafür angebe: vielleicht wird mein Bruder einen Candidatus abgeben. Der Professor Anatomiae soll nächstens gemacht werden. Libera nos Domine! Des Hrn. Hermann Tod hat mich sehr geschmerzt . . . .

LETTRE III.

SOMMAIRE. Affaires de l'Acad. de St.-Pétersbourg. — Impression de l'Hydrodynamique. — Mémoire de Lagny relatif à la théorie des nombres — Problème de la trajectoire que décrit un projectile dans un milieu résistant très délié. — Travaux de mécanique exécutés par D. B.

Basel d. 18. December 1734.

..... Die Akademie ist glücklich einen solchen Directorem*) bekommen zu haben, der selber die Wissenschaft besitzt. Ein guter General muss auch ein guter Soldat seyn.

..... Es wäre wohl Schade wenn die mathematische Classe, wie Sie sagen, in Abgang käme: Man mag sagen was man will, so dependirt doch die Ehre der Akademie bei den Ausländern am allermeisten von den mathematischen und physischen Wissenschaften. Solches habe auf meiner Rückreise zur Genüge erfahren. Man sollte trachten den jungen Hrn. Clairaut von Paris zu bekommen. Ich kann Ihnen nicht

*) Le baron Korff.

genug sagen, mit welcher Avidität man allerorten nach den Mémoires von Petersburg fragt . . . Es wäre zu wünschen dass die Druckung derselben mehr beschleunigt würde. Wenn man etwa mit der Zeit sollte Mangel an mémoires haben und die meinigen nicht verachtet würden, so bin bereit einige pièces zu schicken. Es ist mir leid, dass diejenige pièce, so ich an den Hrn. Präsidenten vor einem Jahr geschickt, ist verloren gegangen. Wenn mir Ew. Dero Tractatum mechanicum schicken wollen, so will ich denselben drucken lassen in Strassburg, allwo sie gar froh darüber seyn werden. Meine Hydrodynamicam druckt wirklich der Herr Dulsecker und gibt mir nebst 30 exemplaribus annoch 100 Thl. Recompens. Ew. judiciren gar recht wegen der Historia Edessena; meine Hydrodynamica ist in einigen Journalen zum voraus recensirt: Ich werde solche I. K. M. zu dediciren die Freyheit nehmen, welches die einzige Dankbarkeit ist, so im Stand bin zu bezeigen, da sonsten meine Dienste nicht agreirt werden; doch bitte ich Ew. mir hierauf expresse zu antworten, ob Sie meinen, dass solches etwa nicht sollte ungütig aufgenommen werden*). Wenn etwas zum Besten der Akademie darin könnte gemeldet werden, kann mir solches nur angezeigt werden, aber mit ehestem . . . . .

Ich komme nun auf einige Mathematica. Ew. verlangen von mir zu wissen einen kurzen Begriff von des Lagny pièce, so in den Pariser Mém. a. 1720 ist. Es ist nichts, als leere Worte. Sein ganzes problema ist, den valorem numeri integri von x zu finden, damit $\frac{a+bx+cx^2+\dots}{d}$ (allwo a, b, c, d numeri integri sind) einen numerum integrum

*) L'Hydrodynamique de D. Bernoulli parut à Strassbourg en 1738.

mache, und zugleich $\frac{e+fx+gx^2+\dots}{h}$ auch einen numerum integrum. Wenn x drei Dimensionen hätte oder mehr, so kann er es allzeit praestiren, wenn es möglich ist, vermittelst denen zwei Conditionen, welche er allzeit supponiren muss; solches aber ist gar leicht und hat ja der Newton in seiner Arithmetica universalis schon gezeigt, wie man müsse den valorem von x aequatione unius dimensionis vermittelst der zwei gegebenen Aequationen finden. Es wird also gleich das problema von Lagny dahin reducirt, dass $\frac{lx+m}{n}$ ein numerus integer sey. Wenn man auf diese Weise den valorem von x gefunden, muss man erst tentiren ob er angehe oder nicht; wenn das problema möglich ist, so wird der inventus valor satisfaciren und sonsten nicht, welche letztere Observation, wie mich dünkt, der Lagny nicht einmal macht. Ew. problema de abscindendis arcubus aequalibus in serie ellipsium etc. ist sehr profundum und, wie ich glaube, schwer anders als a posteriori, methodo serierum auf Ihre Weise, zu solviren. Die Natur der trajectoriae corporis in medio resistente tenuissimo projecti habe auch quam proxime determinirt: unsere Expressionen kommen in quovis casu particulari gar nahe zusammen. Doch aber muss nach unser beider hypothesi c viel grösser supponirt werden als a und x. Welche aber von unsern Expressionen accurater sey, kann nicht wohl anders als ex hypothesibus, quibus uterque in analysi usi sumus, geschlossen werden. Ihre denominationes habe in einem falschen sensu genommen, bis ich meine Expression gefunden. Ihre Worte sind diese: „b sey die Höhe, aus welcher die celeritas in vertice A generirt wird (subintellige vi gravitatis naturali), und c die Höhe (rursus pro vi gravitatis naturali), aus welcher diejenige celeritas entspringt, mit welcher, wenn sich die Kugel bewegt, die Resistenz der vi gravitatis (naturali nempe, non diminutae a medio) gleich ist etc.“ Wenn dieses Ihrer Worte Verstand ist, so finde solche Aequation:

$$y = \frac{gxx}{4b} + \frac{512b^3x + (48ggx^3 \quad 48bbx)\sqrt{(16bb + ggxx)} - (20ggx^3 + 80bbx)\sqrt{(16bb + 4ggxx)}}{768bbgc}$$

Aus dieser Aequation (in welcher vergessen, den numerator und denominator durch 4 zu dividiren) kann ich die übrigen Circumstanzen, von denen Sie Meldung thun, leicht deduciren. Ihre Aequation aber, wenn man sie in seriem resolvirt, ist gar simpel, indem, wenn

$$y = \frac{gcc(e^{\frac{x}{c}} - 1) - gcx}{2b},$$

man propter valorem admodum magnum ipsius c, supponiren kann $y = \frac{gxx}{4b} + \frac{gx^3}{12bc}$, und hat in diesem Punct einen grossen Vortheil vor meiner Aequation. Es wird aber leicht zu zeigen seyn, dass quam proxime sey

$$\frac{128b^3x + (12ggx^3 - 12bbx)\sqrt{(16bb + ggxx)} - (5ggx^3 + 20bbx)\sqrt{(16bb + 4ggxx)}}{16bg} = gx^3$$

Auf das wenigste differiren diese zwey Expressionen in casibus particularibus nicht viel. — In mechanicis habe einige neue principia generalia erdacht, welche viel quaestiones physico-mechanicas solviren, gleich dem principio conservationis virium vivarum. Ich habe vor etwas Zeit gearbeitet in invenienda lege vibrationum minimarum laminae uniformis elasticae parieti horizontaliter infixae ex data ejus vi elastica; aber ich bin nicht recht mit meiner Solution zufrieden. Wenn Ew. wollen in facult. med. Doctor werden, so will dazu gern verhülflich seyn. Wissen Sie nichts von den Kamtschatker Herren? . . . . .

LETTRE IV.

=

Sommaire. Maladie grave d'Euler. — Dévouement à la Russie. — Théorème de nombres d'Euler. — Problème astronomique. — Vibrations d'une lame élastique enfoncée perpendiculairement dans un mur vertical. — Expédition de Bouguer et de La Condamine. Encore sur le rapprochement des académies de St.-Pétersbourg et de Paris.

Basel d. 4. May 1735.

Allervorderst gratulire ich Ew. zu Dero wieder so glücklich erlangten Gesundheit und wünsche von Herzen eine lange Continuation derselben. Wie mir Herr Moula schreibt, so war nicht nur Jedermann bei Ihrer Krankheit um Sie bekümmert, sondern sogar auch ohne Hoffnung, Sie wiederum von derselben restituirt zu sehn. Es ist gut, dass weder ich noch Dero Aeltern eher etwas darum gewusst, als man Dero völlige Genesung vernommen. Es hat sich sonderlich auch der orbis mathematicus über Dero wunderbare Genesung zu erfreuen. Meine Hydrodynamic ist noch nicht fertig: Es wird mir sehr angenehm seyn wenn der Herr Kammerherr von Korff dieselbe, so sie verfertigt, wird wollen in meinem Namen I. K. M. praesentiren und auswürken,

*

dass dieses Zeichen meiner allerunterthänigsten und gewisslich ganz desinteressirten Dankbarkeit Allergnädigst aufgenommen werde. Wegen der mir so treulich geleisteten Dienste in Ansehung meiner Pension sage Ew. aufrichtigen Dank und versichere Sie, dass solche niemals vergessen werde. Ich werde mich zu allen Conditonen gar gern verstehen, die es dem Hrn. Kammerherrn mir vorzuschreiben belieben wird; denn ich mache mir eine wahre innerliche Freude mein Lebtag in Russ. Kaiserlichen Diensten zu stehn und alles andere dabei für nichts zu achten .... Meine übrigen Prätensionen sind bagatelles, an welche nicht einmal zu gedenken bitte, da nun meine Haupt-requête einen so glücklichen Ausgang gewonnen .... Ihre problemata sind gar wohl choisirt gewesen: Die Demonstration von $(z^n - 1):(n+1) =$ numero integro, si $n+1$ est numerus primus, kann ich nicht sehen, und habe gemeint, es sey nur eine Observation von dem Wallis oder Fermat. Des Hrn. Delisle und Hrn. Winsheim vergeblich unterfangene Tabellen zeigen, wie nöthig dass es sey auf einer Akademie Original-Geister zu haben: ich habe das problema, so wie Ew., ex tempore solvirt und bin versichert, dass, so Einer recht alle compendia und schon verfertigte tabulas zu employiren wüsste, und sonsten in dem Rechnen eine Fertigkeit besässe, er innert 2 Tagen die begehrte Tabelle verfertigen könnte. Ich glaub, dass man gar viel solutiones geben könnte; ich will Ihnen die meinige überschreiben, damit Sie sehen, ob sie mit der Ihrigen übereinkomme. Vielleicht haben Sie eine noch leichtere Regul als ich, welche in diesem Fall mir zu überschreiben bitte. (Fig. 27.) Sit Z zenith, P polus, S locus stellae secunda vice observatae: Ex data elevatione poli habetur ZP, et ex declinatione habetur PS, atque ex intervallo temporis a prima ad secundam observationem habetur angulus ZPS, qui non differre a dimidio angulo horario censendus est. Quaeratur itaque angulus ZSP, sitque ejus sinus $= c$, cosinus $= \gamma$; sinus totus $= 1$, sinus arcus $SP = b$, sinus anguli mutatae declinationis a prima observatione ad secundam $= \alpha$, erit sinus anguli horarii quaesiti (id est, sinus anguli intercepti inter verum meridianum et illum qui respondet medio observationum intervallo) $= \frac{\gamma \alpha}{4bc}$; ex. gr. die aequinoctii, si sol tribus horis ante, totidemque fere post meridiem sub eadem altitudine observatus fuerit, sub elevatione poli 60 graduum, invenio tempus medium inter utramque observationem differre a tempore verae culminationis um 12 Secunden und zwischen 14 und 15 Terzen. Ich weiss nicht ob ich mich im Calcul aus Uebereilung überstossen, die Methode aber ist gewiss gut und fundirt sich auf die Natur trianguli sphaerici valde parvi pro rectilineo habendi . . . .

(Suit un rapport sur différentes démarches faites par Bernoulli pour engager différens jeunes savans étrangers au service de l'Académie).

Ew. Mechanic erwarte mit grosser Impatienz. Es ist mir lieb, dass man den IV tomum Comment. auch druckt. Wenden Sie doch bei dem Hrn. Kammerherrn alle Kräfte an, dass die Commentarii fleissig und régulièrement gedruckt werden; Sie wissen, von was grosser Consequenz solches ist wegen der Ehr der Akademie. Es ist mir lieb, dass von meinen pièces einige estime gemacht wird; ich werd mit nächstem Brief wieder eine schicken, dieses Mal ist mir die Zeit zu kurz worden. Ich bin Ihnen obligirt, dass Sie haben meine pièce von den oscillationibus penduli flexilis coram Academia vorlesen wollen. Haben Sie seithero auch gedacht an die vibrationes laminae elasticae muro verticali perpendiculariter infixae. Ich finde pro curva diese Aequation $n\,d^4 y = y\,d x^4$, allwo n eine quantitas constans, x die abscissae, y die applicatae, $d x$ constans. Aber diese Materie ist gar schlüpfrig, und möchte gern Ihre Meinung darüber hören: Obgedachter Aequation satisfacirt die logarithmica, wie auch dieser Aequation $n^{\frac{1}{2}}\,d d y = y\,d x^2$, keine aber ist pro praesenti negotio general genug. Sie werden schon observirt haben, dass $n\,d^m y = y\,d x^m$ pro casu particulari in sich begreift $\alpha\,d^p y = y\,d x^p$, allwo p ein Divisor ist von m... Der Herr Bülffinger schreibt mir, als wenn der Herr Krafft ganz gewiss mit nächstem hier wieder eintreffen werde. Der Herr Bülffinger ist Geheimer Rath von dem Herzog von Würtemberg worden und soll gleichsam als ein premier Ministre bei ihm stehn, der alles allein macht.

Ich möchte wissen, wozu der Herr Lotter bei der Akademie destinirt ist, denn meines Erachtens ist er vor diesem im Vorschlag gewesen dem Hrn. Prof. Bayer zu succediren; es scheint also, dass man die letzte Classe vermehren will. Sie wissen ohne Zweifel, dass die Akademie von Paris eine Expedition unter den aequatorem geschickt. Sie bestehet insonderheit aus dem M. Bouguer (so als Astronome bei der Akademie angenommen worden, da der Platz dem Hrn. Delisle lang ist offen behalten gewesen) aus einem la Condamine, so schon in Constantinopel gewesen, und wenn ich mich recht erinnere, dem M. Cassini selbsten. Man schreibt mir, dass sie gar einen grossen apparatum von Instrumenten mit sich genommen haben. Es wäre sehr zu wünschen gewesen, dass man beiderseits die Kamtschatker und diese Expedition recht unter sich hätte concertiren können. Wenn einmal das gute Verhältniss zwischen beiden Reichen hergestellt ist, hoffe ich zwischen den beiden Akademien gute Dienste leisten zu können, wenn man mich employiren will, so wie ich ohne Ansehung der Bösen von Grund meiner Seelen verlange, und im Fall man es begehrt, gern nach Paris selber auf meine Kosten zu gehn verspreche. Ich bin dort gar wohl gelitten und in einer Reputation, welche meine wenige mérites weit übersteigt. Wenn Sie nouvelles haben von Kamtschatka, bitte mir selbige zu berichten. Neulich war ich mit Herr Prof. Schöpflin in Huningue und wollten wir das Fort, so über den Rhein angelegt, besehen, und begehrte deswegen der Herr Schöpflin von dem Commendanten die Erlaubniss; dieser aber, so mich hat in der Kutsch gesehen, fragte wer ich wäre, da dann der Herr Schöpflin meinen Namen nannte: da kam gleich ein Officier und sagte dem Commendanten: Monsieur! Gardez vous en bien; il est encore aux gages de la Czarine. Der Commendant aber, so mich gar wohl kennet, liess uns nichts desto weniger alles zeigen . . . . .

LETTRE V.

SOMMAIRE. Envoie un mémoire de mécanique. — Autres problèmes de physico-mathématique dont il s'occupe. — Rectifications d'une erreur commise dans la solution du problème astronomique de Delisle, dans la lettre précédente. — Sept problèmes proposés par König

Basel d. 4. Juni 1735.

Ich habe mir vor einigen Wochen die Ehr gegeben Ew. zu schreiben. Weil ich dazumalen etwas weniges beschäftigt war, so habe nicht können eine pièce, so wie ich willens war, schicken. Solches verrichte nunmehro*), da mich Ew versichern, das der Herr Kammerherr ein gar geneigtes Urtheil von meinen Productionen fällt. Ich hoffe, dass diese pièce Ew. auch nicht missfallen werde, sonderlich wenn Dieselben die Application in dem andern Theil (welchen

*) Vraisemblablement le mémoire intitulé: De legibus quibusdam mechanicis, quas natura constanter affectat, nondum descriptis, earumque usu hydrodynamico, pro determinanda vi venae aqueae contra planum incurrentis, ab auctoribus, fallaci inductis experimento, falso aestimata Comment tom. VIII pag. 99.

auch schicken werde, sobald auf meine Schreiben eine Antwort werde erhalten haben) werden sehen. Ew. seyen versichert, dass ich Dero Urtheil für allen andern aestimire, sonderlich da Dieselben sich auf die Mechanica gleichsam ex professo applicirt und Sie alles, was Sie entrepreniren, sogleich approfondiren. Ich habe noch andere principia mechanica, als de mutatione systematis a vi gravitationis et subsequa restitutione, aus welchem principio das problema de oscillationibus catenae flexilis solviret habe; darnach, de mutatione systematis a continuato motu et subsequa restitutione, darvon noch nichts producirt habe etc. In meinem vorigen, da ich das problema astronomicum von Hrn. Delisle solvirt, ist zu observiren (wie ich nachgehends mit etwas mehrerer Weil gesehen) dass meine formula dimidium temporis quaesiti exprimirt: auch habe ich in Ausrechnung des Exempels mich verstossen, und ist anstatt 12″ 14‴ zu setzen 28″ 52‴, welches Sie ohne Zweifel auch so werden gefunden haben. Es nimmt mich Wunder, dass auf Ew. Versprechen, seit Ihrem letztern kein Schreiben erhalten. Ich hoffe, dass wenn auch gleich mein versprochenes diploma nicht fertig, Sie deswegen Ihre Correspondenz, davon ich so viel profitire, nicht mit mir unterbrechen werden, und erwarte also auf gegenwärtiges mit Nächstem eine Antwort ... Eben lese in dem Journal que Mess. Krafft et Delisle font presque tous les jours des expériences devant S. M. I. Wenn ich hierbei betrachte, was Ew. Dero Hrn. Vater von der Abundanz, so in Petersburg wie vorhero, noch regiert, geschrieben, scheint es wohl qu'on ne fait que peloter en attendant qu'on joue partie, da doch Russland mit seinem Pelotiren der ganzen Sach den Ausschlag gegeben. Wie wirds erst gehn, wenn Sie anfangen alsgemach oben aben rühren.

Man hat, vor diesem, dem Hrn. Delisle gross Unrecht gethan, da man gemeint, er schicke alles auf Paris; denn ich weiss, dass er sich seit Kurzem gegen die Akademie von Paris excusirt, dass er ihr noch nichts geschickt. Der prix pour 1735 ist wieder ausgesetzt, und werden a. 1737, drey mal 1900 L. über die Ancker ausgegeben werden. Meines Vaters und meine, sowohl lateinische als französische, pièces sind gedruckt. Wenn mir Ew. wollen eine Adresse in Amsterdam anzeigen, so werde einige Exemplare dahin schicken. Mit meiner Hydrodynamic accrochirt sich der Buchdrucker allezeit; es ist bei den jetzigen Kriegszeiten den Buchdruckern zu nichts kein Ernst. Vor ein Paar Tagen habe ich von dem Hrn. König (von dem ich in meinem letztern Meldung gethan zu haben glaube*)) ein programma erhalten, darin er den Geometris sieben problemata intra sex mensium spatium zu solviren proponirt. Die problemata sind profundae indaginis, und hat der Autor nicht wenig praestirt, wenn er sie alle recht solvirt. Den successum werde Ew. mit der Zeit überschreiben. So proponirt er unter Anderm auch: invenire sonum, quam edet fistula data conoidica . . . . . Verbleibe mit aller considération und estime u. s. w.

---

*) Voici le passage relatif à ce M. König et omis dans la lettre précédente: „Es wären noch einige andere Fremde, und sonderlich ein gewisser Herr König von Bern, so bei meinem Vater und mir gar lang Collegia gehalten und in Mathematicis sehr weit gekommen ist“. Il s'est fait connaître plus tard par une polémique dans laquelle il s'engagea avec Maupertuis et Euler.

LETTRE VI.

SOMMAIRE. D. B. envoie la seconde partie de son mémoire. — Nouvelle organisation de l'Académie de St.-Pétersbourg. — Expédition française pour déterminer la figure de la terre — Problème des vibrations d'une lame élastique. — Oscillations d'un berceau. — Quantité d'eau fournie par le Rhin. — Nouveau volume des Mémoires de Paris. — Recherches de Bouguer et de Maupertuis sur les courbes de poursuite.

Basel d. 26. October 1735.

Hiebei überschicke ich den andern Theil meiner Dissertation*), woraus Sie ersehen werden, dass in denen principiis viele realia stecken. Ich demonstrire, dass die pressio venae aqueae den bewussten duplum cylindrum ausmache und confirmire solches mit indubitatis experimentis. Wenn also meine Dissertation kein ander mérite hat, ist sie doch darin nicht zu verachten, dass sie einen von allen Physicis unanimiter recipirten Irrthum ausgetilget. Sonsten sind noch gar viel casus, da ich meine principia nützlich anwenden kann . . .

*) Commentarii Petrop. tom. VIII. pag. 113.

Ich kann mich nicht genug über I. K. M. Munificenz gegen die Akademie verwundern. Ludovicus magnus hat sich gewisslich um die Wissenschaften sehr meritirt gemacht, aber nicht mitten in den Kriegstroublen, in welchem égard es noch kein Monarch unserer glorwürdigsten Kaiserin gleich gethan. Da nun die Akademie jährlich 54,000 R°. hat, wie Sie melden, wird ohne Zweifel aus den beiden Akademieen ein corpus gemacht worden seyn. Es nimmt mich auch Wunder, dass der Herr Delisle wieder seine Dimission begehrt hat. Er hat in Paris gar viel Feinde. Wissen Ew. schon dass der M. de Maupertuis und der Herr Clairaut denominiret sind in den sinum Bothnicum zu fahren, um dort experimenta und Observationen zu machen, welche meistens pro figura terrae determinanda dienen sollen. Vielleicht hat der Herr Delisle Ordre von dem französischen Hofe sich auch dorten einzufinden. Es ist wohl schad, dass diese zwey Höfe nicht in einer guten Harmonie stehen, denn nichts wäre nützlicher für die Wissenschaften, als eine genaue Relation zwischen den beiden Akademien, welche nunmehro die zwey einzigen sind in Europa, so da meritiren genannt zu werden. Vielleicht wird aber dessen ungeachtet auch Jemand aus Ihren Mitteln in den sinum Bothnicum geschickt werden, um conjunctis viribus an einigen Observationen zu arbeiten. Ich wollte wünschen, dass Sie hingeschickt würden: Niemand könnte bessere Anschläge geben. Sie würden eine grosse Freud haben mit dem Hrn. Clairaut bekannt zu werden; vielleicht kommen sie auch auf Petersburg, wenn ihnen solches vergünstigt wird. Ich habe an Hrn. Prof. Wetstein in Amsterdam einige Exemplare von denen pièces, so den prix von 1734 bekommen, adressirt, damit solche mit Occasion Ew zugeschickt werden. Die Russischen troupes, so in unserer Nachbarschaft sind, machen Ihrer Nation gar viel Ehr; alle Leute, so durch ihr Lager passirt sind, reden von der guten Disciplin und gutem Ansehn, wie auch der Officiere Höflichkeit. Ich werde vielleicht auch einmal eine Tour dahin machen. Wenn mein Vater ein diploma bekommen soll, so ist zu wünschen dass solches nicht mehr lang aufgeschoben werde, da er schon alt ist und ziemlich valetudinaire. . . . Ich für mein Theil bin so zu sagen ein anderer Mensch worden, ratione der Gesundheit, seitdem ich unserer guten Schweizerluft geniesse . . . . . Ich schreite nun zu den Mathematicis. Ew. Observationen de vibrationibus laminae elasticae kommen mit meinen überein. Das Notabelste, so dabey auszurechnen, ist dieses: (Fig. 28.) Data longitudine laminae elasticae AD vel AB, dato ejus pondere, dataque distantia DB appenso ponderidebita, cujus ope elasticitas habetur, invenire numerum absolutum vibrationum pro dato tempore. Ich erwarte Ew. mathematischen Brief mit grossem Verlangen. Occasione des Hrn. Königs problematum, habe ich die leges motuum a percussione, quando directio impulsus non per centrum gravitatis transit, generalissime solviret. Mein Vater ist über diesen Punct nicht meiner Meinung und hat eine andere Solution: Ich glaube aber, dass er die Sach nur obiter betrachtet, denn ich bin in meiner Solution gewiss. Ew. sagen mir von den oscillationibus einer Wiege; ich habe solche auch ausgerechnet, nämlich derer Durationen, quando sunt infinite parvae. Meine Solution ist diese: (Fig. 29.) Sit ACB pavimentum horizontale, cui se applicat arcus DCE, utcunque gravis et oneratus; sit centrum gravitatis totius systematis in R, ducatur verticalis CRF; sit F centrum oscillationis pro puncto suspensionis C, sit radius osculi in

$C = R$, $CR = b$, $CF = \beta$; erit longitudo penduli isochroni cum vibrationibus arcus $DCE = \frac{\beta b}{R - b}$.

Neulich hat mich ein fremder Gelehrter gebeten zu untersuchen, wie viel Wasser ungefähr in einer Secunde den Rhein hinunterlaufe, da ich gefunden, dass eins ins andere gerechnet, man 15,000 cubische Schuh rechnen könne.

Es ist wieder ein tomus von den Pariser Mémoires herausgekommen, aber von mathematicis, physicis et mechanicis wenig darin; wenn Sie belieben, kann ich Ihnen eine kleine Recension davon schicken. Der Herr Bouguer und der Herr Maupertuis haben einige Sachen darin von courbes de poursuite, welche nämlich ein Schiff beschreibt, wenn es allezeit grad los läuft auf ein ander Schiff, so in einer geraden Linie geht velocitatibus utrobique constantibus. Man könnte über diese Materie viel problemata erdenken. Des Hrn. Kühn conceptus über die numeros negativos und radicales sind sehr wunderlich und bloss einer démangeaison, sich in etwas zu distinguiren, zuzuschreiben: indem er übrigens scheint rechte fundamenta gelegt zu haben. . . . . Haben Sie lange keine Briefe erhalten von dem Hrn. Bülffinger: Er ist nun bei Serenissimo premier Ministre.

Ich verharre u. s. w.

LETTRE VII.

Sommaire. Affaires de l'Académie de St.-Pétersbourg.

Basel d. 10. März 1736.

.... Sie werden ohne Zweifel meine zwey letzten Schreiben empfangen haben; in dem einen war eine Dissertation de applicatione principiorum mechanicorum a me observatorum. Ich möchte auch wissen ob der Herr B. v. Korff meinen und meines Vaters Danksagungsbrief empfangen. In meinem Brief waren auch meine remarques über den mécanisme de M. de la Croix, so ich auf ordre des Hrn. Präsidenten nicht ohne Mühe nach einer vielmals repetirten lecture gemacht. Wenn ich wüsste, dass bei der Akademie kein Ueberfluss wäre an pièces, wollte ich wieder eine schicken: Es ist aber Schad dass die Commentarii so lange ausbleiben. Ich höre, dass Sie eine Acquisition gemacht an dem Hrn. Moula. Er hat sich gegen mich mit sonderbaren Expressionen bedankt für Alles, was Ew. für ihn gethan und mich gebeten ihn noch ferners in Ihre Gunst zu recommandiren. Ich weiss, dass Sie allerorts die mérites aestimiren und befördern; es braucht also der Herr Moula meine Recommandation keineswegs. Ich habe gehört, dass die Akademie auch eine Acquisition an M. de Mairan gemacht, wozu ich Ihnen gratulire. . . . Es hat mich Wunder genommen, dass meiner Pension mit keinem Wort Meldung gethan in meinem diplomate. Vielleicht bekommen alle fremde Associés die Pension. Ich möchte gern wissen, wer solche sind: ich kenne Niemand als meinen Vater, den M. de Mairan und den Hrn. Bülffinger. . . .

LETTRE VIII.

SOMMAIRE. Lois de percussion de deux corps, si la ligne qui joint les centres de gravité ne passe pas par le point du choc. — Sur les recherches d'Euler relatives à la Brachystochrone dans un milieu résistant. — Sommation des puissances réciproques paires des nombres naturels. — Problème des maxima et minima.

Basel d. 12. Sept. 1736.

.... Für die überschriebenen nouvelles bin ich höchstens verpflichtet. Der verwirrte Zustand unserer Akademie ist zu bejammern, indem so viel Gutes von ihr zu hoffen wäre, wenn sie einmal recht eingerichtet wäre. Vielleicht ist der Krieg daran Schuld: diese Ursach wäre um so viel mehr zu bejammern, indem es nicht scheint, dass solche sobald möchte gehoben werden. . . . Wenn Ew. die pièces, so ich durch den Hrn. Martinet überschickt, durchlesen haben, werde Dero judicium darüber gern vernehmen. Haben Sie auch meine remarques gelesen über das läppische Tractätlein vom M. de la Croix? — In einem von meinen vorigen habe ich proponirt die leges percussionis zu finden, im Fall

28

die linea centra gravitatis jungens nicht per punctum impulsus gehet, als wenn z. Ex. die linea AB (Fig. 30.) utcunque gravis vom globo C impellirt wird, worüber von meinem Vater dissentire. Wenn Sie sich bemühet über dieses problema, so möchte ich gern Dero Solution vernehmen. Es ist mir herzlich lieb, dass Sie sich beständig in Ihren meditationibus mathematicis exerciren und die gelehrte Welt mit Ihren schönen Inventionen bereichern. Ich habe die Mathematic schier völlig verlassen, und wenn es nicht meine Relation mit der Akademie erfordern wird, so werde ich ganz davon abstehn. Den IVten tomum Comment. habe ich schon lange recensirt gesehn; wie kommt's, dass er nicht publicirt wird? Ew. Mechanica erwartet männiglich mit grossem Verlangen. Ew. verlangen meine Reflexionen über Dero mir überschickten Meditationen: ich habe nun nicht der Zeit solche alle zu durchgehn: Sie wissen, dass ich Alles admirire was von Ihnen kommt: etwas weniges will ich allhier erwähnen: In Dero Solution über die Brachystochronas in medio resistente habe ich folgende Scrupel. Es ist nicht genug (Fig. 31.) dass tempus per $Mn + n\mu$ gleich sey tempori per $Mm + m\mu$, denn solches kann geschehn (NB. in medio resistente) ohne dass velocitates in puncto μ beiderseits gleich seyen, welches letztere doch erfordert wird, indem diese velocitates Influenz haben auf das übrige tempus, quod insumitur a corpore dum movetur a puncto μ ad punctum positione datum. Die rechte Solution besteht meiner Meinung nach darin, dass man situm trium elementorum (Fig. 32.) MN, NO, OP inter puncta M et P positione data suche, mit der Condition, dass die velocitas in P invariabilis sey und zugleich tempus per $MN + NO + OP$ minimum. Ob Ew. hierin mit mir übereinkommen, möchte ich gern wissen.

Das theorema summationis seriei

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\text{ etc.}=\frac{pp}{6}\text{ und }1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}\text{ etc.}=\frac{p^4}{90}$$

ist sehr merkwürdig. Sie werden ohne Zweifel a posteriori darauf gekommen seyn. Ich möchte die Solution gern von Ihnen sehen. Was das problema anbelangt de invenienda curva in qua $\int r\,ds$ habeat inter omnes lineas inter eosdem terminos sitas minimum valorem, so dünkt mich, dass es etwas Besonderes habe. Eigentlich zu reden hat das problema keine Solution und ist kein minimum da; denn ich darf ja die puncta A et B (Fig. 33.) nur mit lauter cycloidibus infinite parvis, die doch eine lineam continuam ausmachen, ausfüllen, oder an einander henken, so ist $\int r\,ds = 0$. Es kann auch $\int r\,ds = 0$ seyn hoc alio modo quam figura 34 ostendit, allwo sich die valores affirmativi und negativi von $\int r\,ds = 0$ destruiren können. Wenn man aber curvam forderte, quae nullibi habeat radium osculi nec $= 0$, nec $= \infty$, scheint es, das problema habe eine reelle Solution, und wollte ich, um dieselbe zu finden, die evolutam suchen und zwar methodo isoperimetricorum, mutatis aliquibus circumstantiis.

LETTRE IX.

SOMMAIRE. Réponse à la critique de la pièce de concours sur les inclinaisons des orbites planétaires — Sur la solution du problème de la percussion excentrique des corps, fournie par Euler.

Basel d. 25. Januar 1737.

. . . . . Ew. Meinung über meine pièce, so den prix erhalten, würde mich sehr mortificiren, wenn ich nicht gesehen hätte, dass Sie dieselbe nur obenhin und in höchster Eil müssen gelesen haben. Es ist mir niemals in den Sinn gekommen das planum aequatoris solis zu verändern, damit die Inclinationen in der Ordnung fortgehen wie die excentricitates, sondern ich habe nur die Anmerkung gemacht, dass weil das planum aequatoris noch incertum ist, es nicht unfüglich sey zu untersuchen, wie es müsse placirt werden, damit das medium arithmeticum von allen Inclinationen minimum sey, welches ich auch gethan, und gethan zu haben nicht bereue. Ich kann Ew. versichern, dass, nach dem judicio aller meiner Correspondenten zu schliessen, diese pièce beinahe das beste aller meiner Werke seyn müsse. Ich vermuthe, dass in Dero Solution meines problematis de percussione corporum, cujus directio extra centrum gravitatis cadat, ein Schreibfehler seyn müsse und namentlich in diesen Worten: Sit summa omnium corporis particularum per suas respectivas ab axe *distantias* multiplicatum $= s$. In meiner Solution sind viel merkwürdige Sachen begriffen. Ich hätte viele pièces einzuschicken, allein . . . Die Mathematica werde ich ein andermal beantworten.

Ich verbleibe u. s. w.

LETTRE X.

Sommaire. Sur les mêmes sujets.

Basel d. 16. März 1737.

Für die umständliche Nachricht, betreffend unsere Akademie und in specie derselbigen Chef, sage ich gehorsamsten Dank... Zur fernern Antwort auf Dero geehrtes vom 19. November, kann nicht übergehen Dero nicht sonderlich favorables judicium über meine überschickte pièce über inclinationes orbitarum. Sie sagen, man sehe wohl, dass ich sie mit Eil verfertiget; aber ich sehe auch, dass Sie solche mit Eil überlesen. Ich kann nicht sehen warum Sie glauben, dass ich das planum aequatoris Solis geändert habe um den excentricitatibus zu satisfaciren, indem ja meine Theorie mit sich bringt, dass nulla relatio inter excentricitates et inclinationes könne oder müsse suspiciret werden. Meine remarque ist in diesem Stück nur darin bestanden, dass, wenn man das planum aequatoris eo modo quem indicavi ändert, alsdann summa inclinationum minima werde. Lesen Ew. solches noch einmal, so werden Sie vielleicht die Sach besser einsehen. Aus den legibus percussionum excentricarum habe ich veram theoriam de motu a percussione in corporibus utcunque rotando se invicem impellentibus deducirt. Als, z. Ex., es sey (Fig. 35.) AB eine linea uniformis et uniformiter gravis, CD desgleichen und sit $AB = CD$. Wenn nun die extremitates B et C an einander stossen velocitatibus contrariis et aequalibus, alldieweil percussionis momento puncta A et D immobilia sind (welches geschiehet wenn duplex motus, alter progressivus alter rotatorius in lineis AB et CD ist) fragt sich, was für ein motus in lineis post percussionem seyn werde. Ich werde meine meditata hierüber in eine pièce zusammenfassen und solche der Akademie communiciren. . . . Ew. Mechanic erwarten wir mit sonderlichem Verlangen und ich verspreche Ihnen, dass ich sie d'un bout à l'autre mit aller Begierd und Aufmerksamkeit lesen werde. Viele Leute haben auch schon an mich wegen diesem opere geschrieben . . . .

LETTRE XI.

SOMMAIRE. Annonce un mémoire sur le choc des corps. — Doutes sur un théorème d'Euler relatif aux séries infinies doubles.

Basel d. 18. Mai 1737.

. . . . Ich bin jetzund mit ein und andern ausserordentlichen Geschäften occupirt: doch werde ich in etwa 6 oder 8 Wochen eine pièce schicken, darin meine Solution de motu corporum u. s. w. enthalten. Unsere Solutionen kommen völlig überein. Ich weiss aber dato noch nicht, ob die Ihrige general ist, so dass man könne motum corporum utcunque rotando se invicem impingentium daraus determiniren, ohne andere puncta zu consideriren, als punctum impulsus cum centris oscillationis et gravitatis und vermittelst dieser die formulas pro velocitatibus algebraice exprimiren. Ihre observationem über die series, *dass nämlich einer jeden seriei, wenn dieselbe sowohl in antecedentia als consequentia* in *infinitum continuirt wird, summa sey* $=0$, sehe ich nicht völlig ein, quo sensu man selbige eigentlich nehmen müsse. Z. Ex. von den progressionibus geometricis aut recurrentibus, tanquam quae ex geometricis conflantur, sehe ich solches wohl; aber ich kann nicht sehn, quo fundamento man sagen könne, dass z. Ex. . . . .

$$\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{10}\ldots\ldots$$

(allwo der terminus generalis ist $\frac{1}{1+xx}$, wenn ich von dem mittlern termino den exponentem termini x zähle) sey $=0$. . . Die Mathematica habe ich seit etwas Zeit ganz hintangesetzt, nunmehro werde ich aber selbige wieder excoliren. . .

LETTRE XII.

Sommaire. Nouvelles de M. de Maupertuis sur son expédition en Laponie. Confirmation de l'aplatissement de la terre. — Considération sur les oscillations du pendule.

Basel d. 29. November 1737.

. . Ich habe einen Brief von M. de Maupertuis bekommen, darinnen er mir den succès von ihrer Expedition in Lapland erzählt. Es ist nun ganz ausgemacht, dass die Erde aplatie und nicht allongée sey, also dass doch endlich die Vernunft die Oberhand erhalten. Sie haben auch mit den pendulis gefunden, dass die gravitas gegen Norden viel grösser ist als unter dem aequatore. Die experimenta und observationes sind alle mit einer sonderbaren Dexterität und Acuratesse und auf vielerley differente Weise, welche sich alle confirmiret haben, gemacht worden. Ich bin darauf gefragt worden, ob die resistentia aëris ein pendulum retardire ratione temporis oscillationi convenientis, oder accelerire. Ich finde das Letztere. Ich habe in specie den calculum instituirt in hypothesi, dass die resistentia medii veluti infinite parva sey ratione gravitationis, welches denn im calculo experimentorum wohl Platz findet, indem ein pendulum wohl bis 20 Stunden lang sensible oscillationes gemacht hat. Sit diameter corporis oscillantis in ped. Angl. expressa $= m$, sitque gravitas specifica fluidi ad gravitatem specificam globi ut h ad 1, sit dimidius arcus cycloidicus a pendulo descriptus in ped. expressus $= b$, tempus oscillationis in medio non resistente $= T$, ratio quadrantis circuli ad radium ut q ad 1, tempus oscillationis in medio resistente $= t$; dico fore $T - t = \frac{T}{2q}\sqrt{\frac{hb}{m}}$. Ich möchte wohl wissen, ob Sie es auch also finden. Ich zweifle nicht, dass nicht diese Materie vollkommen werde in Ihrem opere tractirt seyn; allein ich habe es noch nicht von dem Buchbinder erhalten können; es heisst hier so wohl *savtern**), als in Petersburg. . . .

LETTRE XIII.

Sommaire. Achèvement de l'Hydrodynamique.

Basel d. 28. December 1737.

Cette lettre ne contient rien de scientifique si ce n'est la nouvelle de l'achèvement de l'Hydrodynamique. L'auteur demande l'autorisation de la dédier à S. M. I. par la raison qu'il considère cet ouvrage comme appartenant à la Russie et à l'Académie de St.-Pétersbourg spécialement.

*) Le dicton des ouvriers russes: завтра, *demain*.

LETTRE XIV.

Sommaire. Dédication de l'Hydrodynamique au Duc de Courlande. — Sommation des carrés réciproques des nombres naturels par Nicolas B. — Nouvelles ultérieures de l'expédition en Laponie.

Basel d. 29. März 1738.

Ew. Letzteres von 17. Januar habe ich recht erhalten. Auf Gutbefinden unseres Hrn. Präsidenten habe ich mein Werk I. Durchl. dem Herzog von Curland dedicirt. Es ist mir leid gewesen, dass Sie mir nicht zugleich geschrieben, wie I. Durchl. Dero Familienwappen mit dem Curländischen verknüpfet haben, damit ich solches hätte können vor der Dedication setzen. Wenn I. D. meine Dedication nicht ungnädig aufgenommen, so bitte mir obgedachtes Wappen nachzuschicken, denn es soll mein Buch auf französisch translatirt werden und werde ich trachten, dass diese andere Edition besser ausfalle als die Erstere. Aus eben dieser Ursache können Sie mir keinen grössern Gefallen thun, als wenn Sie mir Ihre remarques bald schicken, im Fall Sie dasselbe zu lesen würdigen, damit ich davon profitiren könne. Sie wissen, wie hoch ich alles ästimire, was von Ihren Händen kommt. Wäre etwas sonsten zu ändern, was die Akademie angehet, bitte mir solches gleichfalls zu melden, denn ich werde mich völlig nach Ihrem Gutdünken richten. . . . Mein Vetter, der Herr Prof. Nic. Bernoulli hat mir gewiesen eine solutionem a priori de invenienda summa seriei $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots$ welche sehr ingenios ist. Die Demonstration a posteriori ist nicht schwer und sind zwey Solutionen in dem Stirling. Ich will das nächste Mal solche copiren und Ihnen schicken; man kann sie mit guter Manier Commentariis Petropolitanis inseriren. Dass ich mich seit etwas Zeits ein wenig saumselig befunden mit Ueberschickung einiger pièces, ist meine Hydrodynamik Schuld gewesen. Der Herr Maupertuis praetendirt, dass durch die astronomischen Observationen und würkliche Ausmessungen die figura terrae sey ganz ausgemacht worden; ich glaub ihm, denn er ist ein gelehrter Mann. Man braucht nicht die elevationem poli, sondern nur differentiam elevationum, welche gar accurat kann gewonnen werden. Er lässt in einem Buch alles genau drucken, was in der laponischen Expedition ist praestirt worden, welches gar ein schön Werk seyn wird und wird solches der Akademie und dem Hrn. Präsidenten schicken. Er ist der Chef gewesen von der Expedition und ist in Paris gar in einem grossen Ansehen. Von Hrn. König hab ich nichts gehört: er hat mir geschrieben er wolle seine specimina nach Petersburg schicken. Verbleibe u. s. w.

LETTRE XV.

Sommaire. Envoi de l'Hydrodynamique. — Euler remporte un prix de l'Académie de Paris. Expériences sur la force des rameurs, instituées à Genève par Cramer. — Problèmes isopérimétriques.

Basel d. 24. Mai 1738.

Durch mein Letzteres, darauf ich noch keine Antwort erhalten, hab ich Ew. avisirt, wie dass ich auf des Hrn. Kammerherrn Gutbefinden meine Hydrodynamik I. Durchl. dem Herrn Herzog von Curland dedicirt habe. Nunmehr berichte ich, dass vor etlichen Wochen einige Exemplare nach Petersburg an Hrn. Kammerherrn gesandt, davon Er Ew. ohne Zweifel ein Exemplar zustellen wird. Wenn Sie sich die Mühe geben solches zu durchblättern, so bitte mir Dero remarques zu communiciren, davon ich mit aller Erkenntlichkeit profitiren werde, und mir zu melden, wie das opusculum von der Akademie ist aufgenommen worden. Ueberschreiben Sie mir auch amice und unter uns, wie die Dedication ist aufgenommen worden: meine Intention hat nichts als eine desinteressirte Erkenntlichkeit und unserer Akademie Ehr und Interesse zum Fundament gehabt, und wird vielleicht dessen ungeachtet von Einigen sinistre expliciret und carpiret werden. Wer kann aber alle satisfaciren. Vor etwas Zeits habe ich von Paris vernommen, dass Ew. den $\frac{1}{3}$ des praemii erhalten*), welches sogleich Dero Freunden und Verwandten communicirt, die sich sehr darüber erfreuet. Ich gratulire zu diesem succès und zweifle nicht für das Künftige an einer völligern Victori. Die Quästion hatte uns gar zu general gedünkt, so dass weder mein Vater, noch mein Bruder, noch ich darüber gearbeitet. Es kommt Sie aber leicht an, was uns schwer ist. A. 1740 wird der aestus maris zur Quästion ventilirt werden. Es ist Schad, dass diese Quästion so operos ist und ein ganz systema mundi erfordert; des Newtons Explication ist bei weitem nicht sufficient. .... Ich habe dem Hrn. Kammerherrn auch ein Exemplar von meiner pièce Sur les ancres überschickt, welche er vielleicht Ew. communiciren wird. Mein Bruder hätte gern auch ein Exemplar von seiner pièce dazugethan, wenn er noch eins übrig gehabt hätte. Aus meiner Hydrodynamicae sectione ultima werden Ew. ersehen, dass ich meine novam navigationis ideam noch nicht verlassen; in allem Fall bin ich versichert, dass diese disquisitiones aufs wenigste in theoria gefallen werden. Ich verspreche keinen grössern effectum ab elevatione aquarum als ab agitatione remorum, aber vielleicht einen gleichen. Wenn ich werde eine Antwort von Genf erhalten haben, so werde ich positiver darüber judiciren können: Ich hab den Hrn. Prof. Cramer, welcher gar ein gelehrter Mann ist, gebeten einige experi-

*) Dissertatio de igne.

menta pro vi remigationis supputanda zu machen, und keine Kosten deswegen zu sparen; er hat solches zu thun versprochen. Den V tomum Commentariorum hoffe ich bald zu erhalten. Ich hab neulich aus occasione alicujus problematis mechanici, folgendes problema tractirt: Invenire curvam, quae inter omnes isoperimetricas et eosdem terminos habentes habeat $\int R''' ds$ maximum, allwo R den radium osculi, ds das elementum curvae exprimirt. Ich habe zwo solutiones, in deren einer ds, in der andern dx constans supponirt wird; kann aber die identitatem curvae, quae utraque solutione obtinetur, nicht sehen. Diese problemata sind sehr behutsam zu tractiren, und möchte ich gern, dass Sie solches auch aggredirten, um zu sehen, ob wir einerley solutiones erhalten. Ew. haben mir vor etwas Zeit gesagt von einem problemate simili, nämlich determinare inter curvas omnes, inter eosdem terminos positas, illam quae habeat $\int R\, ds$ minimum, und sagen, dass die cyclois unice satisfacire, da ich doch finde analytice, dass $R = 0$, cui aequationi infinitae curvae aut veluti curvae satisfaciunt. Wenn aber conditioni hujus problematis die aequalitas perimetri dazugethan wird, so finde ich diese aequationem, posito ds constanti, $ds = \frac{2R\,dR}{\sqrt{(-4RR + 4nR + g)}}$, quae est ad cycloidem, si fiat $n = 0$ . . . .

LETTRE XVI.

SOMMAIRE. Dédicace de l'Hydrodynamique. B. attend avec impatience le jugement d'E. sur cet ouvrage. Sommation des puissances réciproques des nombres naturels. Remarques décousues sur différens sujets.

Basel d. 9. August 1738.

Kurz nachdem ich Dero wertheste Schreiben empfangen habe, bin ich auf das Land verreist. Vor meiner Abreise habe ich meinem Bruder Commission gegeben eine Copey von meiner Vetters solutione analytica de summatione seriei $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} +$ etc. meines Vaters Brief beyzufügen. Ew. belieben mir zu melden wie die Dedication meiner Hydrodynamic ist aufgenommen worden. Ich hab in Verfertigung derselben mehr auf das corps de l'Académie als auf mich selbsten reflectirt. Es ist mir leyd, dass die gelehrte Zeitung hat können zu einigen sinistren Explicationen Anlass geben; ich könnte Ihnen extracta von andern Recensionen schicken, darin der Dedication ist Meldung, und zwar cum applausu geschehn. Mit dieser Dedication habe ich ja nicht praetendirt I. Durchl., sondern mich und mein opus zu beehren und hab deswegen die Erlaubniss solcher Dedication für eine sonderbare Gnad gehalten. . . . Dieses mein Werk müsste sehr favorablement seyn aufgenommen worden, wenn ich den Briefen, so ich allerorten her empfangen, den geringsten Glauben beimessen sollte. Da aber die flatterie heutigstags für eine Höflichkeit passirt, so weiss ich nicht, wie weit ich mich über diese Approbation erfreuen soll. Ew. Zeugniss wird mir gewiss statt aller seyn, indem sowohl Dero Freundschaft als ingenium erkenne. Das Manuscript, so ich in Petersburg gelassen, ist defect und nicht ohne Fehler, und wäre mir deswegen lieb, wenn es supprimirt würde, da nun das Werk selber ist gedruckt worden. Wenn unterdessen selbiges Manuscript Ihnen nicht missfallen, so kann ich mir noch ein Mehreres von dem gedruckten versprechen. Untersuchen Sie es unterdessen und geben mir Ihren Rath wegen der 2ten Edition, was darin zu ändern und zu corrigiren, und was etwa vor Experimente von andern Autoritäten sind gemacht worden, wie auch von den Academicis, als z. Ex. von Hrn. Prof. Krafft, welcher da soll über meine letztere theoria de impetu aquarum auch einige experimenta gemacht haben. Ich erkenne Ew. eruditionem, Fleiss und Penetration, und wenn Sie sagen etwas mit Fleiss untersucht zu haben (denn im Eilen sind alle Leute Fehlern unterworfen) so ist mir Ihr judicium ohne appel. . . . Ew. haben Recht wegen der zwey Solutionen von dem Hrn. Stirling; sie enthalten nur zwey differente Manieren sehr geschwind dazu zu approximiren; meine Memori hatte mich betrogen: viel mehr ist zu glauben, dass er die wahre Summe nicht gewusst. Es scheint meines Vetters Solution komme überein mit Ew. anderer Solution. Was die erstere Solution anbelangt, so habe ich gleich gesehen, dass sich dieselbe auf alle potestates pares erstreckt. Mein Vater hat mir Dero letztern Brief gewiesen. Ich habe daraus ersehen, dass Ew. vieles über den situm corporum humido insidentium meditirt, wie auch de motu ossillatorio corporum, quae vi aliena a situ suo naturali fuerunt paululum deturbata. Diese Materie ist mir nicht ganz neu gewesen, weil ich aber jetzt nicht der Zeit gehabt mir meine Meditationen darüber zu rappelliren, so will ich mich in meinem nächsten darüber expliciren. Es ist schon lang, dass ich nicht mehr de problematis Diophanteis gedacht, ich erinnere mich dass ich die meisten problemata, von denen Ew. Meldung thun, vor diesem considerirt habe und dazumal die Solution nicht habe finden können. Unterdessen glaube ich, dass die meisten formulae, davon Sie Meldung thun, von einander dependiren. Von einem Andern würde mich das Fundament (dass, wenn $a^4 \pm b^4$ nicht in kleinen Zahlen ein Quadrat mache, es auch nicht in grossen Zahlen geschehen könne) suspect vorkommen, indem nicht leicht kann gesagt werden, was in natura kleine und grosse Zahlen seyen. Von Ihnen aber bin ich versichert, dass die Demonstration omnem rigorem geometricum haben werde .... In meinem letztern habe ich eines problematis geometrici inveniendae curvae, quae inter omnes possibiles ejusdem longitudinis faciat $\int R''' \, ds$ maximam aut minimam. Ich hatte mir vorgenommen hierüber ein Schediasma zu verfertigen. Da aber die calculi zu abstract und weitläufig sind, muss ich's aus Mangel der Zeit auf ein ander Mal verschieben. Dies Mal schicke ich ein ander Schediasma, welches zwar eben nicht

*

sonderlich profunde Meditationen in sich haltet, welche aber von dem publico pflegen besser aufgenommen zu werden und dessenthalben sich vielleicht besser in die Commentarios schicken. Ich hab nicht mehr als ein Paar Tage daran wenden können. Sollte es Ihnen gar zu trivial vorkommen, so kann es supprimirt werden; sonsten aber will ich damit continuiren.

LETTRE XVII.

=

Sommaire. Nouvelle théorie du son des flûtes. Demande le sentiment d'E. sur l'Hydrodynamique. Thermomètre de Delisle. Notice littéraire de Londres. Fontaine. Traité de musique d'Euler. Problème des isopérimètres. Longueur du pendule composé.

Traduite de l'allemand*).

Bâle 7. mars 1739

Monsieur!

J'ai différé jusqu'ici de répondre à votre lettre du 23. décembre 1738, dans l'espérance de trouver en attendant assés de loisir, pour pouvoir vous envoyer en même temps un mémoire mathématique. Mais comme mes occupations pourroient continuer de m'en empêcher encore, je n'ai pas voulu la différer plus longtemps et je vous enverrai, avec la prochaine occasion, la pièce en question, ayant assés de matériaux

*) L'original autographe de cette lettre manque aux archives de l'Académie. Cette traduction française, faite par Nicolas Fuss et écrite de sa main s'est trouvée à côté des copies de quatre lettres de Jean Bernoulli (les Nos. 4, 5, 6 et 7 de ce Recueil). Cette circonstance suffit pour en garantir l'authenticité. *F.*

en réserve pour en composer une quantité considérable. On peut donc librement imprimer tout ce qui se trouve encore de moi, en cas qu'on manque de mémoires pour les commentaires, et je tâcherai de mon côté à la provision pour les volumes suivans. J'ai quantité de méditations sur les lames élastiques, sur le mouvement et la théorie de la lune, sur les oscillations des corps flottans, etc.

J'éxpedierai aussi en peu de temps les expériences de M. Cramer sur la force des rameurs, comparée avec le poids et accompagnées de mes remarques. Je suis tombé aussi sur une nouvelle théorie du son des flûtes qui s'accorde très bien avec tout ce qu'on a d'expériences là-dessus. Elle s'étend sur les tuyaux coniques, aussi bien que sur ceux dont le fond a une ouverture de grandeur donnée. Je n'ai tout cela qu'en idée, n'ayant pas trouvé encore assés de loisir pour faire les calculs qui seront très pénibles et exigent une connoissance parfaite d'hydrodynamique, de sorte que j'ignore si la dernière idée sera d'un parfait accord avec les expériences; si cela étoit, elle seroit de la plus grande importance . . . .

L'on me fait de tout côté les complimens les plus flatteurs sur mon ouvrage hydrodynamique, mais je sais très bien comment les interprêter, et j'ai assés de confiance en votre amitié et en votre pénétration, pour n'en accepter aucun avant que vous ne m'en ayés communiqué votre jugement. C'est pourquoi je vous prie d'honorer cet ouvrage d'une attention particulière, surtout les deux dernières sections qui, j'ose le croire, ne contribueront pas peu au perfectionnement de la physique, de la mécanique, etc.

J'ai conclu des comparaisons de M. de Maupertuis entre son thermomètre et celui de Del'isle, que sous le cercle polaire, le plus grand froid répond à 215° de Del'isle, en supposant la congelation de l'eau à 153 de ses degrés. Mais je voudrois bien savoir au juste, quel est le point de congelation sur le thermomètre de Del'isle.

J'ai reçu de Londres les particularités suivantes touchant l'ouvrage de M. Machin „L'ouvrage de M. Machin sur les „mouvemens de la Lune n'est pas encore prêt à paroître: „c'est dommage: plusieurs erreurs de Newton y seront rele-„vées et il y aura bien des choses nouvelles: En général, quoi-„que Newton passe pour le Dieu des Anglois, *non jurant in* „*verba magistri*. Il s'est élevé une cabale de mathématiciens, „qui décrient entièrement l'usage de l'analyse et veulent ré-„soudre tous les problèmes par la géométrie.“ On croit que Newton a aussi établi que la force de l'aimant agisse en raison triplée des distances, tout comme vous me marquez que M. Krafft l'a trouvée . . . .

Un mathématicien à Paris, nommé Fontaine, homme de beaucoup de génie, quoique peu connu encore, a fait un mémoire où il prétend avoir épuisé tout le calcul intégral. D'abord on s'est moqué de lui, mais après l'avoir vu résoudre quantité de cas très difficiles, on a commencé à y faire plus d'attention et nommé quelques commissaires pour examiner sa découverte: tout le monde en a parlé comme du dernier terme de la géométrie; cependant M. Clairaut a montré que la méthode de M. Fontaine, quoique très importante, n'est pas générale.

Je suis charmé que ma solution du problème *de firmitate corporum* s'accorde avec la vôtre. La matière est si délicate, qu'on y peut prendre facilement *nubem pro Junone*. Au reste les oscillations peuvent être irrégulières quoiqu'elles soient infiniment petites et faites autour d'un axe simple.

Car les oscillations d'une surface plane flottante verticalement sur l'eau, quoique infiniment petites, seront irrégulières, à moins que la ligne, qui passe par les deux centres de gravité, ne coupe en deux également la ligne dans laquelle la surface du plan oscillant coupe la surface du fluide. Je suis très curieux de voir votre nouvel ouvrage intitulé *Scientia navalis* *). Votre traité sur la musique ne doit pas être moins intéressant; mais je doute que les musiciens adopteront votre tempérament. Peut-être ne doit on regarder que comme une observation la position que le terme général $2^n. 3^m. 5^p$ renferme tous les tons actuellement reçus. Je crois que dans la musique on n'insiste pas précisément sur une parfaite harmonie, ou qu'on ne distingue pas même le comma qui n'est point sensible à l'oreille, et si la progression géométrique donneroit les tons assés exactement, pour qu'ils donnent, *quoad sensum*, une proportion simple, elle seroit préférable à cause de la transposition et de bien d'autres avantages.

Je suis fâché de n'avoir pas le temps de penser aux beaux théorèmes que vous m'avez communiqués; mais je doute qu'on puisse les démontrer, puisque vous ne les avez trouvé qu'*a posteriori*. Votre solution des isopérimètres est très profonde et semble épuiser tout ce qu'on peut faire dans cette matière. Peut-être me suis-je trompé dans le calcul que j'ai fait pour voir si votre solution s'accorde avec la mienne. Je ferai voir à la première occasion, comment ces

---

*) La *Scientia navalis* parut en 1749; aussi en est-il question dans les lettres de cette année et des années précédentes (voir p. ex. la lettre 53). Or même cet anachronisme apparent ne peut à mes yeux, rendre suspecte l'authenticité de cette lettre; je suis plutôt tenté de croire qu'à cette époque déjà, Euler s'occupait de son grand ouvrage nautique et en avait fait part à Daniel B. *F.*

problèmes renferment la courbure de l'élastique: Je crois que pour l'équation générale pour la lame uniforme, naturellement droite et élastique, il faut rendre $\int \frac{ds^3}{rrd\xi^2}$ un maximum, en prenant $d\xi$ constant. Car je puis démontrer, qu'une lame quelconque, forcée à un état de courbure donné, doit être douée d'une force vive *potentielle* égale à $\int \frac{ds^3}{rrd\xi^2}$, et je pense qu'une lame élastique, qui prend d'elle même une certaine courbure, se pliera en sorte, que la force vive sera un minimum, puisque autrement la lame même se mouvroit. Je me propose de développer d'avantage cette idée dans un mémoire: mais en attendant je souhaiterois de savoir vótre sentiment sur cette hypothèse. Je vous prie aussi de me faire savoir ce que pense actuellement mon père sur la réalité de ces problèmes isopérimetriques, après que vous lui avez communiqué votre solution: il ne m'a pas fait voir sa réponse.

J'ai communiqué à M. de Maupertuis vos réflexions sur la longueur du pendule composé, qui m'ont parfaitement satisfait, la construction étant telle que les temps doivent être tautochrones, soit que le pendule fasse ses oscillations librement, soit qu'on l'applique à une horloge, tout comme on a trouvé par les expériences. Et quand même il n'y auroit pas de parfait tautochronisme, cela n'auroit point d'influence sensible sur la différence des temps du même pendule appliqué à la même horloge.

Dans ma lettre prochaine à M. Clairaut, je m'informerai des problèmes où il s'est rencontré avec vous: je crois que c'est sur le mouvement du pendule dans le milieu résistant.

LETTRE XVIII.

SOMMAIRE. Concours au prix de l'Académie de Paris pour le problème du flux et du reflux. Hypothèse des vertiges infinis pour expliquer la cause de la pesanteur.

Basel d. 30. April 1740.

. . . Es werden Dieselben allbereit den succès von den Pariser pièces wissen. Der prix ist in vier Theile getheilt worden, davon der eine ist Ew. zuerkannt worden, wozu ich Ihnen gratulire; ein anderer Theil ist dem Mac Laurin, ein dritter einem unbekannten Cartesianer und einer mir zuerkannt worden. Man schreibt mir, es sey noch nichts Vortrefflicheres nach Paris für dergleichen praemia geschickt worden, als drei von diesen pièces; die vierte aber hat man nicht rühmen wollen und mag vielleicht sein einzig mérite seyn, kein Anti-Cartesianer gewesen zu seyn. Von Ihrer pièce hat man mir insonderheit gerühmt, wie sie die figuram terrae, quatenus ab actione lunae mutatur, determinirt, und anbei inertiam aquarum sehr geschicklich in Consideration gezogen. Ich für mein Theil habe, um mich nicht allzuweit in die pure geometrica einzulassen, mich contentirt die differentiam inter axem et diametrum perpendicularem ab actione lunae ortam zu determiniren; was aber die considerationes physicas anbelangt, habe ich alle Umstände mit der möglichsten exactitude betrachtet. Die Observation, so Herr de la Croyère dem Hrn. Delisle gesagt und welche mir Ew. überschrieben, hab ich der Akademie zu Paris als uns Beiden sehr favorabel überschrieben und dabei gemeldet, dass von unserm Hrn. Präsidenten ordre gestellt worden accurate Observationen in zona glaciali zu machen. Bitte Ew. von dem Hrn. Kammerherrn zu vernehmen, ob diese meine überschickte Addition dürffe gedruckt werden. Zu Paris ist man sehr begierig zu wissen, wer der Autor sey von einer Brochure: Examen désintéressé sur la figure de la terre etc. Ew. sagen mir doch, ob Sie nicht glauben, dass Herr Delisle solches verfertiget. — Haben Sie das problema de oscillationibus corporum ex filo flexili suspensorum auch untersucht? in welchem Fall ich gern wissen möchte ob Ihre Solution mit meiner übereinkommt; ich habe Ihnen neulich solche durch den Hrn. Präsidenten überschrieben . . . . Es ist mir lieb, dass Ew. meine schon vor vielen Jahren gefasste Idee de vorticibus infinitis ad causam gravitatis explicandam nicht desapprobiren; ich habe die Möglichkeit dieser Hypothesis illustrirt ab exemplo decussationis liberae infinitorum radiorum solarium in camera obscura. Was der Abbé Molières hierüber geschrieben, habe ich nicht gesehen. Da meine Dissertation de causa gravitatis nirgend ist gedruckt worden, könnte vielleicht selbe einmal bei Mangel anderer Materie unseren Commentariis inseriret werden. Der von dem Newton angenommene rapport inter actiones lunae et solis ist gewiss sehr übel fundirt und nicht füglich die phaenomena aestus maris mit einer Accuratesse zu expliciren. Ew. werden zu seiner Zeit meine Reflexionen über diesen Punct sehen: ich statuire rationem mediam inter actiones solis et lunae, wie 2 zu 5. Der gradus frigoris Petropoli huj. anni ist stupend; ich möchte gern wissen, ob keine observationes physicae bei dieser Kälte sind gemacht worden.

LETTRE XIX.

Sommaire. E. est appelé à l'Académie de Berlin. Observations de Kayser sur la marée de la Mer Glaciale. Réponse à quelques objections d'E. sur la solution du problème des oscillations des corps suspendus à un fil flexible. Observations sur le son des flûtes.

Basel d. 5. November 1740.

. . . Ueber den letztern bewussten punctum*) erfreue ich mich nicht weniger, als Dero Herr Vater und kann die Stunde nicht erwarten. Die nouvelle hatte ich schon von einigen Orten her erfahren mit denen Umständen, die Sie zwar nicht überschrieben, die ich aber dem Hrn. Pfarrer erzählt. Wenn Sie kein Geheimniss daraus machen, so möchte ich gar gern alle Particularitäten von Ihnen selber vernehmen. Es ist mir lieb, dass Sie mit Hrn. Maupertuis nunmehro in Correspondenz stehen: ich habe mit demselben von Ew. niemals als mit Admiration geredt und ihm dadurch gleiche sentiments beigebracht, welches Ew. bei jetzi-

*) On verra par la suite qu'il s'agit de l'appel à Berlin qui se prépare.

gen Umständen ohne Zweifel nicht unangenehm seyn wird. Doch sollen Sie dieses nicht aufnehmen, als wenn Herr Maupertuis nicht allzeit eine sonderbare estime vor Sie gehabt, sondern vielmehr als ein Zeichen, dass man Sie, nach meinem Sinn, niemals genugsam nach Dero mérites estimire..... Nun komme ich auf Dero Brief.

Des Hrn. Capit. Kayser's observationes circa aestum maris in mari glaciali scheinen unserer Theorie gar nicht conform, an welcher ich doch keinen Zweifel trage. Ich hab gar wohl vorgesehn ex impetu concepto aquarum, dass sich die phaenomena nicht würden so zeigen, wie es die theoria pura mit sich bringt, und deswegen gar nicht positive geredt, sondern nur hypothetice, und hab auch nicht provocirt ad aestus marinos in zona glaciali um die theoriam Newtonianam zu beweisen. Doch habe ich gesagt, weil es unmöglich sey den effectum ab impetu concepto aquarum oriundum zu messen, so müsse man sich begnügen einige inaequalitates in genere anzuzeigen; und dünkt mich, dass diese inaequalitates noch ziemlich confirmirt werden durch des Hrn. Kaysers Observationen. Es wäre freylich zu wünschen, dass wir dergleichen Observationen, die nach der besten Methode sind angestellt worden, eine Suite hätten auf das wenigste von einer ganzen lunaison; noch viel besser aber wäre es, wenn man solche instituirte 2 Monate lang und zwar den einen circa solstitium, den andern circa aequinoctium autumnale; ich hoffe, dass solches noch geschehen werde. Uebrigens dünken mich diese Observationen gar nicht übereinzustimmen mit des Hrn. de la Croyère seinen, und hätte ich mehr inaequalitates circa hos aestus erwartet, in Ansehung die declinatio lunae den 6. August (ohne Zweifel stili vet.) muss schier maxima gewesen seyn.

Ew. pièce de aestu maris glaube ich nicht dass sie schon gedruckt sey und erwarte solche auch nicht vor einem halben Jahre. Ew. haben ganz recht wegen dem Exempel eines trianguli rectanguli, dessen ich mich bedient um die oscillationes compositas zu illustriren, und nimmt mich selber Wunder, wie ich die Sach hab anders ansehen können. Ich kann mich in der Wahrheit nicht einmal besinnen, wie ich das exemplum concipirt hatte. Ich bin also Denselben gar sehr verbunden, dass Sie mich hierüber zum zweiten Mal haben erinnern wollen und sehe hierdurch Ihre wahre Freundschaft; ich bitte Sie also dieses exemplum auszustreichen und die folgenden paragraphos anders zu numerotiren und mir express zu berichten ob Sie solches wirklich verrichtet haben. Das Vertrauen, das ich auf Sie setze, macht mich sicher, dass ich öfter die Attention, die ich in der Hauptsach conservire, in den leichten Nebensachen fahren lasse. Nicht ein geringeres specimen Ihrer Freundschaft geben Sie mir occasione meines Vaters disquisitionis hydrodynamicae, allwo er einen Brief, so ich ihm a. 173. geschrieben, refutirt. Ich weiss nicht, was ich mag meinem Vater dazumal geschrieben haben; ich weiss aber dass ich die Sach felicissimo successu ex genuinis principiis in meinem opusculo hydrodynamico tractirt habe, und das pro fistula utcunque inaequali et utcunque incurvata, auch nicht nur in hypothesi velocitatis jamjam uniformis, sed pro quovis velocitatis gradu acquisito. Wenn Ew. zu lesen belieben, was ich in cit. Opusc. a pag. 279 usque ad pag. 289 melde, so werden Sie sehen, dass ich dieses Argumentum völlig exhauriret habe. Mein Vater wird wohl zufrieden seyn, dass Sie alles in seiner Disquisition, so er über diese Materie sagt, auslöschen. Da Sie aber sagen, er habe nicht gefehlt in der Methode, sondern in applicatione methodi, so möchte ich wohl von Ew. vernehmen, ob er denn auch in hypothesi velocitatis uniformis cylindrum duplum herausbringe, welches die wahre theoria nothwendig mit sich bringt, obschon der Newton selbst anders gesagt hat. Ich habe niemals gezweifelt, Ew. werden mein problema de oscillationibus corporum ex filo flexili suspensorum solviren, sobald Sie solches ernstlich untersuchen würden. Es freut mich, dass Ihnen nunmehro dieses problema von einer grossen Wichtigkeit zu seyn vorkommt. Ihre Methode kommt ziemlich mit meiner überein und habe solche allzeit gebraucht, seit der Zeit, da ich das problema de corporibus filo flexili connexis solvirt, da ich erinnert habe, dass wenn das systema in gyrum agiret wird, die figura fili eadem seyn müsse, als solche in oscillationibus ist. Ich hab hierüber eine Dissertation gemacht, welche ich hiemit der Akademie überschicke. Solche ist schon vor 3 Monaten fertig gewesen, und ich bitte Ew. sie mit Dero gewöhnlichen Attention zu examiniren. Von meinem Vater habe ich vernommen, dass er dieses problema auch solvirt habe. — Ich erwarte mit grossem Verlangen Ew. *theoriam musicam*, als über welche Materie ich auch ziemlich meditirt und viele Experimente gemacht. Diese experimenta confirmiren meine theoriam de sono fistularum gar schön. Ich werde Ihnen ausführlicher darüber schreiben, wenn ich Dero tractatum werde empfangen haben. Nur eins will ich diessmal melden, davon ich schon Meldung in meinem vorigen gethan: Eine Pfeife, so einen Pariser Schuh lang, wenn solche gegen den Mund in distantia unius vel duorum pollicum gehalten und dagegen geblasen wird, gibt den Ton etwas höher als $\overline{\overline{\mathrm{d}}}$ und etwas niederer als $\overline{\overline{\mathrm{dis}}}$. Nun aber haben Ew. in Dero Dissertation de sono ein experimentum, daraus folgt, dass das unterste C in einer Secunde $116\frac{1}{2}$ vibrationes mache; ich rechne also, dass die schuhige Pfeife in einer Secunde 1050 Vibrationen respondire, müsste also nach meiner Theorie der sonus intra min. sec per spatium 1050 Pariser Schuh propagirt werden, welches auch nach allen Experimenten wirklich die velocitas media soni ist. Nach Ew. theoria hätte die Pfeife müssen einen tiefern Ton geben als $\bar{\bar{c}}$. Ich aestimire aber velocitatem soni nicht secundum theorias, sondern secundum experimenta. Ich habe auch experimenta gemacht über die sonos von den prismatibus chalybeis, so man zu den kleinern carillons pflegt zu gebrauchen und vermeine diese theoriam auch assequirt zu haben. Wenn Sie des Hrn. Moivre's Tractat werden gesehen haben, bitte mir Dero Meinung darüber aus.

LETTRE XX.

Sommaire. Les Bernoulli sont également invités à Berlin. Sons des flûtes et des lames d'acier. Réponse sur différens sujets de la lettre d'Euler. Problème de la détermination des orbites pour deux centres des forces, appliqué à l'orbite de la lune. Encore sur les lames élastiques. Remarque sur la théorie de la musique d'E. Remplacement d'Euler à St.-Pétersbourg. Expédition française au Pérou.

Basel d. 28. Januar 1741.

. . . . Zu der herrlichen Berliner Vocation gratulire ich von Herzen. Ich erfreue mich zum Voraus, dass ich noch einmal die Ehre haben werde Ew. zu sehen, da ich im Sinn habe mit der Zeit eine Reise nach Berlin zu thun. Ihro Maj. haben meinen Vater, meinen Bruder und mich auch invitiren lassen. Mein Vater hat sich völlig excusirt; ich habe mich auch noch nicht resolviren können; mein Bruder aber möchte wohl die Vocation annehmen. Es ist unterdessen zu befürchten, dass der Krieg das ganze Project, wo nicht völlig störe, doch aufhalte. Die grosse Veränderung in Russland hat in ganz Europa eine grosse Aufmerksamkeit erweckt; doch war des Regenten Fall leicht vorzusehen, wie

ich ihn denn wirklich vorgesagt, sobald man allhier die Constitution der Regierung vernommen . . . .
Ew. sollten billig Dero profunde Meditationen über meine problemata mechanica den Commentariis inseriren lassen: dergleichen problemata werden heutiges Tags mit gar viel grösserer Begierde aufgenommen, als die Mathematica abstracta; Ihnen aber ist es sehr ruhmwürdig in allen Stücken Dero Penetration zu zeigen. De sono fistularum und laminarum chalybearum habe ich viele wichtige Observationen gemacht, welche alle mit der Experienz übereinkommen: Aber meine viele akademische Geschäfte und ziemlich weitläufige Correspondenz erlauben mir nicht meine meditata zu Papier zu bringen. Von den laminis elasticis ist merkwürdig, dass sie unterschiedliche Töne geben, nachdem man sie auflegt; dass sie ihre nodos haben, auf welche man sie auflegen muss, um einen hellen Ton hervorzubringen u. s. w. Sonsten sind diese Töne freylich in ratione reciproca duplicata longitudinum in laminis diversae longitudinis et similiter applicatis: Man kann aber nicht nur die rationem sonorum sondern auch sonum absolutum ex datis laminae longitudine, pondere et elasticitate herausbringen. Das problema de combinandis numeris datam summam efficientibus, ist in casibus particularibus gar leicht: einige Circumstanzen machen, dass man die regulam generalem nicht siehet, doch aber kann man die methodum generalem anzeigen. Den calculum von Ihrem Exempel de numero 50 in 7 partes dividendo habe ich nicht gemacht, solches aber meinem Vetter Nicolao Bernoulli gegeben, welcher eben die Zahl gefunden die Ew. herausgebracht. Das ander problema, transformare expressionem $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(1-\frac{1}{n^3}\right)$ in

seriem $1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^5} + \frac{1}{n^7} - \frac{1}{n^{12}} - \frac{1}{n^{15}} +$ etc. kommt auch leicht per inductionem heraus, wenn man viele factores von der proposita expressione actu multipliciret. Der übrigen serierum, quae numeros primos spectant, source sehe ich nicht. Solche zeigen neben einem felicissimo ingenio, auch ein tranquillum otium und pertinacis laboris patientiam, welche alle drey Stück mir fehlen.

Ich habe mich etwas Zeits auf das argumentum de orbitis determinandis pro duobus centris virium applicirt, posita alterutra vi centripeta admodum parva. Die Resultate, so ich gefunden und auf die orbitam lunae applicirt, waren nicht conform mit des Machin's theoremate, so er sine demonstratione gegeben: ich hab aber meine gefundene theoremata nicht aufgeschrieben, weil es mich nachgehends gedünkt, man könne, ob magnum lunae motum, dieselbe nicht auf die theoriam lunarem appliciren. Die theoremata, die ich der Akademie einmal communicirt circa quantitatem mutatae directionis (durch welche ich nachgehends impetum aquae verum felicissime gefunden) haben in hoc argumento einen grossen usum. Ich finde z. Ex. per aequationem differentialem primi ordinis, die parabolam als die projectoriam; da sonsten eine aequatio differentialis 2di ordinis herauskommt. Von Ew. möchte vernehmen, ob Sie nicht meinen, dass man die orbitas circa centra virium könne methodo isoperimetrica, wie auch die figuram terrae pro theoria Newtoniana herausbringen. Ratione primae quaestionis ist zu observiren, dass ein corpus motum seine velocitatem und directionem zu behalten trachte, welche zwey conatus combinati etwan auf eine Methode führen könnten. Meine meditationes circa figuras laminae elasticae, die ich nur tumultuarie und schon längst in schedam aufgezeichnet, hab ich noch nicht können in ordinem redigiren. Mein erstes problema ist über diese Materie: laminae elasticae naturaliter rectae et ad datam curvam incurvatae invenire vim vivam potentialem, seu motum omnem, quem sua restitutione producere valeat. Darnach ist die Quaestion: invenire curvam ad quam lamina incurvata minimam habeat vim vivam potentialem. Wenn Ew. hierüber einige Reflexionen zu machen belieben, bitte mir Dero Meinung zu überschreiben, als welche ich in allen Stücken sehr hoch schätze.

Ew. opus musicum habe ich mit vieler Begierd und nicht weniger Vergnügen durchgelesen. Das opus ist gewiss mit vieler Subtilität geschrieben und haben Ew. aus Dero principiis allen möglichsten Nutzen gezogen. Doch sind mir nicht alle principia klar genug. Weil aber die quaestiones meistentheils auf die Metaphysic hinauslaufen und nicht können mathematice decidirt werden, so ist es nicht wohl möglich, dieses examen in einem commercio epistolico zu absolviren. Ich will also nur einige andere geringe remarques, welche Dero systema eigentlich nicht angehen, hiebeyfügen. Ich hab aus einigen Passagen gemuthmaasst, dass Sie den Mersennum nicht gelesen, oder auf das wenigste nicht allzeit aufgeschlagen, der doch gar curiose experimenta hat. Pag. 3, da Sie den auditum physiologice expliciren, habe ich wieder gedacht an eine Conjectur; ob nemlich ad auditum nicht requirirt werde, dass die membrana tympani unisona sey cum sono percepto, welches officium die musculi mit einer ungemeinen Geschwindigkeit machen können und woraus sehr viele phaenomena könnten deducirt werden. Pag. 10 dicitur sonum gratissimum fore in chordis quantum fieri potest tensis. Diese Quaestion tractirt der Mersennus pag. 8 und gibt nur dimidium hujus tensionis gradum pro sono suavissimo; doch sagt er, diese determinatio habe amplissimos limites; es erhellt aber aus seinen Reden, dass die tensio maxima minime gratissima sey, und glaube ich auch, dass der sonus sich minime constans seyn würde in chordis maxime tensis, quia elongationes non erunt viribus extendentibus proportionales, indem non longe a ruptura alles irregular seyn muss. Dass die vires rumpentes proportionales seyen crassitiebus chordarum, wird nicht durch die Experienz confirmirt. In aestimanda vehementia soni hab ich andere idées: es zeigt auch die Experienz, dass in der Nähe ein sonus acutus vehementior sey, da doch in der Weite der sonus gravis vehementior ist. Pag 12. Ein Organist wird eine ganz andere Regul in conficiendis instrumentis brauchen. Pag. 20, § 35. Diese proprietas beweist wenig bonitatem theoriae; ich hab schon auf gar vielerley Weise die sonos fistularum examinirt, da diese proprietas allzeit herauskommt und noch gar viele andere proprietates, welche theorias doch alle falsch zu seyn versichert bin und noch allzeit auf der Meinung bin, die ich in meinem vorigen Schreiben kürzlich exponirt, an welcher ich nicht mehr zweifle. Pag. 25, § 44. Ich habe per experimenta gefunden, dass fistulae conicae et cylindricae ejusdem longitudinis eundem sonum edunt et fistula conica utroque orificio inflata unisona est, welche Proprietät ich erstlich a priori gefunden und nachgehends experimentis confirmirt habe. Pag. 29. Diese principia metaphysica satisfaciren mir nicht und halte solche für contraria experientiae. Es ist aber überflüssig über dergleichen principia zu disputiren, weil niemals einer den andern persuadirt, weswegen ich auch meine conceptus nicht für besser fundirt halte, als anderer Leute conceptus.

Sonst bin ich versichert, dass nach Dero principiis nicht möglich ist mit mehr Accuratesse und Subtilität zu raisonniren als Sie gethan haben, so dass ich Ihnen zu diesem herrlichen Werke von Herzen gratulire. Ich habe mir vorgenommen mit dem hiesigen Hrn. Pfaff (der ein vortrefflicher Musikus ist) einen Flügel, so ich habe, auf Dero vorgeschriebene Manier stimmen zu lassen; er aber zweifelt, dass solches einen guten Effect thun werde, und müsse man nicht, sagt er, auf die Harmonie allein Achtung geben, sonderlich wenn es de differentiis sonorum imperceptibilibus zu thun ist . . . . Wenn ich betrachte, dass Ew. Abreise nach Berlin nunmehr völlig gewiss ist, kann ich mich schier nicht enthalten meine Vocation auch anzunehmen, doch hab ich mich noch nicht resolviren können: ich glaube, dass wir der Akademie in Petersburg viel Nutzen würden schaffen können. Ew. Verlust wird nicht nur unmöglich seyn bei der Akademie in Petersburg zu ersetzen, sondern es wird sogar schwer seyn einen successorem, der dessen einigermaassen würdig sey, zu bekommen. Ich für mein Theil kenne Niemand. Der Herr König in Bern ist ein ziemlich habiler Mann; weilen er aber in seinem Vaterland wohl versorgt ist, so zweifle ich, ob er eine Vocation nach Petersburg annehmen würde, doch will ich unter der Hand denselben sondiren lassen, ohne die Akademie im Geringsten zu engagiren . . . . Ich bitte auch Ew. noch vor Dero Abreise die Sach dahin zu dirigiren dass man von Seiten der Akademie mir einen Correspondenten ernenne, so wie solches zu Paris zu geschehen pflegt. Ich möchte wünschen dass es in Petersburg medicos gäbe, die die principia mathematica, sonderlich mechanica und hydraulica verstünden, als über welche Materie ich bei meiner jetzigen Profession gar viele neue

Observationen gemacht. Denen Academicis in Peru ist die Ordre zugeschickt worden wieder nach Hause zu kommen, ohne dass sie im Geringsten in der Hauptsache etwas verrichtet haben. In dem Handel, den sie mit den Wilden gehabt, haben sie ihren schönen quart de cercle verloren. Sie hatten sich vorgenommen einen andern zu verfertigen; man kann sich aber leicht einbilden, wie derselbe würde ausgefallen seyn, da man diese Instrumente in Frankreich selber nicht mit genugsamer exactitude hat verfertigen können.... Der Herren Grafen von Münnich und Ostermann Excell. Beförderung haben wir durch die Zeitungen vielfältig erfahren. Ich hab mir auch die Ehr gegeben Denselben, in Ansehung ich Dero gnädigste Benevolenz jederzeit erfahren, meine gehorsamste Gratulation abzustatten ....

(La fin de cette lettre est datée du 1 février 1741).

LETTRE XXI.

SOMMAIRE. Affaires de Berlin et de St.-Pétersbourg. Première réclamation contre Jean B. le père. Objection contre les recherches d'E. sur les séries. Problèmes de mécanique et d'acoustique.

Basel d. 20. Septbr. 1741.

Ew. glückliche Ankunft in Berlin habe ich mit sonderbarer Freude vernommen und gratulire Ihnen von Herzen deswegen. Es hat mich auch sehr gefreut, dass Sie vom König so viel Zeichen einer sonderbaren Distinction und Gnad empfangen; ich fürchte aber, dass so lange der Krieg währet die Akademie unmöglich zum Stand kommen könne, welches die ganze Welt billig bedauern würde, als welche sich von diesem neu entstandenen protectore der Wissenschaft die glücklichste époque, darin sie jemals gelebt hat, versprach. Ew. Besorgung meiner Petersburger Pension bin ich sehr verbunden. Ich hab Dero wahre Freundschaft in so vielen Occasionen empfunden, dass ich mir jederzeit eine Freude machen werde, Denselben meine aufrichtigste Dankbarkeit zu zeigen; bitte also in allen Occasionen über mich zu disponiren . . . . Des Hrn. Schumachers Project wegen Besetzung Ew. hinterlassenen Stelle nehme ich als ein blosses artifice auf, wiewohl ich noch nicht sehe, was er eigentlich dabei intentirt habe. Man wird sich bei jetzigen Conjuncturen eben so wenig in Petersburg pressiren der Akademie aufzuhelfen, als man in Berlin thut. Es scheint dass die Wissenschaften und der Krieg incompatibel mit einander seyen . . . . Ich weiss nicht wer sonderlich die Akademie in Petersburg erhalten wird; doch aber bitte ich Sie, für derselben Ehr ferner zu sorgen . . . . Wir müssen eine causam communem machen und einander jederzeit unsere nouvelles und Anschläge communiciren. Herr Maupertuis ist nun bei einem duc auf einem Landgut nicht weit von Paris. Er kann des Königs von Preussen éloge nicht genug machen. Er war mit meinem Bruder und mir auf I. Maj. Befehl in Tractaten, welche aber durch seine aventures sind unterbrochen worden. Die gegenwärtigen Conjuncturen und mein vergnügter glücklicher Zustand hatten mich in eine irrésolution gesetzt, dass ich mich niemals positive erklärt habe. Mein Bruder aber hat niemals einige Difficultät gemacht. Bitte mir also zu berichten, in was für terminis sich nunmehro dessen Sach befinde. Wenn er soll nach Berlin gehn, will ich trachten ihn dahin zu begleiten; ich glaube, dass meine consilia und Anschläge bei einer neuen Akademie nicht ganz ohne succès seyn würden, und möchte ich gar gern einige Monat mit Ew. zubringen. Ich hoffe aber, dass solches in allem Fall allhier in Basel geschehen werde: der Hr. Clairaut hat mir versprochen, alsdann auch hierher zu kommen. Von meinem Vater werden Sie allbereits eine Antwort erhalten haben, sammt einer Correction seiner hydrodynamischen Meditationen*). Solche habe gelesen, aber falsch befunden. Es ist wunderlich, dass er praecise eine Methode gebraucht, die ich vor 12 oder 13 Jahren gebraucht habe, davon mich aber viele experimenta (theils directa, theils indirecta) sogleich desabusirt. Ich hab nachgehends diese Materie aus ganz andern indubitabeln principiis generalissime in der *Hydrodynamica* von p. 279 bis 288 tractirt; es scheint aber, mein Vater habe nicht darauf reflectirt. Man darf ja nur ausrechnen quanta pressio requiratur sub directione aquae effluentis, quae possit singulis momentis motum aquae novum generiren, welche pressio eben die reactionem in quaestione ausmacht, so kommen alle meine theoremata heraus. Die Ursach aber, warum meine erstere und meines Vaters jetzige Conclusionen nicht recht sind, ist dass unter anderm die pressio aquae (Fig. 36) in fundum *ABCD* ex natura gurgitis nicht eadem ist cum pressione aquae in latera *FA*, *GD*, welches in der Solution supponirt wird. Wenn Ew. die Sach untersuchen wollen, werden Sie ein Gleiches finden, und bitte in selbem casu solches meinem Vater zu melden, ohne dergleichen zu thun, dass ich hievon etwas geschrieben habe, und zugleich sagen, dass Sie die Correction noch nicht auf Petersburg geschickt haben, um seinen Willen hierüber noch vorhero zu vernehmen. Ich für mein Theil lasse mich nicht gern in Disputen ein; doch aber interessire mich hierin nicht sonderlich, und weil Ew. diese ganze Materie auf ein Neues ruminiren müssen, welches ich Ihnen nicht zumuthen will, so überlasse es Dero Gutbefinden: wenig Leut werden merken, dass ich allhier

---

*) Voir ci-dessus la 8ème lettre de Jean Bernoulli.

von meinem Vater refutirt werde. Unterdessen ist diese, meines Vaters Solution eben die, welche ich ihm in dem Brief, welchen er in seiner vorigen Schrift citirt hatte, überschrieben hab und welche er refutirt hatte cum provocatione ad judicium lectoris. Ich hab Ew. meditata über die series gelesen; selbige sind freylich ingenios und profund, aber ich formire mir eine ganz andere Idee von den seriebus. Ich glaube nicht, dass man allhier den calculum differentialem und integralem ohne Limitation gebrauchen dürfe, weil es nicht erlaubt ist, eine seriem als quantitates continuas aut fluentes zu betrachten, indem es lauter quantitates discretae sind. Was Sie also de interpolatione terminorum sagen, ist, meiner Meinung nach, nicht proprie und stricte zu verstehn. Wenn man das problema formirte, ducere curvam per puncta infinita positione data, so ist dieses kein problema determinatum; denn man kann infinitas curvas ziehen, und ist es nicht möglich alle diese curvas una eademque aequatione, ne quidem differentiali millesimi ordinis zu exprimiren: eine gleiche Bewandniss hat es auch mit Ihrem problemate de interpolandis terminis. Ich will mir nur die seriem 1, 2, 3, 4, 5, etc. einbilden. Dieser seriei terminus generalis ist nicht nothwendig x, sondern auch z. Ex. $x + n\,S.\,A.\,x$, posita semicircumferentia $= 1$, oder wenn Sie sollten allhier excipiren, dieser terminus generalis exprimire keine seriem simplicem, so kann man auch pro termino generali ex. gr. annehmen $e^{nS.A.x}\,x$; ein jeder terminus generalis aber gibt eine andere quantitatem pro termino interpolando.

Wenn man aber hier wollte sagen, man müsse terminum generalem simplicissimum geben, so würde es schwer seyn in quantitatibus transcendentibus zu sagen, wann der terminus generalis simplicissimus sey, und zu beweisen, dass er es sey. Es dünkt mich, dass wenn man eine Aequation in seriem resolvire, dieselbe aequatio per series nicht mehr propria sey noch eben die proprietates habe, als die aequationes algebraicae, in quibus coëfficiens secundi termini est summa radicum; solches könnte ich mit gar vielen Argumenten beweisen. Wenn also Ew. ehemals gefunden, dass $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+$ etc. $=\frac{1}{6}cc$, posita $c=$ circumferentiae circuli, cujus diameter $=1$, so halte ich dieses theorema nur accidental (denn dessen veritatem läugne ich nicht und sehe ich wohl, warum dieses raisonnement in hoc casu particulari angehe), allein appliciren Sie eben dieses raisonnement auf eine Ellipse cujus axis major $=m$, axis minor $=n$, circumferentia $=S$, so werden Sie finden, quod sit

$$1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}+\text{etc.}=\frac{mmSS}{6n^4},$$

quod foret absurdum. Diese letztere Observation hat auch Herr Prof. Cramer aus Genf überschrieben. Wenn Ew. meinen letzten Brief an Hrn. Prof. Krafft noch gesehn, möchte ich wohl wissen, ob Sie meine Solution über selbige Quaestionen approbiren. Ich habe seithero den motum considerirt sphaerae, data velocitate initiali tam progressiva quam rotatoria super plano horizontali progredientis: ein solcher globus leidet duplicem frictionem, alteram ratione motus paralleli progressivi, alteram ratione motus rotatorii. Von diesem motu (welchen ich vermeine recht ausgerechnet zu haben) dependiren viele phaenomena auf dem Billard, welche prima fronte ganz erscheinen contra regulas receptas zu laufen. Obgedachte frictionem aber ratione motus rotatorii hab ich in dem Brief an Krafft noch nicht considerirt. Sonsten hab ich seit etwas Zeits meine meiste

Zeit angewendet die diversos sonos laminae elasticae und übrige proprietates auszurechnen, welche Materie mir zu gar vielen schönen, ganz neuen experimentis (die mit meiner Theorie perfectissime accordiren) hat Anlass gegeben, und kann diese Theorie ad omnia corpora sonora, sonderlich ad campanas extendirt werden, wie ich vermuthe. Allein ich hab noch nicht der Zeit gehabt, etwas von meinen meditatis zu Papier zu bringen. Gegenwärtigen Brief schreib ich auch in grösster Eil. Mich verlanget sehr Sie wieder allhier zu sehn. Wenn einmal die Aufrichtung der Akademie mit mehrerem Ernst getrieben würde, zweifle ich, ob Sie leicht Erlaubniss zu dieser Reise bekommen werden. Bitte also von gegenwärtigem otio zu profitiren.

LETTRE XXII.

SOMMAIRE. Sur la théorie du flux et du reflux d'E. Interpolation des séries. Racines imaginaires Problème de mécanique.

Le commencement de cette lettre parle des affaires politiques de la Russie et du sort de l'Académie de St.-Pétersbourg. Il paraît qu'Euler, dans sa lettre précédente, a pris le parti d'un membre de cette Académie, Goldbach, attaqué avec animosité par Bernoulli, dans sa dernière lettre*). Celui-ci s'en fâche et se croit appelé, à cette occasion, de reprocher à Euler la manière dont il a traité l'hypothèse de Newton dans sa pièce de concours *Sur le flux et le reflux*, pièce qui a remporté le prix de l'Académie de Paris. Nous avons pensé ne pas devoir supprimer ce passage, d'abord parce qu'il est caractéristique, et ensuite, parce qu'il sert de transition aux considérations scientifiques qui suivent. *F.*

Basel d. 20. Januar 1742.

... Dass Hr. Goldbach eines der vornehmsten Glieder der Petersburger Akademie sey, in Ansehung unterschiedener Circumstanzen, habe ich wohl gewusst; dass aber der-

*) Ce passage a été supprimé.

selbe so gar ausnehmende mérites haben sollte, war mir unbewusst, obschon ich gar viel mehr Gelegenheit gehabt denselben recht kennen zu lernen, als Ew.; muss also dieses meiner Incapacität zuschreiben, wenn je wahr ist, dass in Ihren öffentlichen judiciis und Manier die Gelehrten zu citiren gar keine Passion mit unterlaufe. In diesem Falle ist der gute Newton zu bedauern, als welcher nicht nur inter Celeberrimos Goldbachios, Bulffingeros etc. keinen Platz findet, sondern sogar mit vieler Verachtung tractirt wird. Ich halte mich verbunden als ein wahrer Freund Ihnen dieses zu überschreiben, weil viele Gelehrte sich hierüber scandalisiren, und weiss ich, dass wenn Ihre pièce de aestu maris nicht so vollkommen schön wäre befunden worden, wie ich sie auch befinde, Sie keinen Theil an dem praemio würden bekommen haben, da des Newtons Reputation in Frankreich nunmehro so gross ist als in England selbst, und haben die Academici Ihre Expression ausgedrückt als eine Verachtung, als wenn man ihnen leicht könne einen blauen Dunst vor die Augen machen (jeter de la poudre aux yeux, so haben sie sich exprimirt). Ich weiss zwar wohl, wie wenig Ew. Ursach haben mit den Engländern zufrieden zu seyn, welche anstatt Sie als ein wahres ornamentum saeculi nostri zu veneriren, vielmehr alles verachten; aber ich bin versichert, dass wenn der grosse Newton noch lebte, er selbst ganz anders würde von Ihnen geredet haben. Was mich am meisten befremdet, ist dass Sie pag. 267 methodum Newtoni elevationem aquarum totalem a sole oriundam platterdings indirectam et erroneam heissen, da er doch in hypothesi sua ganz Recht hat: Ihre quantitas von ungefähr 9 poll. macht $\frac{2}{8}$ von seiner, welche auch Mac Laurin und ich egregio consensu gefunden, und werden Sie aus meiner Solution sehen, welche sich ad omnes quascunque stratorum terrae densitates extendirt, dass der Unterschied von Ihrem und unserm Resultat nur daher kommt, dass Sie auf die variationem gravitatis, quae in eadem a centro terrae distantia a sola variata figura terrae oritur, nicht attendirt vid. p. 86. Da nun dieser einzige Umstand das problema schwer macht, und ohne denselben das problema gar leicht ist, so werden Sie selber leicht erachten, was die Engländer für critiques hierüber machen werden. Sie nennen nachgehends diese elevationem aquarum von 23 poll. a Newtono definitam *enormem*, nicht ohne Absicht, nur weil Sie eine kleinere finden; da doch einem Jeden unbegreiflich vorkommen wird, wie a vi aliquot pedum so grosse effectus entstehen können, ungeachtet der grossen Friction, welche in einem District von mehr denn 1000 Meilen, und gar vieler anderer impedimentorum entstehen müsse. Aus dieser Consideration mache ich das grösste mérite meines traité darin bestehen, dass ich gewiesen, dass in hypothesi auctae densitatis terrae versus centrum, die elevatio aquarum sine limite könne vermehrt werden. Es hat mich auch Wunder genommen, dass Sie mit so grossen elogiis von den vorticibus reden, ja praetendiren demonstrirt zu haben, dass sich die Sach unmöglich anders verhalten könne, welche methodum exclusionis Sie auch in Dero Tractat de igne gebraucht. Ich glaube in der hypothesi vorticum und derselben examine so weit gegangen zu seyn, als ein Anderer, und kommen mir doch dato noch ganz apocryphisch vor, ja, dass sie die gesunde Vernunft blessiren; insonderheit, wenn man vortices statuirt, da die vis centrifuga major ist in minori distantia a centro, welches ich absolute glaube contra regulas hydrostaticas, indem die nähere Materie allzeit müsse sich von dem centro entfernen. Uebrigens kann ich nicht genugsam sagen, wie sehr mir Ihr Tractat profund vorkommt und Dero grosse Penetration bewundere, und gratulire mir mehr, nebst Ihnen das praemium getheilt, als ohne Dero Concurrenz solches allein gewonnen zu haben. Ich applaudire mir auch, dass ich mich in so vielen Stücken mit Ihnen rencontrirt habe. Solches wird auch einem Dritten wunderbar vorkommen, dass zwey Personen sowohl in quaestionibus formandis als solvendis so genau übereinkommen können. Ich hatte auch die aestus sub forma oscillationum tum verticalium tum horizontalium concipirt, wie Ew. Cap. VI. Um die Ausrechnung wäre es mir eben nicht bang gewesen, wenn ich nur die hypotheses hydraulicas zu errathen möglich erachtet hätte; so aber ist es mir als ein problema valde indeterminatum vorgekommen. Doch aber hätte ich mich des Sprichworts erinnern sollen: Est aliquid prodire tenus cum non datur ultra. Ew. hypotheses sind zwar valde liberales, doch aber dienen sie annoch einige phaenomena besser zu eclairciren. Wenn Ew. meinen Tractat zu lesen gewürdigt haben, so werden Sie mir einen Gefallen thun, mit eben der Freyheit, deren ich mich bedient, mir Dero remarques zu communiciren. Ich flattire mich keineswegs, dass keine Fehler darin seyen, und von wem kann ich solche eher erfahren als von Ew., welche alle Andere sowohl an Penetration, als hoffentlich auch an Freundschaft übertreffen. Ew. ideas de seriebus earumque terminis generalibus etc. approbire ich gänzlich, und zweifle ich keineswegs an dem usu, sonderlich nicht an der Summation seriei $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$. Ich hab das dubium, so Herr Cramer aus Genf gemacht, auch solvirt ex radicibus imaginariis;

doch aber begreife ich noch nicht recht, wie die series 1, 1. 2, 1. 2. 3, 1. 2. 3. 4, etc. könne betrachtet werden, als termini quantitatis continue fluentis, da ich noch nicht recht sehe, wie der numerus factorum könne ein numerus fractus seyn; doch illustrirt sich dieses aus der progressione geometrica a^x. Ew. remarques über die radices imaginarias sind sehr ingenios; ich zweifle nicht daran, dass sie einen grossen Nutzen haben, sonderlich pro integrationibus fractionum rationalium. Dero Solution problematis de globo rotando progredientis kommt mit meiner überein, ausser dass Sie die hypotheses zu viel restringiren. Wie wird es wohl künftighin mit den Commentariis Acad. Petrop. gehen? Den 7ten und 8ten tomum habe ich noch nicht gesehen . . . .

LETTRE XXIII.

Sommaire. Suite de la critique de la théorie du flux et du reflux d'E. Mouvement d'un globe sur un drap rude. Méthode de trouver des séries sommables par la voie des intégrations et des différentiations. Problème du mouvement d'un corps dans un tube mobile autour d'un axe donné et applications de ce problème.

Basel d. 7. März 1742.

Für Ew. schleunige und sehr höfliche Antwort sage Denselben schuldigsten Dank, sonderlich aber für die weitläufige Beschreibung aller nouvelles wegen der Petersburger Akademie; ich erkenne aus allem diesem Dero schätzbare Freundschaft und Grossmuth, welcher ich auch zuschreibe, dass Sie meine Briefe so gütig aufnehmen, da ich doch gar gerne bekenne, wie unnütz Ihnen solche seyn müssen. . . . Wenn Ew. ein Exemplar von dem discours sur les marées wollen, werden Sie wohl müssen eins von Paris verschreiben. Ich dachte man würde den auctoribus zum Wenigsten etliche Exemplare zukommen lassen und hab deswegen Commission gegeben mir 4 Exempl. zu schicken, ich hab aber solche mit 40 L. bezahlen müssen. Diese vilainie hätte ich von der Pariser Akademie niemals vermuthet. Wenn ich solches gewusst hätte, würde ich meinen Tractat sogleich haben lassen in Genf drucken, wofür man mir nebst vielen Exemplaren noch ein schön Stück Geld würde gegeben haben. Die 625 L., so jeder von uns bekommen, sind kaum ein Taglohn für einen Handwerksmann, indem noch keine Quaestion proponirt worden, die so viele mühsame calculos erfordert und so weitläufig ist; sonderlich in constructione tabellarum. Wenn Ew. belieben die vortices, in quibus vis centrifuga sit in ratione reciproca duplicata distantiarum, zu untersuchen, werden Sie gewiss finden, dass dieselbe unmöglich subsistiren könne, ohngeachtet des Exempels, so Sie allegiren und welches ich nicht läugne. Der Herr Clairaut, der in hypothesi attractionis die figuram terrae fluidae untersucht, hat mir aus Occasion dessen, was ich in Sect. XI Hydrodynamicae sage, eben die Objection gemacht, welche ich aber ihm bewiesen, dass sie nicht quadrire. Denn in der attractione supponirt man eine variationem gravitatis a solo situ particulae gravitantis pendentem. Wenn man diese variationem wollte mechanice expliciren, würde schwerlich können eine Explication erdacht werden, welche nicht auch eine Contradiction involvirte. Ich betrachte also die causam variationis als extra materiam positam, oder so zu sagen als immaterialem; in diesem Fall nun gestehe ich, dass wenn ein Fluidum homogeneum in cylindro verticali enthalten wäre, dessen singulae particulae versus fundum gravitirten in ratione distantiarum a fundo, dieses fluidum in statu aequilibrii permanente sey; denn wenn zwey particulae aequales, inaequaliter a fundo distantes, ihren locum commutirten, wäre post et ante commutationem situs der status fluidi indiscernibilis, und hätte man einen effectum sine causa; und würde dieser effectus contra principium conservationis virium vivarum streiten. Es ist aber ganz ein Anderes, wenn man will anstatt hujus gravitationis a solo situ pendentis, substituiren vim centrifugam pariter a solo situ pendentem; denn die vis centrifuga hat eine causam mechanicam und ist gleich dem quadrato velocitatis diviso per distantiam a centro. Wollte man nur eine intelligentiam immaterialem statuiren, die da machte dass keine particula ihre distantiam a centro ändern könne, ohne dass sie ihre velocitatem verändere in ratione reciproca subduplicata distantiarum, wenn auch diese particula ganz allein gyrirte, und keine andere Materie da wäre, so gestehe ich den statum permanentiae vorticis. Aber diese hypothesis involvirt ein absurdum contra principia mechanica; denn auf diese Weis könnte ich auch supponiren eine causam occultam, welche machte, dass die velocitas particulae gyrantis constanter rationem directam subduplicatam distantiarum a centro immobili behielte, und in dieser hypothesi hätte ein corpus in gyrum actum gar keine vim centrifugam und könnte man hypotheses fingiren, dass die vires centrifugae müssten negativae werden. Wollen Ew. die gravitationem in ratione reciproca quadrata distantiarum mechanice expliciren, so muss man nichts contra principia mechanica annehmen. Es sey nun ein vortex materiae homogeneae, in quo velocitates sint ratione reciproca subduplicata distantiarum (welchen vorticem Sie statuiren), so kann solcher nicht permanens seyn; denn ob majorem vim centrifugam werden die particulae centro propiores mit den remotioribus ihre loca wechseln; nach dieser Abwechslung, würde die nähere particula (welche ihre vorige velocitatem zu behalten trachtet) von der materia, welche in ihrem Kreis circulirt, accelerirt und diese materia retardirt; die particulae aber remotiores factae, würden retardirt et a reactione sua würden sie die materiam aequaliter distantem a centro acceleriren, und diese Veränderung wird so lang währen, bis die vis centrifuga in minori distantia a centro nicht mehr grösser ist, als in majori distantia, und also auf das Wenigste bis die velocitates wachsen in ratione directa subduplicata distantiarum, und bei dieser Veränderung, si nullae essent frictiones, würde das principium conservationis virium vivarum observirt werden; vielleicht würde alsdann noch eine fernere Veränderung vorgehen, bis ein gewisses maximum, welches ich noch nicht sehe, obtinirt würde, und wenn man dieses maximum wüsste, könnte man die legem vorticis permanentis, in quo nullae sint frictiones, per methodum isoperimetricorum leicht determiniren. Ich weiss nicht, ob ich mich genugsam explicirt habe; dem Hrn. Clairaut habe ich meine Meinung weitläufiger explicirt und denselben persuadirt . . . . . Meine meditata über den motum globi super panno aspero bin ich dato wirklich occupirt zu Papier zu bringen. Ich habe gemerkt, dass praeter frictionem horizontalem et tangentialem noch eine andere Friction muss considerirt werden, da ja ein globus, motu rotatorio quem perfectum vocavi motus, gar bald seinen ganzen motum verliert, welches nicht kann resistentiae aëris attribuirt werden. Diese andere frictio ist die schwerste und möchten wir wohl hierüber quoad physicum nicht mit einander übereinstimmen. Was aber die calculos mathematicos anbelangt, bin ich versichert, dass wir Beide accordiren würden, wenn wir nur gleiche hypotheses physicas machen. Es scheint mir, Ew. haben nunmehro auf diese andere Friction auch Reflexion gemacht. — Die methodum series inveniendi summabiles per methodum integrationum et differentiationum hab ich schon gebraucht, ehe ich bin auf Petersburg kommen, und ist nicht schwer zu sehen, wie man die series $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} +$ etc. und andere dergl. kann ad quadraturas spatiorum reduciren: Ich will aber lieber vorher sehen, was Ew. hierüber an meinen Vater geschrieben, ehe und bevor Denselben meine ehemalige meditata hierüber communicire, zumalen ich schon zum Voraus weiss, dass Ihnen hierüber nichts Neues überschreiben kann. — Die oscillationes corporum de filo flexili suspensorum, haben ja Ew. schon lange absolvirt; nimmt mich also Wunder, ob Sie etwas Neues über dieses argumentum erdacht. Ich glaube, dass Ew. problema de motu corporis in tubo, circa datum axem mobili, schwer sey; doch habe ich einige principia mechanica, vermittelst welcher ich das problema wohl hoffe zu solviren, wenn ich mich genugsam dazu disponirt befände. Die allzu grosse generalitas nimmt der Quaestion selbsten viel Eleganz; deswegen ich öfters meine Methoden, ut argumentum simplicius et elegantius fiat, restringire, obgleich ich selbe gar viel extendiren könnte. Ew. könnten das argumentum generale sonderlich ad cochleam Archimedis appliciren in einem corollario. Diese problemata hab ich zuerst proponirt und solvirt aus occasione aquarum super tubo in navi devolutarum, da ich denn beweise, dass eine gleiche reactio in navem herauskomme, als wenn das Wasser ex cylindro per foramen läuft, caeteris positis paribus. Es ist eine gewisse conservatio quantitatis effectuum ab eadem quantitate potentiarum animatarum obtinendorum, welche die natura gemeiniglich observirt: Man muss also behutsam seyn in aestimando effectu remorum eodemque comparando cum labore impenso. Den ganzen mechanismum remigationis hab ich auch ex principiis genuinis deducirt und ingleichen unterschiedliche maxima und minima gefunden, aus welchen aber wenig avantage erwarte. Wenn Ew. können mit der Hälfte remigum so viel auswürken, als sonsten, wäre dieses eines von den grössten inventis saeculi nostri. Ich hab drey oder vier ganz differente navigandi modos examinirt und in singulis gefunden, dass die velocitas navis sey in ratione subtriplicata numeri operariorum, quorum labores aestimo ex pressione quam exercent et velocitate qua locum pressionis movent. Unterdessen kommt mir dieses theorema suspect vor und zweifle schier, ob die Experienz solches confirmiren würde, denn es dünkt mich, dass acht mal so viel Ruderer plus quam duplam velocitatem navis produciren würden.

LETTRE XXIV.

Sommaire. Considérations ultérieures sur la nature des vertiges. Suite des remarques relatives au mouvement d'un globe sur un drap rude, et aux séries sommables. Sur le travail des rameurs.

Basel d. 14. April 1742.

. . . . Ich gratulire Ew. zu der Ehr, die Würtembergischen Prinzen in der Mathematik zu informiren; Ew. machen auf alle Weise diesen Wissenschaften viel Ehr, und schier gar zu viel, um nicht alle übrigen mathematicos abzuschrecken. Es dünkt mich, unsere idées von der natura vorticum seyen noch gar zu weit von einander entfernt, um zu hoffen, dass solche durch Briefschaften können conciliirt werden. Ew. belieben zu melden, *es dünke Sie, dass ein vortex cum data celeritatum ratione quacunque bestehen könne.* Sollte denn ein vortex, dessen strata remotiora veluti quiesciren, die strata aber centro propiora eine velocitatem veluti infinitam haben, wohl könnnen in statu permanentiae seyn? Wenn aber solches nicht ist, so müssen doch gewisse limites statuirt werden, und sehe ich keine andere limites, als dass die vis centrifuga stratorum propiorum centro nicht grösser sondern wenigstens gleich seyn müsse viribus centrifugis stratorum a centro remotiorum. Dieses ist mir ein principium, das nicht nöthig hat demonstrirt zu werden, doch aber getraue ich mir solches noch ad principia evidentiora reduciren zu können. Wenn man nun weiter gehen wollte und examiniren, quisnam ultimus vorticis status permanens seyn wird, posito stratu fluidi nullam habere frictionem et vim vivam omnis motus in vortice conservari, so dünkt mich schier das fluidum werde nicht eher in statu permanente seyn, als bis die extima superficies vorticem continens am wenigsten gedrückt werde a conatu totius vorticis recedendi a centro. Was ich sonsten in meinem letztern gemeldet über diese Materie, ist gewesen um zu zeigen die dissimilitudinem inter casum praesentem et alterum, quo particularum gravitas a solo situ pendet, ohne eine causam mechanicam variationis gravitatis dabei zu supponiren, als wenn ein Engel, oder auf das Wenigste Etwas extra materiam positum solche variationem gravitatis verursache. In den vorticibus aber verhält sich die Sach ganz anders, indem die vis centrifuga zum Theil a velocitatibus dependirt. Wenn aber bei den vorticibus auch eine causa extra vortices posita supponirt würde, welche da machte, dass eine jede particula constantissime velocitatem behielte reciproce proportionalem radicibus distantiarum a centro, so würde der vortex allzeit subsistiren können, welchen Ew. in tractatu de aestu maris supponiren, und quivis alius vortex, so wie Sie sagen. Auf diese Weise würden die particulae fluidi keinen effectum inertiae haben und wäre quivis vortex permanens, weil post et ante variationem (wenn eine geschähe) die status vorticum indiscernibiles wären, und wäre eine mutatio sine effectu, welches ich wider alle principia metaphysica zu laufen supponire. Will man aber die vortices secundum regulas mechanicas betrachten, so verhält sich ja die Sach ganz anders, indem, wenn zwei particulae ihren locum permutiren, eine würkliche Veränderung geschiehet, welche eine Veränderung in den zwey ganzen stratis verursacht; denn das eine stratum wird accelerirt uud das andere retardirt. Ew. belieben diese Materie genauer zu untersuchen, so glaube ich, dass wir in unsern sentiments übereinstimmen werden. —Meine meditata über den motum globi super panno aspero devoluti hab ich nun auch zu Papier gebracht; hab aber im Sinn noch weiter zu extendiren. Ich habe gefunden, dass zwey frictiones diversi valoris müssen considerirt werden, welchen man potentias substituiren könne, die eine in A (Fig. 37), quam voco F, die andere in C, quam pono $=f$; punctum autem C est centrum oscillationis globi ex puncto A suspensi. Darnach erfordert die lex continuitatis, dass man omnes motus possibiles in vier casus abtheile: 1. wenn der motus rotatorius circa centrum B in antecedentia geschieht und zugleich kleiner ist, als der motus progressivus, 2. wenn der motus rotatorius in antecedentia grösser ist, als der motus progressivus, 3. wenn der motus rotatorius in consequentia geschieht, und die velocitas centri B grösser ist als $\frac{2F+2f}{5F-2f}a$, ubi per a intelligitur velocitas qua punctum D circa B in consequentia rotatur, 4. wenn die velocitas centri B in antecedentia kleiner ist als $\frac{2F+2f}{5F-2f}$. Der Unterschied zwischen dem 3ten und 4ten casu ist, dass in dem 4ten der globus zurückkehren wird post absolutum spatium $\frac{P}{F+f} \cdot C$, ubi P denotat pondus globi et C altitudinem debitam velocitati B; in dem 3ten casus aber wird das corpus gar nicht zurückkehren. Ich möchte nun wissen ob dieses mit Ew. Resultat übereinkomme; ich zweifle schier daran, indem bei diesen Untersuchungen gar viele considerationes physicae erfordert werden. Ich weiss nicht, was ich mit meinen pièces anfangen soll; denn wenn man in Petersburg auctoritate suprema eine Aenderung vornehmen wollte, entweder mit der ganzen Akademie oder mit mir, so wollte ich mich nicht mehr mit diesen Occupationen schleppen . . . . Ich sehe nun freylich, dass Sie die differentiationes und integrationes serierum anders nehmen, und zwar auf eine viel nützlichere und ingeniosere Weise als ich, da ich auch nur gefunden dass

$$1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \text{etc.} = \int \frac{dx}{x}\, l. \frac{1}{1-x}.$$

Ich möchte wissen, ob sich Ew. methodi nicht auch erstrecken auf die series, in welchen die Exponenten nicht progressione arithmetica gehen, als z. Ex., si a est numerus fractus, invenire summam seriei $a + a^4 + a^9 + a^{16} +$ etc. Dergleichen problemata würden ein ganz neues Licht in mathematicis geben. — Was Ew. von der remigatione melden, kommt zum Theil mit meinen recherches überein, aber nicht in allen Stücken. Ich glaube auch einzusehn, was in Ihrer Methode den dissensum verursache: Einmal weiss ich gewiss, dass nicht alle theoremata, so Sie allegiren, können recht seyn, und wünsche also, dass Sie dieselben ante promulgationem noch einmal genau a capite ad calcem untersuchen, und so Sie darauf beharren, mir in Kurzem Dero calculos zu überschreiben. Ohne Zweifel kommen Sie mit mir in dem principio überein, dass der labor absolutus operarii pro dato tempore müsse aestimirt werden ex pressione quam exercet contra remum et velocitate quacum remum agitat in eodem puncto cui pressio applicata est.

P. S. Ueber den Cometen hab ich keine besondere observationes gemacht, doch aber denselben etliche Mal gesehen.

LETTRE XXV.

SOMMAIRE. Première idée de l'application des mathématiques aux sciences politiques et morales Sur différents sujets traités dans les lettres précédentes. Problème de dynamique.

Basel d. 28. Juli 1742.

Endlich sind meine zweyjährige ausserordentliche labores academici zu End gelaufen und befinde mich dadurch in Stand gesetzt mit mehrerem otio Dero wertheste Correspondenz zu cultiviren . . . . Ich gratulire Denselben zu dem zwischen I. K. M. von Preussen und der Königin von Hungarn gemachten Frieden; alle unpartheiische Leute benedeyen hierüber den König; Ew. aber insonderheit hätte nichts Tröstlicheres widerfahren können, indem Sie dadurch endlich in Stand gesetzt worden Dero Licht leuchten zu machen. Dero Herr Vater hat mir gemeldet, wie viel Ehr Ew. von Dero Durchlauchtigen Discipel erhalten und wie stupende Progressen dieser Prinz in mathematicis mache. Diese Wissenschaften könnten hierdurch mit der Zeit ein sonderliches Ansehen gewinnen: auch dieses lustre hätte man Ew. zu verdanken. Es ist nur zu wünschen, dass der Prinz nicht von allzuvielen abstracten idées abgeschreckt werde; deswegen nach äusserster Möglichkeit auf allerhand Sachen zu appliciren wären. Mich dünkt, dass man die mathematica gar füglich auch auf die politica appliciren könnte. Hierüber hab ich vor diesem vieles mit dem Hrn. Maupertuis raisonnirt, welcher meine idées auch goutirte. Wenn man in politicis eben so viele Observationen in einem Königreich machen wollte, als man experimenta physica gemacht, so könnte man eine ganz neue Wissenschaft daraus formiren. Die Kamtschatker Herren sollen wieder zurückkommen ohne in Kamtschatka gewesen zu seyn; doch aber sollen Sie viele schöne Observationen über Sibirien gemacht haben bis an die Lena. Man sollte sich bei der Akademie in Petersburg sonderlich befleissen sich durch die philosophiam experimentalem hervorzuthun, wozu ich wohl einige nützliche Anschläge geben könnte, und wird diese Materie heutiges Tags am meisten goutirt. Die pure theoretica mathematica könnten Ew. und, wenn mir erlaubt ist solches zu sagen, mir überlassen werden . . . . Haben Sie noch kein Exemplar von den pièces sur le flux et reflux bekommen, oder hab ich Sie durch meine Freymüthigkeit beleidigt, dass Sie mir Dero critique über meine pièce nicht communiciren wollen. Auf das Wenigste belieben Sie mir Dero Meinung zu sagen über die zwey andern pièces . . . . Ew. wissen, dass in Augsburg ein gewisser Kupferstecher eine Collection in Kupfern sammt einer Lebensbeschreibung von den Gelehrten, so sich distinguirt, lässt ausgehen. Er hat meinen Vater gestochen, welches Kupferstück gar wohl gerathen. Ich weiss nicht wie er darauf gefallen auch mein Portrait zu begehren. Unterdessen hab ich solches auf sein Begehren verfertigen lassen und werde es Ihnen nächstens schicken. Wenn Ew.

mir wollten das Ihrige schicken, kann ich solches ganz commodément auf Augsburg spediren. Sonsten würde dieses Werk seyn, als ein Leib ohne Haupt . . . Mein Vetter, Herr Prof. Nic. Bernoulli, sagte mir neulich dass er Dero methodum summandi series $\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} +$ etc. nicht für richtig befinde anders als in casu $n = 2$. Ich habe ihn bei dieser Gelegenheit sehr pressirt, Ihnen seine dubia zu communiciren, er hat mir solches versprochen. — Es ist freylich wahr, dass die inertia corporis remigis den calculum ändere; dessen ungeachtet aber zweifle ich, ob Dero gefundene maxima einen considerablen effectum bekommen würden. Die Experienz lehret die Arbeiter von sich selbst, in quo puncto sie ihre potentiam moventem appliciren sollen. Es wären über diese Materie viele experimenta praeliminaria nöthig, woran ich schon lange gedacht. Vieler Maschinen ultima perfectio dependiret von dieser Quästion sub quo angulo planum debeat esse inclinatum, ut homo dato pondere oneratus super eo incedens minima defatigatione ad datam altitudinem verticalem perveniat, welches ich auch in meiner Hydrodynamica angezeigt. Wenn man alle Sachen wüsste, welche können durch Observationen und Experimente determinirt werden, getrauete ich mir in omnibus machinis ultimam perfectionem possibilem anzuzeigen. — Da ich etwas Zeits à la campagne zugebracht, hab ich auch Dero problemati mechanico de descensu corporis in tubo circa datum axem mobili nachgedacht, und hab eine Methode gefunden, solches zu solviren. Allein solches zu exequiren hab ich keine Minute Zeit gehabt; dieses aber werde nunmehro thun; doch hab ich diesen Brief nicht ferner aufschieben wollen. Schon lang vorhero hab ich circa hoc argumentum einige neue wichtige problemata solvirt, als de descensu corporis super plano gravi et horizontaliter mobili, wenn das corpus in data curva descendirt. Dieses problema ist nicht sonderlich schwer; allein es wird nach meiner Methode viel schwerer, wenn die velocitas initialis corporis nicht nulla ist, und hat dieses problema einen sonderlichen Nutzen um die regulas motuum a percussione auf eine ganz neue Art zu betrachten. Z. Ex. (Fig. 38) wenn *CF* eine linea horizontalis ist, *BEC* ein planum grave et verticale und in *B* ein corpus super linea recta *BC* mobili descendirt, aber so, dass das corpus in *B* eine velocitatem initialem habe in directione lineae *BC*, so wird das corpus *B* keine lineam rectam beschreiben, sondern eine curvam *BD*. Den calculum hierüber hab ich völlig exequirt in casu wenn der angulus *BCD* ein semirectus ist, und das pondus corporis gleich dem ponderi plani, und hab gefunden, dass die curva *BD* ein arcus von einer parabola *DBAF* ist; ich glaube aber, dass wenn nur *BC* eine linea recta ist, die curva *BD* allzeit ein arcus parabolicus sey. Wenn man nun setzet das planum *CEB* sey horizontal, oder das corpus *B* habe nur eine inertiam und keine gravitatem und die linea *BC* sey eine curva, so bekommt man eine neue ideam percussionis, wenn auch schon die corpora perfecte dura wären und nullam compressionem litten. Alle diese problemata hab ich auf unterschiedene Weise solvirt; meine methodus indirecta aber, vermittelst welcher ich den verum impetum venae aqueae in planum, contra opinionem a temporibus Mariotti generaliter receptam, gezeigt, ist die aller compendioseste. Hab auch den Nutzen meiner neuen principiorum in vielen andern problematibus empfunden.

LETTRE XXVI.

Sommaire. Descente d'un corps sur une courbe mobile horizontalement. Problème du mouvement d'un globe dans un tube. Deux démonstrations directes d'un théorème de mécanique. Mémoire sur la percussion excentrique. Plainte sur les procédés de Jean B. le père. Travail sur les lames libres et élastiques, et sur la courbe élastique.

Basel d. 20. October 1742.

Dero Brief vom 1. September habe ich wohl erhalten und den Einschlag an Hrn. Prof. Nic. Bernoulli gleich bestellt. Ich gratulire Ew. zu dem erhaltenen Titul eines professoris honorarii in Petersburg. Wir wollen hoffen, dass die dabei verhaftete Pension auch eingehen werde. Die Zeiten ändern sich sowohl vom Bösen zum Guten, als vom Guten zum Bösen . . . Den descensum corporis super curva horizontaliter mobili hab ich auch generalissime solvirt, der calculus wird gar sehr abbreviirt aus der Betrachtung, dass die velocitas horizontalis centri gravitatis communis constanter eadem bleibt, welches man leicht demonstriren kann. Wenn man dieses problema also solvirt, dass die actio gravitatis nulla sey, so kann man viele schöne corollaria daraus ziehen circa reactiones fluidorum, vim venae aqueae in planum impingentis etc., und insonderheit bekommt man auch einen

*

neuen Begriff von den regulis motus a collisione corporum, wenn diese auch perfecte dura wären. Mein Vater hat mir Dero letzten Brief communicirt: Es nimmt mich Wunder, dass Sie in Dero Meinung circa reactionem venae aqueae von mir dissentiren. Sie müssen gewisslich solche nicht genugsam untersucht haben; denn was ich circa hoc argumentum gesagt, kann in keinen Zweifel gezogen werden, und werden Sie gewisslich alles finden, wie ich, wenn Sie die Materie eben so genau untersucht haben. Ew. problema generalissimum circa motum globi in tubo hab ich auch solvirt; da ich aber ganz andere principia gebrauche, muss ich auch ganz andere denominationes annehmen, und kann deswegen nicht sagen, ob unsere solutiones mit einander übereinkommen. Es wäre aber viel zu weitläufig für einen Brief, Ihnen meine Methode zu überschreiben; ich will also nur einen casum particularem hierhersetzen; nämlich: (Fig. 39) Moveatur tubus AD continens globum F super plano horizontali circa polum A, sitque determinanda curva, quam describet globus una cum velocitatibus globi et tubi. Ich setze aber eine rationem finitam inter massas tubi et globi, sonsten das problema gar zu leicht wird. Sit ab initio tubus in AD, globus in B; centro A ducatur circulus $Bnmg$; deinde ponatur tubus in situ AE, globus in o, et post tempusculum infinite parvum et constans dt perveniat tubus in situm AF, globus in p, ducaturque elementum op curvae quam globus describit: fingatur in hoc statu globum a tubo dissolvi; describet globus eodem tempusculo dt rectam pd ipsi op aequalem et in directum positam cum eadem op; tubus vero perveniet in situm Ab, ita ut sit arculus $nm =$ arculo mg: centro A ducatur arculus da. Quod si jam sit $AB = a$, $Bn = x$, $nm = dx$, $Ao = y$, invenitur ex geometricis $da = \frac{2dxdy}{a}$, Num vero concipienda est potentia, quae globum versus tubum premat, et altera aequalis, quae tubo in a applicata, eundem premat versus globum; hoc modo globus et tubus convenient in c; erit itaque positio globi post secundum tempusculum dt in c, et positio tubi in Acf; atque si fuerit massa globi $= m$, massa tubi $= M$, distantia centri gravitatis tubi a puncto $A = d$, distantia centri oscillationis tubi a puncto A tanquam puncto suspensionis $= D$, erit ex mechanicis

$$ac : dc = m : \frac{dD}{yy} M, \text{ ergo } ac = \frac{myy}{myy + MdD} \cdot \frac{2dxdy}{a},$$

atque $dc = \frac{MdD}{myy + MdD} \cdot \frac{2dxdy}{a}$; erit igitur, ducta de perpendiculari ad pc, $ec = \frac{MdD}{myy + MdD} \cdot \frac{2dxdy}{a} \cdot \frac{ydx}{ads} = dds$, si nempe elementum op dicatur ds. Erit quoque

$$hg = \frac{my}{myy + MdD} \cdot 2dxdy = -ddx.$$

Ex his aequationibus omnia rite determinantur: Sit ab initio velocitas puncti $B = c$, velocitas in $n = V$, erit $dt = \frac{dx}{V}$ et $Vddx = dVdx$, sive $ddx = \frac{dVdx}{V}$. Substituatur iste valor in posteriori aequatione et habebitur

$$\frac{2mydy}{myy + MdD} = \frac{-dV}{V}, \text{ sive log. } \frac{myy + MdD}{maa + MdD} = \text{log. } \frac{c}{V}, \text{ seu}$$

$V = \frac{maa + MdD}{myy + MdD} \cdot c$. Deinde quia $dx = Vdt = \frac{maa + MdD}{myy + MdD} \cdot cdt$, substituo hunc valorem in priori aequatione, atque sic obtineo

$$\frac{MdD}{myy + MdD} \cdot \frac{2ydy}{aads} \cdot \left(\frac{maa + MdD}{myy + MdD}\right)^2 \cdot ccdt^2 = dds,$$

sive $\frac{2ydy}{(myy + MdD)^3} = \frac{aadsdds}{MdD(maa + MdD)^2 ccdt^2}$, quae integrata dat

$$\frac{-1}{2m(myy + MdD)^2} = \frac{aads^2}{2MdD(maa + MdD)^2 ccdt^2} - C.$$

Dicatur velocitas absoluta corporis in $o = u$ eritque $dt = \frac{ds}{u}$, sicque fiet $C - \frac{1}{2m(myy + MdD)^2} = \frac{aauu}{2MdD(maa + MdD)^2 cc}$.

Ponatur pro puncto B, $u = c$, ita ut ibi nullam habeat velocitatem in directione AD, fiet tunc $C = \frac{1}{2mMdD(maa + MdD)}$ et $u = \frac{maac + MdDc}{a} \sqrt{\left(\frac{MdD}{mMdD(maa + MdD)} - \frac{MdD}{m(myy + MdD)^2}\right)}$ sive $u = c\sqrt{\left[\frac{maa + MdD}{maa} - \frac{MdD}{maa}\left(\frac{maa + MdD}{myy + MdD}\right)^2\right]}$. Denique si fiat $V : u :: dx : ds$, habebitur aequatio ad curvam. Pressio quoque, quam globus ubique contra tubum exercet, est $= \frac{4VV}{a} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{MdD}{myy + MdD} \cdot m$, cujus reductionem praetereo pariter atque corollaria, quae ex solutione ista deduci possunt.

Hieraus ersehen nun Ew. meine Methode und werden leicht abnehmen, dass sie kann ad problema generalissimum applicirt werden, denn es ist leicht zu exprimiren, wo das punctum d seyn wird und der tubus Ab sive rectus sive curvus, wenn das corpus und der tubus a viribus qualibuscunque sollicitiret wird. Ich habe noch eine andere Methode, welche etwas compendioser ist, aber nicht so directa, welche deswegen übergehe, indem Ew. in Dero Schreiben an meinen Vater melden, dass Sie die solutiones indirectas nicht approbiren und zwar occasione meines theorematis, dass ein corpus a potentia sollicitatum circa centrum oscillationis, quod determinavi, gyrire, da ich doch als der erste inventor, ni fallor, dieses nützlichen theorematis in meiner dissertatione de percussione excentrica (welche Ew. gesehen) expresse gesagt, ich habe unterschiedene demonstrationes directas, denen ich aber diese indirectam vorziehe, weil sie zugleich eine schöne proprietatem anzeige. Weil es aber scheint, ich habe nöthig mich hierüber zu justificiren, so will ich zwei demonstrationes directas hierbeyfügen. Erstlich. Ich considerire (Fig. 40) lineam rectam AB utcunque gravem (huc enim facile reducuntur corpora quaecunque) in situ horizontali et mobilem circa punctum B fixum. Diesen motum pro primo temporis puncto kann man consideriren, als wenn das punctum fixum B weg wäre, so wird AB in situm parallelum ab fallen. Nachgehends muss man eine potentiam puncto b applicatam consideriren, welche dasselbe in punctum B restituire; so wird ab den situm cB annehmen und wird das punctum intersectionis d einestheils das centrum oscillationis seyn, quia $Dd = Bb$, anderstheils das punctum conversionis. Diese kurze synthetische Demonstration, welche ohne einigen calculum absolvirt wird, ist gewiss so rigoros als eine kann erdacht werden. Zweitens: Sit rursus linea recta AB (Fig. 41) utcunque inaequaliter gravis, quae a potentia in B perpendiculariter ad AB sollicitetur, quaeritur situs proximus DGE et punctum intersectionis G. Sit lineae centrum gravitatis in C; tunc motum quaesitum considero compositum ex progressivo parallelo, quo ACB pervenit in acb, et rotatorio circa centrum gravitatis, quo linea acb pervenit in situm DcE. Centro c ducatur arculus EbB, sit $CB = cb = a$; massa lineae $AB = m$; aggregatum productorum ex quavis particula per quadratum distantiae suae a centro gravitatis $= aaM$, et erit ex mechanicis $Bb : bE :: \frac{1}{m} : \frac{1}{M} :: M : m$, sive $GC : CB :: M : m$; ergo $GC = \frac{M}{m} \cdot CB$. Ergo G est centrum oscillationis pro puncto suspensionis B. Ich kann auch leicht den situm proximum vectis utcunque luxati determiniren; als wenn (Fig. 42) ABC ein vectis luxatus in B wäre, und das punctum C perpendiculariter versus c sollicitirt würde, so wird der situs proximus seyn in abc, welcher nicht schwer zu determiniren, dessen Determination aber in vielen problematibus mechanicis kann gebraucht werden, und ist hoc respectu die mérite eines problematis mehr in desselben Erfindung als Solution gelegen, deswegen billig ist den autorem problematis zu nennen. Was Ew. de motu composito ex rotatorio circa centrum gravitatis et ex progressivo eorumque variationibus melden, habe ich in meiner dissertatione *de percussione excentrica* *) längst angedeutet, und kann der motus globi in tubo circulari leicht daraus determiniret werden, welches mein Vater gleich observirt hat und angemerkt dass der motus idem seyn werde als eines baculi gravitatis expertis, cujus longitudo sit aequalis radio circuli et cujus altera extremitas sit onerata pondere tubi circularis, altera pondere globi. Diesen motum hab ich auch in meiner allegirten Dissertation determinirt, so wie Ew. denselben anzeigen. Dieses hab ich an Ew. schreiben wollen aus Anlass Deroselben Briefes an meinen Vater, welchen er mir hat communiciren wollen. Sie wissen, wie sehr ich aestimire und admirire alle Dero profunde Meditationen, und können sich leicht einbilden, dass ich auch die in diesem Brief enthaltenen Inventionen von einer sonderbaren Penetration und mérite schätze. Ich möchte wissen, ob in dem 8ten tomo Comment. Petrop. meine dissertatio de percussione excentrica noch nicht inserirt ist. — Man druckt die collectionem operum von meinem Vater, und habe nun erst erfahren, dass er die problemata dynamica, die ich zuerst erfunden und solvirt (als z. Ex. de descensu globi super triangulo mobili, de pendulo luxato, de centro rotationis spontaneo etc.) auch inserirt hat, ohne meiner Meldung zu thun; ja, er inserirt die demonstrationem centri spontanei rotationis ex

*) Comment. T. IX. p. 189

principio minimae inertiae petitam tanquam suam, ohne gleichfalls meiner zu gedenken. Wenn es nun wäre, dass ich nöthig hätte die suspicionem plagii contra Parentem commissi von mir zu decliniren, so müsste ich mich darüber justificiren. Wenn aber Ew. meinen, dass mir mein silentium bei der Akademie in Petersburg nicht schade, so wird mir solches nicht sauer ankommen. Herr Bülffinger hat mir vor diesem vorgeworfen, ich habe alles von meinem Vater und nichts aus mir selber, da ich doch gewisslich kein Wort von ihm entlehnt. Ew. sagen mir amice Dero Meinung. Da sonsten die Petersburger Akademie auf so schlüpfrigen Füssen steht, wie Sie melden, als belieben Sie mich zu berichten, ob Sie Dero pièces noch dahin schicken, oder bis auf weitere éclaircissemens reserviren. Ich hab vor einigen Monaten eine weitläufige und operose pièce dahin geschickt de sono laminarum liberarum, darin ich gar viel merkwürdige phaenomena physica explicirt und ausgerechnet habe: hierzu war aber eine neue theoria physica erfordert, ehe und bevor ich die mathesin appliciren konnte. Diese pièce hab' ich an Prince Cantemir adressirt, welcher bei Hrn. Clairaut dergleichen Sachen tractirt und mich hat bitten lassen, meine pièces an ihn zu adressiren . . . . Ich möchte wissen ob Ew. die curvaturam laminae elasticae nicht könnten sub hac facie solviren, dass eine lamina datae longitudinis in duobus punctis positione datis fixirt sey, also dass die tangentes in istis punctis auch positione datae seyen. Est nempe (Fig. 43) longitudo ABC data; puncta A et C positione data et extremitates laminae in A et C ita sunt muro infixae, ut anguli A et C sint dati. Dieses ist die idea generalissima elasticarum; hab aber sub hac facie noch keine Solution gefunden, als per methodum isoperimetricorum, da-

Ich annehme, dass die vis viva potentialis laminae elasticae insita müsse minima seyn, wie ich Ew. schon einmal gemeldet. Auf diese Weise bekomme ich eine aequationem differentialem 4^{ti} ordinis, welche ich nicht hab genugsam reduciren können, um zu zeigen, dass die aequatio ordinaria elasticae general sey. Ich erinnere mich zwar, dass vor diesem Ew. sowohl als ich gezweifelt haben, ob die aequatio ordinaria elasticae general sey mit dem Argument, der Cirkul sey nicht darin begriffen, da doch eine lamina elastica manifeste könne ad curvaturam circularem inflectiret werden. Es ist auch in der That klar, dass wenn die puncta A und C zusammen kommen und die extremitates laminae eine communem tangentem haben, parallelam muro, cui infiguntur, dass alsdann die curvatura elasticae ein vollkommner Cirkul seyn werde. Dessen ungeachtet hab ich seithero observirt, dass die idea meines Oncles Herrn Jacobi Bernoulli omnes elasticas in sich begreife hoc modo: Man bilde sich einen vectem rigidum CD ein, laminae ABC affixum, cujus extremitas D a potentia DE trahatur, so wird man allzeit die longitudinem vectis CD, die magnitudinem potentiae DE und den angulum CDE determiniren können hac lege, dass die potentia DE die laminam ABC in sua curvatura erhalte, wenn die extremitas C nicht mehr coërcirt zu seyn supponirt wird. Daraus erhellet, dass die curva ABC kann continuirt werden bis in F, allwo der radius osculi infinitus seyn wird, und alsdann in puncto F die potentia sub directione FE müsse applicirt werden. Wenn man nun sub hac idea die longitudinem vectis CD infinitam supponirt, so siehet man, dass die curva ABC ein arcus circularis seyn müsse, welches ich hab expliciren wollen. Ew. reflectiren ein wenig darauf, ob man nicht könne, sine interventu vectis, die curvaturam *ABC* immediate ex principiis mechanicis deduciren. Sonsten exprimire ich die vim vivam potentialem laminae elasticae naturaliter rectae et incurvatae durch $\int\frac{ds}{RR}$, sumendo elementum ds pro constante et indicando radium osculi per R. Da Niemand die methodum isoperimetricorum so weit perfectionniret, als Sie, werden Sie dieses problema, quo requiritur ut $\int\frac{ds}{RR}$ faciat minimum, gar leicht solviren.

LETTRE XXVII.

SOMMAIRE. Théorie de la réaction des eaux effluentes d'un vase par un canal quelconque. Réclamations ultérieures du fils contre le père. Mêmes sujets que dans la lettre précédente.

Basel d. 12. December 1742.

Man kann freylich die rechte theoriam reactionis aquarum ex vase per canalem quemcunque effluentium deduciren aus den pressionibus, und dieses ist auch würklich vor ungefähr 14 Jahren meine Methode gewesen, da ich dann die nämlichen theoremata, die mein Vater nach Petersburg geschickt, pro canali composito ex pluribus canalibus cylindricis herausgebracht hab; diese theoremata waren zwar falsch, nur weil ich einen kleinen Umstand negligirt hatte, man kann sie aber gar leicht mit der wahren Theorie conciliiren. Man muss nämlich bei einem jeden Absatz einen gurgitem supponiren, und auch machen, dass das orificium gurgitis internum, quod scilicet aquas immediate ex vase recipit, infinitum sey ratione orificii effluxus. Ich will Ew. eigne und beigefügte denominationes auch brauchen.

Effluat, sagen Sie, aqua ex vase per foramen MN (Fig. 44) cujus amplitudo $=f$, celeritate debita altitudini V, quae altitudo, dum aqua in MN erumpens per spatiolum $=ds$ progreditur, incrementum capiat $=dV$. Ex theoria ergo ratio inter dV et ds potest definiri. Ad pressionem jam in Q definiendam, sit amplitudo tubi in hoc loco $=y$, et posita $MP=x$, dico aquam per foraminulum in Q factum ascensuram esse ad altitudinum

$$q=\frac{fdV}{ds}\int\frac{dx}{y}+V-\frac{ffV}{yy}.$$

Bis hierher sind Ew. Worte. Nun aber gibt obberührte theoria, im Fall amplitudo vasis infinita

$$\frac{fdV}{ds}\int\frac{dx}{y}=a-V;$$

ist also $q=a-\frac{ffV}{yy}$, quae indicat pressionem perpendiculariter in Qq agentem, si scilicet multiplicetur per Qq; deinde $a-\frac{ffV}{yy}$ multiplicata per qr seu dy dabit pressionem, quam elementum Qq sustinet in directione CM, cujus integrale $\int a\,dy-\frac{ffV\,dy}{yy}$ dabit pressionem similem integri canalis, quae erit $ay+\frac{ffV}{y}-fa-fV$, in welcher Integration V muss constans supponirt werden. Obturato autem foramine ist eadem pressio $=ay$, und wenn die erstere $ay+\frac{ffV}{y}-fa-fV$ abgezogen wird von der letztern ay, so hat man die quantitatem reactionis $=fa+fV-\frac{ffV}{y}$, allwo man durch y versteht die ultimam QP und muss diese infinita supponirt werden, und wenn DE noch nicht infinities grösser ist als NM, so muss mente ein gurges bnm supponirt werden, qui habeat legem continuitatis cum canali $DQLN$. Auf diese Weise wird die reactio $=f(a+V)$, wie ich solches auch pag. 282 Hydrodynamicae demonstrirt habe. Ist also primo effluxus momento reactio = simplici cylindro, deindeque crescit usque ad duplum cylindrum, woraus zugleich die lex continuitatis erhellet, wie ich solches auch schon in der Hydrodynamik angezeigt. Ew. thun mir gross Unrecht, wenn Sie meinen, ich habe Dero dissensum über diese Materie übel empfunden. Ich muss Ihnen bei dieser Occasion gestehen, dass ich die $2\frac{1}{2}$ erste paginas meines letzten Briefes geschrieben, um solche meinem Vater zu zeigen, und hab ich vermeint durch meine assurances meinen Vater etwan zu disponiren, dass er seine letzten nach Petersburg geschickten hydrodynamischen meditata entweder ändere oder supprimire. Wie mehr ich meines Vaters Superiorität erkenne, wie mehr sehe ich auch, dass es mir bei dem publico ein grosses tort ist, von meinem Vater refutirt zu werden, wenn ich schon recht habe. Noch mehr tort hätte mir bei dem publico machen können (obschon mich Ew. darüber auslachen) wenn man gesehen hätte, dass Vater und Sohn nicht nur gleiche problemata, uterque veluti ex sua penu, sondern NB. eine ganz gleiche Solution geben. Würde nicht das Publicum gedacht haben, nicht nur das ich alles von meinem Vater habe, sondern noch sogar mich als einen plagiarium aufführe. Wenn ex meis inventis einige Ehr zu hoffen wäre, könnte ich solche leicht sacrificiren; aber der Schandfleck eines infidi plagiarii wäre mir unerträglich. Ich habe auch dieses Alles meinem Bruder, scriptorum paternorum editori, remonstrirt, welcher auf meines Vaters Befehl diesen lapsum memoriae gleich redressirt hat. Es gibt sonsten problemata, da man mit Recht davon sagen könnte: Ein Narr kann mehr fragen, als ein Witziger beantworten. Es gibt aber auch andere problemata, welche ein neues Licht in einer Wissenschaft erwecken können, sonderlich wenn man zugleich die Solution von seinem neuen problemate gibt. Es ist ja sehr leicht das problema in ein theorema zu verwandeln; warum sollte denn der erste Auctor und Solutor nicht auch alsdann meritiren citirt zu werden? Ich praetendire aber nicht in dem casu zu seyn; ich erkenne gern gegen alle Leute meine Unwürdigkeit, sonderlich gegen Ew.; ich habe also nicht meritirt, dass Sie mir hierüber mein vermeintes Unrecht wollen zu verstehen geben. Ew. können mich citiren oder nicht, ich werde Sie allzeit als einen Freund betrachten, und bitte Sie also, sich hierin keine Gewalt anzuthun, sonderlich da Niemand besser weiss als Sie, wie wenig ich es meritire. Ich hoffe, dass obbemeldeter Umstand, wenn ich einige puncta in meinem letzten Brief hab einfliessen lassen, Ew. versichern wird, dass mir niemals in Sinn gekommen, Denselben ein Missvergnügen weder zu erwecken, noch meines Orts zu verstehen zu geben. — Das problema de motu vectis luxati ist ja so leicht, dass weder an desselben Erfindung noch Auflösung viel Ruhm zu erholen. Sonsten werden meines Vaters sämmtliche opera zu Lausanne in vier tomis in 4° gedruckt. Es wird eine überaus schöne Edition seyn und wird solche in 4 oder 5 Monaten ganz fertig seyn, indem allbereits 3 tomi völlig gedruckt sind. Es freuet mich, dass meine Solution de globo et tubo mobili mit der Ihrigen übereinstimmt. Ich habe auch über dergleichen problemata einige compendia, sonderlich ratione vis acceleratricis globi in tubo, vermittelst welcher ich kann die differentialia 2di gradus evitiren und die ganze Solution kürzer machen, die Zeit erlaubt mir aber nicht, solche nunmehro zu expliciren. Dass ich Ew. nicht eher über dieses problema geantwortet, soll ich mich billig excusiren. Meine Geschäfte erlauben mir nicht die Mathematica anders als ein parergon zu tractiren; nebst dem ist mein geringes ingenium mathematicum so blöd, dass solches gleich erschöpft und ich invitus von allen Meditationen abstehen muss. — Ich weiss nicht, was Ew. durch prima principia dynamica verstehen. Es ist natürlich, dass einem Jeden seine principia am klarsten vorkommen. Meine erste Demonstration supponirt nichts als difinitionem centri oscillationis, und wie kann man identitatem centri oscillationis und puncti rotationis demonstriren, ohne auf das Wenigste die definitionem centri oscillationis zu supponiren. Admissa autem hac definitione, wollte ich einem Schumacher die Proposition in quaestione demonstriren in einer Minute. Wie kann man denn magis prima principia brauchen? Ew. solutio problematis de vecte luxato kommt mit meiner überein, wie auch solutio problematis laminae elasticae liberae ab impulsu motu vibratorio agitatae. Die ratio sonorum, welche Sie finden, ut 1000000 ad 1590813 kommt auch mit meiner überein, ausser dass ich nicht so weit appropinquirt. In meiner Dissertation setze ich hanc rationem ut 1000 ad 1587. Ich zweifle aber wie weit Sie in Ihren numeris versichert sind, weil die approximationes ziemlich laborios sind; sonst bin ich in dieser Materie gar viel weiter gegangen, und ist dieser casus allatus nur unus ex infinitis aliis. Ich hab viele davon durch experimenta acustica recht befunden; den allegatum casum aber nicht sonderlich mit der Theorie conform, welches ich laminae crassitiei, a qua in theoria animum abstrahimus, attribuire. Wenn Ew. hierüber belieben experimenta zu machen, so bitte mir dieselben zu communiciren. Es freuet mich, dass Ew. mein principium inveniendae elasticae per-methodum isoperimetricorum so wohl gefallen. Ich habe zwar das problema gleichfalls solvirt, aber niemals die Aequation so weit reducirt, dass ich hätte sehen können, dass die aequatio mit der aequatione generali elasticae (welche ich auch gefunden hatte) übereinkomme. Man kann die principia maximorum et minimorum nicht genugsam ausforschen; die trajectoriae circa centrum virium, vel circa plura centra virium, müssen gleichfalls per methodum isoperimetricorum können solviret werden, obschon man das maximum vel minimum, quod natura affectat, nicht einsiehet. Es haben also Ew. einen grossen Nutzen dadurch geschafft, dass Sie die methodum isoperimetricorum so weit perfectionnirt haben. Meiner Meinung nach ist dieses argumentum inter omnia pure analytica utilissimum, und ist dieses ein wahres Exempel, dass vel sola propositio problematis, wenn man auch die Solution nicht hätte, saepe maxima laude digna sey. Ich wiederhole aber, dass ich gar nicht prätendire, weder etwas proponirt noch erfunden zu haben, das einiger Attention werth sey, und wenn ich Alles allein gefunden hätte, so würde ich mir es nicht einmal vindiciren, wenn ein Anderer nur bona fide glaubte, er hätte es vor mir gefunden. Die grösste Reputation zu hinterlassen ist nicht mehr, als viele Millionen Geld zu hinterlassen; deren Besitzung kann mir auch nichts mehr nutzen, weil ich in der Welt nichts mehr suche. Wir müssen beiderseits diese Idee von einander haben; sonst gar leicht allerhand malentendus entstehen können, wie durch meinen letzten Brief. Ich habe keine sonderbare Methode die quantitates constantes ex sufficientibus datis pro elastica zu determiniren. Den proponirten angulum kann ich auch nicht anders als operose, per varias aequationes partim infinitas finden. Durch eine nicht gar zu accurate Appropinquation bin ich endlich auf diese Aequation gefallen: $m + 1 = \frac{6}{3mm+2}\left(m + \frac{m^3}{2} + \frac{3m^5}{8} + \text{etc.}\right)$ posito sinu toto $= 1$ et sinu dimidii anguli quaesiti $= m$. Ich hatte aber vorher in einer andern aequatione infinita nur die zwey ersten terminos considerirt, da ich auf das Wenigste hätte drey terminos consideriren sollen, um bei einem gradu versichert zu seyn. So viel ich hab ex experimentis obiter factis schliessen können, ist der angulus in quaestione ungefähr 70 gr., da meine obige Aequation wohl 100 gr. geben würde . . . . Ich höre dass in dem 7. und 8. tomis Comment. Petrop. mehrere Sachen von Ew. seyen de termino generali et de termino summatorio serierum. Was Sie von der proprietate elasticae sagen, quod sit

$$\int\frac{xxdx}{\sqrt{(a^4-x^4)}} \cdot \int\frac{aadx}{\sqrt{(a^4-x^4)}} = \frac{\pi aa}{4} \text{ in casu } x = a,$$

scheinet auch aus Ihrer theoria serierum deducirt zu seyn als ein corollarium und veluti a posteriori; hab also der Demonstration dieses theorematis nicht nachgedacht. Ich will aber selbige mit grossem Dank von Ew. vernehmen. Ich lasse mich gern unterrichten: von Niemand aber lieber, als von Ihnen . . . . Es würde sehr erspriesslich seyn für die Petersburger Akademie, ja vielleicht das einzige Mittel sie vor ihrem Untergang zu präserviren, wenn wir sollten den Prince Cantemir zum Präsidenten bekommen, und würden wir beide in specie sehr wohl uns dabei befinden . . . . Herr Wolf schreibt meinem Vater, dass wenig Ansehen übrig sey zu einem baldigen établissement der Akademie in Berlin: fructus belli!

LETTRE XXVIII.

SOMMAIRE. Protestations d'amitié. Problème du levier brisé. Résolution d'une équation infinie. Rapport des sons des lames élastiques. Théorème du calcul intégral. Négociations avec l'Académie de Berlin.

Basel d. 9. Februar 1743.

Ich kann Ew. nicht genug beschreiben, wie erfreulich mir gewesen mit so nachdrücklichen Expressionen von Dero allerwerthesten Freundschaft versichert zu werden. Sie belieben gleichfalls meiner vollkommensten Hochachtung und aufrichtigsten Freundschaft völlig persuadirt zu seyn. Seit meiner Zurückkunft aus Petersburg hab ich gegen alle Leute meine Veneration für Dero sonderbare mérites bezeugt. Mein naturel ist gewisslich von aller jalousie weit entfernt, und erkenne ich mich viel zu gering, einige jalousie gegen Sie mir in Sinn kommen zu lassen, obschon ich übrigens erkenne einige Talente von Gott empfangen zu haben, welche Erkenntniss doch keiner Ruhmredigkeit zuzuschreiben bitte. Wir wollen es aber bei dieser beiderseits geschehenen Declaration ein für alle Mal bewenden lassen und in das Künftige von allen Lobreden abstehen: die Ihrigen beschämen mich und die meinigen sind doch allzeit zu schwach. Die Freundschafts-Bezeugungen hingegen sind mir so werth, dass Sie solche nicht genug werden wiederholen können. Es freuet mich, dass Ew. über meine theoriam hydrodynamicam völlig persuadirt sind, und freuet mich um so viel mehr, als ich festiglich glaube, dass Sie der Einzige sind, der par connoissance de cause hiervon überzeugt sind. Bitte also data occasione Dero Approbation öffentlich zu bezeugen; nicht dass ich hierin viel mérite suche, sondern bloss dass meine theoremata adoptirt werden, und die Wahrheiten in allen Stücken je mehr und mehr erkannt werden, worin aller ehrlichen Leute Absicht meistens bestehen sollte. Das argumentum de vecte luxato mag freylich unter Dero Händen von grosser Wichtigkeit worden seyn; da ich aber solches keineswegs perfectionnirt und es bei dem ersten Einfall habe bewenden lassen, so hab ich billig nicht viel daraus machen sollen; ich will aber solches dato otio ferner cultiviren, da ich von Ew. vernehme, dass es zu vielen neuen découvertes Anlass geben kann, und Ihnen alsdann meine Observationen communiciren. — Es ist freylich sehr operos die radicem hujus aequationis infinitae

$$1 = \frac{1.3}{2^2} m + \frac{1.3.5}{2^2.4^2} m m + \frac{1.3^2.5.7}{2^2.4^2.6^2} m^3 + \frac{1.3^2.5^2.7.9}{2^2.4^2.6^2.8^2} m^4 + \text{etc.}$$

zu finden. Ich glaube dass die series, so ich gefunden hatte, aber nicht aufgeschrieben, bequemer gewesen sey. Ich hab aber darauf gedacht, wie man obige Aequation könne accurater und compendioser consideriren: Sit verbi gratia septimus seriei terminus, oder 0,05061 *) $= C$, so werden die

*) Dans la lettre originale ce chiffre est corrigé de la main d'Euler: 0,0506299.

folgenden quam proxime seyn: $\frac{6}{7}Cm + \frac{6}{8}Cmm + \frac{6}{9}Cm^3 +$ etc. und kann diese Substitution sine ullo sensibili errore Platz finden. Diese series ist $= 6 . 0{,}05061\, m . \left(\frac{m^7}{7} + \frac{m^8}{8} + \frac{m^9}{9} + \text{etc.}\right) =$

$$6m . 0{,}05061 . \int \frac{m^6\, dm}{1-m} = 6\, m . 0{,}05061 \times$$

$$\left(-\tfrac{1}{6}m^6 - \tfrac{1}{5}m^5 - \tfrac{1}{4}m^4 - \tfrac{1}{3}m^3 - \tfrac{1}{2}mm - m + l\frac{1}{1-m}\right) =$$

$$0{,}30366\, m\, l\frac{1}{1-m} - 0{,}30366\, mm - 0{,}15183\, m^3 - 0{,}10122\, m^4 -$$

$$0{,}07591\, m^5 - 0{,}06073\, m^6 - 0{,}05061\, m^7.$$

Wenn man nun in Ew. aequatione infinita die sieben ersten terminos behält, und für die folgenden den gefundenen valorem substituirt, so findet man in Decimalzahlen

$$1 = 0{,}30366\, m\, l. \frac{1}{1-m} + 0{,}75000\, m - 0{,}06928\, mm -$$

$$0{,}01414\, m^3 - 0{,}00511\, m^4 - 0{,}00191\, m^5 - 0{,}00061\, m^6.$$

Weil nun in dieser Aequation die fünf letzten termini sehr klein sind, so kann man in denselben den valor litterae m für bekannt nehmen und setzen $m = 0{,}80$, so wird die summa der fünf letztern terminorum werden $= - 0{,}05445$. Nach dieser Substitution findet man diese Aequation

$$1{,}05445 = 0{,}75000\, m + 0{,}30366\, m\, l\frac{1}{1-m},$$

welche, meiner estime nach, den verum valorem quantitatis m bei $\frac{1}{1000}$ geben muss. Will man die tabulas logarithmorum Vlacquii gebrauchen, so hat man

$$1{,}05445 = 0{,}75000\, m + 0{,}69930\, m\, l\frac{1}{1-m}.$$

Ich setze nun wieder $m = 0{,}80$ und finde $1{,}05445 = 0{,}99196$; hier ist das mendacium $+ 0{,}06249$; darnach setze ich $m = 0{,}82$, und bekomme $1{,}05445 = 1{,}04205$, allwo das mendacium ist $+ 0{,}01240$. Aus diesen zwei mendaciis, kann man per regulam falsi sicher schliessen. $m = 0{,}825$. Hieraus folgt $2m - 1 = 0{,}650$; hieraus findet man den angulum quaesitum von 81° 6', und kann dieser angulus nach meiner estime nicht mehr als etliche wenige Minuten fehlen. Ich wollte aber nach diesem ersten Versuch ohne grosse Mühe den angulum bis auf die Secunden richtig finden. — Ich sollte aus Dero Expression, die Sie gebrauchen, wegen der rationi sonorum laminarum elasticarum schier schliessen, dass ich diese rationem per multas et devias ambages gefunden habe. Ich kann diese rationem nicht anders als folgendermaassen determiniren: Erunt nempe soni laminae muro infixae et laminae liberae ut $\frac{1}{ff}$ ad $\frac{1}{\varphi\varphi}$, postquam satisfactum fuerit hisce aequationibus $\frac{1}{2f} = \text{Arc. sin.} \frac{1+e^{1:f}}{\sqrt{(2+2e^{2:f})}}$ und

$$\frac{\cos.\ \text{Arc.}\ \frac{1}{2\varphi}}{e^{1:2\varphi}+e^{-1:2\varphi}} = \frac{-\sin.\ \text{Arc.}\ \frac{1}{2\varphi}}{e^{1:2\varphi}-e^{-1:2\varphi}},$$

allwo e bedeutet den numerum cujus logarithmus est unitas und die arcus et sinus ad radium 1 müssen referirt werden. Oder anstatt obiger zwey Aequationen kann man die zwey folgenden per series expressas gebrauchen, nämlich

$$\left(1 + \frac{1}{1.2.3.4f^4} + \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8f^8} + \text{etc.}\right) :$$

$$\left(1 + \frac{1}{2.3.4.5f^4} + \frac{1}{2.3.\ldots.9f^8} + \text{etc.}\right) =$$

$$\left(\frac{1}{2.3f^4} + \frac{1}{2.3\ldots7f^8} + \frac{1}{2.3\ldots11f^{12}} + \text{etc.}\right) :$$

$$\left(1 + \frac{1}{1.2.3.4f^4} + \frac{1}{1.2.3.\ldots.8f^8} + \text{etc.}\right) \text{ et}$$

$$\left(2 + \frac{1}{3.4.2^4\varphi^4} + \frac{1}{3.4\ldots8.2^8\varphi^8} + \text{etc.}\right) :$$

$$\left(\frac{1}{1.2.2^2\varphi\varphi} + \frac{1}{1.2.\ldots.6.2^6\varphi^6} + \frac{1}{1.2.\ldots.10.2^{10}\varphi^{10}} + \text{etc.}\right) =$$

$$\left(\frac{1}{3.2^2\varphi\varphi} + \frac{1}{3.4.\ldots.7.2^6\varphi^6} + \frac{1}{3.4\ldots11.2^{10}\varphi^{10}} + \text{etc.}\right) :$$

$$\left(4 + \frac{1}{1.2.\ldots.5.2^4\varphi^4} + \frac{1}{1.2.\ldots.9.2^8\varphi^8} + \text{etc.}\right).$$

Da man nun zu diesen radicibus nicht anders als operosissime appropinquiren kann, und hingegen Ew. eine ganz genaue Proportion determiniren, fürchte ich, das meine Methode vielen Umschweifen unterworfen sey: doch soll ich an deren Richtigkeit nicht zweifeln. Bitte also Ew. mit ein Paar Worte mir Dero Methode anzudeuten. Sonst kann man freylich sehr viele curiose experimenta machen über diese Materie; ich müsste aber einen allzugrossen Extract machen aus meiner Dissertation um solche zu beschreiben. Zum Exempel, ich habe (Fig. 45) die quantitatem *LC* erstlich ausgerechnet, darnach die laminam *LD* extremis digitis in puncto *C* ergriffen und selbige percutirt, so ist der sonus clarus, distinctus et diu durans gewesen. Wenn ich aber die laminam an einem andern Orte hielt, so war der Ton ganz verdumpffen und indistinctus, als wie an einer gespaltenen Glocke. Wenn Ew. verlangen, so werde ich in dem nächsten Schreiben hierüber fernere éclaircissemens geben; ich glaube aber, Sie werden ohne mich schon Alles erforschen. — Was Dero theorema anbelangt quod sit

$$\int x^{m-1}\, dx\, (a^n - x^n)^{\frac{k-n}{n}} =$$
$$\frac{a^{k+m-n}}{m} \cdot \frac{n}{k} \cdot \frac{2n(k+m)}{(k+n)(m+n)} \cdot \frac{3n(k+m+n)}{(k+2n)(m+2n)} \cdot \text{etc.}$$

so sehe ich dessen Demonstration nicht gleich ein, und will solche lieber von Ew. mir andeuten lassen, weil mir der Kopf nicht aufgeräumet, diese Materie, die ich seit langer Zeit nicht tractirt habe, wieder vor die Hand zu nehmen. Sie belieben mir auch unbeschwert zu melden ex quo principio der Wallisius seinen casum in hoc theoremate contentum hergeleitet, als welches ich auch wieder vergessen. Mein schwaches Gedächtniss macht, dass ich allzeit eine jede Materie wieder von vorne anfangen muss, und doch kann ich nicht von mir erhalten, dass ich meine Meditationen aufschreibe. Ich sehe zum Voraus, dass wenn ich aus der Relation, in der ich bis dato mit Petersburg gestanden, kommen sollte, mein ganzer mathematischer Plunder in Koth fallen werde: video meliora proboquè, deteriora sequor. Doch wird mir die Lust von Ew. zu profitiren niemals vergehen; bitte also mir ferner Dero gelehrte Inventionen zu communiciren ..... Es ist wahr, dass der editor meines Vaters Opera dem König dediciren wird und im Sinn hat selbige I. K. M. selbst zu praesentiren. Er wird auch die Ehr haben Ew. ein Exemplar in meines Vaters Namen zu praesentiren. Ich wollte wol herzlich gern, dass ich mit ihm könnte die Berliner Reise thun und noch einmal in meinem Leben Ew. sammt Dero geehrtesten Familie sehen. Ich bin aber in Basel viel zu stark angebunden und muss auch meines Seckels Rechnung tragen, um eine so kostbare Reise zu unternehmen. Wenn die Akademie in Berlin wäre aufgerichtet worden, hätte ich auf die eine oder die andere Weise mehr Apparenz dazu gesehen. Der Herr Maupertuis hat mir in des Königs Namen nach allen vorhergegangenen Tractaten noch einmal gemeldet vor etwas Zeits que le Roi comptoit sur moi; ich hatte mich aber niemals völlig determiniren können. Nunmehro ist aber wenig Apparenz mehr, dass das akademische Project so bald werde ausgeführt werden. Ich hatte mich unterdessen blos dahin declarirt, dass ich wohl für eine kurze Zeit der Akademie meine Dienste offeriren wollte, dass ich mir auch getrauete im Anfang und bei derselben erstern Einrichtung würkliche Dienste leisten zu können, und zwar weit grössere, als wenn dieselbe allbereits völlig etablirt sey; die Permission getraute ich mir auch von meiner Obrigkeit für eine Zeit zu erhalten und bezeugte in diesem Fall nichts anders zu begehren, als defrayirt zu werden, da man mir bei einem durablen engagement ein Salarium von 2000 Thlr. förmlich offerirt hatte, welches ich mich in Ansehung Ew. geschämt hätte anzunehmen, als meine wenigen mérites weit übertreffend, wenn überall die salaria den mérites proportionnirt seyn sollen. Es würde auch vielleicht mein Exempel andere Gelehrte einigermaassen encouragirt haben ihr Vaterland zu verlassen. Der Herr Maupertuis scheint aber nicht diese meine desinteressirten Propositionen zu approbiren.....

P. S. Ew. sollten durch den Hrn. Bousquet, der meines Vaters Opera druckt, Dero herrlichen Tractatum de Isoperimetricis drucken lassen. Man könnte auch Dero dissertationes de seriebus darin colligiren um ein rechtes volumen zu machen. Ich werde deswegen mit Hrn. Bousquet reden.

LETTRE XXIX.

SOMMAIRE. Sur la fondation de l'Académie de Berlin. Publication du traité des isopérimètres. Sujets traités dans la lettre précédente. Probleme d'analyse. Problème du mouvement d'un corps dans un tube. Autre problème de mécanique. Concours de l'Académie de Paris Bousquet est porteur de cette lettre

Basel d. 23. April 1743.

Ew. geneigteste und verbindlichste Expressionen über meine Vocation nach Berlin haben in mir die vollkommenste Freud und Erkenntlichkeit erweckt, als welche mir Dero wahre, ja eifrige Freundschaft in ihrer ganzen Vollkommenheit zu erkennen geben. Dieses möchte mich am meisten engagiren, wenn I. K. M. mit der Zeit eine Akademie in Berlin aufzurichten annoch sollten geneigt seyn, eine Vocation nicht nur anzunehmen, sondern sogar, wenn es seyn müsste, zu sollicitiren. Allein nun wäre es zu spät an den König zu schreiben; ich hätte solches gleich thun müssen und würde es auch gethan haben, wenn ich mir nur hätte einbilden können, dass es einer so geringen unbekannten Particular-

Person könnte erlaubt seyn einem so grossen Monarchen immediate zuzuschreiben. Dergleichen Qualitäten sollen billig in unsern Herzen diesen König so hoch über andere Könige erheben, als diese von Gott sind unter den Menschen erhoben worden. Ich finde auch nicht, dass ich bei gegenwärtigen Verfassungen einige Dienste leisten könnte. Die wenigen Talente, die mir Gott verliehen, könnte ich nicht besser anwenden als in den ersten Jahren einer neu aufgerichteten Akademie, und könnte auch dem König nicht gerathen werden, so grosse Pensionen lebenslang auf einige Academicos anzuwenden. Es ist auch meiner Meinung nach besser, bei einer Académie des sciences nur etliche wenige génies supérieurs zu haben, die den wahren nexum der Wissenschaften einsehen und das Reelle von dem clinquant zu unterscheiden wissen, auch darneben unterrichtet sind, was in jeder Wissenschaft allbereits Nützliches erfunden worden und was noch ferners darin gesucht werde, als eine grössere Menge derselben, wenn je eine grosse Menge zu finden wäre. In einer Akademie muss einigermassen eine Subordination seyn, als wie in dem Militärstande: Ein erleuchteter Geist siehet ein Alles, was da zu neuen nützlichen Erfindungen führen könne; hierzu braucht er Leute, die unter seiner Direction arbeiten, und von denen mehr habileté als Wissenschaft erfordert wird. Wenn ich also gleich mich unter diese kleine Zahl der wahren Gelehrten rechnen könnte, von welcher Einbildung ich doch weit entfernt bin, so wäre ich doch ziemlich überflüssig, indem Ew. allbereits gegenwärtig sind, und ich vernommen, dass, so bald der König seine Gedanken wieder auf die Akademie werfen wird, unterschiedene berühmte Männer bereit sind sich dahin zu engagiren. Es nimmt mich Wunder, dass Ew. mehr auf mich als auf meinen Bruder reflectiren. Der Herr Maupertuis, der uns beide gar wohl kennt und allen Eifer für den Dienst I. K. M. bezeugt hat, ist hierin einer andern Meinung. Wenn mein Bruder nur nicht so indolent wäre, würde er die übrigen Bernoulli bald übertreffen. Sonsten macht mir die Idee des Vaterlands nicht die geringste Impression; wir machen uns vielmehr ein Gewissen unsere alte Eltern zu verlassen: Dazu kommen die Uniformität eines tranquillen Lebens und die Mediocrität meines gegenwärtigen Zustands, welche ich allem éclat vorzuziehen anfange: felices, nostra si bona novimus! Hingegen empfinde ich eine importune Liebe zu den Wissenschaften, welche einen Abscheu vor unserem Basel in mir erwecket. Ich weiss nicht, wie ich mich in alle diese Reflexionen hab entrainiren lassen, welche doch ohne einige Absicht geschehen sind. Ew. belieben mir solche nicht übel auszudeuten . . . . Herr Bousquet wird nächstens hierdurch passiren . . . Wegen Ew. herrlichen Tractat de isoperimetricis werde ich vorläufig mit demselben reden; Sie belieben nur denselben fertig zu halten. Sie könnten das problema de elastica hac methodo inveniendа und andere dergleichen noch beyfügen. Ich sehe leicht, dass man die curvaturam catenae et laminae elasticae oscillantis auch dahin reduciren kann; auf den modum aber bin ich noch nicht bedacht gewesen. Die meisten curvas mechanicas wird man auch dahin reduciren können. Die Observation von den trajectoriis, dass $\int v ds$ ein maximum oder minimum seyn müsse, dünkt mich sehr schön und von grosser Wichtigkeit; ich sehe aber die Demonstration dieses principii nicht ein. Ew. belieben mir zu melden, ob sich solches auch ad trajectorias circa plura centra virium erstrecke. Vielleicht ist es nur eine observatio a posteriori, indem Sie angemerkt haben, dass die trajectoriae diese proprietatem haben, ohne solche a priori recht demonstriren zu können. Ich sehe, dass Ew. die formulas pro sonis laminarum elasticarum zu finden in eine gar bequeme Form gebracht, um die approximationes zu instituiren, darauf ich nicht reflectirt hatte, obschon solche ziemlich obviae waren; ich bin Ihnen also deswegen sehr verbunden, wie auch für die überschriebenen Demonstrationen von den andern theorematibus analyticis. Ew. Manier den valorem m zu finden pro aequatione

$$1 = \frac{1.3}{2^2}\, m + \frac{1^2.3.5}{2^2.4^2}\, mm + \frac{1^2.3^2.5.7}{2^2.4^2.6^2}\, m^3 + \text{etc.}$$

ist zwar accurater als meine, aber auch operoser und supponirt, dass Sie schon den valorem m in den zwo ersten Decimalzahlen accurat wissen; da ich meine ersteren positiones in gar viel weitere Schranken gesetzt habe, sonsten ich vielleicht auch den gesuchten valorem würde propius gefunden haben; denn der error in methodo summandi omnes terminos a decimo usque ad infinitesimum ist schier von keiner Consequenz. Ich weiss nicht, wie weit mein Resultat von dem Ihrigen different ist. Wenn die Differenz gross ist, so muthmaasse ich, dass ich in calculo extemporaneo müsse gefehlt haben. Vor etlichen Tagen bin ich in Ausrechnung eines problematis gefallen auf eine seriem divisam per seriem, welche ich in eine seriem simplicem methodo ordinaria verwandelt, und habe dabei die legem coëfficientium in nova serie gefunden: Sit nempe

$$\frac{1 + ax + bxx + cx^3 + \text{etc.}}{1 + \alpha x + \beta xx + \gamma x^3 + \text{etc.}} = 1 + mx + nxx + px^3 + \text{etc.},$$

quaeritur lex coëfficientium m, n, p, etc., welche den calculum sehr abbreviiren kann. Ew. principium conservationis momentorum motus rotatorii abbreviirt freylich die problemata de motu corporis in tubo; ich hatte aber solches auch schon observirt, und ist ein corollarium von der methodo directa, die ich Ihnen einmal für einen gewissen casum überschrieben hatte. Aus diesem principio generali habe ich ratione corporis super triangulo horizontaliter mobili deducirt, dass die velocitas horizontalis centri gravitatis müsse constanter eadem seyn, welche proprietatem ich auch glaube Ihnen einmal überschrieben zu haben. Man kann zu diesen principiis noch ein drittes beifügen, welches den calculum ferner abbreviiren kann, und vermittelst dessen das problema solvirt werden kann, wenn zwey corpora mobilia in tubo wären. Dieses dritte principium aber erfordert eine grosse Circumscription, wenn es soll ad tubos curvos appliciret werden, und ist nützlicher in applicatione, als elegant in enunciatione, weswegen ich solches nicht beifüge. Es beruhet aber darauf, dass ex dato motu rotatorio tubi die incrementa velocitatum centrifugarum corporum in tubo mobilium können immediate exprimiret werden. Hieraus kann ich z. Ex. dieses problema solviren: (Fig. 46) Sit tubus AE horizontaliter mobilis circa A et quotcunque ponderibus B, C, D in tubo recto liberrime mobilibus oneratus; invenire curvas Bb, Cc, Dd a corporibus descriptas una cum velocitatibus corporum et tubi, cum tubus data velocitate initali moveri incipit. Was ich sonsten oben gemeldet, dass ich Ew. nützliches principium auch observiret habe, so muss ich doch gestehen, dass es sub alia facie ist, und vielleicht nicht in omni extensione, weil ich die problemata generalissima niemals untersucht habe. Man kann in dieser Materie auch mit Nutzen attendiren ad centra virium, von welchen ich in Comment. Petrop. gehandelt, und gezeigt dass die distantia centri virium a centro motus gleich sey der mediae proportionali inter distantiam centri gravitatis et centri oscillationis ab eodem centro motus. Neulich ist mir ein ander problema mechanicum eingefallen, welches ich gleichfalls für nützlich halte um nach und nach die leges naturae universales in mechanicis zu entdecken: Gleich wie nämlich zwey corpora filo ligata sich also bewegen, dass das centrum gravitatis uniformiter in linea recta fortfahre, alldieweil die corpora uniformiter circa centrum gravitatis commune rotiren, so ist nun die Frag qua lege drey corpora filo ligata sich fortbewegen. Ich will nur diesen casum simplicissimum setzen: (Fig. 47) Sint *AB* et *BC* fila in directum posita et aequalia, quibus tria corpora pariter aequalia connectuntur; moveri simul incipiant corpora perpendiculariter ad filum velocitatibus qualibuscunque sive affirmativis sive negativis; quaeritur motus continuatio. Dieses problema mag wohl nicht von den leichtesten seyn. Ich glaube aber, dass, wenn man alle leges universales motuum wüsste, solches ziemlich leicht werden würde und zugleich Anlass geben, dergleichen problemata generaliora zu solviren. Vor ein Paar Tagen hab ich einen Brief von Paris erhalten, darin man mir gratulirt dieses Jahr das praemium ganz erhalten zu haben, aus der blossen Ursach, weil man meinet mich erkannt zu haben. Ich hab in der That eine pièce eingeschickt, mit der Devise: *Gloria sequi debet, non appeti*; weiss aber noch nicht, ob solche die nämliche ist, davon man mir schreibet, indem in dem Brief der Devise nicht ist gedacht worden. Man schreibt mir zugleich „qu'on a fort admiré une autre pièce à laquelle on avoit ajouté l'*accessit* et qu'on n'avoit preferé la mienne (vraie ou pretendue) que parce qu'on y avoit trouvé plus de facilité pour la pratique.“ Ich muss also gewärtig seyn, was mein Schicksal ferner mit sich bringen wird. Vielleicht haben Ew. auch darüber gearbeitet, und da ich öfter das Glück habe, mich mit Ihnen zu rencontriren, hat man Ihre pièce für meine angesehen. Wenn dieses nicht ist, so habe ich gute Hoffnung, dass diejenige pièce, der man das praemium adjudicirt hat, in der That meine sey. Herr Bousquet wird die Ehr haben Ew. diesen Brief einzuhändigen. Ich will denselben Ew. bestermaassen recommandirt haben. Ich hab mit ihm wegen dem obbenamsten Tractat gesprochen; er wird solchen mit allen Freuden drucken. Ew. könnten auch Dero sämmtliche Werke bei ihm drucken lassen; solches würde à tous égards das schönste mathematische opus auf der Welt werden . . . . .

LETTRE XXX.

Sommaire. Plaintes amères contre les procédés du père. Problème du mouvement de plusieurs corps dans un tube etc. Courbe élastique. Problème du mouvement de trois corps joints par un fil. Divers sujets. Sons des lames élastiques. Lettre au Prince Cantémir.

Basel d. 4. September 1743.

Endlich ist es mir vergönnet wieder an Ew. zu schreiben. Die Ursach meines langen Stillschweigens ist erstlich gewesen eine ziemlich lange Indisposition, nachgehends eine Abwesenheit, indem ich für gut befunden die Luft zu verändern und auch das Sauerwasser in Sulzbach zu gebrauchen. Dero Brief an Hrn. Bousquet hab ich bey meiner Zurückkunft gleich abgeschickt und die Additamenta isoperimetrica werde ich mit nächster schweren Post schicken. Dem Hrn. Bousquet hab ich auch versprochen eine praefatiunculam zu Dero herrlichem Werke zu verfertigen, sobald mir solches meine Geschäfte erlauben werden .... Ich bitte Ew. mir mit einer aufrichtigen Freundschaft und confidence Dero Meinung zu sagen über meines Vaters Opera, sonderlich den letzten tomum. Ich für mein Theil hab im höchsten Grad Ursach mich darüber zu beschweren: Die nova problemata mechanica sind meistens von mir, und hat mein Vater meine Solutionen sogar gesehen, ehe er sie suo modo solvirt hat, und wird doch meiner mit keinem Worte gedacht, welches mir um so viel verdriesslicher fällt, als meine Solution noch nicht publicirt. Meine erstere Solution circa centrum spontaneum rotationis, petitam a natura minimae inertiae, hat er lang contestirt auch meprisirt, und endlich hat er sie als die seinige publicirt. Da ich aber durch ein sonderliches hazard ein Blatt von seinem Manuscript, darin diese seine prätendirte Solution stand, bekommen und mich durch meinen Bruder darüber beschwert, hat er mich als einen inventorem secundum auch gelten lassen. Eine gleiche Bewandniss hat es ungefähr mit den übrigen problematis novis mechanicis. Meiner ganzen Hydrodynamic, von welcher ich doch in Wahrheit meinem Vater kein jota zu verdanken habe, werde ich auf einmal völlig beraubt und verliere also in einer Stunde die Früchte von einer 10jährigen Arbeit. Alle propositiones sind aus meiner Hydrodynamic genommen und nennet doch mein Vater seine Schriften *Hydraulicam, nunc primum detectam a.* 1732, da meine Hydrodynamic erst a. 1738 gedruckt worden. Unterdessen hat mein Vater Alles von mir, ausgenommen, dass er eine andere methodum generalem erdacht das incrementum velocitatis zu determiniren, welche Invention in etlichen wenigen paginis bestehet. Was mein Vater sich nicht völlig zuschreibt, verachtet er und endlich, pour comble de malheur, inserirt er noch Ew. Brief, darin Sie gleichfalls meine Inventionen in einer Materie (davon ich völlig der erste, ja einzige auctor bin und praetendire völlig exhaurirt zu haben) verringern*). Ew. sagen, ich habe die pressionem fluidorum per canalem fluentium nicht anders determinirt als pro statu permanente, da ich doch gleich p. 259 circa finem zeige, dass die pressio generaliter sey $\frac{a-vv}{2c}$; und was hat hingegen mein Vater in dieser wichtigen neuen Materie gethan? Die inventio argumenti ist von mir; die Idee, dass man soll den canalem in loco ubi pressio quaeritur, als abruptum betrachten, ist von mir; dass man soll die accelerationem ultimae particulae in primo abruptionis momento suchen, ist von mir, und endlich dass aus selbiger acceleratione, sive partim, sive in to-

*) Les oeuvres de Jean Bernoulli étant assez rares et ne se trouvant vraisemblablement pas à la disposition de chaque lecteur, on nous saura gré peut-être, si nous reproduisons ici la lettre dont il s'agit, et qui se trouve à la p. 389 de ces oeuvres. La voici:

Leonhardus Eulerus, *mathematicus acutissimus, ad Auctorem.*

Jam ante quidem, maximi feci Theoriam Tuam aquarum fluentium, propter veram et genuinam methodum, quam Tu, Vir Excellentissime, primus atque solus aperuisti ad hujus generis problemata solide pertractanda. Nunc vero, perlecta altera Tuarum meditationum parte, penitus obstupui faecundissima principiorum Tuorum applicatione ad perplexissima problemata resolvenda, quo utilissimo pariter ac profundissimo invento Nomen Tuum celeberrimum apud posteros perpetuo erit sacrum. Obscurissimam autem atque abstrusissimam quaestionem, de pressione quam latera vasorum ab aquis transfluentibus patiuntur, tam distincte et enucleate enodasti, ut nihil amplius in hac tam difficili re supersit, quod desiderari queat. Ut enim nemo, praeter Filium Tuum Celeberrimum, hoc argumentum attigit, *qui tamen tantum, cum totus motus sese jam ad statum permanentem composuerit, pressionem via satis indirecta definivit;* ita Tu statim, methodo genuina patefacta, pressionem in omni aquae statu accuratissime determinasti, de quo Te dignissimo invento Tibi, Vir Excellentissime, ex animo gratulor, et pro communicatione maximas gratias ago.

C'est ainsi que l'illustre doyen des géomètres de ce temps-là fut jaloux de placer son travail sous le patronage de son ancien élève qui, alors, n'avait que 30 ans.

tum impedita, die compressio guttulae gefunden werde, auch dass diese compressio guttulae die pressionem aquae in canalem determinire, — dieses Alles ist von mir; und hat mein Vater absolut nichts anders gethan, als dass er die velocitatem suo modo et repetito ratiocinio determinirt, welches ubique sein einzig inventum ist. Das argumentum de reactione fluidorum verstehet mein Vater dato noch nicht und refutirt mich doch pag. 488 in corollario. Dieses Alles ist noch das Wenigste, worüber ich mich beschweren kann. Anfangs wollte es mir schier unerträglich fallen; endlich aber hab ich Alles mit einer Resignation aufgenommen: hab. aber auch einen dégoût und Verachtung für meine bisherige studia geschöpft, dass ich lieber wollte das Schumacher-Handwerk als die Mathematic erlernt haben. Ich hab auch seithero mich nicht mehr resolviren können etwas Mathematisches auszuarbeiten. Meine ganze Vergnügung ist noch dann und wann auf der Tafel einige Projecte zu machen in futuram oblivionem. Ich könnte mit gutem Gewissen die Vocation nach Berlin, wenn mir gleich der König die Ehr anthun sollte, solche zu überschicken, nicht annehmen, und bitte also nicht weiter an mich desfalls zu gedenken. Doch bin ich Ew. bestermaassen verbunden für Dero gute officia; Dero wertheste Freundschaft macht mir ein recht innerliches und wahres Vergnügen, und ich aestimire solche an ihr selbsten viel mehr, als durch den Nutzen, der mir daraus erwachsen könnte. Ich hab mich nicht enthalten können, mich gegen Ew. als meinen besten Freund zu beschweren, in Ansehung die Gelegenheit sich wohl ereignen könnte, dass Sie mich ab injusta plagii suspicione vindicirten, ohne meinem Vater tort zu thun, und auch zu machen, dass die Wahrheit, ratione der Controvers-Puncte zwischen meinem

Vater und mir, keinen Abbruch leide. Mir selbsten will es nicht anstehen mich zu defendiren.

Es freut mich, dass Ew. mein problema de motu plurium corporum in tubo recto versabili, quacunque inertia praedito, auch solvirt haben. Das problema hab ich völlig wieder vergessen. Ich hab ein sonderbares principium zu dessen Solution gebraucht. Wenn ich mich recht erinnere, so behalten die corpora in casu, dass solche Anfangs a quiete ratione motus in tubo recto anfangen, distantias a centro motus in constante proportione, welches eine schöne Proprietät ist. Aus Dero Brief ersehe ich, dass ich in meiner Conjectur mich nicht betrogen, wenn ich gesagt habe, dass Dero Observation circa orbitas planetarum, in quibus $\int v ds$ vel $\int vvdt$ ein minimum ist, vielleicht nur a posteriori sey gemacht worden; denn nach meinen principiis kann ich solches a priori nicht einsehen. Der Herr Clairaut schreibt, dass solches auch schon von einem Engländer sey remarquirt worden. Es scheint, dass dieses nicht sowohl ein principium, als eine proprietas sey, gleich wie es eine proprietas ist elasticae, dass sie das maximum solidum generirt. Doch hab ich nicht untersucht, ob die idea maximi solidi die elasticam in omni extensione begreife. Sie können mich dieser Mühe entheben, denn ich weiss, dass Sie alle dergleichen Untersuchungen allbereits gemacht haben. Von meinem principio a priori, dass die elastica das $\int \frac{ds}{rr}$ ein minimum formire, hab ich mit vieler Erkenntlichkeit ersehen, aber zugleich mit Beschämung, dass Sie in Ihrem supplemento so honorificam mentionem thun. Dieses principium gehet auch an in laminis inaequaliter elasticis, wenn man macht $\int \frac{Eds}{rr}$ ein minimum. Die laminae naturaliter non rectae erfordern zwar einen andern calculum, aber keine andere methodum; wenn aber die laminae proprio pondere zugleich incurvirt werden, so ist es schwer, das maximum oder minimum quod natura affectat zu determiniren. Ich muthmaasse, dass man allhier muss ad maxima maximorum recurriren, wenn zweyerley Considerationen zusammen kommen. (Fig. 48) Quaeratur brevitatis gratia curva AC, quam lamina naturaliter recta AB et uniformis proprio solo pondere incurvata accipiet: fragt sich, ob nicht curva AC talis seyn könnte, dass inter omnes ejusdem longitudinis, inter eosdemque terminos positas curvas, eandemque $\int\frac{ds}{rr}$ habentes, das centrum gravitatis infimum locum obtineat. Wir haben Beide diese curvam directe determinirt; fragt sich also, ob man ex hoc principio eandem curvam finden würde. Der calculus aber wird ohne Zweifel weitläufig seyn, und bin ich von diesem principio nicht convincirt, so dass Ew. sich schwerlich die Mühe werden geben wollen meine Conjectur zu untersuchen. Wenn solche aber richtig wäre, würde es, wie ich glaube, leicht seyn, schier aller curvarum maxima et minima a priori anzuzeigen. — Ich hab freylich wohl observirt, dass wenn man setzet

$$\frac{1+ax+bxx+cx^3+\text{etc.}}{1+\alpha x+\beta xx+\gamma x^3+\text{etc.}}=1+mx+nxx+px^3+\text{etc.},$$

die coëfficientes m, n, p, etc. können durch ihre vorhergehende determinirt werden; wenn man aber solche pure determiniren will per α, β, γ et per a, b, c, so hab ich einige leges observirt, welche wohl zu statten kommen und in meinen dissertationibus de seriebus recurrentibus tam finitis quam infinitis, id est, quae infinitos habent indices, exponirt worden, allein die ganze Materie meritirt nicht, dass man sich darüber aufhalte. — In dem problemate de inveniendo motu trium corporum filo connexorum ex dato motu initiali hab ich freylich variationem motus singulis momentis gesucht, aber das problema nicht solvirt, ausgenommen in gewissen leichten casibus: als wenn z. Ex. tria corpora A, B, C (Fig. 47) aequalia, et distantiae AB, BC auch aequales wären, und die velocitates initiales corporum extremorum in eandem plagam auch aequales wären, oder auch wenn die differentiae velocitatum corporum A, B, C aequales sind etc.; generaliter hab ich es nicht solvirt; ich vermuthe aber, dass man noch einige principia generalia erdenken könnte, welche das problema leicht machen würden. Ich bin Ew. verbunden für Dero Gratulation zu dem erhaltenen praemio. Ich glaube in der That recht in die Natur der Quaestion entrirt zu seyn, und allen Difficultäten, so viel möglich, abgeholfen zu haben, welches in dergleichen Quaestionen mehr ein hazard ist, als vis ingenii, sonsten ich nicht leicht bey Ew. Concurrenz würde réussirt haben. Ich gratulire Ihnen zum Voraus zu dem gedoppelten praemio des künftigen Jahres, denn Ihr eignes judicium ist bei mir zum Voraus die kräftigste Probe, dass Dero Theorie fundirt und gültig seyn müsse. Ich für mein Theil, hab mir niemals satisfaciren können, welches mir genug ist, wenn ich auch gleich meinen judicibus hätte imponiren können, um mich abzuhalten, dieses Mal mit zu concurriren .... Vor etlichen Tagen ist der grosse Burcard, Magni Euleri praeceptor in mathematicis*), gestorben. Ich habe vor etlichen Mo-

*) Dans la biographie des savants de Bâle, intitulée: *Athenae Rauricae*, Basiliae 1778. 8°., je trouve dix savants différents du nom de Burcard. Le seul d'entre eux, qui ait professé les mathématiques, est Jean-Rodolphe, né en 1637; or celui-ci ne peut guère avoir été le maître d'Euler. Parmi les autres, il n'y a que Jérôme Burcard, théologien, qui, quant à

naten in den Zeitungen gelesen, dass der König in Preussen das Project formirt habe, einen Fluss, dessen Namen ich vergessen, bis in das Baltische Meer navigabel zu machen. Ew. würden hiebey gute consilia geben können, wenn Sie vorhero wollten mit Lesung einiger Bücher sich au fait hierüber setzen und dadurch den usum matheseos desto mehr erheben. In dem tomo VII. Comment. hab ich unterschiedene Dissertationen de orbitis planetarum von Ihnen gesehen. Da Sie nun hierüber viele alte observationes astronomicas ausgerechnet und dieselbige mit dem heutigen statu orbitarum comparirt, möchte ich gern wissen, ob Sie nicht etwa gefunden, dass die excentricitates nach und nach ein wenig abnehmen, wie auch die obliquitates orbitarum ratione plani cujusdam intermedii. Meine Conjectur, warum die Planeten orbitas fere circulares, et cometae fere parabolicas machen, und warum die ersteren fere in eodem plano, die letzteren aber sub omni inclinatione sich befinden, dünkt mich noch allzeit inter omnes hypotheses maxime probabilis.

Ich bedaure, dass ich Dero additamenta ad isoperimetrica nicht habe durchlesen können, ehe ich solche dem Hrn. Bousquet überschickt; doch hab ich solche fugitivo oculo übersehen. Ich glaube, dass Sie in argumento de sonis laminarum elasticarum liberarum die intersectiones curvarum cum axe, numero impares verwerfen, da doch selbige freylich angehen, und ich unterschiedene proprietates darüber ausgerechnet und gar viele schöne experimenta circa situm nodorum et magnitudinem soni darüber angestellt, welche mit der theoria schön übereinkommen. Die erste curvatura

l'âge (né en 1680), pourrait être identique avec celui dont il est question ici, si les dates de la mort s'accordaient mieux. D'après les A. R. Jérôme Burcard serait mort déjà en 1737.

possibilis stellt Fig. 49. dar und formirt einen sonum von 17,625, alldieweil eadem lamina incurvata uti Fig. 45 ostendit den sonum von 6,345. formirt. In der ersten Fig. finde ich Cf vel $Ce = 369$, fD vel $eB = 131$; in der andern aber oE vel $oC = 280$, ED vel $CL = 220$. Meine pièce hierüber ist schon längst in Petersburg und könnten Ew. leicht eine Copey erhalten. Ich bin angestanden, ob ich nicht in dem Supplemento die wenigen Worte, welche Sie hierüber sagen, ausstreichen sollte. Wenn Sie es aber für gut befinden, will in der Praefation etwas davon sagen, oder ein Extract aus Ihrem nächsten Brief inseriren. Wenn Sie auch sonsten was verlangen, das ich sollte mit einmischen, bitte mir solches zu melden. Wenn in Petersburg nichts mehr auszurichten ist, so will ich meine noch ungedruckte pièces nach Berlin schicken, um solche Ihren Actis zu inseriren.

A cette lettre se trouve annexée la copie d'une lettre de D. Bernoulli au Prince Cantemir que nous reproduisons ici parce qu'elle fait connaître en peu de lignes les griefs de l'auteur contre l'Académie de St.-Pétersbourg.

Monseigneur!

Après que V. E. m'a fait la grâce de s'intéresser pour moi au sujet de ma pension de Pétersbourg, je croirois manquer à mon devoir, si je ne me donnois pas l'honneur de l'informer de l'état présent de cette affaire. J'avois prié M. Moula de solliciter et de recevoir le payement de ma pension, et il s'est adressé là-dessus à un certain M. Nartoff, actuellement chargé des affaires de l'Académie et du maniement de ses finances. Ce M. Nartoff a trouvé à propos, Monseigneur, de répondre qu'il falloit examiner ce que j'avois fait pour mériter ma pension; j'ai donc exposé à M. Moula tous mes travaux, mes attentions et mes frais pour faire faire plusieurs expériences: M. Nartoff a répliqué qu'il ne suffisoit pas de savoir ce que j'avois fait, mais qu'il falloit encore savoir si mes travaux étoient de quelque prix. Un tel examen auroit été, à mon avis, plus convenable lorsqu'il s'agissoit de m'accorder ma pension, et cela d'autant plus qu'on me l'a accordée par un contrat mutuel et formel, trois ans avant mon départ, l'ayant stipulée de ma part comme l'article le plus essentiel de mon second engagement et sous le simple titre de pension viagère telle que, de tout tems, les Souverains ont souvent accordée en reconnoissance des services passés, de sorte que, quand on aboliroit entièrement l'Académie, ma pension devroit m'être également continuée. Je vois bien après cela, Monseigneur, qu'il n'y a plus guère à espérer pour moi; mais je ne crois pourtant pas devoir abandonner entièrement cette affaire, sans Vous avoir supplié auparavant de m'honorer de vos avis et de vos ordres là-dessus. Si V. E. trouve que je ne dois plus rien tenter, je m'y conformerai avec toute soumission possible, et quittant toute espérance pour l'avenir, je n'envisagerai plus que les bienfaits que j'ai reçûs par le passé: mais, si Elle trouve qu'il faille temporiser ou bien s'adresser là où l'on sente mieux les inconvéniens de telles procédures, je Lui réitère mes très humbles prières de m'honorer de ses instructions et de ses ordres. Je me plains, Monseigneur, envers V. E., ce que je ne ferois sûrement pas envers tout autre; tant j'ai de confiance en ses bontés et de zèle pour l'honneur d'une nation, couverte de gloire et à laquelle je suis infiniment redevable. Ce même zèle m'engage, Monseigneur, à Vous faire encore de très humbles remontrances au sujet de M Euler, le premier mathématicien de l'Europe et duquel tous les siècles sauront les biens qu'on lui fait et qu'on ne lui fait pas. Ce grand savant se trouve à peu près dans mon cas: on lui a accordé la même pension qu'à moi, et cependant M. Nartoff vient de lui déclarer nettement qu'on ne la lui payera pas. Je ne saurois concevoir qu'une semblable déclaration se soit faite au sçu de S. M. I. et bien moins par Ses ordres. J'ai cru même de mon devoir d'en informer V. E. qui saura pénétrer tous les mystères et tous les ressorts cachés que M. Nartoff fait jouer. Quoi qu'il en soit, je connois assez M. Euler pour soumettre à V. E. tant ses intérêts que les miens et pour les recommander très humblement à Sa généreuse protection. Je suis avec un très profond respect etc.

LETTRE XXXI.

Sommaire. Problème du mouvement horizontal d'un tuyau droit chargé de plusieurs corps. Recommande à l'Académie de Berlin la plus grande réserve dans ses nominations. D'Alembert. Application des mathématiques à la physiologie. Problème du flux et du reflux. Sur la nature de l'éther. Homogénéité des forces de la percussion et de la pression. Traité d'Artillerie de Robins. Système de la lumière et des couleurs d'Euler.

Basel d. 25. December 1743.

.... Es ist mir lieb, dass die neue königl. Akademie so gute Progressen macht, und ich soll Ew. billig allen möglichsten Dank wissen wegen der Ehr die Sie mir angethan, mich in Dero Schreiben an den König auf eine so honorable und favorable Weise zu nennen. Auf Dero Ermahnen schicke ich hiebey eine pièce für diese Akademie. Ehe Sie aber solche praesentiren, bitte solche zu durchlesen und zu examiniren, ob sie diese Ehr meritire. Ich tractire darin das problema de motu horizontali tubi recti quotcunque corporibus onerati. Obschon ich dieses problema schon längst solvirt hatte, so hat es mich doch auf ein Neues viel Mühe gekostet, weil ich wenig davon in meinen schedis aufgezeichnet hatte. Ich weiss nicht, ob Ew. diese Materie weiter poussirt haben als ich; aber ich glaube, dass dasjenige, was ich praestirt, nicht auf eine simplere Art könne tractirt werden. Ich habe in dem exordio eine Schweitze (wie man hier sagt) daran gemacht, um diese Materie desto mehr valiren und goutiren zu machen. Wenn Sie aber solche überflüssig finden, kann sie ganz ausgelassen werden. Eine gleiche Bewandniss hat es mit der nota annexa § 8, welche ich vermeint füglich machen zu können in Ansehung meines Vaters Operum; ich will es gleichfalls Dero judicio überlassen, ob man diese notam lassen oder supprimiren sollte. Sonsten habe ich diese Schrift auf französisch aufgesetzt, weil Sie mir einmal gemeldet, dass Dero Mémoires in dieser Sprache werden gedruckt werden, worüber auch für das Künftige eine Erinnerung von Ew. erwarte. Wenn Sie es für gut befinden, könnten Sie vor gegenwärtiger pièce auch meine solutionem hujus ejusdem problematis pro unico corpore, alia methodo erutam, lassen vorhergehen, so wie ich Ihnen ehemals solche überschrieben habe; wenn Sie je meinen Brief aufbehalten haben. Ich erinnere mich auch, dass ich in dem nämlichen Briefe zwey demonstrationes theorematis mei de loco centri rotationis spontaneae beygefügt habe. Diese demonstrationes könnten zugleich excerpirt und in die Mémoires inserirt werden, sub titulo: *Extrait d'une lettre* etc. Es wäre schon gemachte Arbeit, und Ew. wissen, dass die Arbeit meinem Temperament ziemlich zuwider ist. Sonsten wollte ich unmaassgeblich wegen der neuen Akademie erinnert haben, dass wenn Sie der Associés étrangers annehmen, derselben numerus ja auf eine unwiderstrebliche Weise fixirt werde, sonsten diese Stellen anstatt einer Ehr, gewisslich in eine grosse Verachtung kommen werden, dessen wir an allen Akademien Exempel haben, ausser der Parisischen, bei welcher diese Stellen mit grösster Bemühung gesucht werden. Auch sollte man gleich Anfangs hierüber alle mögliche règlemens machen, damit die berühmtesten Leute jederzeit angenommen werden und nichts durch brigues und favor geschehe. Wenn die Pariser continuiren wie sie seit vielen Jahren gehandelt, wird kein rechter Gelehrter sich bey ihnen um eine solche Stelle bemühen. Ich sehe wohl, dass wenn man diesem Rath folgen sollte, ich mir selber die Thür zusperre; ich werde aber allezeit die Ehr und die Wohlfarth der Wissenschaften meinem Interesse vorziehen. Man macht mir aus Paris überaus viel Rühmens von einem ganz jungen vortrefflichen Mathematico, absonderlich in mechanicis; ich glaube, dass er Dalamber heisse. Ich zweifle nicht daran, er werde nach Berlin sich vociren lassen, denn ich glaube nicht. dass er allbereits placirt sey. Wenn Ew. es für gut befinden, könnten Sie es tentiren, oder durch den Hrn. Clairaut mehrere Nachrichten vorhero darüber einholen. Seitdem ich Ew. Brief an Herrn Bousquet geschickt, hab ich nicht die geringste Nachricht von ihm erhalten; weiss auch nicht, ob er allbereits an Dero Tractat angefangen hat. Ich hatte ihm offerirt eine praefatiunculam zu machen, oder solche durch Hrn. Cramer machen zu lasssen gerathen, er hat aber nichts geantwortet. Weil ich sehe, dass Sie nicht obiter, sondern post maturam meditationem die oscillationes laminaè liberae, pro numero nodorum impari, excludirt, so will ich von dieser Materie nichts sagen, wenn ich auch je eine Präfation schicken sollte. Unterdessen kann ich Ew. für gewiss versichern, dass diese zweite classis oscillationum omni jure et quovis respectu der erstern müsse annumeriret werden. Für dieses Mal hab ich nicht der Zeit mich darüber zu expliciren; wenn Sie es aber für gut befinden, will ich ein ander Mal einige remarques über diese Materie Ihnen schicken, damit Sie solche der Akademie in Berlin communiciren um mit einem Stein zwei Würfe zu thun; widrigen Falls wird es keine grosse Umschweife brauchen um uns zu accordiren, und werden einige wenige Reflexionen genug dazu seyn. Es ist mir lieb zu vernehmen, dass Ew. eine pièce de pulsu arteriarum vorhaben; ich hab dieses argumentum schon lang untersucht und viele neue veritates darin entdeckt; unterdessen bleiben doch die meisten quaestiones indeterminatae. Uebrigens sind viele davon nur deswegen indeterminatae, weil man nicht genugsam die debitas mensuras untersucht, die man doch per experimenta et observationes leicht haben könnte, sonderlich circa diametros canalium, angulos quos inter se faciunt rami conspicui, crassities parietum, fibrarum extensibilitatem et virtutem contractilem, resistentias diversi generis, quas fluida patiuntur dum per canales fluunt etc. Meine idées wären, wie ich mir flattire, nützlich; aber in Basel ist man gleichsam vergraben und findet man keine subsidia. Doch ist allbereits vieles tractirt worden in der Haemostatic von Haller, welche Ew. ohne Zweifel werden gelesen haben: sonsten ich Denselben wollte gerathen haben, diese Haemostatic zu durchgehen, ehe und bevor Sie Dero pièce drucken lassen. Wenn Dero Akademie einmal recht eingerichtet ist und einen Anatomicum und Physicum experimentalem hat, so wollte ich ein Verzeichniss schicken omnium experimentorum et observationum instituendarum, vermittelst welcher ich mir getrauete die wichtigsten Puncte der Physiologie weit besser zu tractiren, als bishero geschehen. Ich habe vor 4 oder 5 Jahren einem Leib-Medico von Paris auf sein Begehren über dergleichen Materien einige reflexiones communicirt, welche ihm wohlgefallen und dafür er mir ein herrliches Präsent von Silbergeschirr verehrt hat. Ich bin Ew. sehr verbunden, dass Sie auf einen leichten soupçon hin die complaisance gehabt, die aequationem pro curva elastica a proprio laminae pondere per methodum isoperimetricam, secundum hypothesin a me indicatam, zu untersuchen. Die harmoniam oder contradictionem utriusque aequationis hab ich nicht untersucht, weil Sie selbsten sagen, dass solches ein schweres problema seyn würde. Wenn Sie aber seithero etwas hierüber sollten entdeckt haben, bitte mir solches zu communiciren, in allem Fall aber zu melden, auf welche Seite Sie mehr portirt sind. Ich zweifle ob man jemals a priori werde zeigen können, dass die elastica müsse maximum solidum generiren; ich betrachte solches als eine proprietät, die der calculus ausweiset, und die kein Mensch ex principiis novis jemals würde haben können vorhersehen, eben so wenig als die identitatem isochronae et brachystochronae. Dergleichen proprietates sind ratione nostri gleichsam accidental, und auf diesen Fuss betrachte ich auch die observatam proprietatem orbitarum, in quibus $\int u ds$ ein minimum macht, worin ich um so viel mehr confirmirt werde, als ich errathen, dass Sie diese proprietatem nur a posteriori observirt haben und niemals würden gefunden haben, wenn Sie nicht die orbitas aliunde determinirt hätten. Wer würde die Connexion zeigen können inter omnes proprietates ellipsis, die man in sectionibus conicis demonstrirt und den orbitis planetarum qua orbitis? Wenn ich in meiner pièce, qui a partagé le prix de 1734, gesagt, dass die orbitae je länger je mehr circulares werden, und anbey explicirt, warum die orbitae cometarum omnes fere parabolicae, hingegen die orbitae planetarum fere circulares seyen, so hab ich solches nicht a mediis resistentibus deducirt, sondern ex mediis quasi deferentibus, indem ich diese media nicht in quiete betrachte, sondern tanquam celerrime mota circa solem, und gefallen mir meine explicationes noch allezeit sehr wohl, ohne dass ich meine, dass die Eigenliebe hiebei eine Influenz habe. Wenn Ew. in Dero astronomische Untersuchungen das centrum gravitatis commune (vielmehr centrum inertiae) inter Terram et Lunam betrachten, so wäre meiner Meinung nach, nicht die positio hujus centri ad mentem Newtoni anzunehmen: Er deducirt solche ex aliquibus phaenomenis aestus maris: aber diese phaenomena sind gar übel choisirt. Solche führen ihn auch auf die hypothesin, dass die actio Lunae media in mare vier mal grösser sey als die actio Solis. Ich hingegen statuire, dass sie nur $2\frac{1}{2}$ mal grösser sey, und diese Proportion wird confirmirt durch unendlich viel phaenomena, welche ich seithero erfahren und ad calculum revocirt. Es ist also, meiner Meinung nach, die massa Lunae kleiner als secundum mentem Newtoni in ratione $2\frac{1}{2}$ ad 4, und folgt daraus, dass die distantia centri Lunae et centri gravitatis systematis ad distantiam centri Terrae ad idem centrum gravitatis sey wie 1 ad 63, und nicht wie 1 ad 39. Haben Ew. meinen Tractat de aestu maris noch nicht gesehen? Ich habe klar gewiesen, dass man nicht könne füglich ex magnitudinibus aestuum, post quadraturas et post conjunctiones observatis, die propositionem inter vires lunares et solares herleiten, wie Newton gethan, indem die magnitudines aestuum auf einander influiren, da hingegen die durationes aestuum schier keine Influenz auf einander haben, welches ich ex oscillationibus penduli illustrirt habe; habe also die Proportion inter vim lunarem et solarem ex hora aestuum, und nicht ex eorum magnitudinibus deducirt, und wird meine gefundene Proportion, wie gemeldet, ex omnibus observationibus gar schön confirmirt. Uebrigens wäre die Frage, ob das centrum gravitatis Lunae et Terrae könne supponiret werden, als wenn es eandem curvam describire, als es describiren würde, si Terra et Luna in hoc puncto essent conjunctae. Vielleicht macht dieses centrum einige undulationes menstruas. Aus Anlass dessen, was Sie sagen um die resistentiam aetheris à peu près zu finden, und dessen source mir ganz wohl bekannt ist, will ich erinnern, dass die velocitas luminis, die densitas aetheris und dessen elasticitas in diversis distantiis a Sole sehr differiren können, so als wie die velocitas soni, densitas et elasticitas aëris in diversis altitudinibus a superficie terrae mächtig differiren. Also ist die velocitas luminis noch sehr unbekannt. Nebst dem setzen Sie die elasticitatem aetheris nur 100mal grösser als die elasticitatem aëris, da sie vielleicht bei Millionen mal grösser ist, welches auch Newton statuirt, woraus die densitas aetheris viel grösser würde und consequenter eine weit grössere resistentiam exerciren. Ich weiss auch nicht, ob man die resistentiam aetheris nicht auf eine ganz andere Art betrachten müsse, als die resistentiam aëris, aquae etc., welche die poros corporum nicht penetriren können. Wenn also ein corpus bestehet aus vielen particulis *a, b, c* etc. und der Aether die interstitia liberrime permeat, hingegen die poros particularum *a, b, c* etc. nicht penetriren kann, so würde die summa resistentiarum aetheris in particulas *a, b, c* etc. die resistentiam totalem in corpus ausmachen, und nach dieser hypothesi kommt eine ganz andere mensura resistentiarum heraus. Ich kann aber auch ex veris principiis mechanicis beweisen, wie es möglich sey, dass der Aether gar keine Resistenz exercire, welches auch probablement die Ursach ist, dass diese Resistenz nullis experimentis noch hat können decouvrirt werden. Meine Idee hierüber ist diese: Wenn ein fluidum contra superficiem impingirt, so bestehet die actio fluidi theils darin, dass die particulae fluidi ihre velocitatem verlieren, theils dass ihre directio motus geändert werde. Hieraus hab ich die veram actionem venae fluidae demonstrirt, wie sich vielleicht Ew. erinnern. Wenn aber die particulae fluidi weder directionem noch velocitatem ändern, so können sie keinen Effect gethan haben. Nun kann es seyn, wenn der Aether durch die corpora fliesst, dass desselben particulae in ihrer via recta zwar ein wenig geschlängelt werden (Fig. 50), als wie in *bc*, doch aber ante ingressum et post egressum eandem directionem *ab* und *cd* und auch eandem velocitatem behalten, als wie wenn *bmc* ein canalis wäre inflexus in *m*, da aber die directiones in *b* et *c* parallel wären und continuirlich Wasser per canalem lieffe, so würde der Canal weder vor sich noch hinter sich getrieben werden. Similiter kann man sagen, dass die particulae corporis die particulas aetheris trasfluentis bald auf eine, bald auf die andere Seite detorquiren, ohne deren velocitates zu ändern, der effectus aber omnium detorsionum sich destruire. Ich explicire mich nur grosso modo, doch möchte diese Idee mehr in recessu haben, als es Anfangs scheinet.

Dass die vires percussionis et pressionis homogeneae seyen, hab ich schon vor 18 Jahren und seithero vielmal erinnert, und allzeit gesagt, dass die percussio nichts anders sey, als ingens pressio admodum breviter durans, und dependirt die pressio ab intensitate elasticitatis, oder vi requisita ad immutandam figuram corporis; und diese Wahrheit folgt ja auch aus Ew. ingeniosen Manier die regulas motuum a percussione zu finden, die in den Petersburger Mémoires steht. Von des Robins Tractat hatte ich nichts gewusst. Ich rühme an ihm, dass er die experimenta gemacht; ob aber seine conclusiones physicae et mechanicae richtig sind, weiss ich noch nicht. In meiner Hydrodynamic habe ich ziemlich viel von dieser Materie gehandelt, und glaub ich, dass ich in allen Stücken secundum hypotheses recht raisonnirt hab. Ich hab gewiesen, dass die elasticitas pulveris pyrii accensi wenigstens 10000 mal grösser sey als aër naturalis; ich glaub aber, dass sie wohl 100000 mal grösser seyn könne und es scheint nicht, dass diese grosse elasticitas ab aucto calore kommen könne. Ich möchte gern diesen Tractat haben, wenn er nicht auf englisch gedruckt ist. . . . Des Robins idea de aucta resistentia aëris gefällt mir gar wohl. Ew. systema de lumine et coloribus hab ich nicht genugsam begriffen um davon judiciren zu können. Es dünkt mich ingenios, und hieran kann kein Zweifel seyn; aber die hypotheses dünken mich von einer Natur, dass sie schwerlich durch experimenta aliunde petita können confirmiret werden. Wenn man aber sich begnüget die cognita phaenomena zu expliciren, so sehe ich, dass solches auf viele Manieren geschehen könne. Ich werde vielleicht gründlicher davon raisonniren können, wenn ich das Glück haben werde Dero pièce zu sehen. Die Materie de Epicycloidibus sphaericis hab ich gar nicht praesent, und nicht der Zeit solche zu untersuchen. Dero remarques zeigen, wie praesent, fertig und scharfsinnig Sie in allen Theilen sind. Ich evitire, mit meinem Vater mich in disquisitiones scientificas einzulassen, sonsten ich ihm Ew. Anmerkung communiciren wollte. Ohne Zweifel werden Sie ihm einen Gefallen thun, wenn Sie es selber verrichten.

LETTRE XXXII.

Sommaire. Sur son mémoire adressé à l'Académie de Berlin, (voir la lettre 31ème). Problème du mouvement des trois corps, joints par un fil. Résistance de l'éther et attraction universelle de la matière. Problème de Jean B. le père. Divers sujets.

Strassburg d. 4. Februar 1744.

Dass sich die Sachen in Petersburg so gut für uns anlassen, freuet mich um so viel mehr, als ich schon alle Hoffnung deshalb verloren hatte. Ew. haben zwar die Hoffnung niemals verlieren können, weil Sie in Berlin gar viel mehr à portée sind die Sache zu poussiren, und zugleich in einer viel genauern Relation mit Petersburg stehen als ich. Mir aber ist keine andere ressource übergeblieben, als Dero Freundschaft, welcher ich auch Alles werde zu verdanken haben, wenn je die Sache zu einem erwünschten Ende kommen sollte. Der Prinz Cantemir hat mir die nämlichen nouvelles und Versicherungen durch den Herrn Maupertuis geben lassen. . . . . Es befremdet mich keineswegs, dass es mit der Akademie in Berlin so langsam hergeht. Ein grossmüthiger Monarch kann sich wohl ex utroque Caesarem erweisen, aber doch nicht zu Einer Zeit: es scheint, dass der Krieg incompatible mit den Wissenschaften sey. Ich bin Ew. verbunden, dass Sie meiner pièce einen so favorabeln accueil von der dortigen Akademie procurirt haben. Sonsten dünkt mich meine Methode völlig ex puris principiis dynamicis deducirt, ohne dass ich ungewöhnliche principia angenommen habe; denn die conservationem momenti motus rotatorii hab ich aus den gewöhnlichen principiis deducirt und demonstrirt, ehe und bevor ich solche conservationem annehme. Die conservationem virium vivarum brauche ich auch nicht, sondern ist bei mir ein corollarium. Dass ich aber die velocitates centrifugas initiales nullas setze, hab ich deswegen gethan, weil die solutio gar simpel wird wegen einer accidentellen Integration. Ich hatte freylich auch eine solutionem generalem, welche aber den motum systematis wenig erläutert, weil die aequationes allzu embrouillirt sind; da hingegen in meiner überschickten Solution alles gar distincte und verständlich determinirt wird und doch ex simplici principio $du = p\,dt$ deducirt wird. Dero profunde Speculationen über die bewussten mechanischen Quaestionen kann ich nicht genugsam admiriren, ich bin aber jetzund viel zu distrahirt, um dieselbigen mit erforderter Attention recht prosequiren zu können. Das problema de motu trium corporum filo connexorum ist solchermaasen embrouillirt, dass man nach der Solution keinen deutlichern Begriff von dem motu hat, als vorher, ausgenommen die Aequation inter t et s, und sollte man, die Wahrheit zu bekennen, dergleichen Solutionen nicht admittiren. Dieses aber sage ich zu Dero höchst meritirtem Lob, indem daraus zu sehen, dass sich die Natur nirgends genugsam vor Ihnen verbergen kann und dass Sie die allerintricatesten Quaestionen wissen ad mathesin puram zu reduciren. Mehreres kann von keinem Mathematico erfordert werden; ich glaube aber, dass noch principia mechanica in der Natur verborgen, deren Entdeckung dieses problema ganz leicht machen würde. Da ich einmal diesem problemati nachdachte, war ich schon ziemlich weit darin avancirt vermittelst einiger neuen principiorum und konnte ich bereits viele Particular-Casus solviren, welche ex sollicitationibus momentaneis schwerlich würden auf eine verständliche Weise solvirt werden können. Eine Lustreise aber hat meine Meditationen unterbrochen, und seithero hab ich nicht mehr daran gedacht. — Es ist gewiss, dass eine lamina elastica pro numero nodorum impari ihre oscillationes continuirt, ohne dass selbige in nodis figirt werde. Da ich aber dieses in Strassburg schreibe und meine cahiers nicht bei mir habe, kann ich diese Materie nicht deduciren. Der Herr Bousquet hat mir neulich geschrieben, dass er durch viele andere Werke abgehalten worden sey, Dero Tractat zu drucken, dass er aber nunmehro solches anfangen und mit allem Ernst fortfahren werde, so dass er bis nach Ostern damit fertig zu werden gedenkt. Es ist mir lieb, dass Ihnen meine Gedanken circa resistentiam aetheris so wohl gefallen. Ich würde nicht daran gedacht haben, wenn Sie nicht Anlass dazu gegeben hätten; wie ich denn das Meiste Dero gelehrten Correspondenz zu verdanken habe. Uebrigens glaube ich, dass der Aether sowohl gravis versus solem, als die Luft versus terram sey, und kann Ihnen nicht bergen, dass ich über diese Puncte ein völliger Newtonianer bin, und verwundere ich mich, dass Sie den principiis Cartesianis so lang adhäriren;

es möchte wohl einige Passion vielleicht mit unterlaufen. Hat Gott können eine animam, deren Natur uns unbegreiflich ist, erschaffen, so hat er auch können eine attractionem universalem materiae imprimiren, wenn gleich solche attractio supra captum ist, da hingegen die principia Cartesiana allzeit contra captum etwas involviren. Wenn Ew. einige sonderbare remarques über den Hallerium gemacht oder über die circulationem sanguinis einige theoremata entdeckt, bitte unbeschwert mir solche zu communiciren. Den Cometen hat man in unsern Landen auch gesehen, und wird dato noch von dem professore matheseos allhier mit dem telescopio observirt. Mein Vater lässt sich Ew. bestermaassen empfehlen. Er hat mir neulich Commission gegeben Ew. in seinem Namen folgendes problema zu proponiren, pro medio resistente in duplicata ratione velocitatum: (Fig. 51) AB est linea horizontalis, BD verticalis, A punctum positione datum; invenire angulum BAC, ut hypothenusa AC minimo tempore percurratur.

Der Herr Clairaut hat mir seit langer Zeit nicht mehr geschrieben; ich möchte wohl wissen ob er gegen Ew. eben so nachlässig sich gezeiget. Von Herrn Maupertuis hör ich, dass für dieses Jahr eine grosse Anzahl pièces angelangt sey; ich glaube, dass er und der Herr Clairaut für dieses Mal commissarii sind Der M. de Réaumur soll einig die Schuld seyn, dass man circa aestum maris auch einem declarirten Cartesianer den prix adjudicirt habe, sonsten er nicht hat unterschreiben wollen, und habe man gleichsam au sort eine Cartesianische pièce müssen herausziehen. Dass ich die vires lunae et solis in mare setze in ratione $2\frac{1}{2}$ ad 1, habe ich meistens gezogen ex inaequalitatibus aestuum ratione temporum und nicht ratione magnitudinum, wie der Newton gethan. Ein pendulum, das successive diversas gravitationes leidet, wird seine excursiones nicht ad leges gravitationum gleich accomodiren, weil die praecedens excursio eine gar zu grosse Influenz auf die folgende excursionem macht, hingegen wird die duratio oscillationis sich gleich nach der gravitatione richten, und dieses ist die Ursach, warum ich in dieser disquisitione mehr auf die inaequalitates ratione durationis als ratione magnitudinis Acht gegeben, und wird meine gefundene Proportion von $2\frac{1}{2}$ ad 1 durch alle phaenomena confirmirt.

LETTRE XXXIII.

SOMMAIRE. Oscillations des lames libres. Divers sujets

Billet sans date inclus dans une lettre de Jean B. le fils, à Euler. (Avril ou mai 1744).

Pour Mons. le Prof. Euler.

Es ist mir sehr lieb, dass der Herr Professor endlich mit mir übereinkommt wegen der classe secunda oscillationum in laminis liberis, und um so viel lieber, als wohl schwerlich Jemand anders diese Materie untersuchen wird, und wird also nun Niemand mehr zweifeln können an der Richtigkeit unserer Solutionen, da wir in allen Stücken übereinkommen. Der Herr Professor thäte vielleicht wohl, ein additamentum dem Hrn. Bousquet zu schicken, weil ich jetziger Zeit nicht kann die Praefation machen und den Hrn. Bousquet gebeten, solche durch den Hrn. Cramer machen zu lassen. Wenn sich aber die Impression noch etwas verziehen sollte, so könnte ich die Präfation wohl selber machen.

Wenn ich wüsste, dass die Mémoires von Petersburg nicht mehr sollten gedruckt werden, so wollte ich meine dahin gesandte pièces anderwärts drucken lassen. Es hat in Lausanne ein junger mathematicus, M. de Cheseaux, auch die orbitam des Cometen ausgerechnet. Es nimmt mich Wunder, ob seine Theorie mit des Hrn. Professors werde übereinkommen, und ob man die velocitates nicht exact genug observiren könne, um die axes ellipseos sammt dem tempore periodico daraus zu determiniren. Wir werden nächster Tage den succès von der Pariser Quaestion hören; ich wünsche, dass ich dem Hrn. Professor zu dem praemio duplicato gratuliren könne. Für das überschickte Buch, nämlich den letzten tomum Miscell. Berol., sage gehorsamsten Dank. . . .

LETTRE XXXIV.

Sommaire. Sur quelques travaux d'Euler. König, de Berne. Pièce de concours de B. sur la mesure des hauteurs en mer. Théorie de l'aimant. Considérations sur l'attraction d'après les principes de Newton. Problème du mouvement des trois corps. Notices diverses.

Basel d. 13. Juni 1744.

Da man mir vor etwas Zeits wider alle Gewohnheit den rectoratum academicum aufgebürdet, so bin ich mit so vielen Geschäften überhäuft, dass ich nicht eher hab können auf Ew. werthestes Schreiben vom 28. März antworten. Aus Dero specimine de cometa a. 1742 kann ich leicht abnehmen, wie sehr Sie müssen mit den Ausrechnungen des letzten Cometen beschäftigt gewesen seyn. Den usum positionum falsarum ad veras proxime inveniendas hab ich auch in unterschiedenen Occasionen remarquirt, unter andern in dem problemate de angulo elasticae, wie ich mich erinnere Ew. überschrieben zu haben. Ich hab zwar sehr viele Manieren erdacht zu den Approximationen, da bald eine, bald eine andere mit mehrerem succès gebraucht werden kann; man sollte aber annoch darauf bedacht seyn zu Approximationen, wenn man viele incognitas und viele Aequationen hat sine praevia eliminatione incognitarum, welche methodus meistens impracticabel ist. In Ew. dritten pièce sollte man schier glauben, als wenn Sie nicht remarquirt hätten, dass eine series recurrens nicht generaler werde durch die multiplicationem terminorum per terminos progressionis geometricae: Diese Multiplication producirt wieder eine seriem recurrentem ejusdem ordinis und verändert nur die terminos primos arbitrarios sammt den indicibus. Es nimmt mich Wunder, ob I. K. M. die Akademie gar nicht vermehren wollen: der Herr König, von Bern, würde sich nunmehro à tout prix vociren lassen, da er aus seinem Vaterlande bannisirt worden, wegen einigen ihm imputirten mutineries, und Ew. würden gleichsam ein Werk der Barmherzigkeit thun, wenn Sie ihm ein emploi entweder bei der Akademie oder sonst wo verschafften, und würden zugleich des Königs Interesse in Acht nehmen, da einmal diese Acquisition jetzt mit geringeren Conditionen zu machen wäre, als sonsten der Herr König wohl prätendiren könnte. Von der Akademie in Petersburg hab ich nichts mehr gehört. Wenn ich wüsste, dass Alles ein End hat, so wollte meine pièces an einem andern Ort drucken lassen. . . . . Ich habe mit Erstaunen aus den Zeitungen ersehen, dass das praemium dieses Jahr wieder ist ausgesetzt worden. Wenn Ew. pièce nicht in Paris sollte gedruckt werden, werden Sie ja nicht solche supprimiren wollen, sondern anders wo drucken lassen. Ich habe für das künftige Jahr eine weitläufige pièce verfertigt, doch aber keine sonderliche Hoffnung zu réussiren, denn ich glaube nicht, dass man, ohne den horizontem visibilem zu gebrauchen, jemals wird können zur See mit einer gewissen Accuratesse altitudines nehmen. Meine idées hierüber möchten vielleicht wohl die besten seyn, aber noch nicht hinlänglich, und möchte das praemium vielleicht auch ausgesetzt bleiben, welches doch nicht seyn sollte nach dem instituto, es sey denn, dass man gar nichts Approchantes gewiesen habe. Inzwischen glaube ich in der That, dass die vera theoria magnetis allzeit inter desiderata bleiben werde. Es scheint einmal, Gott habe in creatione mundi einige principia gebraucht und etablirt, welche supra captum nostrum posita seyen; und unter diese rechne ich auch die gravitationem mutuam universalem oder attractionem, welche wir eben so wenig begreifen werden, als die actionem mutuam animae in corpus. Unterdessen will ich lieber etwas supra captum, als contra captum statuiren. Mein grösstes Fundament, warum ich eine attractionem eo, quo sensu accipitur a Newtono, statuire, ist meines Wissens noch von Niemand erinnert worden und bestehet darin: Ich bilde mir in vacuo infinito einen mundum ein. Wenn nun in diesem mundo nichts als materia et motus wäre, so ist es klar und ich will es leicht demonstriren, dass quicunque motus in materia fingatur, sive circularis, sive rectilineus, sive perturbatus talis, ut particulae in se invicem impingant et resiliant, sive quicunque alius, dass die Welt nicht könnte intra terminos suos bleiben, sondern dass sie sich nach und nach in infinitum ausdehnen würde, als wie ein aër non compressus. Wollte man sagen, es seyen viele Welten, so würden solche nothwendig sich von einander entfernen und eine jede sich ausdehnen und völlig dissipiren. Wenn man sagt, die materia sey in infinitum extensa, so gewinnt man dadurch nichts anders, als dass man sich selber embrouillirt und gleichsam betäubt, da doch in se das inconveniens allzeit bleibt. Ew. belieben dieses inconveniens recht zu betrachten, so werden Sie gewiss finden, dass solches real sey, und bitte mir nur ungefähr anzudeuten, wie ein motus in universa materia könne statuirt werden, ohne dass sich die Welt von sich selbsten dissipire. Ich für mein Theil sehe hier kein expediens pro systemate Cartesiano, als ein cortex durus, qui materiam intra limites contineat, oder dass man sage, die Welt expandire sich in der That nach und nach, solche Expansion oder Dissipation sey aber per multa saecula insensible. Ich glaube nicht dass Sie zu entwederem von diesen expédiens incliniren. So bleibt nichts anders übrig, als eine attractio materiae universalis, quae ab alia causa quam motu producatur. Warum will man behaupten, dass Gott nur per materiam et motum agire? Wir haben zwar keine Idee von den übrigen Sachen, können aber deswegen doch existiren. Vielleicht dependirt die attractio nicht immediate a voluntate Dei, sondern wird per alias leges universales producirt. Wir werden aber diese leges niemals approfundiren, quia non respiciunt materiam. Meiner Meinung nach bestehet also die Welt durch das aequilibrium inter conatum universae materiae se expandendi, qui necessario a motu oritur, et inter vim attractionis, cujus causa non est solus motus. Wenn alle motus in systemate mundi noch so geschwind würden, müsste Gott eine vim attractionis quadruplam creiren, um die Welt in statu quo zu erhalten, sonsten würde sich die Welt ausdehnen, bis sie viermal so gross wäre. Sonsten wäre auch zu betrachten, dass die quantitas absoluta inertiae arbitraria Deo creatori sey, als die velocitas absoluta solis et reliquorum siderum ac totius materiae: so könnte man sagen, quod mundo, in quo partes moventur, circumposita sit materia, cujus inertia sit infinita, quae rursus partes motas in limitibus suis continere posset, als wie eine crusta dura. Uebrigens überschreibe dieses nicht in der Hoffnung einigen Eingang bei Ihnen zu finden. Ich weiss gar wohl, dass dergleichen idées soli auctori quodammodo satisfacere possint und allen Uebrigen ridicul vorkommen; sondern ich überschreibe sie Ihnen nur, weil Sie es von mir begehrt haben, und begehre nichts anders, als dass es Ihnen keine böse Opinion von mir in totum erwecke. Ich hab nicht können Ew. Solution de motu trium corporum filo connexorum super plano horizontali mit den casibus particularibus compariren, weil mir einige passages etwas obscur vorkommen. Da Sie mich aber versichern, dass in allen casibus der motus könne specifice determinirt werden, so admirire ich Dero Solution im höchsten Grad. Ew. belieben diesen casum auszurechnen, allwo (Fig. 47) filum $AB =$ filo BC et corpus $A = C$ und die velocitas corporis $A = c$, velocitas corporis $B = v$ et velocitas corporis C entweder auch $= c$ oder $= 2v - c$. Ew. belieben mir zu melden, wie nahe der Comet zu dem Mercurio kommen sey. Diese zwey Körper müssen sehr nahe zu einander gekommen seyn, um sich sensibiliter in deren Lauf zu derangiren. Haben Sie nicht erfahren, dass noch andere mathematici die theoriam des letzteren Cometen ausgerechnet und ob solche mit Dero theoria übereinkomme. Wegen den sonis laminarum elasticarum hab ich ein Zedulein eingeschlagen in einem Brief, den mein Bruder an Ew. geschrieben. Sie belieben mir zu melden ob Sie nicht eine Addition deswegen an Hrn. Bousquet geschickt haben, oder schicken werden. In Genf hat man Principia Newtoni gedruckt in 3 tomis mit überaus viel guten notis, worin Ew.

sehr oft citirt werden. Man hat auch Dero pièce de aestu maris, sammt des Herrn Mac Laurin's und meiner de verbo ad verbum ganz inserirt. Schliesslich bitte Ew. mir Dero werthgeschätzte Freundschaft zu continuiren und meine trockene und kahle Briefe nicht übel zu nehmen. Der Kopf ist mir nicht aufgeräumt und meine Geschäfte erlauben mir auch nicht an mathematica viel zu gedenken; bitte aber gehorsamst dessen ungeachtet mit Dero gelehrten Briefen mich zu unterrichten.

•

LETTRE XXXV.

SOMMAIRE. Théorème relatif à la résolution des équations à plusieurs inconnues par approximation. Suite des considérations sur le principe de l'attraction universelle. Vibrations des lames élastiques libres. Courbes à rebroussement. Problème du mouvement des trois corps. Heinsius sur la comète. Divers sujets.

Basel d. 29. August 1744.

Eine kleine Lustreise und die vielen Rectoratsgeschäfte, welche dadurch sind aufgehäuft worden, haben mich verhindert, Ew. eher zu antworten auf Dero wertheste Schreiben vom 4. und 21. Juli.

..... Wegen der Approximationen ad radices pro aequationibus pluribus incognitis inter se permixtis, hab ich durch zwey unterschiedene methodos (so ganz different schienen) folgendes theorema gefunden: Sint duae, verbi gratia, incognitae x et y, quae determinari debeant hisce duabus aequationibus qualibuscunque $\xi = 0$ et $Y = 0$, allwo ξ et Y quantitates utcunque compositae sint ex cognitis et incognitis x et y permixtis. Sit proxime $x = \alpha$ et $y = \beta$. Um nun die radices viel propius zu finden, differentiire ich die aequationes, tractando incognitas ut variabiles; nachgehends substituire ich in aequationibus differentiatis α et β für x und y, so wird man finden $d\xi = m\,dx + n\,dy$ und $dY = p\,dx + q\,dy$. His ita praeparatis, dico fore quam proxime

$$x = \alpha + \frac{nY - q\xi}{mq - np} \text{ et } y = \beta + \frac{p\xi - mY}{mq - np},$$

intelligendo per ξ et Y quantitates, quae prodeunt ponendo $x = \alpha$ et $y = \beta$. Will man diese Operation repetiren, so findet man die valores x et y noch weit accurater, und ist zu observiren, dass es nicht sonderlich nöthig sey, die quantitates m, n, p et q auf ein Neues zu determiniren. Solche quantitates sind arbitrariae, wenn man nur will solche constanter easdem nennen, quoties operatio repetitur. Wenn sie aber eo quo dixi modo determinirt werden, appropinquirt man viel geschwinder, als sonsten. Sit exempli gr. $xx - yy - 11 = 0$ et $2yy - xy - 20 = 0$, allwo die verae radices sind $x = 6$ et $y = 5$. Ponatur autem $x = 5{,}9$ et $y = 4{,}9$, so bekommt man $m = 11{,}8$, $n = -9{,}8$, $p = -4{,}9$ et $q = 13{,}7$; deinde $\xi = -0{,}19$ et $Y = -0{,}89$ und wird also $x = 5{,}9 + \frac{11325}{113640} = 5{,}9997$ und $y = 4{,}9 + \frac{11433}{113640} = 5{,}0006$. Wenn man nachgehends diese Operation noch einmal wollte machen, würde man die radices überaus nahe finden, wenn man schon die valores adhibitos pro m, n, p et q, um die Mühe zu sparen, nicht ändern wollte. Wenn die aequationes viel radices reales haben, kann man alle proxime finden, wenn man sie nur ungefähr weiss, und eben solche formulas kann ich geben, wenn drey, vier, oder mehr incognitae mit einander vermischt sind. Vielleicht hätten Ew. dergleichen theoremata nützlich anwenden können bei Ihrem calculo cometarum; ich zweifle aber nicht, Sie werden similes methodos dazu gebraucht haben. Es freuet mich sehr, dass Ew. mein neues argumentum pro attractione Newtoniana für wichtig befinden. Ich hab es zwar in mir selber auch für wichtig gehalten; doch aber hätte ich, vor Dero Approbation, mich gescheut, es einem Menschen zu sagen. Nunmehr aber wollte ich kein Bedenken tragen meine Meinung allen Leuten zu sagen, und wollte ich mich gern lassen im Fall der Noth von der ganzen Welt auslachen, wenn ich nur Dero einzige Approbation habe. Es dünkt mich, man sollte viele Sachen herleiten immediate a constante voluntate Dei, quam sine sufficiente ratione mutare nequit. Wenn sich der Mensch nicht sehr familiarisirt hätte mit der inertia, würde ihm solche eben so fremd vorkommen als die attractio. Ew. werden gestehen, dass die quantitas absoluta inertiae solo arbitrio Dei sey determinirt worden, und dass sine contradictione Gott hätte machen können, dass eadem quantitas materiae, eodem tempore et eadem pressione einen grössern oder kleinern motum bekommen hätte. Es ist also die inertia nichts, quod inseparabiliter ipsi materiae inhaereat; bleibt also die inertia constanter eadem; so muss solches sola voluntate constante Dei geschehen. Ich sehe nicht, warum man constantem voluntatem Dei als eine perpetuam creationem, und diese als ein absurdum ansehen solle; ich sehe vielmehr die mutationem voluntatis als eine novam quaestionem an. Wenn nun die inertia a voluntate Dei zu deduciren ist, warum nicht auch attractio mutua corporum, und warum wollte man alles a materia et motu deduciren und gleichsam Gottes Hülfe aufsagen? Vielleicht ist in rerum natura keine inertia, keine attractio und überhaupt keine pressio, sondern Etwas, was wir uns angewöhnt haben zu consideriren als pressionem divisam per inertiam, indem $\frac{0}{0}$

etwas seyn kann und dieses glaub ich, dass existire in materia universa mutuo respectu. Dessen ungeachtet aber könnten wir bei unsern chimärischen Ideen pressionis et inertiae bleiben sine errore, weil wir niemals eine oder die andere consideriren, sondern nur derselben mutuam relationem; und wenn wir die inertiam materiae auf die gewöhnliche Weise betrachten, so könnten vielleicht viele phaenomena generalia daraus deducirt werden, wenn man sagte: Gott habe eben nicht omni materiae eandem inertiam imprimirt. Es ist zwar wahr, dass ich ehedessen von der attractione Newtoniana ganz andere Ideen gehabt; ich hätte mir aber niemals in Sinn kommen lassen, dass meine damaligen Gründe Sie hätten können auf einen andern Weg leiten. Ich bin vielmehr parat, sonderlich bei diesem meinem reiffern Alter, in Allem, was Sie werden recht untersucht haben, mich Ihrer Meinung zu conformiren. Auf das Wenigste kann ich Sie aufrichtig versichern, dass ich niemals Etwas für gewiss halten werde, ich hätte denn Ew. Uebereinstimmung dabei. Deswegen es mir auch so lieb gewesen, von Denselben zu vernehmen, dass Sie die duplicem classem vibrationum in laminis elasticis liberis accordiren. Ich suchte vorher allzeit einen paralogismum in meinem ratiocinio, und konnte doch keinen finden. Ich nehme gleichfalls als eine allzugrosse Höflichkeit auf, wenn Ew. sagen, Sie wollten 10 auf 1 setzen, dass ich das nächste Pariser praemium bekommen werde; es wäre denn, dass Sie damit anzeigen wollten, als wenn eine Parteylichkeit mit unterlaufe. Es kann seyn, dass einige von den Richtern wohl für mich portirt sind; doch aber kann ich sagen, dass ich alle ersinnliche Präcautionen nehme, um mich zu verbergen. Dem sey aber wie ihm wolle, wenn Sie mir anstatt $\frac{10}{11}$ nur wollen $\frac{1}{8}$ geben, so will ich Ihnen meine Hoffnung cedirt haben, obschon ich eine grosse und nach meinen Kräften elaborirte Dissertation darüber verfertigt habe. . . . . Ich hätte niemals gezweifelt, dass es curvas gebe, die ein point de rebroussement haben, und deren rami versus utramque partem concavi sind, und dass in cuspide der radius osculi finitus sey. Es scheint zwar, dass die lex continuitatis hier unterbrochen und ein saltus geschähe; ich kann aber dieses paradoxum gar wohl expliciren. Die simplicitas curvae, welche einen solchen cuspidem hat, ist sehr merkwürdig. — Ich sehe nunmehro erst recht ein die Tiefsinnigkeit und Wichtigkeit von Dero Solution de motu trium corporum filo connexorum. Ich hab aber eine solutionem directam niemals gemacht und keinen einzigen Augenblick daran gewendet; wohl aber hab ich vermeint, man könnte etwa tres motus simplices finden, ex quibus motus absolutus componatur, ad modum duorum corporum filo connexorum, und wenn ich solche tres motus indirecte gefunden hätte, war meine Intention erst, eine solche solutionem directam mit allem Ernst zu suchen, um zu sehen, ob beide Solutionen einander confirmiren würden. Aber, wie gemeldet, eine solutionem indirectam, welche in mechanicis ein neu Licht würde gegeben haben, hab ich nicht finden können, und eine directam nicht gesucht. Ich vermeinte ab inductione ab aliquibus exemplis, der motus absolutus könnte bestehen ex motu uniformi in directum, ex motu uniformi circulari et ex motu quodam titubatorio oder oscillatorio; ich sehe aber, dass diese zwey letztern motus nicht independentes unus ab altero seyen. — Des Hrn. Heinsii Tractat von dem Cometen möchte ich gern sehen. Die observationes de cauda multiplici cometae et de cauda incurvata sind von Allen gemacht worden. Vielmehr aber soll die cauda sub duabus directionibus einen Winkel gemacht haben und nicht incurvata gewesen seyn. Der Herr Cheseaux hat mir auch unterschiedene Observationen communicirt; wenn ich sie Ihnen einmal bei Gelegenheit schicken kann, will ich solches thun. Mein Vater hat mir beiliegende Schrift als eine Antwort auf Ew. letztes Schreiben übergeben. Ich hab mich nicht enthalten können inter legendum, da ich sein problema ex tempore solvirt, die notatiunculam beizufügen. Wenn ihm Ew. je antworten, belieben Sie nur den Brief ihm immediate zu adressiren, weil ich gern aller Gelegenheit vorkomme von mathematicis zu reden. . . . . Ich fürchte, in Berlin werden die Wissenschaften sich schwerlich empor schwingen. Wenn Sie nicht meinen, dass meine letztens überschickte pièce könne gedruckt werden, bitte solche auf Petersburg zu schicken. Wenn aber die Miscell. Berol. sollten continuirt werden und man meine pièce gern darin inserirt, bin ich dessen ganz wohl zufrieden und hab Materie genug um pièces von diesem calibre zu verfertigen, wenn ich nur nicht so ungern schriebe. Ich weiss nicht, ob Sie observirt, dass in dem einen von mir überschriebenen casu de motu trium corporum aequalium, die corpora extrema eine ellipsin beschreiben, cujus centrum uniformiter movetur in linea recta, wiewohl solches gar leicht zu sehen. Es hat neulich ein Herr Waltz in Dresden, der sich conseiller des commissions, comme aussi mathématicien et géographe de S. M. Polonaise nennt, meinem Vater geschrieben und begehrt von demselben meines Vetters methodum directam die summam seriei $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} +$ etc. zu finden, und thut hinzu: „comme dans la conjoncture présente le 9ème tome des Comment. de Pétersbourg, auquel on m'a dit qu'on inséreroit cette méthode directe, tardera sans doute fort à paraître, ou qu'il ne paraîtra peut-être jamais, je serois charmé de voir cette méthode, ayant toujours eu quelque doute contre l'autre qui va par la résolution d'une équation infinie." Wenn Ew. mit diesem Hrn. Waltz in Correspondenz wären, könnten Sie ihm die verlangte Methode überschreiben und ihm meines Vaters Compliment machen, da mein Vater nicht mehr im Stand ist, neue Correspondenz auzufangen. . . . . Wenn der Comet nicht näher kommen ist zu dem Mercurio, als Ew. sagen, so kann er keine sensible Veränderung in demselben verursacht haben; wenn er auch 100 mal näher kommen wäre, würde man, meiner Meinung nach, astronomice keine Veränderung im Mercurio gefunden haben. — Ich hatte nicht gewusst, dass man circa Venerem einen Satelliten entdeckt habe. Ich möchte wohl hierüber einige particularia vernehmen. — Die meisten HH. Academici sollen aus Peru wieder zurückseyn; ich hab aber noch nichts von derselben Verrichtungen erfahren. Herr Moula hat mir vor etwas Zeit geschrieben, dass ein gewisser Brief, den ich ihm geschrieben, den er hat müssen im Original der Commission übergeben und welcher nachgehends ist I. K. M. selbst übergeben worden, gar Vieles zu der glücklichen Veränderung der Akademie beigetragen habe.

P. S. Eben empfange ich durch Hrn. M. Ochs zwei Exemplare von dem programmate wegen dem Berliner praemio. Vielleicht haben Ew. mir solches adressiren lassen; ich bedaure aber, dass mir die causa electricitatis so gar unbekannt sey, und ich kann mich unmöglich resolviren etwas zu schreiben, was mir selber keineswegs satisfacirt.

LETTRE XXXVI.

Sommaire. Traité d'artillerie de Robins. Théorie de l'aimant. Causes de l'électricité Introduction à l'analyse des infinis. Queues des comètes. Recherche de la racine d'une équation quelconque par approximation. Maupertuis.

Sans date. 1745 (au commencement).

. . . . . Sie werden mich sehr obligiren wenn Sie mir ein Exemplar von Dero Translation des Hrn. Robins Tractats mit Dero notis schicken wollen. Mein goût führt mich sonderlich auf die physico-mechanica. Man hat mich auch berichtet, als wenn Sie hätten Dero Dissertation de magnete drucken lassen, welche ich gleichfalls sehr gern sehen möchte. Ich gestehe, dass ich viel über diese Materie meditirt habe, aber mir niemals hab satisfaciren können. Es nimmt mich Wunder, ob Sie in Berlin bey Ihrer Societät werden einige pièces von einiger Wichtigkeit de electricitate bekommen haben. Wenn Sie ferner sollten quaestiones ausschreiben und solche von einer andern Natur seyn, als diese, werde ich ein ander Mal auch mein Glück tentiren. Man hat mir viel Ehr angethan, meine überschickte pièce für die erste in Dero Acta zu inseriren. Ich weiss nicht, ob solche auf latein oder französisch gedruckt werden; in dem erstern Fall, wäre es mir leid, Jemand die Mühe verursacht zu haben, solche zu translatiren. Ich weiss nicht, ob ich Ew. schon gemeldet, dass mir der Herr Bousquet wegen Dero Introduction ad Calculum infinitesimalem geschrieben, es habe ihm der Herr Cramer von Genf einen gleichen Tractat zum Druck offerirt, und hat meine Meinung verlangt, ob man nicht könnte aus beiden Tractaten ein opus machen. Ich habe ihm geantwortet, ich glaubte nicht, dass Sie diese Proposition genehm halten würden, und er solle sich gar kein Bedenken machen, beide Tractate apart zu drucken; es werde ihm an débit nicht fehlen. Ich weiss nicht, wozu der Herr Bousquet sich nun resolvirt hat. Ich hatte auch gefunden in meines Vaters problemate, dass pro medio resistente in ratione velocitatum der angulus quaesitus allzeit semirectus sey; er hat mir's aber nicht glauben wollen. Dero Brief hab ich demselben überliefert. Ich glaube nicht von meiner nach Paris für dieses Jahr überschickten pièce gesagt zu haben, dass sie der vorgegebenen Frage ein vollkommnes Genüge leiste; ich hätte wider meine Meinung geredet. Ich glaube vielmehr, dass ratione quaestionis de cognoscenda directione horizontali aut verticali, cum superficies maris non apparet, meine Methode noch sehr unvollkommen ist. Doch bin ich einigermaassen persuadirt, dass Niemand eine bessere Methode geben wird. Ich halte die bisher gegebenen explicationes physicas caudae cometarum für sehr ungewiss; sonderlich aber dünkt mich sehr schwer zu expliciren, wie die longitudo caudae den diametrum cometae viel 1000 mal übertreffen könne. Ich sehe auch nicht, wie solches a refractione radiorum könne explicirt werden. In dieser hypothesin würde auch schwer seyn zu expliciren, warum die cauda allzeit directionem à sole fere recta aversam habe. Es ist mir eingefallen, ob nicht die cauda von einer würklichen inflammatione corticis externi in corpore cometae herkomme, so dass die cauda lumine proprio scheine; ich gestehe aber gerne, dass diese Meinung auch nicht sonderlich wahrscheinlich ist. Es ist merkwürdig, dass der axis major noch so gross gewesen, als der axis minor: es nimmt mich Wunder, was der axis major für eine Position gehabt. Sollte er versus centrum solis dirigirt gewesen seyn, könnte man muthmaassen, dass die inaequalitas gravitationis partium versus solem daran Schuld gewesen, als wie man bei dem aestu maris zeigt. Allein die gravitatio partium versus centrum cometae müsste sehr klein supponirt werden. Ich weiss nicht, ob man einen motum circa axem in cometa observirt hat; in diesem Fall könnte man auch conjiciren, dass die inaequalitas axium a velocissimo motu diurno hergekommen, und wäre dabei zu glauben, dass leicht eine relatio inter motum diurnum et excentricitatem orbitae seyn könnte. — Es freuet mich, dass Ew. von meiner neuen Manier simul zu den valoribus vieler incognitarum, per totidem aequationes mixtas determinatarum, zu appropinquiren, einiges Vergnügen bezeugen. Ich habe seithero auch observirt, dass diese Methode oft mit Nutzen kann angewandt werden. Der Grund davon ist freylich nicht schwer einzusehen; doch bin ich nicht methodo directa dahin geführt worden. In dem 2ten tomo Comment. Petrop. hab ich eine Methode appropinquandi ad radicem aequationis qualiscunque. Ich hab nämlich der Aequation diese Form gegeben $X = F(x)$, und gesetzt einen valorem arbitrarium pro x in $F(x)$, und was alsdann herauskommt, nimmt man wieder an pro x und so weiter. Da nun einer aequationi datae infinitis modis die Form $X = F(x)$ kann gegeben werden, so war die Frag, welche die beste ist; da dann gleich erhellet, dass diejenige die beste seyn wird, quae facit $d. F(x) = 0$, und hab ich nachgehends diese methodum ad plures incognitas extendirt. Es ist also merkwürdig, dass diese Manier auf vielerley Weise kann herausgebracht werden, welches ein indicium ist, dass sie vor andern Methoden meritirt considerirt zu werden, sonderlich da sie sich extendirt auf alle Aequationen, da man kann $F(x)$ ex data x ausrechnen, und also trefflich ist für die Aequationen, da quantitates logarithmicales, arcus circulares, sinus etc. sich befinden, weil man hiezu die tabulas gebrauchen kann. Man kann auch formulas geben, welche noch accurater sind, als diejenigen, welche ich Ihnen überschrieben, wovon ich als ein Exempel geben will, wenn nur eine incognita ist. Sit ξ qualiscunque functio incognitae x, sitque $\xi = 0$; sit radix aequationis propemodum $= \alpha$; differentietur aequatio proposita, postque differentiationem ponatur $x = \alpha$; fiat sic $d\xi = m\,dx$; dein differentietur aequatio secunda vice posita dx constante, ponaturque rursus $x = \alpha$, fiatque sic $dd\xi = n\,dx^2$, erit valde prope $x = \alpha - \frac{2m\xi}{2mm - n\xi}$. In hac autem formula intelligitur per ξ illa quantitas, quae prodit pro ξ cum ponitur $x = \alpha$. Diese methodus hat auch diese Prärogative, dass man zu allen radicibus appropinquiren kann, nachdem ich selbige einmal propemodum aliunde deducirt und erkannt habe. — Neulich hab ich ein theorema observirt, welches zwar leicht zu demonstriren ist, doch aber einigermaassen curios scheinen kann: Sit x qualiscunque numerus rationalis, intelligaturque per $F(x)$ functio qualiscunque rationalis ipsius x, ita ut sit $F(x) = a + bx + cxx + dx^3 +$ etc. Sit n numerus integer qualiscunque affirmativus, modo sit major quam exponens maximae dignitatis ipsius x in functione proposita. His positis, wird man allzeit finden

$$F(x) = n\,F(x-1) - \frac{n.n-1}{1.2}\,F(x-2) + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\,F(x-3) + \text{etc.} \ldots\ldots$$

Ich glaub, dass bei gegenwärtigen Conjuncturen der Herr Maupertuis wenig Trost am Berlinischen Hof wird gefunden haben. Es nimmt mich Wunder, ob er sich mit Ihnen viel in mathematische raisonnemens eingelassen hat. Mit mir hat er etliche Mal von seiner Methode de minimis crepusculis disputirt und vermeinte eine radicem realem gefunden zu haben, die in der gewöhnlichen Formel nicht enthalten wäre, welches ich ihm contestirt; doch hab ich ihn niemals recht verstehen können.

LETTRE XXXVII.

Sommaire. Elasticité de l'air condensé. Problème sur le moindre crépuscule. Suite des sujets précédents.

Basel d. 20. März 1745.

. . . . Viel begieriger als auf den 9ten tomum Comment. bin ich auf des Robins Tractat mit Dero herrlichen notis. Ew. werden ohne Zweifel meine Reflexionen über diese Materie in meiner Hydrodynamica, wie auch, was ich in den Commentariis Petrop. darüber geschrieben habe, gelesen haben. Die experimenta, so in den Commentariis stehen, kommen mir auch in vielen Stücken sehr paradox vor; ich wollte solche selber nicht garantiren. Ich habe sie, wenn ich mich recht erinnere, von dem Hrn. Delisle empfangen. Dieser wird mehrere und bessere Nachricht darüber geben können. Wenn Ew. ihn darüber befragen, bitte mir dessen Antwort darüber zu communiciren. Ich weiss nicht, was Ew. für eine Theorie haben, um zu schliessen, dass aër maxime condensatus, 1200 mal mehr Elasticität habe, als aër qui dicitur naturalis. Ich glaube vielmehr, dass dessen elasticitas veluti infinita zu censiren sey. Die theoria aëris, so ich in der Hydrodynamica beschrieben, kommt mir als die wahrscheinlichste vor, und das ohne einige philautia; doch will ich Dero rationes gern vernehmen, wenn Dieselben eine andere theoriam consideriren. Mir einmal ist es sehr wahrscheinlich, dass die elasticitas aëris proportional sey volumini vacuo, ab aëreis particulis relicto. Von diesem Allen aber werde ich mit mehrerem Grund raisonniren können, wenn ich des Robins Tractat werde gesehen haben. Sie sagen auch dass der Robins die resistentiam aëris annehme ut $v + \frac{vv}{2h}$. Ich sehe nicht, wie man diese hypothesin physice expliciren kann; wenn sie aber durch viele experimenta confirmirt wird, sowohl in motibus velocissimis als lentissimis, so will ich es gelten lassen. Mit Hrn. Maupertuis hab ich auch oft raisonnirt über seine solutionem problematis de minimo crepusculo. Ich hab zwar leicht demonstrirt, dass die bekannten solutiones omnem extensionem haben und auch beide formulae $x = \frac{r+k}{h} s$ und $x = \frac{r-k}{h} s$ darin begriffen seyen; ich hab auch gewiesen, dass die erste radix maximum tempus gebe ab occasu sideris usque ad reditum ad circulum crepuscularem prope ortum sideris. Er hat mir aber allzeit noch Quaestionen dabey gemacht, welche ich die Wahrheit zu bekennen, niemals recht verstanden. Des Hrn. Maupertuis Final-Aequation läſst sich durch $xx - rr$ dividiren, und die aequatio quadratica post divisionem hat keine radicem inutilem; ich sehe also nicht, dass hierin könne ein Irrthum stecken. Die aequatio simplex, so man nach der genuinen Methode findet, muss doch tacite die beiden radices $x = \frac{r \pm k}{h} s$ enthalten.

Ich möchte wissen, wer das erste praemium de electricitate erhalten.

Ew. Meinung de cauda cometarum kommt mit meiner überein, indem eine würkliche Inflammation eben so viel ist, als wenn man sagte, *dass würklich kleine Theilchen aus der Atmosphäre des Cometen herausgetrieben werden.* Dass der axis major cometae gegen die Sonne gekehrt gewesen, macht mich schier glauben, man müsse die magnam inaequalitatem utriusque axis herleiten ab actione solis in cometam, gleich wie der Mond das Meer intumesciren macht, wobei man doch sagen müsste, dass zugleich der Comet sich sehr geschwind circa axem minorem herumdrehe. Ew. Methoden meine formulas approximationum zu demonstriren, differiren au fond wenig von meiner Methode. Ich hab meine formulam applicirt, die weitläufige Aequation, so ich in Comm. Petrop. tom. 2. p. 334 considerirt, zu tractiren, da ich denn auch die erste Position $x = 2$ formirt habe, wobei ich unica operatione gefunden $x = 2{,}56$, welches Resultat durch methodum loco citato adhibitam erst post sex operationes gefunden. Es kommen aber beide methodi mit einander überein, wenn man aequationi propositae secundum methodum, in Comment. adhibitam, formam commodissimam gibt, welches ich damals nicht betrachtet. Ew. letztere Demonstration de $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} \cdot \int\frac{xxdx}{\sqrt{(1-x^4)}}$ etc. ist freylich leichter als die erstere.

LETTRE XXXVIII.

Sommaire. Maupertuis, nommé président de l'Académie de Berlin. D'Alembert. Animosité de B. contre lui. Problèmes relatifs à la théorie du flux et du reflux. Problème de la courbe catoptrique d'Euler.

Basel d. 7. Juli 1745.

. . . . . Der Herr Maupertuis wird laut seinen letzten Briefen in 3 à 4 Wochen nach Berlin verreisen, um dort die Stelle eines Präsidenten von der Akademie zu vertreten. Dieses macht mich hoffen, dass es noch gut mit der Akademie gehen werde, weil der Herr Maupertuis gar wohl an dem ganzen Hof gelitten ist und sich gewiss eine Ehr daraus machen wird, die Akademie empor zu schwingen; er hat ein generos Gemüth und noble Absichten. Dieses Zeugniss muss ich ihm geben, wenn schon unsere Freundschaft ziemlich erkaltet, wo nicht gar verloschen ist. Er hat auch eine sonderbare Hochachtung für Ew. ausnehmende mérites, wozu ich vielleicht etwas beigetragen; denn er nimmt sich nicht die Mühe, durch sich selbst dergleichen Sachen zu untersuchen, welches die Ursach ist, dass er auch wohl eine sonderbare estime für ganz unwürdige Leute fasst. Da er das letzte Mal in Basel gewesen, hat er mir allzeit ein miraculum miraculorum gemacht aus einem jungen D'Alembert, welcher eine Mechanicam und Hydrodynamicam hätte drucken lassen, bis ich endlich sagte, es sey nicht möglich, in diesen Wissenschaften in dem 20ten Jahr seines Alters alle principia einzusehen und sogar wunderbare Progressen zu machen. Unterdessen hat mich dieses bewogen, mir obbemeldte Werke anzuschaffen, und hab mit Verwunderung gesehen, dass ausser einigen wenigen Sachen in seiner Hydrodynamica nichts als eine impertinente suffisance hervorleuchte. Seine criteria sind bisweilen recht puerilisch, und zeigen nicht nur, dass er kein sonderbarer Mann ist, sondern sogar, dass er es niemals werden wird, indem seine Praesumtion viel zu gross, um von andern Leuten, und seine eignen Einsichten viel zu gering, um von sich selbsten etwas sonderliches zu lernen. Bei der reactione aquae ex vase erumpentis refutirt er mich auch; de motu aquarum per plura foramina transfluentium refutirt er mich wieder, und meint velocitas sey eadem, ac si per simplex foramen efflueret, und an vielen andern Orten refutirt er mich, aber zugleich, welches mich freuet, die berühmtesten Männer macht er sich kein Bedenken als des petits garçons zu critisiren. Wenn er meine raisonnemens nicht verstanden, oder nicht hat untersuchen wollen, so hätten doch meine Experimente ihn ein wenig zurückhalten sollen. Den situm aequilibrii corporum humido insidentium hat er auch falsch determinirt etc. Ew. seyen doch so gut und durchgehen diese opera und sagen mir Dero Meinung darüber. Man sollte doch darauf bedacht seyn, zum Behuf der wahren Wissenschaft, dergleichen junge

Laffen von ihren allzufreyen critiques abzuhalten, oder zum Wenigsten zu verhindern, dass sie keine Impression machen. Sonsten hat der Herr D'Alembert mit obligeanten termes mich refutirt, so dass ich nicht anders kann, als wegen meinem Personal sehr wohl mit ihm zufrieden zu seyn. Ew. werden vielleicht erfahren haben, dass das letztere praemium, für welches ich concurrirt, auch ist ausgesetzt worden. Ich glaub schier, dass bei diesen Kriegszeiten das Geld nicht da ist. . . . . Ich bin aus allen phaenomenis fluxus et refluxus maris völlig versichert, dass das centrum gravitatis Terrae et Lunae weit näher zu meiner Proportion kommt als zu Newtons. Ich möchte wissen, ob Sie ex principiis pure mechanicis können veros motus Lunae et Terrae accurat bestimmen. Solches hat mich bis dato unmöglich gedünkt; ich hab nicht einmal die aequationes recht evolviren können pro orbita corporis circa duplex centrum virium moti, obschon ich unterschiedene methodos habe, solche orbitam quam proxime zu determiniren. Der Herr Bousquet hat meinem Vater noch nicht einmal ein Exemplar geschickt von Ew. Werk de Isoperimetricis: mir hat er ein Exemplar geschickt in seinem Namen. Dero herrliches Werk über die Artillerie erwarte mit grossem Verlangen, wie auch De motu cometarum, wiewohl mir diese letztere Materie nicht so familiär seyn möchte. Dero problema catoptricum scheint freilich schwer zu seyn. Man wird ohne Zweifel die Quaestion so betrachten müssen ut primo, data curva pro reflexione prima, inveniatur curva pro reflexione altera, et dein fiat ut ambae curvae forment unam eandemque curvam continuam, worüber Ew. schon vor vielen Jahren vortreffliche Observationen gemacht.

LETTRE XXXIX.

Sommaire. Traité d'artillerie de Robins. Force de la poudre. Lois du choc des corps Jugement ultérieur sur d'Alembert Problème catoptrique d'Euler

Basel d. 7. September 1745.

Allervorderst sage ich Ew. schuldigsten Dank für das herrliche Präsent; des Robins Tractat sammt Dero wichtigen Erläuterungen und tiefsinnigen Anmerkungen hab ich mit sonderbarem Vergnügen durchgesehen. Für die gütige und honorable Meldung, die Sie von mir an unterschiedenen Orten gethan, sage gleichfalls gehorsamen Dank. Ew. Beifall und Approbation schätze ich einzig über der ganzen Welt Lob. Des Hrn. Robins Schlüsse hab ich bei weitem nicht so bündig befunden, als ich vorhero vermuthet hatte. Denen Petersburger Experimenten traue ich mehr als niemals, und bin versichert, dass das Pulver von Anfang seiner Entzündung eine Gewalt habe, die moraliter infinita könne genannt werden, und dass diese Gewalt aufs Wenigste 10000 Mal grösser sey als der Druck der atmosphaerae aëreae, wenn man die Kraft des Pulvers austheilet in hypothesi elasticitatis densitatibus reciproce proportionalis, und dieser Umstand confirmirt sehr meine theoriam de aëre, so ich in meiner Hydrodynamic gegeben, da ich finde, dass vis infinita erfordert werde ad aërem in ultimum spatium possibile comprimendum. Seitdem ich diese theoriam aëris formirt habe, bin ich durch tausend wichtige argumenta physica darin confirmirt worden, da hingegen an Ihrer hypothesi, die mein Vater vorher concipirt hatte, gewisslich gar vieles auszusetzen ist. Wenn man die resistentiam aëris grösser setzt in meinen calculis, so müsste das Pulver noch eine grössere Gewalt als 10000 haben, denn pro eodem tempore ascensus et descensus simul sumto, globus ad majorem tunc altitudinem in vacuo ascendere deberet. Ich glaube einmal sicherlich dass in dem Schiessen vieles Pulver unangezündet verloren gehet. Vielen Blessirten hat man eine grosse Quantität Pulverkörnlein aus dem Fleisch nehmen müssen, wenn man nämlich in der Nähe ist blessirt worden, worüber Sie sich bei den Regimentsfeldscherern am besten informiren können. Ich hab auch gehört, dass wenn man ein gross leinen Tuch auf den Boden ausbreitet, man vieles Pulver darin aufsammeln könne, so von dem Schuss unangezündet herausgeschossen worden. In dem Vten Satz halte ich dafür, dass die elasticitas aëris, instar ferri candentis callidi, mehr als vier Mal die elasticitatem aëris naturalis übertreffe; denn viele Experimente machen mich glauben, dass der aër circa axem positus bei weitem nicht so warm, als der aër ferro contiguus Ich glaube, dass wenn man einen hohlen cylindrum ferreum nähme, dessen diameter interna nur eine

Linie gross, so würde die elasticitas aëris weit grösser herauskommen. Ew. sollten dergleichen experimenta bei der Akademie machen lassen. Der tubus, den der Robins gebraucht hat, muss wohl 8. Linien im diametro gehabt haben. Man könnte auch noch weitere tubos gebrauchen, so würde man die elasticitatem aëris, wie ich vermuthe, noch kleiner finden. Pag. 219 refutiren Ew. die formulam des auctoris pro velocitate globi; ich finde aber eandem formulam mit dem Robins, man mag das p negligiren oder nicht. Bitte also Ew. Dero vorhergegangenes ratiocinium noch einmal zu durchgehen. Sie haben sich ohne Noth in weitläufige ratiocinia eingelassen, indem gewiss ist, dass die percussio globi in pendulam machinam geschiehet pro lege corporum mollium, und also das centrum gravitatis globi et massae pro machina in loco percussionis substituendae $\left(\frac{gf}{hh}P\right)$ ante et post percussionem eadem velocitate fortgehen. In dieser Substitution bestehet das ganze mysterium von den legibus percussionis corporum oscillando se invicem percutientium, und wenn meines Bruders Regeln nicht damit übereinstimmen, so hat er freylich gefehlt. Ich hab aber nicht untersucht, ob nicht seine regulae pro corporibus rotando se invicem percutientibus, welches sein Hauptzweck war, gleichwohl gut sind. Diese letzte Quaestion hab ich ex aliis principiis, nempe ex centro rotationis spontaneo nachgehends solvirt, nach welchen principiis man meines Bruders regulas untersuchen müsste. Vielleicht sind auch meines Bruders regulae gültig pro corporibus oscillando se percutientibus, wenn man supponirt, dass immediate ante percussionem die corpora a puncto suspensionis befreyt werden, und post percussionem an einem andern puncto suspendirt würden, welches dann resultanti motui gyratorio und progressivo respondire. Mit einem Wort, er hätte zu seinem Zweck die puncta suspensionis nicht sollen als fixa betrachten, denn in den corporibus suspensis geschiehet eine doppelte Percussion, nämlich in puncto percussionis und in puncto suspensionis, welche letztere er negligirt hat; welches alles ich hätte merken sollen, da er mir seine pièce gewiesen, ehe er sie in der Akademie proponirte. Ich komme aber wieder auf des Robins Tractat: Aus dem XI Satz und sonderlich aus Ew. tiefsinnigen Anmerkungen erhellet, dass die inertia aurae inflammatae der Geschwindigkeit der herausgeschossenen Kugel einen merklichen Abbruch thut. Hieraus folget, dass die Kraft des Pulvers weit grösser seyn würde, wenn man könnte das Pulver in loculamenta lateralia *a*, *b*, *c*, *d* (Fig. 52) thun, welches sich successive erst entzündete in instanti, da die Kugel *m* bei denselben vorbeygefahren, weil das Pulver, so sich z. Ex. in loculamento *c* entzündet, der vorhergehenden aurae inflammatae seinen motum oder vim vivam benehmen kann. Dergleichen speculationes sind aber in praxi völlig inutiles. Wenn nichts verloren ginge, und momento, quo globus tormentum egreditur, die aura inflammata keinen motum localem hätte, so müsste einmal vis viva globo insita gleich seyn vi vivae, quam vocare soleo potentiali pulveri pyrio insitae. Dieses gibt vielleicht einige Erläuterung wegen dem experimento petropolitano, da die Canone um 1,7 ped. ist abgekürzt worden, der globus nur den neunten Theil vis vivae bekommen hat, weil nämlich das Pulver erst prope egressum sich entzündet hat, die auram ante inflammatam zurückgetrieben, ihr die vim vivam benommen und globo communicirt. Was die resistentiam aëris anbelangt, so siehet man freylich, dass selbige in motibus velocissimis viel grösser ist, als man bisher geglaubt. In den Commentariis habe ich auch gewiesen, dass auch bei motibus tardissimis solche viel grösser sey. Ich hab wenig Hoffnung, dass man jemals eine wahre theoriam werde finden können; ich schreibe es einem puren casui fortuito zu, dass bei den motibus mediocribus die resistentia eines globi so genau mit der hypothesi Newtoni übereinkomme. Wenn man auch alles recht considerirt, so sollte ein ganz anderer Effect herauskommen, wenn ein Fluss contra globum quiescentem anstösst, und wenn ein globus eadem velocitate contra aquam stagnantem sich bewegt. Doch finde ich Ew. commentationes über diese Materie sehr tiefsinnig. Ich habe gesehen, dass Sie darin meine principia adoptirt, indem Sie auf die declinationem particularum a via recta reflectiren und quantitatem mutatae directionis consideriren, wie ich gethan ad verum impetum aquae ex genuinis principiis zu deduciren. Doch ist dieses Alles bei weitem nicht hinlänglich zu einer genauen Theorie, welches Ew. wohl selbst einsehen, indem Sie diese Materie als eine quaestionem für das künftige Jahr vorschlagen. Gleichfalls hab ich gesehen, dass Sie von den commentariis über den Robins Anlass genommen, die Quaestion über den motum corporum rotatorium, si vires centrifugae se non destruant, zu proponiren. Ich weiss aber nicht, ob ein solcher casus möglich ist, dass der axis motus per centrum gravitatis gehe und sich die vires centrifugae nicht destruiren. Dato sehe ich noch nicht viel ein über die würklich proponirte Quaestion de ventis etc. Wenn, wider mein Vermuthen, etwas Merkwürdiges mir darüber einfallen sollte, werde ich solches der Akademie Urtheil unterwerfen. Des Hrn. Weitzen aus Cassel Dissertation über die Electricität bin ich begierig zu seiner Zeit zu sehen. Herr Maupertuis wird ohne Zweifel in Berlin angekommen seyn und bitte demselben also mein Compliment zu machen. Es wird bei jetzigen Zeiten schwer seyn die Akademie alldort in einen guten Stand zu bringen, da der Friede gewiss nicht so nahe ist, als Ew. gemeint und es vor etwas Zeits von männiglich ist geglaubt worden. Von dem, was ich obenhin in des D'Alembert's Mechanic gelesen, habe ich auch eine ziemlich gute Opinion gefasst; nur hab ich remarquirt, dass er von allen principiis eine sehr confuse Idee hatte. Hingegen ist er in seiner Hydrodynamic öfters recht pueril, zeigt eine grosse suffisance und refutirt die Leute, ohne sie recht gelesen, will geschweigen, verstanden zu haben. Er muss keins von meinen Experimenten gelesen haben. Da nun meine Hydrodynamic an vielen Orten mehr physisch, als mathematisch ist, hätte er billig auf meine Experimente sollen Achtung geben, um zu sehen, wie weit meine hypotheses physicae mit der natura rei übereinstimmen und ob meine calculi mathematici den hypothesibus physicis satisfaciren. Z. Ex. wenn ein Wasser in einem vase per plura foramina muss laufen, findet er, dass der effluxus toti altitudini respondire, da ich doch wollte machen, dass das Wasser nicht ad millesimam partem ascendire. Hingegen kommen alle experimenta mit meiner hypothesi (die ich doch nur als aliquatenus satisfacientem proponire) ziemlich genau überein, und doch verwirft er meine ganze Theorie ohn einige Restriction. Den doppelten cylindrum in reactione aquae hab ich durch viele experimenta, calculos und per deductionem ad absurdum rigidissime demonstrirt; es hat aber alles nicht die geringste Attention bei ihm erweckt. Dass in aequilibrio centrum gravitatis locum infimum be-halte, ist ein casus vis vivae conservationis, darauf ich mein Werk gebauet, und doch reprochirt er mir das principium und lässt sich dabei in recht puerilische raisonnemens ein, da er beweist, dass centrum gravitatis nicht in loco infimo sey, wenn die particulae aqueae in vase stagnantes sub directionibus non parallelis sollicitirt würden, und hier ist er wahrhaftig infra puerilitatem. Doch aber könnte es seyn, dass ich selber von einer Eigenliebe verblendet würde und der dépit bei mir zu gross wäre; Ew. werden mich also sehr obligiren, wenn Sie mir Dero Meinung ingenue sagen. Das problema de collisione plurium corporum ist freylich indeterminatum, exceptis quibusdam casibus. Es wird aber determinirt, wenn man die scalam inter pressiones et compressiones pro singulis corporibus cognitam supponirt, wiewohl alsdann das problema sehr schwer werden muss. Auch die regulae motus a collisione sind nicht einmal accurat wahr pro corporibus duobus elasticis, indem man supponirt, die elastra interposita seyen immaterialia, da doch klar ist, dass die globi eo instanti, da sie von einander gehen, einen motum tremulum behalten, deren vis viva muss abgezogen werden. Unterdessen nimmt mich Wunder, dass der D'Alembert diese principia nicht eingesehen, da er in dergleichen Concepten (auf das Wenigste in hydrodynamicis) meistens sich erbarmungswürdig erzeigt. Das 8te problema* pag. 129 dünkt mich nicht elegant genug, noch von einiger Consequenz, um darauf zu denken. Ew. problema de isochrona vacillatoria ist weit sinnreicher; den methodum solvendi kann ich mir wohl einbilden; doch hab ich den calculum nicht gemacht. . . . . Für Dero Solution von dem problemate catoptrico sage ich schuldigsten Dank. Ich hoffe zu seiner Zeit dessen eine weitläufigere Deduction in den Actis Lips. zu sehen, obschon dieses problema nicht in den letztern Actis, welche ich durchblättert habe, gefunden. Auch habe ich nichts darin gefunden von den oscillationibus laminarum elasticarum; da mir Ew. vor etwas Zeits gemeldet, Sie haben über diese Materie ein additamentum nach Leipzig geschickt.

LETTRE XL.

Sommaire. Vitesse des projectiles. Problème d'hydrodynamique. Différens sujets de mécanique. Intégration des irrationelles.

Basel d. 4. December 1745.

Ew. müssen nicht zweifeln, dass ich nicht an den gloriosen und glücklichen Waffen des Königs von Preussen und dessen Alliirten mein Gemüth erquicke. Meine sentimens sind in diesem Stück noch allzeit conform mit denen, so ich Ihnen in Petersburg mit ziemlicher Heftigkeit bezeuget. Es ist auch billig, dass Alle, denen die wahren Wissenschaften zu Herzen gehen, dergleichen Eifer und sentimens hegen, da solche nur in Frankreich und Preussen mit so grossen Kosten fortgepflanzt werden, alldieweil in allen übrigen Landen sich die Barberey, wie länger wie mehr, hervorthut. Es scheinet, dass auch in England selbst die Wissenschaften sinken, und was noch darin gethan wird, ist man mehr dem natürlichen goût der Nation als den Anfrischungen des Königs oder des Parlaments schuldig. Die Petersburger Akademie betrachte ich als wie ganz niedergeschlagen. . . . . Ew. haben Recht wegen der Manier, die Geschwindigkeit der Kugel ex elevatione penduli auszurechnen. Da ich das zweite Mal den calculum machte, fand ich praecise Ihre Formul, da ich das erste Mal eodem ratiocinio, sed ex commisso errore calculi, auf des Robins formulam fiel, welcher grosse hazard machte, dass ich den calculum nicht mehr übersah. Ich kann auch nicht mehr glauben, dass die quantitates pulveris pyrii in den Petersburger Experimenten seyen recht angegeben worden; doch könnten die proportiones quantitatum expositarum noch wohl angenommen werden. Alle Umstände machen mich nun glauben, dass man in diesen Experimenten müsse Pfund für Unzen setzen. Vor einigen Wochen exercirten sich unsere Canoniere auf der Schützenmatte mit Canonen die 2 Pfund schossen und brauchten die Ladung von 4 Pfund Pulver. Ich informirte mich wegen der Weite des Ziels; man konnte den Klapff gar wohl distinguiren, wenn die Kugel in die Scheibe traf. Mein Bruder, ich und noch ein Freund hielten bei jedem Schuss eine Sackuhr an das Ohr, und nach vielen Experimenten, in welchen allen wir ziemlich übereinkamen, schlossen wir, dass der Klapff nach der Losschiessung 5 battemens kam, welche ungefähr 2″ machen. Das Ziel war ungefähr 1200 Schuh weit und wir standen bei den Canonen, deswegen muss ex velocitate soni, ungefähr eine Secund abgezogen werden, so dass die Kugel auch ungefähr eine Secunde unterwegs geblieben. Nach Erwägung aller Circumstanzen glaube ich versichert zu seyn, dass die Kugel mehr als 1200 und weniger als 1600 Schuh intra 1″ machte. — Das Argument so Ew. gebrauchen um zu beweisen, dass ein Fluss contra corpus quiescens submersum und ein corpus eadem velocitate motum in aquis stagnantibus aequaliter müsse urgirt werden, konnte mir nicht unbekannt seyn; es convincirt mich aber keineswegs, weil ich nicht sehe, ob necessario der ganze motus in toto systemate negativus werde ab uno systemate ad alterum. Sie belieben zu untersuchen, was ungefähr für ein motus in particulis aqueis entstehen müsse, wenn sich ein corpus darin bewegt, und wie die particulae aqueae in ihrem motu ungefähr müssen verändert werden, wenn das Wasser contra corpus impingirt, und sehen darnach, ob per additionem vel subtractionem motus communis in toto systemate, der motus in priori casu manifeste müsse sich in motum in altero casu verändern. Wenn in Fig. 53 der cuneus *AB* sich in aqua stagnante bewegt versus *C*, so vermuthe ich, dass die particulae aqueae cuneo proximae ungefähr sich bewegen, wie die Figur zeigt, und wenn contra cuneum quiescentem *AB* (Fig. 54) das Wasser fliesst a *C* versus *B*, so vermuthe ich, dass die particulae aqueae ungefähr sich detourniren, wie diese Figur ausweiset, und zweifle ich noch, ob per transportationem systematis der eine motus könne völlig in den andern transformirt werden, wie solches nothwendig seyn muss, wenn der cuneus soll eandem pressionem leiden. Wenn aber die Figuren völlig similes sind, so ist freilich die pressio eadem. Sonsten ist die Materie de resistentiis fluidorum allerdings noch sehr unvollkommen tractirt worden. Ich bewundere, dass in motibus neque lentissimis neque velocissimis die resistentia globi so gar genau mit der dimidia altitudine noti cylindri übereinstimme. Dieser einzige Umstand macht mich noch glauben, dass diese Materie noch könnte mechanice ad calculos reducirt werden.

Das argumentum de motu rotatorio corporum ab axe fixo, circa quem gyrabantur, liberatorum, ist ein purum problema mechanicum, sed difficillimum, quod a nemine facile solvetur. Wenn nun zwei corpora sind, so ist leicht zu sehen, dass a primo liberationis momento, die corpora circa axem ad virgam perpendicularem in plano motus, quod adfuit in momento liberationem praecedente, werden gyriren, die corpora mögen aequalia oder inaequalia seyn. Auch wird solches geschehen, wenn plura corpora in eadem virga recta cohärirten. Bei dieser Materie könnte man fragen, wie man durch eine General-expressionem per signa summatoria den axem rotationis determiniren soll, dass sich die vires centrifugae destruiren. Das problema die vires zu determiniren, quas axis positione datus sustinet, ist leichter, wenn auch schon andere vires dazukommen. Sonsten hab ich auch aus dieser Materie, wie auch aus vielen andern gemerkt, dass Ew. müssen der autor seyn von einer dissertatione anonyma, welche einen Theil des praemii *sur le cabestan* erhalten. Man siehet gleich, dass sie von einem Meister herkommt, der an vielen Orten anders denkt, als er sagt. Die longitudo vectis commodissima bei einem cabestan, so von Menschen getrieben wird, dependirt von ganz andern principiis, als in der dissertatione gemeldet wird. Man könnte die wahren principia durch sehr nützliche experimenta determiniren, wenn man eine scalam per observationes machte inter longitudines vectis et effectus ab eodem homine, eodem tempore, eademque defatigatione praestitos. . . . . Von Hrn. Clairaut habe ich die längste Zeit keinen Brief erhalten. Bitte also Hrn. Maupertuis zu fragen, ob er nicht wisse, ob dieses Jahr ein programma von der Akademie wegen dem praemio für das Jahr 1747 ausgegangen. Die Quaestion von diesem Jahr soll bis anno 1747 ausgesetzt worden seyn, und da ich concurrirt habe für diese Quaestion, wollte ich ein additamentum machen. Wenn man aber bei diesen Kriegszeiten die praemia gar nicht mehr austheilen wollte, möchte ich nicht gern vergebens Mühe nehmen. Ich hab einmal weder in den Zeitungen etwas gelesen, noch das programme zu sehen bekommen; Ew. werden aber den Bericht wohl von Hrn. Maupertuis erfahren können. Ueber den D'Alembert glaub ich einmal Ursach zu haben indignirt zu seyn; ich erwarte Ew. judicium mit Verlangen. Wenn es einigermaassen mit dem meinigen conform ist, bitte solches dem Hrn. Maupertuis zu eröffnen, denn allhier war er allzustark für den D'Alembert praevenirt .... Dass ich in der Historie von den Actis Berolinensibus als ein Mitglied der neuen Akademie genannt werde, halte ich für eine sonderbare Ehr, wenn es mit Wahrheit geschehen, sonderlich da man mir ohne mein Ansuchen solche Ehr angethan hätte. Ich sage in allem Fall Ew. schuldigsten Dank dafür. Neulich schrieb mir ein gewisser Herr Kraft, so mein discipulus gewesen, er hab irgendwo gelesen, dass Ew. die Aequation

$$\int \frac{dv}{\sqrt{(1-vv)}} = \int \frac{\lambda dz}{\sqrt{(AA-zz)}}$$

verwandeln in

$$\frac{\sqrt{(1-vv)}+v\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-vv)}-v\sqrt{-1}} = \left(\frac{\sqrt{(AA-CC)}-C\sqrt{-1}}{\sqrt{(AA-CC)}+C\sqrt{-1}}\right)^\lambda \cdot \left(\frac{\sqrt{(AA-zz)}+z\sqrt{-1}}{\sqrt{(AA-zz)}-z\sqrt{-1}}\right)^\lambda$$

welches er nicht genug einsehe, weil er alia methodo ad aliam aequationem kam, welche aber au fond mit dieser übereinkam. Man kann aber die Aequation simpler machen und nur setzen

$$\sqrt{(1-vv)} + v\sqrt{-1} = \left(\frac{\sqrt{(AA-zz)}+z\sqrt{-1}}{\sqrt{(AA-CC)}+C\sqrt{-1}}\right)^\lambda.$$

LETTRE XLI.

SOMMAIRE. Principe de la conservation des forces vives. Plainte contre les géomètres anglais et contre d'Alembert. Encore sur le problème d'hydrodynamique Problème de mécanique. Divers sujets.

Basel d. 4. Januar 1746.

Die Erkenntlichkeit für Dero Kennzeichen einer so wahren Freundschaft gegen mich erlaubt mir nicht diese meine Antwort aufzuschieben. Meine Empfindlichkeit ist hierüber um so viel grösser, als ich hier in einem Lande lebe, da man weder Freundschaft noch Wissenschaft kennet. Wenn mich nicht meine alten Aeltern zurückhielten, würde ich à tout prix trachten, mein Leben bei einem so guten Freunde zubringen und schliessen zu können. Allhier hab ich weder einige Anmuth, noch die geringste Gelegenheit etwas zur Vermehrung der wahren Wissenschaft zu contribuiren.... Der Schweizer Siege über den Carolum audacem haben gewiss unsere Voreltern nicht so viel gefreuet, als ich mich erfreue über die siegreichen Waffen der tapfern preussischen Nation. Man darf auch kein Prophet seyn, um vorher zu sagen, dass wenn keine neue incidentia kommen, es allzeit so fortgehen werde, denn man kann einigermaassen demonstriren, dass das Glück wenig Antheil an den bisherigen Victorien gehabt. Ich fürchte nur die jalousie der übrigen Monarchen. Das Beste ist, dass der König eben so tiefsinnig in dem Cabinet, als tapfer zu Feld ist. . . . . Ich halte auch für gewiss, dass die englische Nation auf ihrem déclin in allen Stücken sey, sonderlich aber in den wahren Wissenschaften. Wenn sie die vires vivas anders als nach dem Namen impugniren, so würde sich ihr eigner Newton in dem Grab umkehren, wenn er es wüsste. Sonderlich aber verwundere ich mich, dass ich das objectum ihres Neids und Hasses worden bin, der ich in allen Occasionen mich als ein Verehrer dieser Nation und ein Anbeter des grossen Newton erwiesen und in specie den Newton in doctrina de viribus vivis defendirt. Auch bin ich in der That der Meinung, dass man natürlicher vim vivam heisse das $\int p\,dt$, als das $\int p\,dx$; dass aber in einem systemate die conservatio virium vivarum secundum posteriorem definitionem Statt finde, ist ein principium metaphysicum multiplici inductione confirmatum. Es finden aber auch andere dergleichen conservationes Platz, ratione des $\int p\,dt$, und zwar nicht nur post mutatas velocitates, sondern auch post mutatas directiones, welches ich der Erste observirt und demonstrirt habe. Enfin, ich habe vermeint, ohne der Leibnitianischen Theorie tort gethan zu haben, mich wegen dieser Controvers um die englische Nation verdient gemacht zu haben. Ich verwundere mich über mein Schicksal, welches ich schon so oft erfahren, dass man an mir übel nimmt, wodurch sich andere Leute am meisten beliebt machen. Doch bin ich über diesen gegenwärtigen casum weder erzürnt, noch betrübt. Wenn mir Ew. ein Exemplar von des Jurini Schmähschrift überschicken können, werden Sie mich sehr obligiren. Finde ich etwas darin zu loben, so werde ich es bei allen Gelegenheiten thun; alles Uebrige aber mit Stillschweigen übergehen, gleich wie Ew. mit dem Robins gethan. Ich hab sogar das odiose principium attractionis, materiae essentialiter insitae, welches der Newton selber kaum hat expressis verbis thun dürfen, bei Ew. defendirt und haben Dieselben sogar mir einigen assensum darüber gegeben. Welcher non-Anglus hat solches jemals gethan? Doch bin ich, wenn ich je etwas in meinem Leben praestirt, allzuviel dadurch recompensirt, dass ich bei Ew. einige estime erlangt habe: dieses Einzige würde ich meinen Hassern antworten, wenn ich antworten thäte. Auch in des D'Alemberts Hydrodynamic sind überaus viel Articul, darin er mich ohne allen Grund refutirt, die Ew. nicht observirt haben. In der mechanica pura erweisst er sich einen grundgelehrten Mann; wo aber einige physische und metaphysische Reflexionen mit unterlaufen, ist alles recht pueril. Dem Hrn. Clairaut hab ich ein Verzeichniss davon geschickt. Von Paris hab ich seithero gehört, dass würklich ein programma für das Jahr 1747 sey von der Akademie publicirt worden. Es scheint also, dass ungeachtet der Kriegstroubles die praemia noch ferner werden ausgetheilt werden. Ich wünsche also, dass Ew. das diesjährige dreyfache praemium mögen remportiren. Mein Bruder hat auch eine kleine pièce hingeschickt, welche ich ein wenig retouchirt habe; aber ich bin ohne einige Hoffnung für ihn. Ich hatte ein ganz systema meditirt über die Berliner

Quaestion, auch allbereits viele calculos gemacht, welche mir sehr artige numeros gegeben pro ventis constantibus a diversis causis. Als ich aber meine Gedanken zu Papier bringen wollte, hab ich mich wegen vielen Verdriesslichkeiten, so indisponirt dazu gefunden, dass ich von meinem Vorhaben völlig hab müssen abstehen. Dabit Deus his quoque finem! Die identitatem actionis pro corpore et fluido will ich eben nicht läugnen, sondern nur sagen, dass sie mir noch nicht genugsam einleuchtet und wäre vieles darüber zu sagen. Wenn, z. Ex., (Fig. 55) zwei globi *A, D* wider das triangulum quiescens *G* velocitatibus *AB, DE* impingiren, so will ich setzen, post impulsum seien die motus et velocitates globorum exprimirt durch *BC, EF* und motus trianguli durch *Gh*: daraus folgt, wenn der motus inversus wird, und globi den motum *CB, FE*, triangulum autem den motum *hG* haben, so wird post impulsum triangulum in *G* quiesciren und die globi bekommen motus *BA, ED*, und wird in utroque casu der conflictus, sive pressiones momentaneae trianguli et globorum, eaedem seyn. Dieses ist also der rechte motus inversus, und nicht der andere, da man supponiren wollte, die globi *B* et *E* quiesciren und das triangulum impingire auf dieselben velocitate *HG*, velocitati *AB* contraria et aequali. Das Erstere sehe ich klar ein, das Andere noch nicht so klar; doch will ich es auch nicht läugnen. Haben Ew. kein Exemplar von den pièces sur le cabestan von Paris erhalten? Man sollte die principia mechanica machinarum, viribus animalibus agitatarum, per experimenta untersuchen und alle maxima et minima darnach ausrechnen. Dieses wäre der allernützlichste Theil mechanicae practicae. Vielleicht werden wir einmal von der Berliner Akademie diese subsidia erhalten. Ich hab unterschiedene Sachen in meiner Hydrodynamic angezeigt und wollte meine desiderata gern weiter eröffnen. Der Generalfriede mit Preussen, davon Zeitungen einlaufen, erweckt in mir die grösste Hoffnung zur Fortpflanzung der Wissenschaften. Wegen meiner pièce, so den Actis Berolinensibus inserirt worden ist, erinnere ich mich, dass ich einige passages Ew. überlassen habe; möchte also wissen, ob alles ist gedruckt worden. Wenn solches ist, wird es besser seyn, die Sach vor meinem Vater geheim zu halten, weil er ungern sehen würde, dass ich einige Sachen mir habe wollen vorbehalten, obschon Ew. wohl wissen, dass ich in den quaestionirten Sachen nichts von ihm, und er alles von mir hat. Nunmehro aber wollte ich gern, ich hätte ihm de bonne grâce alles sacrificirt, weil er gewiss mehr Freud daran hat, als ich. Ew. sagen, dass (Fig. 56) kein motus in trabe *AB* ab oscillatione penduli *CP* entstehen würde, wenn keine frictio wäre. Sie wollen ohne Zweifel sagen: kein motus pure progressivus, da *AB* motus reciprocos bekommen wird, welche man nicht schwer determiniren kann, sive oscillationes penduli sint finitae, sive infinite parvae. Wenn aber die frictio sufficienter vorhanden, wird der trabs *AB* ohne Zweifel ab impetu einen kleinen motum progressivum erhalten. Man hätte von diesem paradoxo ein klares Exempel geben können: Wenn nämlich ein globus homogeneus super pavimento horizontali einen motum rotatorium circa centrum hat und keine frictio da ist, so wird der globus nicht fortgehen; ist aber eine frictio da, so wird er fortrollen. Von diesem motu variabili hab ich vor einigen Jahren eine Dissertation verfertigt und viele phaenomena motus auf einem Billard daraus explicirt, welche ich schicken könnte wenn man den 2ten tomum von Ihren Mémoires druckt.

LETTRE XLII.

SOMMAIRE. Pièce de concours sur les vents. Questions d'hydrodynamique et de navigation, se rapportant à lettre d'Euler à laquelle celle-ci sert de réponse. Appel à la loyauté de Maupertuis.

Basel d. 19. März 1746.

Kurz nach Empfang Dero letzten Briefes haben wir bei unserer Universität 14 Tage ferias gehabt, welche ich angewendet eine pièce über die von der Akademie aufgegebene Frag de ventis zu verfertigen. Ich bitte aber Ew. solche nicht anders aufzunehmen, als ein Zeichen der Bereitwilligkeit, mit welcher ich jederzeit Dero Begehren zu erfüllen suche. Es ist leicht zu erachten, dass eine so übereilte Arbeit nicht einmal meiner, will geschweigen der Akademie würdig seyn kann; bitte deswegen meinen Namen zu verschweigen; doch möchten wohl einige Reflexionen darin seyn, welche der Akademie Approbation einigermaassen meritiren könnten. Ich bitte mir allervorderst Ew. so hochgeschätztes Urtheil darüber aus; und wenn einige errores calculi sollten eingeschlichen seyn, solche zu corrigiren. Einige Sachen möchten vielleicht confus und unverständlich vorkommen, weil ich nicht der Zeit gehabt auf die tours d'expression bedacht zu seyn. Ihnen aber kann nichts unverständlich seyn, weil Sie allzeit drey Quart aus Ihrem Kopf zu suppliren wissen, und auf diese Weise werden Sie mich nachgehends auch bei Ihren Herren collegis können durch Ihre Explicationen verständlich machen. Meine pièce ist schon seit einigen Tagen bey dem Copisten, ich gedenke solche von heut über 8 Tagen ohne Fehler zu verschicken. Meine Devise wird seyn: *Non ego ventosae plebis suffragia venor.* Unterschiedene Sachen hab ich ohne Demonstration angezeigt, wegen Kürze der Zeit und vielen andern Geschäften. Ueber diese kann mir Dero Attestat als eine Demonstration dienen, bis ich solche in einem additamento selbst überschicke, wenn je einige Hoffnung zu réussiren da ist: . . . . Nach dem Extract, den mir Ew. aus des Jurini Schrift geschickt, bin ich nicht mehr curios, solche Schrift zu sehen. Ich ersehe darin nichts, als einen bouffon und Ignoranten. Der Effect von einem pendulo auf einem Schiff, das an dem Mastbaum hanget und erstlich in die Höhe gehoben, nachgehends aber herunterfällt und an den Mastbaum anstosset, dependirt von vielen Circumstanzen, sonderlich aber von der exacten resistentia fluidi, und nachgehends müsste man noch die scalam pressionum wissen, mit welchen man das pendulum in die Höhe gehoben. Mein Oncle aber hat auf alle diese principia nicht reflectirt, sondern in der That paralogizirt, wie denn zu seiner Zeit die physica mechanica in einem erbärmlichen Zustand war. Heutiges Tags würde er mit der Penetration, welche ihm sonst natürlich war, ganz andere découvertes machen. Wenn man sonsten ein Schiff durch eine selbst angewandte Gewalt forttreiben will, ohne sich einer vis extrinsecae zu bedienen, so hab ich vor diesem remarquirt, dass viele Sachen eine constantem legem behalten, man mag die vires propellentes anwenden, wie man will. Ich hab aber meine Reflexionen nicht aufgeschrieben. Unterdessen ist gewiss, dass diese Materie nicht genugsam ist untersucht worden, und dass man viele nützliche veritates entdecken könnte, wenn man sich recht darauf applicirte. Das problema von dem Ostfriesländischen mathematico halte ich für ein problema indeterminatum. Es dependirt aber, meiner Meinung nach, von diesen zwey Conditionen: 1° was quaevis guttula für einen motum haben würde, wenn kein corpus in fluido suspendirt wäre, und 2° was quaevis guttula für einen motum habe, alldieweil das corpus datae figurae in loco, prope foramen dato, suspendirt ist. Die Pression muss nicht sensibel seyn, wenn das corpus nur ein wenig von dem foramine entfernt ist; wenn es aber noch bei foramine ist, so muss sie sensibel seyn. Ich getrauete mir wohl diese pressionem à peu près zu determiniren; ich glaube aber nicht, dass es möglich sey, solche accurat zu determiniren. Das problema ist gewiss viel zu general proponirt, um dass ich einige solutionem genuinam davon erwarte Wenn aber das vas *ABCD* (Fig. 57) infinitum wäre; menn man einen kleinen tubulum cylindricum *GHLM* daran supponirt, so dass das Wasser nicht anders kann, als motu parallelo ausfliessen; wenn ein planum *EF* in data parvula distantia a foramine da wäre, und man endlich velocitatem realem effluxus datam supponirt, so wäre wohl eine Solution zu hoffen, wiewohl auch noch diese nicht so gar leicht seyn würde. Ich glaube aber, dass der Auctor die reactionem aquae effluentis, von der ich Vieles in der Hydrodynamic tractirt, considerirt und vielleicht solche nachgehends simpliciter in proportione *EF* ad *BC* austheilt. . . . . Je vous prie de faire mille complimens de ma part à M. de Maupertuis et de lui demander, à l'occasion de quelques petites additions que je compte envoyer à Paris sur ma pièce qui a concouru au prix de l'année passée, s'il ne trouvera pas mauvais que je me rapporte à son témoignage, comme quoi ses méthodes astronomiques, insérées dans son Astronomie nautique, ne pouvoient être parvenues à ma connoissance dans le tems que je travaillois à ma pièce; il me seroit dur de pouvoir être soupçonné de plagiat.

LETTRE XLIII.

SOMMAIRE. Sort de la pièce de concours sur les vents. Celle de D'Alembert sur le même sujet Prix de l'académie de Paris partagé entre Euler, Daniel et Jean B. II.

Basel d. 29. Juni 1746.

Da ich mich an Ew. adressirte wegen dem Hrn. Maupertuis, hatte ich in Wahrheit kein ander Absehen, als mich gegen diesen Herrn gefällig zu erweisen und vermeinte es gar gut zu machen. Es muss aber Herr Maupertuis sowohl seinen humor, als die Idee, die er zuvor von mir gehabt, völlig geändert haben. Es ist mir leid, dass Ew. dadurch in Ungelegenheit gekommen sind, dass Sie mich angefrischt haben eine pièce zu verfertigen. Ich kann nicht begreifen, dass man so wenig égard für Ew. seltene mérites trage und Dieselben in einer so niedrigen Subjection zu erhalten praetendire. Der ganzen Akademie Ehre besteht ja meistens in Dero einzigen Person, und würden Ew. unter allen Akademien und Universitäten den honorabelsten Platz auszuerwählen haben, wenn Ihnen die gegenwärtige Stelle sollte verdriesslich fallen. Meinetwegen sollen sich Ew. nicht das geringste Bedenken machen, dass Sie mich zu Verfertigung einer pièce aufgemuntert haben. Meine Intention war gewiss mehr, Ihnen meine Dienstfertigkeit zu erweisen, als 50 Ducaten zu erhaschen, und ist mir der erste Zweck, wenn ich denselben erreicht habe, genug, weder die Mühe, so ich damit gehabt, noch die wenigen Unkosten zu bereuen. Uebrigens bitte meine pièce noch einmal mit mehrer Attention zu lesen, da sie vielleicht mehr in recessu hat, als es prima fronte scheinet. Was ich von der columna aëris ab actione lunae et solis gesagt, ist ganz gewiss. Die Sach kommt darauf an: Wenn die Erde ihre ganze Materie behielte und das Wasser, so solche umgibt ad parvam altitudinem, einsmals halb so schwer würde, so würde actio solis nicht mehr 2 Schuh, sondern 4 Schuh hoch seyn. Dieses hab ich bewiesen in meiner Dissertation de aestu maris, allwo ich die attractionem mutuam materiae auch considerirt habe, und was ich hierüber in meiner pièce sur les vents gesagt hab, sind nur corollaria von der pièce de aestu maris. Ich hab also auch in aëre die attractionem mutuam aëris *tacite* betrachtet, wie der Herr d'Alembert. Es ist freilich wahr, wenn ein aër rarefactus wieder condensirt wird, dass der aër ab omni parte dahin fliessen muss; was aber für eine Bewegung entstehen müsse, wenn der locus maximae rarefactionis innerhalb 24 Stunden eine Revolution macht, erfordert ein langes Nachdenken, und vermeine ich diese Bewegung ex genuinis principiis determinirt zu haben. Die Materie ist schwer an sich selbsten und ist überaus schwer, seine Gedanken nach dem wahren systemate zu expriminen.

Ich bin vollkommen überzeugt von meiner Meinung: Ew. belieben nur diesem problemate nachzudenken: (Fig. 58) Wenn *AECD* ein rundes Rohr uniformis amplitudinis ist, aëre plenus homogeneo, und wenn darnach in *A* eine causa calefaciens aërem dazu kommt, so wird die Luft eo rarior seyn, quo propior est loco *A*, und also densissimus in *C*. Wenn man nachgehends ferner setzt, dass die causa calefaciens motu aequabili secundum ductum *AECD* sich circumvolvire, so wird gewiss in aëre der motus entstehen, der aus meiner Theorie folgt. Sie werden meiner Meinung seyn, wenn Sie diesem problemate selbst nachdenken und solches durch sich selbst solviren. Es ist gar oft leichter ein problema selbst zu solviren, als eines Andern Solution zu verstehen. Der motus vertiginis ist von dem Newton nach falschen principiis tractirt worden, und vermeine auch hierin etwas praestirt zu haben, wenn schon meine Solution, propter insufficientia data, unvollkommen ist. Einige phaenomena müssen auch daher deducirt werden, dass der maximus calor nicht in meridie ist, sondern ungefähr 2 Stunden darnach. Dass die victoriose pièce von M. D'Alembert seyn würde, hab ich gleich errathen. Unterdessen hab ich aus des Hrn. D'Alembert Hydrodynamic gesehen, dass er in mathesi applicata über die Maassen schwach ist. Dass er praetendirt für alle Jahrszeiten die Direction und vim ventorum pro omni climate per formulas difficillimas integrales hergeleitet zu haben, darauf kann ich nichts anders sagen, als verba sunt, welche der Mathematic mehr Schand als Ehre machen. Unterdessen hab ich das Vertrauen zu Ew. Freundschaft und weltbekannten Aufrichtigkeit, dass was ich im Vertrauen Ihnen sage, Sie solches Niemand wieder sagen werden, sonderlich aber dem Hrn. Maupertuis nicht. Ich rühme an ihm, dass er ein aufrichtiger Freund ist, wenn er einen lieb hat; wenn es bei ihm stünde, so würden Ew. und Herr Clairaut nur Dii minorum gentium seyn, und Herr D'Alembert als ein Apollo, von welchem alle Wissenschaften, als der wahren source, herfliessen, erhoben werden; da es doch bei mir stünde, ihn wegen seiner Hydrodynamic allen Leuten zum Gespött zu machen. Ich werde ihn aber tractiren, wie Ew. den Robins tractirt haben und vielmehr seine wahren mérites an demselben admiriren, als seine lächerliche suffisance, welche ich seiner Jugend zuschreibe, releviren, sonderlich da ich vorsehe, dass er auch in dem, was ihm dato mangelt, ein grosser Mann werden wird. Ich gratulire Ew. zu dem erlangten Antheil am Pariser praemio. Ich hab wider alles Verhoffen nebst meinem Bruder auch einen Theil davon bekommen. Wenn ich mir im Geringsten flattirt hätte, dass man auf unsere idées so viel Reflexion machen würde, hätte ich dieselben besser ausgearbeitet. Die ganze pièce ist kaum 2 Bogen, und nur einige Haupt-phaenomena darin considerirt; aber die Gedanken sind ganz neu, und möchten wohl in physicis einigen Nutzen haben können. Und da ich mir fest einbilde, die übrigen systemata seyen eben so wenig wahr, als das unsrige, und dass man noch weit entfernt sey in der heutigen Philosophie von Erkenntniss der wahren Ursach, so glaube ich man habe in Paris mehr auf die Nebensachen als auf die Hauptquaestion reflectiren müssen. Die Quaestion auf das künftige Jahr 1748 ist von einer ganz andern Natur. Ich gestehe Ihnen, dass Sie mich abschrecken, darüber zu arbeiten, sonsten ich noch wohl etwas hervorzubringen mir getrauete. Ueber das vergangene und künftige Jahr 1747 habe ich doch gearbeitet, und bekenne, dass ich alle meine Kräfte darüber angewendet habe, denn ich diene gern zugleich dem publico. Aber ich lerne täglich aus der Erfahrung, dass nicht allzeit das das Beste sey, was der Autor für das Beste ansiehet; auch dergleichen Sachen sind einem gewissen fato unterworfen. Den 19 jährigen periodum ventorum halte ich für eine blosse Chimäre, sonderlich da der Mond so wenig an productione ventorum participirt. Vor ein Paar Tagen hab ich den 1ten tomum der Berlinischen Mémoires durch den Canal eines Hrn. Eschers von Zürich ganz franco empfangen. Ich bin Ew. deswegen über alle Maassen obligirt, und wenn mir solches Präsent von der Akademie gemacht worden, so bitte meine schuldigste Danksagung deswegen bei dem Hrn. Präsidenten, oder sonst am gehörigen Ort abzustatten. Es ist aber dieser tomus noch bei dem Buchbinder, so dass ich noch nichts darüber sagen kann. So viel hab ich gesehen, dass Ew. pièces meistens nur recensirt sind, welches mich Wunder nimmt. Es dünkt mich schier, dass man mich pag. 56 de l'histoire mit meinem Vater confundirt habe; in allem Fall freuet es mich, zu dieser Ehr gelangt zu seyn. . . . . Ich bitte Ew. meinen Brief zu verbrennen und sonderlich gegen Hrn Maupertuis sich nichts von allem Gemeldeten merken zu lassen; ich führe nicht gern Correspondenz, als gegen meine besten Freunde, denen ich Alles sagen darf, was ich denke. Ich mag mir weder den Maupertuis noch den D'Alembert zu declarirten Feinden machen. Ersterer hat mir durch meinen Bruder vorwerfen lassen, ich habe ihn accusirt, er habe dem Hrn. D'Alembert geholfen, seine schöne critiques über meine Hydrodynamic zu machen, da ich hieran niemals gedacht hab und diese Erdichtung wider alle Vernunft läuft. Ich weiss nicht, wem so viel daran gelegen ist, den Maupertuis und mich zu brouilliren, und wie es scheint, denselben auch wider Ew. aufzustiften. Er thut dadurch den Wissenschaften Schaden, wenn er nicht auf Ew. mérites die billige Attention macht, und Dieselben nur als einen Subalterne tractiren will. Sed haec inter nos. Ew. werden ohne Zweifel von allen phaenomenis ventorum informirt seyn; ich für mein Theil hab keine Bücher consultiren können, sonderlich fehlen uns die Transactionen und des Halley's Observationen. In den Navigationsrelationen hab ich nicht merken können, dass es eine ausgemachte Sach sey, dass circa meridiem ein ventus orientalis regulariter regiere. Wenn es je ist, so schreibe ich es irregulari superficiei terrae zu, eben als wie fluxus maximus maris in plenilunio, nicht eben tempore meridiei, noch allzeit 2 Stunden hernach observirt wird, sondern zu allen Stunden in diversis locis, so dass er auch um 6, 7 und 8 Uhr an einigen Orten observirt wird. Sie werden mich obligiren, mich über dergleichen phaenomena zu informiren und auch Dero Meinung aufrichtig über des Alemberts pièce zu sagen. An den pure mathematicis zweifle ich nicht, aber an der Application derselben und an seinen conceptibus physicis und mechanicis. Ich bitte Sie auch mir zu melden, ob in Berlin bekannt sey, dass ich der Autor von meiner pièce sey; wenn solches nicht bekannt wäre, bitte es sollicite zu verhehlen. Ich fürchte aber Herr Maupertuis werde es schon wissen.

LETTRE XLIV.

Sommaire. Affaires de l'Académie de St-Pétersbourg. Pieces sur les vents. Mémoire d'Euler sur la percussion

Basel d. 9. Juli 1746.

Wenn sich aus Petersburg alles confirmirt, so ist es in der That eine sehr wichtige und ganz unverhoffte Zeitung*). In allem Fall sage ich Ihnen für die gütige Communication derselben schuldigsten Dank, und sind mir diese Zeichen Deroselben wahren Freundschaft schon an sich selbsten überaus werth, wenn auch unsere neue Hoffnung wiederum verschwinden sollte. Ich werde mir auch, im Fall der erwünschten Confirmation, die Ehr geben, dem neuen Präsidenten zu schreiben. Ich fürchte nur, es werde nicht mehr möglich seyn die Petersburger Akademie in einen florissanten

*) La nomination du Cte. Razoumovsky président de l'Académie de St.-Pétersbourg.

Stand wiederum zu erheben; es wäre denn, dass sich Ew. resolvirten für etwa zwei Jahre dahin zu gehen. Die Sach könnte ja so eingerichtet werden, dass Sie der König aus nachbarlicher Freundschaft gegen die Russische Kaiserin dahin schickte, in welchem Fall gewiss kein inconveniens daraus entstehen könnte. Ich will mich offerirt haben, für 2 Jahr in Berlin für Sie zu vicariren, so dass Sie dessen ungeachtet Ihr salarium in Berlin auch werden ziehen können. Sonst versichere ich Ew. noch einmal, dass ich nicht den geringsten Unwillen geschöpft, wegen dem Berliner praemio. Vielleicht hat Herr D'Alembert seit seiner aufgegebenen Hydrodynamic in physicis sich mehr perfectionniret, in welchem Fall ich versichert bin, dass er das praemium vor mir meritirt hat, da ich meine pièce in grösster Eil und ziemlich perfunctorie geschrieben habe, auch die nöthigen subsidia an Büchern nicht gehabt. Herr Maupertuis hat mir selber notificirt, dass Herr D'Alembert das praemium erhalten, und gar nicht dergleichen gethan, etwas von meiner pièce zu wissen. Er sagte auch, er habe keine pièce gelesen, sondern nur so viel von Ew. gehört, dass Hrn. D'Alemberts pièce ein vortreffliches Werk sey. Ich habe dieses aufgenommen, dass dem M. de Maupertuis etwas noch an unserer vorigen alten Freundschaft müsse gelegen seyn, worin ich auch durch seinen ganzen übrigen Brief bin confirmirt worden. Es ist mir sehr lieb, dass sich alles von allen Orten her aufheitert, und wenn sich die Freundschaft zwischen dem Maupertuis und mir ferner confirmirt, so wird hoffentlich solches zu mehrerer Aufnahm der Wissenschaften und beständiger Harmonie zwischen Ew. und dem Präsidenten gereichen. Des Maupertuis Penetration ist viel zu gross, um nicht die Consequenz einzusehen, wenn er nicht Ew. nebst einigen Andern menagiren wollte. Sonsten muss ich noch ratione meiner pièce sur les vents sagen, dass dasjenige, was Ew. de aestu aëris, ut ita dicam, in Zweifel gezogen, nichts anders sey, als was ich in meinem traité sur le flux et reflux de la mer p. 92 § 14 gesagt und demonstrirt habe. Ich habe Ursach für eine sonderbare Ehr zu halten, dass meine so unausgearbeitete pièce soll gedruckt werden. Cependant, si cela peut se faire avec l'agrément du Président, je vous prie d'y faire mettre cet avertissement de l'auteur: „L'auteur de cette pièce ayant appris que l'Académie lui avait accordé l'honneur de l'*accessit* et celui d'être imprimée sous ses auspices, il se croit obligé d'avertir le public qu'il n'a composé cette pièce que pour satisfaire aux pressantes sollicitations qu'un de ses meilleurs amis a bien voulu lui faire peu de semaines avant le terme échu. Cette circonstance lui servira d'excuse d'avoir traité assez superficiellement et avec quelque précipitation une matière qui mérite toute l'application dont on peut être capable, et d'avoir osé présenter à une Compagnie aussi illustre et aussi éclairée un ouvrage si peu fini. L'auteur prend le succès inopiné de son essai pour une approbation des principes dont il s'est servi, laquelle pourra bien l'encourager à reprendre un jour cette importante matière et à la traiter selon toute l'étendue de l'application que ces principes admettent." Wenn der Herr Präsident dieses avertissement überhaupt agreirt, so überlasse ich demselben und Ew. die Worte und Expressionen nach Gutbefinden zu ändern. Sonsten berufe ich mich auf mein letztes Schreiben, welches Ew. wenig Tage nach abgelassenem letzten Schreiben werden empfangen haben. Ich glaube darin gemeldet zu haben, wie es mit der pièce über den Magneten gegangen und dass solche zwey autores, nemlich meinen Bruder und mich habe, welche auch das praemium unter sich getheilt haben. Der Herr Clairaut wusste gar nichts davon; doch aber hat er errathen, dass die pièce entweder von mir, oder von Jemand, der meine principia adoptirt habe, müsse hergekommen seyn. Leute, die in einem genauen commercio stehen, können sich schwerlich genugsam verbergen. — Seit meinem letzten Schreiben, hab ich die Mémoires Ihrer Akademie durchgelesen. Es ist schad, dass Ihre pièces nicht sind ganz gedruckt worden, obschon der Extract in der histoire sehr wohl gemacht ist. In Ew. pièce de la percussion sind neue conceptus, welche mir theils sehr wohl gefallen, theils sehr sinnreich vorkommen. Mein Vater würde nicht mit allem zufrieden seyn; denn er hat mit mir oft geschmält, dass ich nicht mehr Realität in die Quaestion de viribus vivis setze. Die Idee von der percussione corporum mollium satisfacirt mir nicht vollkommen; denn ich kann nicht begreifen, dass die pressio mutua, postquam evasit maxima, in instanti evanescire; solches wäre auch ein saltus in rerum natura. Dieser conceptus ist zwar gut, um die leges motuum a percussione corporum mollium zu demonstriren; doch ist diese solutio nicht exacte wahr. Ich betrachte die scalam pressionum auf die Weise, wie es Fig. 59 zeigt, allwo *AB* die Impression und *BD* die Compression zeigt und *E* eine curvatura veluti infinita, so dass *EC* für eine linea recta perpendicularis zwar könne gehalten werden, nicht aber exacte sey. Auch muss meiner Meinung nach die Fractur nicht allein a quantitate compressionis hergeleitet werden; denn ein stäheliger (*sic*) Bogen bricht eher, wenn ich ihn geschwind spanne, als wenn ich ihn sehr langsam spanne. Die Explication p. 47, so Sie von den phioles, so man allhier ova philosophica nennet, geben, dünkt mich auch nicht genugsam deducirt. Diese Quaestion muss, meiner Meinung nach, mehr mit einem Funken Feuer, das das Pulver anzündet, verglichen werden. Es scheint, dass das Glas aus lauter kleinen gespannten elastrulis bestehet, und wenn eines sich restituirt, welches geschiehet, wenn die superficies interna einen insensiblen Riss bekommt, so müssen die übrigen elastrula sich sogleich debandiren, und das Glas brechen. Sonsten hab ich einmal überschrieben, wie man die percussionem concipiren könne vel in corporibus mathematice duris, so dass ich noch keine Contradiction darin sehe. . . . .

P. S. Wenn Herr Maupertuis nicht weiss positive, dass ich der Autor von meiner pièce sey, so ist es nicht nöthig ihm solches zu melden.

LETTRE XLV.

Sommaire. Pièces sur les vents. Travaux d'Euler. Sur le mouvement de Saturne.

Basel d. 3. November 1746.

. . . . . Von des Hrn. D'Alembert's pièce werde ich judiciren können, wenn ich solche werde gesehen haben. Den beständigen Ostwind, bin ich versichert, dass man auf keine andere Weise herausbringen kann, als auf die Weise, wie ich gethan, da ich gewiesen, dass immediate in superficie maris kein solcher Wind regieren könne, wohl aber in parvula elevatione a superficie maris, und dass dieser beständige Ostwind wechsle, wie grösser die elevatio loci sey. In den physischen Betrachtungen ist einmal Herr D'Alembert bishero sehr unglücklich gewesen, übrigens aber aller Hochachtung würdig und begreife ich gar wohl, dass à tout prendre er das praemium vor mir meritiren habe können.

Den motum aëris, a calore solis oriundum, glaub ich auch recht determinirt zu haben ex genuinis principiis. Man siehet ja, dass es ein problema determinatum seyn müsse, wie ich die Sach concipire, obschon es ratione nostrùm nicht determinatum ist, weil wir nicht genugsame cognitiones physicas dazu haben. Wenn man aber supponirt, man könne variationem densitatis a variatione causae calefacientis pro dato tempusculo determiniren, so wird das problema freylich determinatum. Die Acta Lipsiensia, darin Dero meditata über die laminas elasticas enthalten sind, hab ich nunmehro gesehen und danke Ew. wegen der honorifica mentione, die Sie von mir gethan. Es ist mir leid, dass Herr Bousquet Dero Introduction in analysin infinitorum so langsam zum Druck befördert. Man kann Dero herrliche Productionen nicht ohne Ungeduld erwarten. Ich bin Ew. auch sehr verbunden für das Präsent von dem 1 tomo der Mémoires von der Berliner Akademie. Ich hab auch ein grosses Verlangen die Sammlung von Dero herrlichen pièces*) zu sehen. Es werden ohne Zweifel welche darunter seyn, so ich noch nicht gesehen habe. Sonderlich aber verlangt mich, die tabulas solares und lunares zu sehen, weil ich auch über diese Materie Unterschiedenes observirt. Ueber den motum Saturni hab ich auch meditirt. Es ist diese Materie über die Maassen operos auszurechnen; doch hab ich die Sach zu Faden geschlagen, dass ich glaube die Arbeit überwinden zu können, ungeachtet ich die weitläufigen calculos wie die Pest scheue. Inzwischen will ich hier einige Resultate hersetzen, um von Ew. zu vernehmen, ob solche mit Ihrer Theorie übereinstimmen. Ich finde, dass man

*) Opuscula varii argumenti.

den motum Saturni nicht determiniren könne, ohne zu determiniren, wie viel der Saturnus ab actione Jovis alternis vicibus näher und weiter zur Sonne komme. In conjunctione planetarum ist die Distanz am grössten, und in oppositione am kleinsten, in sofern die parvula inaequalitas distantiarum ab actione Jovis herkommt. Sit generaliter distantia media Saturni a sole $= a$ in conjunctione planetarum. Sumatur angulus qualiscunque inter Saturnum et Jovem $= s$, sitque tum distantia Saturni a Sole $= a - \alpha$. Sit porro distantia rectilinea Saturni a Jove $= z$, so wird die parvula quantitas α durch diese Aaequation exprimirt:

$$dd\alpha = \left(-mm\alpha + n + \frac{p}{z} + \frac{q}{z^3}\right) ds^2,$$

allwo z durch s gegeben ist und m, n, p et q quantitates datas constantes bedeuten. Den calculum hab ich exequirt für einen angulum von 30 Graden: Ich sage also, dass a conjunctione bis dass der Jupiter den Sarturnum um 30 Grad avancirt, der Saturnus näher zur Sonne komme quantitate $0{,}000276a$*). Wenn man pro omni aspectu duorum planetarum die variabilem x determinirt hat, so wird das Uebrige noch ziemlich leicht ausgerechnet. Ich möchte also gern von Ew. vernehmen, wie weit dieser ausgerechnete casus mit Ew. Theorie übereinstimme. Wollen Sie mir anbei andere Resultate von der Theorie melden, so will ich Ihnen sagen, ob und wie weit solche mit meiner Theorie übereinstimmen. Was das Operoseste ist bei dieser Sach, ist dass ich die calculos per partes machen muss, da sonsten die series divergiren,

---

*) Au dessus et au dessous de ce chiffre, Euler a écrit les nombres suivans: $0{,}00025289a$ *cum* ⊙, $0{,}000379a$ *sine* ⊙, et en marge: *in oppositione wird die diminutio distantiae:*

$$\alpha = 0{,}0018383a \text{ cum } \odot, \quad \alpha = 0{,}0037196a \text{ sine } \odot.$$

oder nicht genugsam convergiren. Die variationes Lunae sind leichter auszurechnen, weil die distantia Solis pro infinita kann angenommen werden. Wäre die distantia Saturni a Sole infinities major quam distantia Jovis a Sole, könnte ich alles absolute integriren. Ich möchte auch gern vernehmen, wie Sie Ihre tabulas Saturninas einrichten werden, damit wenn je unsere Theorien übereinstimmen, der consensus in die Augen falle. Sonsten kann ich obbemeldeten valorem ipsius α noch nicht garantiren, weil ich unglücklich bin in weitläufigen calculis und mich leicht verstosse. Ich zweifle aber nicht an der Richtigkeit meiner Methode, obschon man leicht in paralogismos fallen kann. Wenn sich Herr D'Alembert resolvirt auf Berlin zu kommen, ist solches eine grosse Acquisition für Ihre Akademie.

LETTRE XLVI.

Sommaire. Tables lunaires d'Euler. Mouvement de Saturne.

Basel d. 21. Januar 1747.

. . . . Ew. herrliche Opuscula hab ich empfangen und sage deswegen gehorsamsten Dank. Ich hab solche bishero nur angesehen, und Alles hat meine Verwunderung wegen Deroselben vielfältigen mérites, wo nicht vermehrt, welches gleichsam unmöglich ist, doch wenigstens vollkommen erhalten. Ich bedaure, dass bis dato dieselben nicht mit genugsamer Attention hab durchlesen können; dieses Vergnügen stehet mir noch vor. Wegen den tabulis lunaribus werde wohl wenig par connoissance de cause sagen können, weil ich diese Materie nicht anders als theoretice bishero tractirt habe. Vielleicht werde ich einmal Zeit finden, meine calculos selbst zu formiren. Es kann seyn, dass in dem motu apogaei lunaris mehr Irregularität ist, als man meinet. Ich glaub, dass es nicht gut ist, in dergleichen Quaestionen die orbitas ellipticas als mobiles zu betrachten, sondern dass man besser thue, eine orbitam ellipticam fixam (anzunehmen), welche pro dato lunae aut planetae puncto seyn würde, wenn von demselben puncto weg keine perturbatio wäre. Darnach muss man alle perturbationes ad illam orbitam fixam referiren, gleich als wenn alle abscissae in dieser orbita genommen würden. Auf diese Weise ist das apogaeum proprie ita dictum allzeit fixum. Es kann aber a perturbatione die distantia mehr zunehmen, als sie ob motum ellipticum abnimmt. Die distantia absoluta maxima wird improprie apogaeum genannt und hat vielleicht einen motum irregularem. Wegen dieser Consideration können auch vielleicht in theoria Saturni einige logomachiae entstehen und apparentes contradictiones, welche vielleicht würden conciliirt werden, wenn man die inaequalitates ad unam eandemque orbitam naturalem non perturbatam referirte. Ich finde den accessum Saturni ad Solem sub elongatione 180° cum Jove nicht so gross, als Sie melden. Es wird sich mit der Zeit zeigen, wo dieser dissensus herkommt, da dergleichen disquisitiones nicht können per epistolas ausgemacht werden. Uebrigens betrachte ich Solem als stillstehend. Wenn auch gleich die Sonne eine kleine orbitam machte circa centrum commune gravitatis, so könnte solches die perturbationes Saturni secundum meam definitionem nicht ändern. Aber vielleicht wäre die orbita naturalis Saturni (qualis nempe foret abstrahendo ab omni actione Jovis in Saturnum) nicht mehr eine ellipsis, qualis ab astronomis definitur, weder ratione centri solis noch ratione centri communis gravitatis. Es dünkt mich allzufrey eine correctionem longitudinis mediae in Saturno von 6′ 40″ zu statuiren, da die ganze perturbatio maxima vielleicht kaum so weit gehen mag. Ich für mein Theil hab weder tabulas, noch observationes, noch ulla alia subsidia und muss mich allzeit auf diese Weise mit der blossen theoria contentiren. Es mögen nachgehends die astronomi sehen, ob dieselbe mit ihren Observationen übereinstimme und ob man einigen Nutzen daraus ziehen könne.

LETTRE XLVII.

Sommaire. Nouvelle offre d'une place à St.-Pétersbourg. Prix de Paris remporté. Mouvement de Saturne. Exhortation faite à Euler, d'éviter les spéculations métaphysiques et de mettre moins d'assurance dans l'annonce de ses découvertes.

Basel d. 29. April 1747.

Da Ew. von mir verlangen zu wissen, ob ich mich resolviren würde eine neue Vocation nach Petersburg anzunehmen, wenn solche an mich geschehen würde, als dienet hierüber zur Antwort, dass ich bei Ueberlegung gegenwärtiger Umstände, solches selbst nicht sagen könnte. An mein Vaterland bin ich nicht gebunden; doch aber würde ich mich nicht resolviren solches zu verlassen, ehe ich völlig überzeugt wäre, dass alles bei der Akademie richtig sey. . . . Von Paris vernehme ich eben, dass man mir das halbe von dem doppelten praemio dieses Jahres zuerkannt habe; die andere Hälfte aber einer pièce, welche man Ew. zuschreibt. Wenn Sie concurrirt haben, so zweifle ich keineswegs daran und will also zum Voraus deswegen herzlich gratulirt haben. Ich bin glücklicher in Paris als in Berlin. Ich zweifle dessen ungeachtet, ob ich noch ferner concurriren werde; ich fürchte, mein Glück möchte zuletzt schlimme Consequenzen nach sich ziehen, dass das Publicum einige Parteylichkeit darunter suche, obschon ich mich so stark verberge, als mir möglich ist. Die theoria Saturni ist mir sehr verleidet, weil sie so penibel ist und zuletzt doch vielen dubiis annoch unterworfen. Wenn das centrum Solis nicht kann als fixum betrachtet werden, so ist es nicht genug, die actionem Jovis in Solem ab actione Jovis in Saturnum abzuziehen oder zu addiren; sondern man muss, um die veram theoriam Saturni auszurechnen, veram et integram theoriam motus Solis circa centrum commune gravitatis wissen. Will man die excentricitates orbium Saturni et Jovis betrachten secundum genuinas leges, so erfordert diese recherche wieder insuperabiles labores; die ratiocinia aber pro proxime veris sind sehr schlüpfrig. Nebst dem, weil die loca apheliorum, ratione loci conjunctionis, veränderlich sind, kann man keine tabulas perpetuas machen. Ich erwarte mit Ungeduld zu seiner Zeit zu sehen, wie Ew. die Sach werden eingesehen haben. Ich glaube inzwischen wohl Ursach zu haben zu rathen, dass Niemand von seiner Theorie nimia fiducia rede; solches möchte leicht den astronomis, welche selten mit den Theorien zufrieden sind, eine schlimme Opinion von der mathesi sublimiori beibringen. Ich möchte wohl wissen, ob des Hrn. D'Alembert's und meine pièce *Sur les vents* in Berlin sind gedruckt worden. Ich gratulire Ew. zu Deroselben honorablen Reception in Academia Londinensi. Es ist in der That eine ausnehmende Ehr, wenn man sie erlangt ohne solches begehrt zu haben, wie wir, mein Bruder und ich, auch das Glück gehabt haben in Academiam Berolinensem aufgenommen zu werden, welches wir gleichfalls als sonderbare

Ehr anzusehen Ursach haben. Doch schreibe ich dieses Ew. und des Hrn. Maupertuis Freundschaft zu. Hr. D'Alembert hat mich in gar vielen Puncten refutirt und an einigen Orten ganz kindische Meinungen gehabt, als zum Ex. dass das Wasser tota velocitate effluat, etiamsi per plura diaphragmata perforata transire cogatur. Auf meine Experimente hat er im Geringsten nicht attendirt, welche doch so genau mit der Theorie übereinstimmen; da ich hingegen alle seine Theorien, welche meiner zuwiderlaufen, per experimenta luce meridiana clariora leicht refutiren will. Ich bin zwar Ew. obligirt, dass Sie mich defendirt haben; es ist mir aber wenig daran gelegen, ob Herr D'Alembert seinen Irrthum erkennt, oder nicht. Ich will niemand die Wahrheit wider seinen Willen aufdringen. Herr Ramspeck hat meinem Vater geschrieben, dass Sie in unterschiedenen controversiis metaphysicis publicis stehen. Sie sollten sich nicht über dergleichen Materien einlassen; denn von Ihnen erwartet man nichts als sublime Sachen, und es ist nicht möglich in jenen zu excelliren. Ich fürchte, Dero 5te Quaestion inter Opuscula werde bei den metaphysicis wenig Beifall finden. Mich dünkt, alle cogitationes müssen eine vim impulsivam gehabt haben, und so höret Dero argumentum, ab inertia desumtum, auf. Ueber Dero 6te Quaestion hab ich auch inter legendum unterschiedene Skrupel gehabt. Die theoria lucis et colorum ist ingenios; sie gefällt mir wohl, aber doch hätte sie, meiner Meinung nach, können mit weniger assurance proponirt werden. Ew. verzeihen mir meine freye Redensart, die ich nur gegen meine wahren Freunde gebrauche. Sie haben gewiss keinen grössern Verehrer und Eiferer für Dero unsterblichen Namen, als mich.

LETTRE XLVIII.

Sommaire. Pièce de concours sur le mouvement de Saturne. Lettre de Wolf à Jean B. le père. Travaux dirigés par Euler pour accélérer le cours de l'Oder.

Basel d. 16. August 1747.

. . . . . Ich habe meine pièce über den Saturnum schon den 6. Juli abgeschickt, aber dato noch kein Recepisse erhalten. Ich hatte dieselbe selbst auf die Post getragen; es ist mir auch nicht möglich ein ander Exemplar nach Paris zu schicken, weil ich nichts als ein liederliches brouillon oder Project behalten habe, so dass ich gleichsam eine neue pièce verfertigen müsste, um eine andere zu schicken. Meine pièce ist zwar practice bei weitem nicht so ausgearbeitet, als Sie von ihr melden; hierzu hatte ich nicht die geringsten subsidia. Ich hab auch kein ander Buch dabei gebraucht, als die tabulas sinuum; ich weiss also nicht, ob meine Theorie einigermaassen mit den Observationen übereinkommt, oder völlig davon abweichet. Doch bin ich wenigstens versichert, dass unterschiedene gute morceaux détachés in meiner pièce enthalten sind. Nach reifer Ueberlegung aller Umstände habe ich mich an die hypothesin gehalten, dass die Sonne in einem Puncte fixirt sey, gleich als wenn derselben Materie eine inertiam infinitam hätte. Darnach hab ich eine gewisse conjunctionem inter Solem, Jovem et Saturnum betrachtet, die ich conjunctionem primam nenne. Pro illa conjunctione betrachte ich velocitatem Saturni, ejus distantiam a Sole et angulum inter tangentem atque radium vectorem. Alsdann nenne ich orbitam naturalem diejenige orbitam, welche Saturnus in hypothesi Kepleriana beschreiben würde absque actione Jovis. Ad hanc orbitam naturalem referire ich alle perturbationes. Wenn die tempora periodica Saturni et Jovis perfecte wären wie 5 : 2, so zeige ich, dass post singulas conjunctiones ternas, die pristinae perturbationes wieder anfangen würden. Deswegen hab ich meine tabulas extendirt a prima conjunctione ad quartam. Nach diesem periodo restituirt sich die excentricitas, das aphelium und alles Uebrige. Die grösste aequatio Saturni in antecedentia ist von 32′ 40″. Diese entstehet ungefähr 36 Jahre nach der ersten Conjunction. Die grösste aequatio in consequentia ist 18′ 57″, und solche entstehet sub angulo elongationis von 60° post secundam conjunctionem. Das tempus duarum revolutionum periodicarum Saturni ist um 7 Tage und 15 Stunden kleiner, als es absque actione Jovis seyn würde. Die maxima variatio possibilis excentricitatis ist nach meinem calculo der $\frac{1}{14}$ Theil excentricitatis mediae. Auch kann die variatio aphelii von einer Conjunction bis zu der folgenden bis auf 4° 0′ kommen, nachdem der arcus inter locum aphelii et locum conjunctionis sich verhält. Ich finde

auch, dass der accessus maximus Saturni ad Solem, actioni Jovis debitus, a prima conjunctione ad secundam sey 0,001133, posita distantia media $=1$. Solches geschiehet sub elongatione von ungefähr 110 gr. Nachgehends entfernt sich der Saturnus schon wieder und ist tempore primae oppositionis nur um 0,000316 näher bei der Sonne, als er absque actione Jovis würde gewesen seyn. Da nun dieser Umstand gar nicht übereinkommt mit dem, was mir Ew. ehemals geschrieben, so hab ich wenig Hoffnung, dass meine Determinationen mit den Ihrigen accordiren. Ich gestehe Ihnen aber offenherzig, dass ich mehr Vertrauen in Ihre Determinationen setze, als in die meinen; es wird sich zu seiner Zeit erheitern. Meine aequatio numerica fundamentalis ist diese: $dd\alpha =$
$$\left(-0{,}4527\,\alpha - 0{,}2773\frac{\pi}{p} + 0{,}1731\cdot\frac{\pi}{p}\cdot\frac{1}{z} + 0{,}03294\cdot\frac{\pi}{p}\cdot\frac{1}{z^3}\right)d\sigma^2$$
allwo σ den angulum elongationis bedeutet, α den accessum Saturni ad Solem, actioni Jovis debitum etc. Diese Aequation hab ich von 30 zu 30 Graden integrirt per approximationes und allzeit gemacht, dass $\frac{d\alpha}{d\sigma}$ pro fine praecedentis integrationis und pro initio subsequentis unter sich gleich seyen. Ich hab auch gesehen, wie gefährlich es sey, die integrationes von Grad zu Grad zu machen, da sich die errores über alle Maassen accumuliren würden. Ich muss auch noch sagen, dass in allen meinen calculis sich ein gewisser nexus und character veritatis befunden, welcher mir einige Hoffnung eines guten succès liesse, wenn ich nicht wüsste, dass Ew. die Sach ganz anders befunden. Dieses macht, dass ich den vermuthlichen Verlust meiner pièce nicht sonderlich bereue. Ew. sind also dies Mal doppelt versichert, dass Sie nicht nöthig haben werden, mit mir das praemium zu theilen. . . . . Hr. Wolf hat sich in einem an meinen Vater

geschriebenen Brief sehr über Ew. beklagt. Ich fürchte, Sie werden sich noch vielen Verdruss a numero antagonistarum auf den Hals laden, welches sich der Mühe gewiss nicht lohnet. . . . . Es nimmt mich Wunder, worin die Anstalten bestehen, die Sie gemacht, um den Lauf der Oder zu befördern und worin eigentlich die desiderata bestehen. . . . Wenn Ew. curios sind, so kann ich mit nächstem eine tabulam ex mea theoria Saturni überschicken. Es mimmt mich doch Wunder, woher unser dissensus komme. Sie haben sub angulo ♄ ☉ ♃ von 30° gefunden $\alpha = 0{,}0002529\,a$, ungefähr wie ich; hingegen sub oppositione, posita $\sigma = 180°$, finden Sie $\alpha = 0{,}0018383\,a$, da ich gefunden $\alpha = 0{,}0003164\,a$ und also 6 Mal kleiner. Ich will doch die valores hierher setzen von der ersten Conjunction bis zu der folgenden, von 30 zu 30 Grad:

pro 30°: $\alpha =$ 0,000257; pro 60°: $\alpha =$ 0,000715; pro 90°: $\alpha =$ 0,001089;
pro 120°: $\alpha =$ 0,001133; pro 150°: $\alpha =$ 0,000879; pro 180°: $\alpha =$ 0,000316;
pro 210°: $\alpha =$ − 0,000493; pro 240°: $\alpha =$ − 0,001444; pro 270°: $\alpha =$ − 0,002376;
pro 300°: $\alpha =$ − 0,003198; pro 330°: $\alpha =$ − 0,003650; pro 360°: $\alpha =$ − 0,003406;

ich glaube, unser dissensus komme a diversa transitione ab una integratione ad sequentem, weil wir die integrationes per partes machen.

LETTRE XLIX.

SOMMAIRE. L'invitation de l'académie de St.-Pétersbourg refusée. Encore sur le mouvement de Saturne.

Basel d. 22. September 1747.

. . . . Herr Stähelin hatte mir gleich die angenehme Zeitung von der Petersburger Akademie communicirt. Es stehet zu erwarten, was darauf erfolgen werde. Da mir gegenwärtige Station in Basel über alle Maassen zuwider ist, so hab ich mich durch Dero letzteres Schreiben bewegen lassen, mit meinem Vater wegen dieser Vocation zu deliberiren. Es geschahe aber wider alles Vermuthen, dass er mich im höchsten Grad davon abmahnte und mich gleichsam beschwor, eine solche Veränderung bei seinen Lebzeiten, die bald ein End nehmen würden, nicht vorzunehmen: er fügte noch dazu, ich sey auf einem Alter, dass ich entweder gar nicht, oder für mein Lebtag mit Sack und Pack, Hab und Gut gehen solle, und also sey es ja besser, mein künftiges

Erb noch vorher zu erwarten, welches nicht mehr lange anstehen könne. . . . . Es ist mit meiner pièce gegangen, wie Ew. gesagt haben; sie ist zu rechter Zeit angekommen, obschon ich das Recepisse erst bei 2 Monaten später bekommen habe. Meine pièce ist cotirt № 1; mithin eine von denen, die vor Ew. pièce angekommen sind. Von meiner Methode fange ich an gute Opinion zu schöpfen. Hätte ich mich resolviren können, die excentricitates zu consideriren und die approximationes näher zu formiren, bin ich versichert, dass ich eine exacte Theorie würde gefunden haben. Den periodum inaequalitatum post singulas ternas cunjunctiones, welchen Ew. impugniren, hab ich erst kürzlich in den neu ausgegebenen *Institutions astronomiques* von Hrn. Le Monnier gelesen, als eine Sach, die man ex observationibus deducirt habe. Man muss nach meiner Theorie allervorderst consideriren, was ich orbitam naturalem heisse: zu diesem End considerire ich eine conjunctionem qualemcunque, quam voco deinceps *primam*. Bei dieser Conjunction hat Saturnus eine gewisse velocitatem c, eine gewisse distantiam a Sole a, und formirt cum radio vectore einen gewissen angulum A; so nenne ich orbitam et motum *naturalem* diejenigen, welche Saturnus sub his positionibus haben würde, wenn von demselben Moment her Jupiter nicht auf denselben agirte, und suche nachgehends den effectum Jovis in Saturnum. Bei der folgenden Conjunction wird c in $c + \gamma$, a in $a + \alpha$, A in $A + \mathfrak{A}$ verwandelt werden. Auf diese Weise würde, ratione secundae conjunctionis, die orbita naturalis differiren von der orbita naturali, ratione conjunctionis primae considerata. Wollte man aber nachgehends die orbitam naturalem secundam betrachten, so würden eaedem aequationes a secunda conjunctione usque ad tertiam conjunctionem, ratione secundae orbitae naturalis Statt finden, die man gefunden hat a prima conjunctione usque ad secundam, ratione primae orbitae naturalis. Dieses ist also das éclaircissement auf Ew. Objection. Es ist also zu betrachten bei meiner Theorie, dass meine aequationes nicht zu verstehen seyen, dass sie müssen oder können auf einige tabulas astronomicas hactenus editas applicirt werden, weil deren hypotheses nicht mit dem motu, quem voco naturalem, übereinstimmen; sondern man muss erst den motum naturalem ausrechnen, welches ich zeige wie man thun könne vermittelst etlicher Observationen, deren tempora man allervorderst corrigiren muss. Nachgehends muss man von diesem motu naturali tabulas construiren und meine aequationes dabei gebrauchen. Meine aequationem fundamentalem hab ich zwar nicht integriren können; solches kann aber meinen Resultaten nichts derogiren, da ich alle Vorsichtigkeit gebraucht. Bei der additione constantium kann man leicht in einen pralogismum fallen; solches aber ist von Ew. durchdringenden Penetration keineswegs zu praesumiren. Vielleicht sind zuletzt unsere Theorien nicht so different, als wir gemeinet haben, weil wir die Quaestion sub facie plane diversa betrachten. Es nimmt mich Wunder, ob Ew. Determinationen, welche Sie erhalten haben per approximationes von 5 zu 5 Graden, übereinstimmen mit denen, welche Sie durch Ihre zweite Methode, nachdem Sie die aequationem fundamentalem integrirt haben, gefunden haben; ich hab einige Ursach daran zu zweifeln. Sonsten haben mir Ew. in einem vorherigen Schreiben gemeldet, die Determinationen kommen näher mit der Natur überein, wenn man Solem tanquam fixum betrachte, als tanquam mobilem circa commune centrum gravitatis, von welcher Meinung Sie nunmehro abweichen. Wenn man Solem tanquam mobilem betrachten will, so halte ich die gewöhnliche Methode für etwas schlüpfrig und glaube schier, dass die ganze Mathematic in der Welt nicht sufficient sey, alle inaequalitates exacte auszurechnen, weil es nicht erlaubt ist, die theorias corporum coelestium von einander zu separiren, und es gleichsam unmöglich ist, die inaequilitates in systemate toto, simul considerato, zu determiniren.

LETTRE L.

SOMMAIRE. Mêmes sujets.

Basel d. 9. März 1748.

. . . . Betreffend die Frag, ob ich nicht nunmehro, nach meines seel. Vaters Ableben, die Petersburger Vocation annehmen wolle, so kann ich Ew. bei meiner Ehr versichern, dass ich nicht im Stand wäre solches zu thun, wenn ich auch noch so grosse Lust dazu hätte. Ich bin seit geraumer Zeit sehr valetudinarius und bin dato nicht im Stand, meine hiesige Geschäfte zu verrichten, will geschweigen eine so grosse Reise zu thun und ein so hartes Clima zu bewohnen. Ich bitte also Ew. meine schuldige Dankbarkeit dem Hrn. Präsidenten zu bezeugen für die Ehr, die man mir anthut und für das gütige Vertrauen, so man in mich setzet. Sonsten hab ich ohne die Pension mehr, als ich zu meinem ehrlichen Auskommen gebrauche, und sehe ich die ganze

Sach mit philosophischen Augen an. Ich bedanke mich wegen der bezeugten Condolenz und muss meinem seel. Vater nachsagen, dass er ein aufrichtiger Verehrer gewesen von Ew. und Deroselben seltenen mérites, so wie ich auch in allen Begebenheiten meine sonderbare Hochachtung für Sie allen Leuten zu bezeugen mir eine Freud mache. Wegen der theoria Saturni hab ich noch viel Anstände: ich kann nicht begreifen, wie Ew. posito Sole fixo eine Aequation von nur 9′ finden, da ich solche bis auf etliche und dreissig Minuten befunden. Wenn mir Dero Penetration nicht so wohl bekannt wäre, sollte ich meinen, Sie haben Ihren methodum integrandi nicht nach den Umständen accomodirt. Ich bin curios, worin ich mich versehen habe, und wünschte ich, dass meine pièce ohne Namen möchte gedruckt werden, damit mich Ew. corrigiren könnten. Was den motum apogaei Lunae anbelangt, so will ich zwar Ew. und des Hrn. Clairauts calculos richtig glauben; aber solches überzeuget mich noch nicht, dass die attractiones nicht exacte seyen in ratione reciproca quadrata distantiarum; denn es kann seyn, dass der motus apogaei noch von einer andern Ursach herrühre, welche uns unbekannt ist. Die actio vorticum kommt mir auch sehr suspect vor, denn dadurch müsste der Mond innerhalb etlichen tausend Jahren Veränderungen gelitten haben, so man nicht vermuthen kann. Wenn aber Dero Muthmaassungen richtig sind, so ist alle Hoffnung die Astronomie weiter zu befördern, verschwunden.

LETTRE LI.

Sommaire. Nouvelles instances de l'Académie de St.-Pétersbourg. Concours de celle de Paris. Remplacement de Jean B. à cette dernière. Introduction à l'analyse des infinis.

Basel d. 15. Mai 1748.

Ich ersehe mit aller möglichen Erkenntlichkeit, wie sehr Sie die Sach wegen meiner Pension zu Herzen ziehen. Ich werde mich in allem Fall leicht zufrieden stellen und begnüge mich mit den vielen Kennzeichen Ew. werthesten Freundschaft, die Sie mir bei diesem Anlass bereits erwiesen. Ich habe einen Brief von Hrn. Teplof erhalten, worin er mich nochmals zur Annehmung der Petersburger Vocation zu persuadiren trachtet; ich habe mich mit meiner annoch anhaltenden schwächlichen Gesundheit excusirt. . . . .
Ich sehe, dass Ew. die *Astronomiam mechanicam**) auf den höchsten Gipfel gebracht haben. Von Paris hab ich zwar

*) Voir ci-dessus, dans la Notice sur les écrits inédits d'Euler

lange keinen Brief erhalten; dessen ungeachtet kann ich Ihnen zu dem erhaltenen praemio gratuliren; denn es ist nicht möglich, dass Jemand anders in die geringste Concurrenz mit Ihnen hätte können gezogen werden, welches ich auch dem Hrn. Clairaut selber geschrieben habe. Ich glaube nicht, dass die Vacanzen bei der Pariser Akademie annoch bestellet seyen. Man hat mir wollen einige Hoffnung machen, dass ich meinem Vater seel. succediren würde; seit langer Zeit aber hab ich nichts mehr von dieser Sach gehört. Ich wünschte, dass wir beide bei dieser Akademie collegae werden möchten. Vor einigen Tagen habe ich Dero herrliches Präsent empfangen*). Solches ist dato noch beim Buchbinder; obschon ich also noch nichts darin hab ersehen können, so bin ich nichts desto weniger von dessen unschätzbarem Werth überzeugt und hab um so viel mehr Ursach mich nach aller Möglichkeit für dieses kostbare Werk zu bedanken. . . . . .

*) Vraisemblablement l'*Introduction à l'analyse des infinis.*

LETTRE LII.

SOMMAIRE. Nomination de Daniel B. à la place de son père à l'académie de Paris. Suite de la théorie de Saturne.

Sans date (1748).

Allervorderst sage ich Ew. Dank für Dero Gratulation zu meiner réception in die Pariser Akademie und wünsche, dass ich Ew. bei der nächsten Vacanz ein gleiches Compliment machen könne. Es ist mir sehr leid, wenn Sie meinetwegen einigen Verdruss bei der Petersburger Akademie empfunden. Wenn Herr Teplof Sie beschuldigt, dass ich von Ew. abgemahnt worden meine Vocation anzunehmen, so offerire ich mich jederzeit, eine schriftliche Declaration von mir zu geben, wodurch genugsam erhellen wird, wie ungegründet diese Anklag sey. Ich werde Ew. verbunden seyn, wenn Sie mir die pièces sur les vents schicken wollen. Ich bitte Sie den 9ten und 10ten tomum von den Commentariis der Petersburger Akademie dazu zu fügen. . . .
Wenn Ew. Dero *Scientia navalis* in Petersburg drucken lassen, wird das Publicum dieses herrlichen Werks noch lange be-

raubt bleiben. . . . . Ich habe auch nicht über die Frage von den courants gearbeitet und werde über den Saturnum auch nichts arbeiten, obschon Einige, so vielleicht meine vorige pièce gesehen, mich dazu haben animiren wollen. Es ist in ganz Basel kein astronomisch Buch, welches ich dazu gebrauchen könnte. Wenn ich viele Observationen hätte, wollte ich grosse Hoffnung schöpfen, die wahre theoriam Saturni finden zu können. Man kann zwar unterschiedene hypotheses machen. Man müsste aber einen Theil der Observationen gebrauchen um die wahre hypothesin zu finden, und die übrigen Observationen um seine theoriam zu confirmiren. Ich will doch hier eine tabulam beifügen, welche ich, obschon nur grosso modo, ausgerechnet, in hypothesi, dass die Sonne vollkommen still stehe und also inertiam veluti infinitam habe. Diese tabulam will ich nachgehends expliciren:

Elongations.	Corrections des tems.	Elongations	Corrections des tems.
Conjonction 1.	— 0,000000 T.	Opposition 2.	— 0,006293 T.
30°	— 0,000432 T.	210°	— 0,014632 T.
60	— 0,001935 T.	240	— 0,021542 T.
90	— 0,004545 T.	270	— 0,025897 T.
120	— 0,007716 T.	300	— 0,026867 T.
150	— 0,010749 T.	330	— 0,024096 T.
Opposition 1.	— 0,012995 T.	Conjonction 3.	— 0,018131 T.
210°	— 0,013869 T.	30°	— 0,010845 T.
240	— 0,012953 T.	60	— 0,004272 T.
270	— 0,010083 T.	90	0,000573 T.
300	— 0,005317 T.	120	0,003333 T.
330	0,000998 T.	150	0,003964 T.
Conjonction 2.	0,007878 T.	Opposition 3.	0,002665 T.
30°	0,013339 T.	210°	— 0,000094 T.
60	0,015570 T.	240	— 0,003665 T.
90	0,014091 T.	270	— 0,007333 T.
120	0,009321 T.	300	— 0,010352 T.
150	0,002140 T.	330	— 0,012113 T.
Opposition 2.	— 0,006293 T.	Conjonction 4.	— 0,012640 T.

In dieser Tafel bedeutet T das tempus medium respondens elongationi 30°, oder ungefähr $603\frac{1}{3}$ dies. Diese tabulam kann man nicht gebrauchen um andere tabulas zu corrigiren; denn die tabulae Keplerianae sind construirt auf falschen elementis und die elementa sind unbeständig; man muss deswegen die Sach also angreifen: Man nimmt eine conjunctionem quamcunque, welche man primam nennt. Wäre nun die Elongation zwischen Jupiter und Saturno 150° immediate nach der ersten Conjunction, so zeigt die tabula — 0,010749 T. oder 6½ Tag. Das signum negativum zeigt, dass der Saturnus 6½ Tag eher an seinen Ort gekommen ist, als er würde gekommen seyn, wenn er nicht wäre von dem Jupiter accelerirt worden. Deswegen müsste man zu dem tempore observationis 6½ Tag dazuthun. Ich sage nun, wenn man alle tempora observationis ändert, so wird der motus mit den legibus Keplerianis übereinkommen. Aber die tabulas secundum leges Keplerianas kann man nicht verfertigen ohne meine tabulam, weil man die observationes corrigiren muss um die elementa requisita ad constructionem tabularum zu determiniren. Man kann aber hier fragen, was für ein Unterschied seyn könne zwischen conjunctione prima, secunda et tertia: Hierauf antworte ich, dass freilich ein Unterschied sey, weil diese Conjunctionen nicht in eodem loco orbitae geschehen; man kann zwar eine jede Conjunction primam nennen, aber man muss solche behalten. Wollte man gleich Anfangs eine andere conjunctionem als primam annehmen, so würden doch unsere Correctionen recht seyn, denn es würden andere elementa herauskommen, nach welchen die accelerationes et retardationes Saturni müssten aestimirt werden, so dass die differentiae inter utrumque motum doch können eaedem seyn. Ich weiss nicht, ob ich mich in so wenig Worten hab expliciren können; wenn aber Ew. solches verstanden haben, so könnten Sie einige gute Observationen gebrauchen um die elementa Saturni zu determiniren, und alsdann sehen, ob die übrigen Observationen meiner tabulae ungefähr respondiren. Bei diesen Observationen aber muss man allzeit die elongationes correspondentes wissen, und zwar ratione primae conjunctionis assumtae, so dass es nicht indifferent ist, die elongationem ex. gr. von 60°, oder von 420°, oder von 780° zu nehmen. Wenn nun meine obigen Correctionen gar nicht sollten den aberrationibus respondiren, wäre es ein Zeichen, das man motum Solis circa centrum gravitatis systematis noch müsse consideriren. Ich bin aber versichert, dass meine Methode gut und richtig ist; solche kommt auch mit vielen phaenomenis überein. Sollte es geschehen, dass meine Correctionen einigermaassen richtig wären, so würde der defectus nur herkommen, weil ich in meinen letzten calculis vieles obenhin ausgerechnet, welches ich hätte können accurat bestimmen, wenn ich alle Mühe hätte anwenden wollen. Unterdessen kommt mir allzeit vor, als wenn einige Sachen, so Sie mir überschrieben, nicht mit meiner Theorie bestehen können. Wenn Ew. des Bradley's Theorie de nutatione axis terrae ab attractione lunae et figura compressa terrae oriunda examinirt haben, bitte mir Dero Meinung darüber zu melden. Mich dünkt inzwischen, diese oscillationes terrae müssten continue zunehmen, weil ich nicht sehe, was für obstacula diese nutationes zu überwinden haben. Dass bei der letzten eclipsi solari der discus solis merklich grösser worden, hab ich gemuthmaasst; ich zweifle aber noch, ob solches einzig der atmosphaerae lunae zuzuschreiben, und glaube, dass es attractioni lunae, durch welche die radii solares incurvirt werden, müsse zugeschrieben werden, weil solches andere phaenomena beweisen.

LETTRE LIII.

SOMMAIRE. Bradley l'emporte sur Euler dans les élections de l'académie de Paris. Divers sujets.

Sans date (1748).

Eine kleine Lustreise und viele Geschäfte haben mich abgehalten Ew. werthestes Schreiben eher zu beantworten. Ich sage Denenselben schuldigsten Dank wegen der vielen Mühe, die Sie sich noch meiner Pension halber geben. Dem Hrn. Teplof, welcher mir noch einmal eine förmliche Vocation adressirt hatte, hab ich sehr höflich geantwortet, sowohl für ihn, als für den Hrn. Präsidenten, und was meine Pension anbetrifft, hab ich denselben simpliciter gebeten, mir zu berichten, wessen ich mich zu getrösten hätte. . . . . Ich höre, dass der tomus von 1746 der Mémoires de l'Académie de Berlin ausgegangen. Da man mir den ersten tomum geschickt, wird man mir vielleicht die folgenden auch schicken wollen. Ich hab vor etwas Zeit eine kleine pièce von dem principio virium vivarum magis generali geschickt, welche der Herr Präsident sehr gütig aufgenommen, weiss aber nicht ob selbige ist abgelesen worden. Ew. haben auch die Gütigkeit gehabt mir zu melden, Sie wollen mir ein Exemplar von Hrn. D'Alembert's und meiner pièce sur les vents schicken; Sie werden mich dadurch obligiren und werde ich den Werth dafür mit Dank bezahlen. Sie sagen allzeit, ich solle pièces nach Petersburg schicken, ich sehe aber dieses nur für eine Ausrede an von Seiten der Petersburger Akademie; denn es sind noch genug pièces in Petersburg von mir vorhanden, und zwar meine allerbesten pièces, welche nicht ohne Nachtheil für meine Reputation sind so lang aufgeschoben worden. Wenn solche nicht ehestens gedruckt werden, werde ich solche ein wenig umgiessen und mit einer ganzen Historie nach Paris schicken, wozu ich nunmehro als membre de l'Académie das Recht habe. Ich vermuthete mit sehr vielen Gründen, dass man Ew. sonderbare mérites würde wenigstens das letzte Mal in Consideration ziehen; es hat aber die Partey von Hrn. Bradley die Ihrige überwogen. Doch versichert man mich von allen Orten, dass bey der nächsten Vacanz, welche nicht mehr lang anstehen wird, Ew. erhalten werden, was Sie schon längst hätten erhalten sollen. Meine erlangte Ehr wird um so viel vollkommner seyn, wenn ich Ew. werde auch bei dieser Akademie zum collega haben. Sie würden mich obligiren, wenn Sie mir eine kleine Description von Ihrer verfertigten scientia navali zu machen beliebten. Meine Gesundheit hat sich nunmehro ziemlichermaassen wieder hergestellt und werden mich Ew. erfreuen, wenn Sie mir von Zeit zu Zeit Dero herrliche inventa communiciren wollen. . . . . Ich habe mich erbitten lassen, das collegium physicum experimentale anstatt des Hrn. D^{r}. Stähelins, der ganz krank und unvermögend ist, zu halten. Solches geschiehet zwar mit einem grossen Zulauff, da ich beständig über 100 auditores habe; es nimmt mir aber auch sehr viel Zeit weg und gedenke ich solches nicht länger, als bis zu End dieses Sommers zu halten. Von Paris hat man mir berichtet, dass 8 Tage vor dem 1. Septembris eine einzige pièce zu dem nächsten praemio eingegangen sey. Wenn Ew. Autor davon sind, so sollte es Sie billig verdriessen, dass Ihnen Niemand den prix disputirt. Man hat mich stark encouragirt noch einen commentarium über meine pièce de Saturno zu machen; ich kann mich aber nicht dazu resolviren. Eine gewisse Theorie zu formiren, sollte man ex observationibus viele irregularitates determinirt haben, um zu sehen ob die Theorie damit übereinstimme, da doch die astronomi nur vage von diesen inaequalitatibus reden. Käme die Sach auf blosse calculos mathematicos an, getrauete ich mir wohl, nach unterschiedenen hypothesibus alles auszurechnen und zu exploriren, welche hypothesis mit der Natur übereinkomme. Herr Bradley hat seit Kurzem nun auch den motum nutationis axis terrae, in sofern solcher von der actione lunae, obliquitate eclipticae und figura terrae compressae herkommt, determiniret. Die ganze nutatio soll seyn von 18″ Will man die densitatem terrae uniformem statuiren, glaube ich, dass der calculus leicht seyn würde über diese Quaestion; da ich aber gewiss versichert bin, dass die Erde gegen das centrum densior ist, als bei der superficie, so findet kein calculus mehr statt. . . . . Ew. belieben mir auch einige observationes von der letzten Sonnenfinsterniss, sonderlich observationes physicas zu communiciren. Hat man die figuram disci Solis prope immersionem et emersionem auch observirt? Da nämlich die radii solis a corpore lunae attrahirt werden, sollte der discus Solis seine perfectam rotunditatem verlieren.

LETTRE LIV.

Sommaire. Théorie de Saturne, suite. Pièces sur les boussoles d'inclinaison et sur la théorie de l'aimant.

Sans date (commencement de 1749).

. . . . . Ich hab viel weniger Hoffnung als jemals, durch die principia mechanica die irregularitates Saturni herauszubringen; aber ich kann Ew. versichern, dass ich diese Materie genugsam einsehe, um Hoffnung zu haben mit gleicher Mühe so viel als Andere herausbringen zu können. Eine exacte Solution ist unmöglich und alle Approximationen so gefährlich, dass es eine unüberwindliche Mühe brauchte, die irregularitates mit genugsamer exactitude und Gewissheit zu bestimmen. Es nimmt mich sogar Wunder an Ew., als Deren Autorität ich sonst so sehr respectire, dass Sie mit einer so vollkommnen confiance praetendiren, diese Quaestion mit der äussersten Präcision solvirt zu haben. Sie sagen, dass sich die irregularitates Saturni niemals auf 9′ belaufen, da meine tabella bis auf 33′ abweicht a motu Kepleriano. Inzwischen redet M. le Monnier dans ses Institutions astronomiques, publiées à Paris l'an 1746, ganz anders in dem preliminar essay, so dass man glauben kann, die errores seyen bisweilen noch grösser, als ich sie determinire. Doch praetendire ich keineswegs, dass meine tabella der Natur sehr nahe kommen müsse. Sie kann nur dienen, um einige inaequalitates überhaupt und en gros gleichsam physice zu expliciren, wie denn gar viele Observationen sehr schön durch meine Theorie explicirt werden können. Insonderheit aber sind alle Methoden bei weitem nicht zulänglich, um den motum apheliorum oder apogaei zu determiniren. Wenn man nicht kann diesen motum omni rigore geometrico determiniren, so sind alle Determinationen, meiner Meinung nach, vergeblich, wenn es auch schon scheinet, dass alles dasjenige, was man negligirt habe, für ganz nichts zu rechnen sey. Ich habe hierüber dem Hrn. Clairaut aus occasion seines mémoire du système du monde, welches er mir mit der Post geschickt, eine Reflexion gemacht, welche mich in meiner Meinung sehr stärket. Man setze, dass ein corpus versus centrum virium attrahirt werde vi $\frac{aa}{xx} P$; sit distantia initialis $= a$, projiciatur corpus velocitate C, cum qua perfecte circulum describat circa centrum virium; superveniat vis infinite parva in centro virium, quae sit $= \frac{aa}{xx} \pi$: so wird das corpus eine ellipsin tantum non circularem beschreiben und die excentricitas seyn $= \frac{\pi}{P} a$, und diese ellipsis wird keinen motum apsidum haben. Wenn man aber anstatt der vis minimae $\frac{da}{xx} \pi$ supponirt $\frac{a^3}{x^3} \pi$, wer sollte nicht gemeint haben, dass eadem mutatio herauskommen sollte? Dieses affirmirt auch der Herr Clairaut positive p. 363, weil nämlich $\frac{aa}{xx}\pi$ und $\frac{a^3}{x^3}\pi$ können für gleich angesehen werden. Unterdessen gibt die hypothesis von $\frac{a^3}{x^3}\pi$ eine ellipsin, cujus excentricitas infinities major, als die hypothesis von $\frac{aa}{xx}\pi$, und gibt zugleich einen motum apsidum, da die andere hypothesis gar keinen motum apsidum nach sich ziehet. Diese plötzliche und, relative zu reden, unendliche Veränderung wird producirt von $\frac{aa}{xx}\pi - \frac{a^3}{x^3}\pi$, welches ein infinite parvum secundi ordinis ist. Diese und viele dergleichen Considerationen nebst der unüberwindlichen Mühe haben mich abgeschreckt weiter etwas über diese Materie zu arbeiten. Inzwischen bin ich doch Ew. sehr obligirt für die mir gütigst überschriebenen Tabellen. Hätte ich solche vor zwey Jahren gehabt, würde ich getrachtet haben, sie mir zu Nutz zu machen; doch merke ich, dass nicht auf alle diese Observationen würde zu gehen gewesen seyn. Ew. belieben mir zu melden, wenn man die observationes geocentricas reducirt auf die longitudines heliocentricas, wie weit man auf diese Reductionen zählen könne: mich dünkt, dass wegen unterschiedenen Correctionen, diese reductiones bei etlichen minutis primis fehlen können.

Ich hab vor etlichen Wochen die Pariser pièces sur les boussoles d'inclinaison et sur la théorie de l'aimant empfangen. Aus Ew. pièce über die boussole d'inclinaison hab ich ersehen, dass Sie die wahre Difficultät nicht eingesehen, und also derselben auch nicht abgeholfen haben. Was aber die theoriam magnetis anbelangt, so hab ich mit Verwunderung gesehen, dass Sie, M. du Tour, mein Bruder und ich alle gleiche principia und Explicationen gebrauchen. In einem einzigen Puncte ist Ihre pièce mangelhaft, da Sie keine vim, oder vielmehr eine falsche vim supponiren, welche die materiam subtilem magneticam durch die meatus magneticos mit einer grossen Rapidität circuliren mache. Sie werden ja nicht statuiren, dass man einen hohlen tubum cylindricum construiren könne, cujuscunque figurae, longitudinis aut crassitiei et valvulis utcunque instructum, per quem aër elasticus sua sponte circuletur. Sie sehen solches so wohl ein, als ich. Obschon wir Uebrigen also weiter gegangen, als Ew., so wollte ich doch noch 1000 auf 1 setzen, dass wir alle von der Wahrheit noch weit entfernt sind, da hingegen Ew. diese theoriam für plane demonstratam anzusehn mit vielen Expressionen bezeugen. Da ich aber Dero tiefe Einsicht gar wohl kenne, so will ich solches einer puren Politic zuschreiben. — Ew. melden auch, Sie haben das wahre tempus periodicum Saturni determinirt, da doch sowohl die Theorie, als die Observationen confirmiren, dass die tempora periodica alterna merklich unterschieden seyen. Hingegen hab ich demonstrirt, dass die tempora periodica alterna inter se comparata nicht sensibiliter unter sich differiren können. Herr Le Monnier behauptet zwar auch hierin eine kleine Differenz gefunden zu haben; ich zweifle aber, ob alle seine Reductionen und Correctionen so richtig seyen, dass man über diese Puncte den Observationen genugsam Glauben beimessen könne.

LETTRE LV.

SOMMAIRE. Mêmes sujets. Reproche au sujet de la pièce sur les vents.

Basel d. 16. August 1749.

.... Des Hrn. Clairaut Retractation über den motum apogaei lunaris hat ein grosses bruit gemacht, und obschon, meiner Meinung nach, ihm diese Sach eine doppelte Ehr machen sollte, so triumphiren doch seine antagonistae über die Maassen. Auch leidet Ew. theoria Saturnina einen grossen Stoss bei den academicis Parisinis. Mir kommt noch Eins und das Andere suspect darin vor, und weiss dato nicht, ob ich Ihrer oder meiner Theorie mehr trauen soll. Ich gestehe ganz gern, dass meine Theorie nicht mit sufficienter exactitude ausgearbeitet ist; doch aber halte ich meine Methode noch allzeit für richtig und so beschaffen, dass ich mit mehrerer Mühe gewiss näher zur Wahrheit hätte gelangen können. Da ich die metaphysischen Betrachtungen über diese Quaestionen allzeit gar wohl gemacht hatte und eingesehen, wie leicht es sey, sich von der Wahrheit mehr zu entfernen, als näher zu kommen, so erinnerte ich dessen den Hrn. Clairaut vielfältig und ermahnte ihn, sich in seinen Conclusionen nicht zu übereilen. Allein das Unglück wollte, dass Ew. und der Herr D'Alembert auf den nämlichen Schluss gefallen waren. Ew. Autorität hat ihm billig eine grosse Impression machen sollen; allein der Herr D'Alembert hat bei mir in rebus physico-mechanicis wenig Gewicht. In rebus physico-hydraulicis hat er raisonnirt wie ein Kind contra omnia experimenta. Seine dissertation sur les vents hat mir auch gar nicht gefallen wollen, und ist keine einzige physische Reflexion schier darin und Alles nur in abstracto geschrieben. Ich hätte nicht gedacht, dass die Akademie sich liesse mit formulis abstractis abspeisen. Dessen allem ungeachtet hab ich für den Hrn. D'Alembert eine sehr grosse und wahrhafte Hochachtung, und sehe ich vor, dass er mit dem Alter, seiner Jugend bévues reichlich ersetzen wird. Ew. hatten mir zu viel flattirt, da Sie mir gesagt haben, meine pièce sur les vents habe das sogenannte Accessit erhalten, da sie doch nur als eine pièce qui a concouru gedruckt worden, auf welche man keine weitere Reflexionen gemacht. Wenn ich solches gewusst hätte, würde ich derselben Druck nicht zugegeben haben; denn da ich diese pièce aus blosser complaisance für Ew. in 2 oder 3 Tagen geschrieben, so ist es nicht billig gewesen, dass man sich derselben bedient habe pour servir de trophée. Man schreibt mir aus Holland, dass der Robins seine Artillerie auf ein Neues herausgegeben und sich darin als ein grosser Antagonist von Ew. erweise; er könnte aber übel anlaufen. . . . . Dero scientia navalis erwarte mit grosser Ungeduld und bedanke mich zum Voraus dieses herrlichen Praesents wegen. . . . . Ich zweifle, ob Herr Clairaut annoch mit Ew. übeinstimme, wegen Allem, so Sie mir de orbitis planetarum schreiben. Des Hrn. Clairaut's Mémoire, worin er den motum apogaei lunaris ausgerechnet, machte mir sehr wenig Impression: Seine Solution war sehr indirecta. Ich hab ihm unterschiedene Difficultäten formirt und er hat mir gemeldet, dass eine davon avoit donné au but, und dass er sich solche Objection formirt habe, ehe er meinen Brief erhalten, und auch in einem mémoire cacheté der Akademie annoncirt.

LETTRE LVI.

SOMMAIRE. Mêmes sujets.

Basel d. 26. Januar 1750.

. . . . Ich hab Ew. pièce über den Saturnum gesehen und obiter durchgegangen. Die Materie ekelt mich schier; sonst hätte ich sie mit aller Attention gelesen. Ich habe viele vortreffliche artificia darin bemerkt; aber in der Hauptsach glaube ich, dass nothwendig paralogismi müssen verborgen seyn. Ich halte für ganz gewiss in hypothesi nonexcentricitatis, dass die inaequalitates nicht a simplici elongatione dependiren, noch post singulas conjunctiones recurriren. Wenn solches wäre, so würde meine Arbeit 90 Procent leichter worden seyn; aber es ist gewiss nicht: sondern der periodus inaequalitatum geschiehet erst post trinas conjunctiones, und auch alsdann nur proxime. Die inaequalitates sind auch in hac hypothesi gewiss viel grösser, als Sie meinen. Es ist auch unbegreiflich, dass die excentricitas einen so grossen Effect thun könne; die blosse Proposition choquirt. Man gestehet nun in Paris, dass sich meine Theorie besser soutenire, als die Ihrige, und haben meine Freunde Alles gethan, um mich wieder concurriren zu machen. Aber die mühsamen Arbeiten sind nicht für mich. Ich glaube einmal, dass nicht möglich ist, dem problemati anders, als per partes successivas zu satisfaciren, weil die inaequalitates dependiren ab arcubus descriptis ab utroque planeta und allen elementis, so von diesen zwey arcubus dependiren, und wenn man wollte eine seriem generalem formiren, so müsste diese series durch alle dimensiones von beiden arcubus und nicht von einem arcu allein laufen. Ich glaube noch allzeit, dass etwas unter Ihren Approximationen steckt, welches nicht recht ist. Ew. untersuchen alles noch einmal mit grösster Aufmerksamkeit und scepticismo; Niemand kann es thun in der Welt, als Sie selbst. Meine Arbeit kann ich nicht garantiren, da ich eine Methode gebraucht, allwo ein einziger error numericus alles destruirt; aber meine Methode halte ich für unfehlbar. Ich hätte auch nicht sollen die reactionem in Solem negligiren, wie ich gethan, nur um meine bereits geschehenen calculos nicht zu repetiren. Ew. nehmen mir nicht für übel, dass ich so frey rede und mir dies Mal so viel ausnehme. Solches geschiehet gewiss, ohne die Veneration, die ich für Ihre mérites, sonderlich in mathematicis puris, habe, zu verletzen. Obschon ich des Hrn. Clairaut's theoriam lunarem noch nicht gesehen, so kann ich ihm doch meine Präsumtion nicht refusiren. Ich kenne seine Capacität und bin daneben des Hauptsatzes von der Sufficienz der theoriae Newtonianae vollkommen überzeugt. Den Hrn. D'Alembert halte ich für einen grossen mathematicum in abstractis; aber wenn er einen incursum macht in mathesin applicatam, so höret alle estime bey mir auf: seine Hydrodynamica ist viel zu kindisch, dass ich einige estime für ihn in dergleichen Sachen haben könnte. Seine pièce sur les vents will nichts sagen und wenn Einer alles gelesen, so weiss er so viel von den ventis, als vorhero. Ich vermeinte, man verlange physische Determinationen und nicht abstracte integrationes. Es fängt sich ein verderblicher goût an einzuschleichen, durch welchen die wahren Wissenschaften viel mehr leiden, als sie avancirt werden, und wäre es oft besser für die realem physicam, wenn keine Mathematik auf der Welt wäre. Ich kann nicht begreifen, was der M. D'Alembert sagen will, in den Mémoires de Berlin, mit seinen unendlich vielen vibrationibus isochronis und curvaturis. Man sollte ihm sagen: hic Rhodus, hic salta! Aber er bleibt allzeit in abstractis und bringt niemals kein exemplum specificum. Ich möchte doch wissen, wie er aus einer Saite, deren sonus fundamentalis 1 ist, einen andern sonum, als 1 oder 2. 3. 4 u. s. w. herausbringen will. Er hat Ew. nachäffen wollen; aber man siehet seinen goût in seinen Productionen und wenig Realität.

LETTRE LVII.

SOMMAIRE. Mémoire sur la vibration des cordes. Mémoires de l'Académie de St.-Pétersbourg.

Bâle ce 7 octobre 1753.

J'assure M. le professeur Euler de mes respects et de ma parfaite estime. Après avoir lu tout ce que lui et M. D'Alembert ont donné, dans les Mémoires de Berlin, sur les nouvelles vibrations des cordes, j'ai fait sur cette matière un mémoire qui, à mon avis, peut éclaircir tout ce que cette matière a d'épineux, et en quelque façon de mystérieux, et qui la rend très simple. Si M. Euler ne s'est pas dégoûté de ces recherches, je pourrois faire copier mon mémoire et le lui envoyer par telle occasion que je trouverai ou qu'il m'indiquera. Je souhaiterois aussi savoir ce que l'on a imprimé jusqu'ici des Mémoires de Pétersbourg. J'ai actuellement 12 tomes des anciens Mémoires et un tome des

Commentarii novi. Je suis surpris de n'y pas trouver encore mes pièces sur les vibrations et les sons des lames à ressort, pendant que ceux, qui ont traité cette matière après moi, ont publié leurs mémoires depuis un grand nombre d'années. Je supplie donc M. Euler de m'apprendre, si mes deux dissertations, qui m'ont coûté tant de méditations et de peine, seront insérées dans les Mémoires de Pétersbourg, ou non? En ce dernier cas je les enverrai ou à Paris ou à Berlin. . . .

LETTRE LVIII.

SOMMAIRE. Refus d'un engagement à l'académie de Berlin. Sur deux mémoires envoyés à cette académie.

Sans date (entre 1754 et 1766)

Je suis tout étonné, Monsieur, et je n'ai pas l'esprit assez tranquille pour répondre convenablement à l'offre grâcieuse que Vous me faites de la part de Sa Majesté. Mon âge et ma santé m'empêchent de l'accepter; le moindre travail m'épuise; je ne suis plus qu'un depontain; je n'apporterois en Prusse qu'un faible et inutile reste d'une vie presque consumée en Russie et en Suisse: Quel contraste! J'adore cependant la Providence qui m'a attiré, dans l'obscurité de ma retraite, des regards propices de notre auguste Monarque.

Je suis aussi extrêmement sensible, mon cher Monsieur, à tout ce que Vous me dites d'obligeant à cette occasion. J'ai été charmé d'apprendre que l'Académie a reçu avec bonté mes deux mémoires: Votre suffrage surtout m'est infiniment précieux. Vous savez combien j'ai toujours respecté Vos lumières et avec quelle déférence je me suis rendu à Vos avis sur ces sortes de matières. Voici quel est mon avis sur cette matière: Nous avons démontré que toute courbe exprimée par cette équation

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \beta \sin \frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} + \text{etc.}$$

satisfait à la condition dont il est question. Mais ne peut-on pas dire que cette équation comprend toutes les courbes possibles; ne peut-on pas, moyennant les quantités arbitraires α, β, γ etc., faire passer la courbe par autant de points qu'on voudra, donnés de position? Une équation de cette nature a-t-elle moins d'étendue que l'équation indéfinie

$$y = \alpha x + \beta x x + \gamma x^3 \text{ etc.?}$$

Sur ce pied n'aurait-on pas démontré Votre beau théorème que toute courbe a la propiété en question? Ainsi, pour résoudre Votre problème: *Data figura qualicunque initiali, invenire motum secuturum*, je dis qu'il faut déterminer les quantités α, β, γ qui identifient la courbe donnée avec notre équation indéfinie, et on aura aussitôt les vibrations isochrones particulières, desquelles le mouvement cherché sera composé. Si j'ai pu, par ma méthode, résoudre le problème de déterminer le mouvement d'un fil tendu, chargé à des distances quelconques de poids quelconques tant en nombre qu'en masse, il me semble que ce problème a encore plus d'étendue que le Vôtre. Mais ce n'est pas dans ces sortes de questions abstraites que je fais consister ce que ma nouvelle théorie peut avoir d'utile. J'admire plutôt le trésor physique qui était caché, de pouvoir réduire des mouvemens, qui sont dans la nature et qui ne paroissoient assujéties à aucune loi, aux simples mouvemens isochrones dont il paroît que la nature se sert dans la plupart de ses opérations. Je suis même comme persuadé que les inégalités dans les mouvemens des corps célestes ne consistent que dans deux, trois, ou plusieurs simples mouvemens réciproques de différentes durées et excursions, par lesquels les corps paroissent alternativement accélérés ou retardés et qui peuvent coexister dans un seul et même corps pendant qu'il est mu suivant les lois de Kepler; car les petites forces, qui sont tantôt affirmatives, tantôt négatives, ne peuvent guère produire que des mouvemens réciproques et isochrones. Au reste je remarque, par rapport à la figure d'une corde tendue, qu'à moins de lui donner une courbe comprise immédiatement dans l'équation

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \beta \sin \frac{2\pi x}{a} + \text{etc.}$$

chaque élément de la courbe doit faire une infinité de vibrations infiniment petites, toutes différentes entre elles pendant une vibration totale. Faites, je Vous prie, mille complimens de ma part à notre cher Président; je vois qu'il me veut toujours beaucoup de bien; je reconnois son ouvrage. S'il peste contre mon invincible inertie, il ne fera que ce que je mérite. J'ai l'honneur d'être avec toute la vénération qu'on doit à Votre mérite, Monsieur, Votre etc.

Daniel Bernoulli.

LETTRES

DE

DANIEL BERNOULLI

À

NICOLAS FUSS

(né à Bâle le 29 janvier 1755, mort à St.-Pétersbourg le 4 janvier 1826).

1773 — 1778.

Correspondance mathématique et physique, Tome II pag. 659.

Fac-similé de l'écriture de Daniel Bernoulli Joh. F. 1778.

Je ne laisse pas de rendre justice à tout ce qui sort de votre plume et
d'admirer vos grandes ressources pour surmonter les difficultés les plus epineuses: mais
cette admiration se redouble, quand le sujet peut mener à des connoissances utiles: je range
dans cette classe les profondes recherches dont vous me parlez, sur la force des poutres mises
en oeuvre de plusieurs differentes manieres, sur tout des ~~co~~ colonnes verticales: Je me souviens
d'avoir examiné cette matiere, il y a une quintaine d'années et d'avoir soumis mes resultats
à des experiences, qui ont assez bien confirmé ma theorie excepté celles que j'ai faites sur la
force des colonnes verticales, dont je n'ai eté que tres mediocrement satisfait. Ne pourriez
vous pas engager Mr Kolibin à confirmer la theorie de M. Euler par de pareilles experiences,
sans quoi elle ne sera qu'hypothetiquement vraie. J'ai fait mes experiences avec des
parallepipedes faits d'un bois sec et capaut, de plusieurs differentes longueurs mais tous exacte-
ment sur la meme base, d'un meme bois et coupé dans la meme direction, sur lesquels j'ai
fait mes epreuves tres variées. J'ai recu il y a environ trois mois de la main de M. Jean albert
Euler une enveloppe chargée d'une lettre pour M. votre Pere et d'une autre pour un graveur
logé chez Mr de Mechel avec deux programmes mais sans un mot de M. Euler pour moi. Si la
question proposée+ est bien traitée selon les vrais principes de la nature, je suis sur que les
mathematiques n'y contribueront rien; tout consistera dans une bonne imitation de la nature
sur la prononciation des voyelles. J'ai l'honneur d'etre avec la plus sincere attachement et
la plus parfaite estime

Monsieur mon tres cher Ami

Votre tres humble et tres-
obéissant Serviteur
Daniel Bernoulli

+ dans le programme

Lith. par A. Davignon.

LETTRE I.

SOMMAIRE. Arrivée de F. à St.-Pétersbourg et accueil qu'il trouve dans la maison d'Euler. D. B. l'encourage à se vouer à la physique expérimentale.

Bâle le 28 juillet 1773.

Monsieur, votre lettre du 11 juin n. st. ne m'est parvenue que cinq semaines passées après sa date; vous jugez bien qu'il étoit tems qu'elle arrivât enfin, pour tirer de la frayeur vos chers parens. Mon premier soin fut donc d'envoyer l'incluse à M. votre père qui ne tarda pas à me venir témoigner sa joye et à me communiquer les consolantes nouvelles qu'elle contenoit et qui m'ont fait beaucoup de plaisir: je lui fis pareillement la lecture de celle que vous avez eu l'amitié de m'écrire. Je suis charmé du bon accueil que vous avez reçu de notre illustre compatriote et de tous ceux qui lui appartiennent. M. Jean-Albert Euler me marque qu'ils sont tous très contens de vous, surtout M. son Père qui vous a déjà pris, ce sont ses termes, en grande affection.

Je souhaite que ce favorable acheminement vous conduise bientôt à quelque établissement solide, et si c'est par la porte de l'académie des sciences, je n'en serai que plus charmé. N'auriez vous pas du goût pour la physique mécanique expérimentale? Un tel poste vous conviendrait, à ce qu'il me paroît, par la précision que les ingénieurs savent mettre à toutes leurs opérations, aussi bien que par vos lumières naturelles. De quel côté que vous tourniez vos vues, j'augure votre bonne fortune par le premier pas que vous avez fait et qui est, comme on dit, le seul qui coûte. Vos intérêts, mon cher ami, seront toujours les miens. J'ai appris avec plaisir que l'académie est fort contente du sieur Wichser et de son frère; je les salue de tout mon coeur. J'aime bien les Suisses quand ils se comportent bien; mais c'est avec une distinction toute particulière pour ceux qui, comme vous, aspirent à faire honneur à leur patrie. Plein de ces sentimens pour vous, je ne cesserai d'être, tant qu'il me reste à vivre, M., votre etc.

LETTRE II.

SOMMAIRE. Réception manquée de F. à l'Académie. Méthodes d'Euler et de Daniel B. pour la détermination des vibrations des cordes. Mémoire de dioptrique de F.

Sans date (1775).

Votre lettre m'a fait beaucoup de plaisir et je suis sensible, on ne peut pas plus, aux marques d'affection qu'elle renferme. Je n'ai pas besoin de vous dire que je serai toujours flatté de tout ce qui me parvient de votre part; mais j'ai grand besoin de vous anticiper mes excuses, s'il m'arrive d'être hors d'état d'y répondre, et ces tristes excuses ne sont que trop valables: toutes ces infirmités de vieillesse m'assaillissent et m'assomment également le corps et l'esprit; c'est dans l'ordre préscrit à la vie humaine auquel je suis bien loin de regimber.

Quant à l'article de votre réception à l'académie des sciences, on ne sauroit disconvenir qu'il n'y ait un grand guignon pour un jeune homme qui travaille avec tant d'ardeur et tant de succès et qui saisit si bien les sublimes instructions de son divin maître. Il semble que la seule démission de M. le comte d'Orlof vous ait été contraire; tout le reste s'étant passé à votre satisfaction et à votre gloire; cette fatale démission ne pouvoit donc arriver plus mal à propos pour vous. Je suis cependant charmé de voir que ces revers de fortune ne vous découragent point. J'espère que, pour le plus tard possible, le jour du jubilé semi-séculaire de l'académie sera en même tems celui de votre promotion. Ces sortes de jours semblent consacrés aux grands monarques de la terre à faire éclater leur munificence de la manière la plus convenable à la fête. Je me suis d'abord intéressé pour vous par pure amitié; à présent j'ajoute à ce grand motif celui du zèle pour le bien de l'académie: je vois par votre dernière que vous avez fait des progrès extrêmement rapides, également dignes de vous et de votre illustre maître. Je vous en fais, mon cher Monsieur et compatriote, mes complimens de tout mon coeur. Vous me donnez une grande idée de l'usage que M. Euler a su faire de mes deux derniers mémoires: aussi ai-je toujours souhaité que cet incomparable géomètre trouvât digne de toute son attention le grand principe qui fait la base de ces deux mémoires; l'évènement a également justifié mes souhaits et mon attente. L'esquisse que vous me faites de la méthode de M. Euler*) m'a fait plaisir; mais elle n'a changé en rien mes idées sur cette matière. Je suis toujours persuadé que ma méthode donne *in abstracto* tous les cas possibles; j'avoue cependant que, dans de certains points de vue, celle de M. Euler est fort préférable à la miennè; mais il y a aussi

*) Pour la détermination des vibrations des cordes.

d'autres points de vue pour le contraire, puisque ma méthode peut être appliquée à tel nombre de corps fini, qu'on propose, lors même que dans le système il n'y a aucun retour parfait ou période à attendre. Quoi qu'il en soit de mes prétentions, je suis toujours prêt de baisser pavillon devant mon amiral.

Je vous fais encore des complimens en particulier sur votre ouvrage dioptrique*); on ne pouvait faire une plus belle entrée dans la république des lettres. J'aime, préférablement aux autres, les ouvrages de pratique et d'exécution, pourvu qu'ils soient bâtis sur une bonne théorie. Notre aimable et estimable M. Jean-Albert Euler m'en avoit déjà donné quelque notice. Dans la belle perspective que vous avez devant vous, oserois-je vous recommander la pauvre philosophie expérimentale presque déserte. Je finis en vous assurant de la parfaite estime et de l'inviolable attachement, avec lesquels je ne cesserai d'être etc.

*) Instruction détaillée pour porter les lunettes au plus hant degré de perfection.

LETTRE III.

Sommaire. Réception de F. à l'Académie. Leçons d'artillerie. Machine balistique de Daniel B. Recherches acoustiques sur les tuyaux d'orgue.

Bâle ce 16 mars 1776.

La poste devant partir bientôt, je n'ai que très peu de tems devant moi pour répondre à vos deux dernières lettres. Ce qui me presse le plus est de vous témoigner la part que je prends à votre avancement. Je sais avec quelle ardeur vous aspiriez à ce premier grade académique afin de pouvoir vous vouer par état à l'avancement des sciences et des arts qui ont toujours fait vos délices et qui répondent si bien à vos talens naturels. Ce premier pas étant fait, vous n'avez plus qu'à vous laisser conduire par les Muses qui vous chérissent et qui vous mèneront toujours à bon port. Je souhaite, mon cher Monsieur, que la fortune vous soit toujours également favorable et surtout que vous jouissiez d'une parfaite santé et de toute sorte de contentemens. Je vois avec plaisir que M. de Domaschnef vous a déjà accordé toute sa bienveillance; on ne peut qu'en augurer beaucoup de bien pour vous et pour les sciences. L'idée que vous avez eue, de proposer d'être employé à enseigner les principes de l'artillerie, était à mon avis des mieux imaginées. Je ne sais si vous avez remarqué dans notre salle de physique une petite machine ballistique que j'ai inventée pour faire voir dans 4 ou 5 leçons toutes les règles pour servir au mieux les mortiers et les canons, sans cependant faire attention à la résistance de l'air, ce qui n'aurait fait que troubler les auditeurs, sans donner plus de précision aux expériences à faire, à cause de la petitesse des jets. Moyennant cette petite machine je pouvois déterminer exactement la charge que je voulois employer et qui était fournie par l'action d'un ressort, bandé par un poids qui était suspendu en dehors par un fil, et ce fil entroit par la culasse et étoit lié à l'extrémité antérieure du ressort. Pour faire partir le coup, je coupois le fil avec des ciseaux tout près du poids attaché. Je pouvois aussi faire voir exactement comment il falloit placer la mire et le guidon, tant pour les canons que pour les mortiers, quand on vouloit s'assurer de son coup. — Vos deux lettres sont remplies de recherches et de remarques fort importantes. Vous avez traité parfaitement bien votre mémoire d'épreuve. La manière de M. Euler le père, de traiter les fractions continues, est toute charmante et bien digne de son auteur: cela dame le pion à tout ce qu'on avoit remarqué auparavant sur cette matière. Quand je composois les deux petits mémoires que vous citez, c'étoit plutôt pour me délasser que pour m'appliquer; ma pauvre tête, sujette aux vapeurs et vertiges, veut être ménagée et même dorlotée quelques fois. C'est un grand trésor que ce nombre prodigieux de nouveaux mémoires composés, depuis peu, par M. Euler et que vous m'annoncez. Cette surprenante fécondité a de quoi étonner tous les géomètres du monde. M. Jean-Albert Euler, qui prend tant de part à tout ce qui me regarde, n'a pas manqué de m'apprendre la glorieuse nouvelle dont vous me parlez avec tout l'intérêt du meilleur des compatriotes. Je suis sensible, on ne peut pas plus, à tout ce que vous me dites d'obligeant à cette occasion.

Je ne saurois concevoir que vos résultats acoustiques sur les tuyaux d'orgue puissent être entièrement conformes aux lois de la nature. Vous connoissez sans doute le grand mémoire que j'ai composé sur cette matière, et qui se trouve dans le Mémoires de l'académie de Paris. La plupart de mes observations étoient fondées sur de terribles calculs, pendant que les vôtres ne sont qu'une espèce de règle d'alliage ou d'autres petites opérations arithmétiques. Je crois bien que vos règles sont assez bonnes pour de petites variations, mais elles me sont suspectes pour les grandes. Par exemple, quand vous voulez comparer le ton d'un tuyau ouvert avec celui du même tuyau bouché avec un bouchon qu'on aura un peu poussé vers la lumière, il falloit successivement avancer le bouchon jusque bien près de la lumière et noter chaque fois le ton du tuyau qui en résultoit. C'est ce que j'ai fait avec un de ces petits flageolets dont on se sert pour fixer les tons des tuyaux d'orgue. Essayez donc votre formule sur ces résultats dont j'ai donné la liste, et vous y remarquerez de grands écarts. Je fais la même remarque sur l'effet des bouchons tronqués: Enfoncez les bouchons plus ou moins d'une extrémité jusqu'à l'autre; employez beaucoup de bouchons, les uns presque entiers, les autres ne formant qu'un petit segment (il aurait mieux valu employer des bouchons annullaires), servez vous de tuyaux de différentes grosseurs et n'examinez votre règle qu'après toutes ces expériences. La lettre λ que vous introduisez pour marquer la force du son, ne me paroît qu'une cheville pour faire cadrer la théorie. Quant à l'effet des trous dans les flûtes, je suis persuadé que, pour les sons naturels du premier ordre, le seul trou ouvert, le plus proche de l'embouchure fait presque tout l'effet, et qu'il est assez indifférent que les trous plus éloignés de l'embouchure soient fermés ou ouverts, à moins que le premier ne soit fort petit. Il faut que je finisse; je vous embrasse donc de tout mon coeur et suis avec toute l'estime et attachement possibles, Monsieur mon très cher compatriote, etc.

LETTRE IV.

SOMMAIRE. Ouvrage de F. sur les tontines. Tables de mortalité. Jubilé semi-séculaire de l'Académie. Expériences d'acoustique. Projet d'un pont sur la Néva, par Koulibine. Considérations à ce sujet.

Bâle ce 7 juin 1777.

Vous vous êtes acquis des droits sur moi, Monsieur mon très cher et très honoré confrère, droits dont je ne pourrai jamais m'acquitter. Encore dernièrement M. votre père m'a remis de votre part un exemplaire de votre excellent ouvrage sur les tontines*). Si les remercîmens que j'ai l'honneur de vous faire de ce beau présent littéraire, sont un peu tardifs, je n'en ai pas moins senti tout le prix. Pourrois-je més-estimer un ouvrage dont le titre porte les deux noms qui m'ont toujours été les plus respectables et les plus chers, celui de M. Léonard Euler et de M. Nicolas Fuss. N'accusez donc à cet égard que mes infirmités inséparablement attachées à la vieillesse; *ipsa senectus morbus est*! A cet état naturel d'accablement et de souffrance s'est joint une fièvre catarrhale

*) Eclaircissemens sur les établissemens publics en faveur des veuves. St.-Pétersbourg. 1776. 4°.

assez forte pour enlever un homme bien plus robuste que moi, et qui cependant n'a pas voulu achever son ouvrage. Mais ce n'est que depuis peu de tems que j'ai pu commencer à lire votre traité; j'ai relu même le mémoire de M. Euler inséré dans les Mémoires de l'académie de Berlin pour l'année 1760. On ne sauroit mieux traiter cette matière que vous l'avez fait l'un et l'autre: mais c'est avec beaucoup de raison que vous vous plaignez du peu d'accord mutuel dans les tables nécrologiques les mieux faites, desquelles cependant dépend uniquement tout le résultat que vous voulez déterminer dans vos différentes questions, et qui malheureusement en est trop affecté pour négliger le désaccord. Il y a des tables qui accusent l'âge de 5 ans au delà duquel la moitié de la génération est déjà éteinte. Suivant la table de M. Smart, établie sur les registres mortuaires de Londres, les trois premières années de la vie suffisent pour enlever la moitié de toute une génération. La table de M. Halley, suivant les registres mortuaires de Breslau, si on suppose la génération de 1200 (puisqu'on y part de la valeur (1) = 1000) nous apprend que c'est à l'âge de 20 ans que le nombre des vivans est réduit à la moitié, et ce terme me paroît le plus vraisemblable. M. Kerseboom trouve 31 ans, et vous adoptez le même âge: Un tel terme est sans doute excessif *pour le général*, et il me semble qu'en suivant la liste mortuaire de M. Kerseboom, on augmente trop l'avantage de la banque. Cependant cette excessive inégalité est considérablement diminuée si on suppose qu'on ne parte que depuis l'âge de 15 ans accomplis. Mais il y a une autre réflexion à faire qui me paroît très essentielle pour l'établissement des rentes destinées simplement aux femmes devenues veuves; c'est que, selon le célèbre M. Wargentin, l'ordre de mortalité est fort différent entre les hommes et les femmes, à l'avantage des femmes. C'est une des raisons qui fait que, dans les villes, il y ait ordinairement 3 ou 4 fois plus de veuves que de veufs, quoiqu'il y ait encore plusieurs autres raisons à alléguer là-dessus. Si la chose est bien vraie, comme je n'en doute pas, elle demanderoit une grande réforme dans vos calculs sur les *Witwen-Cassen*, quoique tout-à-fait justes pour l'hypothèse communément reçue. Vous aurez sans doute à Pétersbourg l'ouvrage de M. Déparcieux de l'an 1746; mais peut-être n'avez vous pas l'addition à cet ouvrage imprimée l'an 1760 qui finit par une table déduite des dénombremens faits en Suède, pour l'un et l'autre sexe, chacun à part — J'ai encore devant moi la lettre infiniment obligeante du 17 janvier n. st. que vous m'avez fait l'honneur de m'écrire; je suis sensible, on ne peut pas plus, aux marques de bonté, d'amitié et de sincérité que cette chère lettre exprime avec tant d'énergie; vous me comblez de toute sorte de bénédictions et de faveurs. Soyez assuré, mon chérissime ami, d'un parfait retour de ma part tant pour l'intérêt que je prends à tout ce qui vous concerne, que pour l'estime toute particulière que vous méritez si bien. La description que vous me faites du jubilé académique est bien intéressante; je vous en suis bien obligé; je serois bien aise d'avoir un de ces jolis billets d'invitation dont vous me parlez. M. Jean-Alb. Euler voudra bien avoir la bonté de me régaler d'un exemplaire, la première fois qu'on m'enverra quelque ouvrage de la part de l'académie, supposé qu'il chargeroit trop une lettre qu'on m'adresseroit par la poste. La condescendance du Roi de Prusse qui a bien voulu répondre si gracieusement aux voeux de l'Académie d'oser parer ses fastes de l'auguste nom qu'il porte, ne doit plus surprendre dans ce siècle que Catherine II et Fréderic II se sont approprié.

J'apprends avec plaisir les grands progrès que vous faites dans vos expériences acoustiques: ne faites vous pas entrer, dans vos formules, la force du vent? Je voudrois que vous fussiez en liaison avec le célèbre mécanicien, M. Vaucanson, qui dans la description d'un automate jouant d'une espèce de flageolet qu'on appelle, si je ne me trompe, *provençale,* nous a donné à connaître que les tons qu'on peut tirer de cet instrument qui n'a que trois trous, dépendent de l'exacte force du vent propre à chaque ton; tel ton demande soixante fois plus de vent qu'un autre. Il faut avoir le tact bien fin pour s'apercevoir de ces choses et pour les mettre en exécution. Ce que vous me dites de votre mécanicien né, M. Koulibine, au sujet d'un pont de bois sur la grande Néva, large de 1057 pieds d'Angleterre, me donne une grande idée de cet habile architecte et maître charpentier, élevé parmi les simples paysans et ne devant ses sublimes connoissances qu'à une espèce d'instinct*). Vous devez savoir cependant que notre Suisse intérieure a déjà possédé un grand nombre de pareils paysans et d'esprit illuminés. Il y a, dans notre pays, deux espèces de ponts de bois; les uns ne sont fondés que sur les principes communs des voûtes, et les autres sont appelés dans notre pays *Hängewerk*: Ce sont de grandes poutres suspendues verticalement et accrochées aux pièces principales de bois, mises et jointes horizontalement suivant la longueur du pont; ces poutres suspendues fournissent des points d'appui; l'assemblage de toutes les pièces de bois forme une espèce de massif qui

*) Le modèle de ce pont se conserve encore au musée de l'Académie.

pourroit avoir plus de 20 pieds d'épaisseur, de manière qu'il puisse faire la fonction d'une voûte extrêmement aplatie, mais qui auroit 20 pieds d'épaisseur. Il me semble que le plus grand artifice consiste dans le choix des bois, dans la dernière exactitude de toutes les mesures, dans le plus grand soin à ne se servir d'aucune pièce qui ne soit pas naturellement parfaitement droite, car il faut éviter qu'aucune pièce ne puisse plier ou se courber le moins du monde, et cela n'est pas tant difficile à faire moyennant de certaines traverses qui, avec peu de force, peuvent s'assujétir à d'autres pièces et les empêcher de plier. Toutes les pièces principales doivent se presser mutuellement autant qu'il est possible par le moyen de grosses vis de fer, de coins, de chevilles, de bons tenons et de mortaises bien travaillées. Vous aurez vu sans doute un ouvrage de M. Andreae, imprimé à Zurich, l'an 1776, en forme de lettres. Vous y trouverez une description fort détaillée d'un pont de bois construit à Schaffhouse qui a 364 pieds anglais de longueur; mais on a profité d'un pilier naturel qui se trouve vers le milieu, de sorte que la longueur de la partie la plus longue n'est que d'environ 200 pieds, fort au dessous de 1057. Cette largeur de la Néva me paroît excessive et j'avoue que je n'aurois jamais la témérité de donner mon suffrage pour la construction d'un tel pont à moins qu'on puisse construire deux ou trois pilotages d'un bord de la Néva à l'autre, pour partager tout le pont en trois ou quatre parties à peu près égales. Je n'ai formé ce jugement qu'après avoir lu avec attention toute le description de M. Andreae; je n'écoute guère la théorie simple dans ces ouvrages, parce qu'il est impossible de faire une énumération suffisante de toutes les circonstances qui doivent être nécessairement considérées, et qu'on est obligé de travailler en tâtonnant sur un nombre infini de petits articles qui n'admettent aucune détermination exacte. Le constructeur en chef est obligé le plus souvent de s'en remettre à son estime naturelle. C'est ici que je reconnois tout l'avantage qu'il y auroit de posséder un homme tel que M. Koulibine pour qui je suis pénétré d'estime; mais je ne saurois vaincre mon scepticisme à l'égard du pont énorme dont il s'agit. Est-on bien sûr que les grands froids du pays ne sauroient déranger la structure du pont? un petit resserrement de toutes les parties pourroit devenir fatal à ce pont. Marquez moi, s'il vous plaît, quelle est la hauteur du modèle dans son milieu par dessus ses extrémités, et de quelle façon ce grand artiste a distribué les 3500 pouds dont il a chargé son modèle. Si ce modèle a pu soutenir encore les 500 pouds dont il s'est proposé de le surcharger, cette augmentation seroit une forte preuve de plus pour l'heureux succès qu'on pourroit se promettre. J'ai fait autrefois beaucoup de recherches sur la force et la résistance des bois employés de plusieurs différentes manières, que l'expérience a toujours confirmées; mais j'hésite encore sur la résistance d'une poutre d'une certaine longueur équarrie et fortement comprimée dans la direction de sa longueur jusqu'à ce que la poutre commence à plier, ou quel est le plus grand poids qu'une colonne dressée bien verticalement puisse soutenir sans en être écrasée? Je voudrois que notre mécanicien inspiré vous dît là-dessus son opinion pour un ou deux exemples; je ne demande simplement que son estime.

LETTRE V.

SOMMAIRE. Réstitution de la pension de D. B. Mémoires de Bernoulli et d'Euler sur l'application du calcul des probabilités au calcul des observations. Autres travaux d'Euler. Divers sujets.

Bâle ce 18 mars 1778.

Je m'empresse à vous accuser la réception de la première lettre de change que l'Académie a eu la bonté de négocier en ma faveur pour me faire tenir le paiement de ma pension pour l'année nouvellement échue 1777. Ci-joint vous trouverez ma reconnoissance qu'il conviendra de remettre à la commission académique. Ne laissez pas, je vous prie, échapper cette première occasion de temoigner à cette illustre Compagnie mes profonds respects et de la remercier très humblement, de ma part. de la bienveillance dont ces Messieurs m'honorent. Je ne saurois me louer assez des gràcieuses attentions que M. de Domaschnef a eues pour moi à l'occasion de ce dernier paiement et qui, sans doute, ne demandoient pas moins de circonspection que de bienveillance. Tâchez, mon cher confrère, de lui dépeindre l'ardeur de mes sentimens, mais que ce soit dans un tête-à-tête; vous ne serez pas longtems à en trouver l'occasion. Quant à moi, je n'aurai jamais la moindre rancune contre qui que ce soit, me contentant de l'asyle où j'ai pu me mettre pour l'avenir. Vous sentez bien qu'il m'eût été bien dur, dans mon âge décrépit, de survivre à la perte de ce qui devait enfin couronner ma longue vie.

Je vous suis bien obligé de la communication de vos nouvelles académiques. Il est bien flatteur pour moi que l'Académie ait jugé mon mémoire *Inductio maxime probabilis* etc.*) digne d'être inséré dans le nouveau volume de ces Commentaires qu'on imprime actuellement; je suis surtout glorieux de ce que M. Euler en a pris occasion de régaler le public d'un autre mémoire sur la même matière**). Cependant je suis sûr que ce grand analyste aura envisagé la question d'un tout autre point de vue, que je n'ai fait; mon mémoire est plutôt métaphysique que mathématique: c'est une suite de doutes, bien ou mal traités, mais qui, à mon avis, méritent d'être examinés avec toute l'attention des philosophes non-prévenus. — Je ne doute pas que le mémoire du Marquis de Condorcet que vous m'annoncez ne renferme des découvertes de la plus haute analyse, d'autant que M. Euler en a pris occasion d'éplucher le même sujet *de formulis exponentialibus replicatis*. Il y a quelque tems que je suis tombé par hazard sur un sujet analogue en considérant une réplication indéfinie d'une certaine fonc-

*) Le titre complet de ce mémoire est: *Dijudicatio maxime probabilis plurium observationum discrepantium atque verisimillima inductio inde formanda* voir Acta I. 1. 1777 p. 3.

**) Ibid. p. 24.

*

tion propre aux approximations qu'on se propose. Vous ne me dites pas sur quelle matière roule le théorème de M. Euler dont vous avez donné la démonstration; mais un tel mémoire ne sauroit manquer d'être excellent à tous égards. Tous les autres mémoires qui doivent former les deux premières classes, me paroissent pareillement fort intéressans. Les nouvelles découvertes qu'on a faites sur l'électricité, sur les propriétés de l'électrophore, sur l'inflammabilité et la détonnation de l'air infecté, soit naturel soit artificiel, m'ont tout à fait étonné quand j'en vis faire les expériences pour la première fois. Le mémoire de M. Krafft ne sauroit donc manquer de s'attirer l'attention de tous les grands physiciens. Nous avons actuellement dans notre ville plusieurs messieurs qui ont des cabinets de physique assez bien montés, surtout pour l'électricité, et cette compagnie sera bientôt augmentée d'une nouvelle acquisition, celle de M. le professeur Socin qui a été employé avec beaucoup de distinction à Hanau, et qui s'étant déclaré vouloir retourner dans sa patrie, a été mis dans le senaire(?) pour remplir une place vacante dans notre grand Conseil qu'il a remporté par le sort. — C'est lui qui est l'auteur d'un traité imprimé depuis peu sur les vrais principes et le mécanisme de l'électricité. Ce que vous me dites tant de votre part que de celle de M. Euler est sans doute infiniment plus sublime; je veux parler du beau théorème de M. Euler sur les nombres premiers et de sa nouvelle méthode pour examiner tel nombre qu'on propose, quelque grand qu'il puisse être, s'il est premier, ou non. Ce que vous vous êtes donné la peine de me dire sur cette matière m'a paru fort subtil et digne de notre grand maître. Mais ne trouvez vous pas que c'est presque faire trop d'honneur aux nombres premiers que d'y répandre tant de richesses, et ne doit-on aucun égard au goût raffiné de notre siècle? Je ne laisse pas de rendre justice à tout ce qui sort de votre plume et d'admirer vos grandes ressources pour surmonter les difficultés les plus épineuses; mais cette admiration se redouble quand le sujet peut mener à des connoissances utiles. Je range dans cette classe les profondes recherches dont vous me parlez, sur la force des poutres mises en oeuvre de plusieurs différentes manières, surtout des colonnes verticales. Je me souviens d'avoir examiné cette matière, il y a une quinzaine d'années, et d'avoir soumis mes résultats à des expériences qui ont assez bien confirmé ma théorie, excepté celles que j'ai faites sur la force des colonnes verticales dont je n'ai été que très médiocrement satisfait. Ne pourriez vous pas engager M. Koulibine à confirmer la théorie de M. Euler par de pareilles expériences, sans quoi elle ne sera qu'hypothétiquement vraie. J'ai fait mes expériences avec des parallélépipèdes faits d'un bois sec et cassant, de plusieurs différentes longueurs, mais tous exactement sur la même base, d'un même bois et coupé dans la même direction, sur lesquels j'ai fait mes épreuves très variées. J'ai reçu, il y a environ trois mois, de la main de M. Jean-Albert Euler une enveloppe chargée d'une lettre pour M. votre père et d'une autre pour un graveur logé chez M. de Mechel avec deux programmes, mais sans un mot de M. Euler pour moi. Si la question proposée dans le programme est bien traitée selon les vrais principes de la nature, je suis sûr que les mathématiques n'y contribueront rien; tout consistera dans une bonne imitation de la nature sur la prononciation des voyelles.

LETTRES

DE

NICOLAS BERNOULLI

neveu de JACQUES et de JEAN, cousin germain de DANIEL
et auteur du Traité: *De arte conjectandi in jure.*

(né le 10 octobre 1687, mort le 29 novembre 1759)

À

LÉONARD EULER

1742. 1743.

Fac-similé de l'écriture de Nicolas Bernoulli, neveu de Jean. 1742.

Viro Celeberrimo et Mathematico Acutissimo
Leonhardo Eulero
S.P.D.
Nicolaus Bernoulli.

Patruelis meus mihi reddidit litteras Tuas 1. 7bris scriptas, ex quibus lubens intellexi, Tibi responsiones meas ad priores Tuas non prorsus displicuisse, simulque vidi me à Te rogari, ut plus temporis impendam ad amplificationem scientiae Mathematicae, qua in re Tibi obsecundarem, nisi plurima quae mentem alio distrahunt obstarent; adde quod non ea polleam ingenii vi, ut Te in sublimissimis Tuis speculationibus sequi nedum assequi valeam. Quia tamen permittis, ut rogationi Tuae tantum tribuam, quantum per otium licebit, non aegre feres, si hac vice ad ea solum respondeam, quae non multum meditationis aut laboris requirunt.

Lith. par A. Davignon

LETTRE I.

=

Sommaire. Sommation des puissances réciproques des nombres naturels.

Celeberrimo et acutissimo Mathematico Leonhardo Eulero S. P. D. Nic. Bernoulli.

Hagnauerus ille I. V. D. Aroviensis hac transiit sub finem mensis februarii, litterasque Tuas humanissimas, quae me maximo gaudio affecerunt, uxori meae cum domi non essem tradidit nunquam postea reversus, ita ut commendationis Tuae multum apud me valentis fructus nullos tulerit. Caeterum pergratum mihi fuit intelligere, me adhucdum in amicorum Tuorum numero haberi, sed velim Tibi quoque persuadeas, me inter admiratores praecellentissimi Tui ingenii non infimum mihi vendicare locum. Doleo sane quam maxime, quod contra animi mei propensionem rebus mathematicis jam a longo tempore vacare non possim, impeditus variis, praeter academica, negotiis. Falleris si existimas, me elegantissima Tua inventa et scripta, quae uti deceret perlegere otium mihi nondum fuit, examini meo subjicere solere. Si quando aliquid mathematici solvendum aut examinandum suscipio, id non nisi rogatus et otium nactus facio. Ignosce igitur, quod petitioni Tuae obsecundare volens tantum temporis mihi sumserim ad hanc responsionem conficiendam.

Perplacent omnia quae de methodis Tuis summandi seriem $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} +$ etc. scripsisti, eam quidem, quam pro altioribus potestatibus ex divisoribus infinitis aequationis $x = s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} -$ etc. Te derivâsse dicis, nondum vidi. Solummodo a Patruo audiveram, Te ex secundo termino aequationis infiniti gradus $0 = s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} -$ etc. invenisse summam seriei $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} +$ etc. esse aequalem $\frac{1}{6}\pi\pi$, denotante π circumferentiam circuli, cujus diameter 1; quod mihi occasionem praebuerat investigandi eandem summam per methodum aliquam, quam tanquam lusum ingenii cum D. Jallabert, tum temporis apud nos degente, nunc professore Genevensi, communicaveram eum solummodo in finem, ut ipsum in seriebus infinitis exercerem; ipsam autem methodum, contra quam scio aliquid objici posse, quod explanatione opus habet, tam parvi aestimaveram, ut nullum illius schediasmatis apographum apud me retinuerim, neque illud Commentariis Academiae Petropolitanae inseri permisissem, si id in mea potestate fuisset. In litteris ad Patruelem meum A. 1728 scripseram me incidisse, occasione serierum recurrentium, in hoc theorema (quod quidem etiam aliis modis inveniri et demonstrari potest): posito sinu arcus $A = x$, radio $= 1$, esse sinum arcus

$$nA = \frac{(\sqrt{(1-zz)}+z\sqrt{-1})^n - (\sqrt{(1-zz)}-z\sqrt{-1})^n}{2\sqrt{-1}},$$

quae expressio, posito n numero infinite magno et $z = \frac{s}{n}$,

evadit $= \dfrac{\left(1+\frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n - \left(1-\frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n}{2\sqrt{-1}} = s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} -$ etc.

$=$ sinui arcus s. Quanquam autem, ut recte dicis, hic sinus sit productum horum factorum

$$s\left(1-\frac{ss}{\pi\pi}\right)\left(1-\frac{ss}{4\pi\pi}\right)\left(1-\frac{ss}{9\pi\pi}\right) \text{ etc.}$$

et singula quadrata $ss = 0, \pi\pi, 4\pi\pi, 9\pi\pi,$ etc. ita ut aequatio praedicta nullas habeat radices imaginarias, non tamen puto ex hoc solo legitime concludi posse, summam omnium $\frac{1}{ss}$ excepto $\frac{1}{0}$ h. e. $\frac{1}{\pi\pi}, \frac{1}{4\pi\pi}, \frac{1}{9\pi\pi}$ etc. esse $\frac{1}{6} =$ negativae coëfficienti secundi termini in hac infinita aequatione $0 = 1 - \frac{ss}{6} + \frac{s^4}{120} -$ etc. nisi simul demonstretur, seriem $s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} -$ etc. esse convergentem et exacte dare sinum arcus s, quicunque valor assignetur ipsi s; quae quidem convergentia hic locum habet, sed non in serie ista $s - \frac{s^3}{6c^4} +$ etc. quae invenitur pro sinu arcus elliptici, sumtis 1 et c pro semiaxibus ellipsis. Cramerus, prof. math. Genevensis mihi scripserat nonneminem contra hanc methodum summandi seriem $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} +$ etc. objecisse, quod eodem modo demonstrari posset, hanc summam fore $= \frac{1}{6}$ quadrati circumferentiae cujuscunque ellipsis (sumta nempe tertia proportionali ad axem alterutrum et alterum pro unitate) quod esset absurdum. Haerebam aliquamdiu incertus quomodo resolvenda esset haec difficultas, postea tamen vidi respondendum esse, seriem istam $s - \frac{s^3}{6c^4} +$ etc. crescente s fieri divergentem, neque exacte dare valorem sinus arcus elliptici, per consequens coëfficientem negativam secundi termini in hac aequatione infinita $0 = 1 - \frac{ss}{6c^4} +$ etc. non exprimere summam omnium $\frac{1}{ss}$, seu non esse $= \frac{1}{\pi\pi} + \frac{1}{4\pi\pi} + \frac{1}{9\pi\pi} +$ etc. Fortassis autem ex hac ipsa divergentia seriei vel terminorum aequationis infinitae concludi potest, ejusmodi aequationem infiniti gradus semper habere radices imaginarias, id quod Tibi examinandum relinquo.

Valde ingeniosa est altera illa Tua methodus, quam deduxisti ex integratione quantitatum $\frac{x^{p-1}dx \pm x^{q-p-1}dx}{1 \pm x^q}$; sed nescio quid per *solitas integrationis regulas* intelligas, quando ais Te per illas invenisse, quod in casu $x = 1$ integralia dictarum quantitatum reducantur ad

$$\frac{\pi}{q \text{ sin. arc. } \frac{p\pi}{q}} \text{ et } \frac{\pi \text{ cos. arc. } \frac{p\pi}{q}}{q \text{ sin. arc. } \frac{p\pi}{q}};$$

sane haec reductio multum laboris et artis postulat. Ecce modum, quo rem perfeci:

Lemma. Posito radio $= 1$, cosinu arcus $A = \frac{m + m^{-1}}{2}$, sinu ejusdem $\frac{m - m^{-1}}{2\sqrt{-1}}$, cosinus arcus qA est $= \frac{m^q + m^{-q}}{2}$, et sinus arcus $qA = \frac{m^q - m^{-q}}{2\sqrt{-1}}$. Ponatur $\frac{x^{p-1}dx}{1 \pm x^q} = \frac{Pdx}{1 - mx} +$

$$\frac{a + bx + cxx \ldots + gx^{p-1} \ldots + \gamma x^{q-4} + \beta x^{q-3} + \alpha x^{q-2}}{1 + mx + mmxx \ldots + m^{q-1}x^{q-1}},$$

erit m vel $\frac{1}{m}$ radix aequationis $1 \pm x^q = 0$, seu m^q et $m^{-q} = \mp 1 =$ cosinui arcuum (posita semi circumferentia $= \pi$)

$\left\{\begin{matrix}\pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi, \text{etc.}\\ 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \text{etc.}\end{matrix}\right. = \frac{m^q + m^{-q}}{2}$, ergo per lemma praemissum est

$$\frac{m+m^{-1}}{2} \text{ cosin. arcuum } \left\{\begin{matrix}\frac{\pi}{q}, \frac{3\pi}{q}, \frac{5\pi}{q}, \frac{7\pi}{q}, \text{ etc.}\\ 0, \frac{2\pi}{q}, \frac{4\pi}{q}, \frac{6\pi}{q}, \text{ etc.}\end{matrix}\right.$$

Invenitur autem

$$\begin{array}{ll} a = -P & \alpha = Pm^{q-2} \\ b = am - Pm \quad = -2Pm & \beta = \frac{\alpha}{m} + Pm^{q-3} = 2Pm^{q-3} \\ c = bm - Pmm = -3Pmm & \gamma = \frac{\beta}{m} + Pm^{q-4} = 3Pm^{q-4} \\ & \vdots \\ g = (1-p)Pm^{p-1} & = (q-p)Pm^{p-1} \end{array}$$

hinc $P = \frac{1}{qm^{p-1}}$ et $\int \frac{Pdx}{1-mx} = \int \frac{m^{-p+1}dx}{q(1-mx)} = \frac{m^{-p}}{q} \log. \frac{1}{1-mx}$, et $\int \frac{x^{p-1}dx}{1 \pm x^q} =$ aggregato omnium $\frac{m^{-p}}{q} \log. \frac{1}{1-mx}$, positis nempe pro m sucessive omnibus valoribus radicum aequationis $1 \pm x^q = 0$, inter quos cum etiam sit $\frac{1}{m}$, erit semper haec quantitas $\frac{m^{-p}}{q} \log. \frac{1}{1-mx} + \frac{m^p}{q} \log. \frac{1}{1-m^{-1}x}$ realis; nimirum $\log. \frac{1}{1-mx} + \log. \frac{1}{1-m^{-1}x} = \log. \frac{1}{1-mx-m^{-1}x+xx}$, et $\log. \frac{1}{1-mx} - \log. \frac{1}{1-m^{-1}x} = \int \frac{mdx}{1-mx} - \int \frac{m^{-1}dx}{1-m^{-1}x} = \int \frac{mdx - m^{-1}dx}{1-mx-m^{-1}x+xx} =$ (posito $x = \frac{m+m^{-1}}{2} + t$ et $\frac{m-m^{-1}}{2\sqrt{-1}} = r$) $\int \frac{mdt \quad m^{-1}dt}{rr+tt} = \frac{m-m^{-1}}{rr} \cdot S = \frac{-4}{m-m^{-1}} \cdot S$, ubi S significat summam duorum arcuum circularium, quorum tangentes sunt t et $\frac{m+m^{-1}}{2}$, et radius $= r$, quae integratio ita fit, quia in casu $x = 0$ seu $t = \frac{-m-m^{-1}}{2}$ integrale $\log. \frac{1}{1-mx} - \log. \frac{1}{1-m^{-1}x}$

evanescit; hinc posito L pro log. $\frac{1}{1-mx-m^{-1}x+xx} =$ log. $\frac{1}{1-mx}$ + log. $\frac{1}{1-m^{-1}x}$, invenitur

log. $\frac{1}{1-mx} = \frac{-2S}{m-m^{-1}} + \frac{1}{2}L$, et log. $\frac{1}{1-m^{-1}x} = \frac{2S}{m-m^{-1}} + \frac{1}{2}L$;

per consequens

$$\frac{m^p}{q}\log.\frac{1}{1-m^{-1}x} + \frac{m^{-p}}{q}\log.\frac{1}{1-mx} = \frac{2m^p-2m^{-p}}{q(m-m^{-1})}.S + \frac{m^p+m^{-p}}{2q}.L$$

$=$ (si $\frac{m+m^{-1}}{2}$ significet cosinum et $\frac{m-m^{-1}}{2\sqrt{-1}}$ sinum arcus A)

$$\frac{m^p-m^{-p}}{q\sqrt{-1}\sin A}.S + \frac{m^p+m^{-p}}{2q}.L = \frac{2\sin pA}{q\sin A}.S + \frac{\cos pA}{q}.L.$$

Integralis igitur ipsius $\frac{x^{p-1}dx}{1+x^q}$ est composita ex tot quantitatibus hanc formam $\frac{2\sin pA}{q\sin A}.S + \frac{\cos pA}{q}.L$ habentibus, quot sunt unitates in $\frac{1}{2}q$, si q sit numerus par, vel quot sint in $\frac{q-1}{2}$, si q sit numerus impar, quo casu adhuc addi debet

$$+ \text{ vel } - \frac{1}{q}\log.\frac{1}{1+x},$$

prout p est numerus par vel impar, nam tunc posito $m=-1$, est $1-mx=1-m^{-1}x=1+x$ unus ex divisoribus ipsius $1+x^q$. Pro $\int\frac{x^{p-1}dx}{1-x^q}$ vero sumi debent tot quantitates $\frac{2\sin pA}{q\sin A}.S + \frac{\cos pA}{q}.L$ quot sunt unitates in $\frac{1}{2}q-1$ si q sit par, vel in $\frac{q-1}{2}$ si q sit impar, et aggregato illarum addi $+$ vel $-\frac{1}{q}$ log. $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{q}$ log. $\frac{1}{1-x}$ in priori casu, et $\frac{1}{q}$ log. $\frac{1}{1-x}$ in posteriori. Si pro p substituatur $q-p$ habebitur $\int\frac{x^{q-p-1}dx}{1\pm x^q}$, et integralis ipsius $\frac{x^{p-1}dx \pm x^{q-p-1}dx}{1\pm x^q}$ erit composita ex solis quantitatibus hanc formam

$$\frac{m^p-m^{-p}\pm m^{q-p}\mp m^{-q+p}}{q\sqrt{-1}\sin A}.S + \frac{m^p+m^{-p}\pm m^{q-p}\pm m^{-q+p}}{2q}.L$$

habentibus, sed quia m^q et m^{-q} est $= \mp 1$, est $\pm m^{q-p} = -m^{-p}$ et $\pm m^{-q+p} = -m^p$, adeoque evanescit quantitas per L multiplicata, et altera fit $\frac{2m^p - 2m^{-p}}{q\sqrt{-1}\sin A} \cdot S = \frac{4\sin pA}{q\sin A} \cdot S$. In casu $x = 1$ fit $S = \sin A\,(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}A)$, et

$$\frac{4\sin pA}{q\sin A} \cdot S = \frac{2\sin pA}{q}(\pi - A).$$

Substitutis igitur pro A ejus valoribus $\frac{\pi}{q}, \frac{3\pi}{q}, \frac{5\pi}{q} \ldots$ usque ad $\frac{q-1}{q}\pi$ vel $\frac{q-2}{q}\pi$, et $\frac{2\pi}{q}, \frac{4\pi}{q}, \frac{6\pi}{q} \ldots$ usque ad $\frac{q-2}{q}\pi$ vel $\frac{q-1}{q}\pi$, omissis nempe illis qui proveniunt ex radicibus $m = \mp 1$, et posito $B = \frac{p\pi}{q}$, evadit $\int \frac{x^{p-1}dx \pm x^{q-p-1}dx}{1 \pm x^q} =$ $\frac{2\pi}{q}\big(\sin B + \sin 3B + \sin 5B \ldots$ usque ad $\sin(q-1)$ vel $(q-2)B\big)$ $- \frac{2\pi}{qq}\big(\sin B + 3\sin 3B + 5\sin 5B \ldots$ usque ad $(q-1)\sin(q-1)B$ vel $(q-2)\sin(q-2)B\big)$, aut $\frac{2\pi}{q}\big(\sin 2B + \sin 4B + \sin 6B \ldots$ usque ad $\sin(q-2)$ vel $(q-1)B\big) - \frac{2\pi}{qq}\big(2\sin 2B + 4\sin 4B + 6\sin 6B \ldots$ usque ad $(q-2)\sin(q-2)B$ vel $(q-1)\sin(q-1)B\big)$; quia vero posito sinu arcus $B = \frac{n - n^{-1}}{2\sqrt{-1}}$ est $\sin 3B = \frac{n^3 - n^{-3}}{2\sqrt{-1}}$, $\sin 5B = \frac{n^5 - n^{-5}}{2\sqrt{-1}}$ et ita porro, et hae quantitates componuntur ex terminis progressionis geometricae, habetur pro summa horum sinuum $\frac{2n - n^{q+1} - n^{-q+1} \text{ vel } 2n - n^q - n^{-q+2}}{(1-nn)2\sqrt{-1}} =$

$$\frac{2 - n^q - n^{-q} \text{ vel } 2 - n^{q-1} - n^{-q+1}}{(n^{-1} - n)2\sqrt{-1}} = \frac{1 - \cos qB \text{ vel } (q-1)B}{2\sin B};$$

summa autem seriei $\sin B + 3\sin 3B + 5\sin 5B +$ etc. invenitur $= \frac{\sin(q+1)B \text{ vel } qB}{2\,\Box\sin B} - \frac{(q+1)\cos qB \text{ vel } q\cos(q-1)B}{2\sin B}$, simimiliter summa seriei $\sin 2B + \sin 4B + \sin 6B +$ etc. invenitur $= \frac{\cos B - \cos (q-1) \text{ vel } qB}{2 \sin B}$, et series $2 \sin 2B + 4 \sin 4B + 6 \sin 6B + \text{etc.} = \frac{\sin qB \text{ vel} (q+1) B}{2 \square \sin B} - \frac{q \cos (q-1) B \text{ vel} (q+1) \cos qB}{2 \sin B}$.

Substitutis igitur valoribus harum serierum erit

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx + x^{q-p-1}\,dx}{1+x^q} = \frac{\pi}{q \sin B}\Big[1 - \cos qB \text{ vel } (q-1)B - \frac{\sin (q+1) B \text{ vel } qB}{q \sin B} + \left(1 + \frac{1}{q}\right) \cos qB \text{ vel } \cos (q-1) B\Big] = \frac{\pi}{q \sin B}\left[1 + \frac{1}{q} \cos qB - \frac{\sin (q+1) B}{q \sin B}\right] \text{ vel } \left[1 - \frac{\sin qB}{q \sin B}\right] =$$

(quia $\sin qB = \sin p\pi = 0$ et $\sin (q+1) B = \sin qB \cos B + \sin B \cos qB$) $\frac{\pi}{q \sin B} = \frac{\pi}{q \sin \frac{p\pi}{q}}$; pari ratione est

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx - x^{q-p-1}\,dx}{1-x^q} = \frac{\pi}{q \sin B}\Big[\cos B - \cos (q-1) B - \frac{\sin qB}{q \sin B} + \cos (q-1) B\Big] \text{ vel } \Big[\cos B - \cos qB - \frac{\sin (q+1) B}{q \sin B} + \left(1 + \frac{1}{q}\right) \cos qB\Big] = \frac{\pi \cos B}{q \sin B} = \frac{\pi \cos \frac{p\pi}{q}}{q \sin \frac{p\pi}{q}} \; Q. E. I.$$

Sed tanto apparatu opus non esse mihi videtur ad concludendum, quod, cum eaedem formulae per series integratae in casu $x = 1$ dent

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q-p} - \frac{1}{q+p} - \frac{1}{2q-p} + \frac{1}{2q+p} + \frac{1}{3q-p} - \frac{1}{3q+p} - \frac{1}{4q-p} + \text{etc.}$$

et

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q-p} + \frac{1}{q+p} - \frac{1}{2q-p} + \frac{1}{2q+p} - \frac{1}{3q-p} + \frac{1}{3q+p} - \frac{1}{4q-p} + \text{etc.},$$

posito $\frac{p}{q} = z$ sit

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} - \frac{1}{2-z} + \frac{1}{2+z} + \frac{1}{3-z} - \text{etc. et}$$

$$\frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} - \frac{1}{2-z} + \frac{1}{2+z} - \frac{1}{3-z} + \text{etc.}$$

qnippe eaedem aequationes sine integratione formularum

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx \pm x^{q-p-1}\,dx}{1 \pm x^q}$$

obtinentur. Quia enim sinus πz est productum factorum $\pi z(1-zz)\,(1-\frac{1}{4}zz)\,(1-\frac{1}{9}zz)$ etc., sumendo differentialia logarithmorum harum quantitatum et dividendo per dz habetur statim

$$\frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} - \frac{1}{2-z} + \frac{1}{2+z} - \frac{1}{3-z} + \text{etc.}$$

Omitto brevitatis causa resolutionem fractionis $\frac{\pi}{\sin \pi z} =$, quae aliquanto prolixior est, quamque non uno modo fieri posse existimo, $= \frac{1}{z(1-zz)\,(1-\frac{1}{4}zz)\ \text{etc.}}$ in fractiones simpliciores

$$\frac{\alpha}{z} + \frac{\beta}{1-z} + \frac{\gamma}{1+z} + \frac{\delta}{1-\frac{1}{2}z} + \frac{\varepsilon}{1+\frac{1}{2}z} + \text{etc.}$$

Sed in eo, quod caput rei est, haereo, nempe in applicatione harum serierum ad inventionem summae seriei

$$1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \text{etc.}$$

Video equidem quomodo ex eo, quod per primam differentiationem habetur

$$\frac{\pi\pi}{\sin^2 \pi z} = \frac{1}{zz} + \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{(2-z)^2} + \frac{1}{(2+z)^2} + \frac{1}{(3-z)^2} + \text{etc.}$$

facto $z = \frac{1}{2}$, summa reciprocorum quadratorum inveniatur, sed rem in altioribus potestatibus continuata differentiatione succedere vix credo; inveni enim seriem ex secunda differentiatione ortam dare quidem summam seriei $1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \text{etc.}$ sed non seriei, in qua omnes termini sunt affirmativi.

Hae sunt, Vir Celeberrime, quae ad petitionem Tuam respondenda esse duxi; pro premio obsequii nil aliud, quam ut a Te meliora edocear, expecto. Vale et me ama. Dabam Basileae d. 13 Jul. 1742.

LETTRE II.

SOMMAIRE. Suite des recherches précédentes. Développement des fonctions trigonométriques en produits infinis. Différentes recherches analytiques.

Viro Celeberrimo et Mathematico acutissimo
LEONHARDO EULERO S. P. D. NIC. BERNOULLI.

Patruelis meus mihi reddidit litteras Tuas d. 1 Septembris scriptas, ex quibus laetus intellexi, Tibi responsorias meas ad priores Tuas non prorsus displicuisse, simulque vidi me a Te rogari, ut plus temporis impendam ad amplificationem scientiae mathematicae, qua in re Tibi obsecundarem, nisi plurima quae mentem alio distrahunt obstarent; adde quod non ea polleam ingenii vi, ut Te in sublimissimis Tuis speculationibus sequi nedum assequi valeam. Quia tamen permittis, ut rogationi Tuae tantum tribuam, quantum per otium licebit, non aegre feres, si hac vice ad ea solum respondeam, quae non multum meditationis aut laboris requirunt.

Videris mihi non recte percepisse mentem meam in iis, quae dixi de usu coëfficientis secundi termini in serie

$$s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} - \text{etc.}$$

Non negavi quod si fuerit

$$s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} - \text{etc.} = s\left(1 - \frac{ss}{\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{ss}{4\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{ss}{9\pi\pi}\right)\text{etc.}$$

legitime concludi possit esse

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{\pi\pi} + \frac{1}{4\pi\pi} + \frac{1}{9\pi\pi} + \text{etc.};$$

hoc utique certum est: Sed hoc negavi, quod etiamsi sinus arcus s sit $= s\left(1 - \frac{ss}{\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{ss}{4\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{ss}{9\pi\pi}\right)$ etc. et $= \left(\left(1 + \frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n\right) : 2\sqrt{-1}$, eadem inde conclusio sequatur, nisi simul demonstretur seriem

$$s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} - \text{etc.}$$

per quam idem sinus exprimi solet, esse convergentem; ratio negationis est, quia si esset divergens, illa non foret aequalis sinui arcus s aut producto factorum

$$s\left(1 - \frac{ss}{\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{ss}{4\pi\pi}\right)\text{etc.}$$

et hac ratione resolvitur objectio illa petita a serie pro sinu arcus elliptici $s - \frac{s^3}{6c^4} +$ etc. quae crescente s fit divergens, unde non concludi potest, ut in circulo, ubi series non est divergens, coëfficientem negativam secundi termini in hac aequatione infinita $0 = 1 - \frac{ss}{6c^4} +$ etc. h. e. $\frac{1}{6c^4}$ exprimere summam omnium $\frac{1}{ss}$, seu esse $= \frac{1}{\pi\pi} + \frac{1}{4\pi\pi} + \frac{1}{9\pi\pi} +$ etc.

Petis a me, ut Tecum communicem methodum demonstrandi independenter a seriebus a Te memoratis et provenientibus ab integratione formularum $\frac{x^{p-1}dx}{1 \pm x^q}$, quod sinus

*

arcus πz sit aequalis producto factorum

$$\pi z (1 - zz)(1 - \tfrac{1}{4} zz)(1 - \tfrac{1}{9} zz) \text{ etc.}$$

Miror Te istud petere, cum facile observare potueris, hanc demonstrationem eodem modo confici posse, quo Tu ostendisti cosinum arcus s, seu hanc seriem

$$1 - \frac{ss}{2} + \frac{s^4}{24} - \frac{s^6}{720} + \text{etc.}$$

vel hanc quantitatem

$$\tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n + \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n \text{ si } n = \infty,$$

esse productum horum factorum

$$\left(1 - \frac{4ss}{\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{4ss}{9\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{4ss}{25\pi\pi}\right) \text{ etc.}$$

Ecce quomodo hanc demonstrationem pro utroque, sinu et cosinu, investigaverim. Quoniam sinus arcus s est $=$
$\left(\left(1 + \frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n\right) : 2\sqrt{-1} = s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} - \text{etc.}$
unus factorum simplicium, qui sinum componunt, est s, prodeunte in quoto $1 - \frac{ss}{6} + \frac{s^4}{120} - \text{etc.}$ pro quolibet reliquorum ponatur $1 - \frac{s}{m}$, qui si fingatur $= 0$, erit $s = m$, et ipse sinus vel $\left(1 + \frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n = 0$, vel substituendo m pro s, erit $\left(1 + \frac{m\sqrt{-1}}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{m\sqrt{-1}}{n}\right)^n$ seu
$\left(1 + \frac{m\sqrt{-1}}{n}\right)^n : \left(1 - \frac{m\sqrt{-1}}{n}\right)^n$ et $\left(1 - \frac{m\sqrt{-1}}{n}\right)^n : \left(1 + \frac{m\sqrt{-1}}{n}\right)^n = 1$,
per consequens
$\left(1 + \frac{m\sqrt{-1}}{n}\right)^n : \left(1 - \frac{m\sqrt{-1}}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{m\sqrt{-1}}{n}\right)^n : \left(1 + \frac{m\sqrt{-1}}{n}\right)^n =$
$2 = 2\cos 2p\pi$, posito $p\pi$ pro multiplo quocunque semicircumferentiae, ergo per lemma in litteris meis prioribus communicatum:

$$\left(1+\frac{m\sqrt{-1}}{n}\right):\left(1-\frac{m\sqrt{-1}}{n}\right)+\left(1-\frac{m\sqrt{-1}}{n}\right):\left(1+\frac{m\sqrt{-1}}{n}\right)=$$
$$\left(2-\frac{2mm}{nn}\right):\left(1+\frac{mm}{nn}\right)=2\cos\frac{2p\pi}{n}=2\sqrt{\left(1-\sin^2\frac{2p\pi}{n}\right)}=$$

(ob n infinite magnum) $2\sqrt{\left(1-\frac{4pp\pi\pi}{nn}\right)}=2\left(1-\frac{2pp\pi\pi}{nn}-\text{etc.}\right)$, id est $\left(1-\frac{mm}{nn}\right):\left(1+\frac{mm}{nn}\right)=1-\frac{2pp\pi\pi}{nn}-\text{etc.}$ seu $1-\frac{mm}{nn}=1-\frac{2pp\pi\pi}{nn}+\frac{mm}{nn}-\text{etc.}$ seu $\frac{2pp\pi\pi}{nn}=\frac{2mm}{nn}-\text{etc.}$ seu neglectis terminis infinite minoribus $pp\pi\pi=mm$, h. e. $m=\pm p\pi$, quo valore substituto evadit factor quaesitus $1-\frac{s}{p\pi}$ vel $1+\frac{s}{p\pi}$, et ex his compositus $1-\frac{ss}{pp\pi\pi}$; scriptis igitur pro p omnibus numeris integris, sinus arcus s evadit compositus ex factoribus

$$s\left(1-\frac{ss}{\pi\pi}\right)\left(1-\frac{ss}{4\pi\pi}\right)\left(1-\frac{ss}{9\pi\pi}\right)\text{ etc.}$$

seu facto $s=\pi z$, sinus arcus πz est $=$

$$\pi z(1-zz)\left(1-\tfrac{1}{4}zz\right)\left(1-\tfrac{1}{9}zz\right)\text{ etc.}$$

Eodem modo si ponatur $1-\frac{s}{m}$ pro quolibet factorum simplicium quantitatis

$$\tfrac{1}{2}\left(1+\frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n+\tfrac{1}{2}\left(1-\frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n,$$

quae exprimit cosinum arcus s, invenitur $m=\pm\frac{1}{2}\pi$, vel $\pm\frac{3}{2}\pi$, vel $\pm\frac{5}{2}\pi$ etc. unde factor

$$1-\frac{s}{m}\text{ fit }=1-\frac{2s}{(2p-1)\pi}\text{ vel }=1+\frac{2s}{(2p-1)\pi},$$

et factor ex his duobus compositus $1-\frac{4ss}{(2p-1)^2\pi\pi}$, quo modo Tu ope theorematis Cotesiani invenisti, in quo si loco $2R-1$ ponas $2R$, ut $aa-2ab\cos A.\frac{2R}{n}\pi+bb$ sit divisor quantitatis

$$a^n-b^n=\left(1+\frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n-\left(1-\frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n$$

invenies pro factore generali seriei $1 - \frac{ss}{6} + \frac{s^4}{120} - $ etc. quantitatem $1 - \frac{ss}{RR\pi\pi}$. Mea demonstratio non opus habet theoremate Cotesiano, sed continet in se ipsam hujus theorematis demonstrationem. Inventis factoribus, qui sinum et cosinum arcus πz componunt, fore

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} - \frac{1}{2-z} + \frac{1}{2+z} + \frac{1}{3-z} - \frac{1}{3+z} - \frac{1}{4-z} + \text{etc. }$$ sic demonstro:

$$\frac{\sin \pi z}{\cos \pi z} = \frac{\pi z(1-zz)(1-\frac{1}{4}zz)(1-\frac{1}{9}zz)(1-\frac{1}{16}zz)\text{ etc.}}{(1-4zz)(1-\frac{4}{9}zz)(1-\frac{4}{25}zz)(1-\frac{4}{49}zz)\text{ etc.}}$$

$$\text{diff. log. }\frac{\sin \pi z}{\cos \pi z} = \frac{d.\sin \pi z}{\sin \pi z} - \frac{d.\cos \pi z}{\cos \pi z} = \frac{\pi dz \cos \pi z}{\sin \pi z} + \frac{\pi dz \sin \pi z}{\cos \pi z} =$$

$$\frac{\pi dz}{\sin \pi z . \cos \pi z} = \frac{2\pi dz}{\sin 2\pi z} = \text{d. log. } \frac{\pi z(1-zz)(1-\frac{1}{4}zz)(1-\frac{1}{9}zz)\text{ etc.}}{(1-4zz)(1-\frac{4}{9}zz)(1-\frac{4}{25}zz)\text{ etc.}}$$

ergo posito z loco $2z$ erit

$$\frac{\pi dz}{\sin \pi z} = \text{diff. log. } \frac{\frac{1}{2}\pi z(1-\frac{1}{4}zz)(1-\frac{1}{16}zz)(1-\frac{1}{36}zz)\text{ etc.}}{(1-zz)(1-\frac{1}{9}zz)(1-\frac{1}{25}zz)\text{ etc.}} =$$

$$dz\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} - \frac{1}{2-z} + \frac{1}{2+z} + \text{etc.}\right)$$

et dividendo per dz constat propositum.

Fateor me in ea fuisse opinione, Te generaliter summationem seriei $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + $ etc. etiam ubi n est numerus impar, in Te recepisse; sed vide, Vir Acutissime, annon juste in hanc opinionem fuerim deductus per haec Tua verba „Inventis hoc modo (nempe per primam differentiationem) summis serierum reciprocarum quadratorum, secunda differentiatio ad summas cuborum deducet, etc.“

Optima est methodus Tua inveniendi numeratores constantes A fractionum $\frac{A}{\alpha+\beta x}$, in quas fractio data $\frac{M}{N}$, cujus termini M et N sunt functiones quaecunque rationales quantitatis x, resolvi potest, posito denominatores binomiales $\alpha + \beta x$ esse divisores cognitos denominatoris N; quae breviter huc redit, ut fiat $A = \frac{\beta M dx}{dN}$, et divisis terminis per dx, pro x substituatur $\frac{-\alpha}{\beta}$. Observo eam extendi ad fractiones, quarum numeratores M sunt functiones irrationales ipsius x, et generaliorem esse ea, quam Moivraeus ex doctrina serierum recurrentium deduxit in Miscellaneis analyticis. Sed in hoc Tibi non assentior, quod existimes omnem quantitatem algebraicam, si non in factores simplices reales $\alpha + \beta x$, saltem in factores trinomiales $\alpha + \beta x + \gamma x x$, qui omnes sint reales, resolvi posse, et radices imaginarias aequationum semper ita comparatas esse, ut binae in se multiplicatae productum reale praebeant. Ex. gr. hujus quantitatis $x^4 - 4x^3 + 2xx + 4x + 4$ nulli dantur factores reales duarum dimensionum, nec aequationis

$$x^4 - 4x^3 + 2xx + 4x + 4 = 0$$

quatuor radices $x = 1 + \sqrt{(2 + \sqrt{-3})}$, $x = 1 - \sqrt{(2 + \sqrt{-3})}$, $x = 1 + \sqrt{(2 - \sqrt{-3})}$, $x = 1 - \sqrt{(2 - \sqrt{-3})}$ ita sunt comparatae, ut binae earum in se multiplicatae productum reale constituant.

Elegans est theorema, quod dividendo unitatem per productum $(1 - n)(1 - n^2)(1 - n^3)(1 - n^4)$ etc. oriatur series $1 + 1n + 2n^2 + 3n^3 + 5n^4 + 7n^5 + 11n^6 + 15n^7 + 22n^8 + 30n^9 + 42n^{10} + 56n^{11} +$ etc. in qua cujuslibet termini coëfficiens indicat, quot variis modis exponens ipsius n per additionem componi possit. Vix credo dari posse terminum generalem hujus seriei, at legem progressionis ostendi et terminos sequentes ex praecedentibus levi negotio conflari posse existimo; en pro hac re novam speciem trianguli arithmetici cujus talis est constructio:

1. I.
1. 1. II.
0. 1. 2. III.
0. 1. 1. 3. IV.
0. 0. 1. 1. 5. V.
0. 0. 1. 1. 2. 7. VI.
0. 0. 0. 1. 1. 2. 11. VII.
0. 0. 0. 1. 1. 1. 4. 15. VIII.
0. 0. 0. 0. 1. 1. 2. 4. 22. IX.
0. 0. 0. 0. 1. 1. 1. 2. 7. 30. X.
0. 0. 0. 0. 0. 1. 1. 1. 3. 8. 42. XI.
0. 0. 0. 0. 0. 1. 1. 1. 2. 4. 12. 56. XII.
0. 0. 0. 0. 0. 0. 1. 1. 1. 2. 5. 14. 77. XIII.
0. 0. 0. 0. 0. 0. 1. 1. 1. 1. 3. 6. 21. 101. XIV.

Quaelibet series horizontalis incipit ab unitate praefixis tot cyphris, quot unitates continentur in dimidio numeri, qui exponit quotum seriei unitate vel binario minutum; sic series horizontalis VII^{ma} incipit a 0. 0. 0. 1. Ex numeris cujuslibet seriei horizontalis formantur numeri illius seriei verticalis, cui imminet numerus romanus seriei horizontali adscriptus hoc modo: Summa totius seriei horizontalis dat primum terminum seriei verticalis, ex gr. summa seriei VII^{mae} 0. 0. 0. 1. 1. 2. 11 dat 15; eadem summa, demto ultimo termino seriei horizontalis, praebet secundum terminum seriei verticalis, ex gr. 15 — 11 = 4; ab hoc numero si dematur penultimus ejusdem seriei horizontalis, residuum erit tertius numerus seriei verticalis, ex. gr. 4 — 2 = 2; ab hoc si dematur antepenultimus seriei horizontalis, remanet quartus in serie verticali, ex. gr. 2 — 1 = 1, et ita porro; sed quam primum pervenitur ad unitatem, nihil amplius subtrahendum est, sed reliqui omnes loci vacui in serie verticali per unitatem sunt supplendi. Usus trianguli hic est: Primus terminus cujusque seriei verticalis ostendit quot modis per additionem componi possit numerus romanus eidem superscriptus; sic VIII 22 modis componi potest; idemque tanquam ultimus in serie IX horizontali ostendit quot modis numerus IX componi potest ita, ut maximus componentium semel tantum sumatur; penultimus in serie IX horizontali, nempe 4, ostendit quot modis numerus IX componi potest ita, ut maximus componentium bissumatur; antepenultimus in eadem serie, nempe 2, ostendit quot modis dictus numerus IX componi potest ita, ut maximus componentium ter sumatur, et ita deinceps. Ecce alium modum:

0.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.	XIII.
1.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
	1.	1.	1.	2.	2.	3.	3.	4.	4.	5.	5.	6.	6.
		2.	1.	1.	2.	3.	4.	5.	7.	8.	10.	12.	14.
			3.	1.	1.	2.	3.	5.	6.	9.	11.	15.	18.
				5.	1.	1.	2.	3.	5.	7.	10.	13.	18.
					7.	1.	1.	2.	3.	5.	7.	11.	14.
						11.	1.	1.	2.	3.	5.	7.	11.
							15.	1.	1.	2.	3.	5.	7.
								22.	1.	1.	2.	3.	5.
									30.	1.	1.	2.	3.
										42.	1.	1.	2.
											56.	1.	1.
												77.	1.
													101.

In isto triangulo numeri ita sunt formati: In prima serie horizontali sub numeris romanis scribitur 1. cum meris cyphris; sub his merae unitates; duo priores numeri secundae seriei horizontalis repetuntur in tertia, tres priores hujus repetuntur in quarta, quatuor priores quartae repetuntur in quinta et sic porro. Quilibet terminus alicujus seriei verticalis est aequalis summae aliquot terminorum alius seriei verticalis, quae anterior est tot locorum intervallo uno demto, quotus ipse terminus quaesitus est in sua serie, et idem quotus ostendit quot termini in serie anteriori addi debeant, si modo tot sumi possint, si non, integra series anterior accipienda est; sic sextus numerus seriei verticalis 0. 1. 6. 12. 15. 13. 11. 7 etc. hoc est $13 = 0 + 1 + 3 + 4 + 3 + 2$, quae series anterior est quinque locorum intervallo. Usus: Summa cujuslibet seriei verticalis ostendit quot modis per additionem componi potest numerus romanus eidem superscriptus; secundus terminus ejusdem seriei ostendit unicum modum, quo idem numerus ex unitatibus componitur; tertius ostendit quot modis idem componitur ita, ut maximus componentium sit 2; quartus, quot modis ita, ut maximus componentium sit 3; quintus, quot modis ita, ut maximus componentium sit 4; et sic porro. Sed haec Tibi jam nota esse nullus dubito, ut et quod series horizontales praebeant coëfficientes terminorum ortorum ex divisione unitatis per $(1-n)(1-nn)(1-n^3)$ etc.

In hac serie

$$n^0 - n^1 - n^2 + n^5 + n^7 - n^{12} - n^{15} + n^{22} + n^{26} - n^{35} - \text{etc.}$$

quam invenisti aequalem producto $(1-n)(1-nn)(1-n^3)$ etc. expanso, differentiae exponentium progrediuntur ita 1, 1, 3, 2, 5, 3, 7, 4, 9, 5, etc. qui numeri alternatim depromti sunt ex serie 1, 3, 5, 7, 9, etc. et ex serie 1, 2, 3, 4, 5, etc. quae proprietas fortassis ex natura rei nec solum per inductionem demonstrari poterit; sed in hanc rem inquirere nunc non vacat.

Valde mihi placet methodus inveniendi et summandi series per differentiationem et integrationem, eamque ulterius extendi posse existimo. Exemplum quod affers in fine litterarum Tuarum inverso ordine melius, ni fallor, demonstraturus fuisses, qua ratione demonstratio simul vice investigationis a priori fuisset. Si enim sit

$$s = 1 + \frac{a}{n+1} + \frac{aa}{2n+1} + \frac{a^3}{3n+1} + \text{etc.} = 1 + \frac{x^n}{n+1} + \frac{x^{2n}}{2n+1} + \frac{x^{3n}}{3n+1} + \text{etc.}$$ erit $$sx = x + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \text{etc.};$$

$$d.sx = (1 + x^n + x^{2n} + \text{etc.})\,dx;\ sx\,d.sx =$$

$$\left(x + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \text{etc.}\right)(1 + x^n + x^{2n} + \text{etc.})\,dx =$$

$$\left(x + x^{n+1}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + x^{2n+1}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right) + x^{3n+1}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3n+1}\right) + \text{etc.}\right)dx$$

et integrando

$$\tfrac{1}{2}ssxx = \tfrac{1}{2}xx + \frac{x^{n+2}}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{x^{2n+2}}{2n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right) + \frac{x^{3n+2}}{3n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3n+1}\right) + \text{etc.}$$

seu

$$\tfrac{1}{2}ss = \tfrac{1}{2} + \frac{x^n}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{x^{2n}}{2n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right) + \frac{x^{3n}}{3n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3n+1}\right) + \text{etc. Q. E. D.}$$

Multiplicando aequationem

$$\tfrac{1}{2}ssxx = \tfrac{1}{2}xx + \frac{x^{n+2}}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \text{etc.}$$

per $d.sx$ et dividendo ejus integralem per x^3, invenitur simili modo

$$\tfrac{1}{6}s^3 = \tfrac{1}{6} + \frac{x^n}{n+3}\left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\right) +$$
$$\frac{x^{2n}}{2n+3}\left(\left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{n+2}\right)\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right)\right) +$$
$$\frac{x^{3n}}{3n+3}\left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right) +\right.$$
$$\left.\frac{1}{3n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3n+1}\right)\right) + \text{etc.}$$

Et ita porro ad altiores potestates ascendi potest.

Reliqua Tua pulcherrima theoremata, quae abstrusioris sunt indaginis examinabo quando mihi plus otii suppetet. Interim vale et mihi fave. Dabam Basileae d. 24. Octbr. 1742.

LETTRE III.

SOMMAIRE. Signification des séries infinies. Décomposition des quantités algébriques en facteurs. Controverse entre Bouguer et Fontaine.

Celeberrimo viro LEONHARDO EULERO S. P. D.
NIC. BERNOULLI.

Ut mihi gratiam facias responsionis justae, quam debeo litteris Tuis humanissimis jam ante 4 menses ad me datis, est quod Te enixe oro. Ita enim variis districtus sum negotiis, ut parum operae dare possim profundis meditationibus aut laboriosissimis investigationibus, quales requirere videntur materiae ab acri Tuo ingenio proponi solitae. Bona igitur Tua cum venia paucissimis me nunc expediam.

Miror me Tibi non intelligi in re levicula, quae Tibi ignota non est; mihi enim persuadere non possum Te statuere, seriem divergentem, cui licet in infinitum continuatae semper aliquid deest, dare exacte valorem quantitatis in seriem resolutae. Quemadmodum ex. gr. $\frac{1}{1-x}$ non est $=$ $1+x+xx+x^3+\ldots+x^\infty$, sed $= 1+x+xx+x^3+\ldots$ $+x^\infty+\frac{x^{\infty+1}}{1-x}$, ita quoque sinus arcus elliptici s non est $=$ $s-\frac{s^3}{6c^4}+$ etc. sed $= s-\frac{s^3}{6c^4}+$ etc. $+$ vel $-$ functione aliqua infiniti gradus arcus s. Quamvis igitur iste sinus, ut in circulo, fortasse etiam sit $= s\left(1-\frac{ss}{\pi\pi}\right)\left(1-\frac{ss}{4\pi\pi}\right)$etc., non tamen series $s-\frac{s^3}{6c^4}+$ etc. eidem producto aequalis erit, in qua conclusione nos ambo convenimus.

Recte se habet methodus Tua inveniendi factores trinomiales quantitatis algebraicae ope angulorum, sed eadem, sicut omnes aliae methodi hic adhibendae, necessario requirit resolutionem aequationum altioris gradus, quae rarissime expedite conficitur. At erravi, quando in posterioribus meis litteris negavi, omnem quantitatem algebraicam, et in specie hanc $x^4-4x^3+2xx+4x+4$ in factores trinomiales reales resolvi posse. Erroris ansa haec fuit: Sciebam Cartesium docuisse modum resolvendi aequationem biquadraticam

$$x^4+px^3+qxx+rx+s=0$$

in duas quadraticas $xx+yx+t=0$ et $xx-yx+u=0$ ope aequationis cubicae vel aequationis sex dimensionum, in qua potestates impares coëfficientis y deficiunt, et porro sciebam unam ad minimum radicem hujus aequationis cubicae, quae est yy, esse realem, sed quia credebam, eam radicem posse esse negativam, concludebam y tunc fore quantitatem imaginariam; et in exemplo a me allegato aggregatum radicum $x=1+\sqrt{(2+\sqrt{-3})}$ et $x=1+\sqrt{(2-\sqrt{-3})}$, vel radicum $x=1-\sqrt{(2+\sqrt{-3})}$ et $x=1-\sqrt{(2-\sqrt{-3})}$ absque ulteriori examine quantitatem imaginariam esse putabam. Sed a Te monitus et re accuratius examinata, comperi aequationem praedictam cubicam semper habere unam radicem yy realem affirmativam, quin etiam ipsum modum addendi quantitates $1+\sqrt{(2+\sqrt{-3})}$ et $1+\sqrt{(2-\sqrt{-3})}$ detexi. Sententia igitur mutata nunc affirmo, assertum Tuum demonstrari posse, dummodo cencedatur (quod nemo negabit) omnem quantitatem imaginariam considerari posse instar functionis alicujus vel aggregati plurium functionum quantitatis vel quantitatum hanc formam habentium $b\pm\sqrt{-a}$, ubi b significiat quantitatem realem vel 0, et a quantitatem realem affirmativam; jam vero omnes potestates, radices, functiones binomii $b\pm\sqrt{-a}$, et aggregata plurium ejusmodi functionum, ad simile binomium $B\pm\sqrt{-A}$ reduci possunt, unde sequitur, in omni aequatione algebraica radices imaginarias habente, quaelibet paria radicum cognatarum hac forma exprimi posse $x-B-\sqrt{-A}=0$ et $x-B+\sqrt{-A}=0$, adeoque ipsam aequationem in factores trinomiales reales hujus formae $xx-2Bx+BB+A=0$ resolubilem esse. Ex. gr. si ponatur $\sqrt{(b\pm\sqrt{-a})}=B\pm\sqrt{-A}$, erit

$$b\pm\sqrt{-a}=BB-A\pm 2B\sqrt{-A};$$

quare si fiat $b=BB-A$ et $\sqrt{-a}=2B\sqrt{-A}$, seu $a=4ABB$, habebitur $BB=b+A$, et $a=4ABB=4bA+4AA$, hinc $A=\frac{-b+\sqrt{(bb+a)}}{2}$ et $BB=b+A=\frac{b+\sqrt{(bb+a)}}{2}$; posito igitur $b=2$, $a=3$, erit

$$A=\frac{-2+\sqrt{7}}{2},\ BB=\frac{2+\sqrt{7}}{2},\ \text{et } B=\frac{\sqrt{(2+\sqrt{7})}}{\sqrt{2}}.$$

Sic si ponatur $\sqrt[3]{(b\pm\sqrt{-a})}=B\pm\sqrt{-A}$, erit

$$b\pm\sqrt{-a}=B^3\pm 3BB\sqrt{-A}-3AB\mp A\sqrt{-A};$$

quare si fiat $b=B^3-3AB$, et $\sqrt{-a}=(3BB-A)\sqrt{-A}$,

$$\text{seu } a=9AB^4-6AABB+A^3,$$

habebitur per priorem aequationem $A=\frac{B^3-b}{3B}$, quo valore in posteriore substituto, erit $27\,a\,B^3 = 64\,B^9 - 48\,b\,B^6 - 15\,b\,b\,B^3 - b^3$, vel $27\,b\,b\,B^3 + 27\,a\,B^3 = 64\,B^9 - 48\,b\,B^6 + 12\,b\,b\,B^3 - b^3$, et extrahendo radicem cubicam $3\,B\,\sqrt[3]{(b\,b + a)} = 4\,B^3 - b$, quae aequatio cum sit cubica et imparium dimensionum, sequitur B, et per consequens etiam $A = \frac{B^3 - b}{3B}$ habere ad minimum unum valorem realem.

Jam a longo tempore non vidi Commentarios Acad. Reg. Gall.; hinc ignota mihi fuit controversia inter D. Bouguer et D. de la Fontaine agitata de inventione theorematis, quod mihi acceptum refers. Ego quidem hac in re nullius inventionis gloriam mihi tribuo, utpote qui proprietatem illam formularum differentialium, quae huic controversiae ansam dedit, non instar theorematis proposui, sed instar axiomatis supposui, quod ex sola notione differentialium, etiam sine inspectione figurae, cuivis manifestum esse putabam. Vid. Suppl. Act. Lips. Tom. VII. pag. 311 ibi: *nunc hoc idem* $d\,d\,y$ etc. et pag. 312 ibi: *unde aequatis his duobus valoribus ipsius* $d\,d\,x$ etc. Adhibita autem figura, haec proprietas statim in oculos incurrit. Si enim sit (Fig. 60) $AE = CF = dx$ et $BE = P\,dx$ posita y constante, et $CA = Q\,dy$ posita x constante, erit differentiale ipsius $P\,dx$ posita y variabili et x constante $= DF - BE = DB - FE = DB - CA =$ differentiali ipsius $Q\,dy$ posita x variabili et y constante. Quia super ista proprietate differentialium fundata est constructio trajectoriarum orthogonalium a me exhibita in Actis Lips. 1719 pag. 295 et seqq. communicabo hic Tecum ejusdem constructionis demonstrationem analyticam, quam olim concinatam nondum publici juris feci. Sint (Fig. 61) curvae secandae DEF, GHI, curva has ad angulos rectos secans HF, ipsarumque coordinatae communes AB, $AC = y$, BE vel BH, aut CF vel $CI = x$, sitque aequatio curvarum secandarum generalis $dx = p\,dy + q\,da$, ubi a significat parametrum variabilem, sive lineam, ex cujus mutatione mutatur curva secanda; p vero et q sunt quantitates datae per x, y, a et constantes. Sit porro ∂ nota differentialium quando a constans ponitur, et δ nota differentialium quando y constans ponitur. Quia curva HF secat curvas DEF, GHI ad angulos rectos, subtangens curvarum DEF, GHI eadem est ac subnormalis curvae secantis HF, id est, $\frac{x}{p} = \frac{-x\,dx}{dy}$, sive $dy = -p\,dx$, quae est aequatio generalis curvarum HF, in qua si pro dx substitutatur ejus valor $p\,dy + q\,da$ orietur

$$dy = -pp\,dy - pq\,da, \text{ vel } \frac{dy}{da} = -\frac{pq}{1+pp}.$$

Eadem aequatio etiam sic invenitur: Quia triangulum EFH est rectangulum, erit $HE^2 = EF^2 + HF^2$, sed
$HE^2 = \delta x^2 = qq\,da^2$, $EF^2 = \partial x^2 + dy^2 = pp\,dy^2 + dy^2$,
$HF^2 = dx^2 + dy^2 = pp\,dy^2 + 2pq\,dy\,da + qq\,da^2 + dy^2$,
hinc $qq\,da^2 = 2pp\,dy^2 + 2pq\,dy\,da + qq\,da^2 + 2dy^2$, subtrahendo $qq\,da^2$ et postea per $2dy$ dividendo, orietur

$$0 = dy + pp\,dy + pq\,da,$$

ut antea. Quia vero quantitas q in curvis secandis transcendentibus non data est, tentari debet ejus eliminatio per sequentem considerationem, in qua valor lineolae IF duplici modo invenitur. Nimirum $IF = HE + \partial HE = \delta x + \partial\delta x$, sed est quoque $IF = \delta CF = \delta BE + \delta\partial BE = \delta x + \delta\partial x$, hinc ablato utrinque δx, erit $\partial\delta x = \delta\partial x$, id est (quia $\delta x = q\,da$, et $\partial x = p\,dy$) $\partial q\,da = \delta p\,dy$, hinc $\partial q = \frac{\delta p\,dy}{da}$, cujus integrale haberi potest, saltem per quadraturas, si x non ingrediatur quantitatem δp; debet autem in integratione addi talis quantitas ex a et aliis constantibus composita, ut in casu $AB = y = 0$, HE sive $q\,da$ evadat $GD = \delta AD$; datur autem recta AD ob datam positionem curvarum secandarum in a et constantibus, quae si ponatur $= E$, erit in casu $y=0$, $q=\frac{dE}{da}$. Si modo inventa aequatio differentialis $\partial q=\frac{\delta p\, dy}{da}$ comparetur cum aequatione curvae HF supra inventa $\frac{dy}{da}=\frac{-pq}{1+pp}$, reperietur $\frac{-\partial q}{q}=\frac{p\delta p}{1+pp}$, quae aequatio inserviet ad inveniendam curvam LMN pro qualibet curva secanda GHI, ut abscindendo aream datae magnitudinis $ALMB$, ordinata MB producta secet curvam GHI in puncto aliquo H trajectoriae quaesitae HF. Sit ordinata curvae construendae $BM=z$ respondens abscissae $AB=y$. Appelletur area $ALMB=S$, sitque generaliter $dS=z\,dy+u\,da$, eritque ut supra $\partial\delta x=\delta\partial x$, ita hic $\partial\delta S=\delta\partial S$, id est $\partial u\,da=\delta z\,dy$; quia vero $\delta S=u\,da$, et in casu $y=0$ omnes areae $ALMB$ evanescunt, evanescet quoque δS, adeoque in casu $y=0$ erit $u=0$. Ponatur $z=\frac{1+pp}{pn}$, et area abscindenda $ALMB=C-A$, ubi C significet quantitatem constantem et A quantitatem inveniendam compositam ex a et constantibus, sitque $dA=bda$; et erit $dS=zdy+uda=dC-dA=-bda$, sive

$$\frac{dy}{da}=\frac{u+b}{-z}=\frac{-pq}{1+pp},$$

hinc $z=\frac{(u+b)(1+pp)}{pq}=\frac{1+pp}{pn}$, et $u+b=\frac{q}{n}$, et $\partial u=\frac{n\partial q-q\partial n}{nn}$; et quia in casu $y=0$ est $u=0$, erit in hoc casu $b=\frac{q}{n}=$ (si m ponatur $=n$ in casu $y=0$) $\frac{dE}{mda}$, et $bda=dA=\frac{dE}{m}$, Sed supra inventa est aequatio $\partial u\,da=\delta z\,dy$ sive

$$\frac{dy}{da}=\frac{\partial u}{\delta z}=\frac{-pq}{1+pp}=\frac{-q}{nz},$$

hinc $\frac{\delta z}{z} = \frac{-n\partial u}{q} = -\frac{\partial q}{q} + \frac{\partial n}{n} = \left(\text{quia } \frac{-\partial q}{q} = \frac{p\delta p}{1+pp}\right)$ $\frac{p\delta p}{1+pp} + \frac{\partial n}{n} = \left(\text{ob } z = \frac{1+pp}{pn}\right) \frac{2p\delta p}{1+pp} - \frac{\delta p}{p} - \frac{\delta n}{n}$, id est (quia $dn = \partial n + \delta n$) $\frac{dn}{n} = \frac{p\delta p}{1+pp} - \frac{\delta p}{p} = \delta \log. \frac{\sqrt{(1+pp)}}{p}$, quod est illud ipsum, quod praecipit constructio tradita in Actis Lips. loco citato. Sed hic filum scriptionis abrumpo, reliqua pulcherrima epistolae Tuae contenta examinaturus, cum otium, quo maxime indigeo, nactus fuero. Vale.

Dabam Basileae die 6. Aprilis 1743.

LETTRE IV.

SOMMAIRE. Considérations sur les sommes des séries divergentes. Racines imaginaires des équations. Résolution des quantités algébriques en diviseurs trinomiaux réels, et des équations de degrés supérieurs en équations quarrées. Théorème de calcul différentiel.

Viro Celeberrimo LEONH. EULERO S. P. D. NIC. BERNOULLI.

Patruelem meum et Cl. Wentzium rogavi, ut tarditatem responsionis meae ad postremam Tuam epistolam apud Te in suis litteris excusarent, quod factum, ut spero, benigne accipies. Ne autem omnino desim officio meo, responsionis loco pauca quaedam monebo. Ne disputatio nostra de summis serierum divergentium in logomachiam abeat, opus est, ut mentem meam Tibi clarius aperiam. Ideam summae seu aggregati plurium terminorum non posse copulari existimo cum idea terminorum sine fine progredientium, et has duas ideas contradictorias esse statuo; illa involvit conceptum terminorum omnium, primi, ultimi et mediorum, in ista autem non involvitur conceptus ultimi, sed mens a cogitatione ultimi, et per consequens etîam a collectione primi, mediorum et ultimi abstrahitur. Hinc distinctionem inter infinitum absolutum et infinitum determinatum non admitto, sed omne infinitum, quod calculum ingreditur, tanquam determinatum concipi debere contendo, et hinc quoque proprietates aequationum finitarum algebraicarum, quod ex. gr. coëfficens secundi termini negative sumtus sit aequalis summae omnium radicum, etc. non recte applicari existimo ad aequationes habentes terminos sine fine progredientes, quorum nullus ut ultimus consideratur, et in quibus aequationibus per consequens neque numerus neque summa radicum concipi potest. Seriei $1 - 3 + 5 - 7 +$ etc. summa exprimitur per ultimum terminum hujus seriei $1 - 2 + 3 - 4 +$ etc. et quando nullus concipi potest hujus seriei ultimus terminus, nulla etiam concipi poterit summa prioris seriei, aut si velis illa summa erit $= -\infty . - 1^{\infty}$, non autem $= 0$, a quo valore series $1 - 3 + 5 - 7 +$ etc. tanto magis recedit, quanto magis continuatur, quamvis illa formetur ex quantitate $\frac{1-1}{1+2+1} = 0$. Sic etiam series $1+2+4+8+16+$ etc. formata ex quantitate $\frac{1}{1-2} = -1$, revera non est $= -1$. At dicis ejusmodi summationes Te nunquam in errorem deduxisse, et memini quoque me ipsum ejusmodi summationibus usum fuisse in investiganda summa seriei $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} +$ etc. Jam vero hoc est id ipsum, quod innuere volebam in prima mea ad Te data epistola, cum dicebam posse aliquid contra meam methodum objici, quod explanatione opus habeat, quia multis absonum videbitur, seriem infinitam numerorum affirmativorum continue crescentium, aequalem poni numero negativo finito. Existimo igitur, respondendum esse, quod ejusmodi serierum divergentium fictitiae summationes in errorem non deducant tunc, quando per seriem divergentem intelligi debet quantitas aliqua in seriem resoluta, vel tunc, quando sine respectu ad quantitates, unde series divergentes oriuntur, plures ejusmodi series in calculo occurrunt, et residua infinita in summatione neglecta se invicem destruunt. Aliis vero in casibus ejusmodi summationes facile in errorem deducere possunt. Ex. gr. series recurrens

$$1+1+2+3+5+8+13+\text{etc.}$$

formatur ex quantitate $\frac{1}{1-1-1}=-1$, et series geometrica $1+2+4+8+16+$ etc. ex quantitate $\frac{1}{1-2}=-1$, non tamen hinc concludi debet ambas istas series esse aequales, cum singuli termini hujus, excepto primo, sint majores singulis terminis illius, differentia magis et magis crescente, quippe differentiae constituunt hanc seriem

$$0+1+2+5+11+24+\text{etc.}$$

ortam ex quantitate $\frac{1-1}{1-3+1+2}=0$. Sic quoque absurdum esset dicere, seriem recurrentem $1+3+8+19+43+$ etc. aequalem esse soli primo termino, totum aequale minimae parti, attamen illa formatur ex quantitate $\frac{1}{1-3+1+2}=1$.

Quicunque negare vult, radices imaginarias aequationum considerari posse tanquam functiones binomiorum hujusmodi $a+\sqrt{-b}$, eodem jure negare debet, aequationes imparium dimensionum semper habere ad minimum unam radicem realem, et numerum radicum imaginariarum semper esse parem; utraque enim assertio eodem recidit, et numerus radicum imaginariarum ideo par esse statuitur, quia in formationem illarum ingredi censetur latus quadratum quantitatis negativae.

Modus, quem affers resolvendi quantitates algebraicas in divisores trinomiales reales, non est perfectus, et errores aliqui irrepserunt in calculum Tuum. Sint ex. gr. aequationis $x^4+px^3+qxx+rx+s=0$ divisores $xx+\alpha x+\beta=0$ et $xx+\gamma x+\delta=0$. Pro aequatione, quae continet radices α et γ, debet poni $zz-pz+u=0$, et pro aequatione, cujus radices sunt β et δ, debet poni $zz-tz+s=0$, non autem $zz+pz+u=0$ et $zz+tz+s=0$, uti ex inadvertentia scripsisti. Deinde ex aequationibus $\alpha\gamma=u$, $\beta+\delta=t$, $p=\alpha+\gamma$, $q=\beta+\delta+\alpha\gamma=t+u$, $r=\alpha\delta+\beta\gamma$ et $s=\beta\delta$, invicem comparatis, resultat aequatio

$$rr-prt+pps+ttu-4su=0,$$

non vero haec $rr-prt+ppt+ttu-4su=0$, unde substituendo $q-t$ pro u habetur aequatio ista

$$t^3-qtt+(pr-4s)t-rr-pps+4qs=0,$$

loco Tuae

$$t^3-qtt-(pp-pr+4s)t-rr+4qs=0.$$

Quamvis igitur t et u habeant unum valorem realem, nondum tamen sequitur radices aequationum $zz-pz+u=0$ et $zz-tz+s=0$, nempe α, γ, β et δ esse reales, nisi demonstretur $\frac{1}{4}pp-u$ et $\frac{1}{4}tt-s$ esse quantitates affirmativas. Idem dicendum est de aequatione $z^3+Azz+Bz+C=0$, in qua licet quantitates A, B, C definiantur per aequationem imparis gradus, tamen adhuc demonstrandum est singulas radices z, quas ponis esse α, γ, ε, esse reales, ut aequatio aliqua sex dimensionum $x^6+px^5+qx^4+$ etc. $=0$ divisibilis sit per tres divisores reales $xx+\alpha x+\beta=0$, $xx+\gamma x+\delta=0$, et $xx+\varepsilon x+\zeta=0$. Melius igitur res conficitur per modum Cartesii tollendo secundum terminum aequationis resolvendae, et quaerendo ipsas quantitates α, γ, ε etc., non ipsarum summas vel producta. Sit ex. gr. aequatio $x^4+qxx+rx+s=0$

resolvenda in $xx+\alpha x+\beta=0$ et $xx-\alpha x+\delta=0$, invenitur

$$\beta=\frac{\alpha^3+q\alpha-r}{2\alpha},\ \delta=\frac{\alpha^3+q\alpha+r}{2\alpha},\ \beta\delta=s=\frac{\alpha^6+2q\alpha^4+qq\alpha\alpha-rr}{4\alpha\alpha}$$

seu $\alpha^6+2q\alpha^4+(qq-4s)\alpha\alpha-rr=0$. Jam vero hujus aequationis cubicae radices $\alpha\alpha$ vel omnes sunt reales, vel una tantum; si omnes sint reales, non possunt esse singulae negativae, quia ultimus aequationis terminus $-rr$ est quantitas negativa; sin una tantum radix sit realis, illa necessario erit affirmativa, quia aequationis quadratae, quae alteras duas radices imaginarias continet, ultimus terminus debet esse affirmativus. Dabitur ergo unus valor realis affirmativus ipsius $\alpha\alpha$, per consequens singulae quantitates α, β, δ habebunt valorem aliquem realem. Aequationum altioris gradus resolutiones in aequationes quadratas dependent omnes a resolutione aequationis

$$x^{2^n}+px^{2^n-1}+qx^{2^n-2}+\text{etc.}=0$$

in qua exponens altissimi termini est potestas aliqua numeri binarii. Nam si sit m numerus quicunque impar, et aequatio proposita

$$x^{m\cdot 2^n}+px^{m\cdot 2^n-1}+\text{etc.}=0,$$

haec semper pro divisore habebit aequationem

$$x^{2^n}+\alpha x^{2^n-1}+\text{etc.}=0,$$

in qua coëfficiens secundi termini α semper determinabitur per aequationem gradus imparis. Aequatio vero generalis

$$x^{2^n}+px^{2^n-1}+qx^{2^n-2}+\text{etc.}=0,$$

sublato secundo termino, ad dimidium numerum dimensionum reduci potest et resolvi in duas

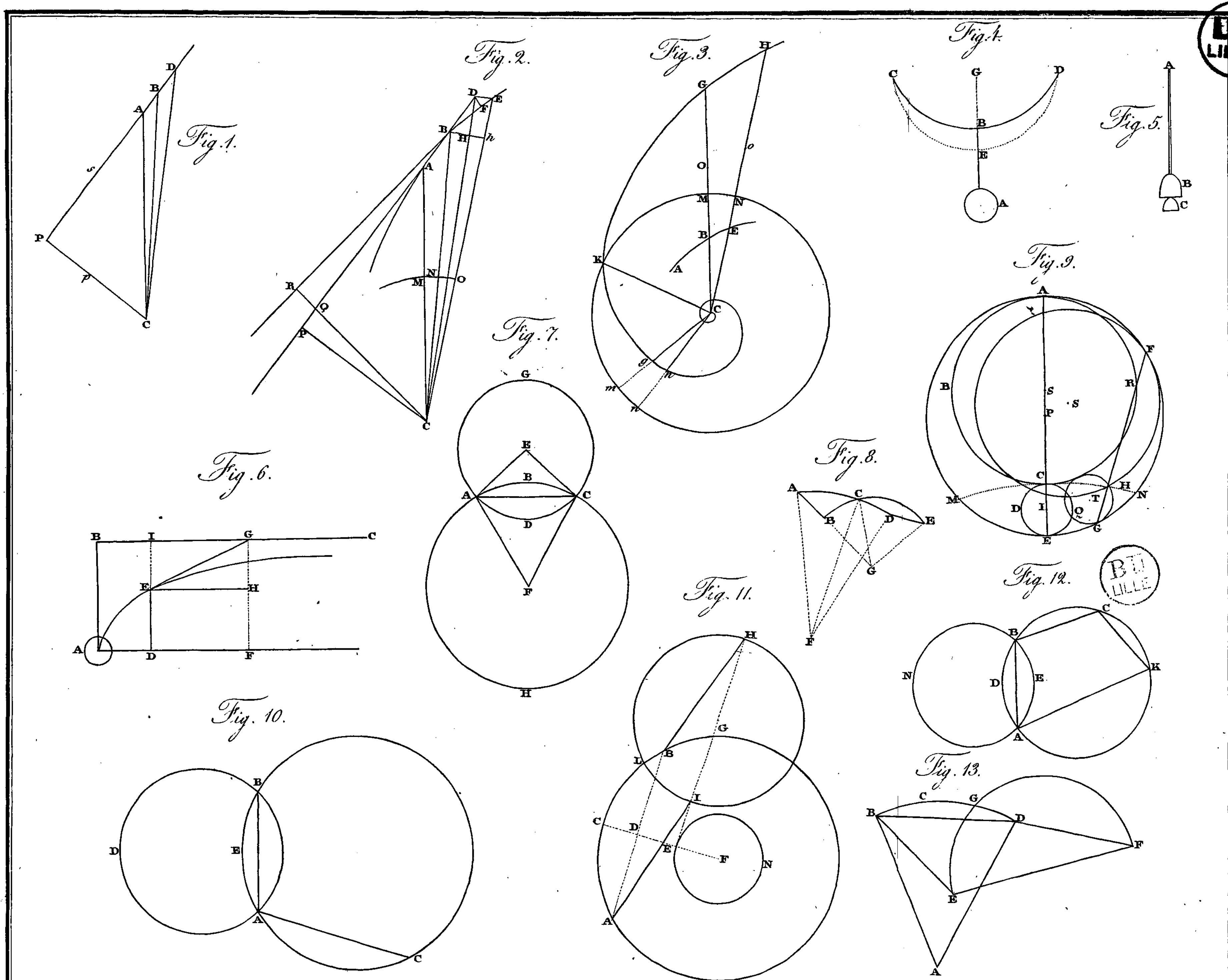
$$x^{2^{n-1}}+\alpha x^{2^{n-1}-1}+\text{etc.}=0 \text{ et } x^{2^{n-1}}-\alpha x^{2^{n-1}-1}+\text{etc.}=0,$$

ubi $\alpha\alpha$ semper determinabitur per aequationem imparis gradus;

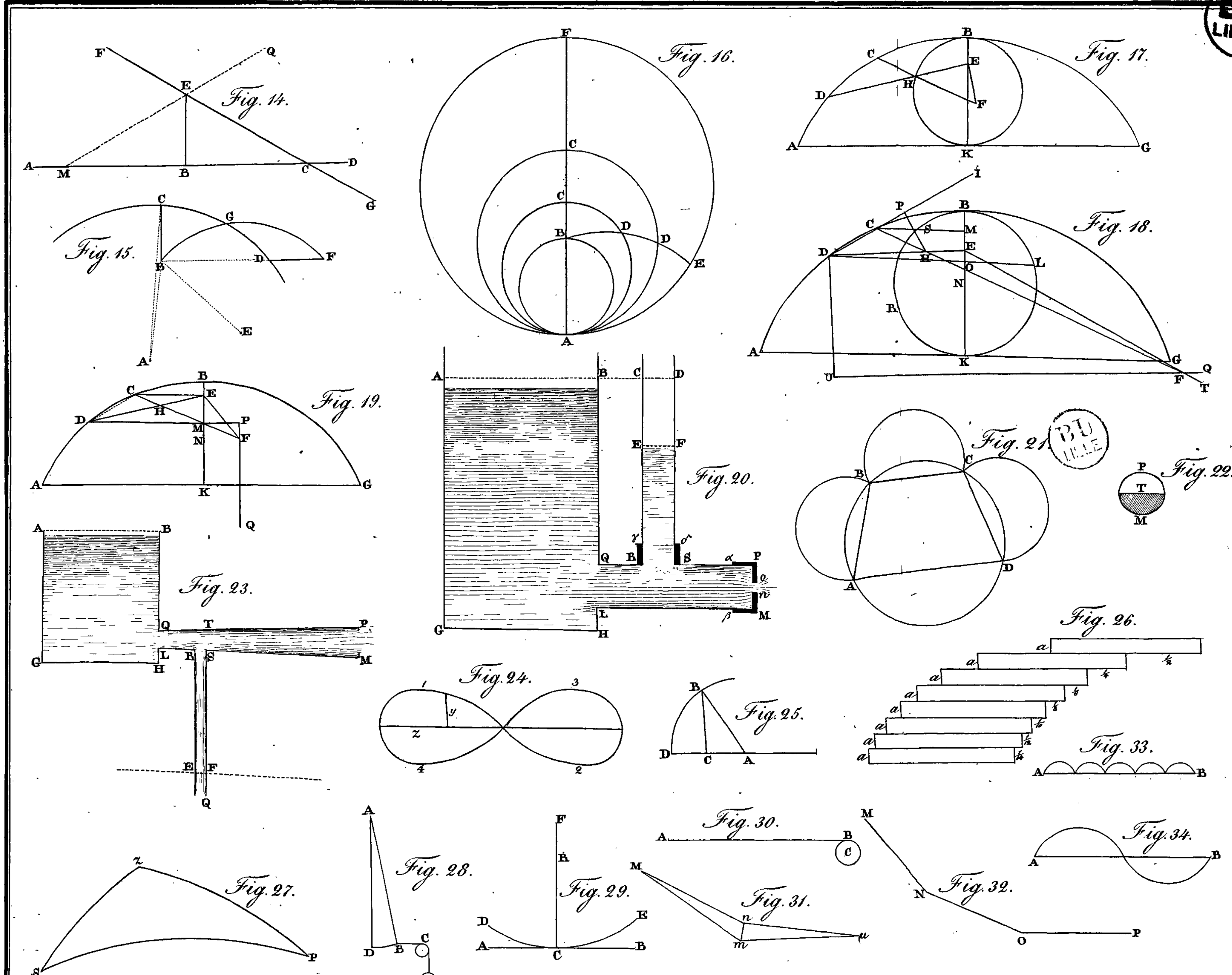
tota igitur difficultas demonstrationis, quod omnis aequatio algebraica resolvi possit in aequationes quadratas reales, eo reducitur, ut demonstretur quantitatem $\alpha\alpha$ semper esse affirmativam. Ita resolutio aequationis octo dimensionum in duas biquadraticas, et harum porro in aequationes quadratas, perfici poterit inventa radice aequationis 35 dimensionum, neque ad eam rem opus est aequatione $1.3.5.7 = 105^{ti}$ gradus. Sed quis quaeso mortalium resolvet ejusmodi aequationes? quare speculationem hanc magis curiosam quam utilem esse existimo.

Theorema illud, cujus inventionem mihi asseruisti, nempe de aequalitate differentialium ipsius Pdx et Qdy, potest quidem usum non exiguum habere in integrandis aequationibus differentialibus, sed ego non ausim hanc utilitatem eousque extendere, ut credam, omnem aequationem differentialem hujus formae $PRdx + QRdy = 0$ integrationem admittere, quoties facta differentiali ipsius $PRdx$ (ponendo x constantem) aequali differentiali ipsius $QRdy$ (ponendo y constantem), quantitas R determinari potest. Verum quidem est, si quantitas quaedam integralis finita pro differentiali habeat $PRdx + QRdy$, tunc fore $d.PRdx = d.QRdy$; sed dubito, an hujus propositionis conversa etiam sit vera. Caeterum facile perspicies hoc problema: Data aequatione differentiali $P\,dx + Q\,dy = 0$, invenire quantitatem R, ita ut $d.PRdx$ sumta x constante sit $= d.QRdy$ sumta y constante, — non differe ab hoc problemate: Data aequatione differentiali incompleta $dx = pdy$, invenire ejus completam $dx = pdy + qda$, quod a me solutum extat in Act. Lips. loco in praecedentibus meis litteris allegato. Vale et levia ista monita boni consule. Dabam Basileae d. 29 Novembris 1743.

DE L'IMPRIMERIE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.



Correspondance mathém. et phys. T. II. Pl. 1.



Correspondance mathém. et phys. T. II. Pl. 2.

Fig. 35.

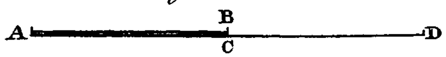


Fig. 36.

Fig. 37.

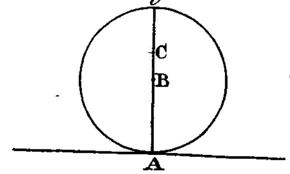


Fig. 38.

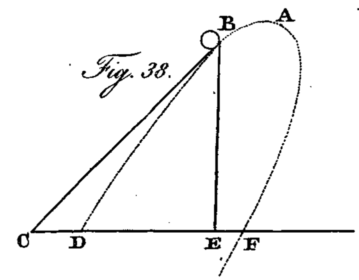


Fig. 39.

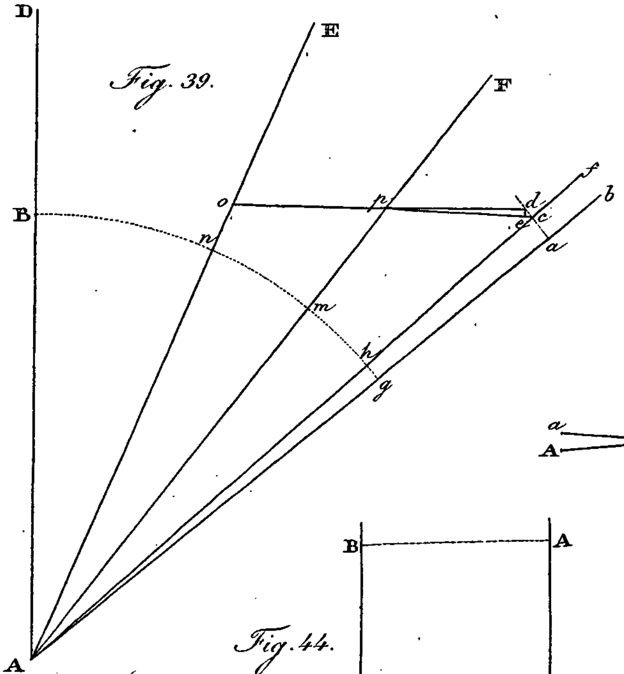


Fig. 40.

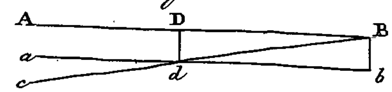


Fig. 43.

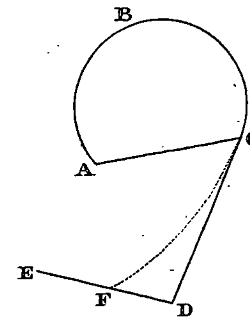


Fig. 41.

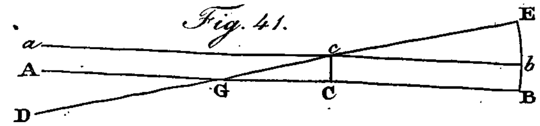


Fig. 42.

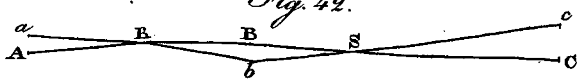


Fig. 44.

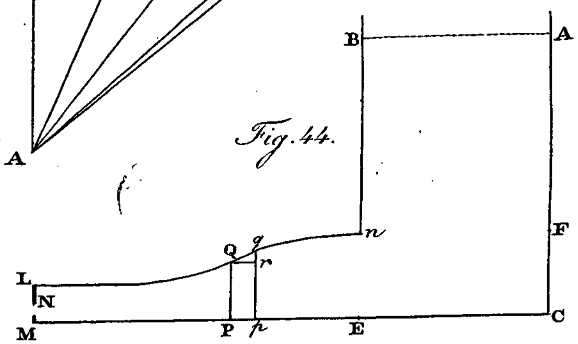


Fig. 45.

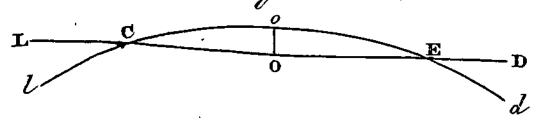


Fig. 46.

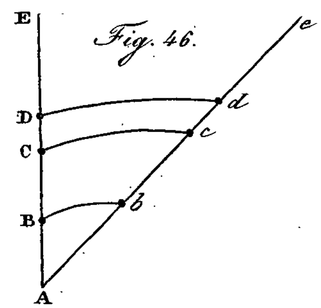


Fig. 47.

Fig. 51.

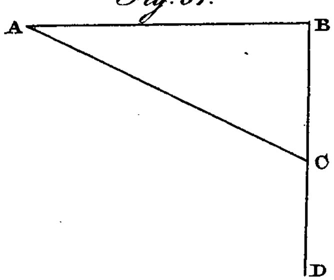


Fig. 48.

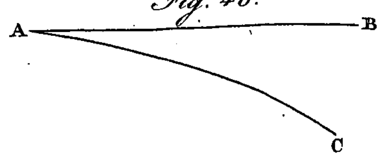


Fig. 49.

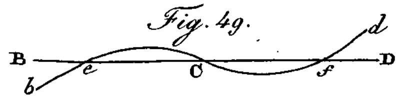


Fig. 50.

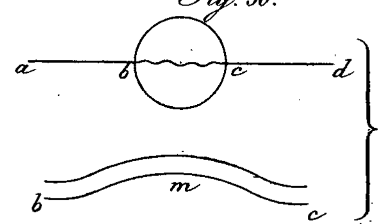
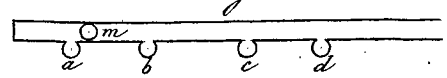


Fig. 52.



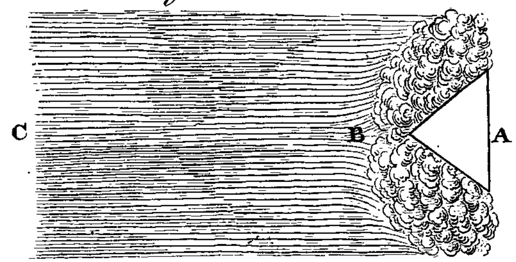


Fig. 53.

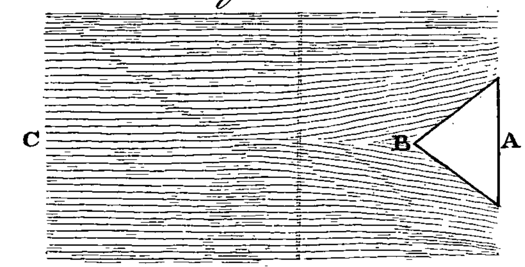


Fig. 54.

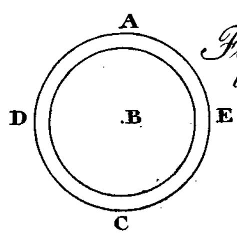


Fig. 58.

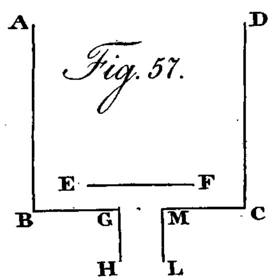


Fig. 57.

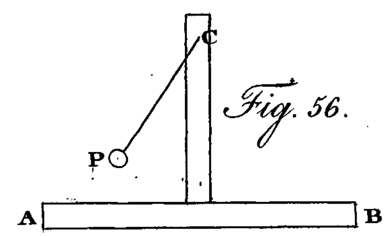


Fig. 56.

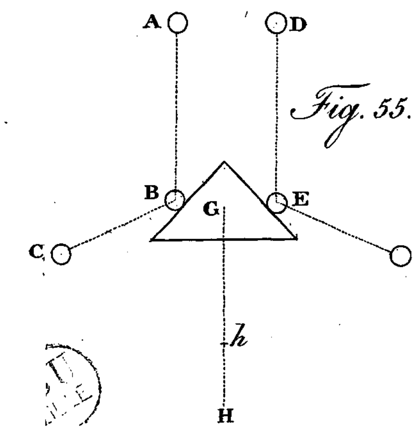


Fig. 55.

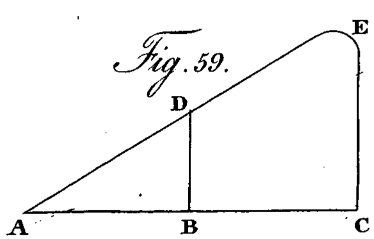


Fig. 59.

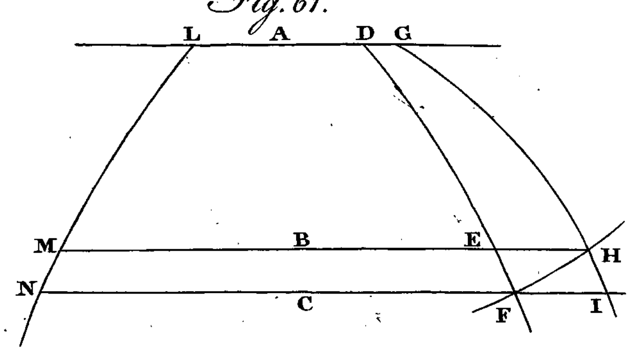


Fig. 61.

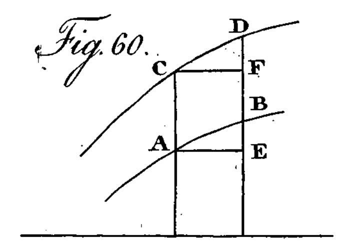


Fig. 60.