TRAITÉ

DE GÉOMÉTRIE

CORBEIL, typ. et stér. de CRÉTÉ.

ENSEIGNEMENT SPÉCIAL

ET PROFESSIONNEL

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE

COMPRENANT

LES APPLICATIONS AUX ARTS ET A L'INDUSTRIE

PAR

M. CH. ROGUET

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME ANNÉE

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

AVEC 281 FIGURES DANS LE TEXTE

PARIS

VICTOR MASSON ET FILS

PLACE DE L'ÉCOLE-DE-MÉDECINE

MDCCCLXIX

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

LIVRE PREMIER

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

1. On nomme *plan* ou *surface plane*, une surface telle que, si l'on fait passer une ligne droite par deux de ses points, cette ligne est contenue dans la surface.

2. *Trois points non situés en ligne droite déterminent un plan*; ce qui signifie :

1° *On peut faire passer un plan par trois points non situés en ligne droite;*

2° *On ne peut en faire passer qu'un seul.*

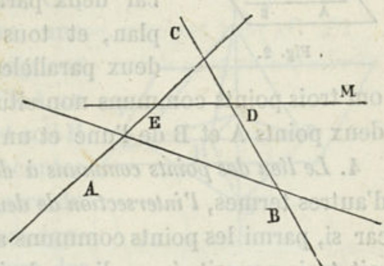

Fig. 1.

1° Soient A, B, C (fig. 1) trois points non situés en ligne droite. On peut toujours amener un plan dans une position telle qu'il contienne deux des trois points, A et B; et, par conséquent, la droite AB. S'il ne contient pas le point C, on pourra ensuite, en le faisant tourner autour de AB, parvenir à lui donner une position telle qu'il contienne le point C. *On peut donc toujours faire passer un plan par trois points non situés en ligne droite.*

2° Tout autre plan, qui passera aussi par les points A, B, C, se confondra avec le premier. Tirons les droites AB, AC, BC. Chacune d'elles est contenue dans tout plan passant par les trois points A, B, C. Soit M un point quelconque d'un deuxième plan passant aussi par A, B, C ; ce point appartiendra au premier plan, car on peut mener par le point M une droite qui rencontre deux des trois droites, AB, BC par exemple ; les points de rencontre D et E appartiennent aux deux plans ; la droite DE et, par suite, le point M qui est sur cette droite sont donc situés dans le second et dans le premier plan. Donc tout point du second plan appartient au premier, et par conséquent les deux plans se confondent en un seul.

3. Il résulte de ce qui précède :

1° *Une droite et un point non situé sur cette droite déterminent un plan.*

2° *Deux droites qui se coupent déterminent un plan ;* car l'une des droites et un point de l'autre droite, différent de leur point de rencontre, déterminent un plan.

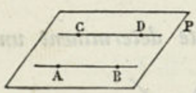

Fig. 2.

3° *Deux parallèles déterminent un plan ;* car deux parallèles sont dans un même plan, et tous les plans, qui contiennent deux parallèles données, AB, CD (fig. 2), ont trois points communs non situés en ligne droite ; savoir : deux points A et B de l'une et un point C de l'autre.

4. *Le lieu des points communs à deux plans qui se coupent*, en d'autres termes, *l'intersection de deux plans est une ligne droite ;* car si, parmi les points communs aux deux plans, il s'en trouvait trois non situés en ligne droite, les deux plans se confondraient en un seul.

APPLICATIONS.

5. L'ouvrier qui polit le bois, la pierre ou le métal, pour obtenir une surface plane, vérifie l'exactitude de son travail en appliquant successivement sur la surface une règle dans des directions différentes et en s'assurant à chaque fois s'il existe ou non des jours entre la règle et la surface.

6. On nomme *trace* d'une droite sur un plan, le point de rencontre de cette droite et du plan.

Trace d'un plan sur un autre plan, l'intersection des deux plans.

§ 1. — Droite et plan perpendiculaires.

THÉORÈME.

7. *Lorsqu'une droite est perpendiculaire à deux droites tracées par son pied dans un plan, elle est aussi perpendiculaire à une droite quelconque tracée par son pied dans le même plan* (fig. 3).

Par une droite donnée AB, faisons passer deux plans différents, et dans chacun d'eux élevons au point C de la droite AB une perpendiculaire sur cette droite. Dans le plan P, déterminé par ces perpendiculaires CE, CF, et par le point C tirons une droite quelconque CH. Joignons un point quelconque E de CE à un point quelconque F de CF, et soit H le point où la droite EF rencontre CH. Prenons de part et d'autre du point C sur AB des longueurs égales CD, CD′ et joignons chacun des points D, D′ aux trois points E, H, F.

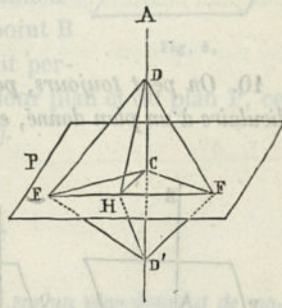

Fig. 3.

Les triangles DEF, D′EF sont égaux, comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun, car les obliques DE, D′E sont égales puisque leurs pieds D, D′ sont également éloignés du pied de la perpendiculaire CE ; il en est de même des obliques DF, D′F; et le côté EF est commun aux deux triangles. Par conséquent, si l'on replie le triangle D′EF autour de EF pour le rabattre sur le plan du triangle DEF, les deux triangles coïncideront après le rabattement. La droite D′H coïncidera, par suite, avec la droite DH. Les deux points C et H de la droite CH, étant également éloignés des points D et D′, la droite CH est perpendiculaire sur le milieu de DD′ ou sur AB.

Donc *la droite* AB *perpendiculaire aux deux droites* CE, CF *tracées par son pied* C *dans le plan* P, *est aussi perpendiculaire à une droite quelconque* CH *tracée par son pied dans le même plan.*

8. Corollaire. — On dit qu'*une droite est perpendiculaire à un plan, lorsqu'elle est perpendiculaire à toutes les droites tracées par son pied dans ce plan.* On voit donc qu'il suffit, pour remplir cette condition, que la droite soit perpendiculaire à deux droites tracées par son pied dans le plan.

9. Toute droite qui n'est pas perpendiculaire au plan qu'elle rencontre, est dite *oblique* à ce plan.

THÉORÈME.

10. *On peut toujours, par un point donné, mener une perpendiculaire à un plan donné, et on n'en peut mener qu'une seule.*

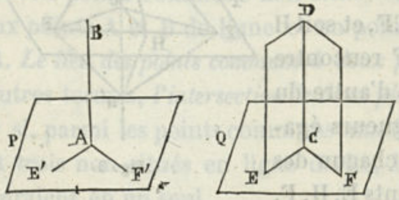

Fig. 4.

1° Supposons d'abord le point donné situé dans le plan, et soient P et A le plan et le point donnés (fig. 4). Par une droite quelconque CD, faisons passer deux plans différents et dans chacun d'eux menons par un même point C de CD, les perpendiculaires CE, CF sur celle-ci. La droite CD est perpendiculaire au plan Q des droites CE, CF (7). Or, si l'on fait coïncider le plan Q avec le plan P, de manière que le point C tombe en A, la droite CD prendra une direction AB perpendiculaire au plan P.

On ne peut, en outre, mener par le point A qu'une seule perpendiculaire au plan P, car si l'on en pouvait mener deux, AB, AC (fig. 5), le plan de ces deux droites couperait le plan P suivant une droite AD à laquelle seraient perpendiculaires les deux droites AB, AC, ce qui est impossible (29, Géom. plane).

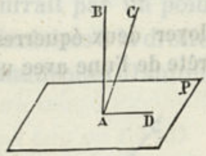

Fig. 5.

2° Supposons le point donné situé hors du plan et soient P et B le plan et le point donnés (fig. 4).

Après avoir construit un plan Q perpendiculaire à une droite CD, comme on vient de le faire, on fera glisser le plan Q sur le plan P, jusqu'à ce que CD passe par le point B, et la droite CD prendra une direction AB perpendiculaire au plan P.

On ne peut, en outre, mener par le point B qu'une seule perpendiculaire au plan P, car s'il pouvait exister deux perpendiculaires BA, BC (fig. 6), abaissées du point B sur le plan P, chacune d'elles serait perpendiculaire à l'intersection AC de leur plan et du plan P, ce qui est impossible (46, Géom. plane).

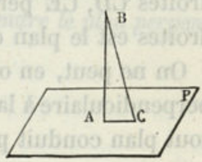

Fig. 6.

APPLICATION.

11. *Planter une tige perpendiculairement sur un plan donné et de manière qu'elle passe par un point donné. Équerre à trois branches.*

On se sert, pour résoudre cette question, d'un instrument appelé *équerre à trois branches*. Il est formé de trois règles assemblées de telle sorte que l'arête de l'une d'elles DC (fig. 7) soit perpendiculaire aux arêtes CE, CF des deux autres. On applique les deux dernières sur le plan, et on les fait glisser sur ce plan jusqu'à ce que l'arête de la première passe par le point donné. On place alors la tige le long de celle-ci. On peut, à défaut d'une équerre à trois branches, employer deux équerres ordinaires (fig. 8), en faisant coïncider une arête de l'une avec une arête de l'autre.

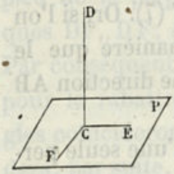

Fig. 7.

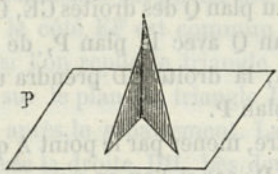

Fig. 8.

THÉORÈME.

12. *On peut toujours, par un point donné, mener un plan perpendiculaire à une droite donnée, et on n'en peut mener qu'un seul.*

1° Supposons d'abord le point placé sur la droite, et soient AB et C la droite et le point donnés (fig. 9). Faisons passer par la droite AB deux plans et menons dans ces plans les droites CD, CE perpendiculaires à AB. Le plan de ces deux droites est le plan demandé (7).

On ne peut, en outre, mener par le point C qu'un seul plan perpendiculaire à la droite AB ; car, s'il pouvait en exister deux, tout plan conduit par la droite AB couperait ces plans suivant deux droites perpendiculaires à AB au même point et dans un même plan, ce qui est impossible.

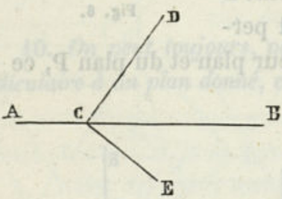

Fig. 9.

2° Supposons le point situé hors de la droite ; et soient AB et D la droite et le point donnés (fig. 9). Du point D abaissons une perpendiculaire DC sur AB, et par le point C menons dans un plan quelconque, autre que le plan qui contient D et AB, une perpendiculaire CE sur AB. Le plan des droites CD, CE est le plan demandé.

On ne peut en outre mener par le point D qu'un seul plan perpendiculaire à la droite AB ; en effet un second plan ne pourrait pas rencontrer AB en C (1°), ni en un point quelconque F différent de C ; car les deux droites DC, DF seraient des perpendiculaires abaissées d'un même point sur la droite AB.

13. Corollaire I. — *Les perpendiculaires à une droite, menées par un même point de celle-ci dans les différents plans qui passent par la droite, sont toutes situées dans un même plan perpendiculaire à la droite;* car, s'il en était autrement, on pourrait par un point d'une droite mener plusieurs plans perpendiculaires à la droite.

14. Corollaire II. — Si l'on fait tourner une droite CD autour d'un point M d'une droite AB (fig. 10), de manière qu'elle reste toujours perpendiculaire à AB, toutes les positions de la droite mobile CD seront dans le plan mené par le point M perpendiculairement à AB, et tout point de ce plan appartiendra à l'une des positions de la droite mobile. On dit, pour cette raison, que *la droite* CD, *dans son mouvement autour du point* M, *engendre le plan perpendiculaire à* AB *mené par ce point.*

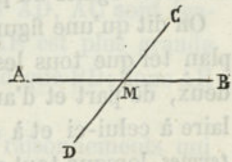

Fig. 10.

THÉORÈME.

15. *Le plan mené perpendiculairement à une droite par son milieu est le lieu géométrique des points également distants des extrémités de la droite* (fig. 11).

Soient la droite AB, et P le plan perpendiculaire sur le milieu O de AB : 1° si M est un point du plan, les distances MA, MB sont égales, puisque le point M appartient à la perpendiculaire OM élevée sur le milieu de AB dans le plan AMB.

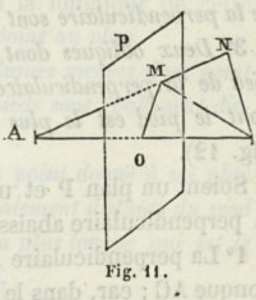

Fig. 11.

2° Si N est un point situé hors du plan P, les distances NA, NB sont inégales : en effet, soit M le point où NA rencontre le plan P ; le point N est situé hors de la perpendiculaire OM élevée sur le milieu de AB dans le plan ANB.

16. Scolie I. — On peut énoncer d'une manière plus courte le théorème, en disant : *Le lieu géométrique des points également distants de deux points donnés est le plan perpendiculairement élevé sur le milieu de la droite qui unit ces deux points.*

17. Scolie II. — On dit que deux points sont *symétriques* par rapport à un plan, lorsqu'ils sont situés, de part et d'autre du plan, sur une même perpendiculaire à celui-ci et à des distances égales du plan.

On dit qu'une figure a un *plan de symétrie* lorsqu'il existe un plan tel que tous les points de la figure sont situés deux à deux, de part et d'autre du plan, sur une même perpendiculaire à celui-ci et à des distances égales du plan ; *en d'autres termes*, lorsque tout point de la figure a, par rapport à ce plan, son symétrique parmi les autres points de la figure.

Le plan P (fig. 11) est un plan de symétrie de la droite AB.

THÉORÈME.

18. *Lorsque d'un point pris hors d'un plan, on mène à ce plan la perpendiculaire et différentes obliques :*

1° *La perpendiculaire est plus courte que toute oblique ;*

2° *Deux obliques dont les pieds sont également distants du pied de la perpendiculaire sont égales ;*

3° *Deux obliques dont les pieds sont inégalement distants du pied de la perpendiculaire sont inégales ; la plus longue est celle dont le pied est le plus éloigné de celui de la perpendiculaire* (fig. 12).

Soient un plan P et un point A pris hors de ce plan, AB la perpendiculaire abaissée du point A sur le plan.

1° La perpendiculaire AB est moindre qu'une oblique quelconque AC ; car, dans le plan ABC, la perpendiculaire AB sur BC est moindre que l'oblique AC.

2° Supposons BD=BC ; les obliques AD, AC sont égales, car elles sont les hypoténuses de deux triangles rectangles ABD, ABC, égaux comme ayant un angle égal (l'angle droit), compris entre deux côtés égaux.

3° Soit BE>BC ; l'oblique AE est plus grande que l'oblique AC : en effet, prenons sur BE une longueur BD=BC et tirons AD. Les obliques AD, AC sont égales (2°). Or, dans le plan ABE, l'oblique AE est plus grande que l'oblique AD, puisque BE est plus grand que BD ; donc AE est plus grand que AC.

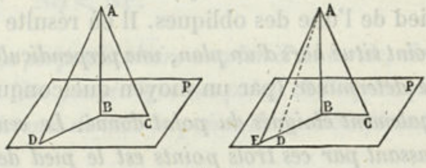

Fig. 12.

19. Corollaire. — Il résulte aussi des raisonnements qui précèdent que :

1° *Toutes les obliques dont les pieds sont également distants du pied de la perpendiculaire font avec celle-ci des angles égaux ;*

2° *Les angles formés avec la perpendiculaire par deux obliques dont les pieds sont inégalement distants du pied de la perpendiculaire sont inégaux ; et le plus grand est formé par l'oblique dont le pied est le plus éloigné.*

20. Scolie. — La perpendiculaire, abaissée d'un point donné sur un plan donné, est la ligne la plus courte qu'on puisse mener de ce point au plan. On donne à la longueur de cette perpendiculaire le nom de *distance du point au plan.*

21. Réciproques. — 1° *Lorsque des obliques menées d'un point donné à un plan donné sont égales, leurs pieds sont également distants du pied de la perpendiculaire.*

2° *Lorsque deux obliques menées d'un point donné à un plan donné sont inégales, leurs pieds sont inégalement distants du pied de la perpendiculaire, et c'est le pied de la plus longue qui est le plus éloigné du pied de la perpendiculaire.*

On appliquera ici le raisonnement (53, Géom. plane).

22. Corollaire. — Les obliques égales, menées d'un point

donné à un plan donné, rencontrent le plan en des points situés sur la circonférence dont le centre est le pied de la perpendiculaire, et le rayon la distance de ce dernier point au pied de l'une des obliques. Il en résulte que, *pour abaisser d'un point situé hors d'un plan, une perpendiculaire sur ce plan, il suffit de déterminer* (par un moyen quelconque) *trois points du plan également éloignés du point donné. Le centre de la circonférence passant par ces trois points est le pied de la perpendiculaire demandée.*

THÉORÈME.

23. *Si l'on élève sur le plan d'un cercle la perpendiculaire, par son centre : 1° Chaque point de la perpendiculaire est également distant de tous les points de la circonférence; 2° tout point non situé sur la perpendiculaire est inégalement distant des différents points de la circonférence* (fig. 13).

1° Soit AB la perpendiculaire au plan du cercle O, menée par le centre; tout point M de la droite AB est également distant des différents points de la circonférence, car les distances telles que MC, MD, ME du point M aux points C, D, E de la circonférence sont des obliques égales, les pieds de ces obliques étant à des distances du pied de la perpendiculaire égales au rayon de la circonférence O.

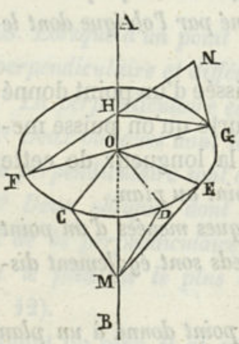

Fig. 13.

2° Soit un point N, non situé sur la perpendiculaire AB. Faisons passer un plan par le point N et la perpendiculaire AB ; et soit le diamètre FG, l'intersection de ce plan et du plan du cercle. Tirons les droites NF, NG, l'une d'elles rencontrera la droite AB, et si l'on joint le point de rencontre H au point G, on aura :

$$NG < NH + HG;$$

et, comme HG = HF, puisque le point H appartient à la droite AB, on trouve :

$$NG < NF.$$

24. Corollaire. — *La perpendiculaire au plan d'un cercle, élevée par son centre, est le lieu géométrique des points de l'espace qui sont chacun également distants de tous les points de la circonférence de ce cercle.*

THÉORÈME.

25. *Si du pied d'une perpendiculaire à un plan on abaisse la perpendiculaire sur une droite quelconque tracée dans ce plan, et qu'on joigne le pied de cette seconde perpendiculaire à un point quelconque de la première, la droite qui unit ces deux points est perpendiculaire à la droite tracée dans le plan* (fig. 14).

Soient P le plan donné, AB une perpendiculaire au plan P et CD une droite tracée dans ce plan. Du pied B de la perpendiculaire AB abaissons la perpendiculaire BE sur CD et joignons un point quelconque A de AB au point E ; AE doit être perpendiculaire sur CD ; car, si l'on prend sur CD, de part et d'autre du point E, des longueurs égales EC, ED, et qu'on tire les droites BC, BD, AC, AD, les

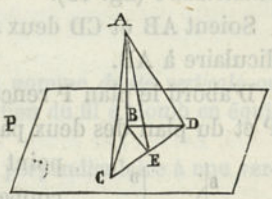

Fig. 14.

obliques BC, BD sont égales (47, Géom. plane), et de l'égalité des droites BC, BD résulte l'égalité des obliques AC, AD (18). La droite AE, passant par deux points E et A également distants des points C et D, est donc perpendiculaire sur le milieu de la droite CD.

26. Scolie. — On donne quelquefois à ce théorème le nom de *Théorème des trois perpendiculaires.*

27. Corollaire. — La droite CD est perpendiculaire au plan AEB (7).

§ 2. — Droites et plans parallèles.

THÉORÈME.

28. *Par un point donné on ne peut mener dans l'espace qu'une seule parallèle à une droite donnée.*

En effet, les parallèles à une droite AB menées par un point C non situé sur la droite, sont chacune dans un même plan avec AB. Or, tous ces plans se confondent en un seul (2); et par un point on ne peut mener qu'une seule parallèle à une droite donnée, dans le plan déterminé par le point et la droite.

THÉORÈME.

29. *Deux droites parallèles ont leurs plans perpendiculaires communs*, ce qui veut dire : *Si deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une rencontre l'autre droite et lui est perpendiculaire* (fig. 15).

Soient AB et CD deux droites parallèles, P un plan perpendiculaire à AB.

D'abord le plan P rencontre CD, car l'intersection du plan P et du plan des deux parallèles est une droite passant par le point A, et qui, coupant AB, doit aussi couper CD (69, Géom. plane). Le plan P rencontre donc CD.

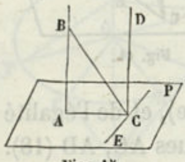

Fig. 15.

Par le point C de rencontre de CD et du plan P, menons, dans celui-ci, la droite EC perpendiculaire à l'intersection AC des deux plans, et joignons le point C à un point quelconque B de AB. La droite EC est perpendiculaire à CB (25) et, par suite, au plan ACB qui est celui des deux parallèles. La droite CD est donc perpendiculaire à EC, et, comme elle est aussi perpendiculaire à AC (69, Géom. plane), CD est perpendiculaire au plan P.

THÉORÈME.

30. *Deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles.*

Soient AB et CD deux droites perpendiculaires au plan P (fig. 16). La parallèle à AB, menée par le point C, doit se confondre avec CD, car elle doit être perpendiculaire au plan P.

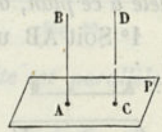

Fig. 16.

31. Corollaire. — *Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.* — Soient AB et CD deux droites parallèles à une troisième EF (fig. 17). Menons un plan P perpendiculaire à la droite EF; ce plan sera aussi perpendiculaire à chacune des droites AB et CD (29). Par conséquent les droites AB et CD, étant perpendiculaires à un même plan, sont parallèles.

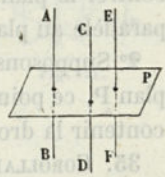

Fig. 17.

DÉFINITIONS.

32. Verticale. Plan horizontal. — On nomme *droite verticale* ou *verticale*, toute droite parallèle à la direction du fil à plomb en équilibre.

On nomme *plan horizontal* tout plan perpendiculaire à une verticale.

On nomme *droite horizontale* ou *horizontale*, toute droite située dans un plan horizontal.

§ 3. — Droite et plan parallèles.

DÉFINITION.

33. Une droite et un plan sont dits *parallèles*, lorsqu'ils ne se rencontrent pas, si loin qu'on les prolonge.

THÉORÈME.

34. *Toute droite, parallèle à une droite d'un plan, est parallèle à ce plan, ou située dans ce plan.*

1° Soit AB une droite parallèle à une droite CD située dans le plan P (fig. 18), et supposons qu'un point A de AB soit situé hors du plan. Concevons un plan mené par le point A et la droite CD. Ce plan contiendra la droite AB et coupera le plan P suivant CD. AB ne pourra donc rencontrer le plan P qu'en un point de CD, et, par suite, sera parallèle au plan P.

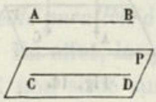

Fig. 18.

2° Supposons en second lieu qu'un point de AB soit dans le plan P, ce point et la droite CD déterminent un plan qui doit contenir la droite AB, or ce plan est le plan P lui-même.

35. Corollaire. — Pour mener par un point donné un plan parallèle à deux droites données, il suffit de mener par le point une parallèle à chacune des droites données ; le plan des deux dernières droites est le plan demandé.

THÉORÈME.

36. *Lorsqu'une droite est parallèle à un plan, tout plan mené par la droite coupe le premier suivant une parallèle à cette droite.*

Soient AB et P une droite et un plan parallèles (fig. 19). L'intersection CD du plan P et d'un plan mené par AB est parallèle à AB ; car ces deux droites sont dans un même plan, et elles ne peuvent pas se rencontrer sans que AB rencontre le plan P.

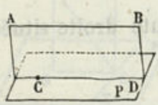

Fig. 19.

THÉORÈME.

37. *Lorsqu'une droite et un plan sont parallèles, toute parallèle à la droite menée par un point du plan est située dans ce plan.*

En effet soient AB et P une droite et un plan parallèles ; C un point du plan (fig. 20). L'intersection CD du plan P et d'un plan déterminé par AB et le point C est la droite parallèle à AB menée par le point C.

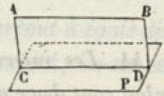

Fig. 20.

38. Corollaire. — *L'intersection de deux plans respectivement parallèles à une même droite est parallèle à cette droite.* — Soient P et Q deux plans respectivement parallèles à la droite CD et qui se coupent suivant la droite AB (fig. 21) ; si d'un point de AB on mène une parallèle à CD, elle sera située dans chacun des deux plans ; par conséquent elle se confondra avec leur intersection.

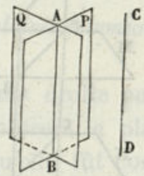

Fig. 21.

§ 4. — Plans parallèles.

DÉFINITION.

39. — On dit que *deux plans sont parallèles*, lorsqu'ils ne peuvent pas se rencontrer, si loin qu'on les prolonge.

THÉORÈME.

40. *Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles.* — Soient deux plans M et N (fig. 22) perpendiculaires à la droite AB aux points C et D. Ces deux plans ne peuvent pas se rencontrer, car, s'il en était autrement, on pourrait, en joignant un point quelconque G de leur intersection EF aux points C et D, abaisser deux perpendiculaires d'un point sur une droite.

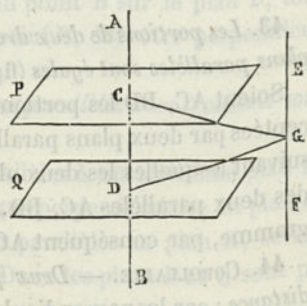

Fig. 22.

THÉORÈME.

41. *Les intersections de deux plans parallèles par un troisième plan sont deux droites parallèles.*

Soient M et N deux plans parallèles, P un troisième plan qui coupe les deux premiers suivant les droites AB, CD (fig. 23). Celles-ci sont situées dans un même plan P, en outre elles ne peuvent pas se rencontrer sans que les plans M et N se rencontrent; donc les droites AB et CD sont parallèles.

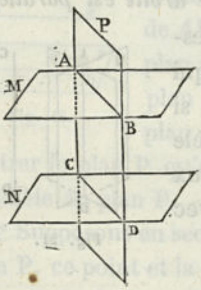

Fig. 23.

42. Corollaire. — *Lorsque deux plans sont parallèles, toute droite menée par un point de l'un d'eux parallèlement à l'autre plan est contenue dans le premier.*

Soient M et N deux plans parallèles, et AB une droite menée par un point A du plan M parallèlement au plan N; si l'on fait passer par AB un plan qui coupe le plan N, AB sera parallèle à l'intersection CD des deux plans. Or l'intersection du plan M et du plan mené par AB doit aussi être parallèle à CD et passer par le point A, donc elle se confond avec AB.

THÉORÈME.

43. *Les portions de deux droites parallèles interceptées par deux plans parallèles sont égales* (fig. 23).

Soient AC, BD les portions de deux droites parallèles interceptées par deux plans parallèles M et N; et AB, CD les droites suivant lesquelles les deux plans M et N sont coupés par le plan des deux parallèles AC, BD. La figure ABDC est un parallélogramme, par conséquent AC = BD.

44. Corollaire. — *Deux plans parallèles sont partout à égale distance;* car les perpendiculaires abaissées de deux points quel-

conques de l'un des plans sur l'autre sont parallèles, et elles sont égales d'après le théorème précédent.

45. Réciproquement. — *Si deux plans sont partout à égale distance, ils sont parallèles ;* car, s'ils se rencontraient, ils ne seraient pas partout à égale distance.

THÉORÈME.

46. *Deux plans parallèles ont leurs perpendiculaires communes* (fig. 24).

Soient P et Q deux plans parallèles, AB une droite perpendiculaire au plan P. La droite AB rencontrera le plan Q; car, pour lui être parallèle, il faudrait qu'elle fût contenue dans le plan P (42). En outre, elle sera perpendiculaire au plan Q. En effet, soient B le point de rencontre du plan Q et de AB, et BC une droite quelconque menée par le point B dans le plan Q ; si par AB et BC on fait passer un plan, AB sera perpendiculaire à l'intersection AD de ce plan et du plan P, et par conséquent à BC qui est parallèle à AD. La droite AB est donc perpendiculaire à une droite quelconque menée par son pied dans le plan Q, et par conséquent elle est perpendiculaire à ce plan.

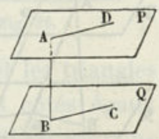

Fig. 24.

47. Corollaire I. — *Par un point donné* B *on ne peut mener qu'un seul plan* Q *parallèle à un plan donné* P (fig. 24). Car, soit BA la perpendiculaire abaissée du point B sur le plan P, tout plan parallèle à P, mené par le point B, doit être perpendiculaire à BA.

48. Corollaire II. — *Deux plans parallèles à un troisième sont parallèles entre eux* (fig. 25).

Soient P et Q deux plans parallèles à un troisième plan R. Si l'on mène une droite quelconque perpendiculaire au plan R, les plans P et Q, étant tous deux parallèles au plan R, seront perpendiculaires à cette droite. Donc les plans P et Q sont parallèles entre eux.

APPLICATIONS.

49. *a.* Pour moudre le blé on se sert de deux meules qu'on place l'une au-dessus de l'autre de manière que les faces planes extérieures se trouvent perpendiculaires à l'axe de rotation de la meule supérieure. Ces faces planes restent parallèles pendant le mouvement, puisqu'elles sont constamment perpendiculaires à l'axe.

b. Les faces des plafonds des différents étages d'une maison sont des plans parallèles.

THÉORÈME.

50. *Les portions de deux droites coupées par trois plans parallèles sont proportionnelles* (fig. 25).

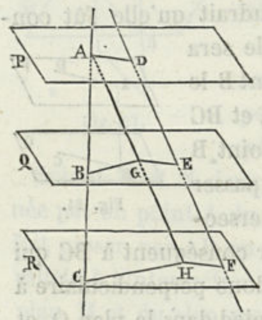

Fig. 25.

Soient AC et DF deux droites coupées par les trois plans parallèles P, Q, R aux points A, B, C et D, E, F. Menons par le point A, parallèlement à DF, la droite AH qui rencontre les plans Q et R aux points G et H. Le plan des droites AC, AH coupe les plans Q et R suivant les droites parallèles BG, CH, par suite

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AG}{GH};$$

et, comme AG = DE, et GH = EF,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}; \text{ ou } \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}.$$

51. Corollaire. — Si plusieurs plans parallèles, en nombre quelconque, coupent deux ou plusieurs droites, les portions de ces droites interceptées par les plans sont proportionnelles.

THÉORÈME.

52. *Si deux angles, non situés dans le même plan, ont leurs côtés*

parallèles, ces deux angles sont égaux ou supplémentaires, et leurs plans sont parallèles (fig. 26).

1° Soient BAC, B′A′C′ deux angles situés respectivement dans les plans M et N, et ayant leurs côtés AB, A′B′ et AC, A′C′ parallèles et dirigés chacun à chacun dans le même sens. Prenons sur AB et A′B′ des longueurs égales, AB = A′B′, et aussi sur AC et A′C′ des longueurs égales, AC = A′C′. Tirons les droites BC, B′C′, AA′, BB′, CC′. Le quadrilatère ABB′A est un parallélogramme, car les droites AB, A′B′ sont parallèles et égales. Donc BB′ est parallèle et égale à AA′. Pour la même raison CC′ est parallèle et égale à AA′; et le quadrilatère CBB′C′, dont deux côtés opposés BB′, CC′ sont parallèles et égaux, est un parallélogramme. BC est donc égal à B′C′, et les triangles ABC, A′B′C′ sont égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun. L'angle BAC opposé au côté BC est par conséquent égal à l'angle B′A′C′ opposé au côté égal B′C′.

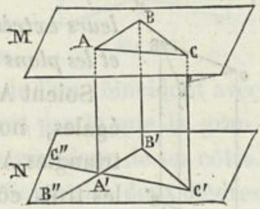

Fig. 26.

2° Si l'on prolonge les côtés A′B′, A′C′ suivant A′B″, A′C″, on forme un angle B″A′C″ égal à B′A′C′, et par conséquent à BAC dont les côtés sont parallèles et de sens contraires à ceux de l'angle B″A′C″.

Donc *deux angles ayant leurs côtés parallèles sont égaux, si les côtés parallèles sont dirigés à la fois dans le même sens ou en sens contraires.*

3° Considérons les angles BAC, B′A′C″ dont les côtés AB, A′B′ sont parallèles et dirigés dans le même sens, tandis que les côtés AC, A′C″ sont parallèles et de sens contraires. L'angle B′A′C″ est supplémentaire de l'angle B′A′C′ et par conséquent de l'angle égal BAC.

Donc *deux angles ayant leurs côtés parallèles sont supplémentaires, si les côtés ne sont pas dirigés à la fois dans le même sens ni en sens contraires.*

4° Les plans M et N des angles BAC, B′A′C′ sont parallèles, car le plan mené par le point A parallèlement au plan N coupe les plans AA′B′B, AA′C′C suivant des droites parallèles à A′B′ et A′C′; et par conséquent suivant AB et AC.

THÉORÈME.

53. *Si trois droites, non situées dans un même plan, sont parallèles et égales, les triangles formés en joignant deux à deux leurs extrémités situées d'un même côté sont égaux, et les plans de ces triangles sont parallèles* (fig. 27).

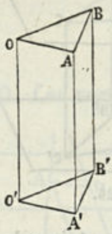
Fig. 27.

Soient AA′, BB′, CC′ trois droites parallèles et égales, non situées dans un même plan. Les triangles ABC, A′B′C′ sont égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun, car les quadrilatères AA′B′B, AA′C′C, BB′C′C sont des parallélogrammes.

Les côtés de ces triangles étant en même temps parallèles, les plans des triangles sont parallèles.

54. Corollaire. — *Si trois points, non situés en ligne droite, sont placés d'un même côté d'un plan, à des distances égales de ce plan, les trois points déterminent un plan parallèle au premier.*

§ 3. — Plans qui se coupent.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

55. 1° On nomme *angle de deux plans*, ou *angle dièdre* ou *dièdre*, la figure formée par deux plans M et N qui se coupent et sont terminés à leur intersection commune AB (fig. 28). L'intersection AB des deux plans se nomme *arête du dièdre*, et les deux plans M et N sont dits les *faces* ou *côtés du dièdre*.

2° On désigne un angle dièdre par les deux lettres de l'arête ; ainsi la figure 28 représente le dièdre AB.

On désigne aussi un dièdre par quatre lettres dont deux représentent, chacune, un point de l'un des plans non situé sur l'arête, et les deux autres l'arête, en plaçant celles-ci entre les deux premières; ainsi CABD désigne aussi le dièdre représenté par la figure 28. On emploie cette dernière désignation, lorsque plusieurs dièdres ont la même arête.

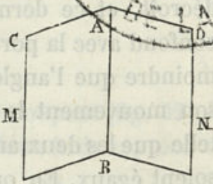

Fig. 28.

56. On dit que deux dièdres sont égaux, lorsqu'on peut placer ces deux dièdres de manière que les deux faces de l'un coïncident avec les deux faces de l'autre dièdre. On voit par là que la grandeur d'un dièdre ne dépend pas de la grandeur de ses côtés.

57. *Somme de deux angles dièdres.* — Soient les deux dièdres C′A′B′D′, CABD (fig. 29). Si l'on transporte le dièdre C′A′B′D′ pour le placer de manière que les arêtes A′B′, AB coïncident, qu'on fasse ensuite tourner celui-ci autour de AB pour amener la face C′A′B′ à se confondre avec DAB en plaçant les faces CAB, D′A′B′ de part et d'autre du plan DAB; la face D′A′B′ devenant D″AB; le dièdre CABD″ est la *somme* des dièdres CABD, C′A′B′D′.

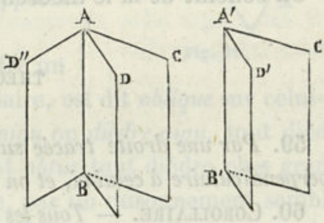

Fig. 29.

On voit par là qu'on peut former un dièdre double, triple, etc., d'un autre; qu'ainsi les dièdres sont des grandeurs comparables entre elles.

58. *Plan perpendiculaire.* — *Angles droits.* — Concevons qu'un plan MN (fig. 30) soit coupé suivant la droite AB par un plan P terminé à cette droite, et qu'on fasse tourner le plan P autour de AB dans le sens indiqué par la flèche. Si d'abord le plan P est confondu avec la portion ABN

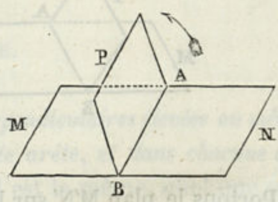

Fig. 30.

de MN, le dièdre est nul. Si le plan P tourne ensuite autour de AB, le dièdre PABN croît, et en même temps le dièdre PABM décroît, et ce dernier devient enfin nul lorsque le plan P se confond avec la portion ABM de MN. L'angle PABN, d'abord moindre que l'angle PABM, devient ensuite plus grand. Dans son mouvement le plan P doit donc prendre une position telle que les deux angles formés par le plan P avec le plan MN soient égaux. En outre, cette position est unique, car pendant le mouvement du plan P, l'un des angles croît, tandis que l'autre décroît.

Lorsque le plan P fait des angles égaux avec le plan MN, on dit qu'il est *perpendiculaire* à ce plan, et les angles égaux sont appelés *angles dièdres droits*.

On conclut de là le théorème suivant :

THÉORÈME.

59. *Par une droite tracée sur un plan, on peut mener un plan perpendiculaire à celui-ci, et on ne peut en mener qu'un seul.*

60. Corollaire. — *Tous les dièdres droits sont égaux* (fig. 31).

Supposons, par la droite AB du plan MN, le plan P élevé perpendiculairement sur le plan MN, et, par la droite A'B' du plan M'N', le plan P' élevé perpendiculairement sur le plan M'N'.

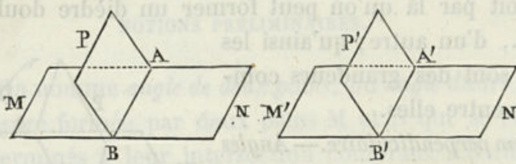

Fig. 31.

Portons le plan M'N' sur le plan MN de manière que le plan P' tombe du même côté du plan MN que le plan P, et faisons glisser M'N' sur MN jusqu'à ce que A'B' coïncide avec AB. Alors le plan P' coïncidera avec le plan P (59). Par conséquent les angles P'A'B'M' et PABM coïncideront, ainsi que les angles P'A'B'N' et PABN.

DÉFINITIONS.

61. 1° Lorsque deux plans MM', NN' se coupent (fig. 32), ils forment quatre angles qui, considérés deux à deux, sont ou *adjacents* ou *opposés par l'arête*. Les angles tels que NABM, NABM', qui ont une face commune NAB, sont deux *angles adjacents;* et les angles tels que NABM, N'ABM', dont l'un a pour faces les prolongements des faces de l'autre, sont deux angles *opposés par l'arête*.

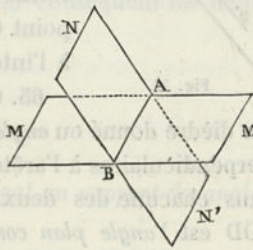

Fig. 32.

2° Tout plan qui en rencontre un autre sans lui être perpendiculaire, est dit *oblique* sur celui-ci.

3° On nomme *angle dièdre aigu* ou *dièdre aigu*, tout dièdre moindre qu'un dièdre droit, et *obtus* tout dièdre plus grand.

62. Scolie. — On démontre, par un raisonnement semblable à celui qu'on a fait sur les angles de deux droites, que *deux dièdres adjacents forment une somme égale à deux dièdres droits;* que *deux dièdres opposés par l'arête sont égaux;* que *la somme de plusieurs dièdres consécutifs situés d'un même côté d'un plan est égale à deux dièdres droits*.

THÉORÈME.

63. *L'angle plan formé par les perpendiculaires élevées au même point de l'arête d'un dièdre, sur cette arête, et dans chacune des faces, est constant* (c'est-à-dire qu'il est le même, quel que soit le point de l'arête) (fig. 33).

Soient O et O' deux points de l'arête du dièdre AB dont les faces sont les plans P et Q; OC, O'C' deux perpendiculaires élevées sur l'arête dans le plan P, et OD, O'D' deux perpendiculaires élevées par les mêmes points sur l'arête dans le plan Q.

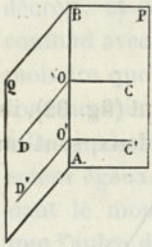

Fig. 33.

Les deux angles COD, C'O'D' sont égaux, car ils ont les côtés parallèles chacun à chacun et dirigés dans le même sens.

64. Scolie. — Chacun des angles plans COD ou C'O'D' peut être regardé comme formé par les traces d'un plan mené par le point O ou le point O' perpendiculairement à l'intersection commune ou arête AB.

65. On nomme *angle plan correspondant* à un dièdre donné ou *angle plan* du dièdre, l'angle formé par les perpendiculaires à l'arête élevées par un point de cette arête dans chacune des deux faces du dièdre. Ainsi l'angle plan COD est l'*angle plan correspondant* au dièdre AB, ou l'*angle plan* du dièdre AB.

THÉORÈME.

66. *Deux dièdres égaux ont des angles plans égaux, et réciproquement* (fig. 34).

Soient AB, A'B' deux dièdres égaux ; CAD, C'A'D' les angles plans correspondants. Transportons le dièdre A'B' et plaçons-le de manière que les droites A'B', AB coïncident, le point A' étant en A. Faisons ensuite tourner le dièdre A'B' autour de AB jusqu'à ce que la face C'A'B' coïncide avec la face CAB. Comme les dièdres sont égaux, la face D'A'B' coïncidera avec la face DAB. Alors les droites C'A', CA coïncideront, ainsi que les droites D'A', DA, puisque l'on ne peut élever qu'une seule perpendiculaire à une droite dans un plan par un point de cette droite. Les angles C'A'D', CAD coïncideront donc aussi.

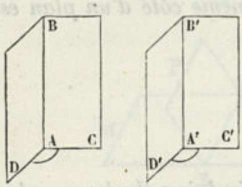

Fig. 34.

Réciproquement, si les angles plans CAD, C'A'D' (fig. 34) sont égaux, les dièdres correspondants AB, A′B′ sont égaux. En effet, le plan des droites CA, AD étant perpendiculaire à l'arête AB et le plan des droites C′A′, A′D′ étant perpendiculaire à l'arête A′B′, si l'on fait coïncider les deux angles égaux C′A′D′, CAD, de manière que les droites AB, A′B′ se trouvent placées du même côté du plan CAD, ces deux droites se confondront en une seule ; par suite, le plan C′A′B′ coïncidera avec le plan CAB et le plan D′A′B′ avec le plan DAB. Par conséquent les deux dièdres A′B′, AB coïncideront.

THÉORÈME.

67. *Le rapport de deux dièdres est égal au rapport des angles plans correspondants* (fig. 35).

Soient les deux dièdres AB, A′B′ ; et CAD, C′A′D′ les angles plans correspondants. Supposons que le rapport des angles plans CAD, C′A′D′ soit égal à $\frac{2}{3}$. Il s'ensuit qu'ils ont une commune mesure contenue deux fois dans l'angle CAD et trois fois dans l'angle C′A′D′ ; par conséquent, si l'on divise le premier de ces angles en deux parties égales, CAE, EAD, et le second en trois parties égales, C′A′E′, E′A′F′, F′A′D′, ces cinq divisions seront égales. Or, si l'on fait passer un plan par les droites AB et AE, le dièdre AB sera divisé en deux dièdres égaux CABE, EABD (66) ; et si l'on fait ensuite passer un plan par les droites A′B′, A′E′, et un plan par les droites A′B′, A′F′, le dièdre A′B′ sera divisé en trois dièdres égaux C′A′B′E′, E′A′B′F′, F′A′B′D′ ; en outre ceux-ci seront égaux aux deux divisions du dièdre AB ; par conséquent les dièdres AB, A′B′ ont une commune mesure contenue deux fois dans AB et trois fois

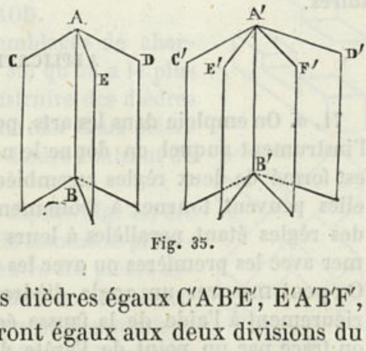

Fig. 35.

dans A'B'; le rapport des dièdres AB, A'B' est donc égal à $\frac{2}{3}$ et, par suite, au rapport des deux angles plans CAB, C'A'B'.

68. Si le rapport des angles plans CAD, C'A'D' n'était pas commensurable, on ferait le raisonnement déjà employé (156, Géom. plane).

69. Corollaire. — *Lorsque deux plans parallèles sont coupés par un troisième, ces plans forment des angles qui jouissent des mêmes propriétés que les angles formés par deux droites parallèles et une droite qui les rencontre* (fig. 36).

Menons par le point B de l'intersection AB des plans M et P, un plan Q perpendiculaire à AB, il sera perpendiculaire à CD. EF, IG, KH étant les intersections des trois plans avec le plan Q, les angles formés par ces droites sont les angles plans des dièdres formés par les trois plans, et, comme IG est parallèle à KH, les angles formés par IG, KH et EF sont ceux de deux droites parallèles avec une troisième droite qui les coupe.

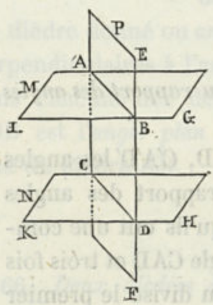

Fig. 36.

70. Corollaire. — *Deux dièdres qui ont leurs faces parallèles chacune à chacune sont égaux ou supplémentaires.*

APPLICATIONS.

71. *a.* On emploie dans les arts, pour mesurer les angles dièdres, l'instrument auquel on donne le nom de *fausse équerre* (fig. 37). Il est formé de deux règles assemblées sur un pivot autour duquel elles peuvent tourner à frottement doux. Les arêtes intérieures des règles étant parallèles à leurs arêtes extérieures, on peut former avec les premières ou avec les dernières un angle quelconque. On peut mesurer un angle dièdre soit extérieurement, soit intérieurement à l'aide de la fausse équerre. Si c'est extérieurement, on trace par un point de l'arête des faces planes du dièdre, une perpendiculaire dans chacune de ces faces. On applique ensuite l'arête de l'un des bords intérieurs de la fausse équerre sur l'une

de ces perpendiculaires et on fait arriver l'arête de l'autre bord intérieur sur la seconde perpendiculaire. On porte la fausse équerre sans déplacer ses bords sur une surface plane, ou sur une feuille de papier étendue sur un plan ; et on trace avec un crayon ou un tire-ligne le long de ses bords deux droites qui font entre elles un angle égal à l'angle plan du dièdre. On détermine enfin au moyen du rapporteur la mesure de ce dernier angle.

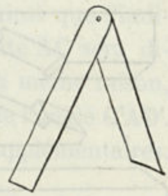

Fig. 37.

Si c'est intérieurement qu'on a à mesurer le dièdre, on trace aussi par un point de l'arête une perpendiculaire à cette arête dans chacune des deux faces, et on applique les arêtes des deux bords extérieurs de la fausse équerre sur ces deux perpendiculaires ; on reporte ensuite, sur une surface plane ou une feuille de papier étendue sur un plan, l'angle accusé par la fausse équerre pour le mesurer à l'aide du rapporteur.

b. On se sert, pour mesurer les angles dièdres des cristaux, d'un instrument appelé *goniomètre* (fig. 38), il représente une fausse équerre dont les deux branches sont prolongées au delà du pivot et à l'une des branches de laquelle est fixé un rapporteur. Si l'on place les deux arêtes OA, OB sur les deux perpendiculaires tracées sur les faces du dièdre, l'angle A'O'B', égal à l'angle AOB, comprend entre ses côtés OA', OB' l'arc du rapporteur qui est la mesure de l'angle AOB.

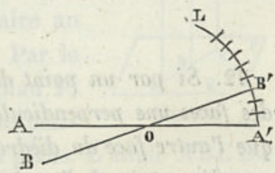

Fig. 38.

c. C'est surtout dans les assemblages de charpente et de menuiserie (fig. 39) qu'on a le plus fréquemment occasion de construire des dièdres égaux. Le dièdre saillant d'une des deux pièces à assembler doit être égal au dièdre rentrant de l'autre.

d. L'assemblage à *trait de Jupiter* (fig. 40) est un assemblage à simple entaille comme le précédent ; seulement on ménage entre les pièces assemblées une ouverture, destinée à recevoir un coin introduit de force pour donner à l'assemblage plus de solidité et pouvoir le détruire à volonté.

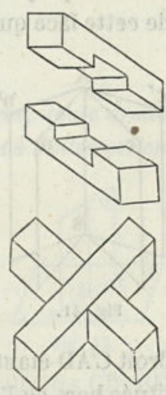

Fig. 39.

e. L'art du gaînier a pour objet principalement de construire des surfaces creuses qui s'adaptent exactement sur des surfaces égales en relief, et, par suite, fréquemment de construire des angles dièdres.

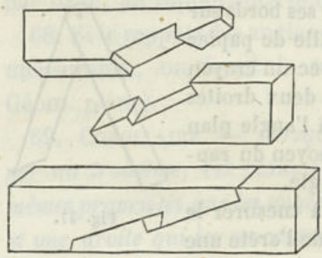

Fig. 40.

f. On retrouve dans la plupart des constructions l'angle dièdre droit. Ainsi les faces de deux murs contigus, la surface du plancher ou du plafond et celle d'un mur sont perpendiculaires. Il en est de même des parois internes de certaines boîtes : deux faces latérales, ou encore une face latérale et l'un des fonds sont perpendiculaires.

THÉORÈME.

72. *Si par un point de l'arête d'un dièdre on mène à chacune des faces une perpendiculaire dirigée du même côté de cette face que l'autre face du dièdre, l'angle des deux perpendiculaires est supplémentaire de l'angle plan correspondant du dièdre* (fig. 41).

Soient le dièdre AB, CAD l'angle plan correspondant; AD′ une perpendiculaire à la face CAB, dirigée du même côté de cette face que la face DAB ; et AC′ une perpendiculaire à la face DAB, dirigée du même côté de cette face que la face CAB. Les quatre droites AC′, AC, AD, AD′ sont dans le plan mené par le point A, perpendiculairement à l'arête AB. En outre les angles CAD, C′AD′ ont leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun; ils sont donc égaux ou supplémentaires. Les deux angles CAD, C′AD′ ne peuvent pas être égaux; car si l'angle CAD est aigu, l'angle droit C′AD étant plus grand que l'angle CAD, la droite AC′ est située hors de l'angle CAD; pour la même raison, la droite AD′ est aussi située hors de l'angle CAD. Donc les deux angles CAD, C′AD′ sont inégaux et supplémentaires.

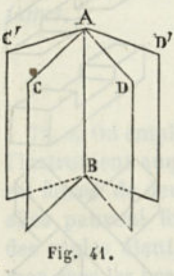

Fig. 41.

Si l'angle plan du dièdre donné est obtus, soient C'AD' cet angle plan et AC, AD les perpendiculaires élevées au point A sur chacune des faces D'AB, C'AB et dirigées ainsi que l'indique l'énoncé. L'angle CAD' étant droit, la droite AC sera dirigée dans l'intérieur de l'angle C'AD'; pour la même raison, la droite AD sera aussi dirigée dans l'intérieur de l'angle C'AD'. Donc les angles C'AD', CAD sont inégaux et supplémentaires.

THÉORÈME.

73. *Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, tout plan conduit suivant la droite est perpendiculaire au premier plan* (fig. 42).

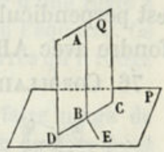

Fig. 42.

Soient une droite AB perpendiculaire au plan P, et Q un plan mené par AB. Par le point B, trace de la droite AB sur le plan P, menons sur celui-ci une droite BE perpendiculaire à l'intersection CD des deux plans. L'angle ABE est droit (8); or ABE est l'angle plan du dièdre ACDE; donc le plan Q est perpendiculaire au plan P.

THÉORÈME.

74. *Si deux plans,* Q *et* P, *sont perpendiculaires, toute droite* AB, *menée dans l'un d'eux,* Q, *perpendiculairement à l'intersection commune* CD, *est perpendiculaire à l'autre plan* (fig. 43).

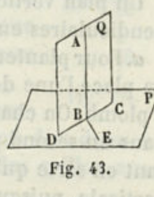

Fig. 43.

Menons dans le plan P et par le point B, trace de AB sur le plan P, la droite BE perpendiculaire à CD. L'angle ABE est droit, puisqu'il est l'angle plan du dièdre droit ACDE; donc AB, étant perpendiculaire à deux droites CD, BE tracées par son pied sur le plan P, est perpendiculaire à celui-ci.

THÉORÈME.

75. *Lorsque deux plans sont perpendiculaires entre eux, toute droite, menée par un point de l'un d'eux perpendiculairement à l'autre plan, est contenue dans le premier* (fig. 44).

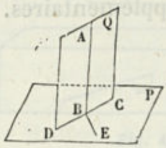

Fig. 44.

Soient Q et P deux plans perpendiculaires entre eux, CD leur intersection, AB la perpendiculaire au plan P menée par un point quelconque du plan Q. AB est contenue dans le plan Q, car la perpendiculaire à l'intersection, menée dans le plan Q par ce même point, est perpendiculaire au plan P. Par conséquent elle doit se confondre avec AB, si elle passe par le point donné.

76. Corollaire. — *Lorsque deux plans*, Q *et* R, *qui se coupent sont perpendiculaires à un troisième plan* P, *celui-ci est perpendiculaire à l'intersection commune* AB *des deux premiers* (fig. 45).

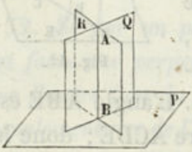

Fig. 45.

Car si, par un point quelconque de l'intersection commune AB, on mène une perpendiculaire au plan P, cette perpendiculaire sera contenue dans chacun des deux plans Q et R ; elle se confondra donc avec leur intersection.

77. On donne le nom de *plan vertical* à tout plan qui contient une verticale ; d'où il résulte que, par un point donné, on peut mener une infinité de plans verticaux.

Un plan vertical et un plan horizontal sont donc deux plans perpendiculaires entre eux.

a. Pour planter verticalement un jalon, une tige, un support, etc., on place l'une des arêtes dans un plan qui passe par l'œil et le fil à plomb. On change ensuite de position pour placer la même arête dans un second plan vertical déterminé comme le premier, en faisant en sorte qu'elle reste contenue dans celui-ci. L'arête est alors verticale, puisqu'elle est l'intersection de deux plans verticaux.

b. Pour exécuter un parement qui soit d'équerre avec un autre déjà exécuté, le tailleur de pierre trace sur celui-ci (fig. 46) une droite AB qui doit être un des côtés du parement, et il fait en un point E de AB sur la face brute ABHK une *plume* ou *ciselure* droite EF. Il place ensuite dans la ciselure l'une des règles d'une équerre ouverte; et si, en la faisant pivoter, l'autre règle s'applique exactement sur le parement ABC dans toutes ses positions, il est assuré que le fond de la ciselure est perpendiculaire au parement ABC. Il ne reste donc plus qu'à abattre la pierre qui dépasse le plan AEF ou BEF pour exécuter un parement perpendiculaire au premier, puisque EF est perpendiculaire au plan ABC.

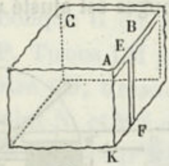

Fig. 46.

c. On voit souvent le maçon fixer à l'extrémité du mur qu'il élève, et sur la paroi extérieure, une règle, après s'être assuré au moyen du fil à plomb que les arêtes de celle-ci sont verticales. Il fixe ensuite un peu plus loin une autre règle de la même manière sur la paroi extérieure du mur. Ensuite il fait aller d'une règle à l'autre des fils qu'il tend horizontalement à l'aide de l'équerre. Ce sont ces fils qui dirigent l'ouvrier dans la pose des pierres qu'il range par couches successives.

d. On a très-fréquemment lieu, dans les arts, de faire usage de la direction du *fil à plomb*, à laquelle on donne le nom de *ligne droite verticale*, ou simplement de *verticale*. Les verticales portent dans les arts le nom de *lignes d'aplomb*.

e. Niveau de côté. C'est une règle dont les arêtes latérales MN, QP (fig. 47) sont parallèles entre elles, et à une droite CD tracée entre celles-ci sur la règle, et qu'on nomme *ligne de foi*. A l'extrémité C de la droite CD, on fixe l'extrémité supérieure d'un fil à plomb, et on se sert du niveau en plaçant la règle de manière que le fil à plomb coïncide avec la ligne de foi. Pour reconnaître si une droite telle que AB est verticale, on fait coïncider l'une des arêtes latérales de la règle avec la droite AB, et, si celle-ci est verticale, le fil à plomb doit coïncider avec la ligne de foi qui est parallèle aux arêtes latérales. Il faut, pour plus d'exactitude, appliquer successivement les deux arêtes latérales de la règle sur la droite AB.

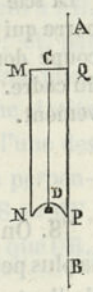

Fig. 47.

Cet instrument est d'un fréquent usage dans les constructions. Il sert à vérifier la direction verticale qu'on doit donner aux jambages des portes et fenêtres, aux barreaux des grilles, aux arêtes latérales des murs, aux rampes, etc.

f. Le rabot mécanique de Brunel (fig. 48) est formé d'une roue A montée perpendiculairement sur un arbre vertical et tournant par conséquent dans un plan horizontal. A chacune des deux extrémités de l'un des diamètres sont fixées seize gouges B, de même longueur et assemblées parallèlement. Derrière chaque groupe de gouges est ajusté un fer à rabot C. La pièce de bois qu'il s'agit de *dresser* (aplanir) est portée par un chariot qui est poussé vers l'arbre A par une presse hydraulique. Ce chariot avance d'une longueur égale à la longueur des fers C, pendant que la roue fait un demi-tour. Les gouges forment donc à chaque demi-tour seize rainures circulaires très-serrées et placées sur un même plan dans toute la largeur de la pièce de bois. Les rabots enlèvent ensuite les languettes qui séparent ces rainures, et aplanissent la pièce de bois.

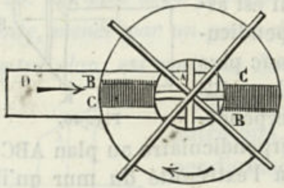

Fig. 48.

Afin que les gouges et les rabots puissent mordre de la quantité convenable selon l'épaisseur et la dureté du bois, une seconde presse hydraulique élève ou abaisse la roue A, selon la quantité de bois qu'on veut enlever. La roue est mise en mouvement par une machine à vapeur.

g. Scie à receper les pieux dans l'eau. — Cette scie offre l'exemple d'une droite qui se meut à une distance constante d'un plan parallèle et se trouve par suite toujours contenue dans un même plan parallèle au premier et qu'elle décrit elle-même.

La scie est attachée par deux tringles de même longueur à une barre qui peut glisser sur un cadre formant un plan horizontal. Elle coupe donc les pièces horizontalement et à une distance donnée du cadre. Un mécanisme placé hors de l'eau met la scie en mouvement.

DÉFINITION.

78. On nomme *plus courte distance* de deux droites, la ligne la plus petite qu'on puisse mener d'un point de l'une à un point de l'autre droite.

PROBLÈME.

79. *Construire la plus courte distance de deux droites données* (fig. 49).

Soient AB, CD deux droites non situées dans un même plan.

Par un point E de CD tirons EF parallèle à AB, et soit P le plan des deux droites CD, EF. D'un point quelconque G de AB abaissons la perpendiculaire GL sur le plan P. Tirons LM parallèle à EF et, par le point M où LM rencontre CD, tirons la parallèle MN à GL. Elle rencontre AB en un point N, et MN est perpendiculaire à chacune des deux droites AB et CD ; car MN, étant parallèle à GL, est perpendiculaire au plan P et par suite aux droites LM et CD ou AB et CD.

Il n'existe qu'une seule droite perpendiculaire à chacune des deux droites AB, CD. D'abord, une perpendiculaire commune, autre que MN, ne peut évidemment passer par aucun des points M ou N ; en second lieu toute droite QR, autre que MN, qui unit un point de l'une des droites à un point de l'autre, ne saurait être une perpendiculaire commune aux deux droites données sans être perpendiculaire au plan, car elle serait aussi perpendiculaire à la droite RT menée par le point R parallèlement à AB. Les deux droites QR et MN seraient donc parallèles ; et, par suite, les droites AB, CD seraient contenues dans un même plan.

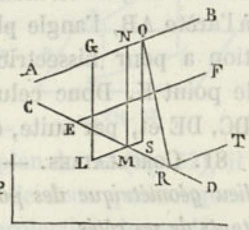

Fig. 49.

MN est la plus courte distance demandée, car une droite quelconque QR, autre que MN, qui unit un point de l'une des droites à un point de l'autre, est plus grande que la perpendiculaire QS abaissée du point Q, sur le plan P ; or QS = MN, puisque S doit se trouver sur LM ; donc MN est moindre que QR.

THÉORÈME.

80. *Tout point du plan bissecteur d'un dièdre est également distant des deux faces du dièdre, et tout point situé hors du plan bissecteur est inégalement distant des faces du dièdre* (fig. 50).

1° Soient AB le dièdre des plans M et N, P le plan bissecteur et O un point du plan P. Menons par le point O un plan perpendiculaire à l'arête AB. Les traces CD, DE, DO de

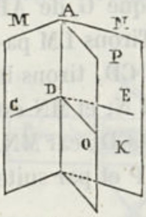

Fig. 50.

ce plan sur les trois plans font entre elles des angles qui sont les angles plans des dièdres formés par ceux-ci. La droite DO est donc la bissectrice de l'angle plan CDE. Le point O de cette bissectrice est donc également distant des droites DC, DE, et par suite (74) des plans M et N.

2° Tout point K situé hors du plan bissecteur, P, du dièdre AB est inégalement distant des faces de ce dièdre. Car, si l'on mène par le point K un plan perpendiculaire à l'arête AB, l'angle plan CDE déterminé par cette construction a pour bissectrice une droite DO qui ne passe pas par le point K. Donc celui-ci est inégalement distant des côtés DC, DE et, par suite, des faces du dièdre.

81. Corollaires. — 1° *Le plan bissecteur d'un dièdre est le lieu géométrique des points situés dans l'angle et également distants de ses côtés.*

2° *Le lieu géométrique des points également distants de deux plans qui se coupent est représenté par les deux plans bissecteurs des deux couples de dièdres adjacents formés par ces plans.*

3° *Le plan bissecteur d'un dièdre est un plan de symétrie de la figure formée par les deux faces du dièdre.*

§ 6. — Projection.

DÉFINITION.

82. On nomme *projection* d'un point A sur un plan P, le pied *a* de la perpendiculaire A*a*, abaissée du point sur le plan (fig. 51);

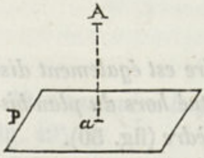

Fig. 51.

La perpendiculaire A*a* est la *ligne projetante* du point A.

83. On nomme *projection d'une ligne* sur un plan, le lieu des projections de tous les points de la ligne sur ce plan.

THÉORÈME.

84. *La projection d'une ligne droite sur un plan est* généralement *une ligne droite* (fig. 52).

Du point A de la droite AB abaissons la perpendiculaire Aa sur le plan P ; et soit ab l'intersection du plan P et du plan BAa déterminé par les droites AB, Aa. Les perpendiculaires abaissées des différents points de AB sur le plan P (les lignes projetantes) sont parallèles à la ligne Aa, et par conséquent contenues dans le plan BAa. Donc le lieu des pieds de ces perpendiculaires, ou la projection de AB sur le plan P, est la droite ab.

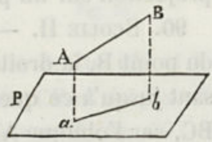

Fig. 52.

85. Corollaire I. — Pour tracer la projection d'une droite donnée AB sur un plan donné (fig. 52), il suffit de déterminer les projections a, b de deux quelconques de ses points A et B. La droite ab est la projection demandée.

86. Corollaire II. — Lorsque le point A de rencontre de la droite avec le plan est donné (fig. 53), il suffit de déterminer la projection b, d'un autre point B de la droite. La projection demandée est la droite Ab.

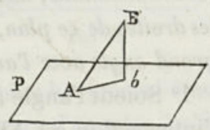

Fig. 53.

87. Corollaire III. — Si la droite est perpendiculaire au plan, sa projection est un point, celui où elle rencontre le plan ; car toutes les lignes projetantes se confondent alors avec la droite donnée.

THÉORÈME.

88. *L'angle aigu qu'une droite fait avec sa projection sur un plan est minimum parmi les angles que cette droite fait avec les droites tracées par son pied dans le plan* (fig. 54).

Soient P le plan et AB la droite donnés ; AC la perpendiculaire abaissée du point A sur le plan, BD une droite différente de la projection BC tracée par le point B sur le plan P. Supposons l'angle ABC aigu. Prenons BD = BC, et tirons la droite AD.

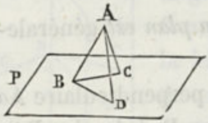
Fig. 54.

Les triangles BAC, BAD ont deux côtés égaux, savoir : AB commun, BC = BD ; mais le troisième côté AD du triangle ABD est plus grand que le troisième côté AC du triangle ABC (18). Donc l'angle ABC est moindre que l'angle ABD.

89. Scolie I. — L'angle aigu que fait une droite avec sa projection sur un plan est dit *l'angle de la droite et du plan.*

90. Scolie II. — Si l'on fait tourner la droite BD autour du point B, la droite AD et, par suite, l'angle ABD ira en croissant jusqu'à ce que BD se confonde avec le prolongement de BC, car l'oblique AD croîtra successivement à mesure que son pied D s'éloignera du pied C de la perpendiculaire AC.

THÉORÈME.

91. *Lorsque deux plans se coupent, la perpendiculaire à l'intersection commune, menée par un point de l'un des plans, est de toutes les droites de ce plan, et passant par ce point, celle qui fait le plus grand angle avec l'autre plan* (fig. 55).

1° Soient l'angle aigu MABN formé par les plans M et N dont l'intersection est AB ; CD la perpendiculaire abaissée sur AB d'un point C du plan M, non situé sur AB, et DF la projection de CD sur le plan N. L'angle CDF de la droite CD avec le plan N est plus grand que celui que fait avec ce plan toute autre droite CE menée par le point C dans le plan M ; car, soit F la projection du point C sur le plan N, EF est la projection de CE sur le plan N, et l'angle CEF l'angle de CE avec ce plan. Or on a EF > DF ; par conséquent l'oblique CE fait avec la perpendiculaire DF un angle plus grand que l'angle formé par CD avec

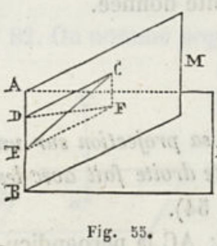
Fig. 55.

cette perpendiculaire ; d'où il résulte que l'angle CEF doit être moindre que l'angle CDF.

2° Si le point C du plan M est situé (fig. 56) sur l'intersection commune AB, soient CD la perpendiculaire sur AB dans le plan M, et CE une droite quelconque menée par le point C dans le même plan ; du point E abaissons sur AB la perpendiculaire EC′ ; cette dernière droite fait avec le plan N un angle plus grand que celui que fait la droite CE ; or, EC′ et CD font avec le plan N des angles égaux ; donc l'angle de la droite CD et du plan N est plus grand que l'angle de la droite CE et du plan N.

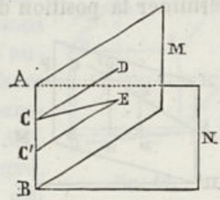

Fig. 56.

92. Scolie. — Lorsque le plan N est horizontal (fig. 57), la droite DC menée dans le plan M perpendiculairement à l'intersection commune AB, qui est horizontale, est dite une *ligne de plus grande pente* du plan M. On voit immédiatement que par chaque point du plan M on peut mener une ligne de plus grande pente de ce plan et une seule.

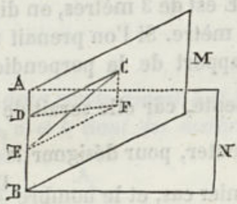

Fig. 57.

L'intersection d'un plan incliné par un plan horizontal étant une *horizontale, les lignes de plus grande pente d'un plan incliné sont perpendiculaires à ses horizontales.*

Applications.

PROBLÈME.

93. *Déterminer la position d'un plan incliné.* — La position d'un plan incliné peut être déterminée par une horizontale et l'angle plan qui mesure le dièdre du plan incliné et d'un plan horizontal. En effet, soient (fig. 58) HH′ une horizontale du plan incliné, et BAC l'angle plan donné que nous supposerons aigu. Si l'on place la droite AB

dans le plan horizontal qui passe par HH′, perpendiculairement à HH′, au point A, et le plan BAC perpendiculairement au plan horizontal, le plan incliné sera déterminé par les droites HH′, AC.

94. Ce n'est pas ce moyen qu'on emploie ordinairement pour déterminer la position d'un plan incliné. On détermine celui-ci par la *pente* des lignes de plus grande pente du plan. Soient M un plan horizontal, P un plan incliné, HH′ l'intersection des deux plans et AC une ligne de plus grande pente du plan P. Au point A menons dans le plan M la droite AB perpendiculaire à HH′, et sur AB prenons, à partir du point A, une longueur AD égale à l'unité de longueur. Elevons ensuite au point D la perpendiculaire DE au plan M, elle sera contenue dans le plan CAB (75) et rencontrera la droite AC, puisqu'on suppose que l'angle CAB est aigu. Soit E le point de rencontre, la droite DE est dite la *pente* de l'oblique AC. Si la distance DE est de 3 mètres, on dira que la pente de AC est de 3 mètres pour 1 mètre. Si l'on prenait une distance AD′ différente de 1 mètre, le rapport de la perpendiculaire D′E′ à AD′ exprimerait encore la pente, car elle serait de $\frac{D'E'}{AD'}$ mètre pour 1 mètre. On peut se contenter, pour désigner la pente, d'indiquer le nombre 3 dans le premier cas, et le nombre $\frac{DE'}{AD'}$, dans le second.

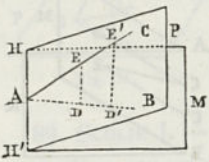

Fig. 58.

On construira donc le plan incliné qui contient l'horizontale HH′, en menant dans le plan horizontal une perpendiculaire AD sur HH′. On prendra ensuite sur cette perpendiculaire une longueur AD égale à 1 mètre, et par le point D on mènera une perpendiculaire au plan horizontal d'une longueur DE déterminée par la pente donnée; le plan incliné pourra alors être construit, puisqu'il est assujetti à passer par le point E et la droite HH′.

95. Scolie. — Une *rampe* (plan incliné) est au *trentième* ou au *cinquantième*, lorsque la pente des lignes de plus grande pente de cette rampe est de $\frac{1}{30}$ de mètre ou de $\frac{1}{50}$ de mètre pour 1 mètre.

PROBLÈME.

96. *Tracer une ligne de plus grande pente sur un plan, ou un terrain plan incliné.*

Pour tracer une ligne de plus grande pente sur un plan incliné, il suffit, après avoir déterminé une horizontale du plan, de mener d'un point du plan une perpendiculaire à celle-ci.

97. Le travail du tailleur de pierre consiste à former des faces ou parements qui se coupent en faisant des dièdres déterminés, *droits*, *aigus* ou *obtus*. Supposons (fig. 59) qu'on ait construit un parement M auquel doivent être perpendiculaires les deux faces d'un dièdre donné. On rapportera sur ce parement, avec la fausse équerre, l'angle plan ABC de ce dièdre, et on abattra ensuite la pierre, de manière que les parements DBC, DBA, qui passent par BC et AB, soient perpendiculaires au plan M.

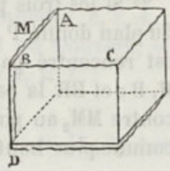

Fig. 59.

§ 7. — Centre des distances proportionnelles.

THÉORÈME.

98. *Si un point* M *divise la distance* AB *de deux points donnés* A *et* B, *de telle sorte que* $AM \times a = BM \times b$ (fig. 60), *a et b étant des nombres quelconques ; et qu'on mène, par les trois points* A, M, B, *trois droites* AA_1, MM_1, BB_1 *parallèles entre elles* (dans une direction arbitraire), *et terminées à un plan donné* P; *on doit avoir, entre les nombres a et b et les distances* AA_1, MM_1, BB_1, *la relation :*

$$AA_1 \times a + BB_1 \times b = MM_1 \times (a + b).$$

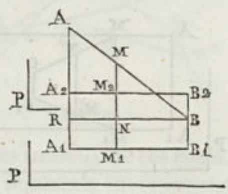

Fig. 60.

1° Supposons d'abord les trois points A, M, B, situés d'un même côté du plan P. Menons BR, parallèle à A_1B_1, et soit N le point où BR rencontre MM_1. De la relation $AM \times a = BM \times b$, on déduit :

$$\frac{AM}{BM} = \frac{b}{a}; \quad \text{d'où}: \ \frac{AB}{BM} = \frac{a+b}{a} = \frac{AR}{MN};$$

et, par suite :

$$AR \times a = MN \times (a + b);$$

ajoutant aux deux membres de cette égalité $NM_1 \times (a+b)$, on obtient la relation :

$$AA_1 \times a + BB_1 \times b = MM_1 \times (a+b).$$

2° Si les trois points A, M, B ne sont pas situés d'un même côté du plan donné P (fig. 60); soient A_2, M_2, B_2, les points où le plan P est rencontré par les trois droites parallèles menées des points A, M, B ; et BR la parallèle à A_2B_2 menée par le point B, laquelle rencontre MM_2 au point N. De la relation $AM \times a = BM \times b$, on déduit comme plus haut :

$$AR \times a = MN \times (a+b);$$

Retranchant des deux membres de cette égalité $NM_2 \times (a+b)$, on obtient la relation :

$$AA_2 \times a - BB_2 \times b = MM_2 \times (a+b),$$

qu'on peut écrire :

$$AA_2 \times a + (-BB_2 \times b) = MM_2 \times (a+b).$$

On voit qu'on doit prendre négativement la distance qui est de sens contraire à la distance du point M au plan.

99. Corollaire I. — Considérons trois points A, B, C (fig. 61), et supposons qu'un point M de la droite AB divise celle-ci en deux segments tels que :

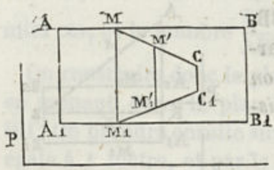

Fig. 61.

$$AM \times a = BM \times b;$$

et qu'un point M' de la droite MC divise celle-ci en deux segments tels que

$$MM' \times (a+b) = M'C \times c;$$

a, b, c, étant des nombres quelconques. AA_1, BB_1, MM_1, CC_1, $M'M'_1$ étant les distances des points A, B, M, C, M' à un plan donné P, comptées dans une même direction arbitraire, on aura (98), en ayant égard aux signes :

$$AA_1 \times a + BB_1 \times b = MM_1 \times (a+b)$$

et

$$MM_1 \times (a+b) + CC_1 \times c = M'M'_1 \times (a+b+c);$$

par conséquent,

$$AA_1 \times a + BB_1 \times b + CC_1 \times c = M'M'_1 (a+b+c).$$

100. Corollaire II. — Considérons un nombre quelconque de points A, B, C, D,... et supposons qu'à chacun de ces points correspondent respectivement les nombres a, b, c, d,... comme tout à l'heure les nombres a, b, c correspondaient aux points A, B, C. Nous donnerons, pour abréger le langage, aux nombres a, b, c, d,... les noms de *coefficients* des points A, B, C, D,... et on trouvera, en faisant le même raisonnement que pour les points A, B, C :

$$AA_1 \times a + BB_1 \times b + CC_1 \times c + DD_1 \times d + \ldots\ldots + LL_1 \times l = M^iM^i_1\,(a + b + c + d + \ldots\ldots + l).$$

Le point M est dit le *centre des distances proportionnelles* des points A et B, le point M′ le *centre des distances proportionnelles* des points A, B, C, et le point M^i celui des points A, B, C, D,... Il est entendu qu'on donnera aux distances les signes dont elles doivent être affectées.

101. Corollaire III. — *Centre de gravité d'une ligne brisée.* — On nomme *centre de gravité* d'une longueur donnée, AB, le milieu de cette droite.

On donne le nom de *ligne brisée gauche*, à celle dont les côtés ne sont pas tous situés dans un même plan.

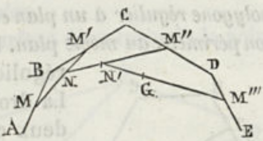

Fig. 62.

On nomme *centre de gravité* d'une ligne brisée plane ou gauche, le point qui est déterminé de la manière suivante : soient le contour polygonal ABCDE (fig. 62) ; a, b, c, d, les longueurs respectives des côtés AB, BC, CD, DE ; M, M′, M″, M‴ les milieux de ces côtés. Le point N qui divise la droite MM′ en deux segments inversement proportionnels aux longueurs adjacentes, c'est-à-dire de telle sorte que $\frac{AB}{BC} = \frac{M'N}{MN}$, est dit le *centre de gravité* de la ligne polygonale ABC. Le point N′ qui partage la droite NM″ en deux segments tels que l'on ait : $\frac{AB + BC}{CD} = \frac{M''N'}{NN'}$ est dit le *centre de gravité* de la ligne polygonale ABCD. Enfin le point G qui divise la droite N′M‴ en deux segments tels que l'on ait : $\frac{AB + BC + CD}{DE} = \frac{M'''G}{GN'}$, est dit le *centre de gravité* de la ligne polygonale ABCDE.

Or il résulte du corollaire II (100) que la distance du centre de gravité G à un plan quelconque est égale, si l'on désigne par

MM_1, $M'M'$, $M''M''_1$, $M'''M'''_1$ les distances des points M, M', M'', M''' au même plan, à

$$\frac{MM_1 \times a + M'M'_1 \times b + M''M''_1 \times c + M'''M'''_1 \times d}{a + b + c + d}.$$

102. Corollaire IV. — Lorsque les longueurs a, b, c, d sont égales entre elles, la distance du centre de gravité à un plan quelconque est égale à la moyenne des distances des centres de gravité des longueurs au même plan. En effet, en désignant par GG_1, la distance du centre de gravité au plan, et par n le nombre des côtés, on a :

$$GG_1 = \frac{(MM_1 + M'M'_1 + M''M''_1 + \ldots\ldots\ldots)\,a}{na} =$$

$$\frac{MM_1 + M'M'_1 + M''M''_1 + \ldots\ldots}{n}.$$

La distance du centre de gravité d'une ligne brisée, dont tous les côtés sont égaux, à un plan quelconque est donc la moyenne des distances des centres de gravité de ses côtés au même plan.

103. Corollaire V. — *On déduit de là que la distance du centre d'un polygone régulier à un plan est égale à la distance du centre de gravité de son périmètre au même plan.* En effet, considérons d'abord un polygone régulier d'un nombre pair de côtés (fig. 63). La droite, telle que IK, qui unit les milieux de deux côtés opposés est un diamètre du cercle inscrit ; par conséquent, la demi-somme des distances des points I et K à un plan quelconque est égale à la distance du centre O au même plan. Si le polygone a $2n$ côtés, la somme des distances des $2n$ points milieux des côtés au plan sera donc égale à $2n$ fois la distance du centre à ce plan. Si l'on désigne par D la distance du centre au plan, par d_1, d_2, d_3,.... d_{2n} les $2n$ distances des milieux des côtés, on aura :

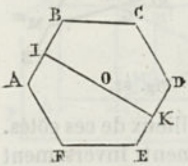

Fig. 63.

$$D = \frac{d_1 + d_2 + d_3 + \ldots\ldots d_{2n}}{2n}.$$

Si le polygone régulier a un nombre impair de côtés ; si c'est un triangle ABC, par exemple (fig. 64), dont les milieux des côtés sont M, N, P ; en joignant ces milieux deux à deux, on forme un second triangle régulier MNP. Traçons la circonférence O circonscrite à ce triangle, et circonscrivons à cette circonférence l'hexagone régulier IKLQRS, dont trois côtés non consécutifs ont pour milieux M, N, P. La somme des distances des sommets de l'hexagone à un plan quelconque est égale à 6 fois la distance du centre à ce plan. Or la somme des distances des points M, N, P, au même plan est égale à la demi-somme des distances des sommets de l'hexagone, par conséquent à trois fois la distance du centre au plan. Donc la distance du point O à un plan est la moyenne des distances des milieux des côtés du triangle ABC au même plan.

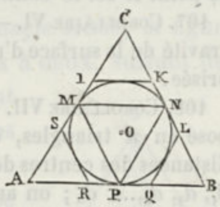

Fig. 64.

Le même raisonnement pouvant être appliqué à un polygone régulier d'un nombre impair quelconque de côtés, on en conclut que *la distance du centre d'un polygone régulier quelconque à un plan est égale à celle du centre de gravité de son périmètre au même plan.*

104. Une circonférence pouvant être regardée comme étant le périmètre d'un polygone régulier dont les côtés sont infiniment petits, *la distance du centre d'une circonférence à un plan est donc égale à celle de son centre de gravité au même plan.*

105. On nomme *centre de gravité* de la surface d'un triangle le point de concours des médianes.

106. On nomme *centre de gravité* de la surface d'un polygone ABCDE (fig. 65) le point déterminé de la manière suivante : Après avoir décomposé le polygone en triangles soit par des diagonales menées de l'un des sommets, soit de toute autre manière, on détermine les centres de gravité de ces triangles. Soient G, H, K, les centres de gravité des triangles ABC, ACD, ADE, dont est composé le polygone. On divise la droite GH en deux segments GL, LH inversement proportionnels aux triangles adjacents, c'est-à-dire tels que :

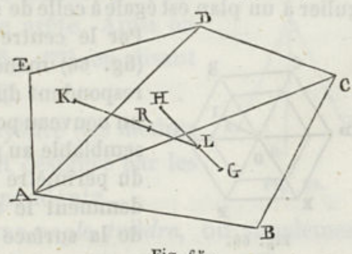

Fig. 65.

$$\frac{GL}{LH} = \frac{ACD}{ABC}.$$

Le point L est le centre de gravité du quadrilatère ABCD, composé des deux triangles ABC, ACD. On divise ensuite la droite LK en deux segments LR, RK tels que :

$$\frac{LR}{RK} = \frac{ADE}{ABCD}.$$

Le point R est le centre de gravité du pentagone ABCDE.

107. Corollaire VI. — On suit donc, pour déterminer le centre de gravité de la surface d'un polygone, la même loi que pour une ligne brisée.

108. Corollaire VII. — Si l'on suppose qu'un polygone soit décomposé en n triangles, dont les aires sont : S_1, S_2, S_3,.... S_n ; et les distances des centres de gravité de ces triangles à un plan donné : d_1, d_2, d_3,.... d_n ; on aura, en désignant par D la distance du centre de gravité du polygone au même plan (100) :

$$S_1 d_1 + S_2 d_2 + S_3 d_3 + \ldots\ldots S_n d_n = (S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n)\,D.$$

d'où

$$D = \frac{S_1 d_1 + S_2 d_2 + S_3 d_3 + \ldots\ldots + S_n d_n}{S_1 + S_2 + S_3 + \ldots\ldots + S_n}.$$

109. Polygone régulier. — La distance du centre d'un polygone régulier à un plan est égale à celle de son *centre de gravité au même plan.*

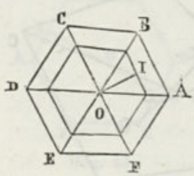

Fig. 66.

Par le centre de gravité de chaque triangle (fig. 66) menons une parallèle au côté correspondant du polygone, nous formerons ainsi un nouveau polygone régulier concentrique et semblable au premier. Or le centre de gravité du périmètre de ce second polygone est évidemment le même que le centre de gravité de la surface du polygone donné (106). Par conséquent (103) *la distance du centre d'un polygone régulier à un plan est égale à celle de son centre de gravité au même plan.*

110. La circonférence peut être regardée comme étant le périmètre d'un polygone régulier dont les côtés sont infiniment petits; *la distance du centre d'un cercle à un plan est donc égale à celle de son centre de gravité au même plan.*

§ 8. — Angle polyèdre.

DÉFINITIONS.

111. On nomme *angle polyèdre*, ou *angle solide*, la figure formée par des plans qui se coupent deux à deux, suivant des droites concourant au même point, et sont terminés à ce point et à leurs intersections mutuelles.

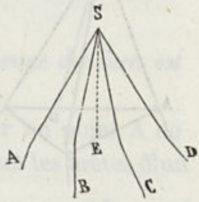

Fig. 67.

Les angles que forment ces plans en se coupant sont les *faces* de l'angle polyèdre, leurs intersections en sont les *arêtes* et le point de concours de celles-ci, le *sommet*. Ainsi (fig. 67) les angles plans ASB, BSC, CSD, DSE, ESA sont les *faces* de l'angle polyèdre ; les droites SA, SB, SC, SD, SE en sont les arêtes, et le point S le sommet.

On désigne un angle polyèdre par la lettre de son sommet, ou par cette lettre suivie des lettres qui indiquent chacune un point d'une arête. Ainsi on désignera l'angle polyèdre (fig. 67) en disant l'angle S, ou l'angle SABCDE.

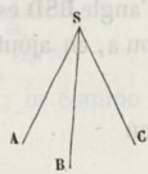

Fig. 68.

Les dièdres de l'angle polyèdre (les dièdres de deux faces adjacentes) sont désignés par les deux lettres de l'arête correspondante.

112. *Trièdre.* — On nomme *angle trièdre*, ou simplement *trièdre*, l'angle polyèdre formé par trois plans (fig. 68).

THÉORÈME.

113. *Dans un angle trièdre, une face quelconque est moindre que la somme des deux autres, et plus grande que leur différence* (fig. 69).

1° La première partie du théorème ne doit être démontrée que pour la plus grande des trois faces, puisqu'elle est évidente pour chacune des deux autres.

Soit ASB la plus grande des faces du trièdre SABC. Faisons sur AS, dans le plan ASB, un angle ASD égal à la face ASC. La droite SD sera dirigée dans l'intérieur de l'angle ASB. Joignons un point A de l'arête SA à un point B de l'arête SB. Cette droite AB rencontrera la droite SD. Soit D le point de rencontre. Prenons SC $=$ SD, et tirons les droites AC, CB. Les triangles ASC, ASD sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux savoir : ASC $=$ ASD ; SC $=$ SD, par construction ; SA commun ; donc AC $=$ AD. Or, dans le triangle ABC, on a AB $<$ AC $+$ CB ; Retranchant d'une part AD et de l'autre son égale AC, on trouve DB $<$ CB. Les triangles SBD, SBC ont donc deux côtés égaux, savoir : SB commun, SD $=$ SC ; et le troisième côté BD moindre que le troisième côté BC, l'angle BSD est donc moindre que l'angle BSC ; par conséquent on a, en ajoutant à ces angles, les angles égaux ASD, ASC :

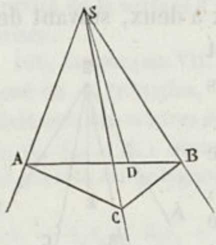

Fig. 69.

$$BSD + ASD < BSC + ASC,$$

ou

$$ASB < BSC + ASC.$$

2° La seconde partie du théorème est évidente pour la plus grande des trois faces ASB. Or, elle est vraie aussi pour chacune des deux autres, puisqu'on vient de voir (1°) que si l'on retranche de la plus grande face l'une des deux autres, le reste est moindre que la troisième face.

DÉFINITION.

114. On nomme angle *polyèdre convexe,* celui dont la surface (on désigne ainsi la surface formée des faces de l'angle polyèdre) ne peut pas être rencontrée par une ligne droite en plus de deux points.

Dans le cas contraire, l'angle polyèdre est dit *concave*.

Il résulte de la définition qu'une face quelconque d'un angle polyèdre convexe, prolongée indéfiniment, laisse d'un même côté les autres faces de l'angle polyèdre.

THÉORÈME.

115. *Dans tout angle polyèdre convexe la somme des faces est moindre que quatre angles droits* (fig. 70).

Soit S l'angle polyèdre convexe donné. Par un point A de l'arête SA, menons un plan qui rencontre toutes les arêtes d'un même côté du sommet S ; et soit ABCDE le polygone formé par les intersections de ce plan avec les faces de l'angle S. Joignons un point O, pris dans l'intérieur du polygone ABCDE, à tous les sommets de ce polygone.

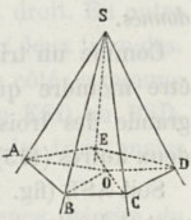

Fig. 70.

Le point A est le sommet d'un angle trièdre ASBE ; et la face EAB est moindre que la somme des deux autres SAE, SAB ; or comme $EAB = EAO + BAO$ on a :

$$EAO + BAO < SAE + SAB ;$$

on a, pour la même raison :

$$ABO + CBO < SBA + SBC,$$
$$BCO + DCO < SCB + SCD,$$
$$CDO + EDO < SDC + SDE,$$
$$DEO + AEO < SED + SEA.$$

Par conséquent, en ajoutant par ordre ces égalités, on reconnaît que la somme des angles à la base des triangles, qui ont pour sommet commun le point O, est moindre que la somme des angles à la base des triangles, qui ont pour sommet commun le point S. La somme des angles, qui ont pour sommet S, est donc, par compensation, moindre que la somme des angles qui ont pour sommet O, puisque le nombre des triangles qui ont pour sommet S est le même que le nombre des triangles qui ont pour sommet O. Or, la somme des angles formés autour du point O étant égale à quatre angles droits, la somme des angles dont le sommet est S, c'est-à-dire *la somme des faces de l'angle* S *est donc moindre que quatre angles droits.*

PROBLÈME.

116. *Construire un trièdre, qui ait pour faces trois angles plans donnés.*

Comme un trièdre est convexe, la somme des faces doit être moindre que quatre angles droits. En outre, la plus grande des trois faces doit être moindre que la somme des deux autres (113).

Soit ASB (fig. 71) la plus grande des trois faces ; plaçons de part et d'autre de ASB, et sur ce plan, les deux autres faces ASC, BSD, de manière qu'elles aient chacune un côté commun avec ASB. Du point S comme centre, avec un rayon arbitraire, décrivons une circonférence ; et désignons par C, A, B, D les points où elle rencontre les côtés des trois angles. L'arc AB, le plus grand des trois arcs, est moindre que la somme des deux autres CA, DB ; en outre

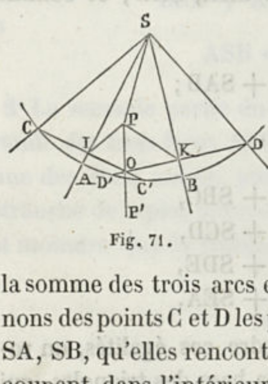

Fig. 71.

la somme des trois arcs est moindre qu'une circonférence. Menons des points C et D les perpendiculaires CC', DD' sur les droites SA, SB, qu'elles rencontrent en I et K. Ces perpendiculaires se coupent dans l'intérieur du secteur SAB, car, l'arc AB étant moindre que la somme des arcs AC, DB, et les arcs AC, AC' étant égaux ainsi que les arcs BD, BD′, le point D′ doit se trouver entre le point A et le point C′. Par le point O de rencontre des droites CC′, DD′, élevons la perpendiculaire OP sur le plan ASB. Cette perpendiculaire et la droite CC′ déterminent un plan perpendiculaire à la droite SA. Décrivons dans ce plan, et du point I comme centre, avec un rayon égal à la moitié, CI, de CC′, une circonférence qui rencontrera la perpendiculaire élevée par le point O. Joignons le point de rencontre P au point I. L'angle ISP est égal à l'angle CSI, par suite de l'égalité des triangles rectangles CSI, ISP, qui ont l'angle droit CIS et l'angle droit SIP, le côté SI commun, et CI = IP. Il résulte en outre de l'égalité de ces triangles que SP = SC.

Si l'on tire la droite PK, on forme un triangle SPK égal au triangle SDK. En effet le plan des droites OP, DD′, étant perpendiculaire à la droite SB, l'angle SKP est droit. En outre SP = SC = SD, et le côté SK est commun aux deux triangles. Ceux-ci ont donc l'hypoténuse égale et un côté commun; et, par suite, l'angle PSK est égal à l'angle KSD ou BSD. L'angle trièdre SIPK a donc pour faces, les trois angles plans donnés.

117. Scolie I. — On voit que la circonférence, décrite du point I comme centre, avec un rayon égal à CI, rencontre la perpendiculaire OP en un second point P′, symétrique du point P par rapport au plan ASB, et qu'il y a un second trièdre SIP′K, formé aussi avec les trois mêmes angles plans. Mais ce second trièdre n'est pas égal au premier, car il est évidemment impossible de faire coïncider les arêtes des deux trièdres par la superposition.

118. Scolie II. — La solution précédente montre que les conditions auxquelles sont assujetties les trois faces d'un trièdre, et qui ont été énoncées précédemment, sont suffisantes.

THÉORÈME.

119. *Lorsque deux trièdres ont leurs faces égales chacune à cha-*

cune, les dièdres, compris entre des faces égales chacune à chacune, sont égaux entre eux (fig. 72).

Soient S, S′ deux trièdres ayant leurs faces égales chacune à chacune, savoir : $A'S'B' = ASB$, $B'S'C' = BSC$, $C'S'A' = CSA$.

Deux dièdres, tels que $S'A'$, SA, compris entre des faces égales chacune à chacune, sont égaux.

Du point M de l'arête SA élevons les perpendiculaires MN, MP à cette arête, dans les plans ASB, ASC. Du point M′ de l'arête S′A′, et dont la distance M′S′ au sommet S′ est égale à MS, menons les perpendiculaires M′N′, M′P′ à l'arête S′A′, dans les plans A′S′B′, A′S′C′. Prenons sur les six arêtes des deux trièdres des longueurs égales : $SA = SB = SC = S'A' = S'B' = S'C'$; et tirons les droites AB, BC, CA, A′B′, B′C′, C′A′. Les triangles ASB, A′S′B′ sont égaux, comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; d'où il résulte que l'angle SAB est égal à l'angle S′A′B′, et que $AB = A'B'$. Pour la même raison, les triangles BSC, B′S′C′ sont égaux, ainsi que les triangles CSA, C′S′A′; d'où il résulte que $BC = B'C'$, $AC = A'C'$, et que l'angle SAC est égal à l'angle S′A′C′. Les triangles ABC, A′B′C′, ayant les trois côtés égaux chacun à chacun, sont égaux; et, par suite, l'angle BAC est égal à l'angle B′A′C′. Les droites MN et NP rencontrent les côtés AB, AC aux points N et P; les droites M′N′ et N′P′ rencontrent A′B′, A′C′ aux points N′ et P′; et, si l'on tire les droites NP, N′P′, on forme deux triangles égaux, MNP, M′N′P′. En effet les triangles AMN, A′M′N′ sont égaux, comme ayant un côté égal, $AM = A'M'$, adjacent à deux angles égaux; donc $AN = A'N'$ et $MN = M'N'$. Les triangles AMP, A′M′P′ sont égaux, pour la même raison; et on conclut de cette égalité que $AP = A'P'$ et $MP = M'P'$.

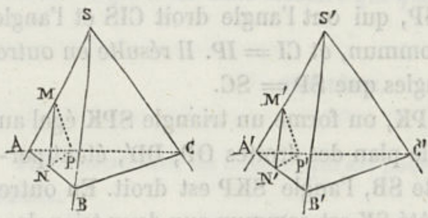

Fig. 72.

Enfin les triangles ANP, A'N'P' sont égaux, comme ayant un angle égal, A = A', compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; d'où l'on conclut que NP = N'P'. Les triangles MNP, M'N'P' sont donc égaux, comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun et par suite *l'angle* NMP *est égal à l'angle* N'M'P'.

120. Scolie I. — Lorsque les deux faces de deux trièdres sont égales chacune à chacune et semblablement disposées, ces deux trièdres sont égaux. Supposons en effet (fig. 72) ASB = A'S'B', BSC = B'S'C', CSA = C'S'A'. Si l'on place la face ASB sur la face égale A'S'B', de manière que l'arête S'A' se confonde avec l'arête SA, et S'B' avec SB, les deux trièdres seront placés d'un même côté du plan ASB, et, comme les dièdres compris entre des faces égales chacune à chacune sont égaux entre eux, S'B' = SB et S'C' = SC. Par suite le plan B'S'C' se confond avec le plan BSC et le plan C'S'A' avec le plan CSA. Par conséquent l'arête S'C' qui doit se trouver dans chacun des deux plans BSC, CSA, se confond avec leur intersection SC, et les trièdres coïncident.

121. Mais si les faces égales ne sont pas semblablement disposées, les trièdres ne sont pas égaux, parce qu'il est impossible de faire coïncider les arêtes de l'un avec les arêtes de l'autre. Soient, par exemple, les deux trièdres SABC, SA'B'C' (fig. 73) dont l'un a pour arêtes les prolongements des arêtes de l'autre. Les faces, telles que ASB, A'SB', sont des angles opposés par le sommet; et les dièdres, tels que SC et SC', sont aussi égaux comme dièdres opposés par l'arête. Mais on reconnaît immédiatement qu'il est impossible de faire coïncider ces trièdres par la superposition.

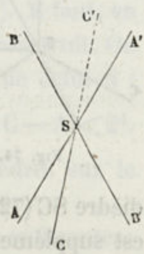

Fig. 73.

On dit que les trièdres SABC, SA'B'C' sont *symétriques*.

122. Scolie II. — Il y a toujours *égalité* entre les deux trièdres, lorsque deux faces de l'un des trièdres sont, en outre, égales entre elles.

THÉORÈME.

123. *Si l'on mène par le sommet d'un trièdre une perpendiculaire à chacune des faces, dirigée du même côté de cette face que l'arête opposée ; ces trois perpendiculaires sont les arêtes d'un second trièdre, dont les faces sont supplémentaires des dièdres du premier et les dièdres supplémentaires des faces du premier* (fig. 74).

Par le sommet S du trièdre SABC menons la droite SA′ perpendiculairement au plan BSC et dirigée du même côté de ce plan que l'arête SA ; la droite SB′ perpendiculairement au plan ASC et dirigée du même côté de ce plan que SB ; et la droite SC′ perpendiculairement au plan ASB et dirigée du même côté de ce plan que SC.

Les faces du trièdre SA′B′C′ sont respectivement supplémentaires des dièdres du trièdre SABC. L'arête SA′, étant perpendiculaire au plan BSC et dirigée du même côté de cette face que SA, est aussi dirigée du même côté que la face ASC ; l'arête SB′ étant perpendiculaire au plan ASC, et dirigée du même côté de cette face que SB, est aussi dirigée du même côté que la face CSB. Donc l'angle plan A′SB′ est supplémentaire du dièdre SC (72). On démontrera de la même manière que A′SC′ est supplémentaire du dièdre SB et que B′SC′ est supplémentaire du dièdre SA.

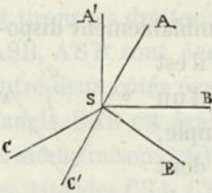

Fig. 74.

En outre, les faces du trièdre SABC sont supplémentaires des dièdres du trièdre SA′B′C′. L'arête SB′ perpendiculaire au plan ASC est, par suite, perpendiculaire à l'arête SA. L'arête SC′ perpendiculaire au plan ASB est, par suite, perpendiculaire à l'arête SA. Par conséquent l'arête SA est perpendiculaire au plan B′SC′. En outre, SA est dirigée du même côté de B′SC′ que la face A′SC′. En effet l'angle ASA′ est aigu, puisque SA et SA′ sont dirigées d'un même côté du plan BSC (1); donc SA et SA′ sont aussi dirigées d'un même côté du plan B′SC′. Pour la même raison SB est perpendiculaire au plan A′SC′ et dirigée du même côté de ce plan que la face B′SC′. Donc l'angle ASB est supplémentaire du dièdre SC′. On démontrera de la même manière, que l'angle ASC est supplémentaire du dièdre SB′ et que l'angle BSC est supplémentaire du dièdre SA′.

124. Corollaire I. — *La somme des dièdres d'un trièdre est moindre que six et plus grande que deux angles droits.*

Soient A, B, C, les dièdres, et a, b, c, les faces du trièdre SABC, A′, B′, C′, les dièdres du trièdre supplémentaire, et a', b', c' les faces de celui-ci. On a :

$$A + B + C + a' + b' + c' = 6 \text{ droits.}$$

or $a' + b' + c'$ est > 0 et $< 4^d$, donc $A + B + C$ est $< 6^d$ et $> 2^d$.

125. Corollaire II. — Pour construire un trièdre connaissant ses trois dièdres, il ne suffit pas que ces dièdres satisfassent aux conditions qui viennent d'être énoncées (124). Il faut, en outre, que le trièdre supplémentaire puisse être construit. On doit avoir, en désignant par a' la plus grande face de celui-ci :

$$a' < b' + c' \text{ ; ou } 2^d - A < 2^d - B + 2^d - C \text{ ou } B + C - A < 2^d.$$

C'est-à-dire que l'excès de la somme des deux dièdres sur le troisième doit être moindre que deux angles droits.

Cette dernière condition et la première sont suffisantes; car, si elles sont remplies, on pourra construire le trièdre supplémentaire et en déduire le trièdre demandé.

(1) Lorsque deux droites menées par un point d'un plan sont dirigées d'un même côté du plan, l'une perpendiculairement et l'autre obliquement au plan, ces droites font évidemment entre elles un angle aigu, et si elles sont dirigées de part et d'autre du plan, elles font un angle obtus.

Réciproquement, si deux droites menées par un point d'un plan et l'une perpendiculairement au plan, font entre elles un angle aigu, elles sont dirigées d'un même côté du plan, car, s'il en était autrement, elles feraient entre elles un angle obtus.

§ 9. — Méthode des projections.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

126. *On représente la position d'un point de l'espace par ses projections sur deux plans rectangulaires, dont l'un est horizontal* (fig. 75).

Les deux plans, horizontal HH' et vertical VV', sur lesquels on projette les points de l'espace, sont appelés *plans de projection*. Leur intersection commune XY porte le nom de *ligne de terre*.

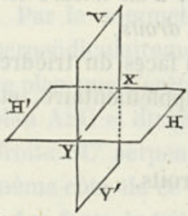

Fig. 75.

Il résulte de ces définitions, que, lorsqu'un point est situé dans l'un des plans de projection, sa projection sur ce dernier plan est le point lui-même, et sa projection sur l'autre plan, le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur la ligne de terre.

127. On nomme *ligne projetante* d'un point, la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan de projection.

128. On nomme *surface projetante* d'une ligne, le lieu des lignes projetantes de celle-ci. Lorsque la ligne qu'on projette est une droite, la surface projetante est un plan (84), qu'on nomme plan projetant de la droite.

129. La trace d'une droite ou d'un plan sur le plan horizontal porte le nom de *trace horizontale* de la droite ou du plan ; et la trace sur le plan vertical celui de *trace verticale*.

130. Les projections sur le plan horizontal portent le nom de *projections horizontales*, et les projections sur le plan vertical celui de *projections verticales*.

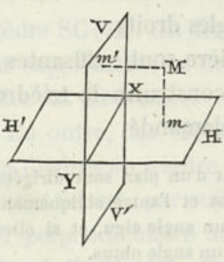

Fig. 76.

La projection de toute ligne, située dans l'un des plans de projection, sur l'autre plan, se confond avec la ligne de terre.

131. *Un point est déterminé par ses deux projections.*

Soient m, m' les deux projections d'un point M de l'espace (fig. 76). Les perpendiculaires élevées respectivement au plan horizontal et au plan vertical par les points m et m' vont concourir au point M, qui se trouve, par suite, déterminé.

132. *Lorsque deux points, situés l'un sur le plan horizontal, l'autre sur le plan vertical, sont les deux projections d'un même point de l'espace, les perpendiculaires abaissées de ces deux projections sur la ligne de terre rencontrent celle-ci au même point.* Et RÉCIPROQUEMENT (fig. 77).

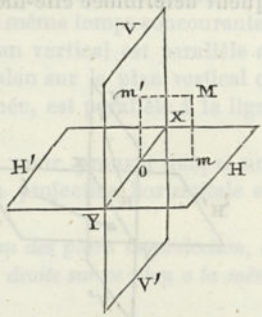

Fig. 77.

Soient m, m' les projections horizontale et verticale d'un point quelconque M de l'espace. Les lignes projetantes Mm, Mm' déterminent un plan perpendiculaire au plan horizontal et au plan vertical, par conséquent, perpendiculaire à la ligne de terre XY. Donc, les traces om, om' de ce plan sont perpendiculaires à XY.

RÉCIPROQUEMENT. — Supposons que les perpendiculaires, abaissées sur la ligne de terre, de deux points, l'un m du plan horizontal, l'autre m' du plan vertical, rencontrent la ligne de terre au même point o. Les droites om, om' déterminent un plan perpendiculaire à la ligne de terre, et les perpendiculaires élevées respectivement, sur le plan horizontal par le point m, et sur le plan vertical par le point m', sont situées dans ce plan. Ces perpendiculaires se rencontrent; car elles sont en outre respectivement perpendiculaires à deux droites qui se coupent, et leur point de rencontre a pour projections horizontale et verticale, m et m'.

133. PAR CONSÉQUENT, *pour que deux points, situés l'un sur le plan horizontal et l'autre sur le plan vertical, soient les projections d'un même point de l'espace, il faut et il suffit que les perpendiculaires abaissées de ces points sur la ligne de terre rencontrent celle-ci au même point.*

134. Deux plans qui se coupent forment quatre angles. Nous verrons, plus loin, comment on distingue celui des quatre angles, dans lequel est placé le point donné (fig. 78).

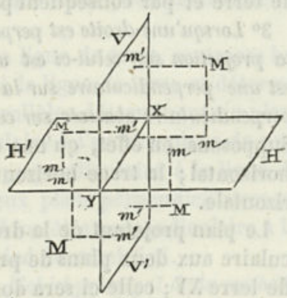

Fig. 78.

135. *Une droite est généralement déterminée par ses projections horizontale et verticale ab, a'b'* (fig. 79).

Soient ab, $a'b'$ (fig. 80), les projections horizontale et verticale d'une droite; le plan, mené par ab perpendiculairement au plan horizontal, passe par la droite de l'espace; il en est de même du plan mené par $a'b'$ perpendiculairement au plan vertical. La droite est donc l'intersection de deux plans déterminés, elle est par conséquent déterminée elle-même.

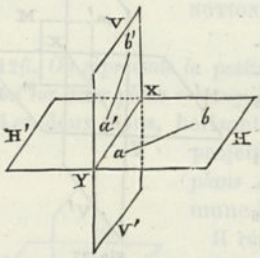

Fig. 79.

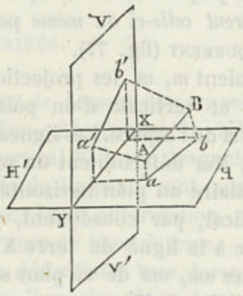

Fig. 80.

136. Scolies. — 1° Si les droites ab, $a'b'$, tracées sur les deux plans de projection, étaient perpendiculaires à la ligne de terre au même point, il y aurait indétermination, c'est-à-dire qu'il existerait une infinité de droites ayant pour projections ab, $a'b'$; car les deux plans projetants se confondraient en un seul.

2° Si les droites ab, $a'b'$, tracées sur les deux plans de projection, étaient perpendiculaires à la ligne de terre en des points différents, elles ne représenteraient aucune droite de l'espace, car les plans, menés respectivement par ces droites, perpendiculairement au plan horizontal et au plan vertical, seraient perpendiculaires à la ligne de terre et par conséquent parallèles.

3° *Lorsqu'une droite est perpendiculaire à l'un des plans de projection, sa projection sur celui-ci est un point, et sa projection sur l'autre plan est une perpendiculaire sur la ligne de terre, menée par le pied de la perpendiculaire abaissée sur celle-ci du point qui est l'autre projection.* Supposons, en effet, qu'une droite soit perpendiculaire sur le plan horizontal ; la trace horizontale de la droite sera sa projection horizontale.

Le plan projetant de la droite sur le plan vertical sera perpendiculaire aux deux plans de projection et, par conséquent, à la ligne de terre XY ; celle-ci sera donc perpendiculaire à la trace de ce plan sur le plan vertical de projection.

137. *Lorsqu'une droite est parallèle à l'un des plans de projection, sa projection sur l'autre plan est parallèle à la ligne de terre.*

Soit une droite parallèle au plan horizontal. Le plan projetant de cette droite sur le plan vertical est déterminé par deux droites, l'une la droite donnée, l'autre une quelconque des lignes projetantes de celle-ci sur le plan vertical. Ces deux droites sont parallèles au plan horizontal; et, comme elles sont en même temps concourantes, le plan projetant de la droite sur le plan vertical est parallèle au plan horizontal. Donc, la trace de ce plan sur le plan vertical ou la projection verticale de la droite donnée, est parallèle à la ligne de terre.

On fera un raisonnement semblable pour prouver que, si une droite est parallèle au plan vertical, sa projection horizontale est parallèle à la ligne de terre.

138. *Lorsqu'une droite est parallèle à l'un des plans de projection, la projection d'une portion quelconque de la droite sur ce plan a la même longueur que cette portion.*

En effet, cette portion de droite et sa projection sont les deux côtés opposés d'un rectangle, dont les lignes projetantes de leurs extrémités sont les deux autres côtés.

139. Représentation d'un plan. — Pour représenter un plan donné, on peut prendre les projections de trois points du plan, non situés en ligne droite. Le plus ordinairement, on représente un plan par ses traces horizontale et verticale.

1° Si le plan donné rencontre la ligne de terre, ses traces horizontale et verticale sont deux droites qui se coupent et déterminent par conséquent le plan.

2° Si le plan donné est parallèle à l'un des plans de projection, sa trace sur l'autre plan est parallèle à la ligne de terre, car cette trace et la ligne de terre sont les intersections de deux plans parallèles par un troisième plan, et cette trace suffit pour déterminer le plan donné.

3° Si le plan donné est parallèle à la ligne de terre, ses traces horizontale et verticale, sont parallèles à la ligne de terre et déterminent le plan, puisque deux droites parallèles déterminent un plan.

140. Lorsqu'un plan est perpendiculaire à l'un des plans de projection, sa trace sur l'autre plan est perpendiculaire à la ligne de terre, car elle est l'intersection de deux plans perpendiculaires au premier plan de projection. Elle doit donc être perpendiculaire à la ligne de terre qui est tracée par son pied dans celui-ci.

141. Représentation des dessins. — *L'objet principal de la méthode des projections est de représenter avec exactitude sur une feuille de dessin, qui n'a que deux dimensions, longueur et largeur, tous les corps de la nature qui en ont trois, longueur, largeur et profondeur; lorsqu'ils peuvent être définis rigoureusement.*

Pour que les constructions puissent toutes s'effectuer sur une même feuille de dessin, on conçoit (*fig.* 81), après avoir projeté les points et les lignes de la question sur le plan horizontal HH′ et sur le plan vertical VV′, que celui-ci ait tourné autour de la ligne de terre XY pour se rabattre sur le plan horizontal, et ne former avec lui qu'un seul et même plan HH′, de manière que la partie supérieure VXY du plan vertical se confonde avec la partie postérieure H′XY du plan horizontal et la partie inférieure V′XY du plan vertical avec la partie antérieure HXY du plan horizontal. C'est donc sur le plan horizontal qu'on trace réellement toutes les constructions qui doivent appartenir aux deux plans de projection. Aussi faut-il toujours concevoir le plan vertical relevé et placé perpendiculairement au plan horizontal.

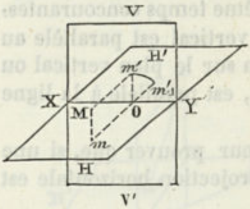

Fig. 81.

Lorsqu'on rabat le plan vertical sur le plan horizontal, de manière que la portion VXY du plan vertical s'applique sur la portion H′XY du plan horizontal, la droite $m'o$ qui est la perpendiculaire abaissée de la projection verticale m' du point M, sur la ligne de terre, ne cesse pas pendant le mouvement d'être perpendiculaire à la ligne de terre, et elle se rabat par conséquent sur le prolongement de la perpendiculaire mo abaissée de la projection horizontale m du point M sur la ligne de terre.

142. Par conséquent, dans la position qu'on est convenu de donner aux plans de projection, *les projections d'un même point sont situées sur une même perpendiculaire à la ligne de terre.*

143. En outre, comme la figure $Mmom'$ est un rectangle, $Mm = m'o$ et $Mm' = mo$. Par conséquent, *la distance d'un point au plan horizontal est égale à la distance de sa projection verticale à la ligne de terre ; et la distance d'un point au plan vertical est égale à la distance de sa projection horizontale à la ligne de terre.*

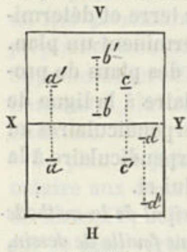

Fig. 82.

144. Supposons la ligne de terre XY tracée sur une feuille de dessin (fig. 82). Nous regarderons dorénavant la partie HXY de cette feuille comme représentant à la fois la portion *antérieure* du plan horizontal et la portion inférieure du plan vertical qui est venue, dans le rabattement, se confondre avec la première ; tandis que VXY représentera la portion supérieure du plan vertical et la portion postérieure du plan horizontal. Nous indiquerons par la même lettre les projections, horizontale et verticale, du même

point, en donnant un accent à la lettre qui représente la projection verticale. Ainsi, a et a' représentent, la première, la projection horizontale, la seconde, la projection verticale d'un point, A, de l'espace.

145. Les plans de projection forment quatre angles HXYV, VXYH', H'XYV', V'XYH (fig. 81) que nous désignerons, dans l'ordre qui vient d'être défini, par les noms de *premier*, *deuxième*, *troisième*, *quatrième* angle. (a, a') (fig. 82) est un point situé dans le premier angle ; (b, b'), un point situé dans le deuxième ; (c, c'), un point situé dans le troisième ; (d, d'), un point situé dans le quatrième.

146. Le dessin qui contient toutes les constructions appartenant aux données et aux résultats se nomme une *épure*.

Les lignes PRINCIPALES (celles qui représentent les *données* et les *résultats*) sont marquées par un trait plein et continu, lorsqu'elles sont visibles ; mais si ces lignes sont invisibles, elles sont *ponctuées*, c'est-à-dire tracées en points ronds.

Les lignes AUXILIAIRES (celles qui ne sont employées que comme des moyens de parvenir à la solution de la question), sont pointillées comme aa' (fig. 82) ou composées de petits traits interrompus comme mo (fig. 81), ou sont tracées avec une encre de couleur différente.

147. *Distinction des lignes visibles et des lignes invisibles.* On est convenu de regarder l'observateur comme *étant placé au-dessus du plan horizontal, à une distance infinie de ce plan et en avant du plan vertical.*

On fait la même convention pour la projection verticale. On regarde *l'observateur comme étant placé à une distance infinie du plan vertical, en avant de ce plan et au-dessus du plan horizontal.*

Les rayons visuels qui vont de l'œil de l'observateur à une figure tendent à devenir parallèles à mesure que l'observateur s'éloigne davantage d'un plan donné, en restant sur une même droite perpendiculaire au plan ; et lorsque le point de vue est transporté à une distance infinie, les rayons deviennent parallèles à cette perpendiculaire, c'est-à-dire parallèles aux lignes projetantes sur le plan donné.

La projection d'une figure sur un plan donné n'est donc autre chose qu'une vue de cette figure, prise d'un point infiniment éloigné et situé sur une perpendiculaire au plan.

PROBLÈME.

148. *Connaissant les projections de deux points, trouver la distance de ces points.*

Soient (a, a'), (b, b') (fig. 83) les deux points donnés. Les points a et a' doivent être placés sur une même ligne auxiliaire (pointillée ou au trait) perpendiculaire à la ligne de terre. Il en est de même des points b et b'. Les droites ab, $a'b'$ sont les projections de la droite qui unit les deux points, et dont on veut déterminer la longueur. Nous désignerons désormais par les grandes lettres, les points dont les petites lettres de même nom indiquent les projections. AB sera donc la droite dont les projections sont ab, $a'b'$. Faisons tourner le plan projetant de la droite AB sur le plan horizontal, autour de la verticale Aa pour le placer parallèlement au plan vertical de projection (ce qui revient à rabattre ce plan projetant sur un plan parallèle au plan vertical mené par Aa). La droite AB se trouvera alors parallèle au plan vertical, et par conséquent *se projettera en vraie grandeur* sur ce plan. Après ce mouvement, le point b vient se placer en b_1, sur un arc bb_1, dont le centre est a et le rayon ab; et la droite ab prend la position ab_1, parallèle à la ligne de terre. Comme la distance du point B au plan horizontal ne change pas pendant ce mouvement, la projection b' se déplace en restant sur la parallèle à la ligne de terre, menée par le point b' et vient se placer au point d'intersection b'_1, de cette parallèle et de la perpendiculaire à la ligne de terre menée par le point b_1; de sorte que $a'b'_1$ est la nouvelle projection verticale de AB, et, par conséquent, la longueur de celle-ci ou la distance des points A et B de l'espace.

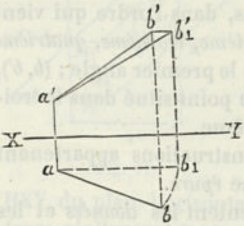

Fig. 83.

149. Scolie. — On peut opérer d'autres sortes de rabattements pour déterminer la longueur de AB; par exemple, on peut faire tourner le plan projetant, sur le plan vertical, autour de l'une des horizontales Aa', Bb' pour le placer parallèlement au plan horizontal; on peut aussi rabattre le trapèze AabB sur le plan horizontal, ou le trapèze A$a'b'$B sur le plan vertical.

PROBLÈME.

150. *Connaissant les projections d'une droite, trouver ses traces* (fig. 84).

Soient ab, $a'b'$ les projections, horizontale et verticale, d'une droite. La trace horizontale de la droite étant un point du plan horizontal, sa projection verticale est placée sur la ligne de terre; et comme elle doit aussi appartenir à la droite $a'b'$, elle est le point de rencontre d de ces deux droites. Par conséquent la perpendiculaire à la ligne de terre menée par le point d dans le plan horizontal passe par cette trace, et comme celle-ci doit évidemment se trouver sur la droite ab, la trace horizontale est le point t de concours de la perpendiculaire élevée au point d sur la ligne de terre, et de la projection horizontale ab. D'où il résulte que *pour déterminer la trace horizontale d'une droite, il faut prolonger la projection verticale jusqu'à la ligne de terre et élever en ce point, dans le plan horizontal, une perpendiculaire à celle-ci. Le point de rencontre de cette perpendiculaire et de la projection horizontale est la trace horizontale de la droite.*

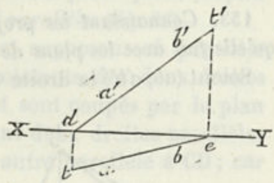

Fig. 84.

Un raisonnement semblable conduit à la règle suivante pour déterminer la trace verticale t' : *il faut prolonger la projection horizontale jusqu'à la ligne de terre et élever en ce point, dans le plan vertical, une perpendiculaire à celle-ci. Le point de rencontre de cette perpendiculaire et de la projection verticale est la trace verticale de la droite.*

151. Scolie. — On pourra, comme exercice, appliquer ces règles aux cas où la portion de la droite, comprise entre les deux plans, est située dans l'un quelconque des quatre angles des plans de projection.

PROBLÈME.

152. *Connaissant les traces, horizontale et verticale, d'une droite, construire ses projections* (fig. 84).

La trace horizontale t est un point de la projection horizontale de la droite. Le pied e de la perpendiculaire abaissée de la trace verticale t' sur la ligne de terre est un second point de cette projection. Par conséquent la droite te est la projection horizontale de la droite.

La trace verticale t' est un point de la projection verticale; le pied d de la perpendiculaire abaissée de la trace horizontale t sur la ligne de terre est un second point de cette projection. Par conséquent la droite $t'd$ est la projection verticale de la droite.

Règle a suivre. — *Pour construire la projection sur l'un des plans, on joint la trace sur ce plan au pied de la perpendiculaire abaissée de l'autre trace sur la ligne de terre.*

PROBLÈME.

153. *Connaissant les projections d'une droite, construire les angles qu'elle fait avec les plans de projection* (fig. 85).

Soient (ab, $a'b'$) la droite donnée, a sa trace horizontale, b' sa trace verticale. Si l'on conçoit placée la droite ab' de l'espace, on remarque qu'elle est l'hypoténuse commune à deux triangles rectangles : abb', $aa'b'$. L'angle $b'ab$ du premier est l'angle de la droite avec le plan horizontal (89). Pour construire le triangle abb', imaginons qu'il tourne autour de $b'b$ pour se rabattre sur le plan vertical. Le point a viendra en a'_1, et le triangle a'_1bb' sera égal au triangle abb'. L'angle $b'a'_1b$ est donc égal à l'angle de la droite avec le plan horizontal.

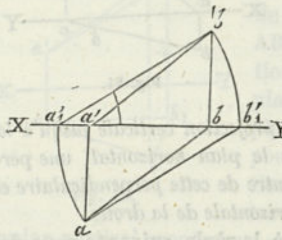

Fig. 85.

L'angle $ab'a'$ du second triangle est l'angle de la droite avec le plan vertical. Pour construire le second triangle $aa'b'$, imaginons qu'il tourne autour de aa', pour se rabattre sur le plan horizontal. Le point b' viendra en b'_1, et le triangle $aa'b'_1$ sera égal au triangle $aa'b'$. L'angle ab'_1a' est donc égal à l'angle de la droite avec le plan vertical.

154. Scolie. — On pourrait aussi construire ces triangles en rabattant le premier sur le plan horizontal après l'avoir fait tourner autour de la projection horizontale, et le second sur le plan vertical après l'avoir fait tourner autour de la projection verticale.

PROBLÈME.

155. *Par un point donné, mener une parallèle à une droite donnée.* — Lorsque deux droites sont parallèles, leurs projections sur un même plan sont parallèles ; car les plans projetants de ces droites sont parallèles, l'un d'eux contenant deux droites concourantes et respectivement parallèles à deux autres droites concourantes situées dans l'autre plan (52). Les traces de ces plans, ou les projections des deux droites, sont donc parallèles.

Il n'est pas vrai de dire que *si les projections de deux droites sur un plan sont parallèles, les droites sont parallèles*, car toutes les droites situées dans un plan projetant ont généralement pour projection la trace de ce plan projetant.

Mais, *si les projections de deux droites sur deux plans qui se coupent sont respectivement parallèles, les droites sont parallèles* (fig. 86).

Soient deux droites $(ab, a'b')$, $(cd, c'd')$; et supposons ab parallèle à cd, et $a'b'$ parallèle à $c'd'$. Les plans projetants des deux droites sur le plan horizontal sont parallèles et sont coupés par le plan projetant de AB sur le plan vertical suivant deux droites parallèles dont l'une est AB, et dont l'autre est en outre parallèle à CD ; car

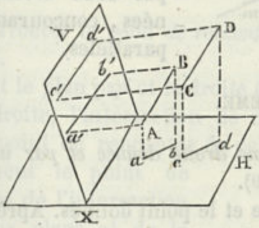

Fig. 86.

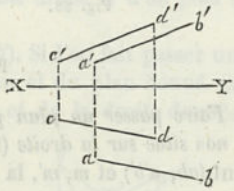

Fig. 87.

cette droite et CD sont les intersections des plans projetants de AB et CD sur le plan vertical, lesquels sont parallèles, par le plan projetant de CD sur le plan horizontal. Donc AB et CD sont parallèles.

SOLUTION. — Il résulte de là que, pour mener par un point donné (a, a') (fig. 87) une parallèle à une droite donnée $(cd', c'd')$, il suffit de mener par le point a une parallèle ab à cd et par le point a' une parallèle $a'b'$ à $c'd'$. La droite $(ab, a'b')$ est la parallèle demandée.

PROBLÈME.

156. *Construire les traces du plan qui passe par trois points donnés, non situés en ligne droite* (fig. 88).

Soient (a, a'), (b, b'), (c, c') les trois points donnés. Les trois droites $(ab, a'b')$, $(bc, b'c')$, $(ca, c'a')$ étant situées dans le plan, il suffira de déterminer les traces horizontales et verticales de deux de ces droites. Connaissant alors deux points de chaque trace, le problème sera résolu.

Soient m et m' les traces, horizontale et verticale, de (ac), $(a'c')$; n et n' les traces, horizontale et verticale, de (bc), $(b'c')$. mn est la trace horizontale et $m'n'$ la trace verticale du plan demandé.

157. — SCOLIE. Les traces mn, $m'n'$ doivent passer par un même point

de la ligne de terre ou être parallèles à celle-ci ; en outre les traces,

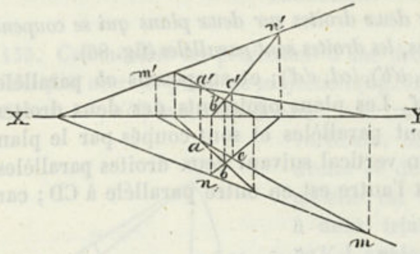

Fig. 88.

horizontale et verticale, de $(ab,\ a'b')$ doivent se trouver respectivement sur mn et sur $m'n'$.

158. Corollaire. — Cette solution peut servir à trouver les traces du plan assujetti à passer par deux droites données, concourantes ou parallèles.

PROBLÈME.

159. *Faire passer un plan par une droite donnée et par un point donné, non situé sur la droite* (fig. 89).

Soient $(ab,\ a'b')$ et $m,\ m'$, la droite et le point donnés. Après avoir

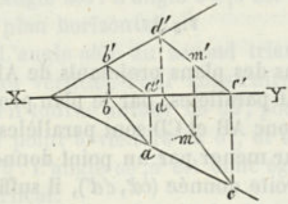

Fig. 89.

déterminé les traces horizontale, a, et verticale, b', de la droite, on mène par le point $(m,\ m')$ une parallèle $(cd,\ c'd')$ à la droite $(ab,\ a'b')$ et on détermine ensuite les traces horizontale, c, et verticale, d', de $(cd,\ c'd')$. Les droites ac, $b'd'$ sont les traces, horizontale et verticale, du plan demandé.

160. Scolie. — On pourrait aussi joindre le point donné à un point quelconque de la droite donnée et faire passer un plan par les deux droites.

PROBLÈME.

161. *Construire l'intersection de deux plans, dont les traces sont données* (fig. 90).

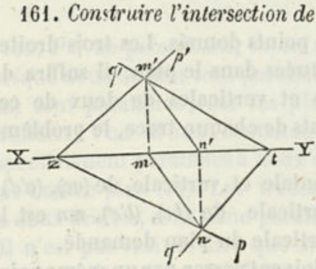

Fig. 90.

Soient les deux plans $(zp,\ zp')$, $(tq,\ tq')$, dont les traces horizontales se coupent au point n et les traces verticales au point m'. Le point n, appartenant aux deux plans, est un point de leur intersection, et comme il est sur le plan horizontal, le point n est la trace horizontale de l'intersection des deux plans ; pour une raison semblable le point m' est la trace verticale de cette intersection. La question revient donc à construire les projections d'une droite dont on connaît les traces sur les plans de projection (152). On abaisse des points n et m' les perpendiculaires nn' et mm' sur la ligne de terre. Les droites mn, $m'n'$ sont les projections de l'intersection des deux plans donnés.

PROBLÈME.

162. *Trouver le point de rencontre d'une droite et d'un plan donnés* (fig. 91).

Soient le plan pzp' et la droite $(ab, a'b')$. Si l'on fait passer un plan par la droite, l'intersection de ce plan et du plan donné passera par le point de rencontre de celui-ci et de la droite donnée. Par conséquent le point de concours de l'intersection des deux plans et de la droite donnée sera le point de rencontre du plan et de la droite donnés.

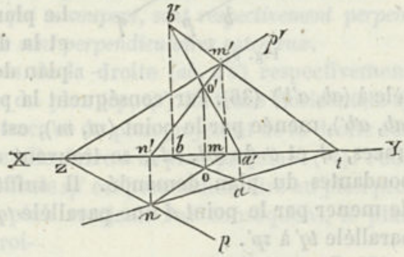

Fig. 91.

Tirons par la trace horizontale a, de $(ab, a'b')$, la droite at qui rencontre au point t la ligne de terre ; et, par le point t et la trace verticale b', de $(ab, a'b')$, la droite tb'. Le plan dont ta et tb' sont les traces contient la droite $(ab, a'b')$, car celle-ci a deux points a et b' dans ce plan. Le point de rencontre (o, o'), de l'intersection $(mn, m'n')$ des deux plans et de la droite $(ab, a'b')$, est le point de rencontre demandé.

163. Scolie. — Au lieu du plan atb', on aurait pu choisir l'un des plans projetants de la droite.

PROBLÈME.

164. *Trouver le point d'intersection de trois plans.*

Trois plans P, Q, R, peuvent se couper en un point, comme les trois faces d'un angle trièdre ; ou bien ces plans peuvent se couper deux à deux suivant des droites parallèles ; ou enfin ils peuvent passer tous trois par une même droite.

On construit l'intersection de deux des trois plans P et Q, par exemple, ensuite celle des plans P et R, ou Q et R, et on cherche le point de rencontre des deux intersections.

PROBLÈME.

165. *Par un point donné, mener un plan parallèle à un plan donné* (fig. 92).

Soient (zp, zp') le plan et (m, m') le point donnés. Les traces du plan demandé doivent être parallèles aux traces du plan donné. Il suffit donc, pour les déterminer, de trouver un point de chacune d'elles. Pour y parvenir on trace une droite quelconque (ab, $a'b'$) dans le plan donné, en joignant un point b de la trace horizontale à un point a' de la trace verticale (1). Le plan mené par le point (m, m') et la droite (ab, $a'b'$) couperait le plan demandé suivant une parallèle à (ab, $a'b'$) (36). Par conséquent la parallèle (cd, $c'd'$) à la droite (ab, $a'b'$), menée par le point (m, m'), est dans le plan demandé. Les traces, d et c' de (cd, $c'd'$), se trouvent donc sur les traces correspondantes du plan demandé. Il suffit pour construire celles-ci de mener par le point d une parallèle tq à zp, et par le point c' une parallèle tq' à zp'.

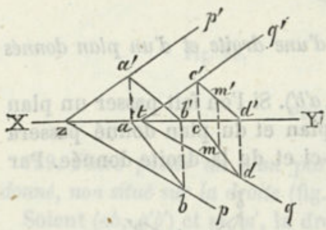

Fig. 92.

166. Scolie I. — On pourrait, au lieu d'une droite telle que (ab, $a'b'$) qui rencontre les deux plans de projection, prendre une droite parallèle au plan horizontal ou au plan vertical.

167. Scolie II. — Si l'une des traces de la droite, menée par le point donné parallèlement à une droite située dans le plan donné, se trouvait sur la trace correspondante de celui-ci, on en conclurait que le point donné est situé dans le plan donné.

PROBLÈME.

168. *Par un point donné mener une droite perpendiculaire à un plan donné. Déterminer ensuite la distance du point à la droite.*

Lorsqu'une droite et un plan sont perpendiculaires, la projection de la droite et la trace du plan sur un même plan sont perpendiculaires entre elles. En effet soient (fig. 93) M le plan et AB la droite don-

(1) La droite (ab, $a'b'$) est dans le plan donné, car elle a deux points dans ce plan, savoir : ses deux traces horizontale, b, et verticale, a'.

nés, SV la trace du plan M sur un plan R et aB la projection de AB sur celui-ci. La droite AB étant perpendiculaire au plan M, le plan projetant de AB sur le plan R est perpendiculaire aux deux plans M et R et par suite à leur intersection commune SV (76). La droite SV trace du plan M est donc perpendiculaire à la droite aB qui est la trace du plan projetant P sur le plan R, ou la projection de AB.

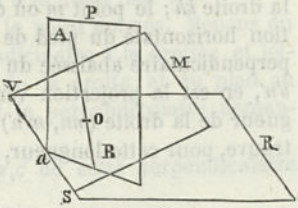

Fig. 93.

Il n'est pas toujours vrai de dire que, *si la trace d'un plan et la projection d'une droite sur un même plan sont perpendiculaires, la droite et le plan sont perpendiculaires*, parce qu'on peut mener, dans le plan projetant de la droite, d'autres droites non perpendiculaires au plan donné.

169. *Mais lorsque les traces d'un plan et les projections correspondantes d'une droite, sur deux plans qui se coupent, sont respectivement perpendiculaires, le plan et la droite sont perpendiculaires entre eux.*

Supposons les projections de la droite (ab, $a'b'$) respectivement perpendiculaires aux traces du plan (zp, zp'). La trace horizontale zp étant perpendiculaire à la trace ab du plan projetant de la droite sur le plan horizontal, est perpendiculaire à ce plan projetant (74). Pour la même raison la trace verticale zp' est perpendiculaire au plan projetant de la droite sur le plan vertical. Par conséquent, le plan (zp, zp'), contenant deux droites respectivement perpendiculaires aux deux plans projetants de la droite (ab, $a'b'$), est perpendiculaire à leur intersection, c'est-à-dire à la droite elle-même (ab, $a'b'$).

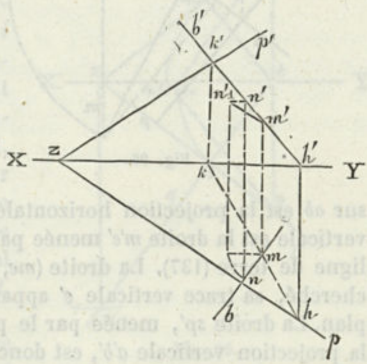

Fig. 94.

170. Il suit de là que 1° *pour mener par un point donné* (n, n') *une droite perpendiculaire à un plan donné* (zp, zp') (fig. 94), il suffit d'abaisser de chacun des points n, n' une perpendiculaire sur la trace correspondante du plan. Ces perpendiculaires nb, $n'b'$ sont les projections de la perpendiculaire demandée.

2° *Pour déterminer ensuite la distance du point au plan*, on commence par chercher le point de rencontre de la perpendiculaire et du plan (162). On peut prendre, pour le plan qui passe par la droite, son plan projetant sur le plan vertical. La projection horizontale de l'intersection de ce plan projetant et du plan (zp, zp') est la droite kh; le point m où cette droite rencontre nb est la projection horizontale du pied de la perpendiculaire et le point m' où la perpendiculaire abaissée du point m sur la ligne de terre rencontre $b'n'$, en est la projection verticale. On détermine ensuite la longueur de la droite (mn, $m'n'$) par la construction indiquée (148). On trouve, pour cette longueur, la droite $m'n'_1$.

PROBLÈME.

171. *Par un point donné mener un plan perpendiculaire à une droite donnée* (fig. 95).

Soient (m, m') le point et (ab, $a'b'$) la droite donnés. Menons par (m, m') une parallèle à la trace horizontale du plan cherché. Cette droite sera parallèle à sa projection horizontale (36) et, par suite, celle-ci sera parallèle à la trace horizontale du plan. Or cette trace horizontale est perpendiculaire à la projection horizontale ab de la droite (168); par conséquent la perpendiculaire me abaissée du point m sur ab est la projection horizontale de cette droite. Sa projection verticale est la droite $m'e'$ menée par le point m' parallèlement à la ligne de terre (137). La droite (me, $m'e'$) étant située dans le plan cherché, sa trace verticale e' appartient à la trace verticale de ce plan. La droite zp', menée par le point e' perpendiculairement à la projection verticale $a'b'$, est donc la trace verticale du plan, et la droite zp menée du point z perpendiculairement à la projection horizontale ab, la trace horizontale de ce plan.

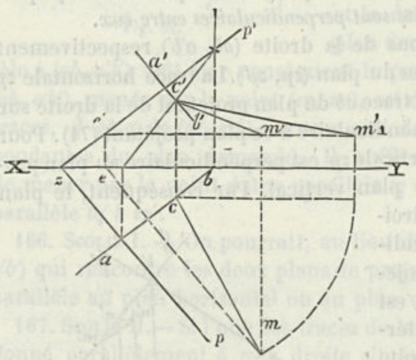

Fig. 95.

PROBLÈME.

172. *Par un point donné, mener une perpendiculaire à une droite donnée et déterminer la distance du point à la droite* (fig. 95).

Soient (ab, $a'b'$) la droite et (m, m') le point donnés. Menons du point (m, m'), le plan (zp, zp') perpendiculaire à la droite ; et joignons le point de rencontre (c, c') de la droite et du plan au point (m, m'). La droite (mc, $m'c'$) est la perpendiculaire demandée (8).

173. On détermine la longueur m'_1c' de cette perpendiculaire par la construction indiquée (148).

PROBLÈME.

174. *Construire* 1° *les angles d'un plan donné avec les plans de projection ;* 2° *l'angle des traces du plan* (fig. 96).

1° Soit (zp, zp') le plan donné. D'un point quelconque t de la ligne de terre, menons un plan (tq, tq') perpendiculaire à la trace horizontale zp. Ce plan sera perpendiculaire au plan horizontal et aura, par suite, pour trace verticale une perpendiculaire à la ligne de terre. Soient i et m' les points où les traces de ce plan rencontrent les traces correspondantes du plan donné. L'angle i du triangle $m'ti$ est égal à l'angle des deux plans. On construit donc le triangle $m'ti$ en le rabattant sur le plan vertical, après l'avoir fait tourner autour de $m't$. Le point i vient alors se placer en i_1 sur la ligne de terre. Le triangle $m'ti_1$ est égal au triangle $m'ti$, et l'angle $m'i_1t$, à l'angle demandé.

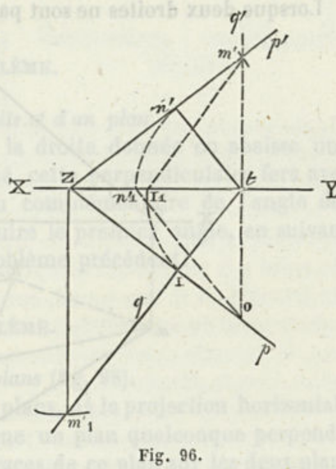

Fig. 96.

On construit d'une manière semblable l'angle du plan donné avec le plan vertical. Par le point t on mène un plan perpendiculaire à la trace verticale zp'. Les traces de ce plan rencontrent les traces correspondantes du plan donné aux points o et n' ; et l'angle n' du triangle otn' est égal à l'angle des deux plans. On construit le triangle otn' en le rabattant sur le plan horizontal, après l'avoir fait tourner autour de ot. Après ce rabattement, le point n' se trouve placé en n'_1 sur la ligne de terre. Le triangle otn'_1 est égal au triangle otn', et l'angle on'_1t, à l'angle demandé.

On pourrait aussi construire ces triangles, en rabattant le premier sur le plan horizontal et le second sur le plan vertical.

2° *Pour construire l'angle des deux traces du plan donné*, on remarquera que le triangle $zm'i$ est rectangle au point i, et que, si l'on fait tourner ce triangle autour de zp, pour le rabattre sur le plan horizontal, la droite $m'i$ ne cessera pas dans ce mouvement d'être perpendiculaire à zp. Elle se rabattra donc sur le prolongement de ti, et le point m' se rabattra à une distance du point z, égale à zm'. Par conséquent le point m'_1, d'intersection du prolongement de ti et d'un arc de circonférence décrit du point z comme centre avec zm' pour rayon, sera le rabattement du point m'; et, si l'on tire la droite zm'_1, l'angle m'_1zi sera égal à l'angle des deux traces du plan donné.

PROBLÈME.

175. *Construire l'angle de deux droites.*

Lorsque deux droites ne sont pas situées dans un même plan, on

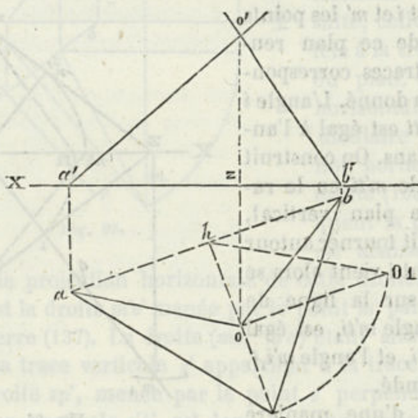

Fig. 97.

nomme *angle* de ces droites, celui qui est formé par deux droites menées d'un même point, quelconque, parallèlement aux premières.

Nous supposerons que les deux droites soient situées dans un même plan. Soient $(oa, o'a')$, $(ob, o'b')$ les droites données, a et b les traces horizontales de ces droites (fig. 97). Tirons la droite ab, et du point o, abaissons la perpendiculaire oh sur ab. Si l'on joint le point h au point O de l'espace (dont les projections sont o, o'), la droite Oh sera perpendiculaire sur ab (25), et, par suite, la hauteur du triangle Oab, dont l'angle O est l'angle demandé. Pour construire le triangle Oab, nous le rabattrons sur le plan horizontal, après l'avoir fait tourner autour de ab. Dans ce mouvement, la droite Oh ne cesse pas d'être perpendiculaire sur ab, et elle se rabat sur ho prolongé. Il suffit donc, pour trouver le rabattement du point O, de connaître la distance Oh. Or celle-ci est l'hypoténuse d'un triangle rectangle, dont un des côtés de l'angle droit est oh, et l'autre côté $Oo = o'z$. Et si l'on rabat ce triangle rectangle Ooh sur le plan horizontal, après l'avoir fait tourner autour de oh, le point O se rabattra en O_1 sur la perpendiculaire à oh au point o, à une distance de celui-ci égale à $o'z$; de sorte que hO_1 est égale à hO. On décrit donc du point h comme centre, avec un rayon égal à hO_1 un arc de circonférence qui coupe ho prolongé au point O_2 ; celui-ci est le rabattement du point O, lorsqu'on a fait tourner le triangle Oab autour de ab pour le rabattre sur le plan horizontal. L'angle aO_2b, formé en joignant le point O_2 aux points a et b, est par conséquent l'angle demandé.

PROBLÈME.

176. *Construire l'angle d'une droite et d'un plan.*

Si d'un point quelconque de la droite donnée on abaisse une perpendiculaire sur le plan donné, cette perpendiculaire fera avec la droite donnée un angle aigu complémentaire de l'angle demandé. Il suffira donc de construire le premier angle, en suivant la méthode indiquée dans le problème précédent.

PROBLÈME.

177. *Construire l'angle de deux plans* (fig. 98).

Soient (zl, zl'), (th, th') les deux plans, ab la projection horizontale de leur intersection. Si l'on mène un plan quelconque perpendiculaire à cette intersection, les traces de ce plan sur les deux plans donnés feront entre elles l'angle plan correspondant à l'angle dièdre des deux plans. Tirons une droite mn perpendiculaire à la projection horizontale ab de l'intersection. On peut regarder mn comme la trace horizontale d'un plan perpendiculaire à l'intersection des deux plans donnés (168); et en même temps comme l'un des côtés d'un triangle, dont l'angle opposé est l'angle demandé, et les deux autres côtés les traces de ce plan sur les deux plans donnés. Pour construire ce triangle, nous le rabattrons sur le plan horizontal en le faisant tourner autour de mn, et nous ferons observer que le point p, de rencontre de ab et mn, est le pied de la hauteur de ce triangle correspondante à mn. Car, si l'on abaisse du sommet opposé à mn une perpendiculaire sur le plan horizontal, elle tombera sur ab, et si du pied de cette perpendiculaire on abaisse une perpendiculaire sur mn, elle se confondra avec ab. Lorsque le triangle tourne autour de mn, la hauteur correspondante à mn ne cesse pas d'être perpendiculaire à celle-ci au point p, par conséquent après le rabattement elle se confond avec ab. Il suffit donc de connaître la longueur de cette hauteur pour déterminer le rabattement du sommet du triangle. Cette hauteur est la perpendiculaire abaissée du point p sur l'intersection commune, car cette intersection, étant perpendiculaire au plan du triangle, est en même temps perpendiculaire à toute droite menée par son pied dans ce plan. Pour construire la longueur de cette perpendiculaire, rabattons sur le plan horizontal le plan projetant $b'ba$ de l'intersection $(ab, a'b')$ sur ce plan. Le point b' se rabat en b'_1, sur une perpendiculaire élevée par le point b à la droite ab, et l'intersection elle-même se rabat suivant ab'_1. Abaissant du point p la perpendiculaire pO_1 sur ab'_1, pO_1 sera égale à la hauteur du triangle, et si l'on prend, sur ab, $pO_2 = pO_1$, le point O_2 sera le rabattement du sommet du triangle; tirant ensuite les droites O_2m, O_2n, le triangle O_2mn représentera le triangle rabattu et l'angle mO_2n, l'angle demandé.

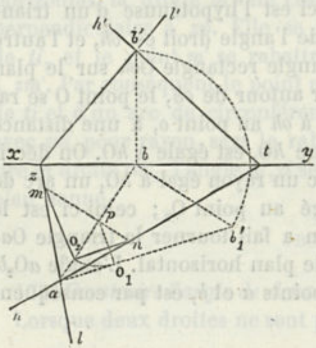

Fig. 98.

178. Scolie. — Les plans horizontaux et les plans verticaux sont fréquemment employés dans les arts, surtout dans la construction des édifices. Les planchers, les plafonds représentent des plans horizontaux. Les faces supérieures et inférieures des pierres de taille et des briques qu'on pose par assises sont aussi horizontales. Les faces des cloisons des appartements sont des plans verticaux.

§ 10. — Plan. Coupe. Élévation.

179. Les différentes parties ou détails d'un édifice, les pièces qui entrent dans la construction d'une machine, peuvent être représentées d'une manière exacte à l'aide de la méthode des projections. On suppose que l'édifice ou la machine soit coupée par une série de plans horizontaux et par une série de plans verticaux, convenablement choisis pour que les détails puissent être reproduits fidèlement.

180. PLAN.— Les architectes considèrent les sections faites dans un édifice par des plans horizontaux correspondants aux différents étages. Les intersections des surfaces des murs et de l'un de ces plans horizontaux sont les lignes qui forment les contours, dont la projection horizontale est dite *le plan géométral* de l'étage correspondant. La figure 99 représente le plan du rez-de-chaussée d'une maison.

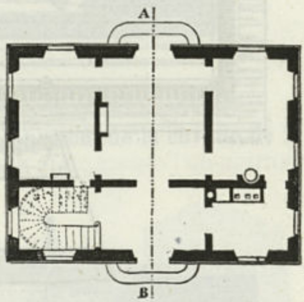

Fig. 99.

Les ingénieurs supposent aussi des sections faites dans une machine par des plans horizontaux, et les lignes qui sont les intersections d'un plan horizontal avec les surfaces des pièces de la machine, forment une figure dont la projection horizontale est le *plan géométral* de la section.

La figure 100 représente le plan de la cuvette de jauge et de distribution de l'ancienne machine de *Marly*. La section est faite par un plan horizontal passant par l'horizontale GG'. Des pompes amènent l'eau en A, d'où elle tombe sous forme de nappe dans un réservoir rectangulaire. Deux cloisons B et C enveloppent la partie N de ce réservoir, sans descendre jusqu'au fond, afin d'empêcher que les mouvements, occasionnés sur la surface par l'eau qui arrive en A, ne se transmettent dans la partie restante L. L'eau passe sous ces deux cloisons pour se rendre de N en L, et sa surface libre, dans toute l'étendue de cette dernière partie L du réservoir, reste toujours parfaitement tranquille. Une cloison D sert de limite au réservoir et s'étend dans trois directions différentes. Elle porte dans toute sa longueur un grand nombre d'orifices, par lesquels l'eau sort pour tomber dans une rigole ménagée en dehors de la cloison D et dans toute sa longueur. De là elle passe en F dans un canal couvert qui la conduit à l'aqueduc. Une cloison EE divise le réservoir NL.

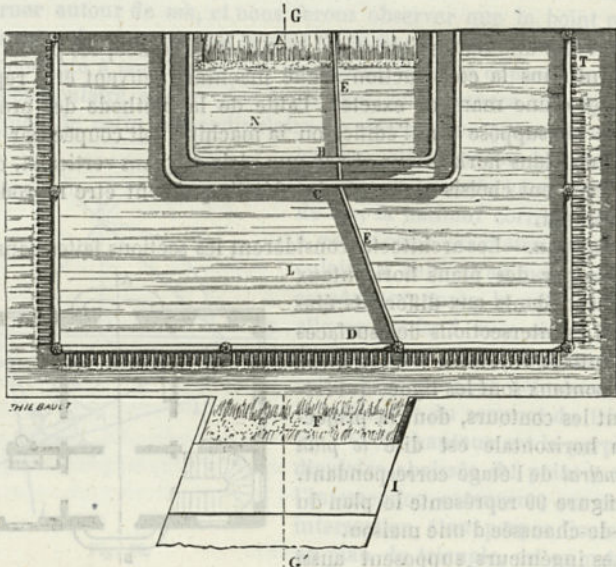

Fig. 100.

181. Coupe ou Profil. — Les architectes emploient aussi la considération des plans verticaux, et la section faite par un de ces plans est représentée par sa projection sur un plan vertical parallèle. Ces projections portent le nom de *coupe* ou *profil*; et le plan vertical peut avoir une direction quelconque. La figure 101 représente la coupe verticale, faite suivant l'horizontale AB, de la maison dont la figure 99 représente le plan du rez-de-chaussée.

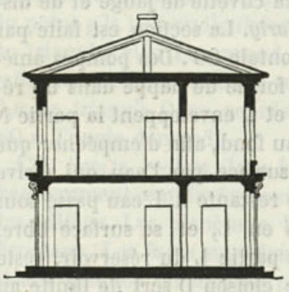

Fig. 101.

On conçoit aussi des sections verticales faites dans une machine. La figure 102 représente la section faite dans un navire à hélice par le plan vertical qui passe par l'axe du navire et montre la position de l'hélice A placée à l'arrière du navire, à une petite distance en avant du gouvernail B.

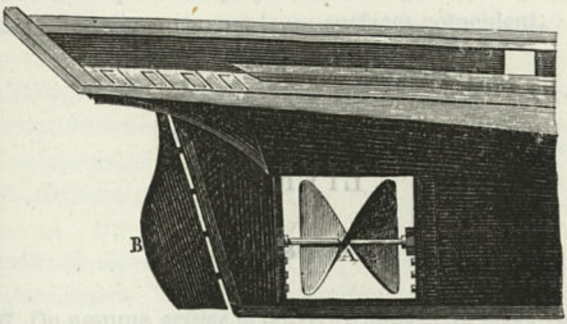

Fig. 102.

La figure 103 représente une coupe ou profil de la cuvette de la machine de Marly.

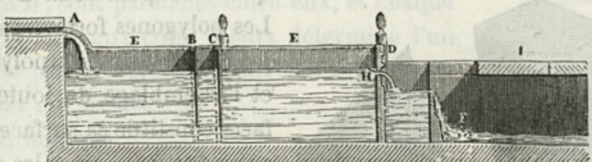

Fig. 103.

182. Élévation. — Les architectes prennent aussi le dessin formé par les lignes qui représentent les projections des différentes lignes de la façade d'une maison, sur un plan vertical parallèle à celle-ci. Cette projection, qui fait connaître la disposition de la façade et son ornementation, porte le nom d'*élévation* de la maison. La figure 104 représente l'élévation de la maison dont le plan du rez-de-chaussée et une coupe sont représentés par les figures 99 et 101.

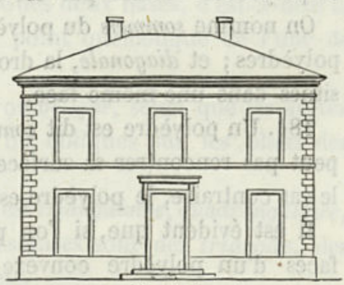

Fig. 104.

LIVRE II

Polyèdres.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

183. On désigne, sous le nom de *polyèdre* (fig. 105 et 106), la portion de l'espace ou le corps, limité en tous sens par des plans qui se coupent deux à deux. Les polygones formés par ces plans sont les *faces* du polyèdre, et l'assemblage de toutes les faces constitue sa surface. Les côtés des faces sont les *arêtes* du polyèdre ; les *angles* du polyèdre sont les angles dièdres et polyèdres formés par les faces.

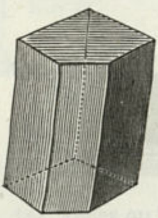

Fig. 105.

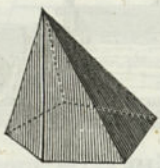

Fig. 106.

On nomme *sommets* du polyèdre, les sommets de ses angles polyèdres ; et *diagonale*, la droite qui unit deux sommets non situés dans une même face.

184. Un polyèdre est dit *convexe*, lorsqu'une ligne droite ne peut pas rencontrer sa surface en plus de deux points. Dans le cas contraire, le polyèdre est dit *concave*.

Il est évident que, si l'on prolonge indéfiniment l'une des faces d'un polyèdre convexe, toutes les autres faces sont situées d'un même côté du plan de la première.

185. On donne en particulier les noms de *tétraèdre*, *hexaèdre*,

octaèdre, *dodécaèdre*, *icosaèdre*, aux polyèdres de 4, 6, 8, 12, 20 faces.

186. On dit que deux polyèdres sont égaux, lorsqu'on peut les placer de telle sorte que leurs surfaces coïncident.

§ 1. — Prisme.

DÉFINITIONS.

187. On nomme *prisme* le polyèdre dont deux faces (fig. 107) sont des polygones égaux et parallèles, ABCDE, A'B'C'D'E', qu'on nomme *bases* du prisme; et les autres faces, des parallélogrammes, ABB'A', BCC'B', CDC'D'..... Les côtés égaux des bases, tels que AB, A'B', sont parallèles entre eux, et chaque couple de deux côtés égaux détermine l'un de ces parallélogrammes qui sont les *faces latérales* du prisme.

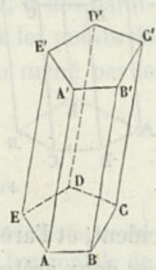

Fig. 107.

On nomme :

Arête latérale du prisme, l'intersection de deux faces latérales;

Arête de base, chacun des côtés des bases;

Hauteur du prisme, la distance des deux bases, c'est-à-dire la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de l'une de ses bases sur l'autre.

188. Un prisme est dit *droit* ou *oblique*, selon que les arêtes latérales sont perpendiculaires ou obliques sur les plans des bases.

189. On dit d'un prisme qu'il est *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonal*, etc., suivant que les bases sont des *triangles*, des *quadrilatères*, des *pentagones*, etc.

THÉORÈME.

190. *Deux prismes sont égaux lorsqu'ils ont un trièdre compris entre trois faces égales chacune à chacune et semblablement disposées* (fig. 108).

Supposons que les trois faces ABCDE, ABB'A', AEE'A' du prisme AD' soient égales chacune à chacune aux trois faces MNPQR, MNN'M', MRR'M' du prisme MQ'; et les angles BAE, BAA', EAA', égaux respectivement aux angles NMR, NMM', RMM'.

Transportons le prisme MQ', pour le placer de manière que les deux bases égales MNPQR, ABCDE coïncident. Les deux prismes étant situés du même côté du plan ABCDE, et les trois angles plans qui forment le trièdre M étant égaux chacun à chacun aux trois angles plans qui forment le trièdre A, et semblablement placés, ces deux trièdres coïncident, et l'arête MM' se confond avec l'arête AA'; mais comme ces deux arêtes sont égales, le point M' tombe en A'. En outre les parallélogrammes ABB'A', MNN'M' étant égaux, le côté M'N' se confond avec son égal, le côté A'B'; pour la même raison, M'R' se confond avec A'E'. Les deux bases supérieures A'B'C'D'E', M'N'P'Q'R' coïncident donc; et, par suite, les surfaces des prismes coïncident aussi; donc les deux prismes sont égaux.

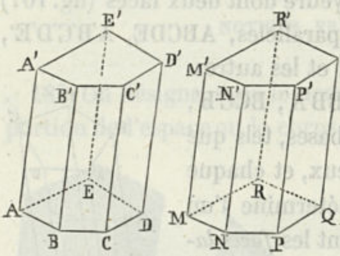

Fig. 108.

191. Scolie. — Si les faces égales dans les deux prismes ne sont pas semblablement disposées, les deux prismes ne peuvent pas coïncider par la superposition.

192. Corollaire I. — *Deux prismes droits sont égaux lorsqu'ils ont des bases égales et des hauteurs égales.* Car les deux prismes ont un trièdre compris entre trois faces égales chacune à chacune et semblablement disposées.

193. Corollaire II. — *Construire un prisme, connaissant l'une des bases et l'une des arêtes latérales de grandeur et de position.*

Soient ABCDE la base et AA′ l'arête données (fig. 109). Par le point A′ menons un plan parallèle au plan ABCDE. Ensuite, tirons la droite A′B′ parallèle et égale à AB et dirigée dans le même sens; B′C′ parallèle et égale à BC et dirigée dans le même sens, etc., et joignons, d'un plan à l'autre, les sommets des angles homologues par les droites AA′, BB′, CC′, etc. La figure AD′ construite de cette manière est un prisme, car les polygones ABCDE, A′B′C′D′E′ sont parallèles et égaux, et les faces ABB′A′, ACC′B′, CDD′C′, etc., sont des parallélogrammes.

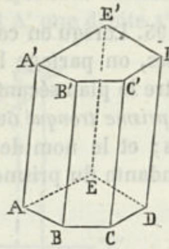

Fig. 109.

On pourrait aussi mener par les points B, C, D, E des parallèles BB′, CC′, etc., à AA′ et joindre deux à deux les points de rencontre B′, C′, etc., de ces droites, avec le plan mené par le point A′.

PROBLÈME.

194. *Dessiner un prisme droit et complet* (fig. 110).

Soit XY la ligne de terre. Nous supposerons la base inférieure du prisme située dans le plan horizontal. La projection horizontale de cette base est la base elle-même ABCDE. Les pieds A′, B′, C′, D′, E′, des perpendiculaires abaissées des sommets A, B, C, D, E sur la ligne de terre sont (126) les projections verticales de ces sommets, et les perpendiculaires à la ligne de terre A′A″, B′B″, C′C″, D′D″, E′E″, égales chacune à la longueur des arêtes latérales, sont (136) les projections verticales de ces mêmes arêtes, dont les projections horizontales sont les points A, B, C, D, E. La droite A″C″, qui contient les extrémités A″, B″, C″, D″, E″, des projections verticales des arêtes, est la projection verticale de la base supérieure du prisme droit. Les droites A′A″... appartiennent aussi aux lignes auxiliaires A′A″...

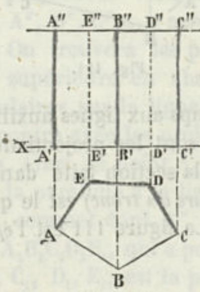

Fig. 110.

La figure 110 représente l'*épure* ou le *dessin* du prisme, et peut immédiatement servir à faire connaître les mesures des lignes et des surfaces qui appartiennent au prisme.

DÉFINITION.

195. Lorsqu'on coupe un prisme par un plan non parallèle à ses bases, on partage le prisme en deux parties comprises chacune entre le plan sécant et l'une des bases du prisme. On donne le nom de *prisme tronqué* ou *tronc de prisme* à chacune de ces deux parties ; et le nom de *bases* du tronc à la section et à la base correspondante du prisme.

PROBLÈME.

196. *Dessiner un prisme droit et tronqué* (fig. 111).

Soit XY la ligne de terre. Supposons la base ABCD du tronc de prisme située dans le plan horizontal, et les arêtes latérales perpendiculaires à ce dernier plan. La projection horizontale de cette base est la base elle-même. Les projections verticales des sommets A, B, C, D, sont les pieds A′, B′, C′, D′, des perpendiculaires abaissées de A, B, C, D sur la ligne de terre, et les perpendiculaires à la ligne de terre A′A″, B′B″, C′C″, D′D″, dont les longueurs sont égales respectivement à celles des arêtes latérales du tronc de prisme, sont les projections verticales de ces mêmes arêtes, qui ont pour projections horizontales les points A, B, C, D, et elles appartiennent en même temps aux lignes auxiliaires indiquant que deux points tels que A et A″ sont les projections d'un même point. La projection verticale de la section faite dans le prisme (que nous appellerons *base supérieure du tronc*) est le quadrilatère A″B″C″D″.

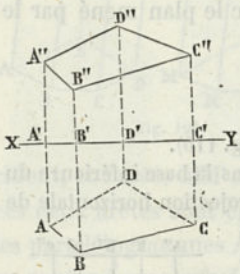

Fig. 111.

La figure 111 est l'*épure* ou le dessin du tronc de prisme.

PROBLÈME.

197. *Dessiner un prisme oblique et complet* (fig. 112).

Soit XY la ligne de terre. Supposons la base inférieure du prisme ABCDE, située dans le plan horizontal ; et les arêtes latérales, parallèles au plan vertical. Les projections horizontales de celles-ci sont parallèles à la ligne de terre ; les projections verticales font avec la ligne de terre un angle égal à celui de ces arêtes avec le plan horizontal, et elles ont la même longueur que celles-ci. Les pieds A′, B′, C′, D′, E′, des perpendiculaires abaissées des points A, B, C, D, E sur la ligne de terre, sont les projections verticales des sommets A, B, C, D, E. Menons par le point A′ une droite A′A″

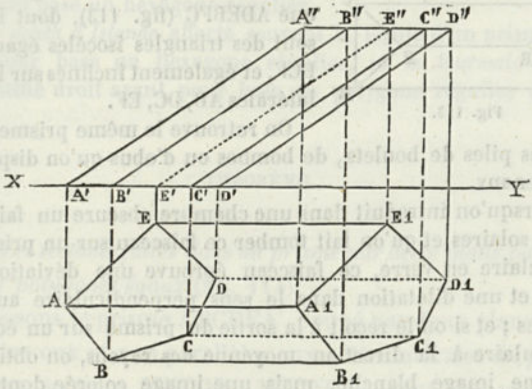

Fig. 112.

qui fasse avec la ligne de terre un angle A″A′Y égal à celui des arêtes latérales avec le plan horizontal, et prenons A′A″ égale à la longueur des arêtes latérales. Cette dernière droite est la projection verticale de l'arête dont A est la trace horizontale. On obtiendra par une construction semblable les projections verticales B′B″, C′C″,..... des autres arêtes, et les points A″, B″, C″,..... seront sur une même parallèle à la ligne de terre. On trouvera les projections horizontales des sommets de la base supérieure en abaissant des points A″, B″, C″,..... des perpendiculaires sur la ligne de terre, et en les prolongeant jusqu'à leur rencontre avec les projections horizontales des arêtes correspondantes. Ainsi, le point A_1 de rencontre de la perpendiculaire $A''A_1$ et de la parallèle à la ligne de terre AA_1 est la projection horizontale du sommet dont A″ est la projection verticale. Par suite, le polygone $A_1B_1C_1D_1E_1$, qui a pour sommets les projections horizontales A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, est la projection horizontale de la base supérieure.

La figure 112 est l'*épure* ou le *dessin* du prisme et peut immédiatement servir à faire connaître les mesures des lignes et des surfaces qui appartiennent au prisme.

APPLICATIONS.

198. *a.* Une maison qui a deux *pignons*, et dont le plan est un rectangle, a pour toit un prisme triangulaire droit et creux.

b. Lorsqu'une maison n'a pas de *pignon*, le toit a deux croupes et représente un prisme triangulaire tronqué ADEBFC (fig. 113), dont les bases sont des triangles isocèles égaux, ADE, BCF, et également inclinés sur les arêtes latérales AB, DC, EF.

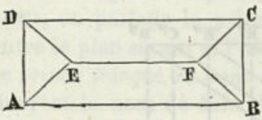

Fig. 113.

On retrouve le même prisme tronqué dans les piles de boulets, de bombes ou d'obus qu'on dispose dans les arsenaux.

c. Lorsqu'on introduit dans une chambre obscure un faisceau de rayons solaires et qu'on fait tomber ce faisceau sur un prisme droit triangulaire en verre, ce faisceau éprouve une déviation (se réfracte) et une dilatation dans le sens perpendiculaire aux arêtes latérales ; et si on le reçoit à la sortie du prisme sur un écran perpendiculaire à la direction moyenne des rayons, on obtient, non plus une image blanche, mais une image colorée dont les couleurs sont celles de l'arc-en-ciel, et se succèdent dans l'ordre suivant :

Rouge, orangé, jaune, vert, bleu, indigo, violet.

Cette image a reçu le nom de *spectre solaire*.

d. Les charpentiers et les tailleurs de pierre, les menuisiers, les cartonniers, etc., ont journellement à exécuter des prismes droits pleins ou creux.

Les charpentiers et les tailleurs de pierre qui ont à exécuter un prisme droit, commencent par couper le corps par un plan (en termes d'art, font un *parement*). Ils tracent sur ce parement le polygone qui doit servir de base. Ils poussent ensuite des *plumées*, c'est-à-dire qu'ils enlèvent la matière par des entailles faites selon des plans perpendiculaires au plan du parement, et de manière à former des faces qui passent chacune par un des côtés du polygone.

e. Les menuisiers, les ébénistes, les cartonniers, etc., emploient un moyen tout différent pour exécuter un prisme droit et creux. Ils confectionnent séparément les bases et les faces latérales, et assemblent ensuite celles-ci entre elles et avec les bases.

f. L'angle d'un mur, qu'il soit aigu ou obtus, est formé de pierres qui ont la figure de prismes droits.

g. Les pieds-droits qui forment le jambage d'une porte ou d'une fenêtre sont des prismes droits.

h. Les prismes droits se rencontrent dans les détails de charpente d'un bâtiment.

k. On donne souvent à l'équerre d'arpenteur la figure d'un prisme droit, dont la base est un octogone régulier.

l. Les *alvéoles*, que construisent les abeilles, sont des prismes droits ayant pour base un hexagone régulier.

m. Le *spath d'Islande* affecte souvent la forme d'un prisme droit ayant pour base un hexagone régulier, et la *tourmaline*, celle d'un prisme droit ayant pour base un polygone régulier de neuf côtés.

THÉORÈME.

199. *Les sections faites dans un prisme par deux plans parallèles sont des polygones égaux* (fig. 114).

Supposons le prisme ABCDEA′, coupé par deux plans parallèles entre eux et non parallèles aux arêtes latérales du prisme. Les deux sections MNPQR, M′N′P′Q′R′, sont des polygones égaux, comme ayant les angles égaux chacun à chacun et les côtés homologues égaux. En effet, deux angles quelconques dont les sommets sont situés sur une même arête, N et N′ par exemple, ont leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens, puisque les droites MN, M′N′ sont les intersections de deux plans parallèles par un troisième, ainsi que les droites NP, N′P′. En outre, deux côtés quelconques, MN et M′N′ par exemple, compris entre les mêmes arêtes sont égaux comme portions de parallèles interceptées par deux parallèles. Les deux polygones MNPQR, M′N′P′Q′R sont donc égaux.

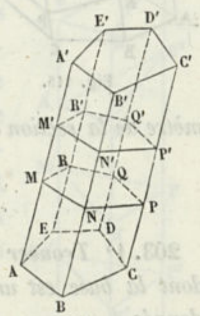

Fig. 114.

200. Corollaire I. — Lorsque les plans sécants sont parallèles aux bases, les sections sont égales aux bases.

201. Corollaire II. — On nomme *section droite* d'un prisme,

la section faite par un plan perpendiculaire aux arêtes latérales. Il résulte du théorème que toutes les sections droites d'un même prisme sont égales entre elles.

THÉORÈME.

202. *L'aire de la surface latérale d'un prisme est égale au produit du périmètre de la section droite par la longueur de l'arête latérale* (fig. 115).

On nomme *surface latérale* d'un prisme la surface composée de toutes les faces latérales.

Soient le prisme ABCDEA′ et MNPQR la section droite du prisme. Les côtés MN, NP, PQ,... de ce dernier polygone, sont les hauteurs des parallélogrammes ABB′A′, BCC′B′, CDD′C′,.... lorsqu'on prend pour base une arête latérale. L'aire de chaque parallélogramme est égale au produit de sa base, qui est une arête latérale, par sa hauteur, qui est le côté correspondant de la section droite. Donc *la somme des aires des parallélogrammes, ou l'aire de la surface latérale du prisme, est égale au produit du périmètre de la section droite par la longueur de l'arête latérale.*

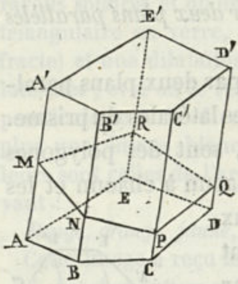

Fig. 115.

EXEMPLES.

203. 1° *Trouver l'aire de la surface latérale d'un prisme droit, dont la base est un hexagone régulier et l'arête une longueur donnée.*

Soient a le côté de l'hexagone et h l'arête du prisme, l'aire de la surface latérale est $6\,bah$.

L'aire de la surface totale est, en désignant par a le côté de l'hexagone, et par h l'arête du prisme, $6ah + 3a^2\sqrt{3}$. On trouve pour la surface latérale 72^{mq}; et pour la surface totale :

$79^{mq},4824$ à moins d'un centimètre carré, si $a = 1^m,2$ et $h = 10^m$.

2° *Trouver l'aire de la surface latérale du prisme oblique dont la section droite a pour périmètre* $47^m,29$, *et pour arête* 17,5.

L'aire demandée est égale au produit de la longueur du périmètre de la section droite par la longueur de l'arête. La surface latérale est donc : $827^{mq},5750$.

THÉORÈME.

204. *Tout prisme triangulaire oblique est équivalent au prisme triangulaire droit, qui a pour base une section droite, et ses arêtes latérales de même longueur que celles du prisme oblique donné* (fig. 116).

Soit ABCA′ le prisme triangulaire oblique donné. Prolongeons indéfiniment les arêtes latérales et, sur le prolongement de l'une d'elles, prenons deux points M et M′, dont la distance MM′ = AA′; par ces points, menons deux plans perpendiculaires aux arêtes latérales. Les sections droites MNP, M′N′P′ déterminées par ces plans sont égales entre elles, et à toute section droite qui serait faite par un point de l'arête AM′ situé entre A et A′, car le théorème (199) subsiste encore pour les prolongements des faces latérales. La figure MNPM′ est un prisme triangulaire dont les bases sont les triangles MNP, M′N′P′; puisque ces triangles sont égaux et parallèles, et que les autres faces de la figure sont des parallélogrammes, ayant chacun un côté commun avec chacune des bases. En outre, c'est un prisme droit, puisque les arêtes latérales sont perpendiculaires aux plans des bases.

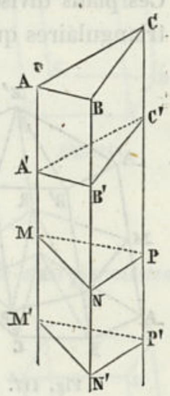

Fig. 116.

Le tronc de prisme ABCMNP est égal au tronc de prisme AB′C′M′N′P′, car si l'on transporte le premier pour faire coïncider le triangle MNP avec son égal M′N′P′, les arêtes latérales des deux troncs de prisme coïncideront. Les arêtes AM, A′M′ sont respectivement perpendiculaires aux plans MNP, M′N′P′; l'arête AM prend donc la direction de A′M′ et le point A tombe au point A′, les deux arêtes AM, A′M′ étant égales, puisque l'arête $AM = AA' + A'M$, et l'arête $A'M' = MM' + A'M$. Pour la même raison, le point B tombe au point B′, et le point C au point C′. Les deux troncs de prisme ABCMNP, A′B′C′M′N′P′ étant égaux, si l'on retranche de chacun d'eux une même quantité, savoir : le tronc de prisme A′B′C′MNP, les restes seront équivalents. Or le premier reste est le prisme ABCA′, le second est le prisme MNPM′. Donc ces deux prismes sont équivalents.

205. Corollaire. — *Tout prisme polygonal oblique est équivalent au prisme droit qui a pour base la section droite et ses arêtes latérales égales à celles du prisme oblique* (fig. 117).

Divisons la base ABCDE du prisme oblique ABCDEA′ en triangles par les diagonales issues du sommet E; et, par chacune de ces diagonales et l'arête EE′, menons un plan. Ces plans divisent le prisme polygonal en autant de prismes triangulaires que la base contient de triangles; et ces prismes ont chacun pour base un de ces triangles. La figure ABEE′A′B′ est un prisme triangulaire, car les triangles ABE, A′B′E′ sont parallèles, et égaux (comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun), et les autres faces de la figure ABEE′A′B′ sont des parallélogrammes. Le même raisonnement s'applique aux figures BCEE′B′C′, CDEE′C′D′. Et on voit en outre que les arêtes latérales de ces prismes triangulaires sont en même temps celles du prisme polygonal donné. Si l'on coupe ensuite le prisme polygonal par un plan perpendiculaire aux arêtes latérales, la section droite correspondante MNPQR sera divisée en triangles par les plans menés suivant EE′ et les diagonales, et chacun de ces triangles sera la section droite du prisme trian-

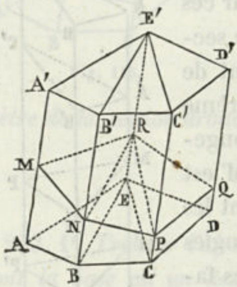

Fig. 117.

gulaire correspondant. Or, chaque prisme triangulaire oblique est équivalent au prisme triangulaire droit qui a pour base la section droite correspondante et ses arêtes latérales égales à celles du prisme oblique. Donc, la somme des prismes triangulaires obliques, ou le prisme polygonal oblique donné, est équivalente à la somme des prismes triangulaires droits, c'est-à-dire au prisme polygonal droit qui a pour base la section droite et ses arêtes latérales égales à celles du prisme oblique.

§ 2. — Parallélipipède.

DÉFINITIONS.

206. On nomme :

Parallélipipède, tout prisme dont les bases sont des parallélogrammes (fig. 118).

Parallélipipède rectangle, tout parallélipipède droit dont les bases sont des rectangles.

Cube, tout parallélipipède rectangle dont les bases sont des carrés, et dont les arêtes latérales sont égales aux côtés des bases.

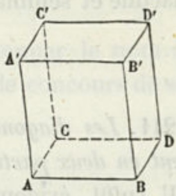

Fig. 118.

THÉORÈME.

207. *Deux faces opposées d'un parallélipipède sont parallèles et égales* (fig. 119).

Soient ABCD et A'B'C'D' les bases du parallélipipède AC' ; ABB'A' et DCC'D', deux faces opposées quelconques. La figure ABCD étant un parallélogramme, AB est parallèle et égale à CD ; la figure AA'D'D étant un parallélogramme, AA' est parallèle et égale à DD'. Les angles A'AB, D'DC, ayant les côtés parallèles et dirigés dans le même sens, sont

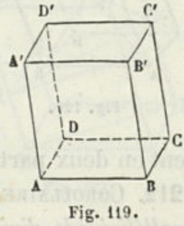

Fig. 119.

égaux, et leurs plans sont parallèles (52). En outre, les parallélogrammes ABB'A', DCC'D' sont égaux, comme ayant un angle égal A = D, compris entre deux côtés égaux AB = DC et AA' = DD'.

208. Corollaire. — On peut prendre pour bases d'un parallélipipède deux faces opposées quelconques.

209. Scolie I. — Toute section faite dans un parallélipipède par un plan est un parallélogramme ; car les côtés opposés sont parallèles, comme étant les intersections de deux plans parallèles par un troisième plan.

210. Scolie II. — *Deux angles opposés sont symétriques.* Soient les angles A et C' ; prolongeons les côtés de l'angle C' au delà du sommet. L'angle trièdre formé par ces côtés prolongés est symétrique de l'angle C' ; or le premier et l'angle trièdre A sont égaux, comme ayant les faces égales chacune à chacune et semblablement disposées.

THÉORÈME.

211. *Les diagonales d'un parallélipipède se divisent mutuellement en deux parties égales* (fig. 120).

Il suffit évidemment de démontrer que deux diagonales quelconques se coupent en un point qui est le milieu de chacune d'elles. Prenons les diagonales AD', CB'. Les arêtes AC, B'D' sont parallèles et égales à l'arête BD ; par conséquent, le quadrilatère AB'D'C, dont deux côtés opposés AC, B'D' sont parallèles et égaux, est un parallélogramme; et les droites AD', CB', qui sont les diagonales de ce parallélogramme, se divisent mutuellement en deux parties égales.

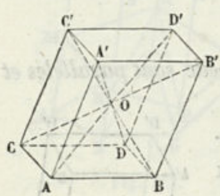

Fig. 120.

212. Corollaire. — *Le point de concours des diagonales d'un parallélipipède divise en deux parties égales toute droite menée par ce point et terminée à la surface de la figure* (fig. 121).

Soient AG le parallélipipède, O le point de concours de ses diagonales. Tirons par ce point une droite quelconque MN, terminée en M et N aux faces opposées ABCD, EFGH. La droite OM est égale à la droite ON. Car si l'on tire la diagonale BH, et qu'on mène un plan par cette diagonale et la droite MN, les intersections MB, NH de ce plan et des faces opposées ABCD, EFGH seront parallèles et formeront avec les segments des droites MN, BH deux triangles MOB, NOH, égaux comme ayant un côté égal, BO = OH, adjacent à deux angles égaux, OBM = OHN comme alternes-internes, et BOM = NOH comme opposés par le sommet. Par conséquent, le côté OM opposé à l'angle OBM est égal au côté ON opposé à l'angle égal OHN.

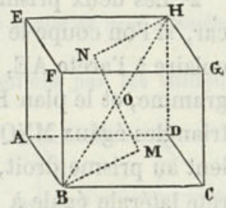

Fig. 121.

213. Scolie. — Cette propriété a fait donner le nom de *centre de figure* du parallélipipède, au point de concours de ses diagonales.

THÉORÈME.

214. *Tout plan, mené par deux arêtes opposées d'un parallélipipède, divise le parallélipipède en deux prismes triangulaires équivalents* (fig. 122).

1° Le plan BFHD, mené par les arêtes opposées BF, DH, divise le parallélipipède oblique AG en deux polyèdres ABDEFH, BCDFGH qui sont des prismes triangulaires. En effet, les triangles ABD, EFH sont parallèles et égaux, et les autres faces du polyèdre ABDEFH sont des parallélogrammes ayant un côté commun avec chacun de ces triangles; par conséquent, ABDEFH est un prisme triangulaire, dont les bases sont les triangles ABD,

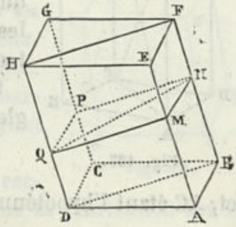

Fig. 122.

EFH. Un raisonnement semblable établit que le polyèdre BCDFGH est un prisme triangulaire, dont les bases sont les triangles BCD, FGH.

2° Les deux prismes ABDEFH, BCDFHG sont équivalents; car, si l'on coupe le parallélipipède AG par un plan perpendiculaire à l'arête AE, la section droite MNPQ est un parallélogramme, et le plan BDHF divise ce parallélogramme en deux triangles égaux MNQ, PNQ. Or le prisme ABDEFH est équivalent au prisme droit, qui a pour base le triangle MNQ et l'arête latérale égale à AE; et le prisme BCDFGH est équivalent au prisme droit, qui a pour base le triangle PNQ, et l'arête latérale égale à AE. Les deux prismes droits sont égaux, comme ayant des bases égales et des hauteurs égales; par conséquent, *les deux prismes obliques sont équivalents.*

215. Scolie. — Lorsque le parallélipipède donné est droit, le plan mené par deux arêtes opposées divise ce parallélipipède en deux prismes triangulaires droits, égaux entre eux.

THÉORÈME.

216. 1° *Les diagonales d'un parallélipipède rectangle sont égales;* 2° *le carré de l'une d'elles est égal à la somme des carrés des trois arêtes qui aboutissent à un même sommet* (fig. 123).

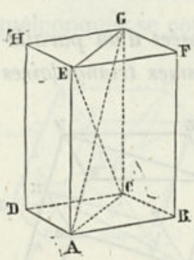

Fig. 123.

1° Il suffit de prouver que deux diagonales quelconques sont égales. Or, deux diagonales AG, EC, sont égales, car elles sont en même temps les diagonales du rectangle ACGE.

2° AG étant l'hypoténuse du triangle rectangle ACG,

$$\overline{AG}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CG}^2;$$

et, AC étant l'hypoténuse du triangle rectangle ABC,

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2;$$

par conséquent

$$\overline{AG}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CG}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2.$$

217. Corollaire. — Le carré de la diagonale du cube est triple du carré du côté.

THÉORÈME.

218. *Un cube peut être divisé en deux parties égales de neuf manières différentes* (fig. 124).

En effet, les trois plans, menés respectivement par les milieux M, N, P de chacune des arêtes qui aboutissent à un même sommet, perpendiculairement à cette arête, sont des plans de symétrie, qui divisent chacun le cube en deux parallélipipèdes rectangles égaux.

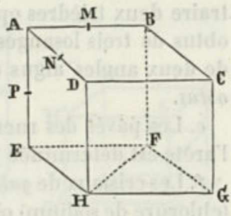

Fig. 124.

Le plan mené par la diagonale de l'une des faces perpendiculairement à cette face divise le cube en deux prismes triangulaires égaux (215). Or, chacune des trois faces qui ont un sommet commun a deux diagonales, par chacune desquelles on peut faire passer un plan perpendiculaire à celle-ci.

On peut donc mener neuf plans qui, chacun, divisent le cube en deux parties égales.

APPLICATIONS.

219. *a.* Il suffit, pour construire un parallélipipède rectangle, de connaître les longueurs des trois arêtes qui doivent aboutir à un même sommet. En effet, connaissant les longueurs AB, AC, AA′ (fig. 125), on construira chacun des rectangles ABDC, ABB′A′, ACC′A′ et les trois rectangles égaux chacun à chacun à ceux-ci, et on assemblera ensuite ces six rectangles.

C'est ainsi que procèdent les ouvriers chargés de construire des caisses ou des boîtes ayant la figure d'un parallélipipède rectangle.

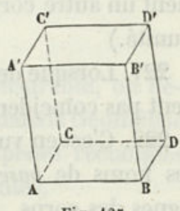

Fig. 125.

b. On forme aussi des parallélipipèdes rectangles par le moulage ; *par exemple*, dans la fabrication des briques, de certaines pièces de terre ou de plâtre destinées à remplacer la pierre ou le bois.

c. On construit les chambres des appartements, en plaçant d'abord un plancher horizontal ayant la figure d'un rectangle ; en élevant ensuite des murs verticaux dont les faces intérieures aient chacune un côté commun avec ce rectangle et en terminant ces quatre murs à la même hauteur, afin de faire passer par leurs arêtes supérieures un nouveau plan horizontal, qui est le plafond de la pièce.

d. Les cristallographes donnent le nom de *rhomboèdre* au parallélipipède dont les six faces sont des losanges. Lorsque deux trièdres opposés sont formés par la réunion des angles aigus de trois losanges, tandis que les autres trièdres sont formés de deux angles obtus et d'un angle aigu, le rhomboèdre est dit *aigu.* Si au contraire deux trièdres opposés sont formés par la réunion des angles obtus de trois losanges, tandis que les autres trièdres sont formés de deux angles aigus et d'un angle obtus, le rhomboèdre est dit *obtus.*

e. Les pavés des rues ont la forme d'un cube, dont la longueur de l'arête est déterminée par un règlement administratif.

f. Les cristaux de *galène* (sulfure de plomb), et ceux du *sel de cuisine* (chlorure de sodium) obtenu par l'évaporation, ont la forme cubique.

§ 3. — Volume du prisme.

DÉFINITIONS.

220. La mesure de l'étendue d'un corps (d'une portion limitée de l'espace) est désignée sous le nom de *volume* du corps. (C'est le nombre qui indique combien de fois ce corps contient un autre corps pris pour unité, ou de parties aliquotes de l'unité.)

221. Lorsque deux figures ont des volumes égaux, et ne peuvent pas coïncider, on dit qu'elles sont équivalentes.

222. C'est en vue de la mesure des corps, qu'on désigne sous les noms de *base* et de *hauteur*, certaines faces et certaines lignes des corps.

THÉORÈME.

223. *Deux parallélipipèdes rectangles, qui ont des bases égales, sont proportionnels à leurs hauteurs* (fig. 126).

1° Supposons que les deux parallélipipèdes rectangles AG, A'G' aient des bases égales : ABCD = A'B'C'D' ; et que le rapport des hauteurs AE, A'E' soit commensurable et égal à $\frac{3}{2}$. Celles-ci ont alors une commune mesure contenue 3 fois dans AE et 2 fois dans A'E' ; si donc on divise AE en 3 parties égales et A'E' en 2 parties égales, ces 5 divisions seront égales. Par les points de division de AE, menons des plans parallèles à la base ABCD et par le point de division de A'E' menons un plan parallèle à la base A'B'C'D'. Ces plans divisent le parallélipipède AG en trois parallélipipèdes rectangles égaux entre eux,

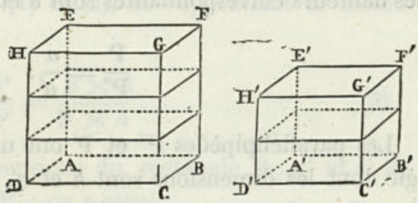

Fig. 126.

comme ayant des bases égales et des hauteurs égales, et le parallélipipède A'G' en deux parallélipipèdes rectangles égaux entre eux aussi, pour la même raison. En outre, les deux parallélipipèdes rectangles, dont se compose le parallélipipède A'G', sont égaux aux trois parallélipipèdes rectangles dont se compose le parallélipipède AG. Par conséquent les deux parallélipipèdes AG, A'G', ayant une commune mesure, contenue 3 fois dans AG et 2 fois dans A'G', ont pour rapport le nombre $\frac{3}{2}$ qui est aussi celui des hauteurs.

2° Si le rapport des hauteurs est incommensurable, on démontrera, au moyen du raisonnement indiqué dans la Géométrie plane n° 156, que le rapport des parallélipipèdes rectangles est égal au rapport des hauteurs correspondantes.

THÉORÈME.

224. *Deux parallélipipèdes rectangles, qui ont des hauteurs égales, sont proportionnels à leurs bases.*

Soient h la hauteur commune des deux parallélipipèdes, a et b les dimensions de la base B du premier, a' et b' celles de la base B′ du second. Désignons le premier parallélipipède par P, le second par P′; et par P″ un troisième parallélipipède rectangle ayant pour hauteur h et pour base un rectangle dont les dimensions sont a' et b. Les parallélipipèdes P et P″ ont une face égale, le rectangle dont les dimensions sont h et b. Prenant cette face pour base dans chacun des parallélipipèdes, les hauteurs correspondantes sont a et a', et, par suite (223):

$$\frac{P}{P''} = \frac{a}{a'}. \qquad (1)$$

Les parallélipipèdes P″ et P′ ont une face égale, le rectangle dont les dimensions sont h et a'. Prenant cette face pour base dans chacun des parallélipipèdes, les hauteurs correspondantes sont b et b'; et par suite :

$$\frac{P''}{P'} = \frac{b}{b'}. \qquad (2)$$

Multipliant par ordre les égalités (1) et (2), et supprimant le facteur commun P″, on trouve :

$$\frac{P}{P'} = \frac{a \times b}{a' \times b'} = \frac{B}{B'}.$$

THÉORÈME.

225. *Deux parallélipipèdes rectangles quelconques sont proportionnels aux produits de leurs bases par leurs hauteurs, ou aux produits de leurs trois dimensions.*

Soient B et h la base et la hauteur du parallélipipède P, B′ et h' la base et la hauteur du parallélipipède P′. Concevons un troisième parallélipipède P″, ayant pour base B et pour hauteur h'. Les parallélipipèdes P et P″ ayant des bases égales sont proportionnels à leurs hauteurs; on a donc :

$$\frac{P}{P''} = \frac{h}{h'}. \qquad (1)$$

Les parallélipipèdes P″ et P′, ayant des hauteurs égales, sont proportionnels à leurs bases; on a donc :

$$\frac{P''}{P'} = \frac{B}{B'}. \qquad (2)$$

Multipliant par ordre (1) et (2), et supprimant le facteur commun P″, on trouve :

$$\frac{P}{P'} = \frac{B \times h}{B' \times h'}. \qquad (3)$$

Soient a et b les dimensions du rectangle B; a' et b' les dimensions du rectangle B′ ; on a aussi :

$$\frac{P}{P'} = \frac{a \times b \times h}{a' \times b' \times h'}. \qquad (4)$$

On donne le nom de *dimensions* d'un parallélipipède rectangle aux nombres qui mesurent les trois arêtes de ce parallélipipède, aboutissant à un même sommet. a, b, h, sont les dimensions du parallélipipède P; a', b', h', sont les dimensions du parallélipipède P′. On peut donc dire aussi que :

Deux parallélipipèdes rectangles sont proportionnels aux produits de leurs trois dimensions.

226. Corollaire I. — Si, pour déterminer le volume d'un corps, on prend pour *unité* le cube dont l'arête a été choisie pour unité de longueur, et en même temps pour unité de surface l'une des faces de ce cube qui est le carré ayant pour côté l'unité de longueur, la relation (3) devient, en désignant l'unité par P′, et par V le volume du parallélipipède P :

$$\frac{P}{P'}, \text{ ou } V = B \times h;$$

les nombres B′ et h' étant égaux à 1. Par conséquent :

Le volume du parallélipipède rectangle est égal au produit de sa base par sa hauteur.

227. Corollaire II. — On déduit, dans cette hypothèse de la relation (4):

$$\frac{P}{P'}, \text{ ou } V = a \times b \times h,$$

les nombres a', b', h' étant égaux à 1. Par conséquent :

Le volume du parallélipipède rectangle est égal aussi au produit de ses trois dimensions.

EXEMPLES.

228. Supposons les trois arêtes d'un parallélipipède rectangle, aboutissant à un même sommet, égales à 3 mètres, 5 mètres et 7 mètres. Les trois dimensions sont les nombres 3, 5, 7; et le volume : $3 \times 5 \times 7$ ou 105. Le parallélipipède rectangle contient donc 105 mètres cubes.

Si les arêtes sont 2^m ; $1^m,5$ et $3^m,2$, les dimensions sont les nombres 2 ; 1,5 et 3,2, et le volume 9,60. Le parallélipipède contient donc 9,600 décimètres cubes.

THÉORÈME.

229. *Le volume d'un parallélipipède quelconque est égal au produit de sa base par sa hauteur.*

1° Considérons d'abord un parallélipipède droit AD′ (fig. 127), ayant pour base le parallélogramme ABDC, et ses arêtes latérales AA′, BB′, etc., perpendiculaires au plan de la base. Par les points A et B menons deux plans perpendiculaires à l'arête AB. Les sections faites par ces plans dans la surface du parallélipipède et son prolongement sont deux rectangles égaux BFF′B′, AEE′A′, qu'on peut regarder comme les bases d'un parallélipipède rectan-

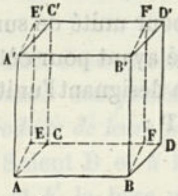

Fig. 127.

gle AF′, dont les autres faces sont les rectangles ABB′A′, EFF′E′, ABFE, A′B′F′E′.

Le parallélipipède rectangle AF′ est équivalent au parallélipipède AD′. En effet, ce dernier, considéré comme ayant pour base le rectangle AA′C′C, est un prisme *oblique* équivalent (205) au prisme droit AF′, qui a pour base la section droite AEE′A′ et ses arêtes de même longueur (AB).

Le parallélipipède rectangle AF′ a pour volume le produit de sa base ABFE par sa hauteur AA′; le parallélipipède droit AD′, qui lui est équivalent, a donc pour volume le produit de sa base ABDC, équivalente à ABFE, par sa hauteur, qui est la même (AA′) que celle du parallélipipède rectangle AF′.

Donc, *le volume du parallélipipède droit est égal au produit de sa base par sa hauteur.*

2° Considérons, en second lieu, un parallélipipède oblique AD′ (fig. 128) ayant pour base le parallélogramme ABDC. Menons le plan MNN′M′ perpendiculaire à l'arête AB. Le parallélipipède droit, qui a pour base la section droite MNN′M′ et ses arêtes latérales égales à AB, est équivalent au parallélipipède oblique AD′. Or le volume du premier est égal au produit MNN′M′ × AB; et, si l'on abaisse du point M′ la perpendiculaire M′I sur MN, M′I sera la hauteur du parallélipipède AD′, correspondante à la base ABCD (74), et sera en même temps la hauteur du parallélogramme MNN′M′, correspondante à la base MN, par conséquent :

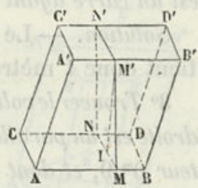

Fig. 128.

$$MNN'M' \times AB = MN \times M'I \times AB = AB \times MN \times M'I.$$

Or, l'aire du parallélogramme ABÇD est égale à AB × MN, puisque MN est perpendiculaire sur AB.

Donc, *le volume du parallélipipède oblique est égal au produit de sa base par sa hauteur.*

230. Corollaire I. — *Si l'on désigne par* b *et* h *les nombres*

qui représentent la base et la hauteur d'un parallélipipède, et par V *celui qui représente son volume,* on a $V = b \times h$.

231. Corollaire II. — *Deux parallélipipèdes quelconques sont proportionnels aux produits de leurs bases par leurs hauteurs ;* d'où il résulte que :

1° *Deux parallélipipèdes, qui ont des bases équivalentes, sont proportionnels à leurs hauteurs ;*

2° *Deux parallélipipèdes, de même hauteur, sont proportionnels à leurs bases.*

EXEMPLES.

232. 1° *Trouver le volume du parallélipipède rectangle dont les arêtes sont :* $2^m,5$; $3^m,8$; $7^m,2$.

Solution. — Le volume est 68,400. Le parallélipipède contient donc 68 mètres cubes 400 décimètres cubes.

2° *Trouver le volume du parallélipipède oblique dont la base est un carré ayant un côté de* $1^m,5$ *et la hauteur* $0^m,7$.

Solution. — Le volume est 1,575. Le parallélipipède contient donc 1 mètre cube 575 décimètres cubes.

3° *Trouver le volume d'un parallélipipède oblique dont la section droite est un parallélogramme ayant pour base* $1^m,5$, *et pour hauteur* $0^m,9$, *et dont l'arête correspondante est de* $2^m,3$.

Solution. — Le volume est 3,105. Le parallélipipède contient donc 3 mètres cubes 105 décimètres cubes.

THÉORÈME.

233. *Le volume d'un prisme est égal au produit de sa base par sa hauteur.*

1° Considérons d'abord le prisme triangulaire. Par les arêtes latérales BB′, CC′ du prisme triangulaire ABCA′B′C′ (fig. 129) menons deux plans respectivement parallèles aux faces ACC′A′, ABB′A′. Ces plans forment avec les faces ABB′A′, ACC′A′ et les bases prolongées du prisme triangulaire ABCA′B′C′ un parallélipipède AD′, car les quadrilatères ABDC, A′B′D′C′ sont des parallélogrammes parallèles et égaux, et les autres faces sont des parallélogrammes. Les prismes triangulaires ABCA′B′C′, CBDC′B′D′ sont équivalents (214) ; par conséquent, le volume du prisme triangulaire ABCA′B′C′ est égal à la moitié du volume du parallélipipède AD′. Ce dernier volume est égal au produit de la base ABDC multipliée par la hauteur correspondante, qui est la même que celle du prisme. Donc *le volume du prisme triangulaire est égal au produit de sa base*, qui est la moitié de celle du parallélipipède, *multipliée par sa hauteur*.

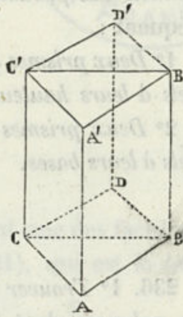

Fig. 129.

2° Considérons en second lieu un prisme polygonal quelconque. Divisons la base ABCDE du prisme polygonal ABCDEA′ (fig. 130) en triangles par les diagonales issues du sommet A ; et, par chaque diagonale et l'arête AA′, faisons passer un plan. Le prisme est décomposé en prismes triangulaires, ayant respectivement pour bases les triangles dans lesquels on a décomposé la base ABCDE, et pour hauteur commune la hauteur du prisme polygonal. Le volume de chacun de ces prismes est égal au produit de sa base par sa hauteur. En désignant par h la hauteur commune, la somme des volumes de ces prismes, ou le volume du prisme polygonal donné, sera :

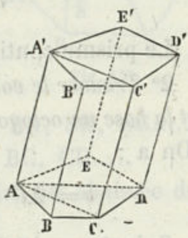

Fig. 130.

$$\text{ABC}\times h+\text{ACD}\times h+\text{ADE}\times h,\ \text{ou}\ (\text{ABC}+\text{ACD}+\text{ADE})\times h,$$
$$\text{ou enfin ABCDE}\times h.$$

Donc, *le volume du prisme polygonal est égal au produit de sa base par sa hauteur*.

234. Corollaire I. — *Si l'on désigne par* b *et* h *les nombres qui*

représentent la base et la hauteur d'un prisme et par V *celui qui représente son volume, on a :* V = bh.

235. Corollaire II. — *Deux prismes quelconques sont proportionnels aux produits de leurs bases par leurs hauteurs.* Par conséquent :

1° *Deux prismes qui ont des bases équivalentes sont proportionnels à leurs hauteurs ;*

2° *Deux prismes qui ont des hauteurs égales sont proportionnels à leurs bases.*

EXEMPLES.

236. 1° *Trouver le volume du prisme oblique ayant pour base un polygone dont l'aire est de* $13^{mq},62$ *et la hauteur de* $2^{m},4$.

En désignant par V le volume, par b la base, et par h la hauteur : $V = bh$.

$$V = 13,62 \times 2,4 = 32,688.$$

Le prisme contient donc $32^{mc},688$.

2° *Trouver le volume du prisme droit dont l'arête latérale est* h *et la base un octogone régulier ayant pour côté* a.

On a :

$$b = 2a^2\left(1+\sqrt{2}\right), \text{ et } V = 2a^2h\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Soient $a = 1^{m},5$ et $h = 6^{m},24$; on trouve $V = 67,791$ à moins de 0,001. Le prisme contient donc $67^{mc},791$ à moins d'un décimètre cube.

3° *Trouver le volume du prisme oblique, dont l'arête est* a, *et l'aire de la section droite,* s.

On a : $V = sa$.

Supposons que la section soit un hexagone régulier ayant pour côté b.

$$s = \frac{3}{2}b^2\sqrt{3}, \text{ et } V = \frac{3}{2}b^2a\sqrt{3}.$$

Si $b = 1^{m},12$ et $h = 6^{m},13$, on trouve $V = 19,977$ à moins de 0,001. Le prisme contient donc 19^{mc},977 à moins d'un décimètre cube.

§ 4. — Pyramide.

DÉFINITIONS.

237. On nomme *pyramide*, le polyèdre dont une des faces est un polygone quelconque, ABCDE (fig. 131), qui est la *base* de la pyramide; et les autres faces, les triangles SAB, SBC, SCD,... formés avec chacun des côtés de la base, en joignant un point quelconque S, situé hors du plan de la base, et qui est le *sommet* de la pyramide, à chacun des sommets de la base.

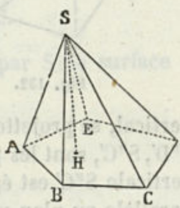

Fig. 131.

On nomme :

Arêtes latérales de la pyramide, les intersections de deux faces consécutives, SA, SB, SC......

Arêtes de base, les côtés de la base, AB, BC, CD.....

Hauteur de la pyramide, la perpendiculaire SH abaissée du sommet sur la base.

238. On donne le nom de *pyramide régulière* à celle dont la base est un polygone régulier, et dont le sommet appartient à la perpendiculaire élevée sur la base par son centre.

239. On dit d'une pyramide qu'elle est triangulaire, quadrangulaire, pentagonale..... selon que la base est un triangle, un quadrilatère, un pentagone.....

PROBLÈME.

240. *Dessiner une pyramide régulière.*

Soit XY la ligne de terre. Nous supposerons (fig. 132) la base ABCDE de la pyramide régulière située dans le plan horizontal et la pyramide placée de manière que l'arête, dont la trace horizontale est le sommet C, soit parallèle au plan vertical.

La projection horizontale de la base ABCDE est la base elle-même; et les projections horizontales des arêtes sont les droites SA, SB, SC, SD, SE, qui unissent le centre S, projection horizontale du sommet de la pyramide aux sommets de la base. Les pieds A′, E′, B′, D′, C′ des perpendiculaires abaissées des sommets A, B, C, D, E, sur la ligne de terre sont les projections verticales de ces sommets. On détermine la projection verticale S″ du sommet de la pyramide en élevant au point S′, projection verticale du centre S, la perpendiculaire S′S″ égale à la hauteur de la pyramide. S′S″ est la projection verticale de cette hauteur, car celle-ci, étant parallèle au plan vertical, se projette en vraie grandeur. Les droites S″A′, S″E′, S″B′, S″D′, S″C′, sont les projections verticales des arêtes et la projection verticale S″C′ est égale à l'arête correspondante puisque l'arête est parallèle au plan vertical.

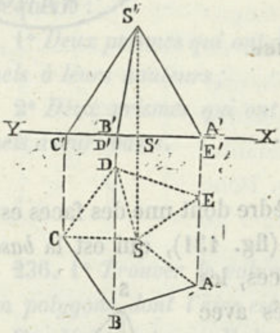

Fig. 132.

La figure 132 est le dessin ou l'épure de la pyramide donnée.

PROBLÈME.

241. *Dessiner une pyramide irrégulière.*

Nous supposerons (fig. 285) la base ABCDE de la pyramide située dans le plan horizontal. La projection horizontale de la base ABCDE est la base elle-même. Soient S et S′ les projections horizontale et verticale du sommet de la pyramide; les projections horizontales des arêtes sont les droites SA, SB, SC, SD, SE. Les pieds (A′, B′, C′, D′, E′, P) des perpendiculaires abaissées des points A, B, C, D, E, S sur la ligne de terre, sont les projections verticales de ceux-ci, et les projections verticales des arêtes et de la hauteur sont les droites S′A′, S′B′, S′C′, S′D′, S′E′, S′P,

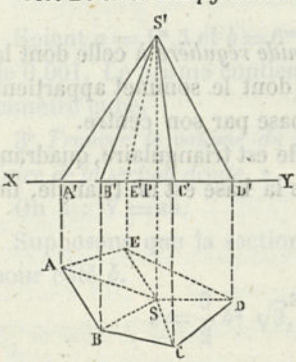

Fig. 133.

qui unissent le point S′ aux points A′, B′, C′..... La projection verticale S′P de la hauteur de la pyramide est égale à cette hauteur, puisque celle-ci est parallèle au plan vertical.

La figure 133 est le dessin ou l'épure de la pyramide donnée SABCDE.

PROBLÈME.

242. *Trouver l'aire de la surface d'une pyramide régulière donnée.*

On nomme *apothème* d'une pyramide régulière, la hauteur, abaissée du sommet S de la pyramide, de l'un des triangles isocèles égaux qui composent la surface latérale de la pyramide.

Soient n le nombre des côtés de la base, a son côté, l l'apothème de la pyramide, et s l'aire de la surface latérale ; comme l'aire de chaque triangle isocèle est : $\frac{al}{2}$, on a : $s = \frac{nal}{2}$.

Désignant par k l'apothème de la base et par S la surface totale, on trouve :

$$S = \frac{na(l+k)}{2}.$$

APPLICATIONS.

243. On rencontre la figure de la pyramide régulière dans un grand nombre de constructions : par exemple dans les toits de certains clochers, dans quelques cristaux naturels ou artificiels, dans le toit d'un édifice à base carrée qui est ordinairement composé de quatre *lattis* égaux, formant une pyramide quadrangulaire et régulière. On donne cette forme à certaines piles de boulets, en prenant pour base un triangle équilatéral ou un carré. Les pyramides d'Égypte sont des pyramides régulières à base carrée. Le côté de la base de l'une d'elles est de 195 mètres et sa hauteur de $162^{\text{m}},5$.

THÉORÈME.

244. *Lorsqu'on coupe une pyramide par un plan parallèle à sa base,* 1° *les arêtes latérales et la hauteur sont divisées en parties proportionnelles ;* 2° *la section est un polygone semblable à la base* (fig. 134).

1° Soit A′B′C′D′E′ la section faite dans la pyramide SABCDE par un plan M parallèle à sa base ABCDE. Concevons qu'on ait mené par le sommet S un plan N parallèle au plan M. Les arêtes latérales et la hauteur SI sont divisées en parties proportionnelles par les trois plans parallèles ABCDE, M, N (50).

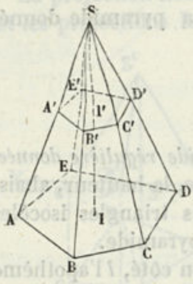

Fig. 134.

Par conséquent :

$$\frac{SA'}{A'A}=\frac{SB'}{B'B}=\frac{SC'}{C'C}=\frac{SD'}{D'D}=\frac{SE'}{E'E}=\frac{SI'}{I'I}.$$

2° On déduit de cette égalité de rapports, la suivante :

$$\frac{SA'}{SA}=\frac{SB'}{SB}=\frac{SC'}{SC}=\frac{SD'}{SD}=\frac{SE'}{SE}=\frac{SI'}{SI},$$

et comme les triangles ASB et A′SB′, BSC et B′SC′,..... sont semblables :

$$\frac{SA'}{SA}=\frac{A'B'}{AB}=\frac{SB'}{SB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{SC'}{SC}=\frac{C'D'}{CD}=\frac{SD'}{SD}=\frac{D'E'}{DE}=\frac{SE'}{SE}=\frac{E'A'}{EA}.$$

Les polygones A′B′C′D′E′, ABCDE sont donc semblables, car les angles A′ et A ont les côtés parallèles et dirigés dans le même sens ; il en est de même des angles B et B′, C et C′ ;..... et les côtés homologues sont proportionnels.

245. Corollaire I. — Les polygones semblables A′B′C′D′E′, ABCDE sont proportionnels aux carrés de deux côtés homologues A′B′, AB ; et, comme

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{SA'}{SA}=\frac{SI'}{SI},\ \text{on a aussi :}\ \frac{\overline{A'B'}^2}{\overline{AB}^2}=\frac{\overline{SI'}^2}{\overline{SI}^2};$$

par conséquent

$$\frac{A'B'C'D'E'}{ABCDE}=\frac{\overline{SI'}^2}{\overline{SI}^2},$$

qu'on peut énoncer de la manière suivante : *Lorsqu'on coupe un angle polyèdre par deux plans parallèles, qui rencontrent tous les arêtes d'un même côté du sommet, les sections faites par ces plans sont proportionnelles aux carrés de leurs distances au sommet.*

246. Corollaire II. — *Lorsqu'on coupe deux pyramides quelconques de même hauteur par deux plans respectivement parallèles aux bases et menés à des distance ségales des sommets, les sections sont proportionnelles aux bases* (fig. 135).

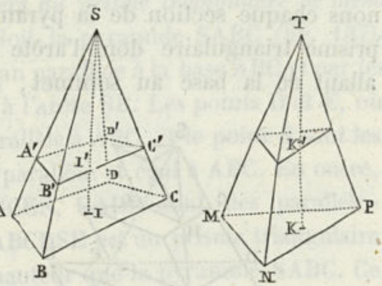

Fig. 135.

Soient SABCD, TMNP deux pyramides ayant des hauteurs égales $SI = TK$.
Sur SI et TK prenons des longueurs égales $SI' = TK'$; par le point I' menons le plan A'B'C'D' parallèle au plan ABCD, et par le point K' le plan M'N'P' parallèle au plan MNP. On a (Coroll. I) :

$$\frac{A'B'C'D'}{ABCD} = \frac{\overline{SI'}^2}{\overline{SI}^2}; \text{ et } \frac{M'N'P'}{MNP} = \frac{\overline{TK'}^2}{\overline{TK}^2};$$

donc

$$\frac{A'B'C'D'}{ABCD} = \frac{M'N'P'}{MNP}; \text{ ou } \frac{A'B'C'D'}{M'N'P'} = \frac{ABCD}{MNP}.$$

THÉORÈME.

247. *Deux pyramides triangulaires sont équivalentes, lorsqu'elles ont des bases équivalentes et des hauteurs égales* (fig. 136).

Plaçons sur un même plan les bases ABC, A'B'C' des deux pyramides et prenons sur la perpendiculaire au plan des bases, menée par le point A, une longueur égale à la hauteur commune des deux pyramides. Divisons cette longueur en trois parties égales, et par les points de division menons des plans parallèles aux bases. Les sections DEF, D'E'F' et GHI, G'H'I' faites dans les deux pyramides par le même plan sont équivalentes (246). Si l'on suppose le volume de la pyramide SABC plus grand que celui de la pyramide S'A'B'C' ; construisons sur ABC et sur chacune des sections de la pyramide SABC, un prisme triangulaire dont l'arête se confonde avec AS, et prenons chaque section de la pyramide S'A'B'C' pour base d'un prisme triangulaire dont l'arête se confonde avec A'S'. En allant de la base au sommet, les prismes construits sur

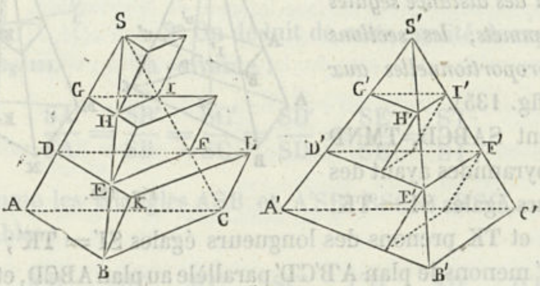

Fig. 136.

l'arête AS sont, à partir du deuxième, équivalents chacun à chacun aux prismes construits sur l'arête A'S', comme ayant des bases équivalentes et des hauteurs égales. La différence entre la somme des prismes construits sur AS et celle des prismes construits sur A'S' est égale au prisme qui a pour base ABC et pour hauteur le tiers de la hauteur des deux pyramides. Or, on peut diviser celle-ci en parties égales assez petites pour que ce prisme ait une hauteur aussi petite qu'on le voudra, et par conséquent pour que la différence des deux sommes de prismes soit moindre que toute grandeur donnée ; d'où l'on conclut que les deux pyramides sont équivalentes, car il ne saurait exister aucune différence finie entre les deux pyramides, puisqu'on pourrait immédiatement construire deux groupes de prismes ayant une différence moindre ; et cette dernière ne peut jamais être moindre que la différence des deux pyramides.

THÉORÈME.

248. *Le volume d'une pyramide est égal au tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

1° Considérons d'abord la pyramide triangulaire. *Toute pyramide triangulaire est le tiers du prisme triangulaire de même base et de même hauteur.* Soit la pyramide SABC (fig. 137); menons par le point S un plan parallèle à la base ABC et par les points A et C des parallèles à l'arête SB. Les points D et E, où elles rencontrent le plan parallèle à ABC, et le point S sont les sommets d'un triangle DSE parallèle et égal à ABC. En outre, les quadrilatères ABSD, BCES, CADE sont des parallélogrammes. Donc la figure ABCDSE est un prisme triangulaire de même base et de même hauteur que la pyramide SABC. Ce prisme est la somme des deux pyramides SABC, SACED. Or, si l'on mène un plan par les points A, S, E, il divise la pyramide SACED en deux pyramides triangulaires SACE, SADE, équivalentes, comme ayant des bases égales et la même hauteur, puisqu'elles ont le même sommet S et leurs bases sur un même plan. La pyramide SABC et la pyramide SADE sont aussi équivalentes, car on peut regarder la dernière comme ayant pour base DSE et pour sommet le point A. Les trois pyramides sont donc équivalentes, et, par suite, l'une d'elles, SABC, est le tiers du prisme ABCDSE. En désignant par h la hauteur du prisme, qui est aussi celle de la pyramide par rapport à la base ABC, on a :

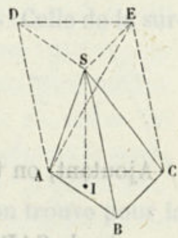

Fig. 137.

$$\text{Vol. SABC} = \frac{1}{3}\,\text{ABC} \times h.$$

Donc le volume de la pyramide triangulaire est égal au tiers du produit de sa base par sa hauteur.

2° Considérons, en second lieu, une pyramide polygonale quelconque, la pyramide SABCDE (fig. 138). Tirons les diagonales de la base ABCDE qui partent du sommet A, et faisons passer des plans par l'arête AS et chacune de ces diagonales. La pyramide SABCDE se trouve alors décomposée en pyramides triangulaires, ayant pour hauteur commune la hauteur de la pyramide donnée, pour sommet commun le point S, et chacune pour base un des triangles qui composent la base de la pyramide donnée. Désignant par h la hauteur de cette dernière pyramide, on a :

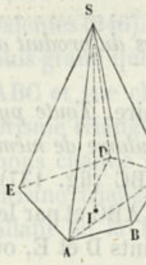

Fig. 138.

$$\text{Vol. SABC} = \frac{1}{3}\,\text{ABC} \times h.$$

$$\text{vol. SACD} = \frac{1}{3}\,\text{ACD} \times h,$$

$$\text{vol. SADE} = \frac{1}{3}\,\text{ADE} \times h.$$

Ajoutant, on trouve :

$$\text{vol. SABCDE} = \frac{1}{3}\,(\text{ABC} + \text{ACD} + \text{ADE}) \times h$$
$$= \frac{1}{3}\,\text{ABCDE} \times h.$$

Donc, *le volume de la pyramide polygonale est égal au tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

249. Corollaire I. — Si l'on désigne par b et h les nombres qui représentent la base et la hauteur d'une pyramide donnée, et par V celui qui représente le volume, on a : $V = \frac{1}{3}\,bh.$

250. Corollaire II. — *Deux pyramides sont proportionnelles aux produits de leurs bases par leurs hauteurs ;* d'où il résulte que :

1° *Deux pyramides de même hauteur sont proportionnelles à leurs bases ;*

2° *Deux pyramides de bases équivalentes sont proportionnelles à leurs hauteurs.*

EXEMPLES.

251. 1° *Trouver l'aire de la surface d'une pyramide régulière ayant pour base un hexagone régulier dont le côté est* a, *et l'arête latérale* b.

L'apothème est $\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$, et l'aire de la surface latérale : $3a\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$.

Soient $a = 1^m,2$ et $b = 1^m,5$, on trouve $4^{mq},9491$ à moins d'un centimètre carré.

L'aire de la surface de la base est $\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$. Celle de la surface totale est donc :

$$3a\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} + \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}.$$

En supposant à a et à b les mêmes valeurs, on trouve pour la surface totale : $8^{mq},6903$ à moins d'un centimètre carré.

2° *Trouver le volume d'une pyramide qui a pour hauteur* h *et pour base un triangle équilatéral dont le côté est* a.

Le volume est $\frac{a^2h}{12}\sqrt{3}$.

Soient $h = 3^m,2$ et $a = 1^m,3$, on trouve que la pyramide contient $0^{mc},780$, à moins d'un décimètre cube.

3° Si l'on suppose $h = a\sqrt{\frac{2}{3}}$, $V = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \times \frac{1}{3}a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{12}a^3\sqrt{2}$; et, en supposant $a = 1,3$, on trouve $0^{mc},258$, à moins d'un décimètre cube.

4° *Trouver le volume de la pyramide régulière ayant pour base l'hexagone régulier dont le côté est* a *et la hauteur double de l'apothème de la base.*

L'apothème de l'hexagone régulier est $\frac{a}{2}\sqrt{3}$, l'aire $\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$;

le volume est donc $\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}\times\frac{1}{3}a\sqrt{3}=\frac{3}{2}a^3$.

DÉFINITIONS.

252. Lorsqu'on coupe une pyramide triangulaire TFGH (fig. 139) ou polygonale SABCDE (fig. 140) par un plan qui rencontre toutes les arêtes en des points situés entre la base et le sommet, ce plan divise la pyramide en deux parties dont l'une est une pyramide ayant le même sommet que la première; et l'autre une figure qu'on nomme *pyramide tronquée* ou *tronc de pyramide.* On donne à cette seconde partie le nom de *tronc de pyramide à bases parallèles,* lorsque la section est parallèle à la base de la pyramide donnée. La section et la base de la pyramide donnée sont dites les *bases du tronc.* Les *faces* et les *arêtes latérales* sont des portions des faces et des arêtes latérales de la pyramide donnée. La *hauteur* du tronc de pyramide à bases parallèles est la distance des deux bases.

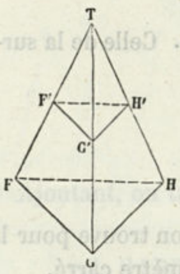

Fig. 139.

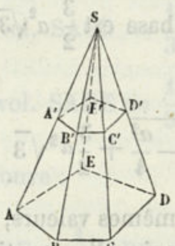

Fig. 140.

THÉORÈME.

253. *Le volume d'un tronc de pyramide à bases parallèles est égal à la somme des volumes de trois pyramides, ayant pour hauteur*

commune la hauteur du tronc, et pour bases respectives, les bases du tronc et la moyenne proportionnelle de ces deux bases.

1° Considérons d'abord un tronc de pyramide triangulaire ABCDEF (fig. 141). Le plan, qui passe par les trois points A, E, C divise le tronc de pyramide en deux pyramides, l'une triangulaire EABC qui est l'une des pyramides de l'énoncé, puisqu'elle a pour base ABC et son sommet E situé dans le plan de la base supérieure ; l'autre quadrangulaire EADFC. Cette dernière pyramide est divisée en deux pyramides triangulaires EADF, EACF par le plan des trois points A, E, F. La pyramide EADF pouvant être considérée comme ayant pour base DEF et pour sommet le point A, est une deuxième pyramide de l'énoncé. Par le point E, menons EG parallèle à FC, et tirons les droites GA, GF. La pyramide EAFC est équivalente à la pyramide GAFC comme ayant la même base AFC, et la même hauteur, puisque les points E et G sont situés sur une parallèle au plan de la base. Or la pyramide GAFC peut être considérée comme ayant pour base le triangle AGC et pour hauteur celle du tronc, puisque le sommet correspondant F appartient au plan de la base supérieure. Il reste donc à prouver que le triangle AGC est la moyenne proportionnelle de ABC et de DEF.

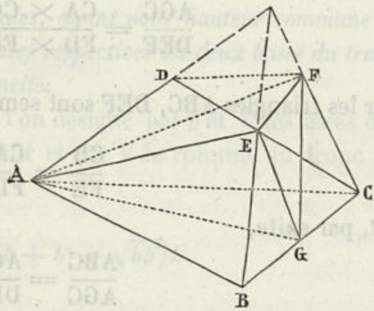

Fig. 141.

Les triangles ABC et AGC ayant un angle commun C, sont proportionnels aux produits des côtés de cet angle dans les deux triangles (*Géom. plane*, **504**); donc,

$$\frac{ABC}{AGC} = \frac{CA \times CB}{CA \times CG} = \frac{CB}{CG} = \frac{CB}{FE};$$

puisque $CG = FE$. Les triangles AEC, DEF, ayant un angle égal, $C = F$, on a :

$$\frac{AGC}{DEF} = \frac{CA \times CG}{FD \times FE} = \frac{CA}{FD};$$

or les triangles ABC, DEF sont semblables (244) ; donc

$$\frac{CB}{FE} = \frac{CA}{FD},$$

et, par suite,

$$\frac{ABC}{AGC} = \frac{AGC}{DEF}.$$

2° Considérons en second lieu un tronc de pyramide polygonale. Soient SABCDE une pyramide polygonale, et TFGH une pyramide triangulaire, ayant des bases équivalentes ABCDE, FGH et des hauteurs égales (fig. 142). Ces deux pyramides sont équivalentes (247). Coupons ces pyramides par des plans parallèles aux bases et menés à des distances égales des sommets. Les sections A′B′C′D′E′, et F′G′H′ sont aussi équivalentes (246) et par suite les pyramides SA′B′C′D′, TF′G′H′ sont aussi équivalentes (247). Le tronc de pyramide ABCDEA′B′C′D′E′, qui est la différence des pyramides SABCDE, SA′B′C′D′E′, est donc équivalent au tronc de pyramide FGHF′G′H′, qui est la différence des pyramides TFGH, TF′G′H′; et, par suite, le tronc de pyramide polygonale est équivalent à la somme des trois pyramides triangulaires qui ont pour hauteur commune la hauteur, et pour bases respectives les deux bases du tronc de pyramide triangulaire et leur moyenne proportionnelle.

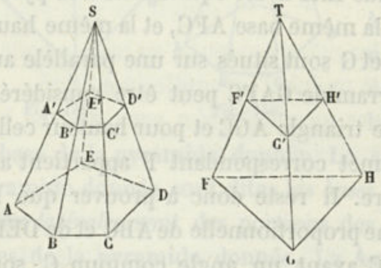

Fig. 142.

les bases de la pyramide triangulaire sont respectivement équivalentes aux bases de la pyramide polygonale, par conséquent :

Le tronc de pyramide polygonale est équivalent à la somme de trois pyramides polygonales, ayant pour hauteur commune la hauteur du tronc, et pour bases respectives les deux bases du tronc et leur moyenne proportionnelle.

254. — COROLLAIRE. Si l'on désigne par b et b' les aires des deux bases; par h la hauteur et par V le volume du tronc de pyramide, on a :

$$V = \frac{1}{3}(b + b' + \sqrt{bb'})h.$$

EXEMPLES.

255. 1° *Trouver le volume d'un tronc de pyramide dont les bases sont des carrés ayant pour côtés :* $1^m,2$ et $0^m,8$, *et dont la hauteur est de* 15 *mètres.*

$$V = 5 \times (1,44 + 0,64 + 1,2 \times 0,8) = 15,200.$$

Le tronc de pyramide contient donc $15^{mc},200$.

2° L'obélisque de *Luxor*, placé au centre de la place de la Concorde, à Paris, est un tronc de pyramide régulière, dont la base est un carré, surmonté sur sa petite base d'un pyramidion irrégulier. Le côté de la base inférieure est de $2^m,42$; celui de la base supérieure, de $1^m,54$; la distance de ces deux bases est de $21^m,60$, et la hauteur du pyramidion de $1^m,20$.

On trouve pour le volume : $87^{mc},023200$.

DÉFINITIONS.

256. On donne le nom de tronc de prisme à chacune des deux parties dans lesquelles on décompose un prisme, en le coupant par un plan non parallèle aux bases et qui rencontre toutes les arêtes en des points situés entre les deux bases.

257. On nomme *bases* d'un tronc de prisme, la base correspondante du prisme et de la *section ; faces* et *arêtes latérales,* les portions correspondantes des faces et des arêtes latérales du prisme.

THÉORÈME.

258. *Le volume d'un tronc de prisme triangulaire est égal à la somme des volumes de trois pyramides triangulaires, ayant pour base commune l'une des bases du tronc, et pour hauteurs respectives; les distances des trois sommets de l'autre base à la première* (fig. 143).

Soit le tronc de prisme triangulaire ABCDEF dont les triangles ABC, DEF sont les bases. Le plan qui passe par les trois sommets A, E, C divise le tronc de prisme en deux pyramides l'une triangulaire, EABC, qui est une des pyramides de l'énoncé, car elle a pour base ABC et pour sommet le point E; et l'autre quadrangulaire, EACFD. Le plan, qui passe par les trois sommets A, E, F, divise cette dernière pyramide en deux pyramides triangulaires EACF, EADF. La pyramide EACF est équivalente à la pyramide BACF, qui a la même base ACF, et une hauteur égale, puisque les sommets E et B sont situés sur la droite EB parallèle au plan de la base. Or, la pyramide BACF peut être regardée comme ayant pour base ABC et pour sommet le point F; elle est donc aussi une des pyramides de l'énoncé. Enfin, si l'on tire la droite CD, les triangles ADF, ADC étant équivalents, les pyramides EADF, EADC sont aussi équivalentes. Or la pyramide EADC est équivalente à la pyramide BADC qui a la même base ADC et la même hauteur, puisque les sommets E et B sont situés sur la droite EB parallèle au plan de la base. La pyramide BADC peut être regardée comme ayant pour base ABC et

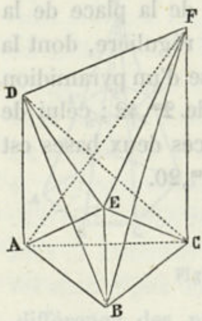

Fig. 143.

pour sommet le point D. Elle est donc aussi une des pyramides de l'énoncé.

259. Corollaire I. — Si l'on désigne par b le nombre qui représente l'une des bases du tronc de prisme, par h, h', h'' ceux qui représentent les distances des trois sommets de l'autre base à la première, et par V le nombre qui représente le volume du tronc, on a :

$$V = \frac{1}{3} b\,(h + h' + h''). = b\left(\frac{h + h' + h''}{3}\right).$$

260. Corollaire II. — *Le volume d'un tronc de prisme triangulaire est égal au produit d'une des bases par la distance du centre de gravité de l'autre base à la première*. (Voir le n° 105 pour la définition du *centre de gravité* du triangle, et le n° 106 pour celle du centre de gravité du polygone.)

Cela revient à démontrer que *la distance du centre de gravité d'un triangle à un plan quelconque est égale à la moyenne des distances des trois sommets à ce plan*, dans le cas particulier où les trois sommets sont situés d'un même côté du plan.

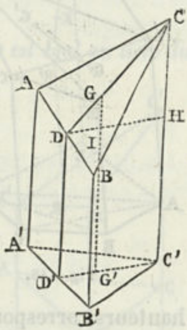

Fig. 144.

Des sommets A, B, C, situés du même côté du plan P, et du centre de gravité G du triangle ABC (fig. 144), abaissons les perpendiculaires AA', BB', CC', GG', sur le plan P. Tirons la médiane CD ; le centre de gravité du triangle se trouve sur cette droite, au point G, dont la distance, GD, au milieu D, est égale au tiers de CD. Abaissons du point D la perpendiculaire DD' sur le plan P ; elle passera par le milieu D' de A'B', et on aura (*Géométrie plane*, **280**) :

$$DD' = \frac{1}{2}(AA' + BB').$$

Tirons la médiane C'D' du triangle A'B'C', et DH parallèlement à C'D'. Soit I le point de rencontre de GG' avec la droite DH ; on a :

$$GI = \frac{1}{3} CH = \frac{1}{3}(CC' - DD'),$$

et, comme $GG' = GI + DD'$,

$$GG' = \frac{1}{3}(CC' - DD') + DD' = \frac{1}{3}\,CC' + \frac{2}{3}\,DD' = \frac{1}{3}(AA' + BB' + CC').$$

261. Corollaire III. — *Le volume d'un tronc de prisme polygonal quelconque est égal au produit de l'une des bases par la distance du centre de gravité de l'autre base à la première.*

Soit le prisme ABCDEA'B'C'D'E' (fig. 145). Tirons les diagonales de la base ABCDE, issues du sommet A, et faisons passer un plan par chacune de ces diagonales et l'arête AA'. Ces plans passent par les diagonales de la base A'B'C'D'E', issues du point A' et divisent par conséquent cette base en triangles A'B'C',.... qui ont chacun leurs sommets placés sur les mêmes arêtes que l'un des triangles de la base ABCDE. Les triangles de l'une des bases sont proportionnels aux triangles correspondants de l'autre base. Considérons deux triangles consécutifs, ABC, ACD, et les triangles correspondants A'B'C', A'C'D', et faisons passer un plan par les arêtes BB', DD'. Les traces de ce plan sur les bases rencontrent AC au point R et A'C' au point R'. Les triangles ABC, ACD ayant même base AC, sont proportionnels aux hauteurs correspondantes, et, par suite, aux droites BR et RD qui sont aussi proportionnelles à ces hauteurs. Pour une raison semblable, les triangles A'B'C', A'C'D' sont proportionnels aux droites B'R' et R'D'. Or, la droite RR' étant parallèle aux bases du trapèze BB'D'D, on a :

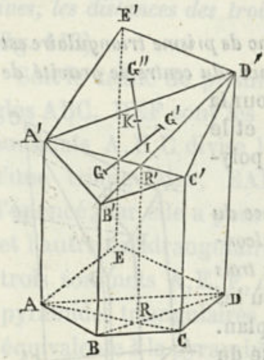

Fig. 145.

$$\frac{BR}{RD} = \frac{B'R'}{R'D'};$$

et, par conséquent,

$$\frac{ABC}{ACD} = \frac{A'B'C'}{A'C'D'}.$$

Donc les triangles de l'une des bases sont proportionnels aux triangles correspondants de l'autre base.

Les centres de gravité G, G', G'' des triangles A'B'C', A'C'D', A'D'E', sont des points ayant pour coefficients les nombres qui représentent respectivement les aires de ces triangles ; et, comme les triangles de l'une des bases sont proportionnels aux triangles correspondants de l'autre base, on peut substituer à ces coefficients les nombres qui représentent les aires des triangles correspondants ABC, ACD, ADE. Par conséquent, si M est le centre de gravité du polygone A'B'C'D'E', m sa distance au plan ABCDE, g, g', g'' les distances des points G, G', G'' au même plan, on a (100) :

$$\text{aire ABC} \times g + \text{aire ACD} \times g' + \text{aire ADE} \times g'' = \text{aire ABCDE} \times m.$$

Donc *le volume est égal au produit :* aire ABCDE $\times\ m$.

THÉORÈME.

262. *Le volume d'un tronc de prisme triangulaire est égal au tiers du produit de sa section droite par la somme de ses arêtes latérales* (fig. 146).

Prolongeons les arêtes latérales du tronc de prisme triangulaire ABCA'B'C', et menons un plan perpendiculaire à ces arêtes, de telle sorte que les sommets du tronc soient placés d'un même côté de ce plan. La section droite correspondante MNP sera la base commune à deux troncs de prisme droit MNPA'B'C', MNPABC, dont la différence est le tronc de prisme ABCA'B'C'. Or,

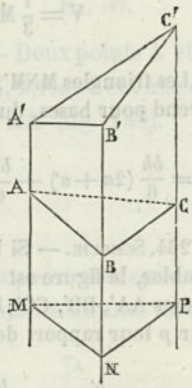

Fig. 146.

$$\text{vol. MNPA'B'C'} = \frac{1}{3}\,\text{MNP}\,(\text{MA'} + \text{NB'} + \text{PC'}),$$

$$\text{vol. MNPABC} = \frac{1}{3}\,\text{MNP}\,(\text{MA} + \text{NB} + \text{PC});$$

Donc

$$\text{vol. ABCA'B'C'} = \frac{1}{3}\,\text{MNP}\,(\text{AA'} + \text{BB'} + \text{CC'}).$$

PROBLÈME.

263. *Déterminer le volume d'un tronc de prisme quadrangulaire, dont deux faces latérales opposées sont des rectangles ayant leurs côtés respectivement parallèles* (fig. 147).

Soient ABCD, A'B'C'D' les deux faces latérales rectangulaires; les côtés AB, A'B' sont parallèles, ainsi que les côtés AD, A'D'. Nous désignerons AB et AD par a et b; A'B' et A'D' par a' et b'; et par h la distance des deux faces parallèles ABCD, A'B'C'D'. Soit MNN'M' la section droite. Le plan mené par les arêtes DC, A'B', divise le tronc en deux troncs de prisme triangulaires ADA'BCB', DA'D'CB'C' ; or,

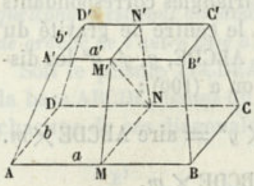

Fig. 147.

$$\text{vol. ADA'BCB'} = \frac{1}{3}\,\text{MNM'}\,(2a + a'),$$

$$\text{vol. DA'D'CB'C'} = \frac{1}{3}\,\text{NM'N'}\,(2a' + a);$$

on trouve donc, en désignant par V le volume du tronc de prisme quadrangulaire :

$$V = \frac{1}{3}\,\text{MNM'}\,(2a + a') + \frac{1}{3}\,\text{NM'N'}\,(2a' + a).$$

Les triangles MNM', NM'N' ont pour hauteur commune h, lorsqu'on prend pour bases, du premier b et du second b' ; on a donc :

$$V = \frac{bh}{6}(2a + a') + \frac{b'h}{6}(2a' + a) = \frac{h}{6}\,[ab + a'b' + (a + a')(b + b')]. \quad (1)$$

264. Scholie. — Si l'on suppose que les deux rectangles soient semblables, la figure est un tronc de pyramide quadrangulaire, car les arêtes AA', BB', CC', DD', vont concourir au même point. Désignant par p leur rapport de similitude, on a :

$$\frac{a'}{a} = p, \quad \frac{b'}{b} = p, \quad \text{et } V = \frac{h}{3}\,(ab + abp^2 + abp).$$

265. *Applications.*— La formule (1) peut servir à exprimer le volume d'un tombereau, des fossés ou cuvettes établies de distance en distance sur les routes, des amas de pierres destinés à l'entretien d'une route, car ces figures sont généralement terminées haut et bas par deux rectangles parallèles, et latéralement par quatre trapèzes.

§ 5. — Symétrie.

266. Symétrie par rapport a un point. — Deux points A et A′ sont symétriques par rapport à un point O, lorsque le point O est le milieu de la droite AA′ (fig. 148). Deux figures sont dites symétriques par rapport à un point O, lorsque chaque point de l'une a son symétrique dans l'autre figure. Le point O est dit le *centre de symétrie* des deux figures.

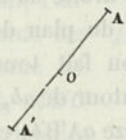

Fig. 148.

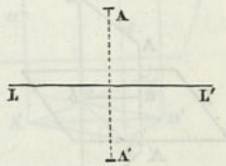

Fig. 149.

267. Symétrie par rapport a un axe. — Deux points A et A sont symétriques par rapport à un axe LL′, lorsque cet axe est perpendiculaire sur le milieu de la droite AA′ (fig. 149).

DÉFINITIONS.

268. *Symétrie par rapport à un plan. Deux points sont symétriques* par rapport à un plan, lorsqu'ils sont placés sur une même perpendiculaire au plan, de part et d'autre, et à des distances égales de celui-ci (fig. 150).

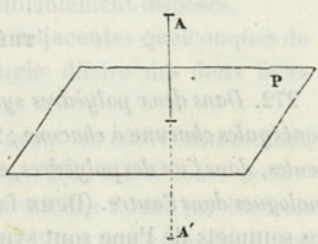

Fig. 150.

269. *Deux polyèdres symétriques* sont deux polyèdres d'un même nombre de sommets, qui peuvent être placés de part et d'autre d'un même plan, de manière que chaque sommet de l'un soit symétrique d'un sommet de l'autre par rapport à ce plan.

THÉORÈME.

270. *Lorsque deux points* A *et* B *sont symétriques de deux autres points* A′, B′ *par rapport à un plan donné* P, *la droite qui unit les deux premiers est égale à la droite qui unit les seconds* (fig. 151).

Tirons les droites AA′, BB′, et soient a, b les points où ces droites rencontrent le plan de symétrie; la droite ab sera l'intersection du plan P et du plan des droites AA′, BB′. Or, si l'on fait tourner le trapèze droit $a\mathrm{AB}b$ autour de ab, pour le rabattre sur le trapèze $a\mathrm{A'B'}b$; comme la droite Aa ne cesse pas, pendant le mouvement, d'être perpendiculaire à ab, elle se rabat sur A′a, et, comme $\mathrm{A}a = \mathrm{A'}a$, le point A tombe au point A′; pour la même raison, le point B tombe au point B′; donc AB = A′B′.

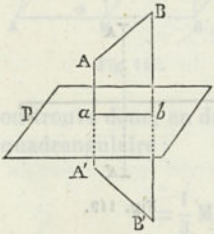

Fig. 151.

271. Corollaire. — Si trois points A, B, C, non situés en ligne droite, sont symétriques de trois autres points A′, B′, C′; le triangle, dont les sommets sont A, B, C, est égal au triangle, dont les sommets sont A′, B′, C′. Car ces deux triangles ont les trois côtés égaux chacun à chacun.

THÉORÈME.

272. *Dans deux polyèdres symétriques :* 1° *Les faces homologues sont égales chacune à chacune ;* 2° *l'angle dièdre de deux faces adjacentes, dans l'un des polyèdres, est égal à l'angle dièdre des faces homologues dans l'autre.* (Deux faces sont dites *homologues* lorsque les sommets de l'une sont symétriques des sommets de l'autre, par rapport au plan de symétrie donné) (fig. 152).

Soient les deux polyèdres symétriques ABCD...., A′B′C′D′...., et P le plan de symétrie. Supposons, si elle n'est pas composée exclusivement de triangles, qu'on ait partagé la surface du polyèdre ABCD.... en triangles. Les triangles qui, dans la surface de ce polyèdre, forment une face plane polygonale, ont pour symétriques, dans la surface de l'autre polyèdre, des triangles qui forment une face plane polygonale égale. En effet, considérons seulement deux triangles ABC, DBC ayant un côté commun BC. Si ces triangles sont dans un même plan, l'angle ABD est égal à la somme des angles ABC, CBD. Or, comme les triangles symétriques ABC, A'B'C' sont égaux, ainsi que les triangles symétriques BCD, B'C'D' et ABD, A'B'D', il en résulte que l'angle A'B'D' est égal à la somme des angles A'B'C', C'B'D'; et, par conséquent, que les trois angles A'B'D', A'B'C', C'B'D' sont aussi dans un même plan; car, s'il en était autrement, l'angle A'B'D' serait moindre que la somme des angles A'B'C', C'B'D' (113).

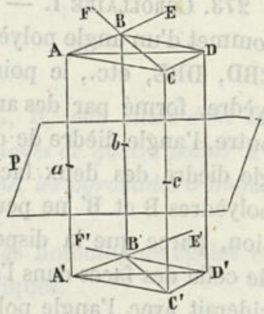

Fig. 152.

Donc, à toute face triangulaire ou polygonale de l'un des polyèdres correspond une face triangulaire égale ou une face polygonale égale de l'autre polyèdre, les faces polygonales étant égales, comme composées d'un même nombre de triangles égaux chacun à chacun et semblablement disposés.

2° L'angle dièdre de deux faces adjacentes quelconques de l'un des polyèdres est égal à l'angle dièdre des deux faces homologues de l'autre.

Soient ABC, DBC deux triangles ayant un côté commun, BC, et non situés dans un même plan; A'B'C', D'B'C' leurs homologues. Concevons en B un angle trièdre formé par les trois angles plans ABC, CBD, ABD, et en B' un angle trièdre formé par les trois angles plans homologues A'B'C', C'B'D', A'B'D'. Or, les trois premiers sont respectivement égaux chacun à chacun aux trois derniers, comme étant des angles homologues des triangles de même nom, qui sont égaux chacun à chacun. Les trièdres BACD, B'A'C'D', ayant leurs faces égales chacune à chacune, ont les angles dièdres égaux chacun à chacun. Donc les angles dièdres BC, B'C' sont égaux.

273. Corollaire I. — Si l'on regarde le point B comme le sommet d'un angle polyèdre, formé par les angles plans ABC, CBD, DBE, etc., le point B' sera le sommet d'un angle polyèdre, formé par des angles plans respectivement égaux. En outre, l'angle dièdre de deux faces adjacentes sera égal à l'angle dièdre des deux faces homologues. Mais les deux angles polyèdres B et B' ne peuvent pas coïncider par la superposition, parce que la disposition des faces dans l'un est inverse de celle des faces dans l'autre. L'un des angles polyèdres coïnciderait avec l'angle polyèdre formé en prolongeant au delà du sommet les arêtes de l'autre angle polyèdre. On dit que les angles polyèdres B et B' sont *symétriques*.

Deux polyèdres symétriques ont donc leurs faces homologues égales et leurs angles polyèdres homologues symétriques.

274. Corollaire II. — *Un polyèdre n'a qu'un seul symétrique.* Car deux polyèdres symétriques d'un même polyèdre ont leurs faces homologues égales et leurs angles polyèdres homologues égaux. On peut donc les faire coïncider par la superposition.

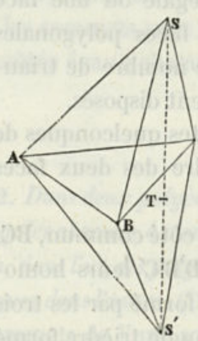

Fig. 153.

THÉORÈME.

275. *Deux pyramides triangulaires symétriques sont équivalentes* (fig. 153).

Du sommet S d'une pyramide triangulaire quelconque SABC abaissons la perpendiculaire ST sur la face opposée, et prolongeons cette perpendiculaire d'une longueur égale TS'. Si l'on tire ensuite les droites S'A, S'B, S'C, on forme une pyramide symétrique de la pyramide SABC, et qui est équivalente à celle-ci; car les deux pyramides ont la même base ABC et des hauteurs égales. Or, toute pyramide triangulaire autre que S'ABC, et symétrique de SABC, est égale à S'ABC (274).

Donc *deux pyramides triangulaires symétriques sont équivalentes.*

THÉORÈME.

276. *Lorsque quatre points* A, B, C, D, *non situés dans un même plan, sont respectivement symétriques de quatre points* A', B', C', D', *par rapport à un plan donné, les pyramides triangulaires* ABCD, A'B'C'D' *sont symétriques.*

En effet, ces pyramides ont les faces homologues égales et les angles solides homologues symétriques.

THÉORÈME.

277. *Deux polyèdres symétriques sont équivalents.*

Après avoir partagé, d'une manière quelconque, l'un des polyèdres symétriques donnés en pyramides triangulaires, on pourra toujours partager l'autre polyèdre en pyramides triangulaires symétriques des premières, chacune à chacune. Les deux polyèdres sont donc équivalents entre eux, puisque deux pyramides triangulaires symétriques sont équivalentes.

APPLICATIONS.

278. Tous les corps, toutes les machines qui doivent pouvoir exécuter les mêmes mouvements de deux côtés, sont formés de deux portions symétriques par rapport à un plan. Cela est nécessaire pour l'exécution exacte de certains mouvements.

C'est pour cette raison que les voitures ont un plan de symétrie qui coupe perpendiculairement l'essieu en deux parties égales ; les bateaux, un plan de symétrie qui va de l'avant-bec à l'arrière-bec ; les vaisseaux, un plan de symétrie qui va de la proue à la poupe, et qui passe par les axes de tous les mâts. Les balanciers des machines sont divisés en deux parties symétriques dans toutes leurs positions par un plan de symétrie qui se meut avec le corps et qui passe par l'axe de rotation.

On trouve aussi le plan de symétrie dans la nature, car un plan de symétrie divise l'homme, les quadrupèdes, les oiseaux et les poissons dans le sens de leurs mouvements.

§ 6. — Similitude.

DÉFINITIONS.

279. Deux polyèdres sont dits *semblables*, lorsqu'ils ont les angles polyèdres égaux et les faces, adjacentes aux angles égaux, semblables chacune à chacune.

On nomme *points* ou *sommets homologues*, les sommets de deux angles égaux ;

Droites homologues, deux droites qui ont pour extrémités des points homologues ;

Figures homologues, deux figures qui ont pour sommets des points homologues.

Les faces semblables de deux polyèdres semblables ont toutes le même rapport de similitude, puisque les faces d'un même polyèdre ont deux à deux une arête commune ; par suite le rapport de deux arêtes homologues quelconques est un nombre égal à ce rapport de similitude.

THÉORÈME.

280. *Lorsqu'on coupe une pyramide quelconque par un plan parallèle à sa base, la section est la base d'une seconde pyramide de même sommet que la première et semblable à celle-ci* (fig. 154).

Soient SABCDE la pyramide donnée, A'B'C'D'E' la section faite par un plan parallèle à la base. Les deux pyramides SABCDE, SA'B'C'D'E' ont les angles polyèdres égaux ; car l'angle S est commun et les autres angles polyèdres, tels que

A et A′, dont les sommets sont situés sur une arête commune, sont des trièdres égaux chacun à chacun, comme ayant leurs faces égales chacune à chacune et semblablement disposées. En outre, les faces homologues des pyramides sont semblables ; car les bases ABCDE, A′B′C′D′E′ sont semblables (244), et deux faces latérales homologues, telles que SAB, SA′B′ par exemple, sont semblables, puisque les côtés AB et A′B′ sont parallèles.

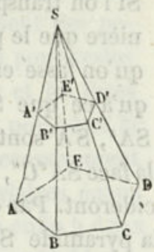

Fig. 154.

THÉORÈME.

281. *Deux pyramides triangulaires sont semblables, lorsqu'elles ont un dièdre égal compris entre deux faces semblables chacune à chacune et semblablement disposées* (fig. 155).

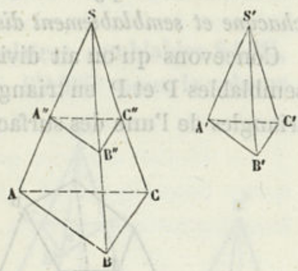

Fig. 155.

Soient les deux pyramides SABC, S′A′B′C′. Supposons les dièdres SA, S′A′ égaux ; et les faces SAB, S′A′B′ semblables, ainsi que les faces SAC, S′A′C′ ; avec cette condition, toutefois, que les angles plans ASB, A′S′B′ soient égaux entre eux, ainsi que les angles plans ASC, A′S′C′ et que les angles plans SAB, S′A′B′ soient égaux entre eux, ainsi que les angles plans SAC, S′A′C′.

Sur SA prenons une longueur SA″ = S′A′ et par le point A″ menons un plan A″B″C″ parallèle au plan ABC. La pyramide SA″B″C″ est semblable à la pyramide SABC (280). Il suffit donc de prouver que la pyramide SA″B″C″ est égale à la pyramide S′A′B′C′. Les faces SA″B″, S′A′B′ sont semblables à la face SAB, et par conséquent semblables entre elles ; or, elles ont un côté homologue égal SA″ = S′A′, donc elles sont égales. Pour la même raison les faces SA″C″, S′A′C′ sont égales entre elles. Si l'on transporte la pyramide S′A′B′C′ pour la placer de manière que le point S′ se confonde avec le point S et A′ avec A″ ; qu'on fasse ensuite tourner la face S′A′B′ autour de SA″ jusqu'à ce que S′A′B′ coïncide avec SA″B″ ; comme les dièdres SA″, S′A′ sont égaux, la face S′A′C′ s'appliquera sur le plan de la face SA″C″, et, comme ces deux faces sont égales, elles coïncideront. Par conséquent la pyramide S′A′B′C′ coïncidera avec la pyramide SA″B″C″. Donc la pyramide S′A′B′C′ est semblable à la pyramide SABC.

THÉORÈME.

282. *Deux polyèdres semblables peuvent être décomposés en un même nombre de pyramides triangulaires semblables chacune à chacune et semblablement disposées* (fig. 156).

Concevons qu'on ait divisé les surfaces de deux polyèdres semblables P et P′ en triangles, de la même manière. Tous les triangles de l'une des surfaces seront semblables chacun à cha-

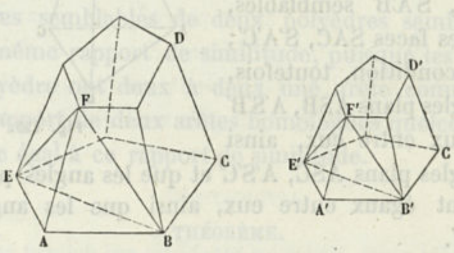

Fig. 156.

cun aux triangles homologues de l'autre, et semblablement placés. Soient A et A′ deux sommets homologues; AF, A′F′ deux arêtes homologues des polyèdres P et P′ ; AFE, AFB, les triangles adjacents à l'arête AF; A′F′B′, A′F′E′, les triangles homologues adjacents à l'arête A′F′. Les pyramides triangulaires FAEB

F'A'E'B' sont semblables comme ayant un dièdre égal compris entre deux faces semblables chacune à chacune et semblablement disposées. Or, si l'on retranche respectivement des polyèdres P et P' ces deux pyramides, on obtiendra pour restes deux polyèdres ayant les angles polyèdres égaux et les faces adjacentes semblables. On appliquera à ces deux polyèdres la même décomposition, et, après avoir obtenu successivement pour restes deux polyèdres ayant les angles polyèdres égaux et les faces adjacentes semblables, on parviendra enfin à deux restes qui seront deux pyramides triangulaires semblables.

THÉORÈME.

283. *Deux pyramides triangulaires semblables sont proportionnelles aux cubes de deux arêtes homologues et aux cubes de deux hauteurs homologues* (fig. 157).

Soient les deux pyramides triangulaires semblables SABC, S'A'B'C'. Transportons la pyramide S'A'B'C' pour la placer de manière que les angles trièdres S et S' coïncident et soient A'', B'', C'' les positions que prennent alors les sommets A', B', C'. La pyramide SA''B''C'', égale à S'A'B'C', est semblable à SABC. Par suite, les bases ABC, A''B''C'' sont parallèles, car, les faces A''SB'', ASB étant semblables,

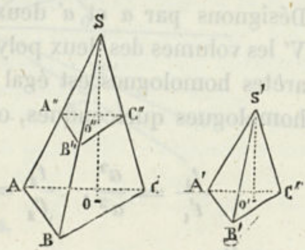

Fig. 157.

ainsi que les faces B''SC'', BSC, les droites A''B'', AB sont parallèles, ainsi que les droites B''C'', BC. Soient SO la perpendiculaire abaissée du point S sur ABC, et O'' le point où elle rencontre le plan A''B''C'', on a (244)

$$\frac{SA''}{SA} = \frac{SO''}{SO} = \frac{A''B''}{AB}. \qquad (1)$$

Or

$$\frac{\text{vol. SA}''\text{B}''\text{C}''}{\text{vol. SABC}} = \frac{\text{A}''\text{B}''\text{C}'' \times \frac{1}{3}\text{SO}''}{\text{ABC} \times \frac{1}{3}\text{SO}} = \frac{\text{A}''\text{B}''\text{C}''}{\text{ABC}} \times \frac{\text{SO}''}{\text{SO}} = \frac{\overline{\text{A}''\text{B}''}^2}{\overline{\text{AB}}^2} \times \frac{\text{A}''\text{B}''}{\text{AB}} = \frac{\overline{\text{A}''\text{B}''}^3}{\overline{\text{AB}}^3};$$

Donc, puisque SO″ est égale à la hauteur S′O′ de S′A′B′C′ :

$$\frac{\text{vol. S}'\text{A}'\text{B}'\text{C}'}{\text{vol. SABC}} = \frac{\overline{\text{A}'\text{B}'}^3}{\overline{\text{AB}}^3} = \frac{\overline{\text{S}'\text{A}'}^3}{\overline{\text{SA}}^3} = \frac{\overline{\text{S}'\text{O}'}^3}{\overline{\text{SO}}^3}.$$

284. *Deux polyèdres semblables sont proportionnels aux cubes de deux arêtes homologues.*

Soient P et P′ les polyèdres semblables donnés. Divisons ces deux polyèdres en un même nombre de pyramides triangulaires semblables chacune à chacune. Soient $t_1, t_2, t_3, \ldots$ les volumes des pyramides qui composent le polyèdre P; et $t'_1, t'_2, t'_3, \ldots$ les volumes des pyramides qui composent le polyèdre P′. Désignons par a et a' deux arêtes homologues, et par V et V′ les volumes des deux polyèdres. Comme le rapport de deux arêtes homologues est égal au rapport de deux autres arêtes homologues quelconques, on a :

$$\frac{t_1}{t'_1} = \frac{a^3}{a'^3}, \quad \frac{t_2}{t'_2} = \frac{a^3}{a'^3}, \quad \frac{t_3}{t'_3} = \frac{a^3}{a'^3}, \ldots\ldots;$$

par suite :

$$\frac{t_1}{t'_1} = \frac{t_2}{t'_2} = \frac{t_3}{t'_3} = \ldots\ldots,$$

d'où :

$$\frac{t_1 + t_2 + t_3 \ldots\ldots}{t'_1 + t'_2 + t'_3 + \ldots\ldots} \text{ ou } \frac{\text{V}}{\text{V}'} = \frac{a^3}{a'^3}.$$

Figures homothétiques dans l'espace.

285. La définition de l'*homothétie* est la même pour les figures de l'espace que pour les figures planes (*Géom. plane*, **356**).

Soit un système de points A, B, C,..... (fig. 158), situés d'une manière quelconque dans l'espace ; qu'on mène d'un point S choisi arbitrairement, les rayons SA, SB, SC,..... et qu'on prenne sur ces rayons des segments SA', SB', SC',..... tels que l'on ait :

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} \ldots\ldots = m;$$

quel que soit le nombre m, le système de points A', B', C',... est homothétique au système A, B, C..... Le point S est le *centre d'homothétie*, et, pour distinguer les deux sens suivant lesquels peuvent être portés les rayons SA', SB', SC'....., on donne à m le signe $+$, lorsque les rayons du second système sont dirigés du même côté du

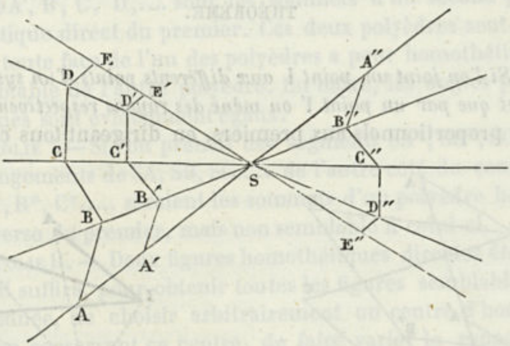

Fig. 158.

centre que les rayons homologues du premier, et le signe —, lorsqu'ils sont dirigés du côté opposé. Dans le premier cas, les deux systèmes sont dits *homothétiques directs*, et dans le second *homothétiques inverses*. Mais ici l'homothétie inverse ne donne plus, comme dans le plan, la même figure que l'homothétie directe.

THÉORÈME.

286. *La figure homothétique d'une droite est une droite parallèle à la droite donnée.*

Car si l'on mène par le point A', homologue d'un point quelconque A de la droite donnée, une parallèle à celle-ci, elle passera par tous les points homologues de la droite donnée.

287. Corollaire I. — *La figure homothétique d'un angle est un angle égal.*

En effet, chacun des côtés de l'angle donné a pour figure homothétique, une droite menée parallèlement à ce côté par le point homologue du sommet. En outre, les parallèles sont dirigées toutes deux dans le même sens ou toutes deux en sens inverse.

288. Corollaire II. — *La figure homothétique d'un plan est un plan parallèle au plan donné.*

Car, si l'on mène par le point A', homologue d'un point quelconque A du plan P, un plan parallèle à celui-ci, il contiendra les points homologues de tous les points du plan P, d'où il résulte que l'angle des deux plans est égal à celui de leurs homothétiques.

THÉORÈME.

289. *Si l'on joint un point* I *aux différents points d'un système* A, B, C,..... *et que par un point* I' *on mène des rayons respectivement* parallèles et proportionnels aux premiers, en dirigeant tous ces rayons

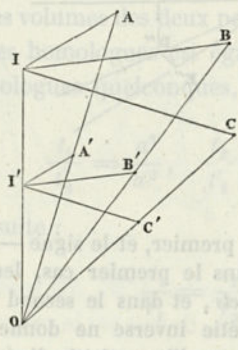

Fig. 159.

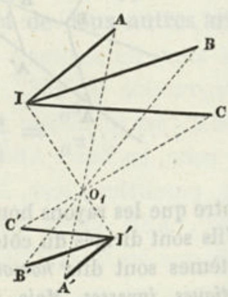

Fig. 160.

soit dans le même sens, soit dans des sens inverses, *les extrémités* A', B', C',..... *de ces derniers rayons formeront un système homothétique au système* A, B, C..... (fig. 159 et 160).

Même démonstration que 359 (*Géom. plane*).

THÉORÈME.

290. *Deux systèmes homothétiques à un troisième sont homothétiques entre eux.*

Même démonstration que 361 (*Géom. plane*).

THÉORÈME.

291. *Deux polyèdres homothétiques directs sont semblables.*

Supposons qu'on joigne un point S aux différents sommets A, B, C, D,.... d'un polyèdre (fig. 158) et qu'on prenne sur SA, SB, SC,..... des segments SA′, SB′, SC′,..... tels que

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} \ldots\ldots$$

les points A′, B′, C′, D′,.... sont les sommets d'un second polyèdre homothétique direct du premier. Ces deux polyèdres sont semblables, car toute face de l'un des polyèdres a pour homothétique une face semblable de l'autre polyèdre. En outre, les angles polyèdres homologues sont évidemment égaux.

292. Scolie I. — Si l'on prenait des segments SA″, SB″, SC″,... sur les prolongements de SA, SB, SC..... de l'autre côté du centre S, les points A″, B″, C″..... seraient les sommets d'un polyèdre homothétique inverse du premier, mais non semblable à celui-ci.

293. Scolie II. — Deux figures homothétiques directes étant semblables, il suffira, pour obtenir toutes les figures semblables à une figure donnée, de choisir arbitrairement un centre d'homothétie et, tout en conservant ce centre, de faire varier le rapport d'homothétie de zéro à l'infini.

LIVRE III

SURFACES COURBES

Cylindre, Cône, Sphère.

DÉFINITIONS

294. On désigne sous le nom de SURFACE *le lieu de toutes les positions que prend successivement, dans l'espace, une ligne mobile qui change de position et même de forme, d'après une loi déterminée et continue.*

La ligne mobile se nomme la *génératrice* de la surface. Par une *loi déterminée,* on entend dire des conditions telles que, pour chaque point donné de l'espace, elles ne laissent rien d'arbitraire soit dans la forme, soit dans la position de la génératrice. Ordinairement on exprime la loi de ce mouvement, en assignant une ou plusieurs lignes fixes, nommées *directrices,* sur lesquelles doit s'appuyer constamment la génératrice dans toutes ses positions.

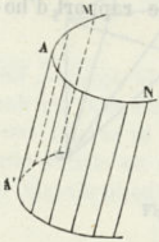

Fig. 161.

Fig. 162.

295. On donne le nom de *surface réglée,* à toute surface qui a pour génératrice une ligne droite. On remarque parmi les surfaces réglées, la *surface cylindrique* (fig. 161) et la *surface conique* (fig. 162).

296. Une *surface de révolution* est engendrée par une ligne

quelconque AB (fig. 163) qui tourne autour d'une droite fixe LL′ qu'on nomme *axe*, de manière que chacun des points de la génératrice, tel que M, décrive une circonférence dont le plan est perpendiculaire à l'axe, dont le centre est le pied O de la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'axe, et le rayon, cette même perpendiculaire, MO. Lorsqu'une demi-circonférence tourne autour du diamètre qui passe par ses extrémités, elle engendre la surface de révolution à laquelle on donne le nom de *surface sphérique*. Tout point de celle-ci se trouve à une distance du centre de la demi-circonférence génératrice égale à son rayon.

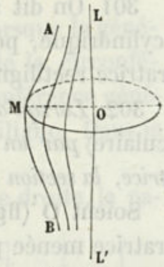

Fig. 163.

§ 1. — Surfaces cylindriques.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

297. Une surface cylindrique (fig. 164) est engendrée par une droite mobile, AA′, qui s'appuie constamment sur une courbe donnée, MN, laquelle est la *directrice courbe* de la surface, en restant toujours parallèle à une droite donnée, qu'on peut aussi appeler la *directrice droite* de la surface.

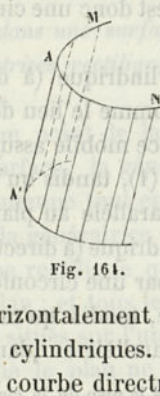

Fig. 164.

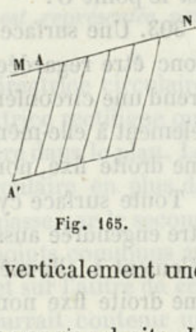

Fig. 165.

298. Il résulte de là que les surfaces, projetant horizontalement et verticalement une courbe, sont des surfaces cylindriques.

299. Si l'on remplace la courbe directrice par une droite, la surface engendrée est un plan (28) (fig. 165).

300. Nous ne considérerons que les surfaces cylindriques dont la directrice curviligne est une circonférence de cercle.

301. On dit souvent les *génératrices rectilignes* d'une surface cylindrique, pour désigner les diverses positions de la génératrice rectiligne.

302. *Lorsqu'on coupe une surface cylindrique* (à directrice circulaire) *par un plan parallèle à celui de la circonférence directrice, la section est une circonférence égale à celle-ci.*

Soient O (fig. 166) la directrice, CD la parallèle à la génératrice menée par le centre O de la directrice; O′ le point de rencontre de CD et d'un plan mené parallèlement à celui de la directrice. Le point O′ est à égale distance de tous les points de la section. En effet, soient M′ et N′ deux points quelconques de la section, M et N les points de la directrice situés respectivement sur les mêmes génératrices que M′ et N′. Tirons les droites O′M′, O′N′ et les droites, OM, ON. OM = O′M′ et ON = O′N′, comme portions de parallèles interceptées par deux parallèles; et par suite O′M′ = O′N′. Le point O′ étant à égale distance de deux points quelconques de la section, celle-ci est donc une circonférence dont le centre est le point O′.

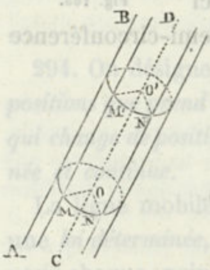

Fig. 166.

303. Une surface cylindrique (à directrice circulaire) peut donc être regardée comme le lieu des diverses positions que prend une circonférence mobile assujettie à se mouvoir parallèlement à elle-même (1), tandis qu'un de ses points parcourt une droite fixe, non parallèle au plan de la circonférence.

Toute surface cylindrique (à directrice circulaire) peut donc être engendrée aussi par une circonférence qui se meut parallèlement à elle-même, tandis qu'un de ses points parcourt une droite fixe non parallèle au plan de la circonférence.

(1) On entend dire ici que le plan de la circonférence se meut en restant toujours parallèle à une même directrice.

304. La surface cylindrique s'étend à l'infini dans deux sens opposés, puisque sa génératrice rectiligne s'étend à l'infini dans ces deux sens.

305. Une surface cylindrique est dite *droite*, lorsque la génératrice rectiligne est perpendiculaire au plan de la circonférence directrice, ou lorsque le plan de la circonférence génératrice est perpendiculaire à la directrice rectiligne. Dans le cas contraire, elle est dite *oblique*.

306. On nomme *axe* de la surface cylindrique droite, la parallèle DC aux génératrices rectilignes (fig. 167), menée par le centre D de la directrice circulaire AA'.

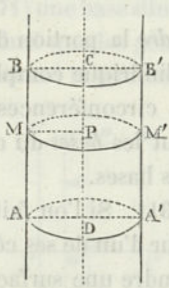

Fig. 167.

307. *Toute section, faite dans la surface cylindrique droite par un plan perpendiculaire à l'axe* (fig. 167), *est une circonférence égale à la directrice circulaire, puisqu'elle se confond avec l'une des positions de la génératrice circulaire égale à celle-ci* (303).

D'où il résulte que la surface cylindrique droite est le lieu des points de l'espace dont la distance à l'axe est égale à une longueur donnée, qui est le rayon de la directrice circulaire, et qu'on nomme aussi le *rayon* de la surface cylindrique.

308. *Toute section faite dans une surface cylindrique par un plan parallèle aux génératrices rectilignes est représentée par deux génératrices rectilignes.*

Car si l'on considère un point de la directrice circulaire commun au plan et à la surface, la génératrice rectiligne qui passe par ce point sera contenue tout entière dans le plan. Le plan ne peut pas couper la génératrice circulaire en plus de deux points ; la génératrice rectiligne qui passe par le second point sera aussi dans ce plan ; et tous les points communs au plan et à la surface seront situés sur l'une et sur l'autre de ces deux génératrices, puisque le plan ne pourrait contenir un point de la surface situé hors de ces deux génératrices.

309. Surface cylindrique complète (fig. 168, 169). — Nous appellerons *surface cylindrique complète* la portion d'une surface cylindrique (droite ou oblique) terminée par deux circonférences dont les plans sont parallèles à la directrice circulaire. Ces circonférences sont les *bases* de la surface complète. Sa *hauteur* est la distance des deux plans.

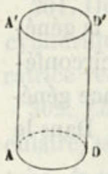

Fig. 168.

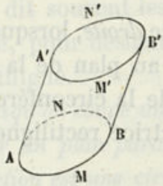

Fig. 169.

310. Cylindre. — On nomme *cylindre* la portion de l'espace ou le corps limité par une surface cylindrique complète droite ou oblique et par les cercles dont les circonférences sont les *bases* de la surface. Ces cercles sont les *bases* du cylindre, et sa *hauteur* est égale à la distance des bases.

311. Si l'on fait tourner un rectangle ABCD (fig. 170) autour d'un de ses côtés, CD, supposé fixe, le côté opposé AB engendre une surface cylindrique droite et complète, et les côtés AD, BC ses bases; car, pendant cette révolution, un point quelconque M de AB engendre une circonférence dont le rayon est la perpendiculaire MP abaissée du point M sur CD; et toutes les perpendiculaires abaissées des différents points de AB sur CD sont égales aux côtés AD, BC.

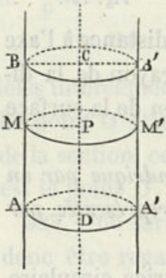

Fig. 170.

312. *Surface cylindrique de révolution.* — Concevons les droites AB et CD indéfiniment prolongées de part et d'autre; la première engendrera (fig. 170), pendant la révolution du rectangle, la surface cylindrique droite dont la génératrice circulaire est l'une des circonférences ayant pour rayon AD ou BC et pour axe CD. On donne pour cette raison à la surface cylindrique droite le nom de *surface cylindrique de révolution* et le nom d'*axe de révolution* à l'axe de cette surface.

313. *La surface cylindrique droite est donc engendrée par la ré-*

volution ou rotation complète autour d'une droite fixe, d'une autre droite qui lui est constamment parallèle, et reste toujours à la même distance de la première.

PROBLÈME.

314. *Dessiner une surface cylindrique droite et complète dont la hauteur et le rayon de base sont donnés.*

Soit XY la ligne de terre ; supposons (fig. 171) une base située dans le plan horizontal ; l'axe sera vertical ainsi que les génératrices rectilignes. Traçons sur le plan horizontal la circonférence a, qui est la trace horizontale de la surface. Les différents points de la surface ont pour projection horizontale un point de la circonférence a. Le centre a est la trace et aussi la projection horizontale de l'axe, dont la projection verticale est la perpendiculaire $a'a''$ à la ligne de terre, menée par le pied a' de la perpendiculaire abaissée sur celle-ci du point a. Pour déterminer la projection verticale d'une génératrice dont on donne la trace horizontale, m par exemple, on abaisse la perpendiculaire mm' sur la ligne de terre et du point m' on élève la perpendiculaire $m'm''$ sur la ligne de terre ; $m'm''$ est la projection verticale de la génératrice.

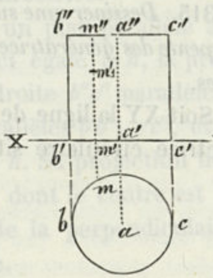

Fig. 171.

Un point est déterminé par les projections de la génératrice à laquelle il appartient et sa distance au plan horizontal. Soient $(m, m'm'')$ la génératrice, et h la distance du point au plan horizontal. On prend sur $m'm''$, à partir de m', une longueur $m'm'_1$, égale à h ; et les projections du point sont (m, m'_1).

Menons les tangentes bb', cc', perpendiculaires à la ligne de terre, et par les points b', c', perpendiculairement à celle-ci, les droites $b'b''$, $c'c''$ qui sont les projections verticales des génératrices dont les traces horizontales sont b et c. Les points de la surface sont projetés verticalement sur ces droites ou entre ces droites, car la perpendiculaire à la ligne de terre abaissée d'un point pris au delà ne rencontre pas la circonférence a.

Enfin, si l'on a pris les droites $b'b''$, $c'c''$ égales à la hauteur de la surface, et qu'on tire la droite $b'b''$, celle-ci sera la projection verticale de la base supérieure.

PROBLÈME.

315. *Dessiner une surface cylindrique oblique et complète, dont la pente des génératrices droites et la directrice circulaire sont données.*

Soit XY la ligne de terre (fig. 172). Nous supposerons la directrice circulaire située dans le plan horizontal, et le plan

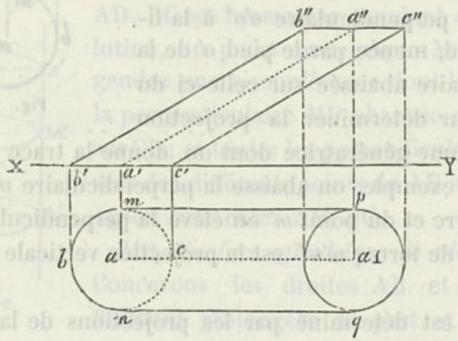

Fig. 172.

vertical parallèle aux génératrices rectilignes. Les projections horizontales de celles-ci sont alors parallèles à la ligne de terre ; les projections verticales sont parallèles aux génératrices elles-mêmes et font avec la ligne de terre un angle (*la pente*) égal à celui de ces génératrices avec le plan horizontal.

Soit a la circonférence directrice ; menons les tangentes bb', cc', perpendiculairement à la ligne de terre ; et, par les points b', c', les droites $b'b''$, $c'c''$, qui font avec la ligne de terre un angle égal à l'angle des génératrices avec le plan horizontal. $b'b''$ et $c'c''$ sont les projections des génératrices qui ont pour traces horizontales b et c. Les projections verticales des différents points de la surface sont toutes placées sur ou entre les parallèles $b'b''$, $c'c''$. Traçons les tangentes mp, nq à la circonférence a, qui sont parallèles à la ligne de terre. mp et nq sont les projections horizontales des génératrices dont les traces horizontales sont m et n.

aa_1 et $a'a''$ sont les projections de la parallèle aux génératrices menée par le centre de la circonférence directrice.

Si l'on suppose la surface coupée par un plan parallèle au plan horizontal, à une distance de celui-ci égale à h, la projection verticale de la section sera la droite $b''c''$ parallèle à la ligne de terre, comprise entre les parallèles $b'b''$, $c'c''$, et à une distance de la ligne de terre égale à h. Sa projection horizontale sera une circonférence égale, dont le centre est le point d'intersection de la droite aa_1 et de la perpendiculaire abaissée du point a'' sur la ligne de terre.

APPLICATIONS.

316. *a. Construction des voûtes cylindriques.* — Pour exécuter cette construction qui est celle d'une demi-surface cylindrique de révolution à génératrices rectilignes horizontales, les architectes font placer sur des cintres en bois, demi-circulaires, des madriers dont les petites arêtes forment un demi-polygone régulier, et dont les grandes arêtes sont les génératrices de la voûte. Le maçon pose les moellons sur ces madriers et construit ainsi une surface composée de facettes planes et qui diffère peu d'une surface cylindrique. On donne à ces surfaces demi-cylindriques droites le nom de *voûte en berceau.*

b. Construction d'un cylindre plein en bois ou en pierre. — Premier mode. — L'ouvrier trace sur un plan perpendiculaire à l'axe qu'il doit donner à la surface, une circonférence qui deviendra la directrice de la surface cylindrique. Il mène ensuite des tangentes à cette circonférence et conduit suivant ces tangentes des faces planes perpendiculaires au plan de la circonférence ; il multiplie successivement ces tangentes jusqu'à ce que le polygone circonscrit, qu'elles forment, ne diffère plus sensiblement de la circonférence directrice. Les faces menées par les tangentes forment alors une surface qui pourra différer aussi peu qu'on le voudra du cylindre demandé. Les mâts des navires, les arbres tournants des machines, quelques cylindres en pierre, sont construits de cette manière.

Deuxième mode. — On fait usage du tour, et l'ouvrier fait décrire à la pointe de l'outil une droite parallèle à l'axe, autour duquel tourne la pièce à construire. Ce dernier mode est employé dans la poterie ; dans les arts, pour la construction des cylindres en bois ou en métal, etc.

c. Cylindres pleins et cylindres creux ayant des directrices circulaires égales. — Lorsque deux surfaces cylindriques de révolution ont des directrices circulaires égales, elles coïncident dans la superposition. Car, après avoir fait coïncider les directrices, les génératrices coïncident aussi nécessairement, puisqu'elles sont perpendiculaires aux plans de ces directrices. En outre les deux surfaces cylindriques ne cessent pas de coïncider lorsqu'on les fait tourner toutes deux en sens contraires autour de l'axe commun, ou lorsqu'on fait mouvoir l'une d'elles ou toutes deux dans le sens de cet axe. Les couvercles des boîtes *rondes* (cylindriques) offrent un exemple du premier mouvement. Les pistons des pompes, l'instrument appelé *trombone*, présentent une application du second.

d. Moulage des cylindres creux sur des cylindres pleins. — Pour construire des cylindres creux, on les moule sur un cylindre plein exécuté avec précision. C'est ainsi que sont confectionnés les cylindres creux en sable ou en terre, quand ils doivent servir de moule pour convertir en cylindre le métal liquide qu'on y verse. Sur une table solidement établie on fixe un cylindre de laiton qui doit servir de modèle. On l'entoure d'un cadre et on foule du sable très-fin dans l'intervalle. Le sable forme une surface cylindrique creuse exactement égale au modèle. Si l'on veut construire un moule en terre, il faut d'abord introduire une faible partie de terre humide, dont on entoure le modèle, ajouter successivement des couches de terre sèche et fouler ensuite.

DÉFINITIONS.

317. On définit, d'une manière générale, la tangente à une courbe quelconque en un point donné, A, la limite AT des positions que prend une sécante au point A (fig. 173), lorsqu'un second point B de rencontre de cette sécante avec la courbe, après s'être rapproché indéfiniment du point A, par suite du mouvement de rotation de la sécante autour du point A, vient se confondre avec lui. En considérant une courbe comme un polygone dont les côtés sont infiniment petits, chaque côté indéfiniment prolongé représentera une tangente; celle-ci étant, à son tour, regardée comme une droite qui unit deux points de la courbe infiniment voisins, ou qui a un *élément rectiligne* commun avec la courbe.

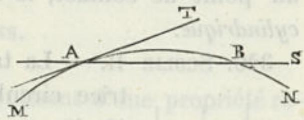

Fig. 173.

THÉORÈME.

318. *Tout plan mené par une tangente à la directrice d'une surface cylindrique* (droite ou oblique) *et la génératrice rectiligne qui passe au point de contact, n'a pas d'autres points communs avec la surface que ceux de cette dernière génératrice* (fig. 174).

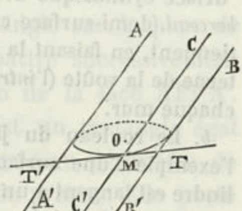

Fig. 174.

Soient O la directrice circulaire, et AA′ la génératrice rectiligne d'une surface cylindrique donnée. Le plan mené par la tangente TT′ et la génératrice rectiligne CC′ qui passe au point de contact M, ne contient pas d'autres points de la surface cylindrique que ceux de la génératrice CC′; car toute parallèle aux génératrices rectilignes, menée par un point du plan, non situé sur CC′, rencontre le plan de la circonférence O en un point de la tangente TT′ autre que M et, par conséquent, se trouve située hors de la surface cylindrique.

319. Scolie I. — On donne au plan déterminé par une tangente à la directrice circulaire et la génératrice qui passe au point de contact, le nom de *plan tangent à la surface cylindrique*.

320. Scolie II. — La tangente au point A de la génératrice circulaire de la surface cylindrique C (droite ou oblique) (fig. 175) pouvant être regardée comme une droite qui unit deux points de la courbe infiniment voisins A et A′, ou qui a un élément rectiligne commun avec elle; le plan tangent mené par cette tangente et la génératrice rectiligne AB, a un élément plan commun avec la surface, savoir : la portion du plan comprise entre les deux génératrices infiniment voisines, AB et A′B′.

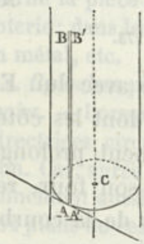

Fig. 175.

APPLICATIONS.

321. *a.* C'est par le contact des deux surfaces qu'on raccorde une urface cylindrique avec un plan. Ainsi on raccorde une *voûte en berceau* (demi-surface cylindrique droite), avec les murs qui la soutiennent, en faisant la construction de telle sorte que la surface interne de la voûte (l'*intrados*) soit tangente à la face plane interne de chaque mur.

b. Le rouleau du jardinier qui repose sur le sol aplani offre l'exemple d'une surface cylindrique tangente à un plan. Si un cylindre est tangent à un plan, le cylindre, en roulant sur le plan, est tangent à celui-ci dans toutes ses positions, car toute parallèle aux génératrices menées par un point du plan est contenue dans le plan. C'est en faisant rouler un cylindre sur le sol que le laboureur et le jardinier s'assurent si le sol est plan ; et lorsque le sol présente des aspérités, que la pression puisse faire disparaître, ils donnent un poids convenable au cylindre mobile.

c. Dans certaines usines on rencontre une lanterne *a* qui engrène avec une roue *r* dont les dents sont perpendiculaires au plan de la circonférence, et ce plan est constamment tangent à une surface cylindrique qui a le même axe que la lanterne.

d. La meule qui sert à aiguiser est un cylindre droit qui tourne autour de son axe, en restant constamment tangent à l'une des faces de l'instrument dont le tranchant représente l'arête de contact.

DÉFINITIONS.

322. Les surfaces cylindriques jouissent d'une propriété remarquable, qu'elles partagent avec d'autres surfaces réglées; c'est de pouvoir être *développées* sur un plan, c'est-à-dire être étendues sur un plan sans déchirure ni duplicature.

Soit le prisme droit convexe ABCDEFA′ (fig. 176). Faisons tourner la face ABB′A′ autour de l'arête BB′, pour la rabattre sur le plan de la face BCC′B′. On obtiendra alors le rectangle ACC′A′; qu'on fasse ensuite tourner ce rectangle autour de l'arête CC′ pour le rabattre sur le plan de la face CDD′C′, on obtiendra le rectangle ADD′A′ et que l'on continue à rabattre le dernier rectangle sur le plan de la face contiguë, on parviendra à rabattre successivement toutes les faces du prisme sur le plan de la face AFF′A′. La figure formée par ce rabattement est un rectangle égal au rectangle $aa_1a'_1a'$ dont la base est égale au périmètre de la base du prisme et la hauteur à celle du prisme. Elle porte le nom de *développement* de la surface latérale du prisme.

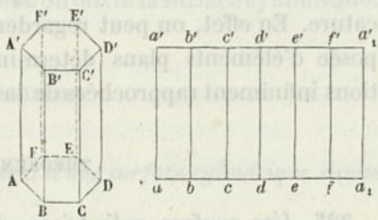

Fig. 176.

323. On peut de la même manière développer aussi la surface latérale d'un prisme oblique ABCDEA′ (fig. 177). Le périmètre de la section droite MNPQR se confond sur le développement avec la perpendiculaire abaissée du point M sur

les arêtes latérales. On suppose la surface du prisme ouverte

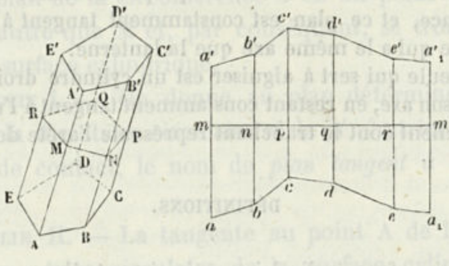

Fig. 177.

suivant l'arête AA'. La figure formée par ce rabattement est égale à la figure $aa_1a'_1a'$.

324. La surface cylindrique complète peut, aussi bien que la surface latérale du prisme, être *développée* sur un plan, c'est-à-dire être étendue sur ce plan sans déchirure ni duplicature. En effet, on peut regarder cette surface comme composée d'éléments plans déterminés chacun par deux positions infiniment rapprochées de la génératrice rectiligne (320).

THÉORÈME.

325. *Une surface cylindrique droite et complète a pour développement un rectangle dont la base est la circonférence rectifiée de la base de cette surface et dont la hauteur est la même.*

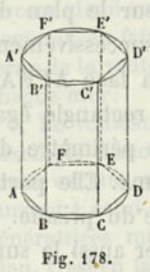

Fig. 178.

Inscrivons un polygone régulier à l'une des bases de la surface (fig. 178). Les génératrices de la surface qui passent par les sommets de ce polygone et se terminent à l'autre base, peuvent être regardées comme les arêtes d'un prisme droit ayant pour bases ce polygone et celui dont les sommets sont les points de rencontre de ces arêtes avec l'autre base de la surface. Ce prisme ABCDEFA' est dit *inscrit à la surface cylindrique.*

Le développement de la surface latérale du prisme pourra toujours s'effectuer (322), quel que soit le nombre des côtés de sa base. Or, si l'on fait croître indéfiniment le nombre de ces côtés, le périmètre de la base tend à devenir égal à la circonférence, et a pour limite la circonférence ; en même temps la surface latérale du prisme *inscrit* à la surface cylindrique complète, tend à devenir égale à cette surface qui est sa limite. La surface cylindrique droite et complète a donc pour développement un rectangle dont la hauteur est celle de la surface, et la base la circonférence rectifiée de la base de la surface.

326. Scolie. — La surface cylindrique pouvant être considérée comme formée d'éléments plans communs à cette surface et à ses différents plans tangents, c'est sur un plan tangent que se fait le développement, et généralement sur celui qui passe par la génératrice selon laquelle on ouvre la surface cylindrique.

PROBLÈME.

327. *Tracer le développement d'une surface cylindrique droite et complète* (fig. 179).

Après avoir construit l'épure de la surface donnée (314), nous supposerons qu'on ouvre la surface cylindrique suivant la génératrice (c, $c'c''$), et qu'on fasse le développement sur le plan tangent mené par cette génératrice. Si, après avoir tracé ce développement, on fait tourner le plan tangent autour de la génératrice (c, $c'c''$) pour le placer parallèlement au plan vertical, la figuredu dé veloppement se projettera sur le plan vertical suivant une figure égale. Par

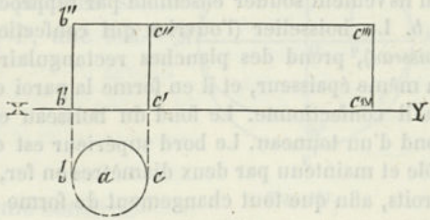

Fig. 179.

conséquent, pour tracer le développement, il suffit de porter sur la ligne de terre une longueur $c'c^{\text{IV}}$ égale à la circonférence rectifiée a, et de construire le rectangle $c'c''c'''c^{\text{IV}}$ qui a pour base $c'c^{\text{IV}}$ et pour hauteur $c'c''$.

328. Scolie. — On ne peut obtenir qu'une valeur approchée de la longueur d'une circonférence donnée. On prend cette valeur approchée, en multipliant le diamètre $2r$ par une valeur approchée du nombre π.

PROBLÈME.

329. *Couper une feuille de papier ou de métal de manière qu'elle puisse former une surface cylindrique droite, de hauteur et de rayon connus.*

On découpe la feuille de manière à lui donner la figure d'un rectangle dont l'une des dimensions soit la circonférence rectifiée de même rayon, et l'autre la hauteur donnée. On ploie ensuite la surface de ce rectangle, en faisant coïncider les deux côtés, égaux à la hauteur donnée.

Si l'on veut construire un tuyau cylindrique, il faut, au lieu d'une dimension égale à la circonférence rectifiée, prendre une dimension égale à cette circonférence augmentée de la largeur des deux lèvres de l'agrafe.

APPLICATIONS.

330. *a.* Le plombier et le ferblantier, pour faire des conduits cylindriques, emploient des rectangles et taillent en biseau les bords qu'ils veulent souder ensemble par rapprochement.

b. Le boisselier (l'ouvrier qui confectionne la mesure appelée *boisseau*), prend des planches rectangulaires planes ayant partout la même épaisseur, et il en forme la paroi cylindrique des mesures qu'il confectionne. Le fond du boisseau est un cercle, comme le fond d'un tonneau. Le bord supérieur est ordinairement garni en tôle et maintenu par deux diamètres en fer, qui se croisent à angles droits, afin que tout changement de forme soit impossible.

PROBLÈME.

331. *Tracer une circonférence sur une surface cylindrique limitée.*

Il suffit de porter, à partir d'une des bases, une même longueur sur les génératrices rectilignes. Les points ainsi déterminés sont dans un plan parallèle à celui de la base, et par conséquent les points de l'intersection de ce plan avec la surface. Cette construction peut être appliquée à la surface droite et à la surface oblique.

DÉFINITIONS.

332. On nomme *surface cylindrique* (droite ou oblique), *tronquée*, la portion de cette surface comprise entre deux plans, l'un parallèle au plan de la directrice circulaire, et l'autre non parallèle à ce plan ni aux génératrices rectilignes. On désigne sous le nom de *génératrices rectilignes* de la surface tronquée, les portions des génératrices de la première surface comprises entre les deux sections.

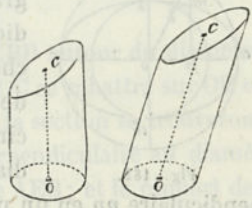

Fig. 180.

On donne le nom de *cylindre tronqué*, au corps limité par la surface cylindrique tronquée et les surfaces des deux sections O et C (fig. 180), qu'on nomme *bases* du cylindre tronqué.

333. Ellipse. — Soient AA′, CC′ deux diamètres rectangulaires de la circonférence O (fig. 181). Prenons sur OC et OC′ deux longueurs égales *OB* et *OB′*. D'un point quelconque M de la circonférence, abaissons la perpendiculaire MP sur AA′, et prenons sur MP, à partir du point P, une longueur NP telle que :

$$\frac{NP}{MP}=\frac{BO}{CO}.$$

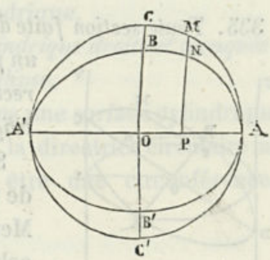

Fig. 181.

Si l'on répète la même construction à l'égard de tous les points de la circonférence, le lieu des points ainsi déterminés est une courbe plane, fermée, à laquelle on donne le nom d'*Ellipse*.

Il résulte de la construction qui vient d'être indiquée que les points A et A′ sont des points de l'ellipse, et que les droites AA′, BB′ sont des axes de symétrie de l'ellipse.

On peut prendre OB moindre ou plus grand que OC.

On distingue les deux *axes* de l'ellipse par les dénominations de *grand axe* et de *petit axe*.

334. *Construction de l'ellipse.* — Pour construire *par points* l'ellipse dont les longueurs des axes sont $2a$ et $2b$, on décrit deux circonférences concentriques ayant pour rayons a et b (fig. 182). On tire un rayon on de la plus grande ; on abaisse ensuite une perpendiculaire np sur le diamètre ac, qu'on a choisi pour l'un des axes, et par le point l de rencontre du rayon on avec la petite circonférence, on mène une parallèle au diamètre ac. Celle-ci rencontre la perpendiculaire np en un point m qui appartient à l'ellipse.

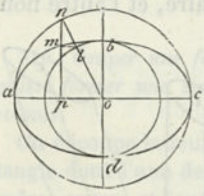

Fig. 182.

On pourra déterminer de cette manière un nombre de points assez grand, pour obtenir la figure de l'ellipse en faisant passer par ces points un trait continu.

THÉORÈME.

335. *Toute section faite dans une surface cylindrique droite par un plan non parallèle au plan de la directrice circulaire ni aux génératrices rectilignes est une ellipse* (fig. 183).

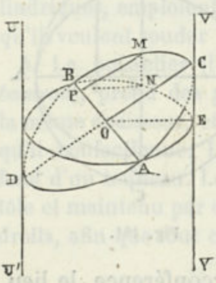

Fig. 183.

Soient ACBD la section, O le point de rencontre du plan sécant et de l'axe. Menons par ce point un plan parallèle à celui de la génératrice circulaire ; soient AEB la circonférence correspondante, le diamètre AB l'intersection des deux plans, et CD la ligne de plus grande pente du plan ACB par rapport au plan AEB, menée par le point O. VV′ et UU′ étant les génératrices du cylindre qui passent par C et D, le point E où la génératrice VV′ rencontre le plan AEB est le pied de la perpendiculaire abaissée de C sur ce plan. Tirons la ligne de plus grande pente, MP, qui passe par un point M de la section. La perpendiculaire MN abaissée du point M sur le plan AEB se confond avec la génératrice du cylindre qui passe par ce point ; et les triangles MPN, COE étant semblables, on a :

$$\frac{MP}{PN} = \frac{CO}{OE}.$$

Or, si l'on fait tourner la section ACBD autour du diamètre AB, pour la rabattre sur le plan AEB, OC se rabattra sur OE et PM sur PN. Les différents points de la section se trouveront tous placés, chacun sur une même perpendiculaire au diamètre AB qu'un point de la circonférence AEB ; et le rapport des distances au diamètre AB des deux points correspondants sera égal au rapport $\frac{CO}{OE}$. D'où l'on conclut que la courbe ACBD est une ellipse dont les axes sont CD et AB.

336. Scolie. — On doit remarquer que le petit axe de l'ellipse, quelle que soit la direction du plan sécant, sera toujours égal au diamètre de la surface cylindrique.

337. Corollaire. *Toute surface cylindrique droite et tronquée a pour bases une circonférence et une ellipse.*

338. Scolie. — La section faite dans une surface cylindrique oblique par un plan, non parallèle à la directrice circulaire ni aux génératrices rectilignes, peut être une circonférence, comme on le verra plus loin.

PROBLÈME.

339. *Dessiner une surface cylindrique droite et tronquée dont on connaît le rayon, la plus grande et la plus petite génératrice rectiligne* (fig. 184).

Supposons la base circulaire de la surface située dans le plan horizontal et prenons pour plan vertical un plan parallèle au plan de symétrie qui passe par la plus petite et la plus grande génératrice rectiligne.

Soient donc a la base circulaire, XY la ligne de terre. Les extrémités du diamètre bc parallèle à XY sont les traces horizontales de la plus petite et de la plus grande génératrice rectiligne. Les pieds b', c' des perpendiculaires abaissées de ces points sur XY sont les projections verticales de ces mêmes points et les perpendiculaires à la ligne de terre $b'b''$, $c'c''$, égales respectivement à la plus petite et à la plus grande génératrice rectiligne, sont les projections verticales de celles-ci. La droite $b''c''$ est la projection verticale de la base supérieure, puisqu'elle est dans un plan perpendiculaire au plan vertical; la projection horizontale est la circonférence a. L'axe du cylindre a pour projection horizontale le point a et pour projection verticale la perpendiculaire $a'a''$ à XY, menée par le pied a' de la perpendiculaire abaissée de a sur XY.

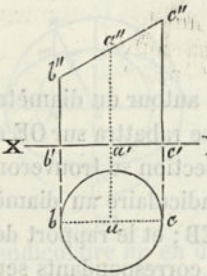

Fig. 184.

Les projections horizontales des différents points de la surface appartiennent à la circonférence a; et les projections verticales se trouvent placées, soit sur les droites $b'b''$, $c'c''$, $b''c''$, soit dans l'intérieur du trapèze $b'b''\,c''c'$.

PROBLÈME.

340. *Tracer le développement d'une surface cylindrique droite et tronquée, dont on connaît le rayon, la plus grande et la plus petite génératrice droite.*

Nous tracerons d'abord l'épure de la question précédente (fig. 184), et nous supposerons que la surface cylindrique tronquée ait été ouverte suivant la plus grande génératrice (c, $c'c''$).

Lorsqu'on développe une surface cylindrique, sur laquelle est tracée une courbe quelconque, celle-ci se change en une autre courbe, qu'on nomme *la transformée* de la première et dont les arcs ont la même longueur que les arcs correspondants de la courbe primitive ; car, cette dernière pouvant être considérée comme un polygone dont les côtés sont infiniment petits, ceux-ci conservent leur longueur dans le développement.

Le développement de la surface cylindrique droite et tronquée (fig. 185) est une figure de quatre côtés dont trois sont des droites ; savoir : la circonférence rectifiée de la base circulaire de la surface, et deux droites perpendiculaires à celles-ci, et égales à la plus grande génératrice rectiligne de la surface tronquée. Le quatrième côté est la *transformée* de l'ellipse.

Pour construire ce développement, que nous regarderons comme placé sur le plan tangent suivant la génératrice (c, $c'c''$), nous supposerons que ce plan tangent ait tourné autour de la génératrice de contact (c, $c'c''$), pour se placer parallèlement

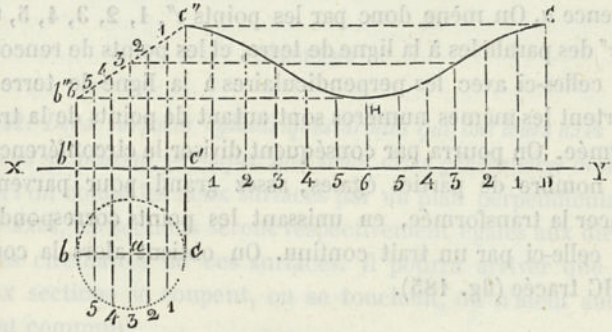

Fig. 185.

au plan vertical. Dans cette position, le développement se projettera sur le plan vertical, suivant une figure égale, et c'est cette projection verticale que nous construirons.

Divisons la circonférence a en 12 parties égales, à partir du point c. Des points de division, abaissons des perpendiculaires sur la ligne de terre, prolongeons-les-jusqu'à la droite $b''c''$, et reportons sur cette dernière droite les indications des divisions. Après avoir porté sur la ligne de terre, à partir du point c', la longueur c'D de la circonférence a, on partage cette longueur en 12 parties égales, qu'on numérote de 1 à 6 dans les deux sens, de sorte que les divisions de la droite c'D portent les mêmes indications que les divisions correspondantes de la circonférence a et de la droite $b''c''$. Les perpendiculaires élevées sur c'D par les points D, 1, 2, 3, 4, 5, 6 représentent les positions que prennent, sur le développement, les génératrices qui passent par les points de la circonférence a portant respectivement les mêmes indications; et les longueurs de ces génératrices sont celles des perpendiculaires abaissées sur XY des points de $b''c''$ portant les mêmes indications. Il résulte de là, que, si l'on tire, par le point 3 par exemple de la droite $b''c''$, une parallèle à la ligne de terre, elle rencontrera les perpendiculaires élevées aux points 3 sur celle-ci, en des points de la transformée, qui sont les points correspondants de l'ellipse placés sur les deux génératrices passant par les points 3 de la circonférence a. On mène donc par les points c'', 1, 2, 3, 4, 5, 6 de $b''c''$ des parallèles à la ligne de terre, et les points de rencontre de celles-ci avec les perpendiculaires à la ligne de terre qui portent les mêmes numéros sont autant de points de la transformée. On pourra par conséquent diviser la circonférence en un nombre de parties égales, assez grand pour parvenir à tracer la transformée, en unissant les points correspondants de celle-ci par un trait continu. On obtient alors la courbe c''HC tracée (fig. 185).

APPLICATIONS.

341. *a. Voûtes en berceau.* — Lorsqu'un tailleur de pierre doit construire une voûte en berceau, terminée d'un côté par un plan non parallèle à la directrice circulaire, il trace une épure semblable à celle du n° 340, afin de connaître les dimensions des *panneaux* ou patrons nécessaires à l'application du trait sur la pierre.

b. Ajustement de deux tuyaux de poêle formant un coude d'un angle donné (dont les axes fassent un angle donné). — Pour former avec deux tuyaux de poêle un coude, dont l'angle soit de 120° par exemple, il faut, pour tracer le patron de l'un des tuyaux, construire dans sa vraie grandeur (fig. 185) la projection horizontale a de la surface cylindrique tronquée de l'un des tuyaux ; la projection verticale de la troncature représentée par la droite $b''c''$ qui fasse avec la génératrice droite $c'c''$ un angle de 60°, exécuter ensuite le développement et le découper suivant le contour c''HCDc'. Deux feuilles de tôle découpées sur ce patron et ployées ensuite en cylindres pourront s'ajuster par les troncatures et former le coude complet.

c. Lorsqu'un tuyau de poêle doit traverser obliquement une surface plane, l'ouverture faite dans la surface plane n'est pas circulaire, mais elle a la figure de cette courbe que nous avons appelée *ellipse*. Il suffit alors, connaissant l'angle que la génératrice rectiligne fait avec la surface plane, de découper une feuille de tôle sur le patron, dont la construction a été indiquée dans la question précédente et de ployer ensuite la feuille de tôle en cylindre. On appliquera la section elliptique sur la surface plane, pour dessiner son contour sur celle-ci. Le contour sera celui du trou qu'on doit pratiquer pour que le tuyau le remplisse exactement.

THÉORÈME.

342. *Deux surfaces cylindriques droites qui ont leurs axes parallèles ne peuvent se couper que selon deux génératrices droites.*

Si l'on coupe les deux surfaces par un plan perpendiculaire aux axes, les sections seront respectivement égales aux directrices circulaires de ces surfaces. Il pourra arriver que ces deux sections se coupent, ou se touchent, ou n'aient aucun point commun :

1° Si les deux sections se coupent, comme elles sont respectivement égales aux deux génératrices circulaires, elles n'ont que deux points communs ; et les surfaces n'ont pas d'autres points communs que ceux qui appartiennent aux deux génératrices rectilignes communes, passant par les points d'intersection des deux sections. Car tout point commun aux deux surfaces est situé sur une génératrice commune, qui par conséquent doit passer par l'un ou l'autre des points d'intersection des deux circonférences.

2° Si les deux sections sont tangentes, les deux surfaces n'ont pas d'autres points communs que ceux qui appartiennent à la génératrice commune passant par le point de contact des deux circonférences. On dit alors que les surfaces cylindriques sont *tangentes selon cette génératrice commune.*

3° Si les deux sections n'ont aucun point commun, les surfaces n'ont aussi aucun point commun.

THÉORÈME.

343. *Lorsque deux surfaces cylindriques droites et de rayons égaux s'arrêtent mutuellement, l'intersection est une ellipse* (fig. 186).

La question suppose essentiellement que les deux axes des deux surfaces se rencontrent. Soient OX et OY les deux axes et O leur point de rencontre. Menons par le point O une perpendiculaire AB au plan des deux axes, et soit M un point commun aux deux surfaces, c'est-à-dire le point d'intersection d'une génératrice de l'une et d'une génératrice de l'autre surface ; MP et MQ, les perpendiculaires abaissées du point M sur les plans XAB et YAB. Le plan des droites MP, MQ, qui rencontre AB au point I, est perpendiculaire à AB et, par suite, parallèle au plan XOY. Tirons la droite PR parallèle à AB et la droite QS parallèle aussi à AB, et

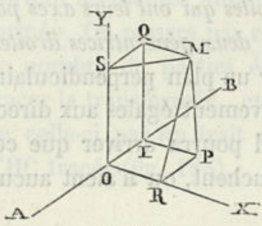

Fig. 186.

joignons le point M aux points R et S. Les droites MR et MS sont respectivement perpendiculaires à OX et OY, et sont par conséquent les rayons des deux cylindres. Les triangles rectangles MPR, MQS sont donc égaux comme ayant les hypoténuses MR et MS égales, et les côtés PR et QS égaux, puisque chacun d'eux est égal à OI. Donc MP = MQ et, par suite, tout point, tel que M, commun aux deux surfaces appartient au plan bissecteur du dièdre des plans XAB, YAB déterminés par la droite AB et chacun des deux axes. Le lieu des points communs aux deux surfaces est donc la section faite dans chacune d'elles par ce plan bissecteur, c'est-à-dire une *ellipse*.

344. Corollaire. — On reconnaît donc que deux surfaces cylindriques droites, de même rayon et tronquées par des plans également inclinés sur les axes, réunies par leurs troncatures, représentent deux surfaces cylindriques droites qui s'arrêtent mutuellement.

THÉORÈME.

345. *Lorsque de deux surfaces cylindriques droites et de même rayon, l'une est arrêtée par l'autre, l'intersection se compose de deux demi-ellipses terminées aux mêmes points* (fig. 187).

Nous supposons que les axes des deux surfaces se rencontrent et soient perpendiculaires entre eux.

Epure. — Prenons pour plan horizontal de projection un

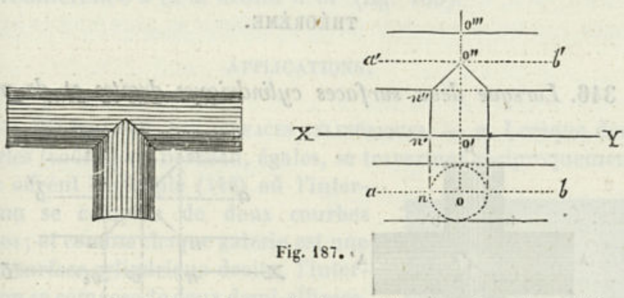

Fig. 187.

plan perpendiculaire à l'axe de la surface qui est arrêtée et pour ligne de terre une parallèle à l'axe de l'autre surface *.

* Lorsqu'on prend les projections d'une figure sur deux plans rectangulaires dont aucun n'est horizontal, on conserve quelquefois les dénominations de *plan horizontal* et de *plan vertical*, pour les distinguer l'un de l'autre.

La circonférence o est la trace et en même temps la projection horizontale de la surface verticale. Le point o et la droite $o'o'''$ sont les projections horizontale et verticale de l'axe de cette surface.

Les droites ab, $a'b'$ sont les projections horizontale et verticale de l'axe horizontal. Les parallèles à ab menées à une distance de celle-ci égale au rayon sont les limites de la projection horizontale de la seconde surface et les parallèles à $a'b$ menées à une distance de celle-ci égale au rayon, les limites de la projection verticale.

La portion de la surface horizontale dont l'axe est ao, $a'o''$ arrête à moitié la surface verticale, et la section résultante est une demi-ellipse terminée à l'horizontale, menée par le point d'intersection des axes perpendiculairement au plan des deux axes (343). L'autre portion de la surface horizontale arrête aussi à moitié la surface verticale, et la section résultante est une demi-ellipse terminée à la même horizontale (343).

Les deux demi-ellipses sont égales, lorsque les axes des surfaces sont perpendiculaires entre eux ; elles sont inégales dans le cas contraire.

THÉORÈME.

346. *Lorsque deux surfaces cylindriques droites et de même*

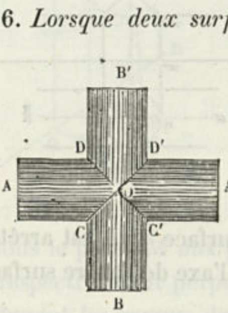

Fig. 188.

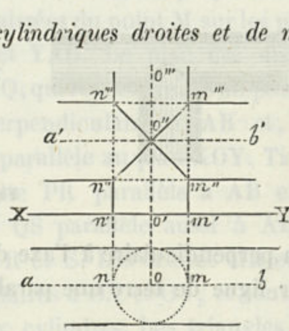

Fig. 189.

rayon, se dépassent réciproquement, l'intersection se compose de *deux ellipses entières qui se divisent mutuellement en deux moitiés* (fig. 188, 189).

Nous supposons que les axes des deux surfaces se rencontrent et soient perpendiculaires l'un à l'autre. L'intersection de la portion B (de la surface BB′) et de la surface AA′ se compose (fig. 188) des deux demi-ellipses, OC, OC′ terminées à la droite menée par le point d'intersection des axes perpendiculairement au plan des deux axes. L'intersection de la portion B′ (de la surface BB′) et de la surface AA′ se compose des deux demi-ellipses OD, OD′ terminées à la même droite, menée par le point d'intersection des axes perpendiculairement au plan des deux axes ; et par conséquent aux mêmes points que les premières. On voit en outre que les quatre demi-ellipses ne forment que deux plans différents et même deux ellipses entières. Car les demi-troncatures OC, OD′ sont également inclinées sur chacun des axes. Il en est de même des demi-troncatures OC′, OD.

Pour construire l'épure, nous supposerons l'un des axes vertical et l'autre parallèle à la ligne de terre.

Les projections horizontale et verticale des deux ellipses sont d'une part la circonférence o et la droite $m''n'''$; d'autre part la circonférence o et la droite $n''m'''$ (fig. 189).

APPLICATIONS.

347. PÉNÉTRATIONS DES SURFACES CYLINDRIQUES. — *a.* Lorsque deux galeries (voûtes) en berceau, égales, se traversent réciproquement, elles offrent l'exemple (346) où l'intersection se compose de deux courbes planes ; et comme chaque galerie est une demi-surface cylindrique droite, l'intersection se compose de deux demi-ellipses.

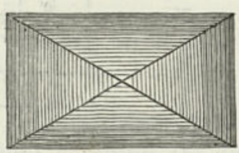

Fig. 190.

Cette disposition se rencontre dans les voûtes en *arêtiers* et dans les voûtes en *arc de cloître*.

Dans les premières (fig. 188) on a à pratiquer la jonction de deux berceaux lorsque deux galeries se traversent. Les intersections ou arêtes de la voûte sont deux demi-ellipses croisées. On emploie les voûtes en *arc de cloître* pour couvrir une salle rectangulaire (fig. 190). Les projections horizontales représentées sur la figure montrent qu'ici la disposition des surfaces cylindriques est inverse de celle qui forme les voûtes en *arêtiers*. Mais ce changement de position n'influe pas sur la nature de l'intersection, qui se compose ici de deux demi-ellipses croisées.

b. Tuyaux disposés en T. — Les tuyaux disposés en T, comme dans certains systèmes de poêles et dans les embranchements des conduites d'eau, sont des surfaces cylindriques droites de même rayon dont l'une arrête l'autre (345).

c. Les robinets cylindriques que l'on place d'équerre sur des conduites de même forme s'y ajustent suivant des courbes fermées et à *double courbure*. (On désigne sous ce nom une courbe dont tous les points ne sont pas situés dans un même plan.)

d. On est conduit à donner la même forme (d'une courbe à double courbure) aux trous pratiqués dans les instruments à vent cylindriques, pour le doigté.

THÉORÈME.

348. *Tracer le développement d'une surface cylindrique droite arrêtée par une autre de même rayon, et dont l'axe est perpendiculaire à celui de la première* (fig. 191, 192).

Reprenons l'épure (fig. 187). Supposons la surface cylindrique verticale tronquée ouverte suivant sa plus grande géné-

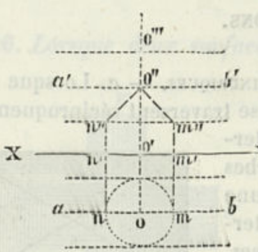

Fig. 191.

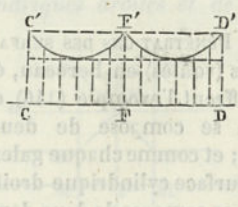

Fig. 192.

ratrice (O, O'O''). Supposons le plan tangent à cette surface, selon cette génératrice, placé parallèlement au plan vertical, la circonférence O rectifiée et placée parallèlement à la ligne de terre de C en D. Divisons la circonférence O en 12 parties égales et appliquons la construction (340). On trouvera pour le développement la figure 192.

PROBLÈME.

349. *Tracer le développement d'une surface cylindrique droite qui en croise à angle droit une autre de même rayon* (fig. 193, 194).

Reprenons l'épure (fig. 189) et supposons la surface verticale coupée par un plan horizontal menée à la distance $m'h$.

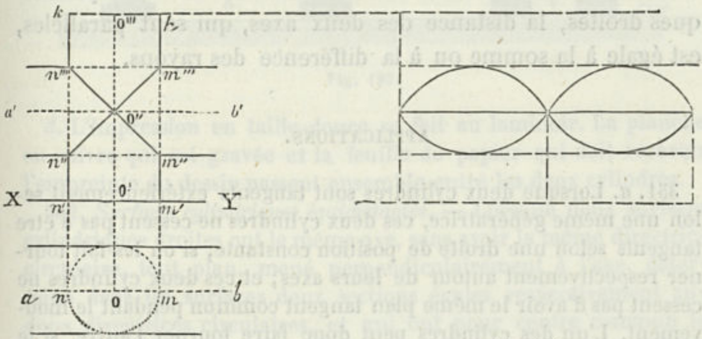

Fig. 193. Fig. 194.

Nous aurons à construire les développements de deux surfaces cylindriques verticales arrêtées par la surface cylindrique horizontale (ab, $a'b'$), l'une ayant pour base la circonférence dont le centre est (o, o') et l'autre la circonférence dont le centre est (o, o'''). On construira (fig. 194) chacun des développements par la méthode indiquée (348).

DÉFINITIONS.

350. *Surfaces cylindriques tangentes.* — *a.* Deux surfaces cylindriques droites peuvent avoir un seul point commun. On dit alors que les deux surfaces sont *tangentes.*

b. Deux surfaces cylindriques droites peuvent avoir une génératrice rectiligne commune et une seule. On dit alors qu'elles sont *tangentes* selon cette génératrice. Les génératrices rectilignes des deux surfaces sont donc parallèles et les génératrices circulaires d'un même plan sont tangentes ; car, s'il en était autrement, les deux surfaces auraient deux génératrices rectilignes communes. Il résulte de là que le plan tangent à l'une des surfaces suivant la génératrice rectiligne commune, est tangent à l'autre surface, puisqu'il est déterminé par la tangente commune aux deux génératrices circulaires et la génératrice rectiligne commune.

Dans ce dernier cas de contact de deux surfaces cylindriques droites, la distance des deux axes, qui sont parallèles, est égale à la somme ou à la différence des rayons.

APPLICATIONS.

351. *a.* Lorsque deux cylindres sont tangents extérieurement selon une même génératrice, ces deux cylindres ne cessent pas d'être tangents selon une droite de position constante, si on les fait tourner respectivement autour de leurs axes ; et ces deux cylindres ne cessent pas d'avoir le même plan tangent commun pendant le mouvement. L'un des cylindres peut donc faire tourner l'autre, si le frottement est assez grand pour que le mouvement se communique. C'est ainsi que, dans certaines machines, on emploie des roues cylindriques à axes parallèles, qui se conduisent mutuellement par le simple contact extérieur.

b. On a des exemples du contact intérieur de deux surfaces cylindriques dans les *tourillons* des arbres tournants des machines et les *crapaudines* qui les supportent.

c. Laminoirs. — On réduit les métaux en lames à l'aide d'un instrument qui se compose de deux cylindres droits d'acier ou de fonte de fer A, A (fig. 195), dont les axes sont parallèles et dont les surfaces unies et polies doivent être extrêmement dures. Les cylindres sont placés à une distance fixe l'un de l'autre et marchent en sens opposés. On donne à cet instrument le nom de *laminoir*. On coule d'abord en plaque le métal qu'il s'agit de *laminer* et on l'amincit ensuite à l'une de ses extrémités pour l'engager entre les deux cylindres qui l'entraînent dans leur marche. On peut diminuer successivement l'épaisseur de la lame, en diminuant à chaque passage, à l'aide des vis B, B, la distance qui sépare les cylindres.

On obtient, par ce moyen, ces feuilles de zinc et de plomb, dont l'usage est si multiplié ; les feuilles de cuivre qui servent au doublage des vaisseaux, la tôle laminée, etc.

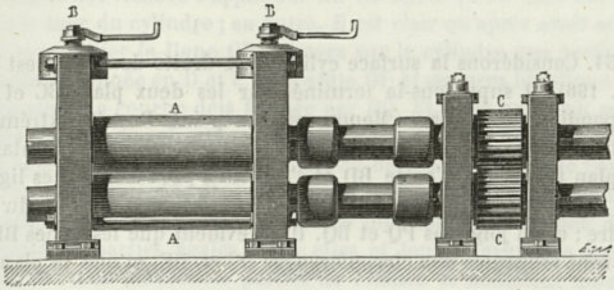

Fig. 195.

d. L'impression en taille-douce se fait au laminoir. La planche en cuivre qui est gravée et la feuille de papier qui doit recevoir l'empreinte du dessin passent ensemble entre les deux cylindres.

352. *Surfaces cylindriques équidistantes.* — Lorsque deux surfaces cylindriques droites ont le même axe, sans avoir la même directrice circulaire, tout plan, mené perpendiculairement à l'axe, détermine dans les surfaces deux sections égales respectivement aux deux directrices circulaires, et qui ont pour centre commun le point de rencontre du plan et de l'axe. La distance de ces deux circonférences concentriques est égale à la différence des rayons. C'est pour cette raison qu'on dit que les surfaces sont *équidistantes*.

Deux surfaces cylindriques droites équidistantes peuvent donc tourner et glisser sur leurs axes, sans que leur distance augmente ou diminue.

APPLICATIONS.

353 *a.* Un cylindre droit plein peut donc se mouvoir dans un cylindre droit creux de même rayon. On peut expliquer de cette manière le jeu du piston dans un corps de pompe, des lunettes de longue vue, des lorgnettes d'opéra, des étuis ronds, etc.

b. Le chapelier donne la forme à un chapeau en appliquant le feutre sur un cylindre droit.

c. Lorsqu'on établit de longues lignes de tuyaux de conduite soit pour les eaux, soit pour le gaz, on relie deux tuyaux successifs par un manchon cylindrique qui reçoit les extrémités des deux tuyaux.

§ 2. — De l'hélice.

354. Considérons la surface cylindrique droite dont l'axe est AA' (fig. 196), et supposons-la terminée par les deux plans BC et DE perpendiculaires à l'axe. Menons par les points B et D, extrémités d'une arête quelconque BD, les lignes BP et DQ perpendiculaires au plan formé par l'arête BD et l'axe AA'; prenons sur ces lignes des longueurs BP et DQ égales à la circonférence de base du cylindre ; enfin joignons PQ et BQ. Il est évident que les lignes BP et DQ sont tangentes aux circonférences BC et DE, et que le plan du

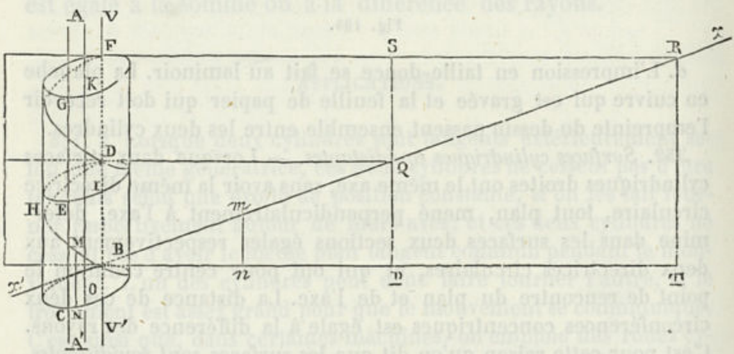

Fig. 196.

rectangle BDQP n'a d'autres points communs avec la surface du cylindre que ceux de l'arête BD. Cela posé, si l'on enroule le rectangle BDQP sur le cylindre, le côté PQ viendra se placer sur BD, et la droite BQ, hypoténuse du triangle rectangle BPQ, formera sur le cylindre une portion de courbe BHD terminée sur l'arête BD aux deux points B et D. Cette courbe se nomme *Hélice*.

Mais l'hélice n'est pas une courbe terminée brusquement; au contraire, elle s'étend indéfiniment dans les deux sens comme la surface cylindrique à laquelle elle appartient, et tous ses points peuvent s'obtenir par le même moyen que ceux de la portion limitée que nous venons de considérer. Prolongeons la portion de la surface cylindrique BCED d'une quantité égale DEGF ; par le point F, extrémité de l'arête BD prolongée, menons FR parallèle à BP, et par le point R où cette ligne rencontre BQ prolongée, abaissons

RT perpendiculaire sur BP. A cause de BD = DF et du parallélisme des droites DQ et FR, la ligne FR ou BT est double de DQ ; d'où il suit que, si l'on enroule le plan du rectangle BFRT sur le cylindre, la droite TR viendra s'appliquer sur BF après qu'on aura fait deux fois le tour du cylindre ; en outre, il est clair qu'après avoir achevé un tour entier la ligne QR formera sur le cylindre une portion de courbe terminée en D et F sur l'arête DF et qui sera identique avec la portion de courbe déjà formée par BQ. Et, sans qu'il soit nécessaire de plus d'explications, on voit que, si la surface cylindrique est censée prolongée indéfiniment au-dessus de BF et que l'on enroule indéfiniment le plan xBV sur la surface cylindrique, la droite indéfinie Bx formera sur la surface une courbe composée d'une infinité de parties égales entre elles et toutes terminées sur l'arête VV'. Ces différentes parties de l'hélice se nomment *spires*, et la distance des plans perpendiculaires à l'axe, menés par les extrémités d'une spire, est dite le *pas* de l'hélice.

Enfin, comme on peut aussi concevoir la surface cylindrique indéfiniment prolongée au-dessous du plan BC, on voit que si l'on enroule sur cette surface l'autre portion du plan des lignes VV' et Bx, c'est-à-dire la portion V'Bx', la droite indéfinie Bx' formera aussi sur le cylindre une infinité de spires.

On peut dire, d'après cela, que :

Les hélices sont les courbes dans lesquelles se transforment les lignes droites tracées sur un plan, quand on enroule ce plan sur un cylindre droit.

Il faut remarquer que la circonférence peut être regardée comme une hélice dont le pas est nul.

Une même ligne droite engendre ainsi toutes les spires d'une hélice, mais il est quelquefois plus commode de considérer l'hélice comme engendrée, au moyen d'une série de droites parallèles égales et équidistantes. Effectivement, si l'on prolonge PQ jusqu'à sa rencontre en S avec FR, et que l'on tire DS, il est clair que DS sera égale et parallèle à BQ et à QR, et que, quand on enroulera le plan de ces lignes sur le cylindre, les droites DS et QR formeront la même spire sur la surface ; savoir, DS après le premier tour, QR après le deuxième tour. Ce raisonnement s'applique à toutes les spires.

Il résulte de là que :

L'hélice peut être obtenue en enroulant sur un cylindre droit un rectangle indéfini dont la largeur serait égale à la circonférence de base du cylindre et sur lequel serait tracée une série de droites parallèles et équidistantes.

355. Considérons le point B comme l'*origine* de l'hélice, ou BHD

comme la première spire (fig. 196), en sorte que la deuxième spire soit celle qui est comprise entre les plans DE et FG, et ainsi de suite; je dis que la distance MN d'un point de la première spire au plan de la base BC est proportionnelle à l'arc de circonférence BN. En effet, prenons sur BP une longueur Bn égale à l'arc BN rectifié, et élevons mn perpendiculaire à BP; il est clair que $mn = \text{MN}$, car, en enroulant le plan BPQ sur le cylindre, le point m reste toujours à la même distance du plan de la base BC. Cela posé, les triangles semblables Bmn et BQP donnent :

$$\frac{mn}{\text{B}n} = \frac{\text{QP}}{\text{BP}}, \quad \text{ou} \quad \frac{\text{MN}}{\text{arc BN}} = \frac{\text{QP}}{\text{BP}};$$

ce qui démontre la propriété énoncée. Si l'on désigne par h le pas de l'hélice et par r le rayon du cylindre, l'égalité précédente devient :

$$\frac{\text{MN}}{\text{arc BN}} = \frac{h}{2\pi r}, \quad \text{d'où} \quad \text{MN} = \frac{h}{2\pi r} \times \text{arc BN}.$$

Cette égalité a lieu aussi pour la deuxième, la troisième, etc., spire, pourvu qu'on ajoute une, deux, etc., circonférences à l'arc BN.

356. Il résulte de la définition de l'hélice que le plus court chemin d'un point à un autre sur une surface cylindrique droite est l'arc d'hélice qui unit ces deux points.

357. La *vis* est un cylindre droit, revêtu d'un filet saillant engendré par un triangle (fig. 197), ou un parallélogramme (fig. 198), ou

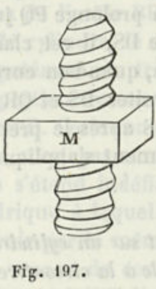

Fig. 197.

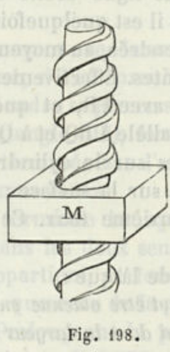

Fig. 198.

une figure plane quelconque qui, s'appuyant par un de ses côtés sur une génératrice rectiligne, tourne autour de l'axe du cylindre, de manière qu'un point déterminé de ce côté parcoure une hélice tracée sur la surface du cylindre et que le plan de la figure mobile passe toujours par l'axe de celui-ci. Tous les points du filet de la vis peuvent donc être regardés comme appartenant à des hélices décrites sur des cylindres de même axe, mais de rayons différents. Toutes ces hélices ont évidemment le même pas, que l'on nomme le *pas* de la vis.

358. A la vis est liée quelquefois une pièce solide que l'on nomme *écrou*. Concevons qu'une pièce M (fig. 197, 198), de figure quelconque, soit pénétrée par le cylindre ; le triangle ou le parallélogramme, qui produit sur le cylindre le filet de la vis, produira dans l'intérieur de cette pièce un sillon ou creux parfaitement égal au filet et que celui-ci remplira exactement. C'est cette seconde pièce, qui peut être regardée comme le moule de la première, qu'on nomme l'*écrou* de la vis.

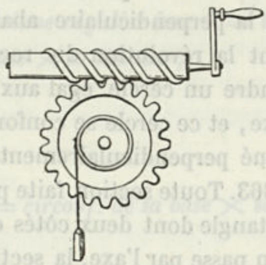
Fig. 199.

Si l'une des deux pièces est fixe et l'autre mobile, celle-ci ne peut, par suite de la liaison qui existe entre elles, que tourner autour de l'axe du cylindre.

359. On donne le nom de *vis sans fin* à une vis mobile autour de son axe et dont le filet (fig. 199), mène les dents successives d'une roue dentée à laquelle il se présente toujours d'une manière uniforme.

§ 3. — Cylindre. Mesure.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

360. On nomme *surface latérale* du cylindre (310) la portion de surface cylindrique comprise entre les deux bases ; *côté* ou *arête* du cylindre la portion de génératrice droite comprise entre ces bases.

361. On peut regarder le cylindre droit comme engendré par la révolution d'un rectangle ADEF autour d'un de ses cô-

tés, EF supposé fixe (fig. 200). Dans ce mouvement, le côté AD engendre la surface latérale et les côtés AF, DE engendrent les cercles égaux, bases du cylindre, dont les rayons sont AF, DE.

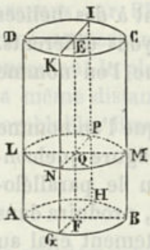

Fig. 200.

Le côté fixe EF du rectangle est l'*axe* du cylindre, et les différentes positions du côté mobile AD, le *côté* ou l'*arête* du cylindre.

362. Toute section faite dans le cylindre par un plan perpendiculaire à l'axe est un cercle égal aux deux bases. Soit L le point où le plan perpendiculaire rencontre la génératrice AD, et LQ la perpendiculaire abaissée du point L sur l'axe. Pendant la révolution du rectangle, la perpendiculaire LQ engendre un cercle égal aux deux bases et perpendiculaire à l'axe, et ce cercle se confond avec la section faite par le plan mené perpendiculairement à l'axe par le point L.

363. Toute section faite par un plan parallèle à l'axe est un rectangle dont deux côtés opposés sont égaux à l'axe, et si le plan passe par l'axe, la section est un rectangle double du rectangle générateur, comme on le voit immédiatement.

THÉORÈME.

364. *L'aire de la surface latérale d'un cylindre droit est égale au produit de la circonférence de sa base par sa hauteur* (fig. 201).

Inscrivons dans la base du cylindre un polygone régulier ABCDEF; et construisons un prisme droit ayant pour base ce polygone régulier et pour hauteur celle du cylindre. Ce prisme, dont les arêtes latérales sont contenues dans la surface latérale du cylindre, est dit un *prisme régulier inscrit* au cylindre.

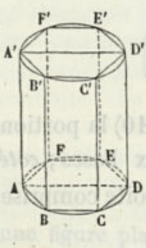

Fig. 201.

On définit l'*aire de la surface latérale d'un cylindre droit*, la limite vers laquelle tend l'aire de la surface latérale d'un prisme régulier inscrit, lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de la base de celui-ci. On a :

aire de la surf. latér. du prisme régulier inscrit = périmètre de sa base × sa hauteur ;

or, lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de la base du prisme, la hauteur du prisme reste constamment égale à celle du cylindre, et le périmètre de sa base a pour limite la circonférence de base du cylindre ; comme

limite de l'aire de la surf. latér. du prisme régulier inscrit = limite du périmètre de sa base × sa hauteur,

on en déduit :

aire de la surf. latér. du cylindre = circonf. de sa base × sa hauteur.

Nous avons vu (324) que la surface latérale d'un cylindre droit est développable, et que le développement de cette surface est un rectangle dont la hauteur est celle du cylindre, et la base la circonférence rectifiée de la base du cylindre. On trouve donc encore, par cette considération, l'expression de l'aire de la surface latérale d'un cylindre droit.

365. Corollaire I. — Soient h la hauteur et r le rayon de base du cylindre. L'aire de la surface latérale est exprimée par $2\pi rh$; et celle de la surface totale, c'est-à-dire de la surface latérale augmentée de la somme des deux bases, par $2\pi rh + 2\pi r^2$ ou $2\pi r(r+h)$.

366. Corollaire II. — On dit que deux cylindres sont *semblables* lorsque les hauteurs de ces cylindres sont proportionnelles à leurs rayons.

Soient r et h le rayon et la hauteur d'un cylindre, r' et h' le rayon et la hauteur d'un second cylindre, semblable au premier. On a :

$$\frac{\textit{aire de la surf. latér. du premier}}{\textit{aire de la surf. latér. du second}} = \frac{2\pi rh}{2\pi r'h'} = \frac{rh}{r'h'} = \frac{r^2}{r'^2} = \frac{h^2}{h'^2},$$

puisque $\frac{r}{r'} = \frac{h}{h'}$.

Le rapport des aires des surfaces totales étant égal à $\frac{2\pi r(r+h)}{2\pi r'(r'+h')}$ est aussi égal à $\frac{r^2}{r'^2}$ et à $\frac{h^2}{h'^2}$, si l'on suppose $\frac{r}{r'} = \frac{h}{h'}$.

Donc *le rapport des aires des surfaces, soit latérales, soit totales, de deux cylindres semblables, est égal au rapport des carrés des rayons et au rapport des carrés des hauteurs des cylindres.*

THÉORÈME.

367. *L'aire de a surface latérale d'un cylindre oblique est égale au produit de la circonférence de la section droite par la longueur de l'arête ou génératrice du cylindre* (fig. 202).

Soit un cylindre oblique ayant pour base le cercle O et pour arête AA'. Inscrivons dans la base O un polygone régulier ABCDEF et construisons un prisme ayant pour base ce polygone, pour arêtes latérales des droites parallèles et égales aux génératrices rectilignes du cylindre ; ce prisme aura aussi la même hauteur que le cylindre. On donne à ce prisme, dont les arêtes sont évidemment contenues dans la surface latérale du cylindre, le nom de *prisme inscrit au cylindre.*

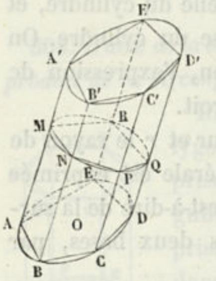

Fig. 202.

On définit l'*aire de la surface latérale* d'un cylindre oblique, la limite vers laquelle tend l'aire de la surface latérale du prisme inscrit, dont la base est un polygone régulier, lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de la base de celui-ci. On a :

aire de la surface latérale du prisme inscrit = périmètre de la section droite × l'arête du prisme,

et lorsque l'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de la base du prisme, son arête reste constamment égale à celle du cylindre, et le périmètre de la section droite du prisme a pour limite la courbe de la section droite du cylindre. Or,

limite de l'aire de la surf. lat. du prisme inscrit = limite du périmètre de la section droite × l'arête du prisme ;

donc

aire de la surf. latér. du cylindre oblique = courbe de la section droite × la génératrice rect.

368. Corollaire. — Si l'on désigne par l la longueur de la section droite, par a celle de l'arête, l'aire sera exprimée par $2\pi la$.

THÉORÈME.

369. *Le volume d'un cylindre droit est égal au produit de sa base par sa hauteur* (fig. 203).

On définit le volume du cylindre droit, la limite vers laquelle tend le volume d'un prisme régulier inscrit, lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de la base de celui-ci.

Soient s l'aire de la base et h la hauteur du prisme régulier inscrit, on a :

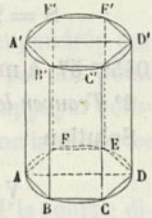

Fig. 203.

volume du prisme régulier inscrit $= s \times h$.

Or, lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de la base du prisme, la hauteur du prisme reste constamment égale à celle du cylindre, et l'aire s de la base a pour limite celle du cercle qui est la base du cylindre, et comme

lim. du volume du prisme régulier inscrit $=$ *lim. de* $s \times h$,

on en conclut :

volume du cylindre $=$ *base du cylindre* $\times$ *sa hauteur.*

370. Corollaire I. — Soient h la hauteur et r le rayon de base du cylindre, le volume du cylindre sera exprimé par $\pi r^2 h$.

371. Corollaire II. — Soient r et h le rayon et la hauteur d'un cylindre, r' et h' le rayon et la hauteur d'un second cylindre, semblable au premier ; on a :

$$\frac{\textit{volume du premier cylindre}}{\textit{volume du second cylindre}} = \frac{\pi r^2 h}{\pi r'^2 h'} = \frac{r^3}{r'^3} = \frac{h^3}{h'^3},$$

puisque $\frac{r}{r'} = \frac{h}{h'}$.

Donc le rapport des volumes de deux cylindres semblables est égal au rapport des cubes des rayons et au rapport des cubes des hauteurs des cylindres.

372. Exemples : 1° *Trouver la surface latérale du cylindre droit dont le rayon est 24 mètres et la hauteur 7 mètres?*

Solution :

$$S = 2\pi \times 24 \times 7 = \pi \times 336 = 1055,57.$$

$1055^{mq},57$, à moins d'un décimètre carré.

2° *Trouver le volume du même cylindre.*

Solution :

$$V = \pi \times 24^2 \times 7 = 12666,901.$$

$12666^{mc},901$, à moins d'un décimètre cube.

3° *On donne au vase en métal qui mesure un litre, la figure d'un cylindre dont la hauteur est double du diamètre de base ;*

trouver les dimensions de ce cylindre, sachant que sa capacité représente un décimètre cube.

Soit x la hauteur du cylindre, on aura :

$$\frac{1}{16}\pi x^3 = 0{,}001,$$

d'où l'on déduit $x = 0^{m},172051$ et le rayon de la base $= 0{,}043013$.

4° *Trouver le volume d'un manchon cylindrique, dont on connaît la hauteur et les rayons des bases.*

On nomme *manchon cylindrique*, le corps formé par la différence de deux cylindres droits de même axe et de même hauteur.

Désignons par h la hauteur commune aux deux cylindres, par R le plus grand rayon et par r l'autre rayon ; on trouve pour le volume V du manchon cylindrique :

$$V = \pi h(R^2 - r^2) = \pi h(R + r)(R - r).$$

Soient $h = 3^{m},42$; $R = 0^{m},87$, $r = 0^{m},54$; on trouve :

$$4^{mc},999, \text{ à moins d'un décimètre cube.}$$

§ 4. — Surfaces coniques.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

373. On nomme *surface conique*, la surface engendrée par une droite mobile, assujettie à passer toujours par un point fixe qu'on nomme le *sommet* de la surface, et à s'appuyer constamment sur une courbe donnée (1) qu'on nomme la *directrice* de la surface.

Soient S le sommet, AA' la génératrice, et MNP la courbe directrice (fig. 204). La surface engendrée d'après cette loi s'é-

(1) Si la directrice est plane et que son plan passe par le sommet, la surface engendrée est le plan de cette directrice.

tend indéfiniment de part et d'autre du sommet, et ces deux portions de la surface, qui se terminent au sommet, ont reçu le nom de *nappes* de la surface. On donne quelquefois au sommet le nom de *centre de la surface.*

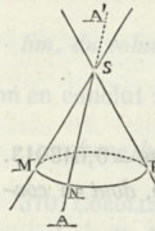

Fig. 204.

374. *Deux manières de produire une surface conique.*

Nous ne considérerons que les surfaces coniques engendrées par une droite mobile qui s'appuie constamment sur une circonférence donnée.

Si l'on coupe une de ces surfaces par des plans parallèles à la directrice circulaire, chacune des sections est une circonférence dont le centre est situé sur la droite qui unit le centre de la directrice au sommet, et le rapport des rayons est égal au rapport des distances des centres au sommet. En effet, soient S le sommet (fig. 205), O le centre de la directrice circulaire et O' le point de rencontre de la droite OS avec un plan mené parallèlement au plan de la directrice. Joignons deux points quelconques A' et B' de la section au point O', et tirons les génératrices qui passent aux points A' et B'. Joignons au point O les points de rencontre A et B de ces génératrices avec la directrice. On a, par les triangles semblables :

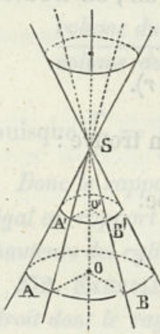

Fig. 205.

$$\frac{SO'}{SO} = \frac{O'A'}{OA} = \frac{O'B'}{OB};$$

comme $OA = OB$, il en résulte $O'A' = O'B'$. Donc *la section* O' *est une circonférence dont le centre est* O' *et les distances des centres* O' *et* O *au sommet* S *sont proportionnelles aux rayons correspondants.*

On déduit de là un deuxième mode de génération de la surface conique. On voit effectivement que chacune des nappes de la surface peut être engendrée par une circonférence variable de position et de grandeur dont le centre parcourt une droite indéfinie à partir d'un point S de cette droite qui devient le sommet (fig. 205), dont le plan reste constamment parallèle à sa première position et dont le rayon croît à partir de zéro, de telle sorte qu'on ait toujours pour une position quelconque :

$$\frac{OA}{OS} = \text{une constante donnée.}$$

375. *Surface conique droite, oblique.* — On nomme *surface conique droite*, celle dans laquelle la droite qui unit le sommet au centre de la directrice est perpendiculaire au plan de celle-ci. On donne à cette droite le nom d'*axe* de la surface conique droite.

On nomme *surface conique oblique*, celle dans laquelle le plan de la génératrice circulaire n'est pas perpendiculaire à la droite qui unit le centre de celle-ci au sommet. Cette dernière droite ne porte pas le nom d'*axe* de la surface conique.

376. Nous appellerons *surface conique complète*, la portion d'une surface conique comprise entre le sommet et une section parallèle à la génératrice circulaire, et *base* de la surface, la circonférence de cette section. Sa *hauteur* est la distance du sommet au plan de la base.

377. Nous appellerons *surface conique tronquée*, la portion d'une surface conique comprise entre les sections faites par deux plans l'un ou tous deux parallèles à celui de la génératrice circulaire et situés du même côté du sommet. Les *bases* de la surface tronquée sont ces deux sections.

378. *Cône.* — On nomme *cône*, la portion de l'espace ou le corps limité par une surface conique complète, droite ou oblique, et par le cercle dont la circonférence est la base de la surface. Ce cercle est la *base* du cône, et sa *hauteur* est égale à la distance du sommet à la base.

379. *Tronc de cône.* — On nomme *tronc de cône*, la portion de l'espace ou le corps limité par une surface conique tronquée et les plans des deux sections. Les figures planes qui ont pour limites ces sections sont les *bases* du tronc de cône.

380. Si l'on fait tourner un triangle rectangle ABC (fig. 206) autour d'un des côtés de l'angle droit, BAC, l'extrémité B de l'autre côté, AB, engendre une circonférence dont le centre est le point A et AB le rayon ; or tout point M de l'hypoténuse BC engendre dans ce mouvement une circonférence dont le rayon est la perpendiculaire abaissée de ce point sur AC, et dont le centre est le pied P de cette perpendiculaire ; et l'on a : $\frac{MP}{CP} = \frac{BA}{CA}$. La surface engendrée par l'hypoténuse est donc la surface conique droite et complète dont la directrice est la circonférence décrite par l'extrémité B du côté AB et dont la génératrice rectiligne est l'hypoténuse CB.

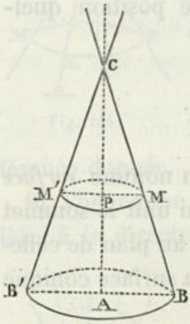

Fig. 206.

La surface conique droite peut donc être engendrée par l'hypoténuse d'un triangle rectangle, indéfiniment prolongée de part et d'autre du sommet, lorsqu'on fait tourner ce triangle autour d'un des côtés de l'angle droit. De là vient le nom de *surface de révolution* qu'on donne quelquefois à cette surface, et celui d'*axe de révolution* donné à l'axe.

PROBLÈME.

381. *Dessiner une surface conique droite et complète dont la génératrice rectiligne et le rayon de base sont donnés.*

Il résulte de la définition d'une surface conique droite et complète que les génératrices sont égales et font des angles égaux avec l'axe.

Prenons (fig. 207) le plan de la base pour plan horizontal de projection, et soit XY la ligne de terre. La projection horizontale de cette base sera la base elle-même, et son centre S la projection horizontale du sommet. Menons les tangentes aa', bb' perpendiculaires à la ligne de terre. Les génératrices rectilignes dont les traces horizontales sont a et b sont parallèles au plan vertical; leurs projections horizontales sont donc parallèles à la ligne de terre et ces génératrices sont en outre parallèles et égales à leurs projections sur le plan vertical. Pour déterminer la projection verticale S′ du sommet, on décrira donc, du point a' ou du point b' comme centre et avec un rayon égal à la longueur de la génératrice donnée, un arc qui coupera le prolongement de la perpendiculaire abaissée du centre S sur la ligne de terre, au point S′ qui est la projection verticale du sommet. $S'a'$, $S'b'$ sont les projections verticales des génératrices parallèles au plan vertical; Sa, Sb sont leurs projections horizontales. Les projections horizontales des différents points de la surface sont évidemment placées sur la circonférence S ou à l'intérieur de cette circonférence. Les projections verticales de ces points sont situées sur les côtés du triangle $a'S'b'$ ou à l'intérieur.

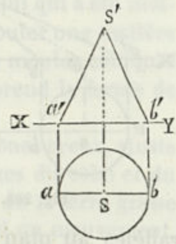

Fig. 207.

Connaissant la projection horizontale ou verticale d'un point de la surface, on pourra déterminer l'autre projection au moyen de l'épure, si l'on donne en outre sa distance au plan horizontal dans le premier cas, au plan vertical dans le second.

PROBLÈME.

382. *Dessiner une surface conique oblique et complète, dont on connaît le rayon de base, ainsi que la longueur et la pente de la plus courte des génératrices droites* (fig. 208).

Prenons pour plan horizontal de projection le plan de la base O; celle-ci sera à elle-même sa projection horizontale; et soit XY la ligne de terre. Prenons ensuite pour plan vertical de projection, un plan vertical parallèle à la plus courte génératrice et à la droite qui joint le sommet au centre de la base. Les projections horizontales de ces droites seront parallèles à la ligne de terre, et leurs projections verticales leur seront parallèles et égales respectivement. Menons le diamètre *ab* parallèle à la ligne de terre ; c'est sur ce diamètre prolongé que sera placée la projection horizontale du sommet ; par les extrémités de ce diamètre, menons les tangentes *aa'*, *bb'* ; elles sont perpendiculaires à la ligne de terre. Les points *a* et *b* sont les traces des deux génératrices parallèles au plan vertical. Supposons que *b* soit la trace horizontale de la plus courte génératrice, la droite *b'*S', qui fait avec XY l'angle S'*b'*Y égal à la pente de cette génératrice, (l'angle avec le plan horizontal), est la projection verticale de cette génératrice, et en prenant *b'*S' égale à la longueur de celle-ci, l'extrémité S' est la projection verticale du sommet. Le point de rencontre S de la perpendiculaire abaissée du point S' sur la ligne de terre avec le prolongement du diamètre *ab* est la projection horizontale du sommet ; S*b* est la projection horizontale de cette génératrice ; *a*S, *a'*S' sont les projections de la seconde génératrice parallèle au plan vertical, et *o*S, *o'*S' les projections de la droite qui unit le sommet au centre de la base.

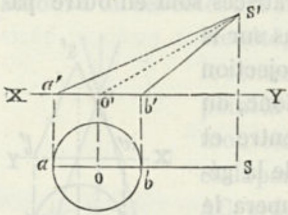

Fig. 208.

Connaissant la projection horizontale, ou verticale d'un point de la surface, on pourra au moyen de l'épure (208) déterminer l'autre projection, si l'on donne sa distance au plan horizontal dans le premier cas, au plan vertical dans l'autre cas.

APPLICATIONS.

383. *a. Voûtes coniques appelées trompes.* — On place sur des cintres inégaux, et dont les centres soient en ligne droite, des madriers trian-

gulaires isocèles. Ces madriers se touchent deux à deux par des côtés qui vont concourir au même point. On recouvre ensuite ces madriers de moellons qui forment une surface composée de facettes planes et étroites et très-peu différente d'une surface conique. C'est à la voûte construite de cette manière qu'on donne le nom de *trompe*.

b. Formes dans lesquelles le sirop cristallise et se convertit en pain de sucre. — On forme par un moulage semblable à celui qui a été indiqué (316) des cônes creux dans lesquels on peut couler une matière qui se prend en cône. C'est en coulant dans des moules coniques le sirop pour le faire cristalliser, que le sucre prend la forme de cône entier que nous lui voyons.

c. Le potier de terre, pour confectionner des cônes creux, ajuste un cône plein sur un tour de manière que les axes du cône et du tour se confondent en un seul. Il entoure le cône de la terre grasse dont il fabrique ses vases, et tandis que le tour est en mouvement, il tient une règle fixe parallèlement à la génératrice droite ; cette règle enlève successivement une portion de la terre et donne la forme conique à la surface extérieure de celle qui reste, de sorte que le vase acquiert partout la même épaisseur.

d. Roues de voiture. — Les rais des roues d'une voiture sont dirigés suivant les génératrices d'une surface conique droite qui a pour base la circonférence que forment les jantes et pour sommet un point de l'axe du moyeu. On nomme *écuanteur* la longueur de l'axe de cette surface conique.

Cette disposition a pour objet d'empêcher que la jante qui porte sur le sol ne soit rejetée par les cahots vers le milieu de la voiture, ou au dehors. Si les rais étaient perpendiculaires à l'axe du moyeu, les cahots les feraient osciller d'un côté et de l'autre d'un plan vertical perpendiculaire à l'axe de l'essieu, et finiraient par détruire la solidité de l'assemblage de ces rais dans les jantes et dans le moyeu.

THÉORÈME.

384. *Le plan mené par une tangente à la directrice circulaire ou à une section parallèle, et par la génératrice qui passe au point de contact, n'a pas d'autres points communs avec la surface conique (droite ou oblique) que ceux de cette génératrice* (fig. 209).

Soient O la directrice circulaire ou une section parallèle à celle-ci, et AA′ la génératrice rectiligne d'une surface conique donnée. Le plan mené par la tangente TT′ et la génératrice rectiligne CC′ qui passe au point de contact M, ne contient pas d'autres points de la surface conique que ceux de la génératrice CC′; car toute droite menée du sommet S à un point du plan non situé sur CC′ rencontre le plan de la circonférence en un point de la tangente autre que M, et par conséquent, se trouve située hors de la surface conique.

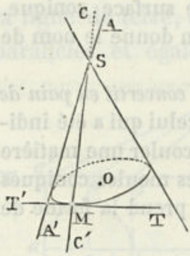

Fig. 209.

385. Scolie I. — On donne au plan déterminé par une tangente à la directrice et la génératrice qui passe au point de contact, le nom de *plan tangent à la surface conique*.

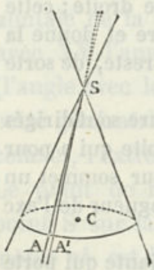

Fig. 210.

386. Scolie II. — La tangente au point A (fig. 210) de la directrice de la surface conique S (droite ou oblique), pouvant être regardée comme une droite qui unit deux points de la courbe infiniment voisins A et A′, ou qui a un élément rectiligne commun avec elle, le plan tangent mené par cette tangente et la génératrice rectiligne SA a un élément plan commun avec la surface, savoir : la portion de plan comprise entre les deux génératrices infiniment voisines AS et A′S.

APPLICATION.

387. Lorsqu'une surface conique droite et complète roule sur un plan en tournant autour de son sommet, supposé fixe, toutes ses génératrices viennent successivement s'appliquer sur ce plan. On peut régler la vitesse de rotation des meules coniques employées dans certaines industries, et particulièrement dans la fabrication du chocolat au broiement du cacao. Supposons qu'une meule conique S (fig. 211) reposant sur

une surface plane par son arête SB, roule ensuite sur ce plan, en tournant autour d'un axe fixe perpendiculaire au plan et mené par son sommet. Les différents points de la circonférence de base du cône décriront dans ce mouvement un arc de la circonférence dont le rayon est SB, et qui sera égal à cette circonférence après un tour entier de la meule. On peut donc donner à la vitesse de rotation de la meule sur son axe une valeur *n* fois plus grande que sa vitesse autour de l'axe perpendiculaire au plan, en prenant la génératrice du cône égale à *n* fois le rayon de sa base.

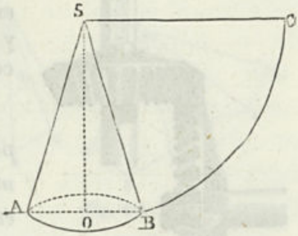

Fig. 211.

DÉFINITIONS.

388. *Des cônes tangents les uns aux autres, ou à d'autres surfaces.*

a. Deux surfaces coniques peuvent avoir un seul point commun. On dit alors qu'elles sont *tangentes*.

b. Si deux surfaces coniques, de même sommet, ont une génératrice commune et une seule, les surfaces n'ont pas d'autres points communs que ceux qui appartiennent à cette génératrice ; car s'il existait un point commun situé hors de cette génératrice, les deux surfaces auraient une seconde génératrice commune, celle qui passe par ce point. Les deux surfaces sont *tangentes* intérieurement et extérieurement, suivant que les directrices circulaires sont placées d'un même côté ou de part et d'autre du plan tangent suivant la génératrice.

c. On a un exemple de cette seconde espèce de contact, lorsqu'on veut transmettre à un axe par frottement ou par engrenage le mouvement circulaire qui se fait autour d'un second axe.

On peut placer à côté l'une de l'autre (fig. 212) deux roues dentées coniques de telle manière que, la rotation imprimée à l'une des roues se communique à l'autre roue. Cette sorte de transmission de mouvement circulaire se rencontre fréquemment. On donne aux roues dentées coniques qui sont employées le nom de *roues d'angle*. Il y a ici un contact entre deux surfaces coniques.

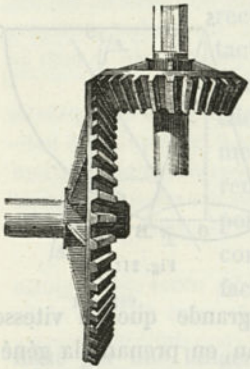

Fig. 212.

d. Un cône et un cylindre droits peuvent avoir une génératrice commune et une seule, l'une des figures étant en relief ou en creux et l'autre en relief (fig. 213).

Supposons, en effet, le rectangle ABCD et le triangle rectangle CBE ou CBE′ dont l'hypoténuse BC est un côté du rectangle, situés dans un même plan. Le cylindre droit engendré par la révolution du rectangle autour de AD et le cône droit engendré par la révolution du triangle rectangle CBE ou CBE′, autour de CE ou CE′, ont la génératrice CB commune et ne peuvent avoir d'autres points communs que ceux de cette génératrice. Et si l'on fait passer un plan par la génératrice CB et la perpendiculaire au plan des droites AB, BE ou BE′, menée par le point B, ce plan sera tangent à chacune des deux surfaces, car cette perpendiculaire au plan, étant aussi perpendiculaire aux droites AB, BE ou BE′, est tangente aux directrices circulaires des surfaces conique et cylindrique.

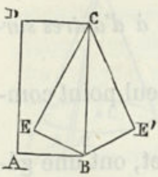

Fig. 213.

DÉFINITION.

389. Soit la pyramide convexe SABCDE (fig. 214). Faisons tourner la face SAB autour de l'arête SB pour la rabattre sur le plan de la face SBC. On obtiendra alors le quadrilatère SABC. Faisons ensuite tourner ce quadrilatère autour de l'arête SC pour le rabattre sur le plan de la face SCD ; on obtiendra le

pentagone SABCD. On continue à rabattre ainsi les autres faces successivement sur le plan de la face suivante. On obtient alors une figure plane polygonale, égale à un polygone tel que *sabcdea*$_1$, composé des triangles *sab*, *sbc*, *scd*.... respectivement égaux aux triangles SAB, SBC, SCD,....

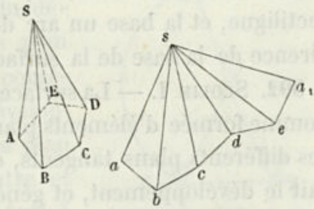

Fig. 214.

On donne à la figure ainsi obtenue le nom de *développement* de la surface latérale de la pyramide.

390. Scolie. — La surface conique complète peut, aussi bien que la surface latérale de la pyramide, être *développée* sur un plan, c'est-à-dire être étendue sur ce plan sans déchirure ni duplicature. On peut effectivement regarder cette surface comme composée d'éléments plans déterminés chacun par deux positions infiniment rapprochées de la génératrice rectiligne.

THÉORÈME.

391. *Une surface conique droite et complète a pour développement un secteur circulaire, dont la base est un arc de circonférence ayant pour rayon l'arête de la surface, et pour longueur celle de la base.*

Inscrivons à la base de la surface, un polygone régulier et tirons les droites qui unissent le sommet de la surface aux différents sommets du polygone régulier ; ces droites, contenues dans la surface, sont les arêtes d'une pyramide régulière, qui est dite *inscrite* à la surface conique. Le développement de la surface latérale de la pyramide pourra toujours s'effectuer (389), quel que soit le nombre des côtés de la base. Or, si l'on fait croître indéfiniment le nombre de ces côtés, le périmètre de la base tend à devenir égal à la circonférence ; en même temps la surface latérale de la pyramide *inscrite* à la surface conique tend à devenir égale à celle-ci, *qui est sa limite*.

La surface conique droite et complète a donc pour développement un secteur circulaire, dont le rayon est la génératrice rectiligne, et la base un arc de même longueur que la circonférence de la base de la surface conique.

392. Scolie I. — La surface conique pouvant être regardée comme formée d'éléments plans communs à cette surface et à ses différents plans tangents, c'est sur un plan tangent que se fait le développement, et généralement sur celui qui passe par l'arête selon laquelle on ouvre la surface.

393. Scolie II. — Pour déterminer la longueur de l'arc du secteur circulaire développement de la surface conique, désignons par l la longueur de la génératrice rectiligne, et par r le rayon de la base ; et, comme l'arc qui sert de base au secteur est nécessairement moindre qu'une circonférence, nous désignerons par $\frac{m}{n} \times 2\pi\, l$ la longueur de cet arc. On a alors :

$$\frac{m}{n} \times 2\pi l = 2\pi r, \quad \text{d'où l'on déduit : } \frac{m}{n} = \frac{r}{l}.$$

394. Scolie III. — $\frac{m}{n}$ représente aussi la fraction de quatre angles droits égale à l'angle du secteur ; on voit donc que cet angle sera égal au produit de quatre angles droits par $\frac{r}{l}$. Si l'on suppose, par exemple, $r = 3$ mètres, et $l = 5$ mètres, l'angle du secteur est égal à $4 \times \frac{3}{5}$ ou $\frac{12}{5}$ d'angle droit.

PROBLÈME.

395. *Tracer le développement d'une surface conique droite et complète dont on a les projections* (l'épure) (fig. 215).

Après avoir tracé l'épure de la surface donnée (381), nous supposerons qu'on ouvre cette surface suivant l'arête (Sa, $S'a'$) parallèle au plan vertical, et qu'on fasse le développement sur le plan tangent mené par cette arête. Si, après avoir tracé ce développement, on fait tourner le plan tangent autour de l'arête (Sa, $S'a'$) pour le placer parallèlement au plan vertical, la figure du développement se projettera sur le plan vertical en vraie grandeur; par conséquent, pour tracer la figure du développement, il suffit de décrire sur le plan vertical, du point S' comme centre et avec $S'a'$ pour rayon, un arc $a'a''$ égal à la circonférence S de la base du cône et de tirer le rayon $S'a''$,

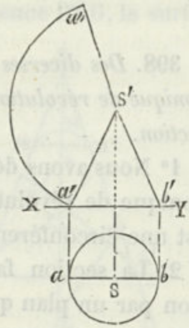

Fig. 215.

PROBLÈME.

396. *Tracer, sans projection, le développement d'une surface conique de révolution, dont les génératrices soient d'une longueur déterminée et dont la base ait un rayon connu.*

Ce développement est un secteur circulaire dont le rayon est égal à la génératrice rectiligne, et dont l'arc est une fraction de la circonférence égale à $\frac{r}{l}$, si r est le rayon de base du cône et l la génératrice. Soient, par exemple, $r=3$, $l=7$; l'arc du secteur sera les $\frac{3}{7}$ de la circonférence dont le rayon est égal à 7.

APPLICATIONS.

397. Le ferblantier, le cartonnier, le chaudronnier, etc., emploient la méthode de développement d'une surface conique de révolution pour faire des cônes creux. Ils tracent sur la feuille de métal ou de carton le secteur circulaire d'après les données, découpent ce secteur et le roulent de manière que les deux rayons extrêmes se confondent. Ensuite ils soudent ou collent les bords qu'ils ont réservés.

L'ouvrier roule ordinairement la feuille en la battant sur une enclume conique ou *bigorne* à coups de maillet.

Sections coniques.

398. *Des diverses espèces de sections produites dans une surface conique de révolution par un plan. Citer des exemples de chaque section.*

1° Nous avons déjà vu que la section faite dans une surface conique de révolution, par un plan perpendiculaire à l'axe, est une circonférence.

2° La section faite dans une surface conique de révolution par un plan qui rencontre toutes les génératrices d'une même nappe est une *Ellipse* (333).

Pour le démontrer, nous ferons connaître d'abord quelques propriétés de la surface sphérique (296).

a. On nomme *tangente* à une surface sphérique, toute droite qui n'a qu'un seul point commun avec cette surface.

b. On nomme *plan tangent* à une surface sphérique, tout plan qui n'a qu'un seul point commun avec la surface.

c. La tangente à une surface sphérique est perpendiculaire au rayon mené au point de contact. (Nous appelons *rayon* de la surface, toute droite menée du centre de la génératrice, qu'on nomme *centre* de la surface, à un point de celle-ci.) En effet, le rayon mené au point de contact doit être la ligne la plus courte menée du centre à un point de la tangente.

d. Les tangentes menées d'un même point à une surface sphérique sont égales. Car chacune de ces tangentes est un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle, dont l'hypoténuse est la distance du point au centre et l'autre côté un rayon.

e. Supposons (fig. 216) les côtés de l'angle BSC coupés par la droite AA′, et soit SD la bissectrice de cet angle. Inscrivons la circonférence I au triangle ASA′, et traçons la circonférence L tangente aux trois droites BA, AA′, A′C. Faisons ensuite tourner l'angle plan BSD autour de SD. Dans cette révolution de l'angle BSD, la droite SB engendre la surface conique de révolution dont l'axe est SD et l'angle BSD ; la demi-circonférence MHN, engendre la surface sphérique dont le centre est I, et le rayon IF ; et la demi-circonférence PKG, la surface sphérique dont le centre est L et le rayon LF′.

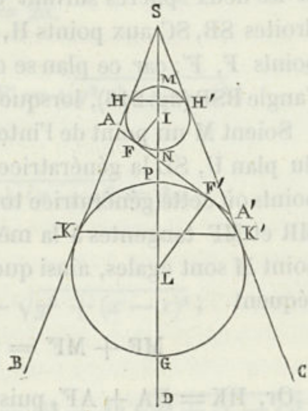

Fig. 216.

On voit immédiatement que les génératrices du cône sont tangentes aux deux surfaces sphériques. Le lieu des points de contact de la sphère I est la circonférence, dont le diamètre est HH′ et dont le plan est perpendiculaire à l'axe SD. Le lieu des points de contact de la sphère L est la circonférence dont le diamètre est KK′ et dont le plan est perpendiculaire à l'axe SD.

Le plan mené par AA′ perpendiculairement au plan BSC est tangent aux deux sphères, aux points de contact F et F′ des circonférences, car les rayons IF, LF′ sont perpendiculaires à ce plan. Par conséquent, tous les points de ce plan autres que F sont plus éloignés du centre que F et, par suite, extérieurs à la surface sphérique I. Pareillement, tous les points du plan autres que F′ sont extérieurs à la surface sphérique L.

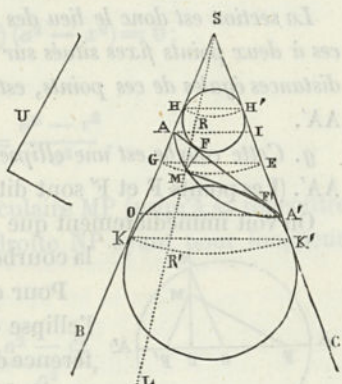

Fig. 217.

f. Considérons une surface conique de révolution S, coupée par un plan U (fig. 217), qui rencontre toutes les génératrices d'une même nappe. Supposons construites les sphères tangentes à la surface et au plan U. Menons par l'axe de la surface le plan BSC perpendiculaire au plan U. Ce plan coupe le plan U suivant une droite AA′ qui contient les points de contact F et F′, la surface suivant les génératrices SB, SC, et les deux sphères suivant des circonférences tangentes aux droites SB, SC aux points H, H′ et K, K′, et à la droite AA′ aux points F, F′; car ce plan se confond avec une des positions de l'angle BSD (fig. 216), lorsque celui-ci tourne autour de SD.

Soient M un point de l'intersection de la surface conique et du plan U, SL la génératrice qui passe au point M, R et R′ les points où cette génératrice touche les deux sphères. Les droites MR et MF tangentes à la même sphère et menées d'un même point M sont égales, ainsi que les droites MR′ et MF′ ; par conséquent

$$MF + MF' = RR' = HK = H'K'.$$

Or, $HK = HA + AF'$, puisque $AF' = AK$; et, comme $HA = AF$, $HK = 2AF + FF'$. D'autre part, $H'K' = H'A' + A'K' = A'F + A'K'$; et, comme $A'K' = A'F'$, $H'K' = 2A'F' + FF'$, par conséquent $AF = A'F'$; et par suite

$$MF + MF' = AA'.$$

La section est donc le lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes situés sur la droite AA′ *entre* A *et* A′ *à des distances égales de ces points, est égale à la longueur de la droite* AA′.

g. Cette courbe est une ellipse dont le grand axe est la droite AA′. (Les points F et F′ sont dits les *foyers* de l'ellipse.)

On voit immédiatement que AA′ est un axe de symétrie de la courbe.

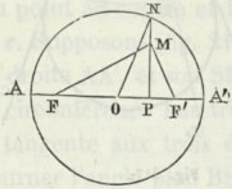

Fig. 218.

Pour démontrer que cette courbe est l'ellipse définie (333), traçons la circonférence dont le diamètre est AA′(fig. 218), et soit M un point de la section conique dont AA′ est l'axe et dont les foyers sont F et F′. Le centre O est le milieu de la droite FF′. Désignons FF′ par $2c$ et AA′ par $2a$. Appelant y

la perpendiculaire MP abaissée du point M sur AA′ et x la distance OP. On a :

$$MF + MF' = 2a.$$

Or,

$$MF = \sqrt{y^2 + (x + c)^2}, \quad MF' = \sqrt{y^2 + (x - c)^2};$$

par suite :

$$\sqrt{y^2 + (x + c)^2} + \sqrt{y^2 + (x - c)^2} = 2a.$$

On déduit de là :

$$\sqrt{y^2 + (x + c)^2} = 2a - \sqrt{y^2 + (x - c)^2};$$

et après avoir élevé au carré :

$$y^2 + (x + c)^2 = 4a^2 + y^2 + (x - c)^2 - 4a\sqrt{y^2 + (x - c)^2};$$

réduisant,

$$a^2 - cx = a\sqrt{y^2 + (x - c)^2}.$$

Élevant au carré et réduisant, on trouve :

$$a^2y^2 - (a^2 - c^2)(a^2 - x^2) = 0;$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{y^2}{a^2 - x^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2}.$$

Si l'on prolonge la perpendiculaire MP jusqu'à sa rencontre en N avec la circonférence, la droite NP ayant pour longueur $\sqrt{a^2 - x^2}$, on a :

$$\frac{\overline{MP}^2}{\overline{NP}^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2},$$

ou

$$\frac{MP}{NP} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}.$$

La section conique est donc l'ellipse qu'on trouve, après avoir décrit sur $2a$ comme diamètre une circonférence, en abaissant de chaque point de la circonférence une perpendiculaire sur un diamètre et en prenant ensuite sur chacune d'elles, à partir de son pied, une longueur dont le rapport à cette perpendiculaire soit égal à $\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}$. La longueur de l'un des axes de l'ellipse est $2a$. Celle de l'autre axe est $2\sqrt{a^2-c^2}$; et l'on voit en même temps que, si l'on désigne cette dernière longueur par $2b$, la distance des deux foyers est $2\sqrt{a^2-b^2}$.

3° Lorsque la surface conique de révolution est coupée par un plan parallèle à l'une des génératrices (fig. 219), la section est une courbe limitée dans un sens, et illimitée dans l'autre, qu'on nomme *Parabole*.

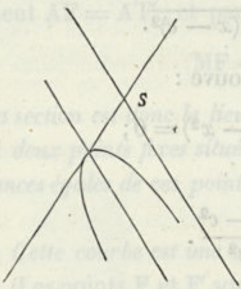

Fig. 219.

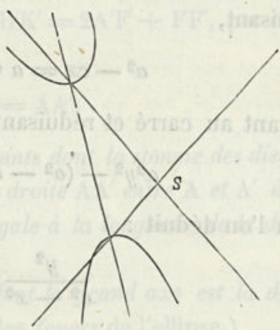

Fig. 220.

4° Lorsque le plan sécant rencontre une partie des génératrices sur l'une des nappes et les autres sur l'autre nappe, la section se compose de deux branches de courbes, chacune limitée dans un sens et illimitée dans l'autre, et ces deux branches représentent la section qu'on nomme *Hyperbole* (fig. 220).

5° La circonférence, l'ellipse, la parabole et l'hyperbole sont les seules courbes qu'on désigne sous le nom de *Sections coniques*.

6° Lorsque le plan sécant passe par le sommet, il peut avoir ce seul point commun avec la surface, ou contenir une génératrice sans avoir d'autres points communs, ou contenir deux génératrices sans avoir d'autres points communs.

APPLICATIONS.

399. *a.* Si l'on place une bougie allumée au centre d'une table circulaire, de telle sorte que la verticale menée par le centre traverse la flamme, les rayons lumineux qui partent de la flamme et vont rencontrer le bord de la table sont les génératrices d'une surface conique droite et ils vont rencontrer le plancher suivant une circonférence, puisque le plancher est un plan perpendiculaire à l'axe. Cette circonférence est la ligne de démarcation de l'ombre produite par la table et de la partie éclairée par la bougie. Si l'ombre de la table se projette sur un plan vertical, la ligne de séparation d'ombre et de lumière sera une branche d'hyperbole. Si cette ombre se projette sur un plan incliné, la ligne de séparation sera une ellipse, ou une parabole, ou une branche d'hyperbole.

b. Les rayons lumineux qui, partant de la mèche d'une lanterne dont le verre est circulaire, vont raser le bord du verre, forment une surface conique droite ; et si l'on projette la lumière sur un mur, la courbe qui est la ligne de séparation de l'ombre et de la lumière peut être, suivant la position qu'on donne à la lanterne, une circonférence, une ellipse, une parabole, une branche d'hyperbole.

DÉFINITIONS.

400. On nomme *surface conique droite tronquée à troncature circulaire*, la portion de surface conique, comprise entre deux plans parallèles à la directrice circulaire. Les deux sections circulaires faites par ces plans sont dites les *bases* de la surface tronquée.

401. On nomme *surface conique droite tronquée à troncature elliptique*, la portion de surface cylindrique droite comprise entre deux plans, l'un parallèle à la directrice circulaire, et l'autre non parallèle, mais rencontrant toutes les génératrices sur la même nappe. On donne le nom de *bases* aux deux sections.

PROBLÈME.

402. *Dessiner une surface conique droite tronquée, à deux bases circulaires, dont on connaît les rayons extrêmes et l'axe* (fig. 221).

Prenons pour plan horizontal le plan de la plus grande base oa, et soit XY la ligne de terre. La projection horizontale de cette base sera cette base elle-même, et la projection verticale, la portion $a'b'$ de la ligne de terre comprise entre les tangentes menées perpendiculairement à la ligne de terre; la projection horizontale de la base supérieure sera une circonférence égale, oc, et concentrique à la première. La projection horizontale de l'axe est le point o, et la projection verticale, la perpendiculaire $o'o''$ à la ligne de terre, égale à cet axe et menée par le pied o' de la perpendiculaire abaissée du point o sur la ligne de terre. Si l'on porte de part et d'autre du point o'', sur une parallèle à la ligne de terre, deux longueurs, $o''c'$, $o''d'$, égales au rayon oc, la droite $c'd'$ sera la projection verticale de la base supérieure. Enfin, les droites $a'c'$, $b'd'$ sont les projections verticales des génératrices parallèles au plan vertical, et dont les projections horizontales sont les droites ac et db.

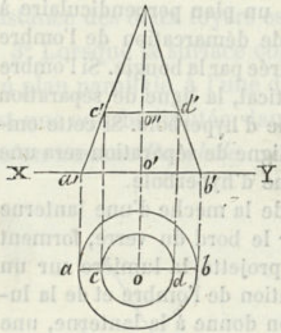

Fig. 221.

PROBLÈME.

403. *Tracer le développement d'une surface conique droite tronquée dont on a les projections* (fig. 222).

Après avoir dessiné l'épure précédente, on prolonge les projections verticales de l'axe, et de la génératrice ac, $a'c'$ jusqu'à leur point de rencontre S, qui est la projection verticale du sommet de la surface conique ; on construit sur le plan vertical le secteur $Sa'a''$ qui est le développement de cette surface, et on décrit du point S comme centre, et avec un rayon égal à

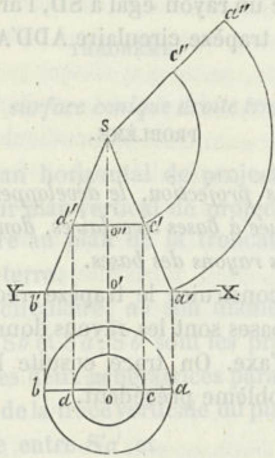

Fig. 222.

Sc', l'arc $c'c''$ terminé aux droites Sa', Sa''. Le secteur $Sc'c''$ est le développement de la surface conique dont la base est la seconde base du tronc, et le trapèze circulaire $c''c'a'a''$ est le développement demandé.

PROBLÈME.

404. *Tracer, sans projection, le développement d'une surface conique droite tronquée à bases circulaires, dont on connaît l'axe et les rayons des bases* (fig. 223).

On construit le trapèze rectangulaire ABCD, dont les bases AB, CD sont respectivement égales aux rayons donnés, et dont le côté BC, perpendiculaire aux bases, est égal à l'axe donné. On prolonge ensuite AD, BC jusqu'à leur rencontre au point S.

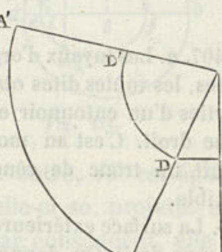

Fig. 223.

On construit le secteur ASA', qui est le développement de la surface conique droite et complète dont SA et AB sont la génératrice et le rayon de base, et on décrit du point S comme centre, avec un rayon égal à SD, l'arc DD′ terminé aux droites SA, SA′. Le trapèze circulaire ADD′A′ est le développement demandé.

PROBLÈME.

405. *Tracer, sans projection, le développement d'une surface conique droite tronquée à bases circulaires, dont on connaît la génératrice droite et les rayons des bases.*

On peut encore construire le trapèze rectangulaire ABCD (fig. 223), dont les bases sont les rayons donnés, les deux côtés la génératrice et l'axe. On trace ensuite le développement comme dans le problème précédent.

PROBLÈME.

406. *Tracer, sans projection, le développement d'une surface conique droite tronquée à bases circulaires, dont on connaît l'axe, la génératrice droite et le rayon d'une des bases.*

On construira le trapèze rectangulaire (fig. 223). On trouvera ensuite le développement par la construction indiquée (404).

APPLICATIONS.

407. *a.* Les tuyaux d'orgue, les seaux et un grand nombre d'autres vases, les voûtes dites *canonnières*, les chapeaux d'homme, les deux parties d'un entonnoir en verre ou en fer-blanc sont des troncs de cône droit. C'est au moyen de son développement que l'on construit un tronc de cône droit, lorsqu'il est formé d'une feuille flexible.

b. La surface extérieure d'un canon de fusil a la figure d'un tronc de cône droit. On donne à une lame de fer la forme d'un trapèze et on la roule sur une enclume portant une gouttière conique. On soude ensuite par rapprochement et non par superposition les bords qui ne sont pas parallèles. Après avoir forgé et dressé le canon, on le rogne par les deux bouts selon des plans perpendiculaires à son axe ; et on donne, au moyen du forage, la forme cylindrique à la surface intérieure.

THÉORÈME.

408. *Dessiner une surface conique droite tronquée à troncature elliptique* (fig. 224).

Prenons pour plan horizontal de projection le plan de la base circulaire, pour plan vertical de projection un plan vertical perpendiculaire au plan de la troncature elliptique, et soit XY la ligne de terre.

Soient S la base circulaire, ab son diamètre parallèle à la ligne de terre ; Sa, Sb et S$'a'$, S$'b'$ sont les projections horizontales et verticales des deux génératrices parallèles au plan vertical. La portion $e'f'$ de la trace verticale du plan de la troncature elliptique, comprise entre S$'a'$ et S$'b'$, est la projection verticale de cette troncature. On peut construire par points la projection horizontale de l'ellipse de la manière suivante : par le point de l'ellipse, dont m' est la projection verticale, menons un plan horizontal. La section faite dans la surface est une circonférence dont le centre est sur l'axe et dont la projection verticale est la portion $i'k'$ de la parallèle à la ligne de terre menée par le point m', comprise entre les droites S$'a'$, S$'b'$. En outre, $i'k'$ est égale au diamètre de cette circonférence. Celle-ci se projette en vraie grandeur sur le plan horizontal ; par conséquent, elle a pour projection horizontale la circonférence dont le centre

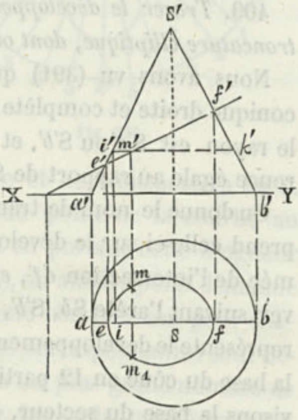

Fig. 224.

est le point S, dont le rayon S$i = \frac{1}{2}\,i'k'$. Le point, dont m' est la projection verticale, a pour projection horizontale le point d'intersection de cette dernière circonférence et de la perpendiculaire abaissée du point m' sur la ligne de terre. En menant cette perpendiculaire, on trouve deux points d'intersection, m et m_1. Cela doit être, parce que chaque point de la droite $e'f'$, à l'exception des points e' et f', est la projection de deux points de l'ellipse situés sur une même perpendiculaire au plan vertical. Les pieds e, f des perpendiculaires abaissées des points e', f' sur ab sont les projections horizontales des points dont e' et f' sont les projections verticales. On construira un nombre suffisant de points de la projection horizontale, pour pouvoir tracer ensuite celle-ci en unissant ces points par un trait continu.

PROBLÈME.

409. *Tracer le développement d'une surface conique droite à troncature elliptique, dont on a les projections* (fig. 225, 226).

Nous avons vu (391) que le développement de la surface conique droite et complète SS′ est un secteur circulaire, dont le rayon est $S'a'$ ou $S'b'$, et l'arc une fraction de la circonférence égale au rapport de Sa à $S'a'$.

On donne le nom de transformée de l'ellipse à la figure que prend celle-ci sur le développement. Pour obtenir la transformée de l'intersection $e'f'$, ef, supposons que le cône ait été ouvert suivant l'arête Sb, $S'b'$, et soit (fig. 226) $S''b''b'''$ le secteur qui représente le développement de la surface conique SS′. Divisons la base du cône en 12 parties égales à partir du point b, et divisons la base du secteur, qui est elle-même la développée de la base de la surface, en 12 parties égales à partir du point b''.

Après avoir tracé sur le secteur les rayons aboutissant aux points de division de sa base et correspondant aux génératrices qui aboutissent aux mêmes points de division de la base du cône, on placera sur chacun de ces rayons le point de la courbe qui se trouve sur la génératrice correspondante; et, pour cela, il suffira de connaître la distance de ce point au sommet. Supposons, en effet, qu'on ait à placer un point appartenant à une génératrice donnée Sm, S'm' (fig. 224). La projection verticale de celle-ci rencontre $e'f'$ au point m' qui est la projection verticale de ce point. Faisons tourner la génératrice autour de l'axe pour la placer parallèlement à la ligne de terre et sur la génératrice Sa, S'a' ; le point de la courbe décrira dans ce mouvement une circonférence horizontale, sa projection verticale m' décrira

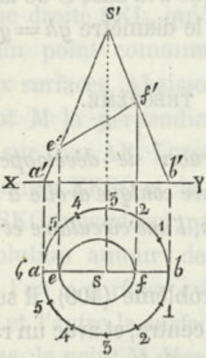

Fig. 225.

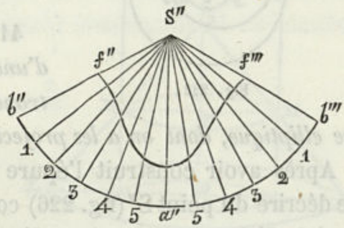

Fig. 226.

une parallèle, $i'k'$, à la ligne de terre et se transportera en i'. D'où l'on conclut que la distance du point de la courbe au sommet du cône est égale à S'i' ; et en portant cette longueur sur le rayon correspondant (fig. 226), on aura le point demandé de la transformée. On appliquera cette construction pour chacun des points dont les génératrices correspondantes sont désignées. On pourra diviser la base en un plus grand nombre de parties égales et assez grand pour tracer la transformée en joignant par un trait continu les points qu'on a déterminés. La figure $b''f''f'''b'''$ représente le développement demandé.

PROBLÈME.

410. *Dessiner une surface conique droite à deux troncatures, l'une circulaire, l'autre elliptique* (fig. 227).

Après avoir construit l'épure du problème (408), il suffira d'y ajouter les projections de la troncature circulaire. La projection verticale est la droite $g'h'$, trace verticale du plan parallèle au plan horizontal, et la projection horizontale est la circonférence, concentrique à la base S de la surface, dont le diamètre $gh = g'h'$.

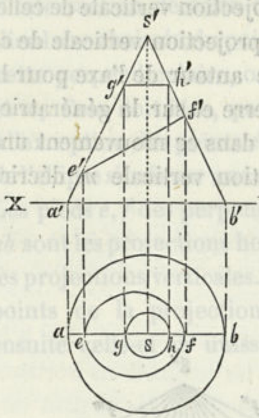

Fig. 227.

THÉORÈME.

411. *Tracer le développement d'une surface conique droite à deux troncatures, l'une circulaire et l'autre elliptique, dont on a les projections.*

Après avoir construit l'épure du problème (409), il suffira de décrire du point S″ (fig. 226) comme centre, et avec un rayon égal à Sg' un arc de circonférence terminé aux rayons S″b'', S″b'''.

APPLICATIONS.

412. *Les poêliers ont besoin de ces quatre derniers problèmes pour exécuter les coudes qui servent à raccorder des tuyaux cylindriques de diamètres inégaux.*

Les deux premiers peuvent servir à tracer le contour d'une feuille destinée à former un tronc de surface conique droite qui puisse s'appliquer par la troncature elliptique contre un plan incliné sur l'axe, ou s'ajuster en coude à un tuyau cylindrique et tronqué, d'un diamètre moindre que celui de la base circulaire du tronc de cône.

Les deux derniers peuvent être employés pour tracer le contour d'une feuille propre à former un tronc de surface conique droite qui puisse s'appliquer, par la troncature elliptique, contre un plan incliné sur l'axe, ou s'ajuster en coude à un tuyau cylindrique et tronqué d'un diamètre plus grand que celui de la troncature circulaire.

THÉORÈME.

413. *Une surface conique et une surface cylindrique qui sont droites et dont les axes se confondent, ont pour intersection une circonférence* (fig. 228).

Soient la surface cylindrique droite FGHI et la surface conique droite SKL, qui ont pour axe commun la droite AB; M un point commun aux deux surfaces. Abaissons du point M la perpendiculaire MP sur l'axe AB. Lorsque le rectangle EFGO et le triangle SKO engendrent, par leur révolution autour de l'axe AB, l'un la surface cylindrique et l'autre la surface conique, le point M décrit une circonférence ayant pour centre le point P et pour rayon MP, et dont tous les points sont communs aux deux surfaces. En outre, les deux surfaces n'ont pas d'autres points communs; car, s'il existait un point commun situé hors de cette circonférence, les deux surfaces se couperaient suivant une seconde circonférence égale à la première, ce qui est impossible.

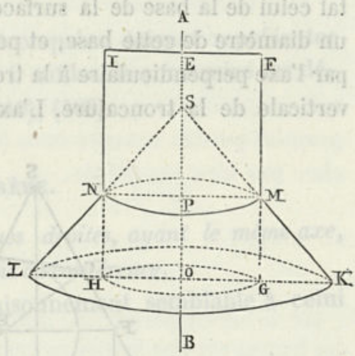

Fig. 228.

APPLICATIONS.

414. *a*. La surface extérieure d'un canon de fusil est conique, l'âme est cylindrique, et, comme elles ont le même axe, les deux surfaces se couperaient suivant une circonférence, si elles étaient prolongées au delà du plan qui forme la bouche.

b. Les bouchons de liége ou de crislal sont coniques. Le goulot d'une bouteille est cylindrique. Par conséquent le bouchon doit s'appliquer exactement sur la circonférence interne qui termine ce goulot et produire une fermeture hermétique.

PROBLÈME.

415. *Construire un cylindre droit qui puisse s'ajuster en coude à la troncature elliptique d'un tronc de cône droit donné* (fig. 229).

Supposons tracée une partie du dessin de la surface conique droite à laquelle appartient le tronc de cône donné, celle qui appartient à la projection verticale ; en prenant pour plan horizontal celui de la base de la surface conique, pour ligne de terre un diamètre de cette base, et pour plan vertical un plan mené par l'axe perpendiculaire à la troncature. Soit CD la projection verticale de la troncature. L'axe du cylindre doit passer par

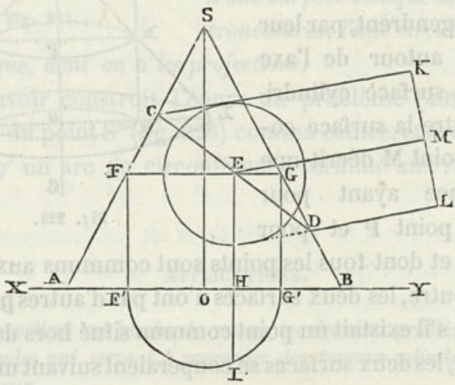

Fig. 229.

le milieu E de CD. Le diamètre du cylindre qui passe au point E est une corde de la circonférence suivant laquelle le cône est coupé par un plan parallèle à sa base et passant par ce point ; cette corde est perpendiculaire au diamètre FG de cette circonférence. Par conséquent, si l'on abaisse FF′, et GG′ perpendiculaires sur AB, qu'on décrive sur F′G′ comme diamètre une demi-circonférence, et qu'on prolonge, jusqu'à sa rencontre en I avec cette demi-circonférence, la perpendiculaire EH abaissée du point E sur AB, la demi-corde HI sera égale au rayon du cylindre. On décrit une circonférence du point E comme centre, avec un rayon égal à HI ; on mène CK tangente à cette circonférence et les droites DL, EM parallèles à CK. La droite DL est tangente à la circonférence ; les droites CK, DL représentent les génératrices, et EM l'axe du cylindre tronqué. Le trapèze CDLK, dont le côté KL est mené à une distance arbitraire de E perpendiculairement aux droites CK, DL est la projection verticale de la surface du cylindre droit demandé ; son diamètre est égal à KL.

416. Si ces deux surfaces tronquées doivent représenter celles de deux tuyaux à ajuster, il suffira de construire les développements de ces surfaces (340), (409).

THÉORÈME.

417. *Si deux surfaces coniques droites, ayant le même axe, se coupent, leur intersection est une circonférence.*

On le démontrera par un raisonnement semblable à celui du théorème (413).

THÉORÈME.

418. *Deux surfaces coniques droites à une seule nappe, dont les génératrices droites sont parallèles et dont les axes se confondent, sont partout également distantes, et l'une est entièrement contenue dans l'autre* (fig. 230).

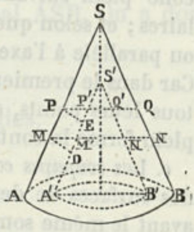

Fig. 230.

On peut entendre l'égalité de distance de deux manières : ou bien les sections faites par un même plan perpendiculaire à l'axe sont à la même distance, quel que soit le plan ; car, si l'on coupe les cônes par deux plans MN, PQ perpendiculaires à l'axe et par un plan mené par l'axe, les droites MM', PP' sont égales comme portions de parallèles interceptées par deux parallèles. Ou bien les perpendiculaires abaissées des différents points d'une génératrice, SA, par exemple, sur la génératrice parallèle S'A' sont égales, et cela résulte de l'égalité précédente, car soient MD et PE les perpendiculaires abaissées sur S'A', les triangles rectangles MDM', PEP' sont égaux. Du reste, MD et PE sont aussi des portions de parallèles interceptées par deux parallèles.

Il est évident en outre que tous les points du cône S' sont contenus dans le cône S.

419. Corollaire. — La distance de deux surfaces coniques peut être aussi petite qu'on le voudra ; d'où il résulte que, si un cône droit et plein a le même axe, le même sommet et la même génératrice circulaire qu'un cône droit et creux, le premier pourra tourner dans le second, sans cesser de le toucher par tous ses points.

APPLICATIONS.

420. *a.* Les chapeliers font usage de cette propriété pour façonner des feutres sur des formes en tronc de cône.

b. Robinets coniques. — Un robinet conique est formé de deux troncs de cône, l'un plein, l'autre creux, et ayant le même sommet, le même axe et la même génératrice circulaire. Le premier est placé dans le second qu'il touche par tous ses points. Un canal est interrompu par le tronc de cône creux dans lequel il débouche par deux orifices. Un conduit traverse le tronc de cône plein suivant le diamètre d'une de ses génératrices circulaires ; et selon que l'axe de ce dernier conduit est perpendiculaire ou parallèle à l'axe du canal, le robinet se trouve fermé ou ouvert. Car dans le premier cas les deux surfaces coniques coïncident dans tous leurs points, et dans le second le conduit du tronc de cône plein forme la continuation du canal.

c. Les *soupapes coniques* sont aussi un exemple de la coïncidence des surfaces de deux troncs de cône, l'un plein, l'autre creux et ayant le même sommet, le même axe et la même génératrice circulaire. L'axe des deux troncs de cône est vertical, et le premier repose par son poids sur le second avec lequel il coïncide dans tous ses points. Cette disposition peut être utile dans certaines machines à vapeur, les pompes à air, etc.

THÉORÈME.

421. *La section antiparallèle à la base d'une surface conique oblique à base circulaire (ou directrice circulaire) est une circonférence* (fig. 231).

Soient S le sommet d'une surface conique oblique et complète ayant pour base la circonférence, dont le centre est O; ASB le plan mené par OS perpendiculairement à celui de la base O. Il coupe ce dernier plan suivant le diamètre AB et la surface conique suivant les génératrices SA, SB. On donne au plan ASB le nom de *plan principal* de la surface conique. Si l'on tire dans le plan ASB une droite quelconque MN, faisant avec SA un angle SMN égal à l'angle SBA que l'autre génératrice SB fait avec AB, le plan mené par MN perpendiculairement au plan ASB coupera la surface conique suivant une circonférence, ayant pour diamètre MN. Par un point quelconque P de cette section menons un plan parallèle à celui de la base O ; il coupe la surface conique suivant une circonférence dont le diamètre est CD ; et l'intersection PQ des plans des deux sections est perpendiculaire au plan principal ASB. On a donc :

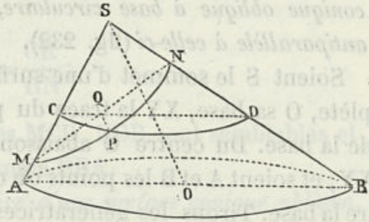

Fig. 231.

$$\overline{PQ}^2 = CQ \times QD ;$$

or les triangles QMC, QND étant équiangles,

$$\frac{CQ}{QN} = \frac{MQ}{QD} ;$$

d'où il résulte :

$$CQ \times QD = MQ \times QN ;$$

et, par suite,

$$\overline{PQ}^2 = MQ \times QN.$$

La section faite par le plan mené suivant MN, *perpendiculairement au plan principal* ASB, *est donc une circonférence ayant pour diamètre* MN.

On nomme *section antiparallèle* à la base de la surface conique oblique, la section faite par un plan perpendiculaire au plan principal et mené selon une droite, de celui-ci, faisant avec l'une des génératrices du plan un angle égal à celui que l'autre génératrice fait avec le diamètre de la base situé dans le plan principal :

Toute section antiparallèle à la base d'une surface conique oblique est donc une circonférence.

422. Réciproquement. — *Toute section circulaire, d'une surface conique oblique à base circulaire, non parallèle à la base, est antiparallèle à celle-ci* (fig. 232).

Soient S le sommet d'une surface conique oblique et complète, O sa base, XY la trace du plan de la section sur le plan de la base. Du centre O abaissons la perpendiculaire OZ sur XY ; et soient A et B les points où cette perpendiculaire rencontre la base. Tirons les génératrices SA, SB, et menons par les points A et B les tangentes à la base EF, GH. Les plans menés, l'un par les droites EF, SA, l'autre par les droites GH, SB, sont tangents au cône, et coupent le plan de la section suivant

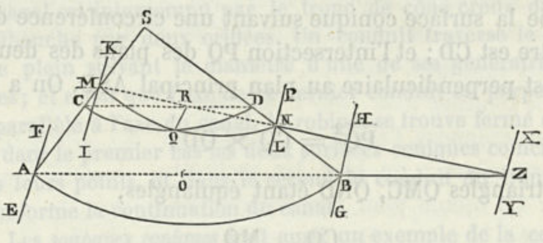

Fig. 232.

les droites IK, LP tangentes à celle-ci aux points M et N, des génératrices SA, SB. Or, les tangentes EF, GH sont parallèles à XY ; par suite les tangentes IK, LP sont aussi parallèles à XY ; par conséquent MN est un diamètre de la section circulaire perpendiculaire aux deux tangentes parallèles IK, LP ; et, comme MN appartient au plan ASB, MN rencontre, étant prolongée, la droite XY au point Z, et lui est perpendiculaire. La droite XY, perpendiculaire aux deux droites AZ, MZ, est perpendiculaire au plan ASB. Celui-ci est donc le plan principal, et il est en même temps perpendiculaire au plan de la section. En outre, si l'on mène par un point Q de la section un plan parallèle au plan de la base, QR étant l'intersection des deux plans et CD le diamètre de cette seconde section, parallèle à la base, on a :

$$\overline{QR}^2 = MR \times RN, \quad \text{et } \overline{QR}^2 = CR \times RD\,;$$

par conséquent :

$$\frac{MR}{RD} = \frac{CR}{RN}\,;$$

d'où il résulte que les triangles MCR, NDR sont semblables et que l'angle SMN est égal à l'angle SBA.

Donc, *Toute section circulaire d'une surface conique oblique, faite par un plan non parallèle à la base, est antiparallèle à celle-ci.*

§ 5. — Surface conique et Cône. Mesure.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

423. Nous avons donné (378) le nom de *Cône droit*, à la portion de l'espace ou au corps limité par l'une des nappes d'une surface conique droite à partir du sommet et le cercle auquel appartient une section circulaire faite dans la surface conique, par un plan perpendiculaire à l'axe. Le cercle est la *base* du cône. On conserve le nom de *sommet* du cône au point désigné comme le sommet de la surface conique. On nomme *hauteur* du cône, la portion de l'axe comprise entre le sommet et la base ; *côté* ou *apothème*, ou *arête*, la portion de la génératrice

rectiligne comprise entre la base et le sommet, et *surface latérale* du cône la portion de la surface conique comprise entre la base et le sommet. Tous les côtés sont égaux.

424. On peut regarder le cône droit comme engendré par la révolution d'un triangle rectangle SAC (fig. 233) autour d'un des côtés de l'angle droit, SC, supposé fixe. Dans ce mouvement, l'hypoténuse SA engendre la surface latérale et le côté AC un cercle qui est la base du cône. Le côté fixe SC est l'axe ou la hauteur du cône, l'hypoténuse SA le côté, et AC le rayon de la base.

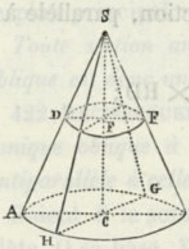

Fig. 233.

Toute section faite dans le cône par un plan perpendiculaire à l'axe est un cercle. Soient D le point où le plan perpendiculaire rencontre la génératrice ou côté SA, et DF la perpendiculaire abaissée du point D sur l'axe. Pendant la révolution du triangle rectangle, la perpendiculaire DF engendre un cercle perpendiculaire à l'axe, et ce cercle se confond avec la section faite par le plan mené du point D perpendiculairement à l'axe.

Toute section faite suivant l'axe est un triangle isocèle double du triangle générateur, comme on le voit immédiatement.

425. Nous avons donné le nom de *cône oblique* (378), à la portion de l'espace ou au corps limité par l'une des nappes d'une surface conique oblique et un plan qui coupe la surface suivant une circonférence. Le cercle auquel appartient cette circonférence est la *base* du cône. Le sommet de la surface est aussi le *sommet* du cône. La *hauteur* de celui-ci est la distance du sommet à la base. On donne le nom de *génératrice* ou *arête* du cône aux portions des génératrices de la surface comprises entre le sommet et la base. La *surface latérale* est la portion de la surface conique comprise entre la base et le sommet.

THÉORÈME.

426. *L'aire de la surface latérale d'un cône droit est égale au produit de la circonférence de sa base par la moitié de son côté* (fig. 234).

Soit S, un cône droit ayant pour base le cercle O et pour côté AS. Inscrivons dans la base O un polygone régulier ABCDEF; et construisons la pyramide régulière ayant pour base ce polygone, et pour sommet celui du cône. On nomme *apothème* de cette pyramide régulière la hauteur SI de l'un des triangles isocèles égaux qui forment sa surface latérale. SABCDEF est une *pyramide inscrite* au cône droit; on désigne ainsi toute pyramide ayant même sommet que le cône, et pour base un polygone inscrit à la base du cône.

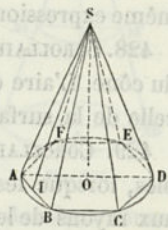

Fig. 234.

On définit l'*aire de la surface latérale* d'un cône droit, la limite vers laquelle tend l'aire de la surface latérale d'une pyramide régulière inscrite, lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de sa base. Or,

$$\textit{aire de la surface latérale de la pyramide régulière} = \textit{périmètre } \mathrm{ABCDEF} \times \frac{1}{2}\mathrm{SI}.$$

Lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de la base de la pyramide, l'apothème a pour limite le côté du cône, le périmètre de la base a pour limite la circonférence de la base du cône; et comme aussi

$$\textit{lim. de l'aire de la surf. lat. de la pyramide} = \textit{lim. du périm. de la base} \times \frac{1}{2}\textit{ lim. de l'apothème},$$

on en déduit:

$$\textit{aire de la surf. latér. du cône} = \textit{circ. de sa base} \times \frac{1}{2}\textit{ de son côté}.$$

427. Scolie. — Nous avons vu (390) que la surface latérale du cône droit est développable, et que le développement de cette surface est un secteur circulaire dont le rayon est égal au côté du cône, et dont l'arc a la même longueur que la circonférence de la base du cône. Or, l'aire d'un secteur circulaire est égale au produit de l'arc correspondant par la moitié du rayon. On trouve donc encore, par cette considération, la même expression de l'aire de la surface latérale d'un cône droit

428. Corollaire I. — Soient l le côté, et r le rayon de la base du cône. L'aire de la surface latérale est exprimée par πrl; et celle de la surface totale, par $\pi rl + \pi r^2$ ou $\pi r(l+r)$.

429. Corollaire II. — On dit que deux cônes sont semblables, lorsque les hauteurs de ces cônes sont proportionnelles aux rayons de leurs bases.

Soient r, h et l le rayon de base, la hauteur et le côté d'un cône; r', h' et l' le rayon de base, la hauteur et le côté d'un second cône semblable au premier; on a :

$$\frac{\textit{aire de la surf. latér. du premier}}{\textit{aire de la surf. latér. du second}} = \frac{\pi rl}{\pi r'l'} = \frac{rl}{r'l'} = \frac{r^2}{r'^2} = \frac{h^2}{h'^2} = \frac{l^2}{l'^2};$$

puisque $\frac{r}{r'} = \frac{h}{h'} = \frac{l}{l'}$.

Le rapport des aires des surfaces totales étant $\frac{\pi r(l+r)}{\pi r'(l'+r')}$, on a :

$$\frac{\pi r(l+r)}{\pi r'(l'+r')} = \frac{r(l+r)}{r'(l'+r')} = \frac{r^2}{r'^2} = \frac{h^2}{h'^2} = \frac{l^2}{l'^2}.$$

Donc, *Le rapport des aires des surfaces* (soit latérales, soit totales) *de deux cônes semblables est égal au rapport des carrés des rayons, des carrés des hauteurs et des carrés des côtés de ces cônes.*

DÉFINITIONS.

430. Si l'on coupe un cône droit C par un an perpendi-

culaire à son axe (fig. 235), le cercle MM′ qui représente cette section est la base d'un second cône droit de même sommet que le premier. La différence de ces deux cônes, ou le corps qu'on obtient en retranchant le second cône du premier, et qui se trouve compris entre la surface conique et les deux cercles perpendiculaires à l'axe, porte le nom de *cône tronqué*, ou *tronc de cône*, à bases parallèles. On nomme *bases* du tronc de cône les deux cercles (A), (P) qui sont les bases des deux cônes; *hauteur* la portion AP de l'axe des cônes comprise entre les bases, et *côté* ou *apothème*, ou *arête*, la différence BM des côtés des deux cônes.

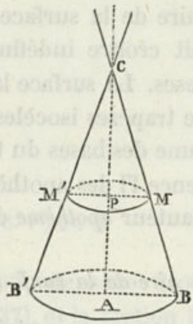

Fig. 235.

431. Scolie I. — Le tronc du cône droit à bases parallèles BMM′B′ peut être engendré par la révolution du trapèze droit ABMP autour du côté AP.

432. Scolie II. — Nous ne considérerons pas le tronc de cône obtenu en coupant un cône droit par un plan non perpendiculaire à l'axe.

THÉORÈME.

433. *L'aire de la surface latérale d'un tronc de cône droit à bases parallèles, est égale au produit de la demi-somme des circonférences des bases par son côté* (fig. 236).

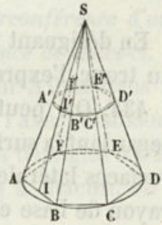

Fig. 236.

Soit le tronc de cône droit à bases parallèles ADD′A′. Inscrivons dans le cône SAD la pyramide régulière SABCDEF. Elle est coupée par le plan de la base supérieure du tronc suivant un polygone régulier A′B′C′D′E′F′ semblable à ABCDEF et qui est la base d'une seconde pyramide régulière SA′B′C′D′E′F′. Le tronc de pyramide régulière obtenu en retranchant celle-ci de la première est *inscrit* au tronc de cône, et l'aire de la surface latérale de celui-ci est la limite vers laquelle tend l'aire de la surface latérale du tronc de pyramide, lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre commun des côtés des bases. La surface latérale du tronc de pyramide est composée de trapèzes isocèles égaux, ayant pour bases un côté de chacune des bases du tronc de pyramide et pour hauteur la différence I'I des apothèmes des pyramides. Nous appellerons cette hauteur *apothème* du tronc de pyramide. On a donc :

$$\textit{aire de la surf. latér. du tronc de pyramide} = \frac{1}{2}\ \textit{somme des périmètres des bases} \times \textit{apothème}\ ;$$

or, lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre commun des côtés des bases, celles-ci ont respectivement pour limites les circonférences des bases du tronc de cône, et l'apothème a pour limite le côté du tronc de cône ; et comme on a aussi :

$$\textit{lim. de l'aire de la surf. latér. du tronc de pyramide} = \textit{lim. de la}\ \frac{1}{2}\ \textit{somme des périmètres} \times \textit{lim. de l'apothème},$$

on en déduit :

$$\textit{aire de la surf. latér. du tronc de cône droit} = \frac{1}{2}\ \textit{somme des circonférences des bases} \times \textit{le côté}.$$

En désignant par r et r' les rayons des bases et par k le côté du tronc, l'expression de l'aire est $\pi\,(r+r')\,k$.

434. On peut obtenir immédiatement cette expression, en regardant la surface latérale du tronc comme la différence des surfaces latérales des deux cônes (fig. 236); car soient r et l, le rayon de base et le côté du plus grand, r' et l' le rayon de base et le côté de l'autre, et k le côté du tronc, on a, en désignant par s l'aire de la surface latérale :

$$s = \pi\,(rl - r'l') = \pi\,[r\,(k+l') - r'l'] = \pi\,[rk + (r-r')\,l'].$$

Or,

$$\frac{r}{r'} = \frac{l}{l'},$$

et par suite,

$$\frac{r-r'}{r'} = \frac{l-l'}{l'} = \frac{k}{l'};$$

donc

$$S = \pi(r+r')\,k = \frac{1}{2}(\text{circ. } r + \text{circ. } r') \times k.$$

435. Corollaire I. — Supposons un tronc de cône droit coupé par un plan mené suivant l'axe (fig. 237), et la section le trapèze isocèle ABCD, composé des deux trapèzes droits égaux AFED, FBCE. Les bases AF, DE du trapèze AFED, sont égales aux rayons des bases du tronc de cône; AD et FE en sont le côté et la hauteur. Si l'on mène par le milieu I du côté, un plan parallèle aux bases, il coupera le tronc suivant un cercle dont le rayon IG sera la demi-somme des rayons AF, DE, et dont la circonférence sera, par suite, la demi-somme des circonférences des bases, puisque les circonférences sont proportionnelles à leurs rayons. Par conséquent

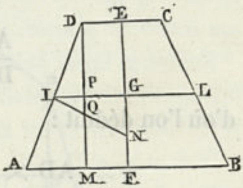

Fig. 237.

L'aire de la surface latérale d'un tronc de cône droit à bases parallèles est égale au produit de son côté par la circonférence d'une section plane parallèle aux bases et à égale distance de celles-ci.

436. Corollaire II. — Élevons au point I sur AD et dans le plan AFED la perpendiculaire IN terminée à l'axe. Abaissons du point D la perpendiculaire DM sur AB. Les triangles ADM, IGN ayant leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun, on a

$$\frac{\text{AD}}{\text{DM}} = \frac{\text{IN}}{\text{IG}} = \frac{\text{circ. IN}}{\text{circ. IG}};$$

d'où

$$\text{AD} \times \text{circ. IG} = \text{EF} \times \text{circ. IN}.$$

L'aire de la surface latérale d'un tronc de cône est donc égale au produit de la hauteur par la circonférence dont le rayon est la portion de la perpendiculaire élevée sur le milieu du côté, dans un plan mené par l'axe, et terminée à l'axe.

437. Scolie. — 1° Le triangle ADM (fig. 237), rectangle en M, engendre par sa révolution autour de DM un cône dont la surface latérale a pour aire :

$$AD \times \frac{1}{2}\text{ circ. } AM.$$

Si l'on mène, par le milieu I de AD, IP parallèle à AM et IQ perpendiculaire à AD, on forme un triangle IQP semblable au triangle ADM, et, par suite :

$$\frac{AD}{DM} = \frac{IQ}{IP} = \frac{\text{circ. } IQ}{\text{circ. } IP};$$

d'où l'on déduit :

$$AD \times \text{circ. } IP = DM \times \text{circ. } IQ.$$

Or $\text{circ. } IP = \frac{1}{2}\text{ circ. } AM$; donc *l'aire de la surface latérale du tronc de cône est égale à* $DM \times$ *circ.* IQ.

2° Enfin l'aire de la surface latérale du cylindre engendré par la révolution du rectangle MDEF autour de EF est égale à $EF \times \text{circ. } PG$, la droite PG étant la parallèle à MF menée par le milieu N de DM; car l'aire de la surface latérale du cylindre est : $EF \times \text{circ. } MF$, et $PG = MF$ (fig. 236).

3° On peut renfermer les énoncés de ces trois théorèmes dans le suivant : *Lorsqu'une droite, de longueur donnée et située tout entière d'un même côté d'un axe appartenant au même plan, fait une révolution complète autour de cet axe, l'aire de la surface engendrée est égale au produit de la projection de la droite sur l'axe par la circonférence, dont le rayon est la portion de la perpendiculaire élevée sur le milieu de la droite et terminée à ce point et à l'axe.*

THÉORÈME.

438. *Lorsqu'une ligne brisée plane régulière, située d'un même côté d'une droite appartenant au même plan et passant par son centre, fait une révolution autour de cette droite, elle engendre une surface dont l'aire est égale au produit de la circonférence inscrite par la projection de la ligne brisée sur l'axe.*

Soient la ligne brisée plane régulière ABCDE (fig. 238), O son centre, XY un axe passant par le point O et situé dans le plan de la ligne brisée. Chacune des perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés de la ligne brisée passe par le point O, et la portion comprise entre le côté et l'axe est égale au rayon de la

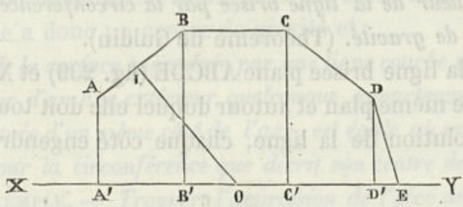

Fig. 238.

circonférence inscrite. Comme la surface engendrée par chaque côté ne peut être que celle d'un cône, d'un tronc de cône ou d'un cylindre, l'aire de la surface engendrée par un côté quelconque est égale au produit de la circonférence dont le rayon est l'apothème par la projection de ce côté sur l'axe XY. Par conséquent, l'aire de la surface engendrée par la ligne brisée est égale au produit de la circonférence inscrite par la somme des projections des côtés, ou par la projection A′E de la ligne brisée, sur l'axe. Si l'on désigne par l la projection de la ligne brisée et par a l'apothème, l'expression de l'aire est $2\pi al$.

439. Exemples. — 1° *Trouver la surface latérale du cône droit, dont le rayon de base est* 3 *mètres et le côté* 5 *mètres.*

$S = \pi rl$ d'où $S = \pi \times 3 \times 5 = 47^{mq},1239$ à moins d'un centimètre carré.

2° *Trouver la surface totale.*

$S = \pi r(r+l)$; d'où $S = \pi \times 3 \times 8 = 75^{mq},3982$, à moins d'un centimètre carré.

3° *Trouver la surface latérale du tronc de cône à bases circulaires, dont le côté est* $12^m,6$ *et les rayons de base* $7^m,2$ *et* $3^m,15$.

$S = \pi l(r+r')$; d'où $S = \pi \times 12,6 \times 10,35 = 409^{mq},59$, à moins d'un décimètre carré.

THÉORÈME.

440. *Lorsqu'une ligne brisée plane située d'un même côté d'une droite appartenant au même plan, fait une révolution autour de cette droite, elle engendre une surface dont l'aire est égale au produit de la longueur de la ligne brisée par la circonférence que décrit son centre de gravité.* (Théorème de Guldin).

Soient la ligne brisée plane ABCDE (fig. 239) et XY l'axe situé dans le même plan et autour duquel elle doit tourner. Dans cette révolution de la ligne, chaque côté engendre une sur-

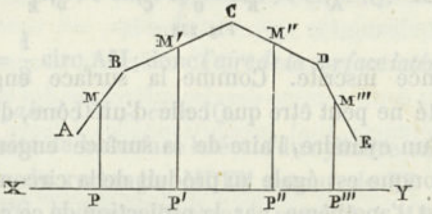

Fig. 239.

face qui ne peut être qu'un cône, un tronc de cône ou un cylindre, et dont l'aire est par conséquent égale au produit de ce côté par la circonférence que décrit son milieu. Désignons les longueurs des côtés AB, BC, CD, DE par a, a', a'', a''' et par m, m', m'', m''' les longueurs des perpendiculaires abaissées des milieux M, M', M'', M''' de ces côtés sur l'axe. L'aire de la surface engendrée par la ligne brisée est égale à

$$2\pi ma + 2\pi m'a' + 2\pi m''a'' + 2\pi m'''a'''.$$

Or, le centre de gravité de la ligne ABCDE est aussi le centre des distances proportionnelles des points (M,a), (M',a')..... ; par conséquent, en désignant par g la distance du centre de gravité à l'axe, on a (100) :

$$ma + m'a' + m''a'' + m'''a''' = (a + a' + a'' + a''')\,g,$$

et en multipliant par 2π les deux membres de l'égalité :

$$2\pi ma + 2\pi m'a' + 2\pi m''a'' + 2\pi m'''a''' = (a + a' + a'' + a''') \times 2\pi g.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

441. Corollaire. — On peut regarder une ligne courbe plane comme une ligne brisée dont tous les côtés sont infiniment petits ; elle a donc un centre de gravité et :

L'aire de la surface engendrée par une ligne courbe plane, tournant autour d'un axe extérieur quelconque appartenant au même plan, et située d'un même côté de l'axe, est égale au produit de sa longueur par la circonférence que décrit son centre de gravité.

442. Exemple. — *Trouver l'expression de l'aire de la surface engendrée par une circonférence de rayon* r, *tournant autour d'une droite de son plan tangente ou extérieure à cette circonférence.*

La surface engendrée est le *tore*. En désignant par d la distance du centre à l'axe et l'aire par s, on trouve :

$$s = 4\pi^2 rd.$$

443. Scolie. — On peut, à l'aide de cette formule, trouver *l'aire de la surface d'un anneau.*

THÉORÈME.

444. *Le volume d'un cône est égal au produit de sa base par le tiers de sa hauteur* (fig. 240).

On définit le volume d'un cône droit la limite vers laquelle tend le volume d'une pyramide régulière inscrite lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de sa base.

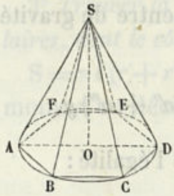

Fig. 240.

On a (248) :

$$\text{volume de la pyramide} = \text{base} \times \frac{1}{3}\,\text{hauteur}.$$

Or, lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de la base de la pyramide, la hauteur de la pyramide reste constamment égale à celle du cône, et la base tend vers sa limite qui est la base du cône, et comme on a aussi :

$$\text{lim. du volume de la pyramide} = \text{lim. de la base} \times \frac{1}{3}\,\text{lim. de la hauteur},$$

on conclut de là :

$$\text{volume du cône droit} = \text{base} \times \frac{1}{3}\,\text{hauteur}.$$

445. Corollaire I. — En désignant par r le rayon de base et par h la hauteur, l'expression du volume est :

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

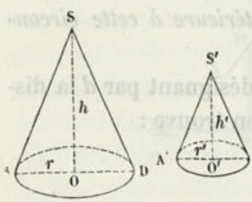

Fig. 241.

446. Corollaire II. — Le rapport des volumes de deux cônes semblables est égal à celui des cubes des rayons et à celui des cubes des hauteurs. En effet, soient (fig. 241) r le rayon de base et h la hauteur d'un cône, r' le rayon de base et h' la hauteur d'un second cône semblable au premier ; le rapport des volumes est égal à

$$\frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h}{\frac{1}{3}\pi r'^2 h'} = \frac{r^2 h}{r'^2 h'} = \frac{r^3}{r'^3} = \frac{h^3}{h'^3}.$$

THÉORÈME.

447. *Le volume d'un tronc de cône droit à bases parallèles est égal à la somme des volumes de trois cônes droits, ayant pour hauteur commune la hauteur du tronc et pour bases, le premier la base supérieure, le deuxième la base inférieure, et le troisième la moyenne proportionnelle entre les deux bases* (fig. 242).

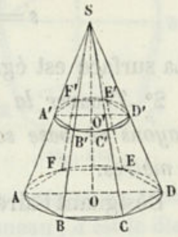

Fig. 242.

Le volume du tronc de cône est la limite vers laquelle tend le volume du tronc de pyramide, qui est la différence des deux pyramides régulières semblables inscrites aux cônes dont le tronc de cône donné est la différence, lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés. B, b, désignant les bases et h la hauteur du tronc de pyramide régulière inscrit,

$$\textit{volume du tronc de pyramide} = \frac{1}{3}h\left(\mathrm{B} + b + \sqrt{\mathrm{B}b}\right). \qquad (253)$$

Lorsque le nombre commun des côtés des deux bases croît indéfiniment, la hauteur reste constamment la même, les bases B et b tendent vers leurs limites qui sont les bases du tronc de cône, et comme on a aussi :

$$\textit{lim. du vol. du tronc de pyramide} = \frac{1}{3}h\left(\textit{lim.}\ \mathrm{B} + \textit{lim.}\ b + \textit{lim.}\sqrt{\mathrm{B}b}\right),$$

on conclut de là, en désignant par R et r les rayons des bases du tronc de cône :

$$\textit{vol. du tronc de cône} = \frac{1}{3}h\ (\pi\mathrm{R}^2 + \pi r^2 + \pi\mathrm{R}r) = \frac{1}{3}\ h\pi\ (\mathrm{R}^2 + r^2 + \mathrm{R}r);$$

expression qui représente bien la somme des volumes de trois cônes ayant pour hauteur commune h et pour bases les cercles dont les rayons sont R et r et le cercle moyen proportionnel de ceux-ci.

448. Exemples. — 1° *Trouver la surface latérale du cône dont le rayon de base est* 3 *mètres et le côté* 5 *mètres.*

Désignant l'aire par s, le rayon par r et le côté par l,

$$s = \pi r l = 3{,}1416 \times 3 \times 5 = 47{,}12.$$

La surface est égale à $47^{mq},12$, à moins d'un décimètre carré.

2° *Trouver la surface latérale du tronc de cône dont les rayons de base sont* 3 *mètres et* 7 *mètres et dont le côté est* 8 *mètres.*

Désignant l'aire par s, les rayons de base par R et r, le côté par l,

$$s = \pi (R + r)\, l = 3{,}1416 \times 10 \times 8 = 251{,}33.$$

La surface est égale à $251^{mq},33$, à moins d'un décimètre carré.

3° *Trouver le volume du cône dont le rayon de base est* 3 *mètres et la hauteur* 8 *mètres.*

Désignant le volume par v, le rayon par r et la hauteur par h,

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times 3{,}14159 \times 9 \times 8 = 75{,}398.$$

Le cône contient $75^{mc},398$, à moins d'un décimètre cube.

4° *Trouver le volume du tronc de cône dont les rayons de base sont* 5 *mètres et* 2 *mètres et la hauteur* 6 *mètres.*

Désignant les rayons par R et r, la hauteur par h et le volume par v,

$$v = \frac{1}{3}\, h\pi (R^2 + r^2 + Rr) = \frac{1}{3} \times 6 \times 3{,}14159 \times 39 = 244{,}944.$$

Le tronc de cône contient $244^{mc},944$, à moins d'un décimètre cube.

APPLICATIONS.

449. *a. Jauger un tonneau.*— L'expression du volume du tronc de cône peut servir à trouver une valeur approchée du volume d'un tonneau,

en regardant celui-ci comme la somme de deux troncs de cône égaux qui, ayant la grande base commune, seraient placés de part et d'autre de celle-ci (fig 243). Mais, dans cette évaluation, on néglige le volume engendré par la révolution des figures BCF, BDE autour de l'axe IH, et on commet une erreur par défaut qui est trop grande pour qu'on puisse la négliger.

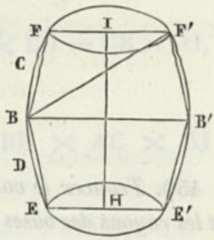

Fig. 243.

Une instruction ministérielle de l'an VII (1799) prescrit l'usage de la formule suivante :

$$V = \left(\frac{2D + d}{3}\right)^3 \times \frac{\pi L}{4}.$$

D représente le plus grand diamètre intérieur, qu'on appelle diamètre du *bouge*, et qu'on mesure en plongeant, par la bonde, un mètre divisé dans le tonneau ; d est le diamètre des fonds, et L leur distance.

b. La formule

$$V = 0{,}605H^3,$$

dans laquelle H représente la longueur de la droite BF′ qui va du trou de la *bonde* au point le plus bas, F′, de l'un des fonds (lorsque l'axe est horizontal), est surtout employée dans les octrois. On gradue une tige en calculant, à l'aide de la formule précédente, les valeurs de V qui répondent aux diverses valeurs de H. On plonge cette tige suivant la direction BF′, et la graduation de la tige fait connaître immédiatement la valeur correspondante de V.

c. *Mesurer un arbre en grume.* — L'arbre dépouillé de ses branches et conservant encore son écorce est un *arbre en grume*. Le tronc d'arbre à mesurer a ordinairement la forme d'un tronc de cône. Au lieu d'employer la formule du volume de celui-ci, on emploie la formule :

$$V = \pi\left(\frac{R + r}{2}\right)^2 H,$$

R et r étant les rayons des deux bases du tronc et H la longueur de celui-ci. On mesure avec un cordon métrique la longueur de la circonférence résultant d'une section faite à égale distance des deux bases, et si C désigne cette circonférence, son rayon, qui est égal à $\frac{R+r}{2}$, sera exprimé par $\frac{C}{2\pi}$, et la formule deviendra :

$$V = \pi \cdot \frac{C^2}{4\pi^2} H = \frac{4\pi}{C^2 H}.$$

PROBLÈME.

450. *Trouver le volume d'un manchon conique dont la hauteur et les rayons des bases sont donnés.*

On donne le nom de *manchon conique*, au corps qui est la différence de deux troncs de cône de même axe et de même hauteur, et appartenant eux-mêmes à des cônes semblables.

Soient h la hauteur commune, R et r les rayons de base du plus grand des deux troncs de cône, R' et r' les rayons de base de l'autre; on aura, en désignant par V le volume du manchon conique :

$$V = \frac{1}{3} h\pi (R^2 + r^2 + Rr - R'^2 - r'^2 - R'r').$$

THÉORÈME.

451. *Le volume engendré par la révolution d'un triangle autour d'un de ses côtés, est égal au produit de l'aire de la surface engendrée par l'un des deux autres côtés, multipliée par le tiers de la hauteur correspondante à celui-ci.*

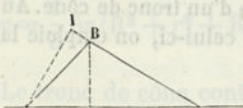

Fig. 244.

Soient le triangle ABC, BD la hauteur correspondante au côté AB (fig. 244). Le volume engendré par le triangle ABC tournant autour de AC est la somme des cônes engendrés par les triangles rectangles ABD, CBD. Le volume du premier est $\frac{1}{3}\pi \overline{BD}^2 \times AD$; le volume du second est $\frac{1}{3}\pi \overline{BD}^2 \times DC$; donc, en désignant par vol. ABC le volume du cône engendré par ABC,

$$\text{vol. ABC} = \frac{1}{3}\pi\overline{BD}^2 \times AD + \frac{1}{3}\pi\overline{BD}^2 \times DC = \frac{1}{3}\pi\overline{BD}^2 \times AC.$$

Si l'on abaisse la hauteur AI, comme $AC \times BD = CB \times AI$, on a :

$$\frac{1}{3}\pi\overline{BD}^2 \times AC = \frac{1}{3}\pi BD \times BD \times AC = \frac{1}{3}\pi BD \times AC \times AI$$

$$= \pi BD \times CB \times \frac{1}{3} AI.$$

Or, $\pi BD \times CB$ est l'aire de la surface latérale du cône engendré par CB ; par conséquent

$$\text{vol. ABC} = \text{aire CB} \times \frac{1}{3} AI.$$

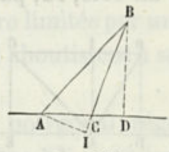

Fig. 245.

Si la perpendiculaire BD tombait hors du triangle (fig. 245), le volume engendré par celui-ci, au lieu d'être la somme des deux cônes ABD, CBD serait leur différence, et l'on déduirait de l'expression $\frac{1}{3}\pi\overline{BD}^2 \times AC$ le même théorème.

THÉORÈME.

452. *Le volume du corps engendré par la révolution d'un triangle autour d'une droite, tracée dans son plan par un de ses sommets et hors du triangle, est égal au produit de l'aire de la surface engendrée par le côté opposé à ce sommet, multipliée par le tiers de la hauteur correspondante.*

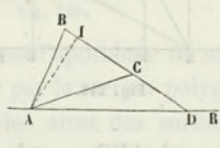

Fig. 246.

1° Soient (fig. 246), le triangle ABC, AR une droite tracée par le point A dans le plan du triangle et hors du triangle. Supposons que le côté CB rencontre AR au point D. Le volume du corps engendré par le triangle ABC, dans sa révolution autour de AR, est la différence des volumes des corps engendrés par les triangles ADB, ADC dans leur révolution autour de AR. Abaissant la hauteur AI, on a :

$$\text{vol. ABC} = \text{vol. ADB} - \text{vol. ADC} = \text{aire DB} \times \frac{1}{3}\text{AI} - \text{DC}$$
$$\times \frac{1}{3}\text{AI} = \text{aire BC} \times \frac{1}{3}\text{AI}.$$

2° Supposons que le côté BC du triangle, opposé au sommet A placé sur l'axe, soit parallèle à l'axe.

Considérons d'abord un triangle rectangle AIC, dont le sommet d'un angle aigu A, placé sur l'axe AR (fig. 247), est opposé à un côté, IC, parallèle à cet axe. Abaissons du point C la perpendiculaire CE sur AR. Le triangle rectangle AIC en tournant en même temps que le rectangle AICE, autour de AR, engendre un cône qui est le tiers du cylindre engendré par le rectangle AICE. Le volume du corps engendré par la révolution du triangle AIC est donc les deux tiers de ce cylindre et a pour expression :

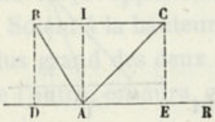

Fig. 247.

$$\frac{2}{3}\pi\overline{\text{AI}}^2 \times \text{AE ou } 2\pi\text{AI} \times \text{CI} \times \frac{1}{3}\text{AI} = \text{aire CI} \times \frac{1}{3}\text{AI}.$$

Supposons en second lieu un triangle quelconque ABC, tournant autour d'un axe AR parallèle au côté BC opposé au sommet A, placé sur cet axe.

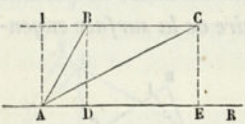

Fig. 248.

1° Si la perpendiculaire AI abaissée du sommet A sur BC tombe dans l'intérieur du triangle (fig. 247), on a :

$$\text{vol. ABC} = \text{vol. ACI} + \text{vol. ABI} = \text{aire CI} \times \frac{1}{3}\text{AI}$$
$$+ \text{aire BI} \times \frac{1}{3}\text{AI} = \text{aire BC} \times \frac{1}{3}\text{AI}.$$

2° Si la perpendiculaire AI tombe hors du triangle (fig. 248), on a :

$$\text{vol. ABC} = \text{vol. ACI} - \text{vol. ABI} = \text{aire CI} \times \frac{1}{3}\text{AI} - \text{aire BI} \times \frac{1}{3}\text{AI} = \text{aire BC} \times \frac{1}{3}\text{AI}.$$

THÉORÈME.

453. *Le volume engendré par la révolution d'un secteur polygonal régulier autour d'un axe tracé dans son plan, par son centre et hors du secteur, est égal au produit de l'aire de la surface engendrée par la ligne brisée régulière qui est la base du secteur, multipliée par le tiers de l'apothème.*

On nomme *secteur polygonal régulier* la figure limitée par une ligne brisée régulière plane et les rayons qui aboutissent à ses extrémités

Soient XY l'axe, OABCDE, un secteur polygonal régulier (fig. 249), dont le centre O est placé sur l'axe XY, extérieur à ce secteur, et dont l'apothème est OI. Si l'on joint le centre à tous les sommets de la ligne brisée régulière, on voit que le secteur est composé d'autant de triangles isocèles égaux que la ligne brisée a de côtés. Ces triangles ont pour sommet commun le centre O, et pour bases les côtés de la ligne brisée. Le volume du corps engendré par chaque triangle est égal au produit de l'aire de la surface engendrée par sa base multipliée par le tiers de sa hauteur, qui est l'apothème du secteur. Donc le volume du corps engendré par le secteur polygonal est égal au produit de la somme des aires des surfaces engendrées par les côtés de la ligne brisée, multipliée par le tiers de l'apothème, ou bien à l'aire de la surface engendrée par la ligne brisée, multipliée par le tiers de l'apothème.

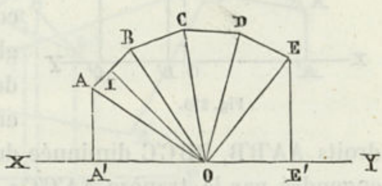

Fig. 249.

Abaissons des points A et E les perpendiculaires AA′, EE′ sur l'axe XY; l'aire de la surface engendrée par la ligne brisée est $2\pi \mathrm{OI} \times \mathrm{A'E'}$ (438); et, par conséquent,

$$\text{vol. OABCDE} = \frac{2}{3}\pi\overline{\mathrm{OI}}^2 \times \mathrm{A'E'};$$

et, en désignant le volume par v, l'apothème par r et la projection de la ligne brisée sur l'axe par l,

$$v = \frac{2}{3}\pi r^2 l.$$

THÉORÈME.

454. *Le volume du corps engendré par la révolution d'un polygone plan, autour d'un axe extérieur situé dans son plan, est égal au produit de son aire par la circonférence que décrit son centre de gravité.* (Théorème de Guldin.)

1° Soient le triangle ABC et XY un axe extérieur tracé dans son plan (fig. 250). Abaissons sur XY les perpendiculaires AA′, BB′, CC′, que nous désignerons par a, b, c. Le volume du corps engendré par le triangle ABC est égal à la somme des volumes des troncs de cône engendrés par les trapèzes droits AA′B′B, BB′C′C diminuée du volume du tronc de cône engendré par le trapèze AA′C′C:

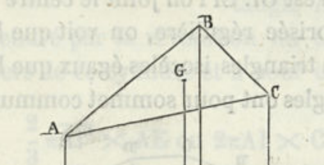

Fig. 250.

$$\text{vol. ABC} = \text{vol. AA'B'B} + \text{vol. BB'C'C} - \text{vol. AA'C'C}.$$

ou

$$\text{vol. ABC} = \frac{1}{3}\pi(a^2 + b^2 + ab)\,\mathrm{A'B'} + \frac{1}{3}\pi(b^2 + c^2 + bc)\,\mathrm{B'C'}$$
$$- \frac{1}{3}\pi(a^2 + c^2 + ac)\,\mathrm{A'C'};$$

ou encore, en remplaçant A'C' par A'B' + B'C':

$$\text{vol. ABC} = \pi\left(\frac{a+b+c}{3}\right)[(b-c)\,\text{A'B'} + (b-a)\,\text{B'C'}]$$

$$= \pi\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \times 2 \text{ aire ABC};$$

car

$$\text{aire ABC} = \frac{a+b}{2}\text{A'B'} + \frac{b+c}{2}\text{B'C'} - \frac{a+c}{2}\text{A'C'}$$

$$= \frac{b-c}{2}\text{A'B'} + \frac{b-a}{2}\text{B'C'};$$

et comme la distance GG' du centre de gravité G du triangle ABC à l'axe est égale à

$$\frac{a+b+c}{3},$$

on trouve enfin :

$$\text{vol. ABC} = 2\pi\text{GG'} \times \text{aire ABC}.$$

2° Soient le polygone plan ABCDE (fig. 251) et un axe extérieur XY situé dans son plan. Tirons les diagonales AC, AD,

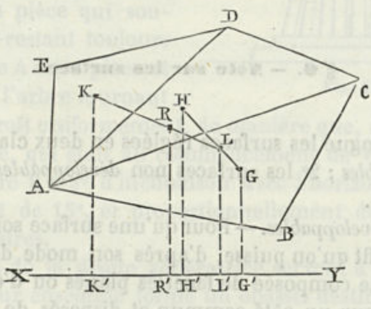

Fig. 251.

et soient G, H, K les centres de gravité des triangles ABC, ACD, ADE. Nous désignerons par g, h, k leurs distances GG', HH', KK' à l'axe. On a :

$$\text{vol. ABCDE} = \text{vol. ABC} + \text{vol. ACD} + \text{vol. ADE} = 2\pi g \times \text{ABC}$$
$$+ 2\pi h \times \text{ACD} + 2\pi k \times \text{ADE}.$$

Or, R étant le centre de gravité du polygone ABCDE, on a (108), en désignant la distance RR′ par r :

$$2\pi g \times \mathrm{ABC} + 2\pi h \times \mathrm{ACD} + 2\pi k \times \mathrm{ADE} = 2\pi r \times \mathrm{ABCDE}.$$

455. Corollaire. — En regardant une courbe plane comme un polygone dont tous les côtés sont infiniment petits, le centre de gravité d'une figure plane limitée par une ligne courbe est donc un point déterminé, et on conclut de ce qui précède que :

Le volume du corps engendré par la révolution d'une figure plane quelconque, autour d'un axe extérieur tracé dans son plan, est égal au produit de son aire par la circonférence que décrit son centre de gravité.

456. Exemple. — Le volume engendré par la révolution d'un cercle, autour d'un axe extérieur ou tangent, est égal à $2\pi^2 r^2 l$, en désignant par r le rayon et par l la distance du centre à l'axe.

457. Scolie. — On peut déduire de cette expression le *volume d'un anneau.*

§ 6. — Note sur les surfaces.

458. On distingue les surfaces réglées en deux classes : 1° les *surfaces développables* ; 2° les surfaces non *développables*, qu'on nomme *surfaces gauches.*

a. Surfaces développables. — Pour qu'une surface soit développable, il faut et il suffit qu'on puisse, d'après son mode de génération, la regarder comme composée de facettes planes ou d'éléments plans, ayant deux à deux un côté commun et disposés de telle sorte que l'un des éléments puisse s'appliquer sur le plan de l'élément voisin, après avoir tourné autour du côté commun ; que la figure formée de ces deux éléments puisse s'appliquer sur un élément voisin, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'après avoir réuni tous les éléments, à l'exception d'un seul, en une figure plane, celle-ci puisse s'appliquer sur le plan du dernier élément. Nous en avons des exemples dans les surfaces cylindriques et coniques.

c. SURFACES GAUCHES. — *Ailes de moulins à vent* (fig. 252). Les moulins à vent sont composés, 1° d'un arbre tournant B, incliné à l'horizon de 8 à 15 degrés ; 2° de quatre pièces de bois BC, BD, BE, BF de 12 mètres de longueur chacune, perpendiculaires à l'arbre B et fixées à l'arbre vers son extrémité supérieure ; ces pièces soutiennent quatre ailes.

Chaque aile commence à 2 mètres de l'arbre tournant B et se termine à l'extrémité de la pièce de bois qui la soutient ; par conséquent elle a 10 mètres de longueur ; la largeur est d'un peu plus de 2 mètres. Selon *Monge* et *Hachette* on peut regarder chaque aile comme une surface gauche engendrée par le mouvement d'une ligne droite perpendiculaire à la pièce par laquelle est soutenue l'aile, et qui, lorsqu elle se trouve à l'origine de l'aile, c'est-à-dire le plus près de l'arbre tournant, forme avec celui-ci un angle de 60° ; parcourt ensuite avec un mouvement uniforme toute la longueur de la pièce qui soutient l'aile, en restant toujours perpendiculaire à cette pièce et en faisant avec l'arbre tournant un angle qui croît uniformément, de manière que, à l'extrémité de l'aile, cet angle, qui était au commencement de 60°, soit devenu de 78°, si l'arbre B a 8° d'inclinaison avec l'horizon, ou de 84°, si l'inclinaison est de 15°, et proportionnellement dans les inclinaisons intermédiaires.

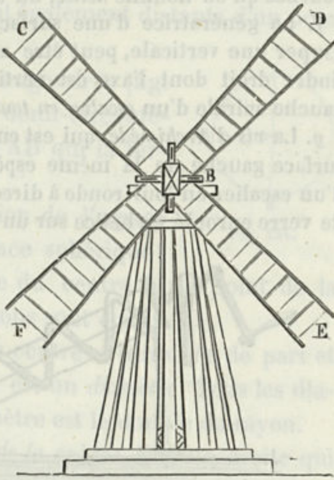

Fig. 252.

Les positions de la droite génératrice servent à fixer celles des traverses, et leur ensemble forme un châssis destiné à recevoir la voile qui doit former l'aile.

On peut aussi regarder chacune des quatre ailes comme une surface gauche engendrée par le mouvement d'une ligne droite perpendiculaire à la pièce qui soutient l'aile, et assujettie à toucher, dans toutes ses positions, la ligne droite menée par les extrémités correspondantes de la position que la ligne droite génératrice doit avoir dans les deux extrémités de l'aile.

d. Les *versoirs* ou *oreilles des charrues* sont des surfaces gauches engendrées par une droite assujettie à rester constamment parallèle à un plan incliné qui coupe le sol parallèlement au sillon, et à s'appuyer sur deux directrices qui sont : une horizontale perpendiculaire à la direction du sillon, et une droite inclinée située dans un plan vertical parallèle à l'horizontale.

e. Le *dessous d'un escalier tournant à noyau ou à jour* est une surface gauche qui a pour génératrice une droite horizontale qui, dans son mouvement, s'appuie sur une verticale et sur une de ces courbes qu'on nomme *hélice*, ou *spirale cylindrique*.

f. La génératrice d'une surface gauche d'escalier, au lieu de couper une verticale, peut être assujettie à être tangente à un cylindre droit dont l'axe est vertical. On obtient alors la surface gauche spirale d'un *escalier en tour ronde*.

g. La *vis d'Archimède*, qui est employée à élever les eaux, est une surface gauche de la même espèce que la surface gauche spirale d'un escalier en tour ronde à directrice rectiligne (fig. 253). Un tube de verre enroulé en hélice sur un cylindre peut recevoir un mouve-

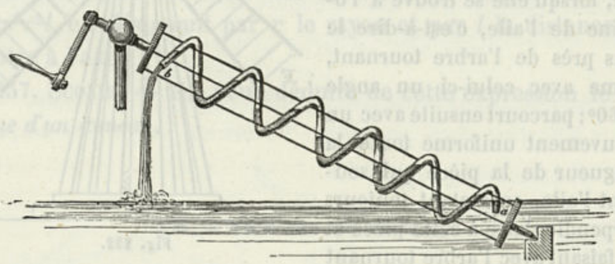

Fig. 253.

ment de rotation autour de l'axe du cylindre à l'aide d'une manivelle. On place l'appareil dans une position inclinée de manière qu'en le faisant tourner, l'extrémité inférieure du tube plonge dans l'eau, puis en sorte, pour y pénétrer de nouveau, et ainsi de suite. Au moment où l'extrémité du tube sort de l'eau, le tube contient une certaine quantité de liquide qui se trouve ainsi isolée et qui, pendant la rotation de la machine, vient à chaque instant occuper la partie inférieure de la spire dans laquelle elle est engagée. L'eau contenue dans le tube marche donc progressivement le long du cylindre et finit par s'écouler à sa partie supérieure.

§ 7 — Sphère.

DÉFINITIONS.

459. 1° On nomme *surface sphérique* une surface courbe, fermée, dont tous les points sont également distants d'un point intérieur qu'on appelle *centre*.

2° La surface sphérique est engendrée (fig. 254) par la révolution d'une demi-circonférence AMB autour du diamètre AB qui la termine (296).

Fig. 254.

3° On nomme *sphère*, la portion de l'espace ou le corps limité par la surface sphérique ;

4° *Rayon*, toute droite menée du centre à un point de la surface sphérique. Tous les rayons sont égaux.

5° Toute droite menée par le centre et terminée de part et d'autre à la surface sphérique, est un *diamètre*. Tous les diamètres sont égaux, car un diamètre est le double du rayon.

6° On donne le nom de *corde de la sphère*, à toute droite qui joint deux points de la surface sphérique.

7° On nomme *surface convexe*, toute surface qui ne peut pas être rencontrée par une ligne droite en plus de deux points. La surface sphérique est *convexe*, car si elle était rencontrée par une droite en plus de deux points, on pourrait mener du centre à cette droite plus de deux droites égales, ce qui est impossible (*Géométrie plane*, **30**.)

THÉORÈME.

460. *L'intersection d'une surface sphérique et d'un plan est une circonférence de cercle.*

Soient M, N deux points de l'intersection de la sphère O et du plan L (fig. 255). Du centre O de la surface sphérique abaissons la perpendiculaire OA sur le plan L et soit A le pied de cette perpendiculaire. Joignons les points M et N au point A.

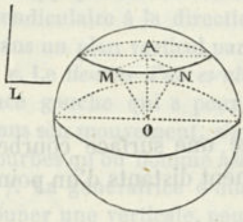

Fig. 215.

Les obliques OM, ON sont égales comme rayons ; donc elles s'écartent également du pied A de la perpendiculaire (21), c'est-à-dire que les distances AM, AN sont égales. Par conséquent deux points quelconques de la ligne qui est l'intersection de la surface sphérique O et du plan L, sont à égales distances du point A. Donc cette ligne (qui est plane) est une circonférence de cercle, dont le centre est le pied A de la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan L.

461. Corollaire I. — Lorsque la surface sphérique est coupée par un plan passant par le centre, la section est une circonférence d'un rayon égal à celui de la sphère. On donne le nom de *grands cercles de la sphère* aux cercles correspondants. *Tous les grands cercles de la sphère sont donc égaux*, *puisqu'ils ont tous le même rayon, celui de la sphère.*

On donne le nom de *petits cercles* à ceux des sections sphériques faites par des plans qui ne passent pas par le centre.

462. Corollaire II. — *Deux grands cercles se coupent mutuellement en deux parties égales.* Car l'intersection commune de leurs plans est un diamètre de chacun d'eux.

463. Corollaire III. — *Deux points d'une surface sphérique déterminent généralement une circonférence de grand cercle.*

Car, si les deux points donnés ne sont pas situés sur un même diamètre, ces deux points et le centre déterminent un plan qui est celui d'un grand cercle.

Si les deux points sont les extrémités d'un même diamètre, on peut faire passer par ces deux points une infinité de circonférences de grands cercles.

464. Corollaire IV. — *Le centre d'un petit cercle et celui de la sphère sont situés sur une même perpendiculaire au plan du petit cercle.*

465. *Exemples d'une sphère.* — Les balles, les boulets, les obus, les billes de billard, etc., sont des sphères.

PROBLÈME.

466. *Dessiner une sphère de rayon donné* (fig. 256).

Soient XY la ligne de terre, O et O′ les projections du centre. La circonférence du grand cercle parallèle au plan horizontal se projette en vraie grandeur sur ce plan. La circonférence décrite du point O, comme centre, sur le plan horizontal, avec le rayon donné, est donc la projection horizontale de cette circonférence. Pour la même raison, la circonférence décrite du point O′, comme centre sur le plan vertical, avec le rayon donné, est la projection verticale de la circonférence de grand cercle dont le plan est parallèle au plan vertical. En outre, il est évident que les projections horizontales de tous les points de la surface sphérique sont situées sur la circonférence O, ou dans l'intérieur de cette circonférence; et les projections verticales sur la circonférence O′, ou dans l'intérieur de cette circonférence. Les deux circonférences O et O′, et la droite OO′, constituent ce que l'on nomme *le dessin complet ou l'épure de la sphère.*

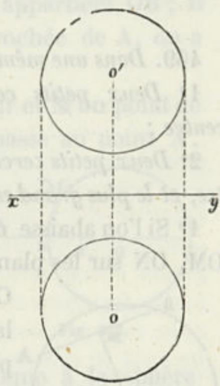

Fig. 256.

THÉORÈME.

467. *Tout grand cercle divise la surface sphérique et la sphère en deux parties égales* (fig. 257).

Soient AMB un grand cercle de la sphère O, ANB, APB les deux parties dans lesquelles il divise la surface. Si on retourne la portion APB, pour la placer du même côté du plan AMB que la portion ANB en faisant coïncider les circonférences égales qui limitent les deux surfaces, les portions ANB, APB coïncideront ; car s'il en était au-

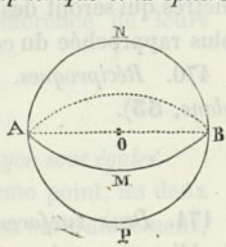

Fig. 257.

trement, il y aurait dans l'une ou l'autre partie des points inégalement distants du centre.

468. Scolie. — On donne le nom d'*hémisphère* aux deux portions d'une sphère divisée par un grand cercle, et celui de *surfaces hémisphériques* aux deux portions correspondantes de la surface sphérique.

THÉORÈME.

469. *Dans une même sphère ou dans deux sphères égales.*

1° *Deux petits cercles égaux sont également éloignés du centre ;*

2° *Deux petits cercles inégaux sont inégalement éloignés du centre, et le plus grand est le plus rapproché* (fig. 258).

1° Si l'on abaisse du centre de la sphère les perpendiculaires OM, ON sur les plans de chacun des petits cercles égaux AB, CD, le plan de ces perpendiculaires coupera la sphère suivant un grand cercle, et les petits cercles suivant deux diamètres qui seront des cordes égales du grand cercle et par conséquent également éloignées du centre ;

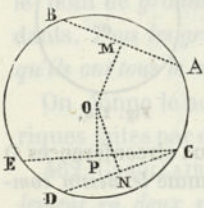

Fig. 258.

2° Soient AB et CE deux petits cercles inégaux. Le plan des deux perpendiculaires OM, OP abaissées du centre sur ces cercles coupera la sphère suivant un grand cercle et les petits cercles suivant deux diamètres qui seront des cordes inégales; et la plus longue sera la plus rapprochée du centre.

470. *Réciproques.* Les réciproques sont vraies (*Géom. plane*, 53).

THÉORÈME.

471. *Deux surfaces sphériques qui ont le même centre sont équidistantes et leur distance est égale à la différence de leurs rayons* (fig. 259).

On nomme *distance d'un point à une surface sphérique*, la plus petite des deux distances du point aux extrémités du diamètre qui passe par celui-ci. Cette ligne est la plus courte qu'on puisse mener du point à la surface sphérique. En effet soient A un point extérieur à la sphère O, et M un point de la surface sphérique ; OB le rayon qui passe au point A. Considérons la circonférence de grand cercle dont le plan est déterminé par le point M et le diamètre auquel appartient OB ; B étant l'extrémité du diamètre la plus rapprochée de A, on a (*Geométrie plane*, **136**) : $AB < AM$.

Soient en second lieu A′ un point intérieur et M un point de la surface sphérique ; OB le rayon qui passe au point A′. Considérons la circonférence de grand cercle dont le plan est déterminé par le point M et le diamètre auquel appartient OB ; B étant l'extrémité du diamètre la plus rapprochée de A′, on a (*Géométrie plane*, **136**) : $A'B < A'M$.

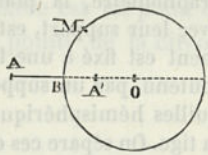

Fig. 259.

Si l'on considère une sphère concentrique à la sphère dont le rayon est OB, décrite avec le rayon OA ou le rayon OA′, la distance d'un point quelconque de l'une des surfaces sphériques OB, OA ou OB, OA′ sera évidemment égale à la différence de leurs rayons.

472. Corollaire. — *Deux sphères concentriques peuvent, sans que leurs surfaces cessent d'être équidistantes, tourner chacune autour de son centre dans tous les sens* ; car la distance des deux surfaces sera constamment égale à la différence de leurs rayons.

THÉORÈME.

473. *Deux surfaces sphériques de même rayon sont égales.*

En effet, si l'on place leurs centres au même point, les deux surfaces doivent coïncider, parce que, s'il en était autrement, il y aurait dans l'une ou dans l'autre des points inégalement distants du centre.

474. Corollaire. — La coïncidence de deux surfaces sphériques de même rayon a évidemment toujours lieu, lorsque, après avoir placé leurs centres au même point, on fait tourner l'une d'elles autour de ce point ; par conséquent

Deux sphères concentriques de même rayon, dont l'une est en relief et l'autre creuse, ne cessent pas de se toucher partout, quels que soient les mouvements qu'on leur imprime sans déranger les centres.

APPLICATION.

475. *Emboîtement à genou, graphomètre à genou.*

L'*emboîtement à genou*, ou le *genou à coquille*, au moyen duquel le graphomètre, la planchette et d'autres instruments s'articulent avec leur support, est une application du corollaire (474). L'instrument est fixé à une tige terminée par une sphère pleine, et il est soutenu par un support armé, à sa partie supérieure, de deux coquilles hémisphériques de même rayon que la sphère qui termine la tige. On sépare ces coquilles pour introduire entre elles la sphère, et on resserre ensuite les coquilles à l'aide d'une vis de pression. On peut de cette manière donner au plan de l'instrument une direction quelconque.

THÉORÈME.

476. *Le plus court chemin pour aller d'un point à un autre, sur la surface sphérique, est le plus petit des deux arcs de grands cercles qui joignent ces deux points* (fig. 260).

Soient AMB le plus petit des deux arcs de grand cercle terminés aux points A et B de la surface sphérique O, ANB une ligne courbe continue quelconque tracée sur la surface sphérique du point A au point B. Concevons une surface conique ayant pour sommet le centre O et pour directrice la courbe ANB. Développons cette surface sur le plan du grand cercle, dont la circonférence passe par A et B. Soit OA'B le secteur qui représente ce développement ; l'arc A'B représentera le dé-

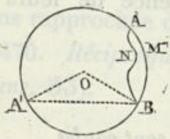

Fig. 260.

veloppement de la courbe ANB. Or la corde A'B n'est pas moindre que la corde AB, car si l'on fait reprendre à la surface développée sa première figure, la corde A'B sera représentée sur la surface par une ligne continue terminée aux points A et B, et, par conséquent, elle ne peut pas être moindre que la corde AB. Par suite l'arc A'B ou la courbe ANB, qui lui est égale, n'est pas moindre que l'arc AB. Donc *cet arc est le plus court chemin pour aller, sur la surface sphérique, du point* A *au point* B.

DÉFINITION.

477. — Le *pôle* d'un cercle de la sphère est un point de la surface également éloigné de tous les points de la circonférence de ce cercle.

THÉORÈME.

478. *Les extrémités du diamètre de la sphère perpendiculaire au plan d'un cercle sont les pôles de ce cercle et de tous les cercles parallèles à celui-ci* (fig. 261).

Supposons le diamètre DE perpendiculaire au petit cercle AC; comme il passe par le centre C (464), les points D, E sont à des distances rectilignes égales de chacun des points de la circonférence C (23); et si l'on fait passer des arcs de grands cercles par le diamètre DE et par les points de la circonférence C, les arcs de grands cercles menés du point D ou du point E à chacun de ces points seront égaux, puisqu'ils seront sous-tendus par des cordes égales.

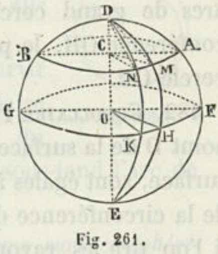

Fig. 261.

Le même raisonnement pourra être appliqué au grand cercle et aux petits cercles parallèles au petit cercle AC, puisqu'ils sont aussi perpendiculaires au diamètre DE de la sphère.

479. Corollaire I. — Tout cercle grand ou petit a deux pôles, et ne peut pas en avoir davantage : en effet qu'on suppose égales soit les distances rectilignes, soit les distances circulaires, comme l'égalité des unes entraîne celle des autres, les pôles d'un cercle doivent se trouver sur le diamètre de la sphère perpendiculaire au plan de ce cercle.

480. Corollaire II. — Les distances circulaires du pôle d'un grand cercle aux différents points de la circonférence de celui-ci, sont des quadrants ; car chacun de ces arcs mesure un angle droit. Ainsi le grand cercle OH étant perpendiculaire au diamètre DE, un arc tel que DH, par exemple, mesure un angle DOH qui est droit. En outre, les plans de ces arcs sont perpendiculaires au plan du grand cercle, car ils contiennent tous le diamètre DE perpendiculaire à celui-ci. On dit alors que chacun de ces arcs est perpendiculaire à la circonférence du grand cercle OH.

481. Corollaire III. — De là résulte un moyen de déterminer le pôle d'un grand cercle. Soit OH le grand cercle donné ; au point H on élève sur la circonférence un arc de grand cercle perpendiculaire, et on prend sur celui-ci un arc HD égal à un quadrant ; le point D est un des pôles du cercle OH. On peut aussi mener par les points F et H les arcs de grand cercle FD, HD perpendiculaires sur la circonférence OH, le point de concours D est un des pôles du cercle OH.

482. Corollaire IV. — *Réciproquement*, si les distances d'un point D de la surface sphérique à deux points F et H de cette surface, sont égales à un quadrant, le point D est un des pôles de la circonférence de grand cercle qui passe par F et H ; car si l'on tire les rayons OF, OH, les angles DOF, DOH étant droits, le diamètre qui passe au point D est perpendiculaire au plan FOH. En outre les arcs DF, DH sont perpendiculaires sur l'arc FH.

483. Corollaire V. — Si l'on fait tourner l'arc DA autour du point D, le point A décrira la circonférence CA, et si l'on

fait tourner le quadrant DH autour du point D, le point H décrira la circonférence de grand cercle OH.

De là résulte le moyen de tracer sur la surface de la sphère des arcs de circonférence avec le compas.

DÉFINITIONS.

484. Nous appellerons *distance polaire* d'une circonférence, la distance rectiligne d'un point de cette circonférence à son pôle ; et *rayon polaire* d'une circonférence, l'arc de grand cercle mené d'un point de cette circonférence à son pôle.

PROBLÈME.

485. *Tracer un grand cercle sur une surface sphérique.*

On se sert d'un compas à *branches courbes*, dit *compas d'épaisseur* (fig. 262), à cause de la convexité de la sphère. On donne aux deux pointes un écartement égal à la corde du quadrant (le côté du carré inscrit) et, après avoir fixé l'une des pointes, on fait tourner l'autre pointe autour de celle-ci, en la maintenant appuyée sur la surface sphérique.


Fig. 262.

486. Scolie. — Le même procédé peut servir à tracer une circonférence d'un rayon polaire quelconque. On donne aux deux pointes du compas un écartement égal à la corde qui sous-tend l'arc de grand cercle égal au rayon polaire.

487. Corollaire I. — *Par deux points d'une surface sphérique, faire passer une circonférence de grand cercle.*

On décrit des deux points comme pôles, une circonférence de grand cercle. Ces deux circonférences se coupent en deux points qui sont les pôles de la circonférence de grand cercle passant par les deux points donnés. La circonférence de grand cercle décrite de l'un de ces points comme pôle est la circonférence demandée.

488. Corollaire II. — *Tracer un cercle qui passe par trois points donnés sur une surface sphérique* (fig. 263).

Soient A, M, N les trois points donnés. Des points A et M comme pôles, et avec des rayons polaires suffisamment grands, on décrit deux arcs qui se coupent en deux points appartenant au plan mené perpendiculairement à la corde AM par son milieu. Donc le plan du grand cercle mené par ces deux points se confond avec ce dernier plan. On détermine de la même manière le grand cercle dont le plan est perpendiculaire sur le milieu de la corde AN. Le diamètre DE, intersection de ces deux grands cercles, a pour extrémités D et E, les pôles du cercle qui passe par A, M, N. On décrit donc une circonférence du point D ou du point E comme pôle, avec un rayon polaire égal à la distance de ce point à l'un des points A, M, N.

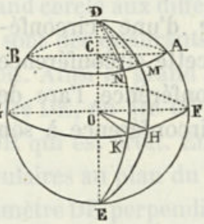

Fig. 263.

489. Corollaire III. — Pour mener par un point donné M d'une surface sphérique, un arc de grand cercle perpendiculaire sur un arc de grand cercle donné FH (fig. 263) ; on prolonge, s'il est besoin, celui-ci (485), et du point M comme pôle, on décrit un arc de grand cercle qui coupe l'arc FH. Du point K d'intersection, comme pôle, on décrit ensuite l'arc de grand cercle MH, qui est l'arc demandé.

PROBLÈME.

490. *Trouver le rayon d'une sphère solide* (fig. 264).

On prend arbitrairement deux points A et B de la surface de la sphère donnée. De chacun de ces points, comme pôle, et avec des rayons polaires égaux et suffisamment grands, on décrit deux arcs qui se coupent en M et M′ ; et ensuite des mêmes points A et B comme pôles, avec d'autres rayons égaux et suffisamment grands, deux arcs qui se coupent en deux points dont l'un est M″. Les trois points M, M′, M″ appartiennent au plan perpendiculaire sur le milieu de la corde AB ; par conséquent le triangle MM′M″, formé en joignant deux à deux par des droites les trois points M, M′, M″, est inscrit à la circonférence d'un grand cercle. On reporte sur un plan avec le compas les trois distances rectilignes MM′, M′M″, M″M pour construire le triangle qui a pour côtés ces trois droites, et on circonscrit une circonférence à ce triangle. Le rayon de cette circonférence est égal à celui de la sphère donnée.

Fig. 264.

THÉORÈME.

491. *Quatre points non situés dans un même plan déterminent une surface sphérique* (fig. 265).

Soient A, B, C, D, quatre points non situés dans un même plan. Trois quelconques d'entre eux ne sauraient être en ligne droite ; car, s'il en était autrement, les quatre points seraient dans un même plan.

Par les trois points A, B, C, faisons passer une circonférence O, et par les trois points A, B, D une seconde circonférence O′. La droite AB sera une corde commune à ces deux circonférences, et les perpendiculaires abaissées respectivement des centres O et O′ sur AB, rencontreront celle-ci en son milieu I. Le plan des droites OI, O′I est perpendiculaire sur la droite AB, et par conséquent sur les plans de chacun des cercles O et O′. La perpendiculaire élevée sur le plan du cercle O par son centre est le lieu des points également éloignés de tous les points de la circonférence O ; pareillement la perpendiculaire élevée sur

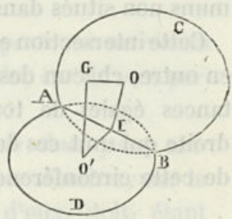

Fig. 265.

le plan du cercle O′ par son centre est le lieu des points également éloignés de tous les points de la circonférence O′. Ces deux droites se rencontrent, car elles sont situées dans le plan OIO′ (75), et elles sont en outre perpendiculaires à deux droites concourantes OI, O′I. Donc le point de rencontre G de ces droites est le centre d'une sphère qui passe par les quatre points A, B, C, D.

Toute autre sphère qui passera par ces quatre points se confondra avec la première, car le centre d'une seconde sphère passant par les quatre points A, B, C, D doit se trouver sur chacune des deux perpendiculaires élevées par les centres des cercles O et O′ sur les plans de ces cercles, et par conséquent au point de concours G de ces droites. En outre, les deux sphères passant par les points A, B, C, D auront aussi le même rayon, par conséquent elles se confondront en une seule.

492. Corollaire. — *L'intersection de deux surfaces sphériques est une circonférence de cercle, dont le plan est perpendiculaire à la droite qui unit les centres et dont le centre est sur cette droite.*

En effet, d'abord, l'intersection est une ligne plane, car deux surfaces sphériques ne peuvent pas avoir quatre points communs non situés dans un même plan sans se confondre.

Cette intersection est donc une circonférence de cercle (460); en outre, chacun des centres des deux sphères étant à des distances égales de tous les points de cette circonférence, la droite qui unit ces deux centres est la perpendiculaire au plan de cette circonférence menée par son centre.

DÉFINITION.

493. On nomme *plan tangent* à une surface sphérique, le plan qui n'a qu'un seul point commun avec cette surface.

THÉORÈME.

494. *Le plan tangent à une surface sphérique est perpendiculaire au rayon mené au point de contact.*

Soient (fig. 266) la surface sphérique O, P le plan tangent et A le point de contact. Tous les points du plan P, à l'exception du point A, étant situés hors de la sphère, le rayon OA est la droite la plus petite qu'on puisse mener du point O au plan; par conséquent OA est perpendiculaire au plan.

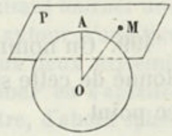

Fig. 266.

495. *Réciproquement. Le plan perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon est tangent à la surface sphérique.*

Soient (*fig.* 266) O, la surface sphérique, P un plan mené perpendiculairement au rayon OA, par son extrémité A. Tout point du plan P, autre que le point A, est extérieur à la surface sphérique; en effet, un quelconque de ces points, M par exemple, est à une distance OM du centre, plus grande que le rayon OA, puisque l'oblique OM est plus grande que la perpendiculaire OA.

496. COROLLAIRE I. — *La perpendiculaire abaissée du centre d'une surface sphérique sur un plan tangent passe au point de contact.*

497. COROLLAIRE II. — *La perpendiculaire élevée sur un plan tangent au point de contact passe par le centre de la surface sphérique.*

498. COROLLAIRE III. — *a. Deux plans tangents aux extrémités d'un même diamètre de la sphère sont parallèles,* car ils sont perpendiculaires à une même droite.

b. Réciproquement. Les points de contact de deux plans tangents parallèles, sont les extrémités d'un même diamètre; car le rayon, mené au point de contact de l'un d'eux, doit, étant prolongé, passer par le point de contact de l'autre plan tangent (COROLL. I).

c. Moyen pratique de mesurer le diamètre d'une sphère solide.

On ajuste deux tablettes planes sur une règle, de manière que les deux plans soient perpendiculaires à l'axe de la règle. L'une des tablettes est fixe, l'autre peut se mouvoir le long de la règle, de manière que son plan reste toujours perpendiculaire à l'axe de celle-ci. On place une sphère solide entre les deux tablettes, et la distance de celles-ci, indiquée par la règle lorsque les deux plans sont tangents à la sphère, est le diamètre de la sphère.

DÉFINITION.

499. On nomme *normale* à la surface sphérique en un point donné de cette surface, la perpendiculaire au plan tangent en ce point.

THÉORÈME.

500. *Tous les rayons de la sphère sont des normales à sa surface.*

Nous avons vu en effet (494), que le rayon mené au point de contact est perpendiculaire au plan tangent en ce point.

APPLICATIONS.

501. *a.* En supposant la surface de la terre parfaitement sphérique, les verticales ou les directions du fil à plomb en sont les normales, car l'action de la pesanteur n'est autre que l'attraction exercée sur tous les corps par le centre de la terre. Toutefois on regarde les verticales menées par deux points comme parallèles, parce que les distances qu'on a occasion de considérer sur la surface de la terre étant très-petites par rapport au rayon terrestre, on peut, sans erreur sensible, regarder comme nul l'angle que font entre elles ces deux verticales.

b. Le plan horizontal n'est pas le même pour les différents points de la terre.— Il résulte de ce qui précède (*a*) que le plan horizontal, qui est le plan tangent à la surface de la terre, change de position dès qu'on change le point de contact. Mais de même qu'on peut, sans erreur sensible, regarder comme parallèles deux verticales peu éloignées l'une de l'autre, deux plans horizontaux dont les points de contact sont à une distance très-faible, relativement au rayon de la terre, peuvent être regardés comme confondus en un seul.

c. Les verticales de pays différents concourraient au centre de la terre, si elle était parfaitement sphérique.

Tout point matériel, tournant autour d'un axe, tend, en vertu de la force centrifuge, à s'échapper, en suivant la tangente, de la circonférence qu'il parcourt. Les molécules d'une sphère solide, tournant autour d'un axe qui passe par son centre, supposées retenues par l'attraction qu'exerce le centre de la sphère, se déplaceront sans cesser d'appartenir à la sphère, et se rangeront de manière que la sphère s'aplatira vers les extrémités de l'axe et se renflera vers le milieu. C'est un fait qu'on vérifie facilement en faisant tourner une lame flexible, contournée en demi-circonférence autour d'une tige fixe, qui passe par deux ouvertures pratiquées aux deux extrémités de la lame. On voit bientôt la lame se déformer en s'aplatissant vers les extrémités de la tige. Le globe terrestre, d'abord sphérique, a dû subir cette déformation, et nous représente la figure d'une sphère aplatie dans le sens de son axe. Les aspérités que produisent sur la surface de la terre les montagnes les plus élevées sont inappréciables par rapport au rayon de la terre, puisque leur hauteur est moindre que la millième partie du diamètre terrestre. On nomme aussi *plan tangent* à la surface de la terre, le plan qui n'a qu'un seul point commun avec cette surface, *normale* à la surface, la perpendiculaire au plan tangent menée par le point de contact, et les droites qu'on nomme *verticales* ou *directions du fil à plomb*, sont ces mêmes normales. On a été conduit à conclure de la figure de la surface terrestre que *les verticales de différents pays ne doivent pas concourir en un même point*, comme si cette surface était sphérique.

THÉORÈME.

502. *L'angle de deux arcs de grands cercles a pour mesure l'arc de grand cercle décrit de son sommet comme pôle et compris entre les deux premiers arcs* (fig. 267).

L'angle des tangentes, AS, AT, aux deux arcs de grands cercles AMB, ANB qui se coupent au point A, est l'angle rectiligne du dièdre formé par les plans de ces arcs, puisque les tangentes AS, AT sont perpendiculaires au diamètre AB, intersection commune de ces plans. Or, si l'on décrit du point A une circonférence de grand cercle, la portion MN de cette circonférence, comprise entre les arcs AMB, ANB, mesure l'angle rectiligne du dièdre AB, car si l'on tire les rayons OM, ON, les angles AOM, AON, mesurés par des

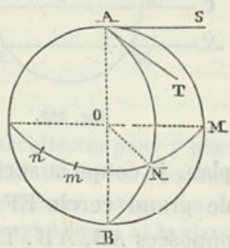

Fig. 267.

quadrants, sont droits, et par suite l'angle MON, mesuré par l'arc MN, est le rectiligne du dièdre AB. Donc *l'arc* MN *mesure l'angle des tangentes* AS, AT, lequel est dit *l'angle des arcs de grands cercles* AMB, ANB.

502. Scolie. — Si l'on prend sur la circonférence de grand cercle à laquelle appartient l'arc MN et à partir du point M un arc M*m* égal à un quadrant et dans le même sens un arc N*n* égal aussi à un quadrant, l'arc *mn* sera égal à l'arc MN. Or les points *m*, *n* sont les pôles des arcs AMB, ANB ; donc *la plus petite des deux distances des pôles des deux arcs de grands cercles est la mesure de l'angle de ces arcs, si l'on suppose celui-ci moindre que deux angles droits.*

THÉORÈME.

504. *Lorsque l'axe d'un cylindre droit passe par le centre d'une sphère, les courbes d'entrée et de sortie, tracées sur cette sphère par le cylindre pénétrant, sont deux circonférences égales* (fig. 268).

Tout diamètre d'une surface sphérique est évidemment un axe de révolution de cette surface. Par conséquent si l'axe d'un cylindre droit passe par le centre d'une surface sphérique, il peut être regardé comme étant aussi un axe de celle-ci. Soient une sphère O et un cylindre droit AB, A'B', dont l'axe CD passe par le centre de la sphère, M un point commun aux deux surfaces. Par le point M et l'axe CD faisons passer un plan. Il coupe la surface sphérique suivant une circonférence de grand cercle EF et le cylindre suivant deux génératrices opposées AB, A'B'. Tandis que la demi-circonférence EGF et la génératrice AB, en tournant autour de l'axe, engendrent, l'une la surface sphérique et l'autre le cylindre, le point M décrit une circonférence dont le plan est perpendiculaire à l'axe, le

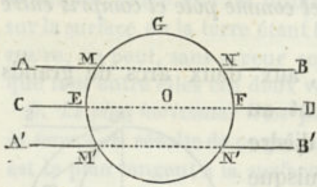

Fig. 268.

rayon égal à celui du cylindre et dont tous les points sont communs à la surface sphérique et au cylindre. Si la génératrice AB rencontre la circonférence EF en un second point N, ce dernier point décrira une seconde circonférence dont le rayon sera égal aussi à celui du cylindre et dont tous les points seront communs à la surface sphérique et au cylindre. Si la génératrice AB rencontre la section sphérique aux points M et N, la génératrice opposée doit rencontrer celle-ci en deux points M′ et N′ symétriques de M et N par rapport à l'axe CD, et qui décriraient, dans la révolution de A′B′ autour de CD, deux circonférences se confondant respectivement avec les circonférences décrites par les points M et N. Les deux surfaces n'ont pas d'autres points communs que ceux de ces deux dernières circonférences; car, s'il existait un point commun non situé sur aucune d'elles, la génératrice passant par ce point rencontrerait la surface sphérique en plus de deux points. Par conséquent, *tout cylindre droit, dont l'axe passe par le centre d'une surface sphérique, ne peut couper celle-ci que suivant deux circonférences égales.*

505. Scolie. — Si la génératrice AB était tangente à la circonférence EF, le lieu des points communs aux deux surfaces serait la circonférence de grand cercle décrite par le point de contact, et dont le plan est perpendiculaire à l'axe du cylindre. On dit alors que le cylindre et la surface sphérique sont tangents, et la circonférence qui contient les points communs est appelée *la circonférence de contact.*

APPLICATIONS.

506. *a*. Les niches que construisent les architectes pour y placer des statues, des poêles, etc., sont ordinairement formées d'un demi-cylindre droit et d'un quart de sphère de mêmes rayons. La surface cylindrique est tangente à la surface sphérique, et la circonférence de contact est horizontale.

b. C'est en faisant rouler les boulets dans un cylindre droit creux, de même diamètre, qu'on vérifie les boulets dans l'artillerie avant de les recevoir.

c. Lorsqu'un tuyau de poêle doit déboucher dans une sphère qui le couronne ou le termine, il suffit, pour pratiquer l'ouverture convenable dans la surface sphérique, de décrire sur cette surface un petit cercle de même rayon que le cylindre. Pour trouver la distance polaire de ce petit cercle, il suffira de construire un triangle rectangle dont on connaît l'hypoténuse, qui est le diamètre de la sphère, et la hauteur par rapport à l'hypoténuse, laquelle hauteur est le rayon du petit cercle.

d. Les rayons solaires qui rasent une surface sphérique forment une surface cylindrique de révolution tangente à la sphère, ces rayons pouvant être regardés comme parallèles à cause de la grande distance du soleil à la terre. Le cylindre d'ombre, projeté par la sphère, coupe un plan non parallèle aux génératrices, suivant une ellipse qui est la ligne de démarcation entre l'ombre et la partie éclairée du plan.

THÉORÈME.

507. *Lorsque l'axe d'un cône droit passe par le centre d'une sphère, l'intersection des deux surfaces est une circonférence, ou se compose de deux circonférences inégales, situées dans des plans perpendiculaires à l'axe du cône, suivant que le sommet est intérieur ou extérieur à la sphère* (fig. 269). (Nous ne considérons qu'une seule nappe du cône.)

Supposons le sommet du cône extérieur à la sphère et soient O la sphère et S le cône donnés, A un point commun aux deux surfaces. Par l'axe SD du cône faisons passer un plan, et soient ABB'A' la circonférence de grand cercle et SA, SA' les deux génératrices opposées suivant lesquelles il coupe la surface sphérique et le cône. Le diamètre CD de la section sphérique se confond avec l'axe SD du cône et chacune des génératrices SA, SA' coupe la section sphérique en deux points, la première aux points A et B, la seconde aux points A' et B'. Si donc on fait tourner en même temps autour de l'axe SD la demi-circonférence CBAD et la génératrice SA, la première engendrera la surface sphérique et la seconde la surface du cône. Or, dans cette double révolution, le point A engendre une circonférence située dans un plan perpendiculaire à l'axe et dont tous les points sont communs aux deux surfaces. Le second point, B, de rencontre de la génératrice SA avec la section sphérique engendre aussi une circonférence, située dans un plan perpendiculaire à l'axe et dont tous les points sont communs aux deux surfaces. Il est évident du reste que les circonférences décrites par les points A′ et B′, symétriques de A et B, en tournant autour de SD, se confondraient respectivement avec les circonférences décrites par les points A et B. Les deux surfaces n'ont pas d'autres points communs que ceux de ces deux dernières circonférences, car s'il existait un point commun, non situé sur aucune d'elles, la génératrice passant par ce point rencontrerait la surface sphérique en plus de deux points.

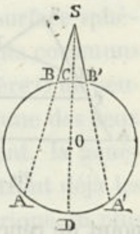

Fig. 269.

508. Scolie I. — Si la génératrice SA était tangente à la section sphérique, les deux surfaces n'auraient pas d'autres points communs que ceux de la circonférence décrite par le point de contact. On dit, dans ce cas, que les deux surfaces sont tangentes et cette circonférence est appelée *la circonférence de contact.*

509. Scolie II. — Si le sommet du cône était intérieur à la sphère, la génératrice SA ne rencontrerait qu'en un seul point la section sphérique ; et tous les points communs seraient ceux d'une seule circonférence située encore dans un plan perpendiculaire à l'axe du cône.

THÉORÈME.

510. *Deux sections circulaires d'un cône oblique, à base circulaire, l'une parallèle à la base, l'autre antiparallèle, appartiennent à une même surface sphérique* (fig. 270).

Soient S un cône oblique à base circulaire ASB le plan principal, AB le diamètre de la base O ; MN celui d'une section antiparallèle, et CD le diamètre d'une section parallèle à la base. Les centres des deux cercles MN et CD, tous deux perpendiculaires au plan ASB, sont situés dans ce plan. Les deux perpendiculaires aux cercles MN et CD, élevées par leurs centres, sont donc situées dans le plan ASB et se rencontrent. En outre, l'angle SMN étant égal à l'angle CDS, le quadrilatère MNDC est inscriptible, et par suite le centre du cercle circonscrit à ce quadrilatère est en même temps le point de rencontre de ces perpendiculaires. Par conséquent, ce dernier point, étant à des distances égales des quatre points M, C, D, N, est le centre d'une surface sphérique qui passe par les deux sections.

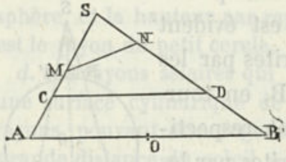

Fig. 270.

THÉORÈME.

511. *Lorsqu'un cône quelconque pénètre dans une sphère suivant une circonférence, il en sort suivant une autre circonférence* (fig. 271).

Supposons qu'on ait décrit un cône oblique circulaire ayant pour base un cercle de la sphère O et pour sommet un point S extérieur à la sphère. Soient SAB le plan principal de ce cône et AB le diamètre de la base, M et N les seconds points où les génératrices SA, SB rencontrent la surface sphérique ; et ST une tangente à la sphère, dont le point de contact est T. Si l'on fait passer un plan par les droites ST, SA, et un autre par les droites ST, SB, on aura :

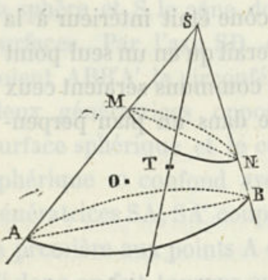

Fig. 271.

$$\overline{ST}^2 = SM \times SA = SN \times SB,$$

d'où l'on conclut que les triangles SAB, SMN sont semblables et que l'angle SMN est égal à l'angle SBA. Par conséquent la circonférence dont le diamètre est MN et dont le plan est perpendiculaire au plan ASB est une section antiparallèle à la base AB. Ces deux circonférences appartiennent donc à une même surface sphérique, et celle-ci se confond avec la surface sphérique O, puisque ces deux surfaces ont quatre points communs non situés dans un même plan. Le cône S et la sphère O ne peuvent pas avoir de points communs, non situés sur l'une des deux circonférences AB, MN ; car, s'il en était autrement, la génératrice qui passerait par l'un de ces points, rencontrant déjà les circonférences AB, MN, couperait la surface sphérique en plus de deux points.

Donc *le cône* S *qui pénètre dans la sphère* O *suivant une circonférence* AB, *en sort suivant une section antiparallèle* MN.

§ 8. — Mesures.

DÉFINITIONS.

512. On nomme *zone* la portion de la surface sphérique comprise entre deux plans parallèles ; *bases* de la zone, les circonférences appartenant à ces sections ; *hauteur* de la zone, la portion du diamètre de la sphère, perpendiculaire aux plans, comprise entre eux. Lorsque l'un des plans est tangent à la sphère, la zone qui n'a alors qu'une seule base, prend aussi le nom de *calotte sphérique.*

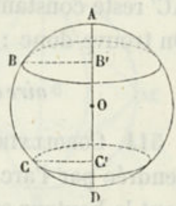

Fig. 272.

La zone peut être engendrée par la révolution d'un arc de grand cercle, moindre qu'une demi-circonférence, autour d'un diamètre extérieur. En effet (fig. 272), lorsqu'on fait tourner la demi-circonférence de grand cercle ABCD autour de son diamètre AD, l'arc BC engendre une portion de la surface sphérique, terminée aux circonférences décrites par les points B et C et dont les plans sont perpendiculaires au diamètre AD. Les bases de la zone sont donc les circonférences ayant pour rayons les perpendiculaires BB′, CC′ abaissées des points B et C sur AD ; et la hauteur est égale à BB′, qui est aussi la projection de l'arc BC sur le diamètre AD.

THÉORÈME.

513. *L'aire d'une zone sphérique est égale au produit de sa hauteur par la circonférence d'un grand cercle* (fig. 272).

Considérons la zone à une base engendrée par l'arc AC en tournant autour du diamètre AB. Inscrivons à l'arc AC une ligne brisée régulière AMNC. Soient C′ le pied de la perpendiculaire abaissée du point C sur AB et OI l'apothème de la ligne brisée régulière. Désignons par aire AMNC, l'aire de la surface engendrée par la ligne brisée AMNC, on a :

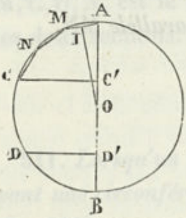

Fig. 273.

$$\text{aire AMNC} = \text{AC}' \times \text{ circ. OI.}$$

On définit l'aire de la surface de la zone la limite vers laquelle tend l'aire de la surface engendrée par la ligne brisée régulière inscrite à l'arc correspondant, lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de celle-ci. Or :

$$\textit{lim. aire}\ \text{AMNPC} = \textit{lim.}\ \text{AC}' \times \textit{lim. circ.}\ \text{OI.}$$

AC′ reste constant, tandis que circ. OI a pour limite circ. OA. On trouve donc :

$$\textit{aire de la zone}\ \text{AC} = \text{AC}' \times \textit{circ.}\ \text{OA.}$$

514. Corollaire I. — Considérons la zone à deux bases engendrée par l'arc CD en tournant autour du diamètre AB, et dont la hauteur est CD′ (fig. 272). On a :

$$\textit{aire de la zone}\ \text{AD} = \text{AD}' \times \textit{circ.}\ \text{OA,}$$
$$\textit{aire de la zone}\ \text{AC} = \text{AC}' \times \textit{circ.}\ \text{OA.}$$

et en retranchant

$$\textit{aire de la zone CD} = CD' \times \textit{circ. OA}.$$

515. Corollaire II. — Si l'on désigne par h la hauteur de la zone, par r le rayon de la sphère, l'aire de la zone est exprimée par $2\pi rh$.

516. Corollaire III. — Si l'on fait tourner la demi circonférence ACB (fig. 272) autour du diamètre AB, la zone engendrée est la surface de la sphère dont AB est le diamètre, et cette zone a pour hauteur AB. Par conséquent

$$\textit{aire de la surface sphérique (AO)} = 2AO \times \textit{circ. AO}.$$

Comme $\frac{1}{2}$ AO $\times$ circ. AO est l'aire d'un grand cercle,

l'aire de la surface sphérique est quadruple de celle d'un grand cercle.

Si l'on désigne par r le rayon de la surface sphérique, l'aire a pour expression $4\pi r^2$, et πd^2, si l'on désigne par d le diamètre.

517. Corollaire IV. — *Les aires de deux surfaces sphériques sont proportionnelles aux carrés de leurs rayons.*

518. Exemples. — 1° *Trouver l'aire de la zone dont la hauteur est 10 mètres, et le rayon* $24^{m},5$.

Solution. — $769^{mq},69$ à moins d'un décimètre carré.

2° *Trouver l'aire de la sphère de même rayon.*

Solution. — $7542^{mq},96$, à moins d'un décimètre carré.

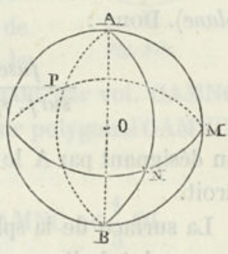

Fig. 274.

DÉFINITIONS.

519. On nomme *fuseau* (fig. 274) la portion de la surface sphérique comprise entre deux demi-circonférences de grand cercle AMB, ANB qui se terminent à un diamètre commun AB. L'angle des plans de ces demi-circonférences est l'*angle* du fuseau.

Deux grands cercles rectangulaires divisent la surface de la sphère en quatre parties égales qu'on nomme *fuseaux droits*.

THÉORÈME.

520. *L'aire d'un fuseau est égale au nombre qui mesure l'angle de ce fuseau, lorsqu'on prend l'angle droit pour unité d'angle et le fuseau droit pour unité de surface* (fig. 274).

Soient AMB et ANB deux demi-grands cercles qui ont pour intersection commune le diamètre AB. Décrivons du point A, comme pôle, une circonférence de grand cercle ; et soient MN l'arc de cette circonférence compris entre les arcs AMB et ANB, $\frac{m}{n}$ le rapport de l'arc MN à la circonférence de grand cercle MNP. Si l'on divise, à partir du point M, cette circonférence en n parties égales, l'arc MN contiendra m de ces parties, et si par chacun des points de division et le diamètre AB on fait passer un plan, ces plans diviseront la surface de la sphère en n fuseaux égaux, dont m formeront le fuseau AMNB. Le rapport du fuseau à la surface de la sphère sera donc égal à $\frac{m}{n}$.

Si le rapport de l'arc MN à la circonférence MNP était incommensurable, on ferait le raisonnement du n° **156** (*Géom. plane*). Donc :

$$\frac{\textit{fuseau}}{\textit{surf. sphér.}} = \frac{\textit{arc}\ \mathrm{MN}}{\textit{circ.}\ \mathrm{MNP}} = \frac{\mathrm{A}}{4},$$

en désignant par A le rapport de l'angle du fuseau à un angle droit.

La surface de la sphère étant égale à quatre fuseaux droits, on conclut de là :

$$\frac{\textit{fuseau}}{\textit{fuseau droit}} = \mathrm{A}.$$

521. Corollaire. — *Le fuseau droit étant le quart de la surface de la sphère, sa surface est égale à celle d'un grand cercle de la sphère* (515). On peut donc déterminer une surface plane égale à celle d'un fuseau quelconque.

DÉFINITIONS.

522. On nomme *secteur sphérique* le corps engendré par la révolution d'un secteur circulaire autour d'un de ses côtés ou d'un diamètre extérieur. La zone engendrée par l'arc du secteur circulaire est la *base* du secteur sphérique.

THÉORÈME.

523. *Le volume d'un secteur sphérique est égal au produit de l'aire de la zone qui lui sert de base par le tiers du rayon de la sphère.*

Considérons le secteur sphérique engendré par la révolution du secteur circulaire OAC autour du diamètre AB, avec lequel se confond son côté AO (fig. 275). Inscrivons dans l'arc AC la ligne brisée régulière AMNC, dont l'apothème est OI. On définit le volume du secteur sphérique, la limite vers laquelle tend le volume du corps engendré par la révolution du secteur polygonal régulier inscrit OAMNC, autour de AB, lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de sa base. En désignant par vol. OAMNC le volume du corps engendré par le secteur polygonal OAMNC, on a :

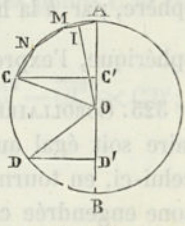

Fig. 275.

$$\textit{vol. } \mathrm{OAMNC} = \textit{aire de la surf. } \mathrm{AMNC} \times \frac{1}{3}\,\mathrm{OI}.$$

et

$$\textit{lim. vol. } \mathrm{OAMNC} = \textit{lim. aire de la surf. } \mathrm{AMNC} \times \frac{1}{3}\,\textit{lim. } \mathrm{OI}.$$

or, lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de la ligne brisée régulière inscrite, l'aire de la surface engendrée par cette ligne a pour limite, l'aire de la zone engendrée par l'arc AC ; et l'apothème OI a pour limite le rayon OA ; par conséquent

$$\textit{volume du secteur sphérique}\,(\mathrm{OAC}) = \textit{zone}\ \mathrm{AC} \times \frac{1}{3}\mathrm{AO}.$$

Si le secteur sphérique est engendré par la révolution d'un secteur circulaire autour d'un diamètre extérieur, telle que celle du secteur circulaire COD autour de AB, le secteur sphérique est la différence des secteurs engendrés par OAC et OAD en tournant autour de AB ; il a donc pour aire : zone AD $\times \frac{1}{3}$ AO $-$ zone AC $\times \frac{1}{3}$ AO ou zone CD $\times \frac{1}{3}$ AO.

Donc *le volume du secteur sphérique est égal au produit de l'aire de la zone qui lui sert de base par le tiers du rayon de la sphère.*

524. Corollaire I. — Si l'on désigne par r le rayon de la sphère, par h la hauteur de la zone qui est la base du secteur sphérique, l'expression du volume de celui-ci est : $\frac{2}{3}\pi r^2 h$.

525. Corollaire II. — Si l'on suppose que le secteur circulaire soit égal au demi-cercle ACB, le secteur engendré par celui-ci, en tournant autour du diamètre AB, est la sphère ; la zone engendrée est la surface de la sphère. Par conséquent :

Le volume de la sphère est égal au produit de l'aire de sa surface par le tiers du rayon.

En désignant par r, le rayon de la sphère, on trouve pour l'expression du volume de celle-ci : $\frac{4}{3}\pi r^3$; et, en désignant par d le diamètre de la sphère : $\frac{1}{6}\pi d^3$.

526. Corollaire III. — *Les volumes de deux sphères sont proportionnels aux cubes de leurs rayons.*

EXEMPLE. — 1° *Trouver le volume du secteur sphérique dont le rayon est* $24^{m},5$ *et dont la zone a pour hauteur* 10 *mètres.*

Solution. — $6280^{mc},662$, à moins d'un décimètre cube.

2° *Trouver le volume de la sphère dont le rayon est* $2^{m},45$.

Solution. — $61^{mc},601$, à moins d'un décimètre cube.

THÉORÈME.

527. *Le volume du corps engendré par la révolution d'un segment circulaire autour d'un diamètre extérieur, est égal au sixième de celui du cylindre qui a pour rayon la corde du segment et pour hauteur la projection de la corde sur ce diamètre.*

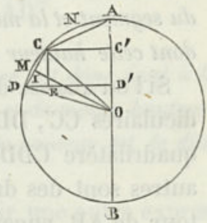

Fig. 276.

Le volume du corps engendré par la révolution du segment circulaire CMD (fig. 276) autour du diamètre AB, est égal à la différence des volumes des corps engendrés par le secteur circulaire OCMD et le triangle OCD. Soient OI la perpendiculaire abaissée du centre sur CD et CC′, DD′, les perpendiculaires abaissées des points C et D sur AB, on a, en appelant V le volume :

$$V = \frac{2}{3}\pi\overline{OC}^2 \times C'D' - \frac{2}{3}\pi\overline{OI}^2 \times C'D' \text{ ou } \frac{2}{3}\pi\left(\overline{OC}^2 - \overline{OI}^2\right) \times C'D';$$

et comme

$$\overline{OC}^2 - \overline{OI}^2 = \overline{CI}^2 = \frac{\overline{CD}^2}{4},$$

$$V = \frac{1}{6}\pi\overline{CD}^2 \times C'D'.$$

Donc *le volume est le sixième du volume du cylindre dont le rayon est* CD *et la hauteur* C′D′.

DÉFINITIONS.

528. On nomme *segment sphérique,* la portion de la sphère

comprise entre deux plans parallèles ; *segment à deux bases* ou *tranche sphérique*, lorsque les deux plans coupent la sphère ; *segment à une base*, ou *segment sphérique*, lorsque l'un d'eux est tangent. Les sections faites dans la sphère sont les *bases* du segment, et la distance des deux bases sa *hauteur*.

THÉORÈME.

529. *Le volume d'un segment sphérique à deux bases est égal à la demi-somme des volumes des cylindres qui ont pour bases celles du segment et la même hauteur, augmentée du volume de la sphère dont cette hauteur est le diamètre* (fig. 276).

Si l'on abaisse des extrémités C et D de l'arc CD, les perpendiculaires CC′, DD′ sur le diamètre AB, on forme une figure quadrilatère CDD′C′ dont un côté est l'arc CD, et les trois autres sont des droites. Ce quadrilatère, par sa révolution autour de AB, engendre le segment sphérique ayant pour bases les cercles dont CC′ et DD′ sont les rayons, et pour hauteur C′D′.

Le corps engendré peut être regardé comme composé du corps engendré par le segment circulaire CMD, et du tronc de cône engendré par le trapèze droit CC′D′D. Par conséquent, si l'on désigne son volume par V,

$$V = \frac{1}{6}\pi\,\overline{CD}^2 \times C'D' + \frac{1}{3}\pi\left(\overline{CC'}^2 + \overline{DD'}^2 + CC' \times DD'\right) \times C'D'. \quad (1)$$

Abaissant du point C la perpendiculaire CE sur DD′, on a

$$\overline{CD}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{C'D'}^2 + (DD' - CC')^2 = \overline{C'D'}^2 + \overline{DD'}^2 + \overline{CC'}^2 - 2CC' \times DD'. \quad (2)$$

Si l'on écrit :

$$V = \frac{1}{6}\pi C'D'\left(\overline{CD}^2 + 2\overline{CC'}^2 + 2\overline{DD'}^2 + 2CC' \times DD'\right), \quad (3)$$

on trouve, en substituant la valeur (2) de $\overline{CD}^2$:

$$V = \frac{1}{6}\pi C'D'\left(\overline{C'D'}^2 + 3\overline{CC'}^2 + 3\overline{DD'}^2\right) = \frac{1}{2}\pi\left(\overline{CC'}^2 + \overline{DD'}^2\right) \times C'D' + \frac{1}{6}\pi\overline{C'D'}^3. \qquad (4)$$

530. Corollaire I. — Pour déduire de cette expression celle du volume du segment sphérique à une base, on suppose que le point C se transporte au point A, et alors il suffit de supposer $CC' = 0$; $C'D'$ devient AD' et on a :

$$V = \frac{1}{2}\pi\overline{DD'}^2 \times A'D' + \frac{1}{6}\pi\overline{AD'}^3.$$

Le volume du segment sphérique à une base est donc égal à la moitié du volume du cylindre de même base et de même hauteur, augmentée du volume de la sphère dont cette hauteur est le diamètre.

531. Corollaire II. — On peut obtenir une autre expression du volume du segment sphérique à une base (fig. 276). Si l'on abaisse de l'extrémité C de l'arc AC la perpendiculaire CC' sur le diamètre AB, le triangle mixtiligne ACC', dont un côté est l'arc AC et les deux autres les droites AC', CC', engendre par sa révolution autour de AB le segment sphérique à une base dont la hauteur est AC' et la base le cercle dont le rayon est DD'. Le corps engendré peut être regardé comme composé du corps engendré par le segment circulaire AMC et du cône engendré par le triangle ACC'. Si l'on désigne son volume par V, on a :

$$V = \frac{1}{6}\pi\overline{AC}^2 \times AC' + \frac{1}{3}\pi\overline{CC'}^2 \times AC'.$$

Désignant AD' par h, le rayon de la sphère par r, et remplaçant $\overline{AC}^2$ par $2rh$ et $\overline{CC'}^2$ par $(2r - h)h$,

$$V = \frac{1}{6}\pi \times 2rh^2 + \frac{1}{3}\pi(2r - h)h^2 = \pi rh^2 - \frac{1}{3}\pi h^3.$$

Le volume du segment sphérique à une base est donc égal au volume du cylindre qui a pour rayon la hauteur du segment et pour hauteur le rayon de la sphère, diminué du double du volume de la sphère dont le diamètre est égal à la hauteur du segment.

532. Scolie. — Il est évident que cette expression ne saurait convenir au segment sphérique à deux bases.

533. Exemple. — *Trouver le volume du segment sphérique dont la hauteur est* $0^m,6$ *et les rayons des bases* 0,42 *et* 1,4.

Solution. — $0^{mc},219$, à moins d'un décimètre cube.

DÉFINITIONS.

534. On nomme *coin* ou *onglet sphérique* (fig. 277) la portion de la sphère comprise entre un fuseau et les deux demi-grands cercles ABM, ABN dont les circonférences sont les limites du fuseau. Deux grands cercles rectangulaires divisent la sphère en quatre coins égaux, qu'on nomme *coins droits.*

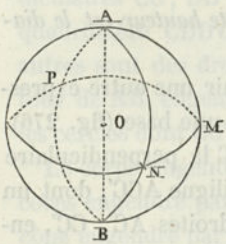

Fig. 277.

THÉORÈME.

535. *Lorsqu'on prend pour unités le coin droit et l'angle droit, le volume d'un coin est égal au nombre qui mesure son angle.*

Soit A le rapport de l'angle du coin donné à l'angle droit, on démontrera par un raisonnement semblable à celui du n° 519 que

$$\frac{\textit{coin}}{\textit{sphère}} = \frac{A}{4};$$

et, comme la sphère est quadruple d'un coin droit, on en conclut :

$$\frac{\textit{coin}}{\textit{coin droit}} = A.$$

THÉORÈME.

535. *Le volume d'un polyèdre quelconque circonscrit à une sphère est égal au produit de l'aire de sa surface par le tiers du rayon de la sphère.*

Tout polyèdre circonscrit à la sphère peut être regardé comme étant la somme de pyramides ayant chacune pour sommet le centre de la sphère, pour base une des faces du polyèdre, et pour hauteur le rayon de la sphère. Or le volume de chaque pyramide étant égal au produit de l'aire de sa base par le tiers de sa hauteur, le volume du polyèdre est égal au produit de la somme des aires de toutes les faces, ou de l'aire de la surface totale par le tiers du rayon.

536. Corollaire. — On peut regarder une surface courbe circonscrite à une sphère comme composée de faces planes infiniment petites, et *le volume du corps limité par cette surface comme égal au produit de l'aire de la surface par le tiers du rayon de la sphère.*

Ainsi, 1° le volume du cylindre circonscrit à la sphère est égal, en désignant par r le rayon de la sphère, au produit de l'aire de sa surface totale, $6\pi r^2$, par le tiers du rayon, ou à $2\pi r^3$.

2° Le volume du cône équilatéral circonscrit à la sphère est égal au produit de l'aire de sa surface totale, $9\pi R^2$, par le tiers du rayon, ou à $3\pi r^3$.

§ 9. — Polyèdres réguliers.

DÉFINITIONS.

537. On nomme *polyèdre régulier convexe*, un polyèdre dont les faces sont des polygones réguliers convexes égaux et dont les angles polyèdres sont égaux entre eux.

THÉORÈME.

538. *Il ne peut exister que cinq polyèdres réguliers convexes.*

1° *Triangle équilatéral.* — Pour construire un polyèdre régulier dont les faces soient des triangles équilatéraux, comme la somme des faces d'un angle polyèdre convexe est moindre que quatre angles droits, on assemblera autour d'un point pour former un angle polyèdre un nombre n de triangles, tel que l'on ait :

$$\frac{2}{3} \times n < 4, \quad \text{d'où } n < 6.$$

On ne pourra donc prendre que 3, 4, 5 triangles équilatéraux pour former un angle polyèdre.

Avec 3 on forme le *tétraèdre régulier*, avec 4 l'*octaèdre régulier*, avec 5 l'*icosaèdre régulier*.

2° *Carré.* — On prendra un nombre de carrés tel que l'on ait :

$$1 \times n < 4, \quad \text{d'où } n < 4.$$

On pourra donc assembler seulement 3 carrés. On forme alors le *cube* ou *hexaèdre régulier*.

3° *Pentagone.* — On doit avoir

$$\frac{6}{5} \times n < 4, \quad \text{d'où } n < \frac{10}{3}.$$

On ne pourra assembler que 3 pentagones réguliers. On forme alors le *dodécagone régulier*.

4° Pour l'hexagone, on doit avoir

$$\frac{8}{6} \times n < 4, \quad \text{d'où } n < 3.$$

L'angle d'un polygone régulier de n côtés, étant égal à un nombre d'angles droits exprimé par $2 - \frac{4}{n}$, croît avec le nombre des côtés. Par conséquent l'angle de l'hexagone régulier étant trop grand, on ne pourra employer que les trois polygones réguliers : *Triangle équilatéral, carré, pentagone régulier*, et construire que cinq polyèdres réguliers.

THÉORÈME.

539. *Tout polyèdre régulier est inscriptible et circonscriptible à la sphère* (fig. 278).

1° *Tout polyèdre régulier est inscriptible à la sphère.* — Soient A et B deux faces adjacentes du polyèdre régulier donné, O et O' leurs centres et MN le côté commun. Les perpendiculaires, abaissées des points O et O' sur MN, rencontrent ce côté en son milieu I. Le plan des perpendiculaires OI, O'I est perpendiculaire à MN; et, par suite, aux faces A et B. Les perpendiculaires, élevées aux points O et O' sur ces faces, se rencontrent donc et le point de rencontre, G, est à égale distance de tous les sommets des deux faces A et B. Les perpendiculaires OG, O'G sont égales, ainsi que les angles OIG, O'IG, car,

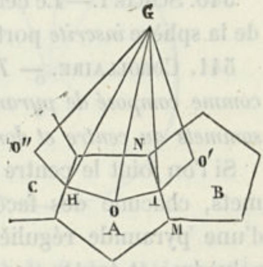

Fig. 278.

si l'on tire la droite IG, on forme deux triangles rectangles IOG, IO'G, égaux comme ayant l'hypoténuse commune et un côté égal (OI = O'I). La droite OI qui unit le point de concours des perpendiculaires OG, O'G au milieu I, du côté commun aux faces A et B, divise donc en deux parties égales l'angle OIO', mesure de l'angle dièdre des faces A et B. Il résulte de là que, si par le centre O'' de la face C on élève une perpendiculaire sur cette face, elle passera par le point G; car, si l'on joint au point H, milieu du côté commun aux faces A et C, le point de rencontre des perpendiculaires élevées par O' et O'' aux faces B et C, on forme deux triangles rectangles égaux au triangle OIG comme ayant un angle aigu égal et un côté égal. Donc le point de concours des perpendiculaires à deux faces adjacentes, élevées par leurs centres, se trouve sur les perpendiculaires élevées sur les faces ayant un côté commun avec l'une d'elles. Par suite, les perpendiculaires aux faces du polyèdre, élevées par leur centre, passent toutes par un même point qui est également distant de tous les sommets. Donc *tout polyèdre régulier est inscriptible à la sphère.*

2° *Tout polyèdre régulier est circonscriptible à la sphère.* — Car les perpendiculaires OG, O'G, O''G...., élevées par les centres des faces et terminées au point G, sont toutes égales entre elles; la sphère décrite du point G comme centre avec un rayon égal à l'une d'elles, OG, touchera donc chacune des faces en son centre.

540. Scolie I.—Le centre commun de la sphère *circonscrite* et de la sphère *inscrite* porte le nom de *centre du polyèdre régulier.*

541. Corollaire. — *Tout polyèdre régulier peut être considéré comme composé de pyramides régulières et égales qui ont leurs sommets au centre et dont les bases sont les faces du polyèdre.*

Si l'on joint le centre d'un polyèdre régulier à tous les sommets, chacune des faces peut être regardée comme la base d'une pyramide régulière, ayant pour sommet le centre du polyèdre; et toutes ces pyramides sont égales entre elles, car on peut, par la superposition, faire coïncider deux quelconques d'entre elles.

542. Exemple. — *Trouver le volume d'un octaèdre régulier dont le côté a* $0^m,6$ *de longueur.*

L'octaèdre régulier est formé de deux pyramides régulières égales, à base carrée, adossées par leurs bases.

Le volume de l'une des pyramides est le produit de sa base, qui est un carré dont le côté est celui de l'octaèdre, par le tiers de sa hauteur qui est égal à la moitié de la diagonale du carré. Si l'on désigne le côté par a, le volume de la pyramide sera donc égal à : $a^2 \times \frac{1}{6} a \sqrt{2}$; et celui de l'octaèdre à : $\frac{1}{3} a^3 \sqrt{2}$.

Si $a = 0^m,6$; $V = 0,101828$.

L'octaèdre contient $0^{mc},101828$, à moins d'un centimètre cube.

§ 10. — Triangles sphériques.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

543. On nomme *triangle sphérique* (fig. 279) la portion de la surface sphérique limitée par trois arcs de grands cercles, dont les plans forment les faces d'un trièdre ayant pour sommet le centre de la sphère ; les arcs, qui sont les *côtés* du triangle, mesurent respectivement les faces du trièdre.

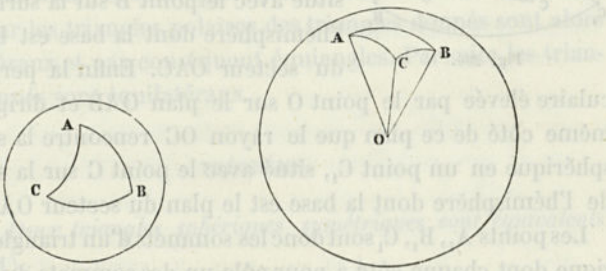

Fig. 279.

Les points d'intersection (fig. 279) A, B, C des côtés sont les *sommets* du triangle.

544. Les *angles* du triangle sphérique sont les angles des plans auxquels appartiennent les côtés.

545. La somme des faces d'un trièdre étant moindre que quatre angles droits, la somme des côtés d'un triangle sphérique est moindre qu'une circonférence.

546. Une face quelconque d'un trièdre étant moindre que la somme des deux autres et plus grande que leur différence, un côté quelconque d'un triangle sphérique est moindre que la somme des deux autres et plus grand que leur différence.

547. La somme des angles d'un trièdre étant plus grande que deux angles droits et moindre que six, la somme des angles d'un triangle sphérique est plus grande que deux angles droits et moindre que six.

548. Si par le sommet O d'un trièdre OABC (fig. 280), on

mène la perpendiculaire OA_1, au plan OBC et dirigée du même côté de ce plan que le rayon OA, les points A et A_1 appartiendront à la surface de l'hémisphère dont la base est le plan du secteur OBC. Pareillement la perpendiculaire, élevée par le point O sur le plan OAC et dirigée du même côté de ce plan que le rayon OB, rencontre la surface sphérique en un point B_1, situé avec le point B sur la surface de l'hémisphère dont la base est le plan du secteur OAC. Enfin la perpendiculaire élevée par le point O sur le plan OAB et dirigée du même côté de ce plan que le rayon OC rencontre la surface sphérique en un point C_1, situé avec le point C sur la surface de l'hémisphère dont la base est le plan du secteur OAB.

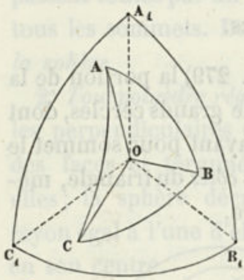

Fig. 280.

Les points A_1, B_1, C_1 sont donc les sommets d'un triangle sphérique dont chaque côté a pour pôle un des sommets du triangle ABC.

On construit le triangle $A_1B_1C_1$ en décrivant de chacun des sommets A, B, C, comme pôle, un arc de grand cercle. Les arcs de grand cercle décrits de deux sommets, B et C, par exemple, se coupent en deux points. On doit prendre pour sommet du triangle $A_1B_1C_1$ le point A_1, situé sur la surface de l'hémisphère, ayant pour base le plan du secteur OBC, qui contient le point A. On fera de même pour B_1 et C_1.

Le triangle $A_1B_1C_1$ est le triangle *polaire* ou *supplémentaire* du triangle ABC. On voit donc que

Chaque angle d'un triangle sphérique a pour mesure une demi-circonférence de grand cercle diminuée du côté opposé du triangle polaire.

549. *Égalité et symétrie des triangles sphériques.* — Nous avons vu (119) que deux trièdres sont égaux, lorsqu'ils ont les faces égales chacune à chacune et semblablement disposées. Si les faces ne sont pas semblablement disposées, les trièdres sont symétriques.

Deux triangles sphériques sont dits *symétriques* lorsqu'ils correspondent à deux trièdres symétriques. Par conséquent :

1° *Deux triangles sphériques sont égaux ou symétriques, lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.*

2° On démontre, par un raisonnement semblable à celui qu'on a appliqué aux triangles rectilignes, que

Deux triangles sphériques sont égaux ou symétriques, lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux, ou un angle égal compris entre deux côtés égaux.

3° *Deux triangles sphériques équiangles sont égaux ou symétriques ;* car les triangles polaires des triangles donnés sont alors équilatéraux et par conséquent équiangles. Par suite les triangles donnés sont équilatéraux.

THÉORÈME.

550. *Deux triangles sphériques symétriques sont équivalents* (fig. 281).

Soient ABC, A'B'C' deux triangles symétriques, P le pôle du petit cercle qui passe par les trois sommets du triangle ABC. Tirons le diamètre qui passe au point P. Il rencontre la surface de la sphère en un second point P' qui est le pôle du petit cercle passant par les sommets du triangle A'B'C', car le plan des diamètres PP', AA' coupe la surface de la sphère suivant deux arcs de grand cercle égaux PA, P'A'. Pour la même raison l'arc PB est égal à l'arc P'B' et l'arc PC à l'arc P'C'.

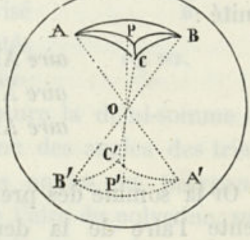

Fig. 281.

Les trois arcs P'A', P'B', P'C étant égaux, le point P' est donc le pôle du petit cercle qui passe par les sommets du triangle A'B'C'.

Les triangles isocèles PAB, P'A'B' sont égaux, ainsi que les triangles isocèles PBC, P'B'C' et les triangles isocèles PAC, P'A'C'. Le triangle ABC étant composé de trois parties égales chacune à chacune aux trois parties dont est composé le triangle A′B′C′, les triangles ABC, A′B′C′ sont donc équivalents.

551. Scolie. — Le pôle du petit cercle qui passe par les trois sommets du triangle ABC pourrait se trouver placé sur l'un des côtés ou à l'extérieur du triangle. On ferait alors un raisonnement semblable.

THÉORÈME.

552. *L'aire d'un triangle sphérique est égale au nombre qui mesure l'excès de la demi-somme de ses angles sur un angle droit* (fig. 282).

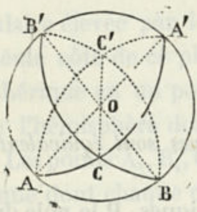

Fig. 282.

Soient le triangle sphérique ABC, et son symétrique A′B′C′. Le triangle ABC augmenté du triangle A′BC forme le fuseau dont l'angle est A. Le triangle ABC augmenté du triangle B′AC forme le fuseau dont l'angle est B. Le triangle A′B′C′ augmenté du triangle CA′B forme le fuseau dont l'angle est C ; et, comme le triangle A′B′C′ est équivalent au triangle ABC, celui-ci augmenté du triangle CA′B′ forme une surface égale à celle du fuseau dont l'angle est C ; on a donc, en prenant le fuseau droit pour unité :

$$\textit{aire}\ \mathrm{ABC} + \textit{aire}\ \mathrm{A'BC} = \mathrm{A}.$$
$$\textit{aire}\ \mathrm{ABC} + \textit{aire}\ \mathrm{B'AC} = \mathrm{B}.$$
$$\textit{aire}\ \mathrm{ABC} + \textit{aire}\ \mathrm{CA'B'} = \mathrm{C}.$$

Or la somme des premiers membres de ces égalités représente l'aire de la demi-surface sphérique augmentée de deux fois l'aire du triangle. Ajoutant par ordre, on trouve donc

$$2\ \textit{aires}\ \mathrm{ABC} + 2 = \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C};$$

d'où l'on déduit :

$$aire\ ABC = \frac{A + B + C}{2} - 1.$$

553. Scolie. — $A + B + C - 2$ est dit l'*excès sphérique* du triangle ABC.

554. Corollaire. — On nomme *polygone sphérique* (fig. 283), la portion de la surface sphérique limitée par les arcs de grand cercle dont les plans forment les faces d'un angle polyèdre ayant pour sommet le centre de la sphère. Ces arcs, qui sont les *côtés* du polygone, mesurent respectivement les faces de l'angle polyèdre.

Les points d'intersection A, B, C, D,... des côtés sont les *sommets* du polygone. Les *angles* du polygone sont les dièdres des faces de l'angle polyèdre. Selon que l'angle polyèdre est convexe ou concave, le polygone sphérique correspondant est *convex* ou *concave*.

L'aire d'un polygone sphérique convexe (fig. 283) *est égale au nombre qui mesure la demi-somme de ses angles, diminué du nombre de ses côtés et augmenté de* 2.

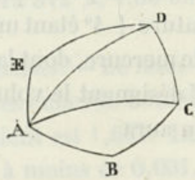

Fig. 283.

En effet, si l'on tire les arcs de grand cercle qui sont les diagonales menées d'un sommet A, le polygone sera divisé en autant de triangles qu'il a de côtés moins deux. L'aire de chaque triangle étant égale au nombre qui mesure la demi-somme de ses angles diminué d'un, et la somme des angles des triangles étant la même que celle des angles du polygone, la somme des aires des triangles, ou l'aire du polygone, sera égale au nombre qui mesure la demi-somme des angles du polygone diminué d'autant de fois un que le polygone a de côtés moins deux. En désignant donc par n le nombre des côtés du polygone :

$$aire\ du\ polygone = \frac{A + B + C.....}{2} - n + 2.$$

§ 11.

Déterminer le poids d'un corps, de forme géométrique, qui ne peut pas être pesé directement. Déduire le volume d'un corps de son poids.

555. On nomme *poids spécifique* ou *densité* d'un corps solide ou liquide, le rapport du poids d'un volume donné de ce corps au poids d'un volume égal d'eau distillée et prise à la température $+4°$.

556. On nomme *poids spécifique* ou *densité* d'un corps gazeux, le rapport du poids d'un volume donné de ce corps au poids d'un volume égal d'air pris à la température 0° et sous la pression $0^m,76$.

557. La densité de l'air, en prenant pour unité le poids de l'eau distillée, à la température $+4°$, est $\frac{1}{773,28}$.

558. Le poids d'un décimètre cube d'eau distillée, à la température $+4°$ étant un kilogramme, le poids d'un décimètre cube de mercure, dont la densité est 13,6, est $13^k,600$. Généralement V désignant le volume d'un corps, P son poids et D sa densité, on aura

$$P = V \times D.$$

Cette relation servira à trouver l'une des trois quantités P, V, D lorsqu'on connaîtra les deux autres.

559. 1° *Quel est le poids d'une colonne de mercure de* $0^m,76$ *de hauteur et dont le diamètre de la base est* $0^m,002$? — Le volume du cylindre représenté par cette colonne ($\pi r^2 h$) est égal à $3,1416 \times (0,001)^2 \times 0,76$ ou 0,000002387616. Le poids d'un centimètre cube d'eau étant un gramme, le poids de la colonne de mercure sera égal au produit de $13^g,6$ (densité du mercure) multiplié par 0,00002387616 ou $32^{gr},472$ à moins de 0,001.

2° *Quel est le volume d'une colonne de mercure du poids de*

$32^{gr},472$, *la densité du mercure étant* 13,6? — Le nombre de centimètres cubes d'eau de même volume que celui du mercure multiplié par le nombre 13,6 a donné pour produit 32,472; par conséquent le quotient de ce dernier nombre par 13,6 exprimera le volume demandé; ce quotient est 2,388. La colonne de mercure contient donc $2^{cc},388$ à moins de 0,001.

3° *Un pavé de Paris est de* 12 *décimètres cubes. La densité du grès est* 2,5; *trouver son poids?* — 12 décimètres cubes d'eau pèsent 12 kilogrammes, par conséquent 12 décimètres cubes de grès pèsent $2,5 \times 12$ ou 30 kilogrammes.

4° *Quel est le volume d'un pavé de Paris qui pèse* 30 *kilogrammes?* — Le nombre qui représente le volume du pavé multiplié par la densité (2,5) du grès donne un produit égal à 30. Le volume est donc égal au quotient de 30 par 2,5 ou 12; et comme le kilogramme d'eau a le volume d'un décimètre cube, le pavé contient 12 décimètres cubes.

5° *Un bloc de pierre à bâtir a la figure d'un cube dont le côté est de* $0^{m},8$; *quel est son poids?* — Le volume est 0,512; la densité de la pierre est 1,80. Or l'eau sous le même volume pesant 512 kilogrammes, le poids du bloc de pierre sera $512 \times 1,80$ ou $921^{k},600$.

6° *Quel est le volume d'un boulet de* 12 *kilogrammes?* — Le nombre 12 est le produit du nombre de décimètres cubes du boulet par la densité du fer qui est 7,2. Le quotient est 1,667. Le boulet contient donc $0^{mc},001667$ ou $1^{dc},667$ à moins de 0,001.

7° *Quel volume représentent* $7^{k},215$ *d'huile d'olive?* — Le nombre 7,215 est le produit du nombre de décimètres cubes d'huile par le nombre 0,915 qui est la densité de l'huile d'olive. On doit donc diviser 7,215 par 0,915. Le quotient est 7,885; on trouve donc $7^{dc},885$ à moins de 0,001.

8° *Quel est le poids représenté par le vin contenu dans le muid* (268 litres)? — La densité du vin étant 0,991, le nombre de kilogrammes qui représente le poids est le produit de 0,991 par 268 ou $265^{k},588$.

9° *Quel est le poids d'un mètre cube de bois à brûler* (*chêne*)? —

La densité du chêne est 0,610. Or un mètre cube d'eau pèse 1000 kilogrammes, par conséquent le poids du mètre cube de bois à brûler est $0{,}610 \times 1000$ ou 610 kilogrammes.

10° *Quel est le volume de* 1000 *kilogrammes de bois à brûler?* — On divisera 1000 par le nombre 0,610 qui est la densité du bois, le quotient exprimera le nombre de mètres cubes. On trouve : $1^{mc}{,}639$.

11° Le volume de l'obélisque de Luxor est (255) : $87^{mc}{,}023200$. Le poids spécifique du granit est 2,75. Le poids de l'obélisque est donc égal à $2{,}75 \times 87{,}023200$ ou $239313^{k}{,}800$.

TABLE DES MATIÈRES

LIVRE I

Ligne droite et plan.

Notions sur le plan.. 1
Droite et plan perpendiculaires. — Perpendiculaire et obliques menées d'un point au même plan........................ 3
Droites et plans parallèles.. 12
Plans qui se coupent. — Angle dièdre. — Droite et plan perpendiculaire. — Plans perpendiculaires........................ 20
Plus courte distance de deux droites........................ 32
Projection d'un point ; — d'une droite sur un plan. — Angle d'une droite et d'un plan........................ 34
Centre des distances proportionnelles........................ 39
Angle polyèdre.. 45
Méthode des projections. — Problèmes sur la ligne droite et le plan.. 54
Plan, coupe, élévation.. 73

LIVRE II

Polyèdre.

Prisme. — Ses propriétés.. 77
Parallélipipède. — Ses propriétés........................ 87
Volume du prisme.. 92
Pyramide. — Ses propriétés.. 101
Volume de la pyramide ; — du tronc de pyramide........................ 107
Volume du tronc de prisme.. 114
Symétrie.. 119
Similitude.. 124
Figures homothétiques dans l'espace........................ 129

LIVRE III

Surfaces courbes.

Surfaces cylindriques. — Propriétés........................ 133
Épure d'une surface cylindrique........................ 137

Plan tangent. Développement d'une surface cylindrique............. 144
Sections planes du cylindre. — Ellipse. — Développement.......... 148
Intersections de deux surfaces cylindriques......................... 153
De l'hélice. — De la vis 162
Aire de la surface d'un cylindre droit............................. 165
Volume d'un cylindre droit... 169
Surfaces coniques. Propriétés 171
Épure d'une surface conique.. 174
Plan tangent. Développement d'une surface conique.................. 177
Sections coniques, ellipse... 184
Epure d'une surface conique droite coupée suivant une ellipse et développement 193
Section antiparallèle d'une surface conique oblique................ 201
Aire de la surface d'un cône droit ; — d'un tronc de cône droit...... 205
Aire de la surface engendrée par une ligne plane tournant autour d'un axe.. 211
Volume du cône ; — du tronc de cône................................ 213
Volume engendré par une surface plane tournant autour d'un axe.. 218
Note sur les surfaces. Surfaces gauches 224
Sphère, sections planes.. 227
Pôles d'un cercle de la sphère..................................... 233
Plan tangent... 238
Intersection d'une sphère et d'un cylindre......................... 242
— d'une sphère et d'un cône.. 244
Aire d'une zone — de la surface de la sphère....................... 248
— d'un fuseau 250
Volume d'un secteur sphérique ; — de la sphère..................... 251
Volume d'un segment sphérique ; — d'un coin........................ 253
Polyèdres réguliers.. 257
Triangles sphériques... 261
Déterminer le poids d'un corps, de forme géométrique, qui ne peut pas être pesé directement. Déduire le volume d'un corps de son poids 266

Corbeil, typ. et stér. de Crété.

ERRATA

—

Page 79, fig. 110, les droites AE, ED, DC, A'A", B'B", C'C" doivent être en traits pleins.

Page 80, fig. 111, les droites AD, DC, A'A", B'B", C'C" doivent être en traits pleins.

Page 81, fig. 112, les droites BC, CD, DE doivent être ponctuées.

Page 102, fig. 132, les droites CD, DE, EA, SA, SB (qui manque), SC, SD, SE, doivent être en traits pleins.

Page 102, fig. 133, les droites DE, EA, SA, SB, SC, SD, SE, doivent être en traits pleins.