ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

Francesco Brioschi

e continuati dai professori:

Eugenio Beltrami *in Roma*
Luigi Cremona *in Roma*
Ulisse Dini *in Pisa*
Giuseppe Jung *in Milano*

SERIE III.ª – TOMO II.°

MILANO,

TIPOGRAFIA BERNARDONI DI C. REBESCHINI E C.

1899.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO II.° (SERIE III.ª)

Sull' integrazione dell' Equazione differenziale $\Delta^{2n} = 0$.

(*Di* Emilio Almansi, *a Torino.*)

I.

1. Sia f una funzione di quante variabili si voglia $x, y, \ldots$ Rappresentiamo con $\Delta^2 f$ l'espressione:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \cdots$$

Poniamo inoltre:

$$\Delta^4 f = \Delta^2 \Delta^2 f,$$

$$\Delta^6 f = \Delta^2 \Delta^2 \Delta^2 f, \text{ ecc.};$$

e in generale con $\Delta^{2n} f$ indichiamo la funzione che si ottiene eseguendo n volte, sulla funzione f, l'operazione rappresentata dal simbolo Δ^2.

« *Una funzione, regolare in un certo spazio, e che soddisfa all'equazione* $\Delta^{2n} = 0$, *si può, in generale, rappresentare mediante* n *funzioni, regolari nello stesso spazio, che soddisfano all'equazione* $\Delta^2 = 0$. »

Questo teorema, che noi dimostreremo per le funzioni di tre variabili, ma che vale per funzioni di quante variabili si voglia, suggerisce un metodo assai semplice, per la soluzione di alcuni problemi relativi all' equazione $\Delta^{2n} = 0$, e, in particolare, all'equazione $\Delta^4 = 0$, di cui è nota l'importanza in varie questioni di Fisica matematica, e specialmente nella teoria dell'Elasticità.

2. Consideriamo il prodotto delle due funzioni p, q, delle variabili x, y, z, e formiamo l'espressione $\Delta^2 (p\, q)$. Si ottiene:

$$\Delta^2 (p\, q) = p\, \Delta^2 q + q\, \Delta^2 p + 2 \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial q}{\partial z} \right).$$

Sia in particolare:

$$p = a\,x + b\,y + c\,z + d\,, \quad (a,\ b,\ c,\ d = \text{cost.}).$$

Si avrà evidentemente:

$$\Delta^2 (p\,q) = p\,\Delta^2 q + 2\left(a \frac{\partial q}{\partial x} + b \frac{\partial q}{\partial y} + c \frac{\partial q}{\partial z}\right).$$

Da questa formula si ricava:

$$\Delta^4 (p q) = p\,\Delta^4 q + 4\left(a \frac{\partial \Delta^2 q}{\partial x} + b \frac{\partial \Delta^2 q}{\partial y} + c \frac{\partial \Delta^2 q}{\partial z}\right), \text{ ecc.}$$

E in generale:

$$\Delta^{2i} (p q) = p\,\Delta^{2i} q + 2\,i\left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + c \frac{\partial}{\partial z}\right) \Delta^{2(i-1)} q. \tag{1}$$

Ora, in luogo di una funzione qualunque come la q, poniamo una funzione che soddisfi all'equazione $\Delta^{2(n-1)} = 0$. Per indicare una funzione che soddisfa all'equazione $\Delta^{2n} = 0$, useremo, in generale, una lettera dell'alfabeto greco, coll'indice n. Seguendo questa notazione porremo:

$$q = \varphi_{n-1}.$$

Sarà dunque:

$$\Delta^{2(n-1)}\, \varphi_{n-1} = 0;$$

e, a maggior ragione:

$$\Delta^{2n}\, \varphi_{n-1} = 0.$$

Per conseguenza, se nella formula (1) sostituiamo ad i, prima $n-1$, poi n, otterremo le due equazioni:

$$\Delta^{2(n-1)} (p\,\varphi_{n-1}) = \left(A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial y} + C \frac{\partial}{\partial z}\right) \Delta^{2(n-2)} \varphi_{n-1}. \ (A = 2(n-1)\,a, \text{ ecc.}) \tag{2}$$

$$\Delta^{2n} (p\,\varphi_{n-1}) = 0. \tag{3}$$

L'equazione (3) mostra che moltiplicando una funzione φ_{n-1}, una funzione, cioè, che soddisfa all'equazione $\Delta^{2(n-1)} = 0$, per una funzione lineare p, si ottiene una funzione che soddisfa all'equazione $\Delta^{2n} = 0$, e che potremo chiamare φ_n.

Mediante due funzioni φ_{n-1}, ψ_{n-1}, si otterrà pure una funzione φ_n, ponendo:

$$\varphi_n = p\,\varphi_{n-1} + \psi_{n-1}. \tag{4}$$

Vogliamo ora dimostrare che una funzione φ_n, regolare in uno spazio S, si può sempre rappresentare con una formula di questo tipo, essendo φ_{n-1} e ψ_{n-1} funzioni regolari nello stesso spazio, e p una funzione lineare.

Sulla natura dello spazio S facciamo questa sola restrizione: che esista almeno una direzione tale che tutte le rette ad essa parallele incontrino in due soli punti la superficie che lo limita.

La funzione lineare p la prenderemo in modo che le rette:

$$p = \text{cost.}$$

soddisfino a questa condizione. Lo stesso dicasi per le altre funzioni lineari, che introdurremo nel corso della dimostrazione.

Si tratta di far vedere che, data la funzione φ_n, si può sempre determinare la funzione φ_{n-1}, regolare in S, in modo che sia:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta^{2(n-1)}\,\varphi_{n-1} = 0, \\ \Delta^{2(n-1)}\,(p\,\varphi_{n-1} - \varphi_n) = 0. \end{array}\right\} \tag{5}$$

La prima di queste due equazioni possiamo scriverla:

$$\Delta^2\,\Delta^{2(n-2)}\,\varphi_{n-1} = 0\,; \tag{6}$$

e la seconda, ricordando la formula (2):

$$\left(A\frac{\partial}{\partial x} + B\frac{\partial}{\partial y} + C\frac{\partial}{\partial z}\right)\Delta^{2(n-2)}\,\varphi_{n-1} = \Delta^{2(n-1)}\,\varphi_n\,. \tag{7}$$

Poniamo:

$$\Delta^{2(n-1)}\,\varphi_n = \sigma_1\,, \quad \Delta^{2(n-2)}\,\varphi_{n-1} = \tau_1\,.$$

Si avranno le due equazioni:

$$\left.\begin{array}{c} \Delta^2\,\tau_1 = 0\,, \\ \left(A\dfrac{\partial}{\partial x} + B\dfrac{\partial}{\partial y} + C\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\tau_1 = \sigma_1\,. \end{array}\right\} \tag{8}$$

Alle variabili x, y, z, sostituiamo tre nuove variabili u, v, w; e questa sostituzione corrisponda, geometricamente, a riferire lo spazio a tre nuovi assi ortogonali, il primo dei quali abbia per coseni di direzione i rapporti:

$$\frac{A}{R}, \frac{B}{R}, \frac{C}{R},$$

essendo $R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. Con questa sostituzione l'equazione $\Delta^2 \tau_1 = 0$ non cambia. La seconda delle (8) diventa:

$$\frac{d \tau_1}{\partial u} = R \sigma_1 .$$

Per ottenere una funzione che soddisfi a queste due equazioni, prendiamo da prima la funzione:

$$\tau' = R \int^u \sigma_1 \, d \, u.$$

L'integrazione s'intende fatta lungo una retta $v = \text{cost.}$, $w = \text{cost.}$, a cominciare dal punto in cui essa incontra la superficie che limita lo spazio S. La funzione τ', così ottenuta, è regolare in questo spazio, e soddisfa all'equazione:

$$\frac{\partial \tau'}{\partial u} = R \sigma_1 ;$$

d'onde si ricava:

$$\frac{\partial}{\partial u} \Delta^2 \tau' = 0 ,$$

ossia:

$$\Delta^2 \tau' = f(v, \ w).$$

Prendiamo poi una funzione τ'' delle sole variabili v, w, regolare anch'essa, e tale che si abbia:

$$\Delta^2 \tau'' = - f(v, \ w) ;$$

e poniamo:

$$\tau_1 = \tau' + \tau''.$$

La funzione τ_1 così ottenuta soddisfa alle due equazioni:

$$\Delta^2 \tau_1 = 0 , \quad \frac{\partial \tau_1}{\partial u} = R \sigma_1 , \tag{9}$$

e quindi alle (8): ed è regolare nello spazio S.

Se ora prendiamo una funzione φ_{n-1}, regolare in S, che soddisfi all'equazione:

$$\Delta^{2(n-2)} \varphi_{n-1} = \tau_1 ,$$

essa soddisferà alle equazioni (6) e (7), ossia alle (5). La formula (4) è così dimostrata.

Nel seguito della dimostrazione indicheremo, in generale, con $p^{(i)}$ il prodotto di i funzioni lineari. Perciò chiameremo $p^{(1)}$ la funzione p. E si avrà:

$$\varphi_n = p^{(1)} \varphi_{n-1} + \psi_{n-1}.$$

Ragionando ora sulla funzione φ_{n-1} come si è ragionato sulla funzione φ_n, potremo porre:

$$\varphi_{n-1} = p^{(1)\prime} \varphi_{n-2} + \psi_{n-2},$$

essendo $p^{(1)\prime}$ una nuova funzione lineare. Sarà quindi:

$$\varphi_n = p^{(1)} p^{(1)\prime} \varphi_{n-2} + (p^{(1)} \psi_{n-2} + \psi_{n-1}).$$

La funzione in parentesi soddisfa all'equazione $\Delta^{2(n-1)} = 0$, e potremo indicarla con ψ'_{n-1}. Il prodotto di due funzioni lineari $p^{(1)} p^{(1)\prime}$ lo indicheremo con $p^{(2)}$. Si avrà così:

$$\varphi_n = p^{(2)} \varphi_{n-2} + \psi'_{n-1}.$$

Analogamente, posto $\varphi_{n-2} = p^{(1)\prime\prime} \varphi_{n-3} + \psi_{n-3}$, otterremo:

$$\varphi_n = p^{(3)} \varphi_{n-3} + \psi''_{n-1}, \text{ ecc.}$$

E finalmente:

$$\varphi_n = p^{(n-1)} \varphi_1 + \psi_{n-1}^{[n-2]}.$$

Così abbiamo rappresentata una funzione che soddisfa all'equazione $\Delta^{2n} = 0$, mediante una funzione che soddisfa all'equazione $\Delta^2 = 0$, ed una che soddisfa all'equazione $\Delta^{2(n-1)} = 0$, tutte regolari nello spazio S.

Per semplicità indicheremo con θ_{n-1} la funzione $\psi_{n-1}^{[n-2]}$. Dovendo poi introdurre altre funzioni φ_1, chiameremo φ'_1 quella che comparisce nella formula precedente. Si avrà:

$$\varphi_n = p^{(n-1)} \varphi'_1 + \theta_{n-1}.$$

In modo analogo si troverebbe:

$$\theta_{n-1} = p^{(n-2)} \varphi_1'' + \theta_{n-2},$$
$$\theta_{n-2} = p^{(n-3)} \varphi_1''' + \theta_{n-3},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\theta_2 = p^{(1)} \varphi_1^{[n-1]} + \theta_1.$$

Sommando tutte queste equazioni, e scrivendo, per uniformità di notazione, $\varphi_1^{[n]}$ in luogo di θ_1, si ottiene la formula:

$$\varphi_n = p^{(n-1)}\varphi'_1 + p^{(n-2)}\varphi_1'' + \cdots + p^{(1)}\varphi_1^{[n-1]} + \varphi_1^{[n]}, \tag{10}$$

colla quale il teorema enunciato in principio resta dimostrato. Esso infatti esprime, nello spazio S, la funzione regolare φ_n, mediante le n funzioni φ'_1, $\varphi''_1, \ldots \varphi_1^{[n]}$, regolari anch'esse, e che soddisfano all'equazione $\Delta^2 = 0$.

Come risulta dalla dimostrazione, il teorema sussiste per funzioni di quante variabili si voglia.

3. La formula (10) vale anche per un altro tipo di funzioni p.

Consideriamo infatti il prodotto delle due funzioni p, φ_{n-1}, essendo ora:

$$p = r^2 - R^2, \quad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \; R = \text{cost.}).$$

Poichè $x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y} + z\dfrac{d}{\partial z} = r\dfrac{\partial}{\partial r}$, sarà evidentemente:

$$\Delta^2(p\,\varphi_{n-1}) = p\,\Delta^2\varphi_{n-1} + 6\,\varphi_{n-1} + 4\,r\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial r},$$

$$\Delta^4(p\,\varphi_{n-1}) = p\,\Delta^4\varphi_{n-1} + 20\,\Delta^2\varphi_{n-1} + 8\,r\frac{\partial\,\Delta^2\varphi_{n-1}}{\partial r}, \text{ ecc.};$$

e in generale:

$$\Delta^{2i}(p\,\varphi_{n-1}) = p\,\Delta^{2i}\varphi_{n-1} + A_i\,r\frac{\partial\,\Delta^{2(i-1)}\varphi_{n-1}}{\partial r} + B_i\,\Delta^{2(i-1)}\varphi_{n-1},$$

ove A_i, B_i, sono costanti positive. Se in luogo di i poniamo, prima $n-1$, poi n, otterremo le due formule:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta^{2(n-1)}(p\,\varphi_{n-1}) = A\,r\frac{\partial\,\Delta^{2(n-2)}\varphi_{n-1}}{\partial r} + B\,\Delta^{2(n-2)}\varphi_{n-1}, \; (A = A_{n-1},\; B = B_{n-1}),\\ &\Delta^{2n}(p\,\varphi_{n-1}) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Come nel caso precedente, si tratta di dimostrare che data la funzione φ_n, si può sempre trovare una funzione φ_{n-1}, regolare in S, e che soddisfa alle due equazioni:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta^{2(n-1)}\varphi_{n-1} = 0,\\ &\Delta^{2(n-1)}(p\,\varphi_{n-1} - \varphi_n) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

In questo caso faremo la seguente restrizione sulla natura dello spazio S, e sulla posizione dell'origine delle coordinate: che cioè questo punto appartenga allo spazio S, e che ogni retta uscente da esso, incontri in un sol punto la superficie che limita quello spazio.

Se queste condizioni non sono soddisfatte, potranno esistere delle funzioni φ_n, che non sono rappresentabili per mezzo di n funzioni φ_1, regolari nello spazio S: come vedremo in seguito, trattando un caso particolare.

Le equazioni (12) possono scriversi:

$$\Delta^2 \Delta^{2(n-2)} \varphi_{n-1} = 0 , \tag{13}$$

$$r \frac{\partial \Delta^{2(n-2)} \varphi_{n-1}}{\partial r} + \frac{B}{A} \Delta^{2(n-2)} \varphi_{n-1} = \frac{1}{A} \Delta^{2(n-1)} \varphi_n , \quad \text{(per la (11))}. \tag{14}$$

Posto:

$$\frac{1}{A} \Delta^{2(n-2)} \varphi_{n-1} = \sigma_1 , \quad \frac{B}{A} = k , \tag{15}$$

$$\Delta^{2(n-2)} \varphi_{n-1} = \tau_1 ,$$

si avranno le due equazioni:

$$\Delta^2 {}_1\tau = 0 , \quad r \frac{\partial \tau_1}{\partial r} + k \tau_1 = \sigma_1 , \quad (\Delta^2 \sigma_1 = 0). \tag{16}$$

Ma queste due equazioni sono soddisfatte, se poniamo:

$$\tau_1 = \frac{1}{r^k} \int_0^r r^{k-1} \sigma_1 \, d r ;$$

e la funzione τ_1, così ottenuta, è finita e continua in tutto lo spazio in cui è tale la σ_1.

Trovata la funzione τ_1, dall'equazione (15) potremo sempre ricavare una funzione regolare φ_{n-1}, che soddisferà alle equazioni (13) e (14), e quindi alle (12).

Anche in questo caso, dunque, data la funzione φ_n, si può sempre porre:

$$\varphi_n = p \, \varphi_{n-1} + \psi_{n-1} ,$$

essendo φ_{n-1}, ψ_{n-1}, funzioni regolari nello spazio S.

Il seguito della dimostrazione non differisce dal caso precedente. Indicando in generale con $p^{(i)}$ il prodotto di i funzioni del tipo $r^2 - R^2$, si otterrà una formula identica alla (10).

Le costanti R che compariscono nelle p, si potranno prendere ad arbitrio.

II.

4. Daremo alcune applicazioni del teorema dimostrato.

In primo luogo, proponiamoci di stabilire l'integrale generale dell'equazione:

$$\Delta^4 \Phi = 0 \text{ (*)}.$$

Sopra una porzione σ del piano $z = 0$, si abbia:

$$\Phi = k(x, y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \lambda(x, y), \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \mu(x, y), \quad \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3} = \nu(x, y),$$

ove le quattro funzioni k, λ, μ, ν delle variabili x, y, si suppongono date. Supporremo inoltre che queste funzioni sieno regolari nell'area σ, e che delle funzioni k e λ sieno regolari anche le derivate prime e seconde.

Ricordiamo come viene espresso l'integrale generale dell'equazione $\Delta^2 \varphi = 0$. Se τ, υ, sono due funzioni delle variabili complesse:

$$\xi_1 = x + i r \cos\theta, \quad \xi_2 = y + i r \operatorname{sen}\theta,$$

reali per i valori reali di queste variabili, e regolari per i valori di x ed y interni a σ, esso è dato dalla formula (**):

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dz} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \tau(\xi_1, \xi_2) \frac{r\,dr}{\sqrt{z^2 - r^2}} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \upsilon(\xi_1, \xi_2) \frac{r\,dr}{\sqrt{z^2 - r^2}}, \tag{17}$$

la quale rappresenta una funzione finita e continua, insieme alle sue derivate, nello spazio occupato da un cilindro simmetrico rispetto al piano $z = 0$, avente per base σ, e per altezza $2R$, essendo R il minimo raggio di convergenza dei suddetti elementi. Per i punti di σ risulta:

$$\varphi = \tau(x, y), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \upsilon(x, y).$$

Ciò premesso, veniamo all'equazione $\Delta^4 \Phi = 0$.

(*) D'ora in avanti tralascieremo gl'indici 1, 2,..., coi quali fin qui abbiamo contrassegnate le funzioni che soddisfano alle equazioni $\Delta^2 = 0$, $\Delta^4 = 0$, ecc.

(**) Questa formula, che è una conseguenza di quella del Poisson, si trova nella Nota del prof. Volterra, *Esercizi di fisica matematica.* Rivista di Matematica, vol. IV, a. 1894.

Potremo rappresentare la funzione Φ, mediante due funzioni φ, ψ, che soddisfano all'equazione $\Delta^2 = 0$, ponendo:

$$\Phi = z\varphi + \psi; \tag{18}$$

d'onde si ricava:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = z\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \varphi + \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = z\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 2\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3} = z\frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^3} + 3\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3}.$$

Sulla porzione σ del piano $z = 0$, sarà dunque:

$$\left.\begin{aligned} \psi &= k, & (19)\\ \varphi + \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \lambda, & (20)\\ 2\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= \mu, & (21)\\ 3\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} &= \nu. & (22)\end{aligned}\right\} (\alpha)$$

Si tratta di determinare la funzione $z\varphi + \psi$, in modo che nei punti di σ siano soddisfatte queste condizioni.

Perciò osserviamo che si ha identicamente:

$$\Phi(x, y, z) = \int_0^z \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz + \Phi(x, y, 0);$$

ossia, per la formula (18):

$$\Phi(x, y, z) = \int_0^z \left(z\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \varphi + \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) dz + \psi(x, y, 0).$$

Posto:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = U, \quad \varphi + \frac{\partial \psi}{\partial z} = V,$$

si avrà:

$$\Phi(x, y, z) = \int_0^z (z\,U + V)\,dz + \psi(x, y, 0). \tag{23}$$

La funzione $\psi(x, y, 0)$, nell'area σ, è data dalla prima delle (α). Vediamo ora di determinare le funzioni U, V. Esse soddisfano, come la φ e la ψ, all'equazione $\Delta^2 = 0$. Dalle (α) ricaveremo facilmente, per i punti di σ, i valori che assumono esse, e le loro derivate rispetto a z.

Intanto la (20) ci dà:

$$V = \lambda. \tag{24}$$

Poniamo, per brevità:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

L'equazione $\Delta^2 \psi = 0$ potrà allora scriversi:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\nabla^2 \psi.$$

Dunque, nei punti di σ, si avrà per la (19):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\nabla^2 k.$$

Dal confronto di questa formula colla (21) si ricava:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{2}(\mu + \nabla^2 k),$$

e:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{2}(\mu - \nabla^2 k);$$

ossia:

$$U = \frac{1}{2}(\mu + \nabla^2 k), \tag{25}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{2}(\mu - \nabla^2 k). \tag{26}$$

Finalmente dalla formula (20) si deduce:

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial z} = \nabla^2 \lambda,$$

ossia, poichè $\Delta^2 \varphi = 0$, $\Delta^2 \psi = 0$:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} = - \nabla^2 \lambda;$$

e questa, combinata colla (22), dà:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{2} (\nu + \nabla^2 \lambda),$$

ovvero:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{2} (\nu + \nabla^2 \lambda). \tag{27}$$

Riunendo le formule (24), (25), (26), (27), abbiamo dunque, per la porzione σ del piano $z = 0$:

$$U = \frac{1}{2} (\mu + \nabla^2 k), \quad V = \lambda,$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{2} (\nu + \nabla^2 \lambda), \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{2} (\mu - \nabla^2 k).$$

Si avranno quindi le due formule, analoghe alla (17):

$$U = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z (\mu + \nabla^2 k) \frac{r\, dr}{\sqrt{z^2 - r^2}} + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z (\nu + \nabla^2 \lambda) \frac{r\, dr}{\sqrt{z^2 - r^2}},$$

$$V = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \lambda \frac{r\, dr}{\sqrt{z^2 - r^2}} + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z (\mu - \nabla^2 k) \frac{r\, dr}{\sqrt{z^2 - r^2}},$$

le quali varranno per lo spazio occupato da un certo cilindro S, simmetrico rispetto al piano $z = 0$, avente per base σ. In queste formule si deve intendere, che al posto delle variabili reali x, y, nelle funzioni λ, μ, ν, $\nabla^2 \lambda$, $\nabla^2 k$, si sieno introdotte le variabili complesse ξ_1, ξ_2.

Sostituendo ora queste espressioni delle funzioni U, V, nella formula (23), e ponendo in questa $k(x, y)$ in luogo di $\psi(x, y, 0)$, otterremo l'integrale generale cercato, sotto la forma:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi}\int_0^z \Big[z \Big\{ \frac{\partial}{\partial z}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z (\mu + \nabla^2 k)\frac{r\,dr}{\sqrt{z^2 - r^2}} + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z (\nu + \nabla^2 \lambda)\frac{r\,dr}{\sqrt{z^2 - r^2}} \Big\} +$$

$$+ 2\frac{\partial}{\partial z}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \lambda \frac{r\,dr}{\sqrt{z^2 - r^2}} + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z (\mu - \nabla^2 k)\frac{r\,dr}{\sqrt{z^2 - r^2}}\Big] dz + k(x, y).$$

La funzione rappresentata da questa formula, sarà finita e continua insieme alle sue derivate, in tutti i punti del cilindro S. Ma potrà venir prolungata anche fuori di esso, prendendo un'area piana σ', compresa in quel cilindro, come base di un altro cilindro S'; e così proseguendo fin dove sarà possibile.

Si verifica senza difficoltà che la funzione Φ, così espressa, soddisfa effettivamente a tutte le condizioni richieste.

Con un procedimento analogo a quello esposto si possono trovare gl'integrali generali delle equazioni $\Delta^6 \Phi = 0$, $\Delta^8 \Phi = 0$, ecc.

5. Un'altra applicazione del teorema che abbiamo dimostrato si presenta nella ricerca di quegl'integrali particolari dell'equazione $\Delta^{2n} = 0$, che devono soddisfare a certe condizioni ai limiti.

Consideriamo, come primo esempio, il seguente problema:

« *Determinare nello spazio limitato da un circolo di raggio R, una funzione regolare ψ, che soddisfi all'equazione $\Delta^{2n} = 0$, dati al contorno i valori $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, della funzione stessa, e delle sue derivate d'ordine $1, 2, \ldots, n-1$, rispetto alla normale interna.* »

Premettiamo la seguente osservazione. Se la funzione φ soddisfa all'equazione $\Delta^2 \varphi = 0$, si ha pure:

$$\Delta^2 \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0,$$

e quindi ancora:

$$\Delta^2 \left(r^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right) = \Delta^2 \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \varphi \right) \right\} = 0, \text{ ecc.}$$

E in generale, per qualunque valore di m:

$$\Delta^2 \left(r^m \frac{\partial^m \varphi}{\partial r^m} \right) = 0. \tag{28}$$

Veniamo ora alla funzione ψ. La rappresenteremo con n funzioni φ, φ', φ'',..., $\varphi^{[n-1]}$, regolari entro il circolo di raggio R, e che soddisfano all'equazione $\Delta^2 = 0$, mediante la formula:

$$\psi = \sum_{h=0}^{h=n-1} (r^2 - R^2)^h \varphi^{[h]}. \qquad \begin{matrix}(r^2 = x^2 + y^2)\\ (\varphi_0 = \varphi)\end{matrix} \tag{29}$$

Le condizioni al contorno potremo scriverle:

$$\psi_{r=R} = u_0, \quad \left[\frac{\partial^i \psi}{\partial r^i}\right]_{r=R} = - u_i, \quad (i = 1, 2, \ldots n-1)$$

La prima di queste formule, supponendo l'origine delle coordinate situata nel centro del cerchio, dà evidentemente:

$$\varphi_{r=R} = u_0;$$

e poichè la funzione φ è regolare entro il cerchio, e soddisfa all'equazione $\Delta^2 = 0$, sarà, per una nota formula, nel punto di coordinate r, θ, misurando l'angolo θ da una retta fissa:

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)\, u_0}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\alpha - \theta)}\, d\alpha, \tag{30}$$

ove u_0 è il valore della funzione φ, nel punto del contorno corrispondente all'angolo α.

Ora supponiamo che tenendo conto delle condizioni al contorno, espresse dalle i formule:

$$\psi_{r=R} = u_0, \quad \left[\frac{\partial \psi}{\partial r}\right]_{r=R} = - u_1, \ldots, \quad \left[\frac{\partial^{i-1} \psi}{\partial r^{i-1}}\right]_{r=R} = - u_{i-1},$$

si sieno determinate le i funzioni:

$$\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{[i-1]}.$$

Dico che tenendo conto della condizione espressa della formula:

$$\left[\frac{\partial^i \psi}{\partial r^i}\right]_{r=R} = - u_i,$$

si può determinare la funzione $\varphi^{[i]}$.

Perciò in quest'ultima formula poniamo, al posto di ψ, la sua espressione data dalla (29). Avremo:

$$\left[\sum_{h=0}^{h=n-1} \frac{\partial^i}{\partial r^i} (r^2 - R^2)^h \varphi^{[h]}\right]_{r=R} = - u^i.$$

La somma che comparisce nel primo membro scomponiamola in tre parti. Consideriamo, in primo luogo, i termini per i quali h è maggiore di i. Essi, facendo $r = R$, si annulleranno, giacchè la funzione $(r^2 - R^2)^h \varphi^{[h]}$, derivata i volte rispetto ad r, conterrà ancora il fattore $r^2 - R^2$.

Consideriamo poi il termine, per il quale $h = i$, ossia:

$$\frac{\partial^i}{\partial r^i}(r^2 - R^2)^i \varphi^{[i]}.$$

Da questo si otterrà l'unico termine:

$$\left[\frac{\partial^i}{\partial r^i}(r^2 - R^2)^i\right]_{r=R} \cdot \varphi^{[i]}_{r=R},$$

che scriveremo per brevità:

$$A_i \varphi^{[i]}_{r=R}, \quad (A_i = i!\, 2^i R^i).$$

Finalmente i termini per i quali h è minore di i, facendo $r = R$, daranno luogo a dei termini nulli, e ad un certo numero di termini del tipo:

$$C \frac{\partial^m \varphi^{[h]}}{\partial r^m},$$

ove le C sono costanti che nascono dal porre $r = R$, nelle derivate rispetto ad r delle funzioni $(r^2 - R^2)^h$.

Avremo dunque la formula:

$$\left[A_i \varphi^{[i]} + \Sigma\, C \frac{\partial^m \varphi^{[h]}}{\partial r^m}\right]_{r=R} = - u_i, \quad (h < i):$$

e non ci occupiamo di cercare quale sono precisamente i termini che compariscono nella somma del primo membro. Nei casi particolari questa ricerca, come vedremo meglio con un esempio, non può presentare alcuna difficoltà.

Se in luogo delle costanti C, introduciamo le costanti $B R^m$, potremo scrivere:

$$\left[A_i \varphi^{[i]} + \Sigma\, B\, r^m \frac{\partial^m \varphi^{[h]}}{\partial r^m}\right]_{r=R} = - u_i,$$

Ma, ricordando la formula (28), si vede che la funzione chiusa in parentesi soddisfa all'equazione $\Delta^2 = 0$. E poichè nei punti del contorno essa diventa uguale a $-u_i$, sarà nel punto di coordinate r, θ:

$$A_i \varphi^{[i]} + \Sigma\, B\, r^m \frac{\partial^m \varphi^{[h]}}{\partial r^m} = - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r^2 - R^2)\, u_i}{R^2 + r^2 - 2 R r \cos(\alpha - \theta)}\, d\alpha,$$

d'onde si ricava:

$$\varphi^{(i)} = -\frac{1}{A_i}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(r^2 - R^2)\,u_i}{R^2 + r^2 - 2\,R\,r\cos(\alpha - \theta)}\,d\,\alpha + \Sigma\,B\,r^m\frac{\partial^m \varphi^{(h)}}{\partial\,r^m}\right\}. \qquad (h < i)$$

Questa formula risolve il problema: essa infatti ci dà la funzione $\varphi^{(i)}$, espressa mediante un integrale definito, che contiene quantità note, e le funzioni $\varphi^{(h)}\,(h < i)$, che abbiamo supposto già determinate. La prima di esse, cioè la φ è data dalla formula (30).

6. Come applicazione di questo procedimento, consideriamo un caso particolare, che è poi il più notevole:

« *Si vuol determinare la funzione* Ψ, *regolare entro il cerchio di raggio* R_0 *e che soddisfa all'equazione* $\Delta^4\,\Psi = 0$, *quando si conosca per ogni punto del contorno il valore* u_0 *della funzione, e il valore* u_1 *della sua derivata rispetto alla normale interna.* »

Porremo:

$$\psi = \varphi + (r^2 - R^2)\,\varphi', \quad (\Delta^2\,\varphi = \Delta^2\,\varphi' = 0). \tag{31}$$

Sarà:

$$\varphi_{r=R} = u_0,$$

e quindi nel punto $(r\,\theta)$:

$$\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2 - r^2)\,u_0}{R^2 + r^2 - 2\,R\,r\cos(\alpha - \theta)}\,d\,\alpha;$$

e inoltre:

$$\left[2\,R\,\varphi' + \frac{\partial\,\varphi}{\partial\,r}\right]_{r=R} = -\,u_1,$$

ossia:

$$\left[2\,R\,\varphi' + \frac{1}{R}\,r\,\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,r}\right]_{r=R} = -\,u_1;$$

e per conseguenza, nel punto $(r\,\theta)$:

$$\varphi' = -\frac{1}{2\,R}\left\{\frac{r}{R}\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,r} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2 - r^2)\,u_i}{R^2 + r^2 - 2\,R\,r\cos(\alpha - \theta)}\right\}d\,\alpha.$$

In questa formula porremo, al posto di φ, l'espressione trovata sopra: poi sostituiremo nella (31), a φ e φ', le loro espressioni.

Si otterrà così la formula finale (*):

$$\psi = \frac{1}{4\pi R}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)^2 u_0}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\alpha - \theta)} d\alpha +$$

$$+ \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2 + r^2)(R - r\cos\theta) u_i}{\{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\alpha - \theta)\}^2} d\alpha,$$

colla quale il problema è risoluto.

III.

7. In questo capitolo ci occuperemo di un problema analogo a quello risoluto nel paragrafo precedente, considerando ora lo spazio limitato non più da un sol circolo, ma da due circoli concentrici, che chiameremo C, C', di raggi R, R' $(R' > R)$.

È noto che nello stesso spazio si determina facilmente, la funzione armonica φ, che assume sopra i due circoli C, C', due date successioni di valori σ, σ' quando queste si possono rappresentare mediante serie di Fourier. Si ottiene allora la funzione φ espressa, in coordinate polari r, θ, da una formula del tipo:

$$\varphi = \alpha + \alpha_0 \log r + \sum_1^\infty \Big\{ (\alpha_m r^m + \alpha'_m r^{-m}) \cos m\theta +$$

$$+ (\beta_m r^m + \beta'_m r^{-m}) \operatorname{sen} m\theta \Big\},$$

ove le α e le β sono costanti, la cui determinazione risulta dal confronto di questa serie, per $r = R$, ed $r = R'$, colle serie σ, σ'.

Supponiamo ora che nello spazio compreso tra i due circoli, si voglia determinare la funzione Φ, regolare insieme alle sue derivate, e che soddisfa all'equazione $\Delta^4 \Phi = 0$, quando per ogni punto di C, e di C', si conosca il

(*) Questa formula è stata ottenuta, con altro metodo, dal prof. G. Lauricella, *Integrazione dell'equazione* $\Delta^2(\Delta^2 u) = 0$ *in un campo di forma circolare*. Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XXXI. Nel metodo che ho qui seguito, mi son valso della Nota del prof. Volterra, *Sulla Nota del prof. Lauricella*, ecc. Idem.

valore della funzione e della sua derivata rispetto alla normale interna ν, nell'ipotesi che queste quattro successioni di valori soddisfino a quelle condizioni, le quali permettono di rappresentarle mediante serie di FOURIER (*).

Sieno:

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_{r=R} &= A + \sum_1^\infty (A_m \cos m\theta + B_m \operatorname{sen} m\theta),\\
\Phi_{r=R'} &= A' + \sum_1^\infty (A'_m \cos m\theta + B'_m \operatorname{sen} m\theta),\\
\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right]_{r=R} &= A'' + \sum_1^\infty (A''_m \cos m\theta + B''_m \operatorname{sen} m\theta),\\
\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right]_{r=R'} &= A''' + \sum_1^\infty (A'''_m \cos m\theta + B'''_m \operatorname{sen} m\theta),
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

le quattro serie suddette.

Vediamo se la funzione Φ si può, in generale, porre sotto la forma:

$$\Phi = r^2\varphi + \psi,$$

essendo le funzioni φ, ψ date dalle formule:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi &= \alpha + \alpha_0 \log r + \sum_1^\infty \Big\{ (\alpha_m r^m + \alpha'_m r^{-m}) \cos m\theta +\\
&\qquad + (\beta_m r^m + \beta'_m r^{-m}) \operatorname{sen} m\theta \Big\},\\
\psi &= \alpha' + \alpha'_0 \log r + \sum_1^\infty \Big\{ (\alpha''_m r^m + \alpha'''_m r^{-m}) \cos m\theta +\\
&\qquad + (\beta''_m r^m + \beta'''_m r^{-m}) \operatorname{sen} m\theta \Big\},
\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

ove le α e le β sono costanti da determinarsi.

Si otterrà:

$$\begin{aligned}
\Phi = \alpha &+ \alpha_0 \log r + \alpha' r^2 + \alpha'_0 r^2 \log r +\\
&+ \sum_1^\infty \Big\{ (\alpha_m r^m + \alpha'_m r^{-m} + \alpha''_m r^{m+2} + \alpha'''_m r^{-m+2}) \cos m\theta +\\
&+ (\beta_m r^m + \beta'_m r^{-m} + \beta''_m r^{m+2} + \beta'''_m r^{-m+2}) \operatorname{sen} m\theta \Big\}.
\end{aligned}$$

(*) Il metodo che seguo è quello a cui accenna il VENSKE, *Zur Integration der Gleichung* $\Delta\Delta u = 0$, ecc., Nachrichten di Gottinga, a. 1891. Egli però trascura i termini $\alpha_0 \log r$, $\alpha' \log r$, che compariscono nelle funzioni φ, ψ: e trascura anche il termine $r \log r$ $(a \cos\theta + b \operatorname{sen}\theta)$. Quindi l'espressione che egli dà per la funzione Φ non è generale.

Derivando rispetto ad r, si ricava:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \alpha_0 \frac{1}{r} + 2\alpha' r + \alpha'_0 (r + 2 r \log r) +$$

$$+ \sum_1^\infty \Big\{ [m\, \alpha_m r^{m-1} - m\, \alpha'_m r^{-m-1} + (m+2)\, \alpha''_m r^{m+1} +$$

$$+ (-m+2)\, \alpha'''_m r^{-m+1}] \cos m\theta +$$

$$+ [m\, \beta_m r^{m-1} - m\, \beta'_m r^{-m-1} + (m+2)\, \beta''_m r^{m+1} +$$

$$+ (-m+2)\, \beta'''_m r^{-m+1}] \operatorname{sen} m\theta \Big\} .$$

Se in queste due formule poniamo, al posto di r, prima R, poi R', e quindi le confrontiamo colle (32) $\left(\text{ricordando che per } r = R \text{ si ha } \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}, \right.$ $\left. \text{e per } r = R',\ \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right)$, otterremo i seguenti sistemi di equazioni lineari, tra le costanti da determinarsi:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha + \alpha_0 \log R + \alpha' R^2 + \alpha'_0 R^2 \log R = A, \\
&\alpha + \alpha_0 \log R' + \alpha' R'^2 + \alpha'_0 R'^2 \log R' = A', \\
&\alpha_0 \frac{1}{R} + \alpha' . 2R + \alpha'_0 (R + 2R \log R) = A'', \\
&\alpha_0 \frac{1}{R'} + \alpha' . 2R' + \alpha'_0 (R' + 2R' \log R') = -A''',
\end{aligned}\right\} \qquad (S_1)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_m R^m + \alpha'_m R^{-m} + \alpha''_m R^{m+2} + \alpha'''_m R^{-m+2} = A_m, \\
&\alpha_m R'^m + \alpha'_m R'^{-m} + \alpha''_m R'^{m+2} + \alpha'''_m R'^{-m+2} = A'_m, \\
&m\,\alpha_m R^{m-1} - m\,\alpha'_m R^{-m-1} + (m+2)\,\alpha''_m R^{m+1} + \\
&\qquad + (-m+2)\,\alpha'''_m R^{-m+1} = A''_m \\
&m\,\alpha_m R'^{m-1} - m\,\alpha'_m R'^{-m-1} + (m+2)\,\alpha''_m R'^{m+1} + \\
&\qquad + (-m+2)\,\alpha'''_m R'^{-m+1} = -A'''_m,
\end{aligned}\quad (m = 1, 2, \ldots)\right\} \qquad (S_2)$$

ed un terzo sistema (S_3), analogo a quest'ultimo, in cui compariscono le β_m e le B_m, in luogo delle α_m e delle A_m.

Dal primo di questi sistemi si potranno ottenere i valori delle quattro costanti:

$$\alpha, \quad \alpha_0, \quad \alpha', \quad \alpha'_0, \qquad (34)$$

e dagli altri due i valori delle costanti:

$$\left.\begin{array}{llll} \alpha_m, & \alpha'_m, & \alpha''_m, & \alpha'''_m, \\ \beta_m, & \beta'_m, & \beta''_m, & \beta'''_m, \end{array}\right\} \tag{35}$$

purchè i determinanti:

$$D_0 = \begin{vmatrix} 1 & \log R & R^2 & R^2 \log R \\ 1 & \log R' & R'^2 & R'^2 \log R' \\ 0 & \dfrac{1}{R} & 2R & R + 2R\log R \\ 0 & \dfrac{1}{R'} & 2R' & R' + 2R'\log R' \end{vmatrix}, \tag{36}$$

$$D_m = \begin{vmatrix} R^m & R^{-m} & R^{m+2} & R^{-m+2} \\ R'^m & R'^{-m} & R'^{m+2} & R'^{-m+2} \\ m R^{m-1} & -m R^{-m-1} & (m+2) R^{m+1} & (-m+2) R^{-m+1} \\ m R'^{m-1} & -m R'^{-m-1} & (m+2) R'^{m+1} & (-m+2) R'^{-m+1} \end{vmatrix} \tag{37}$$

non siano nulli. Ma osserviamo che il determinante D_1 è appunto uguale a 0. Se infatti nel determinante D_m facciamo $m = 1$, esso verrà ad avere la prima e l'ultima colonna uguali, e per conseguenza dovrà annullarsi.

Ciò significa che le quattro equazioni in cui compariscono le incognite α_1, α'_1, α_1'', α_1''', e quelle analoghe in cui compariscono β_1, β_1', β_1'', β_1''', sono, in generale, incompatibili tra loro.

Dunque una funzione Φ, la quale debba soddisfare alle condizioni del problema, non può, in generale, venir rappresentata da un'espressione del tipo $r^2 \varphi + \psi$, essendo le funzioni φ, ψ, date dalle formule (33).

Tuttavia troveremo facilmente l'espressione generale della funzione Φ. Perciò consideriamo la funzione:

$$(a x + b y) \log r, \quad (a,\ b = \text{cost.}^{\text{i}})$$

che soddisfa all'equazione $\Delta^4 = 0$. Se supponiamo di misurare l'angolo θ dall'asse x, potremo scriverla:

$$r \log r\, (a \cos\theta + b \,\text{sen}\,\theta).$$

Poniamo ora:

$$\Phi = r^2 \varphi + \psi + r \log r\, (a \cos\theta + b \,\text{sen}\,\theta).$$

Esprimendo le funzioni φ, ψ colle formule (33), e chiamando ora α_1, β_1 le costanti $\alpha_1 + \alpha_1'''$, $\beta_1 + \beta_1'''$, otterremo:

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi = \alpha + \alpha_0 \log r + \alpha' r^2 + \alpha'' r^2 \log r + \\
&+ (\alpha_1 r + \alpha'_1 r^{-1} + \alpha_1'' r^3 + a r \log r) \cos\theta + (\beta_1 + \beta'_1 r^{-1} + \beta_1'' r^2 + \\
&+ b r \log r) \operatorname{sen}\theta + \sum_2^\infty \Big\{ (\alpha_m r^m + \alpha'_m r^{-m} + \alpha''_m r^{m+2} + \alpha'''_m r^{-m+2}) \cos m\theta + \\
&+ (\beta_m r^m + \beta'_m r^{-m} + \beta''_m r^{m+2} + \beta'''_m r^{-m+2}) \operatorname{sen} m\theta \Big\}.
\end{aligned}\right\} \quad (38)$$

Per determinare le costanti (34), e le costanti (35) per $m = 2, 3, \ldots$, avremo ancora i sistemi di equazioni (S_1), (S_2), (S_3). Avremo poi le equazioni:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 R + \alpha'_1 R^{-1} + \alpha_1'' R^3 + a R \log R = A_1, \\
&\alpha_1 R' + \alpha'_1 R'^{-1} + \alpha_1'' R'^3 + a R' \log R' = A_1', \\
&\alpha_1 - \alpha'_1 R^{-2} + 3\alpha_1'' R^2 + a(1 + \log R) = A_1'', \\
&\alpha_1 - \alpha'_1 R'^{-2} + 3\alpha_1'' R'^2 + a(1 + \log R') = - A_1'''.
\end{aligned}$$

per determinare le costanti α_1, α_1', α_1'', a, e quattro analoghe per le costanti β_1, β_1', β_1'', b. Dunque i determinanti D_0, e D_m per $m = 2, 3, \ldots$, sono ancora dati dalle formule (36) e (37), mentre per il determinante D_1 si avrà:

$$D_1 = \begin{vmatrix} R & R^{-1} & R^3 & R \log R \\ R' & R'^{-1} & R'^3 & R' \log R' \\ 1 & -R^{-2} & 3R^2 & \log R + 1 \\ 1 & -R'^{-2} & 3R'^2 & \log R' + 1 \end{vmatrix}$$

Si tratta di dimostrare che questi determinanti sono sempre differenti da 0. Consideriamo da primo il determinante D_0.

$$D_0 = \begin{vmatrix} 1 & \log R & R^2 & R^2 \log R \\ 1 & \log R' & R'^2 & R'^2 \log R' \\ 0 & \dfrac{1}{R} & 2R & R + 2R\log R \\ 0 & \dfrac{1}{R'} & 2R' & R' + 2R' \log R' \end{vmatrix}$$

Dagli elementi della seconda linea togliano quelli della prima. Allora nella prima colonna resta soltanto il primo elemento, e il determinante si riduce ad essere del 3° ordine. Al tempo stesso moltiplichiamo gli elementi della terza linea per R, e quella della quarta per R'. Otterremo:

$$R\,R'\,D_0 = \begin{vmatrix} \log R' - \log R & R'^2 - R^2 & R'^2 \log R' - R^2 \log R \\ 1 & 2\,R^2 & R^2 + 2\,R^2 \log R \\ 1 & 2\,R'^2 & R'^2 + 2\,R'^2 \log R' \end{vmatrix}$$

Sviluppiamo ora il determinante rispetto alla prima colonna. Si ottiene, fatte le riduzioni:

$$R\,R'\,D_0 = 4\,R'^2\,R^2 (\log R' - \log R)^2 - (R'^2 - R^2)^2,$$

ossia :

$$\frac{D_0}{4\,R\,R'} = \left(\log \frac{R'}{R}\right)^2 - \left(\frac{R'^2 - R^2}{2\,R\,R'}\right)^2 .$$

Perchè D_0 potesse annullarsi dovrebbe essere:

$$\log \frac{R'}{R} = \frac{R'^2 - R^2}{2\,R\,R'} \quad (*),$$

o ponendo $\dfrac{R'}{R} = x$:

$$\log x = \frac{x^2 - 1}{2\,x} . \tag{39}$$

Ma questa equazione, che è soddisfatta, per $x = 1$, non può esserlo per alcun valore di x, differente dall'unità. Ciò può vedersi osservando che la derivata del primo membro, ossia $\dfrac{1}{x}$, è sempre minore della derivata del secondo, che è $\dfrac{x^2 + 1}{2\,x^2}$. E infatti si ha :

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 > 0, \quad 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} > 0, \quad \frac{x^2 + 1}{x^2} > \frac{2}{x}, \quad \frac{1}{x} < \frac{x^2 + 1}{2\,x^2} .$$

Resta dunque escluso che l'equazione (39), soddisfatta da $x = 1$, possa esserlo da un altro valore di x.

(*) La soluzione $\log \dfrac{R'}{R} = -\dfrac{R'^2 - R^2}{2\,R\,R'}$ rimane esclusa, dovendo essere $R' > R$, e quindi $\log \dfrac{R'}{R} > 0$.

Il determinante D_0 è dunque differente da 0.

Consideriamo ora il determinante D_1. Se si moltiplicano gli elementi della terza linea per R, e si sottraggono da essi quelli della prima, e analogamente si moltiplicano quelli della quarta per R', e se ne sottraggono quelli della seconda, si ottiene:

$$R\,R'\,D_1 = \begin{vmatrix} R & \frac{1}{R} & R^3 & R\log R \\ R' & \frac{1}{R'} & R'^3 & R'\log R' \\ 0 & -\frac{2}{R} & 2\,R^3 & R \\ 0 & -\frac{2}{R'} & 2\,R'^3 & R' \end{vmatrix};$$

e sviluppando rispetto agli elementi della prima colonna:

$$R\,R'\,D_1 = R \begin{vmatrix} \frac{1}{R'} & R'^3 & R'\log R' \\ -\frac{2}{R} & 2\,R^3 & R \\ -\frac{2}{R'} & 2\,R'^3 & R' \end{vmatrix} - R' \begin{vmatrix} \frac{1}{R} & R^3 & R\log R \\ -\frac{2}{R} & 2\,R^3 & R \\ -\frac{2}{R'} & 2\,R'^3 & R' \end{vmatrix}$$

Chiamiamo questi due determinanti Δ_1, Δ'_1. Nel determinante Δ_1 moltiplico la prima linea per $2\,R'$, la seconda per R, la terza per R': poi divido per 2 la prima e la seconda colonna. Ottengo allora:

$$\Delta_1 = \frac{2}{R\,R'^2} \begin{vmatrix} 1 & R'^4 & 2\,R'^2 \log R' \\ -1 & R^4 & R^2 \\ -1 & R'^4 & R'^2 \end{vmatrix};$$

e sviluppando rispetto agli elementi della prima colonna si trova:

$$\Delta_1 = \frac{2}{R}\left\{(R^2 - R'^2) + 2\log R'\,(R^2 + R'^2)\right\}\left\{R^2 - R'^2\right\}.$$

Per calcolare Δ'_1 osserviamo che esso può ottenersi da Δ_1 ponendo R in luogo di R', R' in luogo di R, e poi scambiando tra loro la seconda e la terza linea, ossia mutando il segno del determinante. Sarà dunque:

$$\Delta'_1 = \frac{2}{R'}\left\{(R'^2 - R^2) + 2\log R\,(R'^2 + R^2)\right\}\left\{R^2 - R'^2\right\}.$$

Ma $R\,R'\,D_1 = R\,\Delta_1 - R'\,\Delta'_1$: per conseguenza:

$$R\,R'\,D_1 = 4\left\{(R^2 - R'^2) + (R^2 + R'^2)\log\frac{R'}{R}\right\}\left\{R^2 - R'^2\right\}.$$

Affinchè D_1 potesse annullarsi, dovrebbe essere:

$$(R^2 - R'^2) + (R^2 + R'^2)\log\frac{R'}{R} = 0,$$

ossia, posto $\frac{R'}{R} = x$:

$$\log x = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \qquad x > 1)$$

ciò che è assurdo, come si può verificare, osservando che per $x = 1$, le funzioni $\log x, \frac{x^2-1}{x^2+1}$ sono ambedue uguali a 0, e per $x > 1$ la derivata della prima è sempre maggiore della derivata della seconda. Dunque il determinante D_1 è differente da O.

Consideriamo ora il determinante D_m, per un valore qualunque di m maggiore di 1. Si ha:

$$D_m = \begin{vmatrix} R^m & R^{-m} & R^{m+2} & R^{-m+2} \\ R'^m & R'^{-m} & R'^{m+2} & R'^{-m+2} \\ m\,R^{m-1} & -m\,R^{-m-1} & (m+2)\,R^{m+1} & (-m+2)\,R^{-m+1} \\ m\,R'^{m-1} & -m\,R'^{-m-1} & (m+2)\,R'^{m+1} & (-m+2)\,R'^{-m+1} \end{vmatrix}.$$

Moltiplico gli elementi della terza linea per R, quelli della quarta per R', e sottraggo da essi rispettivamente quelli della prima e della seconda moltiplicati per m. Otterrò:

$$R\,R'\,D_m = \begin{vmatrix} R^m & R^{-m} & R^{m+2} & R^{-m+2} \\ R'^m & R'^{-m} & R'^{m+2} & R'^{-m+2} \\ 0 & -2\,m\,R^{-m} & 2\,R^{m+2} & 2\,(-m+1)\,R^{-m+2} \\ 0 & -2\,m\,R'^{-m} & 2\,R'^{m+2} & 2\,(-m+1)\,R'^{-m+2} \end{vmatrix}$$

Ora moltiplico gli elementi delle linee rispettivamente per $2\,m\,R^m$, $2\,m\,R'^m$, $-R^m$, $-R'^m$; poi divido per $2\,m$ gli elementi della prima e della seconda colonna, per 2 quelli della 3^a e della 4^a. Il determinante verrà ad esser moltiplicato per $\frac{1}{4}(R\,R')^{2m}$: e si avrà:

$$\frac{1}{4}(R\,R')^{2m+1}\,D_m = \begin{vmatrix} R^{2m} & 1 & m\,R^{2m+2} & m\,R^2 \\ R'^{2m} & 1 & m\,R'^{2m+2} & m\,R'^2 \\ 0 & 1 & -R^{2m+2} & (m-1)\,R^2 \\ 0 & 1 & -R'^{2m+2} & (m-1)\,R'^2 \end{vmatrix}.$$

Sviluppando rispetto agli elementi della prima colonna otterrò:

$$\frac{1}{4}(R\,R')^{2m+1}\,D_m = R^{2m}\,\Delta_m - R'^{2m}\,\Delta'_m\,, \tag{41}$$

ove:

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} 1 & m\,R'^{2m+2} & m\,R'^2 \\ 1 & -R^{2m+2} & (m-1)\,R^2 \\ 1 & -R'^{2m+2} & (m-1)\,R'^2 \end{vmatrix}$$

e Δ'_m si ottiene scambiando, in Δ_m, R con R', e mutando il segno.

Sviluppando Δ_m rispetto alla prima colonna, si ricava:

$$\Delta_m = -(m-1)\,R^2\,R'^2\,(R^{2m} - R'^{2m}) - m^2\,R'^{2m+4} + \\ + m\,(m-1)\,R'^{2m+2}\,.\,R^2 + m\,R^{2m+2}\,.\,R'^2;$$

ossia:

$$\Delta_m = -R^2\,R'^2\,(R'^{2m} - R^{2m}) - m^2\,R'^{2m+2}\,(R'^2 - R^2).$$

Quindi sarà:

$$\Delta'_m = -R^2\,R'^2\,(R'^{2m} - R^{2m}) - m^2\,R^{2m+2}\,(R'^2 - R^2).$$

E per la formula (40):

$$\frac{1}{4}(R\,R')^{2m+1}\,D_m = -R^2\,R'^2\,(R'^{2m} - R^{2m})\,(R^{2m} - R'^{2m}) - \\ - m^2\,(R'^2 - R^2)\,(R'^{2m+2}\,R^{2m} - R^{2m+2}\,R'^{2m})\,,$$

ovvero:

$$\frac{1}{4}(R\,R')^{2m+1}\,D_m = R^2\,R'^2\,(R'^{2m} - R^{2m})^2 - m^2\,R^{2m}\,R'^{2m}\,(R'^2 - R^2)^2.$$

Perchè D_m potesse annullarsi, dovrebbe essere:

$$R^2\,R'^2\,(R'^{2m} - R^{2m})^2 = m^2\,(R\,R')^{2m}\,(R'^2 - R^2)^2.$$

ed estraendo la radice quadrata:

$$R\,R'\,(R'^{2m} - R^{2m}) = m\,(R\,R')^m\,(R'^2 - R^2)\ (*),$$

e dividendo per $(R\,R')^{m+1}$:

$$\left(\frac{R'}{R}\right)^m - \left(\frac{R}{R'}\right)^m = m\left(\frac{R'}{R} - \frac{R}{R'}\right), \tag{41}$$

e finalmente, ponendo $\frac{R'}{R} = x$:

$$x^m - x^m = m\left(x - \frac{1}{x}\right). \tag{42}$$

Questa equazione dovrebbe esser soddisfatta per un valore di m maggiore dell'unità, e per un valore di x, anch'esso maggiore dell'unità.

Per dimostrare che ciò non può essere, supporremo di attribuire ad m un valore determinato, e mostreremo che facendo variare x oltre l' unità, il primo membro dell'equazione è sempre maggiore del secondo.

Poichè per $x = 1$ si annullano ambedue i membri, qualunque sia m, basterà provare che col crescere di x, la derivata del primo membro è sempre maggiore della derivata del secondo, ossia che:

$$m\,x^{m-1} + \frac{m}{x^{m+1}} > m\left(1 + \frac{1}{x^2}\right),$$

ovvero, moltiplicando per x, e dividendo per m:

$$x^m + \frac{1}{x^m} > x + \frac{1}{x},$$

od anche:

$$x\,(x^{m-1} - 1) > \frac{1}{x^m}\,(x^{m-1} - 1),$$

e dividendo per la quantità positiva $x^{m-1} - 1$:

$$x > \frac{1}{x^m},$$

ossia:

$$x^{m+1} > 1,$$

la qual'ultima disuguaglianza è evidentemente soddisfatta, essendo $x > 1$.

(*) Essendo $R' > R$, l'altra soluzione rimane esclusa.

Ne concludiamo che per $m > 1$, nessun valore di x, ossia di $\frac{R'}{R}$, può soddisfare l'equazione (42), cioè la (41). Dunque i determinanti D_m, per $m = 2, 3, \ldots$, sono tutti differenti da 0.

Ma si è dimostrato che anche i determinanti D_0 e D_1 sono differenti da 0. Per conseguenza potremo ora asserire che le costanti che compariscono nel secondo membro della formula (38), si possono tutte determinare in modo che, sopra i circoli C e C', la funzione Φ che essa rappresenta, e la sua derivata rispetto alla normale interna, prendano i valori voluti.

Ciò significa che la formula (38), supponendo le funzioni φ, ψ rappresentate dalle formule (33), dà l'espressione generale delle funzioni Φ che sodisfano alle condizioni del problema.

Risulta ancora, dalle cose dette, che la funzione:

$$r \log r \, (a \cos \theta + b \operatorname{sen} \theta),$$

nello spazio limitato da due circoli concentrici, non può esser rappresentata da un'espressione come $r^2 \varphi + \psi$. Possiamo anzi dire, in un certo senso, che essa è l'unica funzione, regolare in un tale spazio, che soddisfa all'equazione $\Delta^4 = 0$, tale che al contorno i suoi valori, e quelli della sua derivata rispetto alla normale interna, si possono rappresentare con serie di Fourier, e che pure non può esser posta sotto quella forma.

Per chiarir meglio questo punto, proponiamoci di determinare due funzioni φ, ψ, le quali soddisfino alle equazioni:

$$r^2 \varphi + \psi = r \log r \, (a \cos \theta + b \operatorname{sen} \theta). \tag{43}$$

$$\Delta^2 \varphi = 0, \quad \Delta^2 \psi = 0.$$

Si dovrà trovare che due tali funzioni non sono esprimibili colle formule (33).

Ricordiamo la formula che dà il Δ^2, espresso colle coordinate polari r, θ. Si ha:

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tag{44}$$

Applicando questa formula all'equazione (43), si ottiene:

$$4\left(\varphi + r \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) = \frac{2}{r}(a \cos \theta + b \operatorname{sen} \theta),$$

ossia:

$$\frac{\partial (r \varphi)}{\partial r} = \frac{1}{2r}(a \cos \theta + b \operatorname{sen} \theta);$$

dalla quale, integrando, si ricava:

$$r\varphi = \frac{1}{2}\log r\,(a\cos\theta + b\,\mathrm{sen}\,\theta) + f(\theta),$$

ove f è una funzione da determinarsi. Divido per r, e trovo:

$$\varphi = \frac{1}{2}\frac{\log r}{r}(a\cos\theta + b\,\mathrm{sen}\,\theta) + \frac{f}{r}. \tag{45}$$

La funzione φ deve soddisfare all'equazione $\Delta^2 = 0$. Dovrà dunque aversi:

$$\Delta^2\left\{\frac{1}{2}\frac{\log r}{r}(a\cos\theta + b\,\mathrm{sen}\,\theta) + \frac{f}{r}\right\} = 0;$$

ed eseguendo il Δ^2 per mezzo della formula (44):

$$-\frac{1}{r^3}(a\cos\theta + b\,\mathrm{sen}\,\theta) + \frac{1}{r^3}\left(f + \frac{d^2 f}{d\theta^2}\right) = 0.$$

Avremo dunque, per determinare la f, l'equazione differenziale:

$$f + \frac{d^2 f}{d\theta^2} = a\cos\theta + b\,\mathrm{sen}\,\theta. \tag{46}$$

Poniamo:

$$f = \frac{\theta}{2}(a\,\mathrm{sen}\,\theta - b\cos\theta) + g, \tag{47}$$

ove la g è una nuova funzione della variabile θ. Si ricava:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} = a\cos\theta + b\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{\theta}{2}(a\,\mathrm{sen}\,\theta - b\cos\theta) + \frac{d^2 g}{d\theta^2};$$

e sommando questa equazione colla precedente:

$$f + \frac{d^2 f}{d\theta^2} = a\cos\theta + b\,\mathrm{sen}\,\theta + g + \frac{d^2 g}{d\theta^2}.$$

Dovrà quindi essere, per la (46):

$$g + \frac{d^2 g}{d\theta^2} = 0,$$

equazione il cui integrale generale possiamo scriverlo:

$$g + \frac{1}{2}(c\cos\theta + c'\,\mathrm{sen}\,\theta),$$

ove c e c' sono costanti. Sarà dunque, sostituendo nella (47):

$$f = \frac{1}{2}\{\theta(a\cos\theta + b\,\mathrm{sen}\,\theta) + c\cos\theta + c'\,\mathrm{sen}\,\theta\};$$

e ponendo questa espressione della f nella formula (45):

$$\varphi = \frac{1}{2r} \{\log r\,(a \cos\theta + b \operatorname{sen}\theta) + \theta\,(a \operatorname{sen}\theta - b\cos\theta) + c\cos\theta + c' \operatorname{sen}\theta\}.$$

Dalla (43) potremo ora ricavare la ψ, che sarà data dalla formula:

$$\psi = \frac{r}{2} \{\log r\,(a\cos\theta + b\operatorname{sen}\theta) - \theta\,(a\operatorname{sen}\theta - b\cos\theta) - c\cos\theta - c'\operatorname{sen}\theta\}.$$

Queste funzioni, come si era preveduto, non si possono rappresentare per mezzo delle formule (33), a causa delle funzioni, non uniformi:

$$\frac{\theta \operatorname{sen}\theta}{r}, \quad \frac{\theta\cos\theta}{r},$$

che in esse compariscono.

Tuttavia il problema proposto si è potuto risolvere in tutta la sua generalità: la funzione Φ è sempre rappresentata dalla formula:

$$\Phi = r^2 \varphi + \psi + r \log r\,(a\cos\theta + b\operatorname{sen}\theta).$$

IV.

8. Una funzione Ψ, di due variabili x, y, regolare in un certo campo, e che soddisfa all'equazione:

$$\Delta^{2n}\Psi = 0,$$

si può sempre esprimere colla formula:

$$\Psi = \sum_{h=0}^{h=n-1} p^{(h)} \varphi^{(h)}, \tag{48}$$

ove le funzioni φ, φ', φ'',... $\varphi^{(h-1)}$, soddisfano all'equazione $\Delta^2 = 0$, e sono regolari in quello stesso campo; e $p^{(h)}$ è il prodotto di h funzioni lineari. (Vedi § 2.)

La formula (30) permette di determinare la funzione Ψ, nello spazio indefinito S, limitato da una retta σ, dati su questa i valori della funzione stessa, e delle sue derivate d'ordine 1, 2,... $n-1$, rispetto alla normale interna, che chiameremo ancora:

$$u_0,\ u_1, \dots\ u_i, \dots\ u_{n-1}.$$

Possiamo assumere, come asse delle y, la retta σ, e, posta in un suo punto qualunque l'origine delle coordinate, prendere come direzione positiva dell'asse delle x quella rivolta verso S.

Sarà allora:

$$\Psi_{x=0} = u_0\,, \quad \left[\frac{\partial^i \Psi}{\partial x^i}\right]_{x=0} = u_i \qquad (i = 1\,,\ 2, \ldots\ n-1).$$

Ponendo in generale:

$$p^{(i)} = x^i\,,$$

otterremo la funzione Ψ rappresentata dalla formula:

$$\Psi = \varphi + x\,\varphi' + x^2\,\varphi'' + \ldots + x^{n-1}\,\varphi^{(n-1)}.$$

La determinazione della funzione Ψ si fa con un procedimento analogo a quello seguito nel caso dello spazio limitato da un contorno circolare.

Cerchiamo l'espressione della derivata d'ordine i, rispetto ad x, della funzione Ψ, per $x = 0$, ed uguagliamola ad u_i. Avremo evidentemente una formula del tipo:

$$\left[P_i\,\varphi^{(i)} + \Sigma\, C \frac{\partial^m \varphi^{(h)}}{\partial x^m}\right]_{x=0} = u_i\,,$$

in cui:

$$P_i = i!\,, \quad h < i.$$

Le C sono costanti. La somma è estesa a un certo numero di tèrmini, che dipende da n, e da i.

Ora la funzione chiusa in parentesi soddisfa all'equazione $\Delta^2 = 0$. Dunque, applicando una nota formula, si avrà in un punto $(x\,y)$ dello spazio S:

$$P_i\,\varphi^{(i)} + \Sigma\, C \frac{\partial^m \varphi^{(h)}}{\partial x^m} = \frac{1}{\pi} \int_\sigma \frac{x\,u_i}{r^2}\, d\,\sigma,$$

ove r è la distanza di un punto qualunque della retta σ, del punto $(x\,y)$ di S, u_i il valore della funzione relativo a quel punto di σ.

Si suppongono soddisfatte dalle quantità u_i, date sulla retta σ, quelle condizioni colle quali l'integrale che comparisce nella formula precedente, ha un significato: si suppone cioè che nel punto all'infinito della retta le quantità u_i divengano infinitesime del 2° ordine (*).

Possiamo scrivere:

$$\varphi^{(i)} = \frac{1}{P_i}\left\{\frac{1}{\pi} \int_\sigma \frac{x\,u_i}{r^2}\, d\,\sigma - \Sigma\, C \frac{\partial^m \varphi^{(h)}}{\partial x^m}\right\} \qquad (h < i),$$

(*) E d'ora in avanti queste condizioni, nei casi analoghi, le supporremo sempre soddisfatte, anche senza dirlo esplicitamente.

e questa formula, analoga a quella trovata per il caso di un contorno circolare, risolve il problema, giacchè dà una qualunque delle funzioni:

$$\varphi,\ \varphi',\ \varphi'',\ldots\ \varphi^{(i)},\ldots\ \varphi^{(n-1)},$$

espressa mediante le precedenti.

In particolare, per la prima si ha:

$$\varphi = \frac{1}{\pi}\int_\sigma \frac{x\,u_0}{r^2}\,d\sigma;$$

e per la seconda:

$$\varphi' = \frac{1}{\pi}\int_\sigma \frac{x\,u_1}{r^2}\,d\sigma - \frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

che può scriversi, sostituendo a φ il suo valore:

$$\varphi' = \frac{1}{\pi}\int_\sigma \frac{x\,u_1 - \left(1 - 2\,\frac{x^2}{r^2}\right)u_0}{r^2}\,d\sigma.$$

Se dunque si vuol determinare nello spazio S, la funzione Ψ, finita e continua in quello spazio, e che soddisfa alla equazione $\Delta^4 = 0$, dati sulla retta σ i valori u_0, u_1, della funzione stessa, e della sua derivata rispetto alla normale interna, porremo:

$$\Psi = \varphi + x\,\varphi'.$$

I valori di φ e di φ' sono dati dalle formule precedenti. Otteniamo così:

$$\Psi = \frac{1}{\pi}\int_\sigma \frac{x^2}{r^2}\left(2\,\frac{x}{r^2}\,u_0 + u_1\right)d\sigma.$$

9. Una funzione Ψ, regolare in uno spazio qualunque S, e che soddisfa all'equazione $\Delta^2 = 0$, è pure determinata in tutti i suoi punti, quando al contorno si conoscano i valori di Ψ e di $\Delta^2\Psi$. Questo problema si riduce a determinare successivamente, nello spazio S, due funzioni che soddisfano alla equazione $\Delta^2 = 0$, dati i loro valori al contorno.

Nel caso di uno spazio racchiuso da un contorno circolare, o limitato da una retta indefinita, rappresenteremo la funzione Ψ mediante due funzioni armoniche φ, φ', che si potranno determinare indipendentemente una dall'altra.

Ricordiamo che se θ è una funzione regolare nello spazio S, e che soddisfa all'equazione $\Delta^2=0$, esiste una sola funzione θ', pure regolare in S, che soddisfi alle due equazioni:

$$\Delta^2\theta'=0, \quad \theta'+r\frac{\partial\theta'}{\partial r}=\theta, \qquad (r=\sqrt{x^2+y^2}) \tag{49}$$

ed è quella data dalla formula:

$$\theta'=\frac{1}{r}\int_0^r\theta\,dr \text{ ecc. } (*). \tag{50}$$

Ciò posto, supponiamo che il contorno da cui è limitato lo spazio S sia una circonferenza di raggio R, nel cui centro si trovi l'origine delle coordinate. Converrà porre:

$$\Psi=\varphi+(r^2-R^2)\varphi'.$$

Si ricava:

$$\Delta^2\Psi=4\left(\varphi'+r\frac{\partial\varphi'}{\partial r}\right).$$

Al contorno sia:

$$\Psi=u, \quad \Delta^2\Psi=v,$$

e quindi:

$$\varphi'+r\frac{\partial\varphi'}{\partial r}=\frac{1}{4}v.$$

Sarà nel punto di S di coordinate r, ω:

$$\varphi'+r\frac{\partial\varphi'}{\partial r}=\frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)v}{R+r^2-2Rr\cos(\alpha-\omega)}d\alpha,$$

(*) Si suppongono soddisfatte le condizioni, analoghe a quelle poste nel Cap. I. § 3. Si suppone cioè che nell'interno di S esista un punto tale che ogni retta uscente da esso incontri il contorno in sol punto. Da questa proprietà deve godere l'origine delle coordinate.

ove la v si riferisce al punto di coordinate R, α. E quindi con una formula analoga alla (50):

$$\varphi' = \frac{1}{8\pi r}\int_0^r d\,r \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)\,v}{R^2 + r^2 - 2\,R\,r\cos(\alpha - \omega)}\,d\,\alpha.$$

Si ha poi al contorno:

$$\varphi = u,$$

e per conseguenza nel punto $(r,\ \omega)$ di S:

$$\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)\,u}{R^2 + r^2 - 2\,R\,r\cos(\alpha - \omega)}\,d\,\alpha.$$

Avremo dunque la formula:

$$\Psi = (r^2 - R^2)\frac{1}{8\pi r}\int_0^r d\,r \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)\,v}{R^2 + r^2 - 2\,R\,r\cos(\alpha - \omega)}\,d\,\alpha +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)\,u}{R^2 + r^2 - 2\,R\,r\cos(\alpha - \omega)}\,d\,\alpha,$$

che può anche scriversi:

$$\Psi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2 - R^2}{4\,r}\int_0^r \frac{(R^2 - r^2)\,v}{R^2 + r^2 - 2\,R\,r\cos(\alpha - \omega)}\,d\,r +\right.$$

$$\left. + \frac{(R^2 - r^2)\,u}{R^2 + r^2 - 2\,R\,r\cos(\alpha - \omega)}\right]d\,\alpha.$$

Possiamo eseguire l'integrazione tra 0 ed r. Otterremo allora:

$$\Psi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\left[\frac{R^2 - r^2}{4\,r}\left\{r^2 + R\left(\cos(\alpha - \omega)\log\frac{R^2 + r^2 - 2\,R\,r\cos(\alpha - \omega)}{R^2} +\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - 2\,\mathrm{sen}\,(\alpha - \omega)\left[\mathrm{arc\,tag}\frac{r - R\cos(\alpha - \omega)}{R\,\mathrm{sen}\,(\alpha - \omega)} + \frac{\pi}{2} - (\alpha - \omega)\right]\right)\right\}v +\right.$$

$$\left. + \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2\,R\,r\cos(\alpha - \omega)}\,u\right]\Bigg]d\,a.$$

10. Se lo spazio S in cui si vuol determinare la funzione Ψ, è quello limitato della retta $x = 0$, porremo:

$$\Psi = \varphi + x\,\varphi',$$

da cui si ricava:

$$\Delta^2\,\Psi = 2\,\frac{\partial\,\varphi'}{\partial\,x}.$$

Sarà dunque, su quella retta, detti u, v i valori che ivi assumono Ψ e $\Delta^2\,\Psi$:

$$\varphi = u, \quad \frac{\partial\,\varphi'}{\partial\,x} = \frac{1}{2}\,v,$$

e in un punto qualunque dello spazio S:

$$\varphi = \frac{1}{\pi}\int_\tau \frac{x\,u}{r^2}\,d\,\tau, \qquad \varphi' = \frac{1}{\pi}\int_\tau \frac{1}{2}\log r\,.\,v\,d\,\tau,$$

ove r è la distanza dal punto di S che si considera, al punto della retta τ a cui si riferiscono i valori u, v di Ψ e $\Delta^2\,\Psi$. Per conseguenza:

$$\Psi = \frac{1}{\pi}\int_\tau x\left(\frac{1}{2}\log r\,.\,v + \frac{u}{r^2}\right)d\,\tau.$$

11. Problemi analoghi si possono risolvere nello spazio a tre dimensioni.

Una funzione regolare Ψ, che soddisfa all'equazione $\Delta^{2n} = 0$, dati i valori della funzione stessa, e delle sue derivate d'ordine $1, 2, \ldots n-1$, rispetto alla normale interna, sulla superficie di una sfera di raggio R, col centro nell'origine delle coordinate, si potrà determinare in tutti i punti della sfera, facendo uso della formula (18), ove porremo:

$$p^{(h)} = (r^2 - R^2)^h, \qquad (i = 0,\ 1, \ldots, n-1),$$

essendo ora:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Porremo invece:

$$p^{(h)} = x^h,$$

se quei valori sono dati sul piano $x = 0$.

Il problema di determinare una funzione Ψ, regolare nello spazio limitato da una superficie qualunque, sulla quale si conoscano i valori di Ψ e di $\Delta^2\,\Psi$, e che deve soddisfare all'equazione $\Delta^4\,\Psi = 0$, si riduce alla determinazione successiva di due funzioni, regolari in quello spazio, e che soddisfano all'equazione $\Delta^2 = 0$, conoscendosi i loro valori alla superficie.

Nel caso particolare che i valori di Ψ e di $\Delta^2\Psi$ sieno dati sulla superficie di una sfera di raggio R, faremo uso della formula:

$$\Psi = \varphi + (r^2 - R^2)\varphi', \quad (\Delta^2\varphi = \Delta^2\varphi' = 0).$$

Porremo finalmente:

$$\Psi = \varphi + x\varphi',$$

quando la superficie è il piano $x = 0$. E le funzioni φ, φ', in questi due casi si potranno determinare indipendentemente una dall'altra.

V.

12. Faremo ora vedere come il principio di rappresentare una funzione che soddisfa all'equazione $\Delta^4 = 0$, mediante due funzioni che soddisfano all'equazione $\Delta^2 = 0$, possa esser utilmente applicato allo studio di alcuni problemi di Elasticità, nei quali l'equazione $\Delta^4 = 0$ è appunto quella che ha maggior importanza.

Le componenti ξ, η, ζ, dello spostamento, per i punti di un solido elastico, isotropro, sollecitato da sole forze agenti alla sua superficie, soddisfano alle tre equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} &\Delta^2\xi + \frac{1}{1-2m}\frac{\partial\theta}{\partial x} = 0, \\ &\Delta^2\eta + \frac{1}{1-2m}\frac{\partial\theta}{\partial y} = 0, \\ &\Delta^2\zeta + \frac{1}{1-2m}\frac{\partial\theta}{\partial z} = 0, \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} &\theta = \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}, \\ &m = \text{coef.}^{\text{e}} \text{ di contraz.}^{\text{e}} \end{aligned} \right\} \tag{51}$$

da cui si ricava facilmente:

$$\Delta^2\theta = 0,$$

$$\Delta^4\xi = 0, \quad \Delta^4\eta = 0, \quad \Delta^4\zeta = 0.$$

Le tre funzioni ξ, η, ζ, si possono rappresentare, in varii modi, mediante quattro sole funzioni, che soddisfano all'equazione $\Delta^2 = 0$.

Sia, da primo, φ una funzione che soddisfi alle due equazioni:

$$\left.\begin{aligned} \Delta^2 \varphi &= 0 \\ 2\varphi + 4r\frac{\partial \varphi}{\partial r} &= -\frac{1}{1-2m}\theta. \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Una tale funzione esiste in generale, come già abbiamo avuto occasione di vedere. (Confr. eq. (16), § 3.)

Poniamo allora:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= (r^2 - R^2)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \lambda, \\ \eta &= (r^2 - R^2)\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu, \\ \zeta &= (r^2 - R^2)\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \nu. \end{aligned}\right\} \left(\begin{aligned} &R = \text{cost.} \\ &r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}\right) \tag{53}$$

Da queste equazioni, tenendo presenti le (52), si ricava:

$$\Delta^2 \xi = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{1-2m}\theta\right) + \Delta^2 \lambda,$$

$$\Delta^2 \eta = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{1-2m}\theta\right) + \Delta^2 \mu,$$

$$\Delta^2 \zeta = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{1}{1-2m}\theta\right) + \Delta^2 \nu.$$

Dunque, per le (51), dovrà essere:

$$\Delta^2 \lambda = 0, \quad \Delta^2 \mu = 0, \quad \Delta^2 \nu = 0. \tag{54}$$

Dalle equazioni (53) si deduce ancora, derivando la prima rispetto ad x, la seconda rispetto ad y, la terza rispetto a z, e sommando:

$$\theta = 2r\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z};$$

e confrontando questa colla seconda delle (51):

$$(1-2m)\varphi + (3-4m)r\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z}\right) = 0, \tag{55}$$

equazione che lega le quattro funzioni φ, λ, μ, ν.

Le formule (53), (54) e (55), permettono di determinare in modo assai semplice la deformazione di una sfera, data la deformazione della sua superficie (*).

13. Ora invece poniamo:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= z\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \lambda, \\ \eta &= z\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu, \\ \zeta &= z\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \nu, \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

ove le funzioni φ, λ, μ, ν non sono più quelle del caso precedente. La funzione φ soddisfi ora alle due equazioni:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta^2 \varphi = 0 \\ &\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{1}{2(1-2m)}\theta \qquad \text{(Confr.}^{\text{a}}\text{ colle eq.}^{\text{i}}\text{ (9) del § 1.)} \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Sarà evidentemente, per le formule (56) e (57):

$$\Delta^2 \xi = -\frac{1}{1-2m}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \Delta^2 \lambda,$$

$$\Delta^2 \eta = -\frac{1}{1-2m}\frac{\partial \theta}{\partial y} + \Delta^2 \mu,$$

$$\Delta^2 \zeta = -\frac{1}{1-2m}\frac{\partial \theta}{\partial z} + \Delta^2 \nu,$$

e quindi, per le (51):

$$\Delta^2 \lambda = 0, \quad \Delta^2 \mu = 0, \quad \Delta^2 \nu = 0.$$

Si ha inoltre dalle (56):

$$\theta = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z};$$

e per la seconda delle (57):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = G\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z}\right) \qquad \left(G = \frac{2-4m}{3-4m}\right). \tag{58}$$

(*) Almansi, *Sulla deformazione della sfera elastica.* Memorie dell'Acc. R. delle Scienze di Torino, ser. II, vol. XLVII.

Di queste formule ci varremo per determinare la deformazione dello spazio S, limitato dal piano $z = 0$, che diremo σ, e corrispondente ai valori positivi di z, quando, per ogni puuto $(x' y' 0)$ del piano σ si conoscono le componenti ξ', η', ζ', dello spostamento (*).

Perciò, in luogo delle funzioni λ, μ, ν, converrà introdurre le funzioni u, v, w, ponendo:

$$\Delta^2 u = 0\,, \qquad \Delta^2 v = 0\,, \qquad \Delta^2 w = 0\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \lambda, \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = \mu, \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = \nu.$$

Allora le formule (56) diventeranno:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= z\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \eta &= z\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \zeta &= z\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z}; \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

e la (58):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = G\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

In particolare quest'ultima equazione varrà per i punti del piano σ, nei quali, dunque, la derivata, rispetto alla normale z, della funzione φ, è uguale a quella della funzione $4\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z}\right)$. Ma queste due funzioni devono esser regolari nello spazio S, e soddisfare all'equazione $\Delta^2 = 0$. Ne segue che non potranno differire se non per una costante che possiamo supporre nulla, giacchè nelle formule (56) compariscono soltanto le derivate della funzione φ.

Si avrà per conseguenza:

$$\varphi = G\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right). \tag{60}$$

(*) Il problema della deformazione del solido limitato da un piano indefinito, date su questo piano le componenti dello spostamento, o della tensione, è stato risoluto per la prima volta dal prof. CERRUTI, *Ricerche intorno all'equilibrio dei corpi elastici isotropi.* R. Accademia dei Lincei, ser. III, vol. XIII.

Ora sul piano σ si hanno le formule:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \xi', \quad \frac{\partial v}{\partial n} = \eta', \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \zeta' \qquad (n = z = \text{norm.}^{\text{a}}\ \text{int.}^{\text{a}}).$$

E poichè le funzioni u, v, w, che supponiamo regolari nello spazio S, soddisfano all'equazione $\Delta^2 = 0$, avremo, per una nota formula, in un punto qualunque $(x\, y\, z)$ di S, tralasciando una costante che non ha influenza:

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \frac{\xi'}{r} d\sigma,$$

$$v = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \frac{\eta'}{r} d\sigma, \qquad (r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2})$$

$$w = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \frac{\zeta'}{r} d\sigma;$$

e sostituendo nella formula (60):

$$\varphi = -\frac{G}{2\pi} \int_\sigma \frac{(x-x')\,\xi' + (y-y')\,\eta' + z\,\zeta'}{r^3} d\sigma,$$

che può scriversi, più semplicemente:

$$\varphi = -\frac{G}{2\pi} \int_\sigma \frac{k' \cos\alpha}{r^2} d\sigma,$$

ove k' rappresenta lo spostamento del punto $(x'\, y'\, 0)$, α l'angolo che la sua direzione fa colla direzione r.

Così abbiamo determinate le quattro fuuzioni che compariscono nelle formule (56); e il problema è risoluto.

VI.

14. Supponiamo che sul piano σ, invece degli spostamenti ξ', η', ζ', si conoscano le componenti F, G, H della tensione.

Le sei tensioni interne, che chiameremo:

$$T_{xx}, \quad T_{yy}, \quad T_{zz},$$
$$T_{yz}, \quad T_{zx}, \quad T_{xy},$$

soddisfano alle tre equazioni differenziali:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial T_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial T_{xz}}{\partial z}=0,\\
&\frac{\partial T_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial T_{yz}}{\partial z}=0, \qquad (T_{xy}=T_{yx}, \text{ ecc.})\\
&\frac{\partial T_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial T_{zz}}{\partial z}=0,
\end{aligned}\right\} \tag{61}$$

che rappresentano le condizioni di equilibrio: e alle altre sei:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta^2 T_{xx}=2M\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \qquad \Delta^2 T_{yz}=2M\frac{\partial^2 T}{\partial y\,\partial z},\\
&\Delta^2 T_{yy}=2M\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \qquad \Delta^2 T_{zx}=2M\frac{\partial^2 T}{\partial z\,\partial x},\\
&\Delta^2 T_{zz}=2M\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \qquad \Delta^2 T_{xy}=2M\frac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial y},
\end{aligned}\right\} \tag{62}$$

ove:

$$T=T_{xx}+T_{yy}+T_{zz}, \qquad M=-\frac{1}{2(1+m)}.$$

La funzione T è legata alla dilatazione θ dalla formula:

$$T=\frac{E}{1-2m}\theta, \qquad (E=\text{modulo di elasticità.}) \tag{63}$$

e quindi soddisfa come θ all'equazione:

$$\Delta^2=0.$$

Poniamo:

$$\left.\begin{aligned}
T_{zx}&=Mz\frac{\partial T}{\partial x}+\lambda,\\
T_{zy}&=Mz\frac{\partial T}{\partial y}+\mu,\\
T_{zz}&=Mz\frac{\partial T}{\partial z}+\nu
\end{aligned}\right\} \tag{64}$$

Si ricava:

$$\Delta^2 T_{zx} = 2M \frac{\partial^2 T}{\partial z\, \partial x} + \Delta^2 \lambda,$$

$$\Delta^1 T_{zy} = 2M \frac{\partial^2 T}{\partial z\, \partial y} + \Delta^2 \mu,$$

$$\Delta^2 T_{zz} = 2M \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \Delta^2 \nu.$$

Dovrà dunque essere, per le formule (62):

$$\Delta^2 \lambda = 0, \quad \Delta^2 \mu = 0, \quad \Delta^2 \nu = 0.$$

Introduciamo le funzioni u, v, w, regolari nello spazio S, definite dalle equazioni:

$$\Delta^2 u = 0, \quad \Delta^2 v = 0, \quad \Delta^2 w = 0.$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \lambda, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \mu, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \nu. \tag{65}$$

Sul piano σ sarà, per le (64) e (65):

$$\frac{\partial u}{\partial z} = T_{zx}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = T_{zy}, \quad \frac{\partial w}{d z} = T_{zz}.$$

Ma nei punti di questo piano le tensioni T_{zx}, T_{zy}, T_{zz}, non sono altro che le componenti della tensione esterna, cambiate di segno: e la direzione z coincide colla direzione della normale interna n. Potremo dunque scrivere, per i punti di σ:

$$\frac{\partial u}{d n} = -F, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = -G, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = -H.$$

Ne segue che in un punto qualunque $(x y z)$ di S si avrà, tralasciando delle costanti che non hanno influenza:

$$u = -\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{F}{r}\, d\sigma, \quad v = -\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{G}{r}\, d\sigma, \quad w = -\int_\sigma \frac{H}{r}\, d\sigma, \tag{66}$$

ove, al solito, r rappresenta la distanza dal punto $(x y z)$ di S, al punto $(x' y' 0)$ di σ, a cui si riferiscono le componenti F, G, H, della tensione.

Consideriamo ora l'ultima delle equazioni (61): Ponendo $M z \dfrac{\partial T}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial z}$, in luogo di T_{zz}, potremo scriverla:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(MT + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\left(\frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y}\right) - Mz\frac{\partial^2 T}{d z^2}.$$

Sul piano $z = 0$, sarà dunque:

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(MT + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\right).$$

Ma, nel primo membro, la funzione in parentesi soddisfa all'equazione $\Delta^2 = 0$. Sarà, per conseguenza nel punto $(x\,y\,z)$ di S:

$$MT + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{1}{r}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\right) d\sigma,$$

nella qual formula abbiamo tralasciata la costante che vi comparirebbe, giacchè supponiamo che la dilatazione θ, e quindi la funzione T, si annulli all'infinito.

Risolvendo rispetto a T, otteniamo:

$$T = \frac{1}{M}\left\{-\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{1}{r}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\right) d\sigma\right\}; \tag{67}$$

e sostituendo a w il suo valore, dato dall'ultima delle (66):

$$T = \frac{1}{2\pi M}\int_\sigma \frac{1}{r}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{zH}{r^2}\right) d\sigma.$$

Così conosciamo tutte e quattro le funzioni che compariscono nelle formule (64), e quindi ancora le tre tensioni interne T_{zx}, T_{zy}, T_{zz}, ossia le componenti della tensione che agisce sugli elementi dei piani paralleli a σ.

Moltiplicando la funzione T per il fattore $\frac{E}{1-2m}$, otterremo, per un punto qualunque di S, la dilatazione θ.

15. La formula (67) si presta alla ricerca dei valori che assume la funzione T sul piano $z = 0$. Osserviamo infatti che l'integrale che comparisce nel suo secondo membro, ha un valore ben determinato in tutti punti dello spazio, e non subisce discontinuità quando il punto attraversa il piano σ. Si ha inoltre, sul piano σ: $\frac{\partial w}{\partial z} = T_{zz} = -H$. Per conseguenza la formula considerata varrà anche per i punti di questo piano. E sarà, detta T' la funzione T

per $z=0$:

$$T' = \frac{1}{M}\left\{H + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{1}{r}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\right) d\sigma\right\}, \tag{68}$$

ove s'intende che r vale $\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$.

Ciò posto, ci sarà facile determinare una funzione k, che dovremo tra poco introdurre nel nostro calcolo, la quale soddisfi alle due equazioni:

$$\Delta^2 k = 0\,, \quad \frac{\partial k}{d z} = \theta,$$

e inoltre sia finita e continua in tutto lo spazio S, e si annulli all'infinito.

Sarà infatti, nei punti del piano σ, dicendo θ' la dilatazione θ, per $z=0$:

$$\frac{\partial k}{\partial n} = \theta';$$

e quindi in un punto qualunque di S:

$$k = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\theta'}{r}\, d\sigma\,. \tag{69}$$

Il valore di θ', conoscendosi già quello di T', lo ricaveremo immediatamente dalla formula (63), che ci dà:

$$\theta' = \frac{1-2m}{E}\, T'\,.$$

16. Vediamo ora di ottenere la componente ξ, η, ζ dello spostamento. Ricordiamo che esse soddisfano alle equazioni:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta^2 \xi + \frac{1}{1-2m}\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \\ &\Delta^2 \eta + \frac{1}{1-2m}\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \qquad \left(\theta = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right) \\ &\Delta^2 \zeta + \frac{1}{1-2m}\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

Poniamo:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= -\frac{1}{2(1-2m)}\left(z\frac{\partial k}{\partial x} + \varphi\right), \\ \eta &= -\frac{1}{2(1-2m)}\left(z\frac{\partial k}{\partial y} + \psi\right), \\ \zeta &= -\frac{1}{2(1-2m)}\left(z\frac{\partial k}{\partial z} + \chi\right), \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

essendo k la funzione considerata al par. precedente. Il problema è ridotto a determinare le tre funzioni φ, ψ, χ.

Dalle (71) si ricava, poichè $\frac{\partial k}{\partial z} = \theta$:

$$\Delta^2 \xi = -\frac{1}{2(1-2m)}\left(2\frac{\partial \theta}{\partial x} + \Delta^2 \varphi\right),$$

$$\Delta^2 \eta = -\frac{1}{2(1-2m)}\left(2\frac{\partial \theta}{\partial y} + \Delta^2 \psi\right),$$

$$\Delta^2 \zeta = -\frac{1}{2(1-2m)}\left(2\frac{\partial \theta}{\partial z} + \Delta^2 \chi\right).$$

Dunque, per le formule (70), dovrà essere:

$$\Delta^2 \varphi = 0, \qquad \Delta^2 \psi = 0, \qquad \Delta^2 \chi = 0.$$

Ricordiamo le formule che forniscе la teoria dell'elasticità, per esprimere le tensioni T_{zx}, T_{zy}, T_{zz}, mediante gli spostamenti ξ, η, ζ. Esse sono le seguenti:

$$T_{zx} = E\,\frac{1}{2(1+m)}\left\{\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right\},$$

$$T_{zy} = E\,\frac{1}{2(1+m)}\left\{\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right\},$$

$$T_{zz} = E\,\frac{1}{2(1+m)}\left\{\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{m}{1-2m}\theta\right\}.$$

Sostituendo a ξ, η, ζ, le loro espressioni date dalle formule (71), e ponendo per semplicità $-\frac{2}{E}(1+m)(1-2m) = A$, si ricava:

$$\left.\begin{aligned} A\,T_{zx} &= 2z\frac{\partial^2 k}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}(k+\chi) + \frac{\partial \varphi}{\partial z},\\ A\,T_{zy} &= 2z\frac{\partial^2 k}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial}{\partial y}(k+\chi) + \frac{\partial \psi}{\partial z},\\ A\,T_{zz} &= 2z\frac{\partial^2 k}{\partial z^2} + 2\frac{\partial k}{\partial z} + 2\frac{\partial \chi}{\partial z} - 2m\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (72)$$

L'ultima di queste, sostituendo θ a $\frac{\partial k}{\partial z}$, potrà scriversi:

$$\frac{\partial \chi}{\partial z} = \frac{A}{2}T_{zz} - (1-m)\theta - z\frac{\partial^2 k}{\partial z^2}.$$

Sul piamo σ sarà dunque:

$$\frac{\partial \chi}{\partial z} = \frac{A}{2}H - (1-m)\theta\,;$$

e in un punto qualunque di S, ponendo la condizione che all'infinito lo spostamento ξ, e quindi la funzione χ, debba annullarsi:

$$\chi = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{1}{r}\left(\frac{A}{2}H - \{1-m\}\,\theta'\right)d\sigma\,. \tag{73}$$

La funzione χ è così determinata.

Nella prima e nella seconda delle formule (72) compariscono le derivate della funzione $k+\chi$ rispetto ad x ed y. Dalle equazioni (69) e 73), posto per brevità $\frac{A}{2}H - m\,\theta' = U$, si ricava:

$$k + \chi = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{1}{r}\,U\,d\sigma. \tag{74}$$

Consideriamo la funzione:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial x}\,d\sigma. \tag{75}$$

Dico che si ha:

$$\varphi_1 = \frac{\partial(k+\chi)}{\partial x}\,.$$

Infatti sul piano σ sarà, per le formule (74) e (75):

$$\frac{\partial}{\partial z}(k+\chi) = U\,, \qquad \frac{\partial}{\partial z}\varphi_1 = \frac{\partial U}{\partial x},$$

e quindi:

$$\frac{\partial}{\partial z}\varphi_1 = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial(k+\chi)}{\partial x}\,.$$

Ma le funzioni φ_1 e $\frac{\partial(k+\chi)}{\partial x}$ sono regolari nello spazio S, soddisfano all'equazione $\Delta^2 = 0$, e si annullano all'infinito. Sarà dunque in tutto S:

$$\varphi_1 = \frac{\partial(k+\chi)}{\partial x}.$$

Analogamente, se poniamo:

$$\varphi_2 = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial y} d\sigma,$$

sarà:

$$\varphi_2 = \frac{\partial (k + \chi)}{\partial y}.$$

La U è espressa mediante le quantità H, e θ' ossia $\frac{1-2m}{E} T'$. La T' è data dalla formula (68), e le sue derivate rispetto ad x ed y, analogamente a quanto si è veduto per la funzione $k + \chi$, si otterranno derivando, rispetto ad x ed y, la quantità F, G, H, che compariscono sotto il segno d' integrazione.

Così dunque conosciamo le funzioni φ_1, φ_2, in tutti i punti di S, compreso il piano σ, ove le indicheremo con φ_1', φ_2'.

Allora la prima e la seconda delle (72), per i punti di σ daranno:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = A F - \varphi_1',$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = A G - \varphi_2'.$$

E in un punto qualunque di S, supponendo φ e ψ nulle all'infinito, sarà:

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \frac{1}{r} (A F - \varphi'_1) d\sigma,$$

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \frac{1}{r} (A G - \varphi'_2) d\sigma.$$

Così conosciamo tutte le funzioni che compariscono nelle formule (71), e il problema è risoluto.

VII.

17. Termineremo questo studio, con un problema relativo alla deformazione dei cilindri, nel quale si presenta l'occasione di applicare alcuni dei resultati ottenuti.

Un caso già considerato è quello d'un cilindro sollecitato da tensioni agenti soltanto alle basi (*). Ora faremo vedere che un caso molto più generale si può ridurre al precedente: il caso cioè che anche la superficie laterale sia soggetta a tensione, purchè la tensione sia la medesima, in direzione e grandezza, in tutti i punti di una stessa generatrice, potendo del resto variare in un modo qualunque, da una generatrice all'altra, salvo ad esser soddisfatte certe condizioni, come vedremo.

Prendiamo l'asse del cilindro come asse delle z, e un suo punto qualunque come origine delle coordinate.

Siano φ, Φ, due funzioni delle sole variabili x, y, che soddisfano alle equazioni:

$$\Delta^2 \varphi = 0, \quad \Delta^4 \Phi = 0.$$

Consideriamo il sistema di tensioni interne:

$$\left.\begin{array}{lll} T_{xx} = \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, & T_{yy} = \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, & T_{zz} = m\,\Delta^2 \Phi, \\ T_{yz} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}, & T_{zx} = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}, & T_{xy} = -\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial y}. \end{array}\right\} \tag{76}$$

Si verifica facilmente che le equazioni (61) e (62) sono soddisfatte: d'onde risulta che le tensioni (76) corrispondono ad una deformazione possibile del cilindro.

Le componenti F, G, H, della tensione, che agendo sugli elementi della sua superficie esterna, producono questa deformazione, si otterranno dalle note formule:

$$-F = T_{xx}\cos\alpha + T_{xy}\cos\beta + T_{xz}\cos\gamma,$$
$$-G = T_{yx}\cos\alpha + T_{yy}\cos\beta + T_{yz}\cos\gamma,$$
$$-H = T_{zx}\cos\alpha + T_{zy}\cos\beta + T_{zz}\cos\gamma,$$

ove α, β, γ, rappresentano gli angoli della normale interna alla superficie, cogli assi coordinati.

Sulla superficie laterale si avrà, sostituendo alle tensioni interne i loro

(*) Vedi, p. es, Betti, *Teoria dell'elasticità.* Nuovo Cimento, ser. II, vol. VII, e segg.

valori:

$$\left.\begin{aligned} F &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\cos\alpha + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial y}\cos\beta, \\ G &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial y}\cos\alpha - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\cos\beta, \\ H &= \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos\beta. \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

Sulla base b_1, rivolta verso la direzione positiva dell'asse delle z, dette F'_1, G'_1, H'_1, la componenti della tensione, sarà:

$$F'_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad G'_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad H'_1 = m\,\Delta^2 \Phi; \tag{78}$$

e sulla base b_2:

$$F'_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad G'_2 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad H'_2 = -m\,\Delta^2 \Phi. \tag{79}$$

In questo caso particolare di sollecitazione, la tensione, che agisce sulla superficie laterale del cilindro, è la stessa in tutti i punti di una stessa generatrice, come si vede dalle formule (77), ricordando che le funzioni φ, Φ contengono le sole variabili x, y.

18. Ora supponiamo che sulla superficie laterale del cilindro siano date le componenti F, G, H, della tensione, uguali in tutti i punti di una stessa generatrice: e vediamo se è possibile determinare le funzioni φ, Φ, in modo che siano soddisfatte le equazioni (77) che si riferiscono alla superficie laterale. Delle tensioni alle basi non ne teniamo conto.

Sia k l'intersezione della superficie laterale del cilindro, con un piano parallelo al piano $(x\,y)$. I coseni degli angoli ε, ω, che la tangente t al contorno k, in un suo punto qualunque, fa cogli assi della x e della y, sono dati dalle formule:

$$\cos\varepsilon = \cos\beta, \quad \cos\omega = -\cos\alpha. \tag{80}$$

Quindi le formule (77) potremo scriverle:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\cos\varepsilon + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\cos\omega &= F, \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)\cos\varepsilon + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)\cos\omega &= G, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos\varepsilon + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cos\omega &= H; \end{aligned}$$

ossia:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = H,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = G, \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = F.$$

Sul contorno k prendiamo un punto O come origine, e poniamo la condizione che in O la funzione φ si annulli, e si annulli pure la funzione Φ, insieme alle sue derivate prime. Sarà in un punto qualunque M di k:

$$\varphi = \int_0^M H\,d\,k, \tag{81}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \int_0^M G\,d\,k, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \int_0^M F\,d\,k; \tag{82}$$

e le funzioni φ, $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$, così ottenute, avranno un sol valore in tutti i punti del contorno, purchè le quantità F, G, H, soddisfino alle equazioni:

$$\int_k F\,d\,k = 0, \quad \int_k G\,d\,k = 0, \quad \int_k H\,d\,k = 0. \tag{83}$$

Supponiamo che queste condizioni siano verificate.

Dalle formule (82) si ricava:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial n} &= \cos\alpha \int_0^M G\,d\,k + \cos\beta \int_0^M F\,d\,k, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \cos\beta \int_0^M G\,d\,k - \cos\alpha \int_0^M F\,d\,k. \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

Da quest'ultima formula otterremo con una nuova integrazione il valore della funzione Φ nel punto M di k. Perciò chiameremo ora M' un punto qualunque dell' intervallo OM. Sarà allora in M, giacchè si è supposto che le derivate prime di Φ in O si annullino:

$$\Phi = \int_0^M \left\{ \cos\beta \int_0^{M'} G\,d\,k - \cos\alpha \int_0^{M'} F\,d\,k \right\} d\,k; \tag{85}$$

e la funzione Φ avrà un sol valore in ogni punto di k, purchè sia verificata l'equazione:

$$\int_k \left\{ \cos\beta \int_0^{M'} G\, d\, k - \cos\alpha \int_0^{M'} F\, d\, k \right\} d\, k = 0. \tag{86}$$

Questa formula, come ora dimostreremo, equivale all'altra:

$$\int_k (y\, F - x\, G)\, d\, k = 0,$$

ove x, y, sono le coordinate del punto M', a cui si riferiscono le tensioni F, G.

Si ha infatti, identicamente:

$$y\, F\, d\, k = d\left[y \int_0^{M'} F\, d\, k \right] - d\, y \int_0^{M'} F\, d\, k,$$

$$x\, G\, d\, k = d\left[x \int_0^{M'} G\, d\, k \right] - d\, x \int_0^{M'} G d\, k\,;$$

donde, ricordando le formule:

$$d\, y = \cos\alpha\, d\, k,$$
$$d\, x = -\cos\beta\, d\, k,$$

e posto per brevità:

$$y \int_0^{M'} F\, d\, k - x \int_0^{M'} G\, d\, k = W,$$

si ricava:

$$(y\, F - x\, G)\, d\, k = d\, W - \left\{ \cos\beta \int_0^{M'} G\, d\, k - \cos\alpha \int_0^{M'} F\, d\, k \right\} d\, k.$$

Integrando ora su tutto il contorno k, si avrà, in virtù della equazion (86):

$$\int_k (y\, F - x\, G)\, d\, k = \int_k d\, W.$$

Ma quando si percorre il contorno k, le quantità che compariscono in W riprendono, al punto di partenza, il valore iniziale. Sarà dunque:

$$\int_k d\, W = 0,$$

e finalmente:

$$\int_k (y F - x G) d = 0. \tag{87}$$

come volevamo dimostrare.

Ammesso che le quantità date F, G, H, soddisfino a queste condizioni, conosceremo, in virtù delle formule (81), (85) e (84), per ogni punto di k, il valore di φ, di Φ e di $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$. Ma la funzione φ soddisfa all'equazione $\Delta^2 \varphi = 0$, e la funzione Φ soddisfa all'equazione $\Delta^4 \Phi = 0$. Per conseguenza queste due funzioni delle variabili x, y, saranno determinate in tutto l'arco racchiuso dal contorno k, e quindi in tutto lo spazio occupato dal cilindro. E le equazioni (77), da cui siamo partiti, saranno verificate su tutta la sua superficie laterale.

Se il cilindro è cavo, il contorno k sarà formato da due linee chiuse, una interna all'altra. In questo caso dovremo, per ciascuna di queste linee, prendere un punto come origine, e supporre che in esso si annullino le funzioni φ e Φ, e le derivate prime di quest'ultima. Quanto alla direzione positiva del contorno, cioè delle sue tangenti, è sempre determinata senza ambiguità dalle formule (80).

Affinchè poi, in ogni punto del contorno, otteniamo per le funzioni φ, Φ, $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$, un sol valore, è necessario che le equazioni (83) e (87) siano soddisfatte tanto sulla linea esterna che sulla interna.

19. Ed ora veniamo alla questione accennata in principio. Supponiamo di conoscere, per tutti i punti della superficie del cilindro, le componenti della tensione, e sieno:

$$\left.\begin{array}{llll} F, & G, & H, & \text{sulla sup. laterale} \\ F_1, & G_1, & H_1, & \text{sulla base } b_1 \\ F_2, & G_2, & H_2, & \text{sulla base } b_2 . \end{array}\right\} \tag{88}$$

Si suppone, al solito, che le quantità F, G, H, mantengano lo stesso valore in tutti i punti di una stessa generatrice, e soddisfino alle condizioni espresse dalle formule (83) e (87).

Se col procedimento indicato sopra, sapremo determinare le funzioni φ, Φ, dalle variabili x, y, che sulla superficie laterale soddisfano alle equazioni (77), otterremo dalle formule (76) le tensioni interne corrispondenti alla deformazione prodotta dalle tensioni:

$$\left.\begin{array}{llll} F, & G, & H, & \text{sulla sup. laterale} \\ F'_1, & G'_1, & H'_1, & \text{sulla base } b_1 \\ F'_2, & G'_2, & H'_2, & \text{sulla base } b_2. \end{array}\right\} \tag{89}$$

essendo queste ultime, relative alle basi, date dalle formule (78) e (79).

Scomponiamo allora la deformazione prodotta dalle tensioni (88), nelle due deformazioni prodotte, la prima dalle tensioni (89), e la seconda dalle tensioni:

$$\begin{array}{llll} 0, & 0, & 0, & \text{sulla sup. laterale} \\ F_1 - F'_1, & G_1 - G'_1, & H_1 - H'_1, & \text{sulla base } b_1 \\ F_2 - F'_2, & G_2 - G'_2, & H_2 = H'_2, & \text{sulla base } b_2. \end{array}$$

Determinate le funzioni φ, Φ, il problema è ridotto a considerare questa seconda deformazione, prodotta da tensioni che agiscono sulle sole basi: ciò che volevamo dimostrare.

La difficoltà principale di questo procedimento consiste nell'integrare la equazione $\Delta^4 \Phi = 0$, nell'area racchiusa dal contorno k, quando su di esso si conoscono i valori delle funzioni Φ, e della sua derivata rispetto alla normale interna.

Questo problema si sa risolvere per diverse forme del contorno (*). Nel caso del cerchio, si ottiene la funzione Φ espressa per mezzo d'integrali definiti (II — 6).

(*) Vedi le due Note del LEVI-CIVITA: *Sulla Integrazione dell'Equazione* $\Delta^2 \Delta^2 = 0$. Atti della R. Ac. delle Scienze, vol. XXXIII, a. 1898. — *Sopra una trasformazione in sè stesssa della Equazione* $\Delta^2 \Delta^2 = 0$, Atti del R. Ist. Veneto, Tomo IX, Serie VII, 1897-98. Nella prima di queste, sono indicate alcune delle Note e Memorie relative al problema in questione.

Le bitangenti della quartica piana studiate mediante la configurazione di Kummer.

(Di Edgardo Ciani, *a Messina.)*

Scopo delle seguenti ricerche è lo studio sistematico delle bitangenti della quartica piana: Strumento principale ne è la configurazione di Kummer. Il metodo, in sostanza, non è nuovo. Hesse e Geiser (*) dimostrarono già quanto la geometria dello spazio possa efficacemente impiegarsi per dedurre le proprietà di tali bitangenti, il 1.° servendosi di un ottagono gobbo di cui i vertici sono punti base di una rete di quadriche, e il 2.° mediante il cono circoscritto a una superficie cubica da un suo punto.

Io qui mi valgo di una superficie di Kummer passante per la quartica piana fondandomi sopra un ben noto teorema di Kummer che stabilisce la esistenza di ∞^4 di tali superficie (**) Così, la maggior parte delle conosciute proprietà sulle cfz. di Kummer si mutano, per sezione, in altrettante proprietà delle bitangenti. Abbiamo una raccolta quasi completa delle prime nella Memoria di Caporali intitolata: *Sopra i piani ed i punti singolari della superficie di* Kummer, (***) la quale è quindi il fondamento di tutte le mie ricerche. Occorrendo spesso di citarla mi servirò del simbolo (C. n.° ...) con l'indicazione del numero utile volta per volta. Lo studio alquanto minuto di questa Memoria mi ha indotto a fare su di essa qualche osservazione e qualche aggiunta una delle quali veramente ha poca attinenza con la quartica (n.i 9,

(*) Hesse, *Ueber die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung.* Crelle, Bd. 49. Geiser, *Ueber die Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Grahs.* Math. Ann., Bd. I.

(**) Kummer, *Monatsberichte der Berl. der Wissenschaften* (1864, pag. 246).

(***) Caporali, Volume delle Memorie, pag. 86.

10, 11) ma siccome mi è parsa di un certo interesse, anche giudicata in sè stessa, così ho pensato di non ometterla. Tali osservazioni mirano a considerare abbastanza intimamente il legame che passa fra la cfz. di KUMMER e la notevole figura che proviene dai 6 complessi in involuzione che mutano in sè la cfz. suddetta. Tale notevole figura è costituita principalmente, come è ben noto, dalle 15 coppie di assi delle 15 involuzioni gobbe le quali nascono dai prodotti a due, a due dei 6 complessi in involuzione; e per brevità l'ho chiamata cfz. di KLEIN. Anche molte delle sue proprietà (*) portano il loro contributo alle bitangenti della quartica, particolarmente in forza del teorema del n.° 17.

Mi sono servito della ammirevole ed efficace notazione di HESSE per le bitangenti; per la cfz. di KUMMER ho adottato la notazione di CAPORALI adoprando però lettere invece che numeri affine di non sovrapporla alla prima.

Ho diviso il lavoro nei seguenti capitoli:

I. Aggiunte e osservazioni alla Memoria di CAPORALI: *Sopra i piani e i punti singolari della superficie di* KUMMER.
II. Le 16 bitangenti di un gruppo di KUMMER.
III. La cfz. composta con i punti d'incontro delle bitangenti, a due, a due.
IV. Figure notevoli contenute in un gruppo di KUMMER.
V. Le coniche dei 16 punti.
VI. La costruzione delle ∞^4 superficie di KUMMER passanti per una quartica piana.

Delle proprietà dimostrate nei capitoli II, III, IV, V pubblicai gli enunciati riassumendoli in una breve Nota che uscì nei *Rendiconti* dell'Istituto Lombardo il marzo scorso. Avverto però il lettore che la presente pubblicazione è affatto indipendente da quella Nota.

(*) Cf. specialmente: STEPHANOS, *Sur les tètraèdres desmiques* (Bulletin des sciences mathématiques, serie T III, 1893).

CAPITOLO I.

Osservazioni e aggiunte alla Memoria di Caporali: « Sopra i piani e i punti singolari della superficie di Kummer. »

1. Abbiasi una cfz. di Kummer affatto generale. Indichiamo con O uno dei 16 piani fondamentali e con a, b, c, d, e, f i sei punti fondamentali su di esso. Allora le combinazioni a due, a due di a, b, c, d, e, f rappresentano i 15 piani fondamentali rimanenti e le coppie di simboli ternari $\begin{pmatrix} a\,b\,c \\ d\,e\,f \end{pmatrix}\ldots$, ecc., rappresentano i 10 punti fondamentali fuori del piano O.

Ciò posto è molto facile il riconoscere dai simboli le relazioni fra i punti e i piani fondamentali: risultano così alcune regole che possono riassumersi negli enunciati seguenti:

Sul piano O stanno i punti: a, b, c, d, e, f,

» » $a\,b$ » » $a, b, \begin{pmatrix} a\,b\,c \\ d\,e\,f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a\,b\,d \\ c\,f\,e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a\,b\,e \\ d\,f\,c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a\,b\,f \\ d\,e\,c \end{pmatrix};$

per il punto a passano i piani: O, $a\,b$, $a\,c$, $a\,d$, $a\,e$, $a\,f$,

» » $\begin{pmatrix} a\,b\,c \\ d\,e\,f \end{pmatrix}$ » » $a\,b$, $a\,c$, $b\,c$, $d\,e$, $d\,f$, $e\,f$.

Ogni retta comune a due punti fondamentali appartiene anche a due piani fondamentali e viceversa: una tal retta si indica con R. Esistono 120 rette R.

2. Rappresentiamo con A, B, C, D, E, F i sei sistemi nulli a due, a due involutori che trasformano in sè la cfz. data. Le combinazioni a due, a due dei suddetti simboli rappresenteranno le 15 involuzioni gobbe che nascono dai prodotti a due, a due dei sei sistemi nulli: così il simbolo $(A\,B)$ indicherà l'involuzione gobba che è il prodotto dei due sistemi nulli A, B e $A\,B$, $B\,A$ ne indicheranno gli assi relativi. Le coppie di simboli ternari $\begin{pmatrix} A\,B\,C \\ D\,E\,F \end{pmatrix}$ rappresenteranno le 10 polarità che nascono dai prodotti a tre, a tre dei sistemi nulli fondamentali: o addirittura le quadriche basi di tali polarità. La quadrica $\begin{pmatrix} A\,B\,C \\ D\,E\,F \end{pmatrix}$ contiene le coppie di assi: $A\,B$, $B\,A$; $A\,C$, $C\,A$; $B\,C$, $C\,B$; $D\,E$, $E\,D$; $D\,F$, $F\,D$; $E\,F$, $F\,E$. Le altre coppie sono coniu-

gate. Infine i simboli come $(A\,B,\ C\,D,\ E\,F)$ rappresenteranno i 15 tetraedri fondamentali: gli spigoli del tetraedro precedente sono: $A\,B$, $B\,A$, $C\,D$, $D\,C$, $E\,F$, $F\,E$. Abbiamo così gli elementi principali della cfz. di Klein individuata dalla cfz. di Kummer data.

3. Per mettere opportunamente in relazione le notazioni adottate per le due cfz. suddette supponiamo che i punti a, b, c, d, e, f, nell'ordine, scritto siano i poli del piano O riguardo, rispettivamente ai 6 complessi A, B, C, D, E, F. Seguono allora facilmente queste norme: I poli di $a\,b$ sono: b rispetto ad A, a rispetto a B, $\begin{pmatrix} a\,b\,c \\ d\,e\,f \end{pmatrix}$ rispetto a C, $\begin{pmatrix} a\,b\,d \\ c\,e\,f \end{pmatrix}$ rispetto a D, $\begin{pmatrix} a\,b\,e \\ c\,d\,f \end{pmatrix}$ rispetto ad E, $\begin{pmatrix} a\,b\,f \\ e\,d\,e \end{pmatrix}$ rispetto a F.

I piani polari di a sono: O rispetto ad A, $a\,b$ rispetto a B, $a\,c$ rispetto a C, $a\,d$ rispetto a D, $a\,e$ rispetto ad E, $a\,f$ rispetto a F.

I piani polari di $\begin{pmatrix} a\,b\,c \\ d\,e\,f \end{pmatrix}$ sono: $b\,c$ rispetto ad A, $c\,a$ rispetto a B, $b\,a$ rispetto a C, $e\,f$ rispetto a D, $d\,f$ rispetto a E, $e\,f$ rispetto a F.

Nella involuzione gobba $(A\,B)$ sono coppie di punti corrispondenti le:

$$(a,\,b);\ \left(c\,.\begin{pmatrix} a\,b\,c \\ d\,e\,f \end{pmatrix}\right);\ \left(d\,.\begin{pmatrix} a\,b\,d \\ c\,e\,f \end{pmatrix}\right);\ \left(e\,.\begin{pmatrix} a\,b\,e \\ c\,d\,f \end{pmatrix}\right);\ \left(f\,.\begin{pmatrix} a\,b\,f \\ c\,d\,e \end{pmatrix}\right);$$

$$\left(\begin{pmatrix} a\,d\,e \\ b\,f\,c \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a\,f\,c \\ b\,d\,e \end{pmatrix}\right);\ \left(\begin{pmatrix} a\,d\,c \\ b\,e\,f \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a\,e\,f \\ b\,d\,c \end{pmatrix}\right);\ \left(\begin{pmatrix} a\,e\,c \\ b\,d\,f \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a\,d\,f \\ b\,e\,c \end{pmatrix}\right);$$

e coppie di piani corrispondenti le: $(O\,.\,a\,b)$, $(a\,c\,.\,b\,c)$, $(a\,d\,.\,b\,d)$, $(a\,e\,.\,b\,e)$, $(a\,f\,.\,b\,f)$, $(c\,d\,.\,e\,f)$, $(c\,e\,.\,d\,f)$, $(c\,f\,.\,d\,e)$.

Infine nella polarità $\begin{pmatrix} A\,B\,C \\ D\,E\,F \end{pmatrix}$ il piano O ha per polo $\begin{pmatrix} a\,b\,c \\ d\,e\,f \end{pmatrix}$, il piano $a\,b$ ha per polo C, il piano $a\,d$ ha per polo $\begin{pmatrix} D\,B\,C \\ A\,E\,F \end{pmatrix}$, ecc.

4. Stabilite così le notazioni di cui ci serviremo passiamo alle osservazioni seguenti sulla Memoria di Caporali. Un facile computo prova che esistono 240 piani passanti ciascuno per 3 soli punti fondamentali della cfz. di Kummer, e dualmente esistono 240 punti comuni, ciascuno, a tre soli piani della cfz. stessa (C. n.° 3). Sono i piani Π e i punti P di Caporali. Studieremo più tardi la interessante cfz. composta con questi piani e questi punti (n.° 7). Intanto ricorderemo che esistono 60 tetraedri di cui le facce sono piani fondamentali e vertici punti P (C. n.° 21): i 60 tetraedri duali hanno per

vertici punti fondamentali e per facce piani Π. I primi si dicono tetraedri di 1ª specie, i secondi di 2ª specie (C. n.° 23). Finalmente esistono 80 tetraedri di cui vertici e facce sono punti e piani fondamentali insieme (C. n.° 20): essi sono duali di sè stessi e li chiameremo tetraedri di 3ª specie. Sulle facce di un tetraedro di 1ª specie esistono 12 punti fondamentali situati a due, a due sulle sue costole. Questi punti appartengono a una stessa quadrica (C. n.° 56) la quale viene così a tagliare la superficie di Kummer lungo le 4 coniche singolari situate sulle facce del tetraedro in parola. Un tetraedro di 3ª specie contiene sulle sue facce tutt'e 16 i punti fondamentali e quindi le 4 coniche singolari situate sulle sue facce non possono appartenere a una stessa quadrica. Per il seguito ci occorre di stabilire i possibili tipi simbolici di tetraedri di 1ª e di 2ª specie.

I primi sono due cioè:

$$(O,\ ab,\ cd,\ ef);\ (ac,\ bc,\ ad,\ bd),$$

e i secondi sono pure due:

$$\left(a,\ b,\ \begin{pmatrix} a\,c\,e \\ b\,d\,f \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a\,d\,f \\ b\,c\,e \end{pmatrix}\right);\ \left(\begin{pmatrix} a\,b\,c \\ d\,e\,f \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a\,b\,f \\ d\,e\,c \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a\,e\,c \\ d\,b\,f \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a\,e\,f \\ d\,b\,c \end{pmatrix}\right).$$

5. Una qualunque delle 15 involuzioni gobbe fondamentali possiede fra le rette unite 8 rette R (n.° 1) ognuna delle quali contiene due punti fondamentali corrispondenti e appartiene a due piani fondamentali corrispondenti. Queste 8 rette R si dividono in due notevoli quaterne coniugate (C. n.i 9, 10, 56) di cui ricorderemo la proprietà principale che è la seguente: Le 4 rette di una quaterna sono tali che prendendo su tre di esse, tre punti fondamentali (uno su ciascuna) in qualunque modo, questi determinano un piano fondamentale che taglia la retta rimanente della quaterna in un punto fondamentale e passa per una retta della quaterna coniugata. Dualmente ecc. Per esempio l'involuzione $(A\,B)$ individua le due quaterne coniugate:

$$O\,.\,ab,\ cd\,.\,ef,\ cf\,.\,de,\ ce\,.\,df,$$

$$ac\,.\,bc,\ ad\,.\,bd,\ ae\,.\,be,\ af\,.\,bf.$$

Si hanno così i simboli di due quaterne coniugate quando si consideri ogni retta R come intersezione di 2 piani fondamentali.

Le coppie di quaterne R coniugate sono tante quante le involuzioni fondamentali cioè 15.

Nella involuzione precedente $(A\,B)$ si corrispondono ad es. i piani O e ab. I punti fondamentali dei due piani diversi da a e b formano i due quadrangoli completi $c\,d\,e\,f$, $\begin{pmatrix} a\,b\,c \\ d\,e\,f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\,b\,d \\ c\,e\,f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\,b\,e \\ c\,d\,f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\,b\,f \\ c\,d\,e \end{pmatrix}$. Ora è facile riconoscere che un lato dell'uno incontra un lato dell'altro senza che i due quadrangoli siano prospettivi (*). Questa osservazione ci sarà utile nel seguito.

6. È necessario adesso stabilire l'esistenza di certe quadriche ciascuna delle quali passa per 8 punti e tocca 8 piani della cfz. di Kummer. Per questo si prenda a considerare la quadrica Q che passa per le coppie di assi $A\,B$, $B\,A$; $C\,D$, $D\,C$ e per il punto fondamentale a. Poichè ciascuna delle due involuzioni $(A\,B)$, $(C\,D)$ trasforma la Q in sè medesima segue che il quadrilatero gobbo ordinato: $a\,.\,b\,.\begin{pmatrix} b\,c\,d \\ a\,e\,f \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a\,c\,d \\ b\,e\,f \end{pmatrix}$ giace per intero sulla Q. Ma anche ciascuna delle 4 involuzioni $(A\,C)$, $(A\,D)$, $(B\,C)$, $(B\,D)$ trasforma la Q in sè medesima: applicandole dunque al quadrilatero suddetto si arriva, in 4 modi diversi, al quadrilatero ordinato: $c\,.\begin{pmatrix} a\,b\,c \\ d\,e\,f \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c\,e\,f \\ a\,b\,d \end{pmatrix} . \,d$ che giacerà per intero sopra Q. Essa quindi passa per 8 punti fondamentali: e, tenendo conto delle rette R che contiene, si vede subito che è anche tangente a 8 piani fondamentali. Se fra le infinite quadriche che passano per gli assi $A\,B$, $B\,A$, $C\,D$, $D\,C$ si prendesse quella che passa per uno dei rimanenti punti fondamentali, si vedrebbe analogamente che essa conterrebbe anche i rimanenti 7 e sarebbe tangente agli 8 piani fondamentali restanti.

Dunque: per gli assi delle due involuzioni gobbe $(A\,B)$, $(C\,D)$ passano due quadriche ciascuna delle quali contiene 8 rette R, 4 appartenenti alla congruenza $(A\,B)$ e 4 alla $(C\,D)$. Tali rette sono per l'una quadrica:

$O\,.\,a\,b$, $a\,c\,.\,b\,c$, $a\,d\,.\,b\,d$, $c\,d\,.\,e\,f$ appartenenti alla congruenza $(A\,B)$,
$O\,.\,c\,d$, $a\,c\,.\,a\,d$, $b\,c\,.\,b\,d$, $a\,b\,.\,e\,f$ » » » $(C\,D)$,

e per l'altra:

$a\,e\,.\,b\,e$, $a\,f\,.\,b\,f$, $c\,e\,.\,d\,f$, $c\,f\,.\,d\,e$ appartenenti alla congruenza $(A\,B)$,
$c\,e\,.\,d\,e$, $c\,f\,.\,d\,f$, $a\,e\,.\,b\,f$, $a\,f\,.\,b\,e$ » » » $(C\,D)$,

e quindi ciascuna di tali quadriche passa per 8 punti ed è tangente a 8 piani della cfz. di Kummer. Manifestamente esistono due quadriche siffatte per ogni aggruppamento analogo ad $(A\,B)\,.\,(C\,D)$ dei 6 simboli A, B, C, D, E, F.

(*) La loro cfz. è considerata da Martinetti nella Nota: *Le cfz.* $(8_1, 8_4)$ *di punti e piani.* (Giorn. di Mat., Vol. XXXIV.)

Dunque il loro numero è $15 . 3 . 2 = 90$.

« *Per due coppie di assi fondamentali che si tagliano, della cfz. di* Klein, *si possono condurre due quadriche ognuna delle quali passa per 8 punti e tocca 8 piani della cfz. di* Kummer. »

Oppure:

« *Le 120 rette R di* Caporali *stanno a 8, a 8 sopra 90 quadriche ciascuna delle quali passa per due coppie di assi fondamentali, della cfz. di* Klein, *che si tagliano.* »

7. Ci proponiamo ora lo studio della interessante figura composta con i 240 punti P e 240 piani Π (n.° 4). Si consideri perciò il gruppo delle 32 omografie che trasformano in sè la cfz. di Kummer e che provengono da tutti i possibili prodotti dei 6 sistemi nulli fondamentali. È evidente che ognuna di esse muterà in sè la figura dei punti P e piani Π. Applicando dunque le omografie di tal gruppo a un punto P o a un piano Π come elemento iniziale otterremo manifestamente una cfz. di Kummer costituita da 16 punti P e da 16 piani Π. Dopo, si prenda uno degli elementi P, o Π rimanenti e si ripeta l'operazione: si troverà una nuova cfz. di Kummer ancora composta di elementi P e Π: si prosegua così l'operazione sino a che i 240 punti P e 240 piani Π non siano esauriti. Il risultato si potrà esprimere mediante il seguente teorema:

« *I 240 punti P e i 240 piani* Π *compongono 15 nuove cfz. di* Kummer. (C. n.° 56). Le chiameremo le cfz. ΠP della cfz. fondamentale. »

8. Vediamo adesso come si caratterizza una di queste 15 cfz. Si consideri il piano fondamentale O e in esso i suoi punti fondamentali a, b, c, d, e, f. Secondo le notazioni già adottate è manifesto che i piani fondamentali ab, cd, ef sono i corrispondenti di O nelle tre involuzioni gobbe (AB), (CD), (EF) e quindi il loro punto comune, che è un punto P, è il polo di O rispetto al tetraedro di Klein (AB, CD, EF). Dunque:

« *I 15 poli di un piano della cfz. di* Kummer *rispetto ai 15 tetraedri di* Klein *appartengono a uno, a uno alle 15 cfz.* ΠP *(e costituiscono evidentemente i 15 vertici opposti al piano suddetto nei 15 tetraedri di 1.ª specie cui il piano appartiene* (n.° 4)). »

Cioè:

« *Per costruire una delle 15 cfz.* ΠP *basta trasformare polarmente la cfz. di* Kummer *data rispetto a uno dei 15 tetraedri di* Klein. »

9. Quest'ultima conclusione può servire a mettere sotto un'altra forma il legame geometrico che passa fra la cfz. data e una delle sue 15 cfz. ΠP,

Perciò si assuma, come tetraedro di riferimento, uno dei 15 tetraedri di Klein e si osservi che le formole $y_1 \equiv x_2 x_3 x_4$, $y_2 \equiv x_1 x_3 x_4$, $y_3 \equiv x_1 x_2 x_4$, $y_4 \equiv x_1 x_2 x_3$ definiscono una involuzione cubica dello spazio nella quale gli 8 punti uniti sono: $(1\,1\,1\,1,\ 1\,1 - 1 - 1,\ 1 - 1 - 1\,1,\ 1 - 1\,1 - 1)$, $(-1\,1\,1\,1,\ 1 - 1\,1\,1,\ 1\,1 - 1\,1,\ 1\,1\,1 - 1)$: essi costituiscono altri due tetraedri di Klein formanti col 1.° una terna desmica. Si osservi anche che una tale involuzione cubica è individuata dal tetraedro fondamentale e da uno dei punti uniti, e che può pensarsi come il prodotto della polarità rispetto al tetraedro fondamentale medesimo per la polarità stabilita dalla quadrica che possiede come tetraedri autoconiugati i tre tetraedri della terna desmica dianzi ricordata. (Tale quadrica è $\Sigma x_i^2 = 0$.) E infine si ricordi che un tetraedro di Klein appartiene a 4 terne desmiche e che per ognuna di esse esiste una quadrica fondamentale rispetto alla quale i tre tetraedri della terna e quelli della terna associata sono autopolari. Allora è evidente che applicando ai punti della cfz. data la trasformazione polare rispetto a uno dei 15 tetraedri di Klein e, dopo, la polarità rispetto a una delle 4 quadriche fondamentali che hanno quel tetraedro autopolare, si otterrà una delle 15 cfz. ΠP la quale verrà così a corrispondere punto a punto alla cfz. data nella involuzione cubica che è il prodotto delle due trasformazioni suddette. Dunque:

« *Una cfz.* ΠP *corrisponde punto a punto con la cfz. data in 4 involuzioni cubiche dello spazio, ognuna delle quali risulta come il prodotto della polarità rispetto a un determinato tetraedro* T *di* Klein *e della polarità rispetto a una delle 4 quadriche fondamentali che hanno* T *come autoconiugato* (*). »

« *Tali involuzioni cubiche possono anche intendersi individuate mediante uno dei tetraedri di* Klein *come tetraedro fondamentale e mediante gli 8 vertici di altri due tali tetraedri formanti col primo una terna desmica, come gruppo di punti uniti.* »

10. Si può fare un'applicazione dei precedenti risultati alle cfz. tetraedroidali. Ciò si ottiene molto semplicemente mediante la osservazione seguente: Se un piano p passa per un vertice V di un tetraedro T di Klein, il polo di p rispetto a uno degli altri 6 tetraedri di Klein che hanno con T una coppia di spigoli a comune si trova su quella faccia di T che è opposta a V: dualmente ecc.

(*) Ecco un esempio che sembra notevole di una corrispondenza birazionale dello spazio che trasforma punto a punto una cfz. di Kummer in un'altra cfz. di Kummer.

Si hanno così i seguenti resultati:

Una cfz. una volta tetraedroidale (rispetto a un tetraedro T_1) ammette come cfz. ΠP: il tetraedro T_1, sei cfz. una volta tetraedroidali (rispetto ai 6 tetraedri che con T_1 hanno una coppia di spigoli comuni), e otto che non lo sono affatto.

Una cfz. due volte tetraedroidale (rispetto a due tetraedri T_1, T_2 aventi due spigoli comuni) ammette come cfz. ΠP: i due tetraedri T_1, T_2, una cfz. due volte tetraedroidale (rispetto al tetraedro che ha con T_1 e T_2 una coppia di spigoli comuni); otto cfz. una volta tetraedroidali (rispetto ai tetraedri che hanno due spigoli comuni con uno solo dei T_1, T_2) e quattro che non lo sono affatto.

Una cfz. tre volte tetraedroidale (rispetto ai tetraedri $T_1\, T_2\, T_3$ di una terna desmica) ammette come cfz. ΠP: i tre tetraedri T_1, T_2, T_3; tre cfz. tre volte tetraedroidali (rispetto ai tetraedri della terna desmica associata) e nove cfz. una volta tetraedroidali rispetto ai tetraedri rimanenti i quali hanno tutti due spigoli comuni con uno dei T_1, T_2, T_3.

Una cfz. 4 volte tetraedroidale (rispetto ai tetraedri $T_1\, T_2\, T_3\, T_4$ di cui i primi tre formano una terna desmica e il 4° appartiene alla terna desmica associata) ammette come cfz. ΠP i 4 tetraedri T_1, T_2, T_3, T_4, due cfz. tre volte tetraedroidali (rispetto ai due tetraedri che completano la terna desmica associata); tre cfz. due volte tetraedroidali (rispetto ai tre tetraedri che hanno due spigoli a comune con T_4 e con uno dei T_1, T_2, T_3) e sei cfz. una sol volta tetraedroidali (rispetto ai 6 tetraedri rimanenti, ciascuno dei quali ha una coppia di spigoli comuni con uno dei T_1, T_2, T_3).

Una cfz. sei volte tetraedroidale (rispetto ai tetraedri $T_1\, T_2\, T_3\, T_4\, T_5\, T_6$ componenti a 3, a 3, quattro terne desmiche) ammette come cfz. ΠP i sei tetraedri precedenti; una cfz. 6 volte tetraedroidale rispetto a quel tetraedro T_7 che ha con ciascuno dei 6 precedenti due spigoli comuni, e 8 cfz. tre volte tetraedroidali (rispetto ai rimanenti tetraedri i quali si dividono in 4 coppie formanti con T_7 le 4 terne desmiche associate delle 4 su nominate).

11. Questi resultati dimostrano come sia possibile mediante le nostre involuzioni cubiche (applicate anche una sola volta) di trasformare una cfz. di Kummer in guisa di aumentare, o diminuire di una, due, tre unità il grado di tetraedroidalità. Al contrario tale grado può esser mantenuto in queste trasformazioni per tutte le cfz. tetraedroidali all'infuori di quelle che lo sono 4 volte. Le cfz. due volte tetraedroidali rispetto a una stessa cfz. di Klein si distribuiscono in coppie corrispondenti. Lo stesso può dirsi delle 30 cfz.

6 volte tetraedroidali come esprime, con maggiori dettagli il seguente teorema:

« *Se in un piano fondamentale di una cfz. sei volte tetraedroidale si considera il triangolo delle rette h e per i suoi vertici si conducono le altre 3 rette h che non giacciono nel piano suddetto, esse s'incontrano in un punto che appartiene a una nuova cfz. sei volte tetraedroidale, la quale corrisponde alla prima nella involuzione cubica stabilita da un determinato tetraedro di* Klein *e da una delle 4 quadriche fondamentali che hanno quel tetraedro come autopolare* (*). »

12. Vogliamo adesso costruire i simboli di una cfz. ΠP secondo le notazioni adottate. Per questo cominciamo dall'osservare, che riguardando il simbolo di un piano Π come il prodotto dei simboli dei 3 punti fondamentali che contiene si hanno i 3 seguenti tipi possibili:

$$a\,.\,b\,.\begin{pmatrix} a\,c\,d \\ b\,e\,f \end{pmatrix};\quad a\,.\begin{pmatrix} a\,b\,c \\ d\,e\,f \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a\,e\,f \\ d\,b\,c \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} a\,b\,c \\ d\,f\,e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\,b\,e \\ d\,f\,c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\,d\,c \\ b\,f\,e \end{pmatrix}.$$

Per dedurne altri più opportuni per il seguito si consideri ogni piano Π come individuato dalle 3 rette R che congiungono a due, a due i tre punti fondamentali contenuti in Π e si rappresenti ciascuna di queste R mediante i 2 piani fondamentali che la contengono. I simboli precedenti si trasformano allora in quest'altri:

$$(a\,b\,.\,0,\ a\,c\,.\,a\,d,\ b\,e\,.\,b\,f),\ (a\,b\,.\,a\,c,\ a\,e\,.\,a\,f,\ b\,c\,.\,e\,f),$$

$$(a\,b\,.\,d\,f,\ a\,c\,.\,e\,f,\ b\,e\,.\,d\,c).$$

Ciò premesso per costruire i 16 piani di una cfz. ΠP basterà (n.° 8) cercare i piani polari dei 16 punti fondamentali rispetto a un medesimo tetraedro di Klein; il che può ottenersi costruendo i tre corrispondenti di ogni punto fondamentale rispetto alle 3 involuzioni gobbe individuate dalle 3 coppie di spigoli opposti del tetraedro suddetto e quindi prendendo il piano di tre tali punti. Ora si riconosce facilmente che ogni tetraedro di 2ª specie è autopolare rispetto a un determinato tetraedro di Klein.

« *Dunque i 16 piani di una cfz.* ΠP *sono le facce di 4 tetraedri di 2ª specie autopolari rispetto a un medesimo tetraedro di* Klein. »

(*) Segre, *Sur un cas particulier de la Surface de* Kummer. Berichte über die Verh. der königs der Wiss. zu Leipzig, 1884.

Se questo tetraedro di Klein è ad es. $(AB,\ CD,\ EF)$, i 4 tetraedri suddetti sono:

$$\left\{a,\ b,\ \begin{pmatrix}a\,c\,d\\ b\,e\,f\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}a\,e\,f\\ b\,c\,d\end{pmatrix}\right\},\ \left\{c,\ d,\ \begin{pmatrix}c\,a\,b\\ d\,e\,f\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}c\,e\,f\\ d\,a\,b\end{pmatrix}\right\},$$

$$\left\{e,\ f,\ \begin{pmatrix}e\,a\,b\\ f\,c\,d\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}e\,c\,d\\ f\,a\,b\end{pmatrix}\right\},\ \left\{\begin{pmatrix}a\,d\,f\\ b\,c\,e\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}a\,d\,e\\ b\,c\,f\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}a\,c\,f\\ b\,d\,e\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}a\,c\,e\\ b\,d\,f\end{pmatrix}\right\}.$$

Passando al 2° modo di rappresentarne simbolicamente le facce, secondo quanto si è detto al principio di questo numero, si trovano i simboli seguenti:

$$\left|\begin{array}{lll} ab.0, & ac.ad, & be.bf, \\ ab.0, & ae.af, & bc.bd, \\ ac.ad, & ae.af, & cd.ef, \\ be.bf, & bc.bd, & cd.ef, \end{array}\right|,\quad \left|\begin{array}{lll} cd.0, & ca.cb, & de.df \\ cd.0, & ce.cf, & da.db \\ ca.cb, & ce.cf, & ab.ef \\ de.df, & da.db, & ab.ef \end{array}\right|,$$

$$\left|\begin{array}{lll} ef.0, & ea.eb, & fc.fd, \\ ef.0, & ec.ed, & fa.fb, \\ ea.eb, & ec.ed, & ab.cd, \\ fc.fd, & fa.fb, & ab.cd, \end{array}\right|,\quad \left|\begin{array}{lll} ad.bc, & cf.de, & af.be \\ ad.bc, & ae.bf, & ce.df \\ af.be, & df.ce, & ac.bd \\ de.cf, & ae.bf, & ac.bd \end{array}\right|.$$

CAPITOLO II.

Le sedici bitangenti di un gruppo di Kummer.

13. Prima d'intraprendere le nostre ricerche sulle bitangenti valendosi della cfz. di Kummer è necessario richiamare alcune nozioni e denominazioni ben conosciute su tali bitangenti e sopratutto la notazione di Hesse che così mirabilmente si presta a esprimerne le proprietà più importanti.

Esistono 63 serie quadratiche di coniche inviluppanti una quartica piana generica. Ogni serie contiene 6 coppie di bitangenti. I sei punti d'incontro delle bitangenti in ogni coppia (che per brevità chiameremo i sei punti doppi della serie) stanno su di una conica che dicesi la conica armonica alla serie. Ogni coppia di bitangenti appartiene a una sola serie. Assumendo gli otto simboli 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 le ventotto bitangenti possono rappresentarsi con le combinazioni binarie di tali simboli e una serie viene così a esser rappresentata dall'uno o dall'altro dei due tipi simbolici seguenti:

(I)... 13.23, 14.24, 15.25, 16.26, 17.27, 18.28,

(II)... 12.34, 13.24, 14.23, 56.78, 57.68, 58.67.

Per costruire simbolicamente il primo si consideri un esagono contenuto nell'ottagono 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, e si formi ogni coppia della serie scrivendo i simboli delle rette congiungenti uno stesso vertice dell'esagono con i due vertici dell'ottagono che non appartengono all'esagono. Dunque il simbolo più semplice di questo tipo è la indicazione dei due vertici suddetti: così la (I) si indicherà con (12) ponendo le parentesi per evitare equivoci con la bitangente 12. I tipi come (I) sono 28. Per costruire invece i tipi come (II) si considerino 2 quadrangoli, nell'ottagono, non aventi alcun vertice comune: le coppie della serie sono rappresentate dalle coppie di lati opposti dell'uno e dell'altro quadrangolo e i vertici dell'uno o dell'altro possono servire a rappresentare simbolicamente la serie; così la (II) si può rappresentare con (1 2 3 4) oppure (5 6 7 8). I tipi (II) sono 35. Due serie hanno 4, ó 6 bitangenti comuni. Per es., le due (1 2 3 4), (1 2 5 6) hanno 4 bitangenti comuni e si chiamano congiunte di 1.ª specie: le coppie 12.34, 56.78, 12.56, 34.78 si chiamano le coppie di congiunzione. Invece le altre due serie come (1 2 3 4), (1 2 3 5) hanno 6 bitangenti comuni e si chiamano congiunte di 2.ª specie. Le bitangenti non comuni a queste ultime appartengono a una terza serie che è congiunta di 2.ª specie con ciascuna delle prime. Si riconosce facilmente che esistono 315 gruppi ciascuno dei quali è composto di 3 serie che a due, a due sono congiunte di 1.ª specie. Si chiamano *gruppi di 1.ª specie.*

I loro tipi simbolici sono i due seguenti:

$$\{(1\,2\,3\,4), (23), (14)\}, \quad \{(1\,2\,3\,4), (1\,2\,5\,6), (1\,2\,7\,8)\}.$$

I primi sono 210. I secondi 105. Si vede analogamente che esistono 336 gruppi ognuno composto di 3 serie congiunte a due, a due di seconda specie così che ciascuna di esse è costituita dalle coppie non comuni alle altre due. Si chiamano gruppi di 2.ª specie. I loro tipi simbolici sono:

$$\{(1\,2\,3\,4), (1\,2\,3\,5), (35)\}, \quad \{(45), (46), (56)\}.$$

I primi sono 280 e i secondi 56. Un gruppo di 1.ª specie contiene tutte le 28 bitangenti, un gruppo di 2.ª specie ne contiene solamente 18: vedremo in seguito (n.° 32) la figura notevole che compongono le 10 rimanenti. (*)

(*) Queste denominazioni furono già adoperate nella mia Nota: *Sopra le serie quadratiche di coniche inviluppanti la quartica piana.* Rendic. Istit. Lomb., 1895.

14. Ciò premesso abbiasi una superficie di Kummer affatto generica e se ne consideri una sezione piana pure generica. In forza del teorema di Kummer già citato, essa può pensarsi come una quartica generale. Le sue 28 bitangenti si dividono in due specie: 16 che provengono dai 16 piani doppi e le 12 rimanenti. Ci proponiamo adesso di dimostrare che queste ultime si distribuiscono in 6 coppie appartenenti a una medesima serie di coniche quadritangenti. Per questo ricorderemo, avanti tutto, che la condizione necessaria e sufficiente affinchè due coppie di bitangenti appartengano alla stessa serie si esprime esigendo che gli 8 punti di contatto stiano su di una medesima conica. Rammenteremo pure (n.° 4) che le 4 coniche singolari situate sulle facce di un tetraedro di 1.ª specie della cfz. di Kummer appartengono a una stessa quadrica. Dunque: « *Le 4 bitangenti che provengono dalla sezione di un tetraedro di 1.ª specie hanno i loro 8 punti di contatto su di una conica e quindi costituiscono in 3 modi diversi due coppie di una medesima serie.* »

Allora si osservi che esistono i seguenti tetraedri di 1.ª specie (n.° 4):

$$(0,\ ab,\ cd,\ ef);\ (0,\ ab,\ ce,\ df),\ (0,\ ab,\ cf,\ de),$$
$$(ac,\ bc,\ ad,\ bd);\ (ac,\ bc,\ ae,\ be),\ (ac,\ bc,\ af,\ bf).$$

Se quindi, indichiamo con ik la intersezione del piano ik col piano della quartica, si vede che apparterranno alla stessa serie le coppie:

$$0.ab,\ cd.ef,\ ce.df,\ cf.de\ldots \tag{I}$$

e a un'altra serie le:

$$ac.bc,\ ad.bd,\ ae.be,\ af.bf\ldots \tag{II}$$

Queste serie, secondo il num. precedente, sono congiunte di 1.ª specie essendo coppie di congiunzione quelle che mancano nell'una e nell'altra. Se indichiamo queste ultime con mn, pq; mp, qn, la serie individuata da mq, pn sarà congiunta di 1.ª specie con entrambe le (I), (II) precedenti e quindi non avrà con esse a comune alcun'altra bitangente all'infuori di m, n, p, q. Essa è quindi la serie cercata. Dunque il teorema fondamentale di Kummer può mettersi sotto questa forma più precisa:

« *Le 16 bitangenti di una quartica che avanzano togliendo dalle 28 le 12 che costituiscono 6 coppie di una medesima serie si possono considerare come sezioni dei 16 piani fondamentali di* ∞^4 *cfz. di* Kummer. Diremo che quelle 16 bitangenti compongono un *gruppo di* Kummer, e chiameremo *complementari* un gruppo di Kummer e una serie quando presi insieme esauriscono le 28 bitangenti. *Esistono 63 gruppi di* Kummer. Una bitangente entra in 27 serie e quindi in 27 gruppi di Kummer. Due bitangenti entrano in 20 tali gruppi. »

15. Le coppie di piani fondamentali che hanno dato origine alle (I), (II) del n.° precedente si corrispondono nella involuzione gobba (AB) (n.° 3) e costituiscono le due quaterne R coniugate relative a quella involuzione (n.° 5). Dunque le considerazioni fatte possono ripetersi per ciascuna delle altre 15 involuzioni gobbe fondamentali e quaterne R relative. Cioè:

« *Le 16 bitangenti di un gruppo di* Kummer *si possono in 15 modi diversi distribuire in 8 coppie non comuni a due serie congiunte di prima specie. Le 4 coppie dell'una serie e le 4 coppie dell'altra provengono dalle sezioni con le quaterne R coniugate di* Caporali. *Le 15 coppie di serie che così si trovano sono quelle che formano tutti i possibili gruppi di 1.ª specie con la serie complementare del gruppo dato.* »

16. Si tratta adesso di vedere come si possa passare dalla notazione ik, adottata provvisoriamente nel n.° 14 per rappresentare la bitangente proveniente dal piano ik; alla notazione di Hesse, già ricordata al n.° 13. Intanto come abbiamo rilevato esistono due tipi simbolici di serie, così osserviamo adesso l'esistenza dei due tipi simbolici seguenti di gruppi di Kummer:

(I). 12, 34, 35, 36, 37, 38, 45, 46, 47, 48, 56, 57, 58, 67, 68, 78,

(II). 15, 16, 17, 18, 25, 26, 27, 28, 35, 36, 37, 38, 45, 46, 47, 48.

Il (I) si trova simbolicamente associando un lato dell'ottagono completo 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 a tutti i lati dell'esagono completo che rimane quando dall'ottagono si tolgono i due vertici che stanno sul lato suddetto; il (II) si ottiene dividendo il suddetto ottagono in due quadrangoli non aventi alcun vertice comune e quindi scrivendo i simboli di tutte le rette che uniscono un vertice dell'un quadrangolo a un vertice dell'altro. Queste osservazioni ci permetteranno spesso nel seguito di semplificare assai la scrittura, come già fu indicato in parte al n.° 13: per esempio il simbolo (12) preceduto dalla parola *serie* o *gruppo di* Kummer significherà l'uno o l'altro dei due seguenti aggruppamenti:

13 . 23, 14 . 24, 15 . 25, 16 . 26, 17 . 27, 18 . 28,

12, 34, 35, 36, 37, 38, 45, 46, 47, 48, 56, 57, 58, 67, 68, 78,

e ugualmente il simbolo $(1\,2\,3\,4 \equiv 5\,6\,7\,8)$ preceduto dalla parola *serie* o *gruppo di* KUMMER esprimerà l'uno o l'altro dei due aggruppamenti:

$$12.34,\ 13.24,\ 14.23,\ 56.78,\ 57.68,\ 58.67,$$

$$15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 25,\ 26,\ 27,\ 28,\ 35,\ 36,\ 37,\ 38,\ 45,\ 46,\ 47,\ 48.$$

Ciò premesso per poter desumere le proprietà dei gruppi di KUMMER da quelle delle rette sezioni dei 16 piani fondamentali bisogna operare il passaggio dai simboli di queste ai simboli di quelli in guisa che la proprietà del n.° 15 sia mantenuta nel passaggio medesimo. Se si tratta del tipo simbolico (I) basta evidentemente sostituire 12 a 0 e 3, 4, 5, 6, 7, 8 ai simboli a, b, c, d, e, f in un ordine qualunque. Se poi si tratta del tipo simbolico (II) allora si scrivano i due determinanti:

$$\begin{vmatrix} 0 & ab & ac & bc \\ ef & cd & bd & ad \\ df & ce & be & ae \\ de & cf & bf & af \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 15 & 16 & 17 & 18 \\ 25 & 26 & 27 & 28 \\ 35 & 36 & 37 & 38 \\ 45 & 46 & 47 & 48 \end{vmatrix},$$

il cui modo di formazione è manifesto e si riferiscano i termini che hanno il medesimo posto. Si riconosce allora facilmente che nel passaggio la proprietà su ricordata è mantenuta. Infatti le quindici coppie di quaterne R coniugate e le quindici coppie di serie di bitangenti del n.° precedente nascono o dall'accoppiamento delle linee come:

$$\left.\begin{matrix} O.ef,\ ab.cd,\ ac.bd,\ bc.ad \\ df.de,\ ce.cf,\ be.bf,\ ae.af \end{matrix}\right\} \begin{matrix}\text{che}\\ \text{generano}\end{matrix} \left\{\begin{matrix} 15.25,\ 16.26,\ 17.27,\ 18.28... \\ 35.45,\ 36.46,\ 37.47,\ 38.48... \end{matrix}\right.$$

o dall'accoppiamento delle colonne come:

$$\left.\begin{matrix} O.ab,\ ef.cd,\ df.ce,\ de.cf \\ ac.bc,\ bd.ad,\ be.ae,\ bf.af \end{matrix}\right\} \begin{matrix}\text{che}\\ \text{generano}\end{matrix} \left\{\begin{matrix} 15.16,\ 25.26,\ 35.36,\ 45.46... \\ 17.18,\ 27.28,\ 37.38,\ 47.48... \end{matrix}\right.$$

o infine da un manifesto accoppiamento dei minori complementari del 2.° ordine come:

$$\left.\begin{matrix} O.cd,\ ab.ef,\ be.af,\ ae.bf, \\ ac.ad,\ bc.bd,\ cf.df,\ ce.de, \end{matrix}\right\} \begin{matrix}\text{che}\\ \text{generano}\end{matrix} \left\{\begin{matrix} 15.26,\ 16.25,\ 37.48,\ 38.47... \\ 17.28,\ 18.27,\ 35.46,\ 36.45... \end{matrix}\right.$$

17. Riprendiamo le due quaterne R coniugate:

$$(O.ab,\ cd.ef,\ ce.df,\ cf.de),\ (ac.bc,\ ad.bd,\ ae.be,\ af.bf),$$

esse sono composte con rette R che si appoggiano ad AB, BA (n.i 3 e 14). Le coppie di piani fondamentali per quelle rette sono tagliate dal piano della quartica in coppie di bitangenti che, secondo i n.i precedenti possono rappresentarsi ad es. con:

$$(12.34,\ 56.78,\ 57.68,\ 58.67),\quad (35.45,\ 36.46,\ 37.47,\ 38.48).$$

Tali serie sono congiunte di 1.a specie e le coppie di congiunzione sono: $(13.24,\ 14.23)$, $(31.41,\ 32.42)$. *Ebbene vogliamo dimostrare che i punti d'incontro degli assi* AB, BA *della involuzione* (AB) *col piano della quartica giacciono sulla retta* $(31.32).(41.42)$ *dove* 31, 32; 41, 42 *sono manifestamente le coppie congiunte contemporaneamente a* 13.24, 14.23 *e a* 31.41, 32.42. Infatti, si osservi che le coppie di piani fondamentali passanti per le rette R precedenti sono formate da piani corrispondenti nella involuzione (AB). Dunque, se M, M' sono le tracce di AB, BA col piano della quartica, la coppia MM' è armonica rispetto alle coppie di bitangenti 12.34, 56.78, 57.68, 58.67, 35.45, 36.46, 37.47, 38.48: ma le prime quattro coppie appartengono a una stessa serie e quindi a una stessa rete, per cui MM' essendo armonica a più di due coniche della rete (non formanti fascio) lo sarà rispetto a tutte e quindi anche rispetto a 13.24, 14.23. Analogamente si vede che MM' è armonica rispetto a 31.41, 32.42: dunque i punti MM' giacciono sulla retta che unisce i due punti 31.32, 32.42 c. d. d.

Il ragionamento precedente riguarda il gruppo di Kummer (12) e una delle 15 coppie di serie (n.° 15) aventi 8 bitangenti nel gruppo suddetto. Se si ripete il ragionamento per le altre 14 coppie di serie si arriva alla seguente conclusione: Ad ogni lato dell'esagono completo di cui i vertici sono i punti doppi della serie (12) si appoggiano gli assi di una delle 15 involuzioni gobbe fondamentali. *Dunque i vertici di quest'esagono sono i poli del piano della quartica rispetto ai 6 sistemi nulli fondamentali.* E quindi tali punti non variano al variare della cfz. di Kummer attorno alla quartica.

Sopra ogni lato dell'esagono precedente esistono i punti d'incontro, col piano della quartica, dei due assi di una delle 15 involuzioni fondamentali: vogliamo adesso fissare la posizione di due tali punti dimostrando che *essi sono i punti doppi della involuzione segnata su quella retta dai lati del quadrangolo costituito dai 4 vertici dell'esagono esterni alla retta medesima.*

Siano M, M' i due punti in questione e p, q, r, s i 4 vertici suddetti. Consideriamo la involuzione gobba fondamentale di cui gli assi passano per

M, M': al piano della quartica corrisponde un piano per $M M'$ e in esso si hanno i punti p', q', r', s' corrispondenti di p, q, r, s. La retta $M . M'$ è unita e M, M' sono i punti doppi della involuzione che essa sostiene. Punti corrispondenti di questa involuzione sono i punti d'incontro con $p q$, $p' q'$; $p r$, $p' r'$; $r s$, $r' s'$ ecc. Ma, per una osservazione già fatta alla fine del n.° 5, si tagliano a due, a due sulla retta $M . M'$ le rette $(p q, r' s')$, $(r s, p' q')$, $(p r, q' s')$, $(q s, p' r')$, $(p s, q' r')$, $(q r, p' s')$, quindi M, M' sono i punti doppi della involuzione segnata sulla retta $M . M'$ da $(p q, r s)$, $(p r, q s)$, $(p s, q r)$ c. d. d.

Riassumendo abbiamo dunque i seguenti risultati:

« *Variando la cfz. di* Kummer *attorno alle 16 bitangenti di un gruppo di* Kummer *e assumendo tutte le* ∞^4 *posizioni possibili e quindi variando conseguentemente i 6 complessi in involuzione relativi, non variano i 6 poli del piano della quartica rispetto ai 6 complessi suddetti. Essi sono i 6 punti doppi della serie di bitangenti complementare del gruppo di* Kummer *considerato.* »

Ovvero, in altre parole:

« *Una cfz. di* Kummer *e la cfz. di* Klein *che la prima individua sono così legate che facendo variare in tutti i modi possibili la prima attorno a una sua sezione piana, la seconda varia ugualmente attorno alla propria sezione col medesimo piano. Una coppia degli assi fondamentali della cfz. di* Klein *taglia un lato dell'esagono completo individuato dai 6 poli del piano nei punti doppi della involuzione segnata su di esso per mezzo del quadrangolo completo formato con i 4 vertici esistenti fuori del lato suddetto.*

18. Si ha così una figura di 15 coppie di punti, che indicheremo col simbolo M, la quale è intimamente legata a un gruppo di Kummer e quindi alla quartica. Le conosciute proprietà della cfz. di Klein dànno per sezione altrettante proprietà dei punti M. Ad es.:

I 30 punti M relativi a un gruppo di Kummer *giacciono a tre, a tre sopra 60 rette m con le quali si possono formare 15 quadrilateri di vertici M. Le 60 rette m suddette passano a tre, a tre per 320 punti e così i quadrilateri suddetti si organizzano in 20 terne desmiche le quali sono a due, a due associate.*

Esistono 10 coniche (sezioni delle 10 quadriche fondamentali) ognuna delle quali contiene 6 coppie di punti M: le 9 coppie rimanenti son formate da punti coniugati. Queste 10 coniche si caratterizzano così: Si considerino 2 triangoli di cui i vertici esauriscono i 6 poli del piano e si cerchino le *coppie M sui lati di questi triangoli: esse appartengono a una delle coniche domandate.* Ad es. se a', b', c', d', e', f' sono i poli del piano della quartica (punti doppi della serie complementare del gruppo di KUMMER dato), i punti M giacenti sui lati dei triangoli $a'\,b'\,c'$, $d'\,e'\,f'$ stanno sopra una delle coniche suddette: si vede anche che le 3 coppie M che giacciono sui lati di uno stesso triangolo, come $a\,b\,c$, sono a due, a due armoniche sulla conica, finalmente ogni triangolo come $a'\,b'$, $c'\,d'$, $e'\,f'$ è trilatero diagonale per uno dei 15 quadrilateri di vertici M e di lati m dianzi ricordati, ecc., ecc.

Riguardo a questi punti M vedremo al Cap. V altre proprietà più importanti e anche più intimamente connesse con la quartica.

19. Riprendiamo a considerare una delle 15 involuzioni gobbe fondamentali e la corrispondenza che esse stabiliscono fra i piani fondamentali della cfz. di KUMMER. Segando col piano della quartica è manifesto che le due bitangenti provenienti dalla sezione di piani corrispondenti taglieranno sulla retta che unisce le tracce degli assi una coppia di punti armonica alle tracce medesime. Ricordando allora come fu determinata la posizione di tali tracce al n.° 17 si ha il seguente teorema:

« *Se si prendono due coppie di bitangenti della stessa serie, come $12 \,.\, 34$, $13 \,.\, 24$; sulla retta $((12 \,.\, 34) \,.\, (13 \,.\, 24))$ segnano coppie di punti di una stessa involuzione le altre 8 coppie di bitangenti che appartengono alle due serie congiunte di 1.ª specie secondo $12 \,.\, 34$, $13 \,.\, 24$ e che sono diverse dalle coppie di congiunzione. I due punti doppi sono i punti M che quella retta contiene. Un gruppo di* KUMMER *individua 15 di queste involuzioni.* »

20. La nota proprietà che i 6 piani fondamentali della cfz. di KUMMER passanti per uno stesso punto fondamentale sono tangenti a uno stesso cono quadrico dà immediatamente il teorema:

« *Le 16 bitangenti di un gruppo di* KUMMER *sono a 6, a 6 tangenti a 16 coniche. Queste 16 coniche e le 16 bitangenti suddette sono così costruite che ciascuna delle prime è tangente a sei delle seconde e viceversa.* »

Indicheremo con la lettera t tali esalateri di bitangenti circoscritti a coniche. È assai facile il caratterizzarli: ritroveremo così rapidamente i tipi simbolici già conosciuti. Basta ricordare (n.° 1) che i 6 piani fondamentali per un punto fondamentale possono esser rappresentati dai due tipi simbolici seguenti:

$$(O,\ a\,b,\ a\,c,\ a\,d,\ a\,e,\ a\,f)\,,\quad (a\,b,\ a\,c,\ b\,c,\ d\,e,\ d\,f,\ e\,f).$$

Allora riferendosi al 1.° tipo simbolico di gruppi di KUMMER (n.° 16) si hanno i due tipi di esalateri t:

$$12 . 34 . 35 . 36 . 37 . 38; \quad 34 . 35 . 45 . 67 . 68 . 78,$$

riferendosi invece al secondo si trova un solo nuovo tipo simbolico di esalatero t che è: $15 . 16 . 17 . 28 . 38 . 48$. Essi sono i tre tipi già conosciuti (*). Da essi si ricava facilmente che: *Le 6 bitangenti comuni a due serie congiunte di 2.ª specie compongono un esalatero t e viceversa.* Per cui il numero di tali esalateri è il triplo del numero dei gruppi di 2.ª specie cioè (n.° 13) è dato da $336 . 3 = 1008$ come è ben noto.

21. Si consideri una delle 16 bitangenti di un gruppo di Kummer e il piano fondamentale della cfz. che la contiene. In quel piano esistono 6 punti fondamentali giacenti su di una conica i quali congiunti a due, a due dànno le rette d'intersezione con gli altri 15 piani fondamentali: queste rette tagliano dunque la bitangente considerata nei punti d'incontro con le altre 15 bitangenti del gruppo. Dunque:

« *In un gruppo di* Kummer *le 15 intersezioni di una bitangente del gruppo con le 15 rimanenti si possono riguardare come le intersezioni prodotte sulla retta dei lati di un esagrammo di* Pascal. »

Escludendo un lato di tale esagono rimane un quadrangolo che coi suoi lati segna sulla retta una involuzione cui appartengono i punti d'incontro della retta con la conica, cioè i punti di contatto della bitangente con la quartica. Si hanno dunque sulla bitangente 15 involuzioni a ognuna delle quali appartengono 3 coppie di punti scelti fra i 15 d'intersezione con le altre bitangenti del gruppo. A queste involuzioni appartiene la coppia dei punti di contatto con la quartica.

Ora si osservi che se si considera una bitangente e una delle 27 serie cui la bitangente appartiene (n.° 13) le coniche della serie segnano su di essa coppie di una involuzione perchè la serie è contenuta in una rete: a questa involuzione apparterranno quindi le intersezioni della bitangente considerata con le altre coppie di bitangenti della serie. Ebbene le 15 involuzioni sopra descritte sono appunto di questa specie. Infatti sia O il piano fondamentale che contiene la bitangente considerata. In esso sta l'esagono $a\,b\,c\,d\,e\,f$: se si scarta il lato $a\,b$ rimane il quadrangolo $c\,d\,e\,f$ e allora i piani $c\,d$, $e\,f$; $c\,f$, $d\,e$; $c\,e$, $d\,f$ tagliano la bitangente in parola in punti (n.° 16) che possono sempre rappresentarsi con (34.56, 34.78); (34.58, 34.67); (34.57, 34.68):

(*) Cf. ad es. Salmon, *Curve piane*, pag. 330.

Ora, appartengono manifestamente a una stessa serie (n.° 13) le coppie: 56 . 78, 58 . 67, 57 . 68, 34 . 12 il che prova l'affermazione fatta. Si ha quindi il seguente teorema:

« *Le 27 serie cui appartiene una stessa bitangente segnano su di essa, mediante le coniche delle reti cui le serie appartengono (e quindi anche mediante le altre coppie di bitangenti delle serie medesime) 27 involuzioni aventi tutte una coppia comune: quella formata dai punti di contatto con la quartica.* »

« *Dunque quando sono note le bitangenti di una quartica, la determinazione su ciascuna dei punti di contatto è un problema di 2.° grado risolvibile costruendo la coppia comune a due involuzioni.* »

CAPITOLO III.

La cfz. composta con i punti d'incontro delle bitangenti a due, a due.

22. Ciascuna retta R di Caporali taglia il piano della quartica in un punto, che chiameremo r, comune a due bitangenti. Ma ogni piano Π della cfz. di Kummer contiene tre rette R, dunque taglia il piano della quartica secondo una retta π che contiene 3 punti r. Cioè:

« *I punti r d'incontro delle bitangenti a due, a due in un gruppo di* Kummer *stanno a 3, a 3 sopra 240 rette π.* »

Per determinare i vari tipi simbolici di queste rette π basterà effettuare il solito passaggio di notazione (n.° 16) dal simbolo di un piano Π (n.° 12) a quello della sua retta d'intersezione col piano della quartica. Si trovano allora per una retta π i seguenti tipi simbolici possibili:

(12 . 78, 13 . 14, 25 . 26), (12 . 13, 15 . 16, 23 . 56), (12 . 46, 13 . 56, 25 . 34),

che sono quelli già noti. Di qui risulta subito:

« *La condizione necessaria e sufficiente affinchè due punti r stiano su di una retta π è che le due coppie di bitangenti che li individuano appartengano a due serie congiunte di 1.ª specie e siano diverse dalle coppie di congiunzione, o, ciò che è lo stesso, che fra gli 8 punti di contatto non ve ne siano 6 su di una conica.* Il 1.° criterio serve a trovare il numero delle rette π perchè essendo 315 il num. dei gruppi di serie di 1.ª specie quello delle rette π sarà $315 . 16 = 5040$ come è ben noto. Segue che una retta π proviene da 3 gruppi di KUMMER e che per un punto r passano 40 rette π. Si vede anche facilmente che esistono 5040 quadrilateri di cui le diagonali sono rette π: ognuno d'essi fa parte di 3 esalateri completi t (n.° 20) (*).

23. Le 240 rette π di un gruppo di KUMMER passano a tre, a tre per un certo numero di punti che si dividono in due specie. Una di queste specie era già conosciuta (**). L'altra mi sembra nuova. Entrambe si deducono molto semplicemente dalla *cfz.* di KUMMER. Basta per questo ricordare che i 240 piani Π passano a 3, a 3 per 1280 rette divise in due specie: le 320 rette S niuna delle quali contiene punti fondamentali e le 960 rette K le quali costituiscono le $60 \cdot 16 = 960$ rette di BRIANCHON degli esaedri ordinati che si possono considerare formati attorno a ogni punto fondamentale dai 6 piani fondamentali che vi passano (C. n.ⁱ 12, 28). Tagliando col piano della quartica avremo che: « *Le 240 rette π di un gruppo di* KUMMER *passano a tre, a tre per 1280 punti divisi in due specie: 320 sono quelli della specie già conosciuta: i rimanenti 960 costituiscono una nuova specie e sono precisamente i punti di* BRIANCHON *degli esalateri t.* » I primi li chiameremo i punti s, i secondi i punti k. In un gruppo di KUMMER una retta π contiene 4 punti s e 12 punti k.

24. Per meglio studiare questi punti ci gioveremo dei triangoli di bitangenti di cui i punti di contatto sono su di una conica; triangoli, che per brevità, indicheremo col simbolo τ. Per le considerazioni del n.° 4 è evidente che ogni triedro di cui le facce sono piani fondamentali e il vertice è un punto P è tagliato dal piano della quartica secondo un triangolo τ. Si hanno dunque i due tipi simbolici possibili di triangoli τ: 12.34.56, 23.31.14. Servendoci di questi triangoli cominciamo dal caratterizzare simbolicamente i punti k. Sia perciò l'esalatero ordinato t (n.° 20): 12 . 34 . 35 . 36 . 37 . 38. Il suo punto di BRIANCHON è (12.34.36.37), (34.35.37.38), (35.36.38.12) si hanno così 3 rette π di cui i simboli si completano molto facilmente, secondo il n.° 22, rispettivamente con 45 . 48, 45 . 78, 48 . 78. Per cui si hanno le 3 seguenti rette π concorrenti in un punto k: (12 . 34, 36 . 37, 45 . 48), (34 . 35, 37. 38, 45 . 78), (35 . 36, 38 . 12, 48 . 78). Ora 45 . 48 . 78 è un triangolo τ dunque abbiamo il teorema:

(*) Per tutte le proprietà richiamate e riassunte in questo numero veggasi ad es. SALMON, *Curve piane*, pag. 324 e seg.

(**) Veggasi p. es. la mia Nota: *Sopra le serie quadratiche di coniche inviluppanti la quartica piana.* Rendic. Istit. Lomb. 1895.

« *Sopra tre rette π concorrenti in un punto k si trovano a uno, a uno i tre vertici di un triangolo τ e a due, a due i 6 vertici di un esalatero ordinato t.* »

Ogni retta π è diagonale di tre quadrilateri di bitangenti, ognuno d'essi appartiene a 3 esalateri completi t (n.° 22) e d'altra parte in un medesimo esalatero completo t esistono 4 esalateri ordinati aventi a comune una diagonale principale. Dunque: « *Ogni retta π contiene 36 punti k e quindi il numero dei punti k è* $\frac{5040.36}{3} = 60480$. » Segue che due gruppi di Kummer non hanno a comune alcun punto k: altrettanto accade per due esalateri t: onde i punti k si possono rappresentare mediante i simboli stessi dei 60480 esalateri ordinati t.

25. Andiamo ai punti s. Consideriamo per questo il piano O della cfz. di Kummer contenente i punti fondamentali a, b, c, d, e, f. Tale piano appartiene a 15 tetraedri di 1.ª specie (n.° 4), e i 15 vertici opposti sono i 15 punti P ad esso coordinati (C. n.° 8): essi giacciono a tre, a tre sopra 20 rette S per ciascuna delle quali passano tre piani Π (C. n.i 28, 51). Il simbolo di uno di questi 15 punti P è della specie: (ab, cd, ef) e tre di essi stanno su di una retta S quando (C. n.° 28) i loro tre simboli hanno la forma:

$$\begin{vmatrix} ab, & cd, & ef, \\ cf, & eb, & ad, \\ ed, & af, & cb, \end{vmatrix},$$

dunque questo determinante simbolico può servire a rappresentare una delle 20 rette S suddette. Dai simboli già adottati al n.° 12 per i piani Π e da tutto il n.° 28 C. segue, facilmente, che i tre piani Π passanti per la retta S precedente sono: $(ab.cd, cf.eb, ed.af)$, $(ab.ef, cf.ad, ed.cb)$, $(cd.ef, eb.ad, af.cb)$ cioè si ottengono associando due colonne del precedente determinante simbolico. Esso dunque serve a rappresentare contemporaneamente i tre punti P e i tre piani Π passanti per una medesima retta S. Allora prendendo (78) per tipo simbolico del nostro gruppo di Kummer (n.° 16) il determinante in parola diviene il simbolo di un punto S. Questo è:

$$\begin{vmatrix} 12.34.56 \\ 36.25.14 \\ 45.16.23 \end{vmatrix}$$

Ciascuna linea rappresenta un triangolo τ, associando le colonne a due, a due si hanno le tre rette π per il punto s e cioè: (34 . 56, 25 . 14, 16 . 23), (12 . 34, 36 . 25, 45 . 16), (12 . 56, 36 . 14, 45 . 23):

« *Sopra tre rette* π *concorrenti in un punto* s *si trovano a tre, a tre i nove vertici di tre triangoli* τ *così che essi sono prospettivi da quel punto e le rette* π *suddette contengono i vertici corrispondenti.* »

Se nel determinante precedente si scambiano le linee in colonne si ha il simbolo di un nuovo punto s che si dice coniugato del 1.° Cioè con le medesime 9 bitangenti è possibile costruire un'altra terna di triangoli τ prospettivi da un altro punto s. Nel capitolo IV studieremo con maggiori dettagli la figura composta con queste 9 bitangenti. Il punto s precedente non proviene soltanto dal gruppo di Kummer (78) ma, come si vede subito, anche dagli altri due (1357) e (1358). Dunque il numero dei punti s è $\frac{320 . 63}{3} = 6720$, onde sopra una retta π esistono 4 punti s.

26. I punti s giacciono a 4, a 4 non solo sulle rette π ma anche sopra certe altre rette σ che adesso è necessario esaminare. Ricordiamo perciò che (C. n.° 32) le 16 rette S situate sulle facce di un tetraedro di 2.ª specie giacciono a 4, a 4 sopra 4 piani Σ: in ogni piano Σ le 4 rette S compongono un quadrilatero di cui i vertici sono 6 punti P. Sono questi piani Σ che generano mediante le loro intersezioni col piano della quartica le rette σ che cerchiamo. Nello spazio abbiamo già ricordato che 4 rette S giacenti in un piano Σ si tagliano a due, a due in un punto P: dunque nel piano della quartica potremo dire in forza dei n.ⁱ 24 e 25 che:

« *Quattro punti* s *stanno su di una retta* σ *quando i loro simboli hanno a due, a due a comune un triangolo* τ. »

Le rette σ di un gruppo di Kummer sono tante quanti i piani Σ di una cfz. di Kummer cioè 240. Si vede subito che una retta σ non proviene che da un gruppo di Kummer. Cioè le rette σ sono in tutto 15120.

27. Ogni esalatero t essendo un esalatero di Brianchon gli spettano tutte le numerose proprietà dell'esagrammo mistico. Ma qui non intendiamo certo di farne l'applicazione: mentre da un lato tale applicazione sarebbe ovvia, dall'altro lato sarebbe discutibile che ne conseguissero resultati importanti per la cfz. delle bitangenti. Ci serviremo soltanto di una delle proprietà suddette che ci sarà utile per mettere in relazione i punti k con i punti s. Tale proprietà è la seguente: « In un esalatero completo circoscritto a una conica i 60 punti di Brianchon sono allineati a 3, a 3 sopra 20 rette. Per

trovare tre di tali punti basta scegliere un esalatero ordinato qualunque fra i 60 possibili e dedurne gli altri due che si ottengono permutando ciclicamente i lati di ordine pari e lasciando fermi quelli di ordine dispari. » Applichiamo tutto questo all'esalatero t: 15, 16, 17, 28, 38, 48 trovato già al n.° 20. Esso contiene i tre esalateri ordinati: 15 . 28 . 16 . 38 . 17 . 48, 15 . 48 . 16 . 28 . 17 . 38, 15 . 38 . 16 . 48 . 17 . 28 i quali si trovano nelle condizioni volute affinchè i loro punti di Brianchon si trovino in linea retta. D'altra parte ognuno di essi è un punto k (n.° 23). Abbiamo dunque i tre punti k in linea retta:

$$k_1 \equiv \begin{cases} 15.28, & 38.17, & 35.27 \\ 28.16, & 17.48, & 27.46, \\ 16.38, & 15.48, & 35.46 \end{cases} \qquad k_2 \equiv \begin{cases} 15.48, & 28.17, & 25.74 \\ 48.16, & 17.38, & 74.36, \\ 16.28, & 38.15, & 25.36 \end{cases}$$

$$k_3 \equiv \begin{cases} 15.38, & 48.17, & 45.37 \\ 38.16, & 17.28, & 37.26. \\ 16.48, & 28.15, & 26.45 \end{cases}$$

Nella notazione di ognuno di questi punti k entra, oltre l'esalatero ordinato, un triangolo τ (n.° 24). Ora accade che i tre triangoli τ che così si trovano compongono, secondo il n.° 25, il simbolo di un punto S e precisamente:

$$\begin{vmatrix} 35.27.46 \\ 74.36.25 \\ 26.45.37 \end{vmatrix} .$$

Ebbene dimostreremo adesso che la retta passante per k_1, k_2, k_3 contiene anche tale punto s. Si ricordi perciò che una retta K è retta di Brianchon per un esaedro ordinato di cui le facce sono piani fondamentali e vertice è un punto fondamentale: essa passa anche per un punto P (C. n.° 12): si vede subito che l'esaedro suddetto e il triedro di vertice P sono tagliati nell'esalatero t e nel triangolo τ relativi (n.° 24) al punto k sezione della retta K suddetta. Applichiamo tutto questo alle rette K_1, K_2, K_3 che hanno prodotto i tre precedenti punti k_1, k_2, k_3 e ne risulterà immediatamente (n.° 25) che i tre punti P su tali rette giacciono su di una retta S. Dunque questa e le K_1, K_2, K_3 giacciono in un medesimo piano (contrassegnato con C da Caporali (C. n.° 39). La sezione di questo piano C col piano della quartica è la retta cercata. La chiameremo una retta c.

« *I 960 punti k di un gruppo di* KUMMER *stanno a tre, a tre sopra 320 rette c ognuna delle quali passa per un punto s. Un punto s e un punto k stanno su di una stessa retta c quando il triangolo* τ *che entra nella notazione di k entra pure nella notazione di s.* »

28. I 4 piani C per un punto P si tagliano secondo una stessa retta I e in ciascuno di questi piani giace una delle 4 rette S che escono da P: si hanno così 240 rette I (C. n.° 37).

Segue dunque: « *Le 320 rette c di un gruppo di* KUMMER *passano a 4, a 4 per 240 punti i* » (ciò discende anche dalla teoria dell'esagrammo mistico). Si può aggiungere:

« *Quattro rette c si tagliano in uno stesso punto i quando i 4 punti s che contengono hanno nei loro simboli un medesimo triangolo* τ *a comune.* » Una retta c proviene da un sol gruppo di KUMMER dunque le rette c sono $320 . 63 = 20160$: e i punti i: $240 . 63 = 15120$. Ogni retta c contiene 3 punti i ecc.

29. Riassumendo i risultati di questo capitolo abbiamo il seguente teorema:

I 378 punti d'incontro a due, a due delle 28 bitangenti stanno a tre, a tre sopra 5040 rette π *passanti a tre, a tre per 6720 punti s e 60480 punti k. Ogni retta* π *contiene 4 punti s e 36 punti k. I 6720 punti s stanno a 4, a 4 sopra 15120 rette* σ. *I 60480 punti k stanno a 3, a 3 sopra 20160 rette c che passano a tre, a tre per i 6720 punti s e a 4, a 4 per 15120 punti i.*

Con i punti e le rette introdotte mediante questo teorema comporremo le notevoli figure del capitolo seguente.

CAPITOLO IV.

Figure notevoli contenute in un gruppo di Kummer.

30. La prima figura di cui vogliamo occuparci è quella composta con le 9 bitangenti che costituiscono i tre triangoli τ prospettivi da un punto s e di cui parlammo già al n.° 25. Chiameremo col simbolo Ω una tal figura. Di essa conosciamo già la proprietà seguente (cf. n.° 25):

« *Con le 9 bitangenti che costituiscono i tre triangoli* τ *prospettivi da un punto s si possono formare altri tre triangoli* τ *prospettivi da un altro punto s.*

Tali due punti s si dicono *coniugati.* I simboli di due punti s coniugati, di cui già trovammo un tipo al n.° 25 provano che:

« *Le tre rette π concorrenti in uno dei due punti s sono gli assi di prospettiva delle 3 coppie di triangoli τ il cui centro di prospettiva è il punto s coniugato.* »

31. Al n.° 25 costruimmo già un tipo simbolico di punti s che è il seguente:

$$\begin{vmatrix} 12.34.56 \\ 36.25.14 \\ 45.16.23 \end{vmatrix},$$

cerchiamo adesso i rimanenti. Perciò basterà applicare a uno qualunque dei piani ik il processo applicato al piano O nel n.° 25. Ad es. si prenda il piano ab che contiene i punti

$$a,\ b,\ \begin{pmatrix} a\,b\,c \\ d\,e\,f \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a\,b\,d \\ c\,f\,e \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a\,b\,e \\ d\,f\,c \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a\,b\,f \\ d\,c\,e \end{pmatrix},$$

esso ci fornisce i due tipi simbolici di rette S:

$$\begin{vmatrix} O & cd & ef \\ cf & bc & af \\ de & da & be \end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix} ac & bd & cd \\ be & de & da \\ ce & ae & bc \end{vmatrix}.$$

Come nel n.° 25 così qui ogni linea rappresenta un punto P sulla S, associando le colonne si trovano i piani Π per la S medesima. Approfittando dunque del solito riferimento del n.° 16 si hanno i due nuovi tipi simbolici di punti s:

$$s_1 \equiv \begin{vmatrix} 78.34.56 \\ 36.32.61 \\ 45.41.25 \end{vmatrix},\qquad s_2 \equiv \begin{vmatrix} 13.24.34 \\ 25.45.14 \\ 35.15.23 \end{vmatrix},$$

a questi aggiungendo il tipo già conosciuto:

$$s_3 \equiv \begin{vmatrix} 12.34.56 \\ 36.25.14 \\ 45.16.23 \end{vmatrix},$$

si ottengono i tre tipi possibili domandati. Sui quali faremo le seguenti osservazioni:

Ogni linea del determinante-simbolo rappresenta uno dei triangoli τ prospettivi dal punto s: le rette π si ottengono associando le colonne. In ogni determinante scambiando le linee con le colonne, si ottiene il simbolo del punto s coniugato.

I simboli precedenti possono anche descriversi così:

Il tipo s_3 si ottiene scegliendo un esagono ordinato in 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8: Allora una linea del determinante è formata con i lati pari, una con i lati dispari la terza con le diagonali principali. Sono lati corrispondenti quelli che non hanno indici comuni. I lati corrispondenti si scrivono in colonna. Il num. di questi tipi è $\frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{60}{3} = 560$.

Il tipo s_1 può ottenersi da s_3 così: si pone 78 (il lato dell'ottagono escluso) al posto di un termine qualunque di s_3 (p. es. al posto di 12) e nel minore complementare si scambiano i termini in diagonale: i 4 termini rimanenti si lasciano fissi. Ogni tipo s_3 origina 9 tipi s_1, dunque il num. di questi ultimi è $560 \cdot 9 = 5040$.

Finalmente per costruire il tipo s_2 si ricorre a un pentagono completo in 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e di questo pentagono si esclude un lato. Con i 9 lati rimanenti si possono formare due terne di triangoli τ prospettivi da due punti s coniugati.

Il num. di questi ultimi è dunque $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3} \cdot 10 \cdot 2 = 1120$.

Per cui il num. totale dei punti s è $560 + 5040 + 1120 = 6720$ come già sapevamo (n.° 25).

« *Quindi il num. delle fig.* Ω è $\frac{6720}{2} = 3360$. »

32. Sono facili conseguenze dei num. precedenti queste osservazioni: *In un gruppo di* Kummer *prese le 9 bitangenti di una fig.* Ω *esiste una sola bitangente capace di formare con i 6 triangoli τ della figura sei quaderne di bitangenti aventi i loro punti di contatto su di una conica. La chiameremo la bitangente coordinata alla fig.* Ω. *Le 9 bitangenti di una fig.* Ω *e la bitangente x coordinata alla figura sono in tal relazione che aggiungendo x alla figura e togliendone una qualunque delle altre, la figura che risulta è ancora una figura* Ω.

Le 10 bitangenti che rimangono escluse da un gruppo di serie di 2.ª specie, o quelle che avanzano da un gruppo di Kummer *quando si tolgono le 6* *bitangenti di un esalatero t, costituiscono in 10 modi diversi una fig.* Ω *con la bitangente coordinata.*

E quindi anche:

« *Escludendo dai 16 piani fondamentali di una cfz. di* Kummer *6 che passino per uno stesso punto si ottiene una figura che è tagliata da un piano generico secondo una fig.* Ω *con la propria bitangente coordinata.* »

33. Ora la figura stereometrica che risulta con la esclusione suddetta si compone (C. n.° 53) di 45 rette R che giacciono a tre, a tre in 15 piani Π i quali a lor volta passano a tre, a tre per 20 rette S che concorrono a 4, a 4 in 15 punti Θ. Si formano, con questi elementi, 6 pentaedri ciascuno dei quali ha per facce piani Π, per spigoli rette S e per vertici punti Θ. E finalmente nasce da questi pentaedri un esaedro che è, per così dire, il nucleo di tutta la figura. Tagliando col piano della quartica troveremo la figura considerata nell'ultimo num. e che chiameremo col nome di « *figura relativa a un esalatero t* » appunto perchè può ottenersi escludendo da un gruppo di Kummer le 6 bitangenti di un esalatero t. Essa si compone di 45 punti r che stanno a tre, a tre su 15 rette π le quali passano a tre, a tre per 20 punti s. In forza delle precedenti considerazioni stereometriche potremo dire che:

« *Le 15 rette* π *e i 20 punti s individuati dalla figura relativa a un esalatero t, sono i lati e i vertici di 6 pentalateri completi.* »

34. Il num. 31 prova che le 10 bitangenti della figura che stiamo studiando saranno rappresentate simbolicamente o dai lati di un pentagono completo contenuto in 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 oppure dei lati e dalle diagonali principali di un esagono ordinato cui si aggiunga il lato escluso dall'ottagono. Onde il num. di tali figure è $\frac{8\,.\,7\,.\,6}{2\,.\,3}+\frac{1}{2}\left(\frac{8\,.\,7}{2}\,.\,\frac{60}{3}\right)=336$ cioè tante quanti sono i gruppi di 2.ª specie, come ben naturale, in forza di un osservazione del n.° 32. Per trovare le 10 fig. Ω basta escludere un lato del pentagono nel 1.° caso; ovvero, nel 2.°, basta costruire il tipo s_3 servendosi dell'esagono ordinato e poi dedurne i 9 tipi possibili s_1 secondo il n.° 31 stesso.

Serviamoci ad es. del pentagono completo 12345 per dedurre tutti gli elementi dei pentalateri considerati nel num. precedente. Volendo adottare una scrittura abbastanza concisa adotteremo queste convenzioni. La lettera π posta di fianco a una linea o sopra una colonna di un determinante simbolico indicherà che essa proviene dall'associare le altre due linee, o le altre due colonne. Ponendo le due lettere s, s' di fronte a un determinante-simbolico intenderemo che i triangoli τ di s siano rappresentati dalle linee e quelli di s' dalle colonne.

Ciò posto ecco il quadro delle 10 fig. Ω e relativi elementi:

$$\begin{array}{c|c|} & \pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3 \\ \hline \pi_7 & 13.24.34 \\ \pi_6 & 25.45.14 \\ \pi_5 & 35.15.23 \end{array} \equiv (s_{12},\ s'_{12}) \equiv \Omega_{12}; \qquad \begin{array}{c|c|} & \pi_8 \quad \pi_1 \quad \pi_{10} \\ \hline \pi_7 & 34.21.24 \\ \pi_{12} & 15.25.23 \\ \pi_{11} & 45.35.14 \end{array} \equiv (s_{13},\ s'_{13}) \equiv \Omega_{13};$$

$$\begin{array}{c|c|} & \pi_{14} \quad \pi_6 \quad \pi_{10} \\ \hline \pi_3 & 34.21.23 \\ \pi_{15} & 15.25.24 \\ \pi_{11} & 35.45.13 \end{array} \equiv (s_{14},\ s'_{14}) \equiv \Omega_{14}; \qquad \begin{array}{c|c|} & \pi_{15} \quad \pi_8 \quad \pi_5 \\ \hline \pi_{12} & 25.31.23 \\ \pi_{14} & 14.34.35 \\ \pi_2 & 24.45.12 \end{array} \equiv (s_{15},\ s'_{15}) \equiv \Omega_{15};$$

$$\begin{array}{c|c|} & \pi_9 \quad \pi_5 \quad \pi_{10} \\ \hline \pi_3 & 34.12.14 \\ \pi_{12} & 25.15.13 \\ \pi_{13} & 45.35.24 \end{array} \equiv (s_{23},\ s'_{23}) \equiv \Omega_{23}; \qquad \begin{array}{c|c|} & \pi_4 \quad \pi_2 \quad \pi_{10} \\ \hline \pi_7 & 34.12.13 \\ \pi_{15} & 25.15.14 \\ \pi_{13} & 35.45.23 \end{array} \equiv (s_{24},\ s'_{24}) \equiv \Omega_{24};$$

$$\begin{array}{c|c|} & \pi_9 \quad \pi_1 \quad \pi_5 \\ \hline \pi_6 & 45.12.14 \\ \pi_{12} & 23.13.15 \\ \pi_4 & 34.35.24 \end{array} \equiv (s_{25},\ s'_{25}) \equiv \Omega_{25}; \qquad \begin{array}{c|c|} & \pi_9 \quad \pi_7 \quad \pi_{14} \\ \hline \pi_8 & 45.13.15 \\ \pi_3 & 23.12.14 \\ \pi_4 & 25.24.35 \end{array} \equiv (s_{34},\ s'_{34}) \equiv \Omega_{34};$$

$$\begin{array}{c|c|} & \pi_4 \quad \pi_{11} \quad \pi_5 \\ \hline \pi_1 & 25.13.12 \\ \pi_{14} & 34.14.15 \\ \pi_{13} & 24.45.23 \end{array} \equiv (s_{35},\ s'_{35}) \equiv \Omega_{35}; \qquad \begin{array}{c|c|} & \pi_9 \quad \pi_{12} \quad \pi_{11} \\ \hline \pi_8 & 34.15.13 \\ \pi_6 & 25.12.14 \\ \pi_{13} & 23.24.35 \end{array} \equiv (s_{45},\ s'_{45}) \equiv \Omega_{45}.$$

I pentalateri richiesti sono i seguenti:

lati		vertici
$\pi_1\ \pi_3\ \pi_8\ \pi_{15}\ \pi_{13}$	. . . . . .	$s_{12}\ s_{25}\ s_{13}\ s'_{35}\ s'_{14}\ s'_{34}\ s'_{23}\ s_{15}\ s'_{24}\ s'_{45}$
$\pi_1\ \pi_2\ \pi_{10}\ \pi_9\ \pi_{14}$	. . . . . .	$s_{12}\ s_{13}\ s_{25}\ s'_{35}\ s_{24}\ s_{45}\ s'_{15}\ s_{23}\ s_{14}\ s_{34}$
$\pi_2\ \pi_3\ \pi_4\ \pi_{11}\ \pi_{12}$	. . . . . .	$s_{12}\ s_{24}\ s_{45}\ s'_{15}\ s'_{14}\ s'_{23}\ s'_{34}\ s'_{25}\ s_{35}\ s'_{13}$
$\pi_8\ \pi_{10}\ \pi_5\ \pi_4\ \pi_6$	. . . . . .	$s_{13}\ s_{15}\ s'_{34}\ s'_{45}\ s_{24}\ s_{23}\ s_{14}\ s'_{12}\ s_{35}\ s'_{25}$
$\pi_5\ \pi_9\ \pi_{15}\ \pi_7\ \pi_{11}$	. . . . . .	$s_{15}\ s_{23}\ s'_{12}\ s_{35}\ s_{25}\ s_{45}\ s_{34}\ s'_{24}\ s'_{14}\ s'_{13}$
$\pi_7\ \pi_{14}\ \pi_6\ \pi_{12}\ \pi_{13}$	. . . . . .	$s'_{12}\ s_{34}\ s'_{13}\ s'_{24}\ s_{14}\ s'_{35}\ s'_{15}\ s'_{45}\ s'_{25}\ s'_{23}$.

35. La notevole figura stereometrica già descritta al n.° 33 ammette, come ivi ricordammo, un esaedro che ne è il nucleo. È necessario ricordare qui come nasce un tale esaedro (C. n.° 53).

Perciò si consideri in un piano Π i seguenti 3 quadrilateri desmici: quello delle rette S, quello delle rette di Pascal e finalmente quello formato dalle tre rette R e dalla retta J che contiene i 4 punti di Steiner giacenti in Π (C. n.° 36).

Ogni piano Π contiene una tale retta J: le sei rette J situate sulle facce di uno stesso pentaedro (n.° 33) stanno in un piano: così ciascuno di tali pentaedri individua un piano e si hanno 6 piani componenti l'esaedro cercato. Esso ha per vertici punti di Steiner e per spigoli rette J.

La sezione di un tale esaedro col piano della quartica dà un esalatero che, per così dire, regge tutta la figura composta con le 10 bitangenti studiate nel num. precedente. Per determinare un tale esalatero basta costruire, senza uscire dal piano il punto j (sezione della retta J) su ciascuna retta π. Per questo si osservi che i tre quadrilateri desmici di dianzi tagliano sulla π tre gruppi di una involuzione del 4.° ordine. Essa sarà nota quando siano conosciuti due gruppi. P. es. quello tagliato dalle rette S e quello segnato dalle 4 rette di Pascal. Allora il 4.° punto del gruppo cui appartengono i tre punti r su π sarà il punto richiesto. Il quadrilatero delle rette S taglia π nei suoi 4 punti s. Rimangono da trovare le intersezioni di π con le 4 rette di Pascal. Ricordando che una tal retta proviene dalla intersezione di un piano Π con un piano fondamentale non passante per alcuno dei 3 punti fondamentali contenuti in Π (C. n.^{i} 11, 14), si vede subito che, nel nostro caso, i 4 punti cercati, sono quelli nei quali la retta π è tagliata dalle 4 bitangenti che sono capaci di completare un triangolo τ con ciascuna delle 3 coppie di bitangenti individuanti π. Ecco costruito il punto j richiesto.

« *I 15 punti j situati sulle 15 rette π della figura sono i vertici di un esalatero completo che può riguardarsi come il nucleo della figura medesima.* »

36. Le considerazioni duali di quelle riassunte nel n.° 33 conducono alla esistenza della figura composta con gli elementi coordinati a un piano fondamentale. Essa è descritta in C. n.^{i} 51, 52. Noi ne studieremo qui la sezione piana chiamandola « *figura relativa a una bitangente in un determinato gruppo di* Kummer ». Nello spazio un piano fondamentale appartiene a 15 tetraedri di 1.^{a} specie di cui i vertici opposti sono 15 punti P situati a 3, a 3 su 20 rette S e a 6, a 6 sopra 15 piani Σ. Nel piano della quartica

dato il gruppo di Kummer (78) e fissata la bitangente 78, esisteranno 15 triangoli τ capaci di completare con 78 una quaderna di bitangenti i cui punti di contatto appartengono a una conica. Essi sono:

12.34.56	13.24.56	15.26.43
12.35.46	14.25.36	15.24.36
12.36.45	14.23.56	16.24.35
13.25.46	14.26.35	16.23.45
13.26.45	15.23.46	16.25.43.

Questi triangoli τ dànno luogo ai seguenti punti s:

$$\left|\begin{matrix}12.34.56\\46.25.13\\35.16.24\end{matrix}\right| \equiv (s_1,\ s_2),\qquad \left|\begin{matrix}12.35.46\\36.24.15\\45.16.23\end{matrix}\right| \equiv (s_3,\ s_4),$$

$$\left|\begin{matrix}14.25.36\\26.34.15\\35.16.24\end{matrix}\right| \equiv (s_5,\ s_6),\qquad \left|\begin{matrix}12.34.56\\36.25.14\\45.16.23\end{matrix}\right| \equiv (s_7,\ s_8),$$

$$\left|\begin{matrix}12.34.56\\36.15.24\\45.26.31\end{matrix}\right| \equiv (s_9,\ s_{10}),\qquad \left|\begin{matrix}12.34.56\\35.26.14\\46.15.23\end{matrix}\right| \equiv (s_{11},\ s_{12}),$$

$$\left|\begin{matrix}14.26.35\\56.13.24\\23.54.16\end{matrix}\right| \equiv (s_{13},\ s_{14}),\qquad \left|\begin{matrix}13.25.46\\26.34.15\\45.16.23\end{matrix}\right| \equiv (s_{15},\ s_{16}),$$

$$\left|\begin{matrix}13.25.46\\24.36.15\\56.14.23\end{matrix}\right| \equiv (s_{17},\ s_{18}),\qquad \left|\begin{matrix}13.25.46\\45.36.12\\26.14.35\end{matrix}\right| \equiv (s_{19},\ s_{20}).$$

Ricordando che 4 punti s stanno su di una retta σ quando hanno a comune a due, a due un triangolo τ (n.° 26) si vede subito che il quadro delle rette σ è questo:

$$\begin{array}{lll}
s_1\ s_7\ s_5\ s_{15}\ \ldots\ \sigma_1, & s_9\ s_{11}\ s_{16}\ s_6\ \ldots\ \sigma_6, & s_{12}\ s_{20}\ s_{14}\ s_5\ \ldots\ \sigma_{11}, \\
s_1\ s_9\ s_{17}\ s_{14}\ \ldots\ \sigma_2, & s_2\ s_3\ s_{13}\ s_6\ \ldots\ \sigma_7, & s_4\ s_8\ s_{14}\ s_6\ \ldots\ \sigma_{12}, \\
s_1\ s_{11}\ s_{19}\ s_4\ \ldots\ \sigma_3, & s_2\ s_{12}\ s_8\ s_{10}\ \ldots\ \sigma_8, & s_4\ s_{10}\ s_5\ s_{18}\ \ldots\ \sigma_{12}, \\
s_7\ s_9\ s_{20}\ s_3\ \ldots\ \sigma_4, & s_2\ s_{20}\ s_{16}\ s_{18}\ \ldots\ \sigma_9, & s_8\ s_{19}\ s_6\ s_{17}\ \ldots\ \sigma_{14}, \\
s_7\ s_{11}\ s_{13}\ s_{18}\ \ldots\ \sigma_5, & s_3\ s_{12}\ s_{15}\ s_{17}\ \ldots\ \sigma_{10}, & s_{10}\ s_{19}\ s_{13}\ s_{15}\ \ldots\ \sigma_{15}.
\end{array}$$

Nello spazio i 15 punti P coordinati a un piano fondamentale sono i vertici di 6 pentagoni gobbi che hanno per spigoli rette S e per facce piani Σ. I 20 piani C coordinati allo stesso piano passano a 4, a 4 per 15 rette I: le cinque rette I uscenti dai vertici di un medesimo pentagono gobbo (dei precedenti) concorrono in uno stesso punto. Si hanno così 6 punti che formano un esagono di cui le facce sono piani C e gli spigoli rette I: è l'esagono nucleo della figura (C. n.i 51, 52). Tagliando col piano della quartica trovano che: « *Con i 20 punti s e le 15 rette σ precedenti si possono formare 6 figure ciascuna delle quali è sezione di un pentagono gobbo.* »

Ecco queste figure:

$$\begin{array}{l}
s_1\ s_7\ s_5\ s_9\ s_{11}\ s_4\ s_{14}\ s_{16}\ s_{18}\ s_{20}\ \ldots\ \sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3\ \sigma_4\ \sigma_{11}\ \sigma_6\ \sigma_{12}\ \sigma_5\ \sigma_{13}\ \sigma_9 \\
s_2\ s_3\ s_6\ s_{12}\ s_8\ s_{20}\ s_{16}\ s_{14}\ s_9\ s_{17}\ \ldots\ \sigma_7\ \sigma_8\ \sigma_9\ \sigma_{10}\ \sigma_{11}\ \sigma_{16}\ \sigma_{11}\ \sigma_{12}\ \sigma_4\ \sigma_2 \\
s_3\ s_2\ s_{13}\ s_{12}\ s_{15}\ s_{20}\ s_7\ s_{10}\ s_{18}\ s_5\ \ldots\ \sigma_7\ \sigma_{10}\ \sigma_4\ \sigma_8\ \sigma_{15}\ \sigma_9\ \sigma_5\ \sigma_{11}\ \sigma_1\ \sigma_{13} \\
s_4\ s_{19}\ s_{11}\ s_8\ s_{16}\ s_{10}\ s_{18}\ s_2\ s_{13}\ s_6\ \ldots\ \sigma_3\ \sigma_{12}\ \sigma_{13}\ \sigma_{14}\ \sigma_6\ \sigma_9\ \sigma_8\ \sigma_{15}\ \sigma_5\ \sigma_7 \\
s_{19}\ s_{13}\ s_{15}\ s_6\ s_{17}\ s_{11}\ s_1\ s_9\ s_7\ s_3\ \ldots\ \sigma_{15}\ \sigma_{14}\ \sigma_3\ \sigma_{10}\ \sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_7\ \sigma_6\ \sigma_5\ \sigma_4 \\
s_{19}\ s_{17}\ s_8\ s_{15}\ s_{10}\ s_1\ s_4\ s_5\ s_{14}\ s_{12}\ \ldots\ \sigma_{14}\ \sigma_{15}\ \sigma_3\ \sigma_{10}\ \sigma_2\ \sigma_8\ \sigma_{12}\ \sigma_1\ \sigma_{13}\ \sigma_{11}.
\end{array}$$

Finalmente, ricordando che 4 rette c concorrono in un punto i, quando i 4 punti s che contengono hanno nei loro simboli un medesimo triangolo τ (n.° 28), si ha (indicando con c_{sk} la retta c che contiene s_k) il quadro seguente delle quaderne di rette c concorrenti in un punto i:

$$\begin{array}{ll}
c_{s_1}\ c_{s_7}\ c_{s_9}\ c_{s_{11}}\ \ldots\ i_1, & c_{s_6}\ c_{s_{11}}\ c_{s_{13}}\ c_{s_{19}}\ \ldots\ i_8 \\
c_{s_2}\ c_{s_3}\ c_{s_{12}}\ c_{s_{20}}\ \ldots\ i_2, & c_{s_8}\ c_{s_{12}}\ c_{s_{14}}\ c_{s_{17}}\ \ldots\ i_9 \\
c_{s_4}\ c_{s_8}\ c_{s_{10}}\ c_{s_{19}}\ \ldots\ i_3, & c_{s_4}\ c_{s_{11}}\ c_{s_{16}}\ c_{s_{18}}\ \ldots\ i_{10} \\
c_{s_1}\ c_{s_{15}}\ c_{s_{17}}\ c_{s_{19}}\ \ldots\ i_4, & c_{s_5}\ c_{s_{10}}\ c_{s_{12}}\ c_{s_{15}}\ \ldots\ i_{11} \\
c_{s_9}\ c_{s_{14}}\ c_{s_{16}}\ c_{s_{20}}\ \ldots\ i_5, & c_{s_3}\ c_{s_6}\ c_{s_9}\ c_{s_{17}}\ \ldots\ i_{12} \\
c_{s_2}\ c_{s_{10}}\ c_{s_{13}}\ c_{s_{18}}\ \ldots\ i_6, & c_{s_1}\ c_{s_4}\ c_{s_5}\ c_{s_{14}}\ \ldots\ i_{13} \\
c_{s_5}\ c_{s_7}\ c_{s_{18}}\ c_{s_{20}}\ \ldots\ i_7, & c_{s_3}\ c_{s_7}\ c_{s_{13}}\ c_{s_{15}}\ \ldots\ i_{14}
\end{array}$$

$$c_{s_2}\ c_{s_6}\ c_{s_8}\ c_{s_{16}}\ \ldots\ i_{15}.$$

E si conclude che:

« *Le 20 rette c e i 15 punti i precedenti compongono una figura che è sezione di un esagono gobbo completo.* » In un gruppo di Kummer esistono 16 di queste figure.

37. Finalmente i risultati di n.° 7 e 12 conducono a un'ultima figura che è descritta nel teorema seguente:

« *Le 240 rette π di un gruppo di* Kummer *si distribuiscono in 15 gruppi di 16 ognuno, ciascuno dei quali si può pensare a sua volta come l'insieme di 16 bitangenti di una nuova quartica costituenti un suo gruppo di* Kummer. »

Cioè per ogni gruppo di Kummer *esistono altre 15 quartiche aventi ciascuna per 16 bitangenti 16 delle rette π suddette. Queste quartiche e la primitiva hanno a comune la figura composta con i 6 poli del piano sezione e relativi punti M, rette m ecc.*

Per caratterizzare simbolicamente un tal gruppo di rette π basterà applicare al risultato del n.° 12, uno dei riferimenti del n.° 16.

Se si tratta del gruppo di Kummer (78) uno dei gruppi cercati di rette π è il seguente:

$$\begin{vmatrix} 12.78, & 13.14, & 25.26 \\ 12.78, & 23.24, & 15.16 \\ 34.56, & 25.26, & 23.24 \\ 34.56, & 15.16, & 13.14 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 34.78, & 31.32, & 45.46 \\ 34.78, & 35.36, & 41.42 \\ 12.56, & 31.32, & 35.36 \\ 12.56, & 45.46, & 41.42 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 56.78, & 51.52, & 64.63 \\ 56.78, & 53.54, & 61.62 \\ 12.34, & 53.54, & 51.52 \\ 12.34, & 61.62, & 64.63 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 36.45, & 15.26, & 13.24 \\ 16.25, & 46.35, & 13.24 \\ 14.23, & 35.46, & 15.26 \\ 14.23, & 16.25, & 36.45 \end{vmatrix}.$$

Esse sono scritte qui a 4, a 4 come provengono dalla sezione di 4 tetraedri di 2.ª specie. Però si può indicare un modo più semplice per ottenerle che è il seguente. Si dividano le 6 coppie della serie (78) in tre gruppi di due come p. es.: (17.18, 27.28), (37.38, 47.48), (57.58, 67.68) e si scrivano le tre coppie di serie congiunte di 2.ª specie secondo tali gruppi.

Cioè:

$$\left\{\begin{array}{l} 17.28,\ 18.27,\ 12.78,\ 36.45,\ 35.46,\ 34.56 \\ 17.27,\ 18.28,\ 13.23,\ 14.24,\ 15.25,\ 16.26 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 37.47,\ 38.48,\ 31.41,\ 32.42,\ 35.45,\ 36.46 \\ 37.48,\ 38.47,\ 34.78,\ 12.56,\ 16.25,\ 15.26 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 75.86,\ 76.85,\ 78.56,\ 12.34,\ 13.24,\ 14.23 \\ 75.76,\ 85.86,\ 15.16,\ 25.26,\ 35.36,\ 45.46. \end{array}\right.$$

Si hanno così 3 gruppi di due serie ciascuno. *Allora per trovare le 16 rette π richieste si escludano le coppie di congiunzione con la serie data e si scelga un punto r in ciascun gruppo in guisa da formare 3 punti r di una stessa retta π (n.° 22) in tutti i modi possibili.* Così ogni serie ci dà 15 di tali aggruppamenti e in tutto se ne ha: $63 . 15 = 945$.

CAPITOLO V.

Le coniche dei sedici punti

38. In questo capitolo ci proponiamo di applicare i risultati del n.° 6 relativi alle quadriche che passano per 8 rette R e per due coppie di assi fondamentali considerandone le sezioni col piano della quartica. Ricorderemo perciò che al n.° 6 trovammo già fra le quadriche suddette una che conteneva le 8 rette R:

$$O.ab, \quad ac.bc, \quad ad.bd, \quad cd.ef,$$
$$O.cd, \quad ac.ad, \quad bc.bd, \quad ab.ef,$$

di cui le prime 4 si appoggiano agli assi AB, BA e le seconde 4 agli assi CD, DC. Tagliamo ora col piano della quartica e supponendo che si tratti del 1.° riferimento del n.° 16 adottiamo per gruppo di Kummer il tipo (78). Otterremo allora gli 8 punti r:

$$12.78,\ 13.23,\ 14.24,\ 34.56$$
$$34.78,\ 13.14,\ 23.24,\ 12.56$$

giacenti su di una conica la quale conterrà anche i punti d'intersezione, col piano della quartica, degli assi sopra ricordati. Per trovarli si ricordi che esistono le due quaterne coniugate di rette R (n.° 5):

$$\left.\begin{matrix} O.ab, & cd.ef, & cf.de, & ce.df \\ ac.bc, & ad.bd, & ae.be, & af.bf \end{matrix}\right\} \text{appoggiate ad } AB,\ BA,$$

e le altre due:

$$\left.\begin{matrix} O.cd, & ab.ef, & af.be, & ae.bf \\ ca.da, & cb.db, & ce.de, & cf.df \end{matrix}\right\} \text{appoggiate a } CD,\ DC.$$

Le sezioni di queste quaterne producono le seguenti coppie di serie (n.° 15):

$$\begin{cases} 12.78, & 34.56, & 36.45, & 35.46 \\ 13.23, & 14.24, & 15.25, & 16.26 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 34.78, & 12.56, & 16.25, & 15.26 \\ 13.14, & 23.24, & 35.45, & 36.46. \end{cases}$$

Quindi i punti cercati saranno (n.° 17) le due coppie di punti M situati sopra, rispettivamente: (17.18, 27.28), (37.38, 47.48).

Ciò posto la conica in parola può caratterizzarsi così: si prenda la serie:

$$12.34,\ 56.78,\ 13.24,\ 14.23,\ 57.68,\ 58.67, \tag{I}$$

e si scelgano due coppie delle serie come 12.34, 56.78 e le altre due: 13.24, 14.23, poi si considerino i quadrilateri 12, 34, 56, 78; 13, 24, 14, 23 e dai loro 12 vertici si escludano i 4 punti r della serie: *i vertici rimanenti appartengono alla conica cercata* (la cui esistenza risulta anche osservando che essa deve appartenere ai due fasci di coniche (12.34, 56.78), (13.24, 14.23) perchè essi sono contenuti nella rete individuata dalla serie). Per caratterizzare poi i punti M che tale conica contiene si considerino le due coppie avanzate nella (I) cioè le 57.68, 58.67 e si osservi che esiste la serie:

$$17.18,\ 27.28,\ 37.38,\ 47.48,\ 57.58,\ 67.68, \tag{II}$$

congiunta di 1.ª specie con la (I) secondo le coppie suddette. Togliendo le coppie di congiunzione rimangono le prime quattro che aggruppate così:

$$(17.18,\ 27.28),\ (37.38,\ 47.48),$$

dànno i simboli delle due coppie M cercate.

Ma si può osservare che in uguali condizioni della (II) rispetto alla (I) si trova la serie:

$$15\ 16,\ 25.26,\ 35.36,\ 45.46,\ 75.76,\ 85.86, \tag{III}$$

chè anch'essa è congiunta alla (I) mediante 57 . 68, 58 . 67. È dunque il caso di domandarsi se la conica in questione passa anche per i punti M i cui simboli sono: (*)

$$(15 \,.\, 16,\ 25 \,.\, 26),\quad (35 \,.\, 36,\ 45 \,.\, 46).$$

La risposta è affermativa. Infatti, si consideri il gruppo di Kummer (56) e lo si riferisca a una cfz. di Kummer, che sarà diversa da quella di prima, mediante il passaggio (n.° 16) $\left\{ \begin{matrix} 56 \\ O' \end{matrix}, \begin{matrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 7\ 8 \\ a'\,b'\,c'\,d'\,e'\,f' \end{matrix} \right\}$. Ripetendo allora tutto il processo di dianzi si vede che la quadrica delle 8 rette R:

$$\begin{matrix} O'.\,a'b', & a'c'.\,b'c', & a'd'.\,b'd', & c'd'.\,e'f', \\ O'.\,c'd', & a'c'.\,a'd', & b'c'.\,b'd', & a'b'.\,e'f', \end{matrix}$$

è tagliata dal piano della quartica nella conica che contiene i punti r:

$$\begin{matrix} 56 \,.\, 12, & 13 \,.\, 23, & 14 \,.\, 24, & 34 \,.\, 78, \\ 56 \,.\, 34, & 13 \,.\, 14, & 23 \,.\, 24, & 12 \,.\, 78, \end{matrix}$$

che sono ancora quelli di prima: dunque intanto la conica trovata è la medesima. Però quando si vanno a cercare i punti M su di essa non si trovano più quelli di dianzi.

Infatti le quaterne R coniugate:

$$\left. \begin{matrix} O'\,.\,a'b', & c'd'.\,e'f', & c'f'.\,d'e', & c'e'.\,d'f' \\ a'c'.\,b'c', & a'd'.\,b'd', & a'e'.\,b'e', & a'f'.\,b'f' \end{matrix} \right\} \text{appoggiate ad } A'B',\ B'A',$$

e le altre due:

$$\left. \begin{matrix} O'\,.\,c'd', & a'b'.\,e'f', & a'e'.\,b'f', & a'f'.\,b'e' \\ c'a'.\,d'a', & c'b'.\,d'b', & c'e'.\,d'e', & c'f'.\,d'f' \end{matrix} \right\} \text{appoggiate a } C'D',\ D'C',$$

tagliate col piano della quartica dànno adesso le due coppie di serie:

$$\left\{ \begin{matrix} 56 \,.\, 12, & 34 \,.\, 78, & 38 \,.\, 47, & 37 \,.\, 48 \\ 13 \,.\, 23, & 14 \,.\, 24, & 17 \,.\, 27, & 18 \,.\, 28 \end{matrix} \right., \qquad \left\{ \begin{matrix} 56 \,.\, 34, & 12 \,.\, 78, & 17 \,.\, 28, & 18 \,.\, 27 \\ 31 \,.\, 41, & 32 \,.\, 42, & 37 \,.\, 47, & 38 \,.\, 48 \end{matrix} \right.,$$

e quindi le sezioni di $A'B'$, $B'A'$, $C'D'$, $D'C'$ sono rispettivamente le coppie M:

$$(15 \,.\, 16,\ 25 \,.\, 26),\quad (35 \,.\, 36,\ 45 \,.\, 46), \qquad \text{c. d. d.}$$

(*) Rappresentando una coppia M col simbolo (15 . 16, 25 . 26) intendiamo che sia quella giacente sulla retta che unisce i due punti r: 15 . 16, 25 . 26.

Dunque, data la serie:

$$12.34,\ 56.78,\ 13.24,\ 14.23,\ 57.68,\ 58.67\ldots \qquad \text{(I)}$$

e scelto il paio di coppie: (12.34, 56.78), (13.24, 14.23) abbiamo trovato una conica che contiene gli 8 punti r:

$$12.56,\ 12.78,\ 34.56,\ 34.78,\ 13.14,\ 13.23,\ 24.14,\ 24.23,$$

e gli 8 punti M divisi nelle 4 coppie:

$$(17.18,\ 27.28),\quad (37.38,\ 47.48),\quad (15.16,\ 25.26),\quad (35.36,\ 45.46).$$

Perciò chiameremo una tal conica « *conica dei 16 punti* ».

Il modo di caratterizzare i punti r che essa contiene è quello dianzi esposto. Quanto alle coppie M conviene seguire le norme seguenti. La conica di dianzi dipende dai due aggruppamenti iniziali: (12.34, 56.78), (13.24, 14.23). Ebbene costruiamo le serie congiunte alla data (I) secondo tali coppie. Esse sono:

$$\begin{array}{l}
12.56,\ 34.78,\ 15.26,\ 16.25,\ 37.48,\ 38.47\\
12.78,\ 34.56,\ 17.28,\ 18.27,\ 35.46,\ 36.45\\
13.14,\ 23.24,\ 53.54,\ 63.64,\ 73.74,\ 83.84\\
13.23,\ 14.24,\ 15.25,\ 16.26,\ 17.27,\ 18.28.
\end{array}$$

Queste serie sono a due, a due congiunte di 1.ª specie alle coppie (12.34, 56.78); (13.24, 14.23); (37.38, 47.48); (15.16, 25.26); (35.36, 45.46), (17.18, 27.28). Si escludano da queste le prime due che costituiscono gli aggruppamenti iniziali: « *le 4 che avanzano definiscono le 4 coppie M cercate.* » Dunque il num. delle coniche di questa specie (coniche dei 16 punti) è $15.3.63 = 2835$, e si possono enunciare i seguenti teoremi:

« *I 378 punti d'incontro a due, a due delle 28 bitangenti oltre trovarsi (com'è noto) a 6, a 6 sulle 63 coniche armoniche alle 63 serie di coniche quadritangenti, si trovano anche a 8, a 8 sopra altre 2835 coniche ognuna delle quali contiene inoltre 8 punti M divisi in 4 coppie: cioè fra gli uni e gli altri 16 punti così notevoli.* »

Ovvero, in relazione al n.° 18:

« *I punti M di tutti i gruppi di* Kummer *oltre trovarsi a 12, a 12 sulle 630 coniche del n.° 18 giacciono pure a 8, a 8 sopra le 2835 coniche dei 16 punti.*

39. Vogliamo determinare adesso i tipi simbolici di queste coniche servendosi per caratterizzarle del paio di coppie iniziali che ci hanno già servito nel numero precedente.

Le norme ivi espresse conducono abbastanza semplicemente a conoscere i punti r e i punti M giacenti sulla conica quando son conosciute gli aggruppamenti iniziali. Ora i tipi simbolici di questi aggruppamenti si trovano subito. Basta ricordare che una serie può esser rappresentata dall'uno o dall'altro dei due tipi:

$$12.34,\ 13.24,\ 14.23,\ 56.78,\ 57.68,\ 58.67, \tag{I}$$

$$13.23,\ 14.24,\ 15.25,\ 16.26,\ 17.27,\ 18.28. \tag{II}$$

Quindi la (I) genera i seguenti 3 tipi:

$$\{(12.34,\ 56.78),\ \ (13.24,\ 14.23)\}, \tag{1}$$

che è quello già noto:

$$\{(12.34,\ 56.78),\ \ (13.24,\ 57.68)\}, \tag{2}$$

$$\{(12.34,\ 13.24),\ \ (56.78,\ 57.68)\}, \tag{3}$$

la (II) determina il solo tipo:

$$(13.23,\ 14.24),\ (15.25,\ 16.26). \tag{4}$$

Il tipo (1) è facilmente descritto: si prendano due quadrangoli completi in 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 non aventi alcun vertice a comune e si combini una coppia di lati opposti del 1.º con una coppia di lati opposti del 2.º e dopo si combinino fra loro le due rimanenti coppie di lati opposti del 1.º Il numero di questi tipi è manifestamente: $\frac{1}{2}\left(\frac{8.7.6.5}{2.3.4}\right).9.2=630.$

Il tipo (2) si ottiene associando tutt'e due le volte una coppia di lati opposti del 1.º quadrangolo a una coppia di lati opposti del 2.º Questi sono ancora 630.

Il tipo (3) proviene invece dall'associare una volta due coppie di lati opposti del medesimo quadrangolo e la seconda volta due coppie di lati opposti dell'altro quadrangolo. Il numero di essi è $\frac{1}{2}\cdot\frac{8.7.6.5}{2.3.4}.9=315.$

Finalmente i tipi (4) provengono da un esagono completo nel quale si scelgono a piacere due vertici per proiettare gli altri 4: si hanno così 8 proiettanti che si distribuiscono in 4 coppie in guisa che in ciascuna entri *un sol punto proiettato e entrambi i due punti proiettanti: queste 4 coppie aggruppate a due, a due in un modo qualunque dànno uno dei tipi richiesti.* Il loro numero è $15 . 3 . 28 = 1260$.

Si ritrova così il num. totale $2835 = 630 + 630 + 315 + 1260$.

CAPITOLO VI.

La costruzione delle ∞^4 configurazioni di Kummer passanti per le bitangenti della quartica.

40. È ben noto che dati sei complessi in involuzione essi non impongono ai 6 poli di un piano *generico* altra condizione che quella di appartenere alla stessa conica. Quindi spettano a un esagono di Pascal tutte le proprietà relative ai punti M, rette m ecc. del n.° 18 cioè tutte quelle che provengono dal considerare l'esagono come, per così dire, il nucleo della sezione piana di una cfz. di Klein. *Ebbene ci proponiamo di dimostrare adesso che per costruire una tale cfz. si possono scegliere come assi di una delle 15 involuzioni gobbe fondamentali due rette qualunque sghembe passanti per due punti di una stessa coppia M ed entrambe giacenti fuori del piano dell'esagono.*

Indichiamo con a, b, c, d, e, f i vertici dell'esagono; con $ab . ba$ i punti M situati sulla retta $a b$ (punti doppi della involuzione segnata su quella retta dal quadrangolo $cdef$ n.° 17), con (abc, def) la conica che passa per le coppie M situate sui lati dei triangoli abc, def (n.° 18), e finalmente con AB, BA le rette sghembe scelte arbitrariamente fuori del piano dell'esagono e passanti per i punti M: $ab . ba$. Consideriamo la quadrica definita da queste due rette e dalla conica (abc, def) e costruiamo le rette che dai punti M situati sopra i lati del triangolo def si possono condurre appoggiati a AB, BA: esse appartengono alla quadrica suddetta: poi per i punti M situati sulle rette ac, bc conduciamo le rette della quadrica stessa appartenenti al sistema delle AB, BA: chiamando queste ultime costruite con AC, CA, BC, CB e le prime costruite con DE, ED, DF, FD, EF, FE si hanno cinque coppie di rette esistenti insieme alle AB, BA sulla quadrica in discorso che indicheremo con (ABC, DEF). Ora per i punti M situati sopra ab, passano anche le coniche (abd, cef), (abe, dcf), (abf, dce): ripetendo il ragionamento di dianzi si trova che esistono le quadriche (ABD, CEF), (ABE, DFC), (ABF, DEC) dove p. es. la (ABD, CEF) contiene nel sistema delle generatrici le AB, BA, AD, DA, BD, DB e nel sistema delle direttrici CE, EC, CF, FC, EF, FE ecc.

Abbiamo dunque costruito 15 coppie di rette che si tratta di identificare con le 15 coppie di assi fondamentali di una cfz. di Klein. Per questo cerchiamo se esiste ad es. la quadrica $(ACD,\ BEF)$ contenente AC, CA, AD, DA, CD, DC in una serie rigata e BE, EB, BF, FB, EF, FE nell'altra serie. Dico che essa è quella Q definita dalla conica $q \equiv (a\,c\,d,\ b\,e\,f)$ e dalle rette AC, CA. Infatti poichè abbiamo già dimostrato che esiste la quadrica $(ABC,\ DEF)$ segue che EF, FE si appoggiano ad AC, CA; ma EF, FE passano per i punti M situati sopra ef, dunque EF, FE incontrano Q in 3 punti e quindi le appartengono. Per ragioni analoghe le appartengono AD, DA. Andiamo a CD, DC. Perciò si ricordi che (n.° 18) ad es. sulla conica $(a\,b\,c,\ d\,e\,f)$ sono coppie armoniche le coppie M che giacciono sui lati $a\,b$, $a\,c$, ovvero $b\,c$, $c\,a$ (sui lati cioè di uno stesso triangolo come $a\,b\,c$, o $d\,e\,f$) per cui segue che sulla quadrica $(A\,B\,C,\ DEF)$ saranno coppie armoniche le AB. BA; AC, CA ecc. Altrettanto accadrà sulle altre 4 quadriche già costruite. Ciò premesso si prenda a considerare l'asse AB e si osservi che l'esistenza della quadrica $(ABE,\ CDF)$ porta che sulla AB siano armoniche le coppie di punti:

$$AB\,.\,CD,\ AB\,.\,DC,\ AB\,.\,CF,\ AB\,.\,FC,$$

e le altre:

$$AB\,.\,CD,\ AB\,.\,DC,\ AB\,.\,DF,\ AB\,.\,FD.$$

Analogamente l'esistenza delle quadriche $(ABD,\ CEF)$ $(ABC,\ DEF)$ porta che sopra AB siano armoniche le altre coppie di punti:

$$AB\,.\,EF,\ AB\,.\,FE,\ AB\,.\,CF,\ AB\,.\,FC,$$

$$AB\,.\,EF,\ AB\,.\,FE,\ AB\,.\,DF,\ AB\,.\,FD,$$

dunque le due coppie di punti:

$$(AB\,.\,CD,\ AB\,.\,DC),\ (AB\,.\,EF,\ AB\,.\,FE),$$

coincidono. Ripetendo il ragionamento per l'asse BA si viene a concludere che ciascuna delle EF, FE taglia ciascuna delle CD, DE; ma siccome è già dimostrato che le prime appartengono a Q e le $CD\,.\,DE$ si sa che si appoggiano alla conica $q \equiv (a\,c\,d,\ b\,e\,f)$ così ne segue che anche CD, DE giacciono per intero sopra Q. Finalmente la esistenza delle quadriche $(ABE,\ DFC)$, $(ABF,\ DEC)$ prova che BE, EB, BF, FB si appoggiano a CD,

DC e quindi anch'esse appartengono a Q. Dunque la $Q \equiv (ACD, BEF)$ esiste.

Analogamente si dimostra che esistono le rimanenti: (ACE, BDF), (ACF, BDE), (ADE, CBF), (ADF, BEC), (AEF, BCD). Sono così trovate le 10 quadriche fondamentali. Ciascuna contiene 6 coppie di assi, 3 nell'una e 3 nell'altra serie. Si vede allora facilmente che i 6 complessi in involuzione nascono ciascuno dal prodotto della polarità rispetto a una delle quadriche suddette per una delle 6 involuzioni gobbe di cui le direttrici sono le coppie di assi che la quadrica stessa contiene. c. d. d.

Dunque:

« *Per un esagrammo di* Pascal *si possono condurre* ∞^4 *cfz. di* Klein *divisibili in 10 classi, ogni classe essendo individuata dalle* ∞^2 *coppie di rette sghembe che possono condursi per una coppia di punti M dell'esagono.* »

41. Dai risultati precedenti segue:

« *Di una quartica si possono dare arbitrariamente i 6 punti doppi di una serie (purchè stieno su di una conica) e due bitangenti del gruppo di* Kummer *complementari tali che sopra un lato dell'esagono formato con i 6 punti precedenti esse segnino una coppia di punti armonici rispetto alla coppia M esistente su quel lato. La quartica è univocamente determinata e quando siano conosciuti tutti i punti M dell'esagono, le bitangenti rimanenti si costruiscono linearmente.* »

Infatti siano $a\,b\,c\,d\,e\,f$ i punti doppi della serie e $m\,n$ le bitangenti date le quali per ipotesi segnano sulla retta $a\,b$ due punti coniugati armonici rispetto alla coppia M che tale retta contiene. Ebbene per l'esagono $a\,b\,c\,d\,e\,f$ conduciamo una delle ∞^4 cfz. di Klein che vi passsano (n.° 40), si considerino i due assi della cfz. che passano per i due punti della coppia M suddetta e dal punto $m\,.\,n$ si tiri la retta r appoggiata a quegli assi. Allora i piani $r\,m$, $r\,n$ si corrispondono nella involuzione gobba individuata da quegli assi medesimi e uno qualsiasi dei piani $r\,m$, $r\,n$ genera (secondo la cfz. di Klein scelta) una cfz. di Kummer di cui la superficie relativa è tagliata dal piano dell'esagono in una quartica che risolve la questione proposta. Vediamo come si possano costruire linearmente le altre bitangenti della quartica stessa: ciò proverà che la soluzione è unica. Si osservi perciò che un piano α qualunque della cfz. di Kummer è trasformato nel piano $r\,m$, o nel piano $r\,n$ per opera di due involuzioni gobbe opportunamente scelte fra le 15 fondamentali. Se dunque t è la bitangente contenuta in α, le rette t, m e le t, n segneranno sopra due certi lati dell'esagono due coppie armoniche rispetto alle coppie M ivi esistenti: ma m ed n sono date dunque t si costruisce mediante due quarti armonici. Il processo può ripetersi per tutte le 16 bitangenti del gruppo di Kummer: dopo, per le altre, si può applicare il metodo di Aronhold che è pure lineare, c. d. d.

42. Le considerazioni del num. precedente servono ad attuare la costruzione delle ∞^4 cfz. di Kummer che si possono condurrre per le 16 bitangenti, di una quartica, formanti gruppo di Kummer. Basterà prendere come elementi dati del problema i 6 punti doppi della serie complementare e due bitangenti del gruppo suddetto. Le costruzioni del num. precedente applicate a questi elementi conducono allo scopo.

Alcune ricerche di geometria non euclidea.

(*Di* Luigi Bianchi, *a Pisa.*)

È noto come le ultime ricerche di Weingarten sul problema fondamentale dell'applicabilità riducano la determinazione di tutte le superficie applicabili sopra una superficie data a quella delle superficie integrali di una equazione a derivate parziali del secondo ordine della forma d'Ampère:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p\, \partial q}(r_1+r_2)+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2}\cdot r_1 r_2=0. \tag{A}$$

In questa formola r_1, r_2 indicano i raggi principali di curvatura della superficie e i parametri p, q denotano rispettivamente la distanza dell'origine dal piano tangente e il semi-quadrato della distanza dell'origine stessa dal punto di contatto, mentre $\varphi(p, q)$ è una funzione fissa *assegnata* di p, q (*).

Nella presente Memoria, cercando di estendere il metodo di Weingarten alla geometria degli spazi di curvatura costante, considero le superficie integrali di un'equazione della forma (A), avendo attualmente r_1, r_2 il significato di raggi *ridotti* di curvatura e p, q denotando rispettivamente il seno e il coseno (circolari od iperbolici secondo che la curvatura dello spazio è positiva o negativa) delle distanze di un punto fisso dal piano tangente della superficie e dal suo punto di contatto. Dalle superficie integrali di una tale

(*) Vedi le Memorie di Weingarten:

1.ª *Sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée* (Comptes Rendus de l'Académie de Paris, tom. CXII, pag. 607 et 706).

2.ª *Sur la déformation des surfaces* (Mémoire couronné). Acta Math., tom. 20, pagina 159. Un'esposizione del nuovo metodo di Weingarten è data da Darboux nel tom. IV delle *Leçons*, ecc., pag. 308 s. s.

equazione si deduce, con quadrature, una classe completa di superficie applicabili nello spazio ordinario (euclideo).

Diciamo subito che per tal modo *il metodo di* WEINGARTEN *non viene affatto cangiato quanto all'effettivo contenuto*, poichè se delle superficie dello spazio curvo, integrali della equazione fondamentale, si considerano le superficie immagini nelle consuete rappresentazioni conformi dello spazio ellittico ed iperbolico sullo spazio euclideo, queste soddisfano alla loro volta ad una medesima equazione (A) di WEINGARTEN e la classe di superficie applicabili dedotte coincide con quella fornita dall'applicazione del metodo di WEINGARTEN nella sua forma ordinaria (vedi § 4 della Memoria). Però questa trasformazione di formole si presta, come si vedrà, a varie interessanti applicazioni; fra queste basti qui citare la principale, che forma l'oggetto della presente Memoria e cioè: *la determinazione in termini finiti delle superficie dello spazio (iperbolico) a curvatura* $K = -\frac{1}{R^2}$, *i cui raggi principali ridotti di curvatura* r_1, r_2 *soddisfano l'equazione:*

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \pm \frac{2}{R}, \tag{B}$$

e di quelle che soddisfano l'altra:

$$r_1 + r_2 = \pm 2R. \tag{C}$$

Esse si ottengono, con sole operazioni di derivazione, dalle superficie dello spazio euclideo d'elemento lineare:

$$ds^2 = du^2 + (2u + 2v \pm e^{2v})\, dv^2,$$

superficie che il nuovo metodo di WEINGARTEN ha fatto conoscere completamente.

Le superficie (B) dello spazio iperbolico, che vengono così ad essere tutte note, godono di una proprietà caratteristica, che le ravvicina alle ordinarie superficie minime. Se conduciamo per un punto fisso i due raggi paralleli, nel senso non euclideo, alle singole normali della superficie ed intercettiamo questi raggi con una sfera avente il centro nel punto fisso, otteniamo due rappresentazioni sferiche della superficie, che costituiscono, per lo spazio iperbolico, la naturale estensione della rappresentazione sferica di GAUSS. Ora, se la superficie appartiene alla classe (B), ha luogo la proprietà caratteristica che *una* delle due rappresentazioni sferiche riesce conforme. Sulle superficie (B) le linee di curvatura costituiscono inoltre un sistema isotermo e la stessa proprietà compete evidentemente, nella rappresentazione conforme, alle loro immagini sferiche.

Possiamo trasportare questi risultati dalle superficie (B) dello spazio iperbolico alle loro immagini nello spazio euclideo, p. es. in quella rappresentazione conforme dello spazio iperbolico sull'euclideo, nella quale l'elemento lineare dello spazio curvo è dato da:

$$ds^2 = R^2 \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}.$$

Allora otteniamo in *termini finiti* le superficie che soddisfano alla equazione del secondo ordine:

$$\frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{z}\left\{\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \pm 1\right\} = 0, \qquad (D)$$

la quale risulta così completamente integrata. Tali superficie costituiscono una *nuova* classe di superficie a linee di curvatura isoterme. Questo trovasi già dimostrato in un mio antico lavoro (*); ma ciò che qui aggiungiamo di nuovo è la determinazione effettiva di tutte queste superficie, risultato non privo di d'interesse, ove si consideri la difficoltà del problema che ha per oggetto la ricerca generale delle superficie a linee di curvatura isoterme (**). In fine noterò come la proprietà citata di rappresentazione sferica, che godono nello spazio iperbolico le superficie (B), si traduce per le loro immagini (D) nella seguente proprietà *caratteristica*. Per ogni punto M di una superficie S integrale della (D) conduciamo il circolo normale ad S ed al piano $z=0$, e siano A, A' i punti d'incontro di detto circolo col piano. Se al punto M di S riguardiamo come corrispondente sul piano $z=0$ il punto A, ovvero A', otteniamo una doppia rappresentazione della superficie sul piano. *Una delle due rappresentazioni di S sul piano conserva gli angoli.* Tale proprietà appartiene esclusivamente alle superficie S integrali della (D) ed alle sfere.

(*) *Sulle superficie d'area minima negli spazi di curvatura costante* (Atti dei Lincei, 1888).

(**) Cfr. DARBOUX, *Leçons*, tom. II, pag. 239 e tom. IV, pag. 217.

§ 1.

Formole fondamentali per la teoria delle superficie in geometria ellittica ed iperbolica.

Cominciamo dal richiamare le formole fondamentali della teoria delle superficie nello spazio ellittico ed iperbolico (*). Se si tratta dello spazio ellittico, a curvatura costante positiva $K = +\frac{1}{R^2}$, stabiliamo in questo spazio un sistema normale di coordinate (*coordinate di* WEIERSTRASS):

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,$$

legate fra loro dall'identità quadratica:

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \tag{1}$$

e l'elemento lineare dello spazio sarà dato da:

$$d\,s^2 = R^2 (d\,x_0^2 + d\,x_1^2 + d\,x_2^2 + d\,x_3^2). \tag{2}$$

Consideriamo in questo spazio una superficie S, definita assumendo le coordinate x_i di un suo punto mobile funzioni di due parametri o coordinate curvilinee u, v e introduciamo i coseni di direzione della normale ad S nel punto (x_i), o meglio le coordinate:

$$\xi_0,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,$$

del piano tangente definite (a meno del segno) dalle relazioni:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_i \xi_i^2 = 1, & &\sum_i \xi_i x_i = 0, \\ &\sum_i \xi_i \frac{\partial x_i}{\partial u} = 0, & &\sum_i \xi_i \frac{\partial x_i}{\partial v} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Alla superficie S appartengono le due forme quadratiche differenziali fon-

(*) Queste formole furono da me sviluppate in un corso di lezioni dell'anno 1894-95 all'Università di Pisa e consegnate in un manoscritto per servire d'appendice all'edizione tedesca delle mie *Lezioni di geometria differenziale*; ma la seconda parte di queste Lezioni, per ragioni dipendenti dall'editore, non è ancora pubblicata.

damentali:

$$\left.\begin{aligned} d\,s^2 = R^2 \sum_i d\,x_i^2 = E\,d\,u^2 + 2\,F\,d\,u\,d\,v + G\,d\,v^2 \\ -\sum_i d\,x_i\,d\,\xi_i = D\,d\,u^2 + 2\,D'\,d\,u\,d\,v + D''\,d\,v^2, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

dalle quali, come nell'ordinaria geometria euclidea, unicamente dipende la forma della superficie. I loro sei coefficienti:

$$\begin{matrix} E, & F, & G, \\ D, & D', & D'', \end{matrix}$$

sono legati da tre relazioni, due delle quali sono le equazioni stesse di Codazzi come hanno luogo nello spazio euclideo (*) e la terza è l'equazione di Gauss modificata, a causa della curvatura dello spazio, colla formola:

$$\frac{D\,D'' - D'^2}{E\,G - F^2} = k - K = k - \frac{1}{R^2}, \tag{5}$$

denotando qui k la curvatura della prima forma fondamentale o, come diciamo, la *curvatura assoluta* della superficie. L'espressione:

$$\frac{D\,D'' - D'^2}{E\,G - F^2},$$

che eguaglia il prodotto $\frac{1}{r_1\,r_2}$ delle curvature principali ridotte si dirà invece la *curvatura relativa*; per la (5) essa è legata alla curvatura assoluta k dalla formola:

$$\frac{1}{r_1\,r_2} = k - \frac{1}{R^2}.$$

Viceversa, se due forme quadratiche fondamentali (4) soddisfano le equazioni di Codazzi e la (5), esiste nello spazio ellittico una corrispondente superficie S, pienamente determinata a meno di movimenti nello spazio. Per determinare effettivamente la superficie corrispondente a due date forme quadratiche fondamentali, abbiamo da integrare il seguente sistema *completamente*

(*) Vedi *Lezioni*, pag. 91 s. 3.

integrabile di equazioni differenziali:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2} &= \begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x_i}{\partial u} + \begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x_i}{\partial v} - \frac{E}{R^2}x_i + \frac{D}{R}\xi_i \\
\frac{\partial^2 x_i}{\partial u\,\partial v} &= \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x_i}{\partial u} + \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x_i}{\partial v} - \frac{F}{R^2}x_i + \frac{D'}{R}\xi_i \\
\frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2} &= \begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x_i}{\partial u} + \begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x_i}{\partial v} - \frac{G}{R^2}x_i + \frac{D''}{R}\xi_i
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

$$(i = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \xi_i}{\partial u} &= R\left[\frac{FD' - GD}{EG - F^2}\frac{\partial x_i}{\partial u} + \frac{FD - ED'}{EG - F^2}\frac{\partial x_i}{\partial v}\right] \\
\frac{\partial \xi_i}{\partial v} &= R\left[\frac{FD'' - GD'}{EG - F^2}\frac{\partial x_i}{\partial u} + \frac{FD' - ED''}{EG - F^2}\frac{\partial x_i}{\partial v}\right],
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

dove i simboli $\begin{Bmatrix}i\,k\\l\end{Bmatrix}$ di Christoffel s'intendono costruiti per la prima forma fondamentale.

Per lo spazio iperbolico, a curvatura costante $K = -\frac{1}{R^2}$, valgono le formole analoghe seguenti. In primo luogo le coordinate:

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,$$

di punto sono qui legate dall'identità:

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1, \qquad (1^*)$$

e l'elemento lineare dello spazio è dato da:

$$d s^2 = R^2 (d x_1^2 + d x_2^2 + d x_3^2 - d x_0^2). \qquad (2^*)$$

Per una superficie S le coordinate:

$$\xi_0,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,$$

del piano tangente sono definite dalle relazioni:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_i^{1..3} \xi_i^2 - \xi_0^2 = 1, && \sum_i^{1..3} \xi_i x_i - \xi_0 x_0 = 0, \\
&\sum_i^{1..3} \xi_i \frac{\partial x_i}{\partial u} - \xi_0 \frac{\partial x_0}{\partial u} = 0, && \sum_i^{1..3} \xi_i \frac{\partial x_i}{\partial v} - \xi_0 \frac{\partial x_0}{\partial v} = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (3^*)$$

e le due forme quadratiche fondamentali dalle altre:

$$\left.\begin{aligned} d s^2 &= R^2 \left[\sum_i^{1\ldots 3} d x_i^2 - d x_0^2\right] = E\, d u^2 + 2\, F\, d u\, d v + G\, d v^2 \\ d x_0\, d \xi_0 &- \sum_i^{1\ldots 3} d x_i\, d \xi_i = D\, d u^2 + 2\, D'\, d u\, d v + D''\, d v^2. \end{aligned}\right\} \qquad (4^*)$$

Le relazioni che legano i sei coefficienti:

$$E,\ F,\ G,\ D,\ D',\ D'',$$

sono ancora le equazioni di Codazzi e l'equazione di Gauss, la quale nel caso attuale si scrive:

$$\frac{D\, D'' - D'^2}{E\, G - F^2} = k + \frac{1}{R^2}\,. \qquad (5^*)$$

Date le due forme quadratiche fondamentali di una superficie S nello spazio iperbolico, per trovare in termini finiti la S dobbiamo integrare un sistema di equazioni differenziali perfettamente analogo al sistema (6), (7) e che si deduce da questo semplicemente cangiando, nei secondi membri delle (6), i segni del termine lineare in x_i.

Osserviamo il caso speciale in cui le linee u, v della superficie S siano, nello spazio ellittico od iperbolico, le linee di curvatura. Allora sussistono le formole di Rodriguez:

$$(i = 0,\ 1,\ 2,\ 3), \quad \frac{\partial x_i}{\partial u} = r_2 \frac{\partial \xi_i}{\partial u}\,, \quad \frac{\partial x_i}{\partial v} = r_1 \frac{\partial \xi_i}{\partial v}\,,$$

ove r_1, r_2 indicano i raggi principali *ridotti* di curvatura ed avendosi:

$$D = -\frac{E}{r_2}\,, \quad D' = 0, \quad D'' = -\frac{G}{r_1}\,,$$

le formole di Codazzi diventano le ordinarie formole di geometria euclidea (*):

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{r_2}\right) = 0 \\ \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{r_1}\right) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

(*) Cfr. *Lezioni*, pag. 225.

mentre l'equazione di Gauss si scrive:

$$\frac{1}{r_1 r_2} = k \mp \frac{1}{R^2}, \tag{9}$$

valendo il segno superiore per lo spazio ellittico, l'inferiore per l'iperbolico.

§ 2.

Passaggio dalle coordinate di Weierstrass a quelle di Riemann.

Nelle ricerche seguenti dovremo ancora servirci di quella rappresentazione conforme dello spazio ellittico ed iperbolico sull'euclideo, che si lega alla forma tipica data da Riemann per l'elemento lineare degli spazi a curvatura costante. Scriveremo questa forma tipica così:

$$ds^2 = R^2 \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2 \pm \frac{1}{4}\right)^2},$$

il doppio segno distinguendo il caso ellittico dall'iperbolico. Diremo x, y, z *coordinate di* Riemann ed importerà anzi tutto che scriviamo le formole di passaggio dalle coordinate di Riemann a quelle di Weierstrass. Per lo spazio ellittico tali formole si scrivono:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{\frac{1}{4} - (x^2 + y^2 + z^2)}{\frac{1}{4} + (x^2 + y^2 + z^2)}, & x_1 &= \frac{x}{\frac{1}{4} + x^2 + y^2 + z^2}, \\ x_2 &= \frac{y}{\frac{1}{4} + x^2 + y^2 + z^2}, & x_3 &= \frac{z}{\frac{1}{4} + x^2 + y^2 + z^2}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

e per lo spazio iperbolico avremo invece:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{4}}{x^2 + y^2 + z^2 - \frac{1}{4}}, & x_1 &= \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2 - \frac{1}{4}}, \\ x_2 &= \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2 - \frac{1}{4}}, & x_3 &= \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2 - \frac{1}{4}}. \end{aligned}\right\} \tag{10*}$$

Consideriamo ora nello spazio ellittico od iperbolico una superficie S per la quale, riferendola a coordinate di WEIERSTRASS, manteniamo le notazioni del § 1. Se la riferiamo a coordinate di RIEMANN, e la riguardiamo quindi come esistente nello spazio euclideo rappresentativo, indicheremo nel modo consueto con:

$$X,\ Y,\ Z,$$

i coseni di direzione della sua normale e, adottando le notazioni di WEINGARTEN, porremo:

$$p = x X + y Y + z Z, \quad 2 q = x^2 + y^2 + z^2, \tag{11}$$

sicchè p rappresenta la distanza dell'origine dal piano tangente di S e $2q$ il quadrato della distanza dal punto di contatto. Possiamo allora dare alle formole (10), (10*) e a quelle che definiscono in coordinate di WEIERSTRASS la posizione del piano tangente la forma seguente:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{\frac{1}{4} - 2q}{\frac{1}{4} + 2q}, \quad x_1 = \frac{x}{\frac{1}{4} + 2q}, \quad x_2 = \frac{y}{\frac{1}{4} + 2q}, \quad x_3 = \frac{z}{\frac{1}{4} + 2q}, \\ \xi_0 &= \frac{p}{\frac{1}{4} + 2q}, \quad \xi_1 = \frac{2px}{\frac{1}{4} + 2q} - X, \quad \xi_2 = \frac{2py}{\frac{1}{4} + 2q} - Y, \quad \xi_3 = \frac{2pz}{\frac{1}{4} + 2q} - Z, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

che vale per lo spazio ellittico e l'altra:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{2q + \frac{1}{4}}{2q - \frac{1}{4}}, \quad x_1 = \frac{x}{2q - \frac{1}{4}}, \quad x_2 = \frac{y}{2q - \frac{1}{4}}, \quad x_3 = \frac{z}{2q - \frac{1}{4}}, \\ \xi_0 &= \frac{p}{2q - \frac{1}{4}}, \quad \xi_1 = \frac{2px}{2q - \frac{1}{4}} - X, \quad \xi_2 = \frac{2py}{2q - \frac{1}{4}} - Y, \quad \xi_3 = \frac{2pz}{2q - \frac{1}{4}} - Z, \end{aligned}\right\} \tag{11*}$$

che vale invece per lo spazio iperbolico.

§ 3.

Il metodo di Weingarten in geometria ellittica ed iperbolica.

Nelle formole fondamentali della geometria ellittica ed iperbolica, *dove faremo d'ora innanzi per semplicità* $R=1$, prendiamo per parametri u, v rispettivamente x_0, ξ_0 e poniamo:

$$x_0=\alpha, \quad \xi_0=\beta,$$

e le (7) che scriviamo:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha}=M\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}+N\frac{\partial x_i}{\partial \beta}\\ (i=0,\ 1,\ 2,\ 3)\\ \frac{\partial \xi_i}{\partial \beta}=P\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}+Q\frac{\partial x_i}{\partial \beta},\end{gathered}$$

dovendo essere soddisfatte per $i=0$ dànno intanto:

$$M=0, \quad P=1,$$

indi:

$$D=-NF, \quad D'=-NG=-(E+QF), \quad D''=-(F+QG).$$

Ma, indicando con r_1, r_2 i raggi principali ridotti di curvatura, abbiamo:

$$\frac{1}{r_1 r_2}=\frac{DD''-D'^2}{EG-F^2}=-N$$

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{2FD'-ED''-GD}{EG-F^2}=Q,$$

e però, nelle attuali coordinate α, β, le formole fondamentali (7) diventano:

$$\left.\begin{gathered}\frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha}=-\frac{1}{r_1 r_2}\frac{\partial x_i}{\partial \beta}\\ (i=1,\ 2,\ 3)\\ \frac{\partial \xi_i}{\partial \beta}=\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}+\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial x_i}{\partial \beta}.\end{gathered}\right\} \tag{12}$$

Supponiamo ora che, essendo $\varphi(\alpha, \beta)$ un'assegnata funzione di α, β, i raggi principali di curvatura r_1, r_2 della S soddisfino l'equazione:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \, \partial \beta}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2}\frac{1}{r_1 r_2} = 0; \tag{13}$$

allora le tre espressioni:

$$\left.\begin{aligned} d\,y_1 &= x_1\, d\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right) + \xi_1\, d\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\right) \\ d\,y_2 &= x_2\, d\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right) + \xi_2\, d\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\right) \\ d\,y_3 &= x_3\, d\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right) + \xi_3\, d\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\right), \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

saranno, in virtù delle (12), (13), differenziali esatti. Interpretiamo y_1, y_2, y_3, calcolate dalle (14), come coordinate cartesiane ortogonali di un punto dello spazio euclideo ed avremo un'ordinaria superficie Σ, della quale vogliamo ora calcolare l'elemento lineare. Distinguendo perciò il caso dello spazio ellittico od iperbolico, otterremo nel primo caso, a causa delle (1), (3) § 1, per l'elemento lineare della Σ la formola:

$$d\,s^2 = \sum_i d\,y_i^2 = (1-\alpha^2)\left(d \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right)^2 - 2\,\alpha\beta\, d \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\, d \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + (1-\beta^2)\left(d\,\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\right)^2 \cdot \tag{15}$$

Nel caso iperbolico invece le (1*), (3*) § 1 ci dànno (*):

$$d\,s^2 = (\alpha^2 - 1)\left(d \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right)^2 + 2\,\alpha\beta\, d \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\, d \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + (1+\beta^2)\left(d \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\right)^2 \cdot \tag{15*}$$

(*) *Osservazione.* Nel caso iperbolico potremmo applicare il metodo di WEINGARTEN anche ponendo p. e.:

$$x_1 = \alpha, \quad \xi_1 = \beta,$$

e in tal caso avremmo i tre differenziali esatti:

$$\begin{aligned} d\,y_0 &= x_0\, d \,.\, \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \xi_0\, d \,.\, \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \\ d\,y_2 &= x_2\, d \,.\, \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \xi_2\, d \,.\, \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \\ d\,y_3 &= x_3\, d \,.\, \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \xi_3\, d \,.\, \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}, \end{aligned}$$

da cui:

$$d\,y_2^2 + d\,y_3^2 - d\,y_0^2 = -(1+\alpha^2)\left(d \,.\, \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right)^2 - 2\,\alpha\,\beta\, d \,.\, \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\, d \,.\, \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + (1-\beta^2)\left(d \,.\, \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right)^2 .$$

Si otterrebbe così una classe completa di superficie applicabili nello *spazio parabolico indefinito* di elemento lineare:

$$d\,s^2 = d\,x^2 + d\,y^2 - d\,z^2.$$

In ambedue i casi l'elemento lineare della Σ dipende unicamente, come si vede, dalla funzione $\varphi(\alpha, \beta)$. Ne risulta che tutte le superficie S dello spazio ellittico od iperbolico, integrali della (13), dànno per quadrature, mediante le (14), superficie Σ dello spazio ordinario applicabili l'una sull'altra. Inversamente è facile vedere che ogni superficie Σ dello spazio euclideo di elemento lineare (15) o (15*) deducesi, nel modo indicato, da una superficie S, integrale della (31), dello spazio ellittico od iperbolico.

§ 4.

Paragone col metodo di Weingarten sotto la forma ordinaria.

Se trasformiamo i risultati del paragrafo precedente dalle coordinate di Weierstrass a quelle di Riemann, secondo le formole del § 2, e riguardiamo in luogo delle superficie S dello spazio curvo integrali della (13) le loro immagini S' nello spazio euclideo, facilmente dimostriamo che il metodo esposto coincide sostanzialmente coll'ordinario metodo di Weingarten. Considerando ad esempio il caso ellittico, sostituiamo nelle (14) ad x_1, x_2, x_3, ξ_1, ξ_2, ξ_3 i loro valori tratti dalle (11) ed avremo:

$$\left.\begin{aligned}
d y_1 &= x \frac{d\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + 2\, d\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}}{2q+\frac{1}{4}} - X d\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\\
d y_2 &= y \frac{d\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + 2\, d\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}}{2q+\frac{1}{4}} - Y d\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\\
d y_3 &= z \frac{d\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + 2\, d\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}}{2q+\frac{1}{4}} - Z d\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}.
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Poniamo ora:

$$\psi = -\frac{1}{2}\,\frac{\varphi}{\alpha+1}, \tag{17}$$

e riguardiamo ψ come funzione di p, q legate per le (11), ad α, β dalle relazioni:

$$\alpha = \frac{\frac{1}{4} - 2q}{2q + \frac{1}{4}}, \quad \beta = \frac{p}{2q + \frac{1}{4}}, \tag{18}$$

sicchè avremo:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial p} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \psi}{\partial q} &= 2(\alpha + 1)\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + 2\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - 2\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Le formole (16) possono scriversi in conseguenza così:

$$\left.\begin{aligned} d y_1 &= x\, d \cdot \frac{\partial \psi}{\partial q} + X d \cdot \frac{\partial \psi}{\partial p} \\ d y_2 &= y\, d \cdot \frac{\partial \psi}{\partial q} + Y d \cdot \frac{\partial \psi}{\partial p} \\ d y_3 &= z\, d \cdot \frac{\partial \psi}{\partial q} + Z d \cdot \frac{\partial \psi}{\partial p}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

D'altronde, indicando con r'_1, r'_2 i raggi principali di curvatura della superficie S' dello spazio euclideo, immagine della nostra superficie S, abbiamo:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} &= 4p - \left(2q + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{r'_1} + \frac{1}{r'_2}\right) \\ \frac{1}{r_1 r_2} &= \left(2q + \frac{1}{4}\right)^2 \frac{1}{r'_1 r'_2} - 2p\left(2q + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{r'_1} + \frac{1}{r'_2}\right) + 4p^2. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Ma dalle (19) deduciamo:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2} = -\frac{1}{2q + \frac{1}{4}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial p\, \partial q} = \frac{1}{\left(2q + \frac{1}{4}\right)^2}\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha\, \partial \beta} + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2}\right]$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} = -\frac{1}{\left(2q + \frac{1}{4}\right)^3}\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + 4p\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha\, \partial \beta} + 4p^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2}\right],$$

e se nella (13), cui soddisfano r_1, r_2, sostituiamo i valori (21) ed abbiamo riguardo alle formole superiori, vediamo che le superficie S' soddisfano l'equazione del secondo ordine:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial p \, \partial q}\left(\frac{1}{r'_1} + \frac{1}{r'_2}\right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2} \frac{1}{r'_1 r'_2} = 0. \tag{22}$$

Le formole (20), (22) coincidono precisamente colle fondamentali dell'ordinario metodo di Weingarten, onde concludiamo:

La classe di superficie applicabili, dedotte col metodo del § 3 dalle superficie S dello spazio curvo, che soddisfano la (13), *coincide con quella che l'ordinario metodo di* Weingarten *fa derivare dalle loro superficie immagini dello spazio euclideo, le quali soddisfano alla loro volta l'equazione* (22) *di* Weingarten.

Senza ripetere per lo spazio iperbolico i calcoli analoghi, basterà indicare che il valore della funzione $\psi(p, q)$ che figura in questo caso nell'equazione (22) cui soddisfano le superficie immagini S', è dato allora da:

$$\psi = -\frac{1}{2} \frac{\varphi}{\alpha - 1},$$

essendo attualmente α, β legate a p, q dalle formole (11*):

$$\alpha = \frac{2q + \frac{1}{4}}{2q - \frac{1}{4}}, \quad \beta = \frac{p}{2q - \frac{1}{4}}.$$

§ 5.

Applicazione alle superficie a curvatura assoluta nulla.

Il metodo di Weingarten, applicato alla geometria ellittica od iperbolica, non dà nulla di nuovo quanto all'effettivo contenuto, come sopra abbiamo dimostrato; l'utilità della trasformazione così conseguita risulterà però evidente dalle applicazioni che ora ci proponiamo di svolgere. In queste o vedremo mostrarsi l'identità di problemi in apparenza ben diversi o stabiliremo nuovi risultati di geometria non euclidea. Cominciamo dall'applicare il metodo del § 3 alle superficie a curvatura assoluta nulla dello spazio ellittico ed iperbolico, a quelle superficie cioè che hanno nel rispettivo spazio curvo la geometria del piano euclideo. Nel caso ellittico le superficie in discorso soddisfano l'equazione:

$$\frac{1}{r_1 r_2} = -1,$$

che è un caso particolare della (13) ove si ponga:

$$\varphi = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}.$$

La classe di ordinarie superficie applicabili dedotta col metodo di WEINGARTEN avrà, secondo la (15), l'elemento lineare:

$$d s^2 = (1 - \alpha^2)\, d\alpha^2 - 2\alpha\beta\, d\alpha\, d\beta + (1 - \beta^2)\, d\beta^2.$$

Ponendo:

$$\alpha = \rho \cos\theta, \quad \beta = \rho \operatorname{sen}\theta, \tag{23}$$

otteniamo la nota forma:

$$d s^2 = (1 - \rho^2)\, d\rho^2 + \rho^2\, d\theta^2, \tag{24}$$

che appartiene alle evolute di quelle superficie W i cui raggi di curvatura sono legati dalla relazione:

$$r_1 - r_2 = \operatorname{sen}(r_1 + r_2).$$

La classe di superficie d'elemento lineare (24) è interamente nota (*). Da queste superficie, per le quali è dunque:

$$d y_1^2 + d y_2^2 + d y_3^2 = (1 - \rho^2)\, d\rho^2 + \rho^2\, d\theta^2,$$

possiamo dedurre, secondo il nostro metodo, tutte le superficie a curvatura nulla dello spazio ellittico colle formole seguenti:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \rho\cos\theta, \quad x_i = \cos\theta\,\frac{\partial y_i}{\partial\rho} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\rho}\,\frac{\partial y_i}{\partial\theta} \\ &\qquad\qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \\ \xi_0 &= \rho\operatorname{sen}\theta, \quad \xi_i = \operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial y_i}{\partial\rho} + \frac{\cos\theta}{\rho}\,\frac{\partial y_i}{\partial\theta}, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

che definiscono le coordinate di WEIERSTRASS x_i di un punto mobile della superficie e i coseni di direzione ξ_i della normale. Nel caso iperbolico le superficie a curvatura assoluta nulla corrispondono alla relazione:

$$\frac{1}{r_1 r_2} = 1,$$

(*) V. *Lezioni*, pag. 309.

e soddisfano alla (13) ove si faccia:

$$\varphi = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2}.$$

La classe di superficie applicabili dedotta colle (14) ha per la (15*) l'elemento lineare:

$$d s^2 = (\alpha^2 - 1) d \alpha^2 - 2 \alpha \beta d \alpha d \beta + (1 + \beta^2) d \beta^2,$$

che, ponendo:

$$\alpha = \rho \cosh \theta, \quad \beta = \rho \operatorname{senh} \theta,$$

diventa:

$$d s^2 = (\rho^2 - 1) d \rho^2 + \rho^2 d \theta^2. \tag{24*}$$

Questo elemento lineare appartiene alle complementari delle superficie applicabili sul paraboloide di rotazione (*) ed anche qui è nota tutta la classe di queste superficie applicabili. Da esse deduciamo le superficie a curvatura nulla dello spazio iperbolico colle formole:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \rho \cosh \theta, \quad x_i = \cosh \theta \frac{\partial y_i}{\partial \rho} - \frac{\operatorname{senh} \theta}{\rho} \frac{\partial y_i}{\partial \rho} \\ \xi_0 &= \rho \operatorname{senh} \theta, \quad \xi_i = \operatorname{senh} \theta \frac{\partial y_i}{\partial \rho} - \frac{\cosh \theta}{\rho} \frac{\partial y_i}{\partial \theta}. \end{aligned}\right\} \tag{25*}$$

Che le superficie a curvatura nulla degli spazi a curvatura costante potessero tutte ottenersi in termini finiti avevo già altrove stabilito (**). Ma qui la loro determinazione appare sotto nuovo aspetto collegandosi al problema già risoluto di trovare le ordinarie superficie d'elemento lineare (24) o (24*).

(*) V. *Lezioni*, pag. 312.

(**) V. la mia Nota: *Sulle superficie a curvatura nulla negli spazi a curvatura costante* (Atti dell'Accademia di Torino, 9 giugno 1895) e la successiva Memoria nel tom. XXIV degli *Annali di Matematica.*

§ 6.

Le superficie d'area minima e le superficie di Liouville derivate.

La ricerca delle superficie d'area minima in geometria ellittica od iperbolica dipende, come già dimostrai nella mia Memoria del 1888 (*Atti dei Lincei*) (*), dalla integrazione dell'equazione a derivate parziali:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = -2 \, senh \, 2 \theta ,$$

per lo spazio ellittico e dall'altra:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = 2 \cosh 2 \theta ,$$

per lo spazio iperbolico. La prima coincide con quella da cui dipende la ricerca delle superficie a curvatura costante positiva (o a curvatura media costante) dello spazio euclideo.

Se applichiamo il metodo di Weingarten (§ 3) alle superficie minime, dovremo fare evidentemente:

$$\varphi = \alpha \beta.$$

Per l'elemento lineare delle superficie derivate otterremo quindi nel caso ellittico:

$$d s^2 = (1 - \beta^2) \, d \alpha^2 - 2 \alpha \beta \, d \alpha \, d \beta + (1 - \alpha^2) \, d \beta^2, \tag{26}$$

e nel caso iperbolico:

$$d s^2 = (1 + \beta^2) \, d \alpha^2 + 2 \alpha \beta \, d \alpha \, d \beta + (\alpha^2 - 1) \, d \beta^2. \tag{26*}$$

L'uno e l'altro elemento lineare appartengono alla forma di Liouville. Pongasi invero per la (26):

$$\alpha = sen \frac{u + v}{2}, \quad \beta = sen \frac{u - v}{2},$$

e risulterà:

$$d s^2 = \frac{1}{4} (\cos u + \cos v)(\cos u \, d u^2 + \cos v \, d v^2), \tag{27}$$

(*) Cf. anche Darboux, *Leçons*, tom. III, pag. 471.

che ha appunto la forma di LIOUVILLE. Nell'altro caso poniamo invece:

$$\alpha = \cosh \frac{u+v}{2}, \qquad \beta = \operatorname{senh} \frac{u-v}{2},$$

e la (26*) diventa:

$$d s^2 = \frac{1}{4} (\operatorname{senh} u + \operatorname{senh} v) (\operatorname{senh} u \, d u^2 + \operatorname{senh} v \, d v^2). \tag{27*}$$

Così vediamo che sono due problemi equivalenti la ricerca delle superficie a curvatura costante positiva o quella delle superficie d'elemento lineare (27). Come tipo di questa classe possiamo prendere ad esempio quella superficie che deriva dalla superficie d'area minima doppiamente rigata di CLIFFORD, definita dalle formole:

$$x_0 = \cos u \cos v, \quad x_1 = \operatorname{sen} u \cos v, \quad x_2 = \cos u \operatorname{sen} v, \quad x_3 = \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v,$$

$$\xi_0 = \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \quad \xi_1 = -\cos u \operatorname{sen} v, \quad \xi_2 = -\operatorname{sen} u \cos v, \quad \xi_3 = \cos u \cos v,$$

dove u, v sono i parametri delle rette (assintotiche). Per la superficie di LIOUVILLE derivata avremo:

$$d y_i = x_i \, d \xi_0 + \xi_i \, d x_0, \quad (i = 1, 2, 3),$$

ed eseguendo le quadrature:

$$y_1 = \frac{1}{4} (2 v - \cos 2 u \operatorname{sen} 2 v), \quad y_2 = \frac{1}{4} (2 u - \operatorname{sen} 2 u \cos 2 v),$$

$$y_3 = \frac{1}{4} \cos 2 u \cos 2 v.$$

Sostituendovi una superficie omotetica e girando gli assi coordinati x, y di 45°, possiamo scrivere:

$$x = \frac{U - \operatorname{sen} U}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{V - \operatorname{sen} V}{\sqrt{2}}, \quad z = \frac{1}{2} [\cos U + \cos V].$$

Queste formole definiscono una superficie di *traslazione*, le cui due curve generatrici nei piani perpendicolari $x z$, $y z$ sono identiche; essa è nello stesso tempo una superficie di LIOUVILLE d'elemento lineare proporzionale a (27).

§ 7.

Le superficie d'Appell-Bonnet in geometria ellittica.

Nello spazio euclideo diconsi superficie di Bonnet quelle per le quali i punti medi fra i centri principali di curvatura, sopra ogni normale, giacciono in un piano; superficie d'Appell quelle i cui piani medi, cioè i piani perpendicolari nei punti medi alle normali della superficie, concorrono in un punto (*). Se prendiamo ora a considerare le superficie analoghe in geometria ellittica, facilmente vediamo che, a causa della perfetta legge di dualità vigente nello spazio ellittico, ogni superficie d'Appell è altresì una superficie di Bonnet e viceversa. Qui in vero sopra ogni normale, che è una retta chiusa di lunghezza $= \pi$, abbiamo *due* punti medi distanti fra loro di un quadrante e, se i punti medi di una serie giacciono in un piano, i piani medi dell'altra serie passano per un punto, il polo di questo piano.

Poniamo che il piano luogo dei punti medi nella nostra superficie di Bonnet-Appell sia il piano $x_0 = 0$. Indicando con r_1, r_2 i raggi ridotti di curvatura e ponendo:

$$r_1 = \operatorname{tang} w_1, \quad r_2 = \operatorname{tang} w_2,$$

la nostra superficie sarà caratterizzata dalla relazione:

$$x_0 \cos \frac{w_1 + w_2}{2} - \xi_0 \operatorname{sen} \frac{w_1 + w_2}{2} = 0,$$

ovvero:

$$\operatorname{tang} \frac{w_1 + w_2}{2} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot$$

Se ne ricava:

$$\operatorname{tang}(w_1 + w_2) = \frac{2\alpha\beta}{\beta^2 - \alpha^2},$$

ovvero:

$$\alpha\beta r_1 r_2 + \frac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2)(r_1 + r_2) - \alpha\beta = 0.$$

Questa equazione può porsi sotto la forma (13) § 3, dando alla funzione φ

(*) Cf. *Lezioni*, pag. 231 e 291.

il valore:

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta}{\alpha}.$$

Ora, calcolando dalla (15) § 3 l'elemento lineare della classe di superficie applicabili derivate secondo il metodo di WEINGARTEN, troviamo:

$$d s = \frac{(1-\beta^2)\, d\,\alpha^2 + 2\,\alpha\,\beta\, d\,\alpha\, d\,\beta + (1-\alpha^2)\, d\,\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2},$$

e ponendo:

$$\alpha = \frac{\cos\theta}{\rho}, \quad \beta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\rho},$$

abbiamo anche:

$$d\,s^2 = d\,\rho^2 + (\rho^2 - 1)\, d\,\theta^2.$$

Questa forma dell'elemento lineare appartiene alle evolute delle superficie a curvatura costante positiva e però vediamo che: *La ricerca delle superficie di* BONNET-APPELL *nello spazio ellittico equivale a quella delle superficie a curvatura costante positiva dello spazio euclideo.* Risultati analoghi potremmo dedurre per le superficie di APPELL e di BONNET nello spazio iperbolico.

§ 8.

Le superficie dello spazio iperbolico per le quali $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 2$ o $r_1 + r_2 = 2$.

Volgiamoci ora alla principale applicazione che abbiamo in vista, considerando quelle superficie dello spazio iperbolico a curvatura $K = -1$, per le quali la somma dei raggi principali di curvatura ridotti o delle loro inverse è eguale a *2*.

Secondo le formole fondamentali (8), (9) del § 1, esiste una superficie dello spazio iperbolico, il cui elemento lineare, riferito alle linee di curvatura u, v, è dato da:

$$d\,s^2 = e^{2\theta}(d\,u^2 + d\,v^2),$$

e le curvature principali da:

$$\frac{1}{r_1} = 1 - e^{-2\theta}, \quad \frac{1}{r_2} = 1 + e^{-2\theta},$$

purchè θ soddisfi alla equazione (9) di Gauss, che qui assume la forma:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = e^{-2\theta}. \tag{28}$$

Di questa equazione (di Liouville) si conosce l'integrale generale e ad ogni sua soluzione corrisponde dunque una superficie dello spazio iperbolico colla curvatura media costante:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 2. \tag{29}$$

Similmente, se facciamo:

$$d s^2 = 4\,(senh^2\,\theta\, d\, u^2 + cosh^2\,\theta\, d\, v^2),$$

$$r_1 = 1 + e^{2\theta}, \quad r_2 = 1 - e^{2\theta},$$

sono soddisfatte le equazioni (8) di Codazzi, e quella (9) di Gauss diventa:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = e^{2\theta}. \tag{30}$$

Ad ogni soluzione di questa equazione, di cui è pur noto l'integrale generale (*), corrisponderà una superficie dello spazio iperbolico per la quale sarà:

$$r_1 + r_2 = 2, \tag{31}$$

ed inversamente. Così se applichiamo il metodo generale del § 1 che serve per risalire dalle due forme fondamentali date alla corrispondente superficie, il problema di determinare nello spazio iperbolico le nostre superficie:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 2, \quad r_1 + r_2 = 2,$$

appare ridotto alla integrazione, che sappiamo effettuare, delle (28), (30) e a quella successiva del corrispondente sistema di equazioni differenziali (6), (7).

(*) L'integrazione completa delle (28), (30) può presentarsi sotto un aspetto geometrico ben semplice. E infatti la forma differenziale quadratica:

$$e^{-2\theta}\,(d\,u^2 + d\,v^2),$$

se θ soddisfa la (28), ha la curvatura $k = 1$ e l'altra:

$$e^{2\theta}\,(d\,u^2 + d\,v^2),$$

quando θ sia una soluzione della (30), ha la curvatura $k = -1$. La integrazione delle (28), (30) equivale quindi alla ricerca dei sistemi isotermi sulla sfera o sulla pseudosfera, problema di ben nota risoluzione.

Ma ora, applicando a queste superficie il metodo di WEINGARTEN, potremo spingere ben più in là la ricerca ed ottenere in *termini finiti* tutte le superficie delle due classi.

§ 9.

Applicazione del metodo di WEINGARTEN alle superficie del paragrafo precedente.

Le superficie dello spazio iperbolico per le quali:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 2,$$

soddisfano all'equazione fondamentale (13) § 3, ove si faccia:

$$\varphi = \alpha\beta - \alpha^2;$$

similmente le altre:

$$r_1 + r_2 = 2,$$

assumendo invece:

$$\varphi = \alpha\beta - \beta^2.$$

Ora se applichiamo il metodo di WEINGARTEN (§ 3) per dedurne due classi complete di superficie applicabili dello spazio ordinario, troviamo nel primo caso:

$$ds^2 = [(2\alpha - \beta)^2 - 3]\, d\alpha^2 + 2\,[\alpha\beta - 2(\alpha^2 - 1)]\, d\alpha\, d\beta + (\alpha^2 - 1)\, d\beta^2, \tag{32}$$

e nel secondo:

$$ds_1^2 = (1 + \beta^2)\, d\alpha^2 + 2\,[\alpha\beta - 2(1 + \beta^2)]\, d\alpha\, d\beta + [(\alpha - 2\beta)^2 + 3]\, d\beta^2. \tag{32*}$$

Possiamo ridurre questi due elementi lineari a forme ben note mediante le sostituzioni seguenti. Pongasi nella (32):

$$v = \log(\alpha - \beta), \quad 2u = 2\alpha^2 - 2\alpha\beta - 2\log(\alpha - \beta) - 1, \tag{33}$$

e si otterrà la forma equivalente:

$$ds^2 = du^2 + (2u + 2v - e^{2v})\, dv^2. \tag{34}$$

Nella (32*) pongasi invece:

$$v = \log(\alpha - \beta), \quad 2u = 2\alpha\beta - 2\beta^2 - 2\log(\alpha - \beta) - 1, \tag{33*}$$

e si otterrà:

$$d s_1^2 = d u^2 + (2 u + 2 v + e^{2v}) d v^2. \tag{34*}$$

Ora le ultime ricerche di WEINGARTEN (come si vedrà riportato nel paragrafo seguente) dànno il modo di trovare *in termini finiti* tutte le ordinarie superficie di elemento lineare (34) o (34*) e da queste potremo ottenere con sole derivazioni, nel modo che andiamo ad indicare, le superficie dello spazio iperbolico:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 2, \quad r_1 + r_2 = 2.$$

Suppongasi per ciò di avere una individuata superficie Σ della classe (34), per la quale adunque si abbia:

$$d y_1^2 + d y_2^2 + d y_3^2 = d u^2 + (2 u + 2 v - e^{2v}) d v^2. \tag{35}$$

Se teniamo conto delle formole del § 3 e delle attuali formole di trasformazione (33) pel passaggio delle coordinate α, β alle u, v troviamo che la corrispondente superficie S a curvatura media costante $= 2$ è definita dalle formole:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \left(\frac{1}{2} + u + v\right) e^{-v} \\ x_i &= \left(\frac{1}{2} - u - v\right) e^{-v} \frac{\partial y_i}{\partial u} - e^{-v} \frac{\partial y_i}{\partial v} \quad (i = 1, 2, 3), \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

$$\left.\begin{aligned} \xi_0 &= \left(\frac{1}{2} + u + v\right) e^{-v} - e^{v} \\ \xi_i &= \left[\left(\frac{1}{2} - u = v\right) e^{-v} + e^{v}\right] \frac{\partial y_i}{\partial u} - e^{-v} \frac{\partial y_i}{\partial v} \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Del tutto similmente, avendosi una superficie Σ d'elemento lineare:

$$d y_1^2 + d y_2^2 + d y_3^2 = d u^2 + (2 u + 2 v + e^{2v}) d v^2, \tag{35*}$$

definiremo la corrispondente superficie S dello spazio iperbolico con $r_1 + r_2 = 2$ mediante le formole:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \left(u + v + \frac{1}{2}\right) e^{-v} + e^{v} \\ x_i &= \left[\left(u + v - \frac{1}{2}\right) e^{-v} + e^{v}\right] \frac{\partial y_i}{\partial u} + e^{-v} \frac{\partial y_i}{\partial v} \quad (i = 1, 2, 3), \end{aligned}\right\} \tag{36*}$$

$$\left.\begin{aligned} \xi_0 &= \left(u + v + \frac{1}{2}\right) e^{-v} \\ \xi_i &= \left(u + v - \frac{1}{2}\right) e^{-v} \frac{\partial y_i}{\partial u} + e^{-v} \frac{\partial y_i}{\partial v} \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned}\right\} \tag{37*}$$

È ben facile procedere ora ad una verifica delle formole precedenti. In particolare, supposto che Σ sia una superficie d'elemento lineare (35), verifichiamo che la superficie S dello spazio iperbolico definita dalle (36), avrà la curvatura media:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 2.$$

E invero avendosi:

$$\sum_i \left(\frac{\partial y_i}{\partial u}\right)^2 = 1, \quad \sum_i \frac{\partial y_i}{\partial u}\frac{\partial y_i}{\partial v} = 0, \quad \sum_i \left(\frac{\partial y_i}{\partial v}\right)^2 = 2u + 2v - e^{2v},$$

si verificano subito le relazioni:

$$\sum_i x_i^2 - x_0^2 = -1, \quad \sum_i \xi_i x_i - \xi_0 x_0 = 0, \quad \sum_i \xi_i^2 - \xi_0^2 = 1,$$

$$\sum_i \xi_i \frac{\partial x_i}{\partial u} - \xi_0 \frac{\partial x_0}{\partial u} = 0, \quad \sum_i \xi_i \frac{\partial x_i}{\partial v} - \xi_0 \frac{\partial x_0}{\partial v} = 0,$$

ciò che dimostra intanto che per la detta superficie S le (37) dànno effettivamente le coordinate del piano tangente. Se osserviamo poi che spostandoci lungo una linea di curvatura della S dobbiamo avere:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial x_0}{\partial u} du + \frac{\partial x_0}{\partial v} dv = r\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial u} du + \frac{\partial \xi_0}{\partial v} dv\right), \\ &\frac{\partial x_i}{\partial u} du + \frac{\partial x_i}{\partial v} dv = r\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial u} du + \frac{\partial \xi_i}{\partial v} dv\right) \quad (i = 1,\ 2,\ 3), \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

indicando con r il raggio principale ridotto di curvatura, dalle tre ultime moltiplicate ordinatamente per i coseni di direzione:

$$Y_1,\ Y_2,\ Y_3,$$

della normale alla Σ e sommate deduciamo:

$$\left[\left(\frac{1}{2} - u - v\right) D - D'\right] du + \left[\left(\frac{1}{2} - u - v\right) D' - D''\right] dv =$$

$$= r\left\{\left[\left(\frac{1}{2} - u - v\right) D - D' + e^{2v} D\right] du + \left[\left(\frac{1}{2} - u - v\right) D' - D'' + e^{2v} D'\right]\right\} dv,$$

dove D, D', D'' indicano i coefficienti della seconda forma fondamentale della superficie Σ. La prima delle (38) ci dà poi:

$$du + \left(\frac{1}{2} - u - v\right) dv = r\left\{du + \left(\frac{1}{2} - u - v - e^{2v}\right) dv\right\}.$$

Eliminando fra questa e la precedente i differenziali $d\,u$, $d\,v$, otteniamo l'equazione di 2.° grado in r:

$$\begin{vmatrix} \left[\left(\frac{1}{2}-u-v\right)D-D'\right](1-r)+e^{2v}D\,.\,r, & \left[\left(\frac{1}{2}-u-v\right)D'-D''\right](1-r)+e^{2v}D'\,.\,r \\ 1-r & \left(\frac{1}{2}-u-v\right)(1-r)-e^{2v}\,r \end{vmatrix}=0,$$

le cui radici r_1, r_2 sono i raggi principali di curvatura di S e fra queste radici ha luogo appunto la relazione:

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=2.$$

In modo del tutto simile si possono eseguire le verifiche relative alle formole (35*), (36*), (37*).

§ 10.

Le superficie d'elemento lineare $d\,s^2=d\,u^2+(2\,u+2\,v\mp e^{2v})\,d\,v^2$.

Per raccogliere nella presente Memoria tutte le formole necessarie alla determinazione delle superficie dello spazio iperbolico con:

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=2, \quad \text{o} \quad r_1+r_2=2,$$

resta che ricordiamo come si trovano, secondo Weingarten, tutte le superficie d'elemento lineare (34) o (34*) (*).

Nel metodo di Weingarten, conoscendo le superficie che soddisfano l'equazione fondamentale (A):

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}+(r_1+r_2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial q}+r_1\,r_2\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}=0, \tag{A}$$

colle quadrature:

$$d\,y_1=x\,d\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial q}+X\,d\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p}$$

$$d\,y_2=y\,d\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial q}+Y\,d\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p}$$

$$d\,y_3=z\,d\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial q}+Z\,d\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p},$$

(*) Cf. Darboux, *Leçons*, tom. IV, pag. 332.

si deducono le superficie d'elemento lineare:

$$d s^2 = \sum_i d y_i^2 = 2 q \left(d \frac{\partial \varphi}{\partial q}\right)^2 + 2 p d \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p} d \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial q} + \left(d \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)^2 .$$

Facciamo nella (A):

$$\varphi = p q - \frac{p^3}{3} - \psi(p),$$

essendo ψ una funzione della sola p. L'elemento lineare della superficie derivata, ponendo:

$$u = q - \frac{p^2}{2} - \psi'(p),$$

diventa:

$$d s^2 = d u^2 + [2 u + 2 \psi'(p)] d p^2, \tag{39}$$

mentre la (A) assume la forma:

$$r_1 + r_2 = 2 p + \psi''(p). \tag{40}$$

Ora se prendiamo:

$$\psi'(p) = p \mp \frac{1}{2} e^{2p},$$

la (40) diventa:

$$r_1 + r_2 = 2 p + 1 \mp e^{2p}, \tag{40*}$$

e l'elemento lineare delle superficie derivate assume la forma:

$$d s^2 = d u^2 + (2 u + 2 p \mp e^{2p}) d p^2, \tag{39*}$$

che è precisamente quella della classe di superficie da noi ricercata. Resta dunque che vediamo come si determinano tutte le superficie della classe (40*). Adoperando qui le coordinate tangenziali (*) e ricordando che p denota la distanza dell'origine dal piano tangente, vediamo che l'equazione (40*) da integrarsi equivale alla seguente:

$$\Delta_2 W = 1 \mp e^{2W}, \tag{41}$$

il parametro differenziale secondo della funzione incognita W essendo calcolato rispetto all'elemento lineare della sfera rappresentativa di Gauss. Assumiamo su questa sfera a linee coordinate i meridiani ed i paralleli, ridotti ai parametri isometrici u, v col porre:

$$X = \frac{\cos v}{\cosh u}, \quad Y = \frac{\operatorname{sen} v}{\cosh u}, \quad Z = \operatorname{tang} h\, u,$$

(*) Cfr. *Lezioni*, n.° 72, pag. 137, formola (37).

sicchè:

$$d s'^2 = d X^2 + d Y^2 + d Z^2 = \frac{1}{cosh^2 u} (d u^2 + d v^2),$$

e la (41) diventerà:

$$cosh^2 u \left(\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial v^2} \right) = 1 \mp e^{2W}.$$

Poniamo ora:

$$W = \log cos\, h\, u + \theta, \tag{42}$$

e per la nuova funzione incognita θ avremo precisamente l'equazione di Liouville:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \mp e^{2\theta}. \tag{43}$$

Da ogni soluzione di questa equazione deduciamo, secondo le formole in coordinate tangenziali, con sole derivazioni, le corrispondenti superficie d'elemento lineare:

$$d s^2 = d u^2 + (2 u + 2 v \mp e^{2v})\, d v^2,$$

indi colle (36), (36*) del § 9 le superficie dello spazio iperbolico che soddisfano le equazioni:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 2, \quad \text{o} \quad r_1 + r_2 = 2.$$

Così vediamo nuovamente (cf. § 8) che la determinazione di queste superficie dipende dalla equazione (43) di Liouville; ma questa volta il risultato viene completato nel senso che colla integrazione della (43) otteniamo altresì *in termini finiti* le superficie richieste.

§ 11.

Rappresentazione sferica di Gauss nello spazio iperbolico.

Per stabilire la proprietà caratteristica delle superficie a curvatura media:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 2,$$

dello spazio iperbolico, come l'abbiamo enunciata nella prefazione, conviene prima che diciamo brevemente delle proprietà generali della rappresentazione sferica di Gauss in geometria non-euclidea. Ricordiamo per ciò che ad una retta arbitraria dello spazio iperbolico partono da ogni punto *due* distinte parallele. Ora, presa una superficie qualsiasi S ed un punto fisso O dello spazio, conduciamo per O i due raggi paralleli ad ogni singola normale di S ed intersechiamo questo doppio sistema di raggi con una sfera Σ di centro O. Otteniamo così *due* rappresentazioni di S sulle sfera Σ, che sono da considerarsi come le analoghe della rappresentazione sferica di Gauss nello spazio euclideo. Una qualunque di queste *due* rappresentazioni sferiche gode, come ora vedremo, della proprietà fondamentale della rappresentazione di Gauss e cioè: *Il sistema ortogonale delle linee di curvatura di S ha nell'immagine sferica una rappresentazione ortogonale.*

In generale è questo il solo sistema ortogonale di S che si conserva ortogonale nella rappresentazione, a meno che la rappresentazione riesca conforme: *ciò accade soltanto per le sfere e per le superficie a curvatura media costante*:

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\mp 2.$$

Queste ultime superficie vengono così caratterizzate dalla proprietà enunciata nella prefazione e si ravvicinano per tal modo alle superficie minime dello spazio euclideo.

Per dimostrare le asserzioni superiori, cominciamo dal ricordare che una retta nello spazio iperbolico viene fissata, in coordinate di Weierstrass, dando le coordinate:

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,$$

di un suo punto e le coordinate:

$$\xi_0,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,$$

del piano normale alla retta nel punto (x_i); le x, ξ sono poi legate dalle tre relazioni:

$$\sum_i x_i^2 - x_0^2 = -1,\quad \sum_i \xi_i^2 - \xi_0^2 = 1,\quad \sum_i \xi_i x_i - \xi_0 x_0 = 0.$$

Prendiamo per punto fisso dello spazio, dal quale vogliamo condurre le due parallele alla retta il punto $O \equiv (1, 0, 0, 0)$ e indicando con $\overline{\xi}_0, \overline{\xi}_1, \overline{\xi}_2, \overline{\xi}_3$ le coordinate del piano per O normale all'una o all'altra delle due parallele condotte per O alla detta retta (x_i, ξ_i) troveremo mediante considerazioni elementari (*):

$$\overline{\xi}_0 = 0, \quad \overline{\xi}_1 = \frac{x_1 \pm \xi_1}{x_0 \pm \xi_0}, \quad \overline{\xi}_2 = \frac{x_2 \pm \xi_2}{x_0 \pm \xi_0}, \quad \overline{\xi}_3 = \frac{x_3 \pm \xi_3}{x_0 \pm \xi_0},$$

l'una delle due parallele corrispondendo ai segni superiori, l'altra agli inferiori. Per fissare le idee scegliamo i segni superiori e poniamo:

$$\overline{\xi}_0 = 0, \quad \overline{\xi}_i = \frac{x_i + \xi_i}{x_0 + \xi_0} \quad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{44}$$

Riferiamo la superficie S di cui vogliamo studiare la rappresentazione sferica alle sue linee di curvatura $(u,\ v)$ talchè, indicando con x_i le coordinate di un punto di S, con ξ_i quelle del piano tangente, avremo:

$$\frac{\partial x_i}{\partial u} = r_2 \frac{\partial \xi_i}{\partial u}, \quad \frac{\partial x_i}{\partial v} = r_1 \frac{\partial \xi_i}{\partial v} \quad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{45}$$

(*) Per stabilire le formole del testo si cominci dall'osservare che se si hanno due punti:

$$(x'_0\ x'_1\ x'_2\ x'_3), \quad (\overline{x}_0\ \overline{x}_1\ \overline{x}_2\ \overline{x}_3),$$

e si considera la loro congiungente, le coordinate $\overline{\xi}_i$ del piano normale nel punto (x') a questa congiungente sono date da:

$$\overline{\xi}_i = \frac{\overline{x}_i}{\sqrt{[S(x'\overline{x})]^2 - 1}} - \frac{x'_i \,.\, S(x'\overline{x})}{\sqrt{(S\,x'\overline{x})^2 - 1}}, \tag{α}$$

dove si è posto:

$$S(x'\overline{x}) = x'_0\,\overline{x}_0 - \sum_i x'_i \,.\, \overline{x}_i \,.$$

Ora sulla retta $(x,\ \xi)$ prendiamo un punto $(\overline{x})$ alla distanza w da (x); avremo:

$$\overline{x}_i = x_i \cosh w + \xi_i \,\mathrm{senh}\, w\,,$$

e per la congiungente di due punti $(x')\,(\overline{x})$ varranno le formole (α). Facciamo ora crescere w all'infinito positivo o negativo osservando che:

$$\lim_{w=\pm\infty} \frac{\overline{x}_i}{\cosh w} = x_i \pm \xi_i\,,$$

e quindi:

$$\lim_{w=\pm\infty} \frac{S(x'\overline{x})}{\cosh w} = S(x'x) \pm S(\xi\, x'),$$

e le formole (α) diventano:

$$\overline{\xi}_i = \frac{x_i \pm \xi_i}{S(x\,x') \pm S(\xi\,x')} - x'_i\,,$$

che per $x'_0 = 1,\ x'_1 = x'_2 = x'_3 = 0$ dànno le formole del testo.

Dalle (44), (45) deduciamo derivando:

$$\frac{\partial \bar{\xi}_i}{\partial u} = \left(1 + \frac{1}{r_2}\right) \frac{(x_0 + \xi_0)\frac{\partial x_i}{\partial u} - (x_i + \xi_i)\frac{\partial x_0}{\partial u}}{(x_0 + \xi_0)^2}$$

$$\frac{\partial \bar{\xi}_i}{\partial v} = \left(1 + \frac{1}{r_1}\right) \frac{(x_0 + \xi_0)\frac{\partial x_i}{\partial v} - (x_i + \xi_i)\frac{\partial x_0}{\partial v}}{(x_0 + \xi_0)^2},$$

e quindi ponendo:

$$d s_1^2 = d \bar{\xi}_1^2 + d \bar{\xi}_2^2 + d \bar{\xi}_3^2,$$

troveremo (*):

$$d s_1^2 = \frac{E\left(1 + \frac{1}{r_2}\right)^2 d u^2 + G\left(1 + \frac{1}{r_1}\right)^2 d v^2}{(x_0 + \xi_0)^2}.$$

Ora $d s_1^2$ non differisce che per un fattore costante dal quadrato dell'elemento lineare della sfera rappresentativa, sulla quale adunque le immagini u, v delle linee di curvatura di S costituiscono, come si era asserito, un sistema ortogonale. Nessun altro sistema ortogonale di S si conserva ortogonale nella rappresentazione a meno che non si abbia rappresentazione conforme, il che accade quando:

$$\frac{E\left(1 + \frac{1}{r_2}\right)^2}{E} = \frac{G\left(1 + \frac{1}{r_1}\right)^2}{G},$$

cioè:

$$1 + \frac{1}{r_2} = \pm\left(1 + \frac{1}{r_1}\right).$$

Sarà dunque o $r_1 = r_2$, nel qual caso S è una sfera, ovvero:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = -2 \text{ (**)},$$

ciò che dimostra tutte le nostre asserzioni.

(*) Si tengano presenti le relazioni:

$$\sum_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)^2 = E + \left(\frac{\partial x_0}{\partial u}\right)^2, \quad \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial v} = \frac{\partial x_0}{\partial u}\frac{\partial x_0}{\partial v}$$

$$\sum_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)^2 = G + \left(\frac{\partial x_0}{\partial v}\right)^2, \quad \sum_i (x_i + \xi_i)^2 = (x_0 + \xi_0)^2.$$

(**) Il segno negativo della curvatura media dipende dal segno attribuito alle ξ nelle (44).

Per completare queste osservazioni diciamo ancora che in geometria non euclidea possiamo eseguire la rappresentazione di Gauss in altri due modi corrispondenti al caso in cui il punto fisso O dello spazio, anzichè reale e a distanza finita, sia reale all'infinito o in fine ideale ed intercettando i sistemi di raggi paralleli alle normali della superficie S con una superficie ortogonale ai raggi. Se il centro O è all'infinito, le superficie normali ai raggi sono *orisfere*; quando invece O è ideale fra le superficie normali ai raggi vi ha un piano (non euclideo) sul quale la S viene rappresentata colla legge di parallelismo (non euclideo) delle normali nei punti corrispondenti. Le proprietà delle rappresentazioni ora accennate sono affatto analoghe alle superiori e possono anzi dedursi da questo adoperando la consueta rappresentazione conforme.

§ 12.

Le nuove superficie a linee di curvatura isoterme.

I risultati ultimamente conseguiti possono facilmente trasportarsi in geometria ordinaria. Serviamoci per ciò di quella rappresentazione conforme sul semi-spazio $z > 0$, nella quale l'elemento lineare dello spazio iperbolico è dato da:

$$d s^2 = \frac{d x^2 + d y^2 + d z^2}{z^2},$$

e consideriamo le superficie immagini di quelle a curvatura media $= 2$. Ritenendo per la immagine, che pensiamo rappresentata dall'equazione:

$$z = z(x, y),$$

le ordinarie notazioni di Monge, la curvatura media della superficie obiettiva nello spazio iperbolico è dato da:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{z}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ (1 + q^2) r - 2 p q s + (1 + p^2) t + 2 \frac{1 + p^2 + q^2}{z} \right\}.$$

Ne segue che le superficie dello spazio ordinario domandato sono gli integrali delle equazioni a derivate parziali:

$$\frac{(1 + q^2) r - 2 p q s + (1 + p^2) t}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{z} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \pm 1 \right] = 0. \qquad (46)$$

I risultati ottenuti permettono d'integrare completamente questa equazione riducendola all'equazione di Liouville:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2}=e^{-2\theta}.$$

Tutte queste superficie (46) posseggono linee di curvatura isoterme e *costituiscono una nuova classe di superficie isotermiche.*

Possiamo in fine caratterizzare le superficie (46) mediante una proprietà geometrica che traduce, nello spazio ordinario, la proprietà di rappresentazione sferica di cui godono le obiettive (§ 11) e ciò precisamente nel caso in cui il centro della sfera rappresentativa trovasi all'infinito. Ad una tale superficie S integrale della (46) conduciamo in ogni punto M il circolo normale alla S ed al piano $z=0$ e consideriamo i due punti A, A' in cui questo circolo sega il piano. Otteniamo così sul piano $z=0$ due rappresentazioni di S, riguardando come punti corrispondenti M, A ovvero M, A'. Per le nostre superficie S e per queste soltanto (oltre le sfere) una delle due rappresentazioni riesce conforme.

Intorno alla composizione (*) dei punti generici delle linee singolari delle superficie algebriche.

Appendice alla Memoria:

Sulla riduzione delle singolarità puntuali delle superficie algebriche dello spazio ordinario per trasformazioni quadratiche.

(di Beppo Levi, *a Torino.*)

Nella Memoria pubblicata nel tomo XXVI (Serie II) di questi *Annali*, portante il titolo riprodotto nell'intestazione della presente appendice, ho ricercato quando e in qual senso si possa dire che, con una successione di trasformazioni quadratiche (Cremoniane) dello spazio, si ottiene la riduzione della singolarità di un dato punto di una superficie algebrica.

Detto A questo punto singolare (s-plo); A_1 un suo trasformato di ugual multiplicità per una trasformazione quadratica avente in A il punto fondamentale isolato, e del resto generica (o, come dicevo allora e come dirò ancora, applicata ad A); A_2 un punto analogo trasformato di A_1 e così via; ho enunciato che il *numero dei punti s-pli $A_1 A_2 \ldots$ può crescere oltre ogni limite quando si scelgono questi punti in modo che, consideratone uno ad arbitrio, appartenente ad una linea s-pla* (prodotta o non dalle trasformazioni)

(*) Non credo necessario richiamare qui le definizioni della composizione di un punto, dei punti successivi, ecc. Si vegga perciò e per citazioni in proposito la Memoria, a cui questa fa seguito, oppure la Memoria del prof. Segre: *Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche.* (Questi *Annali* (2) XXV-1896.)

o precedente (immediatamente o non) *una o più tali linee, ne esistono sempre due o più successivi ad esso (e necessariamente consecutivi fra loro) che appartengono ad una stessa di queste linee s-ple.* Ho promesso allora la dimostrazione di questa proposizione in una « Memoria seconda »; a sostituire la quale pubblico ora la presente « appendice » in cui completerò così la Memoria precedente ed in cui aggiungerò alcune osservazioni alla medesima.

§ 1.

1. Il fatto che si tratta di dimostrare non è che un caso particolare di una proprietà delle linee singolari delle superficie algebriche dalla quale s'intitola il presente scritto.

La singolarità di una linea di una superficie è determinata, nell'intorno di un suo punto generico, da quella del punto medesimo sopra una sezione piana generica della superficie, per esso.

La proposizione è evidente ove si osservi che l'intorno di un punto generico di una linea singolare di una superficie algebrica (e quindi la singolarità del punto medesimo) è completamente rappresentato dalle serie (a coefficienti variabili) che rappresentano i rami della sezione piana generica per un punto variabile sul ramo della linea singolare che ha per origine il punto considerato. (Cfr. Halphen, *Sur les lignes singulières des surfaces algébriques.* Annali di Matematica (2) 9 1878.) D'altra parte le serie che rappresentano i rami di una curva piana uscenti da un punto sono interamente determinate, almeno fino ad un certo termine, dalla composizione del punto stesso [intendendo come *composizione* non solo l'insieme dei caratteri dei punti successivi a quello (o *satelliti* di esso) sulla curva, ma ancora il loro *modo* di successione, e avendo riguardo anche ai punti satelliti di multiplicità 1]; e il numero dei termini di quelle serie che così si conoscono cresce con quello de' punti successivi che si considerano nella definizione di detta composizione. *La singolarità di una linea di una superficie in un suo punto generico, e con essa la composizione di un tal punto per la superficie, è adunque nota ove lo sia la composizione del punto per una sezione generica della superficie per il punto medesimo.* Nasce così la domanda: quali saranno i caratteri successivi ad un dato punto della linea secondo un dato *itinerario?* Cioè quando del detto punto si consideri un determinato (ma arbitrario) successivo, di questo un successivo ancora determinato (ma arbitrario), e così via.

Ho dimostrato nella mia precedente Memoria (n.° 13) che *se un punto A è s-plo per una superficie F e al punto A sono successivi sulla sezione piana generica di F (passante per A) ν punti s-pli, ogni successione generica di punti di F, il cui primo punto sia A, contiene precisamente ν punti s-pli;* e dal ragionamento là fatto risulta che, se A è generico sopra una linea s-pla di F, la suddetta successione è generica in questo senso sempre quando due suoi punti consecutivi non appartengono a questa linea o a una linea s-pla successiva. È assai probabile che la proposizione si estenda non solo ai primi ν punti s-pli consecutivi, ma anche ai punti successivi di minor multiplicità. Ma ciò che io voglio provare qui è che precisamente *quegli itinerari che seguono con due o più punti una stessa linea s-pla (effettiva della superficie o prodotta dalle trasformazioni) sono eccezionali, avendo caratteri di composizione diversi da quelli degli itinerari generici.* Io non tratterò però il problema generale (certamente non privo d'interesse) di determinare i caratteri relativi a questi itinerari eccezionali in funzione di quelli relativi agli itinerari generici.

2. Il caso più semplice di linea multipla che si possa immaginare è quello della intersezione di due superficie Φ e Ψ, linea doppia per la superficie $F \equiv \Phi\Psi$. Sia a questa linea e Φ, Ψ abbiano, lungo essa, contatto d'ordine $\nu - 1$ ($\nu > 1$); a sarà ν-pla per l'intersezione di Φ, Ψ; e la sezione piana generica f di F avrà, nel suo punto A giacente in a, ν caratteri successivi 2 seguiti da due caratteri 1 (non successivi fra loro). Essendo A generico su a non passeranno per esso altre parti dell'intersezione di Φ, Ψ e la multiplicità d'intersezione di queste superficie in esso sarà ν. Si effettui una trasformazione quadratica applicata in A; sia a' la retta trasformata di A sulla F; indicherò qui e nel seguito le superficie e le linee trasformate di superficie e di linee (rispettivamente) collo stesso simbolo che le superficie e le linee primitive.

La moltiplicità di a' nell'intersezione di Φ, Ψ è $\nu - 1$ (*M.* (*) § 3); sia A' il punto comune ad a e a'; la moltiplicità d'intersezione di Φ, Ψ in A' è $2\nu - 1$ (*M.* n.° 5). A', doppio per F, ha adunque su una sezione piana generica f' di F (**) per esso $2\nu - 1$ caratteri successivi 2 e quindi due caratteri 1 (non successivi fra loro).

Nello stesso modo si vede che, se si applica ad A' una nuova trasformazione quadratica, ed a'' è la linea trasformata di A', A'' il punto comune

(*) Indicherò con *M.* la nominata Memoria di cui è appendice il presente scritto.

(**) Cioè della trasformata di F per la trasformazione applicata ad A.

ad a e a'', f'' una sezione piana generica di F per A''; A'' ha su f'' $3\nu - 2$ caratteri successivi 2 e quindi due caratteri 1 non successivi fra loro. E così via. In altri termini si può dire che *la sezione fatta in F da una superficie che abbia in A punto semplice, vi abbia con a contatto d'ordine l e sia del resto generica, ha in A $(l+1)\nu$ caratteri successivi 2 e quindi due caratteri 1 non successivi fra loro.*

3. Metodo analogo si può tenere nello studio di linee di singolarità più complessa. Ricorderò anzitutto che, se le trasformazioni quadratiche che si usano sono a conica fondamentale degenere e si considera una polare del punto doppio V di questa conica rispetto alla F, la trasformata di questa polare è la polare dello stesso ordine del punto doppio della conica fondamentale nel secondo spazio rispetto alla trasformata di F, — purchè la retta AV (A essendo sempre il punto fondamentale della trasformazione) non sia generatrice del cono tangente a F in A di multiplicità maggiore della differenza fra la multiplicità di A e l'ordine della polare (*M.* n.° 8). Che inoltre, quando questa condizione è soddisfatta, la moltiplicità di A per la polare è quella differenza ed è maggiore in caso contrario. Infine che se di un punto di una retta (o di un piano) si considerano tutte le possibili polari rispetto a un sistema di punti, non tutti coincidenti, della retta (o al sistema dei raggi che li proiettano da un punto del piano), uno stesso punto della retta (o una stessa retta del fascio) non può appartenere a tutte queste polari e al gruppo considerato; cosicchè se tutte quelle polari hanno un elemento comune ad esse e al gruppo considerato, questo si compone solo di tale elemento, contato un conveniente numero di volte: in particolare avviene questo se la prima polare è costituita da un solo elemento multiplo cadente in un elemento del gruppo primitivo.

Come già nella precedente Memoria applicherò trasformazioni quadratiche a conica fondamentale degenere, e tali che, per due trasformazioni immediatamente successive fra loro, il punto doppio della conica fondamentale nel primo spazio, per la seconda trasformazione della coppia, cada nel punto doppio della conica fondamentale nel secondo spazio, per la trasformazione precedente.

Dirò semplicemente *caratteri di una superficie in un suo punto* i caratteri in questo punto della sezione piana generica per esso.

4. Lo studio delle linee singolari di cui qui si discorre si può distinguere in due casi a seconda che per la linea considerata passa una sola falda della superficie ovvero passano più falde. Nel secondo caso si deve osservare che ogni falda è rappresentata da determinati sviluppi delle coordinate in serie di due parametri (cfr. Halphen, l. c.) per modo che la superficie può

considerarsi, nelle vicinanze della linea (e del punto generico di essa considerato), come la riunione di più superficie distinte, a ciascuna delle quali appartenga una di quelle falde. Ciascuna falda, considerata in sè, si comporterà quindi come se fosse isolata e l'analisi di questo secondo caso si ridurrà quindi a studiare le relazioni mutue delle diverse falde.

Da questa considerazione si deduce in particolare che i risultati ottenuti nel n.° 2 per la linea doppia della $F \equiv \Phi\Psi$, linea d'intersezione di Φ e Ψ, valgono in generale per le linee doppie origini di due falde distinte.

5. La linea a di F sia ora doppia, origine di una sola falda ed abbia successivi ν caratteri 2 e uno 1 (a sia cioè cuspidale). Sia F_1 la prima polare di un punto generico V dello spazio (che si assume come punto doppio della conica fondamentale della prima trasformazione), rispetto ad F: per quanto si è ricordato al n.° 3, F_1 avrà, in un punto A generico di a, $\nu+1$ caratteri 1 appartenenti ad A e a ν punti successivi ad A sugli itinerari generici tracciati su F aventi l'origine in A; e successivamente a questi punti F_1 non ha altri punti appartenenti a tali itinerari.

La multiplicità d'intersezione di F e F_1 in A è $2\nu+1$. Se si considerano l punti successivi ad A su a: $A_1, \ldots, A_l$, la multiplicità d'intersezione di F e F_1 in A_l sarà $2(l+1)\nu-(l+1)+2$ (cfr. i ragionamenti del n.° 2). Il numero dei punti doppi di F (cioè di quella sua trasformata in cui A_l è punto effettivo) su una sezione piana generica per A_l è dunque:

$$\leqq (l+1)\nu - \frac{l+1}{2} + 1.$$

Ma quel numero è intero e non può essere minore di un'unità da questo suo limite superiore (perchè, successivamente a una serie di punti doppi di F, F e F_1 non possono avere comune più di un punto semplice per entrambe); dunque, detto λ_2 quello dei due numeri $\frac{l+1}{2}$, $\frac{l+2}{2}$ che è intero, il numero cercato è:

$$(l+1)\nu - \lambda_2 + 1\,;$$

e, sulla sezione generica di F per A_l, successivamente a questi punti doppi si hanno due punti semplici (non successivi fra loro) o uno solo a seconda che l è dispari o pari, poichè nei due casi rispettivamente F_1 non ha od ha un punto successivo ai sunnumerati comune con F.

I risultati ottenuti si possono esprimere altrimenti:

La curva intersezione di F con una superficie che passi semplicemente per A avendovi con a un contatto d'ordine l e pel resto generica, possiede

$(l+1)(\nu+1)-\lambda_2$ *punti doppi successivi, il primo de' quali è A; e passa per A con due o un sol ramo (A vi è cioè nodo o cuspide) a seconda che l è dispari o pari.*

Con procedimento analogo si potrebbe giungere ai risultati del n.° 2 per il caso della curva a nodale.

6. Esaminiamo ancora le falde d'ordine 3:

1.° F abbia nel punto A generico di a ν caratteri successivi 3, quindi un carattere 2 e successivo (necessariamente) un carattere 1. Sia ancora F_1 la prima polare di V rispetto ad F; F_1 avrà in A $\nu+1$ caratteri 2 appartenenti agli stessi $\nu+1$ punti di F di caratteri 3,..., 3, 2; successivamente F e F_1 non hanno punti comuni. La multiplicità d'intersezione di F, F_1 in A è $6\nu+4$; quindi quella in A_l (avendo A_l lo stesso significato che or ora) sarà $6(l+1)\nu-2(l+1)+6$. F e F_1 hanno quindi $\geqq(l+1)\nu-\frac{l+1}{3}+1$ punti comuni sopra una sezione piana generica passante per A_l e $\leqq(l+1)\nu-\frac{l+1}{3}+1$ fra questi sono tripli per F; e F_1 ha su tal sezione $\geqq(l+1)\nu+1$ punti doppi successivi. Degli x punti successivi comuni a F e F_1 su detta sezione il numero minimo fra x e $(l+1)\nu+1$ è quindi di punti tutti successivi l'uno all'altro, e non esistono sulla detta sezione piana di F altri punti di ugual posto di successione (per un'osservazione fatta al n.° 3). Tutti meno 1 sono quindi necessariamente tripli per F. Ma il limite superiore $(l+1)\nu-\frac{l+1}{3}+1$ già assegnato per il numero di questi punti tripli è $<(l+1)\nu+1$, e d'altra parte non può differire per un'unità dal numero cercato: quindi, detto λ_{31} il minimo intero $\geqq\frac{l+1}{3}$, il numero dei punti tripli successivi di F sopra una sezione generica per A_l è:

$$(l+1)\nu-\lambda_{31}+1,$$

e successivamente a questi punti si hanno su tal sezione 3 punti semplici non successivi fra loro, o un punto semplice, o un punto doppio a cui succede *un* punto semplice (*), a seconda che $3\lambda_{31}-l-1=0$, 1 o 2.

(*) Che al punto doppio succeda un sol punto semplice è conseguenza immediata del fatto che quel punto doppio è pure tale per F_1. Basta applicare, p. e., il teorema delle polari miste.

Sè cioè si considera la sezione di F con una superficie passante semplicemente per A ed avente in A contatto l-plo con a, e del resto generica, *il punto A ha per la curva intersezione $(l+1)(\nu+1)-\lambda_{31}$ caratteri 3 ed è origine di tre rami della curva o di uno solo a seconda che $l+1$ è o non divisibile per 3; nel primo caso i caratteri della curva successivi ai predetti sono tutti 1, nel secondo sono tutti 1 ovvero uno di essi è 2 a seconda che è divisibile per 3 $l+2$ o l.*

2.° Ai ν caratteri 3 di F in A succeda un carattere 1: nei punti corrispondenti F_1 avrà ν caratteri 2 e quindi un carattere 1 o 2. Con un ragionamento analogo al precedente si vede che, indicato con λ_{32} il minimo intero $\geqq 2\,\frac{l+1}{3}$ *il punto A ha, per la curva intersezione di F con una superficie passante semplicemente per A avendovi contatto d'ordine l con a e del resto generica, $(l+1)(\nu+1)-\lambda_{32}$ caratteri 3 ed è origine di 3 rami o di uno solo a seconda che $l+1$ è o non divisibile per 3; nel primo caso i caratteri successivi ai predetti sono tutti 1, nel secondo sono tutti 1 ovvero uno di essi è 2 a seconda che è divisibile per 3 l o $l+2$.*

7. Dai risultati precedenti si prevede facilmente che, nel caso generale, trattandosi di una falda s così costituita che siano s i primi suoi ν caratteri ed $s'\,(<s)$ il carattere successivo a questi, si dovrà considerare il numero $\lambda_{s,s-s'}$ minimo intero $\geqq \frac{s-s'}{s}(l+1)$; e che precisamente, se si considera l'intersezione di F con una superficie passante semplicemente per A ed avente in A contatto l-uplo con a, e del resto generica, *il punto A ha per la curva intersezione $(l+1)(\nu+1)-\lambda_{s,s-s'}$ caratteri successivi s.* Di fatto la proposizione si dimostra vera facilmente per induzione completa.

Si deve perciò premettere l'osservazione seguente. Due falde φ e ψ abbiano la stessa linea origine a e nel punto A, generico di a, abbiano rispettivamente ν caratteri s e successivamente un carattere $s'<s$, e ν caratteri σ e successivamente un carattere $\sigma'\leqq\sigma$; e i $\nu+1$ punti successivi delle sezioni piane generiche per A di φ e ψ che hanno rispettivamente queste multiplicità siano gli stessi per le due sezioni piane. Sia inoltre, per fissare le idee, $\frac{s'}{s}\leqq\frac{\sigma'}{\sigma}$. La multiplicità d'intersezione in A di φ e ψ sarà $\geqq \nu s\sigma+s'\sigma$ (*).

(*) La dimostrazione di questo fatto si riduce ad un semplicissimo calcolo. Io rimando per esso alla Memoria del sig. NOETHER: *Les combinaisons caractéristiques dans la transformation d'un point singulier.* (Rend. Palermo IV 1890 (p. 105)) poichè la proposizione

Collo stesso ragionamento fatto al n.° 2 si ha quindi come multiplicità d'intersezione di φ, ψ in A_l (A_l avendo sempre lo stesso significato, come nei n.i prec.):

$$\geqq (l+1)\nu s\sigma - (l+1)(s\sigma - s'\sigma) + s\sigma.$$

Le sezioni piane generiche di φ, ψ per A_l debbono quindi avere comune una successione di punti (il primo dei quali sia A_l) tale che, dette s_i, σ_i le multiplicità di uno qualunque di essi su φ, ψ, sia:

$$\Sigma s_i \sigma_i \geqq (l+1)\nu s\sigma - (l+1)(s\sigma - s'\sigma) + s\sigma.$$

Ora $s_i \leqq s$, $\sigma_i \leqq \sigma$; dunque il numero dei punti della successione è

$$\geqq \frac{1}{s\sigma}\Sigma s_i\sigma_i, \quad \text{cioè} \quad \geqq (l+1)\nu - \frac{(l+1)(s-s')}{s} + 1 \geqq (l+1)\nu - \lambda_{s,s-s'} + 1.$$

Si supponga ora per φ, ψ verificata la proposizione induttiva suenunciata; sopra le sezioni piane generiche di φ, ψ per A_l i primi $(l+1)\nu - \lambda_{s,s-s'} + 1$ (*) punti, o, rispettivamente, i primi $(l+1)\nu - \lambda_{\sigma,\sigma-\sigma'} + 1$ punti hanno multiplicità s, σ rispettivamente. Ma, per la precedente ipotesi $\frac{s'}{s} \leqq \frac{\sigma'}{\sigma}$, si ha:

$$\lambda_{s,s-s'} \geqq \lambda_{\sigma,\sigma-\sigma'};$$

---

non è strettamente necessaria in tutta la sua completezza nel caso nostro; anzi riceve dal nostro ragionamento una dimostrazione indiretta. Si supponga infatti $\sigma' = \sigma$; la proposizione è evidente senz'altro (col segno $=$) e il ragionamento fondato su di essa è immediatamente esatto. Si voglia ora considerare il caso generale: sia χ una falda passante per a e di cui una sezione piana generica abbia in A e nei ν punti successivi considerati di φ, ψ la stessa multiplicità (p. e. 1: si può come tale scegliere una falda di una conveniente polare della superficie cui appartengono φ, ψ). Alle coppie $\chi\varphi$, $\chi\psi$ si applica allora tutto il nostro ragionamento; sopra una sezione piana generica per A, φ e χ hanno adunque comuni $(l+1)\nu - \lambda_{s,s-s'} + 1$ punti, s-pli per φ, semplici per χ; sulla stessa sezione ψ e χ hanno comuni $(l+1)\nu - \lambda_{\sigma,\sigma-\sigma'} + 1$ punti σ-pli per ψ, semplici per χ. Se quindi $\lambda_{s,s-s'} \geqq \lambda_{\sigma,\sigma-\sigma'}$, su detta sezione piana generica φ e ψ hanno comuni $(l+1)\nu - \lambda_{s,s-s'} + 1$ punti successivi rispettivamente s-pli e σ-pli per φ e ψ. c. v. d. — Che, come si è detto, la proposizione di cui si fa uso nel testo riceva da questo una dimostrazione indiretta si vede facilmente se si inverte il ragionamento del testo, supponendo l sufficientemente grande ($l \geqq s\sigma$).

(*) E non più se $s' > 0$. A $s' = 0$ corrisponde il caso che, dopo ν punti successivi — della sezione piana generica per A — rispettivamente s-pli e σ-pli per φ e ψ, le due falde non abbiano altri punti comuni. La multiplicità d'intersezione di φ e ψ in A è allora precisamente $\nu s \sigma$. Il numero delle coppie di caratteri s_i, σ_i di valori s, σ è allora $\leqq (l+1)\nu - \lambda_{s,s-s'} + 1 = (l+1)(\nu - 1) + 1$. Questa disuguaglianza va unita alle precedenti perchè il ragionamento risulti valido per questo caso, il quale però non ci occorrerà.

quindi dei punti successivi comuni alle sezioni piane generiche di φ, ψ per A_l fatte con uno stesso piano, precisamente $(l+1)\nu - \lambda_{s,s-s} + 1$ sono s-pli e σ-pli per φ e ψ rispettivamente. Adunque *le due falde* φ, ψ *hanno, sopra una sezione piana generica passante per* A_l, *una successione di punti comuni incominciante per* A_l, *di cui* $(l+1)\nu - \lambda_{s,s-s'} + 1$ *hanno rispettivamente per* φ *e* ψ *i caratteri* s *e* σ.

Come immediata conseguenza di questa proposizione si ha quest'altra: La linea a sia origine delle falde $\varphi, \psi, \ldots$ della superficie Φ; sia A un punto generico di a e la sezione generica di Φ per A possegga ν caratteri n successivi (onde a sarà n-pla per Φ) e quindi un carattere $n' < n$; sia s la multiplicità di a per una qualunque delle falde $\varphi, \psi, \ldots$; questa falda avrà in quei $\nu+1$ punti successivi ν caratteri s e quindi uno $s' \leqq s$; sia λ il massimo valore di $\lambda_{s,s-s'}$ relativo a tutte queste falde: *sopra una sezione piana generica per* A_l *esisteranno* $(l+1)\nu - \lambda + 1$ *punti* n*-pli di* Φ.

8. Ciò posto la superficie F abbia la linea a come s-pla e vi passi con una falda sola. Sopra una sezione piana generica di F per A (generico su a) esistano ν punti s-pli e quindi un punto s'-plo ($s' < s$). Sia F_1 la prima polare di V rispetto ad F; F_1 avrà in quegli stessi ν punti multiplicità $s-1$ e nel successivo multiplicità $s' + \alpha$ (in generale sarà $\alpha = 0$; eccezionalmente potrà essere $\alpha > 0$).

Consideriamo una sezione piana generica di F e di F_1 (il cui piano passi per V) e le trasformate delle due curve dopo le ν trasformazioni quadratiche applicate ad A e ai successivi punti s-pli della sezione (e aventi come punto doppio della conica fondamentale di ogni trasformazione, nel primo spazio, il punto doppio della conica fondamentale della precedente trasformazione, nel secondo spazio).

Siano f e f_1 le due curve trasformate, v il trasformato di V, α il trasformato di A: f_1 è la prima polare di v rispetto ad f. f passa per α con un ramo solo d'ordine s' e classe $s - s'$ tangente a $v\alpha$ e che interseca $v\alpha$ s volte; segue che f_1 passa per α con uno o più rami. E se si indica con σ' l'ordine di uno qualunque di questi rami, e con $\sigma - \sigma'$ la classe, si dovrà avere $\frac{\sigma}{\sigma'} \leqq \frac{s}{s'}$ (*).

(*) Lo si dimostra facilmente come segue: Si assuma $v\alpha$ come asse $y=0$, α come origine delle coordinate, v come punto all'infinito. Il primo membro dell'equazione di f_1 sarà la derivata rispetto ad x del primo membro dell'equazione di f. Si formi il paral-

Ritornando ora alla considerazione di F e F_1, si vede che il numero λ del n.° prec. relativo alla F_1, considerata come superficie Φ, è $\leq \lambda_{s,s-s'}$; si ha inoltre che la proposizione del n.° prec. si può applicare alla F_1 ove si supponga dimostrato il teorema enunciato al principio del n.° stesso per tutte le falde d'ordine minore di s. Allora un ragionamento analogo a quello dei n.i 5, 6 mostra che il teorema medesimo si verifica per la falda F d'ordine s. La proposizione è adunque generalmente vera. Essa può anche esprimersi: *se sopra una sezione generica della falda F si succedono ν punti s-pli e quindi uno s'-plo, sopra una sezione generica della falda stessa fatta con una superficie avente in A colla linea a, origine della falda, contatto d'ordine l si succederanno $(l+1)(\nu+1) - \lambda_{s,s-s'}$ punti s-pli.*

9. Il ragionamento dei due n.i precedenti si può semplificare alquanto ove si voglia soltanto provare che il numero ora trovato è $(l+1)(\nu+1) - \mu$ *ove μ non dipende da ν.* Questa semplice osservazione può servire utilmente per compiere la ricerca per via analitica; basterà infatti considerare le falde per cui $\nu = 1$. Io non esporrò qui un tal calcolo che ci ricondurrebbe ai risultati precedenti.

10. Nei n.i 5, 6 si è visto che, seguendo per un conveniente numero di punti successivi la linea a, possono ottenersi più falde come trasformate dell'unica falda F; il fatto continua a verificarsi qualunque sia l'ordine s della falda e si può presumere, per induzione dai casi studiati, che *si otterranno più falde trasformate quando $l+1$ e s ammettono un M. C. D.; ed il numero di queste falde sarà precisamente questo M. C. D.* La proposizione si prova con tutta semplicità ove si ricorra alla rappresentazione analitica delle falde data dall'Halphen (l. c.). Cfr. la proposizione analoga (che in questa rientra come caso particolare per $l = 1$) provata dall'Halphen a p. 84.

---

lelogrammo di Newton corrispondente a f e si chiamino per brevità ξ e η gli assi corrispondenti agli esponenti 0 della y e della x rispettivamente. Il parallelogrammo di Newton corrispondente a f_1 si otterrà da quello corrispondente a f con una traslazione parallela a ξ, diretta verso η e colla soppressione dei punti che stavano su η. Ciò posto si vede immediatamente che gli angoli formati dai lati della poligonale di Newton corrispondente a f_1 colla η sono minori o uguali a quello formato colla η dall'unico lato della poligonale corrispondente a f (unico perchè f passa per x con un ramo solo). Ora le tangenti di quegli angoli sono gli ordini infinitesimali di y rispetto ad x corrispondentemente ai rami relativi ai lati delle poligonali, cioè sono uguali ai rapporti della classe all'ordine dei rami, accresciuti di una unità. Così è dimostrato l'asserto.

11. Noi abbiamo fin qui analizzati i caratteri uguali all'ordine della falda; rimarrebbero da studiare i caratteri successivi; questi dipendono evidentemente dai caratteri successivi della sezione piana generica della falda; così pure si potrebbero ancora studiare i caratteri di punti speciali delle linee singolari ottenute colle trasformazioni. Io non mi fermerò su questo punto, e solo presenterò il seguente enunciato, facile d'altronde a provarsi, come esempio del secondo genere di ricerche: « La falda F di linea origine a sia d'or- « dine s e una sua sezione piana generica abbia i caratteri s, 1. Sia A un « punto generico di a; sia a_1 la retta (semplice) successiva ad A, A_1 il punto « in cui a_1 si appoggia ad a, a_2 la retta (doppia) successiva ad A_1; a_2 si « appoggi ad a_1 in O: il punto O sarà doppio se $s=2$, triplo se $s>2$; « inoltre se $s=2$ ad O è successivo su a_1 un nuovo punto doppio a cui suc- « cede una conica semplice; se $s=3$ ad O è successiva una cubica sem- « plice (avente su a_1 punto semplice, su a_2 doppio); se $s>3$ sono successive « ad O due rette. »

12. E finirò riprendendo la proposizione enunciata nell'introduzione. È ora evidente che il fatto là enunciato non potrà presentarsi solo quando il punto A e ciascuno dei suoi successivi A_1, A_2,... abbia come successive una o più linee ciascuna a piani tangenti nei punti generici tutti distinti. Se invece p. e. al punto A fosse successiva una linea a cuspidale, basterebbe considerare p. e. sulla a tre punti successivi A_1, A_2, A_3, per ottenere, successivamente ad A_3 una nuova linea cuspidale (diversa da a) e così via.

§ 2.

Colgo l'occasione di questa appendice per correggere due inesattezze sfuggitemi nella precedente Memoria (ma che *in nulla* alterano il contenuto e le conclusioni della medesima) e che mi furono indicate dal sig. prof. Noether a cui rendo vivissime grazie.

La prima è inesattezza storica, in quanto nelle prime linee della Memoria, ho attribuito al Weierstrass il teorema della trasformabilità dell'intorno di un punto singolare di una curva algebrica piana nell'insieme degl'intorni di un numero finito (che può essere 1) di punti semplici di un'altra curva algebrica piana, con un numero finito di trasformazioni quadratiche (piane). Il Weierstrass espose veramente questo teorema (o meglio la sua interpretazione analitica) in lezioni posteriori tutte al 1871. Nel 1871 (come ho ricordato nella prec. mem.) apparvero la 2.ª Nota del sig. Noether: *Ueber d. algebr. Functionen einer u. zweier Variabeln* (Göttinger Nachrichten. Maggio 1871, p. 267) e la Memoria del sig. Hamburger: *Ueber die Entwickelung alg. Functionen in Reihen* (Zeitschrift für Mathematik u. Ph. XVI. Autunno 1871); nella prima è esposto il concetto della risoluzione delle singolarità con una successione di trasformazioni Cremoniane; nella seconda è data la dimostrazione (analitica) della risolvibilità per tal mezzo (con trasformazioni quadratiche) delle singolarità medesime.

Sarebbe inutile che io maggiormente mi dilungassi su questo fatto: il lettore può vedere l'accurata storia dell'argomento che i sigg. Brill e Noether ci diedero nella *Relazione* sopra *Die Entwickelung d. Th. algebr. Functionen in älterer und neuerer Zeit* (Jahresbericht d. deutschen Math. Vereinigung Bd. 3 1892-93). Aggiungerò solo che, come rileva il sig. Noether, l'esposizione del Weierstrass non stabilisce che i diversi intorni trasformati dell'unico considerato appartengano ad una stessa curva algebrica, bensì a convenienti curve algebriche.

La seconda inesattezza è contenuta nelle linee 3-5 della p. 30 (della Memoria — p. 248 del volume) ove nella linea 3 in luogo di: « Ogni superficie ecc. » si deve leggere: « Sia A semplice per a; ogni superficie ecc. » e alla linea 5 in luogo di « Sia inoltre il punto A ecc. » si deve leggere: « Inoltre, poichè il punto A è ecc. » Nella linea 6 si dovrà di conseguenza mutare « ; » in « , ». È evidente che leggendo come è scritto nella Memoria il fatto enunciato nel periodo: « Ogni superficie... » non è vero: così ad esempio o se a è doppia per F, A triplo per a e per F ed F_1 passa semplicemente per a ed A è doppio per essa. (Questo semplice esempio mi fu indicato dal sig. Noether.) Ma le linee seguenti mostrano chiaramente come fosse mia intenzione considerare effettivamente soltanto il caso di A semplice per a, poichè, come là osservo, il caso contrario si riduce immediatamente a questo.

Torino, luglio 1898.

Le congruenze.

(*Di* T. Cifarelli, *a Napoli.*)

1. Definiremo con Kummer analiticamente una congruenza esprimendo le coordinate x, y, z di un punto di un raggio, ed i suoi coseni direttori X, Y, Z in funzione di due variabili indipendenti u, v. Supporremo che le sei funzioni x, y, z, X, Y, Z siano finite e continue insieme alle loro derivate parziali. Si troverà quindi il punto (x, y, z) sopra una certa superficie, ed ogni altro punto di un raggio sarà definito mediante la sua distanza *(ascissa)* dal punto di partenza (x, y, z).

Conducendo per l'origine delle coordinate i raggi paralleli alle direzioni positive di quelli della congruenza, e tagliandoli con la sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ avremo la *rappresentazione sferica* della congruenza.

Consideriamo le seguenti dodici funzioni fondamentali:

$$\Sigma\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 = E, \qquad \Sigma\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = F, \qquad \Sigma\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 = G, \qquad (a)$$

$$\Sigma\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} = e, \quad \Sigma\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = f, \quad \Sigma\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} = f', \quad \Sigma\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} = g, \qquad (b)$$

$$\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = \mathbf{E}, \qquad \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = \mathbf{F}, \qquad \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = \mathbf{G}, \qquad (c)$$

$$\Sigma X\frac{\partial x}{\partial u} = \mathbf{A}, \qquad \Sigma X\frac{\partial x}{\partial v} = \mathbf{B}; \qquad (d)$$

di cui le (a), (b), (c) servono rispettivamente a definire le tre forme differenziali quadratiche:

$$\begin{aligned} d\sigma^2 = \Sigma\, dX^2 &= E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,\\ \Sigma\, dX\,dx &= e\,du^2 + (f+f')\,du\,dv + g\,dv^2,\\ ds^2 = \Sigma\, dx^2 &= \mathbf{E}\,du^2 + 2\mathbf{F}\,du\,dv + \mathbf{G}\,dv^2, \end{aligned}$$

mentre le (d) rappresentano delle quantità proporzionali ai coseni degli angoli che i raggi della congruenza formano con le linee coordinate sulla superficie di partenza. Chiameremo le tre forme differenziali quadratiche rispettivamente *prima*, *seconda* e *terza*; e notiamo che la prima dà il quadrato dell'elemento lineare sull'immagine sferica, o, ciò che è lo stesso, l'angolo di due generatrici successive, mentre l'ultima indica il quadrato dell'elemento lineare sulla superficie (x, y, z); queste due sono quindi sempre definite.

2. Ricorderemo in questo paragrafo alcune formole e proprietà relative alla sfera. Le funzioni (a), (b), (c), (d) riduconsi a tre: E, F, G; essendo uguali quelle rappresentate dalle stesse lettere, ed annullandosi le (d). Indicando con $\left\{ {rs \atop t} \right\}$ i nuovi simboli di Christoffel relativi alla prima forma fondamentale (*) si hanno le seguenti importanti relazioni:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} &= \left\{ {11 \atop 1} \right\} \frac{\partial X}{\partial u} + \left\{ {11 \atop 2} \right\} \frac{\partial X}{\partial v} - E X, \\
\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} &= \left\{ {12 \atop 1} \right\} \frac{\partial X}{\partial u} + \left\{ {12 \atop 2} \right\} \frac{\partial X}{\partial v} - F X, \\
\frac{\partial^2 X}{\partial v^2} &= \left\{ {22 \atop 1} \right\} \frac{\partial X}{\partial u} + \left\{ {22 \atop 2} \right\} \frac{\partial X}{\partial v} - G X,
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

con le analoghe per Y e Z. Applicando a queste le condizioni d'integrabilità si vede che i tre coefficienti E, F, G non sono tra loro indipendenti, ma bensì legati dalla seguente relazione dovuta a Gauss:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{F}{E\sqrt{EG-F^2}} \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \frac{\partial G}{\partial u} \right] + \right. \\
&\left. + \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{2}{\sqrt{EG-F^2}} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{F}{E\sqrt{EG-F^2}} \frac{\partial E}{\partial u} \right] \right\} = +1.
\end{aligned}\right\} \tag{I}$$

Questa relazione necessaria è anche sufficiente, e si ha il seguente teorema:

Data una forma differenziale quadratica definita

$$\varphi = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

affinchè esista una sfera di raggio uguale all'unità che l'ammetta come sua

(*) Tutto ciò che è detto in questo paragrafo è tolto dalla *Geometria differenziale* del prof. Bianchi. Così anche in seguito per qualunque richiamo alla teoria delle superficie ricorrerò al detto trattato.

forma fondamentale, è necessario e sufficiente che sia verificata la condizione di Gauss.

3. Ciò posto si potranno sempre determinare sei coefficienti incogniti α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 in modo da avere:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial u} &= \alpha\frac{\partial X}{\partial u} + \beta\frac{\partial X}{\partial v} + \gamma X, & \frac{\partial x}{\partial v} &= \alpha_1\frac{\partial X}{\partial u} + \beta_1\frac{\partial X}{\partial v} + \gamma_1 X,\\
\frac{\partial y}{\partial u} &= \alpha\frac{\partial Y}{\partial u} + \beta\frac{\partial Y}{\partial v} + \gamma Y, & \frac{\partial y}{\partial v} &= \alpha_1\frac{\partial Y}{\partial u} + \beta_1\frac{\partial Y}{\partial v} + \gamma_1 Y,\\
\frac{\partial z}{\partial u} &= \alpha\frac{\partial Z}{\partial u} + \beta\frac{\partial Z}{\partial v} + \gamma Z, & \frac{\partial z}{\partial v} &= \alpha_1\frac{\partial Z}{\partial u} + \beta_1\frac{\partial Z}{\partial v} + \gamma_1 Z,
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

perchè il comune determinato $\sqrt{EG - F^2}$ è diverso da zero. Perciò moltiplicandole rispettivamente prima per $\frac{\partial X}{\partial u}$, $\frac{\partial Y}{\partial u}$, $\frac{\partial Z}{\partial u}$, poi per $\frac{\partial X}{\partial v}$, $\frac{\partial Y}{\partial v}$, $\frac{\partial Z}{\partial v}$, ed infine per X, Y, Z, ed ogni volta sommando si ha:

$$\begin{aligned}
e &= \alpha E + \beta F, & f &= \alpha_1 E + \beta_1 F,\\
f' &= \alpha F + \beta G, & g &= \alpha_1 F + \beta_1 G,\\
\mathrm{A} &= \gamma, & \mathrm{B} &= \gamma_1;
\end{aligned}$$

ossia:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= \frac{eG - f'F}{EG - F^2}, & \beta &= \frac{f'E - eF}{EG - F^2}, & \gamma &= \mathrm{A},\\
\alpha_1 &= \frac{fG - gF}{EG - F^2}, & \beta_1 &= \frac{gE - fF}{EG - F^2}, & \gamma_1 &= \mathrm{B}.
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Ricavate in tal modo le funzioni α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 in funzione delle (a), (b), (d), possiamo subito esprimere le (c) mediante queste. In vero moltiplicando le (2) rispettivamente per $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ e poi per $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ ed ogni volta sommando si ha:

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{E} &= e\alpha + f'\beta + \gamma^2,\\
\mathrm{F} &= f\alpha + g\beta + \gamma\gamma_1 = e\alpha_1 + f'\beta_1 + \gamma\gamma_1,\\
\mathrm{G} &= f\alpha_1 + g\beta_1 + \gamma_1^2.
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Adunque per le (3) si scorge che le tre funzioni che definiscono l'elemento lineare della superficie (x, y, z) si sanno in termini finiti calcolare mediante le altre (a), (b), (d). Noi supporremo date queste nove funzioni, cioè supporremo che assieme alle prime due forme differenziali quadratiche sieno date le due funzioni $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$.

4. Si è visto che per l'esistenza di X, Y, Z i coefficienti della prima forma differenziale quadratica devono soddisfare all'equazione alle derivate parziali (I), e che anzi quella è pure condizione sufficiente. Ammesso ora soddisfatta la (I), scriviamo le condizioni d'integrabilità delle (2):

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v},$$

e l'analoghe per y e z.

Sviluppando col tener conto delle (1) si trovano le condizioni:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\alpha}{\partial v}-\frac{\partial\alpha_1}{\partial u}-\alpha_1\left\{\begin{matrix}1\,1\\1\end{matrix}\right\}+(\alpha-\beta_1)\left\{\begin{matrix}1\,2\\1\end{matrix}\right\}+\beta\left\{\begin{matrix}2\,2\\1\end{matrix}\right\}-\mathbf{B}=0,\\
&\frac{\partial\beta}{\partial v}-\frac{\partial\beta_1}{\partial u}-\alpha_1\left\{\begin{matrix}1\,1\\2\end{matrix}\right\}+(\alpha-\beta_1)\left\{\begin{matrix}1\,2\\2\end{matrix}\right\}+\beta\left\{\begin{matrix}2\,2\\2\end{matrix}\right\}+\mathbf{A}=0,\\
&\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial v}-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial u}+\alpha_1 E-(\alpha-\beta_1)F-\beta G=0,
\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{II}')$$

che si trasformano agevolmente nelle altre:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial e}{\partial v}-\frac{\partial f}{\partial u}-\left\{\begin{matrix}1\,2\\1\end{matrix}\right\}e+\left\{\begin{matrix}1\,1\\1\end{matrix}\right\}f-\left\{\begin{matrix}1\,2\\2\end{matrix}\right\}f'+\left\{\begin{matrix}1\,1\\2\end{matrix}\right\}g+F\mathbf{A}-E\mathbf{B}=0,\\
&\frac{\partial f'}{\partial v}-\frac{\partial g}{\partial u}-\left\{\begin{matrix}2\,2\\1\end{matrix}\right\}e+\left\{\begin{matrix}1\,2\\1\end{matrix}\right\}f-\left\{\begin{matrix}2\,2\\2\end{matrix}\right\}f'+\left\{\begin{matrix}1\,2\\2\end{matrix}\right\}g+G\mathbf{A}-F\mathbf{B}=0,\\
&\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial v}-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial u}+f-f'=0.
\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{II})$$

Sono queste condizioni necessarie per l'esistenza delle funzioni x, y, z. Sicchè, data una congruenza, le nove funzioni fondamentali (a), (b), (d) non sono tra loro indipendenti, ma devono soddisfare alle quattro condizioni (I) e (II) date dal prof. Cesàro per le congruenze (*). Di esse la (I) e le prime due delle (II) per le congruenze normali si riducono alle condizioni del Codazzi, mentre l'ultima riesce identicamente soddisfatta, come fra breve vedremo. Le (II) sono anche sufficienti, perchè posto:

$$dx=\left(\alpha\frac{\partial X}{\partial u}+\beta\frac{\partial X}{\partial v}+\gamma X\right)du+\left(\alpha_1\frac{\partial X}{\partial u}+\beta_1\frac{\partial X}{\partial v}+\gamma_1 X\right)dv,$$

(*) *Geometria intrinseca*, pag. 205.

con l'analoghe per $d\,y$ e $d\,z$, e supposta verificata la (I), i coefficienti di $d\,u$ e $d\,v$ sono funzioni conosciute di u e di v, ed affinchè si abbiano a secondo membro dei differenziali esatti si trovano per equazioni di condizione proprio le (II) che noi supponiamo verificate. Si avrà perciò integrando:

$$x = \int\left[\left(\alpha\frac{\partial X}{\partial u} + \beta\frac{\partial X}{\partial v} + \gamma X\right)d\,u + \left(\alpha_1\frac{\partial X}{\partial u} + \beta_1\frac{\partial X}{\partial v} + \gamma_1 X\right)d\,v\right],$$

$$y = \cdots\cdots, \qquad z = \cdots\cdots,$$

le quali definiscono un'unica superficie (x, y, z), a meno uno spostamento rigido nello spazio. Facendo poi passare per ciascun punto (u, v) di tale superficie un raggio di coseni direttori X, Y, Z unicamente definito dall'immagine sferica sarà individuata un'unica congruenza relativa alle funzioni (a), (b), (d) soddisfacenti alle condizioni (I) e (II). Si ha dunque il teorema:

Date arbitrariamente le nove funzioni (a), (b), (d), *di cui* (a) *e* (b) *siano i coefficienti di due forme differenziali quadratiche, affinchè vi corrisponda una congruenza che le abbia come funzioni fondamentali, è necessario e sufficiente che esse soddisfino alle quattro equazioni alle derivate parziali* (I) *e* (II); *di queste la* (I) *ci fornirà un'unica immagine sferica, e mediante quadrature si ricaverà (a meno uno spostamento rigido nello spazio), per ogni punto della immagine un unico punto* (x, y, z) *per cui passerà il raggio di data immagine.*

5. Derivando le (b), tenendo conto delle (1) e della condizione d'integrabilità $\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}$, si ha il seguente gruppo di formole notate da Weingarten (*) per le superficie:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial e}{\partial u} &= \left\{\begin{matrix}1\,1\\1\end{matrix}\right\}e + \left\{\begin{matrix}1\,1\\2\end{matrix}\right\}f - E\,\mathrm{A} + \Sigma\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2},\\
\frac{\partial e}{\partial v} &= \left\{\begin{matrix}1\,2\\1\end{matrix}\right\}e + \left\{\begin{matrix}1\,2\\2\end{matrix}\right\}f - F\,\mathrm{A} + \Sigma\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v},\\
\frac{\partial f}{\partial u} &= \left\{\begin{matrix}1\,1\\1\end{matrix}\right\}f + \left\{\begin{matrix}1\,1\\2\end{matrix}\right\}g - E\,\mathrm{B} + \Sigma\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v},\\
\frac{\partial f}{\partial v} &= \left\{\begin{matrix}1\,2\\1\end{matrix}\right\}f + \left\{\begin{matrix}1\,2\\2\end{matrix}\right\}g - F\,\mathrm{B} + \Sigma\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2},
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

(*) Veggasi Bianchi, *Geom. diff.*, pag. 123.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial f'}{\partial u} &= \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} e + \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} f' - F\,\mathbf{A} + \Sigma \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \\
\frac{\partial f'}{\partial v} &= \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} e + \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} f' - G\,\mathbf{A} + \Sigma \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}, \\
\frac{\partial g}{\partial u} &= \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} f + \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} g - F\,\mathbf{B} + \Sigma \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}, \\
\frac{\partial g}{\partial v} &= \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} f + \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} g - G\,\mathbf{B} + \Sigma \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}.
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Se ora poniamo:

$$\mathbf{A}_1 = \Sigma x \frac{\partial X}{\partial u}, \qquad \mathbf{B}_1 = \Sigma x \frac{\partial X}{\partial v}, \qquad W = \Sigma x X, \quad (6)$$

viene:

$$\mathbf{A} + \mathbf{A}_1 = \frac{\partial W}{\partial u}, \qquad \mathbf{B} + \mathbf{B}_1 = \frac{\partial W}{\partial v};$$

e derivando le funzioni $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{B}_1$ abbiamo quest'altre formole:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u} &= e + \Sigma X \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \\
\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial u} &= f + \Sigma X \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}, \\
\frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial u} &= e + \left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 1 \end{matrix} \right\} \mathbf{A}_1 + \left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 2 \end{matrix} \right\} \mathbf{B}_1 - E\,W, \\
\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial u} &= f' + \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \mathbf{A}_1 + \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} \mathbf{B}_1 - F\,W, \\
\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial v} &= f' + \Sigma X \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}, \\
\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial v} &= g + \Sigma X \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, \\
\frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial v} &= f + \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \mathbf{A}_1 + \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} \mathbf{B}_1 - F\,W, \\
\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial v} &= g + \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \mathbf{A}_1 + \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} \mathbf{B}_1 - G\,W.
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Combinando opportunamente le (5) e le (7) si ritrovano le (II). Per quest'ultime la terza delle (II) può scriversi anche così:

$$\frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial v} - \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial u} + f' - f = 0. \quad (8)$$

6. Affinchè la congruenza sia normale su ogni raggio dev' esserci un punto almeno (ξ, η, ζ) per il quale si abbia $\Sigma X d\xi = 0$. Ora posto:

$$\xi = x + t X, \quad \eta = y + t Y, \quad \zeta = z + t Z,$$

risulta:

$$d t = -(\mathbf{A}\, d u + \mathbf{B}\, d v),$$

e la condizione d'integrabilità:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial v} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial u}, \tag{9}$$

ci dà:

$$f = f'. \tag{10}$$

Inversamente se è $f = f'$ si ricava per la terza delle (II) la (9), e s'otterrà, integrando, una famiglia di superficie parallele ed ortogonali alla congruenza. Tenendo conto delle (9) e (10) si vede che la terza delle (II) riesce identicamente nulla, mentre le prime due si riducono ad altre ancora più generali di quelle del Codazzi, perchè la congruenza è legata ad una superficie arbitraria che la taglia. Per ottenere effettivamente quelle del Codazzi bisogna supporre $t =$ cost. ossia $\mathbf{A} = \mathbf{B} = 0$, e sostituire ai coefficienti (a) le loro espressioni in funzione di (b) e (c).

È anche $\mathbf{A}_1 d u + \mathbf{B}_1 d v$ un differenziale esatto, e guardando i due differenziali esatti:

$$\mathbf{A}\; d u + \mathbf{B}\; d v = X d x + Y d y + Z d z = -d t,$$

$$\mathbf{A}_1 d u + \mathbf{B}_1 d v = x\, d X + y\, d Y + z\, d Z = d(W + t),$$

conseguenza l'un dell'altro, e caratterizzanti le congruenze normali, abbiamo rispettivamente le seguenti interpretazioni meccaniche.

Nel moto di un punto sopra una superficie (x, y, z), *sollecitato da una forza costante* (X, Y, Z), *si verifica l'integrale delle forze vive solo se l'insieme delle linee d'azione della forza che è applicata al punto in ogni istante costituisce una congruenza normale.*

La funzione delle forze rappresenta la distanza tra i punti corrispondenti (sullo stesso raggio) di una superficie Σ cui la congruenza è normale e della superficie $S \equiv (x, y, z)$. Le superficie di livello tagliano S lungo le linee in cui tale distanza t è costante.

Il secondo differenziale esatto dice che *nel moto di un punto sopra una sfera* (X, Y, Z) *si verifica l'integrale delle forze vive solo se, interpretando le componenti della forza direttamente applicata* (x, y, z) *come coordinate di punti di una certa superficie* S, *e conducendo per i punti di* S *le rette parallele alle normali nei punti corrispondenti sulla sfera, si ha una congruenza normale.*

La funzione delle forze rappresenta la distanza dell'origine (centro della sfera) al piano tangente ad una superficie Σ. Le superficie di livello $W + t =$ cost. tagliano la sfera lungo linee che hanno sulla superficie pedale di una Σ, rispetto all'origine come polo, anche linee sferiche come corrispondenti.

7. Si è visto che data una superficie S la congruenza delle sue normali ha $f = f'$, $\mathbf{A} = \mathbf{B} = 0$. I nove coefficienti riduconsi dunque a 6 che sono E, F, G, e gli altri tre e, f, g che s'usano rappresentare con $-\mathbf{D}$, $-\mathbf{D}'$, $-\mathbf{D}''$. Ai primi tre si possono sempre sostituire gli altri $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ mediante le (4). Vogliamo ora calcolarci gli altri tre coefficienti $\mathbf{D}$, $\mathbf{D}'$, $\mathbf{D}''$ relativi ad una superficie S quando è nota una congruenza qualsiasi uscente da essa.

Si possono sempre determinare nove coefficienti incogniti: a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' in modo da soddisfare ai tre sistemi:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = a\frac{\partial X}{\partial u} + b\frac{\partial X}{\partial v} + cX, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = a'\frac{\partial X}{\partial u} + b'\frac{\partial X}{\partial v} + c'X, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = a''\frac{\partial X}{\partial u} + b''\frac{\partial X}{\partial v} + c''X,\\
&\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = a\frac{\partial Y}{\partial u} + b\frac{\partial Y}{\partial v} + cY, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} = a'\frac{\partial Y}{\partial u} + b'\frac{\partial Y}{\partial v} + c'Y, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = a''\frac{\partial Y}{\partial u} + b''\frac{\partial Y}{\partial v} + c''Y,\\
&\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = a\frac{\partial Z}{\partial u} + b\frac{\partial Z}{\partial v} + cZ, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} = a'\frac{\partial Z}{\partial u} + b'\frac{\partial Z}{\partial v} + c'Z, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = a''\frac{\partial Z}{\partial u} + b''\frac{\partial Z}{\partial v} + c''Z,
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

perchè tutti col determinante $\sqrt{EG - F^2}$ diverso da zero. Si otterranno poi effettivamente le espressioni di tali coefficienti o risolvendo i dati sistemi tenendo conto delle (5) e (7), o derivando le (2), od usando lo stesso procedimento tenuto per le (2). In qualunque modo si faccia si ottiene:

$$a = \frac{\partial \alpha}{\partial u} + \alpha \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \beta \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \gamma, \qquad b = \frac{\partial \beta}{\partial u} + \alpha \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix} + \beta \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix},$$

$$c = \frac{\partial \gamma}{\partial u} - \alpha\, E - \beta\, F = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u} - e,$$

$$a' = \frac{\partial \alpha}{\partial v} + \alpha \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \beta \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}, \qquad b' = \frac{\partial \beta}{\partial v} + \alpha \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} + \beta \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} + \gamma,$$

$$c' = \frac{\partial \gamma}{\partial v} - \alpha\, F - \beta\, G = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial v} - f',$$

$$a' = \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} + \alpha_1 \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \beta_1 \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \gamma_1, \quad b' = \frac{\partial \beta_1}{\partial u} + \alpha_1 \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix} + \beta_1 \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix},$$

$$c' = \frac{\partial \gamma_1}{\partial u} - \alpha_1 E - \beta_1 F = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial u} - f,$$

$$a'' = \frac{\partial \alpha_1}{\partial v} + \alpha_1 \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \beta_1 \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}, \qquad b'' = \frac{\partial \beta_1}{\partial v} + \alpha_1 \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} + \beta_1 \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} + \gamma_1,$$

$$c'' = \frac{\partial \gamma_1}{\partial v} - \alpha_1 F - \beta_1 G = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial v} - g.$$

Le due espressioni per a', b', c' ci dànno di nuovo la (II').
Calcolate così le (11), e tenendo presente le (2), le note espressioni:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{E}\,\mathbf{G} - \mathbf{F}^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{d z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \qquad \mathbf{D}' = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{E}\,\mathbf{G} - \mathbf{F}^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{D}'' = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{E}\,\mathbf{G} - \mathbf{F}^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},$$

dànno:

$$\mathbf{D} = \frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{\mathbf{E}\,\mathbf{G}-\mathbf{F}^2}} \begin{vmatrix} a & \alpha & \alpha_1 \\ b & \beta & \beta_1 \\ c & \gamma & \gamma_1 \end{vmatrix}, \qquad \mathbf{D}' = \frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{\mathbf{E}\,\mathbf{G}-\mathbf{F}^2}} \begin{vmatrix} a' & \alpha & \alpha_1 \\ b' & \beta & \beta_1 \\ c' & \gamma & \gamma_1 \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{D}'' = \frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{\mathbf{E}\,\mathbf{G}-\mathbf{F}^2}} \begin{vmatrix} a'' & \alpha & \alpha_1 \\ b'' & \beta & \beta_1 \\ c'' & \gamma & \gamma_1 \end{vmatrix}.$$

8. *Teorema. Date due forme differenziali quadratiche (non proporzionali) di cui una almeno definita, si può, con una trasformazione reale delle variabili, ridurle ad avere proporzionali i termini estremi, ed a mancare la definita del termine medio.*

Per dimostrare tal teorema premettiamo un altro, che assieme alla dimostrazione togliamo dalla *Geometria differenziale* del Bianchi. Alle due forme differenziali quadratiche non proporzionali:

$$\Phi_1 = a_{11}\,d\,x_1^2 + 2\,a_{12}\,d\,x_1\,d\,x_2 + a_{22}\,d\,x_2^2,$$

$$\Phi_2 = b_{11}\,d\,x_1^2 + 2\,b_{12}\,d\,x_1\,d\,x_2 + b_{22}\,d\,x_2^2,$$

di cui la prima sia per ipotesi definita, aggiungiamo la terza forma:

$$\Phi_3 = c_{11}\,d\,x_1^2 + 2\,c_{12}\,d\,x_1\,d\,x_2 + c_{22}\,d\,x_2^2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a_{11}\,a_{22}-a_{12}^2}} \begin{vmatrix} a_{11}\,d\,x_1 + a_{12}\,d\,x_2 & a_{12}\,d\,x_1 + a_{22}\,d\,x_2 \\ b_{11}\,d\,x_1 + b_{12}\,d\,x_2 & b_{12}\,d\,x_1 + b_{22}\,d\,x_2 \end{vmatrix},$$

che è un covariante (irrazionale) simultaneo di Φ_1 e Φ_2. Il discriminante $c_{11}\,c_{22} - c_{12}^2$ si mette identicamente sotto la forma:

$$c_{11}\,c_{22} - c_{12}^2 = \frac{-1}{a_{11}\,a_{22}-a_{12}^2} \left\{ \left[\frac{a_{11}\,b_{22} - a_{22}\,b_{11}}{2} - \frac{a_{12}}{a_{11}}\,(a_{11}\,b_{12} - a_{12}\,b_{11}) \right]^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{a}{a_{11}^2}\,(a_{11}\,b_{12} - a_{12}\,b_{11})^2 \right\},$$

perchè $a_{11} \neq 0$, essendo $a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2 > 0$. È dunque $c_{11}\,c_{22} - c_{12}^2 < 0$, e s'annulla solo nel caso escluso della proporzionalità tra le due forme Φ_1 e Φ_2. Decomponiamo ora l'equazione differenziale quadratica $\Phi_3 = 0$ nei due fattori lineari distinti:

$$\alpha\,d\,x_1 + \beta\,d\,x_2 = 0,$$

$$\gamma\,d\,x_1 + \delta\,d\,x_2 = 0.$$

Siano $x'_1 = \text{cost.}$, $x'_2 = \text{cost.}$, i rispettivi integrali di queste due equazioni, ed introducendo queste nuove variabili x'_1, x'_2, le due forme Φ_1 e Φ_2 si riducono a mancare del termine medio, mentre la terza riducesi solo al termine medio. Si ha così il teorema:

Date due forme differenziali quadratiche Φ_1 e Φ_2, di cui una almeno Φ_1 definita, si può con una trasformazione reale di variabili ridurle a mancare contemporaneamente del termine medio. Le nuove variabili da introdursi sono quelle che, eguagliate a costanti, dànno gl'integrali dell'equazione $\Phi_3 = 0$.

Nel caso escluso della proporzionalità delle due forme la riduzione può farsi in infiniti modi.

Ciò posto cominciamo dal notare che le due forme Φ_1 e Φ_3 non sono proporzionali. Se ora applichiamo ad esse il detto teorema costruendo una quarta forma Φ_4 loro covariante (irrazionale) simultaneo, si ha, introducendo le variabili che uguagliate a costanti dànno gl'integrali di $\Phi_4 = 0$, che le due forme Φ_1 e Φ_3 si riducono a mancare contemporaneamente del termine medio. Perciò, indicando con un indice tutti gli elementi dopo la trasformazione, si ha che la forma:

$$\Phi'_3 = \frac{1}{\sqrt{a'_{11} a'_{22} - a'^2_{12}}} \begin{vmatrix} a'_{11} d x'_1 + a'_{12} d x'_2 & a'_{12} d x'_1 + a'_{22} d x'_2 \\ b'_{11} d x'_1 + b'_{12} d x'_2 & b'_{12} d x'_1 + b'_{22} d x'_2 \end{vmatrix}$$

deve ridursi ai soli termini estremi, mentre $a'_{12} = 0$. Sarà dunque:

$$a'_{11} b'_{22} - a'_{22} b'_{11} = 0,$$

ossia:

$$\frac{a'_{11}}{b'_{11}} = \frac{a'_{22}}{b'_{22}},$$

assieme ad $a'_{12} = 0$. Ciò dimostra il teorema. Anche qui la riduzione può farsi in infiniti modi nel caso escluso della proporzionalità delle due forme Φ_1 e Φ_2. Notiamo che la nuova forma Φ'_4 si riduce al solo termine medio.

Interpretando la Φ_1 come la forma differenziale quadratica che dà il quadrato dell'elemento lineare sopra una superficie, si ha che il sistema doppio di linee (x_1, x_2) riducesi sempre ad un sistema doppio ortogonale, tanto se s'introducono le variabili che uguagliate a costanti dànno gl' integrali di $\Phi_3 = 0$, tanto quelle che derivano dagl'integrali di $\Phi_4 = 0$. Vogliamo far vedere che questi due sistemi doppi ortogonali sono bisettori l'un dell'altro. Introducendo prima le variabili che si hanno integrando $\Phi_3 = 0$, la Φ_4 si riduce a:

$$\Phi_4 = \frac{a_{11} b_{22} - a_{22} b_{11}}{a_{11} a_{22}} (a_{11}\, d\, x_1^2 - a_{22}\, d\, x_2^2).$$

Per introdurre ora le altre nuove variabili, siccome $\frac{a_{11} b_{22} - a_{22} b_{11}}{a_{11} a_{22}} \gtrless 0$ basta integrare:

$$a_{11}\, d\, x_1^2 - a_{22}\, d\, x_2^2 = 0,$$

che si scinde nelle altre due:

$$\sqrt{a_{11}}\, d\, x_1 - \sqrt{a_{22}}\, d\, x_2 = 0, \qquad \sqrt{a_{11}}\, d\, x_1 + \sqrt{a_{22}}\, d\, x_2 = 0.$$

È ora dimostrato quanto abbiamo asserito, perchè la prima di queste rappresenta l'equazione differenziale delle bisettrici del sistema doppio ortogonale (x_1, x_2), e la seconda quella delle loro traettorie ortogonali.

Analogamente al modo come abbiamo costruito le forme Φ_3 e Φ_4 continuiamo a costruirne ancora delle altre $\Phi_5, \Phi_6, \ldots, \Phi_i$. Introducendo ora le variabili che uguagliate a costanti dànno gl'integrali di $\Phi_i = 0$, le due forme Φ'_1 e Φ'_{i-1} mancheranno contemporaneamente del termine medio, mentre la Φ'_{i-2} conserva il termine medio, ma avrà gli estremi proporzionali ai corrispondenti di Φ'_1. È facile poi vedere che più specialmente i termini estremi di Φ'_{i-2} sono nulli, come quelli di Φ'_i. Siamo ricondotti al caso di Φ_i, cioè gl'integrali di $\Phi_i = 0$ sono anche integrali di $\Phi_{i-2} = 0$. Conseguentemente Φ'_{i-3} mancherà del termine medio, mentre Φ'_{i-4} degli estremi; così proseguendo si vede che mentre Φ'_1 manca sempre del termine medio, la Φ'_2 avrà gli estremi proporzionali ai corrispondenti di Φ'_1, oppure nullo il termine medio secondo che i è pari o dispari.

9. Applicando il teorema del paragrafo precedente alle prime due forme differenziali quadratiche relative ad una data congruenza, si ha che con un'unica trasformazione reale di variabili si può sempre ottenere:

$$F = 0, \qquad \frac{e}{E} = \frac{g}{G} = t,$$

ove t è una certa funzione di u e v. Poniamo ora:

$$x_0 = x - t\, X, \quad y_0 = y - t\, Y, \quad z_0 = z - t\, Z,$$

e riferiamo la congruenza a questa nuova superficie S_0 unica e determinata per qualunque congruenza.

I nuovi coefficienti della seconda forma diventano:

$$e_0 = e - t\, E = 0, \quad f_0 = f, \quad f'_0 = f', \quad g_0 = g - t\, G = 0.$$

Ritornando ora all'antica segnatura si ha che legando la congruenza a questa speciale superficie S, ed introducendo le nuove variabili u e v le prime due forme differenziali quadratiche assumono la forma:

$$d\sigma^2 = \Sigma\, d X^2 = E\, d u^2 + G\, d v^2,$$
$$\Sigma\, d X d x = (f + f')\, d u\, d v.$$

Notiamo che tale riduzione è possibile sempre, ed in un sol modo, eccetto il caso in cui le due forme sono proporzionali, perchè allora è possibile in infiniti modi, e si ha $f + f' = 0$. Considereremo a parte tal caso. Indicando con dp la lunghezza infinitesima della minima distanza del raggio (u, v) dal raggio $(u + d u, v + d v)$, e con r l'ascissa del suo punto d'incontro col raggio (u, v), si ha in generale:

$$d p = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}\, d\sigma} \begin{vmatrix} E d u + F d v & F d u + G d v \\ e d u + f d v & f' d u + g d v \end{vmatrix},$$
$$r = \frac{-\Sigma\, d X d x}{\Sigma\, d X^2} = -\frac{e\, d u^2 + (f + f')\, d u\, d v + g\, d v^2}{E\, d u^2 + 2 F\, d u\, d v + G\, d v^2}.$$

Dopo le riduzioni precedenti queste diventano:

$$d p = \frac{1}{\sqrt{E G}\, d\sigma} \begin{vmatrix} E d u & G d v \\ f d v & f' d u \end{vmatrix}, \quad r = -\frac{\Sigma\, d X d x}{\Sigma\, d X^2} = -\frac{(f + f')\, d u\, d v}{E d u^2 + G d v^2}.$$

È $r = 0$ solo sulle linee coordinate, perciò il sistema doppio di rigate (u, v) è tale che per ogni raggio i due punti centrali coincidono in S, e taglia perciò S le linee di stringimento, ossia seconde linee che corrispondono per ortogonalità di elementi al sistema doppio ortogonale (u, v) sulla sfera. Fissato il senso positivo di due rigate qualsiasi uscenti da un raggio g, si dirà angolo delle due rigate quello delle minime distanze di g alle due generatrici successive sulle rispettive rigate percorse nel senso positivo. Intenderemo per *verso* di una rigata uscente da g il senso secondo cui la generatrice successiva g' tende a girare intorno a g. Nell'immagine sferica l'angolo di due rigate si conserva o si cambia nel supplementare secondo che sono dello stesso verso, o di verso contrario. I piani passanti per g e perpendicolari a quelle minime distanze s'intenderanno percorsi positivamente nel senso positivo delle relative immagini. Ad una rigata uscente da g corrisponde un piano uscente da g, e reciprocamente per una determinata congruenza; un tal piano assume anche il nome della relativa rigata.

Per una rigata qualsiasi definita dall'angolo θ, è sulla immagine sferica $\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{\sqrt{EG}\,du\,dv}{E\,du^2 + G\,dv^2}$, ossia la formola di Hamilton:

$$r = -\frac{f+f'}{2\sqrt{EG}}\operatorname{sen} 2\,\theta.$$

Questa ci dice che per due direzioni ortogonali qualunque r ha valori uguali e disegno contrario, mentre ha il valore nullo per le *rigate medie* $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$, ed il valore massimo per le *rigate principali*, bisettrici di queste, e relative alle direzioni $\theta = +\frac{\pi}{4}$, $\theta = -\frac{\pi}{4}$. Adunque su ogni raggio un segmento di lunghezza $2\,l = \frac{-(f+f')}{\sqrt{EG}}$ racchiude tutti i punti centrali: gli estremi di questo, *punti limiti* descrivono le due *superficie limiti*, mentre il *punto medio* genera la *superficie media* S. Evidentemente per un'osservazione fatta al paragrafo precedente le rigate principali sono quelle che s'ottengono introducendo le variabili che uguagliate a costanti dànno gl'integrali di $\Phi_3 = 0$.

Per due direzioni qualsiasi θ e $\frac{\pi}{2} - \theta$ r ha lo stesso valore: dette *congiunte* le rigate relative a tali direzioni, si ha che due rigate congiunte hanno, come le medie, le rigate principali per bisettrici. È $\omega = \frac{\pi}{2} - 2\,\theta$ l'angolo di due rigate congiunte, e si hanno come caso limite le rigate principali o le medie secondo che è ω nullo od uguale ad un retto Ci sono due *sistemi doppi congiunti*, cioè formati di rigate congiunte, relativi allo stesso angolo ω, e si passa dall'uno all'altro mediante una rotazione di un angolo retto. Le linee di stringimento di un sistema doppio congiunto qualsiasi (u_1, v_1) stanno sopra una stessa superficie S_1. Se S_2 è la superficie relativa al sistema doppio congiunto (u_2, v_2) ortogonale al precedente, si ha che queste due superficie sono in ogni istante equidistanti dalla media. I sistemi doppi di linee (u_1, v_1), (u_2, v_2) corrispondono per ortogonalità di elementi alle immagini sferiche delle relative rigate congiunte. Perciò se è dato sopra una superficie un sistema doppio di linee (u, v) che corrisponde per ortogonalità di elementi ad un sistema doppio sulla sfera, si ha, conducendo per la data superficie le rette parallele alle normali nei punti corrispondenti della sfera, una congruenza in cui il sistema doppio (u, v) è congiunto. Si avranno le rigate medie solo se il sistema doppio sulla sfera era ortogonale. Per ulteriori sviluppi vedere il seguito di una mia nota cominciata ad apparire nel *Giornale di Matematiche* di Battaglini.

Nel caso escluso della proporzionalità delle due forme è $f + f' = 0$, ossia $r = 0$. Tutti i punti centrali coincidono nel punto medio e tutte le rigate sono medie. Simili congruenze segnalate da Ribaucour diconsi *isotrope.* Si ha subito la proprietà caratteristica: *La superficie media di una congruenza isotropa corrisponde per ortogonalità di elementi all'immagine sferica della congruenza.*

Si hanno rigate sviluppabili quando è $d\,p = 0$, ossia quando è:

$$\frac{d\,u^2}{d\,v^2} = \frac{f}{f'} \cdot \frac{G}{E}.$$

Essendo positivo il rapporto $\frac{G}{E}$, si avranno due sviluppabili reali od immaginarie secondo che f ed f' sono dello stesso segno o di segno contrario. Intanto f ed f' sono ugualmente proporzionali ai coseni degli angoli che le linee u e v su S formano con le linee v ed u dell'immagine, perciò f ed f' saranno dello stesso segno se tali angoli sono entrambi superiori od inferiori ad un retto, di segno opposto nel caso contrario. In altri termini *le superficie sviluppabili saranno immaginarie o reali secondo che le rigate medie hanno o no lo stesso verso.*

In generale è sulla sfera:

$$\frac{d\,u^2}{d\,v^2} = \frac{G}{E}\,\frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta},$$

perciò:

$$\frac{f}{f'} = \cot^2\theta, \qquad \operatorname{sen} 2\,\theta = \frac{2\sqrt{f f'}}{f + f'},$$

e le due rigate sviluppabili corrispondono al doppio segno di θ. I relativi punti centrali, *fuochi*, simmetrici rispetto al punto medio, e sempre nel segmento dei punti limiti, distano da questo di $\delta = -\frac{\sqrt{f f'}}{f + f'}$. L'angolo $2\,\theta = \gamma$ dei rispettivi piani focali è dato da $\operatorname{sen}\gamma = \frac{\delta}{l}$.

Ciascuna rigata sviluppabile è ortogonale alla congiunta dell'altra. La superficie generata dei due fuochi F_1 ed F_2 è detta *superficie focale;* consta quindi di due falde: S_1 ed S_2. Considerando una falda S_1 abbiamo che una famiglia di rigate sviluppabili u_1 inviluppa un sistema di linee u_1 *(caustiche)* osculate dai relativi *piani focali.* Su essa le linee v_1 sono le linee di stringimento delle rigate congiunte alle sviluppabili u_1. Ora l'elemento $d\,v_1$ sull'immagine dovendo essere ortogonale al corrispondente dv_1 su S_1, ed al raggio passato per F_1, che è tangente ad S_1 sarà necessariamente perpendicolare al piano tangente ad S_1. Onde le rigate v_1 tagliano ortogonalmente la falda S_1 della superficie focale, la quale ammetterà come piano tangente l'altro piano focale. Adunque l'inclinazione della normale ad S_1 sulla normale principale alla caustica uguaglia la mutua inclinazione dei piani congiunti; mentre l'inclinazione dei piani focali è uguale a quella della normale principale sul piano tangente.

Solo per le congruenze normali è $f = f'$: onde le superficie focali sono reali e coincidono con le superficie limiti, i piani focali sono ortogonali, e le caustiche sono geodetiche della superficie focale.

Sopra la teoria delle figure polari delle curve piane del 4.° ordine (*).

(Di Gaetano Scorza, *a Pisa.)*

Partendo dai concetti stabiliti dal Reye nelle sue classiche Memorie inserite nei vol. 72, 78, 79 e 82 del *Giornale di Crelle*, i sigg. De-Paolis, Schlesinger e London (**) hanno sviluppata da vari punti di vista, con varia estensione, la teoria delle figure polari delle curve piane del 3.° ordine.

Io mi son proposto di risolvere il problema analogo per le curve piane del 4.° ordine, e in questo lavoro pubblico appunto i risultati più notevoli a cui son pervenuto. Esso è diviso in due parti: nella prima riprendo la teoria generale delle figure polari per la chiarezza dell'esposizione e anche per apportarvi alcune aggiunte che mi paiono degne di nota (in particolare vedi i n.i 6, 8, 10, 11, 16); nella seconda considero in modo speciale le figure polari delle quartiche piane.

I.

Generalità sulle figure polari delle curve piane.

§ 1. — Definizioni e proposizioni preliminari.

1. Due curve, l'una di ordine n, C^n, rappresentata simbolicamente dall'equazione:

$$a_x^n = 0,$$

(*) Tesi presentata per la laurea alla R. Università di Pisa nel luglio 1898.

(**) De-Paolis, *Alcune applicazioni della teoria generale delle curve polari* (Memorie della R. Acc. dei Lincei, 1886); Schlesinger, *Ueber coniugirte Curven u. s. w.* (Math. Ann., Bd. 30); e *Ueber die Werwerthung der ϑ-Functionen u. s. w.* (Math. Ann., Bd. 31); London, *Ueber die Polarfiguren der ebenen Curven 3 Ordnung* (Math. Ann., Bd. 36). A proposito di questa Memoria del London mi permetto di richiamare all'attenzione del lettore una mia breve Nota inserita nel vol. 51.° dei Math. Ann.

l'altra di classe n, K^n, rappresentata simbolicamente da (*):

$$u_a^n = 0,$$

si diconò *conjugate* od *armoniche* quando è nullo l'invariante simultaneo bilineare a_a^n, cioè quando si ha:

$$a_a^n = 0. \tag{1}$$

Tale denominazione è suscettibile di una semplice interpretazione geometrica, quando la curva C^n si riduce a una retta contata n volte, o la curva K^n si riduce a un punto contato n volte: nel primo caso la (1) esprime che la curva K^n tocca quella retta, nel secondo, che la curva C^n passa per quel punto.

Quando poi la curva K^n si spezza in n punti, anche non tutti distinti (o la curva C^n in n rette) e la condizione (1) è sempre soddisfatta, si dice che il *gruppo di n punti* o *n-gono* (n rette) in cui si spezza la K^n (la C^n) è *coniugato rispetto alla C^n (K^n)*.

Stante la linearità di a_a^n nei coefficienti di a_x^n ed u_a^n seguono immediatamente i noti teoremi:

I. *Se una curva è coniugata ad altre $r+1$ linearmente indipendenti, è coniugata a tutte le curve del sistema lineare ∞^r da esse determinato.*

II. *Ad ogni sistema lineare ∞^r di curve d'ordine n (o di classe n) è coordinato un sistema lineare $\infty^{N(n)-r-1}$ di curve di classe n (o d'ordine n) tale che una curva qualunque del primo sistema e una qualunque del secondo sono fra loro coniugate, avendo posto secondo il solito:*

$$N(n) = \frac{n(n+3)}{2}.$$

Due tali sistemi si dicono associati.

2. Consideriamo ora una curva fondamentale d'ordine n, C^n, e una curva di classe m, K^m, essendo $m < n$. Le curve di classe $n-m$ che, insieme a K^m, dànno una curva di classe n coniugata a C^n, costituiscono, in generale, un sistema lineare $\infty^{N(n-m)-1}$; la curva d'ordine $n-m$, C^{n-m}, associata a questo sistema dicesi la *polare* di K^m rispetto a C^n.

Supposto che K^m si spezzi in uno o più punti, contati una o più volte ciascuno, si arriva all'ordinaria nozione di polari successive pure e miste di punti rispetto a una curva fondamentale.

(*) D'ora innanzi indicheremo sempre con C^n una curva d'ordine n e con K^n una curva di classe n.

Se le equazioni di C^n e K^m sono rispettivamente:

$$a_x^n = 0, \quad u_\alpha^m = 0,$$

l'equazione di C^{n-m} è:

$$a_\alpha^m \, a_x^{n-m} = 0,$$

e su di essa si verificano subito i teoremi:

I. *La polare di K^m rispetto a C^n è il luogo dei punti che contati $n-m$ volte dànno insieme a K^m una curva di classe n coniugata a C^n.*

II. *Se due curve di classe m ed $n-m$, K^m e K^{n-m}, prese insieme dànno una curva di classe n coniugata a C^n, ciascuna è coniugata alla polare dell'altra rispetto a C^n; quindi la polare C^{n-m} di K^m è il luogo dei punti le cui polari d'ordine m sono coniugate a K^m.*

III. *Le polari di tutte le curve di un sistema lineare ∞^r prese rispetto a una medesima curva fondamentale costituiscono, in generale, un sistema lineare ∞^r proiettivo al primo.*

IV. *Le polari di una stessa curva rispetto a tutte quelle di un sistema lineare ∞^r costituiscono, in generale, un sistema lineare ∞^r ad esso proiettivo.*

3. La curva K^m si dice *apolare* rispetto a C^n quando la sua polare rispetto a C^n è indeterminata.

Per questo, indicate sempre con:

$$a_x^n = 0, \quad u_\alpha^m = 0,$$

le equazioni di C^n e K^m ordinatamente, occorre che sia identicamente nulla l'espressione:

$$a_\alpha^m \, a_x^{n-m},$$

ossia i coefficienti dell'equazione di K^m debbono soddisfare a $N(n-m)+1$ equazioni lineari omogenee, e quindi, se la C^n è una curva generale del suo ordine, deve essere:

$$N(m)+1 > N(n-m)+1,$$

cioè:

$$m > \left[\frac{n}{2}\right],$$

$\left[\frac{n}{2}\right]$ indicando il massimo intero contenuto in $\frac{n}{2}$. Ne ricaviamo il teorema:

Per una curva generale d'ordine n o non vi è alcuna curva di classe m apolare o ve ne sono infinite: precisamente (*), *supposto che sia*

(*) Si osservi la maggior semplicità di questo enunciato in confronto a quello contenuto nella cit. Memoria del De-Paolis.

$m > \left[\frac{n}{2}\right]$ *le curve di classe m apolari costituiscono un sistema lineare* $\infty^{N(m)-N(n-m)-1}$.

Siano date r curve qualunque di classe m, linearmente indipendenti, e vogliasi che esse siano apolari per una certa curva C^n d'ordine n, supposto naturalmente che sia $m > \left[\frac{n}{2}\right]$; si avranno fra i coefficienti della C^n $r\,N(n-m)+r$ equazioni lineari omogenee, e quindi r non può superare $\left[\frac{N(n)}{N(n-m)+1}\right]$.

Allora, poichè (supposto naturalmente $n \geqq 3$):

$$\left[\frac{N(n)}{N(n-m)+1}\right] < N(m) - N(n-m),$$

tranne il caso di $n = 3$ ed $m = 2$, si ha il teorema:

Eccettuato il tessuto delle curve di 2.ª classe apolari a una cubica, ogni altro sistema lineare di curve K^m apolari a una C^n è da considerarsi come un sistema particolare, potendosi assegnare arbitrariamente solo:

$$\left[\frac{N(n)}{N(n-m)+1}\right],$$

sue curve indipendenti.

Si osservi in particolare che del sistema lineare delle $K^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$ apolari di una C^n possono assegnarsene arbitrariamente 3 o 4 soltanto, secondo che n è dispari o pari, mentre se $n = 2k+1$ esse costituiscono un sistema lineare ∞^{k+1}, e se $n = 2k$ esse costituiscono un sistema lineare $\infty^{2(k+1)}$.

4. Supponiamo n pari e poniamo $n = 2k$. Allora una C^n generale non ammette alcuna K^k apolare: esiste una curva apolare di classe k e in generale una soltanto quando si annulla un determinante d'ordine $N(k)+1$ costruito coi coefficienti dell'equazione della C^n e che in ogni caso è un suo invariante.

Che se poi, oltre ad annullarsi il determinante ora detto d'ordine $N(k)+1$, si annullano anche dei suoi minori, per modo che la sua caratteristica r sia minore di $N(k)$, allora è chiaro che esisterà un sistema lineare $\infty^{N(k)-r}$ di K^k apolari.

Esclusi questi casi particolari, *ogni* K^k ha rispetto ad una C^{2k} generale una determinata polare C^k: onde tra i due sistemi lineari $\infty^{N(k)}$ delle K^k e delle C^k del piano viene stabilita una corrispondenza biunivoca, che può studiarsi facilmente considerandola come una polarità rispetto alla quadrica dello spazio ad $N(k)$ dimensioni (*).

Noi, per ora, non vogliamo fermarci particolarmente su ciò: solo vogliamo far notare un contravariante notevole che nasce da queste considerazioni.

Rispetto a una C^{2k} generale ogni retta a contata k volte è la polare di una determinata K^k; col CAPORALI (**) noi diremo questa curva l'*antipolare* della retta a: ed è chiaro che se di due rette, a e b, a tocca l'antipolare di b, anche b tocca l'antipolare di a. Quindi, se in un fascio due raggi si dicono corrispondenti quando l'uno tocca l'antipolare dell'altro, si ha nel fascio una corrispondenza simmetrica (k, k) con $2k$ coincidenze. Ossia:

Data una C^{2k} generale le rette del piano che toccano le loro antipolari inviluppano una curva di classe $2k$.

Questo contravariante, seguendo il CLEBSCH e il CAPORALI (***) che lo hanno considerato pel caso $k=2$, noi lo diremo sempre il *contravariante* Ω di C^{2k}.

Il contravariante Ω è toccato da una sua tangente qualunque nel punto ove questa tocca la sua antipolare;

onde in particolare per $k=2$:

Il contravariante Ω di una quartica tocca nelle cuspidi delle 24 cubiche polari cuspidate della quartica le relative tangenti cuspidali.

Notisi che se la C^{2k} considerata ammette una K^k apolare, ossia si annulla il suddetto determinante di ordine $N(k)+1$ che nel caso della quartica è conosciuto sotto il nome di *invariante sestico*, il contravariante Ω si spezza nella K^k apolare contata due volte.

5. Raccogliamo qui alcuni teoremi che seguono immediatamente dalla definizione stessa di curva apolare, e che ci saranno molto utili nel seguito.

I. *Un punto contato m volte è apolare rispetto ad una C^n se è multiplo secondo $n-m+1$ per la curva medesima.*

(*) Cfr. SEGRE, *Alcune idee di* E. CAPORALI *intorno alle quartiche piane* (Ann. di Mat., Serie II, t. XX); CIANI, *Sopra la corrispondenza polare*, etc. (Rendic. della R. Acc. dei Lincei, 1895).

(**) CAPORALI, *Memorie di Geometria*, pag. 354,

(***) CLEBSCH, *Ueber Curven vierter Ordnung* (Crelle, Bd. 59); CAPORALI, *l. cit.*

Non tralascieremo poi di ricordare che il REYE nella sua Memoria, *Ueber die reciproke Werwandtschaft von F^2 Systemen und Φ^2 Geweben u. s. w.*, Bd. 82, fa considerazioni analoghe a queste per le superficie del 4.° ordine.

II. *Se una K^m contiene come parte una curva apolare ad una C^n $(m < n)$, essa è apolare a C^n.*

III. *Se $r+1$ curve linearmente indipendenti della stessa classe sono apolari rispetto ad un'altra, ciò avviene per tutte le curve del sistema lineare ∞^r da esse determinato: e se una K^m è apolare rispetto ad $r+1$ curve del medesimo ordine linearmente indipendenti è apolare rispetto a tutte le curve del sistema lineare ∞^r da esse determinato.*

§ 2. — Gruppi di punti apolari; $(n+1)$-goni coniugati rispetto a una C^n.

6. Particolarmente interessanti rispetto ad una C^n fondamentale sono i gruppi di n punti, o n-goni, coniugati e i gruppi apolari di $n-1$ punti. Quelli costituiscono una totalità ∞^{2n-4}, questi una totalità ∞^{2n-5}; e va sottinteso, naturalmente, che più punti di un gruppo possono coincidere in uno solo contato più volte.

In un gruppo di n punti coniugati ognuno trovasi sulla retta polare mista degli altri $n-1$, e se n punti coniugati sono in linea retta, è chiaro che essi costituiscono un gruppo coniugato a quello secondo cui la retta, che li contiene, taglia la C^n considerata, nel senso ordinario di gruppi binari coniugati. Ne segue che se un gruppo di $n-1$ punti in linea retta ha per polare mista rispetto a C^n la retta su cui giace (in particolare, è apolare a C^n), esso è apolare rispetto al gruppo secondo cui la retta stessa taglia C^n e quindi si ha il teorema:

Sopra ogni retta del piano vi è una involuzione d'ordine $n-1$ e di specie $n-3$, I^{n-3}_{n-1}, costituita dai gruppi di $n-1$ punti, che hanno per polare mista rispetto a C^n la retta medesima (o, in particolare, sono apolari).

Ora basta che un gruppo di questa I^{n-3}_{n-1} costituisca con un punto qualunque fuori della retta un n-gono coniugato a C^n, perchè esso sia apolare a C^n, dunque:

Sopra ogni retta del piano vi è una I^{n-4}_{n-1} costituita dai gruppi di $n-1$ punti apolari a C^n.

Vediamo più davvicino le conseguenze di questi teoremi per $n=4$, 5, 6.

Innanzi tutto, data una quartica C^4, sopra ogni retta del piano si ha una involuzione cubica di 1.ª specie costituita dalle terne di punti che hanno per retta polare mista la retta medesima; e questa involuzione contiene *la* terna apolare a C^4 situata sulla retta (*). Poi, siccome una binaria biquadratica ammette una forma quadratica apolare solo quando è armonica, così segue che la retta r, la quale contiene una coppia di punti avente per conica polare mista una conica spezzata nella retta r medesima e in una retta residua, tocca costantemente l'inviluppo armonico della quartica C^4. Ed è chiaro che sopra ogni tangente dell'inviluppo armonico la coppia di punti in discorso costituisce (contata due volte) l'hessiana della quaterna di punti secondo cui essa taglia C^4, mentre l'involuzione cubica suddetta è costituita da questi due punti fissi e da un punto variabile sulla retta.

Così anche l'inviluppo armonico, una delle più note curve invariantive della quartica, proviene dalla corrispondenza polare fra coniche-inviluppo e coniche-luogo che la quartica medesima stabilisce.

Data invece una quintica C^5, sopra ogni retta r vi è una involuzione di prima specie e del quarto ordine costituita di quaterne apolari alla quintica. Anzi, poichè ogni quintica binaria ammette una cubica binaria apolare, segue che sopra ogni retta r giace una terna di punti la cui conica polare mista contiene la retta r. Allora ogni coppia di questa terna ha per cubica polare mista una cubica con un flesso nel terzo punto della terna medesima, la tangente di flesso essendo r, e le coppie di rette, incrociate su r e costituenti le coniche polari miste delle terne tratte dalle ∞^1 quaterne apolari situate su r, inviluppano una curva della 3.ª classe tangente ad r.

Se la retta r ruota intorno a un punto P, la terna suddetta, che essa contiene, descrive una curva del 9.° ordine con un punto sestuplo in P, e le sei tangenti in questo punto alla curva segano armonicamente la quartica polare di P; ecc., ecc.

Così data una sestica C^6 qualunque, poichè una sestica binaria ammette una cubica apolare solo quando si annulla il suo cataletticante, che è del 4.° grado nei suoi coefficienti, la retta r, che contiene una terna di punti la cui cubica polare mista rispetto a C^6 si spezza nella retta r medesima e in una conica, inviluppa una curva della 12.ª classe; ecc., ecc.

7. Come è chiaro, un gruppo di $n-1$ punti costituito da un punto A contato $n-2$ volte e da un altro B contato una volta sola è apolare rispetto a una C^n, solo quando A e B sono due punti corrispondenti della Hessiana e della Steineriana di C^n: allora la retta AB è una tangente della Cayleyana e la suddetta I^{n-4}_{n-1} contiene un elemento $(n-2)$-plo. Viceversa, se per

(*) Questa terna è stata considerata la prima volta dal Caporali, l. cit., pag. 345.

una retta r la relativa I_{n-1}^{n-4} contiene un elemento $(n-2)$-plo la retta r tocca la Cayleyana di C^n: quindi, se, in particolare, per una retta r l'involuzione dei gruppi apolari è invece una I_{n-1}^{n-3}, poichè questa possiede $2(n-2)$ punti $(n-2)$-pli, sarà r una tangente $2(n-2)$-pla per la Cayleyana.

Questa osservazione dà luogo per $n=4$ a un elegante teorema osservato per la prima volta dal Bertini (*).

Abbiasi una quartica generale C^4 e sia r una tangente doppia della sua Cayleyana: su di essa si hanno due terne apolari a C^4, quindi se ne hanno ∞^1 costituenti un'involuzione cubica. Ma una tale involuzione ha quattro elementi doppi, dunque la retta r è una tangente quadrupla della Cayleyana. Ora si sa dalla teoria generale (**) che la Cayleyana di una quartica ha 126 tangenti doppie, quindi esse si riducono a 21 tangenti quadruple.

Si dimostra poi che queste 21 rette sono le 21 rette che fanno parte delle cubiche polari dei 21 punti doppi della Steineriana.

8. I gruppi di $n-1$ punti apolari a una C^n e situati sopra una retta costituiscono una I_{n-1}^{n-4}, dunque, presi $n-6$ punti qualunque della retta essi si trovano in sei gruppi *neutri* (***) dell'involuzione, ossia si possono assegnare in sei modi differenti due altri punti che, insieme a quegli $n-6$, diano un gruppo di $n-4$ punti che non individua pienamente il gruppo della I_{n-1}^{n-4} a cui appartiene.

Ne segue che:

Presi sopra una retta $n-6$ punti qualunque, vi sono sempre sei coppie di punti tali che la quartica polare mista degli $n-4$ punti dati da quegli $n-6$ e da una di queste coppie rispetto a una curva fondamentale d'ordine n, abbia nella retta stessa una tangente quadrupla della sua Cayleyana.

Particolarmente notevole è l'enunciato che se ne ricava facendo $n=6$:

Data una curva qualunque del 6.º ordine, sopra ogni retta vi sono sei coppie di punti tali che la retta medesima sia una tangente quadrupla della Cayleyana della loro quartica polare mista.

9. A una curva C^n, se n è pari, è strettamente legato l'inviluppo delle rette che tagliano C^n secondo un gruppo di punti coniugato alla C^n stessa.

(*) Bertini, *Le tangenti multiple della Cayleyana*, etc. (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, Vol. XXXII).

(**) Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie*, Bd. I, pag. 368.

(***) Weyr, *Beiträge zur Curvenlehre*, pag. 42.

Per un'osservazione precedente tale inviluppo, se n è dispari, è indeterminato, perchè ogni binaria d'ordine dispari è coniugata a sè stessa; ma, se n è pari, esso è della n^a classe e la sua equazione è data per un noto *principio di trasporto (Uebertragungsprincip)* da:

$$(a\, b\, u)^n = 0,$$

se:

$$a_x^n = b_x^n = \ldots = 0,$$

è l'equazione di C^n.

10. Per una curva d'ordine n si sogliono considerare anche quei gruppi di $n+1$ punti tali, che n qualunque di essi costituiscono un n-gono coniugato alla curva. Tali gruppi di punti, poichè non può sorgere alcun equivoco, continueremo a chiamarli *gruppi coniugati*, o $(n+1)$-*goni coniugati* alla curva.

Per un gruppo di $n+1$ punti l'essere coniugato a una data C^n equivale a $n+1$ condizioni lineari, dunque:

Ogni C^n possiede ∞^{n+1} $(n+1)$-goni coniugati.

La costruzione degli $(n+1)$-goni coniugati è immediata nel caso di $n=1$ o $n=3$ (*). Qui diamo la costruzione dei pentagoni coniugati di una quartica.

Consideriamo dapprima una cubica C^3 e una quartica C^4 e proponiamoci di trovare i quadrangoli coniugati contemporaneamente alla C^3 e alla C^4.

Presi due punti qualunque A e B, vi è sulla polare mista di A e B rispetto a C^3 una determinata coppia C, D costituente con A e B un quadrangolo $A\,B\,C\,D$ coniugato a C^3: precisamente, $C\,D$ è la coppia di punti ove la polare mista di A e B taglia la conica che ad essa corrisponde nella trasformazione quadratica involutoria di Steiner individuata dalle coniche polari di A e B rispetto a C^3.

Ora teniamo fisso il punto A e facciamo scorrere il punto B sopra una retta r: la retta $C\,D$ ruoterà intorno al polo R di r rispetto alla conica polare di A, e, come è noto (**) e si vede subito del resto, i punti C e D descriveranno una curva del 4.° ordine Φ^4 con un punto doppio in R.

Tra questi ∞^1 quadrangoli coniugati per la C^3 cerchiamo quelli che sono coniugati anche per la C^4, ossia cerchiamo per quante posizioni del punto B sulla retta r avviene che, costruito il quadrangolo $A\,B\,C\,D$ coniugato a C^3, questo risulti anche coniugato a C^4.

(*) Per $n=3$, vedi: Caporali, l. cit., pag. 51.
(**) Caporali, l. cit., pag. 50.

Per questo ci occorre trovare dapprima la classe dell'inviluppo generato dalla retta polare mista della terna ACD rispetto a C^4 quando la coppia CD descrive la quartica Φ^4, ossia, giacchè la polare mista di ACD passa per un punto O fissato a piacere quando C e D sono coniugati rispetto alla conica C^2 polare mista di A e O rispetto a C^4, bisogna trovare fra le ∞^1 coppie CD della quartica Φ^4 quelle coniugate rispetto a tale C^2.

Una trasversale qualunque condotta per R taglia la quartica Φ^4 in una coppia CD: allora se C' e D' sono i punti di questa trasversale coniugati ordinatamente a C e D rispetto alla detta C^2, il luogo dei punti C' e D' al ruotare della trasversale intorno ad R è evidentemente una curva del 6.° ordine con un punto quadruplo in R. Dei 16 punti ove questa curva del 6.° ordine taglia la quartica Φ^4 fuori di R, otto sono i punti ove Φ^4 è tagliata dalla conica polare mista di A e O, e altri otto si distribuiscono in quattro coppie di punti allineati con R e che dànno le coppie richieste (*).

(*) In generale:

Data una conica e una curva d'ordine n, vi sono $n(n-r-1)$ *coppie di punti (distinti) della curva d'ordine n allineati con un suo punto r-plo e che siano coniugati rispetto alla conica.*

Facendo $n=3$ ed $r=1$ questo teorema esprime che presa una conica ed una cubica vi sono sulla cubica tre coppie di punti soltanto, in generale, che siano allineati con un punto della cubica medesima e siano coniugati rispetto alla conica. Che se ciò avviene per quattro coppie allora avviene per tutte: d'altra parte quattro coppie di punti sono sempre coniugate rispetto a un fascio di coniche, dunque:

Le ∞^1 *coppie di punti che si ottengono tagliando una cubica colle rette uscenti da un suo punto si possono sempre pensare come coppie di punti coniugati rispetto a un fascio di coniche. I punti-base di questo fascio sono i punti di contatto delle tangenti condotte da quel punto alla cubica.*

Con ciò si ottèngono ∞^1 trasformazioni quadratiche involutorie di Steiner che trasformano la cubica in sè stessa. (Cfr. Segre, *Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche* [Atti dell'Acc. di Torino, 1889].)

Similmente si dimostra che:

Vi è sempre una conica rispetto a cui siano coniugate le ∞^1 *coppie di punti tagliate su una quartica dotata di punto doppio dalle rette uscenti da questo punto. Essa è la conica che passa pei sei punti di contatto delle tangenti condotte alla quartica dal suo punto doppio e pei due punti allineati con quelli ove le tangenti alla quartica nel punto doppio tagliano ulteriormente la curva medesima. Inoltre le tangenti alla conica in questi due punti passano pel punto doppio.*

(Cfr. Bertini, *Una nuova proprietà delle curve di ordine n con un punto* $(n-2)$*-plo*, (R. Acc. dei Lincei, vol. 1.°, serie 3.ª, Transunti); Caporali, *Sulle tangenti condotte ad una curva algebrica piana da un suo punto multiplo*, l. cit.)

L'inviluppo suddetto è adunque della 4.ª classe.

Ne segue che se B è un punto qualunque di r e B' è il punto ove r taglia la polare mista della corrispondente terna $A\,C\,D$, fra i punti B e B' viene stabilita una corrispondenza (4, 1): ossia:

Una cubica ed una quartica hanno sempre ∞^3 quadrangoli coniugati a comune. Preso arbitrariamente un punto, le ∞^1 terne che insieme ad esso dànno quadrangoli di tale specie sono situate sopra una curva del 5.º ordine.

Ora se un pentagono $A\,B\,C\,D\,E$ è coniugato ad una quartica, il quadrangolo $B\,C\,D\,E$ per es. è coniugato tanto alla quartica quanto alla cubica polare di A rispetto alla quartica, e viceversa: dunque:

Per ogni quartica vi sono ∞^5 pentagoni coniugati. Presi arbitrariamente due vertici di un tal pentagono, gli altri tre descrivono una curva del 5.º ordine che passa per i due punti dati.

Quest'ultima asserzione può dimostrarsi osservando che se A e B sono i due punti dati e $B\,C\,D$ è il triangolo coniugato comune alla cubica polare di A e alla conica polare del medesimo punto con un vertice in B, il pentagono $A\,A\,B\,C\,D$ con due vertici coincidenti in A è coniugato a C^4.

11. Possiamo vedere facilmente quanti sono i pentagoni coniugati costituiti dai quattro vertici di un quadrangolo completo e da un suo punto diagonale.

Sia $A\,B\,C\,D\,X$ un tale pentagono, essendo X all'intersezione di $A\,B$ e $C\,D$; rispetto alla conica polare mista di C e D i tre punti A, B, X hanno per polare la medesima retta $A\,B\,X$, dunque la conica polare mista di C e D contiene la retta $A\,B$, C e D sono punti coniugati della G_r di Caporali (l. cit., pag. 344-45) corrispondente alla retta $r \equiv A\,B$, e la retta $C\,D$ appartiene all'inviluppo della 3.ª classe, costituito dalle congiungenti queste coppie di punti coniugati, che indicheremo con Γ_r.

Inoltre la polare mista della terna $A\,B\,X$ è la retta $C\,D$ passante per X. Ora, dato un punto A e una retta r per esso, si considerino le ∞^1 terne $A\,B\,X$ situate su r tali che la retta polare mista di ciascuna di esse passi per il relativo punto X: poichè vi è sopra r una terna $A\,B\,X$ tale che la sua retta polare mista è la retta r medesima, l'inviluppo di queste ∞^1 rette, che indicheremo con Δ_r, avrà una tangente doppia in r e sarà della 3.ª classe; quindi la retta $C\,D$ tocca due curve della 3.ª classe.

Ne deduciamo che, dato del pentagono $A\,B\,C\,D\,X$ il vertice A e il lato $r \equiv A\,B$, il punto B e quindi il pentagono può determinarsi in nove modi differenti. Onde i pentagoni della specie richiesta sono ∞^3.

Si potrebbero determinare subito gli ordini dei luoghi descritti dai punti B e X al variare della r intorno al punto A; ma su ciò crediamo inutile intrattenerci più oltre. Solo osserveremo che quando la retta r ruotando intorno ad A prende la posizione di una delle tangenti alla polocayleyana (*) di A, la terna $A\,B\,X$ che ha per retta polare mista la retta r medesima è addirittura apolare alla quartica; quindi l'inviluppo Δ_r si spezza in tre fasci di raggi coi centri nei punti B, X e nel polo della retta r rispetto alla conica polare di A. Ossia si ha il teorema:

Preso sopra una retta r uno dei punti A della terna apolare situata sopra r, e le coppie di punti B, X tali che la retta polare mista di A, B, X passi per X, si trova che queste rette passano per un punto fisso — pel polo della retta r rispetto alla conica polare di A.

In particolare questo teorema si verifica per tutti i punti delle 21 tangenti quadruple della Cayleyana della quartica.

§ 3 — Polilateri polari di una curva piana d'ordine n.

12. La nozione di curve coniugate conduce alla soluzione più semplice e spontanea dei problemi di questa natura:

Data una forma ternaria di ordine qualunque n esprimerla linearmente per le potenze n^e di un certo numero di forme lineari.

Definito per *p-latero polare* di una C^n un sistema di p rette ($p \leq N(n)$) tali, che l'equazione della C^n possa ottenersi come una combinazione lineare omogenea delle potenze n^e delle forme lineari che, uguagliate a zero rappresentano le equazioni delle p rette, questo problema coincide chiaramente coll'altro:

Data una C^n costruire tutti i suoi p-lateri polari.

Ora questa costruzione nei casi particolari è facilitata e fornita da alcuni teoremi semplici e generali che qui esporremo brevemente.

13. Se un p-latero $a_1 a_2 \dots a_p$ è polare per una C^n, è chiaro che ogni curva di classe n inscritta in esso è coniugata a C^n, essendo coniugata

(*) Col Caporali chiamiamo polohessiana e polocayleyana di un punto rispetto ad una quartica la Hessiana e la Cayleyana della sua cubica polare, ed, una volta per tutte, osserviamo che qui e in prosieguo si suppongono note al lettore tutte le osservazioni contenute nei *Frammenti* del Caporali e nella Memoria di Clebsch inserita nel 59.° vol. del *Giornale di Crelle*.

a tutte le curve d'ordine n costituite dalle p rette $a_1, a_2, \ldots a_p$ contate ciascuna n volte; e viceversa: dunque:

Condizione necessaria e sufficiente perchè un p-latero $a_1 a_2 \ldots a_p$ sia polare per una C^n è, che tutte le curve di classe n inscritte in esso siano coniugate a C^n.

Se le rette $a_1, a_2, \ldots a_p$ offrono tutte condizioni indipendenti alle curve di classe n che le toccano, questi costituiscono in tutto un sistema lineare $\infty^{N(n)-p}$, e quindi per dimostrare in tal caso che il p-latero $a_1 \ldots a_p$ è polare per una C^n, basta far vedere che $N(n) - p + 1$ curve di classe n, inscritte in esso e linearmente indipendenti, sono coniugate a C^n. Allora fra le potenze n^e delle p forme lineari che, uguagliate a zero, rappresentano le equazioni delle p rette, non passa alcuna relazione lineare omogenea a coefficienti costanti; e viceversa, se ciò avviene, le rette $a_1, a_2, \ldots a_p$ offrono tutte condizioni indipendenti alle curve di classe n che le toccano.

Si vede da ciò quanto sia importante studiare quei particolari sistemi di rette pei quali avviene che fra le potenze n^e delle forme lineari che, uguagliate a zero, rappresentano le equazioni delle rette passi una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti. Tale studio è stato fatto dal Rosanes (*) che ha dato su di essi i teoremi più importanti, e noi non staremo a ripeterli qui; solo, in prosieguo, esponendo la teoria dei polilateri polari delle quartiche terremo conto volta per volta di queste osservazioni per ottenere tutto il necessario rigore.

Dalle cose dette precedentemente risulta anche il teorema:

Se un p-latero è polare per una C^n ogni curva di classe m $(m < n)$ inscritta in esso è apolare a C^n;

che, in un certo senso, può invertirsi così:

Se un p-latero è costituito dalle tangenti comuni a due curve di classe m ed m' rispettivamente che non hanno alcuna tangente multipla a comune e sono apolari a una curva d'ordine n $\left(p = m\, m',\ p \leq \frac{n(n+3)}{2}\right)$, esso è polare per quest'ultima curva.

Infatti, se:

$$u_\alpha^m = 0, \quad u_\beta^{m'} = 0,$$

sono le equazioni di quelle due curve di classe m ed m', ed:

$$u_\gamma^m = 0,$$

(*) Rosanes, *Ueber ein Princip der Zuordnung algebraischer Formen* (Crelle, Bd. 76).

è una qualunque curva di classe n inscritta nel p-latero, poichè per ipotesi le due curve di classe m ed m' non hanno alcuna tangente multipla comune, si possono trovare sempre due forme $u_{\alpha'}^{n-m}$ ed $_{\beta'}^{n-m'}$ tali che si abbia identicamente (*):

$$u_\gamma^n = u_{\alpha'}^{n-m}\, u_\alpha^m + u_{\beta'}^{n-m'}\, u_\beta^{m'},$$

e quindi, se:

$$a_x^n = 0,$$

è l'equazione della curva data di ordine n, in virtù di:

$$a_\alpha^m\, a_{\alpha'}^{n-m} = a_\beta^{m'}\, a_{\beta'}^{n-m'} = 0,$$

si ha appunto:

$$a_\gamma^n = 0.$$

Ora per una curva d'ordine n esistono sempre delle curve apolari di classe $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$, dunque:

Per ogni curva d'ordine n esistono infiniti $\left\{\left[\frac{n}{2}\right]+1\right\}^2$*-lateri polari* (**).

14. Il q-latero formato da q rette qualunque di un p-latero si dirà *contenuto* nel p-latero, e il $(p-q)$-latero formato dalle rette residue si dirà *complementare* del q-latero.

Inoltre si dirà, che m vertici di un p-latero costituiscono una *m-pla di vertici* $\left(m \leq \left[\frac{p}{2}\right]\right)$ quando due qualunque di essi non si trovano sopra un medesimo lato del p-latero, e il $(p-2m)$-latero formato dai lati residui si dirà *complementare* di quella m-pla di vertici.

Allora riesce ben chiaro il teorema di cui in seguito si farà uso continuamente:

Quando un p-latero è polare per una C^n e si considera una qualunque curva di classe m K^m $(m < n)$ inscritta in un suo q-latero, il $(p-q)$-latero complementare è polare per la polare di K^m rispetto a C^n;

per modo che, per es., se un p-latero è polare per una C^n ogni suo $(p-1)$-latero è polare per le polari rispetto a C^n dei punti del lato complementare, ogni suo $(p-2)$-latero è polare per la polare del vertice complementare, ecc., ecc.

(*) Cfr. ad es. Bertini, *Rappresentazione di una forma ternaria, ecc.* (Rend. del R. Ist. Lombardo, Serie II, vol. XXIV, 1891).

(**) Naturalmente questi non sono tutti i polilateri polari di un tal numero di lati.

Un p-latero ed un q-latero siano ambedue polari per una medesima curva C^n, e supponiamo che, essendo $m < n$, abbiasi $p \leq N(m)$, $q \leq N(m)$; di più, supponiamo, che, tanto le p rette del p-latero, quanto quelle del q-latero rappresentino tutte condizioni indipendenti per le curve di classe m che le toccano. Allora nel p-latero sono inscritte $\infty^{N(m)-p}$ e nel q-latero $\infty^{N(m)-q}$ curve di classe m apolari o coniugate a C^n secondochè $m < n$ o $m = n$: questi due sistemi lineari sono contenuti in un sistema lineare $\infty^{N(m)-N(n-m)-1}$, dunque, se $p + q \leq N(m) + N(n-m) + 1$, essi hanno a comune un sistema lineare $\infty^{N(m)+N(n-m)+1-(p+q)}$: ossia:

Un p-latero ed un q-latero polari per una curva d'ordine n e i cui lati offrano tutte condizioni indipendenti alle curve di classe m che li toccano, sono circoscritti a un sistema lineare $\infty^{N(m)+N(n-m)+1-(p+q)}$ *di curve di classe m, se, essendo* $m \leq n$, $p \leq N(m)$, $q \leq N(m)$, *si ha anche:*

$$p + q \leq N(m) + N(n-m) + 1.$$

15. Sulla costruzione delle figure polari di una C^n, in generale, si conosce ben poco: non si conoscono che le costruzioni degli $N(n)$—, $[N(n) - 1]$—, $[N(n) - 2]$— lateri polari (*), le quali del resto sono immediate e offrono per la curva ben poco interesse.

Un teorema generale del Reye (**) dà per ogni curva una figura polare costituita da un numero minore di lati dimostrandosi che:

Per ogni curva d'ordine n è polare l' $\frac{n(n+1)}{2}$*-latero costituito dai lati di un suo* $(n+1)$*-gono coniugato,*

e figure polari di un numero ancora minore di lati fornisce un teorema che abbiamo precedentemente enunciato; ma tanto l'uno quanto l'altro hanno il difetto di non fornire il più generale polilatero polare del considerato numero di lati.

Quanto al teorema del Reye non mancheremo poi di far osservare che il numero dei lati dell' $\frac{n(n+1)}{2}$-latero polare, che esso contempla, può essere notevolmente ridotto.

Si considerino nel primo membro dell'equazione della curva, scritta come una somma di $\frac{n(n+1)}{2}$ potenze n^e, gli n termini che si riferiscono ai lati

(*) Cfr. De-Paolis, *l. cit.*

(**) Reye, *Tragheits-und höhere Momente eines Massensystemes in Bezug auf Ebenen,* (Crelle, Bd. 72).

uscenti da un vertice: la loro somma costituisce in sostanza una binaria d'ordine n, la quale, per teoremi notissimi, può esprimersi per $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ anzichè per n potenze n^e di fattori lineari, quindi, senz'altro, nel primo membro dell'equazione della curva possono eliminarsi $\left[\frac{n}{2}\right]$ o $\frac{n}{2}-1$ (secondochè n è dispari o pari) potenze n^e di fattori lineari. Così continuando si giustifica la nostra asserzione.

Un' altra quistione molto interessante sarebbe quella di determinare per una C^n generale del suo ordine i polilateri polari del minimo numero di lati: ma, mentre questa si risolve facilmente per i primi ordini, pare che offra per gli ordini superiori gravi difficoltà.

16. Terminiamo con un teorema che in casi particolari dà conseguenze notevoli.

Supponiamo n pari: allora ad una C^n è coordinato, come abbiamo visto, un inviluppo della n^a classe costituito dalle rette che tagliano C^n secondo un gruppo coniugato di n punti: e se:

$$a_x^n = b_x^n = \cdots = 0,$$

è l'equazione della C^n,

$$(a\,b\,u)^n = 0,$$

è l'equazione di quell'inviluppo.

Supponiamo che il p-latero $a_1 a_2 \ldots a_p$, i cui lati hanno per equazione:

$$a_{1,x} = 0, \quad a_{2,x} = 0, \ldots \quad a_{p,x} = 0,$$

sia polare per la C^n: sussisterà una identità della forma:

$$a_x^n = \sum_{i=1}^{i=p} k_i\, a_{i,x}^n,$$

le k_i essendo delle costanti, e quindi sarà per un principio adoperato la prima volta dal Lüroth e poi esplicitamente formulato dal Gordan (*):

$$(a\,b\,u)^n = \sum_{ij} k_i\, k_j\, (a_i\, a_j\, u)^n,$$

dove abbiamo indicato con $(a_i\, a_j\, u)$ il determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}.$$

(*) Cfr. Lüroth, *Einige Eigenschaften einer gewissen Gattung, u. s. w.* (Math. Ann., Bd. 1); Gordan, *Ueber das Pentaeder der Flächen 3. O.* (ibid., Bd. 5).

Ma:

$$(a_i\, a_j\, u) = 0\,,$$

è l'equazione del punto ove la retta a_i taglia a_j, dunque si ha il teorema:

Se un p-latero è polare per una C^n ($n = 2\,k$), il $\frac{p\,(p-1)}{2}$-gono costituito dai suoi vertici è polare per l'inviluppo delle rette che tagliano C^n secondo un gruppo coniugato:

pel quale però deve esser fatta una osservazione analoga a quella fatta precedentemente sopra un teorema del Reye.

II.

Sopra le figure polari della quartica piana.

§ 1. — Quartiche particolari.

17. Una quartica generale non ammette polilateri polari di un numero di lati inferiore a sei. Ma non crediamo affatto inutile ricordare rapidamente le proprietà principali delle quartiche che ammettono polilateri polari di un numero di lati inferiore a sei.

18. Una quartica dotata di unilatero o bilatero polare si spezza in una retta contata quattro volte o in una quaterna di rette costituenti gruppo armonico.

19. Una quartica dotata di trilatero polare, i cui lati non concorrano in un punto (altrimenti essa si spezzerebbe in quattro rette per quel punto), ha 12 punti di ondulazione (*) distribuiti in quattro quaterne armoniche sui lati del trilatero e si trasforma in sè stessa per 96 omografie (**). Tra queste, tre sono le omologie armoniche che hanno i centri nei vertici del trilatero e gli assi nei lati opposti, rispettivamente.

Il covariante S, luogo dei punti la cui cubica polare è equianarmonica, è indeterminato: il covariante T, luogo dei punti la cui cubica polare è ar-

(*) Masoni, *Sopra alcune curve del 4.º ordine dotate di punti di ondulazione* (Rendiconti della R. Acc. di Napoli, fasc. 2.º, 1882).

(**) W. Dyck, *Notiz über eine reguläre Riemann'sche Fläche, u. s. w.* (Math. Ann., Bd. 17).

monica, si riduce, come la Hessiana, ai tre lati del trilatero contato ciascuno due volte, e la Steineriana si riduce alle tre rette medesime contate ciascuna quattro volte.

Le cubiche polari dei punti di un lato del trilatero si spezzano in terne di rette uscenti dal vertice opposto e costituenti una involuzione cubica sinigetica, di cui la Hessiana è data dai due lati del trilatero passanti per quel vertice: e l'inviluppo armonico si spezza nei tre vertici del trilatero contato ciascuno due volte.

Invece l'inviluppo equianarmonico ha per triangolo polare quello costituito dai tre vertici del trilatero (n.° 16) e trovasi colla quartica in posizione perfettamente reciproca.

Infatti, le quattro tangenti dell'inviluppo equianarmonico che escono da un punto della quartica sono le quattro tangenti condotte dal punto alla propria cubica polare (*): ma in questo caso le cubiche polari sono tutte equianarmoniche, dunque esse costituiscono un gruppo equianarmonico e la nostra asserzione è giustificata.

Infine si osserverà che la quartica in discorso ammette un tessuto di curve di seconda classe apolari, inscritte tutte nel trilatero polare, che è la più generale quartica di tal natura, e che tutte le quartiche a trilatero polare sono proiettivamente identiche.

Quest'ultime osservazioni valgono del resto per tutte le curve a trilatero polare d'ordine $n > 3$.

20. Ben più importanti sono le quartiche dotate di quadrilatero polare. Esse sono state considerate spesso dai Geometri (**) ed è notissima la particolare quartica a quadrilatero polare che porta il nome del Caporali. Appunto perciò noi non ci fermeremo più oltre su di esse: solo osserveremo che la quartica di Caporali è tanto più notevole, in quanto è l'unico caso in cui si conoscono le proprietà dei 24 flessi.

21. Passiamo quindi a considerare le quartiche a pentalatero polare, o, come diremo, le *quartiche di* Clebsch (***).

Se una quartica C^4 ammette un pentalatero polare $a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5$, la K^2 inscritta in esso è apolare a C^4 e quindi deve annullarsi l'invariante sestico

(*) Caporali, *l. cit.*, pag. 357.

(**) Del Pezzo, *Sulla curva Hessiana* (Rend. della R. Acc. di Napoli, 1883); Caporali, *l. cit.*; Ciani, *La quartica di Caporali* (Rend. della R. Accad. di Napoli, 1896).

(***) Clebsch, *l. cit.*; Lüroth, *l. cit.*

di C^4. Poi, siccome ogni vertice del pentalatero ha per cubica polare una cubica dotata di trilatero polare — il trilatero complementare —, il pentalatero $a_1 \dots a_5$ sarà inscritto nel covariante S di C^4.

Viceversa, sia nullo l'invariante sestico di C^4: allora esisterà, in generale una sola K^2 apolare a C^4 e ogni sua tangente apparterrà a un pentalatero polare di C^4.

Sia, infatti, a_5 una tangente qualunque di tale K^2 e siano A_1, A_2, A_3, A_4 i punti ove essa taglia il covariante S: la polohessiana di A_1 sarà un trilatero circoscritto a K^2, poichè K^2 è apolare alla quartica, e quindi alla cubica polare di A_1, e, se a_2, a_3, a_4 sono i lati di questo trilatero, i vertici a_{23}, a_{34}, a_{42} (*) saranno ancora dei punti di S. Allora la polohessiana di a_{23} per es. sarà un trilatero con un vertice nel punto A_1 e circoscritto e K^2, ossia sarà costituita dalla retta a_4, dalla a_5 e dalla ulteriore tangente a_1 condotta dal punto A_1 alla conica K^2.

Ne segue che la retta a_4 taglia a_5 in un punto di S e quindi essa passa o per A_2, o per A_3, o per A_4.

Supponiamo che passi per A_4 e che, come analogamente si dimostrerebbe, a_2 e a_3 passino ordinatamente per A_2 e A_3: allora è subito visto, che il pentalatero $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ così costruito è inscritto nel covariante S, che ogni suo vertice ha per trilatero polohessiano il trilatero complementare e ogni sua coppia di vertici (nel senso dichiarato al n.° 14) ha per conica polare mista il lato complementare contato due volte.

Ora la K^2 inscritta nel pentalatero $a_1 \dots a_5$ insieme a tutte le curve di 2.ª classe del piano, e la coppia di vertici a_{12}, a_{34}, per es., insieme alle curve di 2.ª classe tangenti ad a_5, danno due sistemi lineari ∞^5 e ∞^1 rispettivamente di curve di 4.ª classe inscritte nel pentalatero e coniugate a C^4, e il sistema lineare di dimensione minima contenente questi due è un sistema lineare ∞^9, poichè essi hanno a comune la sola curva di 4.ª classe costituita dalla coppia a_{12}, a_{34} insieme alla detta K^2; dunque poichè le cinque rette $a_1, \dots a_5$ offrono condizioni tutte indipendenti alle curve di 4.ª classe, che le toccano, il pentalatero $a_1 \dots a_5$ è polare per la C^4 considerata.

Si ha perciò il teorema:

La condizione necessaria e sufficiente perchè una quartica ammetta pentalateri polari è espressa dall'annullarsi dell'invariante sestico. Supposta

(*) Adesso e nel seguito indicheremo sempre con a_{ij} il punto d'incontro di due rette indicate con a_i ed a_j.

questa condizione soddisfatta, la quartica (di Clebsch*) possiede una conica-inviluppo apolare ed* ∞^1 *pentalateri polari circoscritti a questa conica e inscritti nel covariante S.*

22. Mantenendo le ipotesi e le notazioni precedenti, consideriamo uno degli 8 punti ove la conica K^2 taglia il covariante S e ripetiamo la costruzione precedente prendendo per a_5 la tangente a K^2 in uno di questi punti: allora è subito visto, che i lati del trilatero polohessiano del punto di contatto di a_5 passano per i tre punti ove questa retta taglia ulteriormente il covariante S e toccano ivi il covariante medesimo. Inoltre la polohessiana di ogni vertice del trilatero consta di a_5 contata due volte e del lato opposto, dunque in questo caso non si può più parlare di pentalatero polare, ma le cubiche polari dei vertici del trilatero hanno tutte a_5 per tangente cuspidale, e quindi si ha il teorema (Lüroth):

Le 24 tangenti cuspidali delle 24 cubiche polari cuspidate di una quartica di Clebsch *coincidono tre a tre nelle otto rette* (*) *tangenti alla conica-inviluppo apolare alla quartica negli otto punti ove essa è tagliata dal covariante S, e i 24 poli, cioè le 24 cuspidi della Steineriana, dànno otto triangoli circoscritti alla conica-inviluppo apolare e al covariante S, e tali, che in ognuno di essi un lato tocca il covariante S nella cuspide della cubica polare del vertice opposto. Queste 24 cuspidi sono tre a tre su quelle otto tangenti; dunque la Hessiana e il covariante S si tagliano in 24 punti allineati tre a tre sulle dette otto tangenti.*

In particolare ne risulta, che il covariante S ha 24 tangenti comuni con la conica-inviluppo apolare e che quindi è della 12.ª classe: ossia possiamo enunciare il teorema:

Il covariante S di una quartica generale è privo di nodi e di cuspidi (**).

(*) Si osserverà che queste otto rette sono le rette doppie della involuzione del 5.° ordine costituita sulla conica-inviluppo apolare dalle quintuple di lati degli ∞^1 pentalateri polari. Ora per il teorema del Rosanes (l. cit.):

Tra le quarte potenze delle 10 forme lineari che, uguagliate a zero, rappresentano 10 tangenti di una conica-inviluppo passa una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti;

questa involuzione è affatto qualunque, quindi quelle otto tangenti sono in generale distinte al pari dei loro otto punti di contatto. Il teorema che, col Lüroth, enunciamo sui nodi e sulle cuspidi del covariante S farà comprendere al lettore la necessità di insistere su ciò.

(**) Ciani, *Sopra due curve invariantive,* etc. (Ann. di Mat., 1892).

23. Siano:

$$a_{i,x} = 0, \quad (i = 1 \ldots 5),$$

le equazioni dei cinque lati di un pentalatero polare di una quartica di Clebsch C^4: la sua equazione sarà della forma:

$$\sum_1^5 k_i \, a_{i,x}^4 = 0,$$

e quindi l'equazione del suo covariante S sarà:

$$\sum k_i \, k_j \, k_l \, k_m \, (i\,j\,l)\,(i\,j\,m)\,(i\,l\,m)\,(j\,l\,m)\; a_{i,x}\, a_{j,x}\, a_{l,x}\, a_{m,x} = 0,$$

dove la sommatoria si intende estesa a tutte le combinazioni differenti $(i\,j\,l\,m)$ che possono formarsi coi cinque indici $1, 2 \ldots 5$, e dove $(i\,j\,l)$ sta a significare il determinante costruito coi coefficienti di $a_{i,x}$, $a_{j,x}$, $a_{l,x}$.

Da queste equazioni si deduce subito, come già abbiamo osservato, che il pentalatero polare è inscritto nel covariante S: ma quel che più importa è, che se ne può dedurre anche il teorema inverso, cioè:

Se una quartica è circoscritta ad un pentalatero completo essa può pensarsi come covariante S di un'altra quartica a invariante sestico nullo, e quindi è circoscritta ad ∞^1 pentalateri completi.

Infatti se manteniamo le notazioni precedenti pei lati del pentalatero si vede subito che in tal caso l'equazione della quartica data può scriversi:

$$\rho_5\,(1\,2\,3)\,(1\,2\,4)\,(1\,3\,4)\,(2\,3\,4)\, a_{1x}\, a_{2x}\, a_{3x}\, a_{4x} + \cdots +$$
$$+ \cdots + \rho_1\,(2\,3\,4)\,(2\,3\,5)\,(2\,4\,5)\,(3\,4\,5)\, a_{2x}\, a_{3x}\, a_{4x}\, a_{5x} = 0,$$

determinando convenientemente i numeri $\rho_1 \ldots \rho_5$: quindi essa è il covariante S della quartica di Clebsch (*):

$$\sum_1^5 \frac{1}{\rho_i}\, a_{i,x}^4 = 0.$$

24. Altre osservazioni potrebbero farsi a questo proposito, ma per ciò rimandiamo alla citata Nota del Lüroth: qui vogliamo osservare soltanto come la configurazione degli ∞^1 pentalateri polari di una quartica di Clebsch

(*) Cfr. a questo proposito la bella Nota del Lüroth, *Neuer Beweis des Satzes, dass nicht jeder Curve vierter Ordnung ein Fünfseit eingeschrieben werden kann.* Math. Ann., Bd. I.

si riconnetta strettamente a una configurazione che si incontra nella teoria delle figure polari delle cubiche (*).

Due cubiche in generale non hanno alcun pentalatero polare comune: ma se si annulla un certo loro invariante simultaneo, che il London indica con P nel § 2 della sua Memoria già citata, esse hanno ∞^1 pentalateri polari comuni circoscritti a una curva della 2.ª classe e inscritti in una curva del 4.° ordine.

Orbene, per quel che precede, questa quartica è covariante S di una quartica di Clebsch C^4, quindi quegli ∞^1 pentalateri sono polari non solo per le due cubiche considerate, ma anche per tutte la rete delle cubiche polari di C^4.

Dico che essi sono polari per le cubiche di questa rete soltanto.

Infatti siano $a_1 \ldots a_5$, $a'_1 \ldots a'_5$ due dei pentalateri in discorso: indicate con:

$$a_{i,x} = 0, \quad a'_{i,x} = 0, \quad (i = 1 \ldots 5),$$

le equazioni dei loro lati, si avrà, per quel che si è detto, una identità della forma:

$$\sum_1^5 k_i \, a_{i,x}^4 \equiv \sum_1^5 k'_i \, a'^4_{i,x}$$

(le k, k' essendo delle costanti), da cui polarizzando si deduce l'altra:

$$\sum k_i \, a_{i,y} \, a_{i,x}^3 = \sum k'_i \, a'_{i,y} \, a'^3_{i,x}, \tag{1}$$

e se i pentalateri sono polari per una certa cubica sussisterà ancora una identità del tipo:

$$\sum l_i \, a_{i,x}^3 = \sum l'_i \, a'^3_{i,x}, \tag{2}$$

le l, l' essendo delle costanti.

Ora possiamo sempre determinare y_1, y_2, y_3 in modo che risulti:

$$k_1 \, a_{1,y} = l_1, \quad k_2 \, a_{2,y} = l_2, \quad k_3 \, a_{3,y} = l_3,$$

perchè nè alcuna delle k_1, k_2, k_3 può esser nulla (altrimenti la C^4 sarebbe a quadrilatero polare e il suo cavariante S si spezzerebbe nei quattro lati del quadrilatero), nè le tre rette a_1, a_2, a_3 concorrono in un punto (essendo tan-

(*) London, *l. cit.*

genti a una conica), quindi sottraendo (2) da (1) risulterà identicamente:

$$(k_4\, a_{4,y} - l_4)\, a^3_{4,x} + (k_5\, a_{5,y} - l_5)\, a^3_{5,x} - \sum_1^5 (k'_i\, a'_{iy} - l'_i)\, a'^3_{i,x} = 0.$$

Ora ciò non può sussistere a meno che non sia (*):

$$k_4\, a_{4,y} = l_4, \quad k_5\, a_{5,y} = l_5, \quad k'_i\, a'_{i,y} = l'_i, \quad (i = 1 \ldots 5),$$

dunque rimane confermata la nostra asserzione: e in particolare si deduce che le due cubiche date appartengono alla rete delle cubiche polari di C^4.

25. Un altro teorema notevole si deduce applicando il teorema generale dimostrato al n.° 15. Da esso risulta che il decagono costituito dai vertici di un pentalatero polare di una quartica di Clebsch è polare per il suo inviluppo equianarmonico: dunque, poichè tale decagono è inscritto nel covariante S della quartica:

Gli ∞^1 pentalateri polari di una quartica di Clebsch *sono coniugati al suo inviluppo equianarmonico, e questo è coniugato al covariante S.*

Ne segue che l'invariante sestico di una C^4 che rivela col suo annullarsi l'esistenza di una conica-inviluppo apolare coincide coll'invariante simultaneo bilineare del covariante S e dell'inviluppo equianarmonico. La sua espressione simbolica è dunque (**):

$$(a\,b\,c)\,(a\,b\,d)\,(a\,c\,d)\,(b\,c\,d)\,(a\,e\,f)\,(b\,e\,f)\,(c\,e\,f)\,(d\,e\,f),$$

se $a_x^4 = b_x^4 = \cdots = 0$ è l'equazione della quartica, e può dirsi che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una quartica ammetta pentalatero polare è che il suo covariante S e il suo inviluppo equianarmonico siano coniugati.

§ 2. — Gli esalateri polari della quartica piana generale.

26. Adesso consideriamo una quartica generale C^4 ed osserviamo che, se $a_1 \ldots a_6$ è un suo esalatero polare, la K^2 inscritta in un suo pentalatero qualunque è, rispetto a C^4, l'antipolare del lato complementare.

(*) Rosanes, l. cit.

(**) Un'altra espressione simbolica di tale invariante è data dal Clebsch nella sua Memoria inserita nel 59.° volume del *Giornale di Crelle*, ma questa è manifestamente più semplice.

Cercando di invertire questa semplice osservazione si arriva subito alla costruzione degli esalateri polari di C^4. Sia a_1 una retta qualunque, che non tocchi però il contravariante Ω di C^4, e K_1^2 la sua antipolare: se a_2 è una tangente qualunque di K_1^2, la sua antipolare K_2^2 tocca a_1 e stacca da K_1^2 quattro tangenti a_3, a_4, a_5, a_6 che insieme ad a_1 e a_2 dànno un esalatero polare di C^4.

Infatti i due sistemi lineari ∞^4 di curve di 4.ª classe inscritte nell'esalatero $a_1 \dots a_6$, che si ottengono aggiungendo a K_1^2 e K_2^2 le ∞^4 coniche-inviluppo tangenti ad a_1 e a_2 rispettivamente, avendo una curva comune determinano un sistema lineare ∞^8 di curve di 4.ª classe inscritte nell'esalatero e coniugate a C^4. Nè, d'altra parte, può avvenire che, oltre questo sistema, siavi ancora qualche curva di 4.ª classe inscritta nell'esalatero perchè sei rette, a meno che non passino tutte per uno stesso punto, offrono tutte condizioni indipendenti alle curve di 4.ª classe che le toccano (*).

Siano allora $a_1 \dots a_6$ ed $a_1 a'_2 a'_3 a'_4 a'_5 a'_6$ due esalateri polari qualunque degli ∞^1 di cui fa parte la retta a_1: sussisterà una identità della forma:

$$\sum_1^6 k_i a_{i,x}^4 = l_1 a_{1,x}^4 + \sum_2^6 l_i a'^4_{i,x},$$

dove le k e le l sono costanti opportune, e:

$$a_{i,x} = 0, \quad a'_{i,x} = 0,$$

sono le equazioni delle rette a_i e a'_i.

Da essa si trae:

$$(k_1 - l_1) a_{1,x}^4 = \sum_2^6 (l_i a'^4_{i,x} - k_i a_{i,x}^4).$$

Ora tale uguaglianza non può sussistere a meno che non siano i due membri identicamente nulli: giacchè altrimenti la quartica spezzata nella retta a_1 contata quattro volte apparterrebbe al sistema lineare determinato dalle quartiche spezzate nelle rette $a_2 \dots a_6$, $a'_2 \dots a'_6$ contate ciascuna quattro volte e, dovendo, come queste, esser coniugata alla curva di 4.ª classe costituita da K_1^2 contata due volte, consterebbe d'una tangente di K_1^2 contata

(*) Questa costruzione può generalizzarsi alle curve d'ordine pari qualunque. Sia data una C^{2k} fondamentale e sia a_1 una retta generica del piano: allora se a_2 è una tangente dell'antipolare di a_1, l'antipolare di a_2 tocca a_1, e le due rette a_1 e a_2 insieme alle k^2 tangenti comuni a queste due antipolari dànno un (k^2+2)-latero polare della C^{2k}.

Naturalmente esso non è il (k^2+2)-latero polare più generale.

quattro volte, contro l'ipotesi esplicitamente fatta, dunque:

$$k_1 = l_1,$$

e:

$$\sum_2^6 k_i\, a_{i,x}^4 = \sum_2^6 l_i\, a'^4_{i,x}.$$

Da tutto ciò noi deduciamo il teorema:

La quartica C^4 ammette ∞^3 esalateri polari. Gli ∞^1 pentalateri, che, insieme ad una retta a_1, costituiscono esalateri polari di C^4 sono polari per una quartica di Clebsch *C_1^4 avente colla quartica data quattro contatti quadripunti sulla retta a_1: quindi sono inscritti nel covariante S di C_1^4, mentre sono circoscritti all'antipolare K_1^2 di a_1.*

E anche l'altro:

Data una quartica di Clebsch *C_1^4, i suoi ∞^1 pentalateri polari formano, insieme ad una retta arbitraria a_1, ∞^1 esalateri, che possono pensarsi come polari per un fascio di quartiche aventi con essa quattro contatti quadripunti su quella retta, e per esse soltanto;*

che riavvicinato a un'osservazione precedente (n.° 24) dà l'altro:

Condizione necessaria e sufficiente perchè due cubiche possano pensarsi come polari di due certi punti rispetto a una quartica è che si annulli il loro invariante simultaneo P. Supposta la condizione soddisfatta, le due cubiche sono le polari di due punti fissi rispetto a un fascio di quartiche, cui appartiene una sola quartica di Clebsch, *aventi quattro contatti quadripunti sulla congiungente i due punti fissi.*

27. Diciamo:

$$\sum_2^6 k_i\, a_{i,x}^4 = 0,$$

l'equazione della quartica di Clebsch di cui si parla nel penultimo teorema, ed:

$$a_{1,x} = 0,$$

l'equazione della retta a_1; allora l'equazione del fascio suddetto è:

$$\sum_2^6 k_i\, a_{i,x}^4 + \lambda\, a_{1,x}^4 = 0, \tag{1}$$

e su questa si verificano subito alcuni semplici teoremi.

Innanzi tutto l'equazione del covariante S della quartica (1) è:

$$S_1 + \lambda\, a_{1x} \sum k_i\, k_j\, k_l\, (1\, i\, j)\, (1\, i\, l)\, (1\, j\, l)\, (i\, j\, l)\, a_{i,x}\, a_{j,x}\, a_{l,x} = 0,$$

dove $S_1 = 0$ è l'equazione del covariante S della quartica di Clebsch C_1^4 scritta nella forma data al n.° 23, e la sommatoria si intende estesa a tutte le 10 combinazioni differenti $i\,j\,l$, che possono formarsi con gli indici 2, 3, 4, 5, 6 presi tre a tre in tutti i modi possibili. Ora:

$$\sum k_i\, k_j\, k_l\,(1\,i\,j)\,(1\,i\,l)\,(1\,j\,l)\,(i\,j\,l)\,a_{i,x}\,a_{j,x}\,a_{l,x} = 0\,,$$

per quel che risulterà tra poco dalla (2), è l'equazione della G_{a_1} di Caporali corrispondente alla retta a_1 rispetto a tutte le quartiche del fascio (1), dunque:

I covarianti S delle quartiche del fascio (1) *formano pure fascio: anzi tra i due fasci vi è corrispondenza proiettiva, ad ogni quartica del primo corrispondendo il proprio covariante S nel secondo, e alla quartica spezzata nella retta a_1 contata quattro volte del primo corrispondendo la quartica del secondo fascio spezzata in a_1 e in G_{a_1}.*

Ancora: l'equazione della G_u di Caporali corrispondente ad una retta u rispetto alla quartica (1) è:

$$\left.\begin{aligned} &\sum k_i\, k_j\, k_l\,(u\,i\,j)\,(u\,i\,l)\,(u\,j\,l)\,(i\,j\,l)\,a_{i,x}\,a_{j,x}\,a_{l,x} + \\ &+ \lambda\, a_{1,x} \sum k_i\, k_j\,(a_1\,a_i\,a_j)\,(a_1\,a_i\,u)\,(a_1\,a_j\,u)\,(a_i\,a_j\,u)\,a_{i,x}\,a_{j,x} = 0, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

dove le sommatorie hanno il solito significato, dunque:

Le G_u di Caporali *di una retta generica u rispetto alle quartiche del fascio* (1) *formano un fascio ad esso proiettivo, e le terne apolari alle dette quartiche situate sopra u costituiscono una involuzione cubica di prima specie* (*).

I quattro elementi doppi di questa involuzione dànno quattro quartiche del fascio (1) le cui Cayleyane toccano la retta data u.

(*) In generale non è evidentemente così. Per vedere che cosa costituiscono le terne apolari alle singole quartiche di un fascio qualunque sopra una retta r, consideriamo dapprima un fascio di cubiche. Le coniche polari di un punto di r rispetto a queste cubiche costituiscono un fascio e al muoversi del punto sulla retta i quattro punti-base descrivono una curva del 4.° ordine, mentre i tre punti doppi descrivono una curva del 6.° ordine. (Caporali, *l. cit.*, pag. 361.) I sei punti ove questa curva taglia la retta r si distribuiscono in tre coppie di punti tali che ciascuna di essa è apolare per una certa cubica del fascio: quindi abbiamo incidentalmente che:

Le Cayleyane di un fascio di cubiche costituiscono una serie ∞^1 del 3.° ordine.

Ma allora è chiaro che se due punti X e X' di r appartengono a una terna apolare ad una quartica del dato fascio di quartiche, fra X e X' viene stabilita una corrispondenza simmetrica (6, 6). Le sue 12 coincidenze mostrano che:

Le Cayleyane di un fascio di quartiche costituiscono una serie ∞^1 del 12.° ordine.

La (2) se si interpretano le u come variabili correnti è l'equazione della polocayleyana del punto x, dunque:

Le polocayleyane di un punto rispetto alle quartiche del fascio (1) *formano schiera:*

e così teoremi perfettamente analoghi valgono per le polohessiane di un punto, per le hessiane, gli inviluppi armonici, equianarmonici, ecc., ecc.

28. Nella costruzione degli ∞^1 esalateri polari della quartica C^4, che hanno un lato in una retta data a_1, abbiamo escluso, che questa retta toccasse il contravariante Ω: vediamo più davvicino, che cosa accade nell'ipotesi che la retta a_1 sia proprio una tangente di Ω.

Se a_1 tocca il contravariante Ω essa tocca anche (e nel medesimo punto) la sua antipolare K^2_1, ond'è che quando a_2 si muove tangenzialmente a K^2_1 la sua antipolare K^2_2 tocca costantemente a_1 e stacca da K^2_1 solo tre tangenti variabili a_3, a_4, a_5. Allora non si può più parlare di esalatero polare, ma sta sempre il fatto che nel pentalatero $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ ogni quadrilatero è circoscritto all'antipolare del lato complementare.

Infatti il pentalatero $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ è polare per la cubica polare di un punto qualunque di a_1, perchè rispetto ad essa K^2_1 è apolare e K^2_2 ha per polare il lato complementare a_2; quindi se si considera la schiera di K^2 inscritte per es. nel quadrilatero $a_1 a_2 a_3 a_4$, dovendo queste K^2 avere tutte a_5 per retta polare rispetto alle cubiche polari dei punti di a_1, necessariamente il fascio delle coniche polari corrispondenti, rispetto alla quartica, è costituito dal fascio involutorio avente per raggi doppi a_1 e a_5. Ma allora è chiaro che a questa schiera appartiene l'antipolare di a_5.

Se si osserva poi che gli ∞^1 quadrilateri $a_2 a_3 a_4 a_5$, che si ottengono al variare di a_2, essendo inscritti (come subito si vede) in una cubica C^3_1 e circoscritti a K^2_1, sono polari per una medesima cubica C^3 di cui C^3_1 è la Hessiana, si conclude che anche in questo caso gli ∞^1 pentalateri $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ sono polari per una rete di cubiche. Precisamente, questa rete è determinata dalla cubica C^3 e dal fascio delle cubiche polari dei punti di a_1.

I punti ove K^2_1 tocca le sei tangenti che ha ulteriormente a comune col contravariante Ω, sono quelli ove essa taglia la Hessiana C^3_1 di C^3, e quelle sei tangenti toccano anche la Cayleyana di C^3. Ora è subito visto che C^3 è una cubica generale e che K^2_1 è una qualunque conica-inviluppo ad essa apolare; dunque abbiamo incidentalmente il teorema:

I sei punti ove una conica inviluppo apolare a una cubica taglia la sua Hessiana sono i punti di contatto delle sei tangenti che essa ha comuni con *la Cayleyana della cubica: e le 12 tangenti della Hessiana nei 12 punti ove essa è tagliata ulteriormente dalle sei rette ora considerate toccano anche la conica-inviluppo.*

Nel caso generale invece in cui la retta a_1 non tocca il contravariante Ω, si può osservare che le otto tangenti comuni a questo contravariante e all'antipolare K_1^2 di a_1 sono le otto rette tangenti a K_1^2 negli otto punti ove essa è tagliata dal covariante S della quartica di Clebsch C_1^4 corrispondente ad a_1 nel modo visto precedentemente.

29. Vediamo se di un esalatero polare $a_1 \dots a_6$ della nostra quartica C^4, tre lati, per es. a_1, a_2, a_3, possono concorrere in un medesimo punto.

Se ciò avviene, il punto ove concorrono $a_1\, a_2\, a_3$ ha per polohessiana il trilatero $a_4\, a_5\, a_6$ e quindi si trova sul covariante S.

Viceversa è chiaro che, preso un punto del covariante S e per esso arbitrariamente una retta a_1, il trilatero polohessiano $a_4\, a_5\, a_6$ del punto, circoscritto all'antipolare K_1^2 di a_1, la retta a_1 e le due tangenti a_2 e a_3 condotte dal punto stesso a K_1^2 costituiscono un esalatero polare di C^4; dunque:

Ogni quartica ammette ∞^2 esalateri polari di cui tre lati concorrano in un punto. Ogni trilatero polohessiano appartiene ad ∞^1 esalateri cosiffatti, e il punto di concorso dei tre lati concorrenti è il polo del trilatero, mentre i tre lati medesimi descrivono intorno ad esso un'involuzione cubica di 1.ª specie.

Ne segue che una retta generica a_1 fa parte di quattro esalateri polari di cui due lati concorrano in un punto di a_1; e questi quattro punti sono quelli ove a_1 taglia il covariante S della quartica C^4 o della quartica di Clebsch C_1^4 sopra considerata.

Si può notare ancora che pei punti del covariante S e per essi soltanto la corrispondenza simmetrica $(2, 2)$ determinata intorno a un punto qualsivoglia dalle coppie di rette a, b tali, che a tocca l'antipolare di b mentre b tocca l'antipolare di a, è un'involuzione cubica di prima specie.

30. Se si fa la costruzione precedente partendo da una tangente a_1 dell'inviluppo σ (*) costituito dalle rette congiungenti le coppie di punti corrispondenti del covariante S, e si prende per punto a_{123} uno dei punti della coppia ora detta che trovasi sopra a_1, si arriva a un esalatero polare costituito da un quadrilatero semplice e una sesta retta residua, che rispetto alle precedenti non presenta alcuna particolarità di posizione.

(*) Cfr. Ciani, *Sopra la corrispondenza polare, ecc.*, *l. cit.*

Dunque vi sono ∞^1 esalateri polari così costituiti e se si applica a uno qualunque di essi il teorema generale del n.° 16 si trova l'elegante enunciato:

Il polo di un trilatero polohessiano rispetto alla quartica C^4 è anche il polo misto del trilatero stesso rispetto all'inviluppo equianarmonico della quartica.

Si osserverà poi che, per una quartica generale, non esistono nè esalateri polari di cui tre lati concorrono in un punto e gli altri tre in un altro, perchè altrimenti esisterebbe una coppia di punti apolare, nè per una ragione analoga, esalateri polari circoscritti a una conica, nè infine esalateri polari costituiti dai sei lati di un quadrangolo completo, perchè altrimenti il suo covariante S si spezzerebbe in due coniche circoscritte al quadrangolo (*).

31. Se un esalatero $a_1 \ldots a_6$ è polare per la nostra quartica C^4 ogni sua *terna* di vertici è apolare a C^4. Viceversa:

Data una qualunque terna di punti apolare a C^4 vi sono due esalateri polari di C^4 che abbiano in quella terna una terna di vertici.

Siano a_{12}, a_{34}, a_{56} i tre punti dati costituenti una terna apolare a C^4: i due punti a_{34}, a_{56} dànno una coppia di punti apolare alla cubica polare di a_{12} rispetto a C^4, quindi possono considerarsi come vertici opposti di ∞^1 quadrilateri polari di questa cubica, e le ∞^1 coppie di rette che così si ottengono intorno ad essi costituiscono come è ben noto un'involuzione quadratica. In particolare i raggi doppii del fascio involutorio a_{56} sono le due rette costituenti la conica polare di a_{34} rispetto alla cubica suddetta, ossia le due rette costituenti la conica polare mista di a_{12} e a_{34} rispetto alla quartica C^4. Ne segue, che, se si considerano a_{12} e a_{34} come vertici opposti di ∞^1 quadrilateri polari della cubica polare di a_{34}, la nuova involuzione di raggi che si ottiene intorno ad a_{56} coincide colla precedente, e che quindi si possono intanto costruire ∞^1 esalateri $a_1 \ldots a_6$ con una terna di vertici nei tre punti dati e tali che in essi le cubiche polari dei vertici a_{12} e a_{34} abbiano per quadrilateri polari i quadrilateri complementari. Di più le coppie a_1, a_2; a_3, a_4; a_5, a_6 descrivono intorno ai tre punti dati tre fasci involutorii.

Ora si considerino le due coppie comuni al fascio involutorio a_{12} e alla corrispondenza (1, 2) che si ottiene nel fascio a_{12} facendo corrispondere a ogni raggio i due che toccano la sua antipolare, e si considerino i due esalateri della totalità ∞^1 precedente cui esse appartengono. Questi due esalateri saranno quelli richiesti (**).

(*) Caporali, *l. cit.*, pag. 347.

(**) Ci risparmiamo qui la dimostrazione perchè essa risulterà implicitamente da un teorema generale che dimostreremo tra poco.

Ciò posto, tenendo fermo il punto a_{12} della terna polare data, facciamo variare a_{34} e a_{56} sulla polohessiana di a_{12}: si otterranno in tal modo ∞^1 esalateri polari col vertice in a_{12}. Cerchiamo la classe dell'inviluppo costituito dagli ∞^1 quadrilateri complementari a_{12} in questi ∞^1 esalateri.

Per questo, dato un punto qualunque P, riferiamo tra di loro le rette del fascio a_{12} in modo che due rette corrispondenti a_1, a_2 abbiano per antipolari due coniche-inviluppo tangenti a una medesima retta r di P. In tal modo viene stabilito nel fascio a_{12} una corrispondenza simmetrica (2, 2), poichè per ogni posizione della retta a_1 r può assumere due posizioni e ad ogni posizione di r ne corrisponde una di a_2: questa corrispondenza (2, 2) contiene quattro coppie $a_1 a_2$ tali, che inoltre a_1 tocchi l'antipolare di a_2 e a_2 quella di a_1, e le rette r relative a queste quattro coppie sono le rette dell'inviluppo in discorso passanti per P, dunque:

Dato un punto qualunque vi sono ∞^1 esalateri polari che abbiano un vertice in quel punto. Gli ∞^1 quadrilateri complementari di quel vertice sono circoscritti ad una curva della 4.ª classe tangente alle quattro rette del contravariante Ω uscenti dal punto dato.

32. Si vede subito che:

I 12 lati di due esalateri polari qualunque di una quartica toccano una medesima curva di 3.ª classe apolare alla quartica.

Ora tale proposizione si può invertire. Perciò dimostriamo dapprima il lemma:

Se una curva di 3.ª classe apolare a una quartica C^4 tocca tre lati di un suo esalatero polare tocca anche i tre rimanenti, a meno che questi non concorrano in un medesimo punto.

Siano:

$$a_{i,x} = 0, \quad (i = 1 \ldots 6),$$

le equazioni dei sei lati dell'esalatero e sia:

$$u_a^3 = 0,$$

l'equazione della curva di 3.ª classe apolare alla quartica e tangente alle rette:

$$a_{1,x} = 0, \quad a_{2,x} = 0, \quad a_{3,x} = 0.$$

L'equazione della quartica sarà della forma:

$$\sum_1^6 k_i \, a_{i,x}^4 = 0,$$

e poichè la curva di 3.ª classe:

$$u_a^3 = 0,$$

è apolare alla quartica dovrà essere identicamente:

$$\sum_1^6 k_i \, a_{i,a}^3 \, a_{i,x} = 0.$$

Ma per ipotesi:

$$a_{1,a}^3 = 0, \quad a_{2,a}^3 = 0, \quad a_{3,a}^3 = 0,$$

dunque deve essere identicamente:

$$\sum_{i=4}^{i=6} k_i \, a_{i,a}^3 \, a_{i,x} = 0.$$

Ciò porta, poichè le rette a_4, a_5, a_6 non concorrono in un punto, che deve essere, come volevasi (*):

$$a_{4,a}^3 = 0, \quad a_{5,a}^3 = 0, \quad a_{6,a}^3 = 0.$$

Deduciamo di qui, prima di passar oltre un teorema notevole.

Siano a_1 e a_2 due lati di un trilatero polohessiano $a_1 a_2 a_3$ della quartica C^4 e sia K^3 una curva di 3.ª classe apolare a C^4 e tangenti alle rette a_1 e a_2: se a_4 è una delle tre tangenti condotte a K^3 dal polo del trilatero suddetto rispetto a C^4, le quattro rette a_1, a_2, a_3, a_4 fanno parte di un esalatero polare di C^4 ben determinato di cui altri due lati concorrono in quel polo, dunque questi due lati insieme ad a_3 toccano ancora la curva K^3. Ossia:

Una curva di 3.ª classe apolare ad una quartica che tocchi due lati di un suo trilatero polohessiano tocca anche il terzo.

Reciprocamente:

Se tre rette a_1, a_2, a_3 sono così situate che tutte le curve di 3.ª classe apolari ad una quartica e tangenti a due di esse, per es. a_1 e a_2, toccano anche la terza, le tre rette costituiscono un trilatero polohessiano della quartica.

(*) Questo ragionamento è del resto generale. E può ènunciarsi:

Se una curva di classe m è apolare a una curva d'ordine n e tocca p — 3 lati di un suo p-latero polare, tocca anche gli altri tre, a meno che questi non concorrano in un punto.

Accanto al qual teorema va ricordato l'altro:

Se una curva di classe n è coniugata ad una d'ordine n e tocca p — 1 lati di un suo p-latero polare, tocca anche il rimanente.

Infatti in tal caso la conica-inviluppo apolare alla cubica polare di un punto qualunque del piano e tangente ad a_1 e a_2, costituendo con quel punto una curva di 3.ª classe apolare alla quartica, tocca anche a_3 ed ha per conica polare una coppia di rette (distinte o no) incrociate in quel punto. Ne segue che la Iacobiana della rete delle coniche polari del tessuto di coniche-inviluppo inscritte nel trilatero $a_1 a_2 a_3$ è indeterminata. Ma allora necessariamente questa rete è data dalla ∞^2 coppia di rette uscenti da un punto, e questo punto appartiene al covariante S, il suo trilatero polohessiano essendo a_1 a_2 a_3.

33. Ritornando al nostro scopo, abbiasi una qualunque curva di 3.ª classe K^3 apolare alla nostra quartica fondamentale C^4 e siano a e b due tangenti di K^3 tali, che l'una tocchi l'antipolare dell'altra: cerchiamo la classe dell'inviluppo Φ generato dalle quattro tangenti comuni alle antipolari di a e b al variare di queste rette tangenzialmente a K^3.

Prendiamo un punto P: se una retta r per P appartiene all'inviluppo Φ, l'antipolare di r deve staccare da K^3 una coppia della corrispondenza (6, 6) descritta dalla coppia (a, b). Ora le antipolari delle rette per P costituiscono una serie quadratica semplicemente infinita, e quindi segnano sopra K^3 una corrispondenza (10, 10) di valenza (*Werthigkeit*) 2, ogni coppia di questa toccando l'antipolare di una retta per P: dunque le 60 coppie comuni a queste due corrispondenze simmetriche dànno che:

L'inviluppo Φ è della 60.ª classe.

Sia r una delle 12 tangenti comuni a K^3 e al controvariante Ω di C^4, e prendiamo il punto P sopra r. Evidentemente, se $r_1 r_2 r_3 r_4 r_5$ sono le cinque tangenti ulteriori comuni a K^3 e all'antipolare di r, le cinque coppie:

$$(r, r_i), \quad (i = 1 \ldots 5),$$

sono comuni alla suddetta corrispondenza (6, 6) e alla corrispondenza (10, 10) relativa nel modo detto al punto P, dunque:

L'inviluppo Φ ha 12 tangenti quintuple nelle 12 tangenti comuni a K^3 e al contravariante Ω.

Consideriamo le altre $60 . 3 - 12 . 5 = 120$ tangenti comuni a Φ e a K^3.

Per la definizione stessa di Φ, se c è una di queste tangenti, vi sono certe due altre tangenti a e b di K^3 (e anche di Φ) tali che l'antipolare di a tocca b e c e l'antipolare di b tocca a e c: quindi le tre rette a, b, c determinano un esalatero polare di C^4, cui esse appartengono, circoscritto a K^3 per il lemma precedente D'altra parte è chiaro che ogni lato di questo esalatero è una tangente 10-pla per l'inviluppo Φ, dunque le 120 tangenti suddette si raccolgono 10 a 10 in 12 rette costituenti due esalateri polari di C^4 circoscritti a K^3.

Raccogliamo da ciò l'importante teorema (*):

La condizione necessaria e sufficiente perchè una curva di 3.ª classe sia apolare ad una quartica è che sia inscritta a due suoi esalateri polari;

che fornisce una interpretazione geometrica del concetto di apolarità nel caso particolare in discorso.

Possiamo aggiungere con lo Schlesinger che i 12 lati dei due esalateri circoscritti a una K^3 apolare a C^4 costituiscono l'intersezione completa (ci sia permessa questa parola, poco usata in tal senso benchè molto espressiva) della K^3 con una (anzi con infinite) curve di questa classe coniugata a C^4.

Infatti per un teorema generale notato a suo luogo due esalateri polari di una C^4 sono circoscritti a un sistema lineare ∞^3 di curve di 4.ª classe coniugate a C^4 e di questo ∞^3 solo un tessuto è costituito dalla K^3 (unica) apolare a C^4, inscritta in essi, insieme a un punto arbitrario del piano.

§ 3. — Gli ettalateri polari della quartica piana generale.

34. Consideriamo sempre la quartica fondamentale C^4 e sia $a_1 \dots a_7$ un suo ettalatero polare. Ogni terna di vertici dell'ettalatero ha per polare mista il lato complementare e ogni K^2 tangente a cinque dei suoi lati ha per conica polare una coppia di rette incrociate nel vertice complementare e separate armonicamente dai due lati ivi concorrenti.

Ciò posto dimostriamo che, date tre rette $a_1 a_2 a_3$, esiste in generale uno ed un solo ettalatero polare di C^4 che abbia tre lati nelle tre rette date.

Chiamati $a_4 a_5 a_6 a_7$ i lati incogniti di un eventuale ettalatero che soddisfi alla questione, osserviamo che la K^2 inscritta nel pentalatero $a_3 \dots a_7$ deve avere per conica polare una coppia di rette incrociate nel punto a_{12} e separate armonicamente da a_1 e a_2, e che la K^2 inscritta nel pentalatero $a_2 a_4 \dots a_7$ deve avere per conica polare una coppia di rette incrociate nel punto a_{13} e separate armonicamente da a_1 e a_3. Esse d'altra parte sono pie-

(*) Questo teorema, come tutti quelli che seguono circa la distribuzione delle figure polari di una quartica sopra le curve di 3.ª classe ad essa apolari, è contenuto in una proposizione generale dimostrata dallo Schlesinger con metodo trascendente nella sua bella Nota già citata: *Ueber die Werwerthung der ϑ-Functionen u. s. w.*

namente individuate dovendo appartenere a due schiere note e dovendo rispettivamente toccare le rette a_3 e a_2: quindi le quattro rette $a_4 \dots a_7$ sono date dalle quattro tangenti comuni a queste due coniche inviluppo.

Per dimostrare poi che l'ettalatero $a_1 \dots a_7$ è polare per la quartica C^4 basta osservare che i due sistemi lineari ∞^3 di K^4, ottenuti aggiungendo a ciascuna di quelle due K^2 le ∞^3 K^2 tangenti ai due lati complementari, non avendo alcuna curva comune individuano un sistema lineare ∞^7 di K^4 inscritte nell'ettalatero e coniugato alla quartica C^4.

Si ha dunque:

Ogni quartica possiede ∞^6 ettalateri polari. Date tre rette arbitrarie vi è in generale uno ed un solo ettalatero polare di una quartica assegnata che abbia tre lati in quelle tre rette.

35. Una interessante quistione sugli ettalateri polari di una quartica è quella di cercare le varie forme particolari che essi possono assumere: e noi ben lungi dall'aver esaurito un tale argomento esponiamo qui alcuni semplici risultati a cui siamo pervenuti.

Prendiamo tre punti A, B, C in modo che ciascuno sia all'intersezione delle polohessiane degli altri due: A potrà prendersi ad arbitrio nel piano, B arbitrariamente sulla polohessiana di A, e C sarà uno dei nove punti ove la polohessiana di A taglia quella di B. Escludiamo però che il punto C coincida col punto P_{AB}, coniugato di B (di A) sulla polohessiana di A (di B) e che con A e B costituisce una terna apolare a C^4.

Allora se si indicano con P_{BC}, P_{CA} i punti aventi rispetto alle coppie B, C; C, A significato analogo a quello che ha P_{AB} rispetto alla coppia A, B (*), è chiaro che i tre punti P_{AB}, P_{BC}, P_{CA} si trovano in linea retta — sulla polare mista di A, B, C — e che l'ettalatero costituito da questa polare mista e dalle rette AB, BC, CA, AP_{BC}, BP_{CA}, CP_{AB} sarà polare per la quartica C^4.

Infatti i due sistemi lineari ∞^2 di curve di 4.ª classe inscritte nell'ettalatero ottenuti aggiungendo alle terne A, B, P_{AB}; B, C, P_{BC} rispettivamente tutti i punti del piano non hanno alcuna curva comune e quindi determinano un sistema lineare ∞^5 di curve di 4.ª classe inscritte nell'ettalatero e coniugate a C^4. Con questo sistema lineare ∞^5, l'altro ∞^2 ottenuto in modo analogo ai due precedenti considerando la terna C, A, P_{CA} ha comune la sola

(*) D'ora innanzi indicheremo sempre con P_{XY} il terzo punto d'una terna apolare di cui facciano parte i punti X ed Y.

curva di 4.ª classe spezzata nei quattro punti A, B, C, P_{CA} (come si riconosce subito osservando che questa appartiene alla schiera individuata dalle due curve di 4.ª classe spezzate nelle due quaterne di punti A, B, P_{AB}, C e B, C, P_{BC}, A), dunque si ha in tutto, appunto come volevasi, un sistema lineare ∞^7 di curve di 4.ª classe inscritte nell'ettalatero e coniugate a C^4.

Ne ricaviamo il teorema:

Ogni quartica possiede ∞^3 ettalateri polari costituiti dai quattro lati di un quadrilatero semplice, da una sua diagonale, da una retta passante per uno dei vertici non contenuti da questa diagonale, e poi da una retta che rispetto alle precedenti non ha, in generale, alcuna particolarità di posizione. Esse si ottengono tutte nel modo precedente.

Una volta scelti i punti A e B (l'uno sulla polohessiana dell'altro) il punto C può assumere otto posizioni differenti: in tal modo si hanno intorno a ciascuno dei punti A, B, P_{AB} (si vede facilmente) otto coppie di rette appartenenti ad una medesima involuzione quadratica.

36. Consideriamo l'ettalatero particolare ora costruito e vediamo se scegliendo convenientemente il punto B sulla polohessiana di A può farsi in modo che le tre rette $A\,P_{BC}$, $B\,P_{CA}$, $C\,P_{AB}$ concorrano in un punto.

Per questo osserviamo che, posto:

$$A\,P_{BC} \cdot B\,P_{CA} = 0_C, \quad B\,P_{CA} \cdot C\,P_{AB} = 0_A, \quad C\,P_{AB} \cdot A\,P_{BC} = 0_B,$$

il pnnto 0_A per es. appartiene alla polohessiana di A, perchè la terna costituita dai punti A, 0_A e dal punto ove la retta $B\,C$ taglia la polare mista di A, B, C potendosi considerare come una curva di terza classe inscritta nell'ettalatero è apolare a C^4. Quindi i punti 0_A ed 0_B per es. sono gli ulteriori punti ove la retta $C\,P_{AB}$, che già taglia in C e P_{AB} le polohessiane di A e B, taglia le polohessiane medesime.

Ed allora supponiamo che la polohessiana di B non si spezzi e tagli la polohessiana di A in tre punti situati in linea retta, uno di questi essendo il punto P_{AB}: in tal caso, è chiaro, che se si fa la costruzione precedente assumendo per punto C uno degli altri due di questi tre punti, si trova un ettalatero polare in cui le tre rette sopra indicate concorrono in un punto, giacchè la polohessiana di B non spezzandosi non potrà in particolare contenere tutta la retta $C\,P_{AB}$.

La ricerca di questi particolari ettalateri è adunque ricondotta all'altra:

Trovare sulla polohessiana di A un punto B tale che dei nove punti ove la polohessiana di A è tagliata da quella di B tre siano in linea retta, *e uno di questi tre sia il punto P_{AB} costituente terna apolare con A e con B.*

Per questo, sulla polohessiana di A diciamo corrispondenti due punti X ed X' quando può trovarsi sulla polohessiana stessa un tal punto B, che X sia all'intersezione delle polohessiane di A e B, ma non coincida con P_{AB}, ed X' sia l'ulteriore intersezione della polohessiana di A con una qualunque delle sette rette congiungenti P_{AB} con i sette rimanenti punti di intersezione delle polohessiane di A e B.

Dato X, B può evidentemente assumere otto posizioni, cioè la posizione di uno qualunque dei punti ove la polohessiana di A è incontrata da quella di X, tranne di quello che insieme ad A e X costituisce terna apolare: da ogni posizione di B seguono sette posizioni pel punto X' corrispondente ad X, dunque ad ogni punto X corrispondono $8 \cdot 7 = 56$ punti X'.

Viceversa, ad ogni punto X' quanti punti X corrispondono?

Si tratta prima di tutto di condurre per X' una tal trasversale, che, chiamati P_{AB}, P_{AB_1} gli altri due punti ove essa taglia la polohessiana di A e quindi B e B_1 i loro coniugati sulla polohessiana stessa, la polohessiana di B (che naturalmente passa per P_{AB}) passi anche P_{AB_1}, oppure la polohessiana di B_1 (che passa per P_{AB_1}) passi anche per P_{AB}.

Per questo condotta una trasversale qualunque per X' e, mantenute le notazioni precedenti, chiamiamo Y ed Y', Z e Z' rispettivamente le ulteriori intersezioni di questa trasversale colle polohessiane di B e B_1, e cerchiamo al ruotare della trasversale intorno ad X' il luogo dei punti P_{AB}, P_{AB_1}, Y Y', Z, Z'. Poichè per un tal luogo il punto X' è un punto nonuplo, come si vede assumendo per trasversale una delle nove rette che vanno da X' ai nove punti coniugati sulla polohessiana di A a quelli ove tale polohessiana è incontrata da quella di X' (fra quei nove punti vi è anche X', quindi fra le nove trasversali in discorso vi è la tangente in X' alla polohessiana di A), esso sarà dell'ordine $9 + 6 = 15$. Tolta la polohessiana di A descritta da P_{AB} e P_{AB_1} resta che il luogo dei punti Y, Y', Z, Z' è una curva del 12° ordine C^{12}, con un punto ottuplo in X'.

È chiaro che le trasversali richieste sono da cercarsi fra le congiungenti X' con uno dei punti ove C^{12} taglia la polohessiana di A, fuori di X': queste sono $3\ 12 - 8 = 28$, dunque dobbiamo cercarle fra queste 28 rette.

Consideriamone una $X' P_{AB} P_{AB_1}$ e sia P_{AB_1} il punto situato sopra C^{12}: allora, mantenute le notazioni precedenti, le polohessiane di B e B_1 tagliano $X' P_{AB} P_{AB_1}$ in sei punti di cui uno è P_{AB} e, degli altri, due sono raccolti in P_{AB_1}. Quindi, o la polohessiana di B passa per P_{AB_1}, o la polohessiana di B_1 tocca in P_{AB_1} la retta $X' P_{AB} P_{AB_1}$, o infine questa polohessiana ha un punto doppio in P_{AB_1}. Quest'ultimo caso ha luogo per le 12 rette congiungenti con X' coi 12 punti ove il covariante S taglia la polohessiana di A e che si trovano evidentemente sopra C^{12}: il secondo caso si verifica per le due rette congiungenti X' coi punti coniugati a quelli ove la polare di X' rispetto alla conica polare di A (rispetto a C^4) taglia ulteriormente la polohessiana di A fuori del punto $P_{AX'}$ (perchè se la retta $X' P_{AB_1}$ tocca in P_{AB_1} la polohessiana di B_1, essendo A e P_{AB_1} punti coniugati su tale polohessiana, la retta $X' P_{AB_1}$ è la retta polare di A rispetto alla cubica polare di B_1, cioè è la retta polare di B_1 rispetto alla conica polare di A); dunque le trasversali richieste rimangono $28 - 12 - 2 = 14$.

Ora ognuna di queste trasversali dà luogo a sette punti X corrispondenti ad X', dunque ad ogni punto X' corrispondono $7 \cdot 14 = 98$ punti X e la corrispondenza fra X ed X' è una (98, 56).

Per trovarne le coincidenze osserviamo che i 56 punti X' corrispondenti ad X si ottengono tagliando la polohessiana di A con un sistema di 56 rette, cioè con una curva θ del 56.° ordine. Questa curva taglia la suddetta polohessiana in $3 \cdot 56 = 168$ punti di cui 56 si raccolgono sette a sette negli otto punti (che chiameremo X'') coniugati sulla polohessiana di A agli otto punti $B_1, B_2 \ldots B_8$ che tale polohessiana ha comuni con quella di X, oltre il punto P_{AX}: altri 56 si distribuiscono nei $7 \cdot 8 = 56$ punti ove le polohessiane di $B_1 \ldots B_8$ tagliano quella di A, oltre X e gli otto punti X'' (questi 56 punti li diremo punti X'''): altri 56 sono infine i detti punti X'.

La corrispondenza fra X ed X'' è, come si vede facilmente, una (8, 8): la corrispondenza fra X ed X''' è una corrispondenza simmetrica (56, 56), dunque indicando con a il numero delle coincidenze delle (98, 56), con b quello relativo alla (8, 8), con c quello della (56, 56), poichè la curva θ non passa per X e passa una volta per ogni punto X', 7 volte per ogni punto X'' ed una volta per ogni punto X''', si avrà, per una nota formula del Cayley (*):

$$(a - 154) + 7(b - 16) + (c - 112) = 0.$$

I numeri b e c si calcolano facilmente. Gli otto punti X'' e i 56 punti X''' corrispondenti ad X si ottengono tagliando la polohessiana di A con

(*) Cfr. ad es.: Salmon, *Courbes planes*, pag. 468. Paris, Gauthier-Villars, 1884.

quelle di $B_1 \ldots B_8$, cioè con una curva del 24.° ordine passante otto volte per X, dunque per la formula ora citata:

$$(b-16)+(c-112)=16,$$

ossia:

$$b+c=144.$$

Ora gli otto punti X corrispondenti ad un punto X'' si ottengono tagliando la polohessiana di A colla polohessiana del punto $P_{AX''}$, e questa passa per X', dunque la corrispondenza fra X ed X'' è di valenza 1, e il numero b delle coincidenze è dato da:

$$b=18.$$

Ne segue:

$$c=a=126.$$

ossia le coincidenze della (98, 56) sono 126.

Sia C una di queste coincidenze: esisterà un punto B tale che la sua polohessiana tagli quella di A in tre punti in linea retta C, P_{AB} e D; quindi se la polohessiana di B non si spezza l'ettalatero costituito dai sei lati del quadrangolo $A\,B\,C\,D$ e dalla polare mista di A, B, C (ossia di tre qualunque dei punti A, B, C, D) sarà un ettalatero polare per la C^4. Allora si riconosce che non solo il punto C, ma anche B e D sono coincidenze della nostra corrispondenza, e che ognuno di essi ne assorbe due, perchè per es. la polohessiana di D si comporta rispetto a C in modo analogo a quella di B.

Ma se la polohessiana di B si spezza, cioè B è uno dei 12 punti ove il covariante S taglia la polohessiana di A, dal trilatero polohessiano di B un lato passerà per A, il vertice opposto (appartenendo adunque al covariante S) sarà il punto P_{AB} e i quattro punti ove i due lati concorrenti in questo vertice tagliano ulteriormente la polohessiana di A saranno quattro coincidenze per cui non potrà ripetersi la considerazione precedente, dunque tolte queste $12\cdot 4=48$ coincidenze estranee alla nostra questione, le rimanenti $126-48=78$ si riducono a 39 che dànno luogo a $\frac{39}{3}=13$ ettalateri della specie suddetta.

Si ha pertanto il teorema:

Ogni quartica possiede ∞^2 ettalateri polari costituiti dai sei lati di un quadrangolo completo $A\,B\,C\,D$ e da una settima retta che, in generale, non ha rispetto alle prime sei alcuna particolarità di posizione. Dato un punto A, *vi sono 13 quadrangoli cosiffatti aventi un vertice in A: le terne residue dei vertici costituiscono 13 terne di punti della polohessiana di A.*

37. Possiamo dimostrare che:

Dette B, C, D; B', C', D' due qualunque delle 13 terne ora considerate dalla polohessiana di A, i due triangoli BCD e $B'C'D'$ sono inscritti in una conica e circoscritti ad un'altra.

Indichiamo con:

$$a_{1,x} = 0, \quad a_{2,x} = 0, \ldots \quad a_{7,x} = 0,$$

ordinatamente le equazioni delle rette AB, BD, DC, CA, BC, AD e della polare mista di tre qualunque dei quattro punti $ABCD$; e analogamente indichiamo con:

$$a'_{i,x} = 0, \quad (i = 1 \ldots 7),$$

le equazioni delle rette omologhe relative al quadrangolo $AB'C'D'$.

Poichè i due ettalateri costituiti da questi due gruppi di sette rette sono polari per la C^4, sussisterà una relazione identica della forma:

$$\sum_{i=1}^{i=7} k_i\, a_{i,x}^4 = \sum_{i=1}^{i=7} k'_i\, a'^4_{i,x},$$

ossia, polarizzando, si avrà identicamente:

$$\sum k_i\, a_{i,y}\, a_{i,z}\, a_{i,x}^2 = \sum k'_i\, a'_{i,y}\, a'_{i,z}\, a'^2_{i,x}. \tag{1}$$

Basta in questa identità porre per le y le coordinate del punto A e per le z le coordinate del punto comune ad:

$$a_{7,x} = 0, \quad a'_{7,x} = 0,$$

per accorgersi che i due trilateri BCD e $B'C'D'$ sono polari per una medesima conica, e quindi sono inscritti in una conica e circoscritti ad un'altra.

Si può osservare che le 12 coniche per le quali sono autopolari il triangolo BCD e quello costituito da un'altra qualunque delle rimanenti 12 terne in discorso appartengono a un fascio, perchè le loro equazioni si ottengono ponendo per le z nella (1) le coordinate di 12 punti situati sulla retta:

$$a_{7,x} = 0,$$

dopo aver naturalmente posto per le y le coordinate del punto A.

Dunque le $\frac{13 \cdot 12}{2} = 78$ coniche per cui sono autopolari due a due i 13 triangoli BCD, $B'C'D'$,... si distribuiscono 12 a 12 in 13 fasci.

Infine applicando un teorema generale già osservato si ha:

Se un ettalatero è polare per una quartica C^4 ed è costituito dai sei lati di un quadrangolo completo $A\ B\ C\ D$ (*) e dalla retta polare mista r di tre qualunque dei punti A, B, C, D, due lati opposti del quadrangolo, il lato del triangolo diagonale opposto al vertice in cui si incrociano quei due lati e la retta r dànno un quadrilatero coniugato all'inviluppo equianarmonico della quartica.

38. Consideriamo un poco più davvicino che cosa accade quando un punto B della polohessiana di un punto qualunque A appartiene al covariante S.

Poichè B appartiene al covariante S la sua polohessiana sarà un trilatero di cui un lato a passerà per A e gli altri due b e c si taglieranno sulla polohessiana di A nel punto P_{AB}, che con A e B costituisce terna apolare. Siano poi C e D i punti ove b per es. taglia ulteriormente la polohessiana di A: le due curve di 3.ª classe apolari alla quartica spezzate nelle due terne A, C, P_{AC} e A, B, P_{AD} ordinatamente toccano allora due lati del trilatero polohessiano $a\,b\,c$, e quindi devono toccare anche il terzo, ossia i punti P_{AC} e P_{AD} sono situati sulla retta c. Poi le rette $B\,C$ e $B\,D$ passano per P_{AD} e P_{AC} ordinatamente, dunque:

Se si considera un punto qualunque B del covariante S, la polohessiana di un punto A di un lato del suo trilatero polohessiano taglia i due lati rimanenti del trilatero, fuori della loro comune intersezione, in quattro punti distribuiti in due coppie allineate con B.

Le rette $B\,C$ e $B\,D$ descrivono evidentemente intorno al punto B le coppie di una corrispondenza (2, 2) con 4 coincidenze, dunque:

Se B è un punto qualunque del covariante S e $a\,b\,c$ è il suo trilatero polohessiano, vi sono sopra a per es. quattro punti le cui polohessiane (non degeneri) toccano b e c contemporaneamente (e basta che tocchino b o c perchè tocchino anche l'altro) in coppie di punti allineati con B.

39. Adesso consideriamo una curva qualunque di 3.ª classe K^3 apolare alla quartica C^4 e siano a_1 e a_2 due sue tangenti qualunque. Prendiamo un punto P sopra a_1 e sia a_3 una delle altre due tangenti di K^3 uscenti da P: le K^2 che hannò per coniche polari coppie di rette incrociate in P e separate armonicamente da a_1 e a_3 costituiscono una schiera, quindi una soltanto

(*) Si osserverà che questi quadrangoli sono tutti e soli quelli dotati della proprietà che i loro quattro triangoli hanno rispetto alla quartica la medesima retta polare.

di esse, K_1^2, tocca la retta a_2. Cerchiamo l'ordine della serie ∞^1, Σ, descritta da K_1^2 al variare della retta a_3 tangenzialmente a K^3.

Per questo sia r una retta qualunque: se K_1^2 è una curva della serie che tocca r, come essa tocca a_2, la sua conica polare dovrà essere costituita da una coppia di rette (incrociate in un punto P di a_1 e separate armonicamente da a_1 e da una delle altre due tangenti di K^3 che passano per P) coniugate rispetto alle antipolari di a_2 e di r.

Ora da ogni punto della retta a_1 parte una coppia di rette coniugate rispetto a queste antipolari (la coppia di tangenti che dal punto possono condursi alla curva di 2.ª classe che gli corrisponde nella trasformazione quadratica involutoria, correlativa all'ordinaria trasformazione quadratica di Steiner, individuata dalle antipolari di a_2 e di r), e l'inviluppo di queste coppie di rette è una curva della 3.ª classe Φ^3 generata dalla punteggiata a_1 e dalla schiera di curve di 2.ª classe ad essa proiettiva che le corrisponde nella detta trasformazione quadratica: quindi le rette coniugate armoniche di a_1 rispetto a tali coppie inviluppano una curva di 2.ª classe (la polare di a_1 rispetto a Φ^3) tangente ad a_1. Le cinque tangenti che tale curva ha ulteriormente a comune con K^4, oltre a_1, dànno che:

La serie ∞^1 Σ è del 5.º ordine.

Ciò posto, date le rette a_1 e a_2, per ogni posizione di a_3 tangenzialmente a K^3 costruiamo l'ettalatero polare individuato da a_1, a_2, a_3, e cerchiamo la classe dell'inviluppo Ψ generato dalle ∞^1 quaterne complementari di $a_1 a_2 a_3$ in questi ∞^1 ettalateri.

Esso è generato dalle quaterne di tangenti comuni alle curve corrispondenti di due serie ∞^1 di curve di 2.ª classe, di cui una è la schiera Σ' delle K^2 che hanno per coniche polari coppie di rette uscenti da a_{12} e separate armonicamente da a_1 e a_2, l'altra è la serie Σ precedente, riferite fra di loro in una corrispondenza (1, 6), dunque è della 20.ª classe ed ha una tangente quintupla in a_2, perchè le due serie hanno in comune (come si vede facendo assumere ad a_3 la posizione di a_2) la K^2 della schiera Σ' che tocca a_2. Per ragioni di simmetria essa avrà una tangente quintupla anche in a_1 e quindi abbiamo che:

L'inviluppo Ψ è della 20.ª classe ed ha due tangenti quintuple in a_1 e a_2.

Sia a_4 una delle $20 . 3 - 10 = 50$ tangenti ulteriori che Ψ ha comuni con K^3.

Per la definizione stessa di Ψ esisterà un'altra tangente a_3 di K^3 tale, che la curva della schiera Σ' che tocca a_3 e la curva della serie Σ che ha per conica polare una coppia di rette concorrenti nel punto a_{13} e separate armonicamente da a_1 e a_3, tocchino ambedue a_4.

Ora possono darsi due casi: o a_3 è differente da a_4 e allora a_4 appartiene all'ettalatero polare determinato da $a_1 a_2 a_3$ e ogni lato di questo ettalatero (circoscritto a K^3 per un teorema già osservato; n. 32 in nota), esclusi a_1 e a_2, è una tangente quadrupla di Ψ; o a_3 coincide con a_4 e allora non si può parlare più di ettalatero polare, ed a_4 è solo una tangente semplice di Ψ. Quest'ultimo caso si dà precisamente 10 volte, come si vede subito applicando il principio di corrispondenza generalizzato, dunque le 40 tangenti residue comuni a K^3 e Ψ si raccolgono in 10 rette distribuite in due gruppi di cinque rette ciascuno, che insieme ad a_1 e a_2 dànno due ettalateri polari di C^4.

Se si osserva poi che due ettalateri polari di C^4, che abbiano due lati comuni, sono circoscritti a un sistema lineare ∞^3 di curve di 4.ª classe coniugata a C^4, si conclude, tenuto conto delle cose precedenti, che:

Data una qualunque curva di 3.ª classe K^3 apolare a C^4 e due sue tangenti qualunque, queste fanno parte di due ettalateri polari di C^4 circoscritti a K^3. I 12 lati di questi due ettalateri costituiscono su K^3 un sistema completo di intersezioni.

§ 4. — Gli ottalateri polari.

40. Se l'ottalatero $a_1 \dots a_8$ è polare per la quartica fondamentale C^4, ogni suo trilatero è polare per la conica polare della K^2 inscritte nel pentalatero complementare ed ogni sua quaterna di vertici è una quaterna di punti coniugati a C^4.

Ora osserviamo che coi vertici di un ottalatero possono formarsi 105 quaterne: d'altra parte sappiamo che se in un ottalatero sono inscritte 7 curve di 4.ª classe linearmente indipendenti e coniugate a C^4, ciò avviene per ogni altra curva inscritta di 4.ª classe e l'ottalatero è polare (*) per C^4, dunque abbiamo il teorema:

Se sette quaterne di vertici di un ottalatero, linearmente indipendenti, sono coniugate rispetto a una quartica ciò avviene per tutte le altre e l'ottalatero è polare per la quartica:

(*) Naturalmente qui si suppone che l'ottalatero considerato sia generico e che quindi i suoi lati offrano condizioni tutte indipendenti alle curve di 4.ª classe che li toccano.

che può riguardarsi come l'analogo per queste ricerche del notissimo teorema di HESSE.

41. Consideriamo adesso quattro rette $a_1\, a_2\, a_3\, a_4$ e vediamo se vi sono degli ottalateri polari per la C^4 che abbiano quattro lati nelle quattro rette date.

Chiamati $a_5\, a_6\, a_7\, a_8$ i rimanenti lati incogniti di un eventuale ottalatero che soddisfi al problema, la K^2 tangente ad a_1, a_5, a_6, a_7, a_8 deve avere per conica polare rispetto a C^4 una conica coniugata al trilatere $a_2\, a_3\, a_4$ e deve toccare la retta a_1, dunque appartiene ad una schiera determinata. Così appartengono a schiere determinate le K^2 inscritte nei pentalateri $a_2\, a_5\, a_6\, a_7\, a_8$ ed $a_3\, a_5\, a_6\, a_7\, a_8$ rispettivamente.

Ora queste tre schiere appartengono ad un medesimo sistema lineare ∞^3 — al sistema delle K^2 che hanno per coniche polari coniche aventi in $a_1\, a_2\, a_3\, a_4$ un quadrilatero polare e che costituiscono appunto un sistema lineare ∞^3 — dunque può stabilirsi fra di esse un tal riferimento proiettivo che le terne di K^2 corrispondenti appartengano ad una medesima schiera, ossia abbiano quattro tangenti comuni.

Presa una tal terna e chiamate $a_5\, a_6\, a_7\, a_8$ le quattro tangenti relative, dal fatto, che nell'ottalatero $a_1 \ldots a_8$ le coniche polari della K^2 inscritte nei pentalateri $a_1\, a_5 \ldots a_8$, $a_2\, a_5 \ldots a_8$, $a_3\, a_5 \ldots a_8$ hanno per trilateri polari i trilateri complementari, segue subito che esso è polare per la quartica C^4.

Infatti se:

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0, \quad \chi = 0,$$

sono le equazioni di quelle tre K^2, si ha innanzi tutto per un conveniente valore di λ:

$$\chi = \varphi + \lambda\, \psi,$$

e poi, se:

$$\varphi_i = 0, \quad (i = 1,\ 2,\ 4),$$

sono le equazioni di tre K^2 tangenti ad a_2, a_3, a_4:

$$\psi_i = 0, \quad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

sono le equazioni di tre K^2 inscritte nel trilatero $a_1\, a_3\, a_4$, e infine:

$$\chi = 0,$$

è una K^2 inscritta in $a_1\, a_2\, a_4$, le sette curve di 4.ª classe:

$$\chi\, \chi_1 = 0, \quad \varphi\, \varphi_i = 0, \quad \psi\, \psi_i = 0, \quad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

sono inscritte nell'ottalatero, sono coniugate a C^4 e sono linearmente indipendenti, altrimenti dovrebbe sussistere un'identità della forma:

$$\varphi\,[k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + k_3\varphi_3 + k_4\chi_1] = \psi\,[k_5\psi_1 + k_6\psi_2 + k_7\psi_3 + k_8\chi_1],$$

mentre, nè può essere contemporaneamente:

$$k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + k_3\varphi_3 + k_4\chi_1 = 0$$
$$k_5\psi_1 + k_6\psi_2 + k_7\psi_3 + k_8\chi_1 = 0,$$

nè può:

$$\varphi = 0,$$

toccare la retta a_4 toccata da:

$$\psi_1 = 0, \quad \psi_2 = 0, \quad \psi_3 = 0, \quad \chi_1 = 1.$$

Ne risulta che gli ottaleri richiesti costituiscono una semplice infinità, e che la quaterna variabile $a_5 \dots a_8$ descrive una curva di 4.ª classe generata da quelle schiere proiettive e quindi tangente alle rette $a_1 \dots a_4$. Tale curva come inscritta in ∞^1 ottalateri polari di C^4 è ad essa coniugata, dunque raccogliamo il risultato:

Ogni quartica possiede ∞^9 ottalateri polari. Date quattro rette arbitrarie a_1, a_2, a_3, a_4 esse fanno parte di ∞^1 ottalateri polari per la quartica considerata e le ∞^1 quaterne di rette che insieme ad esse li costituiscono inviluppano una curva di 4.ª classe tangente ad a_1, a_2, a_3, a_4 e coniugata alla quartica.

42. Questo teorema può presentarsi sotto vari aspetti che forse non è inutile osservare.

Intanto può dirsi per es. che:

Date quattro rette arbitrarie, se si costruiscono le quattro schiere di curve di 2.ª classe che toccano una delle quattro rette e hanno per conica polare rispetto ad una quartica una conica coniugata al trilatero costituito dalle rette residue, si ottengono quattro schiere di un sistema ∞^2 quadratico contenuto in un sistema lineare ∞^3: ossia, rappresentato questo ∞^3 sui punti dello spazio ordinario, le quattro schiere sono rappresentate da quattro generatrici di una rigata quadrica.

Ancora: prendiamo quattro rette arbitrarie $a_1 \dots a_4$ e consideriamo una qualunque curva di 3.ª classe K^3 apolare a C^4 e inscritta nel quadrilatero $a_1 \dots a_4$. La curva K^3 staccherà dalla curva di 4.ª classe K^4 coniugata a C^4 e inviluppata dalle ∞^1 quaterne che con $a_1 \dots a_4$ dànno ottalateri polari di C^4, oltre le tangenti $a_1 \dots a_4$, altre otto tangenti. Sia l una di queste tangenti: essa insieme ad altre tre rette m, n, p tangenti a K^4 dà un ottalatero polare a C^4 che è circoscritto anche a K^3, perchè K^3 ne tocca già cinque lati, dunque m, n, p sono altre tre di quelle otto tangenti. Ne deduciamo il teorema:

Data una curva di 3.ª classe K^3 apolare alla quartica C^4 e quattro sue tangenti qualunque, queste fanno parte di due ottalateri polari di C^4 circoscritti alla curva K^3. I 12 lati di questi ottalateri costituiscono su K^3 un sistema completo di intersezioni.

§ 5. — Gli altri polilateri polari.

43. Resta ormai che noi diciamo qualche cosa dei polilateri polari di 9, 10 ed 11 lati della quartica fondamentale C^4. Quanto ai 12-, 13-, 14-lateri polari, noi non ce ne occuperemo, perchè la loro costruzione segue immediatamente da semplici considerazioni generali (n.° 15).

44. Consideriamo sei rette date ad arbitrio $a_1 \dots a_6$ e vediamo se è possibile trovare altre tre rette $a_7\, a_8\, a_9$ in modo che l'ennalatero $a_1 \dots a_9$ sia polare per la quartica C^4.

Ma se ciò è possibile, la K^2 inscritta in $a_5 \dots a_9$ deve avere per conica polare una conica coniugata al quadrilatero $a_1 \dots a_4$ e deve toccare le rette a_5, a_6 date, dunque appartiene a una schiera determinata. Così appartengono a schiere determinate le K^2 inscritte nei pentalateri $a_4\, a_6 \dots a_9$, $a_3\, a_6 \dots a_9$, $a_2\, a_6 \dots a_9$.

Ora queste quattro schiere appartengono a un medesimo sistema lineare ∞^3 — quello costituito dalla K^2 che toccano la retta a_6 e hanno per conica polare una conica coniugata al pentalatero $a_1 \dots a_5$ — dunque, come si vede subito riferendo proiettivamente questo sistema ∞^3 ai punti dello spazio, si potranno in due modi differenti scegliere quattro K^2, una per schiera, in modo che esse appartengano a una medesima schiera. Siano a_7, a_8, a_9 le ulteriori rette-basi, oltre a_6, della schiera formata da quattro di queste K^2: allora l'ennalatero $a_1 \dots a_9$ è polare per la C^4.

Noi lasciamo al lettore la cura di provare quest'ultima asserzione: qui ci limiteremo ad osservare che, volendo, il teorema ora trovato può enunciarsi così:

Sei tangenti qualunque di una curva di 3.ª classe K^3 apolare a C^4 appartengono a due e due soli ennalateri polari di C^4 circoscritti a K^3. Le

12 tangenti di K^3 che così si ottengono costituiscono su K^3 un sistema completo di intersezione.

Un'altra costruzione degli ennalateri polari potrebbe darsi partendo dalla proprietà che in un ennalatero polare di C^4 ogni ettalatero è polare per la cubica polare del vertice complementare e assumendo come dati cinque lati $a_1 \dots a_5$ e uno dei vertici del quadrilatero costituito dai quattro lati rimanenti: ma noi non crediamo opportuno insistere maggiormente su ciò.

In ogni modo si ha che:

Una quartica possiede ∞^{12} ennalateri polari.

45. Siano ora date sette rette qualunque $a_1 \dots a_7$: dico che esse fanno parte di ∞^1 decalateri polari per la C^4: per modo che:

Ogni quartica possiede ∞^{15} decalateri polari.

Infatti diciamo $a_8\, a_9\, a_{10}$ tre rette che, eventualmente, formino con quelle sette un decalatero polare di C^4: la K^2 inscritta nel pentalatero $a_6\, a_7 \dots a_{10}$ deve essere coniugata alla conica polare della K^2 inscritta nel pentalatero complementare e deve toccare a_6, a_7, dunque appartiene a un tessuto determinato.

Così appartengono a tessuti determinati le K^2 inscritte nei pentalateri $a_5\, a_7 \dots a_{10}$, $a_4\, a_7 \dots a_{10}$, $a_3\, a_7 \dots a_{10}$, $a_2\, a_7 \dots a_{10}$. Questi cinque tessuti appartengono a un medesimo sistema lineare ∞^4 perchè hanno tutti la retta a_1 come retta-base, dunque si possono in ∞^1 modi scegliere cinque K^2, una per tessuto, in modo che essi appartengano a una medesima schiera.

Allora se $a_8\, a_9\, a_{10}$ sono le ulteriori rette-basi di una di queste schiere, il decalatero $a_1 \dots a_{10}$ è, come subito si vede, polare per la quartica C^4.

46. Consideriamo infine nove rette qualunque $a_1 \dots a_9$: si tratta di costruire un undici-latero che sia polare per la quartica C^4 ed abbia nove lati nelle nove rette date.

Detti a_{10}, a_{11} i due lati rimanenti di un tale eventuale undici-latero, osserviamo che il punto $a_{10,11}$ deve trovarsi sulla retta r polare rispetto a C^4 della curva di 3.ª classe inscritta nell'ennalatero $a_1 \dots a_9$: poi la curva di 3.ª classe inscritta nell'ennalatero $a_3 \dots a_{11}$ deve avere per retta polare una retta passante pel punto a_{12} e deve toccare $a_3 \dots a_9$, dunque appartiene a una schiera nota.

Così appartengono a schiere note le curve di 3.ª classe inscritte negli ennalateri $a_2\, a_4 \dots a_{11}$ e $a_1\, a_4 \dots a_{11}$.

Ora queste tre schiere appartengono a un sistema lineare ∞^3 perchè hanno tutte le rette $a_4 \dots a_9$ fra le rette basi, dunque si possono riferire projettivamente in modo che le curve corrispondenti appartengano a una schiera.

Le terne di tangenti, oltre $a_4 \dots a_9$, comuni alle terne di curve corrispondenti generano una curva di 6.ª classe (aventi in $a_4, \dots a_9$ sei tangenti doppie e in a_1, a_2, a_3, tre tangenti semplici) e quindi formano un trilatero i cui vertici descrivono una curva del 6.° ordine (*). Ne segue che possono trovarsi sei terne di curve corrispondenti tali che delle tre tangenti ulteriori

(*) Per maggior comodità di linguaggio dimostriamo qui il teorema correlativo; ossia, facciamo vedere che se due fasci di cubiche proiettivi hanno sei punti-base comuni, i lati del triangolo costituito dai tre punti ulteriori comuni a due curve corrispondenti inviluppano una curva della 6.ª classe.

Intanto il luogo dei vertici di questo triangolo è una curva del 6.° ordine C^6 con sei punti doppi nei sei punti-base comuni dei due fasci e passanti semplicemente per gli altri punti-base; quindi se diciamo corrispondenti due raggi di un fascio P quando proiettano da P due vertici di uno di questi ∞^1 triangoli, viene stabilita nel fascio una corrispondenza simmetrica (12, 12).

Sia a una delle 24 coincidenze: o a è lato di un effettivo triangolo e allora essa assorbe due coincidenze ed è una tangente dell'inviluppo richiesto, oppure a proietta da P un punto in cui due curve corrispondenti dei due fasci si toccano, e allora essa è da considerarsi come una coincidenza semplice e non tocca l'inviluppo suddetto.

Per vedere quante volte si verifica quest'ultimo caso, consideriamo i due fasci di cubiche come immagini delle sezioni piane prodotte in una superficie del 3.° ordine da due fasci di piani r ed s, la superficie del 3.° ordine essendo rappresentata punto per punto sul piano dei due fasci.

Se due cubiche qualunque dei due fasci si toccano in un punto A, le sezioni piane corrispondenti si toccano nel punto obiettivo A' e delle tangenti in A' alla superficie una si appoggia alle due rette r ed s. Quindi per trovare l'ordine della curva luogo dei punti di contatto di cubiche dei due fasci basta trovare l'ordine della curva gobba della superficie costituita dai punti di contatto delle tangenti appoggiate ad r ed s, di cui essa è l'immagine.

Ora questa curva gobba incontra r nei tre punti ove essa taglia la superficie e poi incontra ulteriormente un piano generico σ per r, nei sei punti di contatto delle sei tangenti condotte dal punto $s\sigma$ alla cubica sezione di σ colla superficie, dunque essa è del nono ordine. Inoltre le sei rette della superficie rappresentate dai sei punti-base comuni ai due fasci sono trisecanti di questa curva, perchè le tangenti alla superficie lungo i punti di una retta costituiscono una congruenza del 2.° ordine e della 1.ª classe e quindi ve ne sono tre che si appoggiano ad r ed s, dunque la sua immagine è una curva del nono ordine che ha sei punti tripli in questi sei punti-base e che passa semplicemente per gli altri punti-base dei due fasci. (Cfr. la bella Nota del Berzolari, *Sulle curve piane che in due dati fasci hanno un semplice o un doppio contatto oppure si osculano.* Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XXXI.) I 12 punti che questa curva del 9.° ordine ha comuni con C^6, fuori dei punti-base, mostrano che il caso in discorso si verifica 12 volte, dunque il teorema è dimostrato.

ad esse comuni due si incrocino sulla retta r, e quindi, come subito si vede, vi sono sei undici-lateri polari della quartica C^4 che abbiano nove lati nelle nove rette date.

Ne riceviamo il teorema:

Ogni quartica possiede ∞^{18} *undici-lateri. Nove rette generiche del piano appartengono a sei di questi undici-lateri.*

47. Con ciò il problema delle figure polari delle quartiche piane è completamente risoluto; o se si vuole è risoluto il problema:

Dato un sistema lineare ∞^{13} *di curve di 4.ª classe (del 4.º ordine) trovare gli r-lateri (r-goni)* ($6 \leq r \leq 14$) *nei quali (ai quali) sono inscritte (circoscritte)* ∞^{14-r} *curve del sistema.*

Sur les formules qui servent à représenter la variation d'une intégrale définie multiple sous la forme propre aux applications.

(*Du Prof.* G. Sabinine, *Moscou.*)

Suivant le procédé indiqué dans les deux Memoires de M. Clebsch: *Ueber die Reduction der zweiten Variation auf die einfachste Forme* (*) et *Ueber die zweite Variation vielfacher Integrale* (**), on peut toujours faire en sorte que la recherche du maximum ou du minimum absolu d'une intégrale définie multiple, dans laquelle se trouve sous le signe $\int$ la fonction contenante les variables d'intégration, les fonctions inconnues de ces variables et les dérivées partielles des divers ordres de ces fonctions par rapport aux variables d'intégration, — soit ramenée à la recherche du maximum ou du minimum relatif d'une intégrale définie multiple dans laquelle se trouve sous le signe $\int$ la fonction contenante les variables d'intégration, les fonctions inconnues de ces variables et les dérivées partielles du premier ordre de ces fonctions par rapport aux variables d'intégration. D'autre coté, la recherche du maximum ou du minimum relatif, comme l'on sait, peut être ramenée à la recherche du maximum ou du minimum absolu de telle manière, que l'ordre des dérivées partielles des fonctions inconnues par rapport aux variables d'intégration reste le même.

C'est pour cela que dans l'article présent, ayant l'intention de deduire les deux formules qui servent à répresenter la variation δu de l'intégrale dé-

(*) *Journal von Crelle,* Tome 55.
(**) *Journal von Crelle,* Tome 56.

finie multiple u:

$$u = \int v\, d\,x_1\, d\,x_2 \ldots d\,x_i \; (*), \tag{1}$$

sous la forme propre à l'application à la question du maximum ou du minimum de l'intégrale u (1), je suppose, uniquement pour plus de simplicité, que l'on cherche le maximum ou le minimum absolu de l'intégrale u (1), dans laquelle sous le signe $\int$ se trouve la fonction v, contenante les variables d'intégration x_1, $x_2, \ldots$ x_i, les fonctions inconnues y_1, $y_2, \ldots$ y_s (**) de ces variables et derivées partielles du premier ordre de ces fonctions par rapport à x_1, x_2, x_i. Ces derivées seront désignées dans la suite par:

$$p_{1,1},\ p_{1,2}, \ldots\ p_{1,i}, \ldots\ p_{s,i},\ p_{s,2}, \ldots\ p_{s,i},$$

et en général:

$$p_{s,g} = \frac{d\,y_s}{d\,x_g} \; (***).$$

D'après la notion d'une intégrale définie multiple, ses limites sont définies par cette condition: *les limites de chacune des variables d'intégration, en général, sont des fonctions des variables qui la precèdent.* De cette manière, les limites $x_{i,2}$ et $x_{i,1}$ de la variable x_i en général sont des fonctions de x_1, $x_2, \ldots$ x_{i-1}, mais elles doivent être indépendantes de x_i. Les limites $x_{i-1,2}$ et $x_{i-1,1}$ de la variabile x_{i-1} sont en général des fonctions de x_1, $x_2, \ldots$ x_{i-2}, mais elles doivent être indépendantes de x_{i-1} et de x_i. Ainsi de suite, jusqu'aux limites $x_{1,2}$ et $x_{1,1}$ de la variabile x_1 qui doivent être indépendantes de x_1, $x_2, \ldots$ et x_i.

(*) D'après la notation de Fourrier, nous devrions écrire sous la forme suivante:

$$\int_{x_{1,1}}^{x_{1,2}} \ldots \int_{x_{g,1}}^{x_{g,2}} \ldots \int_{x_{i,1}}^{x_{i,2}} v\, d\,x_1\, d\,x_2 \ldots d\,x_i,$$

mais pour semplifier les écritures, nous nous bornerons à écrire à sa place:

$$\int v\, d\,x_1\, d\,x_2 \ldots d\,x_i,$$

et afin d'éviter toute chance d'erreur, nous n'emploierons jamais cette dernière expression dans une acception différente.

(**) s étant un des nombres $1,\ 2, \ldots\ s$.

(***) g étant un des nombres $1,\ 2, \ldots\ i$.

La nature des valeurs limites de y_s étant déterminée par la méthode des intégrations successives, elle est la même que celle des limites de l'intégrale u (1) de telle sorte que chacune des deux limites de y_s:

$$\Big|_{x_g}^{x_{g,2}} y_s \quad \text{et} \quad \Big|_{x_g}^{x_{g,1}} y_s \ (*),$$

est indépendante de x_g, $x_{g-1}, \ldots x_i$, et de toutes valeurs limites de y_s aucune ne contient la variable x_i; à cela près les valeurs limites de y_s pourront être des fonctions quelconques.

Les variations de x_g étant désignées par les signes caracteristiques δ (**), la variation δu, d'après la formule d'Ostrogradsky, se representera par:

$$\delta u = \int \delta v \, d x_1 \ldots d x_i + \int \Sigma_g \frac{d (v \, \delta x_g)}{d x_g} d x_1 \, d x_2 \ldots d x_i \ (***). \qquad (2)$$

(*) La caracteristique $\Big|$, comme l'on sait, est le signe de substitution, c'est-à-dire, un signe propre à indiquer que dans une fonction quelconque dépendante d'une quantité pareillement quelconque on doit remplacer cette dernière par une nouvelle quantité pareillement quelconque. Ainsi:

$$\Big|_{x_g}^{x_{g,2}} y_s,$$

exprimera que devient la fonction y_s, quand la variable x_g, qui entre dans la fonction y_s, reçoit la valeur $x_{g,2}$. Le même signe avec deux limites, l'une inférieure $x_{g,1}$, l'autre supérieure $x_{g,2}$.

$$\Big|_{x_{g,1}}^{x_{g,2}} y_s,$$

exprimera la différence entre les résultats des deux substitutions $x_g = x_{g,2}$, $x_g = x_{g,1}$, dans la fonction y_s.

(**) La variation tronquée d'une quelconque des variables indépendantes se confond avec sa variation totale, c'est pourquoi le même signe caractéristique δ sert à denoter chacune de ces deux variations.

(***) M. Sarrus dans son Mémoire qui étant intitulé: *Recherches sur le calcul des variations,* est inseré dans les Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des science de l'Institut national de France (Tome X, 1848), détermine la variation de l'intégrale définie multiple u suivant la méthode d'Euler; pour cela (ar. 64, p. 49), il prend

En nommant δy_s et $\delta p_{s,g}$ respectivement la variation tronquée de y_s et de $p_{s,g}$, on peut dire que δv n'est autre chose que la différentielle de v, due aux accroissements $\delta y_1 \ldots \delta y_s$ de $y_1 \ldots y_s$ et aux accroissements:

$$\frac{d\,\delta\, y_s}{d\,x_1} \ldots \frac{d\,\delta\, y_s}{d\,x_i},$$

---

l'intégrale définie multiple U:

$$U = \int_{X_{1,1}}^{X_{1,2}} d\,X_1 \int_{X_{2,1}}^{X_{2,2}} d\,X_2 \ldots \int_{X_{i,1}}^{X_{i,2}} V\,d\,X_i, \tag{a}$$

par rapport aux variables independantes $X_1, X_2, \ldots X_i$ qui sont des fonctions arbitraires du paramètre t et de $x_1, x_2, \ldots x_i$ telles que pour $t = 0$ elles deviennent respectivement égales à $x_1, x_2, \ldots x_i$. Les limites $X_{i,2}$ et $X_{i,1}$ de X_i en général sont des fonctions de X_1, $X_2, \ldots X_{i-1}$ et du t, mais indépendantes de X_i. Les limites $X_{i-1,2}$ et $X_{i-1,1}$ de X_{i-1} en général sont des fonctions de $X_1, X_2, \ldots X_{i-2}$ et du t, mais indépendantes de X_{i-1} et de X_i. Ainsi de suite jusqu'aux limites $X_{1,2}$ et $X_{1,1}$ qui sont des fonctions de t indépendantes de $X_1, X_2, \ldots X_i$. La fonction arbitraire Y_s contenante $X_1, X_2, \ldots X_i$ et paramètre t est telle que pour $t = 0$ elle devient égale à y_s. V est la même fonction de $X_1, X_2, \ldots X_i$, de Y_s et des derivées partielles de Y_s par rapport à $X_1, X_2, \ldots X_i$ que v l'est de x_1, $x_2, \ldots x_i$ de y_s et des derivées partielles de y_s par rapport à $x_1, x_2, \ldots x_i$. M. Sarrus reçoit la variation de l'intégrale u, en différentiant l'intégrale $U(a)$, par rapport à t comme si $X_1, X_2, \ldots X_i$ ne dépendaient point de ce paramètre. Or cette manière de differentier l'intégrale $U(a)$ par rapport à t est inadmissible. En effet: quelle qu'elle soit la méthode qui sert à déterminer la variation d'une intégrale définie multiple; si les limites de l'intégrale $u(1)$ sont variées, les variables $x_1, x_2, \ldots x_i$ doivent être différentiées par rapport à la caractéristique δ, ce qu'il suit de l'équation fondamentale:

$$d\,\Delta\,u = \Delta\,d\,u, \tag{b}$$

Δ, étant la caractéristique de la variation totale.

Cette équation découle des principes du calcul de variation; de là il resulte que si l'on trouve en général la variation de l'integrale u suivant la méthode d'Euler, en différentiant l'intégrale $U(a)$ par rapport à t, on ne peut pas admettre que $X_1, X_2, \ldots X_i$ sont indépendantes de t, on doit necessairement differentier $X_1, X_2, \ldots X_i$ par rapport à t. En conséquence de ce que M. Sarrus trouve la variation de l'intégrale u, en differentiant l'integrale $U(a)$ de la manière qui est inadmissible, il parvient à la formule inéxacte (p. 50):

$$\left.\begin{aligned} \delta u = \int \delta v\,d\,x_1 \ldots d\,x_i + \iint_{x_{i,1}}^{x_{i,2}} v\,\bar{\delta}\,\mathsf{X}_i\,d\,x_1 \ldots d\,x_{1-2} + \iint_{x_{i-1,1}}^{x_{i-1,2}} v\,\bar{\delta}\,\mathsf{X}_{i-1}\,d\,x_1 \ldots d\,x_{1\ 2}\,d\,x_i + \cdots \\ + \ldots \iint_{x_{g,1}}^{x_{g,2}} v\,\bar{\delta}\,\mathsf{X}_g\,d\,x_1 \ldots d\,x_{g-1}\,d\,x_{g+1} \ldots d\,x_i + \ldots + \iint_{x_{1,1}}^{x_{1,2}} v\,\bar{\delta}\,\mathsf{X}_1\,d\,x_2 \ldots d\,x_i. \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

de $p_{s,1} \dots p_{s,i}$ de sorte que, si l'on pose pour abréger:

$$N_s = \frac{d\,v}{d\,y_s} \cdots P_{s.g} = \frac{d\,v}{d\,p_{s,g}},$$

$$\left.\begin{aligned} \delta\,v &= \Sigma_s\,N_s\,\delta\,y_s + \Sigma_s\,\Sigma_g\,P_{s,g}\,\frac{d\,\delta\,y_s}{d\,x_g} = \\ &= \Sigma_s\left(N_s - \Sigma_g\,\frac{d\,P_{s,g}}{d\,x_g}\right)\delta\,y_s + \Sigma_s\,\Sigma_g\,\frac{d\,(P_{s,g}\,\delta\,y_s)}{d\,x_g}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

on aura donc:

$$\left.\begin{aligned} \delta\,u &= \int \Sigma_s\left(N_s - \Sigma_g\,\frac{d\,P_{s,g}}{d\,x_g}\right)\delta\,y_s\,d\,x_1 \dots d\,x_i + \\ &+ \int \Sigma_s\,\Sigma_g\left(\frac{d\,P_{s,g}\,\delta\,y_s}{d\,x_g}\right) d\,x_1 \dots d\,x_i + \int \Sigma_g\,\frac{d\,(v\,\delta\,x_g)}{d\,x_g}\,d\,x_1 \dots d\,x_i. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Pour ce que la variation $\delta\,u$ aie reçu la forme propre à l'application à la question du maximum ou du minimum de l'integrale $u\,(1)$, il ne reste qu'à faire les transformations au moyen de lesquelles chacune des intégrales:

$$\int \Sigma_s\,\Sigma_g\,\frac{d\,(P_{s.g}\,\delta\,y_s)}{d\,x_y}\,d\,x_1 \dots d\,x_i, \tag{5}$$

et:

$$\int \Sigma_g\,\frac{d\,(v\,\delta\,x_g)}{d\,x_y}\,d\,x_1 \dots d\,x_i, \tag{6}$$

La différence entre la formule (c) et celle (2) de M. Ostrogradsky fait voir que l'inéxactitude de la formule (c) consiste en ce que dans tous les termes, qui dans le seconde membre de la formule (c) suivent le premier, sont placées les variation tronquées des valeurs extrêmes des variables d'intégration au lieu des expressions qui dans le second membre de la formule (8) se trouvent engagées sous les caracteristiques $I\,(x_g)$, determinés par les formules (10). En conséquence de la difference indiquée entre la formule (c) et celle (2) de M. Ostrogradsky il est impossible de rapprocher la première de la seconde. Quant au rapprochement de ces deux formules, exposé par M. Sarrus dans son Mémoire (par. 4, ch. 2, p. 52-55), ce rapprochement est fondé sur l'admission qui est identique (p. 54, la première et la troisième ligne, audéssus) avec celle qui sera exprimée par chacune de deux égalités:

$$\Big|^{x_{g,2}} \delta\,x_g = \bar{\delta}\,x_{g,2}, \quad \Big|^{x_{g,1}} \delta\,x_g = \bar{\delta}\,x_{g,1}, \tag{d}$$

au cas, où $g < i$; mais la remarqué (§ 1) dans la démonstration de la formule (8) montre qu'au cas où $g < i$ chacune de deux égalités (d) est inadmissible. D'après Sarrus, par $\bar{\delta}\,\mathbf{x}_g$ nous avons designé respectivement les variations tronquées de valeurs limites de variables, c'est-à-dire en couronnant d'un trait la caracteristique ordinaire des variations.

se réduit à la somme des intégrales dont chacune est de l'ordre $(i-1)$. On obtiendra les deux formules qui servent à faire les transformations indiquées, en les déduisant de ces deux formules:

$$\left.\begin{aligned}
&\int \Sigma_s \, \Sigma_g \frac{d\,(P_{s,g}\,\delta\, y_s)}{d\,x_y}\, d\,x_1 \ldots d\,x_i - \\
&- \int \Big|_{x_{i,1}}^{x_{i,2}} \Sigma_s\, \delta\, y_s \left[P_{s,i} - \frac{d\,x_i}{d\,x_{i-1}} P_{s,i-1} \ldots - \frac{d\,x_i}{d\,x_1} P_{s,1}\right] d\,x_1 \ldots d\,x_{i-1} = \\
&= \int \Big|_{x_{i-1,1}}^{x_{i-1,2}} \Sigma_g\, \delta\, y_s \left[P_{s,i-1} - \frac{d\,x_{i-1}}{d\,x_{i-2}} P_{s,i-2} \ldots - \frac{d\,x_{i-1}}{d\,x_1} P_{s,1}\right] d\,x_1 \ldots d\,x_{i-2}\, d\,x_i \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\int \Big|_{x_{y,1}}^{x_{y,2}} \Sigma_s\, \delta\, y_s \left[P_{s,g} - \frac{d\,x_g}{d\,x_{g-1}} P_{s,g\;1} \ldots - \frac{d\,x_g}{d\,x_1} P_{s,1}\right] d\,x_1 \ldots d\,x_{g-1}\, d\,x_{g+1} \ldots d\,x_{i-2}\, d\,x_i \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\int \Big|_{x_{2,1}}^{x_{1,2}} \Sigma_s\, \delta\, y_s \left[P_{s,2} - \frac{d\,x_2}{d\,x_1} P_{s,1}\right] d\,x_1\, d\,x_3 \ldots d\,x_i + \int \Big|_{x_{1,1}}^{x_{1,2}} \Sigma_s\, \delta\, y_s\, P_{s,1}\, d\,x_2 \ldots d\,x_i .
\end{aligned}\right\} (7)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \Sigma_g \frac{d\,(v\,\delta\, x_y)}{d\,x_y}\, d\,x_1 \ldots d\,x_i - \int \Big|_{x_{i,1}}^{x_{i,2}} v\,\bar{\delta}\,\mathsf{x}_i\, d\,x_1 \ldots d\,x_{i-1} = \\
&= \int \Big|_{x_{i-1,1}}^{x_{i-1,2}} v\, I\,(x_{i-1})\, d\,x_1 \ldots d\,x_{i-2}\, d\,x_i \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \int \Big|_{x_{g,1}}^{x_{g,2}} v\, I\,(x_g)\, d\,x_1 \ldots d\,x_{g-1}\, d\,x_{g+2} \ldots d\,x_i \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \int \Big|_{x_{1,1}}^{x_{1,2}} v\, I\,(x_1)\, d\,x_2 \ldots d\,x_i ,
\end{aligned}\right\} (8)$$

où $\Big|^{x_{i,1}} \bar{\delta}\,\mathsf{x}_i$ et $\Big|^{x_{i,2}} \bar{\delta}\,\mathsf{x}_i$, étant les variations tronquées des valeur limites de $\Big|^{x_{i,2}} x_i$

et $\left|^{x_{i,1}} x_i\right.$ sont égales:

$$\left.\begin{aligned}
\left|^{x_{i,2}} \bar{\delta} \mathrm{x}_i\right. &= \left|^{x_{i,2}} \left[\delta x_i - \frac{d x_i}{d x_{i-1}} d x_{i-1} \dots - \frac{d x_i}{d x_1} \delta x_1\right]\right. \\
\left|^{x_{i,1}} \bar{\delta} \mathrm{x}_i\right. &= \left|^{x_{i,1}} \left[\delta x_i - \frac{d x_i}{d x_{i-1}} d x_{i-1} \dots - \frac{d x_i}{d x_1} \delta x_1\right]\right.,
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

$$\left.\begin{aligned}
\left|^{x_{i-1,2}} I(x_{i-1})\right. &= \left|^{x_{i-1,2}} \left[\delta x_{i-1} - \frac{d x_{i-1}}{d x_{i-2}} \delta x_{i-2} \dots - \frac{d x_{i-1}}{d x_1} \delta x_1\right]\right. \\
\left|^{x_{i-1,1}} I(x_{i-1})\right. &= \left|^{x_{i-1,1}} \left[\delta x_{i-1} - \frac{d x_{i-1}}{d x_{i-2}} \delta x_{i-2} \dots - \frac{d x_{i-1}}{d x_1} \delta x_1\right]\right. \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\left|^{x_{g,2}} I(x_g)\right. &= \left|^{x_{g,2}} \left[\delta x_g - \frac{d x_g}{d x_{g-1}} \delta x_{g-1} \dots - \frac{d x_g}{d x_1} \delta x_1\right]\right. \\
\left|^{x_{2,1}} I(x_g)\right. &= \left|^{x_{g,1}} \left[\delta x_g - \frac{d x_g}{d x_{g-1}} \delta x_{g-1} \dots - \frac{d x_g}{d x_1} \delta x_1\right]\right. \\
\left|^{x_{1,2}} I(x_1)\right. = \left|^{x_{1,2}} \delta x_1\right. &\qquad \left|^{x_{1,1}} I(x_1)\right. = \left|^{x_{1,1}} \delta x_1\right..
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Dans le cas particulier où l'intégrale u (1) s'étend à toutes variables indépendantes qui verifient l'inégalité:

$$L < 0.$$

L étant une fonction algébrique entière et du degré pair relativement à toutes variables indépendantes, les deux limites d'une variable quelconque se confondent ou deviennent égales entre elles chaque fois que l'une quelconque des variables qui précèdent atteint sa valeur extrême; alors disparaissent tous les termes du second membre de chacune des deux formules (7) et (8); on aura donc:

$$\left.\begin{aligned}
&\int \Sigma_s \Sigma_g \frac{d (P_{s,g} \delta y_s)}{d x_g} d x_1 \dots d x_i = \\
&= \int \Sigma_s \left|_{x_{i,1}}^{x_{i,3}} \delta y_s \left[P_{s,i} - \frac{d x_i}{d x_{i-1}} P_{s,i-1} \dots - \frac{d x_i}{d x_1} P_{s,1}\right] d x_1 \dots d x_{s-1},\right.
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

$$\int \Sigma_g \frac{d\,(v\,\delta\,x_y)}{d\,x_g}\,d\,x_1 \ldots d\,x_i = \int \Big|_{x_{i,1}}^{x_{i,2}} v\,\bar{\delta}\,x\,d\,x_1 \ldots d\,x_{i-1}. \tag{12}$$

Ces deux formules (11) et (12) sont applicables à la question du maximum ou du minimum de l'intégrale u (1), c'est-à-dire, sont celles qui servent à représenter la variation δu sous la forme, propre à l'application à la question du maximum ou du minimum de l'intégrale u (1).

Pour ce que dans le cas le plus général les deux formules applicables à la question du maximum ou du minimum de l'intégrale u (1) soient déduites de deux formules (7) et (8), il faut nécessairement dans ces formules (7) et (8) faire une modification d'après ces deux propositions:

La première proposition. Pour ce que la formule (7) soit applicable à la question du maximum ou du minimum de l'intégrale définie multiple u (1), il est necessaire que soient égales à zéro les valeurs limites de la variation δy_s, qui se trouvent sous le signe $\int$ dans tous les termes du seconde membre de la formule (7).

La seconde proposition. Pour ce que la formule (8) soit applicable à la question du maximum ou du minimum de l'intégrale définie multiple u (1), il est necessaire que soient égales à zéro les limites de la variation δx_g qui se trouvent sous le signe $\int$ dans tous les termes du seconde membre de la formule (8).

La démonstration des deux formules (7) et (8) fait l'objet du premier paragraphe.

La démonstration des deux nos proposition fait l'objet du second paragraphe.

Dans le troisième paragraphe je démontre la troisième proposition que l'on peut énoncer comme il suit: on peut toujours aux variations δy_s et δx_g donner la forme telle que ces variations, étant représentés sous cette forme, auront toute la généralité qui est necessaire pour resoudre la question du maximum ou du minimum de l'intégrale u (1), bien que les valeurs limites de ces variation δy_s et δx_g (excepté celles qui seront obtenues si dans les variations δy_s et δx_g la variable x_i est remplacée par ses valeurs limites $x_{i,2}$ et $x_{i,1}$), en même temps doivent subir des restrinctions, étant assujetties à satisfaire aux conditions de nos deux propositions.

§ 1.

D'après le procédé que nous emploirons pour démontrer les deux formules (7) et (8) nous éxposerons la première partie du 1.r §, en faisant usage de la notation de Fourrier.

Prenons l'intégrale de l'ordre $(i-g)$:

$$\int_{x_{g+1,1}}^{x_{g+1,2}}\int_{x_{g+2,1}}^{x_{g+2,2}}\int_{x_{g+3,1}}^{x_{g+3,2}}\cdots\cdots\int_{x_{i-1,1}}^{x_{i-1,2}}\int_{x_{i,1}}^{x_{i,2}} P_{s,g}\,\partial y_s\,d x_{g+1}\,d x_{g+2}\ldots d x_i.$$

En différentiant cette intégrale par rapport à x_g on aura:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\int_{x_{g+1,1}}^{x_{g+1,2}}\int_{x_{g+2,1}}^{x_{g+2,2}}\int_{x_{g+3,1}}^{x_{g+3,2}}\cdots\int_{x_{i,1}}^{x_{i,2}} P_{s,g}\,\partial y_s\,d x_{g+1}\,d x_{g+2}\ldots d x_i}{d x_g}=\\&=\left|\frac{d x_{g+1}}{d x_g}\right|_{x_{g+1,1}}^{x_{g+1,2}}\int_{x_{g+2,1}}^{x_{g+2,2}}\int_{x_{g+3,1}}^{x_{g+3,2}}\cdots\int_{x_{i-1,1}}^{x_{i-1,2}}\int_{x_{i,1}}^{x_{i,2}} P_{s,g}\,\partial y_s\,d x_{g+2}\,d x_{g+3}\ldots d x_i+\\&+\int_{x_{g+1,1}}^{x_{g+1,2}} d x_{g+1}\,\frac{d}{d x_g}\int_{x_{g+2,1}}^{x_{g+2,2}}\int_{x_{g+3,1}}^{x_{g+3,2}}\cdots\int_{x_{i-1,1}}^{x_{i-1,2}}\int_{x_{i,1}}^{x_{i,2}} P_{s,g}\,\partial y_s\,d x_{g+2}\,d x_{g+3}\ldots d x_i.\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

De la même manière on recevra:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\int_{x_{g+2,1}}^{x_{g+2,2}}\int_{x_{g+3,1}}^{x_{g+3,2}}\cdots\int_{x_{i-1,1}}^{x_{i-1,2}}\int_{x_{i,1}}^{x_{i,2}} P_{s,g}\,\partial y_s\,d x_{g+2}\,d x_{g+3}\ldots d x_i}{d x_g}=\\&=\left|\frac{d x_{g+2}}{d x_g}\right|_{x_{g+2,1}}^{x_{g+2,2}}\int_{x_{g+3,1}}^{x_{g+3,2}}\cdots\int_{x_{i-1,1}}^{x_{i-1,2}}\int_{x_{i,1}}^{x_{i,2}} P_{s,g}\,\partial y_s\,d x_{g+3}\ldots d x_i+\\&+\int_{x_{g+2,1}}^{x_{g+2,2}} d x_{g+2}\,\frac{d}{d x_g}\int_{x_{g+3,1}}^{x_{g+3,2}}\cdots\int_{x_{i-1,1}}^{x_{i-1,2}}\int_{x_{i,1}}^{x_{i,2}} P_{s,g}\,\partial y_s\,d x_{g+3}\ldots d x_i\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\int\limits_{x_{i-1,1}}^{x_{i-2,2}}\int\limits_{x_{i,1}}^{x_{i,2}} P_{s,g}\,\delta y_s\,dx_{i-1}\,dx_i}{dx_g} = \left|\frac{dx_{i-1}}{dx_g}\right|_{x_{i-1,1}}^{x_{i-1,2}} \int\limits_{x_{i,1}}^{x_{i,2}} P_{s,g}\,\delta y_s\,dx_i + \int\limits_{x_{i-1,1}}^{x_{i-1,2}} dx_{i-1}\frac{d}{dx_g}\int\limits_{x_{i,1}}^{x_{i,2}} P_{s,g}\,\delta y_s\,dx_i \\
&\frac{d\int\limits_{x_{i,1}}^{x_{i,2}} P_{s,g}\,\delta y_s\,dx_i}{dx_g} = \left|\frac{dx_i}{dx_g}P_{s,g}\,\delta y_s\right|_{x_{i,1}}^{x_{i,2}} + \int\limits_{x_{i,1}}^{x_{i,2}} \frac{d(P_{s,g}\,\delta y_s)}{dx_g}\,dx_i.
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Si dans le second terme du second membre de l'égalité (13) on fait les substitutions successives qui consistent à remplacer le premier nombre de chacune des égalités (14) par le second membre de la même égalité, on obtiendra :

$$\frac{d\int\limits_{x_{g+1,1}}^{x_{g+1,2}}\int\limits_{x_{g+2,1}}^{x_{g+2,2}}\int\limits_{x_{g+3,1}}^{x_{g+3,2}}\cdots\int\limits_{x_{i-2,1}}^{x_{i-1,2}}\int\limits_{x_{i,1}}^{x_{i,2}} P_{s,g}\,\delta y_s\,dx_{g+1}\,dx_{g+2}\dots dx_{i-1}\,dx_i}{dx_g} =$$

$$= \left|\frac{dx_{g+1}}{dx_g}\right|_{x_{g+1,1}}^{x_{g+1,2}} \int\limits_{x_{g+2,1}}^{x_{g+2,2}}\int\limits_{x_{g+3,1}}^{x_{g+3,2}}\cdots\int\limits_{x_{i-1,1}}^{x_{i-1,2}}\int\limits_{x_{i,1}}^{x_{i,2}} P_{s,g}\,\delta y_s\,dx_{g+2}\dots dx_{i-1}\,dx_i +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\int\limits_{x_{g+1,1}}^{x_{g+1,2}}\int\limits_{x_{g+2,1}}^{x_{g+2,2}}\int\limits_{x_{g+3,1}}^{x_{g+3,2}}\cdots\left|\frac{dx_{i-1}}{dx_g}\right|_{x_{i-1,1}}^{x_{i-1,2}}\int\limits_{x_{i,1}}^{x_{i,2}} P_{s,g}\,\delta y_s\,dx_{g+1}\dots dx_{i-2}\,dx_i +$$

$$+\int\limits_{x_{g+1,1}}^{x_{g+1,2}}\int\limits_{x_{g+2,1}}^{x_{g+2,2}}\int\limits_{x_{g+3,1}}^{x_{g+3,2}}\cdots\int\limits_{x_{i-1,1}}^{x_{i-1,2}}\left|\frac{dx_i}{dx_g}\right|_{x_{i,1}}^{x_{i,2}} P_{s,g}\,\delta y_s\,dx_{g+1}\dots dx_{i-1} +$$

$$+\int\limits_{x_{g+1,1}}^{x_{g+1,2}}\int\limits_{x_{g+2,1}}^{x_{g+2,2}}\int\limits_{x_{g+3,1}}^{x_{g+3,2}}\cdots\int\limits_{x_{i-2,1}}^{x_{i-1,2}}\int\limits_{x_{i,2}}^{x_{i,2}} \frac{d(P_{s,g}\,\delta y_s)}{dx_g}\,dx_{g+1}\dots dx_i.$$

Si, après avoir multiplié cette égalité par $dx_1\,dx_2\dots dx_g$, nous effectuons les intégrations successives des deux nombres par rapport aux variables $x_1\,x_2\dots x_g$ entre les mêmes limites de ces variables que dans l'intégrale (1),.

on recevra :

$$\int_{x_{1,1}}^{x_{1,2}} \cdots \int_{x_{g,1}}^{x_{g,2}} \cdots \int_{x_{i-1,1}}^{x_{i-1,2}} \int_{x_{i,1}}^{x_{i,2}} \frac{d\,(P_{s,g}\,\delta\,y_s)}{d\,x_g}\,d\,x_1\,d\,x_2\ldots d\,x_i +$$

$$+\int_{x_{1,1}}^{x_{1,2}} \cdots \int_{x_{g,1}}^{x_{g,2}} \cdots \int_{x_{i-1,1}}^{x_{i-1,2}} \Big|_{x_{i,1}}^{x_{i,2}} \frac{d\,x_i}{d\,x_g}\,P_{s,g}\,\delta\,y_s\,d\,x_1\ldots d\,x_{i-1} =$$

$$= \int_{x_{1,1}}^{x_{1,2}} \cdots \int_{x_{g-1,1}}^{x_{g-1,2}} \Big|_{x_{g,1}}^{x_{g,2}} \int_{x_{g+1,1}}^{x_{g+1,2}} \cdots \int_{x_{i-1,1}}^{x_{i-1,2}} \int_{x_{i,1}}^{x_{i,2}} P_{s,g}\,\delta\,y_s\,d\,x_1\ldots d\,x_{g-1}\,d\,x_{g+1}\ldots d\,x_i -$$

$$-\int_{x_{1,1}}^{x_{2,2}} \cdots \int_{x_{g,1}}^{x_{g,2}} \Big|_{x_{g+1,1}}^{x_{g+1,2}} \frac{d\,x_{g+1}}{d\,x_g} \int_{x_{g+2,3}}^{x_{g+2,2}} \cdots \int_{x_{i-1,1}}^{x_{i-1,2}} \int_{x_{i,1}}^{x_{i,2}} P_{s,g}\,\delta\,y_s\,d\,x_1\ldots d\,x_g\,d\,x_{g+2}\ldots d\,x_{i-1}\,d\,x_i -$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\int_{x_{1,1}}^{x_{1,2}} \cdots \int_{x_{i-2,1}}^{x_{i-2,2}} \Big|_{x_{i-1,1}}^{x_{i-1,2}} \frac{d\,x_{i-1}}{d\,x_g} \int_{x_{i,1}}^{x_{i,2}} P_{s,g}\,\delta\,y_s\,d\,x_1\ldots d\,x_{i-2}\,d\,x_i\,.$$

En vertu de la condition par laquelle sont definies les limites de l'integrale u (1), la dernière égalité, sans faire usage de notation de FOURRIER, peut être répresentée sous la forme:

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{d\,(P_{s,g}\,\delta\,y_s)}{d\,x_g}\,d\,x_1\ldots d\,x_i + \int \Big|_{x_{i,1}}^{x_{i,2}} \frac{d\,x_i}{d\,x_g}\,P_{s,g}\,\delta\,y_s\,d\,x_1\ldots d\,x_{i-1} = \\
&\qquad = \int \Big|_{x_{g,1}}^{x_{g,2}} P_{s,g}\,\delta\,y_s\,d\,x_1\ldots d\,x_{g-1}\,d\,x_{g+1}\ldots d\,x_i - \\
&\qquad - \int \Big|_{x_{g+1,1}}^{x_{g+1,2}} \frac{d\,x_{g+1}}{d\,x_g}\,P_{s,g}\,\delta\,y_s\,d\,x_1\ldots d\,x_g\,d\,x_{g+2}\ldots d\,x_i \\
&\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\qquad - \int \Big|_{x_{i-1,1}}^{x_{i-1,2}} \frac{d\,x_{i-1}}{d\,x_g}\,P_{s,g}\,\delta\,y_s\,d\,x_1\ldots d\,x_{i-2}\,d\,x_i\,.
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Si, en prenant en considération la condition par laquelle sont définies les limites de l'intégrale u (1) et ayant égard à ce que le nombre des termes qui dans second membre de l'égalité (15) suivent le premier est égal à $i-1-g$, nous posons successivement $g=i-1,\ i-2\ldots 2,\ 1$, nous recevrons les $(i-1)$, égalités, qui avec celle:

$$\int \frac{d(P_{s,i}\,\delta y_s)}{d x_i}\, dx_1 \ldots dx_i - \int P_{s,i}\,\delta y_s\, dx_1 \ldots dx_{i-1} = 0,$$

composent la suite de ces équations:

$$\left.\begin{array}{l}
\displaystyle\int \frac{d(P_{s,i}\,\delta y_s)}{d x_i}\, dx_1 \ldots dx_{i-1}\, dx_i - \int P_{s,i}\,\delta y_s\, dx_1 \ldots dx_i = 0 \\[2ex]
\displaystyle\int \frac{d(P_{s,i-1}\,\delta y_s)}{d x_{i-1}}\, dx_1 \ldots dx_i + \int \Bigg|_{x_{i,1}}^{x_{i,2}} \frac{d x_i}{d x_{i-1}} P_{s,i-1}\,\delta y_s\, dx_1 \ldots dx_i = \\[2ex]
\displaystyle\qquad = \int \Bigg|_{x_{i-1,1}}^{x_{i-1,2}} P_{s,i-1}\,\delta y_s\, dx_1 \ldots dx_{i-2}\, dx_i \\[1ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[1ex]
\displaystyle\int \frac{d(P_{s,g}\,\delta y_s)}{d x_g}\, dx_1 \ldots dx_i + \int \Bigg|_{x_{i,1}}^{x_{i,2}} \frac{d x_i}{d x_g} P_{s,g}\,\delta y_s\, dx_1 \ldots dx_{i-1} = \\[2ex]
\displaystyle\qquad = \int \Bigg|_{x_{g,1}}^{x_{g,2}} P_{s,g}\,\delta y_s\, dx_1 \ldots dx_{g-1}\, dx_{g+1} \ldots dx_i = \\[2ex]
\displaystyle\qquad = \int \Bigg|_{x_{g+1,1}}^{x_{g+1,2}} \frac{d x_{g+1}}{d x_g} P_{s,g}\,\delta y_s\, dx_1 \ldots dx_g\, dx_{g+2} \ldots dx_i \\[1ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[1ex]
\displaystyle\qquad - \int \Bigg|_{x_{i-1,1}}^{x_{i-1,2}} \frac{d x_{i-1}}{d x_g} P_{s,g}\,\delta y_s\, dx_1 \ldots dx_{i-2}\, dx_i \\[1ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[1ex]
\displaystyle\int \frac{d(P_{s,1}\,\delta y_s)}{d x_1}\, dx_1 \ldots dx_i + \int \Bigg|_{x_{1,1}}^{x_{2,2}} \frac{d x_i}{d x_1} P_{s,1}\,\delta y_s\, dx_1 \ldots dx_{i-1} =
\end{array}\right\} \quad (16)$$

$$\left.\begin{array}{l}
= \int \left| \begin{smallmatrix} x_{1,2} \\ \\ x_{1,1} \end{smallmatrix} \right. P_{s,1}\, \delta y_s\, d x_1\, d x_3 \ldots d x_{i-1} - \int \left| \begin{smallmatrix} x_{2,2} \\ \\ x_{2,1} \end{smallmatrix} \right. \frac{d x_2}{d x_1} P_{s,1}\, \delta y_s\, d x_1\, d x_3 \ldots d x_i \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
- \int \left| \begin{smallmatrix} x_{i-1,2} \\ \\ x_{i-1,1} \end{smallmatrix} \right. \frac{d x_{i-1}}{d x_1} P_{s,1}\, \delta y_s\, d x_1 \ldots d x_{i-2}\, d x_i .
\end{array}\right\} \quad (16)$$

Si l'on ajoute une des i équations (16), à la somme des $(i-1)$ autres, on obtiendra :

$$\left.\begin{array}{l}
\int \Sigma_g \frac{d\,(P_{s,g}\, \delta y_s)}{d x_g}\, d x_1\, d x_2 \ldots d x_i - \\
- \int \left| \begin{smallmatrix} x_{i,2} \\ \\ x_{i,1} \end{smallmatrix} \right. \delta y_s \left[P_{s,i} - \frac{d x_i}{d x_{i-1}} P_{s,i-1} \ldots - \frac{d x_i}{d x_g} P_{s,g} \ldots - \frac{d x_i}{d x_1} P_{s,1} \right] d x_1 \ldots d x_{i-1} = \\
= \int \left| \begin{smallmatrix} x_{i-1,2} \\ \\ x_{i-1,1} \end{smallmatrix} \right. \delta y_s \left[P_{s,i-1} - \frac{d x_{i-1}}{d x_{i-2}} P_{s,i-2} \ldots - \frac{d x_{i-1}}{d x_g} P_{s,g} \ldots - \right. \\
\qquad \left. - \frac{d x_{i-1}}{d x_1} P_{s,1} \right] d x_1 \ldots d x_{i-2}\, d x_i \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ \int \left| \begin{smallmatrix} x_{g,2} \\ \\ x_{g,1} \end{smallmatrix} \right. \delta y_s \left[P_{s,g} - \frac{d x_g}{d x_{g-1}} P_{s,g-1} \ldots - \frac{d x_g}{d x_1} P_{s,1} \right] d x_1 \ldots d x_{g-1}\, d x_{g+1} \ldots d x_{i-1} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ \int \left| \begin{smallmatrix} x_{1,2} \\ \\ x_{2,1} \end{smallmatrix} \right. \delta y_s \left[P_{s,2} - \frac{d x_2}{d x_1} P_{s,1} \right] d x_1\, d x_3 \ldots d x_i + \\
+ \int \left| \begin{smallmatrix} x_{1,2} \\ \\ x_{1,1} \end{smallmatrix} \right. \delta y_s\, P_{s,1}\, d x_2 \ldots d x_1 .
\end{array}\right\} \quad (17)$$

Si dans chaque membre de cette égalité (17) nous faisons la sommation relative à l'indice s, nous aurons la formule (7).

En suivant la marche adoptée par nous dans la démonstration de la formule (17), nous parviendrons à la formule suivante :

$$
\left.
\begin{aligned}
&\int \Sigma_g \frac{d\,(v\,\delta\,x)}{d\,x_g}\,d\,x_1 \ldots d\,x_i - \\
&-\int \Big|_{x_{i,1}}^{x_{i,2}} v \left[d\,x_i - \frac{d\,x_i}{d\,x_{i-1}}\,\delta\,x_{i-1} \ldots - \frac{d\,x_i}{d\,x_1}\,\delta\,x_1\right] d\,x_1 \ldots d\,x_{i-1} = \\
&= \int \Big|_{x_{i-1,1}}^{x_{i-1,2}} v \left[\delta\,x_{i-1} - \frac{d\,x_{i-1}}{d\,x_{i-2}}\,\delta\,x_{i-2} - \ldots - \frac{d\,x_{i-1}}{d\,x_1}\,\delta\,x_1\right] d\,x_1 \ldots d\,x_{i-2}\,d\,x_i \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \int \Big|_{x_{g,1}}^{x_{g,2}} v \left[\delta\,x_g - \frac{d\,x_g}{d\,x_{g-1}}\,\delta\,x_{g-1} \ldots - \frac{d\,x_g}{d\,x_1}\,\delta\,x_1\right] d\,x_1 \ldots d\,x_{g-1}\,d\,x_{g+1} \ldots d\,x_i \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \int \Big|_{x_{2,1}}^{x_{2,2}} v \left[\delta\,x_2 - \frac{d\,x_2}{d\,x_1}\,\delta\,x_1\right] d\,x_1\,d\,x_3 \ldots d\,x_i + \int \Big|_{x_{1,1}}^{x_{1,2}} v\,\delta\,x_1\,d\,x_2 \ldots d\,x_i.
\end{aligned}
\right\} \quad (18)
$$

Chacune des expressions :

$$
\Big|^{x_{i,2}} \delta\,x_i - \frac{d\,x_i}{d\,x_{i-1}}\,\delta\,x_{i-1} \ldots - \frac{d\,x_i}{d\,x_1}\,\delta\,x_1 \quad \text{et} \quad \Big|^{x_{i,1}} \delta\,x_i - \frac{d\,x_i}{d\,x_{i-1}}\,\delta\,x_{i-1} \ldots - \frac{d\,x_i}{d\,x_1}\,\delta\,x_1, \quad (19)
$$

qui se trouvent sous le signe $\int$ dans le seconde terme du premier membre de la formule (8), est égale réspectivement à la variation tronquée de chacune des valeurs limites $\Big|^{x_{i,2}} x_i$ et $\Big|^{x_{i,1}} x_i$. En effet, chacune des variations des variables indépendantes $\delta\,x_1\ \delta\,x_2 \ldots \delta\,x_{i-1}\ \delta\,x_i$ est une fonction arbitraire de toutes variables indépendantes. Ce qu'il est aisé de voir du resultat que, de l'équation fondamentale :

$$
\Delta\,d\,y_s = d\,\Delta\,y_s, \quad (20)
$$

où y_s est une fonction de $x_1, x_2, \ldots x_i$ et Δ est la caractéristique de la variation totale, — nous allons tirer de cette manière :

en remplaçant $d y_s$ et Δy_s à la fois dans cette équation (20) par leurs valeurs :

$$\bar{p}_{s,1}\, d x_1 + p_{s,2}\, d x_2 + \cdots$$
$$\bar{\bar{p}}_{s,1}\, \Delta x_1 + p_{s,2}\, \Delta x_2 + \cdots + \delta y_s ,$$

où $p_{s,1}$, $p_{s,2} \ldots$ sont des derivées partielles de y_s par rapport aux variables x_1, $x_2, \ldots x_i$. En différentiant selon Δ et d'après la substitution dont il s'agit, et en supprimant ce qui se détruit, il vient:

$$d x_1\, \Delta p_{s,1} + d x_2\, \Delta p_{s,2} + \cdots =$$
$$= d p_{s,1}\, \Delta x_1 + d p_{s,2}\, \Delta x_2 + \cdots + d\, \delta y_s ,$$

d'où en comparant les coefficients de $d x_1$, $d x_2 \ldots$

$$\Delta p_{s,1} = \frac{d \bar{\bar{p}}_{s,1}}{d x_1} \Delta x_1 + \frac{d \bar{\bar{p}}_{s,1}}{d x_2} \Delta x_2 + \cdots + \frac{d \bar{\bar{p}}_{s,1}}{d xi} \Delta x_1 + \frac{d \delta_s}{d x_1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta p_{s,i} = \frac{d p_{s,i}}{d x_1} \Delta x_1 + \frac{d \bar{\bar{p}}_{s,i}}{d x_2} \Delta x_2 + \cdots + \frac{d \bar{p}_{s,i}}{d xi} \Delta x_i + \frac{d \delta y_s}{d x_i} ,$$

où, comme les variables x_1, $x_2, \ldots x_i$ sont les indépendantes :

$$\left.\begin{array}{l} \Delta p_{s,1} = \dfrac{d \bar{\bar{p}}_{s,1}}{d x_1} \delta x_1 + \dfrac{d \bar{\bar{p}}_{s,1}}{d x_2} \delta x_2 + \cdots + \dfrac{d \bar{\bar{p}}_{s,1}}{d xi} \delta x_1 + \dfrac{d \delta_s}{d x_1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta p_{s,i} = \dfrac{d \bar{\bar{p}}_{s,i}}{d x_1} \delta x_1 + \dfrac{d \bar{\bar{p}}_{s,i}}{d x_2} \delta x_2 + \cdots + \dfrac{d p_{s,i}}{d x_1} \delta x_i + \dfrac{d \delta y_s}{d x_i} . \end{array}\right\} \quad (21)$$

Si de ces dernières équations (21) on détermine chacune des variations δx_1, $\delta x_2, \ldots \delta x_i$, le resultat obtenu est celui que nous avons eu en vue de tirer de l'équation (20), il montre bien que chacune des variations $\delta x_1 \ldots \delta x_i$ est une fonction arbitraire de toutes variables x_1, $x_2, \ldots x_i$; par conséquent dans chacune des expressions (19), les quantités:

$$\Big|^{x_{i,1}} \delta x_{i-1} \quad \Big|^{x_{i,2}} \delta x_{i-1} \quad \Big|^{x_{i,2}} \delta x_1 ,$$

et :

$$\Big|^{x_{i,1}} \delta x_{i-1} \quad \Big|^{x_{i,2}} \delta x_{i-2} \quad \Big|^{x_{i,1}} \delta x_1 ,$$

sont des fonctions arbitraires des mêmes variables $x_1, x_2, \ldots x_{i-1}$ que chacune des valeurs limites $\Big|^{x_{i,2}} x_i$ et $\Big|^{x_{i,1}} x_i$; d'où il suit que, d'après la notion de la variation d'une fonction $\Big|^{x_{i,1}} \delta x_i = \delta x_{i,2}$ et $\Big|^{x_{i,1}} \delta x_i = \delta x_{i,1}$ et les autres $\Big|^{x_{i,2}} \delta x_{i-1} \ldots \Big|^{x_{i,2}} \delta x_1$ et $\Big|^{x_{i,1}} \delta x_{i-1} \ldots \Big|^{x_{i,1}} \delta x_1$ sont des variations de $x_1, x_2, \ldots x_{i-1}$ comme des variables indépendantes qui entrent dans les valeurs limites $\Big|^{x_{i,2}} x_i$ et $\Big|^{x_{i,1}} x_i$. La formule (9) donc est prouvée; or la formule (9) étant établie, la formule (8) est démontrée.

Dans la démonstration de la formule (8) il est à remarquer;

1.° Que dans le cas où $g < i$ chacune des égalités $\Big|^{x_{g,2}} \delta x_g = \delta x_{g,2}$ et $\Big|^{x_{g,1}} \delta x_g = \delta x_{g,1}$ est inadmissible, car, quoique les variations tronquées des valeurs extrêmes de x_g soient en même temps les valeurs limites de la variation δx_g, cependant en vertu de la condition, par laquelle sont définies les limites de l'intégrale u (1) et comme la variation δx_g est une fonction arbitraire de toutes les valeurs indépendantes $x_1, x_2, \ldots x_i$, dans tous les cas où $g < i$ il y a encore les autres valeurs limites de la variation δx_g c'est-à-dire celles qui sont différentes de variations tronquées de valeurs limites $\Big|^{x_{g,2}} x_g$ et $\Big|^{x_{g,1}} x_g$. Telles sont les valeurs limites de la variation δx_g, qui dans le seconde membre de la formule (8) se trouvent engagées sous les caractéristiques $I(x_g)$, determinées par les formules (10). En effet, d'après la notion de la variation d'une fonction, la variation tronquée de chacune des valeurs extrêmes de x_g est une fonction arbitraire des mêmes variables que chacune des valeurs extrêmes x_g; cela vu et en vertu de la condition par laquelle sont definies les limites de l'intégrale u (1), la variation tronquée de chacune des valeurs extrêmes de x_g ne peut pas contenir la variabile x_i, tandis que cette variable x_i est renfermée dans chacune des valeurs limites de la variation tronquée δx_g, qui se trouvent engagées sous la caracteristique $I(x_g)$ determinée par les formules (10);

2.° Entre les valeurs limites de la variation δx_g il y a la différence, que fait la valeur extrême de chacune des variables d'intégration (à l'exception x_i), étant substituée dans la variation tronquée δx_g qui est une fonction arbitraire de toutes variables d'intégration.

§ 2.

Nous allons démontrer la première proposition.

La première condition du maximum ou du minimum de l'integrale u (1) est:

$$\delta u = 0. \tag{22}$$

Cette condition fait disparaître chacune des trois intégrales qui composent le second membre de la formule (4), de sorte qu'on aura:

$$\int \Sigma_s \left(N_s - \Sigma_g \frac{d\, P_{s,g}}{d\, x_g}\right) \delta\, y_s\, d\, x_1 \ldots d\, x_i = 0\,, \tag{23}$$

$$\int \Sigma_s\, \Sigma_g \frac{d\,(P_{s.g}\, \delta\, y_s)}{d\, x_g}\, d\, x_1 \ldots d\, x_i = 0\,, \tag{24}$$

$$\int \Sigma_g \frac{d\,(v\, \delta\, x_g)}{d\, x_g}\, d\, x_1 \ldots d\, x_i = 0. \tag{25}$$

L'équation (23) entraîne les s équations aux dérivées partielles du second ordre:

$$N_1 = \Sigma_g \frac{d\, P_{1,g}}{d\, x_g} \cdots N_s = \Sigma_g \frac{d\, P_{s,g}}{d\, x_g}\,. \tag{26}$$

Les valeurs générales des fonctions inconnues y_s obtenues par l'intégration des équations (26) contiendront des fonctions arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$

En vertu de l'égalité (23) la formule (7) deviendra:

$$\left.\begin{aligned} -\int \Bigg|_{x_{i,1}}^{x_{i,2}} \Sigma_s\, \delta\, y_s \left[P_{s,i} - \frac{d\, x_i}{d\, x_{i-1}}\, P_{s,i-1} - \cdots - \frac{d\, x_i}{d\, x_1}\, P_{s,1}\right] d\, x_1 \ldots d\, x_{i-1} = \\ = \int \Bigg|_{x_{i-1,1}}^{x_{i-1,2}} \Sigma_s\, \delta\, y_s \left[P_{s,i-1} - \frac{d\, x_{i-1}}{d\, x_{i-2}}\, P_{s,i-2} - \cdots - \frac{d\, x_{i-1,2}}{d\, x_1}\, P_{s,1}\right] d\, x_1 \ldots d\, x_{i-2}\, d\, x_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\int\left|\begin{array}{l}^{x_{g,2}}\\ \\ _{x_{g,1}}\end{array}\right. \Sigma_s \delta y_s \Big[P_{s,y} - \frac{d x_g}{d x_{g-1}} P_{s,g-1} - \cdots - \\
\quad - \cdots - \frac{d x_g}{d x_1} P_{s,1}\Big] d x_1 \ldots d x_{g-1} d x_{g+2} \ldots d x_i \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\int\left|\begin{array}{l}^{x_{2,2}}\\ \\ _{x_{2,1}}\end{array}\right. \Sigma_s \delta y_s \Big[P_{s,2} - \frac{d x_2}{d x_1} P_{s,1}\Big] d x_1 d x_3 \ldots d x_i + \\
\quad + \int\left|\begin{array}{l}^{x_{1,2}}\\ \\ _{x_{1,1}}\end{array}\right. \Sigma_s \delta y_s P_{s,1} d x_2 \ldots d x_i .
\end{array}\right\} \qquad (27)$$

Cette équation entraîne les équations qui étant rapportées aux limites de l'intégrale u (1), servent à determiner des fonctions arbitraires α_1, $\alpha_2 \ldots$

Les valeurs générales de y_s, avec les valeurs des fonctions arbitraires α_1, $\alpha_2 \ldots$ et les valeurs extrêmes des variables d'intégration donnent les valeurs limites de y_s inconnues, comme celles qui, étant déterminées de la manière indiquée, verifient les équations aux limites et par suite servent à résoudre complètement la question du maximum ou du minimum de l'intégrale u (1). Les valeurs générales de y_s et les fonctions arbitraires α_1, $\alpha_2 \ldots$, ainsi que les deux valeurs extrêmes de la variable x_i, la superieure $x_{i,2}$ et l'inferieure $x_{i,1}$ étant indépendantes, elles donnent en général les $2s$ valeurs limites de y_s:

$$\left.\begin{array}{ll}
\Big|^{x_{i,2}} y_1 \ldots & \Big|^{x_{i,2}} y_s \\
\Big|^{x_{i,1}} y_1 \ldots & \Big|^{x_{i,1}} y_s ,
\end{array}\right\} \qquad (28)$$

qui sont de même indépendantes entre elles; dans le cas du maximum ou du minimum absolu toutes les autres valeurs limites de y_s dépendent de celles (28), car dans ce cas, d'après la nature des valeurs limites de y_s determinée par la méthode des intégrations successives, toutes les valeurs limites de y_s, à l'exception des (28), ne peuvent être que celles qui seront obtenues par faire dans les valeurs (28) les substitutions successives de cette manière: en remplaçant dans les valeurs (28) la variable x_{i-1} par sa valeur extrême et supérieure $x_{i-1,2}$ et inferieure $x_{i-1,1}$, nous recevrons les s valeurs limites de y_s

suivantes :

$$\Big|^{x_{i-1,2}} y_1 \cdots \Big|^{x_{i-1,2}} y_s$$

$$\Big|^{x_{i-1,1}} y_1 \cdots \Big|^{x_{i-1,1}} y_s,$$

dans lesquelles on doit remplacer la variable $x_{i,2}$ par sa valeur extrême et supérieure $x_{i-2,2}$ et inferieure $x_{i-2,1}$ et ainsi de suite.

Le nombre donc des valeurs limites de y_s indépendantes entre elles, qui verifient les équations limites, dans le cas du maximum ou du minimum absolu, est égal à $2s$.

Il importe de remarquer :

1.° Que les variations tronquées des valeur limites de y_s sont en même temps les valeurs limites de la variation tronquée de y_s; or, en vertu de la condition par laquelle sont définies les limites de l'intégrale u (1), il y a encore les autres valeurs limites de la variation tronquée de y_s, c'est-à-dire telles qui sont différentes des variations tronquées des valeurs limites de y_s. Telles sont les valeurs limites de la variation tronquée de y_s qui se trouvent sous le signe $\int$ dans tous les termes du second membre de la formule (27). En effet, d'après la notion de la variation d'une fonction, la variation tronquée de chacune des valeurs limites de y_s est une fonction arbitraire de mêmes variables que chacune des valeurs limites de y_s. Cela vu et en vertu de la condition par laquelle, sont définies les limites de l'intégrale u (1), en variation tronquée de chacune des valeurs limites de y_s ne peut pas entrer la variable x_i, tandis que cette variable x_i est renfermée dans chacune des valeurs limites de la variation tronquée de y_s, qui se trouvent sous le signe $\int$ dans tous les termes du second membre de la formule (27);

2.° Que la valeur extrême de chacune des variables d'intégration, à l'exception de x_i, étant substituée dans la variation tronquée de y_s, fait la diffèrence entre les valeurs limites de la variation tronquée de y_s, qui se trouvent sous le signe $\int$ dans tous les termes du second membre de la formule (27).

En vertu de la différence qu'il vient d'indiquer entre les valeurs limites de la variation tronquée de y_s — chacun de deux membres de l'égalité (27) doit disparaître et l'on aura les deux égalités:

$$\int \Big|_{x_{i,1}}^{x_{i,2}} \Sigma_s \, \delta y_s \left[P_{s,i} - \frac{d\, x_i}{d\, x_{i-1}} P_{s,i-1} - \cdots - \frac{d\, x_i}{d\, x_1} P_{s,1} \right] d\, x \ldots d\, x_{i-1} = 0. \tag{29}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\int \Big|_{x_{i-1,1}}^{x_{i-1,2}} \Sigma_s \, \delta y_s \left[P_{s,i-1} - \frac{d\, x_{i-1}}{d\, x_{i-2}} P_{s,i-2} - \cdots - \frac{d\, x_{i-1}}{d\, x_1} P_{s,1} \right] d\, x_1 \ldots d\, x_{i-2} \, d\, x_i + \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\int \Big|_{x_{g,1}}^{x_{g,2}} \Sigma_s \, \delta y_s \left[P_{s,g} - \frac{d\, x_g}{d\, x_{g-1}} P_{s,g-1} - \cdots - \frac{d\, x_g}{d\, x_1} P_{s,1} \right] d\, x_1 \ldots d\, x_{g-1} \, d\, x_{g+1} \, d\, x_i + \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\qquad \int \Big|_{x_{1,1}}^{x_{2,2}} \Sigma_s \, \delta y_s \left[P_{s,2} - \frac{d\, x_2}{d\, x_1} P_{s,1} \right] d\, x_1 \, d\, x_3 \ldots d\, x_i + \cdots + \\
\qquad \qquad + \cdots + \int \Big|_{x_{1,1}}^{x_{1,2}} \Sigma_s \, \delta y_s \, P_{s,1} \, d\, x_2 \ldots d\, x_i = 0.
\end{array}\right\} \tag{30}$$

Les valeurs limites de y_s étant inconnues indépendantes entre elles, il est necessaire que leurs variations tronquées soient des fonctions arbitraires indépendantes entre elles; c'est pourquoi l'égalité (29) entraîne les $2\,s$ équations, qui étant distinctes se rapportent aux limites de l'intégrale u (1), or $2\,s$ est en même temps le nombre des valeurs limites de y_s inconnues indépendantes entre elles qui verifient les équations aux limites, par consequent le nombre des équations distinctes et relatives aux limites ne peut pas être supérieur à $2\,s$; de la resulte que pour satisfaire à l'égalité (30) il est nécessaire que soient égalées à zéro les valeurs limites de la variation tronquée de y_s qui se trouvent sous le signe $\int$ dans tous les termes du premier membre de l'égalité (30) ou du second de la formule (7). La première proposition donc est démontrée.

D'après la première proposition ont lieu les égalités:

$$\left.\begin{array}{lll}
\Big|^{x_{i-1,2}} \delta y_s = 0 & \Big|^{x_{i-2,2}} \delta y_s = 0 \ldots & \Big|^{x_{1,2}} \delta y_s = 0, \\
\Big|^{x_{i-1,1}} \delta y_s = 0 & \Big|^{x_{i-2,1}} \delta y_s = 0 \ldots & \Big|^{x_{1,1}} \delta y_s = 0,
\end{array}\right\} \tag{31}$$

qui font la condition à laquelle les valeurs limites de la variation tronquée de y_s, correspondantes aux valeurs extrêmes de toutes variables d'intégration à l'exception de x_i, doivent satisfaire necessairement pour ce que l'intégrale u (1) aie un maximum ou un minimum dans le cas le plus général.

En vertu des égalités (31) la formula (7) deviendra:

$$\left.\begin{aligned} &\int \Sigma_s \, \Sigma_g \frac{d\,(P_{s,g}\,\delta\, y_s)}{d\,x_g}\, d\,x_1 \ldots d\,x_i = \\ &= \int \Big|_{x_{i,1}}^{x_{i,2}} \Sigma_s\, \delta\, y_s \left[P_{s,i} - \frac{d\,x_i}{d\,x_{i-1}}\, P_{s,i-1} - \cdots - \frac{d\,x_i}{d\,x_1}\, P_{s,1}\right] d\,x_1 \ldots d\,x_{i-1}. \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Au moyen de cette formule (32) l'intégrale (5) se reduit dans le cas le plus général à l'intégral de l'ordre $(i-1)$ laquelle, etant égalée à zéro, donnera les $2\,s$ équations limites:

$$\left.\begin{aligned} &\Big|^{x_{i,2}} \left[P_{s,i} - \frac{d\,x_i}{d\,x_{i-1}}\, P_{s,i-1} - \cdots - \frac{d\,x_i}{d\,x_1}\, P_{s,1}\right] = 0, \\ &\Big|^{x_{i,1}} \left[P_{s,i} - \frac{d\,x_i}{d\,x_{i-1}}\, P_{s,i-1} - \cdots - \frac{d\,x_i}{d\,x_1}\, P_{s,1}\right] = 0. \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Passons maintenant à démontrer la seconde proposition. En vertu de la formule (25) la formule (8) deviendra:

$$\left.\begin{aligned} &-\int \Big|_{x_{i,1}}^{x_{i,2}} v\, \overline{\delta}\, \mathrm{x}_i\, d\,x_1 \ldots d\,x_{i-1} = \\ &= \int \Big|_{x_{i-1,1}}^{x_{i-1,2}} v\, I\,(x_{i-1})\, d\,x_1 \ldots d\,x_{i-2}\, d\,x_i \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \int \Big|_{x_{g,1}}^{x_{g,2}} I\,(x_g)\, d\,x_1 \ldots d\,x_{g-1}\, d\,x_{g+1} \ldots d\,x_i \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \int \Big|_{x_{1,1}}^{x_{1,2}} v\, I\,(x_1)\, d\,x_2 \ldots d\,x_i. \end{aligned}\right| \quad (34)$$

Les fonctions inconnues étant déterminées par l'équation (26) et (33), on peut toujours poser que les fonctions y_s et leurs derivées partielles, comme les expressions connues en $x_1, x_2, \ldots x_i$ sont substituées dans la fonction v; cela posé, nous considerons la fonction v comme la fonction explicite de variables $x_1, x_2, \ldots x_i$.

En égard à l'égalité (34) et à la différence qui, comme nous l'avons indiqué dans la démonstration de la formule (8 § 1), existe entre les variations tronquées des valeurs extrêmes de la variable x_i et les valeurs limites de la variation de la variable x_g dans le cas où $g < i$, il est evident que chacune de deux membres de la formule (34) est égal à zéro, de sorte qu'on aura:

$$\int \Big|_{x_{i,1}}^{x_{i,2}} v\, \bar{\delta}\, \mathrm{x}_i\, d\,x_1 \ldots d\,x_{i-1} = 0, \tag{35}$$

et:

$$\left.\begin{array}{l} = \int \Big|_{x_{i-1,1}}^{x_{i-1,2}} v\, I(x_{i-1})\, d\,x_1 \ldots d\,x_{i-2}\, d\,x_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \int \Big|_{x_{g,1}}^{x_{g,2}} I(x_g)\, d\,x_1 \ldots d\,x_{g-1}\, d\,x_{g+1} \ldots d\,x_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \int \Big|_{x_{1,1}}^{x_{1,2}} I(x_1)\, d\,x_1\, d\,x_3 \ldots d\,x_i. \end{array}\right\} \tag{36}$$

Les valeurs extrêmes de la variable x_i étant inconnues indépendantes entre elles, il est necessaire que leurs variations soient des fonctions arbitraires et indépendantes entre elles; c'est pourquoi l'égalité (35) entraîne les deux équations:

$$\Big|^{x_{i,2}} v = 0 \quad \text{et} \quad \Big|^{x_{i,1}} v = 0. \tag{37}$$

Or, quoique les expressions $I(x_g)$ (10) sont des quantités arbitraires et indépendantes entre elles, pour satisfaire à l'égalité (36) il est necessaire d'égaler à zéro toutes les expressions $I(x_g)$ (10), en vertu de ce qu'on ne peut pas égaler à zéro les coéfficients de chacune des expressions $I(x_g)$ (10) par cette raison: soit égale à zéro le coéfficient de $I(x_g)$ quelconque des expressions (10) ou, ce qui revient au même, soit qu'il y a les deux équations:

$$\Big|^{x_{g,2}} v = 0 \quad \text{et} \quad \Big|^{x_{g,1}} v = 0, \tag{38}$$

dont chacune contient la variable x_g qui est remplacée par sa valeur extrême fournie par la même équation; or chacune des équations (37) contient la variable x_i qui est remplacée par sa valeur extrême fournie par la même équation; cela est ce qui n'a lieu qu'au cas où la fonction v contient explicitement les deux variables x_i et x_g, mais dans ce cas chacune des équations (38) fournit la valeur extrême de x_g comme la fonction de x_i, ce qui est inadmissible, en vertu de la condition par laquelle sont définies les limites de l'intégrale u (1). Si chacune des expressions $I(x_g)$ est égale à zéro, les égalités (10) bien montrent que toutes les valeurs limites de δx_g, engagées sous le signe $I(x_g)$ sont de même égaler à zéro; d'ou il suit, que, pour satisfaire deux équations (36), il est necessaire que soient égales à zéro les valeurs limites de la variation δx_g qui se trouvent sous le signe $\int$ dans tous les termes du second membre de la formule (8). Ainsi la seconde proposition est démontrée.

D'après la seconde proposition ont lieu des égalités:

$$\left.\begin{array}{llllll}
\Big|^{x_{i-1,2}} \delta x_{i-1} = 0 & \Big|^{x_{i-1,1}} \delta x_{i-1} = 0 \ldots & \Big|^{x_{i-1,2}} \delta x_g = 0 & \Big|^{x_{i-1,1}} \delta x_g = 0 \ldots & \Big|^{x_{g,2}} \delta x_g = 0 & \Big|^{x_{g,1}} \delta x_g = 0 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\Big|^{x_{i-1,2}} \delta x_1 = 0 & \Big|^{x_{i-1,1}} \delta x_1 = 0 \ldots & \Big|^{x_{g,2}} \delta x_1 = 0 & \Big|^{x_{g,1}} \delta x_1 = 0 \ldots & \Big|^{x_{1,2}} \delta x_1 = 0 & \Big|^{x_{1,1}} \delta x_1 = 0,
\end{array}\right\} \tag{39}$$

qui font la condition à laquelle les valeurs limites de la variation de chacune de toutes variables indépendantes à l'exeption de x_i doivent satisfaire nécéssairement pour ce que l'intégrale u (1) aie un maximum ou un minimum dans les cas le plus général.

En vertu des égalités (39) la formule (8) deviendra:

$$\int \Sigma_g \frac{d(v\,\delta x_g)}{d\,x_g}\, d\,x_v \ldots d\,x_i = \int \Big|_{x_{i,1}}^{x_{i,2}} v\,\delta\,x_i\, d\,x_1\, d\,x_2 \ldots d\,x_{i-1}. \tag{40}$$

Au moyen de cette formule (40), l'intégrale (6) se réduit dans le cas le plus général à l'intégrale de l'ordre $i-1$, laquelle, étant égalée à zero, donnera les deux équations:

$$\Big|^{x_{i,2}} v=0 \quad \text{et} \quad \Big|^{x_{1,1}} v=0, \tag{41}$$

qui servent à déterminer les limites de l'intégrale u (1) de la manière connue.

Les deux formules (32) et (40) sont celles, qu'il s'agissait de déduire. Ces deux formules sont identiques avec deux formules (11) et (12) d'où il suit que dans le cas le plus général ainsi que dans le cas particulier indiqué ci-dessus les mêmes formules servent à réduire l'intégrale (5) et (6) aux intégrales dont chacune est de l'ordre $i-1$.

§ 3.

La démonstration de la troisième proposition est fondée sur la condition qui sert à fixer un maximum ou un minimum de l'intégrale definie u (1). Cette condition consiste en ce que l'intégrale u (1) n'a un maximum ou un minimum que pour les valeurs de chaque variable d'intégration qui sont terminées par les limites de l'intégrale u (1).

D'après cette condition nous supposons que les valeurs des variables d'intégration, qui sont désignées par $x_1, x_2, \ldots x_i$, sont seulement celles, qui sont comprises entre les limites de l'intégrale u (1). Cela posé, on peut répresenter les variations δy_s et δx_g sous ces formes:

$$\delta y_s = (x_{i-1,2}-x_{i-1})(x_{i-1,1}-x_{i-1})\ldots(x_{1,2}-x_1)(x_{1,1}-x_1)\,\varphi_s(x_1, x_2, \ldots x_i), \tag{42}$$

et:

$$\delta x_g = (x_{i-1,2}-x_{i-1})(x_{i-1,1}-x_{i-1})\ldots(x_{g,2}-x_g)(x_{g,1}-x_g)\,\psi_g(x_1, x_2, \ldots x_i), \tag{43}$$

dans lesquelles chacune de deux fonctions $\varphi_s(x_1, x_2, \ldots x_i)$ et $\psi_g(x_1, x_2, \ldots x_i)$ est une fonction parfaitement arbitraire, car, les valeurs, de chaque variable d'intégration étant comprises entre les limites de l'intégrale u (1), on aura 1.^r que, comme dans la formule (42) δy_s et $\varphi_s(x_1, x_2, \ldots x_i)$ sont des fonctions de $x_1, x_2, \ldots x_i$, à chaque système de valeurs de $\varphi_s(x_1, x_2, \ldots x_i)$ répondera pour les mêmes $x_1, x_2, \ldots x_i$ un système de valeurs de δy_s et vice versa; 2.^e que pareillement, comme dans la formule (43) $\psi_g(x_1, x_2, \ldots x_i)$ et

δx_g sont des fonctions de $x_1, x_2, \ldots x_i$, à chaque système des valeurs de $\psi_g(x_1, x_2, \ldots x_i)$ répondera, pour les mêmes $x_1, x_2, \ldots x_i$, un système des valeurs de δx_g et vice versa. Ainsi pour les valeurs de chaque variable d'intégration, pour lesquelles l'intégrale u (1) a un maximum ou un minimum, chacune des deux variations δy_s et δx_g, dont la première est répresentée sous la forme (42) et la seconde sous la forme (43), équivaut à la fonction parfaitement arbitraire. Ce qu'il fallait constater pour démontrer la troisième proposition.

Appunti sulla moltiplicazione dei determinanti normaloidi.

(Per Tito Cazzaniga, *a Pavia.)*

Il sig. Helge v. Koch nella sua Memoria: *Sur les déterminants infinis, ecc.* (Act. Math. XVI), afferma che la regola ordinaria di moltiplicazione sta, oltre che per i determinanti infiniti *normali*, anche per i cosidetti *normaloidi* (*).

Però non dà alcuna dimostrazione dell'asserto (**).

Nella mia Nota: *Sui determinanti d'ordine infinito,* ripresi il teorema in esame e lo dimostrai, introducendo tuttavia in riguardo alle due *successioni normalizzanti* dei normaloidi fattori, condizioni così restrittive che, senza ch'io l'avvertissi, mi riconducevano i determinanti considerati, a due normali infiniti (***). Per tal modo la dimostrazione, nel caso in esame, era superflua. Analizzando ora di nuovo il soggetto, m'avvidi e della inavvertenza mia, e dell'errore incluso nell'affermazione del v. Koch:

Non sempre due normaloidi sono moltiplicabili fra di loro secondo la regola ordinaria; però sotto opportune condizioni la moltiplicazione può essere eseguita.

Queste ed altre considerazioni che ad esse si connettono, sono lo scopo della presente Nota.

(*) Così chiamò, il prof. Vivanti in un suo lavoro: *Sulle serie di potenze, ecc.* (Ann. di Mat., vol. 21, pag. 28), una speciale categoria di det. infiniti convergenti, già studiata dal v. Koch.

(**) V. Nota citata, pag. 236.

(***) V. mia Nota: *Sui determinanti d'ordine infinito* (Ann. di Mat., Vol. 26, pag. 203, in principio).

I.

1. Richiamo anzitutto qualche notizia indispensabile alla intelligenza del lavoro.

Un determinante infinito:

$$D = [a_{ik}], \qquad \begin{cases} i = 1, 2, 3, \ldots \infty \\ k = 1, 2, 3, \ldots \infty \end{cases}$$

dicesi *normale* quando la serie doppia degli elementi non diagonali, ed il prodotto infinito di quelli diagonali, convergono assolutamente.

I determinanti normali sono convergenti, e godono di quasi tutte le proprietà dei determinanti d'ordine finito; in particolare per essi sta la regola ordinaria della moltiplicazione.

Un determinante infinito:

$$D = [a_{ik}], \qquad \begin{cases} i = 1, 2, 3, \ldots \infty \\ k = 1, 2, 3, \ldots \infty \end{cases}$$

si dice *normaloide* se è possibile determinare una successione di numeri:

$$x_1 \, x_2 \, x_3 \ldots x_n \ldots,$$

non nulli nè infiniti, per modo che il determinante:

$$D' = \left[\frac{x_i}{x_k} a_{ik}\right], \qquad \begin{cases} i = 1, 2, 3, \ldots \infty \\ k = 1, 2, 3, \ldots \infty \end{cases}$$

risulti normale.

La successione di numeri x_n si dirà *normalizzante;* e D' si chiamerà il normale *corrispondente* a D.

I normaloidi hanno molte proprietà comuni con i normali; fra l'altro è utile notare: *a*) Ogni normaloide converge ed è uguale al normale che gli corrisponde. *b*) Tutti gli sviluppi dei normali valgono altresì per i normaloidi.

Di qui, erroneamente, il v. Koch deduceva, che anche la regola ordinaria della moltiplicazione fra determinanti sussisteva per i normaloidi.

2. Sopra un esempio particolare mostriamo che ciò non è sempre vero. Si scriva infatti il det. infinito:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \dots & 1 \dots \\ 0 & 1 & 0 \dots & 0 \dots \\ 0 & 0 & 1 \dots & 0 \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \dots & 1 \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

Esso è normaloide, ha per valore l'unità, ed ammette per successione normalizzante i numeri:

$$1,\ 2^2,\ 3^2, \dots\ n^2 \dots$$

Se ora si fa il quadrato di D, linee per linee, secondo la regola nota, il primo elemento di D^2 risulta definito dalla serie divergente:

$$1 + 1 + 1 + \cdots$$

Quindi il det. D^2, poichè presenta elementi infiniti, perde ogni significato effettivo.

Si può notare che la moltiplicazione diventa possibile quando nel formare D^2 si combinino linee con colonne di D, ma questo è un fatto speciale di cui vedremo tosto la ragione.

3. Se:

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \dots$$

è una successione normalizzante di D, tale, qualunque sia ρ, è anche l'altra successione:

$$\rho\, x_1,\ \rho\, x_2,\ \rho\, x_3, \dots$$

Quindi, se due normaloidi hanno per successioni normalizzanti due successioni tali, che *da un certo indice finito in poi*, i numeri dell'una siano rispettivamente equimultipli di quelli dell'altra, si può assumere per entrambi la stessa successione che li renda normali. Lo stesso può avvenire in molti altri casi. In ogni modo noi diremo che due normaloidi hanno la medesima successione normalizzante quando esista almeno una di tali successioni che serva a renderli entrambi normali. Dimostriamo allora il teorema:

Dati due normaloidi:

$$A = [a_{ik}]; \quad B = [b_{ik}], \qquad \begin{cases} i = 1,\ 2,\ 3,\ldots \infty \\ k = 1,\ 2,\ 3,\ldots \infty \end{cases}$$

aventi la stessa successione normalizzante:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots, \tag{1}$$

se si costruisce il determinante:

$$C = [c_{ik}], \qquad \begin{cases} i = 1,\ 2,\ 3,\ldots \infty \\ k = 1,\ 2,\ 3,\ldots \infty \end{cases}$$

dove:

$$c_{ik} = \sum_h a_{ih}\, b_{hk},$$

allora C è esso pure un normaloide, di cui la successione normalizzante è ancora la (1), *e che in valore è uguale al prodotto di A per B.*

Ed invero, sieno rispettivamente:

$$A' = \left[\frac{x_i}{x_k}\, a_{ik}\right] = [\overline{a}_{ik}]; \quad B' = \left[\frac{x_i}{x_k}\, b_{ik}\right] = [\overline{b}_{ik}],$$

i due normali corrispondenti ad A, B, e:

$$C' = [\overline{c}_{ik}] = [\sum_h \overline{a}_{ih}\, \overline{b}_{hk}],$$

il loro prodotto. Sostituendo in:

$$\overline{c}_{ik} = \sum_h \overline{a}_{ih}\, \overline{b}_{hk},$$

per $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, le loro espressioni in a, b, c, risulta tosto:

$$\overline{c}_{ik} = \frac{x_i}{x_k} \sum_h a_{ih}\, b_{hk};$$

ovvero:

$$\overline{c}_{ik} = \frac{x_i}{x_k}\, c_{ik}.$$

Segue che:

$$C = C' = A'\, B' = A\, B,$$

e inoltre la successione normalizzante di C è la (1).

4. Questo risultato dimostra che, in particolare, è sempre possibile moltiplicare un normaloide per sè stesso, combinando linee per colonne, mentre l'esempio portato al n. 2 ci prova che non vi ha sempre tale possibilità, quando si effettui il prodotto rispett. o per linee, o per colonne.

II.

1. Per trovare qualche teorema più generale, introduciamo un tipo di determinanti convergenti che comprendono i normaloidi.

Siano:

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots \tag{a}$$

$$y_1,\ y_2,\ y_3, \ldots \tag{a'}$$

due successioni di numeri tali che il prodotto infinito:

$$P = \prod_{r=1}^{\infty} \left(\frac{x_r}{y_r}\right),$$

converga assolutamente. Allora se un det. infinito:

$$D = [a_{ik}], \qquad \begin{cases} i = 1,\ 2,\ 3, \ldots\ \infty \\ k = 1,\ 2,\ 3, \ldots\ \infty \end{cases}$$

è tale che il determinante da esso dedotto:

$$D' = \left[\frac{x_i}{y_k} a_{ik}\right],$$

risulti normale, allora D è convergente, ed ha per valore:

$$D = P \cdot D'.$$

Poniamo:

$$D_m = [a_{ik}], \quad D'_m = \left[\frac{x_i}{y_k} a_{ik}\right], \qquad \begin{cases} i = 1,\ 2, \ldots\ m \\ k = 1,\ 2, \ldots\ m \end{cases}$$

e poichè D' è normale, per ogni σ arbitrario si potrà determinare un intero m', così che per qualunque $m > m'$ sia:

$$| D'_{m+p} - D'_m | < \sigma.$$

Si formi allora analogamente:

$$| D_{m+p} - D_m | = \prod_{r=1}^{m} \left| \frac{x_r}{y_r} \right| \left| \prod_{s=1}^{p} \left| \frac{x_{m+s}}{y_{m+s}} \right| D'_{m+p} - D'_m \right| \leq$$

$$\leq \prod_{r=1}^{m} \left| \frac{x_r}{y_r} \right| \left\{ | D'_{m+p} | \left(\prod_{s=1}^{p} \left| \frac{x_{m+s}}{y_{m+s}} \right| - 1 \right) + \sigma \right\}.$$

D'altra parte, per un m opportunamente grande si ha:

$$|D' - D'_{m+p}| < \sigma; \quad \left| P - \prod_{r=1}^{m} \left|\frac{x_r}{y_r}\right| \right| < \sigma; \quad \left| 1 - \prod_{s=1}^{p} \left|\frac{x_{m+s}}{y_{m+s}}\right| \right| < \sigma,$$

onde deducesi:

$$|D_{n+p} - D_n| \leq \sigma (|P| + \sigma) \{ |D'| + \sigma + 1 \} < \delta,$$

in cui δ è piccolo ed arbitrio. Provata così la convergenza di D, dalla formola:

$$D_m = \prod_{r=1}^{m} \left(\frac{x_r}{y_r}\right) \cdot D'_m,$$

segue:

$$D = \lim D_m = P D'. \qquad \text{c. d. d.}$$

Il determinante D lo diremo un *normaloide generalizzato*, ed i numeri (a), (a') sono le sue successioni normalizzanti.

Per i convergenti così definiti stanno gran parte delle proprietà appartenenti ai normaloidi. Importa notare fra l'altro, che il prodotto infinito dei loro elementi diagonali converge assolutamente.

2. A proposito delle successioni (a), (a') è utile fare una osservazione. Si fissi un numero intero arbitrario N, finito, ed in (a) ed in (a') al posto dei primi N numeri:

$$x_1\, x_2\, x_3 \ldots x_N$$

$$y_1\, y_2\, y_3 \ldots y_N,$$

si pongano rispett. gli altri:

$$x'_1\, x'_2\, x'_3 \ldots x'_N$$

$$y'_1\, y'_2\, y'_3 \ldots y'_N,$$

scelti ad arbitrio, ma diversi da zero e da infinito. È chiaro allora che, rispetto allo stesso det. D, le due nuove successioni che risultano sono pure normalizzanti. Si può quindi sottoporre a condizioni arbitrarie un numero finito di termini in ogni serie normalizzante.

Così facciamoci ora a considerare il prodotto:

$$P = \prod_{r=1}^{\infty} \left(\frac{x_r}{y_r}\right),$$

il quale è tale che, ad un numero $\alpha < 1$ scelto ad arbitrio, si può sempre far corrispondere un numero m' per modo che per ogni $m > m'$, sia verificata l'ineguaglianza:

$$1-\alpha \leq \left| \frac{x_m}{y_m} \right| \leq 1+\alpha. \tag{2}$$

Ma in virtù della precedente osservazione, fisso ad es. $\alpha = \frac{1}{2}$, si può sempre variare i primi m' termini delle due successioni (a) (a') così che queste, restando normalizzanti per D, soddisfino la (2) qualunque sia m intero, compreso fra 1 ed ∞. Noi supporremo che dato un normaloide generalizzato D, le due successioni (a), (a') sieno sempre scelte nel modo anzidetto, oppure in modo da verificare analoghe condizioni.

3. *Siano:*

$$A = [a_{ik}], \quad B = [b_{ik}], \qquad \begin{cases} i = 1, 2, 3, \ldots \infty \\ k = 1, 2, 3, \ldots \infty \end{cases}$$

due normaloidi generalizzati e:

$$\begin{cases} x_1 & x_2 & x_3 \ldots \\ y_1 & y_2 & y_3 \ldots \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1 & z_2 & z_3 \ldots \\ u_1 & u_2 & u_3 \ldots \end{cases}$$

le rispettive successioni normalizzanti. Allora se il prodotto:

$$\prod_h \left| \frac{x_h}{u_h} \right|, \quad \textit{ovvero,} \quad \prod_h | x_h z_h |,$$

converge, si ha nel primo caso che:

$$C = [c_{ik}] = \left[\sum_h a_{ih} b_{hk} \right],$$

è un normaloide generalizzato cui corrispondono le successioni:

$$\begin{cases} x_1 & x_2 & x_3 \ldots \\ u_1 & u_2 & u_3 \ldots \end{cases}$$

e nel secondo caso che:

$$C = [c_{ik}] = [\sum a_{ih} b_{kh}],$$

è un normaloide generalizzato di cui le successioni sono:

$$\begin{cases} x_1 & x_2 & x_3 \ldots, \\ \frac{1}{u_1} & \frac{1}{u_2} & \frac{1}{u_3} \ldots \end{cases}$$

In ogni caso si ha poi $C = A \cdot B$.

Risultati analoghi si ottengono scambiando x con y, e z con u.

Partiamo dalla serie convergente:

$$\overline{c}_{ik} = \sum_h \overline{a}_{ih}\, \overline{b}_{hk},$$

dove:

$$\overline{a}_{ik} = \frac{x_i}{y_k}\, a_{ik}\,; \quad \overline{b}_{ik} = \frac{z_i}{u_k}\, b_{ik}\,,$$

e si noti che qualunque serie del tipo:

$$\rho \sum_h \theta_h\, \overline{a}_{ih}\, \overline{b}_{hk}\,,$$

dove ρ è finito e $\theta_h \leq 2$ per tutti gli $h \geq$ ad un certo h', è ancora convergente. Posto quindi:

$$\rho = \frac{u_k}{x_i}, \quad \theta_h = \frac{y_h}{z_h},$$

risulta stabilita la convergenza di:

$$c_{ik} = \sum_h a_{ih}\, b_{hk}\, (*).$$

Dimostriamo ora:

a) Il prodotto infinito:

$$P = \prod_i |\, c_{ii}\, |,$$

è convergente. Infatti c_{ii} si può sviluppare come segue:

$$c_{ii} = \frac{x_i}{y_i} \cdot \frac{z_i}{u_i}\left(1 + \overline{a}'_{ii} + \overline{b}'_{ii} + \sum_h \frac{y_i}{z_i}\, \frac{y_h}{z_h}\, \overline{a}'_{ih}\, \overline{b}'_{hi}\right);$$

tenuto conto delle posizioni:

$$\overline{a}_{ik} = \overline{a}'_{ik}\,, \quad \overline{a}_{ii} = 1 + \overline{a}'_{ii}\,,$$

$$\overline{b}_{ik} = \overline{b}'_{ik}\,, \quad \overline{b}_{ii} = 1 + \overline{b}'_{ii}\,.$$

(*) Dalla convergenza dei prodotti infiniti:

$$\prod_r \left|\frac{x_r}{y_r}\right|, \quad \prod_r \left|\frac{z_r}{u_r}\right|, \quad \prod_r \left|\frac{x_r}{u_r}\right|,$$

risulta quella del prodotto:

$$\prod_r \left|\frac{y_r}{z_r}\right|.$$

E poichè le serie:

$$\sum_i \overline{a'}_{ih}\,; \quad \sum_i \overline{b'}_{hi}\,; \quad \sum_{ih} \overline{a'}_{ih}\,\overline{b'}_{hi}\,,$$

convergono ass. e così pure i prodotti:

$$\prod_i \left(\frac{x_i}{y_i}\right), \quad \prod_i \left(\frac{z_i}{u_i}\right), \quad \prod_i \left(\frac{y_i}{z_i}\right),$$

anche P è assolutamente convergente.

b) Consideriamo le quantità:

$$c_{ik} = \sum_h a_{ih}\, b_{hk}\,,$$

dalle quali si deduce:

$$\frac{x_i}{u_k}\, c_{ik} = \sum_h \frac{y_h}{z_h}\, \overline{a}_{ih}\, \overline{b}_{hk} = \overline{\overline{c}}_{ik}\,. \tag{3}$$

È facile ora far vedere che la serie:

$$\sum_{i,k} \sum_h \frac{y_h}{z_h}\, \overline{a}_{ih}\, \overline{b}_{ik} = \sum_{i,k} c_{ik}\,, \qquad (i \neq k),$$

converge assolutamente. Infatti notando che con ragionamento analogo a quello di Π, 2, si può avere, per qualunque valore di h:

$$\frac{y_h}{z_h} = 1 + \alpha_h < 2\,, \qquad \sum_h \overline{a}_{ih}\, \overline{b}_{hk} = \overline{c}_{ik}\,,$$

dove $\overline{c}_{ik}$ è l'elemento generico del normale prodotto di A per B, risulta:

$$\overline{\overline{c}}_{ik} = \overline{c}_{ik} + \sum_h \alpha_h\, \overline{a}_{ih}\, \overline{b}_{hk} = (1 + \theta_{ik})\, \overline{c}_{ik} \leqq 2\, \overline{c}_{ik}\,,$$

poichè con θ_{ik} si è indicata una quantità minore di uno. Segue:

$$\sum_{i,k} \overline{\overline{c}}_{ik} \leqq 2 \sum_{i,k} \overline{c}_{ik}\,, \qquad \text{c. d. d.}$$

Dalla (3) poi risulta che le successioni normalizzanti di C sono appunto:

$$x_1\ x_2\ x_3 \ldots$$

$$u_1\ u_2\ u_3 \ldots$$

Analogamente si procede nel secondo caso citato.

4. In particolare, dal teorema precedente, risulta dimostrata valida la regola della moltiplicazione (o per linee, o linee per colonne) tra due normaloidi generalizzati, quando abbiano una serie normalizzante in comune.

Se poi si pone $x_i = y_i$, $z_i = u_i$ risulta il teorema:
Due normaloidi:

$$A = [a_{ik}]\,, \quad B = [b_{ik}]\,, \qquad \begin{cases} i = 1,\ 2,\ 3,\ldots \infty \\ k = 1,\ 2,\ 3,\ldots \infty \end{cases}$$

di successioni normalizzanti:

$$x_1\, x_2\, x_3 \ldots ; \quad z_1\, z_2\, z_3 \ldots,$$

sono moltiplicabili fra loro linee per colonne nell'ordine dato se:

$$\prod_r \left(\frac{x_r}{z_r}\right),$$

converge assol. e moltiplicabili linee per linee (o colonne per colonne), se:

$$\prod_r (x_r\, z_r),$$

è assol. convergente. Nel primo caso il prodotto C è un normaloide generalizzato di successioni:

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \ldots \\ z_1 & z_2 & z_3 \ldots, \end{matrix}$$

nel secondo caso le successioni normalizzanti sono:

$$\begin{cases} x_1 & x_2 & x_3 \ldots \\ \dfrac{1}{z_1} & \dfrac{1}{z_2} & \dfrac{1}{z_3} \ldots \end{cases}$$

Nel caso che $x_r = y_r$ si ritorna al teor. I. 3 (*).

Concludendo osservo come in altra mia Nota: *Précis sur la théorie élémentaire des déterminants cubiques, ecc.*, di prossima pubblicazione, dimostrai che il prodotto di due normaloidi comunque, dà origine ad un normaloide *cubico* opportunamente definito *ma sempre convergente.* Le restrizioni introdotte perchè valga la regola della moltiplicazione, son necessarie adunque, nel caso nostro, in quanto ci si propone di ottenere un det. prodotto della stessa *specie* de' suoi fattori.

Pavia, 21 Febbraio 1899.

(*) Notiamo che *scambiando* l'ordine dei fattori le serie normalizzanti del prodotto si *scambiano*, o, ciò che fa lo stesso, ogni numero di una successione si muta nel suo reciproco.

Ueber ein quadratisches Nullsystem.

(Von H. E. Timerding, *in Strassburg.)*

1.

Bekanntlich nennt man Nullsystem eine geometrische Verwandtschaft zwischen zwei in einander liegenden Räumen, in der jedem Punkte des einen Raumes eine durch ihn gehende Ebene des anderen Raumes und umgekehrt jeder Ebene des zweiten Raumes ein in ihr liegender Punkt des ersten Raumes eindeutig entspricht. In der Verwandtschaft, die man im engeren Sinne so bezeichnet, sind auch den Punkten einer Ebene des ersten Raumes die Ebenen des zweiten Raumes zugewiesen, die durch den der Ebene zugeordneten Punkt gehen, und den Ebenen eines Bündels im zweiten Raume die Punkte der dem Bündelscheitel entsprechenden Ebene. Indem man ein solches Nullsystem aber im Besonderen als ein lineares bezeichnet, kann man von der letzteren Eigenschaft absehen und nur die ersterwähnte zur Definition benutzen, dass die Punkte des ersten und die Ebenen des zweiten Raumes einander wechselweise eindeutig zugeordnet sein sollen und jeder Punkt in der ihm entsprechenden Ebene liegen soll.

Es bietet sich nun ein naheliegendes Beispiel für ein quadratisches Nullsystem dar, das heisst ein solches, bei dem den Punkten einer geraden Linie im ersten Raume ein quadratisches Ebenenbüschel im zweiten Raume und einem gewöhnlichen Ebenenbüschel des letzteren ein Kegelschnitt im ersten Raume entspricht. Dieses Nullsystem ist deshalb merkwürdig, weil es in enger Beziehung zu den quadratischen Flächen steht. *Man findet es einfach so, dass man dem Mittelpunkte eines jeden Kegelschnittes auf einer quadratischen Mittelpunktsfläche die Ebene dieser Curve zuordnet.* Der Kegelschnitt selbst aber kann imaginär werden, sein Mittelpunkt bleibt reell, solange seine Ebene reell ist und umgekehrt.

Die Beziehung ist auch immer eine eindeutige. Jeder Punkt ist Mittelpunkt nur eines Kegelschnittes der quadratischen Grundfläche. Nur dem Mittelpunkte derselben entsprechen alle durch ihn gehenden Ebenen. Den unendlich fernen Punkten der Grundfläche entsprechen weiter je unendlich viele parallele Ebenen, von denen eine den Asymptotenkegel der Grundfläche berührt. Allen anderen unendlich fernen Punkten entspricht nur die unendlich ferne Ebene. Dieselbe ist also ebenso eine singuläre Ebene des Nullsystems, wie der Mittelpunkt der Grundfläche ein singulärer Punkt ist. Jeder durch diesen gehenden Ebene entspricht allein er selbst, nur den Tangentialebenen des Asymptotenkegels entsprechen als Nullpunkte alle Punkte der in ihnen liegenden Asymptoten. Liegt ein Punkt in einer Symmetrieebene der Grundfläche, so steht seine Nullebene auf dieser Symmetrieebene senkrecht. Einem Punkte auf einer Hauptaxe der Grundfläche entspricht als Nullebene die in ihm auf der Hauptaxe senkrechte Ebene.

Einem Büschel paralleler Ebenen sind als Nullpunkte die Punkte eines Durchmessers der Grundfläche zugeordnet. Dieser Durchmesser enthält auch die — bezüglich der Grundfläche genommenen — Pole aller der parallelen Ebenen und ist conjugirt zu der unter ihnen enthaltenen Durchmesserebene der Grundfläche.

Wir finden also den Nullpunkt einer beliebigen Ebene in unserem Nullsysteme, indem wir ihren Pol mit dem Mittelpunkte der Grundfläche verbinden. Diese Linie schneidet die Ebene in dem gesuchten Nullpunkte. Um umgekehrt zu einem Punkte die zugehörige Nullebene zu finden, bestimme man seine Polare und lege durch ihn selbst die zu dieser Polare parallele Ebene. Dies ist dann die gesuchte Nullebene. Diese Constructionen zeigen, dass, wenn man von einer Ebene und ihrem Nullpunkte Pol und Polare bezüglich der Grundfläche sucht, auch diese sich in unserem Nullsysteme zugeordnet sind.

Die beiden Punkte, von denen jeder Nullpunkt der Polare oder Pol der Nullebene des anderen ist, liegen auf einem Durchmesser der Grundfläche und teilen denselben harmonisch. Zwei solche Punkte wollen wir bez. der Grundfläche invers nennen. Die beiden Ebenen, von denen jede Nullebene des Pols oder Polare des Nullpunktes der anderen ist, sind zu einander parallel und trennen die beiden zu ihnen parallelen Tangentialebenen der Grundfläche harmonisch. Auch zwei solche Ebenen wollen wir bez. der Grundfläche invers nennen. Dann können wir kurz so sagen: *Der Nullpunkt einer Ebene ist der inverse Punkt zu ihrem Pole, und die Nullebene eines Punktes ist die inverse Ebene zu seiner Polare.*

Den Tangentialebenen der Grundfläche sind als Nullpunkte ihre Berührungspunkte und umgekehrt den Punkten der Grundfläche als Nullebenen die in ihnen berührenden Tangentialebenen zugewiesen.

Ersetzt man die Grundfläche durch eine concentrische, ähnliche und ähnlich liegende Fläche, die wir kurz als eine zur ersten concyclische Fläche bezeichnen wollen (*), so verschiebt sich der Pol einer Ebene auf einem Durchmesser, ihr Nullpunkt bleibt also ungeändert, die Polare irgend eines Punktes verschiebt sich parallel, es bleibt also auch die Nullebene jedes Punktes ungeändert. *Das Nullsystem ist also für alle Flächen eines concyclischen Büschels dasselbe.* Die Flächen eines solchen Büschels erfüllen den ganzen Raum einfach und *das Nullsystem weist dann jedem Punkte als Nullebene die Ebene zu, die in ihm die durch ihn gehende Fläche des Büschels berührt.* Jede Ebene ist auch Tangentialebene nur einer Fläche des concyclischen Büschels und *der Berührungspunkt ist ihr Nullpunkt in unserem Nullsysteme.*

2.

Den Ebenen eines Bündels entsprechen in dem betrachteten Nullsysteme die Punkte einer quadratischen Fläche. Diese Fläche wird von den zu den Polen der Ebenen inversen Punkten gebildet und ist die inverse Fläche zu der Polare des Bündelscheitels bez. der Grundfläche. Sie ist homothetisch zu der Grundfläche und geht durch ihren Mittelpunkt. Sie berührt ferner in dem Bündelscheitel dessen Nullebene und schneidet endlich die Grundfläche in demselben Kegelschnitte wie die Polare des Bündelscheitels.

Fällt man aber von dem Bündelscheitel auf die Symmetrieebenen und Hauptaxen der Grundfläche die Lote, so bilden die Fusspunkte derselben mit dem Bündelscheitel und dem Mittelpunkte der Grundfläche zusammen die Ecken eines rechtwinkligen Parallelepipedon, und es ist leicht zu sehen, dass die Nullfläche durch alle Ecken dieses Parallelepipedon geht. Denn die Seitenflächen desselben, die den Bündelscheitel enthalten, haben zu Nullpunkten ihre Schnittpunkte mit je einer Hauptaxe der Grundfläche, also drei Ecken des Parallelepipedon, und die Nullebenen, die zu den Fusspunkten der auf die Symmetrieebenen gefällten Lote gehören, gehen durch diese Lote und damit durch den Bündelscheitel.

(*) Herr Waelsch gebraucht dieselbe Bezeichnung in einer allgemeineren Bedeutung.

Legt man nun durch die Mitte zwischen dem Bündelscheitel und dem Mittelpunkte der Grundfläche die zu der letzteren concyclische Fläche, so ist dieser die betrachtete Nullfläche congruent, und man hat jene Fläche nur parallel mit sich nach dem Bündelscheitel zu um seine halbe Entfernung vom Mittelpunkte der Grundfläche zu verschieben, damit sie mit der Nullfläche zusammenfällt.

Diese Construction der Nullfläche versagt nur dann, wenn die Ebenen des Bündels sich alle in parallelen Geraden schneiden, der Bündelscheitel also in unendlicher Entfernung liegt. Dann zerfällt die zugehörige Nullfläche in die unendlich ferne Ebene und eine Durchmesserebene, und zwar hat der zu der letzteren conjugirte Durchmesser die Richtung jener parallelen Schnittlinien und geht durch den unendlich fernen Bündelscheitel.

Dem Bündel der Ebenen, die durch den Mittelpunkt der Grundfläche gehen, ist als Nullfläche der Asymptotenkegel der Grundfläche zugeordnet.

Den Ebenen eines Büschels entsprechen als Nullpunkte die Punkte eines Kegelschnittes. Derselbe enthält den Mittelpunkt der Grundfläche, schneidet die Axe des Ebenenbüschels und geht durch die Schnittpunkte ihrer reziproken Polare mit der Grundfläche hindurch, er liegt also in der Ebene, die diese Polare mit dem Mittelpunkte der Grundfläche verbindet und ist zu der Schnittcurve dieser Ebene homothetisch. Seine Tangenten im Mittelpunkte der Grundfläche und in seinem Schnittpunkte mit der Axe des Ebenenbüschels sind der reziproken Polare dieser Axe parallel und berühren ihn somit in den Endpunkten des Durchmessers, der der Richtung der Polare conjugirt ist.

Die Nullebenen der Punkte einer beliebigen Ebene umhüllen ein Paraboloid. Bestimmt man die Polaren von den Punkten der Ebene und zu dem Bündel dieser Polarebenen die zugehörige Nullfläche, so ist jenes Paraboloid von dieser Nullfläche die reziproke Polare bez. der Grundfläche. Hieraus ergiebt sich mit Leichtigkeit, dass das Paraboloid von dem Tangentialkegel, der die Grundfläche längs ihrer Schnittcurve mit der Nullpunktsebene berührt, ebenfalls umhüllt wird, ferner dass es die Nullpunktsebene selbst in ihrem Nullpunkte tangirt. Die Verbindungslinie dieses Nullpunktes mit dem Mittelpunkte der Grundfläche ist ein Durchmesser des Paraboloids. Das letztere berührt weiter die Normalebenen, welche man auf den Hauptaxen in ihren Schnittpunkten mit der Nullpunktsebene errichtet, und die Ebenen, welche auf den Symmetrieebenen in ihren Schnittlinien mit der Nullpunktsebene senkrecht stehen.

Enthält die Nullpunktsebene den Mittelpunkt der Grundfläche, so bilden die zugehörigen Nullebenen zwei Ebenenbündel. Die Ebenen des einen gehen durch den Mittelpunkt der Grundfläche, und die Ebenen des anderen sind dem zu der Nullpunktsebene conjugirten Durchmesser parallel.

Die Nullebenen der Punkte einer beliebigen geraden Linie umhüllen einen parabolischen Cylinder. Dessen Seitenlinien laufen der reziproken Polare der Nullpunktslinie parallel, und er berührt die beiden Tangentialebenen der Grundfläche, welche sie in ihren Schnittpunkten mit der Nullpunktslinie tangiren und durch die reziproke Polare der letzteren gehen. Die Nullpunktslinie selbst berührt den Cylinder, und die Ebene, welche den Berührungspunkt mit der reziproken Polare der Nullpunktslinie verbindet, ist eine Durchmesserebene des Cylinders.

3.

Den zugehörigen analytischen Entwicklungen wollen wir der Einfachheit halber, und um mit der herkömmlichen Schreibweise möglichst in Einklang zu bleiben, ein Ellipsoid zugrunde legen, dessen Gleichung auf die Hauptaxen bezogen sei und laute:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{1}$$

Bezüglich dieses Ellipsoids ist die Polarebene des Punktes P_0 mit den Coordinaten x_0, y_0, z_0:

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1. \tag{2}$$

Die zu dieser Polare parallel durch den Punkt P_0 gelegte Ebene ist die Nullebene des Punktes P_0 in unserem Nullsysteme. Ihre Gleichung lautet:

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2},$$

oder:

$$\frac{x_0 (x - x_0)}{a^2} + \frac{y_0 (y - y_0)}{b^2} + \frac{z_0 (z - z_0)}{c^2} = 0. \tag{3}$$

Vertauschen wir in dieser Gleichung die Grössen x_0, y_0, z_0 mit den Veränderlichen x, y, z und sehen immer die mit dem Index 0 versehenen Coordinaten als die constanten und die anderen als die variabelen an, so wird durch die so erhaltene Gleichung:

$$\frac{x(x-x_0)}{a^2}+\frac{y(y-y_0)}{b^2}+\frac{z(z-z_0)}{c^2}=0 \tag{4}$$

die Fläche dargestellt, welche von den Nullpunkten aller durch den Punkt P_0 gehenden Ebenen erfüllt wird. Die Gleichung zeigt, dass diese Nullfläche homothetisch zu der Grundfläche ist und den Schnitt der Nullebene des Punktes P_0 mit der Grundfläche enthält. Denn wir erhalten die Gleichung (4), indem wir die Gleichung (3) subtrahiren von der folgenden:

$$\frac{x^2-x_0^2}{a^2}+\frac{y^2-y_0^2}{b^2}+\frac{z^2-z_0^2}{c^2}=0, \tag{5}$$

welche die zu der Grundfläche concyclische und durch den Punkt P_0 hindurchgehende Fläche darstellt. Von dieser Fläche ist, wie es sein muss, die Nullebene des Punktes P_0 eine Tangentialebene.

Man sieht ebenfalls sofort aus der Gleichung der Nullfläche, dass sie nicht allein durch den Coordinatenursprung, den Mittelpunkt der Grundfläche, und den Punkt P_0 geht, sondern durch alle Ecken des rechtwinkligen Parallelepipedon, von dem die Coordinatenaxen drei Kanten und der Punkt P_0 eine Ecke ist.

Die Hauptaxen der Nullfläche sind halb so gross wie die Axen der zur Grundfläche concyclischen Fläche (5), die durch den Punkt P_0 geht. Man erhält also congruente Nullflächen für alle Punkte einer zur Grundfläche concyclischen Fläche, die gleichzeitig von den Nullebenen dieser Punkte umhüllt wird, und zwar sind die Axen dieser Fläche immer doppelt so gross als die der zugehörigen Nullflächen.

Die Gleichung (4) der Nullfläche lässt sich auch in die folgenden beiden zerfällen:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=k,$$

$$\frac{x_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}+\frac{z_0 z}{c^2}=k,$$

wo k einen beliebig variabelen Parameter bezeichnet. Dies ist der analytische Ausdruck für die geometrisch sofort evidente Thatsache, dass *die Nullfläche von den Berührungscurven der Tangentenkegel erfüllt wird, die sich aus dem zugehörigen Punkte P_0 an die zur Grundfläche concyclischen Flächen legen lassen.*

Setzt man die Gleichung der Nullebene π_0 des Punktes P_0 in der Form an:

$$u_0 x + v_0 y + w_0 z = 1, \tag{6°}$$

so lehrt die Vergleichung mit der Gleichung (3), dass man zu setzen hat:

$$u_0 = \frac{\frac{x_0}{a^2}}{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}}, \quad v_0 = \frac{\frac{y_0}{b^2}}{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}}, \quad w_0 = \frac{\frac{z_0}{c^2}}{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}}. \tag{6}$$

Die Nullebene ist, wie man hieraus wieder sieht, die Polarebene des Punktes mit den Coordinaten:

$$\frac{x_0}{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}}, \quad \frac{y_0}{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}}, \quad \frac{z_0}{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}},$$

und dies ist der zu dem Punkte P_0 bez. der Grundfläche inverse Punkt.

Sucht man umgekehrt zu einer gegebenen Ebene den Nullpunkt, so hat man die Gleichungen (6) nach x_0, y_0, z_0 aufzulösen. Man findet zunächst, indem man sie quadrirt, mit a^2, b^2, c^2 multiplizirt und addirt:

$$(a^2 u_0^2 + b^2 v_0^2 + c^2 w_0^2)\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}\right) = 1,$$

und somit:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{a^2 u_0}{a^2 u_0^2 + b^2 v_0^2 + c^2 w_0^2}, \\ y_0 &= \frac{b^2 v_0}{a^2 u_0^2 + b^2 v_0^2 + c^2 w_0^2}, \\ z_0 &= \frac{c^2 w_0}{a^2 u_0^2 + b^2 v_0^2 + c^2 w_0^2}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Die Gleichung des Nullpunktes der Ebene π_0 in Ebenencoordinaten u, v, w lautet sonach:

$$a^2 u_0 u + b^2 v_0 v + c^2 w_0 w = a^2 u_0^2 + b^2 v_0^2 + c^2 w_0^2,$$

oder:

$$a^2 u_0 (u - u_0) + b^2 v_0 (v - v_0) + c^2 w_0 (w - w_0) = 0. \tag{8}$$

Vertauscht man wieder die Coordinaten mit dem Index 0 und die ohne Index, so erhält man die Gleichung:

$$a^2 u (u - u_0) + b^2 v (v - v_0) + c^2 w (w - w_0) = 0 \tag{9}$$

als die Tangentialgleichung der Fläche Π_0, die von den Nullebenen der in der Ebene π_0 gelegenen Punkte umhüllt wird. Aus dieser Gleichung sieht man sofort, dass die Fläche die unendlich ferne Ebene und die Ebene π_0 berührt, ebenso aber auch die sechs Ebenen, die folgende Coordinaten haben:

1. $u_0,\ 0,\ 0;$	4. $0,\ v_0,\ w_0;$
2. $0,\ v_0,\ 0;$	5. $u_0,\ 0,\ w_0;$
3. $0,\ 0,\ w_0;$	6. $u_0,\ v_0,\ 0.$

Die ersten drei sind normal, die letzten drei parallel zu je einer Hauptaxe der Grundfläche. Setzt man in der Gleichung (9):

$$a^2 u_0 u + b^2 v_0 v + c^2 w_0 w = 1,$$

so wird sie:

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2 = 1.$$

Die durch den Pol P'_0 der Ebene π_0 gehenden Tangentialebenen hat die Nullfläche also mit der Grundfläche gemein.

Die Gleichung der Fläche Π_0 in Punktcoordinaten wird, wenn man an Stelle der Ebenencoordinaten u_0, v_0, w_0 die Coordinaten x'_0, y'_0, z'_0 des Pols P'_0 einführt:

$$\left(\frac{x'_0 x}{a^2} + \frac{y'_0 y}{b^2} + \frac{z'_0 z}{c^2} - 2\right)^2 = \left(\frac{x'^2_0}{a^2} + \frac{y'^2_0}{b^2} + \frac{z'^2_0}{c^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) (*). \tag{10}$$

(*) Die Gleichung lässt in dieser Form sofort erkennen, dass durch drei beliebige Punkte die Nullflächen zweier Ebenen gehen. Diese beiden Nullflächen haben aber die Punkte zweier Kegelschnitte mit einander gemein. Von diesen Kegelschnitten ist jedoch einer stets imaginär, wenn seine Ebene auch reell ist.

Diese Gleichung ist für die Coordinaten x_0, y_0, z_0 des Punktes P_0 befriedigt, weil für dieselben:

$$\frac{x'_0 x_0}{a^2}+\frac{y'_0 y_0}{b^2}+\frac{z'_0 z_0}{c^2}=1, \quad \left(\frac{x'^2_0}{a^2}+\frac{y'^2_0}{b^2}+\frac{z'^2_0}{c^2}\right)\left(\frac{x^2_0}{a^2}+\frac{y^2_0}{b^2}+\frac{z^2_0}{c^2}\right)=1$$

wird. Die Polare des Punktes P'_0 bez. der Fläche Π_0 hat die Gleichung:

$$\frac{x'_0(x+x'_0)}{a^2}+\frac{y'_0(y+y'_0)}{b^2}+\frac{z'_0(z+z'_0)}{c^2}=2. \tag{11}$$

In dieser Ebene liegt also der Kegelschnitt, längs dem der gemeinsame Tangentialkegel der Grundfläche und der Nullfläche Π_0 die letztere berührt. Die Spitze dieses Kegels ist eben der Punkt P'_0.

Die Nullfläche Π_0 *wird umhüllt von den Kegeln, welche die zur Grundfläche concyclischen Flächen in ihren Schnittlinien mit der Ebene* π_0 *berühren.* In der That ist das Nullsystem für alle diese Flächen dasselbe und müssen alle diese Kegel deshalb Tangentialkegel der Fläche Π_0 sein.

Für die zur Grundfläche concyclische Fläche, welche die Hauptaxen:

$$k\,a, \quad k\,b, \quad k\,c$$

hat, sind die Coordinaten des Pols P'_0 der Ebene π_0:

$$k^2 x'_0, \quad k^2 y'_0, \quad k^2 z'_0.$$

Der aus diesem Punkte an die Fläche gelegte Tangentialkegel hat die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{x'_0 x}{a^2}+\frac{y'_0 y}{b^2}+\frac{z'_0 z}{c^2}-1\right)^2=\\ \left(\frac{x'^2_0}{a^2}+\frac{y'^2_0}{b^2}+\frac{z'^2_0}{c^2}-\frac{1}{k^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-k^2\right).\end{aligned}\right\} \tag{12^a}$$

Differentiirt man diese Gleichung nach k, so findet man:

$$k^2\left(\frac{x'^2_0}{a^2}+\frac{y'^2_0}{b^2}+\frac{z'^2_0}{c^2}\right)=\frac{1}{k^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right).$$

Aus diesen beiden Gleichungen leitet man leicht die folgende her:

$$\frac{x'_0(x+k^2x'_0)}{a^2}+\frac{y'_0(y+k^2y'_0)}{b^2}+\frac{z'_0(z+k^2z'_0)}{c^2}=2, \qquad (12^b)$$

die man auch aus (11) erhalten kann, indem man hierin die Hauptaxen mit k und die Coordinaten des Pols P'_0 mit k^2 multiplizirt. Durch Elimination des Parameters k aus den Gleichungen (12^a) und (12^b) gelangt man aber wieder zu der Gleichung (10) zurück, womit auch analytisch nachgewiesen ist, dass die Nullfläche Π_0 von den Kegeln (12^a) umhüllt wird.

Ueber ein quadratisches Nullsystem.

(*Von* H. E. Timerding, *in Strassburg.*)

4.

Wir gehen nunmehr auf die ursprüngliche Definition unseres Nullsystems zurück. Der Nullpunkt P_0 einer Ebene π_0 ist der Mittelpunkt des Kegelschnittes, in dem die Ebene die Grundfläche schneidet. Denken wir uns nun durch diesen Mittelpunkt die Hauptaxen des Kegelschnittes gezogen. Gleichzeitig wollen wir uns die Hauptaxen desjenigen Kegelschnittes gezeichnet denken, welchen die Polare π'_0 des Nullpunktes der Ebene π_0 mit der Grundfläche gemein hat. Diese beiden Ebenen π_0 und π'_0 sind dann nach unserem Ausdrucke inbezug auf die Grundfläche invers, und ebenso sind ihre Nullpunkte P_0 und P'_0 inbezug auf die Grundfläche invers. Der Nullpunkt der einen Ebene ist jedesmal der Pol der anderen bez. der Grundfläche. Aber auch die Hauptaxen der Kegelschnitte in beiden Ebenen sind einander paarweise als reziproke Polaren bez. der Grundfläche zugeordnet, so dass zwei einander zugeordnete Axen sich jedesmal rechtwinklig kreuzen. Fasst man demnach den ganzen Axencomplex der Grundfläche ins Auge, so ist sofort klar, dass jeder geraden Linie dieses Complexes eine andere zugeordnet ist, welche die erste unter rechtem Winkel schneidet und mit ihr zusammen das Hauptaxenpaar eines Kegelschnittes auf der Grundfläche bildet. Zwei solche Linien wollen wir kurz als conjugirte Axen der Grundfläche bezeichnen. *Dann ist der Schnittpunkt zweier conjugirten Axen ihrer Ebene in unserem Nullsysteme als Nullpunkt zugewiesen.* Die reziproken Polaren zweier conjugirten Axen bilden wieder ein Paar conjugirter Axen. Ihre Ebene und ihr Schnittpunkt sind zu der Ebene und dem Schnittpunkt der ersten beiden Axen invers bez. der Grundfläche.

Eine gerade Linie ist Axe der Grundfläche, wenn sie von ihrer reziproken Polare rechtwinklig gekreuzt wird oder, was dasselbe heisst, wenn die Polare eines ihrer Punkte zu ihr senkrecht ist. Dieser Punkt heisst der Pol der Axe. *Jede Axe ist senkrecht zu der Nullebene ihres Pols.* Insbesondere gehören die Normalen der Grundfläche zu ihrem Axencomplex.

Fällen wir nun von dem Punkte P'_0 auf seine Polare π_0 das Lot p_0, so ist dieses und ebenso seine Polare q_0, die in der Ebene π_0 liegt, Axe der Grundfläche. Die Schnittpunkte der letzteren Linie mit den Hauptaxen des in π_0 gelegenen Kegelschnittes der Grundfläche haben zu Polaren die senkrecht zu diesen Hauptaxen durch p_0 gelegten Ebenen, sie sind also die Pole dieser Hauptaxen. Die Linie q_0 schneidet somit aus den conjugirten Axen in der zugehörigen Ebene π_0 ihre Pole aus. Wir wollen sie die der Ebene π_0 adjungirte Axe nennen. *Auf ihr liegen die Pole aller in der Ebene enthaltenen Axen.* In jeder Ebene sind zwei Normalen der Grundfläche enthalten. *Die Verbindungslinie ihrer Fusspunkte ist die der Ebene adjungirte Axe.* Die Fusspunkte der in einer Ebene gelegenen Normalen auf den Flächen eines concyclischen Büschels erfüllen die dieser Ebene adjungirte Axe.

Von zwei reziprok polaren Axen ist jede der Polarebene des Pols der anderen adjungirt.

Indem wir jeder Ebene ihre adjungirte Axe zuweisen, ist der Axencomplex wechselweise eindeutig auf die Ebenen des Raumes bezogen. Man findet zu einer Ebene π_0 ihre adjungirte Axe, indem man mit ihr die Durchmesserebene zum Schnitt bringt, die zu dem auf der Ebene π_0 senkrechten Durchmesser conjugirt ist, und umgekehrt zu einer Axe die Ebene, der sie adjungirt ist, indem man durch sie die Normalebene zu dem Durchmesser legt, welcher der durch sie gehenden Durchmesserebene conjugirt ist. Hieraus folgt, dass parallelen Ebenen parallele Axen adjungirt sind, die in einer Durchmesserebene liegen. Ebenso sind aber die Hauptaxen der in parallelen Ebenen gelegenen Kegelschnitte der Grundfläche parallel und liegen in zwei Durchmesserebenen. So werden alle Ebenen einer bestimmten Stellung von zwei Durchmesserebenen in Paaren conjugirter Axen und von einer dritten in der jedesmal adjungirten Axe geschnitten. Die beiden ersten Durchmesserebenen sind einander conjugirt und schneiden sich in dem Durchmesser, welcher allen Ebenen von jener bestimmten Stellung conjugirt ist.

Seien die Gleichungen dieser beiden Durchmesserebenen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} + \frac{z_1 z}{c^2} = 0, \\ \frac{x_2 x}{a^2} + \frac{y_2 y}{b^2} + \frac{z_2 z}{c^2} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

so verhalten sich die Coordinaten der ihnen conjugirten Durchmesser wie

$$x_1 : y_1 : z_1 \quad \text{und} \quad x_2 : y_2 : z_2 ,$$

und alle Ebenen:

$$u x + v y + w z = 1, \tag{2}$$

für:

$$u : v : w = (y_1 z_2 - y_2 z_1) : (z_1 x_2 - z_2 x_1) : (x_1 y_2 - x_2 y_1),$$

werden von den Durchmesserebenen (1) in Paaren conjugirter Axen geschnitten. Die beiden den Durchmesserebenen conjugirten Durchmesser sollen aber nicht bloss einander conjugirt, sondern auch zu einander senkrecht sein, sie genügen also ausser der Gleichung:

$$\frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} + \frac{z_1 z_2}{c^2} = 0$$

auch der anderen:

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0 ,$$

woraus sich die Doppelgleichung ergiebt:

$$\frac{x_1 x_2}{a^2 (b^2 - c^2)} = \frac{y_1 y_2}{b^2 (c^2 - a^2)} = \frac{z_1 z_2}{c^2 (a^2 - b^2)} . \tag{3}$$

Die Coordinaten eines Punktes auf dem zu den Ebenen (2) senkrechten Durchmesser verhalten sich wie

$$u : v : w;$$

diesem Durchmesser ist die Durchmesserebene:

$$\frac{u x}{a^2} + \frac{v y}{b^2} + \frac{w z}{c^2} = 0 \tag{4}$$

conjugirt, sie schneidet also alle Ebenen (2) in ihren adjungirten Axen.

Dreht sich eine Ebene um eine gerade Linie, so durchläuft ihre adjungirte Axe eine quadratische Regelschar. Weiter zeigt sich, dass die den Ebenen eines Bündels adjungirten Axen die Sehnen einer cubischen Raumcurve bilden. Hat der Scheitel dieses Ebenenbündels die Coordinaten x_0, y_0, z_0, so ist die Gleichung irgend einer Ebene des Bündels von der Form:

$$u (x - x_0) + v (y - y_0) + w (z - z_0) = 0, \tag{2$^{\text{bis}}$}$$

und ihre adjungirte Axe wird durch die Ebene ausgeschnitten:

$$\frac{u x}{a^2} + \frac{v y}{b^2} + \frac{w z}{c^2} = 0. \tag{4}$$

Diese Gleichungen sind, wenn:

$$a^2 \frac{x - x_0}{x} = b^2 \frac{y - y_0}{y} = c^2 \frac{z - z_0}{z} = t \tag{5}$$

gesetzt wird, für jeden Wert des Parameters t erfüllt, und den Grössen u, v, w lassen sich dann jedesmal noch unendlich viele verschiedene Werte geben. Aus den letzten Gleichungen folgt aber:

$$x = \frac{a^2 x_0}{a^2 + t}, \quad y = \frac{b^2 y_0}{b^2 + t}, \quad z = \frac{c^2 z_0}{c^2 + t}. \tag{6}$$

Dies ist die Parameterdarstellung der cubischen Raumcurve, deren Sehnen die den Ebenen des Bündels adjungirten Axen sind. Es ist eine räumliche Hyperbel, die durch den Bündelscheitel und den Mittelpunkt O der Grundfläche geht und deren Asymptoten den Hauptaxen der Grundfläche parallel laufen.

Legt man die Grössen u, v, w nicht bloss ihren Verhältnissen, sondern auch ihren absoluten Werten nach fest, so sind sie die Coordinaten einer bestimmten Ebene, und man kann durch sie die Coordinaten der dieser Ebene adjungirten Axe ausdrücken wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{u}{a^2}, & \xi_2 &= (b^2 - c^2)\frac{v\,w}{b^2 c^2}, \\ \eta_1 &= \frac{v}{b^2}, & \eta_2 &= (c^2 - a^2)\frac{w\,u}{c^2 a^2}, \\ \zeta_1 &= \frac{w}{c^2}, & \zeta_2 &= (a^2 - b^2)\frac{u\,v}{a^2 b^2}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Hieraus ergiebt sich durch Elimination der Grössen u, v, w als Darstellung des Axencomplexes:

$$\frac{\xi_1 \xi_2}{b^2 - c^2} = \frac{\eta_1 \eta_2}{c^2 - a^2} = \frac{\zeta_1 \zeta_2}{a^2 - b^2}, \tag{8}$$

woraus die notwendige Beziehung zwischen den Liniencoordinaten:

$$\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + \zeta_1 \zeta_2 = 0$$

von selbst hervorgeht (*).

(*) Die ersten analytischen Formeln für den Axencomplex sind von Herrn Reye gegeben, in Band II der 2. Serie dieser *Annalen*. Später ist Herr Schilke auf den Gegenstand zurückgekommen, *Zeitschr. für Math. und Physik*, 1874. Man vergleiche die synthetische Darstellung in Reye's *Geometrie der Lage*, die auch neueren Untersuchungen, besonders von Herrn Waelsch, gerecht wird.

5.

Man erhält diejenige Axe einer quadratischen Fläche, welche einen gegebenen Punkt zum Pol hat, indem man von diesem Punkte auf seine Polarebene das Lot fällt. Habe der Punkt die Coordinaten x'_0, y'_0, z'_0 und beachtet man, dass die gerade Linie durch diesen Punkt, die auf der Ebene:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$$

senkrecht steht, durch die Doppelgleichung:

$$\frac{x - x'_0}{\alpha} = \frac{y - y'_0}{\beta} = \frac{z - z'_0}{\gamma}$$

bestimmt wird, so findet man sofort für die gesuchte Axe die Darstellung:

$$a^2 \frac{x - x'_0}{x'_0} = b^2 \frac{y - y'_0}{y'_0} = c^2 \frac{z - z'_0}{z'_0}. \tag{1}$$

Den gemeinsamen Wert dieser Brüche wollen wir t nennen. Sieht man in der Doppelgleichung die Coordinaten x, y, z als constant und die x'_0, y'_0, z'_0 als veränderlich an, so stellt sie den Ort der Pole dar, deren zugehörige Axen durch einen festen Punkt gehen. Dieser Ort ist eine räumliche Hyperbel, die auch durch die Fusspunkte der von dem festen Punkte auf die quadratische Fläche gefällten Lote geht. Ihre Parameterdarstellung ist, wenn man x_0, y_0, z_0 für x, y, z und x, y, z für x'_0, y'_0, z'_0 schreibt:

$$x = \frac{a^2 x_0}{a^2 + t}, \quad y = \frac{b^2 y_0}{b^2 + t}, \quad z = \frac{c^2 z_0}{c^2 + t}. \tag{2}$$

Diese Curve bleibt ungeändert, wenn man a, b, c mit einer beliebigen Constanten multiplizirt. So hat man den bekannten schönen Satz: Die Fusspunkte der von einem gegebenen Punkte auf die Flächen eines concyclischen Büschels gefällten Normalen liegen auf einer räumlichen Hyperbel, die durch den gegebenen Punkt und den Mittelpunkt O der concyclischen Flächen geht, und deren Asymptoten den gemeinsamen Hauptaxen dieser Flächen parallel laufen. Diese Raumcurve wollen wir die Polcurve des gegebenen Punktes, bez. irgend einer Fläche des concyclischen Büschels, nennen. Der gegebene Punkt selbst möge ihr Nullpol heissen.

Verbindet man irgend zwei Punkte einer Polcurve, so ist die Verbindungslinie die adjungirte Axe zu der Ebene, welche durch sie und den Nullpol der Polcurve geht, denn sie enthält von zwei und damit von allen Axen in dieser Ebene die Pole. *Die Sehnen der Polcurven sind also nicht bloss Axen der Grundfläche, man kennt auch sofort die Ebene, der sie jedesmal adjungirt sind, denn diese Ebene geht immer durch den Nullpol der Polcurve.* In der That stimmt das Gleichungentripel (2) überein mit den Gleichungen (6) des vorigen Art. für die cubische Raumcurve, deren Sehnen den Ebenen eines Bündels als Axen adjungirt sind.

Der Kegel, welcher eine Polcurve aus ihrem Nullpol projizirt, ist der von allen durch den Nullpol gehenden Axen gebildete Kegel, er werde der Complexkegel dieses Punktes genannt. Für seine Gleichung findet man ohne Mühe aus (2):

$$(b^2 - c^2)\frac{x_0}{x - x_0} + (c^2 - a^2)\frac{y_0}{y - y_0} + (a^2 - b^2)\frac{z_0}{z - z_0} = 0. \tag{3}$$

Dieser Kegel ist derselbe für alle Flächen $F_{\lambda\mu}$, deren Gleichung die Form hat:

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda} = \frac{1}{\mu}. \tag{4}$$

In der That bestimmen alle diese Flächen, die Herr Reye coaxial nennt, denselben Axencomplex.

Schreibt man nun in den Gleichungen (2):

$$a^2 - \lambda,\ b^2 - \lambda,\ c^2 - \lambda \quad \text{für} \quad a^2,\ b^2,\ c^2,$$

ersetzt also die quadratische Fläche durch eine zu ihr confocale, so findet man:

$$x = \frac{a^2 x_\lambda}{a^2 + t_\lambda}, \quad y = \frac{b^2 y_\lambda}{b^2 + t_\lambda}, \quad z = \frac{c^2 z_\lambda}{c^2 + t_\lambda}, \tag{5}$$

indem man setzt:

$$x_\lambda = \frac{a^2 + \lambda}{a^2} x_0, \quad y_\lambda = \frac{b^2 + \lambda}{b^2} y_0, \quad z_\lambda = \frac{c^2 + \lambda}{c^2} z_0, \quad t_\lambda = t - \lambda, \tag{6}$$

woraus:

$$a^2 \frac{x_\lambda - x_0}{x_0} = b^2 \frac{y_\lambda - y_0}{y_0} = c^2 \frac{z_\lambda - z_0}{z_0} = \lambda. \tag{7}$$

Der Punkt P_λ mit den Coordinaten x_λ, y_λ, z_λ liegt also auf der Axe, deren Pol bez. der Grundfläche der Punkt P_0 mit den Coordinaten x_0, y_0, z_0 ist, und zwar ist P_λ der Pol dieser Axe bez. der zur Grundfläche confocalen Fläche, denn aus den Gleichungen (6) folgt auch:

$$(a^2+\lambda)\frac{x_0-x_\lambda}{x_\lambda}=(b^2+\lambda)\frac{y_0-y_\lambda}{y_\lambda}=(c^2+\lambda)\frac{z_0-z_\lambda}{z_\lambda}.$$

Die Polcurve eines Punktes P_0 für eine zur Grundfläche confocale Fläche ist also die Polcurve eines anderen Punktes P_λ für die Grundfläche, und dieser andere Punkt bestimmt sich durch die Bedingung, dass von seiner Verbindungslinie mit P_0, die zum Axencomplex gehört, P_0 der Pol für die Grundfläche und P_λ der Pol für die confocale Fläche sein soll. Man erhält also dieselben Raumcurven, ob man zu den Punkten einer Axe die Polcurven für eine bestimmte Fläche sucht oder die Polcurven eines Punktes, des Pols dieser Axe bez. der bestimmten Fläche, für alle zu dieser confocalen Flächen construirt. Diese Raumcurven überdecken den Complexkegel jenes Pols. Sie sind durch die Seitenlinien dieses Kegels, und diese umgekehrt durch die Polcurven, projektiv auf einander bezogen, indem entsprechende Punkte immer auf derselben Axe oder Polcurve liegen. Es entsprechen dann immer die Punkte einander, die Pole der Axe oder Nullpole der Polcurve bez. derselben Fläche der confocalen Schar sind.

Andererseits sind die Scharen der durch einen Punkt P_0 gehenden Axen und Polcurven projektiv auf die Schar der confocalen Flächen bezogen. Jeder Fläche dieser Schar ist die Axe oder Polcurve zuzuweisen, deren Pol für diese Fläche nach P_0 fällt. Die Scharen der Axen und Polcurven sind dadurch so auf einander projektiv bezogen, dass jede Axe die ihr entsprechende Polcurve berührt. Den Pol einer Axe oder Nullpol einer Polcurve für irgend eine Fläche F_λ der confocalen Schar findet man, indem man den weiteren Schnittpunkt mit der Polcurve oder Axe bestimmt, die der Fläche F_λ entspricht.

6.

Unser Nullsystem war dasselbe für alle Flächen eines concyclischen Büschels. Es sei jetzt die Aufgabe, zu untersuchen, welche Veränderung es erleidet, wenn man die Grundfläche durch die zu ihr confocalen Flächen ersetzt.

Fragen wir zunächst, was für ein Büschel die Nullebenen eines gegebenen Punktes bez. dieser Flächen umhüllen. Die Antwort ergiebt sich sofort daraus, dass die Nullebene des Punktes P_0 mit den Coordinaten x_0, y_0, z_0 für die Fläche:

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1 \tag{1}$$

die folgende ist:

$$\frac{x_0(x-x_0)}{a^2-\lambda}+\frac{y_0(y-y_0)}{b^2-\lambda}+\frac{z_0(z-z_0)}{c^2-\lambda}=0. \tag{2}$$

Diese Gleichung stellt für variirendes λ die Ebenen eines quadratischen Büschels dar. Um die Gleichung des Kegels zu finden, den sie umhüllen, differentiiren wir die Gleichung (2) nach λ und erhalten:

$$\frac{x_0(x-x_0)}{(a^2-\lambda)^2}+\frac{y_0(y-y_0)}{(b^2-\lambda)^2}+\frac{z_0(z-z_0)}{(c^2-\lambda)^2}=0,$$

und aus den beiden vorstehenden Gleichungen durch Elimination von λ die Kegelgleichung:

$$\sqrt{b^2-c^2}\cdot\sqrt{x_0(x-x_0)}+\sqrt{c^2-a^2}\cdot\sqrt{y_0(y-y_0)}+\sqrt{a^2-b^2}\cdot\sqrt{z_0(z-z_0)}=0. \tag{3}$$

Dieser Nullkegel hat natürlich seine Spitze im Punkte P_0, er berührt die Parallelebenen durch diesen Punkt zu den Symmetrieebenen der confocalen Flächen und ebenso die durch den Punkt P_0 senkrecht zu seiner Verbindungslinie mit dem Mittelpunkt O gelegte Ebene. Er zerfällt, wenn der Punkt P_0 selbst in einer dieser Symmetrieebenen liegt, in zwei Normalebenen derselben und wird unbestimmt, wenn der Punkt P_0 in den gemeinsamen Mittelpunkt der confocalen Flächen rückt.

Der Nullkegel und der Complexkegel des Punktes P_0, dessen Gleichung lautete:

$$(b^2-c^2)\frac{x_0}{x-x_0}+(c^2-a^2)\frac{y_0}{y-y_0}+(a^2-b^2)\frac{z_0}{z-z_0}=0, \tag{4}$$

haben die Eigentümlichkeit, dass sich dem letzteren unendlich viele rechtwinklige Dreikante einbeschreiben lassen, die dem ersteren umschrieben sind. Die Kanten eines von diesen Dreikanten sind den Hauptaxen der confocalen Flächen parallel. Greifen wir ein beliebiges unter ihnen heraus, so giebt es drei bestimmte Flächen, welche mit den confocalen Flächen die Symmetrieebenen gemein haben und je eine Ebene des rechtwinkligen Dreikants in der Spitze desselben berühren. Diese drei Flächen sind zu drei Flächen der confocalen Schar concyclisch, und für die letzteren sind die Ebenen des Dreikants die Nullebenen seiner Spitze. Diese Spitze ist Pol einer jeden Kante des Axendreikantes für *die* Fläche, für die sie der Nullpunkt der zu der Kante senkrechten Ebene des Dreikants ist.

Die Seitenlinien des Complexkegels sind auf die Tangentialebenen des Nullkegels derart projektiv bezogen, dass jede Tangentialebene des letzteren auf der entsprechenden Seitenlinie des ersteren senkrecht steht und Nullebene der gemeinsamen Kegelspitze für dieselbe Fläche der confocalen Schar ist, für welche der Pol der entsprechenden Seitenlinie des Complexkegels in diese Kegelspitze fällt, während sie von dem Complexkegel selbst in den Hauptaxen ihres Schnittes mit dieser Fläche getroffen wird. Durch jeden der beiden Kegel ist der andere vollkommen bestimmt.

Die Polarebenen eines Punktes P_0 inbezug aut die Flächen der confocalen Schar umhüllen eine räumliche Parabel. Dieselbe hat die Eigenschaft, dass sie unendlich viele Tripel zu einander normaler Schmiegungsebenen besitzt, deren Schnittpunkte auf einer — alle Durchmesser der Parabel rechtwinklig kreuzenden oder schneidenden — geraden Linie, nämlich der Linie $P_0\, O$, liegen. Irgend zwei Schmiegungsebenen der räumlichen Parabel schneiden sich in einer Axe des Axencomplexes. Nämlich der Pol einer der beiden Ebenen bez. der Fläche, zu der die andere als Polare des Punktes P'_0 gehört, liegt auf dem von P'_0 auf die erste Ebene gefällten Lote, und dies ist somit die reziproke Polare der Schnittlinie beider Ebenen bez. einer der confocalen Flächen; weil aber das Lot und die Schnittlinie sich rechtwinklig kreuzen, gehören sie beide dem Axencomplex an. Die räumliche Parabel ist die reziproke Polare der Polcurve von P_0 für irgend eine der confocalen Flächen. Ihre Axen werden von jeder ihrer Schmiegungsebenen in den Polen bez. je einer der confocalen Flächen geschnitten. Die in der Schmiegungsebene gelegenen Axen der Parabel sind, ebenfalls bez. einer bestimmten unter den confocalen Flächen, den anderen durch sie gehenden Schmiegungsebenen adjungirt. Insbesondere ist jede Tangente der räumlichen Parabel der durch sie gehenden Schmiegungsebene bez. *der* Fläche adjungirt, bez. welcher die Schmiegungsebene die Polare des Punktes P_0 ist.

Von drei senkrechten Schmiegungsebenen der räumlichen Parabel treffen je zwei die dritte in den Hauptaxen ihrer Schnittcurve mit *der* Fläche der confocalen Schar, bez. deren sie die Polare des Punktes P_0 ist. Denn drei solche Schmiegungsebenen sind drei Nullebenen des Punktes P_0 parallel und schneiden sich in einem Punkte auf dem durch P_0 gehenden Durchmesser, die Hauptaxen paralleler Schnittlinien einer Fläche zweiter Ordnung sind aber selbst paarweise parallel und schneiden sich in zwei Punkten eines Durchmessers, woraus das Gesagte sofort folgt.

Es bleibt noch die Frage zu erledigen, welche Linie die Nullpunkte einer und derselben Ebene für die verschiedenen confocalen Flächen erfüllen. Setzen wir in den Gleichungen (7) des Art. 3:

$$a^2-\lambda,\ b^2-\lambda,\ c^2-\lambda \quad \text{an Stelle von} \quad a^2,\ b^2,\ c^2,$$

so sehen wir unmittelbar, dass diese Linie eine gerade ist und durch den Fusspunkt des von dem Mittelpunkte der confocalen Flächen auf die Ebene gefällten Lotes geht. Dieser Fusspunkt ist der Nullpunkt der Ebene in einem besonders einfachen Nullsystem, das man erhält, indem man zur Grundfläche eine Kugel wählt.

Die gefundene gerade Linie ist die Leitlinie der Parabel, welche die in der Ebene gelegenen Axen umhüllen. Denn durch ihre Punkte gehen je zwei senkrechte Axen, also Tangenten der Parabel. Jede dieser Tangenten ist andererseits die der Ebene adjungirte Axe für *eine* der confocalen Flächen und für die selbe Fläche ist *ein* Punkt auf der Leitlinie der Parabel der Ebene als Nullpunkt zugeordnet. Die Tangenten und damit die Punkte der Parabel sind so auf die Punkte ihrer Leitlinie bezogen. Es frägt sich, welcher Art diese Beziehung ist. Sei:

$$ux+vy+wz=1$$

die Gleichung der Ebene, so werden die einzelnen Axen in dieser Ebene aus dem Mittelpunkte der confocalen Flächen durch die Ebenen projizirt:

$$\frac{ux}{a^2-\lambda}+\frac{vy}{b^2-\lambda}+\frac{wz}{c^2-\lambda}=0, \tag{7}$$

indem die zugehörige Axe immer der Ebene für diejenige Fläche adjungirt ist, die dem gleichen Werte des Parameters λ entspricht. Man findet nun leicht, dass der Durchmesser, auf dem der Berührungspunkt dieser Axe mit der Parabel liegt, durch die Proportion bestimmt wird:

$$x'_\lambda : y'_\lambda : z'_\lambda = \frac{(b^2-c^2)\,(a^2-\lambda)^2}{u} : \frac{(c^2-a^2)\,(b^2-\lambda)^2}{v} : \frac{(a^2-b^2)\,(c^2-\lambda)^2}{w}.$$

Nennt man x_λ, y_λ, z_λ die Coordinaten des entsprechenden Nullpunktes der Ebene, so ist:

$$x_\lambda : y_\lambda : z_\lambda = (a^2-\lambda)\,u : (b^2-\lambda)\,v : (c^2-\lambda)\,w,$$

und sonach:

$$x'_\lambda : y'_\lambda : z'_\lambda = \frac{b^2 - c^2}{u^3} x_\lambda^2 : \frac{c^2 - a^2}{v^3} y_\lambda^2 : \frac{a^2 - b^2}{w^3} z_\lambda^2 . \tag{8}$$

Dies ist der Ausdruck für die Beziehung, die in der angegebenen Weise zwischen den Punkten der Parabel und ihrer Leitlinie eintritt. Zwischen den Coordinaten des Nullpunktes besteht die Relation:

$$\frac{b^2 - c^2}{u} x_\lambda + \frac{c^2 - a^2}{v} y_\lambda + \frac{a^2 - b^2}{w} z_\lambda = 0, \tag{9}$$

die so dargestellte Durchmesserebene geht durch die Leitlinie der Parabel. Die Coordinaten eines Punktes der letzteren befriedigen daher die Gleichung:

$$\sqrt{b^2 - c^2} \cdot \sqrt{u x'_\lambda} + \sqrt{c^2 - a^2} \cdot \sqrt{v y'_\lambda} + \sqrt{a^2 - b^2} \cdot \sqrt{w z'_\lambda} = 0, \tag{10}$$

zusammen mit der Ebenengleichung:

$$u x'_\lambda + v y'_\lambda + w z'_\lambda = 1.$$

In der Durchmesserebene (9), welche auf der festen Ebene senkrecht steht und durch ihre Nulllinie geht, liegen die Pole der Ebene bez. aller Flächen des coaxialen Systems. Das letztere ist auf die Punkte der Durchmesserebene eindeutig bezogen, indem jeder Fläche des Systems ein Punkt dieser Ebene als Pol der festen Ebene entspricht und umgekehrt jeder solche Punkt auch nur bez. einer Fläche des Systems der Pol der festen Ebene ist. Den confocalen Scharen in dem coaxialen System entsprechen jedesmal die Punkte eines Durchmessers und concyclischen Flächen die Punkte einer Normalen auf der Nulllinie der festen Ebene. Die unendlich vielen Flächen des coaxialen Systems, welche die feste Ebene berühren, berühren sie in den einzelnen Punkten dieser Nulllinie (*).

Die Schnittcurven der festen Ebene mit den Flächen der zugrunde gelegten confocalen Schar bilden eine cubische Kegelschnittschar, denn durch einen beliebigen Punkt der Ebene gehen drei Kegelschnitte dieser Schar. Unter ihnen ist ein Kegelschnitt enthalten, der in ein Geradenpaar zerfällt. Die Linien, welche dem Schnittpunkte dieses Geradenpaares bez. der anderen Kegelschnitte als Polaren zugewiesen sind, umhüllen eine Parabel, und die-

(*) Verändert man das coaxiale System innerhalb der Gesamtheit der Flächen mit gemeinsamen Symmetrieebenen, so dreht sich die Nulllinie einer Ebene um den Fusspunkt des aus dem gemeinsamen Mittelpunkte der Flächen auf die Ebene gefällten Lotes.

selbe Parabel wird von den Hauptaxen der Kegelschnitte berührt. Die Mittelpunkte der letzteren liegen auf der Leitlinie der Parabel. Die Punkte der Leitlinie und der Parabel selbst sind einander eindeutig zugeordnet, indem jeder Punkt der Parabel dem Mittelpunkte desjenigen Kegelschnittes entspricht, bez. dessen die Tangente in ihm Polare des ausgezeichneten Punktes auf der Leitlinie — des Schittpunktes jenes Geradenpaares — ist. Vier Kegelschnitte der Schar arten aus, indem eine Hauptaxe unendlich klein gegen die andere wird. Die Gerade, auf die irgend einer dieser Kegelschnitte zusammenschrumpft, berührt die Parabel in dem Punkte, der dem Schnittpunkte der Geraden mit der Leitlinie entspricht. Eine dieser Geraden ist die unendlich ferne, der unendlich ferne Punkt der Parabel entspricht dem unendlich fernen Punkt der Leitlinie.

Durch die Nulllinie erweitert sich unser Nullsystem in eigentümlicher Weise. Mit dem Nullpunkte ist einer Ebene auch immer eine bestimmte durch den Nullpunkt gehende und in der Nullebene liegende Nulllinie zugewiesen. Wird die Nullebene parallel verschoben, so verschiebt sich auch ihre Nulllinie parallel in einer Durchmesserebene. Dreht sich die Nullebene um eine gerade Linie, so durchläuft ihre Nulllinie eine cubische Regelschar. Die Fläche dieser Regelschar geht durch den Mittelpunkt der zugrunde gelegten quadratischen Fläche und hat die Axe des Ebenenbüschels zur Doppellinie.

Im allgemeinsten Sinne kann man als ein Nullsystem jede Verwandtschaft bezeichnen, bei der entsprechende Elemente immer vereinigt liegen, gleichgültig, welcher Art diese Elemente sind. Unter einem quadratischen Nullsysteme könnte also auch eine Verwandtschaft verstanden sein, bei der den Punkten oder Ebenen des einen Raumes quadratische Flächen des anderen Raumes zugeordnet sind, derart, dass jede Fläche den ihr entsprechenden Punkt enthält oder die ihr entsprechende Ebene berührt. Auf eine solche Verwandtschaft sind wir aber durch unser Nullsystem schon geführt worden. Die Nullpunkte der Ebenen, die durch einen festen Punkt gehen, lagen auf einer quadratischen Nullfläche, welche diesen Punkt enthielt, und die Nullebenen der Punkte, die in einer bestimmten Ebene liegen, umhüllten ebenfalls eine quadratische Fläche, welche diese Ebene berührte. Die quadratischen Flächen, welche als Nullflächen den Punkten einer Ebene zugeordnet sind, bestimmen aber eindeutig einen Punkt, durch den sie alle gehen, dieser Punkt liegt in der Ebene und ist ihr Nullpunkt in unserem Nullsysteme. So führen beide Auffassungen des quadratischen Nullsystems auf einander hin.

Frägt man nach dem allgemeinsten derartigen Nullsysteme, so ergiebt sich sofort, dass die Flächen, welche den Punkten des Raumes in einem solchen zugeordnet sind, ein System bilden müssen, in dem beliebige drei Flächen eindeutig einen Punkt bestimmen, den sie ausser festen Punkten und Linien allein gemein haben. Eine Hauptart eines solchen Systems wird durch diejenigen Flächen gebildet, die alle durch einen festen Kegelschnitt und einen festen Punkt gehen. Ein solches System ist aber nur die projektivische Verallgemeinerung des von uns behandelten. Uebergangen haben wir jedoch den Fall, dass die Grundfläche des Nullsystems ein Paraboloid ist. Dieser Fall fordert eine gesonderte Behandlung, wir müssen sie aber, um nicht zu weitschweifig zu sein, dem Leser überlassen.

Strassburg, Oktober-November 1898.

Sopra i Gruppi astratti di grado 32

(*Di* G. Bagnera, *a Palermo.*)

Io adopero il simbolo

$$[\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon]$$

per denotare una classe Γ di enti, ciascuno dei quali è perfettamente individuato quando sono dati i numeri interi $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$. Sia Θ la definizione di *eguaglianza* di due elementi di Γ scelta in modo che, essendo A, B, C tre elementi della detta classe, siano verificate le condizioni:

1.ª qualunque sia l'elemento A è sempre $A = A$,

2.ª tutte le volte che è $A = B$ è anche $B = A$,

3.ª se è $A = B$ e $B = C$ deve essere $A = C$.

Finalmente io suppongo data un'operazione Ω, perfettamente definita in Γ, tale che

$$A \, \Omega \, B = A \, B$$

sia un elemento di Γ tutte le volte che A e B sono elementi di Γ. L'operazione Ω non è indipendente da Θ, perchè io ammetto che si verifichino le condizioni seguenti:

1.ª se è $A = B$ è anche $A\,C = B\,C$ e $C\,A = C\,B$,

2.ª se è $A\,C = B\,C$ oppure $C\,A = C\,B$ è $A = B$,

3.ª in ogni caso è $(A\,B)\,C = A\,(B\,C)$.

Se la classe Γ contiene soltanto un numero finito n di elementi distinti rispetto a Θ, essi costituiscono rispetto all'operazione Ω un Gruppo finito di grado n: esiste allora un elemento E, ben determinato rispetto a Θ, tale che

$$A\,E = E\,A = A,$$

qualunque sia l'elemento A di Γ. Io suppongo che sia:

$$E = [0, 0, \ldots, 0].$$

L'ordine di un elemento A è il minimo numero intero e positivo m tale che $A^m = E$, e l'elemento inverso di A è quell'elemento A^{-1} tale che $A A^{-1} = E$.

Gli elementi di un qualsivoglia gruppo, il cui grado è una potenza p^h di un numero primo p, si possono rappresentare con simboli

$$[\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon]$$

contenenti h indici $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$; ma questi h indici non sono sempre necessari: per es., volendo definire il gruppo ciclico di grado $32 = 2^5$, io posso scrivere le formole:

$$\Theta \equiv [\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon] = [\alpha + 2\lambda, \beta + 2\mu - \lambda, \gamma + 2\nu - \mu, \delta + 2\rho - \nu, \varepsilon + 2\sigma - \rho],$$
$$\Omega \equiv [\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon]\, [\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon'] = [\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma', \delta + \delta', \varepsilon + \varepsilon'],$$

ma sono più comode le seguenti:

$$\Theta \equiv [\alpha] = [\alpha + 32\lambda],$$
$$\Omega \equiv [\alpha]\, [\alpha'] = [\alpha + \alpha].$$

Bisogna però osservare che non è sempre conveniente di ridurre al minimo il numero dei detti indici, perchè una tale riduzione va spesso a discapito della semplicità di Θ ed Ω.

Per il problema che consiste nel ricercare tutti i possibili gruppi Γ di grado p^h è interessante la considerazione del gruppo K intersezione di tutti i divisori d'indice p contenuti in un tale gruppo Γ: ciò risulta dal fatto che il gruppo K si può anche definire nella seguente maniera:

Siano A e B due arbitrari elementi di Γ e si ponga

$$B^{-1} A B = A A':$$

il gruppo K è allora il gruppo di grado minimo che contiene tutti gli elementi tali che A' ed A^p.

Io ho risoluto l'anzidetto problema per il caso di $h = 5$ e p qualunque nel mio lavoro intitolato: *La composizione dei gruppi finiti il cui grado è la quinta potenza di un numero primo* (*); ma io ritorno ora sul caso particolare di $p = 2$, per correggere due inesattezze, che, soltanto in questo caso, vi si incontrano e che sono del resto facilmente rilevabili dal lettore; inoltre, profitto della circostanza di dovere ritornare sull'argomento per dare la dimostrazione della effettiva esistenza di ciascuno dei gruppi di grado 32 scritti

(*) Questi *Annali*, s. III, t. I (1898).

nel citato lavoro, esistenza che è ivi semplicemente asserita, e per mettere maggiormente in rilievo l'intima costituzione dei detti gruppi. Un esempio chiarirà meglio il mio pensiero.

Si scrivano le formole:

$$\Theta \equiv [\alpha,\ \beta] = [\alpha + 2\lambda,\ \beta + 16\mu],$$

$$\Omega \equiv [\alpha,\ \beta]\,[\alpha',\ \beta'] = [\alpha + \alpha',\ (-1)^{\alpha'}\beta + \beta'],$$

dove λ e μ sono numeri interi arbitrari; allora gli elementi $[\alpha,\ \beta]$ che sono distinti rispetto a Θ sono soltanto 32: essi si ottengono attribuendo per es. ad α i valori 0, 1 ed a β i valori 0, 1, 2,..., 15 indipendentemente.

È facile verificare che Θ ed Ω soddisfano alle condizioni enunciate al principio della presente Nota e quindi io ho definito un gruppo di grado 32 dove l'elemento identico è il simbolo $[0,\ 0]$.

Volendo trovare gli elementi di secondo ordine contenuti in questo gruppo si dirà: se $[\alpha,\ \beta]$ è un tale elemento si ha:

$$[0,\ 0] = [\alpha,\ \beta]^2 = [2\alpha,\ (-1)^{\alpha}\beta + \beta], \tag{1}$$

e quindi, in virtù di Θ, è:

$$(-1)^{\alpha}\beta + \beta = 16\mu.$$

Dunque, se α è pari, bisogna scegliere per β un multiplo di 8, ma se α è impari β è arbitrario. Si hanno così 18 elementi che verificano la (1), tra i quali è certamente compreso l'elemento $[0,\ 0]$ che non è di secondo ordine; perciò nel gruppo considerato si trovano 17 elementi di secondo ordine dei quali uno è $[0,\ 8]$ e gli altri sono rappresentati dal simbolo $[1,\ \beta]$ per i diversi valori di β.

Io mi propongo ancora la ricerca di tutti gli elementi del detto gruppo che godono la proprietà di essere permutabili con qualsiasi elemento del gruppo stesso. Se $[\alpha,\ \beta]$ è un tale elemento, deve essere in virtù di Ω:

$$[\alpha + \alpha',\ (-1)^{\alpha'}\beta + \beta'] = [\alpha' + \alpha,\ (-1)^{\alpha}\beta' + \beta]$$

qualunque siano α', β' e quindi bisogna che sia:

$$(-1)^{\alpha}\beta' + \beta = (-1)^{\alpha'}\beta + \beta' + 16\mu.$$

Supponendo $\alpha' = 0$ e $\beta' = 1$ si vede che α deve essere un numero pari, poi facendo $\alpha' = 1$ e $\beta' = 0$ si vede che β deve essere un multiplo di 8; quindi esistono due soli elementi che godono la detta proprietà i quali sono:

$$[0,\ 0],\quad [0,\ 8].$$

Se si pone:

$$[1,\ 0] = A, \quad [0,\ 1] = B, \quad [0,\ 0] = 1,$$

si trova:

$$A^{-1}BA = B^{-1}, \quad A^2 = 1, \quad B^{16} = 1,$$

e perciò il gruppo dell'attuale esempio, che porta il numero XLII nella tabella che segue, è il gruppo *diedro* di grado 32.

Il relativo gruppo K si può calcolare servendosi della seconda definizione che ho dato per il detto gruppo. La conoscenza di K dà subito il numero dei divisori di grado 16 contenuti nel gruppo di grado 32: questo numero è espresso da $2^k - 1$ dove k è l'indice di K rispetto al gruppo principale. Nell'esempio precedente si trova che K è il gruppo ciclico di grado 8 generato dall'elemento [0, 2] e quindi il gruppo principale possiede tre divisori di grado 16, uno dei quali è il gruppo ciclico generato dall'elemento [0, 1].

Nella tabella che segue io ho scritto accanto al numero ordinativo di ogni gruppo quanti sono, separatamente, gli elementi di 2.°, 4.°, 8.° e 16.° ordine in esso gruppo contenuti ed anche gl'invarianti del corrispondente gruppo K che, per i gruppi di grado p^5, è sempre Abeliano. Così accanto al numero XLII si trova scritto: (17, 2, 4, 8) (8), il che significa che il corrispondente gruppo di grado 32 ha 17, 2, 4, 8 elementi degli ordini rispettivi 2, 4, 8, 16 e che il relativo gruppo K possiede un solo invariante eguale ad 8.

Dopo ciò, pochi sono i gruppi della detta tabella per i quali il lettore possa concepire il sospetto che essi siano isomorfi, ma questo sospetto si toglie facilmente dietro alcune considerazioni d'indole particolare, che ho esposto, dopo la tabella, in apposite osservazioni. Finalmente, la risposta all'obbiezione, se nessun gruppo di grado 32 esiste che non sia isomorfo ad uno di quelli che ora scriverò, è negativa e si trova nei ragionamenti svolti nel mio citato lavoro.

I sette Gruppi Abeliani di grado 32.

I. (1, 2, 4, 8) (16).

$$[\alpha] = [\alpha + 32\lambda], \quad [\alpha][\alpha'] = [\alpha + \alpha'].$$

II. (3, 4, 8, 16) (8).

$$[\alpha,\ \beta] = [\alpha + 16\lambda,\ \beta + 2\mu], \quad [\alpha,\ \beta][\alpha',\ \beta'] = [\alpha + \alpha',\ \beta + \beta'].$$

III. (3, 12, 16, 0) (4, 2).

$$[\alpha,\ \beta] = [\alpha + 8\,\lambda,\ \beta + 4\,\mu],\ [\alpha,\ \beta]\,[\alpha',\ \beta'] = [\alpha + \alpha',\ \beta + \beta'].$$

IV. (7, 8, 16, 0) (4).

$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma] = [\alpha + 8\,\lambda,\ \beta + 2\,\mu,\ \gamma + 2\,\nu],$$
$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma]\,[\alpha',\ \beta',\ \gamma'] = [\alpha + \alpha',\ \beta + \beta',\ \gamma + \gamma'].$$

V. (7, 24, 0, 0) (2, 2).

$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma] = [\alpha + 4\,\lambda,\ \beta + 4\,\mu,\ \gamma + 2\,\nu],$$
$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma]\,[\alpha',\ \beta',\ \gamma'] = [\alpha + \alpha',\ \beta + \beta',\ \gamma + \gamma'].$$

VI. (15, 16, 0, 0) (2).

$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta] = [\alpha + 4\,\lambda,\ \beta + 2\,\mu,\ \gamma + 2\,\nu,\ \delta + 2\,\rho],$$
$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta]\,[\alpha',\ \beta',\ \gamma',\ \delta'] = [\alpha + \alpha',\ \beta + \beta',\ \gamma + \gamma',\ \delta + \delta'].$$

VII. (31, 0, 0, 0) (1).

$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon] = [\alpha + 2\,\lambda,\ \beta + 2\,\mu,\ \gamma + 2\,\nu,\ \delta + 2\,\rho,\ \varepsilon + 2\,\sigma],$$
$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon]\,[\alpha';\ \beta',\ \gamma',\ \delta',\ \varepsilon'] = [\alpha + \alpha',\ \beta + \beta',\ \gamma + \gamma',\ \delta + \delta',\ \varepsilon + \varepsilon'].$$

I QUINDICI GRUPPI DI GRADO 32, CIASCUNO DEI QUALI CONTIENE SOLTANTO 8 ELEMENTI PERMUTABILI CON TUTTI GLI ELEMENTI DEL GRUPPO.

VIII. (3, 4, 8, 16) (8)

$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma] = [\alpha + 2\,\lambda,\ \beta + 2\,\mu,\ \gamma + 8\,\nu - \mu],$$
$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma]\,[\alpha',\ \beta',\ \gamma'] = [\alpha + \alpha',\ \beta + \beta',\ \gamma + \gamma' + 4\,\beta\,\alpha'].$$

IX. (3, 12, 16, 0) (4, 2).

$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma] = [\alpha + 4\,\lambda,\ \beta + 2\,\mu,\ \gamma + 4\,\nu - \mu],$$
$$[\sigma,\ \beta,\ \gamma]\,[\alpha',\ \beta',\ \gamma'] = [\alpha + \alpha',\ \beta + \beta',\ \gamma + \gamma' + 2\,\beta\,\alpha'].$$

X. (3, 12, 16, 0) (4, 2).

$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma] = [\alpha + 2\,\lambda,\ \beta + 8\,\mu,\ \gamma + 2\,\nu - \lambda],$$
$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma]\,[\alpha',\ \beta',\ \gamma'] = [\alpha + \alpha',\ \beta + \beta',\ \gamma + \gamma' + \beta\,\alpha'].$$

XI. (7, 8, 16, 0) (4, 2).

$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma] = [\alpha + 2\lambda,\ \beta + 8\mu,\ \gamma + 2\nu],$$
$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma]\,[\alpha',\ \beta',\ \gamma'] = [\alpha + \alpha',\ \beta + \beta',\ \gamma + \gamma' + \beta\alpha'].$$

XII. (7, 24, 0, 0) (2, 2, 2).

$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma] = [\alpha + 4\lambda,\ \beta + 4\mu,\ \gamma + 2\nu],$$
$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma]\,[\alpha',\ \beta',\ \gamma'] = [\alpha + \alpha',\ \beta + \beta',\ \gamma + \gamma' + \beta\alpha'].$$

XIII. (7, 8, 16, 0) (4).

$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma] = [\alpha + 2\lambda,\ \beta + 2\mu,\ \gamma + 8\nu],$$
$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma]\,[\alpha',\ \beta',\ \gamma'] = [\alpha + \alpha',\ \beta + \beta',\ \gamma + \gamma' + 4\beta\alpha'].$$

XIV. (7, 24, 0, 0) (2, 2).

$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma] = [\alpha + 2\lambda,\ \beta + 4\mu,\ \gamma + 4\nu],$$
$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma]\,[\alpha',\ \beta',\ \gamma'] = [\alpha + \alpha',\ \beta + \beta',\ \gamma + \gamma' + 2\beta\alpha'].$$

XV. (11, 12, 8, 0) (4).

$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta] = [\alpha + 2\lambda,\ \beta + 2\mu,\ \gamma + 4\nu - \mu,\ \delta + 2\rho],$$
$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta]\,[\alpha',\ \beta',\ \gamma',\ \delta'] = [\alpha + \alpha',\ \beta + \beta',\ \gamma + \gamma' + \beta\alpha',\ \delta + \delta'].$$

XVI. (11, 20, 0, 0) (2, 2).

$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta] = [\alpha + 2\lambda,\ \beta + 2\mu,\ \gamma + 2\nu,\ \delta + 4\rho],$$
$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta]\,[\alpha',\ \beta',\ \gamma',\ \delta'] = [\alpha + \alpha',\ \beta + \beta',\ \gamma + \gamma' + \beta\alpha',\ \delta + \delta'].$$

XVII. (3, 28, 0, 0) (2, 2).

$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta] = [\alpha + 2\lambda,\ \beta + 2\mu,\ \gamma + 2\nu - \lambda - \mu,\ \delta + 4\rho],$$
$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta]\,[\alpha',\ \beta',\ \gamma',\ \delta'] = [\alpha + \alpha',\ \beta + \beta',\ \gamma + \gamma' + \beta\alpha',\ \delta + \delta'].$$

XVIII. (7, 24, 0, 0) (2, 2).

$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta] = [\alpha + 2\lambda,\ \beta + 4\mu,\ \gamma + 2\nu - \lambda,\ \delta + 2\rho],$$
$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta]\,[\alpha',\ \beta',\ \gamma',\ \delta'] = [\alpha + \alpha',\ \beta + \beta',\ \gamma + \gamma' + \beta\alpha',\ \delta + \delta'].$$

XIX. (15, 16, 0, 0) (2, 2).

$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta] = [\alpha + 2\lambda,\ \beta + 4\mu,\ \gamma + 2\nu,\ \delta + 2\rho],$$
$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta]\,[\alpha',\ \beta',\ \gamma',\ \delta'] = [\alpha + \alpha',\ \beta + \beta',\ \gamma + \gamma' + \beta\alpha',\ \delta + \delta'].$$

XX. (15, 16, 0, 0) (2).

$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta] = [\alpha + 2\lambda,\ \beta + 2\mu,\ \gamma + 4\nu,\ \delta + 2\rho],$$
$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta][\alpha',\ \beta',\ \gamma',\ \delta'] = [\alpha + \alpha',\ \beta + \beta',\ \gamma + \gamma' + 2\beta\alpha',\ \delta + \delta'].$$

XXI. (23, 8, 0, 0) (2).

$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon] = [\alpha + 2\lambda,\ \beta + 2\mu,\ \gamma + 2\nu,\ \delta + 2\rho,\ \varepsilon + 2\sigma],$$
$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon][\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon'] = [\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma' + \beta\alpha', \delta + \delta', \varepsilon + \varepsilon'].$$

XXII. (7, 24, 0, 0) (2).

$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon] = [\alpha + 2\lambda,\ \beta + 2\mu,\ \gamma + 2\nu - \lambda - \mu,\ \delta + 2\rho,\ \varepsilon + 2\sigma],$$
$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon][\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon'] = [\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma' + \beta\alpha', \delta + \delta', \varepsilon + \varepsilon'].$$

I DICIANNOVE GRUPPI DI GRADO 32, CIASCUNO DEI QUALI CONTIENE SOLTANTO 4 ELEMENTI PERMUTABILI CON TUTTI GLI ELEMENTI DEL GRUPPO.

XXIII. (15, 16, 0, 0) (2, 2).

$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon] = [\alpha + 2\lambda,\ \beta + 2\mu,\ \gamma + 2\nu,\ \delta + 2\rho,\ \varepsilon + 2\sigma - \nu],$$
$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon][\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon'] = [\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma', \delta + \delta' + \beta\alpha', \varepsilon + \varepsilon' + \gamma\alpha'].$$

XXIV. (7, 24, 0, 0) (2, 2).

$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon] = [\alpha + 2\lambda,\ \beta + 2\mu,\ \gamma + 2\nu,\ \delta + 2\rho,\ \varepsilon + 2\sigma - \lambda - \nu],$$
$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon][\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon'] = [\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma', \delta + \delta' + \beta\alpha', \varepsilon + \varepsilon' + \gamma\alpha'].$$

XXV. (11, 20, 0, 0) (2, 2).

$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon] = [\alpha + 2\lambda,\ \beta + 2\mu,\ \gamma + 2\nu,\ \delta + 2\rho - \nu,\ \varepsilon + 2\sigma],$$
$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon][\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon'] = [\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma', \delta + \delta' + \beta\alpha', \varepsilon + \varepsilon' + \gamma\alpha'].$$

XXVI. (11, 20, 0, 0) (2, 2).

$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon] = [\alpha + 2\lambda,\ \beta + 2\mu,\ \gamma + 2\nu,\ \delta + 2\rho - \nu,\ \varepsilon + 2\sigma - \mu],$$
$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon][\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon'] = [\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma', \delta + \delta' + \beta\alpha', \varepsilon + \varepsilon' + \gamma\alpha'].$$

XXVII. (3, 28, 0, 0) (2, 2).

$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon] = [\alpha + 2\lambda,\ \beta + 2\mu,\ \gamma + 2\nu,\ \delta + 2\rho - \nu,\ \varepsilon + 2\sigma - \lambda - \mu],$$
$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon][\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon'] = [\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma', \delta + \delta' + \beta\alpha', \varepsilon + \varepsilon' + \gamma\alpha'].$$

XXVIII. (7, 24, 0, 0) (2, 2).

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon] = [\alpha + 2\lambda, \beta + 2\mu, \gamma + 2\nu, \delta + 2\rho - \nu, \varepsilon + 2\sigma - \mu - \nu],$$
$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon][\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon'] = [\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma', \delta + \delta' + \beta\alpha', \varepsilon + \varepsilon' + \gamma\alpha'].$$

XXIX. (19, 12, 0, 0) (2, 2).

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon] = [\alpha + 2\lambda, \beta + 2\mu, \gamma + 2\nu, \delta + 2\rho - \mu, \varepsilon + 2\sigma - \nu],$$
$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon][\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon'] = [\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma', \delta + \delta' + \beta\alpha', \varepsilon + \varepsilon' + \gamma\alpha'].$$

XXX. (3, 28, 0, 0) (2, 2).

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon] = [\alpha + 2\lambda, \beta + 2\mu, \gamma + 2\nu, \delta + 2\rho - \mu, \varepsilon + 2\sigma - \lambda - \nu],$$
$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon][\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon'] = [\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma', \delta + \delta' + \beta\alpha', \varepsilon + \varepsilon' + \gamma\alpha'].$$

XXXI. (19, 12, 0, 0) (2, 2).

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon] = [\alpha + 2\lambda, \beta + 2\mu, \gamma + 2\nu, \delta + 2\rho, \varepsilon + 2\sigma],$$
$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon][\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon'] = [\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma', \delta + \delta' + \beta\alpha', \varepsilon + \varepsilon' + \gamma\alpha'].$$

XXXII. (11, 12, 8, 0) (4).

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon] = [\alpha + 2\lambda, \beta + 2\mu, \gamma + 2\nu - \mu, \delta + 2\rho - \nu, \varepsilon + 2\sigma],$$
$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon][\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon']$$
$$= [\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma' + \beta\alpha', \delta + \delta' + \gamma\alpha' + \tfrac{1}{2}\beta\alpha'(\alpha' - 1), \varepsilon + \varepsilon'].$$

XXXIII. (11, 12, 8, 0) (4).

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta] = [\alpha + 2\lambda, \beta + 2\mu, \gamma + 2\nu - \mu, \delta + 4\rho - 2\nu],$$
$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta][\alpha', \beta', \gamma', \delta'] = [\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma' + \beta\alpha', \delta + \delta' + 2\gamma\alpha' + \beta\alpha'(\alpha' - 1)].$$

XXXIV. (19, 4, 8, 0) (4).

$$[\alpha, \beta, \gamma] = [\alpha + 2\lambda, \beta + 8\mu, \gamma + 2\nu],$$
$$[\alpha, \beta, \gamma][\alpha', \beta', \gamma'] = [\alpha + \alpha', (-1)^{\alpha'}\beta + \beta', \gamma + \gamma'].$$

XXXV. (3, 20, 8, 0) (4).

$$[\alpha, \beta, \gamma] = [\alpha + 2\lambda, \beta + 8\mu - 4\lambda, \gamma + 2\nu],$$
$$[\alpha, \beta, \gamma][\alpha', \beta', \gamma'] = [\alpha + \alpha', (-1)^{\alpha'}\beta + \beta', \gamma + \gamma'].$$

XXXVI. (3, 20, 8, 0) (4, 2).

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta] = [\alpha + 4\lambda, \beta + 2\mu, \gamma + 2\nu - \mu, \delta + 2\rho - \nu],$$

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta][\alpha', \beta', \gamma', \delta'] = [\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma' + \beta\alpha', \delta + \delta' + \gamma\alpha' + \tfrac{1}{2}\beta\alpha'(\alpha' - 1)].$$

XXXVII. (3, 4, 24, 0) (4, 2).

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta] = [\alpha + 2\lambda, \beta + 2\mu, \gamma + 2\nu - \mu, \delta + 4\rho - \lambda - 2\nu],$$

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta][\alpha', \beta', \gamma', \delta'] = [\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma' + \beta\alpha', \delta + \delta' + 2\gamma\alpha' + \beta\alpha'(\alpha' - 1)].$$

XXXVIII. (11, 12, 8, 0) (4, 2).

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon] = [\alpha + 2\lambda, \beta + 2\mu, \gamma + 2\nu - \mu, \delta + 2\rho - \nu, \varepsilon + 2\sigma - \mu],$$

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon][\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon'] = [\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma' + \beta\alpha', \delta + \delta' + \gamma\alpha' + \tfrac{1}{2}\beta\alpha'(\alpha' - 1), \varepsilon + \varepsilon'].$$

XXXIX. (7, 16, 8, 0) (4, 2).

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta] = [\alpha + 2\lambda, \beta + 2\mu, \gamma + 2\nu - \mu, \delta + 4\rho - \mu - 2\nu],$$

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta][\alpha', \beta', \gamma', \delta'] = [\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma' + \beta\alpha', \delta + \delta' + 2\gamma\alpha' + \beta\alpha'(\alpha' - 1)].$$

XL. (3, 20, 8, 0) (4, 2).

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon] = [\alpha + 2\lambda, \beta + 2\mu, \gamma + 2\nu - \mu, \delta + 2\rho - \lambda - \nu, \varepsilon + 2\sigma - \mu],$$

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon][\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon'] = [\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma' + \beta\alpha', \delta + \delta' + \gamma\alpha' + \tfrac{1}{2}\beta\alpha'(\alpha' - 1), \varepsilon + \varepsilon'].$$

XLI. (3, 20, 8, 0) (4, 2).

$$[\alpha, \beta] = [\alpha + 4\lambda, \beta + 8\mu],$$

$$[\alpha, \beta][\alpha', \beta'] = [\alpha + \alpha', (-1)^{\alpha'}\beta + \beta'].$$

I DIECI GRUPPI DI GRADO 32, CIASCUNO DEI QUALI CONTIENE SOLTANTO 2 ELEMENTI PERMUTABILI CON TUTTI GLI ELEMENTI DEL GRUPPO.

XLII. (17, 2, 4, 8) (8).

$$[\alpha, \beta] = [\alpha + 2\lambda, \beta + 16\mu],$$
$$[\alpha, \beta][\alpha', \beta'] = [\alpha + \alpha', (-1)^{\alpha'}\beta + \beta'].$$

XLIII. (1, 18, 4, 8) (8).

$$[\alpha, \beta] = [\alpha + 2\lambda, \beta + 16\mu - 8\lambda],$$
$$[\alpha, \beta][\alpha', \beta'] = [\alpha + \alpha', (-1)^{\alpha'}\beta + \beta'].$$

XLIV. (9, 10, 4, 8) (8).

$$[\alpha, \beta, \gamma] = [\alpha + 2\lambda, \beta + 2\mu, \gamma + 8\nu - 3\mu],$$
$$[\alpha, \beta, \gamma][\alpha', \beta', \gamma'] = [\alpha + \alpha', \beta + \beta', (-1)^{\alpha'}\gamma + \gamma' + \tfrac{1}{2}\{1 + (-1)^{\alpha'+1}\}\beta].$$

XLV. (11, 20, 0, 0) (2, 2, 2).

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta] = [\alpha + 4\lambda, \beta + 2\mu, \gamma + 2\nu, \delta + 2\rho],$$
$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta][\alpha', \beta', \gamma', \delta']$$
$$= [\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma' + \beta\alpha', \delta + \delta' + \gamma\alpha' + \tfrac{1}{2}\beta\alpha'(\alpha' - 1)].$$

XLVI. (3, 12, 16, 0) (4, 2).

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta] = [\alpha + 4\lambda, \beta + 2\mu, \gamma + 2\nu, \delta + 2\rho - \lambda - \mu],$$
$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta][\alpha', \beta', \gamma', \delta']$$
$$= [\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma' + \beta\alpha', \delta + \delta' + \gamma\alpha' + \tfrac{1}{2}\beta\alpha'(\alpha' - 1)].$$

XLVII. (11, 4, 16, 0) (4, 2).

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta] = [\alpha + 4\lambda, \beta + 2\mu, \gamma + 2\nu, \delta + 2\rho - \lambda],$$
$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta][\alpha', \beta', \gamma', \delta']$$
$$= [\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma' + \beta\alpha', \delta + \delta' + \gamma\alpha' + \tfrac{1}{2}\beta\alpha'(\alpha' - 1)].$$

XLVIII. (15, 8, 8, 0) (4).

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon] = [\alpha + 2\lambda, \beta + 2\mu, \gamma + 2\nu, \delta + 2\rho - \mu, \varepsilon + 2\sigma - \rho],$$
$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon][\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon']$$
$$= [\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma', \delta + \delta' + \beta\alpha', \varepsilon + \varepsilon' + \delta\alpha' + \gamma\beta' + \tfrac{1}{2}\beta\alpha'(\alpha' - 1)].$$

XLIX. (3, 20, 8, 0) (4).

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon] = [\alpha + 2\lambda, \beta + 2\mu, \gamma + 2\nu, \delta + 2\rho - \mu, \varepsilon + 2\sigma - \lambda - \rho],$$

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon][\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon']$$

$$= [\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma' \delta + \delta' + \beta\alpha', \varepsilon + \varepsilon' + \delta\alpha' + \gamma\beta' + \tfrac{1}{2}\beta\alpha'(\alpha' - 1)].$$

L. (19, 12, 0, 0) (2).

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon] = [\alpha + 2\lambda, \beta + 2\mu, \gamma + 2\nu, \delta + 2\rho, \varepsilon + 2\sigma],$$

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon][\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon'] = [\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma', \delta + \delta', \varepsilon + \varepsilon' + \delta\alpha' + \gamma\beta'].$$

LI. (11, 20, 0, 0) (2).

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon] = [\alpha + 2\lambda, \beta + 2\mu, \gamma + 2\nu, \delta + 2\rho, \varepsilon + 2\sigma - \mu - \nu],$$

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon][\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon'] = [\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma', \delta + \delta', \varepsilon + \varepsilon' + \delta\alpha' + \gamma\beta'].$$

OSSERVAZIONI.

a) I gruppi IX e X differiscono in ciò: ognuno dei detti gruppi contiene evidentemente soltanto 4 gruppi ciclici di gradò 8, e questi gruppi ciclici sono divisori normali dentro il gruppo IX e non lo sono dentro il gruppo X.

b) Per assicurarsi che i gruppi XIV e XVIII non sono isomorfi, si pensino i due divisori di grado 8, contenuti rispettivamente nei detti gruppi, e costituiti di tutti gli elementi permutabili con ogni elemento del gruppo principale e si osservi che questi divisori hanno invarianti diversi.

c) Ciascuno dei 19 gruppi che vanno dal numero XXIII al numero XLI possiede un solo divisore Abeliano di grado 16. Gl'invarianti di questi divisori contenuti rispettivamente nei gruppi XXIV e XXVIII sono diversi, e quindi questi gruppi non sono isomorfi: la medesima circostanza si presenta per i due gruppi XXV e XXVI e per i due gruppi XXIX e XXXI.

d) Per verificare che i due gruppi XXVII e XXX sono distinti basta osservare che gli elementi del gruppo XXX, che sono fuori del divisore Abeliano di grado 16, in esso gruppo contenuto, hanno tutti lo stesso quadrato che è l'elemento [0, 0, 0, 0, 1] e che questo fatto non accade per il gruppo XXVII.

e) I due divisori di grado 4, contenuti rispettivamente nei due gruppi XXXII e XXXIII, costituiti di tutti gli elementi permutabili con ogni elemento del relativo gruppo principale, non sono isomorfi, e perciò i gruppi principali non sono isomorfi.

f) Ciascuno dei tre gruppi XXXVI, XL e XLI contiene soltanto due gruppi ciclici di grado 8, i quali sono divisori normali dentro i gruppi XXXVI e XLI e non lo sono dentro il gruppo XL. Inoltre, per il gruppo XLI accade che ogni suo elemento di ordine 8 è trasformato nel suo inverso da ogni elemento di detto gruppo, che sta fuori del corrispondente divisore Abeliano di grado 16, mentre questo fatto non accade per il gruppo XXXVI.

g) A causa delle inesattezze delle quali ho discorso avanti, nelle tabelle del mio lavoro più volte menzionato non figurano i tre gruppi XXXIV, XXXV e XLI, mentre i due gruppi XLVIII e XLIX vi si trovano scritti due volte. Ecco la natura degli errori che io ho commessi. Al principio del n.° 38 dell'anzidetto lavoro si legge:

« .... *e quindi essa* (la potenza E_4^2) *coincide con uno dei quattro elementi:*

$$E_3, \quad E_3 E_2, \quad E_3 E_1, \quad E_3 E_2 E_1.$$

Io suppongo che si avveri il primo ed il secondo caso, perchè, se fosse altrimenti, assumerei come elemento E_4 l'elemento $E_4 E_3$ e quindi come elemento E_3 l'elemento $E_3 E_1$. »

Ma il detto cambiamento, invece di portare i due ultimi casi nei primi due, trasforma i quattro casi ciascuno in sè, e per questa ragione è sfuggita alla mia analisi l'ipotesi, non sempre reducibile, in cui è $E_4^2 = E_3 E_1$, la quale porta precisamente ai tre gruppi XXXIV, XXXV e XLI.

Inoltre, alla fine del n.° 48, dove è detto:

« *Dunque, quando è $E'_3 = E_3$, si hanno ....* » bisogna invece dire:

« *Allora il gruppo di grado 16 generato dagli elementi E_5, E_4, E_3, E_1 non contiene il gruppo $G_3 = K$, e perciò quando è $E'_3 = E_3$ si hanno gruppi che non appartengono alla categoria della quale mi sto occupando.* »

Questa osservazione era stata da me fatta a proposito del caso generale (pag. 207, lin. 11-12), ma poi ho dimenticato di ripeterla nel caso di $p = 2$.

Io prego quindi il lettore di aggiungere alla tabella II del § V (pag. 199) del citato lavoro i tre gruppi XXXIV, XXXV e XLI e di cancellare dalla tabella I del § VI (pag. 216), i due ultimi gruppi che vi figurano: questi due gruppi esistono effettivamente, ma essi coincidono con i due gruppi di grado 32, che si trovano nella tabella I del § VII (pag. 226).

E con questo restano definitivamente stabiliti tutti i possibili gruppi di grado 32, i quali risultano in numero di 51, siccome è stato asserito dal sig. Miller (*).

h) Nella tabella della presente Nota i gruppi sono scritti, tenuto il debito conto dell'osservazione precedente, nello stesso ordine nel quale si succedono nelle tabelle del mio citato lavoro. Il lettore può, molto facilmente, trovare i valori degli indici degli elementi che, in ogni singolo caso, corrispondono agli elementi denotati nel detto lavoro con E_5, E_4, E_3, E_2, E_1 e stabilire le relazioni poste ivi a fondamento per definire i diversi gruppi.

Palermo, Aprile 1899.

(*) Report on recent Progress in the Theory of the Groups of a finite Order. *Bull. of the Amer. Math. Soc.*, s. 2, v. V, pp. 227-249.

Sulla razionalità dei piani multipli
$\{x, y, \sqrt[n]{F(x, y)}\}$.

(*Di* Amerigo Bottari, *a Bologna.*)

§ 1. — Oggetto di questo lavoro è la ricerca dei polinomi $F(x, y)$, per i quali è possibile di esprimere $x, y, \sqrt[n]{F(x, y)}$ come funzioni razionali di due parametri. Supporremo che n sia un numero primo e che $F(x, y)$ non contenga alcun fattore Θ^n, che sia potenza n^{esima} di un polinomio Θ: questa seconda ipotesi non porta alcuna restrizione essenziale, poichè se:

$$F = \Theta^n F_1,$$

(ove F_1 è un altro polinomio) si ha:

$$\sqrt[n]{F} = \Theta \sqrt[n]{F_1},$$

e quindi il polinomio F può essere sostituito, nella ricerca, con F_1.

Dato un polinomio $F(x, y)$, se si fa una trasformazione birazionale del piano (x, y), cioè se si pone:

$$x = f_1(x', y'), \quad y = f_2(x', y'), \tag{1}$$

in modo che le (1) sieno invertibili, dando luogo alle formole:

$$x' = \varphi_1(x, y), \quad y' = \varphi_2(x, y),$$

dove $f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2$ sono simboli di funzioni razionali, il polinomio $F(x, y)$ si muta in un altro $\Phi(x', y')$, e se $x, y, \sqrt[n]{F(x, y)}$ sono esprimibili razionalmente in funzione di due parametri, lo stesso accadrà per $x', y', \sqrt[n]{\Phi(x', y')}$, onde due polinomi $F(x, y)$, $\Phi(x, y)$ dedotti l'uno dell'altro mediante una trasformazione birazionale del piano (x, y) sono da riguardarsi come una medesima soluzione del problema proposto. Questo si può adunque enunciare sotto la forma seguente:

Determinare i tipi a cui possono ridursi, con una trasformazione birazionale del piano (x, y) i polinomi $F(x, y)$ tali che $x, y, \sqrt[n]{F(x, y)}$ si esprimano come funzioni razionali di due parametri.

Volendo formulare la questione sotto l'aspetto geometrico si può dire che si tratta di determinare le condizioni di razionalità delle superficie:

$$z^n = F(x, y).$$

Una tale superficie è già riferita al piano in una corrispondenza $[n, 1]$ siffatta, che i gruppi di n punti (allineati lungo le rette parallele all'asse z) corrispondenti ai punti del piano, formano sopra la superficie una involuzione ciclica I_n, d'indice n. La superficie anzidetta appare così riferita ad un piano multiplo (n-plo) che può dirsi *ciclico*, avente come curva di diramazione (da contarsi $n-1$ volte) la curva:

$$F(x, y) = 0,$$

in corrispondenza ai punti della quale si ha un gruppo di I_n costituito da n punti coincidenti, aumentata eventualmente della retta all'infinito del piano.

Noi vogliamo dare le condizioni di razionalità dei piani multipli ciclici di indice primo n, assegnando i tipi a cui si possono ricondurre le loro curve di diramazione per una trasformazione birazionale del piano.

Questo problema è stato risoluto da Clebsch e Nöther pel caso $n = 2$, in cui notoriamente si ottengono i tre tipi di piani doppi razionali aventi come curva di diramazione:

1) Una C_{2m} (curva d'ordine $2m$) con un punto $(2m-2)$-plo.

2) Una quartica C_4 affatto generale.

3) Una sestica C_6 con due punti tripli infinitamente vicini.

Noi perveniamo al resultato:

La curva di diramazione di un piano multiplo ciclico razionale, di indice primo $n > 2$, si può ridurre, con una trasformazione birazionale del piano, ad una delle forme tipiche seguenti:

Per n qualunque

a) *ad un gruppo di $\mu n + 2$ $(\mu \geqq 0)$ rette di cui μn passano per uno stesso punto O.*

Per $n = 3$ anche

b) *ad una cubica C_3 affatto arbitraria.*

c) *ad una sestica C_6 con un punto 4-plo O cui sono infinitamente vicini due punti doppi sopra rette distinte uscenti da O.*

Per $n = 5$ *anche*

d) *ad una curva composta di una* C_3 *arbitraria e di una sua tangente di flesso.*

Nel caso a) si può supporre che il punto O cada nell'origine delle coordinate, e che una delle rette non passanti per O, facenti parte della curva di diramazione, sia la retta all'infinito del piano, e l'altra sia una retta $x = a$ (con $a \neq 0$) parallela all'asse y. Similmente nel caso d) si può supporre che la tangente di flesso della C_3 sia la retta all'infinito del piano e il punto di flesso della C_3 sia il punto all'infinito dell'asse delle x. A ciò ci si può sempre ridurre mediante una semplice trasformazione proiettiva del piano.

Tenuto conto dell'osservazione precedente, il resultato ottenuto può enunciarsi sotto forma algebrica nel modo seguente:

Le forme tipiche cui possono ridursi i polinomi $F(x, y)$ *tali che* $x, y, \sqrt[n]{F(x, y)}$ *sieno razionalmente esprimibili in funzione di due parametri, e dove* n *è un numero primo dispari, sono:*

Per n *qualunque*

a′) $F(x, y) = (x - a) f_{\mu n}(x, y)$ *dove* $f_{\mu n}$ *è una forma di grado* $\mu\, n$ $(\mu \geq 0)$ *in* x, y.

Per $n = 3$ *anche*

b′) $F(x, y) = f_3(x, y)$ *essendo* $f_3(x, y)$ *una forma del 3.° grado in* x, y.

c′) *oppure* $F(x, y) = x^2 y^2 + x y\, \varphi_3(x, y) + \varphi_6(x, y)$ *dove* $\varphi_3(x, y)$ *e* $\varphi_6(x, y)$ *sono forme risp. di grado 3 e 6 in* x, y.

Per $n = 5$ *anche*

d′) $F(x, y) = y^3 + \varphi_2(x, y) + \varphi_1(x, y) + c$ *dove* $\varphi_2(x, y)$ *e* $\varphi_1(x, y)$ *sono forme risp. di grado 2 e 1, in* x, y, *e* c *è una costante arbitraria.*

La nostra ricerca è appoggiata sulla considerazione seguente che già Clebsch, Nöther e Bertini utilizzarono pel caso di $n = 2$ (*).

Ad ogni piano multiplo ciclico razionale dell'indice n corrisponde una trasformazione $[1, n]$ del piano, la quale si ottiene rappresentando il piano multiplo sul piano semplice: in questa trasformazione ai punti del piano multiplo corrispondono nel piano semplice i gruppi d'una trasformazione cremoniana ciclica dell'indice n. Allora indicando con x', y' le coordinate di un

(*) Sitzungsberichte d. phys. medicin. Soc. zu Erlangen 1878: *Ueber die ein-zweideutigen Ebenentransformationen*, Nöther. — Math. Ann. 3: *Ueber den Zusammenhang...*, Clebsch. — Rend. R. Istituto Lombardo 1889: *Deduzione delle trasformazioni piane doppie dai tipi fondamentali delle trasformazioni involutorie*, Bertini.

punto del piano semplice e con x, y quelle di un punto del piano n-plo si hanno le relazioni:

$$x' = \varphi(x,\ y,\ \sqrt[n]{F(x,\ y)}), \quad y' = \psi(x,\ y,\ \sqrt[n]{F(x,\ y)}), \tag{2}$$

dove φ e ψ sono simboli di funzioni razionali.

Partiamo dunque dai tipi delle trasformazioni cicliche dell'indice (primo) n che sono stati assegnati dal sig. Kantor (*) e rappresentiamo su un piano i gruppi dell'involuzione ciclica corrispondente, cercando ogni volta la curva di diramazione, la quale come si vede dalle formole (2) corrisponde al luogo delle coincidenze della involuzione.

Si otterranno così tutti i tipi cercati, che sono appunto quelli sopra enumerati.

Per ciascun caso, ottenute le proprietà della curva di diramazione, occorrerà dimostrare che esse sono caratteristiche cioè, che una curva fornita di quei dati caratteri può essere assunta come curva totale di diramazione d'un piano multiplo ciclico, il quale risulta razionale.

§ 2. — Dall'ispezione dei tipi assegnati da Kantor e da Wiman (**) risulta che i tipi di trasformazioni birazionali cicliche del piano di indice primo $n > 2$ sono i seguenti:

Per n qualunque

1) *trasformazioni di* Jonquières, lascianti invariato un fascio di rette che possono essere scambiate fra loro oppure tutte unite. È qui incluso il caso delle *omografie* le quali possono riguardarsi come particolari trasformazioni di Jonquières.

Per $n = 3$ anche

2) *una trasformazione biquadratica* (tipo designato da Kantor con Δ_3) la quale ha una rete con sei punti base di cubiche equianarmoniche invarianti, oppure:

3) *una trasformazione del 13.° grado* (tipo N_3 di Kantor) con un fascio di cubiche equianarmoniche invarianti.

Per $n = 5$ anche

4) *una trasformazione del sesto ordine* (tipo Z_5 di Kantor) che lascia invariato un sistema ∞^3 di curve del sesto ordine con otto punti base (fondamentali) doppi.

(*) Acta Mathem. 19: *Neue Theorie der eind. period. Transform. in der Ebene*, Kantor. — Cfr. anche Math. Ann. 48: *Theorie der endl. Gruppen...*, Wiman.

(**) l. c.

Giova ricordare le più essenziali proprietà di queste trasformazioni cicliche, segnatamente riguardo al luogo delle loro coincidenze.

Nel tipo 1) abbiamo detto che le rette del fascio invariante possono essere permutate fra loro o tutte unite. Nel secondo caso il luogo delle coincidenze è costituito da due curve razionali C_μ e C_ν degli ordini rispettivi μ e ν aventi rispettivamente nel centro O del fascio un punto $(\mu-1)$-plo e $(\nu-1)$-plo (*). Nel primo caso si hanno entro al fascio unito due rette unite, le quali possono essere o no tutte costituite di punti uniti o contenere un punto unito almeno fuori del centro del fascio (come nel caso delle omografie).

Il luogo delle coincidenze dell'involuzione ciclica di indice 3 del tipo 2) è una cubica generale passante pei sei punti base.

La trasformazione del tipo 3) ha invece come luogo delle coincidenze una sestica C_6 con otto punti doppi negli otto punti base (fondamentali) del fascio. Per questo tipo è invariante pure tutto il sistema ∞^3 delle C_6 cogli stessi otto punti doppi ed anche il sistema ∞^6 di C_9 con otto punti tripli in quelli otto punti base.

La trasformazione del tipo 4) viene a corrispondere ad una omografia Ω ciclica dello stesso indice, la quale muta in sè il sistema delle sezioni piane del cono quadrico K_2 imagine del sistema invariante $|C_6|$. Per questa omografia Ω vi sono due generatrici di K_2 unite ciascuna delle quali contiene un punto unito distinto da K_2. È noto che il sistema $|C_6|$ determina sul piano semplice una trasformazione involutoria (3.° tipo del Bertini), la quale ha per curva delle coincidenze una C_9 con otto punti tripli negli otto punti base (fondamentali). A questa C_9 corrisponde sul cono quadrico K_2 una sestica C_6 normale, che viene trasformata in sè stessa dall'omografia Ω. Proiettando K_2 dal punto unito (distinto dal vertice) di una delle sue due generatrici unite si ottiene un piano doppio (il noto tipo di Nöther) avente come curva di diramazione una sestica con due punti tripli infinitamente vicini, sestica la quale può eventualmente risultare spezzata se la C_6 passa pel centro di proiezione, che indicheremo con P. Di qui segue che anche il piano doppio e la sua curva di diramazione saranno mutati in sè da una omografia ciclica dello stesso indice. Kantor determinò questa omografia corrispondente al tipo 4) di trasformazione ciclica: e trovò che questa omografia è una omologia per la quale appunto la curva di diramazione deve essere

(*) Wiman, l. c. (§ 2-5).

spezzata in una quintica C_5 con un tacnodo e nella tangente tacnodale: il centro dell'omologia O è un punto della tangente tacnodale distinto dal tacnodo: l'asse è una retta qualunque o pel tacnodo (diversa dalla tangente tacnodale). Di qui si deduce allora facilmente che l'omografia Ω che muta in sè il cono quadrico K_2 è assiale, avendo come asse di punti uniti la generatrice di K_2 obbiettiva di o e come asse del fascio di piani uniti la retta OP. Ora siccome il punto O giace sulla tangente tacnodale di C_5 traccia del piano tangente a K_2 lungo la generatrice passante per P, segue che l'asse del fascio di piani uniti è tangente a K_2. Cosicchè allora possiamo dire che per l'omografia assiale Ω vi è su K_2 un fascio di sezioni piane unite, il cui asse è una retta tangente a K_2 (in un punto distinto dal vertice) ed inoltre vi è una generatrice di punti uniti. Di qui segue subito che, nel piano semplice, la trasformazione del tipo 4) ha un fascio di C_6 unite, avente oltre gli otto punti base doppi un sol punto base semplice A nel quale le C_6 hanno un contatto quadripunto; v'ha in questo fascio una particolare C_6 spezzata in una cubica contata due volte tangente ogni C_6 del fascio nel punto A. Il luogo delle coincidenze è poi costituito da una C_3 passante per gli otto punti base e dal detto punto A corrispondente al punto unito P di K_2.

§ 3. — Cominciamo a discutere i piani multipli ciclici nascenti dal tipo Jonquières delle trasformazioni cicliche di indice $n > 2$.

Consideriamo dapprima il caso del fascio di rette unite: come si è avvertito nel precedente paragrafo il luogo delle coincidenze è costituito da due curve razionali C_μ e C_ν aventi nel centro O del fascio rispettivamente un punto $(\mu - 1)$-plo e $(\nu - 1)$-plo. Riferiamo questo fascio ad un fascio (O') di rette nel piano n-plo, nel quale assumiamo tre rette r r' ed r'' arbitrarie e non passanti per O'. Nel piano semplice si assuma un'altra curva arbitraria K (razionale) d'un certo ordine x avente in O un punto $(x-1)$-plo. Allora su ogni retta l per O le C_μ C_ν K determinano tre punti 1, 2, 3 cui facciamo corrispondere sulla retta (n-pla) l' per O' i tre punti $1'$, $2'$, $3'$ di intersezione colle rette rispettive r, r', r''. Variando la retta l per O varierà corrispondentemente la l' per O' e mentre i tre punti 1, 2, 3 su l descrivono rispettivamente le tre curve C_μ, C_ν, K, i tre punti corrispondenti $1'$, $2'$, $3'$ su l' descriveranno le tre rette r, r', r''. Cosicchè le tre curve C_μ, C_ν, K vengono a corrispondere punto per punto alle tre rette r, r', r'' del piano n-plo. Fanno però eccezione i punti A, B, C,... comuni a due delle tre curve C_μ, C_ν, K, poichè le proiettività fissate tra le rette l per questi punti e le corrispondenti rette l' del piano multiplo risultano degeneri, corrispondendo ad ognuno di questi punti su l due punti su l' e quindi l'intera retta l': sicchè i punti A, B, C,... vengono trasformati in rette per O'. Adunque, ricordando che la curva K è una curva ausiliaria, possiamo concludere che la curva di diramazione si riduce a constare di due rette r ed r' qualunque e di un certo numero di rette concorrenti in un punto O', non appartenente nè ad r nè ad r'.

Ora siccome le rette n-ple per O' sono razionali e come tali non devono contenere che due soli punti di diramazione, che sono precisamente i punti in cui queste segano le r ed r', così il punto O' non deve contare come punto di diramazione; la molteplicità di questo deve esser dunque $\mu\, n$, cioè devono essere $\mu\, n$ le rette per O', poichè essendo n primo, soltanto $\mu\, n$ punti di diramazione coincidenti non contano come tali. Questo si vede chiaramente qualora si applichi una trasformazione quadratica avente in O' un punto fondamentale: allora O' viene trasformato in una retta (fondamentale) o', la quale per non far parte della curva di diramazione deve essere contata un numero $\mu\, n$ di volte, poichè soltanto allora il fattore $\Theta^{\mu n}$ corrispondente potrà portarsi fuori del segno radicale.

Per l'altro caso del tipo Jonquières, quello cioè in cui si ha un fascio di rette non unite, si è detto che si hanno sempre due rette unite, ciascuna delle quali contiene almeno un punto unito diverso dal centro O del fascio. Riferendo i cicli di n rette per O alle rette (n-ple) per un punto O nel piano multiplo operando come sopra si ottengono due rette di diramazione per O'.

Cosicchè possiamo concludere che le trasformazioni cicliche tipo Jonquières conducono ad un piano n-plo (ciclico) avente per curva di diramazione $\mu\, n$ rette (dove $\mu \geqq 0$) concorrenti in un punto O e due altre rette non passanti per O.

Vedremo più innanzi come un tal sistema di rette possa sempre costituire la curva totale di diramazione d'un piano n-plo ciclico razionale.

§ 4. — Passiamo ora ad esaminare i piani tripli ciclici razionali nascenti dai tipi 2) e 3).

Abbiamo visto che il tipo 2) è caratterizzato dall'avere una rete di cubiche equianarmoniche invarianti con sei punti base e come luogo delle coincidenze una cubica arbitraria passante per quei sei punti. Riferiamo proiettivamente questa rete di cubiche alla rete delle rette di un nuovo piano. Nasce così un piano triplo, i punti del quale corrispondono ai cicli determinati dalle intersezioni delle cubiche della rete nel piano semplice. E poichè su ogni cubica della rete si hanno tre coincidenze variabili, così su ogni retta tripla si avranno tre punti di diramazione. Concludiamo adunque che l'*involuzione ciclica del tipo* 2) conduce ad *un piano triplo ciclico avente per curva di diramazione una cubica affatto generale.*

Abbiamo pure visto quali sono i caratteri distintivi del tipo 3): si ha cioè un fascio di cubiche equianarmoniche invarianti; e come luogo delle coincidenze una C_6 con otto punti doppi (base del fascio). Consideriamo il sistema ∞^6 di C_9 aventi otto punti tripli negli otto punti, per cui la C_6 passa doppiamente: questo sistema è certamente trasformato in sè stesso dalla trasformazione del nostro tipo. Riferiamo proiettivamente questo sistema ∞^6 al sistema degli iperpiani di uno S_6. La serie (lineare) segata dal sistema $|C_9|$ sulla C_6 delle coincidenze è di grado 6; per calcolarne la dimensione x basta conoscere quella del sistema residuo di C_6 rispetto a C_9, il quale è un fascio di cubiche, cosicchè avremo $x = 6 - 2 = 4$. La detta serie è dunque una g_6^4 necessariamente completa, poichè la C_6 è di genere 2. La curva (normale) imagine di questa serie è una C'_6 dello S_4 tutta costituita di punti uniti: si ha dunque entro allo spazio S_6 uno S_4 tutto costituito di punti uniti e quindi anche correlativamente un sistema lineare Σ_4 di iperpiani uniti. Corrispondentemente entro al sistema ∞^6 dato di C_9 si ha un sistema ∞^4 di C_9 invarianti: due C_9 di questo sistema si segano secondo tre cicli dell'involuzione. La superficie imagine del sistema stesso è una superficie del 3.° ordine (tripla) dello S_4. Questa superficie per un noto teorema di Del Pezzo (*) è una rigata razionale. Ma poichè, come si vede facilmente, le generatrici di F_3 vengono rappresentate nel piano dalle cubiche del fascio avente come punti base gli otto punti tripli delle C_9, così si conclude che le predette generatrici passeranno tutte per uno stesso punto, ossia che la F_3 sarà un cono cubico.

La F_3 può rappresentarsi punto per punto su un piano mediante una proiezione da due dei suoi punti generici. Il sistema rappresentativo è notoriamente costituito da C_3 con un punto doppio e due punti semplici infinitamente vicini in direzioni distinte. Cerchiamo in questo piano l'imagine della C'_6 dello S_4, la quale giace su F_3. A tal fine consideriamo le quadriche Q_2 dello S_4. Una Q_2 sega la C'_6 in 12 punti dei quali al più 10 sono indipendenti, poichè la C'_6 è di genere due, e quindi i nominati gruppi di 12 punti appartengono ad una serie lineare g_{12}^{10}: poichè le Q_2 di S_4 sono ∞^{14}, vi saranno almeno ∞^3 quadriche Q_2 passanti per la C'_6. D'altra parte le Q_2 contenenti tutta la superficie F_3 sono notoriamente ∞^2 come le superficie

(*) R. C. Accad. Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, 1885: *Le superficie d'ordine n immerse nello* S_{n+1}.

di 2.° ordine passanti per una cubica sezione iperpiana di F_3 (*); dunque la C'_6 è sezione della F_3 con una quadrica, ossia appartiene al sistema doppio delle sezioni iperpiane della F_3. Ora queste sezioni iperpiane sono rappresentate sul piano semplice dalle C_3 con un punto doppio e due punti semplici infinitamente vicini in direzioni distinte. L'imagine sul piano della C'_6 è dunque una sestica con un punto 4-plo e due punti doppi infinitamente vicini in direzioni distinte.

Così i cicli d'una trasformazione del tipo 3) vengono rappresentati dai punti di un piano triplo avente come curva di diramazione una sestica C_6 con un punto 4-plo cui sono infinitamente vicini due punti doppi in direzioni distinte.

Se assumiamo il punto 4-plo come punto origine O delle coordinate e come direzioni, secondo le quali sono vicini ad O i due punti doppi, gli assi x ed y si trova l'equazione di questa curva C_6 di diramazione sotto la forma:

$$x^2 y^2 + x y \varphi_3(x, y) + \varphi_6(x, y) = 0, \tag{3}$$

dove $\varphi_3(x, y)$ e $\varphi_6(x, y)$ sono forme dei gradi rispettivi 3 e 6 in x, y. Si può infatti verificare, applicando una semplice trasformazione quadratica, che la curva (3) possiede i caratteri voluti.

§ 5. — Ricerchiamo finalmente i piani 5-pli ciclici razionali nascenti dalle trasformazioni del tipo 4).

Ricordiamo che carattere distintivo delle trasformazioni di questo tipo è di lasciare invariate tutte le C_6 di un fascio con otto punti base doppi e un punto base semplice A nel quale le C_6 hanno un contatto quadripunto. Il luogo delle coincidenze è costituito da una cubica generale C_3 passante per gli otto punti e dal punto A. Il sistema ∞^6 delle C_9 aventi otto punti tripli negli otto punti base doppi del fascio $|C_6|$ è trasformato in sè stesso dalle trasformazioni del nostro tipo 4). Riferiamo proiettivamente questo sistema di C_9 al sistema degli iperpiani di uno S_6; si otterrà in S_6 una superficie F_9 (d'ordine 9) rappresentata sul piano dal sistema $|C_9|$. La F_9 sarà trasformata in sè stessa da una omografia ciclica dell'indice 5. Cerchiamo i punti uniti di questa omografia su F_9: essi devono corrispondere ai punti della C_3 delle coincidenze ed al punto A. Ora la serie lineare segata dal sistema C_9 sulla

(*) Cfr. ENRIQUES, *Ricerche di Geometria sopra le superficie algebriche,* pag. 227, Memorie dell'Accad. delle Scienze di Torino, Serie 2.ª, Vol. 44.

C_3 è una g_3^x: la dimensione x si calcola subito osservando, che il sistema residuo di C_3 rispetto a $|C_9|$ è costituito dal sistema ∞^4 di C_6 epperò è $x = 6 - 4 = 2$. Dunque detta serie è una g_3^2 certo completa, poichè la curva sostegno è ellittica. La curva imagine della C_3 su F_9 è perciò un'altra cubica piana C'_3 tutta costituita di punti uniti. Dunque intanto entro allo spazio S_6 si ha un piano di punti uniti e correlativamente un sistema lineare ∞^2 Σ_2 di iperpiani uniti passanti tutti per uno S_3.

Ora poichè due sezioni iperpiane unite per S_3 debbono segarsi secondo cicli dell'omografia (dell'indice 5) e quindi in gruppi di 5 punti, così questo S_3 dovrà avere comuni colla F_9 quattro punti, i quali, non potendo costituire un ciclo dell'omografia devono essere uniti e perciò coincidere in un unico punto A', imagine del punto unito A del piano rappresentativo (la sola coincidenza che non appartenga alla C_3). Lo S_3 sarà dunque quadritangente alla superficie F_9 nel punto A'.

Fra gli ∞^2 iperpiani uniti per lo S_3, ve ne sono ∞^1 seganti su F_9 le sestiche d'un fascio corrispondente al fascio delle C_6 invarianti sul piano rappresentativo. I predetti iperpiani hanno comune uno S_4 contenente lo S_3 e seganti F_9 secondo una cubica K_3 passante per A'. Per questo S_4 passa un iperpiano particolare segante la F_9 secondo una sestica spezzata in due cubiche coincidenti (cfr. § 2, pag. 282) fra loro e colla cubica K_3. Ciò dipende dal fatto che nel piano rappresentativo oltre la cubica delle coincidenze v'ha soltanto un'altra cubica unita. In altre parole per questo S_4 passa un iperpiano segante la superficie F_9 secondo la cubica K_3 contata tre volte: iperpiano che si può dire osculatore la F_9 lungo la K_3.

Proiettiamo la superficie F_9 dallo S_3 quadritangente in A' sopra un piano α si otterrà allora un piano 5-plo (imagine di F_9) i cui punti corrisponderanno ai cicli della involuzione data sul piano semplice, rappresentativo di F_9, dal quale siamo partiti. La curva di diramazione di questo piano 5-plo risulterà costituita in primo luogo da una cubica C''_3 proiezione di C'_3 (corrispondente alla cubica delle coincidenze sul piano semplice) e in secondo luogo da una retta a corrispondente al punto A' di F_9 ed al punto A del piano semplice, sezione del piano α coll'iperpiano osculatore ad F_9 secondo la cubica K_3. Da ciò risulta che la retta a deve essere una tangente di flesso della C''_3, il flesso cadendo nel punto (comune a C''_3 e K_3) d'intersezione del piano di C''_3 collo S_4 passante per lo S_3 di proiezione e per K_3.

§ 6. — Corrispondentemente ai tipi di Kantor enumerati nel § 2 abbiamo ottenuto quattro tipi di piani n-pli (ciclici) di indice primo $n > 2$ caratterizzati dall'avere come curva di diramazione C:

Per n qualunque

a) $\mu n + 2$ *rette* $(\mu \geqq 0)$ *delle quali* μn *concorrono in uno stesso punto O.*

Oppure per $n = 3$

b) *una cubica affatto generale.*

c) *una* C_6 *con un punto 4-plo e due punti doppi ad esso infinitamente vicini ma su direzioni distinte.*

Per $n = 5$

d) *una cubica generale ed una sua tangente di flesso.*

Si presenta ora la questione di vedere se una curva C appartenente ad uno dei tipi enumerati possa sempre costituire la curva totale di diramazione d'un piano n-plo ciclico e se questo risulta razionale. Dato che C sia rappresentata dall'equazione $F(x, y) = 0$, si può invero costruire un piano n-plo $\{x, y, \sqrt[n]{F(x, y)}\}$ per cui C è una curva di diramazione, ma non è detto che C venga a costituire la curva totale di diramazione del piano n-plo, giacchè a seconda del valore di n, anche la retta impropria dovrà o no considerarsi come luogo di punti di diramazione. Si può trattare la questione riducendola alla questione analoga che si riferisce alle rette n-ple. Se una retta n-pla contiene m punti di diramazione a distanza finita la sua equazione si può porre sotto la forma:

$$z^n = f_m(x), \tag{4}$$

dove $f_m(x)$ è un polinomio del grado m in x; poichè n è un numero primo, ogni coincidenza conta per $n - 1$ punti doppi riuniti e quindi il grado della curva di diramazione è $2 + \frac{2p}{n-1}$ dove p designa il genere della retta n-pla. Determineremo anzitutto il valore di p: se troveremo $m = 2 + \frac{2p}{n-1}$ allora la curva C_m d'ordine m a distanza finita sarà curva totale di diramazione del piano n-plo, se invece troveremo $2 + \frac{2p}{n-1} > m$ il punto all'infinito della retta n-pla conterà pure come un punto di diramazione e quindi la retta all'infinito del piano farà pure parte della curva di diramazione. Ed è chiaro che dovrà in tal caso risultare $2 + \frac{2p}{n-1} = m + 1$ cioè che questa retta come luogo di punti di diramazione sarà contata una volta sola e non di più, poichè in ogni suo punto sono riuniti tutti gli n fogli del piano multiplo.

La nostra questione è quindi condotta alla determinazione del genere p della curva (4). Osserviamo che se $m < n$ il punto all'infinito dell'asse delle x è $(n-m)$-plo, mentre se $m > n$ il punto all'infinito dell'asse delle z è $(m-n)$-plo, all'infuori di questi due punti la curva (4) non ha altre singolarità: studiamo dunque la natura di queste singolarità applicando il noto metodo di decomposizione (*).

Incominciamo dal caso di $m < n$; e poniamo $n = m + r$: in tale ipotesi l'equazione (4) scritta sotto forma omogenea $\left(x = \frac{x_1}{x_2}\ z = \frac{x_3}{x_2}\right)$ diviene:

$$x_3^n = f_n(x_1, x_2) = \sum_{i=r}^{n} x_1^{n-i} x_2^i. \tag{4'}$$

Se è in particolare $m = 1$ il punto $x_2 = x_3 = 0$ è $(n-1)$-plo ed infinitamente vicino ad esso non vi possono essere altre singolarità: si ha allora, essendo $p = 0$, che 2 è il grado della curva di diramazione ossia la retta all'infinito è di diramazione.

Se in generale è $r = n - m$ (con $r > 1$) il punto $x_2 = x_3 = 0$ è r-plo, ma infinitamente vicino ad esso vi potrebbero essere altre singolarità: per assicurarci di questo applichiamo una trasformazione quadratica di cui il punto $x_2 = x_3 = 0$ (X_1) sia un punto fondamentale. Si vedrebbe facilmente che, se per triangolo fondamentale della trasformazione si assumesse il triangolo delle coordinate, la curva trasformata verrebbe ad avere le r intersezioni col lato x'_1, trasformato del punto X_1 (fuori dei punti fondamentali), tutte riunite nel punto X'_2 trasformato del lato $x_2 = 0$, il quale corrisponde alla retta all'∞ del piano (z, x) della (4). Dunque, se infinitamente vicino al punto X_1 (nel suo intorno di 1.° ordine) vi è un'altra singolarità, questa è nella direzione della retta $x_2 = 0$. Per riconoscere quindi se e quali singolarità vi sono nell'intorno del 1.° ordine del punto X_1 conviene prendere a triangolo fondamentale della trasformazione un triangolo affatto arbitrario, di cui un vertice sia il punto r-plo della (4)': e come tale basta prendere il triangolo $X_1 X_2 \overline{X}_3$, i cui vertici X_1, X_2 sono quelli del triangolo delle coordinate ed il terzo vertice $\overline{X}_3$ è un punto qualunque del lato $X_2 X_3$ di detto triangolo e diverso da X_1. Allora la trasformazione quadratica da applicarsi sarà la seguente:

$$x_1 = \rho\, x'_2 x'_3, \quad x_2 = \rho\, x'_1 (x'_2 + \alpha\, x'_3), \quad x_3 = \rho\, x'_1 x'_2,$$

(*) Nöther, *Mathematische Annalen*, 1870.

mediante essa la curva (4)′ si trasforma (soppressi gli accenti) nella seguente:

$$\left.\begin{aligned} x_1^{n-r}\, x_2^n = x_2^{n-r}\, x_3^{n-r}\,(x_2+\alpha\, x_3)^r + x_2^{n-r-1}\, x_3^{n-r-1}\, x_1\,(x_2+\alpha\, x_3)^{r+1}+\cdots \\ \cdots + x_1^{n-r}\,(x_2+\alpha\, x_3)^n. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Le r intersezioni col lato $x_1 = 0$, corrispondenti al punto r-plo della curva primitiva, sono riunite in un punto A di coordinate $x_2 \equiv -\alpha$, $x_3 \equiv 1$, il quale è pure r–plo per la curva trasformata (5), se è $n - r \geqq r$ e quindi siccome n è primo, se è $\frac{n-1}{2} \geqq r$. Lasciamo da parte il caso di $\frac{n-1}{2} > r$ poichè non serve al nostro scopo: basta invece che ci limitiamo al caso di $r = \frac{n-1}{2}$ (poichè si tratterà poi di applicarlo per $n = 5$). Allora si vede facilmente che, infinitamente vicino al punto r-plo A non si hanno altre singolarità, epperò la curva primitiva (4) ha nel punto all'infinito dell'asse delle x due punti $\left(\frac{n-1}{2}\right)$-pli infinitamente vicini allineati sulla retta all'infinito; quindi risulta:

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{4} = \frac{(n-1)^2}{4},$$

allora il grado della curva di diramazione è dato da:

$$2 + \frac{2p}{n-1} = 2 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2} + 1,$$

e siccome sulla retta n-pla a distanza finita si hanno solo $n - r = \frac{n+1}{2}$ punti di diramazione, segue che la retta all'infinito del piano è di diramazione.

Si vede facilmente che, se $m = n$ ossia se sulla retta n-pla a distanza finita si hanno n punti di diramazione, il punto all'infinito non è di diramazione, epperò una curva C_n d'ordine n può sempre fungere da curva totale di diramazione d'un piano n-plo ciclico.

Passiamo ora a discutere il caso in cui sia $m > n$: allora, come si è avvertito, la curva:

$$z^n = f_m(x), \qquad (4)$$

ha nel punto all'infinito dell'asse z un punto $(m - n)$-plo: in tal caso la (4) scritta sotto forma omogenea diviene:

$$x_3^n\, x_2^{m-n} = f_m(x_1,\ x_2), \qquad (4)''$$

essendo $f_m(x_1, x_2)$ un polinomio omogeneo di grado m in x_1, x_2. Se $m = n + 1$ il punto $x_1 = x_2 = 0$ è semplice ossia la curva (4)' passa semplicemente pel punto all'infinito dell'asse z e quindi il suo genere è:

$$p = \frac{n(n-1)}{2},$$

ed il grado della curva di diramazione risulta essere $n + 2$: ossia la retta all'infinito del piano fa parte della curva di diramazione. Si può facilmente verificare che la tangente alla (4)'' nel punto $x_1 = x_2 = 0$ è la retta $x_2 = 0$, ossia che la curva (4) tocca la retta all'infinito nel punto Z_∞.

Lasciando da parte tutti i casi intermedi, che a noi non interessano, supponiamo che sia $m = 2n$. Si rileva allora che la curva (4) ha nel punto Z_∞ solo due punti n-pli infinitamente vicini allineati lungo la retta all'infinito. Si deduce subito che di una tale retta n-pla il punto all'infinito non conta come punto di diramazione, epperò si conclude che una curva C_{2n} dell'ordine $2n$ può sempre fungere da curva totale di diramazione d'un piano n-plo ciclico.

Se invece è $m = 2n + 1$ il punto Z_∞ della (4) è $(n + 1)$-plo ed infinitamente vicino ad esso nella direzione della retta all'infinito si ha un punto n-plo: si conclude di qui nello stesso modo che $2n + 2$ è il grado della curva di diramazione e quindi che la retta all'infinito è di diramazione.

Procedendo ad una più minuta analisi di queste singolarità, si giunge ai risultati seguenti:

Data nel piano una curva C_m d'ordine m a distanza finita rappresentata dall'equazione:

$$F(x, y) = 0,$$

il piano n-plo:

$$\{x, y, \sqrt[n]{F(x, y)}\},$$

su cui è rappresentata la superficie:

$$z^n = F(x, y),$$

ha come curva totale di diramazione:

1) *la sola C_m se m è un multiplo di n;*

2) *la C_m aumentata della retta impropria se m non è multiplo di n.*

§ 7. — In virtù delle cose dette nel paragrafo precedente si vede che una curva costituita da $\mu n + 2$ rette $(\mu \geqq 0)$ delle quali μn sole concorrono in un unico punto O, può sempre fungere da curva totale di diramazione di un piano n-plo. Infatti dopo aver mandata una delle due rette non uscenti da O all'infinito mediante una opportuna proiettività, ed aver assunto un sistema di coordinate coll'origine in O e coll'asse y parallela all'altra retta non uscente da O, l'equazione complessiva di queste $\mu n + 1$ rette a distanza finita si potrà porre sotto la forma:

$$F(x,\ y) = (x - a) f_{\mu n}(x,\ y) = 0,$$

dove $f_{\mu n}(x,\ y)$ è una forma in x, y di grado μn. Ora il piano n-plo $\{x,\ y,\ \sqrt[n]{F(x,\ y)}\}$ avrà appunto, come curva di diramazione totale, il gruppo di rette $(x - a) f_{\mu n}(x,\ y) = 0$ aumentato della retta all'infinito del piano. Siccome poi il nominato piano n-plo, ossia la superficie:

$$z^n = (x - a) f_{\mu n}(x,\ y),$$

che lo rappresenta contiene un fascio lineare di curve razionali, dato dal fascio delle sezioni piane per l'asse z, e le cui imagini sono le rette n-ple per O, così quello è sempre razionale (*).

Possiamo allora enunciare il risultato seguente:

Un gruppo di $\mu n + 2$ ($\mu \geqq 0$ *ed* n *primo*) *rette, di cui* μn *passano per un punto costituisce sempre la curva di diramazione totale di un piano n-plo ciclico razionale.*

Ed anche, in relazione con ciò che si è visto innanzi possiamo dire:

Condizione necessaria e sufficiente perchè un piano n-plo ciclico d'indice primo $n > 5$ *sia razionale è che la curva di diramazione si possa ridurre mediante una trasformazione birazionale ad un sistema di* $\mu n + 2$ ($\mu > 0$) *rette delle quali* μn *concorrono in un punto* O.

Sempre in virtù del resultato ottenuto nel precedente paragrafo una cubica C_3 ed una sestica C_6 possono sempre fungere da curva totale di diramazione per un piano triplo (ciclico).

Allora il piano triplo che ha come curva di diramazione una C_3 chiamando:

$$f_3(x,\ y) = 0,$$

l'equazione della cubica viene rappresentata mediante la superficie:

$$z^3 = f_3(x,\ y),$$

la quale essendo una superficie F_3 dello S_3 sarà razionale e perciò il nostro

(*) Nöther, *Ueber Flächen, welche Schaaren* ecc. Math. Ann., Band 3.

piano triplo è razionale (salvo la degenerescenza della C_3 in tre rette per un punto).

Il piano triplo, che ha come curva di diramazione una C_6 con un punto 4-plo O e due punti doppi ad esso infinitamente vicini secondo direzioni distinte per O, si può rappresentare sopra la superficie F_6:

$$z^3 = x^2 y^2 + x y \varphi_3(x, y) + \varphi_6(x, y),$$

essendo:

$$x^2 y^2 + x y \varphi_3(x, y) + \varphi_6(x, y) = 0,$$

l'equazione della curva di diramazione.

Dimostriamo che la superficie F_6 è sempre razionale. Applicando i risultati ottenuti nel paragrafo precedente al caso nostro di $n = 3$, si vede subito che le sezioni piane della stella impropria Z_∞ sono curve aventi due punti tripli infinitamente vicini allineati lungo la retta all'infinito; cioè la superficie F_6 viene ad avere in Z_∞ un contatto triplo con sè stessa e le sue tre falde per questo punto tòccano tutte il piano all'infinito. Inoltre il punto $x = y = 0$ (4-plo per la curva di diramazione) è triplo per la F_6 ed infinitamente vicino ad esso si ha tanto nella direzione dell'asse delle x, come in quella dell'asse delle y un altro punto triplo (in corrispondenza al punto doppio infinitamente vicino al punto 4-plo della C_6 di diramazione secondo ognuno dei due assi). Questo si verifica assai facilmente considerando le sezioni di F_6 mediante i piani dei due fasci aventi gli assi x ed y per sostegni.

Cerchiamo ora le condizioni che queste singolarità della superficie F_6 impongono alle superficie aggiunte φ_2, φ_3, φ_4,... degli ordini rispettivi 2, 3, 4,... Ricordiamo a tal fine che le superficie aggiunte ad una data F debbono segare:

1) un piano generico secondo una curva aggiunta alla sezione di F;

2) un piano generico per un punto multiplo isolato O, secondo una curva che, presa insieme ad una retta per questo punto, costituisca una aggiunta alla sezione di F;

3) un piano generico passante per ogni particolare retta a uscente da O, secondo una curva che sommata ad a costituisca una aggiunta alla sezione piana di F, ecc. (*).

(*) Enriques, *Introduzione alla Geometria delle superficie algebriche*. Memorie della Società dei XL, Tomo X (Cap. V-31).

Queste condizioni sopra enunciate bastano a definire il comportamento delle superficie aggiunte ad F se (come avviene appunto nel nostro caso) la F non possiede singolarità superiori vicino ad un punto multiplo proprio O cioè singolarità, la cui definizione esiga la considerazione di curve d'ordine > 1 uscenti da O.

Nel caso nostro le singolarità di F_6 sono costituite:

1) dal punto Z_∞, nel quale, come si è detto ora, la superficie ha un contatto triplo con sè stessa, venendo segata da ogni piano pel punto secondo una curva dotata di due punti tripli infinitamente vicini nella direzione della retta all'infinito;

2) dal punto O 4-plo per la C_6 di diramazione, il quale può considerarsi come un punto triplo cui sono infinitamente vicini due punti tripli O_1 ed O_2 in direzioni distinte (due punti doppi per C_6).

Dunque alle superficie φ_i aggiunte ad F_6 dovremo imporre le condizioni di avere in Z_∞ un punto doppio, toccare in questo punto il piano all'infinito ed inoltre di passare semplicemente per i punti O, O_1, O_2. Queste dànno in tutto 10 condizioni lineari, le quali riescono indipendenti per $i \geqq 2$. Segue dunque che non esistono quadriche aggiunte ad F_6: che la dimensione del sistema delle φ_3 aggiunte è 9, quella del sistema delle φ_4 aggiunte è 24, ecc. E così la superficie (salvo il caso di nuove singolarità in corrispondenza a casi particolari della C_6 di diramazione) riesce regolare, di genere (geometrico e numerico) $p_g = p_n = 0$ (*).

Ora prendiamo nel piano triplo le cubiche C_3 che passano doppiamente pel punto 4-plo O e semplicemente pei due punti doppi della C_6 di diramazione e che hanno due contatti tripunti con la detta curva. Queste curve certamente esistono e la loro costruzione si riduce ad un problema di trisezione degli argomenti delle funzioni abeliane inerenti a C_6 (**). Una tal cubica è l'imagine d'una C_{18} di F_6 spezzata in tre curve (coniugate) Γ_6 aventi tutte gli stessi caratteri. Infatti la C_{18} viene rappresentata sopra una C_3 razionale tripla, che deve riguardarsi come priva di elementi di diramazione. Queste curve Γ_6 sono razionali, hanno in Z_∞ un punto triplo, le cui tre tangenti (proprie) sono distinte e giacciono tutte nel piano all'infinito tangente ad F_6, hanno inoltre nel punto O un punto doppio le cui rette osculatrici sono gli assi x ed y.

(*) ENRIQUES, l. c., Cap. VI-40.

(**) CLEBSCH, *Leçons sur la Géometrie.* Tome 3.°, Chap. I-IX.

Vediamo ora se è possibile di ampliare il fascio delle curve ellittiche segate sopra F_6 dai piani per l'asse z, sommandovi una delle curve Γ_6. È certo che il sistema somma (se esiste) consterà pure di curve ellittiche, poichè la curva razionale Γ_6 sega in un sol punto variabile ogni curva ellittica del fascio nominato. Consideriamo le φ_4 aggiunte che passano per due curve Γ_6 coniugate. Ora siccome ogni tal superficie ha nel punto Z_∞ assorbite 9 intersezioni con una qualunque Γ_6 e nel punto O ne ha assorbite altre 4, così una φ_4 aggiunta sega una Γ_6 in 11 punti variabili. Due dei punti pei quali vogliamo far passare le φ_4, si dovranno scegliere nei due punti in cui la cubica del piano ha i due contatti tripunti colla curva di diramazione, punti che sono comuni alle tre Γ_6 coniugate. Inoltre su ciascuna di due Γ_6 possiamo ancora fissare 10 punti ad arbitrio: allora per tutti questi 22 punti passano ∞^2 superficie aggiunte φ_4, essendo (come si è visto) 24 la dimensione del sistema di tutte le φ_4. Le nominate ∞^2 φ_4 contengono le due Γ_6, su cui si sono fissati quei punti, epperò segano sulla superficie F_6 una rete di curve ellittiche, che è il sistema completo somma del fascio di curve ellittiche sezioni piane per l'asse z e di una curva razionale Γ_6. Infatti entro alla rete φ_4 vi ha un fascio di φ_4 spezzate nel cono cubico (comportantesi come una superficie aggiunta φ_3), che proietta da Z_∞ la C_3 dei contatti ed in un piano per l'asse z.

Ora ogni superficie contenente una rete di curve ellittiche è razionale oppure è riferibile birazionalmente ad una rigata ellittica (*) ma questo secondo caso porta $p_n < 0$, e quindi non può presentarsi che in corrispondenza a particolari degenerazioni della curva di diramazione, poichè si è provato che in generale è $p_n = p_g = 0$.

Concludiamo allora il teorema seguente:

Condizione necessaria e sufficiente perchè un piano triplo ciclico sia razionale è che la curva di diramazione si possa ridurre ad uno dei seguenti tipi:

1) $3\mu + 2$ *rette, delle quali* 3μ *concorrono in uno stesso punto* O *e le altre due no;*

2) *una cubica affatto arbitraria;*

3) *una sestica con un punto 4-plo, cui sono infinitamente vicini due punti doppi in direzioni distinte.*

Ci rimane per ultimo a vedere se un piano 5-plo ciclico possa avere come curva di diramazione totale una cubica C_3 ed una sua tangente di

(*) Castelnuovo, *Sulle superficie algebriche che contengono una rete di curve iperellittiche.* R. C. d. Reale Acc. d. Lincei, 1894.

flesso; e se un tal piano 5-plo risulti sempre razionale. Alla prima questione si risponde subito affermativamente, poichè (per il § 6) il nostro piano 5-plo si potrà, indicando con $F_3(x, y) = 0$ l'equazione della cubica, rappresentare mediante l'equazione:

$$z^5 = F_3(x, y);$$

quando, mediante una opportuna proiettività, si sia mandata all'infinito la tangente di flesso della C_3. Anzi possiamo fare in modo che il punto di flesso della cubica $F_3(x, y) = 0$ sia il punto all'infinito dell'asse delle x. Con ciò l'equazione della nostra cubica si riduce alla forma:

$$F_3(x, y) = y^3 + f_2(x, y) + f_1(x, y) + c,$$

dove $f_2(x, y)$ ed $f_1(x, y)$ sono forme in x, y dei gradi rispettivi 2 ed 1 e c è una costante.

La superficie rappresentativa di questo piano 5-plo sarà dunque data dall'equazione:

$$z^5 = y^3 + f_2(x, y) + f_1(x, y) + c,$$

la quale in coordinate omogenee $\left(\text{posto } x = \frac{x_1}{x_4},\ y = \frac{x_2}{x_4},\ z = \frac{x_3}{x_4}\right)$ assume la forma:

$$x_3^5 = x_2^3 x_4^2 + x_4^3 f_2(x_1, x_2) + x_4^4 f_1(x_1, x_2) + c\, x_4^5.$$

Questa superficie ha la retta $x_3 = x_4 = 0$ come doppia, ma infinitamente vicina ad essa ed incidente si ha un'altra retta doppia. Ciò segue dal fatto che una retta 5-pla generica del piano:

$$z^5 = f_3(z),$$

ha nel punto all'infinito dell'asse delle x due punti doppi infinitamente vicini allineati lungo la retta all'infinito. Si vede inoltre che il punto X_1 di coordinate $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ (flesso della cubica di diramazione) è triplo per la nostra superficie: dico che questo è il punto di incidenza delle due rette doppie. Infatti la sezione residua ottenuta con un piano passante per la retta doppia è una cubica, la quale sempre nello stesso punto X_1 ha per tangente di flesso questa retta doppia: in particolare il piano, che contiene le due rette doppie, segherà la nostra superficie secondo un'ulteriore retta che passerà pel punto comune alle due rette doppie: questo sarà dunque il punto X_1. Si può inoltre verificare (mediante una semplice trasformazione quadratica) come tutte le sezioni piane della stella, che ha per centro questo punto

$X_1 \equiv (1, 0, 0, 0)$ sieno curve C_5 con un punto triplo, al quale è infinitamente vicino un punto doppio nella direzione della retta che giace sul piano $x_4 = 0$ (piano delle due rette doppie). Le dette sezioni piane sono dunque curve di genere due. Entro alla stella di centro X_1 vi è un fascio particolare di sezioni piane cioè il fascio $x_3 = \lambda x_4$, il cui asse è la retta doppia, costituito da cubiche di genere uno aventi (come innanzi è avvertito) il punto X_1 come punto di flesso e come tangente di flesso l'asse del fascio. Proiettiamo allora questa superficie dal punto X_1 sopra un piano ad es. sul piano $x_1 = 0$: si ottiene un piano doppio, e precisamente il piano doppio di Nöther con una curva di diramazione C_6 dotata di due punti tripli infinitamente vicini, il quale, come è noto, è razionale.

Possiamo anzi avvertire che la curva C_6 di diramazione del piano doppio così costruito risulta spezzata in una C_5 con un tacnodo e nella sua tangente tacnodale.

Osserviamo come, in questo piano doppio si potrebbe facilmente costruire l'omologia ciclica dell'indice 5 che lo trasforma in sè (determinata da Kantor) e che dà luogo alla trasformazione del tipo 4) nel piano semplice, da cui siamo originariamente partiti.

Riassumendo i risultati ottenuti possiamo dire:

Condizione necessaria e sufficiente perchè un piano 5-plo ciclico sia razionale, è che la curva di diramazione si possa, mediante una trasformazione cremoniana, ridurre ad uno dei due tipi seguenti:

1) *a* $5\mu + 2$ $(\mu \geqq 0)$ *rette delle quali* 5μ *concorrono in uno stesso punto O;*

2) *ad una curva composta di una cubica generica e di una sua tangente di flesso.*

Bologna, 24 Aprile 1899.

Studî
sulle equazioni differenziali lineari.

(Di Ulisse Dini, *a Pisa.)*

1. Prendiamo a considerare la equazione:

$$a_0\, y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y = X, \tag{1}$$

dove le a_0, a_1, $a_2, \ldots$, a_{n-1}, a_n sono funzioni conosciute della x, e X è una funzione per la quale oltre alla x ammetteremo dapprima che possa contenere anche la y e alcune delle sue derivate, per modo che la equazione stessa possa anche non essere lineare. Il primo membro poi di questa equazione rappresentiamolo con $\Phi(y)$.

Indicando con y un integrale della (1), e con z un'altra funzione pure della x scelta comunque, avremo:

$$\int_\alpha^x (a_0\, y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y)\, z\, d\, x = \int_\alpha^x X z\, d\, x,$$

essendo α una costante determinata, e intendendo sempre che fra α e x tutte le nostre funzioni siano regolari, cioè finite e continue sì esse che le loro derivate almeno sino a quelle che figurano nelle nostre formole; quindi, osservando che con successive integrazioni per parti si ha:

$$\int z\, a_p\, y^{(n-p)}\, d\, x = z\, a_p\, y^{(n-p-1)} - (z\, a_p)'\, y^{(n-p-2)} + (z\, a_p)''\, y^{(n-p-3)} - \cdots +$$
$$+ (-1)^{n-p-1} (z\, a_p)^{(n-p-1)}\, y + (-1)^{n-p} \int (z\, a_p)^{(n-p)}\, y\, d\, x,$$

si otterrà la equazione:

$$p_0\, y^{(n-1)} + p_1\, y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}\, y + \int_\alpha^x p_n\, y\, d\, x = \int_\alpha^x X z\, d\, x + c, \tag{2}$$

essendo c una costante che dipenderà, oltre che dal limite α degli integrali, dalla funzione z e dall'integrale y che avremo scelto, e essendo inoltre:

$$\left.\begin{array}{l}
p_0 = z\, a_0\,, \\
p_1 = z\, a_1 + \varepsilon_1 (z\, a_0)' = z\, a_1 - p'_0\,, \\
p_2 = z\, a_2 + \varepsilon_1 (z\, a_1)' + \varepsilon_2 (z\, a_0)'' = z\, a_2 - p'_1\,, \\
p_3 = z\, a_3 + \varepsilon_1 (z\, a_2)' + \varepsilon_2 (z\, a_1)'' + \varepsilon_3 (z\, a_0)''' = z\, a_3 - p'_2\,, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
p_n = z\, a_n + \varepsilon_1 (z\, a_{n-1})' + \varepsilon_2 (z\, a_{n-2})'' + \cdots + \varepsilon_n (z\, a_0)^{(n)} = z\, a_n - p'_{n-1}\,,
\end{array}\right\} \quad (3)$$

ove per comodo si è posto $\varepsilon_s = (-1)^s$.

S'indichi ora con $-Z$ il valore che prende p_n pel valore z che si sceglie, per modo che sia:

$$(a_0\, z)^n + \varepsilon_1 (a_1\, z)^{(n-1)} + \varepsilon_2 (a_2\, z)^{(n-2)} + \cdots + \varepsilon_n (a_n\, z) = \varepsilon_{n+1}\, Z\,, \quad (4)$$

con chè $\varepsilon_{n+1} Z$ viene ad essere il primo membro di quella equazione che dicesi la *equazione aggiunta* della $\Phi(y) = 0$ che si ottiene uguagliando a zero il primo membro della (1), e noi lo diremo perciò, per abbreviare, il *polinomio aggiunto* del primo membro della stessa equazione (1); avremo la relazione:

$$p_0\, y^{(n-1)} + p_1\, y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-2}\, y' + p_{n-1}\, y = \int_\alpha^x (y\, Z + z\, X)\, d\,x + c\,, \quad (5)$$

dove le $p_0,\ p_1, \dots,\ p_{n-2},\ p_{n-1}$ hanno i valori dati dalle formole precedenti (3), e c è una costante che sarà uguale al valore di:

$$p_0\, y^{(n-1)} + p_1\, y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-2}\, y' + p_{n-1}\, y\,,$$

per $x = \alpha$, e dipenderà quindi, come dicevamo sopra, dal limite inferiore α dell'integrale che figura nel secondo membro, e dai valori scelti per z e per l'integrale y della (1).

2. Questa formola, che ordinariamente si dà soltanto pel caso di X funzione della sola x, e per supporvi poi soltanto che z sia un integrale della equazione aggiunta $\varepsilon_{n+1} Z = 0$ dell'equazione omogenea $\Phi(y) = 0$, ci condurrà a risultati molto notevoli quando, come appunto faremo, si profitti della indeterminazione che in essa ha per noi la funzione z.

Teniamo fermo infatti l'integrale y della equazione (1) dal quale si parte, e indichiamo con $z_1,\ z_2, \dots,\ z_n$ n funzioni distinte per le quali il determinante:

$$Q=\begin{vmatrix} z_1 & z'_1 & z''_1 \dots & z_1^{(n-1)} \\ z_2 & z'_2 & z''_2 \dots & z_2^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_n & z'_n & z''_n \dots & z_n^{(n-1)} \end{vmatrix}, \tag{6}$$

sia diverso da zero nel tratto che si considera nel quale s'intende compreso il valore α; e indichiamo inoltre con $c_1, c_2, \dots, c_n$ i valori corrispondenti della costante c che figura nella formola (5), e in generale con $p_{r,s}$ e Z_r ciò che diventano le p_s e Z quando in luogo di z vi si pone z_r. Avremo le n equazioni:

$$\left.\begin{array}{l} p_{1,0}y^{(n-1)}+p_{1,1}y^{(n-2)}+\dots+p_{1,n-2}y'+p_{1,n-1}y=\int_\alpha^x (yZ_1+z_1X)\,dx+c_1, \\ p_{2,0}y^{(n-1)}+p_{2,1}y^{(n-2)}+\dots+p_{2,n-2}y'+p_{2,n-1}y=\int_\alpha^x (yZ_2+z_2X)\,dx+c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_{n,0}y^{(n-1)}+p_{n,1}y^{(n-1)}+\dots+p_{n,n-2}y'+p_{n,n-1}y=\int_\alpha^x (yZ_n+z_nX)\,dx+c_n, \end{array}\right\} \tag{7}$$

e se il determinante dei coefficienti:

$$P=\begin{vmatrix} p_{1,0} & p_{1,1} & \dots & p_{1,n-1} \\ p_{2,0} & p_{2,1} & \dots & p_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n,0} & p_{n,1} & \dots & p_{n,n-1} \end{vmatrix} \tag{8}$$

sarà diverso da zero, queste equazioni determineranno i valori di y, e delle sue derivate $y', y^n, \dots, y^{(n-1)}$ espressi pei secondi membri, e per le $p_{r,s}$; cioè si avrà:

$$y^{(s)}=\frac{P_s}{P}, \tag{9}$$

indicando con P_s ciò che diviene P quando agli elementi della colonna $(n-s)^a$ si sostituiscono i secondi membri delle (7).

Ora essendo:

$$P = \begin{vmatrix} z_1 a_0 & z_1 a_1 + \varepsilon_1 (z_1 a_0)' & z_1 a_2 + \varepsilon_1 (z_1 a_1)' + \varepsilon_2 (z_1 a_0)'', \dots \\ z_2 a_0 & z_2 a_1 + \varepsilon_1 (z_2 a_0)' & z_2 a_2 + \varepsilon_1 (z_2 a_1)' + \varepsilon_2 (z_2 a_0)'', \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ z_n a_0 & z_n a_1 + \varepsilon_1 (z_n a_0)' & z_n a_2 + \varepsilon_1 (z_n a_1)' + \varepsilon_2 (z_n a_0)'', \dots \end{vmatrix}, \tag{10}$$

basterà fare la scomposizione di P in più determinanti, e tralasciare quelli identicamente nulli perchè aventi due o più colonne proporzionali, per ottenere:

$$P = \begin{vmatrix} z_1 a_0 & \varepsilon_1 (z_1 a_0)' & \varepsilon_2 (z_1 a_0)'' \dots & \varepsilon_{n-1} (z_1 a_0)^{(n-1)} \\ z_2 a_0 & \varepsilon_1 (z_2 a_0)' & \varepsilon_2 (z_2 a_0)'' \dots & \varepsilon_{n-1} (z_2 a_0)^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_n a_0 & \varepsilon_1 (z_n a_0)' & \varepsilon_2 (z_n a_0)'' \dots & \varepsilon_{n-1} (z_n a_0)^{(n-1)} \end{vmatrix}; \tag{11}$$

e di qui eseguendo le varie derivazioni, e poi facendo nuove scomposizioni in determinanti parziali col solito processo, si troverà:

$$P = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1} a_0^n Q = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^n Q, \tag{12}$$

talchè l'essere P diverso da zero è conseguenza della condizione già posta che lo sia il Q, e dell'altra che ora giova di porre che lo sia anche a_0 pei valori di x che si considerano.

E fermandoci a determinare soltanto il valore di y per mezzo della (9), se si osserva che il determinante P_0 corrispondente si ottiene dai valori (10) e (11) di P sostituendo agli elementi dell'ultima colonna i secondi membri delle (7), e quindi è uguale al determinante Q_0 che si ha da Q colla stessa sostituzione e moltiplicandolo per $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-2} a_0^{n-1}$, si troverà:

$$y = \varepsilon_{n-1} \frac{Q_0}{a_0 Q}, \tag{13}$$

essendo:

$$Q_0 = \begin{vmatrix} z_1 & z'_1 \dots & z_1^{(n-2)} \int_a^x (y Z_1 + z_1 X)\, dx + c_1 \\ z_2 & z'_2 \dots & z_1^{(n-2)} \int_a^x (y Z_2 + z_2 X)\, dx + c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ z_n & z'_n \dots & z_n^{(n-2)} \int_a^x (y Z_n + z_n X)\, dx + c_n \end{vmatrix},$$

e se, per abbreviare, indichiamo con Q_c il determinante che viene da Q quando si sostituiscono $c_1, c_2, \ldots, c_n$ agli elementi dell'ultima colonna, e con R_{x_1} il determinante:

$$R_{x_1} = \begin{vmatrix} z_1 & z'_1 & \ldots & z_1^{(n-2)} & (y\, Z_1 + z_1\, X)_{x_1} \\ z_2 & z'_2 & \ldots & z_2^{(n-2)} & (y\, Z_2 + z_2\, X)_{x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_n & z'_n & \ldots & z_n^{(n-2)} & (y\, Z_n + z_n\, X)_{x_1} \end{vmatrix}, \tag{14}$$

dove in generale $(y\, Z_r + z_r\, X)_{x_1}$ indica ciò che diviene $y\, Z_r + z_r\, X$ quando alla variabile x si sostituisce la variabile x_1, basterà sviluppare Q_0 per gli elementi dell'ultima colonna per vedere che la (13) ci dà la formola seguente:

$$y = \frac{\varepsilon_{n-1}}{a_0\, Q} \left\{ Q_c + \int_\alpha^x R_{x_1}\, d\, x_1 \right\}, \tag{15}$$

ovvero l'altra:

$$y = \frac{\varepsilon_{n-1}}{a_0\, Q} \left\{ Q_c + \int_\alpha^x X_{x_1}\, q_{x,x_1}\, d\, x_1 + \int_\alpha^x y_{x_1}\, \mathfrak{q}_{x,x_1}\, d\, x_1 \right\}, \tag{16}$$

indicando per semplicità con q_{x,x_1} e $\mathfrak{q}_{x,x_1}$ i determinanti che vengono da Q ponendo al posto degli elementi dell'ultima colonna rispettivamente $z_1, z_2, \ldots, z_n$ e $Z_1, Z_2 \ldots, Z_n$, e in questi elementi sostituendo la variabile x_1 alla variabile x.

3. La formola (16) ora ottenuta lascia immensa arbitrarietà nelle funzioni $z_1, z_2, \ldots, z_n$, perchè per esse richiede solo che siano regolari, e non annullino il determinante Q pei valori di x che si considerano; e per questo ha una importanza grandissima.

Tale importanza risulterà chiaramente dalle conseguenze che ne trarremo; prima però di passare a questo ci è utile di presentare le considerazioni seguenti.

Osserviamo cioè che, fissato in un modo qualsiasi il sistema di funzioni $z_1, z_2, \ldots, z_n$ e il valore α, ad ogni integrale y che si considera della (1) corrisponde un sistema di valori delle costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ che, per quanto si disse in fine del § 1, sono determinate dalle formole:

$$c_r = (p_{r,0}\, y^{(n-1)} + p_{r,1}\, y^{(n-2)} + \cdots + p_{r,n-1}\, y)_{x=\alpha}, \quad r = 1, 2, \ldots, n; \tag{17}$$

mentre la formola (16), nella quale per le costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ devono intendersi presi questi valori, dà l'integrale corrispondente dal quale si parte.

Viceversa, se pei valori scelti per $z_1, z_2, \ldots, z_n$ e per α, il determinante Q e a_0 per $x = \alpha$ sono diversi da zero, allora le equazioni che si hanno dalle (7) per $x = \alpha$ (le quali non sono che le (17) per $r = 1, 2, \ldots, n$) per ogni sistema di valori scelto ad arbitrio di $c_1, c_2, \ldots, c_n$ determinano un sistema unico $y_0, y'_0, y''_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ di valori di $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ per $x = \alpha$; e quindi, quando la equazione (1) sia effettivamente di ordine n e siano soddisfatte le condizioni che si richiedono perchè esista sempre un suo integrale y pel quale i valori di $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ per $x = \alpha$ possono darsi arbitrariamente almeno in un certo campo A al quale appartengono i valori di x in un intorno di α, e i valori trovati $y_0, y'_0, y''_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$, allora i valori dati per $c_1, c_2, \ldots, c_n$ fissano completamente un integrale y, e per esso si ha sempre la formola (16).

In altri termini dunque ad ogni integrale y della (1) corrisponde un sistema di valori determinati per le costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$, e viceversa ad ogni sistema di valori di queste corrisponde un integrale determinato y della (1) pel quale si ha la formola (16); e ciò quando la equazione stessa (1) è tale che per $x = \alpha$ possono darsi arbitrariamente i valori dell'integrale y e delle sue $n - 1$ derivate $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ almeno in un certo campo A al quale appartengono i valori di x in un intorno di α, e quelli che si hanno per queste quantità $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ dalle (17) in corrispondenza ai valori dati per le $c_1, c_2, \ldots, c_n$; come in particolare avviene quando nella equazione (1) X è una funzione regolare di x e delle sole $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ nello stesso campo, e più particolarmente ancora quando X è una funzione lineare di $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ per modo che la equazione (1) sia una equazione lineare nella quale il coefficiente di $y^{(n)}$ è ancora a_0. Ciò sempre, bene inteso, nel supposto che a_0 e Q per $x = \alpha$ siano diversi da zero.

E se si osserva anche che indicando con y_r l'integrale corrispondente ai valori $c_{r,1}, c_{r,2}, \ldots, c_{r,n}$ scelti per le costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$, il determinante:

$$C = \begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \ldots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \ldots & c_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \ldots & c_{n,n} \end{vmatrix}, \tag{18}$$

all'infuori del fattore $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ viene ad essere il prodotto del determinante P

dato dalla (8) per l'altro:

$$D = \begin{vmatrix} y_1 & y'_1 & y''_1 & \dots & y_1^{(n-1)} \\ y_2 & y'_2 & y''_2 & \dots & y_2^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & y'_n & y''_n & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}, \tag{19}$$

per $x = \alpha$, si conclude anche che quando a_0 e Q non sono zero per $x = \alpha$, onde le costanti $c_{r,s}$ conducano a un sistema d'integrali $y_1, y_2, \dots, y_n$ pei quali il determinante D sia diverso da zero per $x = \alpha$, sarà necessario e sufficiente che esse siano prese in modo che il loro determinante C risulti diverso da zero.

E così, nel caso particolare delle equazioni (1) lineari e omogenee col coefficiente di $y^{(n)}$ uguale ad a_0 (che sono quelle che corrispondono a supporre X della forma $\lambda_0 y^{(n-1)} + \lambda_1 y^{(n-1)} + \dots + \lambda_{n-1} y$), i sistemi d'integrali $y_1, y_2, \dots, y_n$ che si otterranno con questi valori delle costanti $c_{r,s}$ pei quali il determinante C viene diverso da zero, costituiranno sempre un sistema d'integrali fondamentali.

4. Aggiungiamo anche le considerazioni seguenti rispetto ai determinanti P, Q e D che capitano sempre in questi studi.

Osserviamo cioè che prendendo P sotto la forma (11) si vede subito che la sua derivata P' è il determinante stesso nel quale agli elementi $\varepsilon_{n-1}(a_0 z)^{(n-1)}$ dell'ultima colonna sono sostituite le loro derivate $\varepsilon_{n-1}(a_0 z)^{(n)}$; e quindi valendosi della (4) e facendosi poi le solite scomposizioni si ottiene la formola:

$$P' - \frac{a_1}{a_0} P = \varepsilon_{n+1} P_Z,$$

nella quale P_Z indica ciò che diviene P sostituendo agli elementi dell'ultima colonna i polinomi aggiunti $\varepsilon_{n+1} Z_1, \varepsilon_{n+1} Z_2, \dots, \varepsilon_{n+1} Z_n$.

Da questa poi integrando si deduce l'altra:

$$P = e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx} \left\{ \varepsilon_{n+1} \int_\alpha^x P_Z e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx} dx + K \right\}, \tag{20}$$

che per la (12) dà luogo alla seguente in Q:

$$Q = \frac{e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx}}{a_0^n} \left\{ \int_\alpha^x Q_Z a_0^{n-1} e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx} dx + (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} K \right\}, \tag{21}$$

essendo K una costante; e nel secondo membro di quest'ultima le funzioni a_0 e a_1 a calcoli fatti dovranno venire a sparire, perchè esse non figurano nel valore di Q.

Similmente il valore (19) di D dà luogo colla derivazione alla equazione:

$$D' + \frac{a_1}{a_0} D = \frac{D_0}{a_0},$$

essendo D_0 ciò che diviene D sostituendovi alle derivate $(n-1)^e$ dell'ultima colonna i valori corrispondenti di X pei varî valori $y_1, y_2, \ldots, y_n$ di y; e da questa si ottiene:

$$D = e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx} \left\{ \int_a^x \frac{D_0}{a_0} e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx} d\,x + K_1 \right\}, \tag{22}$$

con K_1 nuova costante; per modo che il determinante indicato sopra con C corrisponde precisamente al prodotto $K K_1$.

Quest'ultima formola nel caso di $X = 0$, e anche più generalmente nel caso di X funzione lineare omogenea di $y, y', y'', \ldots, y^{(n-2)}$, si riduce a quella nota di Liouville relativa al determinante di un sistema d'integrali fondamentali di una equazione lineare omogenea.

5. Nel caso particolare della equazione omogenea:

$$\Phi(y) = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$

se $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sono un sistema de' suoi integrali fondamentali, la indicata formola di Liouville si ottiene insieme ad alcune altre, anche coll'osservare che avendosi le n equazioni:

$$\begin{array}{l}
a_0 y_1^{(n)} + a_1 y_1^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y'_1 + a_n y_1 = 0, \\
a_0 y_2^{(n)} + a_1 y_2^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y'_2 + a_n y_2 = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_0 y_n^{(n)} + a_1 y_n^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y'_n + a_n y_n = 0,
\end{array}$$

se D è il determinante di quel sistema d'integrali, e D_h indica in generale ciò che diviene D sostituendo alle derivate di ordine $n-h$ quelle di ordine n, si hanno le formole seguenti:

$$\frac{a_1}{a_0} = -\frac{D_1}{D}, \quad \frac{a_2}{a_0} = -\frac{D_2}{D}, \ldots, \quad \frac{a_n}{a_0} = -\frac{D_n}{D},$$

che esprimono i coefficienti della equazione data per mezzo degli integrali; e la prima di queste coll'osservare che $D_1 = D'$, porta subito alla indicata formola di Liouville $D = c\, e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}$, con c quantità costante.

Le stesse formole poi sostituite nella equazione data ci mostrano che questa all'infuori di un fattore può scriversi sotto la forma del determinante:

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' & \dots & y^{(n-1)} & y^{(n)} \\ y_1 & y'_1 & y''_1 & \dots & y_1^{(n-1)} & y_1^{(n)} \\ y_2 & y'_2 & y''_2 & \dots & y_2^{(n-1)} & y_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & y'_n & y''_n & \dots & y_n^{(n-1)} & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0;$$

e da questa, oltre al verificare subito che $y_1, y_2, \dots, y_n$ sono gli n integrali, si ha anche un modo semplice per costruire una equazione lineare omogenea di ordine n che ammetta un sistema dato $y_1, y_2, \dots, y_n$ di integrali fondamentali.

Del resto è anche da osservare in generale che avendosi una equazione d'ordine $n-1$ $\varphi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0$, se si vuole costruire una equazione di ordine n che oltre agli integrali di questa ammette anche un nuovo integrale distinto y_n, basterà evidentemente prendere la equazione d'ordine n:

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{\varphi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})}{\varphi(x, y_n, y'_n, y''_n, \dots, y_n^{(n-1)})}\right\} = 0;$$

e così avendosi una equazione lineare e omogenea d'ordine $n-1$:

$$\psi(y) = b_0\, y^{(n-1)} + b_1\, y^{(n-2)} + \dots + b_{n-2}\, y' + b_{n-1}\, y = 0,$$

che ammette un sistema d'integrali fondamentali $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$, se si vorrà costruire una equazione $\varphi(y) = 0$ pure lineare e omogenea di ordine n, che oltre a questi ammetta anche un altro integrale y_n che con quelli dati costituisca un sistema fondamentale della nuova equazione, basterà prendere per questa la seguente $\frac{d}{dx}\left\{\frac{\psi(y)}{\psi(y_n)}\right\} = 0$; e quindi una equazione che debba avere dati integrali fondamentali $y_1, y_2, \dots, y_n$ potrà ottenersi costruendo successivamente le equazioni:

$$\psi_1(y) = \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right) = 0, \quad \psi_2(y) = \frac{d}{dx}\left\{\frac{\psi_1(y)}{\psi_1(y_2)}\right\} = 0, \quad \psi_3(y) = \frac{d}{dx}\left\{\frac{\psi_2(y)}{\psi_2(y_3)}\right\} = 0, \dots$$

$$\dots, \quad \psi_{n-1}(y) = \frac{d}{dx}\left\{\frac{\psi_{n-2}(y)}{\psi_{n-2}(y_{n-1})}\right\} = 0, \quad \psi_n(y) = \frac{d}{dx}\left\{\frac{\psi_{n-1}(y)}{\psi_{n-1}(y_n)}\right\} = 0.$$

6. Premesse queste osservazioni in parte note, ma che ci era utile di richiamare, torniamo a considerare la formola (16).

E prima osserviamo che siccome in questa formola per le funzioni $z_1, z_2, \ldots, z_n$ non abbiamo condizioni all'infuori di quella di essere regolari e di rendere il determinante Q diverso da zero pei valori di x che si considerano, potremo pel resto lasciarle del tutto indeterminate, o potremo porre per esse altre condizioni speciali, come ad es.: quella di costituire un sistema fondamentale di integrali di una equazione lineare omogenea *data* d'ordine n in z, o che presenti date particolarità; o quella di fare acquistare al polinomio aggiunto $\varepsilon_{n+1} Z$ che figura nel secondo membro della (16) una forma determinata, completamente conosciuta, o anche dipendente dalle funzioni stesse $z_1, z_2, \ldots, z_n$ e finanche dagli integrali $y_1, y_2, \ldots, y_n$ della (1).

Nei primi casi i' polinomi aggiunti $\varepsilon_{n+1} Z_1, \varepsilon_{n+2} Z_2, \ldots, \varepsilon_{n+3} Z_n$ vengono ad essere conseguenze dei valori scelti per le funzioni $z_1, z_2, \ldots, z_n$ o dei coefficienti della equazione lineare omogenea di ordine n in z che è data per determinarli; e poichè se questa equazione in z non è data avanti, si potrà sempre costruire coi processi del paragrafo precedente una equazione lineare e omogenea di ordine n che abbia per integrali fondamentali le quantità scelte $z_1, z_2, \ldots, z_n$ e abbia per primo coefficiente a_0, così in questi casi il polinomio aggiunto $\varepsilon_{n+1} Z$ si potrà sempre ridurre ad essere una espressione differenziale lineare e omogenea dell'ordine $n-1$ al più; e quando risulti zero o anche soltanto di ordine inferiore a $n-1$, evidentemente i determinanti P_Z e Q_Z delle formole (20) e (21) saranno zero, e queste formole si ridurranno più semplici.

Nell'ultimo caso invece essendo fissato il valore di Z la formola (4), a meno che non divenga identica e di ordine inferiore ad n in z, servirà a determinare le funzioni $z_1, z_2, \ldots, z_n$, o altrimenti tutte o alcune di queste rimarranno ancora indeterminate, dopo di chè quando vengano fissate anche queste, volendolo, si potrà ancora costruire la equazione lineare e omogenea che abbia tutte queste quantità per integrali fondamentali.

Così quando si ponga per condizione che $\varepsilon_{n+1} Z$ sia una espressione lineare della forma:

$$\mu_0 z^{(n)} + \mu_1 z^{(n-1)} + \cdots + \mu_{n-1} z' + \mu_n z,$$

ove le $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ sono funzioni conosciute di x e μ_0 è diverso da a_0, per le $z_1, z_2, \ldots, z_n$ bisognerà prendere un sistema d'integrali fondamentali della equazione di ordine n:

$$(a_0 z)^n + \varepsilon_1 (a_1 z)^{(n-1)} + \varepsilon_2 (a_2 z)^{(n-2)} + \cdots + \varepsilon_{n-1} (a_{n-1} z)' + \varepsilon_n (a_n z) =$$
$$= \mu_0 z^{(n)} + \mu_1 z^{(n-1)} + \cdots + \mu_{n-1} z' + \mu_n z;$$

e nel caso particolare di $Z = 0$, per $z_1, z_2, \ldots, z_n$ bisognerà prendere un sistema d'integrali fondamentali della equazione aggiunta:

$$(a_0 z)^{(n)} + \varepsilon_1 (a_1 z)^{(n-1)} + \varepsilon_2 (a_2 z)^{(n-2)} + \cdots + \varepsilon_{n-1} (a_{n-1} z)' + \varepsilon_n (a_n z) = 0, \quad (23)$$

della $\Phi(y) = 0$.

7. Fermiamoci d'ora innanzi in modo speciale al caso in cui X non contiene nè y nè le sue derivate; cioè supponiamo senz'altro che la equazione data (1) sia la ordinaria equazione lineare di ordine n con $X = 0$, o X funzione conosciuta della sola x.

Allora nel caso che sia posta la condizione $Z = 0$, cioè che come abbiamo testè detto si scelgano per $z_1, z_2, \ldots, z_n$ n integrali fondamentali della equazione aggiunta (23) della $\Phi(y) = 0$, la quantità indicata con $\mathfrak{q}_{x,x_1}$ al § 2 sarà zero, e gli integrali $y_1, y_2, \ldots, y_n$ verranno perfettamente conosciuti, perchè a causa della (16) risulteranno tutti dalla formola:

$$y = \frac{\varepsilon_{n-1}}{a_0 Q} \left\{ Q_c + \int_\alpha^x X_{x_1} q_{x,x_1} \, d x_1 \right\}, \quad (24)$$

col darvi alle costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ n sistemi di valori arbitrari:

$$c_{r,1}, \; c_{r,2}, \ldots, \; c_{r,n}, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

tali che il determinante (18) venga diverso da zero.

E questa formola a causa della (21) per essere ora $Q_Z = 0$ potrà anche scriversi:

$$y = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \frac{a_0^{n-1} e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}}{K} \left\{ Q_c + \int_\alpha^x X_{x_1} q_{x,x_1} \, d x_1 \right\}, \quad (25)$$

essendo K la costante di cui al § 6.

8. Nel caso dunque che le $z_1, z_2, \ldots, z_n$ si scelgano nel modo ora indicato, mentre si ritrova la proprietà nota per la quale quando si sà integrare la equazione aggiunta (23) della $\Phi(y) = 0$ si può integrare subito anche la equazione (1) cioè $\Phi(y) = X$, si giunge al tempo stesso a una forma (24)

o (25) degli integrali di questa equazione (1) dalla quale si possono ottenere anche particolarità molto notevoli rispetto agli integrali medesimi.

Fuori di questo caso le sole considerazioni precedenti non bastano più a farci determinare gli integrali della (1); però con altre osservazioni è facile vedere che la (16) stessa conduce ad una serie che somministra l'integrale generale della equazione data (1) in tutti i casi, e sotto infinite forme; supposto sempre, come già abbiamo detto, che X non dipenda nè da y nè dalle sue derivate, e che si tratti in conseguenza soltanto di una equazione lineare d'ordine n qualsiasi, con X zero o funzione della x regolare, come si suppone al solito che lo siano anche i coefficienti a_0, a_1, $a_2,\ldots$, a_n e i valori che si scelgono di z_1, $z_2,\ldots$, z_n, pei valori di x che si considerano.

S'indichi infatti per abbreviare con A_x la quantità $Q_c+\int_\alpha^x X_{x_1} q_{x,x_1}\, d x_1$ che possiamo riguardare come conosciuta, e che nel caso in cui la (1) sia anche omogenea (cioè sia $X=0$) si riduce al solo termine Q_c. La (16) ci darà:

$$y_x=\varepsilon_{n-1}\frac{A_x}{(a_0\, Q)_x}+\frac{\varepsilon_{n-1}}{(a_0\, Q)_x}\int_\alpha^x y_{x_1}\,\mathfrak{q}_{x,x_1}\, d\, x_1\,, \tag{26}$$

avendo posto a y e a $a_0\, Q$ l'indice x per mettere in evidenza questa variabile.

Da questa cambiando sotto l'integrale x_1 in x_2 e poi per tutto x in x_1, avremo:

$$y_{x_1}=\varepsilon_{n-1}\frac{A_{x_1}}{(a_0\, Q)_{x_1}}+\frac{\varepsilon_{n-1}}{(a_0\, Q)_{x_1}}\int_\alpha^{x_1} y_{x_2}\,\mathfrak{q}_{x_1,x_2}\, d\, x_2\,, \tag{27}$$

intendendo che $\mathfrak{q}_{x_1,x_2}$ indichi ciò che diviene $\mathfrak{q}_{x,x_1}$ quando x e x_1 si mutano rispettivamente in x_1 a x_2; e così sostituendo nella precedente avremo:

$$y_x=\varepsilon_{n-1}\frac{A_x}{(a_0\, Q)_x}+\frac{\varepsilon^2{}_{n-1}}{(a_0\, Q)_x}\int_\alpha^x\frac{A_{x_1}\,\mathfrak{q}_{x,x_1}}{(a_0\, Q)_{x_1}}\, d\, x_1+$$

$$+\frac{\varepsilon^2{}_{n-1}}{(a_0\, Q)_x}\int_\alpha^x\frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{(a_0\, Q)_{x_1}}\, d\, x_1\int_\alpha^{x_1} y_{x_2}\,\mathfrak{q}_{x_1,x_2}\, d\, x_2\,.$$

Al modo stesso cambiando x_2 in x_3 e poi x_1 in x_2 nella (27), e quindi sostituendo in quest'ultima avremo:

$$y_x = \frac{\varepsilon_{n-1} A_x}{(a_0 Q)_x} + \frac{\varepsilon^2{}_{n-1}}{(a_0 Q)_x} \int_\alpha^x \frac{A_{x_1} \mathfrak{q}_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}} d\, x_1 +$$
$$+ \frac{\varepsilon^3{}_{n-1}}{(a_0 Q)_x} \int_\alpha^x \frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}} d\, x_1 \int_\alpha^{x_1} \frac{A_{x_2} \mathfrak{q}_{x_1,x_2}}{(a_0 Q)_{x_2}} d\, x_2 +$$
$$+ \frac{\varepsilon^3{}_{n-1}}{(a_0 Q)_x} \int_\alpha^x \frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}} d\, x_1 \int_\alpha^{x_1} \frac{\mathfrak{q}_{x_1,x_2}}{(a_0 Q)_{x_2}} d\, x_2 \int_\alpha^{x_2} y_{x_3} \mathfrak{q}_{x_2,x_3} d\, x_3 ,$$

e così continuando si potrà dire evidentemente che l'integrale y è dato dalla serie d'integrali multipli:

$$\left.\begin{aligned} y = & \frac{\varepsilon_{n-1} A_x}{(a_0 Q)_x} + \frac{\varepsilon^2{}_{n-1}}{(a_0 Q)_x} \int_\alpha^x \frac{A_{x_1} \mathfrak{q}_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}} d\, x_1 + \\ & + \frac{\varepsilon^3{}_{n-1}}{(a_0 Q)_x} \int_\alpha^x \frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}} d\, x_1 \int_\alpha^{x_1} \frac{A_{x_2} \mathfrak{q}_{x_1,x_2}}{(a_0 Q)_{x_2}} d\, x_2 + \\ & + \frac{\varepsilon^4{}_{n-1}}{(a_0 Q)_x} \int_\alpha^x \frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}} d\, x_1 \int_\alpha^{x_1} \frac{\mathfrak{q}_{x_1,x_2}}{(a_0 Q)_{x_2}} d\, x_2 \int_\alpha^{x_2} \frac{A_{x_3} \mathfrak{q}_{x_2,x_3}}{(a_0 Q)_{x_3}} d\, x_3 + \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\ & + \frac{\varepsilon^{m+1}_{n-1}}{(a_0 Q)_x} \int_\alpha^x \frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}} d\, x_1 \int_\alpha^{x_1} \frac{\mathfrak{q}_{x_1,x_2}}{(a_0 Q)_{x_2}} d\, x_2 \int_\alpha^{x_2} \frac{\mathfrak{q}_{x_2,x_3}}{(a_0 Q)_{x_3}} d\, x_3 \int_\alpha^{x_3} \cdots \\ & \cdots \int_\alpha^{x_{m-2}} \frac{\mathfrak{q}_{x_{m-2},x_{m-1}}}{(a_0 Q)_{x_{m-1}}} d\, x_{m-1} \int_\alpha^{x_{m-1}} \frac{A_{x_m} \mathfrak{q}_{x_{m-1},x_m}}{(a_0 Q)_{x_m}} d\, x_m + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

quando si riesca a assicurarsi che l'integrale multiplo:

$$\int_\alpha^x \int_\alpha^{x_1} \int_\alpha^{x_2} \cdots \int_\alpha^{x_{m-1}} y_{x_m} \frac{\mathfrak{q}_{x,x_1} \mathfrak{q}_{x_1,x_2} \mathfrak{q}_{x_2,x_3} \cdots \mathfrak{q}_{x_{m-1},x_m}}{(a_0 Q)_x (a_0 Q)_{x_1} (a_0 Q)_{x_2} \cdots (a_0 Q)_{x_{m-1}}} d\, x_1\, d\, x_2 \ldots d\, x_m , \quad (29)$$

col crescere indefinito di m ha per limite zero.

Questo avverrà in particolare quando nel tratto che si considera pei valori di x, e quindi anche di x_1, $x_2, \ldots, x_m$, si sappia in qualche modo che l'integrale y si mantiene inferiore a un numero finito p, e che $\mathfrak{q}_{x,x_1}$ non supera un certo numero d, e $a_0 Q$ non è mai zero.

In questo caso infatti, se s'indica con d_1 il minimo valore assoluto di $a_0 Q$ nel tratto che si considera, questo minimo sarà diverso da zero perchè a_0 e Q si suppongono continui, e l'integrale precedente (29) si manterrà inferiore in valore assoluto all'altro:

$$p\left(\frac{d}{d_1}\right)^m \int_\alpha^x d\,x_1 \int_\alpha^{x_1} d\,x_2 \int_\alpha^{x_2} d\,x_3,\ldots, \int_\alpha^{x_{m-2}} d\,x_{m-1} \int_\alpha^{x_{m-1}} d\,x_m\,,$$

che eseguendo le integrazioni successive si riduce a:

$$p\left(\frac{d}{d_1}\right)^m \frac{(x-\alpha)^m}{1\,.\,2\,.\,3\ldots m}, \quad \text{ovvero a} \quad p\,\frac{\left(\frac{d\,(x-\alpha)}{d_1}\right)^m}{1\,.\,2\,.\,3\ldots m},$$

e evidentemente ha per limite zero al crescere indefinito di m; dunque poichè pei teoremi noti sugli integrali delle equazioni differenziali si sa che esistono sempre dei tratti per x nei quali le condizioni precedenti sono soddisfatte, così si può dire che la formola (28) dà l'integrale generale della (1) nei tratti stessi. E a causa della tanta indeterminazione che resta per la scelta delle funzioni ausiliarie $z_1, z_2,\ldots, z_n$ (perchè per esse si richiede solo che siano regolari e che il determinante Q sia diverso da zero), si può anche asserire come già dicemmo che non una sola ma infinite espressioni si hanno dalla (28) per gli integrali delle equazioni lineari (1) di qualunque ordine. E anzi di tale indeterminazione delle $z_1, z_2,\ldots, z_n$ potremo profittare per semplicizzare la serie stessa (28), o per farle acquistare certe particolarità speciali, come poi mostreremo.

9. L'importanza della formola trovata (28), della quale faremo poi applicazioni dettagliate, ci induce a fare anche le considerazioni seguenti.

Osserviamo che i risultati precedenti sono rigorosi nè hanno bisogno di ulteriori e speciali verifiche delle formole trovate, perchè partono dal supposto dell'esistenza di un integrale y della (1) che corrisponda al sistema che si sceglie dei valori delle costanti $c_1, c_2,\ldots, c_n$; quale esistenza risulta in modo indubbio dai teoremi generali sulla esistenza dell' integrale generale delle equazioni differenziali, e dalle considerazioni del § 3; e la formola (28), sotto le condizioni che abbiamo poste, non fà altro in sostanza che darci la espressione analitica di questa integrale.

Indipendentemente però da queste considerazioni, e senza nulla presupporre neppure intorno alla esistenza dell'integrale della equazione (1), si può dimostrare che pei valori di x che cadono in quei tratti nei quali $a_0, a_1, a_2,\ldots, a_n$ e X e i valori scelti di $z_1, z_2,\ldots, z_n$ si mantengono inferiori a un certo numero finito e sempre regolari, e a_0 e Q sono diversi da zero, la serie (28) per ogni sistema di valori finiti delle costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ che vi figurano è convergente e rappresenta un integrale della equazione (1), e ci dà anche il suo integrale generale.

Sotto queste condizioni infatti si vede subito che nei tratti indicati per x il valore assoluto di $a_0 Q$ non scenderà mai al disotto di un certo numero diverso da zero d_1, e le quantità A_x e $\mathfrak{q}_{x,x_1}$ non supereranno mai certi numeri finiti A e d; e quindi il termine generale della serie (28) si manterrà inferiore in valore assoluto all'integrale:

$$A \frac{d^m}{d_1^{m+1}} \int_\alpha^x d x_1 \int_\alpha^{x_1} d x_2 \int_\alpha^{x_2} d x_3 \ldots \int_\alpha^{x_{m-2}} d x_{m-1} \int_\alpha^{x_{m-1}} d x_m ,$$

ovvero alla quantità $\frac{A}{d_1}\left(\frac{d}{d_1}\right)^m \frac{(x-\alpha)^m}{1.2.3\ldots m}$, che all'infuori del fattore $\frac{A}{d_1}$ è il termine di una serie esponenziale; e si può quindi concludere senz'altro che la serie (28) non solo è convergente pei suindicati valori di x, ma è anche convergente in ugual grado.

La serie stessa adunque rappresenta una funzione finita e continua di x, e ad essa sarà applicabile l'integrazione termine a termine: quindi, indicandone la somma con y, si vede subito che per essa si avrà la formola:

$$y = \varepsilon_{n-1} \frac{A_x}{(a_0 Q)_x} + \frac{\varepsilon_{n-1}}{(a_0 Q)_x} \int_\alpha^x y_{x_1} \mathfrak{q}_{x,x_1} \, d x_1 ,$$

la quale col riporvi per A_x, $\mathfrak{q}_{x,x_1}$ e $a_0 Q$ i loro valori ci torna a dare $y = \frac{P_0}{P}$, ove P e P_0 hanno ancora i significati del § 2, e y rappresenta ora la somma della serie (28).

Ciò premesso, s'indichino con $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ n quantità che si determineranno colle equazioni:

$$\left.\begin{array}{l}
p_{1,0}\,\eta_{n-1} + p_{1,1}\,\eta_{n-2} + \cdots + p_{1,n-2}\,\eta_1 + p_{1,n-1}\,\eta_0 = \int_\alpha^x (y Z_1 + z_1 X) d x + c_1 , \\
p_{2,0}\,\eta_{n-1} + p_{2,1}\,\eta_{n-2} + \cdots + p_{2,n-2}\,\eta_1 + p_{2,n-1}\,\eta_0 = \int_\alpha^x (y Z_2 + z_2 X) d x + c_2 , \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
p_{n,0}\,\eta_{n-1} + p_{n,1}\,\eta_{n-2} + \cdots + p_{n,n-2}\,\eta_1 + p_{n,n-1}\,\eta_0 = \int_\alpha^x (y Z_n + z_n X) d x + c_n ,
\end{array}\right\} \quad (30)$$

del tutto simili alle (7), e nelle quali per ora possiamo dire soltanto che l'y che figura sotto gli integrali del secondo membro è la funzione definita dalla formola (28), per la quale abbiamo visto che si ha $y=\frac{P_0}{P}$, senza sapere ancora se sia o no l'integrale della (1).

Tutte queste quantità $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ avranno valori unici e determinati che risulteranno da queste equazioni risolvendole, e per ciascuno dei quali si vede che esisterà e potrà anche determinarsi la derivata, perchè evidentemente sono derivabili i coefficienti $p_{r,s}$ e gli integrali dei secondi membri, e quindi tutte le quantità che nei valori stessi figurano; e in particolare si avrà $\eta_0=\frac{P_0}{P}$, talchè sarà intanto $\eta_0=y$.

Trovati questi valori di $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$, se si intendono posti nelle precedenti, si avranno n identità; talchè colla derivazione si otterrà un altro sistema di n equazioni che saranno pure identicamente soddisfatte dagli stessi valori di $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ e delle loro derivate le quali, come abbiamo detto, certamente esistono.

Ora se si prende ad es: la r^a delle equazioni precedenti, si trova che colla derivazione dà luogo all'altra:

$$p_{r,0}\,\eta'_{n-1}+p_{r,1}\,\eta'_{n-2}+p_{r,2}\,\eta'_{n-3}+\cdots+p_{r,n-2}\,\eta'_1+p_{r,n-1}\,\eta'_0-y\,Z_r-z_r\,X+$$
$$+p'_{r,0}\,\eta_{n-1}+p'_{r,1}\,\eta_{n-2}+p'_{r,2}\,\eta_{n-3}+\cdots+p'_{r,n-2}\,\eta_1+p'_{r,n-1}\,\eta_0=0\,,$$

e questa, coll'osservare alle formole (3) e (4) che definiscono le $p_{r,s}$ e le Z_r, e con tenere conto che si è già trovato che $\eta_0=y$, si trasforma nella seguente:

$$z_r(a_0\,\eta'_{n-1}+a_1\,\eta'_{n-2}+a_2\,\eta'_{n-3}+\cdots+a_{n-1}\,\eta'_0+a_n\,\eta_0-X)+$$
$$+p'_{r,0}(\eta_{n-1}-\eta'_{n-2})+p'_{r,1}(\eta_{n-2}-\eta'_{n-3})+p'_{r,2}(\eta_{n-3}-\eta'_{n-4})+$$
$$+\cdots+p'_{r,n-3}(\eta_2-\eta'_1)+p'_{r,n-2}(\eta_1-\eta'_0)=0,$$

per modo che si può dire che avremo un sistema di n equazioni di cui la r^a avrà la forma seguente:

$$z_r\,\theta+p'_{r,0}\,\theta_1+p'_{r,1}\,\theta_2+p'_{r,2}\,\theta_3+\cdots+p'_{r,n-3}\,\theta_{n-2}+p'_{r,n-2}\,\theta_{n-1}=0\,, \quad (31)$$

nelle quali θ rappresenta il coefficiente di z_r nella formola precedente, e $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_{n-2}, \theta_{n-1}$ rappresentano le differenze $\eta_{n-1}-\eta'_{n-2}$, $\eta_{n-2}-\eta'_{n-3}$, $\eta_{n-3}-\eta'_{n-4}, \ldots, \eta_2-\eta'_1$, $\eta_1-\eta'_0$.

Ma se si forma il determinante dei coefficienti di queste n equazioni:

$$\begin{vmatrix} z_1 & p'_{1,0} & p'_{1,1} & \dots & p'_{1,n-2} \\ z_2 & p'_{2,0} & p'_{2,1} & \dots & p'_{2,n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_n & p'_{n,0} & p'_{n,1} & \dots & p'_{n,n-2} \end{vmatrix},$$

basta porvi per le $p'_{r,s}$ i loro valori dedotti dalle (3), e avere riguardo al valore di P, per vedere subito che esso non è altro che $(-1)^{n-1}\dfrac{P}{a_0}$, e quindi è diverso da zero; dunque evidentemente le soluzioni $\theta, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-2}, \theta_{n-1}$ delle n equazioni (31) sono tutte zero, e perciò i valori $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}$ che insieme alla η_0 dànno le soluzioni delle equazioni (30) sono appunto le derivate successive del valore η_0 che non è altro che il valore y definito dalle (28), e esse rendono $\theta = 0$, ciò che mostra appunto che per ogni sistema di valori delle costanti $c_1, c_2, \dots, c_n$ il valore (28) soddisfa alla equazione (1); e di queste viene anche ad essere l'integrale generale perchè in seguito alle considerazioni ora esposte le (30) si riducono alle (7) del § 2, e ripetendo quindi i ragionamenti del § 3, si vede che per valori convenienti delle costanti $c_1, c_2, \dots, c_n$ i valori di y, y' $y'', \dots, y^{(n-1)}$ per $x = \alpha$ possono rendersi qualunque.

E volendo un sistema d'integrali fondamentali della stessa equazione (1) quando per essere $X = 0$ essa è omogenea, basterà prendere quelli che corrispondono a n sistemi di valori delle costanti $c_1, c_2, \dots, c_n$ per le quali il determinante C dato dalla (18) è diverso da zero; e così in particolare basterà prendere quelli che corrispondono a fare successivamente una delle costanti uguale a uno, e le altre tutte eguali a zero.

10. In ciò che precede abbiamo sempre supposto che α sia finito, e che nell'intervallo che si considera per x, e quindi anche pel valore $x = \alpha$, il coefficiente a_0 e Q non si annullino, e gli altri coefficienti della equazione data come la funzione X e le funzioni ausiliarie $z_1, z_2, \dots, z_n$ non divengano infinite nè presentino altre singolarità nè esse nè le loro derivate, almeno fino a quelle che figurano nelle nostre formole, che sono quelle di ordine n per le funzioni $z_1, z_2, \dots, z_n$, e quelle di ordine $n - h$ pel coefficiente a_h.

Quando tutte queste particolarità non si verifichino, i risultati precedenti potranno presentare delle eccezioni; però è facile vedere che essi si manterranno pienamente, almeno fuori del punto $x = \alpha$, e per alcuni sistemi dei valori delle costanti $c_1, c_2, \dots, c_n$ se non per tutti, quando per questi valori delle costanti siano soddisfatte altre condizioni speciali per le quali la serie (28) risulti ancora convergente in ugual grado in ogni porzione del tratto che si dovrà considerare per x che non comprenda il punto α, e al tempo stesso gli integrali $\int_\alpha^x (y\, Z_r + z_r\, X)\, d\, x$ che figurano nei secondi membri delle (30) conservino un significato.

Con queste nuove condizioni infatti potranno evidentemente ripetersi i ragionamenti del paragrafo precedente per tutti i valori di x che si considerano diversi da α, e il valore (28) di y per quei sistemi di valori delle costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ che potranno considerarsi verrà evidentemente a rappresentare ancora un integrale della equazione data (1); e soltanto invece di corrispondere all'integrale generale corrisponderà soltanto a integrali particolari se le costanti non potranno essere prese in un modo qualsiasi.

Si aggiunga poi che se col tendere di x ad α quando α è finito, o col crescere indefinito di x per $\alpha = \infty$, *il prodotto $a_0^n\, Q$ non prenderà anche valori al di là di qualsiasi numero*, e se le condizioni precedenti risulteranno soddisfatte per n sistemi di valori delle costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ come quelli del § 3 pei quali cioè il determinante dato dalla (18) venga ad essere diverso da zero, allora gli integrali corrispondenti in intervalli sufficientemente piccoli che partono dal punto α (α al più escluso) quando α è finito, e in intervalli comunque grandi al di là di un certo numero quando α è infinito costituiranno sempre un sistema d'integrali pei quali il determinante D sarà ancora diverso da zero, come nei casi del paragrafo precedente.

Osserviamo infatti che le (30), se non sussistono anche per $x = \alpha$ (perchè potrà darsi che per $x = \alpha$ le quantità che vi figurano presentino delle singolarità), sussistono certo per ogni valore di x prossimo quanto si vuole ad α se α è finito, e per x al di là di un certo numero quando α è infinito; e quindi ponendo per abbreviare $\int_\alpha^x (y_r\, Z_s + z_s\, X)\, d\, x = \alpha_{r,s}$, si vede che per questi valori di x il prodotto dei soliti determinanti P e D, ovvero $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^n\, Q\, D$ a causa delle (30) sarà il determinante:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} + c_{1,1} & \alpha_{1,2} + c_{1,2} & \ldots & \alpha_{1,n} + c_{1,n} \\ \alpha_{2,1} + c_{2,1} & \alpha_{2,2} + c_{2,2} & \ldots & \alpha_{2,n} + c_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n,1} + c_{n,1} & \alpha_{n,2} + c_{n,2} & \ldots & \alpha_{n,n} + c_{n,n} \end{vmatrix},$$

e sarà vicino quanto si vuole a C, perchè le $\alpha_{r,s}$ potranno intendersi ridotte piccole quanto si vuole; e quindi D sarà certamente diverso da zero per quei valori di x.

S'intende poi evidentemente che non si avranno singolarità negli integrali neppure per $x=\alpha$ se per questo valore le singolarità non si presenteranno nè nella serie (28) nè nelle sue derivate, o se non si avranno singolarità nelle quantità $p_{r,s}$, y, z_r, Z_r e X che figurano nelle (30).

11. Ammettendo ora appunto che si presentino le circostanze eccezionali di cui nel paragrafo precedente, accenniamo a due casi molto notevoli nei quali si può assicurare che i risultati precedenti continuano ancora a sussistere pienamente.

Supponiamo perciò dapprima che si abbia ad es.: $\alpha=+\infty$, e che pei valori *finiti* di x non inferiori a un certo numero c (che potrà del resto, secondo i casi, essere qualunque) a_0 e Q non siano zero e i coefficienti a_0, a_1, $a_2,\dots$, a_n della equazione data (1) come la funzione X e le z_1, $z_2,\dots$, z_n non presentino singolarità.

Sotto queste ipotesi, un caso particolare nel quale la serie (28) resta ancora convergente per qualunque valore finito di x non inferiore a c, e in ogni intervallo finito che incominci da c è anche convergente in egual grado, è quello nel quale per qualsiasi valore di x non inferiore a c e pei valori di x_1 compresi fra x e ∞ i rapporti $\frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}}$ si mantengono sempre numericamente inferiori a $\frac{K}{x_1^{\nu}}$, essendo K e ν numeri finiti e fissi e $\nu>1$; e al tempo stesso la funzione $\frac{A_{x_1}\mathfrak{q}_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}}$ è integrabile rispetto a x_1 fra x e ∞, e si ha sempre in valore assoluto $\int_x^\infty \frac{A_{x_1}\mathfrak{q}_{c,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}}\,d\,x_1<K_1$, essendo K_1 un altro numero finito e fisso; ciò che in particolare avverrà senz'altro quando, essendo soddisfatta la condizione suindicata rispetto a $\frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}}$, la A_x non superi mai un certo numero finito neppure al crescere indefinito di x.

In questo caso infatti indicando con $|a_0 Q|_x$ il valore assoluto di $(a_0 Q)_x$ si vede che il termine generale della serie (28) è numericamente inferiore a:

$$\frac{K_1 K^{m-1}}{|a_0 Q|_x}\int_x^\infty \frac{d\,x_1}{x_1^{\nu}}\int_{x_1}^\infty \frac{d\,x_2}{x_2^{\nu}}\int_{x_2}^\infty\dots\int_{x_{m-2}}^\infty \frac{d\,x_{m-1}}{x^{\nu}_{m-1}},$$

cioè al termine:

$$\frac{K_1}{|\,a_0 Q\,|_x\,\pi(m-1)}\left(\frac{K\,x^{1-\nu}}{\nu-1}\right)^{m-1},$$

che all'infuori del fattore $\frac{K_1}{|\,a_0 Q\,|_x}$ è quello della serie esponenziale, e questo evidentemente dimostra quanto abbiamo enunciato sopra.

Ne segue che in questo caso, onde essere certi che i risultati dei due paragrafi precedenti continuano a sussistere pienamente, rimarrà solo ad assicurarsi che gli integrali $\int_x^\infty (y\,Z_r + z_r\,X)\,d\,x$, dove y ha il valore (28), mantengono ancora un significato per ogni valore di x non inferiore a c; e quindi si può in particolare osservare che i risultati stessi sussisteranno sempre quando per x non inferiore a c, e anche al crescere indefinito di x la A_x si mantenga sempre numericamente inferiore a un certo numero finito k_0, e $a_0\,Q$ non si accosti a zero più di un certo numero, e al tempo stesso la funzione $\mathfrak{q}_{x,x_1}$ per x_1 compreso fra x e ∞ sia sempre numericamente inferiore a $\frac{K}{x_1{}^\nu}$ con K e ν finiti e fissi e $\nu > 1$, e le funzioni $z_r\,X$, e Z_r siano atte all'integrazione fra x e ∞, queste ultime Z_r mantenendosi tali anche ridotte ai loro valori assoluti.

Supponiamo poi in secondo luogo che restando invece α finito, a_0 e Q e gli altri coefficienti della equazione data come le funzioni X e $z_1, z_2, \ldots, z_n$ per $x = \alpha$ non soddisfino più a tutte le condizioni che si avevano nel § 9, mentre vi soddisfano in ogni altro punto dell'intervallo che si considera.

Allora un caso particolare (del tutto analogo al precedente), nel quale la serie (28) si mantiene convergente e convergente in egual grado in ogni intervallo che non comprende il punto α, è quello nel quale i rapporti $\frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{(a_0\,Q)_{x_1}}$ per ogni valore di x in questi intervalli, e per x_1 fra α e x si mantengono numericamente inferiori a $\frac{K}{(x_1-\alpha)^\nu}$ con K e ν numeri finiti fissi e $\nu < 1$, e al tempo stesso la funzione $\frac{A_{x_1}\,\mathfrak{q}_{x,x_1}}{(a_0\,Q)_1}$ è integrabile rispetto a x_1 fra α e x, e il suo integrale è sempre inferiore a un numero finito K_1, come avverrà sempre senz'altro quando, essendo soddisfatta la condizione ora indicata pel rapporto $\frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{(a_0\,Q)_{x_1}}$, la funzione A_x si mantenga sempre numericamente inferiore a un certo numero finito anche col tendere di x ad α.

In questo caso infatti si vede subito, come nel caso precedente che il termine generale della serie (28) è numericamente inferiore a:

$$\frac{K_1 K^{m-1}}{|a_0 Q|_x}\int_\alpha^x \frac{d x_1}{(x_1-\alpha)^\nu}\int_\alpha^{x_1} \frac{d x_2}{(x_2-\alpha)^\nu}\int_\alpha^{x_2}\cdots\int_\alpha^{x_{m-2}} \frac{d x_{m-1}}{(x_{m-1}-\alpha)^\nu},$$

cioè a:

$$\frac{K_1}{|a_0 Q|\,\pi(m-1)}\left(\frac{K(x-\alpha)^{1-\nu}}{1-\nu}\right)^{m-1},$$

e quindi, come dicevamo, la serie stessa è convergente per ogni valore di x diverso da α nell'intervallo che si considera, e in ogni intervallo che non comprende il punto α è anche convergente in egual grado; talchè per essere certi della validità anche in questo caso dei risultati ottenuti nei paragrafi precedenti basterà assicurarsi che gli integrali $\int_\alpha^x (y Z_r + z_r X)\, d x$, dove y ha il valore (28), hanno ancora un significato.

E così nel caso particolare che anche col tendere di x ad α la A_x si mantenga sempre numericamente inferiore a un certo numero K_0 e $a_0 Q$ non si accosti a zero più di un certo numero, basterà che la funzione $\mathfrak{q}_{x,x_1}$ negli intervalli relativi ad x che si considerano che non comprendono il punto α, e per ogni valore di x_1 fra α e x si mantenga sempre numericamente inferiore a $\frac{K}{(x_1-\alpha)^\nu}$ con K e ν finiti e fissi e $\nu < 1$, e al tempo stesso le funzioni $z_r X$ e Z_r siano atte alla integrazione fra α e x, queste ultime Z_r mantenendosi tali anche riducendole ai valori assoluti.

S'intende al solito che se queste condizioni si verificheranno soltanto per valori particolari delle costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ gli integrali che troveremo saranno soltanto integrali particolari della (1); e s'intende pure che potranno aversi anche altri casi abbastanza semplici e diversi da quelli ora considerati nei quali potranno con facilità applicarsi le considerazioni generali del paragrafo precedente.

12. I risultati degli ultimi paragrafi risolvono in modo generale il problema della effettiva integrazione delle equazioni lineari anche a coefficienti variabili, dandoci non solo una dimostrazione della esistenza dei loro integrali, ma anche le espressioni analitiche degli integrali medesimi.

Queste espressioni analitiche sono per serie, è vero; ma sono date in infiniti modi, e sotto forme esplicite e coi termini perfettamente determinabili ciascuno dal precedente con una semplice quadratura dopo calcolato il primo termine $u_0 = \frac{\varepsilon_{n-1} A_x}{(a_0 Q)_x}$, al modo stesso che nella serie di TAYLOR ogni termine si deduce con una derivazione dalle formole che hanno condotto al termine precedente; giacchè se $u_{n-1}(x)$ è il termine n^0 (supposto già calcolato), l' $(n+1)^0$ si determina con un'altra quadratura perchè viene ad essere $\frac{\varepsilon_{n-1}}{(a_0 Q)_x} \int_\alpha^x u_n(x_1)\, \mathfrak{q}_{x,x_1}\, d\, x_1$; per modo cioè che si ha:

$$y = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots,$$

essendo:

$$u_0 = \frac{\varepsilon_{n-1} A_x}{(a_0 Q)_x}, \quad u_n = \frac{\varepsilon_{n-1}}{(a_0 Q)_x} \int_\alpha^x u_{n-1}(x_1)\, \mathfrak{q}_{x,x_1}\, d\, x_1 .$$

E ciò sotto le condizioni poste nel § 9 o nei successivi, le prime delle quali si verificano sempre in intervalli convenienti, risultandone così l'integrale generale, e nel caso delle equazioni omogenee avendosi con tutta facilità anche i sistemi d'integrali fondamentali; e solo in speciali intervalli, o in seguito a scelte troppo speciali che debbano farsi delle funzioni ausiliarie $z_1, z_2, \ldots, z_n$, venendo talvolta ad aversi degli integrali particolari invece dell'integrale generale.

13. Osserveremo poi che, come valendosi della formola $y = \frac{P_0}{P}$ del § 2, siamo giunti alla espressione (28) dell'integrale della nostra equazione lineare (1), così valendosi della formola generale $y^{(s)} = \frac{P_s}{P}$ data pure al § 2, si potrebbe giungere a espressioni simili delle derivate dei vari ordini fino all'$(n-1)^0$, e quindi, per la (1), anche delle derivate n^e dell'integrale medesimo.

Del resto poi quando, come avviene nei casi più comuni, siano soddisfatte le condizioni del § 9, allora le serie delle derivate del valore (28) di y finchè le derivazioni possono farsi, sono tutte convergenti in egual grado, e quindi rappresentano le derivate della serie; talchè le derivate dell'integrale potranno anche ottenersi colla derivazione per serie dell'integrale medesimo, e risulteranno così determinate finite e continue anche per qualunque ordine se tali saranno quelle delle funzioni ausiliarie $z_1, z_2, \ldots, z_n$ e del coefficiente a_0 della equazione data (1) e di X.

Nel calcolo di queste derivate potremo osservare che le espressioni q_{x,x_1} per $x_1 = x$ si annullano, e le $\mathfrak{q}_{x,x_1}$ si riducono a:

$$\mathfrak{q}_{x,x} = \varepsilon_{n+1} \left\{ (n\, a'_0 + \varepsilon_1\, a_1)\, Q + a_0\, Q' \right\},$$

indicando con apici le derivazioni relative ad x; e così dalla (28) con semplici riduzioni si avrà in particolare:

$$\left.\begin{aligned} y' = \left\{ (n-1)\frac{a'_0}{a_0} - \frac{a_1}{a_0} \right\} y + \varepsilon_{n-1} \frac{A'_x}{(a_0\, Q)_x} + \frac{\varepsilon^2{}_{n-1}}{(a_0\, Q)_x} \int_\alpha^x \frac{A_{x_1}\, \mathfrak{q}'_{x,x_1}}{(a_0\, Q)_{x_1}}\, d\, x_1 + \\ + \frac{\varepsilon^3{}_{n-1}}{(a_0\, Q)_x} \int_\alpha^x \frac{\mathfrak{q}'_{x,x_1}}{(a_0\, Q)_{x_1}}\, d\, x_1 \int_\alpha^{x_1} \frac{A_{x_2}\, \mathfrak{q}_{x_1,x_2}}{(a_0\, Q)_{x_2}}\, d\, x_2 + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

avendo ancora indicati cogli apici le derivate di $\mathfrak{q}_{x,x_1}$ rispetto ad x; e in modo simile si avrebbero i valori di y'', y''',...

Questa formola poi vale anche nei casi eccezionali di cui ai §§ 10 e 11, quando per le quantità sotto gli integrali, e così pei rapporti $\frac{\mathfrak{q}'_{x,x_1}}{(a_0\, Q)_{x_1}}$, e $\frac{A_{x_1}\, \mathfrak{q}'_{x,x_1}}{(a_0\, Q)_{x_1}}$, oltrechè per gli altri $\frac{\mathfrak{q}_{x,x_1}}{(a_0\, Q)_{x_1}}$, $\frac{A_{x_1}\, \mathfrak{q}_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}}$ si abbiano le stesse particolarità che allora si richiedevano soltanto per queste ultime due quantità.

14. Aggiungiamo inoltre che tutti questi risultati, oltre chè pel caso di quantità e di variabili x reali, valgono evidentemente anche pel caso di quantità e di variabili complesse, quando invece di parlare di valori assoluti delle quantità sotto gli integrali come abbiamo fatto nei §§ 9 e seg. si parli dei loro moduli ecc., e salvo a supporre di essere in campi semplicemente connessi nell'interno dei quali i coefficienti della equazione data (1) e le funzioni X e $z_1, z_2, \ldots, z_n$ non presentino singolarità; e allora gli integrali possono continuarsi in tutto il piano a meno che queste singolarità non vengano a presentarsi lungo tutto un contorno chiuso, ecc.

Quello poi che più specialmente è notevole nei risultati precedenti è l'arbitrarietà che resta nelle nostre funzioni ausiliarie $z_1, z_2, \ldots, z_n$ per le quali, come altre volte notammo, si richiede soltanto che siano regolari (cioè che siano finite e continue insieme alle loro derivate finchè ce ne è bisogno, cioè fino alle n^e), e che non annullino il solito determinante Q nell'intervallo che si considera, salvo tutt'al più per $x = \alpha$ nel secondo dei casi considerati al § 11 e in altri casi simili. In forza di questa arbitrarietà si vengono ad avere infinite forme per l'integrale della equazione data (1); e s'intende che quando queste funzioni $z_1, z_2, \ldots, z_n$ si determinino in modo speciale in relazione alla equazione data, o si determinino in modo che vengano ad avere forme speciali o vengano a soddisfare a speciali condizioni le quantità A_{x_1}, Q, q_{x,x_1}, $\mathfrak{q}_{x,x_1}$ e Z che figurano nelle nostre formole, l'integrale y dato dalla (28) e le sue derivate verranno ad acquistare forme speciali più o meno notevoli che metteranno in evidenza ora alcune, ora altre delle loro proprietà.

Tutto questo però sarà messo dettagliatamente in evidenza soltanto in un'altra Memoria che pubblicheremo prossimamente, e alla quale riserviamo la trattazione di tutti i casi particolari, e di tutte le applicazioni più importanti che possono farsi dei risultati che sopra abbiamo ottenuto; con chè giungeremo allora ad ottenerne anche altri, pure assai notevoli, relativi a classi particolari di equazioni o a equazioni speciali.

15. Qui ora, allo scopo di potere poi procedere più speditamente nella indicata nuova Memoria, ci fermeremo un momento sulla forma e su alcune particolarità dei polinomj aggiunti $\varepsilon_{n+1} Z$, e dei determinanti Q_c, q_{x,x_1}, e $\mathfrak{q}_{x,x_1}$ che figurano sempre nelle nostre formole.

Riprendiamo perciò il valore (4) di $\varepsilon_{n+1} Z$, e in questo sviluppiamo le derivate $(a_0 z)^n$, $(a_1 z)^{n-1}, \ldots$, colla solita formola di Leibnitz. Il polinomio stesso prenderà la forma:

$$\varepsilon_{n+1} Z = q_0 z^n + q_1 z^{(n-1)} + q_2 z^{(n-2)} + \cdots + q_{n-1} z' + q_n z, \tag{33}$$

dove sarà $q_0 = n_0 a_0 = a_0$, e in generale:

$$q_s = n_s a_0^{(s)} + (n-1)_{s-1} \varepsilon_1 a_1^{(s-1)} + (n-2)_{s-2} \varepsilon_2 a_2^{(s-2)} + \cdots + (n-s)_0 \varepsilon_s a_s, \tag{34}$$

con $s = 1, 2, \ldots, n$, per modo che sarà anche:

$$q_n = a_0^{(n)} - a_1^{(n-1)} + a_2^{(n-2)} + \cdots + (-1)^n a_n; \tag{35}$$

e così in particolare quando nella equazione data (1) si abbia:

$$a_1 = \frac{n a'_0}{2},\ a_3 = \frac{n-2}{2}\left\{ n_2 \frac{a_0'''}{3} - (n-1)\frac{a_1''}{2} + a'_2 \right\} = -\frac{1}{4} n_3 a'''_0 + \frac{n-2}{2} a'_2, \ldots \tag{36}$$

il polinomio aggiunto $\varepsilon_{n+1} Z$ tornerà ad essere precisamente cogli stessi coefficienti del primo membro della equazione data.

Nel caso speciale dunque delle equazioni di secondo ordine, perchè il polinomio aggiunto $-Z$ torni ad essere come il primo membro della equazione data, cioè $a_0 z'' + a_1 z' + a_2 z$, basterà che sia $a_1 = a'_0$; talchè ricordando quanto si disse al § 7 si vede che, per le equazioni del secondo ordine, quando sia $a_1 = a'_0$ la riduzione della loro integrazione a quella della equazione aggiunta non può dare alcun vantaggio.

Anche per le equazioni del second'ordine però, la circostanza indicata può essere utile quando si determinino in altro modo le funzioni ausiliarie z_1, z_2, come appunto in questi studî ammettiamo che possa farsi.

Quanto poi alle equazioni di ordine superiore al secondo, perchè il polinomio aggiunto $\varepsilon_{n+1} Z$ riproduca nei coefficienti il primo membro della equazione data (1), bisognerà che oltre alle prime delle equazioni (36) si abbiano anche le altre; e quando si abbia soltanto la prima delle stesse equazioni, allora nel polinomio aggiunto si riprodurranno soltanto i primi tre coefficienti a_0, a_1, a_2 della (1).

16. Del resto poi data la equazione (1), con opportune trasformazioni potremo mutarne d'assai i coefficienti, e così in molti casi sì essi che quelli del polinomio aggiunto $\varepsilon_{n+1} Z$ potranno ridursi ad acquistare particolarità speciali.

Di queste trasformazioni le più naturali, che si usano anche in molte altre occasioni, e che per quanto semplici e notissime troviamo opportuno qui di ricordare, sono le seguenti:

a) Quella trasformazione che si fa moltiplicando la equazione data (1) per una indeterminata k, con chè i nuovi coefficienti della equazione, senza che questa ne risulti alterata, verranno ad essere $k a_0$, $k a_1, \ldots$, e potranno venire a soddisfare a condizioni speciali, e quelli del polinomio aggiunto verranno a cambiarsi d'assai. Così, in particolare, si potrà sempre fare in modo che sia soddisfatta la prima delle condizioni (36) (con chè nel caso particolare delle equazioni del secondo ordine $\varepsilon_{n+1} Z$ riprodurrà il primo membro della equazione data); e per questo basterà prendere k in modo che si abbia $(k a_0)' = \frac{n}{2} k a_1$, cioè basterà prendere $k = \frac{c}{a_0} e^{\frac{n}{2}\int \frac{a_1}{a_0} dx}$; e se si vorrà che sia $(k a_0)' = k a_1$ basterà prendere $k = \frac{c}{a_0} e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx}$, c essendo una costante.

b) Quella trasformazione, pure continuamente usata, che consiste nel sostituire alla incognita y un'altra incognita u col porre $y = t u$, essendo t una quantità da determinarsi nel modo che, secondo i casi, tornerà più comodo, come ad es.: per far sì che i coefficienti della nuova equazione in u, o i corrispondenti di $\varepsilon_{n+1} Z$ abbiano particolarità speciali. Così in particolare, volendo che la nuova equazione in u manchi del secondo termine, basterà prendere $t = c\, e^{-\int \frac{a_1}{n a_0} dx}$, con c costante; e se già sarà $a_1 = \frac{n}{2} a'_0$, cioè se sarà soddisfatta la prima delle (36) basterà prendere $t = \frac{c}{\sqrt{a_0}}$.

c) Quella trasformazione infine che consiste nel fare un cangiamento della variabile indipendente x in un'altra ξ; da farsi tale cangiamento ad es.: mediante la formola $d\,x = \varphi(\xi)\, d\,\xi$, essendo $\varphi(\xi)$ una funzione data o da determinarsi; e anche con questa trasformazione i coefficienti della equazione data, e quelli del polinomio aggiunto verranno a trasformarsi in altri, e le nostre formole potranno semplicizzarsi, e acquistare particolarità speciali.

17. Fermandoci infine per un momento, come già dicemmo di fare, anche sui determinanti Q_c, q_{x,x_1}, $\mathfrak{q}_{x,x_1}$, che pure figurano continuamente nelle nostre formole, osserviamo che essi rientrano tutti nell'altro:

$$\Theta_n = \begin{vmatrix} z_1 & z'_1 & \dots & z_1^{(n-2)} & \theta_1 \\ z_2 & z'_2 & \dots & z_2^{(n-2)} & \theta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_n & z'_n & \dots & z_n^{(n-2)} & \theta_n \end{vmatrix}, \qquad (37)$$

bastando per ottenerli da questo di farvi respettivamente $\theta_1 = c_1$, $\theta_2 = c_2, \dots$, $\theta_2 = c_n$ per il Q_c; $\theta_1 = (z_1)_{x_1}$, $\theta_2 = (z_2)_{x_1}, \dots$, $\theta_n = (z_n)_{x_n}$ per il q_{x,x_1}; e $\theta_1 = (Z_1)_{x_1}$, $\theta_2 = (Z_2)_{x_1}, \dots$, $\theta_n = (Z_n)_{x_1}$ per il $\mathfrak{q}_{x,x_1}$.

Sviluppando Θ_n per gli elementi dell'ultima colonna, e indicando in generale con Q_{z_r} il determinante che viene da Q sopprimendovi la linea r^a e l'ultima colonma, cioè il determinante che tiene il posto di Q per le funzioni che restano delle z_1, $z_2, \dots$, z_n quando si sopprime la r^a cioè z_r, si vede che si avrà:

$$\Theta_n = \varepsilon_{n-1} Q_{z_1} \theta_1 + \varepsilon_{n-2} Q_{z_2} \theta_2 + \dots + \varepsilon_0 Q_{z_n} \theta_n,$$

e quindi sarà:

$$\left.\begin{aligned} Q_c &= \varepsilon_{n-1} Q_{z_1} c_1 + \varepsilon_{n-2} Q_{z_2} c_2 + \dots + \varepsilon_0 Q_{z_n} c_n, \\ q_{x,x_1} &= \varepsilon_{n-1} Q_{z_1} (z_1)_{x_1} + \varepsilon_{n-2} Q_{z_2} (z_2)_{x_1} + \dots + \varepsilon_0 Q_{z_n} (z_n)_{x_1}, \\ \mathfrak{q}_{x,x_1} &= \varepsilon_{n-1} Q_{z_1} (Z_1)_{x_1} + \varepsilon_{n-2} Q_{z_2} (Z_2)_{x_1} + \dots + \varepsilon_0 Q_{z_n} (Z_n)_{x_1}, \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

per modo che se, dipendentemente da relazioni che avessero luogo fra le funzioni ausiliarie scelte z_1, $z_2, \dots$, z_n, ognuno dei determinanti Q_{z_r} potrà ridursi a dipendere dalla sola z_r che figura nel suo indice (e non nel determinante stesso) e da altre quantità conosciute, allora nelle nostre funzioni Q_c, q_{x,x_1}, $\mathfrak{q}_{x,x_1}$ le funzioni z_1, $z_2, \dots$, z_n risulteranno separate. In q_{x,x_1} e $\mathfrak{q}_{x,x_1}$ poi la variabile x_1 figurerà soltanto nei secondi fattori dei loro termini; e oltre a ciò siccome in Q_c, e quindi anche nella espressione di A_x che figura nella nostra formola generale (28), le costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ risultano tutte al primo grado e separate, l'espressione (28) di y come quelle delle sue derivate si ridurranno alla forma $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \cdots + \lambda_n c_n + \mu$, essendo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \mu$ funzioni conosciute; cioè in y le costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ vi figureranno ancora al primo grado e separate. E prendendo successivamente una di queste costanti uguale a uno, e le altre uguali a zero, quando questo possa farsi per non esservi fra loro nessuna condizione come si disse al § 10, allora le Q_c si ridurranno a un termine solo, e i valori corrispondenti di y daranno n integrali che nel caso di $X=0$, cioè per le equazioni omogenee, saranno integrali fondamentali.

18. Aggiungiamo che pel determinante Θ_n (che comprende i tre Q_c, q_{x,x_1} e $\mathfrak{q}_{x,x_1}$), e per la sua derivata si hanno altre formole notevolissime che quì giova di dare, perchè ci saranno utili negli studî che esporremo nella nuova Memoria.

Osserviamo perciò che le prime $n-1$ funzioni ausiliarie $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ potranno essere state date subito come integrali fondamentali di una equazione omogenea in z d'ordine $n-1$, e se anche saranno state date altrimenti questa equazione potremo sempre intenderla costruita coi processi del § 5; e noi, introducendo ora questa equazione, ammetteremo che essa sia la seguente:

$$\psi(z) = b_0 z^{(n-1)} + b_1 z^{(n-2)} + b_2 z^{(n-3)} + \cdots + b_{n-2} z' + b_{n-1} z = 0. \quad (39)$$

Derivando rispetto ad x il determinante Θ_n si troverà un nuovo determinante che sarà quello che risulta da Θ_n sostituendovi agli elementi della colonna $(n-1)^a$ le derivate $z_1^{(n-1)}, z_2^{(n-1)}, \ldots, z_{n-1}^{(n-1)}, z_n^{(n-1)}$; e poichè per ipotesi $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ sono integrali della (39), i primi $n-1$ degli stessi elementi potranno esprimersi per le derivate degli ordini precedenti per mezzo della stessa equazione, mentre l'ultimo $z_n^{(n-1)}$ potrà scriversi evidentemente $-\frac{b_1}{b_0} z_n^{(n-2)} + \left(z_n^{(n-1)} + \frac{b_1}{b_0} z_n^{(n-2)}\right)$; e quindi si avrà:

$$\Theta'_n = -\frac{1}{b_0} \begin{vmatrix} z_1 & z'_1 & \ldots & z_1^{(n-3)} & b_1 z_1^{(n-2)} + b_2 z_1^{(n-3)} + \cdots + b_{n-2} z'_1 + b_{n-1} z_1 & \theta_1 \\ z_2 & z'_2 & \ldots & z_2^{(n-3)} & b_1 z_2^{(n-2)} + b_2 z_2^{(n-3)} + \cdots + b_{n-2} z'_2 + b_{n-2} z_2 & \theta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ z_{n-1} & z'_{n-1} & \ldots & z_{n-1}^{(n-3)} & b_1 z_{n-1}^{(n-2)} + b_2 z_{n-1}^{(n-3)} + \cdots + b_{n-2} z'_{n-1} + b_{n-2} z_{n-1} & \theta_{n-1} \\ z_n & z'_n & \ldots & z_n^{(n-3)} & b_1 z_n^{(n-2)} - (b_0 z_n^{(n-1)} + b_1 z_n^{(n-2)}) & \theta_n \end{vmatrix}.$$

Scomponendo ora questo determinante col solito processo, si troverà subito intanto:

$$\Theta'_n = -\frac{b_1}{b_0}\Theta_n - \frac{1}{b_0}\begin{vmatrix} z_1 & z'_1 & \dots & z_1^{(n-3)} & b_2 z_1^{(n-3)} + \dots + b_{n-2} z'_1 + b_{n-1} z_1 & \theta_1 \\ z_2 & z'_2 & \dots & z_2^{(n-3)} & b_2 z_2^{(n-3)} + \dots + b_{n-2} z'_2 + b_{n-1} z_2 & \theta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{n-1} & z'_{n-1} & \dots & z_{n-1}^{(n-3)} & b_2 z_{n-1}^{(n-3)} + \dots + b_{n-2} z'_{n-1} + b_{n-1} z_{n-1} & \theta_{n-1} \\ z_n & z'_n & \dots & z_n^{(n-3)} & -(b_1 z_n^{(n-1)} + b_1 z_n^{(n-2)}) & \theta_n \end{vmatrix};$$

e ora sviluppando il determinante del secondo membro rispetto agli elementi dell'ultima linea, e poi scomponendo coi soliti processi in determinanti parziali i determinanti che vengono a moltiplicare gli elementi z_n, $z'_n, \dots, z_n^{(n-3)}$, e θ_n, e facendo le solite riduzioni, si trova subito la formola seguente:

$$\Theta'_n = -\frac{b_1}{b_0}\Theta_n - \frac{\psi(z_n)}{b_0}\Theta_{n-1}, \tag{40}$$

essendo $\psi(z_n)$ ciò che diviene per $z = z_n$ il primo membro della equazione (39) in z che ha per integrali le funzioni precedenti $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$, e Θ_{n-1} essendo il determinante analogo a Θ_n pel caso di queste sole $n-1$ funzioni $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$; e ora da questa formola coll'integrazione si ha l'altra:

$$\Theta_n = -e^{-\int_\beta^x \frac{b_1}{b_0}dx}\left\{\int_\beta^x e^{\int_\beta^x \frac{b_1}{b_0}dx}\frac{\psi(z_n)}{b_0}\Theta_{n-1}\,dx - \gamma_n\right\}, \tag{41}$$

essendo γ_n il valore di Θ_n per un valore particolare β di x.

Queste formole (40) e (41) sono quelle che volevamo trovare. Da esse nel caso particolare di $b_1 = b'_0$ si hanno le due:

$$(b_0\Theta_n)' = -\psi(z_n)\Theta_{n-1}, \quad \Theta_n = -\frac{1}{b_0}\int_\beta^x \psi(z_n)\Theta_{n-1}\,dx + \gamma_n, \tag{42}$$

e nel caso invece di $b_1 = 0$ si hanno le altre:

$$\Theta'_n = -\frac{\psi(z_n)}{b_0}\Theta_{n-1}, \quad \Theta_n = -\int_\beta^x \frac{\psi(z_n)}{b_0}\Theta_{n-1}\,dx + \gamma_n. \tag{43}$$

Pisa, Gennaio 1899.