Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch und **Dr. M. Cantor.**

41. Jahrgang.

Mit in den Text gedruckten Figuren und sieben lithographirten Tafeln.

Leipzig,

Verlag von B. G. Teubner.

1896.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt.

Nach 41jähriger Thätigkeit habe ich die Redaction des ersten Theils der von mir gegründeten „Zeitschrift für Mathematik und Physik" niedergelegt und an Herrn Prof. Dr. **Mehmke** in Stuttgart abgegeben. Möge derselbe bei den Mitarbeitern und Lesern der Zeitschrift dasselbe liebenswürdige Entgegenkommen finden, dessen ich mich immer zu erfreuen hatte.

Dresden, Ende 1896. Geh. Rath **Schlömilch.**

I.

Ueber Singularitäten ebener algebraischer Curven.

Von

Dr. W. Köstlin,

Repetent an der Technischen Hochschule in Stuttgart.

Hierzu Tafel I Fig. 1—6.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit hat sich das Ziel gesteckt, das Verhalten der adjungirten Curve in einer durch ihre Reihenentwicklungen definirten Singularität einer ebenen algebraischen Curve zu untersuchen. Eine solche Reihenentwicklung ist ein im Allgemeinen irrationaler Ausdruck hinsichtlich einer Coordinate, durch welche die andere Coordinate dargestellt wird. Man kann verlangen, diese Beziehung in die Form einer rationalen Gleichung zwischen den beiden Coordinaten umzuwandeln, sofern die Entwicklung bei irgend einer (übrigens beliebig hohen) Potenz abgebrochen wird. Dies ist der Zweck der Untersuchungen in §§ 1, 2. Dabei zeigt sich, dass auch in der rationalen Form die sogenannten „kritischen Exponenten" eine ausgezeichnete Rolle spielen. Die nähere Untersuchung dieser Form führte mich darauf, ein graphisches Verfahren für die Reihenentwicklung zu verwerthen, das, in einer Verbindung der Methoden von Puiseux und Cramer bestehend, die Diagramme sämmtlich in einer Figur vereinigt. Sie ermöglichte die Aufstellung der rationalen Form einer Curve, welche im Ursprung einen „superlinearen Zweig" (nach Cayley) mit gegebenen kritischen Exponenten besitzt. Zugleich gab sie die Hilfsmittel an die Hand, die Zahl der linearen Zweige mit nicht übereinstimmenden Tangenten zu bestimmen, welche die Bedingung des Adjungirtseins in einem gegebenen superlinearen Zweig erfüllen, eine Zahl, die blos abhängig ist von den kritischen Exponenten. Die allgemeinste adjungirte Curve (mit der grösstmöglichen Anzahl von willkürlichen Constanten) ist nicht von den kritischen Exponenten allein abhängig, sondern von sämmtlichen Gliedern der Reihenentwicklungen. Ihre Form für einen superlinearen Zweig liess sich herleiten aus der der Reihenentwicklung entsprechenden rationalen Form.

§ 1.

Die zu einer Potenzreihenentwicklung mit gebrochenen Exponenten gehörige rationale Form der Gleichung zwischen den Variabeln.

Die Art der Singularität einer beliebigen algebraischen Curve, die im Ursprung eines Cartesischen Coordinatensystems einen singulären Punkt hat, ist bestimmt, sobald die Reihenentwicklungen der einen Coordinaten y nach steigenden Potenzen der anderen x mit positiven ganzen oder gebrochenen Exponenten bekannt sind. Puiseux hat gezeigt*, dass, wenn die Exponenten gebrochen sind, sich eine Anzahl ($\varDelta$) von Entwicklungen zu einem sogenannten cyklischen System von folgender Form zusammenfassen lassen:

$$y_n = a_n x^{\frac{\alpha_1}{\varDelta}} + b_n x^{\frac{\alpha_2}{\varDelta}} + \cdots,$$

wo $n = 1, 2, \ldots \varDelta$, ferner $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \ldots$, und zwar ganze Zahlen, und, wenn die Y-Achse nicht Curventangente ist, auch $\alpha_1 \gtrless \varDelta$ ist. Die einzelnen Entwicklungen unterscheiden sich nur durch die Coefficienten a_n, $b_n, \ldots$, welche von der Form sind:

$$a_n = a_1 w_n^{\alpha_1}, \quad b_n = a_2 w_n^{\alpha_2}, \ldots,$$

wo die a Constante sind, und $w_1, w_2 \ldots w_\varDelta$ die Wurzeln der binomischen Gleichung $w^\varDelta - 1 = 0$ bedeuten. Ein solches cyklisches System stellt innerhalb des Convergenzbereiches der Reihenentwicklung einen durch den Ursprung gehenden Zweig vollständig dar, und wir nennen einen solchen Zweig mit Cayley einen superlinearen Zweig von der Ordnung $\varDelta$.

Wir betrachten in Folgendem einen superlinearen Zweig für sich allein und stellen uns zunächst die Aufgabe, die rationale Form der Gleichung einer Curve herzustellen, welche im Ursprung einen durch ein cyklisches System von Reihenentwicklungen gegebenen superlinearen Zweig enthält. Das cyklische System sei folgendes:

$$1)\quad \begin{cases} y - a_1 w_1^{\alpha_1} x^{\frac{\alpha_1}{\varDelta}} - a_2 w_1^{\alpha_2} x^{\frac{\alpha_2}{\varDelta}} - \cdots - a_n w_1^{\alpha_n} x^{\frac{\alpha_n}{\varDelta}} - \cdots = 0 \\ y - a_1 w_2^{\alpha_1} x^{\frac{\alpha_1}{\varDelta}} - a_2 w_2^{\alpha_2} x^{\frac{\alpha_2}{\varDelta}} - \cdots - a_n w_2^{\alpha_n} x^{\frac{\alpha_n}{\varDelta}} - \cdots = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y - a_1 w_\varDelta^{\alpha_1} x^{\frac{\alpha_1}{\varDelta}} - a_2 w_\varDelta^{\alpha_2} x^{\frac{\alpha_2}{\varDelta}} - \cdots - a_n w_\varDelta^{\alpha_n} x^{\frac{\alpha_n}{\varDelta}} - \cdots = 0. \end{cases}$$

Multiplicirt man diese $\varDelta$ Gleichungen mit einander, so erhält man bekanntlich einen rationalen Ausdruck in x und y, der umgekehrt sich

* Puiseux, Recherches sur les fonctions algébriques; Liouville, Journal de mathématiques pures et appliquées. t. 15. 1850. Deutsch von Fischer, Halle 1861.

wieder in die gegebenen Reihenentwicklungen spalten lassen muss. Da aber im Allgemeinen die Reihenentwicklungen unendlich sind, so wären unendlich viele Glieder mit einander zu multipliciren, und so würde sich auch eine Gleichung vom Grad unendlich in x ergeben. Nun kommt es aber blos auf das Verhalten des Zweigs in der Nähe des Ursprungs an; die Reihenentwicklungen denken wir uns überhaupt für die Theorie der Curve zunächst in der Absicht hergestellt, das Verhalten der Singularität gegenüber Geschlecht, Klasse etc. der Curve zu bestimmen, d. h. um die Plücker'schen Aequivalenzzahlen, die Zahlen, welche angeben, wie viel elementare Singularitäten (Doppelpunkte, Spitzen, Doppeltangenten, Rückkehrtangenten) die gegebene Singularität enthält, zu ermitteln. Es hat nun aber H. J. S. Smith* gezeigt, dass diese Aequivalenzzahlen blos von den kritischen Exponenten abhängen. Werden die Reihenentwicklungen also bei den Gliedern mit den letzten kritischen Exponenten abgebrochen, so erhält man beim Ausmultipliciren eine endliche rationale Form, welche eine Curve darstellt, die im Ursprung dieselbe Singularität besitzt, wie der durch die Reihenentwicklungen dargestellte superlineare Zweig. Auch hat Herr Brill** gezeigt, dass, wenn es sich darum handelt, eine algebraische Bedingungsgleichung (mit endlicher Gliederzahl) zwischen x und y in der Nähe eines gewissen Werthepaares $x_0 y_0$ zu erfüllen, nur eine endliche Anzahl von Gliedern der Reihenentwicklungen nothwendig ist, um einen vorgeschriebenen Genauigkeitsgrad zu erreichen. Unsere Aufgabe wird einstweilen in der Art einzuschränken sein, dass wir verlangen: Es soll eine rationale Gleichung in x und y derart gefunden werden, dass die daraus zu erhaltenden Entwicklungen mit gegebenen Reihenentwicklungen bis zu beliebigen Gliedern übereinstimmen.

Die Reihenentwicklungen 1) mögen also abgebrochen werden nach den Gliedern mit den Coefficienten a_n, und zwar nach dem Glied mit dem letzten kritischen Exponenten (siehe § 2 am Ende). Das Product der Gleichungen 1) giebt dann, wenn die bekannten Bezeichnungen für die symmetrischen Functionen eingeführt werden:

$$\Sigma w_1^{\beta_1} = w_1^{\beta_1} + w_2^{\beta_1} + \cdots w_\Delta^{\beta_1},$$

$$\Sigma w_1^{\beta_1} w_2^{\beta_2} = w_1^{\beta_1} w_2^{\beta_2} + w_1^{\beta_1} w_3^{\beta_2} + \cdots w_{\Delta-1}^{\beta_1} w_\Delta^{\beta_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

folgenden nach Potenzen von y geordneten Ausdruck:

---

* Smith in Proceed. Lond. math. society VI. 1876. Vergl. hierzu das Referat von Nöther in d. Jahrb. d. Math. VIII. S. 433 flg.

** Brill, Ueber Singularitäten ebener Curven, Math. Ann. Bd. XVI. 1880, S. 356 flg.

$$
2)\left\{\begin{aligned}
&y^{\Delta}-y^{\Delta-1}\left(a_1\Sigma w_1^{\alpha_1}.x^{\frac{\alpha_1}{\Delta}}+\cdots a_n\Sigma w_1^{\alpha_n}.x^{\frac{\alpha_n}{\Delta}}\right)\\
&\quad+y^{\Delta-2}\Big(a_1^2\Sigma w_1^{\alpha_1}w_2^{\alpha_2}.x^{\frac{2\alpha_1}{\Delta}}+\cdots a_n^2\Sigma w_1^{\alpha_n}w_2^{\alpha_n}.x^{\frac{2\alpha_n}{\Delta}}\\
&\qquad\qquad+a_1a_2\Sigma w_1^{\alpha_1}w_2^{\alpha_2}.x^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\Delta}}+\cdots a_{n-1}a_n\Sigma w_1^{\alpha_{n-1}}w_2^{\alpha_n}x^{\frac{\alpha_{n-1}+\alpha_n}{\Delta}}\Big)\\
&\quad+\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
&\quad+\Big((-a_1)^{\Delta}\Sigma w_1^{\alpha_1}\ldots w_{\Delta}^{\alpha_1}x^{\frac{\Delta\alpha_1}{\Delta}}+\cdots(-1)^{\Delta}a_1a_2\ldots a_{\Delta}\Sigma w_1^{\alpha}w_2^{\alpha_2}\ldots\\
&\qquad\qquad\times w_{\Delta}^{\alpha_{\Delta}}x^{\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots\alpha_{\Delta}}{\Delta}}\Big)=0.
\end{aligned}\right.
$$

Die Berechnung dieser Glieder erfordert in erster Linie die Berechnung der symmetrischen Functionen der Wurzeln der binomischen Gleichung:

$$w^{\Delta}-1=0;$$

wir wollen deshalb einige Beziehungen zwischen diesen symmetrischen Functionen vorausschicken.

Es seien

$$s_1,\, s_2,\, \ldots\, s_n$$

die Potenzsummen der Wurzeln obiger binomischen Gleichung, so geben die bekannten Newton'schen Identitäten:

$$
\begin{aligned}
&s_1=0;\quad s_2=0;\quad \ldots s_{\Delta-1}=0;\quad s_{\Delta}=\Delta;\\
&s_{\Delta+1}=0;\qquad\qquad \ldots s_{2\Delta-1}=0;\quad s_{2\Delta}=\Delta\\
&\qquad\qquad\text{etc.}
\end{aligned}
$$

Allgemein: $\Sigma w_1^n=s_n=\left.\begin{matrix}0\\ \Delta\end{matrix}\right\}$ je nachdem n $\begin{matrix}\text{kein}\\ \text{ein}\end{matrix}$ Vielfaches von Δ.

Nun lässt sich aber jede symmetrische Function der Wurzeln einer Gleichung ausdrücken als Function der Potenzsummen der Wurzeln. Nennt man die Summe der Indices eines Gliedes der in den Potenzsummen ausgedrückten symmetrischen Function sein „Gewicht“, so existirt der Satz (vergl. Faà di Bruno, Binäre Formen, deutsch von Walter § 1): Die symmetrische Function von der Form $\Sigma w_1^{\alpha_1}w_2^{\alpha_2}\ldots w_r^{\alpha_r}$, in den Potenzsummen ausgedrückt, ist „isobarisch“, d. h. alle Glieder haben das gleiche Gewicht, nämlich $\alpha_1+\alpha_2+\cdots\alpha_r$. Es soll nun die symmetrische Function $\Sigma w_1^{\alpha_1}w_2^{\alpha_2}\ldots w_r^{\alpha_r}$ der binomischen Gleichung $w^{\Delta}-1=0$ in den Potenzsummen ausgedrückt werden, wobei die Summe $\alpha_1+\alpha_2+\cdots\alpha_r$ nicht durch Δ theilbar sei. Die Indices der Grössen s irgend eines Gliedes des Ausdrucks in den Potenzsummen setzen sich additiv aus Summanden der Summe $\alpha_1+\alpha_2+\cdots\alpha_r$ derart zusammen, dass die Summe der Indices des Gliedes gleich $\alpha_1+\alpha_2+\cdots\alpha_r$; da diese Summe aber nicht durch Δ theilbar ist, so muss auch mindestens einer jener Indices nicht durch Δ theilbar sein. Weil aber $s_n=0$, wenn n nicht durch Δ theilbar ist, so muss mindestens ein Factor eines jeden Gliedes des Ausdrucks in den Potenzsummen gleich Null sein, und es ergiebt sich also der Satz: Die symmetrische Function $\Sigma w_1^{\alpha_1} w_2^{\alpha_2} \dots w_r^{\alpha_r}$ der Gleichung $w^\Delta - 1 = 0$ ist gleich Null, wenn die Summe $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_r$ nicht durch Δ theilbar ist. Betrachtet man nun den Ausdruck 2) und berücksichtigt man, dass diese symmetrische Function ein Factor des Coefficienten der Potenz $x^{\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots \alpha_r}{\Delta}}$ ist, so folgt, dass der Coefficient einer jeden gebrochenen Potenz von x Null ist. Der Ausdruck 2), der durch Multiplication der Δ conjugirten Gleichungen eines cyklischen Systems erhalten wurde, ist also rational.

Es erübrigt nun blos noch, die Coefficienten der nicht verschwindenden Glieder des Ausdrucks 2) zu bestimmen. Zu diesem Zweck benützen wir die Waring'sche Formel für die symmetrischen Functionen einer beliebigen algebraischen Gleichung (vergl. Serret, Höhere Algebra, deutsch von Wertheim, 2. Aufl. S. 370 u. flg.). Es ist zu bestimmen eine symmetrische Function von der Form $\Sigma w_1^{\alpha_1} w_2^{\alpha_2} \dots w_i^{\alpha_i}$ der binomischen Gleichung $w^\Delta - 1 = 0$, wo $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_i \equiv 0 \ (mod\ \Delta)$.

Man vertheile die i Indices $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_i$ auf alle möglichen Arten in Gruppen von beliebig vielen Zahlensummanden derart, dass für jede Anordnung dieser Indices jeder Index nur einmal vorkommt und dass die Summe der Indices einer jeden Gruppe durch Δ theilbar ist. Bei irgend einer Anordnung seien die Anzahlen der Summanden, die aus je $1, 2, 3, \dots i$ Indices sich zusammensetzen, beziehungsweise $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots \lambda_i$. Die Summen der Zahlenwerthe der Indices, der bei dieser Anordnung wirklich auftretenden μ Gruppen seien $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_\mu$, wo also $\mu = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_i$ ist. Dann entspricht diese Anordnung dem Gliede:

$$(-1)^{i - \lambda_1 - \lambda_2 - \cdots - \lambda_i} \Gamma_{(2)}^{\lambda_2} \Gamma_{(3)}^{\lambda_3} \dots \Gamma_{(i)}^{\lambda_i} s_{\beta_1} s_{\beta_2} \dots s_{\beta_\mu},$$

wobei

$$\Gamma_{(m)} = 1 . 2 . 3 \dots (m-1).$$

Wegen

$$s_{\beta_1} = s_{\beta_2} = \cdots = s_{\beta_\mu} = \Delta,$$

weil ja jede der Grössen β durch Δ theilbar ist, wird obiges Glied:

$$(-1)^{i - \lambda_1 - \lambda_2 - \cdots - \lambda_i} \Gamma_{(2)}^{\lambda_2} \Gamma_{(3)}^{\lambda_3} \dots \Gamma_{(i)}^{\lambda_i} \Delta^{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_i}.$$

Ist die Vertheilung der Indices in λ_1 Gruppen zu je einem Index, λ_2 Gruppen zu je zwei Indices etc. durch Permutation der Indices auf A Arten möglich, so entspricht jeder Art ein Glied von angegebener Form. Berücksichtigt man endlich alle möglichen Gruppenvertheilungen, so erhält man die Specialisirung der Waring'schen Formel für die binomische Gleichung $w^\Delta - 1 = 0$ in folgender Form:

$$3) \quad \Sigma w_1^{\alpha_1} w_2^{\alpha_2} \dots w_i^{\alpha_i} = \Sigma (-1)^{i - \lambda_1 - \lambda_2 - \cdots - \lambda_i} A . \Gamma_{(2)}^{\lambda_2} \Gamma_{(3)}^{\lambda_3} \dots \Gamma_{(i)}^{\lambda_i} \Delta^{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda}.$$

Diese Formel gilt für den Fall, dass die Exponenten $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_i$ alle ungleich sind. Sind aber μ_1 Exponenten je gleich α_1, μ_2 Exponenten je gleich α_2 etc., so hat man die angegebene Rechnung durchzuführen, wie wenn die Exponenten ungleich wären, und die rechte Seite obiger Formel noch mit

$$\Gamma_{(\mu_1+1)} \cdot \Gamma_{(\mu_2+1)} \cdots$$

zu dividiren.

Für den speciellen Fall, dass die Indices $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_i$ so beschaffen sind, dass blos ihre Summe durch Δ theilbar ist, und keine Vertheilung dieser Summe in Einzelsummen derart, dass jede Einzelsumme durch Δ theilbar ist, möglich ist, vereinfacht sich obige Formel wesentlich; denn es ist dann blos eine Gruppenvertheilung möglich, nämlich die, dass sich die Indices in eine Summe von i-Summanden anordnen lassen, so dass also

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots \lambda_{i-1} = 0; \quad \lambda_i = 1.$$

Sind wiederum μ_1 Indices gleich α_1, μ_2 Indices gleich α_2 etc., so erhält man:

$$4) \qquad \Sigma w_1^{\alpha_1} w_2^{\alpha_1} \ldots w_i^{\alpha_i} = \frac{(-1)^{i-1}\Gamma_{(i)}}{\Gamma_{(\mu_1+1)} \cdot \Gamma_{(\mu_2+1)} \cdots} \cdot \Delta.$$

Nach den hier aufgestellten Formeln für die symmetrischen Functionen ist es nun möglich, sämmtliche Glieder der Gleichung 2) zu berechnen. Man wird sich bei der Aufstellung dieser Gleichung von vornherein auf die nicht verschwindenden Glieder beschränken, bildet also sämmtliche Gruppen der Zähler der Exponenten der Reihenentwicklung, deren Summen durch Δ theilbar sind, wobei zu einer Gruppe höchstens Δ Exponenten verwendet werden dürfen, jeder Exponent aber beliebig oft wiederholt werden darf. Ist z. B. die Summe der Zähler $\alpha_r + \alpha_s + \cdots \alpha_v$ von m Exponenten durch Δ theilbar, so heisst ein Glied des Productes:

$$(-1)^m a_r a_s \ldots a_v y^{\Delta - m} x^{\frac{\alpha_r + \alpha_s + \ldots \alpha_v}{\Delta}} \Sigma w_1^{\alpha_r} w_2^{\alpha_s} \ldots w_m^{\alpha_v}.$$

Das Aufsuchen der Gruppen von Exponenten, bei welchem die Summe der Zähler durch Δ theilbar ist, wird endlich noch wesentlich erleichtert, wenn statt der Zähler der Exponenten die Moduln derselben nach der Zahl Δ genommen werden, und für diese letzteren diejenigen Gruppen gebildet werden, welche durch Δ theilbar sind, weil dann die numerischen Rechnungen mit kleineren Zahlen ausgeführt werden können.

Beispiel: Die Reihenentwicklung

$$y = a x^{\frac{4}{3}} + b x^{\frac{11}{6}}$$

soll in rationale Form übergeführt werden. Das cyklische System der sechs conjugirten Gleichungen heisst:

$$y - a\,w_n^8\,x^{\frac{8}{6}} - b\,w_n^{11}\,x^{\frac{11}{6}} = 0,$$

wo $n = 1, 2 \ldots 6$. Die Moduln von 8 und 11 nach der Zahl 6 sind 2 und 5. Es sind die Combinationen der Zahlen 2 und 5, die durch 6 theilbar sind, folgende:

$$3.2;\quad 6.2;\quad 6.5;\quad 1.2 + 2.5;\quad 2.2 + 4.5;\quad 4.2 + 2.5.$$

Die entsprechenden Combinationen der Zahlen 8 und 11 heissen dann

$$3.8;\quad 6.8;\quad 6.11;\quad 1.8 + 2.11;\quad 2.8 + 4.11;\quad 4.8 + 2.11,$$

und die rationale Form hat folgende Glieder:

$$\begin{aligned} y^6 &+ (-1)^3 a^3 y^3 x^{\frac{3.8}{6}} \Sigma w_1{}^8 w_2{}^8 w_3{}^8 + (-1)^3 a b^2 y^3 x^{\frac{8+2.11}{6}} \Sigma w_1{}^8 w_2{}^{11} w_3{}^{11} \\ &+ (-1)^6 a^6 x^{\frac{6.8}{6}} \Sigma w_1{}^8 \ldots w_6{}^8 + (-1)^6 b^6 x^{\frac{6.11}{6}} \Sigma w_1{}^{11} \ldots w_6{}^{11} \\ &+ (-1)^6 a^2 b^4 x^{\frac{2.8+4.11}{6}} \Sigma w_1{}^8 w_2{}^8 w_3{}^{11} \ldots w_6{}^{11} \\ &+ (-1)^6 a^4 b^2 x^{\frac{4.8+2.11}{6}} \Sigma w_1{}^8 \ldots w_4{}^8 w_5{}^{11} w_6{}^{11} = 0. \end{aligned}$$

Nach Formel 4) erhält man:

$$\Sigma w_1{}^8 w_2{}^8 w_3{}^8 = \frac{(-1)^2 2!}{3!}\, 6 = 2.$$

Ebenso

$$\Sigma w_1{}^8 w_2{}^{11} w_3{}^{11} = 6;\quad \Sigma w_1{}^{11} \ldots w_6{}^{11} = -1.$$

Zur Berechnung von $\Sigma w_1{}^8 w_2{}^8 w_3{}^{11} \ldots w_6{}^{11}$ hat man zuerst zu bestimmen, auf wieviel Arten die Exponenten in Gruppen angeordnet werden können, deren Summen durch 6 theilbar sind. Es sind die Exponenten so zu behandeln, wie wenn sie verschieden wären, und sie sollen deshalb durch Indices unterschieden werden. Die Summe $8_1 + 8_2 + 11_1 + 11_2 + 11_3 + 11_4$ lässt sich dann in folgende Summe spalten, die je wieder durch 6 theilbar sind:

1) $$8_1 + 8_2 + 11_1 + 11_2 + 11_3 + 11_4,$$

d. h. $$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots \lambda_5 = 0;\quad \lambda_6 = 1;$$

Anzahl der Permutationen $A = 1$.

2) $$8_1 + 11_1 + 11_2 \quad \text{und} \quad 8_2 + 11_3 + 11_4,$$

d. h. $$\lambda_1 = 0;\quad \lambda_2 = 0;\quad \lambda_3 = 2;\quad \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0;$$

Anzahl der Permutationen $A = 6$; denn es existiren noch folgende Zusammenstellungen:

$$8_1 + 11_1 + 11_3 \quad \text{und} \quad 8_2 + 11_2 + 11_4$$
$$8_1 + 11_1 + 11_4 \quad \text{und} \quad 8_2 + 11_2 + 11_3$$

und noch drei weitere durch Vertauschung von 8_1 und 8_2.

Die Formel 3) giebt also, wenn noch berücksichtigt wird, dass der Exponent 8 zweimal, der Exponent 11 viermal vorkommt:

$$\Sigma w_1{}^8 w_2{}^8 w_3{}^{11} \dots w_6{}^{11} = \frac{(-1)^{6-1} \Gamma^1_{(6)} . 6 + 6(-1)^{6-2} \Gamma^2_{(3)} . 6^2}{1.2.1.2.3.4} = 3.$$

Etwas einfacher lässt sich diese Function auch noch auf folgende Weise berechnen:

$$\Sigma w_1{}^8 w_2{}^8 w_3{}^{11} \dots w_6{}^{11} = (w_1 \dots w_6)^8 \Sigma w_1{}^3 \dots w_4{}^3 = \Sigma w_1{}^3 \dots w_4{}^3 = 3.$$

In analoger Weise erhält man·

$$\Sigma w_1{}^8 \dots w_6{}^8 = 1; \quad \Sigma w_1{}^8 \dots w_4{}^8 w_5{}^{11} w_6{}^{11} = -3.$$

Die rationale Form der Reihenentwicklung wird demnach:

$$y^6 - 2a^3y^3x^4 - 6ab^2y^3x^5 + a^6x^8 - b^6x^{11} + 3a^2b^4x^{10} - 3a^4b^2x^9 = 0.$$

§ 2.

Eigenschaften der einer Reihenentwicklung entsprechenden rationalen Form.

Die Reihenentwicklung

$$y = a_1 x^{\frac{\alpha_1}{\Delta}} + a_2 x^{\frac{\alpha_2}{\Delta}} + \cdots$$

sei nach der vorhin angegebenen Methode in rationale Form übergeführt, und es sollen nunmehr solche Eigenschaften der letzteren gesucht werden, die aus den Beziehungen der Grössen $\Delta, \alpha_1, \alpha_2 \dots$ zu einander abgelesen werden können.

Es werde vorerst angenommen, α_1 und Δ haben den gemeinschaftlichen Factor Δ_1; dagegen sollen α_2 und Δ keinen gemeinschaftlichen Factor haben. Setzt man daher:

$$\frac{\alpha_1}{\Delta} = \frac{\Delta_1 \beta_1}{\Delta_1 \Delta'} = \frac{\beta_1}{\Delta'},$$

so ist nach der früheren Annahme $\beta_1 > \Delta'$ oder $\beta_1 = \Delta' = 1$, ferner $\beta_1 \Delta_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \dots$, und die Δ conjugirten Gleichungen des cyklischen Systems, die mit einander zu multipliciren sind, um den rationalen Ausdruck zu erhalten, sind dargestellt durch:

5) $$y - a_1 w_n^{\Delta_1 \beta_1} x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}} - a_2 w_n^{\alpha_2} x^{\frac{\alpha_2}{\Delta}} - \cdots = 0,$$

wo $n = 1, 2, \dots \Delta$ und wo $w_1, w_2, \dots w_\Delta$ die Wurzeln der Gleichung $w^\Delta - 1 = 0$ sind. Die Glieder des Products, die blos je von den zwei ersten Gliedern der Gleichungen 5) herrühren, lassen sich zu einer $\Delta_1$ten Potenz zusammenfassen; denn wir können zeigen, dass von den Δ Factoren dieses Products:

$$6) \qquad \prod_{n=1}^{n=\varDelta}\left(y - a_1 w_n^{\varDelta_1 \beta_1} x^{\frac{\beta_1}{\varDelta'}}\right)$$

je $\varDelta_1$ einander gleich sind. Ist w eine primitive Wurzel der Gleichung $w^{\varDelta} - 1 = 0$, so lassen sich die Wurzeln $w_1, w_2 \ldots w_{\varDelta}$ darstellen durch:

$$w^1, w^2 \ldots w^{\varDelta},$$

und die Potenzen

$$w_1^{\varDelta_1 \beta_1}, w_2^{\varDelta_1 \beta_1}, \ldots w_{\varDelta}^{\varDelta_1 \beta_1}$$

werden also

$$w^{1 \cdot \varDelta_1 \beta_1}, w^{2 \cdot \varDelta_1 \beta_1}, \ldots w^{\varDelta \cdot \varDelta_1 \beta_1}.$$

Die Exponenten dieser $\varDelta$ Potenzen lassen sich, da $\varDelta = \varDelta_1 \varDelta'$, in folgende $\varDelta_1$ Reihen zusammenstellen:

$$\begin{array}{l}
\beta_1 . \varDelta_1, \quad \beta_1 . 2\varDelta_1, \quad \beta_1 . 3\varDelta_1, \ldots \beta_1 . \varDelta' \varDelta_1 \\
\beta_1(\varDelta_1 + \varDelta'\varDelta_1), \quad \beta_1(2\varDelta_1 + \varDelta'\varDelta_1), \ldots \beta_1 . 2\varDelta'\varDelta_1 \\
\beta_1(\varDelta_1 + 2\varDelta'\varDelta_1), \quad \beta_1(2\varDelta_1 + 2\varDelta'\varDelta_1), \ldots \beta_1 . 3\varDelta'\varDelta_1 \\
\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
\beta_1(\varDelta_1 + [\varDelta_1 - 1]\varDelta'\varDelta_1), \quad \beta_1(2\varDelta_1 + [\varDelta_1 - 1]\varDelta'\varDelta_1) \ldots \beta_1 . \varDelta_1 \varDelta' \varDelta_1.
\end{array}$$

Da aber
$$w^{\varDelta'\varDelta_1} = w^{\varDelta} = 1, \quad w^{m \cdot \varDelta'\varDelta_1} = 1,$$

so folgt, dass die Reihen von Potenzen, welche obigen $\varDelta_1$ Reihen von Exponenten entsprechen, einander gleich sind und folgendermassen lauten:

$$w^{\beta_1 \varDelta_1}, \quad w^{2\beta_1 \varDelta_1}, \ldots w^{\varDelta' \beta_1 \varDelta_1}$$

und dass in dem Product 6) je $\varDelta_1$ Factoren einander gleich sind. Dieses Product wird dann:

$$\left\{\left(y - a_1 w^{\beta_1 \varDelta_1} x^{\frac{\beta_1}{\varDelta'}}\right)\left(y - a_1 w^{2\beta_1 \varDelta_1} x^{\frac{\beta_1}{\varDelta'}}\right) \ldots \left(y - a_1 w^{\varDelta' \beta_1 \varDelta_1} x^{\frac{\beta_1}{\varDelta'}}\right)\right\}^{\varDelta_1}.$$

Da w eine primitive Wurzel der Gleichung $w^{\varDelta} - 1 = 0$, so ist $w^{\varDelta_1}$ eine primitive Wurzel der Gleichung $w^{\varDelta'} - 1 = 0$, weil $\varDelta = \varDelta'\varDelta_1$, und es sind also

$$w^{1 \cdot \varDelta_1}, \quad w^{2 \cdot \varDelta_1}, \ldots w^{\varDelta' \varDelta_1}$$

die Wurzeln der Gleichung $x^{\varDelta'} - 1 = 0$. Bezeichnet man diese mit

$$v_1, \ v_2, \ldots v_{\varDelta'},$$

so nimmt obiges Product die Form an:

$$\left\{\left(y - a_1 v_1^{\beta_1} x^{\frac{\beta_1}{\varDelta'}}\right)\left(y - a_1 v_2^{\beta_1} x^{\frac{\beta_1}{\varDelta'}}\right) \ldots \left(y - a_1 v_{\varDelta'}^{\beta_1} x^{\frac{\beta_1}{\varDelta'}}\right)\right\}^{\varDelta_1},$$

und der in der Klammer $\{\ldots\}$ stehende Ausdruck ist der der Reihenentwicklung

$$y - a_1 x^{\frac{\beta_1}{\varDelta'}} = 0$$

entsprechende rationale Ausdruck, also

$$y^{\varDelta'} - a_1^{\varDelta'} x^{\beta_1};$$

das Product 6) wird demnach $(y^{\varDelta'} - a_1^{\varDelta'} x^{\beta_1})^{\varDelta_1}$, und das Product der conjugirten Gleichungen 5) muss also die Form haben:

$$7) \qquad (y^{\Delta'} - a_1 x^{\beta_1})^{\Delta_1} + \psi(xy) = 0,$$

wo jedes Glied von $\psi(xy)$ wesentlich abhängig ist von den Gliedern mit den Exponenten $\frac{\alpha_2}{\Delta}, \frac{\alpha_3}{\Delta}, \cdots$ Der Grad der Function $\psi(xy)$ in y kann nicht bis zu Δ ansteigen; denn die rationale Form der Reihenentwicklung enthält blos ein Glied mit y^{Δ}, die anderen sind von niederem Grad in y; der Grad von $\psi(xy)$ in x ist davon abhängig, wieviel Glieder der Reihenentwicklung beim Rationalmachen berücksichtigt wurden. Hat das letzte Glied der Reihenentwicklung den Exponenten $\frac{\alpha_n}{\Delta}$, so ist der Grad von $\psi(xy)$ in x gleich α_n; denn die höchste Potenz in x wird erhalten, wenn in den Gleichungen 5) je die letzten Glieder mit einander multiplicirt werden. Endlich tritt in $\psi(xy)$ eine Potenz von x als Factor heraus, da es blos das einzige Glied y^{Δ} geben kann, welches kein x enthält.

Es werde nun angenommen, dass auch bei den Exponenten

$$\frac{\alpha_2}{\Delta}, \frac{a_3}{\Delta}, \ldots \frac{\alpha_m}{\Delta}$$

Zähler und Nenner alle den gemeinschaftlichen Factor Δ_1 haben, und in der einfachsten Form sollen diese Exponenten sein:

$$\frac{\beta_2}{\Delta'}, \frac{\beta_3}{\Delta'}, \ldots \frac{\beta_m}{\Delta'}.$$

Aus dem Product der Δ conjugirten Gleichungen 5) scheiden wir wie vorhin einen Theil ab, indem wir mit dem Glied $a_m x^{\frac{\beta_m}{\Delta'}}$ abbrechen und folgendes Product betrachten:

$$\prod_{n=1}^{n=\Delta}\left(y - b_1 w_n^{\beta_1 \Delta_1} x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}} - \ldots - b_m w_n^{\beta_m \Delta_1} x^{\frac{\beta_m}{\Delta'}}\right),$$

wobei wir $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \ldots a_m = b_m$ setzen.

Nach dem Vorgang von früher lässt sich nun leicht einsehen, dass jede der Reihen

$$\begin{array}{l} w_1^{\beta_1 \Delta_1}, \quad w_2^{\beta_1 \Delta_1} \ldots w_{\Delta}^{\beta_1 \Delta_1} \\ w_1^{\beta_2 \Delta_1}, \quad w_2^{\beta_2 \Delta_1} \ldots w_{\Delta}^{\beta_2 \Delta_1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ w_1^{\beta_m \Delta_1}, \quad w_2^{\beta_m \Delta_1} \ldots w_{\Delta}^{\beta_m \Delta_1} \end{array}$$

in Δ_1 gleiche Reihen getheilt werden kann, und wir folgern daraus, dass in dem obigen Product je Δ_1 Factoren einander gleich sind. Dieses Product hat dann die Form:

$$\left\{\prod_{n=1}^{n=\Delta'}\left(y - b_1 v_n^{\beta_1} x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}} - \dots - b_m v_n^{\beta_m} x^{\frac{\beta_m}{\Delta'}}\right)\right\}^{\Delta_1},$$

wo $v_1, v_2 \dots v_{\Delta'}$ die Wurzeln der Gleichung $v^{\Delta'} - 1 = 0$ sind. Der Ausdruck in der Klammer $\{\dots\}$ ist die rationale Form der abgebrochenen Reihe:

$$\text{7a)} \qquad y - b_1 x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}} - \dots - b_m x^{\frac{\beta_m}{\Delta'}} = 0.$$

Obige ganze rationale Function werde bezeichnet mit

$$y^{\Delta'} + f_1(xy),$$

wo der Grad von $f_1(xy)$ in Bezug auf y kleiner sein muss als Δ', in Bezug auf x gleich β_m ist, und wo bei der Function $f_1(xy)$ eine Potenz von x als Factor heraustritt. Die rationale Form der ganzen Reihenentwicklung ist also:

$$\text{8)} \qquad [y^{\Delta'} + f_1(xy)]^{\Delta_1} + \psi_1(xy) = 0,$$

wo über $\psi_1(xy)$ Analoges zu sagen ist wie über $\psi(xy)$. Die Function $y^{\Delta'} + f_1(xy)$ liefert umgekehrt die abbrechende Reihenentwicklung 7a).

Bei den auf den Exponenten $\frac{\beta_m}{\Delta'}$ folgenden Exponenten

$$\frac{\alpha_{m+1}}{\Delta}, \quad \frac{\alpha_{m+2}}{\Delta}, \dots \frac{\alpha_{m+n}}{\Delta}$$

sollen je Zähler und Nenner den gemeinschaftlichen Factor Δ_2 haben, wo Δ_2 Factor von Δ_1. Wir setzen

$$\Delta_1 = \Delta'' \Delta_2, \quad \text{also} \quad \Delta = \Delta' \Delta'' \Delta_2$$

und

$$\frac{\alpha_{m+1}}{\Delta} = \frac{\gamma_1 \Delta_2}{\Delta' \Delta'' \Delta_2} = \frac{\gamma_1}{\Delta' \Delta''}$$

$$\frac{\alpha_{m+2}}{\Delta} = \frac{\gamma_2 \Delta_2}{\Delta' \Delta'' \Delta_2} = \frac{\gamma_2}{\Delta' \Delta''}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\alpha_{m+n}}{\Delta} = \frac{\gamma_n \Delta_2}{\Delta' \Delta'' \Delta_2} = \frac{\gamma_n}{\Delta' \Delta''}$$

und bezeichnen die Coefficienten der Potenzen mit diesen Exponenten mit $c_1, c_2 \dots c_n$, so dass die Reihenentwicklung von der Form ist:

$$\text{9)} \; y = b_1 x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}} + \dots b_m x^{\frac{\beta_m}{\Delta'}} + c_1 x^{\frac{\gamma_1}{\Delta'\Delta''}} + \dots c_n x^{\frac{\gamma_n}{\Delta'\Delta''}} + a_{m+n+1} x^{\frac{\alpha_{m+n+1}}{\Delta}} + \dots$$

Da nun bei sämmtlichen Exponenten bis $\frac{\gamma_n}{\Delta'\Delta''}$ einschliesslich je Zähler und Nenner den Factor Δ_2 gemeinschaftlich haben, so kann aus der rationalen Form der Reihenentwicklung 9) eine Δ_2^{te} Potenz abgeschieden werden, deren Grundzahl die rationale Form der Reihenentwicklung 9) bis zum Glied mit dem Exponenten $\frac{\gamma_n}{\Delta'\Delta''}$ einschliesslich ist; diese Form ist aber nach Vorhergehendem

$$[y^{\Delta'} + f_1(xy)]^{\Delta''} + f_2(xy),$$

wo der Grad von $f_2(xy)$ in y niedriger ist als $\Delta'\Delta''$, der Grad in x gleich γ_n ist. Bricht man also die Reihe 9) bei irgend einem Gliede mit dem Exponenten $\frac{\alpha_r}{\Delta}$ ab, so lautet die rationale Form der Reihenentwicklung:

$$\{[y^{\Delta'} + f_1(xy)]^{\Delta''} + f_2(xy)\}^{\Delta_3} + \varphi_2(xy) = 0,$$

wo $\varphi_2(xy)$ vom Grad α_r in x.

Fährt man in dieser Weise fort, so gelangt man zu folgender Verallgemeinerung: Eine Reihenentwicklung sei von der Form:

$$\text{10)}\quad \begin{cases} y = b_1 x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}} + \cdots b_m x^{\frac{\beta_m}{\Delta'}} + c_1 x^{\frac{\gamma_1}{\Delta'\Delta''}} + \cdots c_n x^{\frac{\gamma_n}{\Delta'\Delta''}} + d_1 x^{\frac{\delta_1}{\Delta'\Delta''\Delta'''}} + \cdots \\ \qquad + m_1 x^{\frac{\mu_1}{\Delta'\Delta''\ldots\Delta^{(r)}}} + m_2 x^{\frac{\mu_2}{\Delta}} + \cdots \end{cases}$$

wo $\Delta = \Delta'\Delta''\ldots\Delta^{(r)}$.

Nach der Bezeichnung von *Smith* (a. a. O.) nennen wir *kritische Exponenten* diejenigen Exponenten, bei welchen zum ersten Mal im Nenner ein neuer Factor auftritt, so dass also in obiger Reihe

$$\frac{\beta_1}{\Delta'},\ \frac{\gamma_1}{\Delta'\Delta''},\ \frac{\delta_1}{\Delta'\Delta''\Delta'''},\ldots \frac{\mu_1}{\Delta}$$

die kritischen Exponenten sind. Bricht man die Reihe 10) bei irgend einem Glied $m_t x^{\frac{\mu_t}{\Delta}}$ ab, so *liefert die Multiplication der Δ conjugirten Gleichungen, welche aus der auf Null gebrachten Gleichung 10) erhalten werden, folgende rationale ganze Function in x und y*:

$$\text{11)}\quad \{([y^{\Delta'} + f_1(xy)]^{\Delta'} + f_2(xy))^{\Delta'''} + \cdots f_{r-1}(xy)\}^{\Delta^{(r)}} + f_r(xy) = 0.$$

Die Functionen $f_1(xy)$, $f_2(xy), \ldots f_r(xy)$ haben sämmtlich ganze Potenzen von x als Factoren, sie sind in x resp. von den Graden β_m, $\gamma_n, \ldots \mu_t$; ihre Grade in y sind niedriger als resp. Δ', $\Delta'\Delta''$, $\ldots (\Delta'\Delta''\ldots\Delta^{(r)})$. Die Klammerausdrücke sind so beschaffen, dass sie je für y abbrechende Reihenentwicklungen geben, welche aus 10) erhalten werden, wenn diese Reihen je vor den Gliedern mit den kritischen Exponenten abgebrochen werden.

Beispiel. Die früher (§ 1) entwickelte rationale Form der Reihenentwicklung

$$y = a x^{\frac{4}{3}} + b x^{\frac{11}{6}}$$

lässt sich in folgender Weise schreiben:

$$(y^3 - a^3 x^4)^2 - 6\,a\,b^2 y^3 x^5 - 3\,a^4 b^2 x^9 + 3\,a^2 b^4 x^{10} - b^6 x^{11} = 0.$$

§ 3.

Zur Cramer'schen Methode der Reihenentwicklung algebraischer Functionen einer Variabeln.

Zum Zwecke der näheren Untersuchung der Eigenschaften der Functionen $f_1(xy)$, $f_2(xy)\ldots$ des Ausdruckes 11) wollen wir nunmehr umgekehrt diesen rationalen Ausdruck wieder in Potenzreihen nach gebrochenen Potenzen von x entwickeln. Hierzu wenden wir eine Methode an, welche im Wesentlichen von Cramer herrührt.* Diese Methode beruht auf einer fortgesetzten Anwendung des Newton'schen Parallelogramms. Dabei werden die sämmtlichen Parallelogramme, die zur gliedweisen Berechnung der Reihe in x nothwendig sind, mit ihren Achsen auf einander gelegt. Es mögen die Glieder der gegebenen rationalen Gleichung $f(xy)=0$ in das Newton'sche Parallelogramm eingetragen werden, d. h. irgend ein Glied $Mx^m y^n$ wird graphisch dargestellt in einem Coordinatensystem XY durch einen Punkt mit den Coordinaten m und n; dann werden die dem Ursprung zunächst gelegenen Punkte derart durch gerade Linien verbunden, dass sämmtliche Punkte des Parallelogramms auf der Seite einer jeden Geraden liegen, auf welcher der Ursprung nicht liegt. Wir bezeichnen in Folgendem eine solche Gerade als Gerade niederster Dimension; sämmtliche Gerade dieser Art bilden einen gebrochenen Zug. Die Glieder von $f(xy)$, die auf einer Geraden dieses Zugs liegen, liefern die Anfangsglieder von einem oder mehreren cyklischen Systemen von Reihenentwicklungen.**

Sei AB eine Gerade niederster Dimension (Fig. 1), und geben die Glieder dieser Geraden, deren Aggregat gleich Null gesetzt wurde, das Anfangsglied der Entwicklung

$$y = ax^n,$$

wo n ganz oder gebrochen, so wird der Neigungswinkel α von AB gegen die X-Achse ausgedrückt durch:

$$tg\,\alpha = \frac{1}{n}\cdot$$

Um das nächste Glied der Entwicklung zu erhalten, setze man

$$y = u + ax^n$$

in $f(xy)=0$ ein und erhält eine Function in u und x, deren Glieder wieder in ein Newton'sches Parallelogramm eingetragen werden, dessen X-Achse mit der X-Achse und dessen U-Achse mit der Y-Achse des vorigen Parallelogramms zusammenfallen. Irgend ein Glied $Mx^r y^s$ von

* Cramer, Introduction à l'analyse des lignes courbes. 1750.

** Vergl. Puiseux a. a. O.

$f(xy)$, das dem Punkte P_1 des Parallelogramms entspricht, transformirt sich in die Glieder:

$$Mx^r(u+ax^n)^s = Mx^r u^s + Ma.\binom{r}{1}x^{r+n}.u^{s-1}+\cdots Ma^s x^{r+sn}.$$

Diese Glieder liegen auf den Schnittpunkten der Parallelen P_1D zu AB mit den Parallelen zur X-Achse in den Abständen $s, s-1, \ldots 1, 0$. Die Coefficienten können leicht bestimmt werden. Transformirt man derart insbesondere die Glieder auf der Geraden niederster Dimension AB, so hat Cramer gezeigt, dass, wenn diese Glieder niederster Dimension $y - ax^n$ als p-fachen Factor haben, die transformirten Glieder auf die Schnittpunkte fallen von AB mit den Parallelen zur Achse im Abstand $p, p+1, \ldots$, bis zur Parallelen, die durch A geht.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass die Glieder von AB $y - ax^n$ als einfachen Factor enthalten. Dann entspricht das transformirte Glied mit der niedersten Potenz von u dem Punkte C, dem Schnittpunkt der Parallelen im Abstand 1 zur X-Achse mit AB. Sind nun $B_1, D, E, F \ldots$ die Schnittpunkte der X-Achse mit den Parallelen zu AB durch die sämmtlichen Punkte des ersten Newton'schen Parallelogramms, so setzt sich nach Cramer die Reihenentwicklung fort nach Potenzen von x^h, wo h das grösste gemeinschaftliche Vielfache der Maasszahlen der Strecken $B_1D, B_1E, B_1F\ldots$ ist; die Zahl h hat den gleichen Nenner wie n, oder sie hat blos Factoren desselben als Nenner.

Dasselbe Resultat ergiebt eine andere von Newton angegebene und von Mac Laurin weiter ausgeführte Methode der Reihenentwicklung.* Die auf algebraischem Wege mit Hilfe der Descartes'schen Coefficientenvergleichung abgeleitete Regel lautet dort folgendermassen: Sei Ax^l das Glied mit dem niedersten Exponenten in x allein, die übrigen Glieder seien von der Form By^kx^e, so suche man denjenigen Werth $n = \frac{l-e}{k}$, welcher der grösste ist. Das Eintragen der Glieder in das Newton'sche Parallelogramm zeigt, da $\frac{1}{n} = tg\,\alpha$, dass die Verbindungslinie der den Gliedern y^kx^e und x^l entsprechenden Punkte eine Seite des Zugs niederster Dimension ist, wenn n seinen grössten, d. h. α seinen kleinsten Werth erreicht. Nun bildet Mac Laurin, wenn die Glieder der Function $Ax^l, By^hx^e, Cy^sx^m, Dy^kx^f\ldots$ sind, die Differenzen der Grössen $e+nh$, $m+ns$, $f+nk\ldots$ und findet r als das grösste gemeinschaftliche Vielfache dieser Differenzen. Die Reihe hat dann die Form:

$$y = ax^n + bx^{n+r} + cx^{n+2r} + \cdots$$

Bedenkt man, dass die Grössen $e+nh$, $m+ns$, $f+nk\ldots$ nichts Anderes sind als die Entfernungen des Ursprungs von den Schnittpunkten

* Mac Laurin, A treatise on Algebra, Ch. X.

der X-Achse mit den Parallelen zur Geraden niederster Dimension durch die Punkte des ersten Parallelogramms, so leuchtet die Uebereinstimmung der Cramer'schen Regel mit der Mac Laurin's unmittelbar ein.

Es erübrigt noch, die von Puiseux angegebene Regel aus der eben dargelegten Methode von Cramer abzuleiten. Es sei das Anfangsglied der Entwicklung $ax^n = ax^{\frac{\delta}{\Delta}}$, wo δ und Δ ganze Zahlen sind, und sei irgend ein Glied auf der Geraden niederster Dimension AB (Fig. 1) von der Form $x^p y^q$, so ist, wenn B_1 der Schnitt von AB mit der X-Achse:

$$OB_1 = p + \frac{\delta}{\Delta} \cdot q \ldots$$

Die Parallele mit AB durch den irgend einem anderen Glied $x^r y^s$ entsprechenden Punkt P_1 schneide die X-Achse in D, so ist

$$OD = r + \frac{\delta}{\Delta} \cdot s,$$

woraus $OD - OB_1 = r - p + (s - q) \cdot \frac{\delta}{\Delta}$. Sämmtliche Differenzen dieser Form haben jedenfalls $\frac{1}{\Delta}$ als gemeinschaftliches Vielfaches; es setzt sich also die Reihe fort nach Potenzen von $x^{\frac{1}{\Delta}}$, wie Puiseux angiebt. Möglicherweise aber steigt die Entwicklung an nach Potenzen, deren Exponenten Vielfache von $\frac{1}{\Delta}$ sind (nämlich das grösste gemeinschaftliche Vielfache oben besagter Differenzen), was nur nach der Cramer'schen Regel erhalten werden kann.

Ist das Anfangsglied einer Entwicklung $y = b_1 x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}}$, und liefern die Glieder niederster Dimension auf AB (Fig. 1) dasselbe als Δ_1-fachen Factor, so gehen diese Glieder bei der Transformation

$$y = u_1 + b_1 x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}}$$

über in Glieder in x und u_1, die so beschaffen sind, dass das Glied mit der niedersten Potenz in u_1 auf Punkt A' der Geraden AB kommt, wobei Δ_1 Ordinate von A' ist. Die Gerade niederster Dimension in u und x geht jedenfalls von A' aus; enthalten die Glieder dieser Geraden keinen mehrfachen Factor, und ist das grösste gemeinschaftliche Vielfache der Strecken B_1D, B_1E, B_1F von der Form $\frac{\varepsilon}{\Delta'}$, wo ε und Δ' ganze Zahlen, so kann man unschwer analog den Untersuchungen Cramer's finden, dass die Reihenentwicklung fortschreitet nach Potenzen von $x^{\frac{\varepsilon}{\Delta'\Delta_1}}$. Auch in diesem Falle findet Uebereinstimmung statt mit der Methode Mac Laurin's.

Der allgemeine Fall jedoch, zu dem wir jetzt übergehen, lässt sich nach der Methode von Mac Laurin nicht behandeln.

Es mögen auch die Glieder niederster Dimension in u_1 und x einen Δ_1-fachen Factor haben. Diese Glieder müssen von der Form sein:

$$P.\left(u_1 - b_2 x^{\frac{\beta_2}{\Delta'}}\right)^{\Delta_1},$$

wo P eine Potenz in x, multiplicirt mit einer Constanten, bedeutet. Die entsprechende Gerade muss von A' ausgehen; sie sei $A'B_2$ (Fig. 2). Das zweite Glied der Reihenentwicklung heisst dann $b_2 x^{\frac{\beta_2}{\Delta'}}$. Man setzt dann weiter

$$u_1 = u_2 + b_2 x^{\frac{\beta_2}{\Delta'}}$$

und bestimmt wiederum die Gerade niederster Dimension, so geht diese wieder von A' aus nach einem Punkte B_3, wenn die Glieder sich nochmals zu einer Δ_1^{ten} Potenz zusammenfassen lassen, etc. Solange die Glieder niederster Dimension Δ_1^{te} Potenzen sind, haben die Potenzexponenten der Reihenentwicklung den Nenner Δ' und die Geraden niederster Dimension gehen von A' aus.

Lassen sich bei den auf einander folgenden Transformationen die Glieder niederster Dimension zum ersten Mal nicht mehr zu einer Δ_1^{ten} Potenz, sondern nur zu einer Δ_2^{ten} Potenz zusammenfassen, wo $\Delta_1 = \Delta''.\Delta_2$, so müssen diese Glieder von der Form sein:

$$P.\left(v_1^{\Delta''} - c_1^{\Delta''} x^{\frac{\gamma_1}{\Delta'}}\right)^{\Delta_2};$$

sie liegen auf der Geraden $A'C_1$ und geben das Glied $c_1 x^{\frac{\gamma_1}{\Delta'\Delta''}}$ der Reihenentwicklung, wo also $\frac{\gamma_1}{\Delta'\Delta''}$ kritischer Exponent ist. Geben bei einer Anzahl der folgenden Transformationen die Glieder niederster Dimension wiederum Δ_2^{te} Potenzen, so sind die entsprechenden Geraden $A''C_2$, $A''C_3 \ldots$, wobei A'' auf $A'C_1$ liegt und die Ordinate Δ_2 hat; die entsprechenden Glieder der Reihenentwicklung haben $\Delta'\Delta''$ als Nenner der Potenzexponenten. Der nächste kritische Exponent $\frac{\delta_1}{\Delta'\Delta''\Delta'''}$ entspreche der Geraden $A''D_1$, so entsprechen die diesem Exponenten folgenden nicht kritischen Exponenten Geraden von A''' aus, wo A''' auf $A''D_1$ liegt und die Ordinate Δ_3 hat, wobei $\Delta = \Delta'\Delta''\Delta'''.\Delta_3$ etc. Die Gerade, die dem letzten kritischen Exponenten $\frac{\mu_1}{\Delta'\Delta''\ldots\Delta^{(r)}}$ entspricht, sei $A^{(r-1)}M_1$, wobei die Ordinate von $A^{(r-1)}$ gleich $\Delta^{(r)} = \Delta_{r-1}$. Die Glieder niederster Dimension lassen sich nun zu keiner Potenz mehr zusammenfassen; sie sind von der Form:

$$R\left[z_1^{\Delta^{(r)}} - m_1^{\Delta^{(r)}} x^{\frac{\mu_1}{\Delta'\Delta''\ldots\Delta^{(r-1)}}}\right].$$

Zieht man durch sämmtliche Punkte, die der transformirten Function in z_1 und x entsprechen, Parallelen zu $A^{(r-1)}M_1$, und ist das grösste gemeinschaftliche Vielfache der Entfernungen des Punktes M_1 von den Schnittpunkten dieser Parallelen mit der X-Achse gleich h, so geht die Reihenentwicklung von jetzt ab weiter nach Potenzen von x^h; h ist entweder $\frac{1}{\Delta'\Delta''\ldots\Delta^{(r)}}$ oder ein Vielfaches dieser Grösse. Bei den jetzt folgenden Transformationen, die nöthig sind, um die Glieder hinter dem letzten kritischen Exponenten zu berechnen, gehen die Geraden niederster Dimension alle von $A^{(r)}$ aus, wobei $A^{(r)}$ die Ordinate 1 hat und auf $A^{(r-1)}M_1$ liegt.

Hat man eine Function von der Form 11) in eine Reihe zu entwickeln, die ein cyklisches System von der Form 10) liefert, so liegen die Endpunkte A und B der Geraden niederster Dimension der Function in x und y auf den beiden Achsen, und zwar ist $OA = \Delta = \Delta'\Delta''\ldots\Delta^{(r)}$. Da nun die Richtung irgend einer Geraden niederster Dimension dadurch bestimmt ist, dass die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels gegen die X-Achse gleich dem reciproken Werth des Exponenten der Potenz in x ist, die sich aus dieser Geraden ergiebt, so ist die Lage sämmtlicher Geraden niederster Dimension durch die Potenzexponenten bestimmt. Beachtet man zugleich, dass die Geraden, welche kritische Exponenten ergeben, die letzten sind, die von den Punkten $A', A''\ldots A^{(r-1)}$ ausgehen, so folgt, dass diese Geraden durch die kritischen Exponenten allein bestimmt sind.

Insbesondere ergiebt sich für die Coordinaten ξ, η von $A^{(r)}$:

$$\xi = (\Delta - \Delta_1)\frac{\beta_1}{\Delta'} + (\Delta_1 - \Delta_2)\cdot\frac{\gamma_1}{\Delta'\Delta''} + (\Delta_2 - \Delta_3)\frac{\delta_1}{\Delta'\Delta''\Delta'''} + \cdots$$
$$+ (\Delta_{r-1} - 1)\frac{\mu_1}{\Delta'\Delta''\ldots\Delta^{(r)}} \quad \text{und} \quad \eta = 1,$$

wobei Δ_p definirt ist durch die Gleichung:

$$\Delta = \Delta'\Delta''\Delta'''\ldots\Delta^{(p)}.\Delta_p;$$

ferner ist:

$$12)\qquad OM_1 = \xi + \frac{\mu_1}{\Delta}.$$

Die Zahl ξ steht in Beziehung zu der Zahl, die Smith (a. a. O.) den Discriminantenindex nennt. Es ist nämlich:

$$13)\qquad \xi = \frac{2N}{\Delta},$$

da Smith nach unserer Bezeichnungsweise setzt:

$$14)\quad \begin{cases} 2N = (\Delta - \Delta_1)\beta_1\Delta_1 + (\Delta_1 - \Delta_2)\gamma_1\Delta_2 + (\Delta_2 - \Delta_3)\delta_1\Delta_3 + \cdots \\ \qquad\qquad + (\Delta_{r-1} - 1)\mu_1. \end{cases}$$

§ 4.

Die allgemeine rationale Form eines superlinearen Zweiges mit gegebenen kritischen Exponenten.

Wir gehen aus von dem superlinearen Zweig, der durch die Reihenentwicklung 10) definirt ist; durch Rationalmachen dieser Reihenentwicklung erhält man den Ausdruck 11). Bezeichnet man irgend einen Klammerausdruck von 11) mit

$$15) \qquad [F_{q-1}(xy)]^{\Delta^{(q)}} + f_q(xy),$$

der selbst wieder von der Form 11) ist, so hat dieser Ausdruck die Eigenschaft, eine abbrechende Reihenentwicklung zu ergeben, welche man erhält, wenn man die Reihenentwicklung 10) mit dem Glied $k_n x^{\frac{\varkappa_n}{\Delta'\Delta''\ldots\Delta^{(q)}}}$, dem letzten Glied vor dem Glied mit dem kritischen Exponenten mit Nenner $\Delta'\Delta''\ldots\Delta^{(q+1)}$, abbricht. Nimmt man die Reihenentwicklung dieser Function 15) nach der im vorigen Paragraphen entwickelten Methode wirklich vor, so möge sich $A^{(q-1)}E_1$ als Gerade niederster Dimension ergeben, welche dem letzten kritischen Exponenten $\frac{\varkappa_1}{\Delta'\Delta''\ldots\Delta^{(q)}}$ entspricht. Auf dieser Geraden liegen blos zwei Glieder, nämlich eins auf $A^{(q-1)}$ und eins auf E_1. Denkt man sich $\Delta = \Delta'\Delta''\ldots\Delta^{(q)}$ gesetzt, so liefert eine analoge Rechnung, wie die am Schluss des § 3, für die Coordinaten von $A^{(q-1)}$ folgende Grössen:

$$\Delta''\Delta'''\ldots\Delta^{(q)}(\Delta'-1)\cdot\frac{\beta_1}{\Delta'} + \Delta'''\ldots\Delta^{(q)}(\Delta''-1)\frac{\gamma_1}{\Delta'\Delta''} + \cdots$$
$$+\Delta^{(q)}.(\Delta^{(q-1)}-1)\cdot\frac{\iota_1}{\Delta'\Delta''\ldots\Delta^{(q-1)}} \quad \text{und} \quad \Delta^{(q)}$$

oder

$$\frac{Q}{\Delta'\Delta''\ldots\Delta^{(q-1)}} \quad \text{und} \quad \Delta^{(q)}.$$

Die Abscisse von E_1 ist:

$$\frac{Q}{\Delta'\Delta''\ldots\Delta^{(q-1)}} + \frac{\varkappa_1}{\Delta'\Delta''\ldots\Delta^{(q-1)}} = \frac{K_1}{\Delta'\Delta''\ldots\Delta^{(q-1)}}.$$

Nun ergiebt aber $[F_q(xy)]^{\Delta^{(q)}}$ die Reihenentwicklung 10) bis zum Glied mit Exponenten $\frac{\varkappa_1}{\Delta'\Delta''\ldots\Delta^{(q-1)}}$ excl. und zwar $\Delta^{(q)}$mal; die letzten Exponenten dieser Entwicklung $\frac{\iota_1}{\Delta'\Delta''\ldots\Delta^{(q-1)}}$, $\frac{\iota_2}{\Delta'\Delta''\ldots\Delta^{(q-1)}}, \cdots$ ergeben sich aus Geraden niederster Dimension, die von $A^{(q-1)}$ ausgehen, wobei die Glieder immer zu $\Delta^{(q)\text{ten}}$ Potenzen sich zusammenfassen lassen müssen und also von der Form sind:

$$const\ x^{\frac{Q}{\Delta'\Delta''\ldots\Delta^{(q-1)}}}\left[w_r - i_r x^{\frac{\iota_r}{\Delta'\Delta''\ldots\Delta^{(q-1)}}}\right]^{\Delta^{(q)}}.$$

Das Glied in x allein hat den Potenzexponenten

$$\frac{Q + \iota_r \,.\, \Delta^{(q)}}{\Delta' \Delta'' \ldots \Delta^{(q-1)}},$$

und kein Glied solcher Art, was auch ι_r sein mag, kann auf den Punkt E_1 fallen, dessen entsprechendes Glied den kritischen Exponenten $\frac{\varkappa_1}{\Delta' \Delta'' \ldots \Delta^{(q)}}$ ergiebt. Denn der diesem letzteren Glied zugehörige Potenzexponent ist

$$16) \qquad \frac{Q}{\Delta' \Delta'' \ldots \Delta^{(q-1)}} + \frac{\varkappa_1}{\Delta' \Delta'' \ldots \Delta^{(q-1)}},$$

und es müsste also $\varkappa_1 = \iota_r \,.\, \Delta^{(q)}$ sein, was unmöglich ist, da $\varkappa_1$ den Factor $\Delta^{(q)}$ nicht enthalten kann.

Wir folgern daraus, dass das Glied auf E_1, eine Potenz in x mit dem Exponenten $\frac{K_1}{\Delta' \Delta'' \ldots \Delta^{(q-1)}}$, blos herrührt von der Function $f_q(xy)$, und zwar ist es die kleinste Potenz in x, die sich aus $f_q(xy)$ ergiebt, wenn y ersetzt wird durch die Reihe 10), welche man vor dem Glied mit dem kritischen Exponenten $\frac{\varkappa_1}{\Delta' \Delta'' \ldots \Delta^{(q)}}$ abgebrochen hat. Ferner schliessen wir daraus, dass man aus der Function 15) den kritischen Exponenten $\frac{\varkappa_1}{\Delta' \Delta'' \ldots \Delta^{(q)}}$ auch erhält, wenn man statt $F_{q-1}(xy)$ eine Function $\Phi_{q-1}(xy)$ wählt, deren Reihenentwicklung mit der Reihenentwicklung von $F_{q-1}(xy)$ blos in den Gliedern mit den kritischen Exponenten identisch ist, sonst aber ganz beliebig ist. Denn das transformirte Glied, das bei der Reihenentwicklung auf den Punkt $A^{(q-1)}$ fällt, ergiebt sich mit Exponenten und Coefficient aus den Gliedern der Geraden niederster Dimension, welche kritische Exponenten ergeben. Es ist also noch die Form der Function $f_q(xy)$ zu bestimmen, so dass der Ausdruck 15) als letzten kritischen Exponenten $\frac{\varkappa_1}{\Delta' \Delta'' \ldots \Delta^{(q)}}$ ergiebt, sonst aber sich beliebig nach Potenzen von $x^{\frac{1}{\Delta' \Delta'' \ldots \Delta^{(q)}}}$ fortsetzt.

Wir betrachten die erste Function von der Form 15):

$$17) \qquad \Phi_1(xy) \equiv y^{\Delta'} + \varphi_1(xy),$$

welche als kritischen Exponenten $\frac{\beta_1}{\Delta'}$ ergeben und sich beliebig nach Potenzen von $x^{\frac{1}{\Delta'}}$ fortsetzen soll. Es muss dann $\varphi_1(xy)$ als niederste Potenz in x das Glied x^{β_1} enthalten; die Gerade niederster Dimension AB_1 (Fig. 3) enthält also die zwei Glieder mit $y^{\Delta'}$ und x^{β_1}, wo $OA = \Delta'$; $OB_1 = \beta_1$. Alle anderen Glieder, die von der Form $x^p y^q$ sind (jedes mit beliebigem Coefficienten), liegen auf der dem Ursprung abgewendeten Seite der Geraden niederster Dimension AB_1, so dass für p und q die Bedingungsgleichung existirt:

18) $$p + \frac{\beta_1}{\Delta'} q > \beta_1.$$

Die Reihenentwicklung von 16) hat die Form:

19) $$y = b_1 x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}} + b_2 x^{\frac{\beta_1+1}{\Delta'}} + b_3 x^{\frac{\beta_1+2}{\Delta'}} + \cdots$$

wo $b_1, b_2, b_3 \ldots$ Functionen sind der beliebigen Coefficienten in $\varphi(xy)$.

Soll nun aber die Reihenentwicklung einer Function die Anfangsglieder mit der Reihe 19) gemeinschaftlich haben, aber einen zweiten kritischen Exponenten $\frac{\gamma_1}{\Delta'\Delta''}$ besitzen, also folgende Form haben:

20) $$y = b_1 x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}} + b_2 x^{\frac{\beta_1+1}{\Delta'}} + \cdots b_m x^{\frac{\beta_1+m-1}{\Delta'}} + c_1 x^{\frac{\gamma_1}{\Delta'\Delta''}} + c_2 x^{\frac{\gamma_1+1}{\Delta'\Delta''}} + \cdots,$$

wo $$\frac{\beta_1+m-1}{\Delta'} < \frac{\gamma_1}{\Delta'\Delta''} < \frac{\beta_1+m}{\Delta'},$$

so muss der entsprechende rationale Ausdruck die Gestalt haben:

21) $$\Phi_2(xy) = [\Phi_1(xy)]^{\Delta''} + \varphi_2(xy),$$

wobei $\varphi_2(xy)$ so beschaffen sein muss, dass, wenn man darin

22) $$y = b_1 x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}} + \cdots b_m x^{\frac{\beta_1+m-1}{\Delta'}}$$

setzt, die niederste Potenz in x den Exponenten

$$\Delta''(\Delta'-1)\frac{\beta_1}{\Delta'} + \frac{\gamma_1}{\Delta'} = \frac{\Gamma_1'}{\Delta'}$$

hat (vergl. Formel 16); denn die Gerade niederster Dimension, die bei der Entwicklung von $\Phi_2(xy)$ den kritischen Exponenten $\frac{\gamma_1}{\Delta'\Delta''}$ liefert, geht nach einem Punkt der X-Achse, dessen Abscisse $= \frac{\Gamma_1'}{\Delta'}$. Diese Eigenschaft bestimmt $\varphi_2(xy)$. Es kann nämlich $\varphi_2(xy)$ alle Glieder enthalten, jedes mit einem willkürlichen Coefficienten von der Form $x^p y^q$, wobei

$$p + \frac{\beta_1}{\Delta} q = \frac{\Gamma_1'}{\Delta'};$$

denn diese Glieder geben bei der ersten Transformation $y = u + b_1 x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}}$ Glieder in x allein mit den Exponenten $\frac{\Gamma_1'}{\Delta'}$. Es sind aber noch eine Reihe von anderen Gliedern denkbar, deren Coefficienten nicht mehr alle von einander unabhängig sind, die nämlich bei irgend einer der Transformationen, welche man ausführen muss, um die Reihenentwicklung bis $b_m x^{\frac{\beta_1+m-1}{\Delta'}}$ zu bekommen, als niederstes Glied in x ein solches mit Exponenten $\frac{\Gamma_1'}{\Delta'}$ ergeben.

Bezeichnet man mit

$$\Phi_{1r}(xy)$$

denjenigen Theil von $\Phi_1(xy)$, der die Reihenentwicklung bis zum Glied $b_r x^{\frac{\beta_1+r-1}{\Delta'}}$ bestimmt, den man also erhält, wenn man $\Phi_1(xy)$ bis zu dem eben bezeichneten Glied in eine Reihe entwickelt und diejenigen Glieder in x und y sammelt, die für diese Reihenentwicklung in Betracht kommen, so liefert $\Phi_{1r}(xy)$ eine Reihenentwicklung:

$$y = b_1 x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}} + \cdots b_r x^{\frac{\beta_1+r-1}{\Delta'}} + b'_{r+1} x^{\frac{\beta_1+r}{\Delta'}} + \cdots,$$

wo b'_{r+1} im Allgemeinen nicht mit b_{r+1} identisch sein wird, nämlich dann nicht, wenn zur Bestimmung des Gliedes mit dem Coefficienten b_{r+1} noch andere Glieder von $\Phi_1(xy)$ ausser den Gliedern $\Phi_{1r}(xy)$ beitragen. Ist $A'B_r$ die Gerade niederster Dimension, welche bei der Reihenentwicklung von $\Phi_{1r}(xy)$ das Glied mit dem Coefficienten b_r ergiebt, und transformirt man, um das nächste Glied der Reihenentwicklung zu bekommen,

$$u_{r-1} = u_r + b_r x^{\frac{\beta_1+r-1}{\Delta'}},$$

wo

$$u_{r-1} = y - b_1 x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}} - \cdots - b_{r-1} x^{\frac{\beta_1+r-2}{\Delta'}},$$

so ist $A'B_{r+1}$ die Gerade niederster Dimension und entspricht dem Ausdruck:

$$const\; x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}(\Delta'-1)} \left\{ u_r - b'_{r+1} x^{\frac{\beta_1+r}{\Delta'}} \right\}.$$

Wenn nun $b'_{r+1} \gtrless b_{r+1}$, so bekommt man, da die Abscisse OB_{r+1}

$$\frac{\beta_1}{\Delta'}(\Delta'-1) + \frac{\beta_1+r}{\Delta'} = \beta_1 + \frac{r}{\Delta'} = \frac{B_r}{\Delta'},$$

ein Glied mit $x^{\frac{B_r}{\Delta'}}$ als niederste Potenz in x, sofern man in $\Phi_{1r}(xy)$ y durch die Reihenentwicklung 22) ersetzt. Ist aber $b_{r+1} = b'_{r+1}$, so wird die niederste Potenz in x von höherem Grad. Man geht dann in der Entwicklung von $\Phi_{1r}(xy)$ so weit, bis ein Glied kommt, das mit der Entwicklung von $\Phi_1(xy)$ nicht übereinstimmt, und bestimmt dann auf die eben angegebene Weise die niederste Potenz. Man scheide also von $\Phi_1(xy)$ die Glieder

$$\Phi_{11}(xy) \ldots \Phi_{1r}(xy) \ldots \Phi_{1m}(xy) \tag{23}$$

ab, welche bei der Reihenentwicklung von $\Phi_1(xy)$ nothwendig sind zur Bestimmung der Exponenten

$$\frac{\beta_1}{\Delta'} \cdots \frac{\beta_1+r-1}{\Delta'} \cdots \frac{\beta_1+m-1}{'\Delta},$$

so ergeben obige Ausdrücke 23), sofern y durch die Reihenentwicklung 22) ersetzt wird, als Potenzexponenten der niedersten Potenzen in x resp.:

$$\frac{\beta_1}{\varDelta'}(\varDelta'-1)+\frac{\beta_1}{\varDelta'},\ldots\frac{\beta_1}{\varDelta'}(\varDelta'-1)+\frac{\beta_1+r-1}{\varDelta'},\ldots\frac{\beta_1}{\varDelta'}(\varDelta'-1)+\frac{\beta_1+m-1}{\varDelta'},$$

oder

$$\beta_1,\ldots\beta_1+\frac{r-1}{\varDelta'},\ldots\beta_1+\frac{m-1}{\varDelta'},$$

oder

$$\frac{B_1}{\varDelta'},\ldots\frac{B_r}{\varDelta'},\ldots\frac{B_m}{\varDelta'},$$

wobei vorausgesetzt wird, dass die Ausdrücke 23) alle verschieden sind. Sind aber mehrere einander gleich, so ist für die letzteren der Exponent zu nehmen, den obige Formel für den letzten derselben ergiebt.

Die allgemeinste Form einer Function, die als niederste Potenz in x eine solche mit dem Exponenten $\frac{\Gamma_1}{\varDelta'}$ ergiebt, sofern man y durch die Reihe 22) ersetzt, ist also

$$24)\qquad \Sigma\, const\, x^p y^q [\Phi_{11}(xy)]^{r_1}.[\Phi_{12}(xy)]^{r_2}\ldots[\Phi_{1r}(xy)]^{r_m},$$

wobei die Summe über sämmtliche Formen zu erstrecken ist, für welche

$$25)\qquad p+\frac{\beta_1}{\varDelta'}q+\frac{B_1}{\varDelta'}r_1+\frac{B_2}{\varDelta'}r_2+\cdots\frac{B_m}{\varDelta'}r_m=\frac{\Gamma_1'}{\varDelta'}.$$

$\varphi_2(xy)$ muss mindestens ein Glied des Ausdrucks 24) enthalten. Daneben darf es noch beliebige Glieder enthalten, für welche die linke Seite der Gleichung 25) grösser wird als die rechte.

Soll nun die Reihenentwicklung einen weiteren kritischen Exponenten $\frac{\delta_1}{\varDelta'\varDelta''\varDelta'''}$ bekommen, so ist der vorhergehende Exponent von der Form $\frac{\gamma_1+n-1}{\varDelta'\varDelta''}$, wobei

$$\frac{\gamma_1+n-1}{\varDelta'\varDelta''}<\frac{\delta_1}{\varDelta'\varDelta''\varDelta'''}<\frac{\gamma_1+n}{\varDelta'\varDelta''}.$$

Der rationale Ausdruck, der eine Reihe von dieser Form ergiebt, ist dann von der Form: $\quad [\Phi_2(xy)]^{\varDelta''}+\varphi_3(xy).$

Bezeichnet man mit:

$$\Phi_{21}(xy),\ \Phi_{22}(xy)\ldots\Phi_{2n}(xy)$$

diejenigen Theile von $\Phi_2(xy)$, welche zur Reihenentwicklung bis resp. zu den Gliedern mit den Exponenten

$$\frac{\gamma_1}{\varDelta'\varDelta''},\ \frac{\gamma_1+1}{\varDelta'\varDelta''},\ldots\ \frac{\gamma_1+n-1}{\varDelta'\varDelta''}$$

beitragen, so ergeben obige Ausdrücke, sofern man y durch die Reihe

$$y=b_1x^{\frac{\beta_1}{\varDelta'}}+b_2x^{\frac{\beta_1+1}{\varDelta'}}+\cdots c_1x^{\frac{\gamma_1}{\varDelta'\varDelta''}}+\cdots c_nx^{\frac{\gamma_1+n-1}{\varDelta'\varDelta''}}$$

ersetzt, als Potenzexponenten der niedersten Potenzen in x resp. (vergl. Formel 16):

$$\Delta''(\Delta'-1)\frac{\beta_1}{\Delta'}+(\Delta''-1)\frac{\gamma_1}{\Delta'\Delta''}+\frac{\gamma_1}{\Delta'\Delta''},\ \Delta''(\Delta'-1)\frac{\beta_1}{\Delta'}+(\Delta''-1)\frac{\gamma_1}{\Delta'\Delta''}$$
$$+\frac{\gamma_1+1}{\Delta'\Delta''},\dots\ \Delta''(\Delta'-1)\frac{\beta_1}{\Delta'}+(\Delta''-1)\frac{\gamma_1}{\Delta'\Delta''}+\frac{\gamma_1+n-1}{\Delta'\Delta''},$$

oder

$$\frac{\Gamma_1}{\Delta'\Delta''},\ \frac{\Gamma_2}{\Delta'\Delta''},\dots\frac{\Gamma_n}{\Delta'\Delta''}.$$

$\varphi_3(xy)$ muss dann von der Form sein:

$$26)\quad \Sigma\, const\; x^p y^q [\Phi_{11}(xy)]^{r_1}\dots[\Phi_{1r}(xy)]^{r_m}[\Phi_{21}(xy)]^{s_1}\dots[\Phi_{2n}(xy)]^{s_n},$$

wobei

$$27)\ p+\frac{\beta_1}{\Delta'}q+\frac{B_1}{\Delta'}r_1+\dots\frac{B_m}{\Delta'}\cdot r_m+\frac{\Gamma_1}{\Delta'\Delta''}s_1+\frac{\Gamma_2}{\Delta'\Delta''}s_2+\dots\frac{\Gamma_n}{\Delta'\Delta''}s_n \geqq \frac{\Delta_1'}{\Delta'\Delta''}$$

und

$$\frac{\Delta_1'}{\Delta'\Delta''}=\Delta''\Delta'''(\Delta'-1)\frac{\beta_1}{\Delta'}+\Delta'''(\Delta''-1)\frac{\gamma_1}{\Delta'\Delta''}+\frac{\delta_1}{\Delta'\Delta''}.$$

Die Bedingung des Gleichseins in 27) muss von mindestens einem Glied von 26) erfüllt sein.

Fährt man in dieser Weise fort, bis sämmtliche kritische Exponenten

$$\frac{\beta_1}{\Delta'},\ \frac{\gamma_1}{\Delta'\Delta''},\dots\frac{\mu_1}{\Delta'\Delta''\dots\Delta^{(r)}}$$

erschöpft sind, so erhält man einen Ausdruck von der Form:

$$28)\quad \{([y^{\Delta'}+\varphi_1(xy)]^{\Delta''}+\varphi_2(xy))^{\Delta'''}+\dots\varphi_{r-1}(xy)\}^{\Delta^{(r)}}+\varphi_r(xy)=0,$$

wobei jede der Functionen φ auf angegebene Weise von der ihr vorhergehenden abhängig ist. Der Grad dieser Functionen in x und y darf jede beliebige Höhe erreichen; denn die Bedingungen 18), 25), 27)... können immer erfüllt werden, wenn nur die Grade in x und y hoch genug genommen werden.

Zusatz. Die Form 28) kann beliebig specialisirt werden. Man kann z. B. die Forderung aufstellen, die Curvengleichung niedersten Grades zu bestimmen, die einen superlinearen Zweig mit gegebenen kritischen Exponenten besitzt. Zu diesem Zweck wird man aus den Functionen $\varphi_1(xy)$, $\varphi_2(xy)$. . von den Gliedern, die vorkommen dürfen, je blos diejenigen niedersten Grades entnehmen und die Coefficienten der anderen gleich Null setzen.

§ 5.

Verhalten der adjungirten Curve in einem singulären Punkt.*

Wir wollen uns die Aufgabe stellen, die allgemeine Form der Curve zu finden, die sich in einem gegebenen singulären Punkt einer algebraischen Curve adjungirt verhält, d. h., es soll die adjungirte Curve mit der grösstmöglichen Anzahl von willkürlichen Constanten gefunden werden, welche

* Vergl. Briot, Théorie des fonctions abéliennes, 1879; chap. I.

die Bedingung des Adjungirtseins in dem betreffenden Punkt noch verfügbar lässt. Zu diesem Zweck gehen wir von folgender Definition aus:

Eine Curve $\varphi(xy) = 0$ verhält sich in dem singulären Punkt $x = a$, $y = b$ der Curve $f(xy) = 0$ adjungirt zu der letzteren, wenn das Abel'sche Integral

29) $$w = \int \frac{\varphi(xy)\,dx}{f'(y)},$$

wo $f'(y) = \frac{\partial f(xy)}{\partial y}$, endlich bleibt für $x = a$, $y = b$.

Macht man den singulären Punkt zum Ursprung, so ist die Aufgabe, eine Function $\varphi(xy)$ derart zu bestimmen, dass w endlich wird für $x = 0$, $y = 0$, wenn in $f'(y)$ und $\varphi(xy)$ die abhängige Variable y ersetzt wird durch diejenigen Werthe, welche sich aus $f(xy) = 0$ bestimmen. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass sich y aus $f(xy) = 0$ bestimmen lasse durch Reihen, die nach positiven Potenzen von x aufsteigen, und betrachten von diesen nur diejenigen, die mit $x = 0$ verschwinden. Beschränken wir uns ferner vorerst auf den Fall, dass die Reihenentwicklungen von $f(xy) = 0$ blos ein einziges cyklisches System von Entwicklungen von der Form

$$y = a_1 x^{\frac{\alpha_1}{\Delta}} + a_2 x^{\frac{\alpha_2}{\Delta}} + \cdots \qquad (\Delta \leq \alpha_1 < \alpha_2 \ldots)$$

ergebe, so haben wir mit diesem Werth von y in 29) einzugehen, indem wir $\varphi(xy)$ als ganze algebraische Function annehmen, also setzen:

$$\varphi(xy) = A_0 + B_0 x + B_1 y + C_0 x^2 + C_1 xy + C_2 y^2 + \cdots$$

Ordnet man $\varphi(xy)$ und $f'(y)$ nach Potenzen von $x^{\frac{1}{\Delta}}$, so wird aus 29)

$$w = \int \frac{\left(N_1 x^{\frac{\mu_1}{\Delta}} + N_2 x^{\frac{\mu_2}{\Delta}} + \cdots\right) dx}{m_1 x^{\frac{\vartheta_1}{\Delta}} + m_2 x^{\frac{\vartheta_2}{\Delta}} + m_3 x^{\frac{\vartheta_3}{\Delta}} + \cdots},$$

oder, wenn

$$\left[1 + \frac{m_2}{m_1} x^{\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\Delta}} + \frac{m_3}{m_1} x^{\frac{\vartheta_3 - \vartheta_1}{\Delta}} + \cdots\right]^{-1}$$

entwickelt wird, so erhält man die Anfangsglieder:

$$1 - \frac{m_2}{m_1} x^{\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\Delta}} - \frac{m_3}{m_1} x^{\frac{\vartheta_3 - \vartheta_1}{\Delta}} - \cdots$$

Daher wird obiges Integral:

30) $$w = \int \frac{\left(N_1 x^{\frac{\mu_1}{\Delta}} + N_2 x^{\frac{\mu_2}{\Delta}} + \cdots\right)\left(1 - \frac{m_2}{m_1} x^{\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\Delta}} - \cdots\right) dx}{m_1 x^{\frac{\vartheta_1}{\Delta}}}.$$

Dieses Integral soll endlich werden für $x = 0$, d. h., es muss der Potenzexponent eines jeden Gliedes des Zählers grösser sein als $\frac{\vartheta_1}{\varDelta} - 1$. Nun ist, da

$$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 \ldots \quad \text{und} \quad \vartheta_1 < \vartheta_2 < \vartheta_3 \ldots,$$

das Glied niedersten Grades des Zählers $N_1 x^{\frac{\mu_1}{\varDelta}}$; erfüllt $\frac{\mu_1}{\varDelta}$ die Bedingung nicht, so ist $N_1 = 0$ zu setzen, und es ist dann $N_2 x^{\frac{\mu_2}{\varDelta}}$ das Glied niedersten Grades, wobei $N_2 = 0$ zu setzen, wenn $\frac{\mu_2}{\varDelta}$ nicht grösser als $\frac{\vartheta_1}{\varDelta} - 1$. In dieser Weise ist fortzufahren, bis man zu einem Glied $N_k x^{\frac{\mu_k}{\varDelta}}$ kommt, wo $\frac{\mu_k}{\varDelta} > \frac{\vartheta_1}{\varDelta} - 1$. Alsdann dürfen N_k und alle übrigen Coefficienten beliebig bleiben, da dann auch sämmtliche übrigen Glieder der Bedingung genügen. Das Integral 30) ist also für $x = 0$ immer und nur dann endlich, wenn

$$31) \qquad w_1 = \int \frac{\left(N_1 x^{\frac{\mu_1}{\varDelta}} + N_2 x^{\frac{\mu_2}{\varDelta}} + \cdots\right) dx}{m_1 x^{\frac{\vartheta_1}{\varDelta}}}$$

endlich ist. Die Bedingung, dass dieses Integral endlich ist, wird ausgedrückt durch die Gleichungen

$$N_1 = 0, \quad N_2 = 0, \ldots N_{k-1} = 0$$

zwischen den Coefficienten A_0, B_0, $B_1 \ldots$ der willkürlich angenommenen Function $\varphi(xy)$. $x^{\frac{\vartheta_1}{\varDelta}}$ ist die niederste Potenz, die man erhält, wenn man in $f'(y)$ für y die bestimmte Reihe einsetzt.

Das Folgende wird nun zeigen, wie man diese Rechnung wesentlich abkürzen kann. Die Curve, welche einen singulären Punkt im Ursprung hat, in dem das Verhalten der adjungirten Curve bestimmt werden soll, sei gegeben durch das cyklische System von Reihenentwicklungen von der Form 10); alsdann bekommt man für die rationale Form den Ausdruck 11). Denkt man sich aus dieser rationalen Form $f'(y)$ gebildet und die Glieder in das Newton'sche Parallelogramm eingetragen, so kann man das System dieser Punkte erhalten, indem man von dem zu $f(xy)$ gehörigen Newton'schen Parallelogramm ausgeht und sämmtliche Punkte in Beziehung auf ein neues Coordinatensystem betrachtet, welches man dadurch erhält, dass man die neue X'-Achse im Abstand $+1$ von der alten annimmt, die Y-Achse aber unverändert lässt (Fig. 2). Nun lauten die Glieder niederster Dimension von $f(xy)$

$$(y^{\varDelta'} - b_1^{\varDelta'} x^{\beta_1})^{\varDelta_1},$$

also sind diejenigen von $f'(y)$:

$$\Delta'\Delta_1 y^{\Delta'-1}(y^{\Delta'} - b_1^{\Delta'} x^{\beta_1})^{\Delta_1 - 1},$$

d. h., sie enthalten den Factor $(y^{\Delta'} - b_1^{\Delta'} x^{\beta_1})$ $(\Delta_1 - 1)$ mal. Transformirt man nun $f'(y)$ mittelst der Transformationsgleichung

$$y = u_1 + b_1 x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}},$$

so transformiren sich diese besagten Glieder in Punkte, welche auf die Strecke AA' zu liegen kommen; auf $A'B_1'$ liegen keine Punkte; denn die Entfernung des Punktes A von der neuen X'-Achse beträgt $\Delta_1 - 1$ Einheiten (vergl. S. 14). Es enthält nun die transformirte Function

$$f(x, y) = f\left(x, u_1 + b_1 x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}}\right) = f_1(x, u_1)$$

den Ausdruck $\left(u_1 - b_2 x^{\frac{\beta_2}{\Delta'}}\right)$ als Δ_1-fachen Factor, woraus folgt, dass auch die transformirte Function von $f'(y)$ denselben Ausdruck als $(\Delta_1 - 1)$-fachen Factor enthält; denn

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial f_1(x, u_1)}{\partial u_1}.$$

Transformirt man der Reihe nach $f'(y)$ durch dieselben Transformationsgleichungen, die zur Reihenentwicklung von $f(xy) = 0$ nothwendig waren, so erkennt man analog, dass die aufeinander folgenden Geraden niederster Dimension von $f(xy)$ zusammenfallen mit entsprechenden Geraden niederster Dimension von $f'(y)$, solange bei den Transformationen noch mehrfache Factoren sich ergeben. Die Glieder niederster Dimension jedoch, welche den letzten kritischen Exponenten ergeben, also der Geraden $A^{(r-1)}M_1$ entsprechen, sind (vergl. S. 16):

$$R . \left[z_1^{\Delta^{(r)}} - m_1^{\Delta^{(r)}} x^{\frac{\mu_1}{\Delta'\Delta''\ldots\Delta^{(r-1)}}}\right].$$

Für die entsprechende transformirte Function von $f'(y)$ erhält man also

$$R . \Delta^{(r)} . z_1^{\Delta^{(r)}-1},$$

und wenn hier die Transformation

$$z_1 = z_2 + m_1 x^{\frac{\mu_1}{\Delta}}$$

durchgeführt wird, so ergiebt sich ein Glied in x allein, das auf den Punkt $A^{(r)}$ der X'-Achse zu liegen kommt. Bei den weiteren Transformationen bleibt dieses Glied unverändert; denn kein anderes Glied kann auf $A^{(r)}$ fallen. Ersetzt man also sämmtliche Transformationen von $f'(y)$ durch eine einzige

$$y = z_p + b_1 x^{\frac{\beta_1}{\Delta'}} + \cdot \cdot m_1 x^{\frac{\mu_1}{\Delta}} + m_2 x^{\frac{\mu_2}{\Delta}} + \cdots + m_p x^{\frac{\mu_p}{\Delta}},$$

wo p beliebig, und setzt $z_p = 0$, d. h., ersetzt man in $f'(y)$ y durch seine Reihenentwicklung in x, so erhält man eine Reihe von Potenzen in x, deren niederste Potenz den Exponenten $O'A^{(r)}$ hat. Nun ist aber (vergl. S. 17):

$$32)\quad \begin{cases} O'A^{(r)} = \xi = \dfrac{2N}{\varDelta} = (\varDelta - \varDelta_1)\,.\,\dfrac{\beta_1}{\varDelta'} + (\varDelta_1 - \varDelta_2)\dfrac{\gamma_1}{\varDelta'\varDelta''} + \cdots \\ \qquad + (\varDelta_{r-1} - 1)\dfrac{\mu_1}{\varDelta'\varDelta''\ldots\varDelta^{(r)}}. \end{cases}$$

Wir können daher den folgenden Satz aussprechen: Die niederste Potenz, die man erhält, wenn man in $f'(y)$ für y die aus $f(xy) = 0$ erhaltene Potenzreihe von y nach Potenzen von x setzt, ist $x^{\frac{2N}{\varDelta}}$.

Man kann diesen Satz auch durch andere Ueberlegungen bekommen. Nach Smith (a. a. O.) ist nämlich der Grad der Resultante aus $f(xy)$ und $f'(y)$ gleich dem Discriminantenindex $2N$. Nun erhält man aber die Resultante, wenn man das Product der $\varDelta$-Entwicklungen in $f'(y)$ einsetzt.

Geht man nun zum Integral w_1 (31) zurück, so hat man in der Zählerfunction die Coefficienten sämmtlicher Glieder gleich Null zu setzen, deren Exponenten nicht grösser sind als $\dfrac{2N}{\varDelta} - 1$. Man kann nun zeigen, dass man, um den Zähler der Function unter dem Integral zu bekommen, sich begnügen kann, in der willkürlichen Function $\varphi(xy)$ statt y die mit dem letzten kritischen Exponenten abgebrochene Reihe einzusetzen. Man hat nämlich:

$$\begin{aligned} \varphi(xy) = A_0 + B_0 x + B_1\Big(b_1 x^{\frac{\beta_1}{\varDelta'}} + b_2 x^{\frac{\beta_2}{\varDelta'}} + \cdots m_1 x^{\frac{\mu_1}{\varDelta}} + m_2 x^{\frac{\mu_2}{\varDelta}} + \cdots\Big) \\ + C_0 x^2 + C_1 x\Big(b_1 x^{\frac{\beta_1}{\varDelta'}} + \cdots m_1 x^{\frac{\mu_1}{\varDelta}} + \cdots\Big) + C_2\Big(b_1 x^{\frac{\beta_1}{\varDelta'}} + \cdots m_1 x^{\frac{\mu_1}{\varDelta}}\Big)^2 \\ + D_0 x^3 + \cdots \end{aligned}$$

Ordnet man nach Potenzen von x, so ist zu erkennen, dass es blos ein einziges Glied mit $x^{\frac{\mu_1}{\varDelta}}$ giebt, wenn $\frac{\mu_1}{\varDelta}$ der letzte kritische Exponent ist; dieses Glied ist $B_1 m_1 x^{\frac{\mu_1}{\varDelta}}$, und es ist also $B_1 = 0$, wenn $\frac{\mu_1}{\varDelta} \overline{\gtrless} \frac{2N}{\varDelta} - 1$. Wenn aber $\frac{\mu_1}{\varDelta} > \frac{2N}{\varDelta} - 1$, so haben der letzte kritische Exponent und auch die folgenden keinen Einfluss auf das Verschwinden von B_1 und um so mehr keinen Einfluss auf das Verschwinden der übrigen Coefficienten $C_1, C_2 \ldots$ Im ersten Fall ist $C_1 x\,.\,m_1 x^{\frac{\mu_1}{\varDelta}} = C_1 m_1 x^{1+\frac{\mu_1}{\varDelta}}$ das einzige Glied mit diesem Exponenten; ist wieder $C_1 = 0$ zu setzen, so ist $2C_2 b_1 m_1 x^{\frac{\beta_1}{\varDelta'}+\frac{\mu_1}{\varDelta}}$ das einzige Glied, das für sich verschwinden muss etc. Wir sehen also, dass von jedem Klammerausdruck das niederste Glied, in dessen Exponenten zum ersten Mal der Nenner $\varDelta$ vorkommt, den Entscheid geben muss, ob der Coefficient zu verschwinden hat oder nicht, wenn nicht schon ein Glied mit niederem Exponenten das Verschwinden des Coefficienten gefordert hat. Jedenfalls aber ersehen wir, dass die auf den Exponenten $\frac{\mu_1}{\Delta}$ folgenden Exponenten keinen Einfluss mehr ausüben können; d. h., beim Einsetzen der Reihenentwicklung für y in $\varphi(xy)$ darf man sich mit der abgebrochenen Reihe bis zum letzten kritischen Exponenten begnügen.

Die Bestimmung der in einem superlinearen Zweig, welcher durch eine Reihenentwicklung von der Form 10) gegeben sein soll, sich adjungirt verhaltenden Curve reducirt sich demnach auf folgende Rechnung:

Setze die mit dem letzten kritischen Exponenten abgebrochene Reihe 10) für y in die allgemeine Function $\varphi(xy)$ ein, ordne dieselbe nach Potenzen von x und setze sämmtliche Coefficienten $= 0$, deren Exponenten nicht grösser sind als $\frac{2N}{\Delta} - 1$, wo $\frac{2N}{\Delta}$ durch Gleichung 32) bestimmt ist. Die Curve $\varphi(xy) = 0$, deren Coefficienten den dadurch erhaltenen Bedingungsgleichungen genügen, verhält sich adjungirt in dem singulären Punkt einer Curve, die den superlinearen Zweig 10) enthält, und ist zugleich die allgemeinste ihrer Art.

Die Verallgemeinerung dieser Methode auf den Fall, dass die Curve $f(xy) = 0$ im Ursprung mehrere superlineare Zweige hat, macht keine Schwierigkeit. Man bestimmt der Reihe nach die Bedingungsgleichungen für die Coefficienten der Function $\varphi(xy)$, die bewirken, dass das Integral 29) endlich wird, sofern man y der Reihe nach ersetzt durch die Reihenentwicklungen, die den superlinearen Zweigen entsprechen. Auch hier kann die niederste Potenz in x von $f'(y)$, wenn y durch eine Reihenentwicklung ersetzt wird, in den kritischen Exponenten der Reihenentwicklungen ausgedrückt werden dadurch, dass man wiederum die Geraden niederster Dimension zeichnet, welche die einzelnen Reihenentwicklungen ergeben.

Die eben entwickelte Methode der Bestimmung der adjungirten Curve ist im Allgemeinen mit ziemlich umständlichen Rechnungen verknüpft. Da nun die adjungirte Curve gewöhnlich ebenfalls in dem singulären Punkte der ursprünglichen Curve eine Singularität enthält, so müssen auch noch aus der Gleichung der adjungirten Curve die Reihenentwicklungen gebildet werden, und diese Rechnung ist äussert mühsam, da aus den Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten der Function $\varphi(xy)$ zuerst die gewöhnliche Form von $\varphi(xy)$ hergestellt werden muss. Wir geben deshalb noch in Folgendem eine graphische Methode an, welche namentlich, wenn zugleich die Reihenentwicklungen der adjungirten Curve verlangt werden, wesentlich rascher zum Ziele führt.

Die Curve $f(xy)=0$ habe wieder im Ursprung einen superlinearen Zweig von der Form 10), und es ist also eine Function $\varphi(xy)$ derart zu bestimmen, dass der niederste Exponent der Potenzen in x, welche durch Ersetzen von y durch die Reihenentwicklung 10) erhalten werden, grösser ist als $\frac{2N}{\varDelta}-1$. Dieses Ersetzen von y durch die Reihenentwicklung kann dadurch geschehen, dass man $\varphi(xy)$ durch die Reihe der Substitutionen, die man zur Reihenentwicklung von $f(xy)=0$ bis zum letzten kritischen Exponenten nöthig hatte, transformirt, d. h. man setzt:

$$y=z+b_1 x^{\frac{\beta_1}{\varDelta'}}+\cdots m_1 x^{\frac{\mu_1}{\varDelta}},$$

führt diese Transformationen nach der Cramer'schen Methode der Reihe nach durch, und setzt schliesslich $z=0$. Denkt man sich die Function $\varphi(xy)$ in das Newton'sche Parallelogramm mit X'-Achse und Y-Achse als Achsen eingetragen (Fig. 4, vergl. auch Fig. 2) und macht $O'P=\frac{2N}{\varDelta}-1$, so erkennt man, dass $\varphi(xy)=0$ sich dann adjungirt verhält, wenn $\varphi(xy)$ bei der letzten Transformation Punkte auf der X'-Achse ergiebt, die blos rechts von P liegen. Zieht man durch P die Parallele PQ mit der Geraden niederster Dimension, die den ersten kritischen Exponenten $\frac{\beta_1}{\varDelta'}$ ergab, so transformiren sich alle Glieder auf der dem Ursprung abgewendeten Seite der Geraden QP derart, dass die Geraden, durch welche diese Transformation ausgeführt wird, die X'-Achse in Punkten rechts von P schneiden. Da $\beta_1 \gtreqq \varDelta'$, so dürfen alle Glieder, jedes mit willkürlichem Coefficienten, deren Grade in x und y zusammen grösser sind als $\frac{2N}{\varDelta}-1$, in der Gleichung der adjungirten Curve vorkommen. Ist p die nächst höhere ganze Zahl zu $\frac{2N}{\varDelta}-1$, so sind die Glieder niedersten Grades der adjungirten Curve, die beliebige Coefficienten haben dürfen, vom Grad p; die adjungirte Curve hat im singulären Punkte der Curve $f(xy)$ p lineare Zweige mit beliebigen Tangenten.

Die so erhaltene zu dem superlinearen Zweig adjungirte Curve ist aber nicht die allgemeinste; vielmehr kann man noch eine Reihe von Gliedern finden, welche die adjungirte Curve enthalten darf, deren Coefficienten aber nicht mehr beliebig sind, sondern in gewissen Beziehungen zu einander stehen. Diese Glieder sind nun nicht mehr blos von den kritischen Exponenten des superlinearen Zweiges abhängig, sondern auch von den anderen Exponenten und den Coefficienten der Glieder der Reihenentwicklung. Zieht man die Gerade PQ_1 parallel der Geraden niederster

Dimension, die den auf den ersten kritischen Exponenten folgenden (im Allgemeinen nicht kritischen) Exponenten ergiebt, so kann man sich Aggregate von Gliedern denken, welche bei der ersten Transformation in das Dreieck QPQ_1 fallen und welche dann bei der zweiten Transformation, die durch Parallelen zu PQ_1 ausgeführt wird, Punkte auf der X'-Achse ergeben, die rechts von P fallen. Solche Glieder liegen auf Parallelen zu PQ, z. B. auf CDE, und zwar müssen dieselben einen mehrfachen Factor von der Form $(y^{\Delta'} - b_1^{\Delta'} x^{\beta_1})$ haben; hat nämlich D eine Ordinate zwischen m und $m+1$, so müssen die Glieder auf CE den obigen Factor $(m+1)$mal enthalten. Denn blos dann erhält man bei der ersten Transformation blos Glieder auf der Strecke CD; im Uebrigen können die noch verfügbaren Coefficienten beliebig genommen werden. Ist es unmöglich, solche Glieder zu finden, so enthält die adjungirte Curve blos die Glieder mit beliebigen Coefficienten, welche auf der dem Ursprung abgewendeten Seite von PQ liegen. Im anderen Falle zieht man die Gerade QP_2 parallel der Geraden niederster Dimension, die den dritten Exponenten ergiebt, und sucht solche Glieder, welche bei der ersten Transformation auf die dem Ursprung zugewendete Seite von PQ_1 fallen und zugleich bei der zweiten Transformation auf die dem Ursprung abgewendete Seite von PQ_1 fallen. In dieser Weise ist fortzufahren bis zu der Transformation, die den letzten kritischen Exponenten ergiebt.

Nachdem auf graphische Weise die Function $\varphi(xy)$ bestimmt ist, können auch ohne weitere Rechnung die Reihenentwicklungen derselben angegeben werden. Es lässt sich ersehen, dass die niedersten Glieder von $\varphi(xy)$ bei den Transformationen blos solche mehrfache Factoren enthalten können, welche auch bei den Transformationen von $f(xy)$ als mehrfache Factoren auftraten. Daraus folgt, dass die adjungirte Curve Reihenentwicklungen liefert, deren Glieder bis zu ihren letzten kritischen Exponenten übereinstimmen, sowohl den Exponenten als auch den Coefficienten nach mit Anfangsgliedern des gegebenen superlinearen Zweigs; diese Zweige der adjungirten Curve berühren also den letzteren Zweig. Daneben erhält man im Allgemeinen noch eine Reihe linearer Zweige mit blos einem kritischen Exponenten, die in keinem Glied mit der gegebenen Reihe übereinstimmen.

Wir unterlassen es, der grossen Umständlichkeit halber, anzugeben, wie diese graphische Methode durch die Rechnung ersetzt werden kann. Aber es ist selbstverständlich, dass die geometrische Konstruction rechnerisch verfolgt werden kann.

Beispiel: Eine Curve enthalte im Ursprung den superlinearen Zweig von der Ordnung 6:

$$y = x - x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{13}{6}} + \cdots$$

Es sollen die Reihenentwicklungen der adjungirten Curve bestimmt werden.

Es ist

$$\Delta = 6; \quad \Delta_1 = 6; \quad \Delta_2 = 2; \quad \Delta_3 = 1; \quad \Delta' = 1; \quad \Delta'' = 3; \quad \Delta''' = 2;$$

$$\beta_1 = 1; \quad \gamma_1 = 4; \quad \delta_1 = 13,$$

also

$$2N = (6-6).1.6 + (6-2).4.2 + (2-1).13.1 = 45$$

und

$$\frac{2N}{\Delta} - 1 = \frac{45}{6} - 1 = 6\tfrac{1}{2}.$$

Man mache $O'P = 6\frac{1}{2}$ (Fig. 5); ziehe die Geraden PQ, PQ_1, PQ_2 derart, dass die trigonometrischen Tangenten der Neigungswinkel dieser Geraden gegen die X'-Achse resp. $1, \frac{3}{4}, \frac{6}{11}$ sind. Die Glieder, welche auf der vom Ursprung abgewendeten Seite von PQ liegen, dürfen vorkommen, jedes mit beliebigem Coefficienten; diese Glieder sind von der siebenten Ordnung; also verhält sich eine Curve, die sieben lineare Zweige durch den Ursprung enthält, adjungirt. Nun nehme man die Glieder auf a, b, c, d, e, f so an, dass sie $(y-x)^3$ als Factor enthalten, also von der Form sind:

$$(y-x)^3 (Ax^2 + Bxy + Cy^2);$$

die Glieder auf $g, h, \ldots n$ lasse man einstweilen beliebig. Es werden sich also die Glieder auf $a, \ldots f$ bei der Transformation $y = u + x$ auf a, b, c transformiren, und nun kann man die Coefficienten der Glieder auf $g, h, \ldots n$ so specialisiren, dass nach der ersten Transformation je die beiden Glieder auf b und m, sowie c und n den Factor $u + x^{\frac{4}{3}}$ enthalten, denn bm und cu sind parallel PQ_1. Bei der nächsten Transformation fallen alle transformirten Glieder auf Punkte, die auf der dem Ursprung abgewendeten Seite von PQ_2 liegen, also auch bei allen noch folgenden Transformationen. Damit ist $\varphi(xy)$ vollständig bestimmt; denn es können keine anderen Glieder mehr vorkommen. Die Glieder niederster Dimension sind die auf $a, b, \ldots f$ liegenden, und zwar von der Form

$$(y-x)^3 (Ax^2 + Bxy + Cy^2).$$

Der zweite Factor zeigt an, dass man zwei lineare Zweige von der Form

$$\text{1)} \qquad \begin{cases} y = ax + bx^2 + \cdots \\ y = a_1 x + b_1 x^2 + \cdots \end{cases}$$

erhält. Der erste Factor erfordert die Transformation $y = u + x$, worauf die Gerade cn Gerade niederster Dimension wird; diese enthält den Factor $u + x^{\frac{4}{3}}$ einfach, also lautet die weitere Reihenentwicklung:

$$\text{2)} \qquad y = x - x^{\frac{4}{3}} + cx^{\frac{5}{3}} + \cdots$$

Die adjungirte Curve hat also die zwei linearen Zweige 1) und einen Zweig 2) dritter Ordnung, dessen zwei erste Glieder mit der gegebenen Reihenentwicklung übereinstimmen.

Diese Methode kann auf Curven mit jeder beliebigen Singularität ausgedehnt werden. Wir beschränken uns jedoch auf ein einzelnes Beispiel: Es soll die adjungirte Curve zu einem k-fachen Punkt mit getrennten Tangenten gefunden werden. Da die Glieder niederster Dimension die Form

$$a_0 y^k + a_1 y^{k-1} x + \cdots a_k x^k$$

haben, so ist AB (Fig. 6) Gerade niederster Dimension, wobei $OA = OB = k$. Da AB diejenige Gerade ist, welche die letzten kritischen Exponenten ergiebt, so bestimmt man den Schnitt A' der Geraden parallel der X-Ache im Abstand 1 (neue X'-Achse) und der Geraden AB, macht $PA' = 1$, so dass also $O'P = k - 2$. Es darf dann die adjungirte Curve sämmtliche Punkte enthalten, die auf der vom Ursprung abgewendeten Seite von PQ liegen, und dies sind die Glieder von der Ordnung $k - 1$; da dieselben beliebige Coefficienten haben, so zerfällt die Entwicklung in $k - 1$ lineare Zweige, woraus also der bekannte Satz folgt: Die allgemeinste adjungirte Curve geht $(k-1)$mal durch einen k-fachen Punkt mit getrennten Tangenten.

Mit Hilfe der Entwicklungen von § 4 sind wir in den Stand gesetzt, diese graphische Methode so zu modificiren, dass die Zeichnung umgangen werden kann. Wir gehen hierzu aus von der rationalen Form der Curve, haben also, wenn blos die Reihenentwicklung des superlinearen Zweiges gegeben ist, nach § 1 zuerst die rationale Form herzustellen.

Die gegebene Curve sei von der Form 28) und liefere für die Umgebung des singulären Punktes eine Reihenentwicklung von der Form 10). Nach Früherem hat die Gleichung der adjungirten Curve die Eigenschaft, dass die niederste Potenz in x, sofern man y durch die Reihenentwicklung 10) ersetzt, höher wird als $x^{\frac{2N}{\Delta}-1}$. Benützen wir die Bezeichnung des § 4, so ist die allgemeinste Form, die eine solche Curve haben kann:

$$33)\quad \Sigma\, const\, x^p y^q [\Phi_{11}(xy)]^{r_1} [\Phi_{12}(xy)]^{r_2} \ldots [\Phi_{1m}(xy)]^{r_m} [\Phi_{21}(xy)]^{s_1} \ldots [\Phi_{r-1,o}(xy)]^{v_o},$$

wo $\Phi_{r-1,o}(xy)$ der Theil der Function 28) ist, welcher nothwendig ist zur Bestimmung der Reihenentwicklung bis zu dem Exponenten, der dem letzten kritischen vorangeht, und wo folgender Bedingung genügt wird:

$$p + \frac{\beta_1}{\Delta'} q + \frac{B_1}{\Delta'} r_1 + \frac{B_2}{\Delta'} r_2 + \cdots \frac{B_m}{\Delta'} r_m + \frac{\Gamma_1}{\Delta' \Delta''} s_1 + \cdots$$
$$+ \frac{A_o}{\Delta' \Delta'' \ldots \Delta^{(r-1)}} v_o > \frac{2N}{\Delta} - 1.$$

Da die linke Seite eine Zahl ergiebt, deren Nenner höchstens $\Delta' \Delta'' \ldots \Delta^{(r-1)}$ ist, so ist die niederste Zahl, die von der linken Seite erreicht werden darf, der nächste Werth nach $\frac{2N}{\Delta} - 1$, der den Nenner $\Delta'\Delta''\ldots\Delta^{(r-1)}$ hat. Sei dieser $\frac{M}{\Delta'\Delta''\ldots\Delta^{(r-1)}}$, so wird obige Bedingung:

$$34) \quad p + \frac{\beta_1}{\Delta'} q + \frac{B_1}{\Delta'} r_1 + \cdots \frac{A_0}{\Delta'\Delta''\ldots\Delta^{(r-1)}} \overline{\geqq} \frac{M}{\Delta'\Delta''\ldots\Delta^{(r-1)}}.$$

Um nun noch die Reihenentwicklungen der allgemeinsten adjungirten Curve zu finden, hat man die Glieder niederster Dimension, welche die adjungirte Curve enthalten darf, aufzusuchen. Man kann sich jedenfalls auf diejenigen Ausdrücke der Summe 33) beschränken, bei welchen die rechte Seite der Bedingung 34) den kleinsten Werth erreicht. Unter diesen hat aber wieder derjenige Ausdruck den niedersten Grad, der den höchsten Exponenten v_o hat; denn

$$\Phi_{r-1,1}(xy), \ \Phi_{r-1,2}(xy)\ldots \ \Phi_{r-1,o}(xy)$$

haben dasselbe niederste Glied in y allein, nämlich $y^{\Delta'\Delta''\ldots\Delta^{(r-1)}}$. Wird aber y durch die Reihe ersetzt, so ergiebt die letzte Function eine höhere Potenz in x als die vorletzte, diese wiederum eine höhere Potenz als die nächst vorhergehende etc. Man wählt also unter den möglichen Ausdrücken diejenigen mit dem höchsten Exponenten in $\Phi_{r-1,o}(xy)$, unter der dadurch ausgeschiedenen Gruppe von Ausdrücken diejenigen mit dem höchsten Exponenten in $\Phi_{r-1,o-1}(xy)$ etc. und kommt auf diese Weise zu Ausdrücken von der Form

$$35) \qquad const\; x^{p'} y^{q'} [\Phi_{11}(xy)]^{r_1'} \ldots [\Phi_{r-1,o}(xy)]^{v_o'},$$

welche die Glieder niederster Dimension der adjungirten Curve repräsentiren. Diese Form zeigt uns, dass wir je v', $v'_{o-1}\ldots r'_1$ Entwicklungen erhalten, die mit der Reihenentwicklung des gegebenen superlinearen Zweigs übereinstimmen resp. bis zum ersten, zweiten ... Gliede der gegebenen Reihenentwicklung vor dem Glied mit dem letzten kritischen Exponenten. Dazu treten noch q' lineare Entwicklungen von der Form $y = ax + bx^2 + \cdots$, und, wenn der Ausdruck 35) kein Glied mit y allein enthält, d. h., wenn p' nicht gleich Null, so treten noch eine weitere Anzahl linearer Entwicklungen hinzu, die man dadurch erhält, dass man die Summe der Anzahl der Ordnungen aller bisher gefundenen Entwicklungen bestimmt und diese Zahl abzieht von dem Potenzexponenten der niedersten Potenz in y allein, welche die adjungirte Curve enthalten darf. Diese letztere Zahl, welche die Anzahl der Ordnungen sämmtlicher Reihenentwicklungen der adjungirten Curve ist, erhält man aus einem Ausdruck, den man analog dem Ausdruck 35) bestimmt, wobei von vornherein $p' = 0$ gesetzt wurde. Die Differenz dieser beiden Zahlen liefert die Anzahl der linearen Entwicklungen, die noch hinzutreten. Da die Coefficienten aller Ausdrücke von 33) von einander unabhängig sind, so können die so bestimmten Entwicklungen sich nicht zu höheren superlinearen Zweigen zusammenordnen.

Beispiel. Wir wählen das Beispiel, das wir früher nach der graphischen Methode behandelt hatten.

Die Curve

$$f(xy) = [(y-x)^3 + x^4]^2 - 9(y-x)^2 x^7 = 0$$

giebt die Reihenentwicklung

$$y = x - x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{13}{6}} + \cdots$$

Die Theile von $f(xy)$, welche zur Bestimmung der zwei ersten Exponenten nothwendig sind, lauten:

$$y - x \quad \text{und} \quad (y-x)^3 + x^4.$$

Setzt man in jedem für y die Reihenentwicklung, so ergeben sich als niederste Potenzen in x die Potenzen $x^{\frac{4}{3}}$ und $x^{\frac{29}{6}}$. Da $\frac{2N}{\varDelta} - 1 = 6\frac{1}{2}$, so ist die adjungirte Curve von der Form:

$$\Sigma\, const\, x^p y^q (y-x)^r [(y-x)^3 + x^4]^s,$$

wobei die Bedingung erfüllt sein muss:

$$p + q + \frac{4}{3} r + \frac{29}{6} s > 6\tfrac{1}{2}.$$

Der Ausdruck, für welchen die rechte Seite am kleinsten wird, entspricht den Werthen

$$s = 1; \quad r = 0; \quad p + q = 2,$$

woraus der Ausdruck niederster Dimension

$$[(y-x)^3 + x^4]\,[Ax^2 + Bxy + Cy^2],$$

und dieser giebt unmittelbar die Reihenentwicklungen:

$$y = ax + bx^2 + \cdots,$$
$$y = a_1 x + b_1 x^2 + \cdots,$$
$$y = x - x^{\frac{4}{3}} + cx^{\frac{5}{3}} + \cdots,$$

in Uebereinstimmung mit dem auf S. 31 gefundenen Resultat.

II.

Zur Theorie der Vectoren und Quaternionen.

Von

Prof. BEEZ

in Plauen i. V.

Einleitung.

Am 16. October 1893 waren fünfzig Jahre verflossen, seit der geniale Mathematiker Sir William Rowan Hamilton, Professor der Astronomie in Dublin, der Irischen Akademie der Wissenschaften daselbst seine Theorie der Quaternionen zum ersten Male vorlegte. Es war ihm nach zehnjährigen Bemühungen gelungen, einen algebraischen Ausdruck zu finden, welcher für den dreidimensionalen Raum dasselbe leistete, wie die gewöhnliche complexe Grösse $x+iy$ für das zweidimensionale Gebiet der Ebene. Er wusste dies dadurch zu erreichen, dass er das für gemein complexe Zahlen geltende Gesetz der Commutativität der Multiplication, nach welchem die Factoren eines Productes unter einander vertauschbar sind, für höhere complexe Zahlen aufhob. Trotz der unleugbaren Vortheile, welche der Quaternionencalcül bei der Behandlung mancher geometrischen und physikalischen Probleme gewährte, trotz der einfachen und übersichtlichen Form, in welcher er sowohl die Rechnung selbst durchzuführen, als die Endresultate derselben darzustellen gestattete, ist er in Deutschland nicht recht heimisch geworden, wenn auch Möbius* ihn sehr hochstellte und Hankel** ihn dem Studium seiner Landsleute dringend empfahl.

Erst seit einigen Jahren, seit man den Zusammenhang zwischen höheren complexen Zahlen, deren Einheiten ein sogenanntes geschlossenes System bilden und deren Multiplication dem associativen Gesetz folgt, mit den linearen homogenen continuirlichen Gruppen erkannt hat — erst zu dieser

* F. A. Möbius, Neuer Beweis des in Hamilton's Lectures on Quaternions aufgestellten associativen Princips bei der Zusammensetzung von Bögen grösster Kreise auf einer Kugelfläche. Berichte über die Verhandlungen der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physikalische Klasse. 1859. Bd. VI S. 136—149; wiederum abgedruckt in F. A. Möbius Gesammelten Werken. Leipzig 1885, Bd. II, S. 55—69.

** H. Hankel, Theorie der complexen Zahlensysteme, insbesondere der gemeinen complexen Zahlen und der Hamilton'schen Quaternionen nebst ihrer geometrischen Darstellung. Leipzig 1867.

Zeit ist auch in Deutschland die Quaternionentheorie zu ihrem Rechte gekommen und der berühmte Begründer der Theorie der Transformationsgruppen hat es selbst ausgesprochen*, dass das Zahlensystem, welches Hamilton aufgestellt hat, neben den gewöhnlichen complexen Zahlen unter allen bekannt gewordenen Zahlensystemen bei Weitem das schönste sei.

Woher aber ist es gekommen, dass in Deutschland der Quaternionencalcül an keiner höheren Lehranstalt eine Stätte gefunden hat und die Quaternionen auch jetzt noch weniger um ihrer selbst willen, als weil sie ein besonders lehrreiches Beispiel eines geschlossenen höheren Zahlensystems abgeben, nur gelegentlich erwähnt werden?

Hankel** glaubt, dass die continentalen Mathematiker durch die breite, sich immer wiederholende Darstellung und das Vermischen der algebraischen und geometrischen Gesichtspunkte von dem Studium des Hamilton'schen Werkes abgeschreckt würden und hofft durch totale Veränderung der Darstellung und durch Trennung der formalen Theorie der Quaternionen von dem Nachweis ihrer geometrischen Bedeutung nicht nur grössere Kürze zu erreichen, sondern auch zur Aufklärung über das Wesen und den Grund der neuen imaginären Einheiten beizutragen. Jedenfalls hat Hankel durch die Aufstellung des Begriffs „eines geschlossenen Zahlensystems", in welchem die Producte zweier Einheiten wiederum durch Einheiten desselben Systems in linearer Verbindung sich ausdrücken lassen, die Grundlage der heutigen Theorie der höheren Zahlen geschaffen und insofern auch zur richtigen Würdigung des Quaternionencalcüls viel beigetragen, doch glaube ich, dass noch ein anderer tiefer liegender Grund vorhanden ist, der die deutschen Mathematiker abgehalten hat, sich des von Hamilton geschaffenen analytischen Instrumentes zu bedienen. Die Theorie der Quaternionen birgt in wissenschaftlicher Beziehung eine Lücke, die Hamilton nicht durch scharfe Deduction, sondern durch eine glückliche Induction, die aber seiner Meinung nach den Charakter der Nothwendigkeit besitzt, auszufüllen versucht. Dieser Mangel eines streng mathematischen Beweises, an dessen Stelle eine „quasi metaphysical speculation", wie Hamilton's Schüler Tait*** sich ausdrückt, gesetzt ist, tritt

* Sophus Lie, Theorie der Transformationsgruppen, 3. Bd. S. 749.

** Hankel l. c. S. 196.

*** P. G. Tait, an elementary treatise on quaternions, Oxford 1867 (dem wir alle unsere Citate über die Theorie der Quaternionen entnehmen) p. 64 ... we shall shaw that no other assumption is possible, following for this purpose a very curious quasi metaphysical speculation of Hamilton's. Dieser Beweis folgt dann in § 93 und zerfällt in zwei Theile. Erstens wird bewiesen(?), dass das Quadrat eines Vectors eine reine (reelle) Zahl sei; zweitens, dass das Product zweier rechtwinkliger Vectoren einen auf beiden senkrechten Vector darstelle. Beide Sätze sind aber lediglich Folge der eingeführten symbolischen Bezeichnung und lassen sich weder geometrisch, noch metaphysisch beweisen.

hervor bei Hamilton's Annahme, dass das Symbol eines Vectors identisch sei mit dem Symbol einer rechtwinkligen Drehung um denselben. Es soll im Folgenden gezeigt werden, dass diese Annahme durchaus nicht nothwendig, aber zulässig ist, weil sie nicht gegen die Permanenz der formalen Gesetze streitet, und dass noch andere Beziehungen zwischen den Symbolen des Vectors und der rechtwinkligen Drehung um denselben aufgestellt werden können, die dasselbe leisten wie die Hamilton'sche Identität, wenn auch zugegeben werden muss, dass die Hamilton'sche Annahme die denkbar einfachste und für die Rechnung bequemste ist. Aber gerade in dieser Einfachheit oder vielmehr Beschränktheit liegt auch die Ursache, dass der Hamilton'sche Quaternionencalcül eine Ausdehnung auf mehr als vier Einheiten nicht zulässt, während eine solche bei etwas allgemeinerer Voraussetzung über die Beziehung eines Vectors zur rechtwinkligen Drehung um denselben, wie wir sehen werden, ohne Schwierigkeit für $8, 16, \ldots 2^n$ Einheiten geleistet werden kann. Die sogenannten Biquaternionen und andere Quaternionensysteme sind nicht sowohl Verallgemeinerungen der Quaternionen, als vielmehr Combinationen des Hamilton'schen Systems mit irgend einem anderen Zahlensystem, welche vermöge einer Operation, die Herr Scheffers* als „Multiplication" bezeichnet, zu Stande gebracht werden.

§ 1. Die Symbole der primitiven Einheitsvectoren und der rechtwinkligen Drehungen um dieselben.

Es mögen die Richtungscoefficienten der drei Achsen X_1, X_2, X_3 eines rechtwinkligen Coordinatensystems bezüglich mit e_1, e_2, e_3 bezeichnet werden, so dass ein von dem Coordinatenanfang O nach dem Punkt M, dessen rechtwinklige Coordinaten x_1, x_2, x_3 sind, gezogener Vector ϱ in Bezug auf Grösse und Lage durch das Symbol

$$\varrho = e_1 x_1 + e_2 x_2 + e_3 x_3$$

dargestellt werden kann. Der Vector heisst „Einheitsvector", wenn

$$OM^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

ist. Alsdann drücken x_1, x_2, x_3 die Cosinus der Winkel aus, welche der Vector ϱ mit den drei Achsen X_1, X_2, X_3 bildet. Ist $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, so stellt ϱ einen Einheitsvector dar, der mit der Achse X_1 zusammenfällt, ebenso sind e_2 und e_3 die Einheitsvectoren auf der X_2- und X_3-Achse. Die Richtungscoefficienten e_1, e_2, e_3 können also auch als die mit den Achsen zusammenfallenden Einheitsvectoren bezeichnet werden, die wir kurz „primitive Einheitsvectoren" nennen wollen. Die um diese primitiven Einheitsvectoren vorgenommenen rechtwinkligen Drehungen $\widehat{e_2 e_3}$, $\widehat{e_3 e_1}$,

* Siehe Mathem. Annalen Bd. 39 S. 374; vergl. auch die Anmerkung ** von E. Study ebendas. S. 520/21 über Clifford's Biquaternionen.

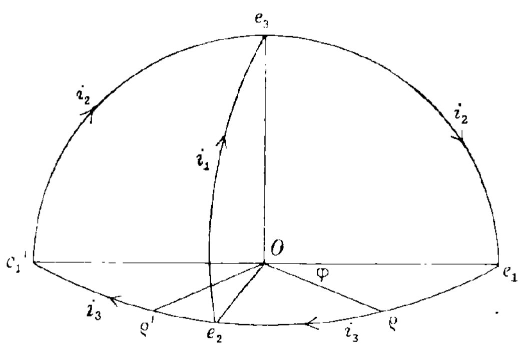
$\widehat{e_1 e_2}$ (siehe Fig. 1), welche, von den positiven Achsen aus gesehen, sämmtlich in der Richtung des Uhrzeigers bewirkt werden sollen und also die Vectoren e_2, e_3, e_1 in die Vectoren e_3, e_1, e_2 überführen, mögen mit i_1, i_2, i_3 bezeichnet werden. Nun ist

$$e_2 = \left(e_1 \cdot \frac{1}{e_1}\right) e_2 = e_1 \left(\frac{1}{e_1} e_2\right),$$

da das associative Gesetz für die Multiplication der neuen Einheiten beibehalten werden soll; also drückt $\frac{1}{e_1} e_2$ die rechtwinklige Drehung aus, welche den Einheitsvector e_1 in den Einheitsvector e_2 transformirt. Diese rechtwinklige Drehung ist senkrecht gegen den Einheitsvector e_3, also ist

$$1) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} & \frac{1}{e_1} e_2 = i_3 \\ \text{und ebenso} & \\ & \frac{1}{e_2} e_3 = i_1 \\ & \frac{1}{e_3} e_1 = i_2 \end{array} \right. \qquad \text{(siehe die rechte Seite der Fig. 1)}$$

Fig. 1.



und bei entgegengesetzter Drehung:

$$1^*) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{e_2} e_1 = -\, i_3 \\ \frac{1}{e_3} e_2 = -\, i_1 \\ \frac{1}{e_1} e_3 = -\, i_2. \end{array} \right.$$

Durch linksseitige Multiplication der Gleichungen in 1) mit den entsprechenden in 1*) ergiebt sich:

$$\left(\frac{1}{e_1}e_2\right)\left(\frac{1}{e_2}e_1\right) = -\,i_3^{\,2} \quad \text{u. s. w.},$$

$$2)\qquad \begin{cases} \text{also:} & i_3^{\,2} = -1 \\ \text{und analog} & i_1^{\,2} = -1 \\ & i_2^{\,2} = -1. \end{cases}$$

Da auch die Division als möglich vorausgesetzt werden soll, so hat man noch:

$$2^*)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{i_3} = -\,i_3 \\ \dfrac{1}{i_2} = -\,i_2 \\ \dfrac{1}{i_1} = -\,i_1. \end{cases}$$

Die Symbole i_1, i_2, i_3 drücken aber nicht blos die rechtwinkligen Drehungen der Vectoren e_2, e_3, e_1 in die Vectoren e_3, e_1, e_2 aus, sondern transformiren überhaupt jeden in den Ebenen $e_2 e_3$, $e_3 e_1$, $e_1 e_2$ gelegenen Vector ϱ in einen auf ihn senkrechten Vector ϱ' derselben Ebene. Denn, es mögen sowohl ϱ als ϱ' in der Ebene $e_1 e_2$ gelegen sein und ϱ mit e_1 den Winkel φ bilden, so ist, wenn ϱ einen Einheitsvector bedeutet:

$$\varrho = e_1(\cos\varphi + i_3 \sin\varphi)$$

und

$$\begin{aligned} \varrho' &= \varrho\, i_3 \\ &= e_1(\cos\varphi + i_3\sin\varphi)\left(\cos\frac{\pi}{2} + i_3\sin\frac{\pi}{2}\right) \\ &= e_1\left[\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + i_3\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right], \end{aligned}$$

woraus das Gesagte erhellt. Es sind also i_1, i_2, i_3 die Symbole einer rechtwinkligen Drehung um die Achsen e_1, e_2, e_3 überhaupt.

Aus der identischen Gleichung

$$\left(\frac{1}{e_2}e_3\right)\left(\frac{1}{e_3}e_1\right) = \left(\frac{1}{e_2}e_1\right)$$

folgt weiter:

$$3)\qquad \begin{cases} & i_1 i_2 = -\,i_3 \\ \text{und analog} & i_2 i_3 = -\,i_1 \\ & i_3 i_1 = -\,i_2, \end{cases}$$

welche Gleichungen ausdrücken, dass die Aufeinanderfolge zweier rechtwinkliger Drehungen um zwei primitive Einheitsvectoren in der Richtung des Uhrzeigers äquivalent ist einer einzigen rechtwinkligen Drehung um den dritten primitiven Einheitsvector in entgegengesetzter Richtung (s. die rechte Seite der Fig. 1).

Multiplicirt man die Gleichungen 3) der Reihe nach rechtsseitig mit i_2, i_3, i_1, so kommt:

$$3^*)\quad \begin{cases} i_1 = i_3 i_2 \\ i_2 = i_1 i_3 \\ i_3 = i_2 i_1, \end{cases}$$

von welchen Gleichungen die erste unmittelbar aus der linken Seite der Figur 1 abgelesen werden kann. Aus 3 und 3* ergiebt sich endlich:

$$4)\quad \begin{cases} i_3 i_2 = -\, i_2 i_3 \\ i_1 i_3 = -\, i_3 i_1 \\ i_2 i_1 = -\, i_1 i_2, \end{cases}$$

woraus sich mit voller Evidenz ergiebt, dass die Symbole der rechtwinkligen Drehungen i_1, i_2, i_3 nicht commutativ sind, dass vielmehr ein Product aus zwei derselben sein Vorzeichen ändert, wenn die Factoren mit einander vertauscht werden. Aus 3) findet man noch durch rechtsseitige Multiplication bezüglich mit i_3, i_1, i_2:

$$5)\quad \begin{cases} i_1 i_2 i_3 = 1 \\ i_2 i_3 i_1 = 1 \\ i_3 i_1 i_2 = 1 \end{cases}$$

Producte, die durch cyklische Vertauschung der Factoren in einander übergehen.

Während nun die Eigenschaften der Symbole i der rechtwinkligen Drehungen um die primitiven Einheitsvectoren sich in vollkommen bestimmter Weise und geometrisch anschaulich entwickeln lassen, ist dies keineswegs der Fall mit den Symbolen der primitiven Einheitsvectoren selbst. Aus den Gleichungen:

$$6)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{e_1} e_2 = i_3 \\ \dfrac{1}{e_2} e_3 = i_1 \\ \dfrac{1}{e_3} e_1 = i_2 \end{cases}$$

lassen sich keine einfacheren Beziehungen der e zu den i ermitteln. Da jedoch aus 3) und 2*) sich ergiebt:

$$7)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{i_1} i_2 = i_3 \\ \dfrac{1}{i_2} i_3 = i_1 \\ \dfrac{1}{i_3} i_1 = i_2; \end{cases}$$

also:

8) $$\begin{cases} \frac{1}{e_1} e_2 = \frac{1}{i_1} i_2 \\ \frac{1}{e_2} e_3 = \frac{1}{i_2} i_3 \\ \frac{1}{e_3} e_1 = \frac{1}{i_3} i_1 \end{cases}$$

ist, so lässt sich schliessen, dass die i den e proportional sind, dass also mit Anwendung eines Proportionalitätsfactors a:

8*) $$\begin{cases} i_1 = a e_1 \\ i_2 = a e_2 \\ i_3 = a e_3 \end{cases}$$

gesetzt werden kann. So lange a eine reelle oder auch gemein complexe Grösse ist, welche mit den e als commutativ angesehen werden darf, ergeben sich aus 8*) ohne Weiteres die Gleichungen 8). Ist a eine höhere complexe Zahl, die mit den e nicht vertauscht werden kann, ohne dass der Werth des Productes geändert wird, so hat man zu bedenken, dass aus

$$i_k = a e_k$$

sich ergiebt:

$$\frac{1}{i_k} = \frac{1}{e_k} \cdot \frac{1}{a},$$

dann wird ebenfalls:

$$\frac{1}{i_k} \cdot i_l = \frac{1}{e_k} \frac{1}{a} \cdot a \,.\, e_l = \frac{1}{e_k} e_l.$$

Hamilton hilft sich sehr einfach dadurch, dass er $i_k = e_k$ setzt, also $a = 1$ annimmt. Dann müssen natürlich die Symbole e denselben Gleichungen genügen, wie die Symbole i, es muss also:

A) $$e_1^2 = -1, \quad e_2^2 = -1, \quad e_3^2 = -1,$$

B) $$e_2 e_1 = -e_1 e_2, \quad e_3 e_2 = -e_2 e_3, \quad e_3 e_1 = -e_1 e_3,$$

C) $$e_3 e_2 = e_1, \quad e_2 e_1 = e_3, \quad e_1 e_3 = e_2$$

sein, welch' letzte Gleichungen sich in die eine

C*) $$e_1 e_2 e_3 = 1$$

zusammenfassen lassen.

Die Gleichungen unter A, B, C besagen also:

A. Das Quadrat eines primitiven Einheitsvectors ist gleich der negativen Einheit.

B. Das Product zweier primitiven Einheitsvectoren ändert sein Vorzeichen, wenn man die Factoren vertauscht.

C. Das Product dreier primitiver Einheitsvectoren in der Reihenfolge 1, 2, 3 oder einer durch cyklische Vertauschung daraus hervorgegangenen ist gleich der positiven Einheit.

Meiner Ansicht nach ist es unmöglich, diese Sätze geometrisch oder metaphysisch zu beweisen; sie sind eben eine nothwendige Folge der Annahme $a = 1$ und verlieren ihre Giltigkeit theilweise oder gänzlich, wenn man diese Annahme fallen lässt. Dass sich noch andere als die von Hamilton vorausgesetzten Beziehungen zwischen den e und i aufstellen lassen, welche ebenfalls den Gleichungen 8) genügen, soll an zwei Beispielen nachgewiesen werden.

Es sei erstens

$$a = e_1 e_2 e_3,$$

dann ist:

$$\text{9)} \quad \begin{cases} i_1 = (e_1 e_2 e_3) e_1 \\ i_2 = (e_1 e_2 e_3) e_2 \\ i_3 = (e_1 e_2 e_3) e_3. \end{cases}$$

Da nun auch:

$$i_1 = \frac{1}{e_2} e_3$$

$$i_2 = \frac{1}{e_3} e_1$$

$$i_3 = \frac{1}{e_1} e_2,$$

so hat man zur Bestimmung der e die Gleichungen:

$$(e_1 e_2 e_3) e_1 = \frac{1}{e_2} e_3$$

$$(e_1 e_2 e_3) e_2 = \frac{1}{e_3} e_1$$

$$(e_1 e_2 e_3) e_3 = \frac{1}{e_1} e_2.$$

Man genügt allen diesen Gleichungen, wenn man

$$\text{9*)} \quad \begin{cases} e_1^2 = -1, \quad e_2^2 = -1, \quad e_3^2 = -1, \\ e_3 e_2 = -e_2 e_3, \quad e_1 e_3 = -e_3 e_1, \quad e_2 e_1 = -e_1 e_2 \end{cases}$$

annimmt. Es sind dies wiederum die Gleichungen A) und B), während C) nicht erfüllt wird. Es wird dann

$$i_1 = e_3 e_2, \quad i_2 = e_1 e_3, \quad i_3 = e_2 e_1.$$

Es möge zweitens

$$a = e_3 e_2$$

gesetzt werden, so dass also:

$$\text{10)} \quad \begin{cases} i_1 = (e_3 e_2) e_1 = \dfrac{1}{e_2} e_3, \\ i_2 = (e_3 e_2) e_2 = \dfrac{1}{e_3} e_1, \\ i_3 = (e_3 e_2) e_3 = \dfrac{1}{e_1} e_2. \end{cases}$$

Diese Gleichungen werden befriedigt durch die Annahme:

10*) $$\begin{cases} e_1 = 1, \quad e_2^2 = -1, \quad e_3^2 = -1, \\ e_3 e_2 = -e_2 e_3, \end{cases}$$

wobei weder A) noch B) noch C) bestehen bleiben. Man erhält in diesem Falle:

$$i_1 = e_3 e_2, \quad i_2 = -e_3, \quad i_3 = e_2.$$

§ 2. Zusammenhang zwischen dem Symbol des allgemeinen Einheitsvectors und einer rechtwinkligen Drehung um denselben.

Ein beliebiger Vector im Raume wird der Grösse und Lage nach durch den Ausdruck:

$$\varrho = e_1 x_1 + e_2 x_2 + e_3 x_3$$

dargestellt, worin e_1, e_2, e_3 die Richtungscoefficienten der drei auf einander senkrechten Coordinatenachsen X_1, X_2, X_3 bedeuten und die absolute Länge des Vectors r durch die Gleichung

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

gegeben ist. Ein zweiter Vector sei

$$\varrho' = e_1 x_1' + e_2 x_2' + e_3 x_3'.$$

Da identisch

$$\varrho' = \varrho\left(\frac{1}{\varrho}\varrho'\right),$$

so stellt der Quotient $\frac{1}{\varrho}\varrho'$ zunächst das Symbol der Drehung und Streckung dar, welche den Vector ϱ in den Vector ϱ' überführt. Es gilt nun die Gleichung

$$\frac{1}{\varrho}\varrho' = \frac{1}{e_1 x_1 + e_2 x_2 + e_3 x_3}(e_1 x_1' + e_2 x_2' + e_3 x_3')$$

mit Hilfe der drei oben charakterisirten Zahlensysteme zu entwickeln. — Es geschehe dies zunächst für das zweite, dessen Einheiten e den Bedingungen A) und B) unterliegen, nämlich:

$$e_1^2 = -1, \quad e_2^2 = -1, \quad e_3^2 = -1,$$

$$e_2 e_1 = -e_1 e_2, \quad e_3 e_2 = -e_2 e_3, \quad e_1 e_3 = -e_3 e_1.$$

Da in Gemässheit dieser Multiplicationsregeln

$$\varrho \cdot \varrho = \varrho^2 = (e_1 x_1 + e_2 x_2 + e_3 x_3)(e_1 x_1 + e_2 x_2 + e_3 x_3)$$
$$= -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

ist, so ergiebt sich:

$$\frac{1}{e_1 x_1 + e_2 x_2 + e_3 x_3} = -\frac{e_1 x_1 + e_2 x_2 + e_3 x_3}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Sind sowohl ϱ als ϱ' Einheitsvectoren, also:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,$$
$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = 1,$$

so erhält man:

$$1)\quad \begin{cases} \frac{1}{\varrho}\varrho' = -\varrho\varrho' = -(e_1x_1+e_2x_2+e_3x_3)(e_1x_1'+e_2x_2'+e_3x_3') \\ \quad = x_1x_1'+x_2x_2'+x_3x_3'+e_2e_1(x_1x_2'-x_2x_1')+e_3e_2(x_2x_3'-x_3x_2') \\ \quad\quad +e_1e_3(x_3x_1'-x_1x_3'). \end{cases}$$

Da die Grössen x_1, x_2, x_3 und x_1', x_2', x_3' die Cosinus der Winkel sind, welche der Vector ϱ bezüglich ϱ' mit den drei Achsen bildet, so ist der Winkel φ, welchen ϱ mit ϱ' einschliesst, durch die Gleichung:

$$\cos\varphi = x_1x_1'+x_2x_2'+x_3x_3'$$

bestimmt. Für einen sowohl auf ϱ als auf ϱ' im Coordinatenanfang senkrecht stehenden Einheitsvector

$$\varrho'' = e_1x_1''+e_2x_2''+e_3x_3''$$

gelten ferner die Gleichungen:

$$x_1x_1''+x_2x_2''+x_3x_3''=0,$$
$$x_1'x_1''+x_2'x_2''+x_3'x_3''=0,$$

aus denen sich die Verhältnisse:

$$x_1'':x_2'':x_3'' = x_2x_3'-x_3x_2' : x_3x_1'-x_1x_3' : x_1x_2'-x_2x_1'$$

ableiten lassen. Mit Anwendung eines Proportionalitätsfactors λ kann man auch schreiben:

$$\lambda x_1'' = x_2x_3'-x_3x_2',$$
$$\lambda x_2'' = x_3x_1'-x_1x_3',$$
$$\lambda x_3'' = x_1x_2'-x_2x_1',$$

woraus, da auch

$$x_1''^2+x_2''^2+x_3''^2=1$$

ist,

$$\lambda = \pm\sqrt{(x_2x_3'-x_3x_2')^2+(x_3x_1'-x_1x_3')^2+(x_1x_2'-x_2x_1')^2}$$

hervorgeht. Es ist dies offenbar der $\sin\varphi$, wie aus der Gleichung:

$$\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2)-(x_1x_1'+x_2x_2+x_3x_3')^2}$$

ersichtlich ist. Durch Einführung dieser Werthe in den Ausdruck für $\frac{1}{\varrho}\varrho'$ erhält man daher:

$$\frac{1}{\varrho}\varrho' = \cos\varphi + (e_3e_2x_1''+e_1e_3x_2''+e_2e_1x_3'')\sin\varphi,$$

welche Gleichung vermöge der Eigenschaften der Symbole e auch geschrieben werden kann:

$$\frac{1}{\varrho}\varrho' = \cos\varphi + e_1e_2e_3(e_1x_1''+e_2x_2''+e_3x_3'')\sin\varphi,$$

oder kürzer:

$$1^*)\quad \frac{1}{\varrho}\varrho' = \cos\varphi + e_1e_2e_3\varrho''\sin\varphi.$$

Handelt es sich um eine rechtwinklige Drehung, so wird $\varphi = 90^0$, also, wenn man eine rechtwinklige Drehung um den Einheitsvector ϱ'' mit u'' bezeichnet:

2) $$u'' = e_1 e_2 e_3 \varrho'' \ldots$$

Man erhält also das Symbol einer rechtwinkligen Drehung um den Einheitsvector ϱ'', wenn man ϱ'' linksseitig mit dem Product $e_1 e_2 e_3$ multiplicirt. Setzt man in 2) für ϱ'' der Reihe nach e_1, e_2, e_3, sowie für $u'' \ldots i_1, i_2, i_3$, so findet man für die rechtwinkligen Drehungen i_1, i_2, i_3 um die primitiven Einheitsvectoren wiederum die Formeln 9).

Da nun in dem Hamilton'schen System die Gleichung

C) $$e_1 e_2 e_3 = 1$$

gilt, so hat man in diesem System

3) $$u'' = \varrho'' \ldots,$$

das heisst, das Symbol einer rechtwinkligen Drehung um einen Vector ist gleich dem Symbol des Vectors selbst. Als specielle Fälle ergeben sich aus 3) die Gleichungen:

$$i_1 = e_1, \quad i_2 = e_2, \quad i_3 = e_3.$$

In dem dritten System hatte der Vector ϱ die Gestalt:

$$\varrho = x_1 + e_2 x_2 + e_3 x_3,$$

oder, wenn wir statt e_2 und e_3 die Grössen i und k als Richtungscoefficienten der zweiten und dritten Coordinatenachse einführen*:

$$\varrho = x_1 + i x_2 + k x_3,$$

wobei i und k den Bedingungen genügen:

$$i^2 = -1, \quad k^2 = -1, \quad ki = -ik \ldots$$

Das Symbol i ist hier offenbar dasselbe, wie das i der gewöhnlich complexen Grösse
$$\varrho = x + iy$$
und der Raumvector ϱ geht in den ebenen Vector ϱ über, wenn $x_3 = 0$ ist. In diesem System ist

$$\frac{1}{\varrho}\varrho' = \frac{1}{x_1 + i x_2 + k x_3}(x_1' + i x_2' + k x_3')$$

und da für den Einheitsvector ϱ

$$\frac{1}{x_1 + i x_2 + k x_3} = x_1 - i x_2 - k x_3$$

ist, so wird

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varrho}\varrho' &= (x_1 - i x_2 - k x_3)(x_1' + i x_2' + k x_3') \\ &= x_1 x_1' + x_2 x_2' + x_3 x_3' + ki(x_2 x_3' - x_3 x_2') \\ &\quad - k(x_3 x_1' - x_1 x_3') + i(x_1 x_2' - x_2 x_1').\end{aligned}$$

* Siehe meine Abhandlung: „Ueber conforme Abbildungen von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung“, Zeitschrift für Mathematik und Physik XX S. 263 flg.

Bedeutet wiederum wie oben

$$\varrho'' = x_1'' + i x_2'' + k x_3''$$

einen sowohl auf ϱ als ϱ' senkrechten Einheitsvector und ist

$$x_1 x_1' + x_2 x_2' + x_3 x_3' = \cos\varphi,$$

so wird

$$x_2 x_3' - x_3 x_2' = x_1'' \sin\varphi,$$

$$x_3 x_1' - x_1 x_3' = x_2'' \sin\varphi,$$

$$x_1 x_2' - x_2 x_1' = x_3'' \sin\varphi$$

und man erhält:

$$\frac{1}{\varrho}\varrho' = \cos\varphi + (ki x_1'' - k x_2'' + i x_3)\sin\varphi,$$

welches man auch schreiben kann:

$$\frac{1}{\varrho}\varrho' = \cos\varphi + ki(x_1'' + i x_2'' + k x_3'')\sin\varphi$$
$$= \cos\varphi + ki\varrho''\sin\varphi.$$

Bei rechtwinkliger Drehung wird daher

$$u'' = ki\varrho'',$$

oder, nach der früheren Schreibweise:

4) $$u'' = e_3 e_2 \varrho'' \ldots$$

Man erhält daher in diesem System das Symbol der rechtwinkligen Drehung um einen Vector, wenn man denselben linksseitig mit $e_3 e_2$ multiplicirt. Setzt man in 4) der Reihe nach 1, e_2, e_3 für ϱ'' und i_1, i_2, i_3 für u'', so findet man wiederum die Gleichungen 10).

Der Quotient $\frac{1}{\varrho}\varrho'$ kann nach dem Vorhergehenden je nach den Voraussetzungen, die man über das Verhältniss der i zu den e macht, in drei verschiedenen Formen dargestellt werden. Man hat nämlich:

I) $$\frac{1}{\varrho}\varrho' = \cos\varphi + (e_1 x_1'' + e_2 x_2'' + e_3 x_3'')\sin\varphi = \cos\varphi + \varrho''\sin\varphi,$$

II) $$\begin{cases} \frac{1}{\varrho}\varrho' = \cos\varphi + (e_3 e_2 x_1'' + e_1 e_3 x_2'' + e_2 e_1 x_3'')\sin\varphi \\ \qquad = \cos\varphi + (e_1 e_2 e_3)\varrho''\sin\varphi, \end{cases}$$

III) $$\begin{cases} \frac{1}{\varrho}\varrho' = \cos\varphi + (e_3 e_2 x_1'' - e_3 x_2'' + e_1 x_3'')\sin\varphi \\ \qquad = \cos\varphi + (e_3 e_2)\varrho''\sin\varphi = \cos\varphi + ki\varrho''\sin\varphi. \end{cases}$$

Die erste Gleichung ist die Hamilton'sche. Sie enthält vier primitive Einheiten 1, e_1, e_2, e_3, welche ein höheres geschlossenes Zahlensystem — das Hamilton'sche Quaternionensystem — bilden. Bezeichnet man die vier Einheiten mit ε_0, ε_1, ε_2, ε_3, so finden sich auf Grund der Bedingungsgleichungen A), B), C) des § 1 folgende Werthe der Producte je zweier Einheiten:

$$\varepsilon_0\varepsilon_0 = \varepsilon_0, \quad \varepsilon_1\varepsilon_0 = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2\varepsilon_0 = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_3\varepsilon_0 = \varepsilon_3,$$
$$\varepsilon_0\varepsilon_1 = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1\varepsilon_1 = -\varepsilon_0, \quad \varepsilon_2\varepsilon_1 = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_3\varepsilon_1 = -\varepsilon_2,$$
$$\varepsilon_0\varepsilon_2 = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_1\varepsilon_2 = -\varepsilon_3, \quad \varepsilon_2\varepsilon_2 = -\varepsilon_0, \quad \varepsilon_3\varepsilon_2 = \varepsilon_1,$$
$$\varepsilon_0\varepsilon_3 = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_1\varepsilon_3 = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2\varepsilon_3 = -\varepsilon_1, \quad \varepsilon_3\varepsilon_3 = -\varepsilon_0,$$

welche Resultate, wie folgt, in einer sogenannten Multiplicationstafel zusammengefasst werden können:

5)

	ε_0	ε_1	ε_2	ε_3
ε_0	ε_0	ε_1	ε_2	ε_3
ε_1	ε_1	$-\varepsilon_0$	$-\varepsilon_3$	ε_2
ε_2	ε_2	ε_3	$-\varepsilon_0$	$-\varepsilon_1$
ε_3	ε_3	$-\varepsilon_2$	ε_1	$-\varepsilon_0$

Der Werth des Productes $\varepsilon_k \cdot \varepsilon_l$ ist an der Kreuzungsstelle der k^{ten} Zeile mit der l^{ten} Reihe in dieser Tafel zu finden, also z. B.:

$$\varepsilon_2\varepsilon_3 = -\varepsilon_1, \quad \varepsilon_3\varepsilon_1 = -\varepsilon_2.$$

Noch einfacher gestaltet sich die Tafel, wenn man den Träger der Indices ε unterdrückt und schreibt:

6)

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	-0	-3	2
2	2	3	-0	-1
3	3	-2	1	-0

Zwei Zahlen a und b in diesem Quaternionensystem haben die Form:

$$a = a_0\varepsilon_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3,$$
$$b = b_0\varepsilon_0 + b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_3.$$

Durch rechtsseitige Multiplication nach dem distributiven Gesetz erhält man das Product ab, welches von dem durch linksseitige Multiplication erhaltenen ba verschieden ist, da die Producte $e_i e_k$ und $e_k e_i$ für $i, k = 1, 2, 3$ verschieden sind.

Bezeichnet man die Einheiten des zweiten Systems

$$1,\quad e_3 e_2,\quad e_1 e_3,\quad e_2 e_1,$$

von denen nur die erste primitiv ist, während die anderen zusammengesetzt sind, der Reihe nach mit ε_0, ε_1, ε_2, ε_3, so findet man auf Grund von 9*):

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_0\varepsilon_0 = \varepsilon_0, && \varepsilon_1\varepsilon_0 = \varepsilon_1,\\
&\varepsilon_0\varepsilon_1 = \varepsilon_1, && \varepsilon_1\varepsilon_1 = (e_3 e_2)(e_3 e_2) = -e_3^2 e_2^2 = -\varepsilon_0,\\
&\varepsilon_0\varepsilon_2 = \varepsilon_2, && \varepsilon_1\varepsilon_2 = (e_3 e_2)(e_1 e_3) = -e_2 e_1 = -\varepsilon_3,\\
&\varepsilon_0\varepsilon_3 = \varepsilon_3, && \varepsilon_1\varepsilon_3 = (e_3 e_2)(e_2 e_1) = -e_3 e_1 = \varepsilon_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_2\varepsilon_0 = \varepsilon_2, && \varepsilon_3\varepsilon_0 = \varepsilon_3,\\
&\varepsilon_2\varepsilon_1 = (e_1 e_3)(e_3 e_2) = -e_1 e_2 = \varepsilon_3, && \varepsilon_3\varepsilon_1 = (e_2 e_1)(e_3 e_2) = -e_1 e_3 = -\varepsilon_2,\\
&\varepsilon_2\varepsilon_2 = (e_1 e_3)(e_1 e_3) = -e_1^2 e_3^2 = -\varepsilon_0, && \varepsilon_3\varepsilon_2 = (e_2 e_1)(e_1 e_3) = -e_2 e_3 = \varepsilon_1,\\
&\varepsilon_2\varepsilon_3 = (e_1 e_3)(e_2 e_1) = -e_3 e_2 = -\varepsilon_1, && \varepsilon_3\varepsilon_3 = (e_2 e_1)(e_2 e_1) = -\varepsilon_0.
\end{aligned}$$

Stellt man diese Werthe zusammen, so erhält man wiederum die obige Tafel, also ist II) ebenfalls ein Quaternion.

Bezeichnet man endlich die Einheiten des dritten Systems

$$1,\quad e_3 e_2,\quad -e_3,\quad e_2,$$

welche die Gleichungen 10*) erfüllen, ebenfalls mit

$$\varepsilon_0,\quad \varepsilon_1,\quad \varepsilon_2,\quad \varepsilon_3,$$

so findet man mit Hilfe der Gleichung 10*) die einzelnen Producte von je zwei Einheiten:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_0\varepsilon_0 = \varepsilon_0, && \varepsilon_1\varepsilon_0 = \varepsilon_1,\\
&\varepsilon_0\varepsilon_1 = \varepsilon_1, && \varepsilon_1\varepsilon_1 = (e_3 e_2)(e_3 e_2) = -e_3^2 e_2^2 = -\varepsilon_0,\\
&\varepsilon_0\varepsilon_2 = \varepsilon_2, && \varepsilon_1\varepsilon_2 = (e_3 e_2)(-e_3) = -e_2 = -\varepsilon_3,\\
&\varepsilon_0\varepsilon_3 = \varepsilon_3, && \varepsilon_1\varepsilon_3 = e_3 e_2 \,.\, e_2 = -e_3 = \varepsilon_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_2\varepsilon_0 = \varepsilon_2, && \varepsilon_3\varepsilon_0 = \varepsilon_3,\\
&\varepsilon_2\varepsilon_1 = (-e_3)(e_3 e_2) = e_2 = \varepsilon_3, && \varepsilon_3\varepsilon_1 = e_2 \,.\, e_3 e_2 = e_3 = -\varepsilon_2,\\
&\varepsilon_2\varepsilon_2 = (-e_3)(-e_3) = \varepsilon_2^2 = -\varepsilon_0, && \varepsilon_3\varepsilon_2 = e_2(-e_3) = e_3 e_2 = \varepsilon_1,\\
&\varepsilon_2\varepsilon_3 = (-e_3)(e_2) = -\varepsilon_1, && \varepsilon_3\varepsilon_3 = e_2 \,.\, e_2 = -\varepsilon_0.
\end{aligned}$$

Auch hier giebt die Zusammenstellung der einzelnen Producte dieselbe Tafel 6).

Wir haben somit drei verschiedene Formen eines Quaternions kennen gelernt. Erstens die Hamilton'sche:

$$q = \cos\varphi + \varrho'' \sin\varphi.$$

Sie bedeutet geometrisch eine Drehung durch den Winkel φ in einer Ebene, welche auf dem Vector ϱ'' im Coordinatenanfang senkrecht steht

und begreift daher geometrisch den Einheitsvector der Ebene oder die gewöhnliche complexe Grösse
$$\varrho = \cos\varphi + i\sin\varphi$$
als speciellen Fall unter sich. Algebraisch ist q von ϱ ebenso wenig wie ϱ'' von i unterschieden, da
$$\varrho''^2 = -1.$$

Man sieht hieraus, dass die Quaternionen für die Theorie der Functionen nichts zu liefern im Stande sind, was nicht schon durch die gewöhnliche complexe Grösse erreicht werden könnte. Es gelten auch hier die Sätze:
$$(\cos\varphi + \varrho''\sin\varphi)(\cos\varphi' + \varrho''\sin\varphi') = \cos(\varphi + \varphi') + \varrho''\sin(\varphi + \varphi') \text{ etc.}$$
und
$$(\cos\varphi + \varrho''\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \varrho''\sin n\varphi.$$

Die letzterhaltene Gleichung besagt, dass die n^{te} Potenz eines Quaternions eine Drehung durch das n-fache des Winkels φ um dieselbe Achse wie bei dem einfachen Quaternion bedeutet.

Gleiche Resultate erhält man, wenn man die beiden anderen Formen II) und III) des Quaternions zu Grunde legt. Nach II) ist
$$q = \cos\varphi + (e_1 e_2 e_3)\varrho''\sin\varphi.$$

Auch hier ist ϱ'' die Achse der Drehung, φ der Winkel, um den gedreht wird.

In diesem Falle ist $e_1 e_2 e_3 \varrho''$ das Symbol der rechtwinkligen Drehung um ϱ'' und wegen 9*) ebenfalls:
$$(e_1 e_2 e_3 \varrho'')^2 = (e_3 e_2 x_1'' + e_1 e_3 x_2'' + e_2 e_1 x_3'')^2 = -1.$$

Endlich ist auch in III)
$$q = \cos\varphi + (k i \varrho'')\sin\varphi$$
ϱ'' die Achse der Drehung, $ki\varrho''$ das Symbol der rechtwinkligen Drehung um dieselbe, und wegen der Gleichungen 13):
$$(k i \varrho'')^2 = (k i x_1'' - k x_2'' + i x_3'')^2 = -1.$$

Ein Unterschied in den drei Formen des Quaternions besteht also vom algebraischen Standpunkte aus nicht; sie haben alle drei die Form der gewöhnlichen complexen Grössen und sind denselben Gesetzen unterworfen wie diese. Dagegen sind die Beziehungen des Quaternions zu den Vectoren und auch diese selbst zum Theil verschieden. Die Vectoren im ersten und zweiten System haben die gleiche Form:
$$\varrho = e_1 x_1 + e_2 x_2 + e_3 x_3$$
und das Quadrat des Vectors ist gleich einer reinen Zahl, gleich einen Scalar, im dritten System aber hat der Vector die Form:
$$\varrho = x_1 + i x_2 + k x_3$$
und sein Quadrat: $\varrho^2 = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2 i x_1 x_3 + 2 k x_1 x_3$

ist wiederum ein Vector. Er entspricht daher dem Vector der Ebene:

$$\varrho = x_1 + i x_2,$$

dessen Quadrat

$$\varrho^2 = x_1^2 - x_2^2 + 2 i x_1 x_2$$

ebenfalls einen Vector der Ebene darstellt. Wie aber der ebene Einheitsvector

$$\varrho = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

auch die Bedeutung einer Drehung um den Winkel φ in der $X_1 X_2$-Ebene hat, so kann man auch den räumlichen Einheitsvector ϱ als diejenige Drehung auffassen, welche einen beliebigen Vector in der Ebene $(1, \varrho)$ um den Winkel $(1, \varrho) = \varphi$ dreht.

Denn es ist:

$$\varrho = \frac{1}{1} \cdot \varrho = x_1 + i x_2 + k x_3 = x_1 + k i (k x_2 - i x_3).$$

Da Winkel $(1, \varrho)$ gleich φ ist, so wird:

$$x_1 = \cos\varphi,$$
$$\sqrt{1 - x_1^2} = \sin\varphi.$$

Es lässt sich daher ϱ auch schreiben:

$$\varrho = \cos\varphi + k i \left(\frac{k x_2 - i x_3}{\sqrt{1 - x_1^2}} \right) \sin\varphi,$$

woraus ersichtlich ist, dass ϱ eine Drehung durch den Winkel φ um den Vector

$$\frac{k x_2 - i x_3}{\sqrt{1 - x_1^2}} = \varrho',$$

welcher in der $X_2 X_3$-Ebene liegt, bedeutet. Da

$$(k i \varrho')^2 = -1$$

ist, so hat ϱ wiederum die Eigenschaften der gewöhnlich complexen Zahl, es ist also auch

$$\varrho^n = \cos n\varphi + k i \varrho' \sin n\varphi.$$

Auf dieser Eigenschaft des Vectors beruht auch der Satz, dass jede Function $\varrho' = f(\varrho)$ eines Vectors wiederum ein Vector ist, der in der Ebene $(1, \varrho)$ liegt. Daher ergiebt sich auch, dass Gleichungen der Gestalt:

$$d\varrho' = f'(\varrho) d\varrho,$$

oder

$$d\varrho' = d\varrho f'(\varrho)$$

nur möglich sind, wenn $d\varrho$ ebenfalls in der Ebene $(1, \varrho)$ liegt und nicht eine beliebige Lage im Raume hat*, weil sonst auf der rechten Seite ein Quaternion, auf der linken ein Vector stehen würde, die im Allgemeinen nicht gleich sein können.

---

* Siehe des Verfassers Abhandlung: „Ueber conforme Abbildung von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung", Zeitschrift für Mathematik und Physik XX, S. 253—270.

§ 3. Anwendungen der dritten Form des Quaternionensystems.

Es soll nun an zwei Beispielen gezeigt werden, dass der in seinen Grundlagen etwas veränderte Quaternionencalcül dasselbe leistet wie der ursprüngliche, und zwar soll die dritte Form dazu gewählt werden, bei welcher der Vector

$$\varrho = x_1 + ix_2 + kx_3$$

und das Quaternion

$$q = \cos\varphi + ki\,.\,\varrho\sin\varphi$$

ist, während die primitiven Einheitsvectoren i und k den Bedingungen unterworfen sind: $i^2 = -1,\quad k^2 = -1,\quad ik = -ki.$

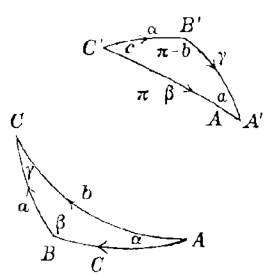
I.

Die Gleichungen der sphärischen Trigonometrie sollen aus der identischen Gleichung:

1) $$\left(\frac{1}{A}B\right)\left(\frac{1}{B}\cdot C\right) = \left(\frac{1}{A}\cdot C\right),$$

worin A, B, C drei Vectoren nach den Punkten A, B, C einer Kugel vom Halbmesser 1 bedeuten mögen, abgeleitet werden. Wir wählen die Pole A', B', C' der Kreise BC, AC und AB so, dass von ihnen aus gesehen diese Bögen in der Richtung des Uhrzeigers durchlaufen werden. Dies giebt, wenn wir die Seiten und Winkel des ursprünglichen Dreiecks mit:

Fig. 2.



$$AB = c,\quad BC = a,\quad AC = b,$$
$$\sphericalangle C = \gamma,\quad \sphericalangle A = \alpha,\quad \sphericalangle B = \beta$$

(siehe Fig. 2.)

bezeichnen, für die Seiten und Winkel des Polardreiecks $A'B'C'$:

$$B'A' = \gamma,\quad C'B' = \alpha,\quad C'A' = 180^0 - \beta,$$
$$\sphericalangle C' = c,\quad \sphericalangle A' = a,\quad \sphericalangle B' = 180^0 - b.$$

Nun ist:

$$\frac{1}{A}B = \cos c + kiC'\sin c,$$

$$\frac{1}{B}C = \cos a + kiA'\sin a,$$

$$\frac{1}{A}C = \cos b + kiB'\sin b.$$

Setzt man diese Werthe in 1) ein und multiplicirt, so erhält man:

$$\cos c\cos a + kiC'\sin c\cos a + kiA'\cos c\sin a + kiC'kiA'\sin c\sin a$$
$$= \cos b + kiB'\sin b.$$

Nun ist allgemein:

$$k i \varrho \,.\, k i \varrho' = (k i x_1 - k x_2 + i x_3)(k i x_1' - k x_2 + i x_3')$$
$$= -(x_1 x_1' + x_2 x_2' + x_3 x_3') - k i (x_2 x_3' - x_3 x_2') + k(x_3 x_1' - x_1 x_3')$$
$$+ i(x_1 x_2' - x_2 x_1') = -\frac{1}{\varrho}\varrho',$$

also ist:

$$k i C' \,.\, k i A' = -\frac{1}{C'} A' = -[\cos(\pi - \beta) + k i B \sin(\pi - \beta)]$$
$$= \cos\beta - k i B \sin\beta.$$

Daher geht die obige Gleichung über in:

$$\cos c \cos a + k i C' \sin c \cos a + k i A' \cos c \sin a + (\cos\beta - k i B \sin\beta) \sin c \sin a$$
$$= \cos b + k i B' \sin b.$$

Setzt man Reelles Reellem gleich, so findet sich zuerst der Cosinussatz der sphärischen Trigonometrie:

2) $$\cos c \cos a + \sin c \sin a \cos\beta = \cos b.$$

Die übrig bleibende Gleichung dividiren wir linksseitig erst mit k, dann mit i, es bleibt:

$$C' \sin c \cos a + A' \cos c \sin a - B \sin\beta \sin c \cos a = B' \sin b.$$

Hieraus durch linksseitige Division mit C':

$$\sin c \,.\, \cos a + \frac{1}{C'} A' \cos c \sin a - \frac{1}{C'} B \sin\beta \sin c \sin a = \frac{1}{C'} B' \sin b.$$

Nun ist:

$$\frac{1}{C'} A' = \cos(\pi - \beta) + k i B \sin(\pi - \beta),$$

$$\frac{1}{C'} B' = \cos\alpha + k i A \sin\alpha,$$

folglich geht die voranstehende Gleichung über in:

$$\sin c \cos a + (-\cos\beta + k i \sin\beta) \cos c \sin a - \frac{1}{C'} B \sin\beta \sin c \sin a$$
$$= (\cos\alpha + k i A \sin\alpha) \sin b.$$

Da der Bogen $B C' = \frac{\pi}{2}$ ist, so hat das Quaternion $\frac{1}{C'} B$ keinen reellen Bestandtheil. Es ergiebt sich daher durch Gleichsetzung der reellen Glieder:

3) $$\sin c \cos a - \cos c \sin a \cos\beta = \sin b \cos\alpha.$$

Es bleibt noch übrig:

$$k i B \sin\beta \cos c \sin a - \frac{1}{C'} B \sin\beta \sin c \sin a = k i A \sin\alpha \sin b;$$

$\frac{1}{C'} B$ als rechtwinklige Drehung ist gleich $-\frac{1}{B} C'$, $\frac{1}{B} C'$ ist aber gleich $-k i B \,.\, k i C'$.

Setzt man diesen Werth ein, so kommt

$$k i B \sin\beta \cos c \sin a - k i B k i C' \sin\beta \sin c \sin a = k i A \sin\alpha \sin b.$$

Durch successive linksseitige Division mit k, i und B folgt hieraus:

$$\sin\beta \cos c \sin a - k i C' \sin\beta \sin c \sin a = \frac{1}{B} A \sin\alpha \sin b,$$

oder da,

$$\frac{1}{B} A = \cos c - k i C' \sin c$$

ist:

$$\sin\beta \cos c \sin a - k i C' \sin\beta \sin c \sin a = \cos c \sin b \sin\alpha - k i C' \sin c \sin b \sin\alpha.$$

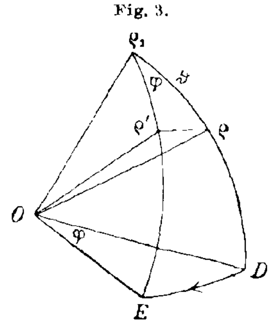
Da $k i C'$ als rechtwinklige Drehung um C' keinen reellen Bestandtheil hat, so bekommt man durch Gleichsetzung des Reellen und des Imaginären beide Mal die noch fehlende Gleichung:

4) $$\sin a \sin\beta = \sin b \sin\alpha.$$

II.

Es sollen die Euler'schen Formeln für die Drehung einer Kugel um eine durch den Mittelpunkt gelegte Achse abgeleitet werden. Zu diesem Zwecke sei ϱ_1 ein fester Vector, ϱ ein beweglicher, der um ϱ_1 so gedreht wird, dass er in die Lage ϱ' kommt. Die hierzu erforderliche Drehung sei gleich φ.

Fig. 3.



Man verlängere die Bögen $\varrho_1\varrho$ und $\varrho_1\varrho'$ über ϱ und ϱ' hinaus bis D und E, so dass sowohl $\varrho_1 D$ als $\varrho_1 E$ 90^0 betragen. Dann sind die rechtwinkligen Drehungen $\varrho_1 D$ und $\varrho_1 E$ beziehentlich durch die Ausdrücke $\frac{1}{\varrho_1} D$ und $\frac{1}{\varrho_1} E$ gegeben. Bezeichnen wir den Bogen $\varrho_1\varrho = \varrho_1\varrho'$ mit ϑ, so sind die Drehungen $\varrho_1\varrho$ und $\varrho_1\varrho'$ durch die Quaternionen

$$\frac{1}{\varrho_1}\varrho = \cos\vartheta + \frac{1}{\varrho_1} D \sin\vartheta,$$

$$\frac{1}{\varrho_1}\varrho' = \cos\vartheta + \frac{1}{\varrho_1} E \sin\vartheta$$

bestimmt. Hieraus ergeben sich:

$$D = \frac{\varrho - \varrho_1 \cos\vartheta}{\sin\vartheta},$$

$$E = \frac{\varrho' - \varrho_1 \cos\vartheta}{\sin\vartheta}.$$

Dreht man nun den Vector OD um die senkrechte Achse ϱ_1, während der Drehungswinkel φ beträgt, so gelangt er in die Lage OE, wobei zugleich ϱ in die Lage ϱ' kommt und es ist:

$$E = D(\cos\varphi + k i \varrho_1 \sin\varphi).$$

Durch Einführung der Werthe von D und E erhält man hieraus:

$$1)\qquad \varrho' - \varrho_1 \cos\vartheta = (\varrho - \varrho_1 \cos\vartheta)(\cos\varphi + k\,i\,\varrho_1 \sin\varphi).$$

Führt man die Werthe der ϱ in gewöhnlichen Cartes'schen Coordinaten x, y, z ein, setzt also:

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= x_1 + iy_1 + kz_1, \\ \varrho &= x + iy + kz, \\ \varrho' &= x' + iy' + kz', \end{aligned}$$

und beachtet die Bedingungen:

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 &= 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1, \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 &= 1, \\ xx_1 + yy_1 + zz_1 &= \cos\vartheta, \end{aligned}$$

so giebt die Ausführung der Rechnung ohne Weiteres die bekannten Euler'schen Transformationsformeln in der Gestalt:

$$1^*)\quad \begin{cases} x' = x[x_1^2 + (y_1^2 + z_1^2)\cos\varphi] + y[x_1 y_1 (1-\cos\varphi) - z_1 \sin\varphi] \\ \qquad\qquad + z[x_1 z_1 (1-\cos\varphi) + y_1 \sin\varphi], \\ y' = x[x_1 y_1 (1-\cos\varphi) + z_1 \sin\varphi] + y[y_1^2 + (x_1^2 + z_1^2)\cos\varphi] \\ \qquad\qquad + z[y_1 z_1 (1-\cos\varphi) - x_1 \sin\varphi], \\ z' = x[x_1 z_1 (1-\cos\varphi) - y_1 \sin\varphi] + y[y_1 z_1 (1-\cos\varphi) + x_1 \sin\varphi] \\ \qquad\qquad + z[z_1^2 + (x_1^2 + y_1^2)\sin\varphi]. \end{cases}$$

Führt man die Winkelfunctionen von $\frac{\varphi}{2}$ ein, setzt also:

$$1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

$$\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2},$$

so kommt, wenn man zur Abkürzung schreibt:

$$x_1 \sin\frac{\varphi}{2} = a, \quad y_1 \sin\frac{\varphi}{2} = b, \quad z_1 \sin\frac{\varphi}{2} = c, \quad \cos\frac{\varphi}{2} = d,$$

wobei

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$$

ist:

$$2^*)\quad \begin{cases} x' = x(a^2 - b^2 - c^2 + d^2) + 2y(ab - cd) + 2z(bd + ac), \\ y' = 2x(ab + cd) + y(-a^2 + b^2 - c^2 + d^2) + 2z(bc - ad), \\ z' = 2x(ac - bd) + 2y(ad + bc) + z(-a^2 - b^2 + c^2 + d^2). \end{cases}$$

Die letzteren Formeln lassen sich auch direct durch Umformung der Gleichung 1) erhalten. Wir multipliciren dieselbe mit ki, setzen:

$$k i \varrho_1 = u_1, \quad k i \varrho = u, \quad k i \varrho' = u',$$

so geht die Vectorengleichung 1) in eine Gleichung zwischen rechtwinkligen Drehungen über:

$$2^{**}) \qquad u' = u_1 \cos\vartheta + (u - u_1 \cos\vartheta)(\cos\varphi + u_1 \sin\varphi).$$

In Hamilton'scher Bezeichnung würden die Gleichungen 1) und 2^{**}) identisch sein, da in diesem System $\varrho_1 = u_1$, $\varrho = u$, $\varrho' = u'$ ist. In unserem Falle aber ist:

$$u_1 = k i \varrho_1 = (k i x_1 - k y_1 + i z_1),$$
$$u = k i \varrho = (k i x - k y + i z),$$
$$u' = k i \varrho' = (k i x' - k y' + i z').$$

Durch Multiplication der ersten Gleichung mit der zweiten, zuerst rechtsseitige, dann linksseitige, ergiebt sich:

$$u_1 u = -(x_1 x + y_1 y + z_1 z) - i(x_1 y - y_1 x) - k(x_1 z - z_1 x) - k i(y_1 z - z_1 y),$$
$$u u_1 = -(x_1 x + y_1 y + z_1 z) + i(x_1 y - y_1 x) + k(x_1 z - z_1 x) + k i(y_1 z - z_1 y).$$

Es ist also:

$$\frac{u u_1 + u_1 u}{2} = -(x_1 x + y_1 y + z_1 z) = -\cos\vartheta,$$

woraus

$$u u_1 + \cos\vartheta = \frac{u u_1 - u_1 u}{2}$$

folgt. Multiplicirt man nun die Gleichung 2^{**}) aus, so findet man, da $u_1^2 = -1$, mit Berücksichtigung der zuletzt erhaltenen Gleichung:

$$u' = u \cos\varphi + u_1 \cos\vartheta (1 - \cos\varphi) + \frac{u u_1 - u_1 u}{2} \sin\varphi,$$
$$= u \cos^2\frac{\varphi}{2} + (u u_1 - u_1 u) \sin\frac{\varphi}{2} \cos\frac{\varphi}{2} - (u - 2 u_1 \cos\vartheta) \sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Aus Gleichung:

$$\frac{u u_1 + u_1 u}{2} = -\cos\vartheta$$

ergiebt sich aber durch linksseitige Multiplication mit u_1:

$$u - 2 u_1 \cos\vartheta = u_1 u u_1.$$

Es wird also:

$$u' = u \cos^2\frac{\varphi}{2} + (u u_1 - u_1 u) \cos\frac{\varphi}{2} \sin\frac{\varphi}{2} - u_1 u u_1 \sin^2\frac{\varphi}{2}$$
$$= \left(\cos\frac{\varphi}{2} - u_1 \sin\frac{\varphi}{2}\right) u \left(\cos\frac{\varphi}{2} + u_1 \sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

Setzt man nun:

$$\cos\frac{\varphi}{2} + u_1 \sin\frac{\varphi}{2} = d + k i a - k b + i c = q,$$

woraus sich ergiebt:

$$\cos\frac{\varphi}{2} - u_1 \sin\frac{\varphi}{2} = d - (k i a - k b + i c) = q^{-1},$$

so findet man die berühmte Formel Hamilton's, welche die Euler'schen Transformationen in der Gestalt 2^*) zu einem einzigen Ausdruck zusammenfasst:

$$2) \qquad u' = q^{-1} u q.$$

Setzt man in Gleichung 1) statt $ki\varrho_1$ den Hamilton'schen Vector ϱ_1, so würde man die Gleichung:

$$\varrho' - \varrho_1 \cos\vartheta = (\varrho - \varrho_1 \cos\vartheta)(\cos\varphi + \varrho_1 \sin\varphi)$$

erhalten, welche bei Tait nicht vorkommt. An deren Stelle findet sich l. c. S. 259 die Gleichung:

$$\varrho_1 = -aSa\varrho - aVa\varrho\cos\vartheta + Va\varrho\sin\vartheta,$$

oder in unsere Bezeichnungsweise übertragen:

$$3)\qquad \varrho' = -(S\varrho\varrho_1)\varrho_1 - V\varrho\varrho_1 . \varrho_1 \cos\varphi + V\varrho\varrho_1 \sin\varphi,$$

worin $S\varrho\varrho_1$ den Scalar, $V\varrho\varrho_1$ den Vector des Quaternions $\varrho\varrho_1$ bedeutet, so dass identisch

$$\varrho\varrho_1 = S\varrho\varrho_1 + V\varrho\varrho_1.$$

Der Scalar von $\varrho\varrho_1$ ist:

$$-(xx_1 + yy_1 + zz_1) = -\cos\vartheta,$$

also der Vector

$$V\varrho\varrho_1 = \varrho\varrho_1 + \cos\vartheta.$$

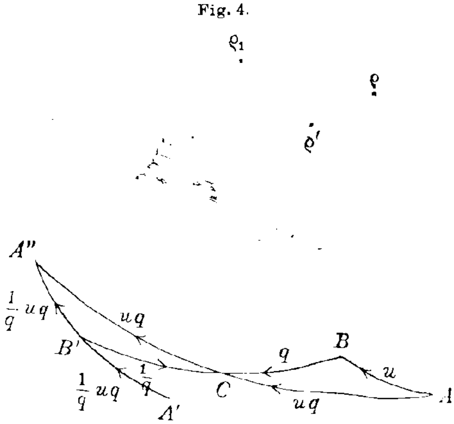
Dadurch geht die Gleichung 3) über in:

$$\begin{aligned}\varrho' &= \varrho_1\cos\vartheta - (\varrho\varrho_1 + \cos\vartheta)(\varrho_1\cos\varphi - \sin\varphi)\\ &= \varrho_1\cos\vartheta - (\varrho - \varrho_1\cos\vartheta)\varrho_1(\varrho_1\cos\varphi - \sin\varphi)\\ &= \varrho_1\cos\vartheta + (\varrho - \varrho_1\cos\vartheta)(\cos\varphi + \varrho_1\sin\varphi),\end{aligned}$$

übereinstimmend mit unserer Gleichung 1), wenn darin ϱ_1 für $ki\varrho_1$ gesetzt wird.

Die Gleichung 2) lässt sich auch unabhängig von 1) unmittelbar durch eine einfache geometrische Betrachtung ableiten. Es sei der Bogen AB mit dem Kreis BB' fest verbunden. Eine Drehung der Kugel um die Achse ϱ_1 des Kreises BB' durch den Winkel φ führt den Bogen AB nach $A'B'$. Um die hierzu nöthige Transformation zu bestimmen, verlängere man $A'B'$ über B' hinaus nach A'', so dass $B'A'' = A'B'$ wird und verbinde die Punkte A'' und A durch einen Bogen $A''A$; derselbe halbirt den Bogen BB' in C.

Fig. 4.



Nun sei

$$\frac{1}{A}B = u,\quad \frac{1}{B}C = q = \cos\frac{\varphi}{2} + ki\varrho_1\sin\frac{\varphi}{2},$$

also

$$\frac{1}{A}C = uq.$$

Ferner ist
$$\frac{1}{C}B' = \frac{1}{B}C = q,$$
folglich
$$\frac{1}{B'}C = \frac{1}{q}$$
Da
$$\frac{1}{A'}B' = \frac{1}{B'}A'' = \frac{1}{B'}C.\frac{1}{C}A''$$
und
$$\frac{1}{C}A'' = \frac{1}{A}C = uq,$$
so ist
$$\frac{1}{A'}B' = \frac{1}{q}uq\ldots$$

Es drückt also $\frac{1}{q}uq$ zunächst die Transformation aus, welche den Bogen $AB = u$ vermöge einer Drehung der Kugel um die Achse ϱ_1 durch den Winkel φ in die Lage $A'B'$ überführt. Werde nun der Pol von AB mit ϱ der Pol von $A'B'$ mit ϱ' bezeichnet, so ist klar, dass bei dieser Drehung ϱ mit ϱ' zusammenfällt. Weil nun die Winkel, welche der Bogen BB' mit den Bögen AB und $A'B'$ macht, gleich sind, so sind es auch die Entfernungen der Pole ϱ und ϱ' vom Pole ϱ_1. Man kann also auch sagen, dass die Transformation $\frac{1}{q}uq$ eine Drehung der Kugel um die Achse ϱ_1 bedeutet, bei welcher der Vector ϱ in den Vector ϱ' übergeht.

(Schluss folgt.)

Kleinere Mittheilungen.

I. Didaktische Bemerkungen zur cubischen Gleichung.

Ueber die Auflösung der cubischen Gleichungen lässt sich bei dem heutigen Stand der Wissenschaft etwas principiell Neues kaum sagen; nicht ganz so liegt es auf dem Gebiete der Methodik.

Wie bekannt, wird die Auflösung beim ersten Unterricht gewöhnlich so vollzogen, dass man zuvörderst das zweite Glied der vollständigen Gleichung entfernt und die reducirte Gleichung sodann durch Hudde's Substitution in zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten spaltet. So elegant das Verfahren sein mag, motivirt ist es nicht, wenigstens dem Anfänger gegenüber nicht.

Erwägt man nun, dass in der Regel den cubischen Gleichungen die quadratischen mit mehreren Unbekannten vorangehen, so ist es didaktisch gewiss nicht unrichtig, wenn von letzteren eine Brücke zu ersteren geschlagen wird, und das geschieht so:

Man knüpfe an das bekannte Beispiel*

$$1)\qquad \begin{cases} (\alpha) & z_1 z_2 = a \\ (\beta) & z_1^3 + z_2^3 = b \end{cases}$$

an, dessen vollständige Lösung durch die Gleichung

$$z^6 - b z^3 + a^3 = 0,$$

d. h. durch

$$2)\qquad \left.\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix}\right\} = \sqrt[3]{\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^3}}$$

gegeben ist. Sodann aber frage man, welchen Verlauf die Rechnung nimmt, wenn man eine passende Verbindung von z_1 und z_2 als neue Unbekannte einführt, wie z. B.

$$3)\qquad z_1 + z_2 = y.$$

Diese Substitution fällt theoretisch allerdings mit der von Hudde zusammen; dagegen ist sie methodisch durchaus anders motivirt. Wir spalten nämlich y nicht in zwei unbekannte Grössen, sondern ersetzen umgekehrt die Verbindung zweier Unbekannten durch eine einzige; und

* Heis, § 173, Nr. 54β. — Bardey, XXVII, 1. Stufe, Nr. 78.

das darf in der Theorie der quadratischen Gleichungen als etwas Geläufiges und Natürliches angesehen werden.

Um nun zu einer Gleichung für y zu gelangen, gehe man von der Identität

$$4)\qquad (z_1 + z_2)\,[(z_1 + z_2)^2 - 3\,z_1 z_2] = z_1{}^3 + z_2{}^3$$

aus, und erhält mit Rücksicht auf 1) und 3)

$$5)\qquad y^3 - 3\,a y - b = 0.$$

Dieses ist aber die gewünschte Normalform der cubischen Gleichung, deren Lösung wegen 2) und 3) die Gestalt

$$6)\qquad y = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^3}}$$

besitzen muss. Von nun ab verlaufen die Betrachtungen in gewohnter Weise; insbesondere schliesst sich jetzt die Reduction der vollständigen Gleichung auf die trinomische Form 5) als ein nothwendiger Schritt an.

Durch obigen Vorgang lässt es sich also erreichen, dass der Schüler auf einer Vorstufe — im Gebiete der quadratischen Gleichungen — die cubische Gleichung in ihrer zweckmässigsten Normalform antrifft und ihre Lösung durch Rückschlüsse selbstständig aufzufinden vermag. Uebrigens kann man auf dem eben betretenen Wege noch weiter vordringen, indem man die Gleichungen*

$$7)\qquad \begin{cases} \alpha) & z_1 z_2 = a \\ \beta) & z_1^n + z_2^n = b \end{cases}$$

mit den entsprechenden Lösungen

$$8)\qquad \left.\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix}\right\} = \sqrt[n]{\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^n}}$$

zum Ausgangspunkt wählt. Um die Gleichung zu gewinnen, welcher

$$9)\qquad z_1 + z_2 = y$$

genügt, kann man wie früher, von einer leicht zu bildenden Identität ausgehen oder auch die aus 7α) und 9) folgenden Werthe von z_1 und z_2 in die Gleichung 7β) eintragen; man findet dann

$$10)\qquad \left[\frac{y}{2} + \sqrt{\frac{y^2}{4} - a}\right]^n + \left[\frac{y}{2} - \sqrt{\frac{y^2}{4} - a}\right]^n = b.$$

Entwickelt man die Klammergrössen, so gelangt man zu einer rationalen Gleichung n^{ten} Grades in y, welche bereits Moivre bei seinen Untersuchungen über die Winkeltheilung hergeleitet hat, und selbiger genügt offenbar:

* Bardey a. a. O.

$$11)\quad y=\sqrt[n]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^n}}\,.\,\varepsilon+\sqrt[n]{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^n}}\;\varepsilon^{n-1},$$

unter ε jede beliebige n^{te} Wurzel der Einheit verstanden. Für $n=5$ erhält man beispielsweise die Gleichung

$$y^5-5ay^3+5a^2y-b=0,$$

mit der entsprechenden Lösung 11).

Der casus irreducibilis, welcher bei diesen Gleichungen auftreten kann, wird am einfachsten gleich von vornherein erledigt, indem man in die Gleichungen 7) und 9) die Substitutionen

$$z_1=\varrho\,(\cos\varphi+i\sin\varphi),\quad z_2=\varrho\,(\cos\varphi-i\sin\varphi)$$

einträgt, wodurch sich der Reihe nach

$$\varrho^2=a,\quad 2\varrho^n\cos n\varphi=b,\quad 2\varrho\cos\varphi=y$$

ergiebt. Man findet demgemäss n verschiedene Amplituden aus

$$12)\quad \cos(n\varphi+2k\pi)=b:2\sqrt{a^n};\quad k=0,1,2\ldots n-1;\quad (b^2:4a^n<1)$$

und sodann die n Wurzeln der Gleichung 10) mittelst

$$13)\qquad y=2\sqrt{a}\cos\varphi.$$

Was die Gleichungen vom vierten Grade betrifft, so wäre unter unserem Gesichtspunkt ein System von drei Gleichungen, nämlich

$$\left.\begin{aligned} z_1^2+z_2^2+z_3^2&=a\\ z_2^2z_3^2+z_3^2z_1^2+z_1^2z_2^2&=b\\ z_1z_2z_3&=c \end{aligned}\right\}$$

zu wählen und eine Gleichung für die Verbindung

$$z_1+z_2+z_3=y$$

aufzusuchen, doch verweilen wir hierbei nicht länger.

Eine weitere Bemerkung möge sich auf das Auftreten der cubischen Gleichung in der Stereometrie beziehen.* Man begegnet hier sehr oft dem eigenthümlichen Umstand, dass zwei Wurzeln der Gleichung keine geometrische Bedeutung besitzen, selbst dann nicht, wenn sie reell ausfallen. Es sei nur an die bekannten Aufgaben über die Einsenkungstiefe schwimmender Kugeln, über die Theilung der Kugel durch eine Ebene nach einem vorgeschriebenen Verhältniss u. dergl. erinnert. Typisch für diese Fälle ist die Aufgabe: Die Höhe x eines Kugelsegments zu bestimmen, wenn dessen Volumen V und der Kugelradius r gegeben ist. Man gelangt hier zu der Gleichung:

---

* Vergl. insbesondere: E. Lampe, Geometrische Aufgaben zu den cubischen Gleichungen, Berlin 1877.

14) $$x^3 - 3rx^2 + 3V:\pi = 0,$$

welche, weil $V < \frac{4}{3} r^3 \pi$ vorausgesetzt werden muss, stets drei von einander verschiedene reelle Lösungen aufweist, von denen nur eine und zwar die kleinere, positive brauchbar ist. — Für diese Erscheinung pflegt man selten eine Erklärung anzugeben, zuweilen die, dass die erwähnten zwei Wurzeln geometrisch zwar bedeutungslos seien, aber der durch die Gleichung ausgesprochenen Forderung genügten.

Hiermit erklärt man indessen keinesweg, weshalb auf die einfache geometrische Fragestellung eine complicirte algebraische Antwort erfolgt. Man muss vielmehr zeigen, dass die gedachte Gleichung genau bei der Betrachtung anderer geometrischer Gebilde wiederkehrt, und dass für letztere sämmtliche Wurzeln von Bedeutung sein können.

Die Auffindung eines solchen Gebildes wird in schwierigen Fällen Sache der Routine bleiben; zur Erklärung der Wurzeln einer cubischen Gleichung durch eine stereometrische Betrachtung kann indessen immer nachstehende einfache Aufgabe gewählt werden: In einem geraden Kreiskegel, dessen Grundflächenradius a und Höhe h gegeben ist, soll ein gerader Kreiscylinder von gegebenen Volumen U einbeschrieben werden. Bezeichnet man den Abstand der Deckfläche des Cylinders von dem Kegelscheitel mit x, so gelangt man zu der Gleichung

15) $$x^3 - hx^2 + \left(\frac{h}{a}\right)^2 U:\pi = 0.$$

Diese kann man mit der Gleichung 14) zusammenfallen lassen, wenn $h = 3r$ und $U = 3\left(\frac{a}{h}\right)^2 V$ gesetzt wird. Für $h = a\sqrt{3}$ wird speciell

16) $$U = V = \frac{1}{3}\pi x^2 (h - x),$$

und diese Formel stellt ebensowohl das Volumen des erwähnten Kugelsegments als dasjenige des Cylinders dar. Aber für den Cylinder haben sämmtliche drei Werthe von x, welche aus 16) entpringen, Bedeutung. Zwei jener Cylinder sind in gewöhnlicher Weise dem Kegel einbeschrieben; der dritte, für welchen x negativ wird, durchdringt den Kegelmantel, und seine Deckfläche wird durch den Scheitelkegel ausgeschnitten. Für $V > \frac{4}{3} r^3 \pi$ wird die Aufgabe über das Kugelsegment sinnlos; die cubische Gleichung 16) besitzt dann nur eine reelle und zwar negative Wurzel, welche letztere jedoch für die Cylinderaufgabe stets eine präcise geometrische Bedeutung behält.

An Stelle des einbeschriebenen Cylinders kann man auch einen geraden Kreiskegel wählen, dessen Scheitel im Mittelpunkt vom Grundkreis des gegebenen Kegels gelegen ist, und dessen Grundfläche nun in dreifacher Höhenlage durch den Mantel des ursprünglichen Kegels ausgeschnitten wird. — Diese beiden gewiss naheliegenden Aufgaben* findet man in den Lehrbüchern der Stereometrie höchst selten erwähnt, und es ist dies auf einer elementaren Stufe auch durchaus berechtigt, weil dort der Scheitelkegel ausser Betracht bleibt. Sobald aber stereometrische Aufgaben, die auf cubische Gleichungen führen, zugelassen werden sollen, dürfte eine möglichst zeitige Erledigung der obigen charakteristischen Cylinderaufgabe doch empfehlenswerth sein.

Dr. W. Heymann.

II. Ueber die doppelpunktige Focalcurve.

Die Bedingung, dass eine ebene Curve dritter Ordnung einen Doppelpunkt hat, ist bekanntlich vom zwölften Grade in den Coefficienten der Curvengleichung. Eine auffallend einfache Form erhält diese Bedingung, wenn die Curve dritter Ordnung eine Focalcurve ist, wenn sie also durch die imaginären Kreispunkte geht, und wenn ihr Focalcentrum, das heisst der reelle Schnittpunkt ihrer imaginären Asymptoten, auf der Curve selbst liegt.

Die Gleichung einer Focalcurve, deren Focalcentrum mit dem Coordinatenanfangspunkte zusammenfällt, lautet in rechtwinkligen Coordinaten**

$$U = (ax + by + c)(x^2 + y^2) + fx + gy = 0.$$

Macht man die Gleichung durch Hinzufügung des Factors $z = 1$ homogen und setzt zur Abkürzung:

$$\begin{aligned}
3a^2f - b^2f - ac^2 &= K,\\
8abf + 3a^2g - b^2g - bc^2 &= L,\\
2bfg - c^2f - af^2 - 3ag^2 &= P,\\
3b^2g - a^2g - bc^2 &= K',\\
8abg + 3b^2f - a^2f - ac^2 &= L',\\
2afg - c^2g - bg^2 - 3bf^2 &= P',\\
2af + 2bg - c^2 &= M,
\end{aligned}$$

so findet man als Gleichung der zugehörigen Hesse'schen Curve:

$$\begin{aligned}
H = Kx^3 + Lx^2y + L'xy^2 + K'y^3 + cM(x^2 + y^2)z\\
+ Pxz^2 + P'yz^2 - c(f^2 + g^2)z^3 = 0.
\end{aligned}$$

---

* Wegen der Cylinderaufgabe vergl. Martus, Aufg. 1125.

** Construction der Focalcurve aus sechs gegebenen Punkten, diese Zeitschrift Bd. 40 S. 337.

Besitzt nun die Curve $U=0$ einen Doppelpunkt, so ist dieser bekanntlich auch ein Doppelpunkt ihrer Hesse'schen Curve, und seine Coordinaten genügen also gleichzeitig den sechs Gleichungen:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial z}=0.$$

Aus denselben ergiebt sich durch Elimination von

$$x^2, \quad xy, \quad y^2, \quad xz, \quad yz, \quad z^2$$

für die Existenz eines Doppelpunktes die Bedingung:

$$\begin{vmatrix} 3a & b & a & c & 0 & f \\ b & a & 3b & 0 & c & g \\ c & 0 & c & f & g & 0 \\ 3K & L & L' & cM & 0 & P \\ L & L' & 3K' & 0 & cM & P' \\ cM & 0 & cM & P & P' & -3c(f^2+g^2) \end{vmatrix} = 0.$$

Die links stehende Determinante lässt sich vereinfachen, indem man parallele Reihen mit geeigneten Coefficienten multiplicirt und addirt. Durch Wiederholung dieses Verfahrens geht die vorige Gleichung schliesslich über in

$$(a^2+b^2)^2(f^2+g^2)^2 \begin{vmatrix} 2a & 2f & c & 0 \\ 2b & 2g & 0 & c \\ c & 0 & f & g \\ 0 & c & a & b \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$(a^2+b^2)^2(f^2+g^2)^2\{c^4-4c^2(af+bg)-4(ag-bf)^2\}=0.$$

Die Focalcurve $U=0$ hat also einen Doppelpunkt, wenn

$$c^4-4c^2(af+bg)-4(ag-bf)^2=0$$

wird, und diese Bedingung ist nur noch vom vierten Grade in den Coefficienten der Curvengleichung.

Alle Focalcurven, die einen gegebenen Punkt zum Focalcentrum haben und durch drei andere gegebene Punkte gehen, bilden ein specielles Büschel von Curven dritter Ordnung. In diesem befinden sich sonach nur vier doppelpunktige Focalcurven, abweichend von dem bekannten Satze, dass ein Büschel von Curven dritter Ordnung im Allgemeinen zwölf Curven mit Doppelpunkt enthält. Dieselbe Eigenschaft kommt offenbar allen denjenigen Curvenbüscheln dritter Ordnung zu, in denen zweimal zwei Grundpunkte in je einen Punkt zusammenfallen, während ein fünfter Grundpunkt der gemeinschaftliche Tangentialpunkt jener beiden, einander conjugirten Grundpunkte ist.

Braunschweig. R. Müller.

III.

Zur Theorie der Vectoren und Quaternionen.

Von

Prof. Beez

in Plauen i. V.

Schluss.

§ 4. Verallgemeinerung der Quaternionentheorie.

Es ist im Vorigen gezeigt worden, dass das Hamilton'sche Quaternionensystem mit den Einheiten

$$1, \quad i, \quad j, \quad k,$$

von denen die erste mit den übrigen commutativ ist, während diese den Bedingungen:

$$i^2 = -1, \qquad j^2 = -1, \qquad k^2 = -1,$$
$$ji = -ij, \qquad kj = -jk, \qquad ki = -ik,$$
$$ijk = 1$$

unterworfen sind, in jeder Beziehung ersetzt werden kann durch ein System mit den Einheiten:

$$1, \quad i_1, \quad i_2, \quad i_1 i_2.$$

Auch hier ist die erste commutativ mit den übrigen, die zweite und dritte sind primitive imaginäre Einheiten, die den Bedingungen

$$i_1^2 = -1, \quad i_2^2 = -1, \quad i_2 i_1 = -i_1 i_2$$

genügen. Die vierte Einheit ist aus den primitiven Einheiten i_1 und i_2 zusammengesetzt und mit diesen nicht commutativ.

Es lässt sich erwarten, was jedoch nicht weiter ausgeführt werden soll, dass auch das System II mit den Einheiten:

$$1, \quad i_1 i_2, \quad i_1 i_3, \quad i_2 i_3,$$

wobei die primitiven Einheiten i_1, i_2, i_3 den Bedingungen unterworfen sind:

$$i_1^2 = -1, \qquad i_2^2 = -1, \qquad i_3^2 = -1,$$
$$i_2 i_1 = -i_1 i_2, \quad i_3 i_1 = -i_1 i_3, \quad i_3 i_2 = -i_2 i_3,$$

ebenso zur Lösung geometrischer Aufgaben verwendet werden kann, wie das Hamilton'sche, wenn auch die Rechnungen sich weit complicirter gestalten müssen, als bei diesem. Die Einfachheit des Hamilton'schen Systems, welche auf der Identificirung der Symbole der primitiven Einheitsvectoren mit den Symbolen der rechtwinkligen Drehungen um dieselben beruht, hat aber zur Folge, dass dieses System eine Ausdehnung auf mehr als 4 Einheiten nicht zulässt. Nimmt man aber das Quaternion entweder in der Form

A) $$a = a_0 + i_1 a_1 + i_2 a_2 + i_1 i_2 a_3,$$

oder in der Form

B) $$a = a_0 + i_1 i_2 a_1 + i_1 i_3 a_2 + i_2 i_3 a_3,$$

so bietet eine solche Verallgemeinerung des Calculs keine Schwierigkeit.

Man sieht, dass die nicht reellen Einheiten i_1, i_2, $i_1 i_2$ der Form A) aus den Combinationen zur ersten und zweiten Classe der zwei primitiven imaginären Einheiten i_1 und i_2 bestehen. Man wird daher das nächsthöhere Quaternionensystem erhalten, wenn man zu den Combinationen der ersten, zweiten und dritten Classe aus drei primitiven imaginären Einheiten i_1, i_2, i_3 noch die reelle Einheit hinzunimmt. Dieses nächsthöhere System hat also die 8 Einheiten

$$1, \quad i_1, \quad i_2, \quad i_3, \quad i_1 i_2, \quad i_1 i_3, \quad i_2 i_3, \quad i_1 i_2 i_3.$$

Die primitiven Einheiten sind wie immer den Bedingungen unterworfen:

$$i_l^2 = -1, \quad i_l i_m = -i_m i_l.$$

Das Product zweier Einheiten giebt wieder eine Einheit desselben Systems. Das System ist also ein geschlossenes. Legen wir n primitive imaginäre Einheiten $i_1, i_2, \ldots i_n$ zu Grunde mit denselben Bedingungsgleichungen, wie vorher, so erhalten wir ein geschlossenes System, welches aus der reellen Einheit und den sämmtlichen Combinationen der ersten bis n^{ten} Classe der n Elemente $i_1, i_2 \ldots i_n$ besteht. Die Gesammtzahl dieser Einheiten ist ersichtlich:

$$\begin{aligned} &= 1 + n_1 + n_2 + n_3 + \cdots n_n \\ &= (1+1)^n = 2^n. \end{aligned}$$

Will man die andere Form B) des Quaternions

$$a = a_0 + i_1 i_2 a_1 + i_1 i_3 a_2 + i_2 i_3 a_3$$

verallgemeinern, so hat man zu berücksichtigen, dass die Einheiten

$$1, \quad i_1 i_2, \quad i_1 i_3, \quad i_2 i_3$$

aus der reellen Einheit und den Combinationen der primitiven Einheiten i_1, i_2, i_3 zur zweiten Classe bestehen, während die Combinationen der ungeradzahligen Classen nicht auftreten. Das nächsthöhere System wird daher erhalten, wenn man zu der reellen Einheit die Combinationen der zweiten und vierten Classe aus den Elementen i_1, i_2, i_3, i_4 hinzufügt und daher folgende Einheiten besitzen:

$$1, \quad i_1 i_2, \quad i_1 i_3, \quad i_1 i_4, \quad i_2 i_3, \quad i_2 i_4, \quad i_3 i_4, \quad i_1 i_2 i_3 i_4.$$

Irgend zwei Einheiten mit einander multiplicirt geben dann wieder eine Einheit des Systems, dasselbe ist also geschlossen. Die Zahl der Einheiten ist wie oben gleich acht. Um ein System von 2^n Einheiten auf diesem Wege herzustellen, hat man die sämmtlichen Combinationen gerader Ordnung aus $n+1$ primitiven Einheiten $i_1, i_2, \ldots i_n, i_{n+1}$ zu bilden, und die reelle Einheit hinzuzufügen. Die Zahl der Einheiten ist:

$$= 1 + (n+1)_2 + (n+1)_4 + (n+1)_6 + \cdots$$

Da aber

$$1 + (n+1)_1 + (n+1)_2 + (n+1)_3 + \cdots = (1+1)^{n+1} = 2^{n+1},$$

$$1 - (n+1)_1 + (n+1)_2 - (n+1)_4 + \cdots = (1-1)^{n+1} = 0,$$

so ergiebt sich

$$1 + (n+1)_2 + (n+1)_4 + (n+1)_6 + \cdots = 2^n.$$

Man erhält also ein geschlossenes System von 2^n Einheiten auch dann, wenn man die Form B) auf $n+1$ primitive Einheiten ausdehnt.

Es sollen nun die Multiplicationstafeln der Quaternionensysteme mit 8, 16, 32 Einheiten explicite dargestellt werden.

I. Bei einem Quaternionensystem mit 8 Einheiten setzen wir eine Zahl

$$a = a_0 e_0 + a_1 e_1 + \cdots a_7 e_7.$$

In diesem Falle ist [Form A)]

$$e_0 = 1, \quad e_1 = i_1, \quad e_2 = i_2, \quad e_3 = i_3, \quad e_4 = i_1 i_2, \quad e_5 = i_1 i_3,$$
$$e_6 = i_2 i_3, \quad e_7 = i_1 i_2 i_3.$$

Wir erhalten vermöge der Voraussetzungen, welche über die primitiven imaginären Einheiten gemacht worden sind, wenn wir die Träger der Indices unterdrücken und die negativen Einheiten durch einen über den Index gesetzten Strich bezeichnen:

I.

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	$\overline{0}$	4	5	$\overline{2}$	$\overline{3}$	7	$\overline{6}$
2	2	$\overline{4}$	$\overline{0}$	6	1	$\overline{7}$	$\overline{3}$	5
3	3	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	7	1	2	$\overline{4}$
4	4	2	$\overline{1}$	7	$\overline{0}$	6	$\overline{5}$	$\overline{3}$
5	5	3	$\overline{7}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	4	2
6	6	7	3	$\overline{2}$	5	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
7	7	$\overline{6}$	5	$\overline{4}$	$\overline{3}$	2	$\overline{1}$	0

Unter der Norm einer complexen Zahl werde wie bei den gemeinen complexen Grössen und den gewöhnlichen Quaternionen, die Summe der

Quadrate der in die verschiedenen Einheiten multiplicirten reellen Grössen oder Coefficienten verstanden. Es sei also

$$N_{(a)} = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_7^2.$$

Ferner bezeichnen wir mit $\bar{a}$ diejenige Zahl, welche, mit a multiplicirt, die Norm giebt, so dass also

$$a\bar{a} = \bar{a}a = N.$$

Diese Zahl, die conjugirt complexe Zahl muss, da

$$e_0^2 = e_0, \quad e_7^2 = e_0,$$

aber

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_4^2 = e_5^2 = e^2 = -e_0$$

ist, die Form haben:

$$\bar{a} = a_0 e_0 - a_1 e_1 - a_2 e_2 - a_3 e_3 - a_4 e_4 - a_5 e_5 - a_6 e_6 + a_7 e_7;$$

ausserdem aber haben die Coefficienten der verschiedenen Einheiten noch der Gleichung:

1) $$a_0 a_7 - a_1 a_6 + a_2 a_5 - a_3 a_4 = 0$$

zu genügen. Während also bei den gemein complexen Grössen, sowie bei den gewöhnlichen Quaternionen ohne Einschränkung die Gleichung

$$a\bar{a} = N$$

gilt, ist der Bestand dieser Gleichung bei einem höheren Quaternion von 8 Einheiten an die Erfüllung einer Bedingungsgleichung zwischen den Coefficienten der Zahl geknüpft.

Ganz dasselbe Resultat ergiebt sich, wenn man bei Herstellung der Multiplicationstafel das erweiterte System B) zu Grunde legt und annimmt:

$$e_0 = 1, \quad e_1 = i_1 i_2, \quad e_2 = i_1 i_3, \quad e_3 = i_1 i_4, \quad e_4 = i_2 i_3, \quad e_5 = i_2 i_4,$$
$$e_6 = i_3 i_4, \quad e_7 = i_1 i_2 i_3 i_4.$$

Schreibt man die Zahl a in der Weise, dass man die Suffixe der Coefficienten aus den Suffixen der zugehörigen primitiven Einheiten in derselben Reihenfolge zusammensetzt, also

$$a = a_0 + a_{12} i_1 i_2 + a_{13} i_1 i_3 + a_{14} i_1 i_4 + a_{23} i_2 i_3 + a_{24} i_2 i_4 + a_{34} i_3 i_4$$
$$+ a_{1234} i_1 i_2 i_3 i_4$$

und nimmt an, dass die Vertauschung zweier Suffixe in dem Coefficienten einen Zeichenwechsel hervorbringt, demnach $a_{ki} = -a_{ik}$ ist, so geht die obige für die Coefficienten a_k aufgestellte Bedingungsgleichung 1) über in die folgende:

1*) $$a_0 a_{1234} - a_{12} a_{34} - a_{13} a_{42} - a_{14} a_{23} = 0.$$

Das Bildungsgesetz der Suffixe der drei letzten Glieder aus den Suffixen des zweiten Factors im ersten Glied ist sehr einfach. Nach Weglassung des Suffixes 1 bilden die übrigen Suffixe

2.34, 3.42, 4.23

die aufeinander folgenden cyklischen Permutationen von

234.

II. Um ein höheres Quaternion von 16 Einheiten zu finden, kann man entweder von 4 oder von 5 primitiven imaginären Einheiten ausgehen. Im ersten Falle setze man:

$$e_0 = 1, \quad e_1 = i_1, \quad e_2 = i_2, \quad e_3 = i_3, \quad e_4 = i_4,$$
$$e_5 = i_1 i_2, \quad e_6 = i_1 i_3, \quad e_7 = i_1 i_4, \quad e_8 = i_2 i_3, \quad e_9 = i_2 i_4, \quad e_{10} = i_3 i_4,$$
$$e_{11} = i_1 i_2 i_3, \quad e_{12} = i_1 i_2 i_4, \quad e_{13} = i_1 i_3 i_4, \quad e_{14} = i_2 i_3 i_4,$$
$$e_{15} = i_1 i_2 i_3 i_4;$$

im zweiten:

$$e_0 = 1,$$
$$e_1 = i_1 i_2, \quad e_2 = i_1 i_3, \quad e_3 = i_1 i_4, \quad e_4 = i_1 i_5, \quad e_5 = i_2 i_3, \quad e_6 = i_2 i_4,$$
$$e_7 = i_2 i_5, \quad e_8 = i_3 i_4, \quad e_9 = i_3 i_5, \quad e_{10} = i_4 i_5,$$
$$e_{11} = i_1 i_2 i_3 i_4, \quad e_{12} = i_1 i_2 i_3 i_5, \quad e_{13} = i_1 i_2 i_4 i_5, \quad e_{14} = i_1 i_3 i_4 i_5,$$
$$e_{15} = i_2 i_3 i_4 i_5.$$

Man erhält, mag man nun das erste oder das zweite System primitive imaginärer Einheiten verwenden, folgende Multiplicationstafel:

II.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	$\overline{0}$	5	6	7	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	11	12	13	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	15	$\overline{14}$
2	2	$\overline{5}$	$\overline{0}$	8	9	1	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	14	6	7	$\overline{15}$	$\overline{10}$	13
3	3	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	10	11	1	$\overline{13}$	2	$\overline{14}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	15	7	9	$\overline{12}$
4	4	$\overline{7}$	$\overline{9}$	10	$\overline{0}$	12	13	1	14	2	3	$\overline{15}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	11
5	5	2	$\overline{1}$	11	12	$\overline{0}$	8	9	$\overline{6}$	$\overline{7}$	15	$\overline{3}$	$\overline{4}$	14	$\overline{13}$	$\overline{10}$
6	6	3	$\overline{11}$	$\overline{1}$	13	$\overline{8}$	$\overline{0}$	10	5	$\overline{15}$	$\overline{7}$	2	$\overline{14}$	$\overline{4}$	12	9
7	7	4	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{1}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	15	5	6	14	2	3	$\overline{11}$	$\overline{8}$
8	8	11	3	$\overline{2}$	14	6	$\overline{5}$	15	$\overline{0}$	10	$\overline{9}$	$\overline{1}$	13	$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{7}$
9	9	12	4	$\overline{14}$	$\overline{2}$	7	15	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	8	13	$\overline{1}$	11	3	6
10	10	13	14	4	$\overline{3}$	15	7	$\overline{6}$	9	$\overline{8}$	$\overline{0}$	12	$\overline{11}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$
11	11	$\overline{8}$	6	$\overline{5}$	15	$\overline{3}$	2	$\overline{14}$	$\overline{1}$	13	$\overline{12}$	0	$\overline{10}$	9	$\overline{7}$	4
12	12	9	7	$\overline{15}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	14	2	$\overline{13}$	$\overline{1}$	11	10	0	$\overline{8}$	6	$\overline{3}$
13	13	$\overline{10}$	15	7	$\overline{6}$	$\overline{14}$	$\overline{4}$	3	12	$\overline{11}$	$\overline{1}$	$\overline{9}$	8	0	$\overline{5}$	2
14	14	$\overline{15}$	$\overline{10}$	9	$\overline{8}$	13	12	11	$\overline{4}$	3	$\overline{2}$	7	6	5	0	$\overline{1}$
15	15	14	$\overline{13}$	12	$\overline{11}$	$\overline{10}$	9	$\overline{8}$	$\overline{7}$	6	$\overline{5}$	$\overline{4}$	3	$\overline{2}$	1	0

Eine Zahl in diesem System hat also die Form:

$$a = \sum_{l=0}^{l=15} a_l e_l.$$

Auch hier sei wiederum

$$N = \sum_0^{15} a_l^2.$$

Es fragt sich, unter welchen Bedingungen

$$N = a\bar{a}$$

wird, worin $\bar{a}$ die zu a conjugirte complexe Zahl bedeutet. Man sieht mit Hilfe der Multiplicationstafel leicht, dass dieselbe folgende Form haben muss:

$$\bar{a} = a_0 e_0 - a_1 e_1 \cdots - a_{10} e_{10} + a_{11} e_{11} + a_{12} e_{12} + \cdots + a_{15} e_{15},$$

und dass

$$a\bar{a} = \sum_0^{15} a_l^2$$

ist, wenn folgende fünf Bedingungsgleichungen erfüllt sind:

$$
\begin{array}{ll}
1) & a_0 a_{11} - a_1 a_8 + a_2 a_6 - a_3 a_5 + a_4 a_{15} - a_7 a_{14} + a_9 a_{13} - a_{10} a_{12} = 0, \\
2) & a_0 a_{12} - a_1 a_9 + a_2 a_7 - a_3 a_{15} - a_4 a_5 + a_6 a_{14} - a_8 a_{13} + a_{10} a_{11} = 0, \\
3) & a_0 a_{13} - a_1 a_{10} + a_2 a_{15} + a_3 a_7 - a_4 a_6 - a_5 a_{14} + a_8 a_{12} - a_9 a_{11} = 0, \\
4) & a_0 a_{14} - a_1 a_{15} - a_2 a_{10} + a_3 a_9 - a_4 a_8 + a_5 a_{13} - a_6 a_{12} + a_7 a_{11} = 0, \\
5) & a_0 a_{15} + a_1 a_{14} - a_2 a_{13} + a_3 a_{12} - a_4 a_{11} - a_5 a_{10} + a_6 a_9 - a_7 a_8 = 0.
\end{array}
$$

Diese fünf Gleichungen lassen sich durch folgende fünf einfachere, die in ihnen enthalten sind, ersetzen:

$$
\begin{array}{ll}
1^*) & a_0 a_{11} - a_1 a_8 + a_2 a_6 - a_3 a_5 = 0, \\
2^*) & a_0 a_{12} - a_1 a_9 + a_2 a_7 - a_4 a_5 = 0, \\
3^*) & a_0 a_{13} - a_1 a_{10} + a_3 a_7 - a_4 a_6 = 0, \\
4^*) & a_0 a_{14} - a_2 a_{10} + a_3 a_9 - a_4 a_8 = 0, \\
5^*) & a_0 a_{15} - a_5 a_{10} + a_6 a_9 - a_7 a_8 = 0,
\end{array}
$$

Dann substituirt man z. B. in 1) statt a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15} ihre aus 2*), 3*), 4*), 5*) entlehnten Werthe, so reducirt sie sich auf 1*).

Das Bildungsgesetz der Gleichungen 1), ... 5) tritt deutlich hervor, wenn man wie oben die Zahl a in der Weise schreibt, dass die Suffixe der einzelnen Coefficienten aus den Suffixen der mit ihnen multiplicirten primitiven imaginären Einheiten und zwar in derselben Reihenfolge zusammengesetzt sind und ausserdem $a_{lk} = -a_{kl}$ annimmt, wenn wir also schreiben:

$$a = a_0 + \Sigma a_{lm} i_l i_m + \Sigma a_{lmpq} i_l i_m i_p i_q,$$

worin für lm die sämmtlichen Combinationen der zweiten Classe aus den fünf Elementen 1, 2, 3, 4, 5 für $lmpq$ sämmtliche Combinationen der vierten Classe aus denselben Elementen zu setzen und zu a_0 zu addiren sind. Die zu a conjugirte Zahl muss, da allgemein

$$(i_q i_r i_s i_t)(i_q i_r i_s i_t) = +1$$

ist, die Form

$$\bar{a} = a_0 - \Sigma a_{lm} i_l i_m + \Sigma a_{lmpq} i_l i_m i_p i_q$$

annehmen.

Die Gleichungen 1), ... 5) schreiben sich hiernach in folgender Gestalt, wobei der Kürze wegen der Träger der Suffixe a überall unterdruckt ist:

$$1) \quad \begin{cases} 0.1234 - 12.34 - 13.42 - 14.23 \\ \qquad - (51.2345 + 52.3451 + 53.4512 + 54.5123) = 0, \end{cases}$$

$$2) \quad \begin{cases} 0.1235 - 12.35 - 13.52 - 15.23 \\ \qquad + (41.2345 + 42.3451 + 43.4512 + 45.1234) = 0, \end{cases}$$

$$3) \quad \begin{cases} 0.1245 - 12.45 - 14.52 - 15.24 \\ \qquad - (31.2345 + 32.3451 + 34.5123 + 35.1234) = 0, \end{cases}$$

$$4) \quad \begin{cases} 0.1345 - 13.45 - 14.53 - 15.34 \\ \qquad + (21.2345 + 23.4512 + 24.5123 + 25.1234) = 0, \end{cases}$$

$$5) \quad \begin{cases} 0.2345 - 23.45 - 24.53 - 25.34 \\ \qquad - (12.3451 + 13.4512 + 14.5123 + 15.1234) = 0. \end{cases}$$

Nun ist allgemein die Gleichung:

$$ea\,.\,bcde + eb\,.\,cdea + ec\,.\,deab + ed\,.\,eabc = 0$$

eine Folge der Gleichung:

$$0\,.\,lmpq = lm\,.\,pq + lp\,.\,qm + lq\,.\,mp \quad \text{(siehe oben I, 1*)}$$

Denn es ist:

$$0.bcde = bc\,.\,de + bd.ec + be.cd,$$

$$0.cdea = cd\,.\,ea + ce\,.\,ad + ca.de,$$

$$0.deab = de\,.\,ab + da.be + db.ea,$$

$$0.eabc = ea\;\;bc + eb\,.\,ca + ec\,.\,ab.$$

Setzt man diese Werthe ein und beachtet, dass $sr = -rs$ ist, so verschwindet die Gleichung identisch. Es verschwinden also die eingeklammerten Ausdrücke in den Gleichungen 1), 2, ... 5) sämmtlich und dieselben reduciren sich auf die je vier ersten Glieder, welche nach dem Schema I, 1*) gebildet sind.

III. Entwickeln wir noch zum Schluss, um einen deutlichen Einblick in das Bildungsgesetz der höheren Quaternionensysteme zu erlangen, das System von 32 Einheiten. Eine Zahl in diesem System sei:

$$a = \sum_{k=0}^{k=31} a_k e_k.$$

III.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
1	1	$\bar{0}$	6	7	8	9	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	16	17	18	19	20	21	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	26	27	28	29	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	31	$\overline{30}$
2	2	$\bar{6}$	$\bar{0}$	10	11	12	1	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	22	23	24	7	8	9	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	30	19	20	21	$\overline{31}$	$\overline{25}$	29
3	3	$\bar{7}$	$\overline{10}$	$\bar{0}$	13	14	16	1	$\overline{19}$	$\overline{20}$	2	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	25	$\bar{6}$	26	27	8	9	$\overline{29}$	11	12	$\overline{30}$	$\overline{15}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	31	21	24	$\overline{28}$
4	4	$\bar{8}$	$\overline{11}$	$\overline{13}$	$\bar{0}$	15	17	19	1	21	22	2	$\overline{24}$	3	$\overline{25}$	$\bar{5}$	$\overline{26}$	$\bar{6}$	28	$\bar{7}$	29	9	$\overline{10}$	30	12	14	16	$\overline{31}$	$\overline{18}$	$\overline{20}$	$\overline{23}$	27
5	5	$\bar{9}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\bar{0}$	18	20	21	1	23	24	2	25	3	4	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\bar{6}$	$\overline{29}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\overline{30}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{13}$	31	16	17	19	22	$\overline{26}$
6	6	2	$\bar{1}$	16	17	18	$\bar{0}$	10	11	12	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	26	27	28	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	22	23	24	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	31	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	30	$\overline{29}$	$\overline{25}$
7	7	3	$\overline{16}$	$\bar{1}$	19	20	$\overline{10}$	$\bar{0}$	13	14	6	26	$\overline{27}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	29	2	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	25	17	18	$\overline{31}$	$\overline{21}$	11	12	$\overline{30}$	$\overline{15}$	28	24
8	8	4	$\overline{17}$	$\overline{19}$	$\bar{1}$	21	$\overline{11}$	$\overline{13}$	$\bar{0}$	15	26	6	$\overline{28}$	7	$\overline{29}$	$\bar{9}$	22	2	$\overline{24}$	3	$\overline{25}$	$\bar{5}$	16	31	18	20	$\overline{10}$	30	12	14	$\overline{27}$	$\overline{23}$
9	9	5	$\overline{18}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\bar{1}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\bar{0}$	27	28	6	29	7	8	23	24	2	25	3	4	$\overline{31}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{19}$	$\overline{30}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{13}$	26	22
10	10	16	3	$\bar{2}$	22	23	7	$\bar{6}$	26	27	$\bar{0}$	13	14	$\overline{11}$	$\overline{12}$	30	$\bar{1}$	19	20	$\overline{17}$	$\overline{18}$	31	$\bar{4}$	$\bar{5}$	25	$\overline{24}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	29	$\overline{28}$	$\overline{15}$	$\overline{21}$
11	11	17	4	$\overline{22}$	$\bar{2}$	24	8	$\overline{26}$	$\bar{6}$	28	13	$\bar{0}$	15	10	$\overline{30}$	$\overline{12}$	$\overline{19}$	$\bar{1}$	21	16	$\overline{31}$	$\overline{18}$	3	$\overline{25}$	$\bar{5}$	23	7	$\overline{29}$	$\bar{9}$	27	14	20
12	12	18	5	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\bar{2}$	9	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\bar{6}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\bar{0}$	30	10	11	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\bar{1}$	31	16	17	25	3	4	22	29	7	8	$\overline{26}$	13	19
13	13	19	22	4	$\bar{3}$	25	26	8	$\bar{7}$	29	11	$\overline{10}$	30	$\bar{0}$	15	$\overline{14}$	17	$\overline{16}$	31	$\bar{1}$	21	$\overline{20}$	$\bar{2}$	24	$\overline{23}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	28	$\overline{27}$	9	$\overline{12}$	$\overline{18}$
14	14	20	23	5	$\overline{25}$	3	27	9	$\overline{29}$	$\bar{7}$	12	$\overline{30}$	$\overline{10}$	$\overline{15}$	$\bar{0}$	13	18	$\overline{31}$	$\overline{16}$	21	1	19	$\overline{24}$	$\bar{2}$	22	4	28	$\bar{6}$	26	8	11	17

15	15	21	24	25	5	4	28	29	9	8	30	12	11	14	13	0	31	18	17	20	19	$\overline{1}$	23	22	2	3	27	26	6	7	10	16
16	16	10	7	$\overline{6}$	26	27	3	2	22	23	$\overline{1}$	19	20	17	18	31	0	13	14	11	12	30	8	$\overline{9}$	29	28	4	5	25	24	21	15
17	17	11	8	$\overline{26}$	$\overline{6}$	28	$\overline{4}$	22	2	$\overline{24}$	19	$\overline{1}$	21	16	$\overline{31}$	18	13	0	$\overline{15}$	10	30	12	7	29	9	27	$\overline{3}$	25	5	$\overline{23}$	20	$\overline{14}$
18	18	$\overline{12}$	9	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	23	24	2	20	$\overline{21}$	$\overline{1}$	31	16	17	14	15	0	$\overline{30}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	29	7	8	$\overline{26}$	$\overline{25}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	22	19	13
19	19	$\overline{13}$	26	8	$\overline{7}$	29	$\overline{22}$	$\overline{4}$	3	25	17	$\overline{16}$	31	$\overline{1}$	21	$\overline{20}$	$\overline{11}$	10	$\overline{30}$	0	$\overline{15}$	14	$\overline{6}$	28	$\overline{27}$	$\overline{9}$	2	$\overline{24}$	23	5	$\overline{18}$	12
20	20	$\overline{14}$	27	9	$\overline{29}$	$\overline{7}$	$\overline{23}$	$\overline{5}$	25	3	18	$\overline{31}$	$\overline{16}$	$\overline{21}$	$\overline{1}$	19	$\overline{12}$	30	10	15	0	$\overline{13}$	$\overline{28}$	$\overline{6}$	26	8	24	2	$\overline{22}$	$\overline{4}$	17	$\overline{11}$
21	21	$\overline{15}$	28	29	9	$\overline{8}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{5}$	4	31	18	17	20	$\overline{19}$	$\overline{1}$	$\overline{30}$	$\overline{12}$	11	$\overline{14}$	13	0	27	26	$\overline{6}$	$\overline{7}$	23	22	2	3	$\overline{16}$	10
22	22	$\overline{26}$	13	11	$\overline{10}$	30	19	$\overline{17}$	16	$\overline{31}$	$\overline{4}$	3	$\overline{25}$	$\overline{2}$	24	$\overline{23}$	8	$\overline{7}$	29	6	$\overline{28}$	27	0	$\overline{15}$	14	12	$\overline{1}$	21	$\overline{20}$	18	5	$\overline{9}$
23	23	$\overline{27}$	$\overline{14}$	12	$\overline{30}$	$\overline{10}$	20	$\overline{18}$	31	16	$\overline{5}$	25	3	$\overline{24}$	$\overline{2}$	22	9	$\overline{29}$	$\overline{7}$	28	6	$\overline{26}$	15	0	13	11	21	$\overline{1}$	19	$\overline{17}$	$\overline{4}$	8
24	24	$\overline{28}$	$\overline{15}$	30	12	$\overline{11}$	21	$\overline{31}$	18	17	$\overline{25}$	$\overline{5}$	4	23	$\overline{22}$	$\overline{2}$	29	9	$\overline{8}$	$\overline{27}$	26	6	$\overline{14}$	13	0	$\overline{10}$	20	$\overline{19}$	$\overline{1}$	16	3	$\overline{7}$
25	25	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{15}$	14	$\overline{13}$	31	21	$\overline{20}$	19	24	$\overline{23}$	22	$\overline{5}$	4	$\overline{3}$	$\overline{28}$	27	$\overline{26}$	9	$\overline{8}$	7	12	$\overline{11}$	10	0	18	17	$\overline{16}$	$\overline{1}$	2	6
26	26	22	$\overline{19}$	17	$\overline{16}$	31	13	11	$\overline{10}$	30	$\overline{8}$	7	$\overline{29}$	$\overline{6}$	28	$\overline{27}$	$\overline{4}$	3	$\overline{25}$	$\overline{2}$	24	$\overline{23}$	1	$\overline{21}$	20	$\overline{18}$	0	$\overline{15}$	14	$\overline{12}$	9	5
27	27	23	$\overline{20}$	18	$\overline{31}$	$\overline{16}$	$\overline{14}$	12	$\overline{30}$	$\overline{10}$	$\overline{9}$	29	7	$\overline{28}$	$\overline{6}$	26	$\overline{5}$	25	3	$\overline{24}$	$\overline{2}$	22	21	1	$\overline{19}$	17	15	0	$\overline{13}$	11	$\overline{8}$	$\overline{4}$
28	28	24	$\overline{21}$	31	18	$\overline{17}$	$\overline{15}$	30	12	$\overline{11}$	$\overline{29}$	$\overline{9}$	8	27	$\overline{26}$	$\overline{6}$	$\overline{25}$	$\overline{5}$	4	23	$\overline{22}$	$\overline{2}$	20	19	1	$\overline{16}$	$\overline{14}$	13	0	$\overline{10}$	7	3
29	29	25	$\overline{31}$	21	20	19	$\overline{30}$	15	14	$\overline{13}$	28	$\overline{27}$	26	$\overline{9}$	8	$\overline{7}$	24	$\overline{23}$	22	$\overline{5}$	4	$\overline{3}$	18	17	16	1	12	11	10	0	$\overline{6}$	$\overline{2}$
30	30	31	25	$\overline{24}$	23	$\overline{22}$	29	$\overline{28}$	27	$\overline{26}$	$\overline{15}$	14	13	$\overline{12}$	11	$\overline{10}$	$\overline{21}$	20	$\overline{19}$	$\overline{18}$	17	$\overline{16}$	$\overline{5}$	4	$\overline{3}$	2	$\overline{9}$	8	$\overline{7}$	6	0	1
31	31	$\overline{30}$	29	28	27	$\overline{26}$	$\overline{25}$	24	$\overline{23}$	22	$\overline{21}$	20	$\overline{19}$	$\overline{18}$	17	$\overline{16}$	15	$\overline{14}$	13	12	$\overline{11}$	10	$\overline{9}$	8	$\overline{7}$	6	5	$\overline{4}$	3	$\overline{2}$	1	$\overline{0}$

Wir setzen entweder unter Zuziehung von 5 primitiven imaginären Einheiten:

$$
\begin{array}{lllll}
e_0 = 1, & e_1 = i_1, & e_6 = i_1 i_2, & e_{16} = i_1 i_2 i_3, & e_{26} = i_1 i_2 i_3 i_4, \\
& e_2 = i_2, & e_7 = i_1 i_3, & e_{17} = i_1 i_2 i_4, & e_{27} = i_1 i_2 i_3 i_5, \\
& e_3 = i_3, & e_8 = i_1 i_4, & e_{18} = i_1 i_2 i_5, & e_{28} = i_1 i_2 i_4 i_5, \\
& e_4 = i_4, & e_9 = i_1 i_5, & e_{19} = i_1 i_3 i_4, & e_{29} = i_1 i_3 i_4 i_5, \\
& e_5 = i_5, & e_{10} = i_2 i_3, & e_{20} = i_1 i_3 i_5, & e_{30} = i_2 i_3 i_4 i_5, \\
& & e_{11} = i_2 i_4, & e_{21} = i_1 i_4 i_5, & \\
& & e_{12} = i_2 i_5, & e_{22} = i_2 i_3 i_4, & \\
& & e_{13} = i_3 i_4, & e_{23} = i_2 i_3 i_5, & \\
& & e_{14} = i_3 i_5, & e_{24} = i_2 i_4 i_5, & \\
& & e_{15} = i_4 i_5, & e_{25} = i_3 i_4 i_5, & \\
& & & & e_{31} = i_1 i_2 i_3 i_4 i_5,
\end{array}
$$

oder, mit Zugrundelegung von 6 primitiven imaginären Einheiten:

$$
\begin{array}{llll}
e_0 = 1, & e_1 = i_1 i_2, & e_{16} = i_1 i_2 i_3 i_4, & e_{31} = i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6 \\
& e_2 = i_1 i_3, & e_{17} = i_1 i_2 i_3 i_5, & \\
& e_3 = i_1 i_4, & e_{18} = i_1 i_2 i_3 i_6, & \\
& e_4 = i_1 i_5, & e_{19} = i_1 i_2 i_4 i_5, & \\
& e_5 = i_1 i_6, & e_{20} = i_1 i_2 i_4 i_6, & \\
& e_6 = i_2 i_3, & e_{21} = i_1 i_2 i_5 i_6, & \\
& e_7 = i_2 i_4, & e_{22} = i_1 i_3 i_4 i_5, & \\
& e_8 = i_2 i_5, & e_{23} = i_1 i_3 i_4 i_6, & \\
& e_9 = i_2 i_6, & e_{24} = i_1 i_3 i_5 i_6, & \\
& e_{10} = i_3 i_4, & e_{25} = i_1 i_4 i_5 i_6, & \\
& e_{11} = i_3 i_5, & e_{26} = i_2 i_3 i_4 i_5, & \\
& e_{12} = i_3 i_6, & e_{27} = i_2 i_3 i_4 i_6, & \\
& e_{13} = i_4 i_5, & e_{28} = i_2 i_3 i_5 i_6, & \\
& e_{14} = i_4 i_6, & e_{29} = i_2 i_4 i_5 i_6, & \\
& e_{15} = i_5 i_6, & e_{30} = i_3 i_4 i_5 i_6, &
\end{array}
$$

und erhalten in beiden Fällen übereinstimmend vorstehende, Seite 72 und 73 befindliche Multiplicationstafel.

Zu der Zahl

$$a = \sum_{k=0}^{k=31} a_k e_k$$

ist conjugirt die Zahl

$$\bar{a} = a_0 e_0 - \sum_{k=1}^{k=15} a_k e_k + \sum_{k=16}^{k=30} a_k e_k - a_{31} e_{31},$$

da

$$e_0^2 = 1, \quad e_1^2 = e_2^2 \cdots = e_{15}^2 = -1, \quad e_{16}^2 = e_{17}^2 = \cdots e_{30}^2 = +1, \quad e_{31}^2 = -1.$$

Damit aber

$$a\bar{a} = N = \sum_{k=0}^{k=31} a_k^2$$

werde, müssen folgende 15 Gleichungen erfüllt werden, bei denen wiederum der Kürze wegen der Träger der Indices a unterdrückt ist:

$$1) \begin{cases} 0.16 - 1.10 + 2.7 - 3.6 + 4.26 + 5.27 - 8.22 - 9.23 + 11.19 + 12.20 \\ \quad - 13.17 - 14.18 + 15.31 - 21.30 + 24.29 - 25.28 = 0, \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 0.17 - 1.11 + 2.8 - 3.26 - 4.6 + 5.28 + 7.22 - 9.24 - 10.19 \\ \quad + 12.21 + 13.16 - 14.31 - 15.18 + 20.30 - 23.29 + 25.27 = 0, \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 0.18 - 1.12 + 2.9 - 3.27 - 4.28 - 5.6 + 7.23 + 8.24 - 10.20 - 11.21 \\ \quad + 13.31 + 14.16 + 15.17 - 19.30 + 22.29 - 25.26 = 0, \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 0.19 - 1.13 + 2.26 + 3.8 - 4.7 + 5.29 - 6.22 - 9.25 + 10.17 \\ \quad - 11.16 + 12.31 + 14.21 - 15.20 - 18.30 + 23.28 - 24.27 = 0, \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 0.20 - 1.14 + 2.27 + 3.9 - 4.29 - 5.7 - 6.23 + 8.25 + 10.18 \\ \quad - 11.31 - 12.16 - 13.21 + 15.19 + 17.30 - 22.28 + 24.26 = 0, \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 0.21 - 1.15 + 2.28 + 3.29 + 4.9 - 5.8 - 6.24 - 7.25 + 10.31 + 11.18 \\ \quad - 12.17 + 13.20 - 14.19 - 16.30 + 22.27 - 23.26 = 0, \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 0.22 - 1.26 - 2.23 + 3.11 - 4.10 + 5.30 + 6.19 - 7.17 + 8.16 - 9.31 \\ \quad - 12.25 + 14.24 - 15.23 + 18.29 - 20.28 + 21.27 = 0, \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 0.23 - 1.27 - 2.14 + 3.12 - 4.30 - 5.10 + 6.20 - 7.18 + 8.31 \\ \quad + 9.16 + 11.25 - 13.24 + 15.22 - 17.29 + 19.28 - 21.26 = 0, \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} 0.24 - 1.18 - 2.15 + 3.30 + 4.12 - 5.11 + 6.21 - 7.31 - 8.18 + 9.17 \\ \quad - 10.25 + 13.23 - 14.22 + 16.29 - 19.27 + 20.26 = 0, \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} 0.25 - 1.29 - 2.30 - 3.15 + 4.14 - 5.13 + 6.31 + 7.21 - 8.20 + 9.19 \\ \quad + 10.24 - 11.23 + 12.22 - 16.28 + 17.27 - 18.26 = 0, \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} 0.26 + 1.22 - 2.19 + 3.17 - 4.16 + 5.31 - 6.13 + 7.11 - 8.10 \\ \quad + 9.30 - 12.29 + 14.28 - 15.27 - 18.25 + 20.24 - 21.23 = 0, \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} 0.27 + 1.23 - 2.20 + 3.18 - 4.31 - 5.16 - 6.14 + 7.12 - 8.30 \\ \quad - 9.10 + 11.29 - 13.28 + 15.26 + 17.25 - 19.24 + 21.22 = 0, \end{cases}$$

$$13)\begin{cases}0.28+1.24-2.21+3.31+4.18-5.17-6.15+7.30+8.12\\ \quad -9.11-10.29+13.27-14.26-16.25+19.23-20.22=0,\end{cases}$$

$$14)\begin{cases}0.29+1.25-2.31-3.21+4.20-5.19-6.30-7.15+8.14\\ \quad -9.13+10.28-11.27+12.26+16.24-17.23+18.22=0,\end{cases}$$

$$15)\begin{cases}0.30+1.31+2.25-3.24+4.23-5.22+6.29-7.28+8.27\\ \quad -9.26-10.15+11.14-12.13-16.21+17.20-18.19=0.\end{cases}$$

Diese 15 Gleichungen lassen sich leicht aus folgenden 16 zusammensetzen:

1*) $0.16-1.10+2.7-3.6=0,$

2*) $0.17-1.11+2.8-4.6=0,$

3*) $0.18-1.12+2.9-5.6=0,$

4*) $0.19-1.13+3.8-4.7=0,$

5*) $0.20-1.14+3.9-5.7=0,$

6*) $0.21-1.15+4.9-5.8=0,$

7*) $0.22-2.13+3.11-4.10=0,$

8*) $0.23-2.14+3.12-5.10=0,$

9*) $0.24-2.15+4.12-5.11=0,$

10*) $0.25-3.15+4.14-5.13=0,$

11*) $0.26-6.13+7.11-8.10=0,$

12*) $0.27-6.14+7.12-9.10=0,$

13*) $0.28-6.15+8.12-9.11=0,$

14*) $0.29-7.15+8.14-9.13=0,$

15*) $0.30-10.15+11.14-12.13=0$

und

16*) $0.31-1.30+2.29-3.28+4.27-5.26=0.$

Man übersieht dies ohne Mühe, wenn man die Zahl a in der Form schreibt: $a=a_0+\Sigma a_{lm}i_l i_m+\Sigma a_{lmpq}i_l i_m i_p i_b+a_{123456}i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6.$

Die zu a conjugirte Zahl $\bar{a}$ ist, da

$$(i_l i_m i_p i_q i_r i_s)(i_l i_m i_p i_q i_r i_s)=-1,$$

$$\bar{a}=a_0-\Sigma a_{lm}i_l i_m+\Sigma a_{lmpq}i_l i_m i_p i_q-a_{123456}i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6.$$

Die sämmtlichen Gleichungen $1, 2, \ldots 15$ stellen sich dar als zusammengesetzt aus je vier Gleichungen von der Form:

1) $0.abcd-ab.cd-ac.db-ad.bc=0,$

2) $ea.bcde+eb.cdea+ec.deab+ed.eabc=0,$

3) $ef.abcdef-abef.cdef-acef.defb-adef.efbc=0.$

Die zweite ist eine Folge der ersten, die dritte eine Folge der ersten und der Gleichung:

$$4)\quad \begin{cases} 0\,.\,abcdef - ab\,.\,cdef - ac\,.\,defb - ad\,.\,efbc - ae\,.\,fbcd \\ \qquad\qquad - af\,.\,bcde = 0. \end{cases}$$

Das Bildungsgesetz der Gleichungen 1) und 4) ist dasselbe. Lässt man den ersten Buchstaben a weg, so bilden die Suffixe der negativen Glieder die aufeinander folgenden cyklischen Permutationen der Suffixe des ersten positiven Gliedes.

Es ist nun nicht schwer, das allgemeine Gesetz aufzustellen, dem die Quaternionen von 2^n Einheiten unterworfen sind. Eine Zahl in diesem System lässt sich entweder in der Form:

$$a = a_0 + \Sigma a_l i_l + \Sigma a_{lm} i_l i_m + \Sigma a_{lmp} i_l i_m i_p + \Sigma a_{lmpq} i_l i_m i_p i_q + \cdots,$$

oder in der Form:

$$a = a_0 + \Sigma a_{lm} i_l i_m + \Sigma a_{lmpq} i_l i_m i_p i_q + \Sigma a_{lmpqrs} i_l i_m i_p i_q i_r i_s + \cdots,$$

wobei im ersten Fall n, im zweiten Falle $n+1$ primitive imaginäre Einheiten zu Grunde gelegt sind. Die Multiplicationstafel ist in beiden Fällen dieselbe. Es genügt also, wenn wir uns auf den zweiten Fall beschränken. Dann ist die zu a conjugirte Zahl:

$$\overline{a} = a_0 - \Sigma a_{lm} i_l i_m + \Sigma a_{lmpq} i_l i_m i_p i_q - \Sigma a_{lmpqrs} i_l i_m i_p i_q i_r i_s + \cdots,$$

wobei die Vorzeichen der Glieder in $\overline{a}$ abwechselnd positiv oder negativ sind, je nachdem die Classenzahl der einzelnen Combinationen dividirt durch 2 eine gerade oder ungerade Zahl giebt. Damit die Norm

$$N = a\overline{a}$$

werde, sind gewisse Gleichungen erforderlich. Dieselben lassen sich zusammensetzen aus Gleichungen von der Gestalt:

$$0\,.\,b_1 b_2 b_3 b_4 - b_1 b_2\,.\,b_3 b_4 - b_1 b_3\,.\,b_4 b_2 - b_1 b_4\,.\,b_2 b_3 = 0,$$

$$\begin{aligned} 0\,.\,b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 &- b_1 b_2\,.\,b_3 b_4 b_5 b_6 - b_1 b_3\,.\,b_4 b_5 b_6 b_2 - b_1 b_4\,.\,b_5 b_6 b_2 b_3 \\ &- b_1 b_5\,.\,b_6 b_2 b_3 b_4 - b_1 b_6\,.\,b_2 b_3 b_4 b_5 = 0 \end{aligned}$$

und allgemein, wenn m eine gerade Zahl bedeutet:

$$\begin{aligned} 0\,.\,b_1 b_2 \ldots b_m &- b_1 b_2\,.\,b_3 \ldots b_m - b_1 b_3\,.\,b_4 \ldots b_m b_2 - b_1 b_4\,.\,b_5 \ldots b_m b_2 b_3 - \cdots \\ &- b_1 b_k\,.\,b_{k+1} \ldots b_m b_2 \ldots b_{k-1} - \cdots - b_1 b_m\,.\,b_2 b_3 \ldots b_{m-1} = 0. \end{aligned}$$

Die Zahl dieser Gleichungen beträgt für das höhere Quaternion von 2^n Einheiten $2^n - \left(1 + \frac{(n+1)n}{2}\right)$, also für $n = 1, 2, 3, 4, 5 \ldots$ der Reihe nach $0, 0, 1, 5, 16$.

Es sind also die gemein complexen Zahlen und die Hamilton'schen Quaternionen die einzigen unter den hier behandelten Quaternionensystemen mit 2^n Einheiten, bei denen die Coefficienten der verschiedenen Einheiten vollkommen unabhängig von einander angenommen werden können, wenn die Bedingung

$$a\bar{a} = N$$

erfüllt sein soll.

§ 5. Die Beziehungen der Quaternionen zu den linearen orthogonalen Substitutionen Cayley's.

Schon in § 3, II bei Ableitung der Gleichung

$$1) \qquad u' = \frac{1}{q} u q$$

hat es sich gezeigt, dass die Quaternionen in engster Beziehung stehen zu dem Problem, eine Summe von Quadraten in sich selbst zu transformiren. Denn die aus Gleichung 1) sich ergebenden Werthe von x_1', x_2', x_3' genügen der Gleichung:

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Durch die Transformation 1) wird also der Punkt x einer Kugel

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

in einen anderen Punkt x' derselben Kugel übergeführt. Die Transformationen 1) bilden eine Gruppe. Denn zwei verschiedene aufeinander folgende Transformationen ergeben wiederum eine Transformation derselben Art. Wendet man auf:

$$u' = \frac{1}{q} u q$$

eine neue Transformation

$$u'' = \frac{1}{q'} u' q'$$

an, so erhält man durch Substitution der ersten Gleichung in die zweite

$$u'' = \frac{1}{q'} \cdot \frac{1}{q} u q q'.$$

Sei nun

$$q q' = q'',$$

so ist

$$\frac{1}{q'} \cdot \frac{1}{q} = \frac{1}{q''},$$

also kommt

$$u'' = \frac{1}{q''} u q'',$$

welches eine Transformation derselben Art wie 1) darstellt.

Die Gleichung

$$2) \qquad q'' = q q'$$

heisst die Parametergleichung der Transformation und lehrt die Parameter der resultirenden Transformation aus den Parametern der sie zusammensetzenden zu finden.

Wenn
$$q = q_0 + iq_1 + kq_2 + kiq_3,$$
$$q' = q_0' + iq_1' + kq_2' + kiq_3',$$
$$q'' = q_0'' + iq_1'' + kq_2'' + kiq_3'',$$

so erhält man durch Ausführung der Multiplication in 2) und Gleichsetzung der mit gleichen Einheiten behafteten Glieder:

$$q_0'' = q_0 q_0' - q_1 q_1' - q_2 q_2' - q_3 q_3',$$
$$q_1'' = q_1 q_0' + q_0 q_1' + q_3 q_2' - q_2 q_3',$$
$$q_2'' = q_2 q_0' - q_3 q_1' + q_0 q_2' + q_1 q_3',$$
$$q_3'' = q_3 q_0' + q_2 q_1' - q_1 q_2' + q_0 q_3'.$$

Die identische Transformation tritt ein für

$$q_0 = 1, \quad q_1 = q_2 = q_3 = 0$$

oder

$$q = 1,$$

dann wird $u' = u$. Die inverse Transformation von 1) ist:

$$u'' = q u' \frac{1}{q}. \tag{3}$$

Denn wendet man diese auf 1) an, so kommt:

$$u'' = q\left(\frac{1}{q} u q\right)\frac{1}{q} = u.$$

Die Transformation 3) führt also den Punkt x' wieder zurück in den Punkt x.

Mit Hilfe der gewöhnlichen und der höheren Quaternionen ist es möglich, das Problem der linearen orthogonalen Substitution vollständig zu lösen. Wir besitzen bereits eine Methode zur Lösung dieses Problems, nämlich die Methode der schiefen Determinanten von Cayley*, jedoch lässt dieselbe, wie wir bei einer anderen Gelegenheit sehen werden, eine Anzahl Lösungen unberücksichtigt, die mit Hilfe der Quaternionen gefunden werden können. Wir werden die Methode Cayley's etwas ausführlicher recapituliren, um in den Stand gesetzt zu sein, die mit ihrer Hilfe gefundenen Resultate denen gegenüber zu stellen, zu welchen die Theorie der Quaternionen führt.

Es mögen

$$\left\{\begin{array}{l} x_1' = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots a_{1n} x_n \\ x_2' = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots a_{2n} x_n \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_n' = a_{n1} x_1 + a_{n1} x_2 + \cdots a_{nn} x_n \end{array}\right. \tag{4}$$

* Siehe Salmon-Fiedler, Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen. Fünfte Vorlesung, oder Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten § 15 und § 8.

diejenige orthogonale Substitution darstellen, durch welche die Summe der Quadrate:

$$x_1'^2 + x_2'^2 + \cdots x_n'^2$$

in die Summe von ebensoviel Quadraten:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2$$

übergeführt wird. In diesem Falle müssen zwischen den Coefficienten a_{ik} folgende Gleichungen stattfinden:

$$5)\qquad \begin{cases} a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + \cdots + a_{ni}^2 = 1, & \left.\begin{matrix} i \\ k \end{matrix}\right\} = 1, 2, \ldots n. \\ a_{1i}a_{1k} + a_{2i}a_{2k} + \cdots + a_{ni}a_{nk} = 0. & i \gtrless k. \end{cases}$$

Es sind dies im Ganzen

$$n + \frac{n(n-1)}{1.2} = \frac{(n+1)n}{1.2}$$

Bedingungsgleichungen zwischen den Substitutionscoefficienten a_{ik}. Da die Zahl der letzteren n^2 beträgt und zwischen ihnen

$$\frac{n(n+1)}{1.2}$$

Bedingungsgleichungen stattfinden, so müssen sie sich sämmtlich als Functionen von

$$n^2 - \frac{n(n+1)}{1.2} = \frac{n(n-1)}{1.2}$$

von einander unabhängigen Grössen oder sogenannten „wesentlichen Parametern" darstellen lassen. Die identische Transformation tritt ein, wenn

$$a_{ii} = 1, \quad a_{ik} = 0, \quad k \gtrless i.$$

Die inverse Transformation wird durch das Gleichungssystem

$$4^*)\qquad x_i = a_{1i}x_1' + a_{2i}x_2' + \cdots + a_{ni}x_n',$$

oder durch die sogenannte transponirte Substitution von 4) dargestellt.

Bezeichnet man die $\frac{n(n-1)}{1.2}$ unabhängigen oder wesentlichen Parameter mit

$$\begin{matrix} b_{12}, & b_{13} \ldots b_{1n}, & \\ & b_{23} \ldots b_{2n}, & \\ & \vdots & \\ & & b_{n-1,\,n}, \end{matrix}$$

so findet man nach Cayley die Coefficienten a_{ik}, wenn man in der Determinante:

$$6)\qquad B = \begin{vmatrix} b_{11} b_{12} \ldots b_{1n} \\ b_{21} b_{22} \ldots b_{2n} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ b_{n1} b_{n2} \ldots b_{nn} \end{vmatrix}, \quad b_{ik} + b_{ki} = 0, \quad b_{ii} = b_0$$

den Coefficienten von b_{ik} mit β_{ik} bezeichnet, wie folgt:

$$7) \qquad a_{ii} = \frac{2 b_0 \beta_{ii} - B}{B}, \quad a_{ik} = \frac{2 b_0 \beta_{ik}}{B}, \quad k \gtrless i;$$

In allen diesen Lösungen treten die a_{ik} als rationale bilineare Verbindungen der wesentlichen Parameter und gewisser aus ihnen nach einem bestimmten Schema ebenfalls rational zusammengesetzter Ausdrücke auf.

So findet man für $n = 2$ aus

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix},$$

wenn schliesslich

$$8) \qquad b_{11} = b_{22} = b_0, \quad b_{21} = - b_{12}, \quad b_0^2 + b_{12}^2 = B = N$$

gesetzt wird:

$$9) \qquad \begin{cases} N x_1' = (b_0^2 - b_{12}^2) x_1 + 2 b_0 b_{12} x_2, \\ N x_2' = - 2 b_0 b_{12} x_1 + (b_0^2 - b_{12}^2) x_2. \end{cases}$$

Für $n = 3$ erhält man aus

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

unter der Voraussetzung, dass

$$b_{11} = b_{22} = b_{33} = b_0, \quad b_{21} = - b_{12}, \quad b_{31} = - b_{13}, \quad b_{32} = - b_{23}$$

und

$$10) \qquad N = b_0^2 + b_{12}^2 + b_{13}^2 + b_{23}^2 = \frac{B}{b_0}$$

ist:

$$11) \begin{cases} N x_1' = (b_0^2 + b_{23}^2 - b_{12}^2 - b_{13}^2) x_1 + 2 (b_0 b_{12} - b_{13} b_{23}) x_2 + 2 (b_{12} b_{23} + b_0 b_{13}) x_3, \\ N x_2' = - 2 (b_{13} b_{23} + b_0 b_{12}) x_1 + (b_0^2 + b_{13}^2 - b_{12}^2 - b_{23}^2) x_2 + 2 (- b_{12} b_{13} + b_0 b_{23}) x_3, \\ N x_3' = 2 (b_{12} b_{23} - b_0 b_{13}) x_1 - 2 (b_{12} b_{13} + b_0 b_{23}) x_2 + (b_0^2 + b_{12}^2 - b_{13}^2 - b_{23}^2) x_3. \end{cases}$$

Setzt man hierin:

$$b_0 = d, \quad b_{23} = - a, \quad b_{13} = b, \quad b_{12} = - c, \quad N = 1,$$

so erhält man genau die Euler'schen Formeln für die Transformation einer Summe von drei Quadraten in sich selbst, welche in der Quaternionengleichung:

$$(d + i_1 a + i_2 b + i_1 i_2 c)(i_1 x_1 + i_2 x_2 + i_1 i_2 x_3)(d - i_1 a - i_2 b - i_1 i_2 c)$$
$$= i_1 x_1' + i_2 x_2' + i_1 i_2 x_3'.$$

zusammengefasst werden können.

Diese stimmt überein mit der Gleichung § 3, II, 2, sobald man statt der Einheiten i_1, i_2, $i_1 i_2$ der Reihe nach die Einheiten $-ki$, k, $-i$ einführt.

Auch für $n = 4$ hat schon Euler die betreffenden Formeln und zwar „nulla certa methodo sed potius quasi divinando" erhalten. Setzt man mit Cayley:

$$B = \begin{vmatrix} b_0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ -b_{12} & b_0 & b_{23} & b_{24} \\ -b_{13} & -b_{23} & b_0 & b_{34} \\ -b_{14} & -b_{24} & -b_{34} & b_0 \end{vmatrix}$$

$$= b_0^2(b_0^2 + b_{12}^2 + b_{13}^2 + b_{14}^2 + b_{23}^2 + b_{24}^2 + b_{34}^2 + b_{1234}^2),$$

worin, wie oben § 4, 1*:

$$b_{1234} = \frac{b_{12}b_{34} + b_{13}b_{42} + b_{14}b_{23}}{b_0}$$

gesetzt ist, und schreibt man für

$$\begin{array}{ccccccc} b_0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{23} & b_{24} & b_{34} \end{array}$$

der Reihe nach:

$$\begin{array}{ccccccc} \omega & a & b & c & h & -g & f \end{array}$$

setzt ferner:

$$\omega\vartheta = af + bg + ch$$

$$N = \omega^2 + a^2 + b^2 + c^2 + f^2 + g^2 + h^2 + \vartheta^2,$$

so erhält man die Euler-Cayley'sche quaternäre orthogonale Transformation:

$$Nx_1' = [(\omega^2 - \vartheta^2) + (f^2 - a^2) + (g^2 - b^2) + (h^2 - c^2)]x_1 + 2(-a\omega - f\vartheta + cg - bh)x_2$$
$$+ 2(-b\omega - cf - g\vartheta + ah)x_3 + 2(-ca + bf - ag - h\vartheta)x_4,$$

$$Nx_2' = 2(a\omega + f\vartheta - bh + cg)x_1 + [(\omega^2 - \vartheta^2) + (f^2 - a^2) - (g^2 - b^2) - (h^2 - c^2)]x_2$$
$$+ 2(-h\omega + fg - ab - c\vartheta)x_3 + 2(g\omega + fh + b\vartheta - ca)x_4,$$

$$Nx_3' = 2(b\omega + g\vartheta - cf + ah)x_1 + 2(h\omega + fg + cd - ab)x_2$$
$$+ [\omega^2 - \vartheta^2) - (f^2 - a^2) + (g^2 - b^2) - (h^2 - c^2)]x_3$$
$$+ 2(-f\omega + gh - bc - a\vartheta)x_4,$$

$$Nx_4' = 2(c\omega + h\vartheta - ag + bf)x_1 + 2(-g\omega + fh - ac - b\vartheta)x_2$$
$$+ 2(f\omega + gh + a\vartheta - bc)x_3 + [(\omega^2 - \vartheta^2) - (f^2 - a^2)$$
$$- (g^2 - b^2) + (h^2 - c^2)]x_4.$$

Auch hier weist schon die Gleichung:

$$B = b_0^2 N$$

auf ein höheres Quaternion mit 8 Einheiten:

$$b_0e_0 + b_{12}e_1 + b_{13}e_2 + b_{14}e_4 + b_{23}e_5 + b_{24}e_6 + b_{34}e_7 + b_{1234}e_8$$

hin. Es lässt sich zeigen, dass man allerdings mit einem Quaternion von 8 Einheiten die Euler-Cayley'schen Transformation finden kann, dass dies aber auch schon durch Zusammenstellung zweier passend gewählter einfacher Quaternionen sich erreichen lässt. Ausserdem liefert das einfache Quaternion auch zwei vertauschbare Transformationen, bei denen die Parameter nur uni-linear auftreten.

Für $n = 5$ hat man

$$B = \begin{vmatrix} b_0 & b_{12} & \dots & b_{15} \\ -b_{12} & b_0 & \dots & b_{25} \\ \vdots & & & \vdots \\ -b_{15} & -b_{25} & \dots & b_0 \end{vmatrix}$$

$$= b_0^3(b_0^2 + \Sigma b_{ik}^2 + \Sigma b_{iklm}^2).$$

Der Ausdruck in den Klammern ist offenbar die Norm eines Quaternions von 16 Einheiten $b = b_0 + \Sigma b_{lm} i_l i_m + \Sigma b_{lmpq}\, i_l\, i_m\, i_p\, i_q$ und es folgt hieraus, dass zur Transformation einer Summe von fünf Quadraten in sich selbst ein höheres Quaternion von 16 Einheiten erforderlich ist. Eine geringere Zahl von Einheiten scheint mir ausgeschlossen zu sein, wenn man nicht eine identische Transformation, etwa

$$x_5' = x_5$$

gelten lassen will, wodurch die Zahl der Einheiten auf 8 beziehentlich 4 reducirt würde.

Bei einer Transformation von sechs Quadraten in sich selbst hätte man auszugehen von der Determinante:

$$B = \begin{vmatrix} b_0 & b_{12} & \dots & b_{16} \\ -b_{12} & b_0 & \dots & b_{26} \\ \vdots & & & \vdots \\ -b_{16} & -b_{26} & \dots & b_0 \end{vmatrix}$$

$$= b_0^4(b_0^2 + \Sigma b_{ik}^2 + \Sigma b_{iklm}^2 + b_{123456}^2),$$

worin

$$b_{123456} = b_{12} \cdot b_{3456} + b_{13} b_{4562} + b_{14} b_{5623} + b_{15} b_{6234} + b_{16} b_{2345}$$

zu setzen ist. Der Ausdruck in der Klammer ist offenbar die Norm eines höheren Quaternions von 32 Einheiten, wenn wir dasselbe in der Form:

$$b = b_0 + \Sigma b_{lm} i_l i_m + \Sigma b_{lmpq} i_l i_m i_p i_q + b_{123456}\, i_1\, i_2 i_3 i_4 i_5\, i_6$$

schreiben. Zur Transformation einer Summe von sechs Quadraten in sich selbst ist hiernach ein Quaternion von 32 Einheiten erforderlich, doch lässt sich, wie wir an einer anderen Stelle sehen werden, dieselbe auch mit einem Quaternion von 8 Einheiten bewerkstelligen.

Hiernach bietet die Lösung des allgemeinen Problems, eine Summe von n Quadraten in sich selbst zu transformiren, theoretisch keine Schwierigkeiten. Wir gehen aus von der Determinante:

$$B = \begin{vmatrix} b_0 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ -b_{12} & b_0 & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ -b_{1n} & -b_{2n} & \dots & b_0 \end{vmatrix}$$

$$= b_0^{n-2}(b_0^2 + \Sigma b_{lm}^2 + \Sigma b_{lmpq}^2 + \Sigma b_{lmpqrs}^2 + \dots).$$

Der eingeklammerte Ausdruck ist die Norm des Quaternions:

$$b = b_0 + \Sigma b_{lm} i_l i_m + \Sigma b_{lmpq} i_l i_m i_p i_q + \Sigma b_{lmpqrs} i_l i_m i_p i_q i_r i_s + \cdots$$

Die Zahl der in den Klammern eingeschlossenen Quadrate, die ebenso gross ist als die Zahl der Einheiten in b, beträgt:

$$1 + n_2 + n_4 + n_6 + \cdots = 2^{n-1}.$$

Um daher eine Summe von n Quadraten in sich selbst zu transformiren, ist im Allgemeinen ein höheres Quaternion von 2^{n-1} Einheiten erforderlich. Wenn jedoch n selbst eine Potenz von 2 ist, so kann die Transformation auch schon durch n Einheiten geleistet werden, wobei dann die Parameter unilinear auftreten und allemal zwei reciproke Transformationen möglich sind. Es können ausserdem auch noch Fälle eintreten, sobald n eine gerade Zahl und nicht gleich 2^m ist, bei welchen die verlangte Transformation durch ein Quaternion mit weniger als 2^{n-1} Einheiten geleistet werden kann, wie z. B. für $n = 6$.

Die Zahl der Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten der verschiedenen Einheiten beträgt dann

$$2^{n-1} - \left(1 + \frac{n(n-1)}{2}\right).$$

Die Zahl der von einander unabhängigen Coefficienten würde demnach

$$1 + \frac{n(n-1)}{2}$$

sein, welche Zahl aber, sobald

$$N = 1$$

gesetzt wird, sich auf

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

reducirt. Dies ist in der That die Zahl der zur Transformation einer Summe von n Quadraten in sich selbst erforderlichen „wesentlichen Parameter".

Berichtigungen zum ersten Theil dieser Abhandlung.

S. 51 Fig. 2 ist im oberen Dreieck $A'B'C'$ der Buchstabe A überflüssig, im unteren Dreieck ABC die Seite AB mit c zu bezeichnen. — S. 57 in der fünften Zeile von unten muss es statt „Weil nun die Winkel" heissen „Weil nämlich die Winkel".

IV.

Ueber die ebenen Curven vierter Ordnung vom Geschlechte Eins.

Von

Dr. H. Liebmann

in Jena.

Herr Thomä hat im 29. Jahrgange dieser Zeitschrift eine Abhandlung „Ueber Kreissysteme" veröffentlicht. Verallgemeinert man projectiv die daselbst gegebene Abbildung der Ebenen oder der Punkte des Raumes auf die Kreise der gegebenen Systemebene durch Vermittelung einer Kugel, so erhält man einen neuen und wie es scheint, ganz besonders einfachen Eingang in die Theorie der ebenen Curven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten und kann ohne Mühe die bekannten und einige neue Sätze über dieselben als selbstverständliche Folgerungen aus den Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung erhalten. Man erhält auch eine besonders anschauliche Uebersicht über die Erzeugungsarten dieser Curven. Dies sollen die folgenden Zeilen zeigen.

I. Die Abbildung der Ebenen des Raumes auf die Kegelschnitte eines Netzes mit zwei Grundpunkten.

Man bringe die Ebenen zum Schnitt mit einer Fläche zweiten Grades Φ und projicire den entstehenden Kegelschnitt von einem Punkt N der Fläche aus in die Systemebene $\mathfrak{S}$. Den Punkt N nennen wir den Nordpol, die Tangentialebene in ihm die Nordpolebene (n). So verwandeln sich alle Kegelschnitte auf Φ, bez. alle Ebenen des Raumes in Kegelschnitte der Ebene $\mathfrak{S}$ durch die beiden Punkte X und Y, in denen die durch N gehenden Geraden $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ von Φ die Ebene $\mathfrak{S}$ treffen. Die Ebenen durch den Nordpol bilden sich ab auf gerade Linien (eigentlich $+z$, wo z die Verbindungslinie von X und Y ist). Die Geraden von Φ bilden sich durch diese stereographische Projection ab auf Geraden durch Y oder X, je nachdem sie derselben Schaar wie $\mathfrak{x}$ oder wie $\mathfrak{y}$ angehören.

Eine Gerade g als Träger eines Ebenenbüschels bildet sich ab auf ein Büschel von Kegelschnitten mit den Grundpunkten XYG_1G_2, wo G_1G_2 die Projectionen der Schnittpunkte von g und Φ sind. Die drei zerfallenden Kegelschnitte des Büschels, nämlich $(XY)(G_1G_2)$, ferner $(XG_1)(YG_2)$ und $(XG_2)\cdot(YG_1)$ sind die Bilder der durch g und N gelegten

Ebene und der beiden durch g an Φ gelegten Tangentialebenen. Wir nennen $(G_1 G_2)$ die Potenzlinie und $(P_1 P_2)$, die Verbindungslinie der zwei nicht auf $\mathfrak{z}$ liegenden Nebenecken des Vierecks $X Y G_1 G_2$, die zugleich die stereographischen Projectionen der Schnittpunkte der Polaren p von g mit Φ sind, die Centrale des Büschels. Auf ihr liegen die Pole der Geraden $\mathfrak{z}$ für die Kegelschnitte des Büschels. Die Polare p von g bildet sich ab auf ein Büschel von Kegelschnitten durch $X Y P_1 P_2$, für das $P_1 P_2$ Potenzlinie und $G_1 G_2$ Centrale ist. Die Tangenten der beiden durch einen Punkt gehenden Kegelschnitte des Büschel $(X Y G_1 G_2)$ und $(X Y P_1 P_2)$ sind von den Verbindungslinien des Punktes mit X und Y harmonisch getrennt, weil ihnen auf Φ conjugirte Richtungen entsprechen. Wir nennen deshalb die beiden Büschel Orthogonalbüschel. Wären nämlich X und Y die absoluten Punkte, so wären die Büschel orthogonale Kreisbüschel. Sind X und Y reelle Punkte (also nur wenn Φ eine Fläche mit reellen Geraden ist), so sind die beiden Paare $G_1 G_2$ und $P_1 P_2$ gleichzeitig reell oder conjugirt imaginär; sind X und Y conjugirt imaginär, also beim Ellipsoïd z. B., so ist immer nur eines der beiden Paare reell.

Die Ebenen eines Büschels sind projectiv zugeordnet den Kegelschnitten des sie abbildenden Büschels, denn die Ebenen sind ihren Spuren auf $\mathfrak{s}$ projectiv zugeordnet und auch ihren Spuren auf der Tangentialebene in einem der Punkte, wo die Achse g des Büschels Φ trifft und diese Spuren bilden sich auf die Tangenten an das Büschel von Kegelschnitten in einem Grundpunkte durch die Perspective von N aus ab. Der Involution conjugirter Ebenen eines Büschels, dessen Achse g ist, entspricht also in der Ebene $\mathfrak{s}$ eine Involution zwischen den Individuen eines Büschels von Kegelschnitten, wobei die zerfallenden Kegelschnitte $(X G_1)(Y G_2)$ und $(X G_2)(Y G_1)$ sich selbst entsprechen.

Eine Gerade durch den Nordpol bildet sich auf ein Strahlenbüschel ab, dessen Träger ihr Spurpunkt Z auf $\mathfrak{s}$ ist, ihre Polare ergiebt ein Büschel von sich in X und Y berührenden Kegelschnitten, zu denen das Geradenpaar $(ZX)(ZY)$ gehört, denn ihre Bilder auf Φ berühren sämmtlich die beiden durch ZN gelegten Tangentialebenen, die $\mathfrak{x}$ bez. $\mathfrak{y}$ enthalten.

Eine Tangente t bildet sich auf ein Büschel von Kegelschnitten ab, die in der Projection des Berührungspunktes die Projection von t berühren.

P u n k t e ($\mathfrak{Z}$) kann man in zwei Arten auffassen als Träger von Strahlen, so dass die Eigenschaften der sie abbildenden Kegelschnittsmannigfaltigkeiten besonders klar werden.

a) Wir legen durch die Polare von $\mathfrak{Z} N$, also durch den Schnitt von n mit der Polarebene $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{Z}$ und durch $\mathfrak{Z}$ eine Ebene $\mathfrak{z}'$. Die Ebenen des Büschels $(\mathfrak{Z} N)$ bestimmen auf $\mathfrak{z}'$ Strahlen, deren Stützpunkt $\mathfrak{Z}$ ist. Sei Z der Spurpunkt von $(N \mathfrak{Z})$ auf $\mathfrak{s}$, so ist das Bild von $\mathfrak{z}'$ ein Kegelschnitt δ, der ZX und ZY in X und in Y berührt. Das Bild einer Ebene $(\mathfrak{Z}N)$ ist ein Strahl (Z). Durch einen solchen Strahl (z) und δ ist ein Büschel vollständig bestimmt, es ist das Bild eines Strahles durch $\mathfrak{Z}$ auf $\mathfrak{z}'$. Also stellen alle Kegelschnitte durch X, Y und zwei diametral gegenüber, d. h. auf einer Geraden durch Z gelegene Punkte von δ Ebenen durch $\mathfrak{Z}$ dar. Wir nennen deshalb δ den Diametralkegelschnitt, Z, den Pol von z, seinen Mittelpunkt.

b) Denkt man das Ebenenbündel $(\mathfrak{Z})$ erzeugt durch die von $\mathfrak{Z}$ an Φ gelegten Tangenten (je zwei derselben bestimmen eine Ebene durch $\mathfrak{Z}$, und die conjugirt imaginären Tangenten sind mitzurechnen), so ordnen sich die Bilder der Ebenen in Berührungsbüschel an, d. h. in solche Kegelschnittsbüschel, die ausser X und Y noch einen Punkt und in ihm die Tangente gemein haben. Die Tangenten gehen durch Z und sind die Projectionen der von Z an Φ gelegten Tangenten. Die Berührungsbüschel haben also die Eigenschaft, dass die Tangenten der Doppelgrundpunkte O alle durch einen Punkt Z gehen und dass die O alle auf einem Kegelschnitt ω liegen, der Projection von $(\mathfrak{z}\Phi)$. In jedem Punkt O ist die Richtung der Tangente an ω durch OX und OY von der Tangente des zugehörigen Berührungsbüschels harmonisch getrennt. Wir nennen deshalb ω den Orthogonalkegelschnitt des Bündels.

Folgende zerfallende Kegelschnitte befinden sich im Bündel: die Geradenpaare $(OX)(OY)$ als Bilder der von $\mathfrak{Z}$ an Φ gelegten Tangentialebenen und die Geraden durch $Z(+z)$ als Bilder der Ebenen des Büschels $(\mathfrak{Z}N)$.

Sind X und Y reell, so sind δ und ω beide reell, denn $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}'$ schneiden dann beide Φ reell. Sind X und Y conjugirt imaginär, so ist immer nur einer der beiden Kegelschnitte reell, der andere imaginär, z. B. bei linearen Kreisbündeln.

Dies genügt für unsere Zwecke; eine genauere Untersuchung findet man ausser in der oben citirten Arbeit noch in § 2 meiner Dissertation: Die einzweideutigen projectiven Punktverwandtschaften der Ebene. Jena 1895.

II. Die Möbius'sche Verwandtschaft.

Wir definiren sie so: Gegeben ist ein Kegelschnitt ζ und ein nicht auf ihm liegender Punkt Z, dessen Polare z den Kegelschnitt ζ in X und Y treffen mag. Um einen Punkt C abzubilden, construire man seine Polare c hinsichtlich ζ und verbinde ihn mit Z; der Schnittpunkt dieser beiden Geraden, C', ist das Bild von C. Eine eingehende Untersuchung der Verwandtschaft habe ich in § 4, 2 meiner Dissertation gegeben, und vor Allem gezeigt, dass man sie durch Vermittelung von Flächen zweiten Grades erhalten kann. Ist nämlich Φ und darauf der Punkt N gegeben und verbindet man den Punkt C der Ebene $\mathfrak{s}$ mit N und den Schnittpunkt Γ von

NC und Φ mit einem nicht auf Φ gelegenen Punkt $\mathfrak{Z}$, so schneidet $\Gamma\mathfrak{Z}$ die Fläche noch einmal, etwa in Γ', und Γ' projicirt sich von N aus auf einen Punkt C' in $\mathfrak{s}$. Zwischen C und C' besteht nun die Möbius'sche Verwandtschaft. Bezeichnen wir nämlich mit Z die Spur von $N\mathfrak{Z}$ in $\mathfrak{s}$ und mit ζ die Projection des Schnittes von Φ mit der Polarebene $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{Z}$, so erkennt man leicht, dass jeder Punkt C auf einen Punkt, der auf (ZC) liegt, abgebildet wird, und dass C und C' conjugirte Punkte hinsichtlich ζ sind. Sie sind nämlich die Bilder der von N aus projicirten Involution, welche die in der Ebene $\mathfrak{Z}NC$ liegenden durch $\mathfrak{Z}$ gehenden Strahlen auf dem Schnitt von Φ mit dieser Ebene bestimmen und deren Doppelpunkte sich eben auf die Schnittpunkte von ZC mit ζ projiciren. C und C' sind also conjugirte Punkte, und beide Definitionen sind also einander äquivalent. Wir wollen nun allgemein Z das Centrum und ζ den Symmetriekegelschnitt einer Möbius'schen Verwandtschaft nennen. C und C' nennen wir symmetrisch in Bezug auf Z und ζ oder auch schlechthin symmetrisch. Eine Curve, die aus symmetrischen Punktepaaren CC' besteht, d. h. die sich durch die Verwandtschaft auf sich selbst abbildet (wobei sich übrigens vom Bild gerade Linien abspalten), nennen wir ebenfalls symmetrisch in Bezug auf Z und ζ. — Die eigentliche Möbius'sche (Kreis-)Verwandtschaft entsteht, wenn man für X und Y die absoluten Punkte nimmt, d. h. wenn ζ ein Kreis und Z sein Mittelpunkt ist. Es ist dies die wegen ihrer bekannten metrischen Eigenschaften auch „Transformation durch reciproke Radien" genannte Verwandtschaft. Nimmt man in der obigen zweiten Definition der Möbius'schen Verwandtschaft für Φ eine Kugel, für $\mathfrak{s}$ eine der Aequatorebene parallele Ebene und für $\mathfrak{Z}$ den unendlich fernen Punkt der NS-Achse, so erhält man ebenfalls die Kreisverwandtschaft.

III. Die Curven vierter Ordnung vom Geschlechte Eins.

Bekanntlich bestimmen zwei einander projectiv zugeordnete Büschel von Kegelschnitten mit zwei gemeinsamen Grundpunkten durch ihre Schnittpunkte eine Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten, eben jenen gemeinsamen Grundpunkten X und Y. Wenn wir andererseits zwei einander projectiv zugeordnete Ebenenbüschel durch Vermittelung von Φ und N nach I. auf eine Ebene $\mathfrak{s}$ abbilden, so erhalten wir daselbst zwei einander projectiv zugeordnete Kegelschnittsbüschel mit zwei gemeinsamen Grundpunkten. Ihr Schnitt, also eine C_4, ist das von N aus projicirte Bild des Schnittes der geraden Linien, in denen sich die entsprechenden Ebenen der beiden Büschel schneiden mit Φ, also einer Raumcurve vierter Ordnung Γ_4 erster Species, d. h. wir erhalten die ebenen Curven vierter Ordnung vom Geschlechte Eins alle durch Projection der Γ_4. Sei also C_4 die Projection der auf Φ gelegenen Γ_4 von N aus, so sehen wir zunächst: Wir können durch Γ_4 ein ganzes Büschel von Flächen zweiten Grades legen, unter dem sich auch vier Kegel befinden. $\mathfrak{Z}_1\mathfrak{Z}_2\mathfrak{Z}_3\mathfrak{Z}_4$ seien ihre

Spitzen, $Z_1 Z_2 Z_3 Z_4$ die Spurpunkte der vier Geraden $\mathfrak{Z}_i N$ auf $\mathfrak{s}$, endlich ζ_i die Projectionen der Schnitte ihrer Polarebenen z_i von $\mathfrak{Z}_i$ mit Φ von N aus. Jeden solchen Kegel $(\mathfrak{Z}_i)$ können wir auf zweifach unendlich viele Weise durch Zuordnung von projectiven Ebenenbüscheln erzeugen und die Schnitte sind eben die Erzeugenden des Kegels, die Verbindungslinien der Schnittpunkte, in denen sich zwei entsprechende Kegelschnitte in der Projection ausser in X und Y noch schneiden, gehen daher durch Z_i. Von $\mathfrak{Z}_i$ aus kann man ferner vier auf $(\mathfrak{Z}_i)$ liegende Tangenten an Φ legen und sie als Achsen von projectiven Ebenenbüscheln zur Erzeugung von $(\mathfrak{Z}_i)$ benützen. Sie berühren Φ in vier Punkten auf z_i, die sich auf ζ_i projiciren. An jeden Kegel $(\mathfrak{Z}_i)$ kann man ferner von N aus zwei Tangentialebenen legen, die Γ_4 je zweimal berühren. Ferner sieht man, dass Γ_4 sich auf eine in Bezug auf ζ_i und Z_i symmetrische Curve abbilden muss nach II, eben weil der Kegel $(\mathfrak{Z}_i)$ durch seinen Schnitt mit Φ Γ_4 bestimmt und z_i seine Polarebene ist. Endlich ist zu erwähnen, dass ein Kegelschnitt, den eine an $(\mathfrak{Z}_i)$ längs einer Tangente von $\mathfrak{Z}_i$ an Φ gelegte Tangentialebene aus Φ schneidet, ausser dem Berührungspunkt der Tangente auf Φ mit Γ_4 weiter keinen Punkt gemein hat, also Γ_4 daselbst vierpunktig berührt.

Uebertragen wir alle diese Eigenschaften durch unsere Projection in die Ebene auf C_4, so sehen wir:

Es giebt für jede C_4 vier Kegelschnitte ζ_i und vier Punkte Z_i und von jedem gelten folgende Sätze:

1. Man kann C_4 auf zweifach unendlich viele Arten durch Schnitt von zwei projectiven Kegelschnittsbüscheln so erzeugen, dass die Verbindungslinien entsprechender Schnittpunkte sich auf Z_i stützen.
2. Unter den Büscheln befinden sich auch vier Berührungsbüschel, deren Doppelgrundpunkte auf ζ_i liegen und deren Grundtangenten durch Z_i gehen. Diese Grundtangenten sind nämlich die Projectionen der vier auf $(\mathfrak{Z}_i)$ liegenden Tangenten an Φ, die natürlich auch Γ_4 berühren.
3. Durch Z_i gehen auch zwei Doppeltangenten an C_4.
4. Die C_4 liegt symmetrisch in Bezug auf Z_i und ζ_i.
5. Jeder der in 2. genannten Berührungsbüschel enthält auch einen C_4 vierpunktig berührenden Kegelschnitt.

Alle diese Sätze gelten in jedem Paar $Z_i \zeta_i$, so dass wir acht Doppeltangenten und sechszehn vierpunktig berührende Kegelschnitte durch die Grundpunkte erhalten, von denen viermal je vier C_4 auf einem Kegelschnitt berühren, während die Tangenten in diesen Punkten zu je vieren durch den Schnittpunkt der beiden Doppeltangenten gehen, welche dazu gehören.

Da nun $z_1 z_2 z_3 z_4$ ein Polartetraeder bilden, so folgt noch aus I. (man vergleiche die über Abbildungen conjugirter Polaren abgeleiteten Sätze):

Je drei Potenzlinien, die zu den Kegelschnitten $\zeta_{i1}\zeta_{i2}\zeta_{i3}$ gehören, gehen durch den Punkt Z_{i4}, wo $i_1 i_2 i_3 i_4$ die Zahlen 1 2 3 4 in irgend einer Anordnung sind. Ferner ist die Potenzlinie von je zwei Kegelschnitten $\zeta_{i1}\zeta_{i2}$ die Centrale von je zwei anderen $\zeta_{i3}\zeta_{i4}$ und umgekehrt. Diese sechs Geraden, von denen jede zugleich Potenzlinie und Centrale ist, sind die sechs Verbindungslinien der Punkte Z und die von N aus projicirten Kanten des Polartetraeders $\mathfrak{Z}_1\mathfrak{Z}_2\mathfrak{Z}_3\mathfrak{Z}_4$ von Φ. Die vier Symmetriekegelschnitte schneiden sich orthogonal, da immer je zwei von ihnen conjugirte Ebenen abbilden. Kennt man einen Symmetriekegelschnitt ζ und sein Centrum Z, so ist dadurch das Bündel bestimmt, dem die drei anderen angehören, nämlich dasjenige, dessen Orthogonalkegelschnitt ζ ist; kennt man zwei, so hat man da Büschel, dem die beiden anderen angehören, es ist das orthogonale zu dem durch die beiden ersten bestimmten; kennt man drei, so hat man auch den letzten als Orthogonalkegelschnitt des durch die drei ersten bestimmten Bündels. Diese vier Symmetriekegelschnitte geben also ein wesentliches Charakteristikum der C_4.

Auf bicirculare C_4 angewendet, lautet der Satz der vierfachen Symmetrie so: Es giebt vier Möbius'sche Kreisverwandtschaften, die eine bicirculare Curve vierter Ordnung auf sich selbst abbilden. Doch können von den Grundkreisen derselben nur drei reell sein, da von den Ebenen eines Polartetraeders immer eine die Kugel imaginär trifft. Die vier Grundkreise schneiden einander senkrecht, woraus wieder folgt, dass nur drei reell sein können.

Beispiele sind die Cassini'schen Curven

$$(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 = b^4.$$

Sie liegen symmetrisch zur x- und y-Achse, zwei der Kreisverwandtschaften arten also in Spiegelungen an diesen Achsen aus. Weiter aber bilden die Kreise, deren Centrum der Coordinatenanfang ist und deren Radien bez.

$$\varrho_1 = \sqrt{+\sqrt{a^4 - b^4}} \quad \text{und} \quad \varrho_2 = \sqrt{-\sqrt{a^4 - b^4}}$$

sind, durch Kreisverwandtschaft die Curve auf sich selbst ab. Sie sind imaginär bei der einzügigen $(a < b)$, während einer reell ist, bei der zweizügigen $(a > b)$ Cassini'schen Curve. Denken wir uns die Cassini'sche Curve durch Abbildung aus dem Raum erhalten, so unterscheidet sie sich dadurch vor Allem von anderen bicircularen C_4, dass bei Γ_4 eine Kante des gemeinsamen Polartetraeders durch den Nordpol der Abbildungskugel geht.

Bis jetzt haben wir nur von den vier Kegeln $(\mathfrak{Z}_i)$ Gebrauch gemacht, die man durch Γ_4 legen kann. Statt derselben kann man aber auch die Flächen des durch Γ_4 gelegten Flächenbüschels zweiten Grades benutzen (Φ'), die keinen singulären Punkt besitzen. Jede derselben lässt sich erzeugen, indem wir die Ebenen zweier Büschel, deren Achsen zwei derselben Geradenschaar von Φ angehörende Geraden sind, in geeigneter Weise einander projectiv zuordnen.

In der Ebene bedeutet dies, dass wir zwei Büschel mit den Grundpunkten $XYUV$ und $XYU'V'$ nehmen, sie sind die Bilder jener Ebenenbüschel und erzeugen durch ihren Schnitt C_4. $UVU'V'$ liegen auf C_4 und sind die Bilder der Punkte, in denen Achsen der projectiven Ebenenbüschel Γ_4 schneiden. Jeder Fläche Φ' entsprechen in der Ebene $2 \cdot \infty^1$ Büschel, die Bilder der Geraden der Fläche, und da man jede Fläche auf ∞^2 Arten durch Zuordnung von projectiven Ebenenbüscheln erzeugen kann, und da durch Γ_4 ∞^1 Flächen gehen, so erhält man $\infty^1 \cdot \infty^2 = \infty^3$ Arten, C_4 durch projective Zuordnung von Kegelschnittsbüscheln zu erzeugen. Die Verbindungslinien der beiden Punkte, in denen sich ausser in X und Y die entsprechenden Kegelschnitte zweier Büschel schneiden, stützen sich auf einen Kegelschnitt. Sie sind nämlich die directen Projectionen der Geraden der betreffenden Fläche von N aus, also die Schnitte der Tangentialebenen des von N an Φ' gelegten Tangentialkegels mit $\mathfrak{S}$. Solcher Stützkegelschnitte giebt es ∞^1, und man kann sie auffassen als Schnitte der von einem Punkt im Raum an ein Büschel von Flächen zweiten Grades gelegten Tangentialkegel mit der Ebene der C_4.

Diese Mannigfaltigkeit ist zweiten Grades, denn, wenn man einen Punkt P in $\mathfrak{S}$ mit N verbindet, so bestimmen die Flächen des Büschels auf NP eine Involution und es giebt zwei Flächen, die NP berühren und nur sie haben die Eigenschaft, dass der an sie von N aus gelegte Tangentialkegel $\mathfrak{S}$ in einem P enthaltenden Kegelschnitt trifft. Durch P gehen also zwei Kegelschnitte der Mannigfaltigkeit.

Sie bestimmen durch ihre Schnitte auf allen Geraden der Ebene im Allgemeinen zwei-zweideutige symmetrische Punktverwandtschaften (vergl. §13 der von Herrn Thomä im 21. Bande der Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften veröffentlichten „Untersuchungen über zwei-zweideutige Verwandtschaften und einige Erzeugnisse derselben“). Es befinden sich unter der Mannigfaltigkeit vier Geradenpaare, nämlich die acht Doppeltangenten, weil je zwei derselben die Projectionen des Polarkegelschnittes von N hinsichtlich eines Kegels des Büschels sind oder weil in ihnen die von N aus an die Kegel gelegten Tangentialebenen sich mit $\mathfrak{S}$ schneiden. An dieser Stelle können wir auch zeigen, dass es nicht mehr als acht Doppeltangenten geben kann. Verbindet man die beiden Punkte, in denen eine durch N und eine Doppeltangente gelegte Ebene Γ_4 berührt und construirt die Fläche zweiten Grades durch Γ_4 und einen Punkt der Verbindungslinie, so enthält sie diese ganz und hat demnach mit der genannten Ebene nur diese eine doppelt zu zählende Gerade gemein, sie ist also ein Kegel. Eine Doppeltangente kann also nichts Anderes sein, als ein Schnitt einer von N an einen der vier durch Γ_4 gehenden Kegel gelegten Tangentialebene mit $\mathfrak{S}$, d. h. es giebt nur acht Doppeltangenten. $\mathfrak{s}$ gehört auch mit zu der

Mannigfaltigkeit, die Verbindungslinie der beiden Doppelpunkte der C_4, als Schnitt der Nordpolebene n, der Polarebene von N für Φ, mit $\mathfrak{z}$ und ist doppelt zu zählen. $\mathfrak{z}$ ist ausserdem die einzige Gerade, auf der die Mannigfaltigkeit eine Involution bestimmt. $\mathfrak{z}$ ist nämlich die von N aus projicirte Polare des Punktes N hinsichtlich des Flächenbüschels, da n ja die Polarebene von N für Φ ist. Auf dieser Polaren treffen sich nun die Schnitte der Polarebenen (n') hinsichtlich (Φ') von N und die zugehörigen Flächen (Φ') in denselben Punkten, bestimmen daher ebenfalls eine Involution auf dieser Geraden. Ihre Projectionen, die Stützkegelschnitte, bestimmen daher auf $\mathfrak{z}$, der Projection der Polare, wieder eine Involution.

Somit haben wir auf sehr einfache Weise Einsicht in einige Eigenschaften der C_4 gewonnen, und wir können auf dem angegebenen Wege wohl auch andere ableiten. Besonders wichtig scheint es mir indessen, wie schon zu Anfang erwähnt, dass man so klar die verschiedenen möglichen Erzeugungen durch projective Zuordnung von Büscheln von Curven zweiter Ordnung sieht, während auf anderem Wege die Auffindung viel schwieriger sein dürfte.

V.

Abgekürzte algebraische Division bei quadratischem und höherem Divisor.

Von

C. Reuschle

in Stuttgart.

Das bekannte abgekürzte Verfahren, das bei der Division einer ganzen algebraischen Function durch einen linearen Divisor von der Form $(x-\alpha)$ so vielfache nützliche Dienste leistet, kann auch auf die Division mit quadratischem und höherem Divisor ausgedehnt werden. Bei Anwendung eines Schiebzettels (siehe unten) erhält man ein sehr kurzes, übersichtliches, rasch und sicher auszuführendes, schematisches Verfahren, welches gegenüber der Staffeldivision eine sehr wesentliche Abkürzung der Rechnung bietet, und welches natürlich den Fall des linearen Divisors als speciellen Fall in sich enthält. Durch diese wesentliche Abkürzung ist auch der Name „abgekürzte“ algebraische Division gerechtfertigt, während die sonst in der elementaren Arithmetik üblichen Benennungen „abgekürzte“ Multiplication und „abgekürzte“ Division bei Decimalbrüchen zweckmässiger durch „näherungsweise“ Multiplication und Division zu ersetzen wären.

Wird die Function n^{ten} Grades in x

$$1) \qquad f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

durch den quadratischen Divisor $(x^2 - px - q)$ dividirt, so erhält man als Quotienten eine Function $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades, die mit

$$\underset{p|q}{f}(x)$$

bezeichnet sein möge, und als Rest eine lineare Function in x von der Form

$$r_0 x + r_1 \; ,$$

somit hat man auf Grund des fundamentalen Divisionssatzes (Divisionsprobe):

$$\text{Dividendus} = \text{Divisor} \times \text{Quotient} + \text{Rest}$$

die folgende Identität:

$$2) \qquad \boldsymbol{f(x) = (x^2 - px - q) \cdot \underset{p|q}{f}(x) + (r_0 x + r_1)} \; ,$$

welche ausführlich geschrieben, wenn der Kürze wegen n gleich 5 genommen wird, lautet:

$$a_0x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5=(x^2-px-q)(b_0x^3+b_1x^2+b_2x+b_3)+(r_0x+r_1)$$

$$\begin{array}{r|r|r|r|r}
=b_0x^5+\ b_1 & x^4+\ b_2 & x^3+\ b_3 & x^2 & \\
-pb_0 & -pb_1 & -pb_2 & -pb_3 & x \\
 & -qb_0 & -qb_1 & -qb_2 & -qb_3, \\
 & & & +\ r_0 & +\ r_1
\end{array}$$

woraus durch Coefficientenvergleichung:

$$\left\{\begin{array}{l}
a_0=b_0 \\
a_1=b_1-pb_0 \\
a_2=b_2-pb_1-qb_0 \\
a_3=b_3-pb_2-qb_1 \\
a_4=r_0-pb_3-qb \\
a_5=r_1 \qquad\qquad -qb_3
\end{array}\right.
\quad \text{also:} \quad
\left\{\begin{array}{l}
b_0= \qquad\qquad\qquad a_0 \\
b_1=pb_0 \qquad\quad +a_1 \\
b_2=pb_1+qb_0+a_2 \\
\underline{b_3=pb_2+qb_1+a_3} \\
r_0=pb_3+qb_2+a_4 \\
r_1= \qquad\quad qb_3+a_5
\end{array}\right. ;$$

damit sind die Coefficienten der Quotientfunction und der Restfunction recurrirend bestimmt durch die

Regel: b_0 ist gleich a_0, jedes folgende b erhält man durch Multiplication des vorhergehenden b mit p und des zweit-vorhergehenden b mit q und Addition beider Producte zum ebensovielten a; r_0 bestimmt sich wie ein weiteres b, während r_1 durch Multiplication des letzten b mit q und Addition zum letzten a sich ergiebt.

Auf Grund dieser Regel, bezw. auf Grund der obigen Bestimmungsgleichungen für die b und r erhält man an Stelle der Zeit und Platz raubenden gewöhnlichen Staffeldivision folgende rechnerisch-mechanisch auszuführende abgekürzte Divisionsmethode.

Auf einen Schiebzettel:

$$\begin{array}{|ccc|}
\hline
 & q & p \\
\hline
\end{array}$$

schreibe man in die rechte untere Ecke die Zahl p, links daneben q. Alsdann schreibe man auf das Blatt, auf welchem man rechnet, die Quotientfunction:

$$\underline{a_0x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5}\ ,$$

sondere, da der Rest linear in x, also zweigliedrig ist, unter den beiden letzten Gliedern ein Rechteck ab, alsdann werden unter den Coefficienten a_0, a_1, a_2, a_3 die Coefficienten b_0, b_1, b_2, b_3 der Quotientfunction und im Rechteck die Coefficienten r_0 und r_1 der Restfunction erscheinen, wenn man so verfährt: unter a_0 schreibe man $b_0(=a_0)$, stelle den Schiebzettel so, dass das p des Schiebzettels das a_0 des Dividenden verdekt; bilde das Product der übereinander stehenden Zahlen auf dem Schiebzettel und dem Blatt, also das Product $pb_0(=pa_0)$, addire dasselbe zum nächsten a, das heisst zu a_1, giebt b_1 und schreibe das gefundene b_1 unter a_1:

$$\begin{array}{cc|l}
q & p & x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5 \\
\hline
\underset{(= a_0)}{b_0} & b_1 & \qquad\qquad\qquad \boxed{}
\end{array},$$

alsdann verschiebe man den Schiebzettel horizontal nach rechts um ein Glied, so dass p über b_1 zu stehen kommt, bilde die Producte der übereinander stehenden Zahlen und addire deren Summe $(p b_1 + q b_0)$ zum nächsten a, das heisst zu a_2, giebt b_2, das unter a_2 gesetzt wird:

$$\begin{array}{ccc|l}
 & q & p & x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5 \\
\hline
 & b_0 & b_1 & b_2 \qquad\qquad \boxed{}
\end{array}.$$

Die beiden nächsten Verschiebungen geben in derselben Weise b_3 und r_0. Nach der hierauf folgenden Verschiebung kommt p über das bereits im Rechteck stehende r_0, wobei man (vergleiche die letzte der obigen Bestimmungsgleichungen $r_1 = q b_3 + a_5$) zu beachten hat:

Sobald eine Zahl des Schiebzettels über einer Zahl im Rechteck steht, ist deren Product nicht mehr zu bilden; man hat also nur noch das Product der übereinander stehenden Zahlen q und b_3 zu bilden und zum letzten a zu addiren, womit r_1 gefunden und unter a_5 geschrieben wird:

$$\begin{array}{cccc|c|c}
 & & & q & p & x + a_5 \\
\hline
b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & r_0 & r_1
\end{array}.$$

Beispiel:

$(4x^5 + 5x^4 - 6x^2 + 84x - 12)$ durch $(x^2 - 2x + 3)$ zu dividiren.

Die ganze Rechnung ist:

$$\begin{array}{cccc|cc|l}
(4x^5 + & 5x^4 + & \overset{!}{0x^3} - & 6x^2 + & 84x & -12) & :(x^2 - 2x + 3) \\
\hline
4 & 13 & 14 & -17 & 8 & 39 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc|}
\text{Schiebzettel.} & \\
-3 & 2
\end{array}$$

Aus diesem Schema liest man je nach Bedürfniss sofort ab:

$$\frac{4x^5 + 5x^4 - 6x^2 + 84x - 12}{x^2 - 2x + 3} = (4x^3 + 13x^2 + 14x - 17) + \frac{8x + 39}{x^2 - 2x + 3},$$

oder:

$$4x^5 + 5x^4 - 6x^2 + 84x - 12 = (x^2 - 2x + 3)(4x^3 + 13x^2 + 14x - 17) + (8x + 39).$$

Als kürzeste, meist genügende Probe giebt man dem x einen bestimmten Werth, am bequemsten den Werth 1, wodurch man als Coefficientenprobe erhält:

Σ d. Coefficienten d. Dividenden $= \Sigma$ d. Coefficienten d. Divisors
$\times \Sigma$ d. Coefficienten d. Quotienten $+ \Sigma$ d. Coefficienten d. Rests;

also im obigen Beispiel:

$$75 = 2 \,.\, 14 + 47 = 28 + 47 = 75.$$

Werden die Coefficienten r_0 und r_1 der Restfunction, das heisst die Zahlen im Rechteck beide gleich Null, so geht die Division auf, oder: so hat die gegebene Dividendenfunction die quadratische Function als Factor, oder: so hat die durch Nullsetzung der Dividendenfunction entstehende Gleichung die Wurzeln der durch Nullsetzung der Divisorfunction entstehenden quadratischen Gleichung als Wurzeln, während die übrigen Wurzeln der gegebenen Gleichung die Wurzeln der durch Nullsetzung der Quotientfunction entstehenden Gleichung sind.

Soll der erhaltene Quotient nochmals mit demselben quadratischen Divisor dividirt werden, so kann man die zweite Division unmittelbar an die erste anschliessen, man erhält als Divisionsschema mit doppelter Anwendung des obigen Schiebzettels unter Weglassung der x:

$$\begin{array}{cccccc}
4 & 5 & 0 & -6 & 84 & -12 \\
\hline
4 & 13 & 14 & -17 & \multicolumn{1}{|c}{8} & \multicolumn{1}{c|}{39} \\
\cline{5-6}
4 & 21 & \multicolumn{1}{|c}{44} & \multicolumn{1}{c|}{-80} & & \\
\cline{3-4}
\end{array},$$

woraus man ausser der obigen Identität als Resultat der zweiten Division zunächst ablesen kann:

$$4x^3 + 13x^2 + 14x - 17 = (x^2 - 2x + 3)(4x + 21) + (44x - 80);$$

als Resultat der zweimaligen Division liest man ab (Probe wie oben):

$$4x^5 + 5x^4 - 6x^2 + 84x - 12 = (x^2 - 2x + 3)^2 . (4x + 21) \\ + (x^2 - 2x + 3)(44x - 80) + (8x + 39) .$$

Damit ist zugleich gezeigt, wie mittelst der wiederholten abgekürzten algebraischen Division bei quadratischem Divisor in kürzester Weise eine ganze algebraische Function nach Potenzen eines gegebenen quadratischen Factors mit in x linearen Coefficienten entwickelt werden kann.

Schreibt man die letzte Gleichung in der Form:

$$\frac{4x^5 + 5x^4 - 6x^2 + 84x - 12}{(x^2 - 2x + 3)^2} = 4x + 21 + \frac{44x - 80}{x^2 - 2x + 3} + \frac{8x + 39}{(x^2 - 2x + 3)^2},$$

so ist damit gezeigt, wie die wiederholte abgekürzte algebraische Division bei quadratischem Divisor ganz von selbst auf die Zerlegung einer gebrochenen Function von der Form:

$$\frac{f(x)}{(x^2 - px - q)^r}$$

in eine Summe von Partialbrüchen von der Form:

$$\frac{\alpha x+\beta}{(x^2-px-q)^r},\quad \frac{\gamma x+\delta}{(x^2-px-q)^{r-1}},\ldots,\frac{\lambda x+\mu}{(x^2-px-q)}$$

führt, wobei, falls die gegebene Function unecht gebrochen ist, wie im obigen Beispiel, die in ihr enthaltene ganze Function ebenfalls sich einstellt, so dass damit ein Integral von der Form

$$\int \frac{f(x)}{(x^2-px-q)^r}\,dx$$

in kürzester Weise auf Fundamental-Integrale von der Form

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{(x^2-px-q)^r}\,dx$$

zurückgeführt ist.

Ist die gegebene Function von der Form

$$\frac{f(x)}{(ax^2+2bx+c)^r},$$

so muss vor der Schiebzettel-Division der Coefficient von x^2 im Nenner auf die Einheit gebracht werden, was, um Brüche während der Rechnung zu vermeiden, mittelst der Substitution

$$x=\frac{y}{a}$$

geschieht, wodurch man, wenn f vom m^{ten} Grade in x ist, erhält:

$$\frac{f(x)}{(ax^2+2bx+c)^r}=\frac{f\left(\frac{y}{a}\right)}{\left(\frac{y^2}{a}+2b\frac{y}{a}+c\right)^r}=\frac{a^r}{a^m}\cdot\frac{f(y,a)}{(y^2+2by+ac)^r},$$

wo $f(y,a)$ die mit a homogen gemachte* Function $f(y)$ andeuten soll; damit sind in Beziehung auf die Integralrechnung auch die Integrale von der Form

$$\int \frac{f(x)}{(ax^2+2bx+c)^r}\,dx$$

erledigt. —

Ergeben sich bei der mehrfachen Division lauter constante Reste, d. h. werden die ersten Zahlen in allen Rechtecken gleich Null, so ist die Dividendenfunction eine Function des quadratischen Divisors.

Beispiel: Zeige, dass die Function

$$f(x)=2x^6+6x^5+15x^4+20x^3+16x^2+7x-6$$

eine Function von (x^2+x+1) ist und schreibe dieselbe als solche an.

* Ist z. B. $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, so ist $f(y,a)=\alpha y^3+a\beta y^2+a^2\gamma y+a^3\delta$.

Die Rechnung ist:

$$\begin{array}{ccccccc}
2 & 6 & 15 & 20 & 16 & 7 & -6 \\
\hline
2 & 4 & 9 & 7 & 0 & \boxed{0} & \boxed{-6} \\
2 & 2 & 5 & \boxed{0} & \boxed{-5} & & \\
2 & \boxed{0} & \boxed{3} & & & & \\
\boxed{2} & & & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|cc|}
\text{Schiebzettel} & \\
-1 & -1 \\
\hline
\end{array},$$

also:

$$f(x) = 2(x^2 + x + 1)^3 + 3(x^2 + x + 1)^2 - 5(x^2 + x + 1) - 6 .$$

Es wird einleuchtend sein, wie man das Verfahren der abgekürzten Division auf beliebige Divisoren höheren Grades ausdehnen kann; z. B.:

$$f(x) = x^7 - 4x^6 - 37x^5 + 80x^4 - 36x^3 - 6x^2 + 29x + 4$$

soll durch $(x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 2)$ dividirt werden.

Der Schiebzettel ist $\begin{array}{|cccc|} & ! & & \\ -2 & 0 & 3 & -5 \\ \hline \end{array}$; der Rest wird vom 3^{ten} Grad, enthält also vier Glieder, so dass das Rechteck unter die vier letzten Zahlen des Dividenden zu setzen ist.

Das Divisionsschema wird:

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & -4 & -37 & 80 & -36 & -6 & 29 & 4 \\
\hline
1 & -9 & 11 & -2 & \boxed{5} & \boxed{6} & \boxed{7} & \boxed{8}
\end{array},$$

also:

$$f(x) = (x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 0x + 2)(x^3 - 9x^2 + 11x - 2) + (5x^3 + 6x^2 + 7x + 8).$$

Ebenso leuchtet rückwärts ein, dass bei linearem Divisor von der Form $(x - \alpha)$ in die rechte untere Ecke des Schiebzettels α zu setzen ist; der Schiebzettel wird übrigens entbehrlich, man setzt einfach α vorne hin und erhält die bekannten Schemata („einfaches" und „vollständiges" Divisionsschema), z. B.:

$$\begin{array}{c|cccc}
\multicolumn{5}{c}{\varphi(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5x - 10} \\
\hline
3 & 2 & -1 & 2 & \boxed{-4}
\end{array},$$

woraus abzulesen:

$$\varphi(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5x - 10 = (x - 3)(2x^2 - x + 2) - 4 ;$$

ferner:

$$\begin{array}{c|cccc}
\multicolumn{5}{c}{2x^3 - 7x^2 + 5x - 10} \\
\hline
3 & 2 & -1 & 2 & \boxed{-4} \\
3 & 2 & 5 & \boxed{17} & \\
3 & 2 & \boxed{11} & & \\
 & \boxed{2} & & &
\end{array},$$

woraus abzulesen:

(*) $\varphi(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5x - 10 = 2(x-3)^3 + 11(x-3)^2 + 17(x-3) - 4$

oder, wenn man z. B. nach der zweiten Division abbricht:

$$2x^3 - 7x^2 + 5x - 10 = (2x+5)(x-3)^2 + 17(x-3) - 4 \quad \text{etc.} \text{ —}$$

Entsprechend der Identität 2) Seite 93 hat man für die Function 1) nämlich

1) $$f(x) = ax^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

bei linearem Divisor $x - \alpha$ die (in praxi aus dem einfachen Divisionsschema abzulesende) Identität

3) $$f(x) = (x-\alpha) \,.\, \underset{\alpha}{f}(x) + R\,,$$

wenn $\underset{\alpha}{f}(x)$ wieder die bei der Division mit $(x - \alpha)$ sich ergebende Quotientfunction und R den Rest bedeutet; mit $x = \alpha$ erhält man hieraus

4) $$f(\alpha) = R\,,$$

so dass daraus die fundamentale Identität resultirt:

5) $$\boldsymbol{f(x) = (x-\alpha) \,.\, \underset{\alpha}{f}(x) + f(\alpha)}\,.$$

Die Gleichung 4) enthält den folgenden bekannten Satz, den ich als Restsatz der algebraischen Function $f(x)$ bezeichnen und so aussprechen möchte:

Der Rest, den die Function $f(x)$ bei der Division mit $(x - \alpha)$ lässt, ist der Werth, den die Function für $x = \alpha$ annimmt, nämlich $f(\alpha)$, im obigen Beispiel also $\varphi(3) = -4$; ist ferner $f(\alpha) = 0$, das heisst geht die Division auf, so erhält man aus 5) den ersten Fundamentalsatz der Theorie der algebraischen Gleichungen, der sich bei Einführung des besonderen Zeichens $\underset{\alpha}{f}(x)$ für die Quotientfunction so aussprechen lässt:

Hat die Gleichung $f(x) = 0$ die Wurzel α, das heisst ist $f(\alpha) = 0$, so hat $f(x)$ den Factor $(x - \alpha)$; der Mitfactor ist $\underset{\alpha}{f}(x)$, das heisst die übrigen Wurzeln der Gleichung sind Wurzeln von $\underset{\alpha}{f}(x) = 0$.

Zum letzten vollständigen Divisionsschema, wodurch man eben in kürzester Weise die Entwicklung einer algebraischen Function nach Potenzen von $(x - \alpha)$ erhält, und das bei der Wurzelverkleinerung, sowie bei der Reduction einer algebraischen Gleichung (Wegschaffung des zweithöchsten Gliedes) benützt wird, möge noch als neu die folgende sehr gute Probe angeführt werden: Nimmt man die Divisionszahl α um 1 grösser, also im obigen Beispiel gleich 4, so giebt Gleichung (*):

$$\varphi(4) = 2 + 11 + 17 - 4 = 26,$$

das heisst gleich der Summe der Rechtecks-Coefficienten, während $\varphi(4)$ auch direct durch Division von $\varphi(x)$ mit $x - 4$ bestimmt werden kann, so dass die ganze Rechnung sammt Probe sich so gestaltet:

$$\left.\begin{array}{r|rrrr}
 & 2x^3 & -\,7x^2 & +\,5x & -10 \\ \hline
3 & 2 & -1 & 2 & \boxed{-\,4} \\
3 & 2 & 5 & \boxed{17} & \\
3 & 2 & \boxed{11} & & \\
 & \boxed{2} & & & \\ \hline
4 & 2 & 1 & 9 & \boxed{\boxed{26}}
\end{array}\right\}\ \text{Summe des Rechtecks-Coefficienten}\ \boxed{\boxed{26}}\,.$$

Die Allgemeingiltigkeit der Probe leuchtet ein.

Im Anschluss an die Identität 5) — welche ja bekannt ist, aber durch die Einführung eines besonderen Zeichens $\underset{\alpha}{f}(x)$ für die Quotientfunction einen höheren Grad von Brauchbarkeit erlangt, was besonders hervortritt, wenn man weiterhin etwa $\underset{\alpha\beta}{f}(x)$ für den Quotienten einführt, der bei der Division von $\underset{\alpha}{f}(x)$ mit $(x - \beta)$ sich ergiebt, etc. — möge noch angeführt werden, dass sich aus derselben mit Leichtigkeit gewinnen lässt:

1. Ein elementarer, rein algebraischer Beweis für die Stetigkeit der algebraischen Functionen.

2. Eine elementare, rein algebraische Methode zur näherungsweisen Auflösung numerischer algebraischer Gleichungen, welche im Grund nichts Anderes ist, als die Newton'sche Näherungsmethode, aber vor letzterer den Vorzug hat, dass sie in der Ausführung der Rechnung etwas einfacher ist, und dass sie ohne den Begriff der abgeleiteten Function entwickelt werden kann; man findet leicht: Ist α eine Näherungswurzel der Gleichung $f(x) = 0$, so bestimmt sich die Correction ε aus:

$$\varepsilon \,.\, \underset{\alpha}{f}(\alpha) + f(\alpha) = 0\,.$$

Da die Gleichung 5) durch Ableitung nach x ergiebt:

$$f'(x) = \underset{\alpha}{f}(x) + (x - \alpha)\,.\,\underset{\alpha}{f'}(x)\,,$$

woraus mit $x = \alpha$ folgt:

$$\underset{\alpha}{f}(\alpha) = f'(\alpha)\,,$$

so leuchtet die Identität dieser Methode mit der Newton'schen Methode unmittelbar ein.

3. Eine neue, ungezwungene, quasi ganz von selbst sich darbietende Methode zur Entwicklung der Theorie der symmetrischen Functionen, wobei ich nur die Gleichung:

$$\underset{\alpha\beta}{f}(\gamma) = \frac{\begin{vmatrix} f(\alpha) & \alpha & 1 \\ f(\beta) & \beta & 1 \\ f(\gamma) & \gamma & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta^2 & \beta & 1 \\ \gamma^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix}} \quad \text{etc.}$$

anführen möchte.

4. Eine neue, sehr bequeme **Methode zur Partialbruchzerlegung gebrochener algebraischer Functionen**, die ich hier noch kurz skizziren will.

Die Anwendung der Fundamental-Identität 5) auf $f(x)$ und $g(x)$ giebt mit a statt α:

$$\left\{\begin{aligned} f(x) &= (x-a)\,.\,\underset{a}{f}(x) + f(a) \\ g(x) &= (x-a)\,.\,\underset{a}{g}(x) + g(a) \end{aligned}\right\}, \qquad \begin{array}{|l} g(a) \\ -f(a) \end{array}$$

woraus durch Elimination des Absolutgliedes:

$$f(x)\,.\,g(a) - f(a)\,.\,g(x) = (x-a)\,.\begin{vmatrix} \underset{a}{f}(x) & f(a) \\ \underset{a}{g}(x) & g(a) \end{vmatrix},$$

oder nach Division mit $g(a)\,.\,g(x)$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = (x-a)\,\frac{\underset{a}{f}(x) - \dfrac{f(a)}{g(a)}\cdot \underset{a}{g}(x)}{g(x)} + \frac{f(a)}{g(a)}$$

sich ergiebt. Diese Gleichung spricht für die gebrochene Function $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ den analogen Satz aus, wie Gleichung 5) für die ganze Function $f(x)$.

Durch Division mit $(x-a)^\alpha$ folgt weiter:

$$\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha.\,g(x)} = \frac{f(a)}{(x-a)^\alpha.\,g(a)} + \frac{\underset{a}{f}(x) - \dfrac{f(a)}{g(a)}\cdot \underset{a}{g}(x)}{(x-a)^{\alpha-1}.\,g(x)}.$$

Diese Gleichung spricht den algebraischen Satz aus:

Satz von der Absonderung eines Partialbruchs nebst Ergänzungsbruch:

Von der gebrochenen algebraischen Function

$$\frac{f(x)}{G(x)},$$

deren Nenner den α-fachen Factor $(x-a)$ hat, das heisst von der Function

$$\frac{f(x)}{G(x)} \equiv \frac{f(x)}{(x-a)^\alpha.\,g(x)}$$

lässt sich ein Partialbruch absondern mit dem Nenner $(x-a)^\alpha$ und dem *constanten Zähler* $\frac{f(a)}{g(a)}$ *; *der Ergänzungsbruch ist ein einfacherer Bruch von derselben Art wie der gegebene, dessen Nenner einen Factor* $(x-a)$ *weniger enthält und dessen Zähler durch*

$$f_a(x) - \frac{f(a)}{g(a)} \cdot g_a(x) \quad \textit{oder} \quad \frac{1}{g(a)} \begin{vmatrix} f_a(x) & f(a) \\ g_a(x) & g(a) \end{vmatrix}$$

gegeben ist.

Wendet man auf den Ergänzungsbruch dasselbe Verfahren an, etc. etc., so erhält man schliesslich die vollständige Zerlegung des gegebenen Bruchs in seine Partialbrüche und damit sofort das Integral $\int \frac{f(x)}{G(x)} dx$. Die Methode kann als „Methode der successiven Absonderung der Partialbrüche" bezeichnet werden.

Mit Anwendung des abgekürzten Divisionsschemas erhält man folgende übersichtliche und kurze Rechnung zur Absonderung eines Partialbruchs:

Beispiel:

$$\frac{x^3+2x^2+2x+3}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{x^2+x-1}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$\begin{array}{c|cccc|l}
 & x^3 + & 2x^2 + & 2x + & 3 & \\
\hline
1 & 1 & 3 & 5 & 8 & \multirow{2}{*}{$\Big\}\, 2 \;\Big|\; \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix}$} \\
1 & & 1 & 3 & 4 & \\
\hline
 & & x^2 + & 2x + & 1 & \\
 & x^2 + x & - 1. & & &
\end{array}$$

etc.

Ganz analog erhält man mittelst der Identität 2) S. 93 im Falle imaginärer Wurzelfactoren von $G(x)$ die Absonderung eines trinomischen Partialbruchs mit Nenner $(x^2 - px - q)^\alpha$.

Die nähere Ausführung dieses und der oben erwähnten Punkte behalte ich mir für eine spätere Veröffentlichung vor.

---

* NB. Einsetzung von $x = a$ in den „übrigen Bestandtheil" des gegebenen Bruchs.

VI.

Geometrische Bedeutung der Partialbruchzerlegung.

Von

C. Reuschle

in Stuttgart.

Die Partialbruchzerlegung, welche in der Analysis vorzugsweise zur Auswerthung der Integrale gebrochener algebraischer Functionen von der Form $\frac{f(x)}{G(x)}$ benützt wird, ist zugleich auch, insbesondere wenn man Partialbruchabsonderungen vornimmt (siehe den vorigen Artikel), ein sehr nützliches Mittel zur identischen Transformation solcher Functionen und damit zur Gewinnung von Eigenschaften der durch solche Functionen

$$y = \frac{f(x)}{G(x)}$$

dargestellten Curven, für welche ich den Namen „oscillirende Hyperbeln" vorschlagen möchte.

Analog nenne ich die Curven

$$y = f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n ,$$

ihrer hin und her oscillirenden Gestalt wegen oscillirende Parabeln, welche sonst wohl parabolische Curven genannt werden; aber abgesehen davon, dass der Name parabolische Curve in durchaus zutreffender Weise für diejenige Curve einer Fläche gebraucht wird, welche die hyperbolischen Flächenpunkte von den elliptischen, oder die sattelförmig gekrümmten Flächentheile von den kuppenförmig gekrümmten Flächentheilen trennt, ist für die obige Curve der Ausdruck parabolische Curve doch wohl zu wenig sagend; in meiner Praxis der Curvendiscussion* (S. 152) habe ich im Gegensatz zu den binomischen Parabeln diese Curven allgemeine parabolische Curven genannt, was aber unzulässig ist, da der Name allgemeine Curve, wie ich damals ausser Acht

* C. Reuschle, Praxis der Curvendiscussion. Stuttgart 1886.

liess, im Gegensatz zu singulärer Curve gebraucht wird, und jede oscillirende Parabel n^{ter} Ordnung im ∞ fernen Punkt der Ordinatenachse einen $(n-1)$-fachen Punkt mit $(n-1)$ mit der ∞ fernen Geraden zusammenfallenden Tangenten, das heisst einen Curvenpunkt von der höchst möglichen Singularität hat, also eine speciellst-singuläre Curve n^{ter} Ordnung ist. Die Berechtigung des Namens oscillirende Parabel tritt auch besonders deutlich bei Aufzeichnung derjenigen Curven hervor, die man aus der Sinuslinie $y = \sin x$ bezw. Cosinuslinie $y = \cos x$, das heisst den oscillirenden Curven κατ' ἐξοχὴν, erhält, wenn man die unendliche Reihe für $\sin x$ bezw. $\cos x$ succesive nach dem ersten, zweiten, dritten u. s. w. Glied abbricht.

Entsprechend wären im Raum die Flächen von der Form

$$z = F(x, y) \quad \text{bezw.} \quad z = \frac{F(x, y)}{G(x, y)},$$

wo F und G ganze rationale algebraische Functionen sind, als oscillirende Paraboloide bezw. als oscillirende Hyperboloide zu bezeichnen, sie werden von jeder Ebene senkrecht xy-Ebene nach einer oscillirenden Parabel bezw. oscillirenden Hyperbel von derselben Ordnung geschnitten. Nöther nennt die Flächen von der Form

$$z = E(x, y),$$

wo E eine eindeutige Function ist, Monoide, die oscillirenden Paraboloide und Hyperboloide wären also algebraische Monoide.

Wird nun von einer Function von der Form $y = \frac{f(x)}{G(x)}$, z. B. von

$$y = \frac{4x(x-2)}{(x+1)(x-3)^2},$$

welche, wie die Gleichung unmittelbar zeigt, eine oscillirende Hyperbel 4^{ter} Ordnung (die stark ausgezogene Curve der Figur) mit $y = 0$ und $x + 1 = 0$ als gewöhnlichen Asymptoten und $x - 3 = 0$ als Rückkehrasymptote und durch die Punkte $(0, 0)$ und $(2, 0)$ auf der x-Achse gehend, darstellt, der Partialbruch mit Nenner $(x + 1)$ abgesondert (vergl. den vorhergehende Artikel S. 102), so erhält man

$$y = \frac{4x(x-2)}{(x+1)(x-3)^2} = \frac{\frac{3}{4}}{x+1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{13x - 27}{(x-3)^2},$$

wobei der Bruch $\frac{1}{4} \cdot \frac{13x-27}{(x-3)^2}$ als „Ergänzungsbruch" des abgesonderten Partialbruchs $\frac{\frac{3}{4}}{x+1}$ zu bezeichnen wäre. Damit lässt sich die oscillirende Hyperbel auch schreiben:

$$y-\frac{\frac{3}{4}}{x+1}=\frac{1}{4}\,\frac{13x-27}{(x-3)^2}\,,$$

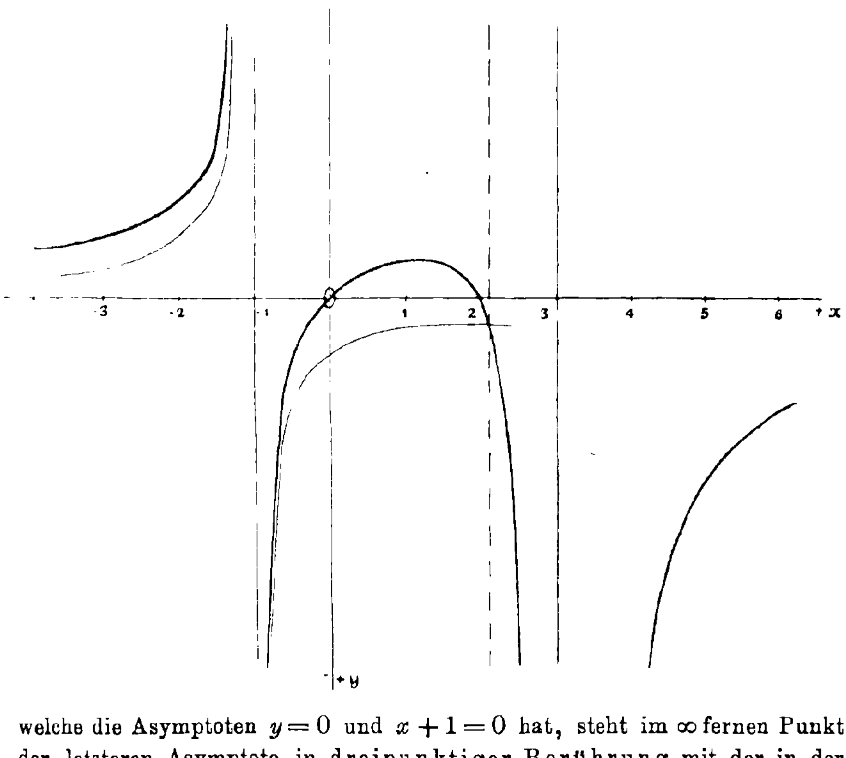
oder:

$$4\left[(x+1)y-\frac{3}{4}\right](x-3)^2=(x+1)(13x-27)\ .$$

Hieraus folgt, da bei der Homogenisirung, wenn ω als homogenisirende Veränderliche benützt wird, rechts noch der Factor ω^2 hinzutritt, nach dem Princip der linearen Combination:

Die Hyperbel zweiter Ordnung (in der Figur fein ausgezogen)

$$y=\frac{\frac{3}{4}}{x+1}\,,\quad \text{oder}\quad (x+1)y-\frac{3}{4}=0\,,$$



welche die Asymptoten $y=0$ und $x+1=0$ hat, steht im ∞ fernen Punkt der letzteren Asymptote in dreipunktiger Berührung mit der in der Figur stark ausgezogenen oscillirenden Hyperbel, womit die geometrische Bedeutung des abgesonderten Partialbruchs charakterisirt ist.

Weiter ergiebt sich noch die geometrische Bedeutung des gleich Null gesetzten Zählers des Ergänzungsbruchs, insofern die in der Figur gestrichelt ausgezogene Gerade $13x-27=0$ in ihrem endlichen Schnittpunkt mit der Hyperbel zweiter Ordnung eben den einzigen endlichen Schnittpunkt der beiden Hyperbeln liefert (zunächst folgt: die Hyperbel zweiter Ordnung hat im ∞ fernen Punkt der Ordinatenachse fünf Punkte mit der oscillirenden Hyperbel gemein, da sie von $x+1=0$ berührt, also zweipunktig, von $13x-27=0$ einpunktig und von $\omega^2=0$ zweipunktig in diesem ∞ fernen Punkt geschnitten wird; da aber die oscillirende Hyperbel in diesem ∞ fernen Punkt zugleich einen Rückkehrpunkt mit der Asymptote $x-3=0$ hat, so steht dieselbe mit der Hyperbel zweiter Ordnung in $5-2$, das heisst dreipunktiger Berührung im ∞ fernen Punkt der Asymptote $x+1=0$, ausserdem stehen die beiden Hyperbeln im ∞ fernen Punkt der Abscissenachse in zweipunktiger Berührung, so dass mit Hinzunahme des oben erwähnten endlichen Schnittpunkts die $5+2+1$, das heisst acht Schnittpunkte beider Hyperbeln, wie es sein soll, bestimmt sind).

Allgemein gilt der die geometrische Bedeutung einer Partialbruchabsonderung aussprechende Satz:

Wird von einer echt gebrochenen algebraischen Function

$$y=\frac{f(x)}{G(x)}=\frac{f(x)}{(x-a)g(x)}\,,$$

welche eine oscillirende Hyperbel n^{ter} Ordnung darstellt, wenn $g(x)$ von $(n-2)^{\text{ten}}$ Grad, $f(x)$ vom $(n-2)^{\text{ten}}$ oder von niedrigerem Grad ist, und deren Nennerfunction $G(x)$ den einfachen Factor $(x-a)$ hat, ein Partialbruch mit dem Nenner $(x-a)$ abgesondert, und dieser Partialbruch als Ordinate einer Curve betrachtet, so ist diese Curve für die oscillirende Hyperbel eine asymptotische Hyperbel zweiter Ordnung, welche im ∞ fernen Punkt der Asymptote $x-a=0$ in dreipunktiger Berührung mit der oscillirenden Hyperbel steht, und deren endliche Schnittpunkte mit den $(n-3)$ zur x-Achse parallelen Geraden, welche durch den gleich Null gesetzten Zähler des Ergänzungsbruches dargestellt werden, die $(n-3)$ endlichen Schnittpunkte der beiden Hyperbeln sind.

Der Satz folgt ohne Weiteres aus der Form:

$$y=\frac{f(a)}{(x-a).g(a)}+\frac{\underset{a}{f}(x)-\dfrac{f(a)}{g(a)}\cdot\underset{a}{g}(x)}{g(x)}$$

oder

$$\left[(x-a)\,y-\frac{f(a)}{g(a)}\right]g(x)=(x-a)\left[\underset{a}{f}(x)-\frac{f(a)}{g(a)}\cdot\underset{a}{g}(x)\right],$$

in welche sich die Gleichung der oscillirenden Hyperbel gemäss der Fundamentalgleichung von der Absonderung eines Partialbruchs (vergleiche S. 101) bringen lässt, sobald diese Gleichung homogenisirt ist.

Ist $(x-a)$ ein mehrfacher Factor der Nennerfunction, wie z. B. $(x-3)$ ein Doppelfactor des Nenners im obigen Beispiel, so lässt sich leicht ein analoger Satz aufstellen.

Kleinere Mittheilungen.

III. Ein Analogon zu den Euler'schen Interpolationsformeln.

Aus der Lagrange'schen Interpolationsformel lassen sich bekanntlich ohne Weiteres die Euler'schen Formeln

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \frac{z_\lambda^\alpha}{f'(z_\lambda)} = 0, \quad (\alpha = 0, 1, \ldots n-2)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \frac{z_\lambda^{n-1}}{f'(z_\lambda)} = 1,$$

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n)$$

entnehmen. In ähnlicher Weise kann man die Cauchy'sche Interpolationsformel benutzen, wie im Folgenden gezeigt werden soll.

Die Cauchy'sche Aufgabe lautet: „Es ist eine gebrochene Function $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, deren Zähler eine ganze Function m^{ten} und deren Nenner eine ganze Function n^{ten} Grades wird, aus den $(m+n+1)$ Bedingungen herzustellen, dass dem Argumentwerthe z_λ der Functionalwerth w_λ für $\lambda = 0, 1, 2, \ldots (m+n)$ zugehört."

Die Lösung ist folgende: Setzen wir

$$\left.\begin{array}{l} p_i(z) = (z - z_{i_1})(z - z_{i_2}) \ldots (z - z_{i_m}) \\ q_i(z) = (z_{i_1} - z)(z_{i_2} - z) \ldots (z_{i_n} - z) \end{array}\right. \quad (i_\alpha < i_{\alpha+1});$$

verstehen wir weiter unter $i_1, i_2, \ldots i_m$ der Reihe nach alle Combinationen von m Gliedern der Zahlenreihe $0, 1, 2, \ldots (m+n)$ und unter $k_1, k_2, \ldots k_{n+1}$ diejenigen Zahlen, welche die i zu der gesammten Reihe $0, 1, \ldots (m+n)$ vervollständigen; und verstehen wir ferner unter $i_1, i_2, \ldots i_n$ und $k_1, k_2, \ldots k_{m+1}$ Aehnliches, dann ist

$$1) \quad \left\{\begin{array}{l} \varphi(z) = \sum\limits_{(i)} w_{k_1} \ldots w_{k_{n+1}} \dfrac{p_i(z)}{p_i(z_{k_1}) \ldots p_i(z_{k_{n+1}})}, \\ \psi(z) = \sum\limits_{(i)} w_{i_1} \ldots w_{i_n} \dfrac{q_i(z)}{q_i(z_{k_1}) \ldots q_i(z_{k_{m+1}})}. \end{array}\right.$$

Beide Functionen $\varphi(z)$ wie $\psi(z)$ sind in den Indices $0, 1, 2, \ldots (m+n)$ symmetrisch gebildet.

Jetzt denken wir uns unter $\varrho(z)$ eine willkürliche ganze Function $(m-1)^{\text{ten}}$ und unter $\tau(z)$ eine solche $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades und setzen

$$w_\lambda = \frac{\varrho(z_\lambda)}{\tau(z_\lambda)} \qquad (\lambda = 0,\ 1, \ldots m+n-1),$$

dann wird

$$\varphi(z)\,\tau(z) - \psi(z)\,\varrho(z) = 0$$

für $z = z_0,\ z_1, \ldots z_{m+n-1}$. Nun besitzt das Polynom der letzten Gleichung den Grad $(m+n-1)$, und da gleichzeitig $(m+n)$ Wurzeln der Gleichung bestehen, so ist sie identisch erfüllt, und man hat

$$2) \qquad \varphi(z) = \frac{\varrho(z)}{\tau(z)}\,\psi(z).$$

Der letzten Forderung der Cauchy'schen Aufgabe zufolge muss

$$\varphi(z_{m+n}) = \frac{\varrho(z_{m+n})}{\tau(z_{m+n})}\,\psi(z_{m+n}) = w_{m+n}\,\psi(z_{m+n})$$

sein. Hat man nun, wie wir annehmen wollen, w_{m+n} so gewählt, dass es von $\varrho(z_{m+n}) : \tau(z_{m+n})$ verschieden ist, so kann die letzte Gleichung nur befriedigt sein, wenn $\psi(z_{m+n}) = 0$, das heisst, wenn $\psi(z)$ durch $(z - z_{m+n})$ theilbar ist. $\psi(z)$ enthält nach 1) w_{m+n} nur linear:

$$\psi(z) = \chi(z) + w_{m+n}\,\chi_1(z).$$

Giebt man dem w_{m+n} mehrere, unsere Beschränkung aber nicht verletzende Werthe, so zeigt sich ohne Weiteres, dass $\chi(z)$ und $\chi_1(z)$ durch $(z - z_{m+n})$ theilbar sind. Daraus folgt, dass für jedes w_{m+n}, ohne irgend welche Einschränkung $\psi(z)$ den Factor $(z - z_{m+n})$ hat. Wir dürfen daher auch

$$w_{m+n} = \frac{\varrho(z_{m+n})}{\tau(z_{m+n})}$$

annehmen. Dadurch wird $\psi(z)$ symmetrisch in $z_0,\ z_1, \ldots z_{m+n}$. Folglich ist es durch $(z-z_0)(z-z_1)\ldots(z-z_{m+n})$ theilbar. Da aber der Grad von $\psi(z)$ nur gleich n ist, so stellt sich heraus, dass $\psi(z)$ identisch Null ist. Gemäss 2) gilt das Gleiche von $\varphi(z)$. Wir sehen also: S e t z t m a n

$$w_\lambda = \frac{\varrho(z_\lambda)}{\tau(z_\lambda)} \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots m+n),$$

w o b e i $\varrho(z)$ u n d $\tau(z)$ z w e i g a n z e F u n c t i o n e n $(m-1)^{\text{ten}}$ u n d $(n-1)^{\text{ten}}$ G r a d e s b e d e u t e n, d a n n w i r d

$$3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{(i)} w_{k_1} \ldots w_{k_{n+1}} \frac{p_i(z)}{p_i(z_{k_1}) \ldots p_i(z_{k_{n+1}})} = 0, \\ &\sum_{(i)} w_{i_1} \ldots w_{i_n} \frac{q_i(z)}{q_i(z_{k_1}) \ldots q_i(z_{k_{m+1}})} = 0. \end{aligned} \right.$$

In diese Formeln tragen wir nun die Werthe der w wirklich ein und bezeichnen dabei

$$w_\lambda = \frac{\varrho(z_\lambda)}{\tau(z_\lambda)} = \frac{\varrho_\lambda}{\tau_\lambda}.$$

Jede der beiden Gleichungen 3) multipliciren wir mit

$$\tau_0 \cdot \tau_1 \ldots \tau_{m+n} = \tau_{i_1} \ldots \tau_{i_n} \cdot \tau_{k_1} \ldots \tau_{k_{m+1}} = \cdots$$

und erhalten dadurch

$$4) \quad \begin{cases} \sum\limits_{(i)} \varrho_{k_1} \ldots \varrho_{k_{n+1}} \cdot \tau_{i_1} \ldots \tau_{i_m} \dfrac{p_i(z)}{p_i(z_{k_1}) \ldots p_i(z_{k_{n+1}})} = 0, \\ \sum\limits_{(i)} \varrho_{i_1} \ldots \varrho_{i_n} \cdot \tau_{k_1} \ldots \tau_{k_{m+1}} \dfrac{q_i(z)}{q_i(z_{k_1}) \ldots q_i(z_{k_{m+1}})} = 0. \end{cases}$$

Bedenkt man jetzt, dass, abgesehen von einem hier indifferenten Vorzeichen, die beiden Functionen $p_i(z)$ und $q_i(z)$ sich nur durch die Zahl der Factoren $(z - z_{i_\lambda})$ unterscheiden, deren $p_i(z)$ nach der Definition m und $q_i(z)$ ebenso n besitzt; bedenkt man ferner, dass über ϱ und τ nur gesagt ist, sie sollen ganze Functionen $(m-1)^{\text{ten}}$ und $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades sein, so folgt, dass die beiden Gleichungen 4) dasselbe darthun. Wir brauchen uns also bei weiteren Umformungen nur mit einer von beiden, z. B. mit der ersten zu beschäftigen.

In diese setzen wir ein:

$$\varrho(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \cdots + u_{m-1} z^{m-1},$$
$$\tau(z) = v_0 + v_1 z + v_2 z^2 + \cdots + v_{n-1} z^{n-1}.$$

Dann wird:

$$5) \quad \begin{cases} \varrho(z_{k_1}) \ldots \varrho(z_{k_{n+1}}) = \sum\limits_{\alpha, \beta, \gamma \ldots} \left\{ u_0^\alpha u_1^\beta u_2^\gamma \ldots S(z_{k_1} \ldots z_{k_\beta} z^2_{k_{\beta+1}} \ldots z^2_{k_{\beta+\gamma}} \ldots) \right\} \\ \qquad (\alpha + \beta + \gamma + \cdots = n+1), \end{cases}$$

wobei S eine symmetrische Function von $z_{k_1}, \ldots z_{k_{n+1}}$ bedeutet, von der ein Glied hinter S angedeutet ist. In Σ tritt jede symmetrische Function von $z_{k_1}, \ldots z_{k_{n+1}}$ auf, welche keine höhere als die $(m-1)^{\text{te}}$ Potenz jedes z_k enthält. Wir wollen solche allgemein durch

$$S_{m-1}(k_1, \ldots k_{n-1})$$

bezeichnen. Jedes mögliche S_{m-1} kommt in 5) vor, und zwar ein jedes mit einem anderen Producte $u_0^\alpha u_1^\beta u_2^\gamma \ldots$ multiplicirt.

Die gleichen Schlüsse gelten für $\tau_{i_1}, \ldots \tau_{i_m}$, so dass dabei alle

$$S_{n-1}(i_1, \ldots i_m)$$

erscheinen.

Trägt man nun 5) und das entsprechende Resultat für $\tau(z_{i_1}) \ldots \tau(z_{i_m})$ in 4) ein, dann ergiebt sich aus der Willkürlichkeit der u und der v: Es ist

$$6) \qquad \sum_{(i)} \frac{S_{m-1}(k_1, \ldots k_{n+1}) S_{n-1}(i_1, \ldots i_m) p_i(z)}{p_i(z_{k_1}) p_i(z_{k_2}) \ldots p_i(z_{k_{n+1}})} = 0,$$

wenn über die S und die p die oben gemachten Annahmen gelten.

Endlich kann man noch

$$p_i(z) = z^m - \sigma'(i_1, \ldots i_m) z^{m-1} + \sigma''(i_1 \ldots i_m) z^{m-2} - \cdots$$

setzen, wo die $\sigma', \sigma'', \ldots$ die elementaren symmetrischen Functionen von $z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots z_{i_m}$ bedeuten. Wegen der Willkürlichkeit von z kann man in 6) an Stelle von $p_i(z)$ irgend eine dieser Functionen, die allgemein durch $\sigma(i_1, \ldots i_m)$ bezeichnet werden sollen, einführen.

Jacobi versteht unter

$$\{(A, B, C, \ldots)(A', B', C', \ldots)\}$$

das Product aus allen Differenzen der Grössen $A, B, C, \ldots$ von den Grössen $A', B', C', \ldots$, indem man immer die zweiten von den ersten abzieht (Werke III, S. 503). Benutzen wir dieselbe Abkürzung, so haben wir

$$7) \qquad \sum_{(i)} \frac{S_{m-1}(k_1, \ldots k_{n+1}) S_{n-1}(i_1, \ldots i_m)\, \sigma(i_1, \ldots i_m)}{\{(z_{k_1}, \ldots z_{k_{n+1}})(z_{i_1}, \ldots z_{i_m})\}} = 0.$$

Dies ist die allgemeine Formel, welche sich den Euler'schen zur Seite stellt.

Weiteres ergiebt sich, wenn man

$$w_\lambda = \frac{\varrho(z_\lambda)}{\tau(z_\lambda)} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots m + n)$$

setzt und dabei für ϱ eine ganze Function m^{ten}, für τ eine ganze Function n^{ten} Grades nimmt,

$$\varrho(z) = z^m + u_1 z^{m-1} + u_2 z^{m-2} + \cdots + u_m,$$
$$\tau(z) = z^n + v_1 z^{n-1} + v_2 z^{n-2} + \cdots + v_n.$$

Dann kann sich, wie aus der Betrachtung von

$$\varphi(z)\tau(z) - \psi(z)\varrho(z) = 0$$

folgt, φ von ϱ und ψ von τ nur durch den gleichen constanten Factor unterscheiden. Das giebt bei Berücksichtigung des Coefficienten von z^m:

$$\varrho(z) = \frac{\sum\limits_{(i)} \varrho(z_{k_1}) \ldots \varrho(z_{k_{n+1}}) \cdot \tau(z_{i_1}) \ldots \tau(z_{i_m}) \dfrac{p_i(z)}{p_i(z_{k_1}) \ldots p_i(z_{k_{n+1}})}}{\sum\limits_{(i)} \dfrac{\varrho(z_{k_1}) \ldots \varrho(z_{k_{n+1}}) \cdot \tau(z_{i_1}) \ldots \tau(z_{i_m})}{p_i(z_{k_1}) \ldots p_i(z_{k_{n+1}})}};$$

durch die Einführung der S geht diese Formel in

$$8) \quad \varrho(z) = \frac{\sum\limits_{(i)} S_{n-1}(i_1, \ldots i_m) \varrho(z_{k_1}) \ldots \varrho(z_{k_{n+1}}) \dfrac{p_i(z)}{p_i(z_{k_1}) \ldots p_i(z_{k_{n+1}})}}{\sum\limits_{(i)} \dfrac{S_{n-1}(i_1, \ldots i_m)\, \varrho(z_{k_1}) \ldots \varrho(z_{k_{n+1}})}{p_i(z_{k_1}) \ldots p_i(z_{k_{n+1}})}}$$

über. Setzt man insbesondere $\varrho(z) = z^m$, dann kann im Zähler der rechten Seite von 8) kein Glied mit $z^{m-1}, z^{m-2}, \ldots$ vorkommen, und also wird, wenn σ eine von 1 verschiedene elementare symmetrische Function von $z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots z_{i_m}$ bedeutet,

$$\sum_{(i)} \frac{S_{n-1}(i_1, \ldots i_m) \cdot z_{k_1}^m \ldots z_{k_{n+1}}^m \cdot \sigma(i_1, \ldots i_m)}{\{(z_{k_1}, \ldots z_{k_{n+1}})(z_{i_1}, \ldots z_{i_m})\}} = 0$$

werden. In ähnlicher Art lassen sich noch andere merkwürdige Formeln ableiten.

Giessen, den 12. Januar 1896. E. NETTO.

IV. Die Wasserwellen.

In dem Buche „Elemente der theoretischen Physik von Dr. Christiansen (Universität Kopenhagen), deutsch von Dr. Joh. Müller, Leipzig 1894, Barth", mit empfehlendem Vorworte von Professor E. Wiedemann in Erlangen, wird auch obiges Thema als Beispiel für die Anwendung der Gleichungen von Lagrange auf drei Druckseiten behandelt. Ich erlaube mir im Folgenden eine etwas einfachere Darlegung, welche ich mir bei dieser Gelegenheit bildete, zu geben; dieselbe soll übrigens neben den Hinweisen auf das Buch doch von demselben unabhängig geführt werden.

Mit der Annahme, dass jedes Theilchen eine ebene Bahn parallel der xz-Tafel beschreibe, fällt sogleich die zweite der drei Gleichungen von Lagrange, diejenige hinsichtlich y, ausser Betracht und wir erhalten

$$\text{a)} \qquad \begin{cases} \ddot{x}\,\partial x/\partial a + (\ddot{z} - g)\,\partial z/\partial a + \partial P/\partial a = 0, \\ \ddot{x}\,\partial x/\partial c + (\ddot{z} - g)\,\partial z/\partial c + \partial P/\partial c = 0, \end{cases}$$

worin $\ddot{x}$, $\ddot{z}$ die zweiten Differentialquotienten nach der Zeit, g die Erdbeschleunigung, $P = p/\varrho$ den hydrostatischen Druck durch die Dichte der Flüssigkeit bedeuten; a ist die Abscisse, c die Ordinate des Wassertheilchens in der Ruhelage; c auch die betreffende Tiefe unter der ruhenden Oberfläche (z abwärts positiv), während sich nach x die Welle fortpflanzt.

Zu a) kommt noch als Continuitätsgleichung:

$$\text{b)} \qquad \begin{vmatrix} \partial x/\partial a & \partial z/\partial a \\ \partial x/\partial c & \partial z/\partial c \end{vmatrix} = 1.$$

Nun wird präsumirt, oder von der Beobachtung entlehnt, dass die Theilchen Kreise beschreiben, deren Mittelpunkte um s ober- oder unterhalb der Ruhelage seien. Also ist für irgend eine Zeit t:

$$\text{c)} \qquad x = a + r \sin\theta, \quad z = c + s + r\cos\theta, \quad \theta = mt + na.$$

Hier bedeuten, sage ich gleich,

$$m = 2\pi/\tau \quad \text{und} \quad n = 2\pi/\lambda$$

in der stereotypen Bezeichnung für die Schwingungsdauer und Wellenlänge.

Die letzte Gleichung führt das Buch als zweite unter i) auf, die vorletzte ohne solche Bezeichnung, welche von a) bis m) reicht; r und s sind Functionen von c.

Bildet man aus c) die Differentialquotienten von x und z, welche in a) und b) vorkommen, so wird aus a):

$$\text{e)} \begin{cases} (m^2 - gn) r \sin\theta - \partial P/\partial a = 0, \\ m^2 r \,\partial r/\partial c + (m^2 r \cos\theta + g)(1 + \partial s/\partial c) + g \cos\theta \,\partial r/\partial c - \partial P/\partial c = 0 \end{cases}$$

und aus b) wird:

$$\partial s/\partial c + nr\,\partial r/\partial c + [nr(1 + \partial s/\partial c) + \partial r/\partial c]\cos\theta = 0.$$

Das Buch zerfällt diese letzte Gleichung, da sie für jedes θ oder t besteht, in die zwei

$$\text{d)} \quad \partial s/\partial c + nr\,\partial r/\partial c = 0 \quad \text{und} \quad nr(1 + \partial s/\partial c) + \partial r/\partial c = 0;$$

dagegen wende ich dieselbe Schlussweise vorerst auf die erste der beiden Gleichungen an, wodurch

$$\text{g)} \qquad m^2 = gn,$$

oder die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$h = \frac{\lambda}{\tau} = \frac{g\tau}{2\pi}$$

und

$$\text{i)} \qquad h = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

und zweitens $\dfrac{\partial P}{\partial a} = 0$; das heisst der hydrostatische Druck, der beim Wasser ($\varrho = 1$) identisch mit P, ist unabhängig von der Abscisse, was man auch a priori hätte annehmen dürfen.

Aus der zweiten Gleichung e) erhält man mittelst derselben Schlussweise die zwei Gleichungen, in denen ich bereits mittelst g) das m eliminirt habe,

$$gnr\,\partial r/\partial c + g(1 + \partial s/\partial c) - \partial P/\partial c = 0$$

und

$$nr(1 + \partial s/\partial c) + \partial r/\partial c = 0$$

(nach Weglassung des Factors g).

Die letzte Gleichung ist mit der zweiten d) identisch, die vorletzte wird es mit der ersten d), wenn man

$$\partial P/\partial c = g,$$

oder

$$\text{h)} \qquad P = gc,$$

setzt, was ebenfalls a priori vom hydrostatischen Drucke bekannt ist.

Also hätte man nach dieser Anschauung oder Reihenfolge sagen können: die Continuitätsgleichung wird bei der Annahme c) u. s. w. identisch erfüllt. Die Gleichung f) des Buches fällt hiermit als bedeutungslos hinweg.

Mit Integration der beiden Gleichungen d) wird einerseits

$$s = -\frac{n r^2}{2}$$

(Constante Null, da in hinreichender Tiefe s und r Null sind), oder

k) $$s = -\frac{\pi r^2}{\lambda},$$

das heisst der Mittelpunkt der Kreisbahn rückt nach oben von der Ruhelage des Theilchens aus; und anderseits

$$n(c + s) + log\, r = const,$$

und, wenn für $c = 0$ statt s und r gelten S und R,

$$nS + log\, R = const;$$

das heisst:

$$log(R/r) = n(c + s - S) = nH,$$

oder

l) $$r = R \,.\, e^{-nH} = Re^{-2\pi H/\lambda}.$$

H ist die Tiefe des Bahnmittelpunktes irgend eines Theilchens unter dem Bahnmittelpunkte des obersten Theilchens.

Was das Buch weiter von der Elimination von $\partial s/\partial c$ aus d) sagt, ist überflüssig, da s aus diesen beiden Integralen eliminirt werden kann. So kommt

$$c = -\frac{n}{2}(R^2 - r^2) + \frac{1}{n} log \frac{R}{r},$$

oder

m) $$c = \frac{\lambda}{2\pi} log \frac{R}{r} - \frac{\pi}{\lambda}(R^2 - r^2).$$

V. Erwärmung flüssiger und fester Körper durch Druck.

In den letzten zwei Jahren veröffentlichte ich einige Notizen auch dieses Betreffs, welche ausser numerischen Berichtigungen auch Erklärungsversuche und einige didactische Beziehungen bieten sollten. Aber eine Ableitung der auch im Folgenden vorkommenden Formeln habe ich dort unterlassen aus Scheu vor dem Vorwurfe, dass man ja solche aus Clausius' Buche oder ähnlichen entnehmen könne und kein Grund vorliege zu Wiederholungen. Heute werde ich diese Scheu etwas zurückdrängen, indem ich mich auf das Buch von Christiansen (schon erwähnt S. 111) beziehe, mit Abweichungsvorschlägen, die auch selbstständig gelesen werden können. Engere Hinweise auf das genannte Buch, die ohne dessen Vergleichung noch mindere Bedeutung hätten, werde ich in die Anmerkungen verweisen.

1. §§ 114—117 sollen hier erwähnt werden, wovon der erste den Titel führt: „Die Anwendungen des zweiten Hauptsatzes.“ Die mit derselben Markirung wie im Buche versehenen Gleichungen:

a) $$JdQ = dU + pdv,$$

b) $$dU = \frac{\partial U}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial U}{\partial v} dv$$

sind genugsam bekannt.* Es wird dann mit ϑ dividirt, um das (totale) Differential

$$dS = dQ : \vartheta$$

der Entropie herzustellen; dS wird ferner analog wie dU in b) behandelt und man erhält die zwei Gleichungen:

$$J\frac{\partial S}{\partial \vartheta} = \frac{\partial U}{\partial \vartheta} : \vartheta$$

und

$$J\frac{\partial S}{\partial v} = \left[\frac{\partial U}{\partial v} + p\right] : \vartheta,$$

welche beziehungsweise nach v und ϑ differenzirt durch Subtraction liefern:

c) $$\frac{\partial U}{\partial v} = \vartheta^2 . \frac{\partial (p : \vartheta)}{\partial \vartheta}.$$

Die Vereinfachung der rechten Seite nimmt das Buch aber erst im § 116 bei b) vor [und im § 117 gleich nach b)]; ich schreibe nämlich gleich jetzt

c′) $$\frac{\partial U}{\partial v} = \vartheta \frac{\partial p}{\partial \vartheta} - p,$$

um so mehr, als hernach in b) und a) substituirt man auch statt d) im Buche einfacher erhält

d′) $$JdQ = \frac{dU}{\partial \vartheta} d\vartheta + \vartheta . \frac{\partial p}{\partial \vartheta} dv.$$

Der erstere Differentialquotient hier bedeutet Jc_v, wo c_v die specifische Wärme bei constantem Volum; der letztere ist bei Gasen, für welche $p = R\vartheta : v$ gilt, gleich $R : v$, so dass für Gase

$$JdQ = Jc_v d\vartheta + pdv$$

wird, was man aber auch a priori, ohne den Umweg durch den zweiten Hauptsatz, hinschreiben kann.

2. Bietet § 114 meines Erachtens wesentlich die Einleitung zu §§ 116 und 117, so muss auch noch § 115 vorangehen, mit dem scheinbar wenig sagenden und doch zutreffenden Titel: „Die Differentialquotienten." Was ist nämlich $\partial p / \partial \vartheta$ für Flüssigkeiten und feste Körper? Diese Frage wird am Schlusse von § 115 durch f) beantwortet.

---

* Suffixe bei den zwei Differentialquotienten sind entbehrlich, da durch die runden ∂ schon die partielle Natur derselben ausgesprochen ist und die beiden unabhängig Veränderlichen v und ϑ sind. Im Theile 2) oben ist jeweils die dritte der drei Variablen $pv\vartheta$ als constant anzusehen.

Hauptsächlich enthält § 115:

d) $$\frac{\partial p}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial p} = 1$$

und noch zwei solche Gleichungen für reciproke Differentialquotienten, da die drei Veränderlichen $p v \vartheta$ den Zustand eines Körpers (seiner Gewichtseinheit) bedingen; und als weitere Beziehung den Kettenschluss

e) $$\frac{\partial p}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial p} = -1;$$

letzteren erhält man aus

$$dp = \frac{\partial p}{\partial v} dv + \frac{\partial p}{d \vartheta} d\vartheta$$

durch Nullsetzen und mit Benutzung von d).

Also haben wir es hier mit sechs oder vielmehr nur drei Differentialquotienten zu thun, wovon der eine

b) $$\frac{\partial v}{\partial \vartheta} = v\alpha$$

der bekannteste (α der cubische thermische Ausdehnungscoefficient); den anderen bezeichnet das Buch mit:

c) $$\frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{v}{\lambda}$$

für flüssige und feste Körper; ich schreibe statt dessen wie a. a. O.:

c') $$\frac{\partial v}{\partial p} = -v\beta,$$

wo β der cubische mechanische Compressionscoefficient der flüssigen und festen Körper.

Das Buch verweist bei dieser Gelegenheit auf die Elasticitätstheorie und unterscheidet zunächst, wie es in dieser begründet ist, aber jetzt den Leser verwirren kann, zwischen den flüssigen und festen Körpern; λ ist dort die Lamé'sche Constante, die analog dem Elasticitätsmodul* eine grosse Zahl ist, während mein β dem α verwandtschaftlich näher steht und von vornherein keinen Unterschied zwischen den beiden Aggregatzuständen im gegenwärtigen Betreff aufkommen lässt.

Mittelst e) wird alsdann für die flüssigen und festen Körper gefunden:

f') $$\frac{\partial p}{\partial \vartheta} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

3. Mit § 116 „Flüssige und feste Körper" tritt die Anwendung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie, wie schon gesagt,

---

* Bei den festen Körpern wird vom Buche dieser mit dem seitlichen Contractions-Coefficienten angeführt, $\frac{E}{3(1-2k)}$.

erst so eigentlich ein. Ich kann gleich an obige Gleichungen d′) und f′) anknüpfen und schreiben:

e′) $$J\,dQ = Jc_v d\vartheta + \vartheta\,\frac{\alpha}{\beta}dv,$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial\vartheta}d\vartheta + \frac{\partial v}{dp}dp = v\,\alpha\,d\vartheta - v\beta\,dp,$$

also

h′) $$J\,dQ = \left(Jc_v + \frac{\alpha^2}{\beta}\,v\vartheta\right)d\vartheta - \alpha v\vartheta\,dp.$$

Ist $dp = 0$, so bedeutet die linke Seite $J.\,c_p\,d\vartheta$, wo c_p die specifische Wärme des flüssigen oder festen Körpers bei constantem Drucke vorstellt; also wird*

$$Jc_p = Jc_v + \frac{\alpha^2 v\vartheta}{\beta},$$

und

i′) $$J\,dQ = Jc_p\,d\vartheta - \alpha v\vartheta\,dp.$$

Für den Fall der Adiabase, $dQ = 0$, ist

$$d\vartheta = \frac{\alpha v\vartheta}{Jc_p}\cdot dp$$

die durch Steigerung des Druckes bewirkte Zunahme der Temperatur. (Wenn α wie meistens positiv ist; im entgegengesetzten Falle resultirt Abnahme der Temperatur.)

4. Gleich darauf beginnt § 117 „Die Wärme-Entwickelung bei der Dehnung“; statt des letzten Wortes hiesse es besser „Pressung“, wie auch der Text sogleich vom „Drucke“ p spricht. Hierher gehört ja die letzte Gleichung; aber jetzt wird insbesondere ein fester Cylinder von der Masse M und Länge l axial gedrückt; die Gleichung a) ist entbehrlich für das Folgende und ich will dieses sogleich nach meiner vorangehenden Nummer 3) sozusagen abschreiben:

b′) $$J\,dQ = JMc_l\,d\vartheta + \vartheta\frac{\alpha}{\beta}\,dl.$$

Hierin ist c_l die specifische Wärme bei constanter Länge, α der thermische Längencoefficient, β der mechanische (der reciproke Elasticitätsmodul). Entsprechend der auf e′) folgenden Gleichung von 3) ist jetzt

$$dl = \frac{\partial l}{\partial v}d\vartheta + \frac{\partial l}{\partial p}dp,$$

also

$$J\,dQ = \left(JMc_l + \frac{\alpha^2}{\beta}\,l\vartheta\right)d\vartheta - \alpha l\vartheta\,dp.$$

---

* Die Gleichung mit c_p wird vom Buche ohne obige Vermittelung ($dp=0$) hereingebracht und nach derjenigen i) nochmals angeführt und mit k) bezeichnet. Vergl. auch Anmerkung S. 117.

Ist $dp = 0$, so bedeutet die linke Seite $JMc_p d\vartheta$, also*

$$J \, . \, c_p = Jc^l + \frac{\alpha^2}{\beta} \cdot \frac{l}{M} \vartheta,$$

folglich

c′) $$J d\, Q = JMc_p d\vartheta - \alpha l \vartheta dp.$$

Für den Fall der Adiabase, $dQ = 0$, ist

$$d\vartheta = \frac{\alpha l \vartheta}{JMc_p} dp.$$

Das Buch führt die Masse m der Längeneinheit ein, ich ziehe vor, die Länge der Massen- oder Gewichtseinheit einzuführen, wie auch in 3) das v den Raum der Gewichtseinheit bedeutet, und schreibe

$$d\vartheta = \frac{\alpha l' \vartheta}{Jc_p} dp.$$

(Vergl. die letzte Gleichung der vorigen Nummer 3.)

Würde der Cylinder gestreckt, so würde eine Abkühlung eintreten. Dass ich bei dieser Gelegenheit im vorigen Jahre über die hierbei nicht berücksichtigte seitliche Veränderung gesprochen, diese Erwähnung mag den Schluss der gegenwärtigen Notiz bilden.

VI. Adiabatische Ausdehnung realer Gase.

Bei den idealen Gasen giebt es bekanntlich keine innere Arbeit, so dass bei der Ausdehnung, wenn die äussere Arbeit Null wäre, auch kein Energieverbrauch stattfände. Bei den realen Gasen aber besteht noch ein wenn auch geringer Zusammenhang der Theilchen. Van der Waals' Zustandsgleichung, nach welcher der § 118 des auch in meinem vorangehenden Artikel erwähnten Buches von Christiansen lautet, giebt deshalb dem p des idealen Gasgesetzes $pv = R\vartheta$ den Summanden $p' = a : v^2$; dieses Quadrat, weil „bei wachsender Dichte sowohl die anziehenden als die angezogenen Moleküle näher zusammenrücken."

Ausserdem haben die Moleküle einen geringeren Raum als v zu ihrer Bewegung frei, da nicht nur der von ihnen selbst eingenommene Raum in Abzug kommen, sondern etwa ein vier- bis achtfacher b, auf dass die Beweglichkeit der Theilchen aufhören würde. So kommt nach van der Waals:

a) $$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = R\vartheta \ldots,^{**}$$

welche für grosse v wieder zu $pv = R\vartheta$ führt.

* Diesmal sagt das Buch (statt $dp = 0$ zu setzen) „da die Formänderung sehr klein ist, so haben wir etc." und es folgt unvermittelt die Gleichung c). Vergl. Anmerkung S. 116.

** Buchstaben mit) vor der Gleichung beziehen sich auf Christiansen; ein Accent hierbei aber bedeutet, dass diese Bezeichnung oder die Formel selbst in diesem Buche nicht vorkommt und von mir gewählt wurde. In Gleichung a′) und a″) ist das *const* von mir gebraucht.

Auf den letzten der acht Seiten seines § 118 kommt Christiansen zum titulirten Betreff und führt als Zustandsgleichung, die Clausius auf Grund der von van der Waals angestellten Untersuchungen angegeben hat, an:

$$\text{a}^0)\qquad \left(p + \frac{a}{(v+\beta)^2\vartheta}\right)(v-b) = R\vartheta\,.$$

Kirchhoff's Vorlesungen über Wärme, erschienen im Jahre 1894, enthalten in IX § 3 diese Formel nebst ihrer Ueberführung in die von Joule und Thomson gelegentlich ihrer Versuche aufgestellte Form (VII § 6):

$$\text{a}')\qquad v = \frac{R\vartheta}{p} - \frac{const}{\vartheta^2}\,;$$

in seinem Buche vom Jahre 1876 führt Clausius (Abschnitt X) diese Versuche an, Gase durch Watte adiabatisch strömen zu lassen (1854 und 1862), und leitet die Gleichung a′) aus seiner Theorie ab. Ausdrücklich erwähnt er seines Vorgängers Rankine, welcher schon zu den Versuchen von 1854 die Gleichung aufgestellt habe:

$$\text{a}'')\qquad pv = R\vartheta - \frac{const}{v\vartheta}\,.$$

Diese ist übereinstimmend mit a⁰), wenn man darin β und b vernachlässigt, wobei $const = a$; ebenso stimmen auch a′) und a″) überein, wie man sieht, wenn man mit p dividirt, als Annäherung im Nenner rechts $pv = R\vartheta$ setzt und R zur Constanten schlägt. Kirchhoff erwähnt hierbei auch die befriedigende Uebereinstimmung mit den Abweichungen vom Gesetze $pv = R\vartheta$, welche Regnault an der Kohlensäure gemessen hat.

Auf a⁰) folgt bei Christiansen die thermodynamische Grundformel:

$$\text{h})\qquad J\,dQ = \frac{\partial U}{\partial\vartheta}\,d\vartheta + \left(\frac{\partial U}{\partial v} + p\right)dv\,,$$

die auch in meiner vorangehenden Mittheilung steht, desgleichen

$$\frac{\partial U}{\partial\vartheta} = Jc_v \quad \text{und} \quad \frac{\partial U}{\partial v} = \frac{\partial p}{\partial\vartheta}\cdot\vartheta - p\,;$$

die linke Seite von h) ist Null wegen der Adiabase und $\frac{\partial p}{d\vartheta}$ wird nach a⁰) gleich $\frac{R}{v-b} + \frac{a}{(v+\beta)^2\vartheta^2}$, also mit nochmaliger Benutzung von a⁰):

$$\text{i})\qquad \frac{\partial U}{\partial v} = \frac{2a}{(v+\beta)^2\vartheta}$$

(indem p fortfällt).

Nun schreibt Christiansen:

$$\text{k})\qquad dU = Jc_v\,d\vartheta + \frac{2a}{(v+\beta)^2\,.\,\vartheta}\,dv$$

und integrirt in der Form:

l) $$\Delta U = Jc_v \,.\, \Delta\vartheta + \frac{2a}{\vartheta}\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}\right),$$

wobei sich das Wort „näherungsweise“ nur auf die Vernachlässigung von β beziehen kann. Aber alsdann folgen die Worte:

„Dehnt sich das Gas aus, ohne einen Widerstand zu haben, so bleibt die innere Energie unverändert. Setzen wir demnach in der Gleichung l) $\Delta U = 0$, so ergiebt sich:

m) $$\Delta\vartheta = -\frac{2a}{Jc_v\vartheta}\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}\right).$$

Die Temperatur sinkt in diesem Falle.“ Schluss des § 118.

Da liegt ein Fehler vor; nicht dU oder ΔU ist Null, sondern wegen der Adiabase JdQ in h). Im Gegentheil ist dU negativ nach der aus h) folgenden Gleichung:

$$0 = dU + p\,dv,$$

oder wegen k)

$$0 = Jc_v d\vartheta + \left(\frac{2a}{(v+\beta)^2\vartheta} + p\right)dv,$$

also folgt statt m)

m⁰) $$d\vartheta = -\frac{1}{Jc_v}\left(\frac{2a}{(v+\beta)^2\vartheta} + p\right)dv.$$

Die Integration von k) zu l) ist überflüssig und das Resultat von Christiansen hätte ohne dieselbe gelautet:

$$d\vartheta = -\frac{1}{Jc_v}\cdot\frac{2a}{(v+\beta)^2\vartheta}\cdot dv;$$

also es fehlt das $p\,dv$.

Für ein ideales Gas ist $a = 0$ und die Erkaltung durch Ausdehnung wird nach m⁰)

$$Jc_v d\vartheta = -p\,dv,$$

weil eine Gewichtseinheit desselben bei der Ausdehnung doch den Druck p der dieselbe umgebenden Gastheilchen überwinden müsste.

Es interessirt vielleicht noch mehrere Leser wie mich, zu sehen, was man statt m⁰) findet, wenn man statt a⁰) die Gleichung a) benutzt:

$$p = \frac{R\vartheta}{v-b} - \frac{a}{v^2},\quad \frac{\partial p}{\partial v} = \frac{R}{v=b},\quad \frac{\partial U}{\partial v} = \frac{R\vartheta}{v-b} - \frac{R\vartheta}{v-b} + \frac{a}{v^2},$$

$$0 = Jc_v d\vartheta + \left(\frac{a}{v^2} + p\right)dv,$$

also:

n) $$d\vartheta = -\frac{1}{Jc_v}\left(\frac{a}{v^2} + p\right)dv.$$

Es unterscheidet sich also n) von m⁰) durch den Divisor ϑ und den Factor 2 bei a. (Von β kann man absehen.) Damit klärt sich auch der Widerspruch in Christiansen's Worten zu a⁰): „Diese Gleichung stellt die wirklichen Verhältnisse besser dar, aber sie führt übrigens im Wesentlichen zu denselben Resultaten, wie jene von **van der Waals'** a).“ m) enthält auch den Einfluss von ϑ, mit dessen Wachsen die Erkaltung $d\vartheta$ kleiner wird, da sich dann das Gas dem idealen Zustande nähert, wie mit dem Wachsen von v^2. (Der erwähnte Factor 2 wird sich zur experimentellen Prüfung schwer eignen.)

Zum Schlusse mag noch Kirchhoff's Referat dienen: Die Experimente von Thomson und Joule (1862) haben ergeben als Erkaltung bei der Druckabnahme

$$\text{o)} \qquad d\vartheta = \frac{const}{\vartheta^2} dp$$

und die Theorie ergiebt für diesen adiabatischen Process

$$\text{p)} \qquad d\vartheta = const \cdot \left(\vartheta \frac{\partial v}{\partial \vartheta} - v\right) \cdot dp = const \cdot \frac{\partial (v : \vartheta)}{\partial \vartheta} \cdot \vartheta^2 \cdot dp;$$

aus beiden wird
$$\frac{\partial (v : \vartheta)}{\partial \vartheta} = \frac{const}{\vartheta^4}$$
oder durch Integration
$$\frac{v}{\vartheta} = -\frac{const}{\vartheta^3} + \frac{R}{p};$$

denn die Integrationsconstante $\frac{R}{p}$ erfüllt die Bedingung, dass für grosse ϑ das ideale Gesetz $\frac{v}{\vartheta} = \frac{R}{p}$ hervorgehe. Man sieht, dass diese Gleichung mit a') übereinstimmt.*

Augsburg. Prof. Dr. KURZ.

VII. Ueber die Construction der Fläche zweiten Grades aus neun gegebenen Punkten.

Es soll die Aufgabe gelöst werden:

Wenn neun Punkte im Raum gegeben sind, auf einer Ebene durch drei derselben den Kegelschnitt φ zu zeichnen, den die durch die neun Punkte bestimmte Fläche zweiten Grades Φ mit derselben gemein hat.

Sind neun Punkte im Raum gegeben: $N N' P_1 P_2 P_3 Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$, so lege man durch $P_1 P_2 P_3$ die Ebene ($\mathfrak{E}$) und projicire die Punkte Q_i von N und N' aus in die Ebene ($\mathfrak{E}$). Die Punkte, die man so erhält, seien mit A_i bez. A_i' bezeichnet ($i = 1, 2, 3, 4$). NN' möge $\mathfrak{E}$ in S treffen. Auf $\mathfrak{E}$ haben wir nun einen Kegelschnitt φ durch $P_1 P_2 P_3$ so zu legen, dass die Projectivitäten, die auf den Geraden $s_i = S A_i A_i'$ durch $A_i A_i'$ als Paar und die beiden Schnittpunkte von φ mit s_i als Doppelelemente bestimmt werden, S auf vier Punkte s_i' abbilden, die in einer Geraden n' liegen. Denn, nehmen wir einmal an, die Fläche Φ sei construirt und projiciren wir sie doppelt, von N und N' aus auf $\mathfrak{E}$, so bestimmen die Schnittpunkte entsprechender Strahlen auf den Geraden s_i die oben angegebenen

* Um die Formel p) abzuleiten, in der ich wegen der Gleichung o) die specifische Wärme c_p bei constantem Drucke auch durch eine *const* ersetzte, müsste man weiter ausholen, als dem Zwecke dieser Mittheilung entsprechend wäre.

Projectivitäten: A_i und A_i' sind ein Paar zugeordneter Punkte, die Schnittpunkte mit der Spur φ von Φ sind die sich selbst entsprechenden Elemente, und die Bilder von S liegen auf einer Geraden, denn wenn man auf einer Geraden s durch S einen Punkt nach S hin wandern lässt, so wandert der Schnitt der Verbindungslinie dieses Punktes (mit N) und der Fläche Φ, der Punkt A, jedesmal auf einem anderen Wege nach N' und $N'A$ geht in die verschiedenen Tangenten über, wenn der abzubildende Punkt S erreicht, das heisst die verschiedenen Bilder S' auf den verschiedenen Strahlen liegen auf dem Schnitt der in N' an Φ gelegten Tangentialebene mit $\mathfrak{s}$. Wir haben also nur die oben aufgegebene Construction von φ auszuführen, um φ und damit auch Φ zu erhalten. Die Construction kann man nun im Allgemeinen linear ausführen.

Doch brauchen wir zunächst den folgenden Hilfssatz:

Sind auf einer Geraden s drei feste Punkte A, A' und S gegeben und ausserdem eine Involution J, so ordnen die Projectivitäten, die auf s durch AA' als Paar und ein Paar der Involution (CC') als Doppelelemente bestimmt werden, dem Punkt S solche Punkte S' zu, die den Paaren der Involution (CC') projectiv zugeordnet sind.

Beweis: Wir nehmen zwei beliebige Punkte LL' ausserhalb der Geraden an und verbinden A mit L, A' mit L'. Die Geraden schneiden sich in M. Durch MLL' und ein beliebiges Paar der Involution CC' ist nun ein Kegelschnitt bestimmt, und, indem man alle Paare CC' hierzu nimmt, erhält man ein ganzes Kegelschnittsbüschel, das ausser $LL'M$ noch einen Grundpunkt, etwa N hat. Wenn wir nun die Kegelschnitte γ des Büschels von L und von L' aus projiciren, so erhalten wir lauter Projectivitäten, in denen AA' ein Paar ist, und in denen die Punkte CC', die Schnittpunkte der betreffenden Kegelschnitte mit s Doppelelemente sind.

Um in einer solchen Projectivität das Bild von S zu haben, verbinde man L mit S, γ wird dann von LS noch einmal in S'' getroffen, und wenn man S'' von L' aus projicirt, erhält man dann S'. Nach bekannten Sätzen bestehen dann die folgenden Projectivitäten:

$$(CC') \barwedge \gamma \barwedge S''S',$$

das heisst

$$(C'C) \barwedge S',$$

was zu beweisen war.

Zur Construction verfahre man nun so: Man nehme einen Punkt P_4 beliebig an, z. B. der Einfachheit halber auf der Geraden $p_1 (= SP_1)$ und lege durch $P_1P_2P_3P_4$ ein Büschel von Kegelschnitten (γ). Jeder Kegelschnitt bestimmt auf jeder Geraden s_i eine Projectivität, indem wir A_iA_i' als Paar und die beiden Schnittpunkte des Kegelschnittes mit s_i zu Doppelelementen nehmen. Diese Projectivitäten mögen S bez. auf $S_1'S_2'S_3'S_4'$ abbilden, und es ist dann nach dem Hilfssatz:

$$S_1' \barwedge S_2' \barwedge S_3' \barwedge S_4' \barwedge (\gamma).$$

Diese letzteren Projectivitäten sind nun zu je zweien Perspectiven; denn, wenn man im Büschel den zerfallenden Kegelschnitt $p_1(P_2 P_3)$ nimmt, so ist S ein Punkt desselben, das heisst S entspricht in der obigen Projectivität sich selbst; für diesen einen Kegelschnitt fallen also vier S_i' mit S zusammen, das heisst die zwischen je zwei Reihen $S_i' S_k'$ bestehenden Projectivitäten sind Perspectiven.

Wir betrachten nun die beiden Perspectiven $S_2' \barwedge S_1'$ und $S_2' \barwedge S_3'$ näher. Zunächst kann man sie linear construiren, indem man die zerfallenden Kegelschnitte $(P_2 P_4) . (P_3 P_1)$ und $(P_2 P_1) . (P_3 P_4)$ zur Construction von zwei Tripeln $S_1' S_2' S_3'$ benützt. Zwei Paare genügen ja schon, um das Perspectivitätscentrum J_{ik} zu finden, das die zwischen entsprechenden Punkten S_i' und S_k' bestehende Perspective vermittelt. Die Strahlen, die z. B. (S_1') mit J_{12} verbinden, sind dann den Kegelschnitten projectiv zugeordnet, die S auf S_1' abbilden. Zu jedem Strahl kann man also den zugeordneten Kegelschnitt des Büschels leicht finden. — Verbindet man nun J_{12} und J_{23}, so erhält man demnach sofort den einzigen, eindeutig und linear bestimmten Kegelschnitt des Büschels, der durch seine in der angegebenen Weise auf $s_i (i = 1, 2, 3)$ bestimmten Projectivitäten S auf drei in einer Geraden n_4' liegende Punkte $S_1' S_2' S_3'$ abbildet, in der im Allgemeinen natürlich das Bild S_4' von S nicht liegt. Zu einem Punkt P_4 gehört in dieser Construction ein und nur ein solches Tripel $S_1' S_2' S_3'$, das auf einer „Tripelgeraden" n_4' liegt. — Ist P_4 und der zugehörige Kegelschnitt gegeben, so ist er die Spur auf $\mathfrak{S}$ von einer Fläche zweiten Grades, die

$$N N' P_1 P_2 P_3 P_4 Q_1 Q_2 Q_3$$

enthält, und n_4' ist die Spur der in N' an die Fläche gelegten Tangentialebene.

Indem wir nun P_4 variiren, so bestimmen die zugehörigen Flächen, die acht gemeinsame Punkte haben $(N N' P_1 P_2 P_3 Q_1 Q_2 Q_3)$, ein Büschel, und demnach dreht sich die Tangentialebene von N' um eine Gerade, weil sie die Polarebene eines festen Punktes für ein Flächenbüschel ist. Ihre Spur n_4' dreht sich also um einen Punkt. Bezeichnen wir die Flächen mit Φ_4, so haben wir:

$$n_4' \barwedge \Phi_4 \barwedge P_4,$$

also

$$n_4' \barwedge P_4,$$

den Punkt, um den sich n_4' dreht, bezeichnen wir mit N_4'.

Genau dieselbe Betrachtung, die wir für $s_1 s_2 s_3$ anstellten, können wir nun auch für $s_2 s_3 s_4$ machen.

Wir können durch jeden Punkt P_4 von P_1 wieder einen und nur einen Kegelschnitt des Büschels $(P_1 P_2 P_3 P_4)$ legen, für den die wie oben bestimmten Punkte $S_2' S_3' S_4'$ auf einer Geraden n_1' liegen, und wenn man P_4 variirt, so dreht sich n_1' um einen Punkt N_1' in der Ebene, und es ist $n_1' \barwedge P_4$, also, da auch $n_4' \barwedge P_4$ ist, $n_1' \barwedge n_4'$. Wenn wir also N_1' und N_4' verbinden, so erhalten wir die gesuchte Gerade n_1', und daher muss ihr auf p_1 beidesmal derselbe Punkt P_4 entsprechen. Mit P_4 ist aber auch φ gegeben. Man braucht ja nur das zugehörige Perspectivitätscentrum J_{12} zu suchen, das natürlich auf n' liegt, und dann den n' zugeordneten Kegelschnitt des Büschels $P_1 P_2 P_3 P_4$ in der Projectivität, die zwischen den Strahlen des Büschels (J_{12}) und den Kegelschnitten $(P_1 P_2 P_3 P_4)$ besteht, die S auf solche Punkte $S_1' \barwedge S_2'$ abbilden, deren Perspectivitätscentrum J_{12} ist.

Man kann auch folgende Betrachtung anwenden: die Flächen Φ_4, die S auf drei in einer Geraden liegende Punkte $S_1\ S_2\ S_3$ abbilden (und $N N' Q_1 Q_2 Q_3 P_1 P_2 P_3$ enthalten), bestimmen auf $\mathfrak{S}$ ein Büschel von Kegelschnitten, von dem wir drei Grundpunkte $P_1 P_2 P_3$ kennen, der vierte ist daher linear zu finden, und die gesuchte Fläche Φ muss ihn enthalten, wenn anders sie S auf drei in einer Geraden liegende Punkte $S_1' S_2' S_3'$ abbilden soll. Dasselbe gilt entsprechend von den Flächen Φ_1, die zu $Q_2 Q_3 Q_4$ in derselben Beziehung stehen wie Φ_4 zu $Q_1\ Q_2\ Q_3$. Auch hier kann man den vierten Grundpunkt des auf $\mathfrak{S}$ bestimmten Büschels linear finden. Damit haben wir aber fünf Punkte von φ. Ist φ bestimmt, so kann man jeden weiteren Punkt von Φ in bekannter Weise finden.

Diese Construction unterscheidet sich dadurch von den gebräuchlichen, dass nur in einer Ebene construirt wird. Aus der Theorie der Flächen zweiten Grades wird nur der Satz gebraucht, dass die Polarebene eines Punktes für ein Büschel sich um eine Gerade dreht.

Jena. Dr. H. Liebmann.

VIII. Eine neue Formel für die mittlere Krümmung und das Krümmungsmaass einer Fläche.

Ist eine Flächengleichung in der Form gegeben:

$$z = (x, y), \tag{1}$$

so drückt sich ihre mittlere Krümmung $h = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ und ihr Krümmungsmaass $k = \frac{1}{r_1 r_2}$ bekanntlich folgendermassen durch die partiellen Ableitungen erster (p, q) und zweiter (r, s, t) Ordnung von z nach x und y aus:

$$h = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{r(1+q^2) + p(1+t^2) - 2pqs}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{2}$$

$$k = \frac{1}{r_1 r_2} = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2}. \tag{3}$$

Sind nun a, b, c die *cosinus* der Neigungswinkel der Flächennormalen gegen die drei Achsen, so ist:

$$
4)\qquad \begin{cases} a = \dfrac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \\[2ex] b = \dfrac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \\[2ex] c = \dfrac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}. \end{cases}
$$

Differenzirt man a und b partiell nach x und y, so erhält man:

$$
5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial x} = \dfrac{r(1+q^2)-pqs}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}, \\[2ex] \dfrac{\partial b}{\partial y} = \dfrac{s(1+p^2)-pqr}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}, \\[2ex] \dfrac{\partial a}{\partial y} = \dfrac{s(1+q^2)-pqt}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}, \\[2ex] \dfrac{\partial b}{\partial y} = \dfrac{t(1+p^2)-pqs}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{cases}
$$

Eine ganz einfache Rechnung ergiebt nun, dass die Werthe für h und k in 2) und 3) sich durch die partiellen Ableitungen von a und b so ausdrücken:

$$
6)\qquad h = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y},
$$

$$
7)\qquad k = \frac{1}{r_1 r_2} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial a}{\partial x} & \dfrac{\partial a}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial b}{\partial x} & \dfrac{\partial b}{\partial y} \end{vmatrix};
$$

Aehnliche Formeln ergeben sich, wenn die Gleichung der Fläche in der Form:

$$
8)\qquad f(x, y, z) = 0
$$

gegeben ist. Sind f_1, f_2, f_3 die partiellen Ableitungen erster, f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{22}, f_{23}, f_{33} die zweiter Ordnung von $f(x, y, z)$ nach x, y, z, und setzt man zur Abkürzung $V^2 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2$,
so ist:

$$
9)\qquad a = -\frac{f_1}{V}, \quad b = -\frac{f_2}{V}, \quad c = -\frac{f_3}{V}.
$$

Die Hauptkrümmungsradien bestimmen sich dann bekanntlich als die Wurzeln der quadratischen Gleichung in ϱ:

$$
10)\qquad \begin{vmatrix} f_{11} + \dfrac{V}{\varrho} & f_{12} & f_{13} & f_1 \\[2ex] f_{21} & f_{22} + \dfrac{V}{\varrho} & f_{23} & f_2 \\[2ex] f_{31} & f_{32} & f_{33} + \dfrac{V}{\varrho} & f_3 \\[2ex] f_1 & f_2 & f_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.
$$

Man findet hieraus für h und k die Werthe:

$$11)\quad \begin{cases} h = \dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} \\ = \dfrac{-f_{11}(f_2^2+f_3^2) - f_{22}(f_3^2+f_1^2) - f_{33}(f_1^2+f_2^2) + 2(f_{12}f_1f_2 + f_{23}f_2f_3 + f_{31}f_3f_1)}{V^3} \end{cases}$$

$$12)\qquad k = \frac{1}{r_1 r_2} = \frac{1}{V^4}\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Bildet man nun wieder die partiellen Ableitungen von a, b, c nach x, y, z, so erhält man:

$$13)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial x} = -\dfrac{f_{11}}{V} + \dfrac{f_1}{V^2}\dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{-f_{11}(f_2^2+f_3^2) + f_1f_2f_{12} + f_1f_3f_{13}}{V^3}, \\ \dfrac{\partial a}{\partial y} = -\dfrac{f_{12}}{V} + \dfrac{f_1}{V^2}\dfrac{\partial V}{\partial y} = \dfrac{-f_{12}(f_2^2+f_3^2) + f_1f_2f_{22} + f_1f_3f_{23}}{V^3}, \\ \dfrac{\partial a}{\partial z} = -\dfrac{f_{13}}{V} + \dfrac{f_1}{V^2}\dfrac{\partial V}{\partial z} = \dfrac{-f_{13}(f_2^2+f_3^2) + f_1f_2f_{32} + f_1f_3f_{33}}{V^3}; \\ \dfrac{\partial b}{\partial x} = -\dfrac{f_{21}}{V} + \dfrac{f_2}{V^2}\dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{-f_{21}(f_3^2+f_1^2) + f_3f_2f_{13} + f_2f_1f_{11}}{V^3}, \\ \dfrac{\partial b}{\partial y} = -\dfrac{f_{22}}{V} + \dfrac{f_2}{V^2}\dfrac{\partial V}{\partial y} = \dfrac{-f_{22}(f_3^2+f_1^2) + f_3f_2f_{23} + f_2f_1f_{21}}{V^3}, \\ \dfrac{\partial b}{\partial z} = -\dfrac{f_{23}}{V} + \dfrac{f_2}{V^2}\dfrac{\partial V}{\partial z} = \dfrac{-f_{23}(f_3^2+f_1^2) + f_3f_2f_{33} + f_2f_1f_{31}}{V^3}; \\ \dfrac{\partial c}{\partial x} = -\dfrac{f_{31}}{V} + \dfrac{f_3}{V^2}\dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{-f_{31}(f_1^2+f_2^2) + f_1f_3f_{11} + f_3f_2f_{12}}{V^3}, \\ \dfrac{\partial c}{\partial y} = -\dfrac{f_{32}}{V} + \dfrac{f_3}{V^2}\dfrac{\partial V}{\partial y} = \dfrac{-f_{32}(f_1^2+f_2^2) + f_1f_3f_{21} + f_3f_2f_{22}}{V^3}, \\ \dfrac{\partial c}{\partial z} = -\dfrac{f_{33}}{V} + \dfrac{f_3}{V^2}\dfrac{\partial V}{\partial y} = \dfrac{-f_{33}(f_1^2+f_2^2) + f_1f_3f_{31} + f_3f_2f_{32}}{V^3}. \end{cases}$$

Man sieht nun leicht, dass der Werth von h in 11) sich durch diese partiellen Ableitungen so ausdrückt:

$$14)\qquad h = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial y}.$$

Um k auszudrücken, löst man 9) und 13) nach f_1, f_2, f_3 bezw. f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{22}, f_{23}, f_{33} auf, setzt also:

$$f_1 = aV \text{ u. s. f.}$$

$$f_{11} = -V\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{f_1}{V}\frac{\partial V}{\partial x} \text{ u. s. f.}$$

Geht man mit diesen Werthen in den Ausdruck für k in 12) ein, so erhält man:

$$k = \frac{1}{V^4}\begin{vmatrix} -\left(V\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{f_1}{V}\frac{\partial V}{\partial x}\right) & -\left(V\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{f_1}{V}\frac{\partial V}{\partial y}\right) & -\left(V\frac{\partial a}{\partial z}+\frac{f_1}{V}\frac{\partial V}{\partial z}\right) & -aV \\ -\left(V\frac{\partial b}{\partial x}+\frac{f_2}{V}\frac{\partial V}{\partial x}\right) & -\left(V\frac{\partial b}{\partial y}+\frac{f_2}{V}\frac{\partial V}{\partial y}\right) & -\left(V\frac{\partial b}{\partial z}+\frac{f_2}{V}\frac{\partial V}{\partial z}\right) & -bV \\ -\left(V\frac{\partial c}{\partial x}+\frac{f_3}{V}\frac{\partial V}{\partial x}\right) & -\left(V\frac{\partial c}{\partial y}+\frac{f_3}{V}\frac{\partial V}{\partial y}\right) & -\left(V\frac{\partial c}{\partial z}+\frac{f_3}{V}\frac{\partial V}{\partial z}\right) & -cV \\ -aV & -bV & -cV & 0 \end{vmatrix}$$

Dieser Ausdruck lässt sich leicht überführen in:

$$15)\qquad k = \frac{1}{r_1 r_2} = \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial a}{\partial y} & \frac{\partial a}{\partial z} & a \\ \frac{\partial b}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial y} & \frac{\partial b}{\partial z} & b \\ \frac{\partial c}{\partial x} & \frac{\partial c}{\partial y} & \frac{\partial c}{\partial z} & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}.$$

Die Bedingungsgleichung $h = 0$ für Minimalflächen ergiebt nach 6) bezw. 14):

$$16)\qquad \begin{cases} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichung zeigt eine bemerkenswerthe Aehnlichkeit mit der Bedingungsgleichung für die Bewegung einer incompressibeln Flüssigkeit in der Ebene und im Raum. Sind u, v, w die Geschwindigkeitscomponenten, so müssen diese bekanntlich der Gleichung genügen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

bezw. im Raume:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Gmünd. Dr. V. Kommerell.

IX. Ueber einige unendliche Producte und Reihen.

In dem Abschnitte „de partitione numerorum“ seiner Introductio in anal. inf. hat Euler mehrere unendliche Producte in Reihen verwandelt, wie z. B. für $q^2 < 1$ und $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots = 1 + \Sigma(-1)^n \left\{ q^{\frac{n(3n-1)}{2}} + q^{\frac{n(3n+1)}{2}} \right\},$$

andererseits hat Jacobi viele derartige Producte durch elliptische Integrale ausgedrückt, z. B. (Fundamenta nova, p. 89)

$$[(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots]^6 = \frac{4\sqrt{k}.k'^2 K^3}{\pi^3 \sqrt[4]{q}};$$

zur numerischen Rechnung eignen sich beide Formen aber nur bei kleinen q, liegt dagegen q der Einheit nahe, wie z. B. $q = 0,9$, so lassen sich schon fünf richtige Decimalen nur mit Mühe erreichen. Unter diesen Umständen ist wohl der Nachweis nicht überflüssig, dass man leicht Gleichungen bilden kann, die zwar keine absolute Genauigkeit, wohl aber eine sehr grosse Annäherung bieten. Das Mittel hierzu liefert die Summenformel von Mac Laurin:

$$\begin{aligned} & f(u) + f(2u) + f(3u) + \cdots + f(pu) \\ & = \frac{1}{u}\int_0^{pu} f(x)\,dx + \frac{1}{2}[f(pu) - f(0)] \\ & + \frac{B_1 u}{1.2}[f'(pu) - f'(0)] - \frac{B_3 u^3}{1.2.3.4}[f'''(pu) - f'''(0)] + \cdots \\ & \cdots + \frac{(-1)^n B_{2n-3} u^{2n-3}}{1.2\ldots(2n-2)}[f^{(2n-3)}(pu) - f^{(2n-3)}(0)] - R_{2n}, \end{aligned}$$

worin B_1, B_3, B_5 etc. die Bernoulli'schen Zahlen $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$ etc. bezeichnen und R_{2n} das Ergänzungsglied ist.*

Es sei zunächst

$$f(x) = l\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right);$$

nach gehöriger Reduction erhält man für $p = \infty$ und

$$\int_0^\infty l(1-e^{-x})\,dx = -\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right) = -\frac{\pi^2}{6}$$

die Formel:

* Eine ausführliche Discussion der obigen Summenformel und des zugehörigen Restes enthält der Abschnitt: „Die Bernoulli'schen Functionen und die halbconvergenten Reihen“ S. 210—242 in Bd. II des Verfassers „Compendium der höheren Analysis“ (auch unter dem Titel „Vorlesungen über einzelne Theile der höheren Analogie“), 4. Aufl., Braunschweig bei Vieweg, 1895.

$$l[(1-e^{-u})(1-e^{-2u})(1-e^{-3u})\ldots]$$
$$=\frac{u}{24}-\frac{\pi^2}{6u}+\frac{1}{2}\,l\left(\frac{2\pi}{u}\right)-R_{2n}.$$

Der Rest lässt sich unter der Form

$$R_{2n}=\varrho\,\frac{B_{2n-3}B_{2n-1}}{2n}\left(\frac{\pi^2}{6}+\frac{u^2}{4\pi^2}\right)\frac{u^{2n-2}}{1.2\ldots(2n-2)},$$
$$-1<\varrho<+1$$

darstellen, beträgt aber meistens sehr wenig. Beispielsweise ergiebt sich für $u=\frac{1}{10}$ und bei Weglassung des Restes

$$(1-e^{-0,1})(1-e^{-0,2})(1-e^{-0,3})\cdots=0{,}000\,000\,1807\ldots,$$

wo der Fehler $<10^{-12}$ ist.

Für $e^{-u}=q$ und bei Weglassung von R_{2n} hat man

$$(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots=\sqrt{\frac{2\pi}{-lq}}\left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{24}}e^{\frac{\pi^2}{6lq}};$$

woraus z. B. für $q=0{,}4$ derselbe Productwerth $0{,}451\,861$ folgt wie aus der Euler'schen Formel.

Als zweite Anwendung der allgemeinen Formel diene

$$f(x)=l\left(\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}\right);$$

es ergiebt sich dann bei Weglassung des Restes:

$$l[(1-e^{-u^2})(1-e^{-4u^2})(1-e^{-9u^2})\ldots]=l\left(\frac{2\pi}{u}\right)-\frac{\sqrt{\pi}}{2u}\,\sigma,$$
$$\sigma=\frac{1}{\sqrt{1^3}}+\frac{1}{\sqrt{2^3}}+\frac{1}{\sqrt{3^3}}+\cdots=2{,}61227$$

und daraus wieder für $e^{-u^2}=q$:

$$(1-q)(1-q^4)(1-q^9)(1-q^{16})\cdots=\frac{2\pi}{\sqrt{-lq}}\,e^{-\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\pi}{-lq}}}.$$

Eine ganz analoge Behandlung gestattet die allgemeinere Annahme

$$f(x)=l\left(\frac{1-e^{-x^a}}{x^a}\right),$$

deren weitere Ausführung dem Leser überlassen bleiben möge.

Schlömilch.

VII.

Die geometrischen Constructionen dritten und vierten Grades, ausgeführt mittelst der geraden Linie und einer festen Curve dritter Ordnung.*

Von

Dr. Franz London

in Breslau.

Einleitung.

Jedes Constructionsproblem, welches die Auffindung nur eines unbekannten Elementes erfordert, lässt sich bekanntlich mit alleiniger Hilfe des Lineals ausführen und wird deshalb als ein „lineares" bezeichnet. Bei Aufgaben, welche die Auffindung zweier unbekannter Elemente, z. B. eines Punktepaars, verlangen, den quadratischen Constructionen, hat man ausser dem Lineal noch den Zirkel zu Hilfe zu nehmen; dabei hat Steiner in seiner klassischen Abhandlung: „Ueber die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises" (1833) gezeigt, dass sich die Anwendung des Zirkels auf ein Minimum beschränken lasse, indem er bewies, dass alle quadratischen Constructionen mit alleiniger Hilfe des Lineals ausführbar werden, falls in der Ebene der Zeichnung ein fester Kreis ein für alle Mal gezeichnet vorliegt. Für die Constructionen, bei denen es sich um die Auffindung dreier unbekannter Elemente (z. B. dreier Punkte) handelt, die sogenannten cubischen Constructionen, wurde die Frage nach den zu ihrer Ausführung erforderlichen Hilfsmitteln erledigt gelegentlich der Beantwortung der von der Berliner Akademie für die Steiner-Stiftung im Jahre 1868 gestellten Preisaufgabe. Wie nämlich Steiner in der oben citirten Abhandlung für die quadratischen Constructionen die zu ihrer Ausführung erforderlichen Hilfsmittel

* Die den folgenden Betrachtungen zu Grunde liegenden Gedanken waren Gegenstand eines Vortrags auf der Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in Lübeck 1895; ein Referat über diesen Vortrag findet sich im Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung IV (1894/95) S. 163—165

angegeben hatte, so verlangte die Akademie für die cubischen Constructionen die analoge Behandlung, nämlich die Angabe möglichst einfacher fester Curven und möglichst weniger Zeichen-Instrumente, deren Anwendung die Ausführung der cubischen Constructionen ermöglicht. Die beiden preisgekrönten Arbeiten von Herrn Kortum* und von Stephen Smith** gelangten zu den nämlichen constructiven Hilfsmitteln; es wurde nämlich in ihnen gezeigt, dass sich alle cubischen Constructionen mit alleiniger Hilfe von Zirkel und Lineal ausführen lassen, wofern in der Ebene der Zeichnung ein fester Kegelschnitt — der aber kein Kreis sein darf — gezeichnet vorliegt. Es wird also als Constructionscurve ein allgemeiner Kegelschnitt, als Zeichen-Instrumente Lineal und Zirkel erfordert. Es ist die Frage, ob diese von Smith-Kortum angegebenen Hilfsmittel für cubische Constructionen die einfachsten sind, und es liegt der Gedanke nahe, zu untersuchen, ob die Ausführung der cubischen Constructionen nicht auch mit alleiniger Hilfe des Lineals gelingt, falls eine feste Curve **dritter Ordnung**, und zwar eine möglichst specielle und einfach herstellbare, gezeichnet vorliegt. Eine derartige Behandlung der cubischen Constructionen erscheint angemessener und einfacher als die bisherige; angemessener, weil dann eine völlige Analogie mit der Steiner'schen Behandlung quadratischer Aufgaben erreicht ist, denn, wie dort die quadratischen Constructionen mittelst einer festen speciellen Curve zweiter Ordnung, so werden hier die cubischen Constructionen mittelst einer festen speciellen Curve dritter Ordnung und alleiniger Hilfe des Lineals bewältigt; einfacher, weil man nunmehr den Zirkel ganz entbehren kann, wobei zwar an Stelle der festen Curve zweiter Ordnung (die aber kein Kreis sein durfte) eine feste Curve dritter Ordnung tritt, diese aber möglichst speciell und so einfach gewählt werden kann, dass ihre Herstellung keine grösseren Schwierigkeiten verursacht, als die einer allgemeinen Curve zweiter Ordnung. In den folgenden Untersuchungen soll nun in der That gezeigt werden, dass sich die cubischen Constructionen mit den genannten Hilfsmitteln bewältigen lassen; gleichzeitig ist aber damit auch für die biquadratischen Aufgaben, das heisst für Aufgaben, bei denen vier unbekannte Elemente aufzufinden sind, das Nämliche erwiesen, da diese sich auf Aufgaben niederen Grades zurückführen lassen.

Im ersten Paragraphen wird die allgemeine Formulirung cubischer und biquadratischer Aufgaben gegeben und gezeigt, dass sich alle diese Aufgaben zurückführen lassen auf eine der beiden Aufgaben: Wenn von zwei

* Kortum: „Ueber geometrische Aufgaben dritten und vierten Grades", Bonn 1869.

** Smith: „Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques", Annali de matematica, Ser. II. Tom. 3.

gegebenen Kegelschnitten ein Schnittpunkt bekannt ist, die drei letzten Schnittpunkte derselben zu construiren; oder: die drei dreifachen Elemente einer gegebenen cubischen Involution zweiter Stufe zu construiren. Diese beiden Aufgaben, obgleich sie selbst wieder auf einander zurückführbar sind, werden sodann wegen des häufigen Vorkommens jeder von ihnen und wegen ihrer Wichtigkeit einzeln behandelt. Im zweiten Paragraphen wird daher gezeigt, wie man die drei letzten Schnittpunkte zweier gegebener Kegelschnitte construiren kann mit alleiniger Hilfe des Lineals, wenn eine feste Curve dritter Ordnung gegeben ist, im dritten Paragraphen wird das Nämliche für die drei dreifachen Punkte einer cubischen Involution zweiter Stufe dargethan, wobei man auf verschiedene, an sich interessante Eigenschaften der auf der rationalen, ebenen Curve dritter Ordnung befindlichen cubischen Involutionen geführt wird. Der letzte Paragraph ist der Anwendung unserer Methode auf metrische Aufgaben gewidmet, wobei sich eine Methode der graphischen Auflösung der numerischen cubischen Gleichungen mit unseren Hilfsmitteln ergiebt; als Beispiele werden schliesslich die altberühmten cubischen Probleme der Vervielfachung des Würfels und der Trisection des Winkels behandelt.

Als ein für alle Mal feste Constructionscurve dritter Ordnung kann jede beliebige Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt gewählt werden; besonders einfach gestaltet sich jedoch die Ausführung, wenn der Doppelpunkt ein Rückkehrpunkt ist, so dass wir diesen Fall stets besonders berücksichtigt haben. Für die praktische Ausführung haben wir als Constructionscurve die Cissoide gewählt, einmal, weil dieselbe ausserordentlich einfach sowohl punktweise, als auch durch einen schon von Newton angegebenen Mechanismus in einem Zuge herstellbar ist,* sodann weil derselben die unendlich fernen Kreispunkte angehören, und sie daher denselben Vorzug, wie der Kreis bei quadratischen Aufgaben darbietet, dass sie nämlich die absolute Involution und daher rechte Winkel linear zu construiren gestattet.

§ 1. Fixirung der Aufgabe.

Eine geometrische Constructionsaufgabe, bei welcher gefordert wird, aus gewissen gegebenen Stücken drei resp. vier unbekannte Elemente zu construiren, nennen wir eine cubische resp. biquadratische Aufgabe, wofern die Beziehung zwischen den gegebenen und den gesuchten Grössen eine algebraische ist, das heisst durch Curven und Flächen von beliebig hoher, aber endlicher Ordnung vermittelt wird. Fassen wir die gesuchten Elemente als Punkte auf, so lässt sich jede cubische und biquadratische

* cf. Salmon-Fiedler: „Höhere ebene Curven", II. Aufl. Art. 215.

Construction analytisch folgendermassen formuliren: Die homogenen Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 der gesuchten Punkte sind rationale, ganze Functionen eines Parameters λ, welcher seinerseits einer Gleichung dritten resp. vierten Grades genügen soll, so dass also:

$$1)\qquad \varrho x_i = \sum_{k=0}^{n} a_{ik}\lambda^k \quad (i=1,2,3,4)$$

(ϱ ist Proportionalitätsfactor), wo λ der Gleichung:

$$2)\qquad f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^4 = 0$$

genügen soll; je nachdem $a_4 = 0$ oder $\gtrless 0$ ist das Problem ein cubisches oder biquadratisches. Die Coefficienten a_{ik}, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 sind dabei aus den Datis der Aufgabe herstellbare Grössen. Geometrisch interpretirt stellen die Gleichungen 1) eine rationale Curve R dar. Die Gleichung 2) stellt das System der vier resp. drei Punkte auf R dar, deren Parameter λ die Wurzeln dieser Gleichung sind. Fassen wir zunächst die biquadratischen Aufgaben ($a_4 \gtrless 0$) ins Auge und bilden wir die gemischte Polargleichung der Gleichung 2):

$$a_0 + \frac{1}{4}a_1(\lambda+\mu+\nu+\xi) + \frac{1}{6}a_2(\lambda\mu+\lambda\nu+\lambda\xi+\mu\nu+\mu\xi+\nu\xi)$$
$$+\frac{1}{4}a_3(\lambda\mu\nu+\lambda\mu\xi+\lambda\nu\xi+\mu\nu\xi) + a_4\lambda\mu\nu\xi = 0.$$

Interpretiren wir die Variablen λ, μ, ν, ξ als Punkte der rationalen Curve R, so wird jedes Punkt-System λ, μ, ν, ξ, welches dieser gemischten Polargleichung genügt, durch irgend drei seiner Punkte eindeutig bestimmt; jedes solches System von vier Punkten soll ein Quadrupel heissen, es existiren ∞^3 Quadrupel, deren Gesammtheit wir eine biquadratische Involution dritter Stufe* nennen und durch $J^3{}_4$ bezeichnen. Diese $J^3{}_4$ ist durch die Coefficienten von 2) gegeben. Fragen wir nach den Quadrupeln, deren Punkte sich in einem einzigen vereinigen, so erhält man dieselben, wenn man $\lambda = \mu = \nu = \xi$ setzt, es giebt deren mithin vier, welche durch die ursprüngliche Gleichung 2) definirt werden; diese vier Punkte, in welchen je ein Quadrupel von $J^3{}_4$ vereinigt ist, nennen wir die Kernpunkte von $J^3{}_4$ und wir können somit jede biquadratische Aufgabe auf folgendes Problem zurückführen: Gegeben ist eine rationale Curve R und auf ihr eine biquadratische Involution dritter Stufe ($J^3{}_4$), es sollen für diese Involution die Kernpunkte construirt werden. Denken wir uns die Punkte von R auf die Punkte eines beliebigen Kegelschnittes projectiv bezogen, so entsprechen den

* cf. Emil Weyr: „Ueber Involutionen n^{ten} Grades, k^{ter} Stufe", Sitzungsberichte der Wiener Akademie 1879, Bd. 79, II.

Quadrupeln von J^3_4 auf R Systeme von je vier Punkten auf K, die ebenfalls eine J^3_4 bilden; den Kernpunkten der J^3_4 auf R entsprechen die Kernpunkte der J^3_4 auf K; mit den letzteren sind somit auch die ersteren aufgefunden. Die vier Kernpunkte einer J^3_4 auf einem Kegelschnitt K lassen sich* aber durch einen mittelst J^3_4 linear construirbaren Kegelschnitt aus K ausschneiden. Jede biquadratische Construction lässt sich somit auf die Construction der vier Schnittpunkte zweier gegebener Kegelschnitte zurückführen, was schon von Descartes in seiner „Géométrie" angegeben wurde. Diese vier Schnittpunkte ergeben sich aber, wie man unmittelbar erkennt, mittelst quadratischer Constructionen, wenn man das gemeinsame Polardreieck der beiden Kegelschnitte construiren kann. Dieses letztere wiederum erfordert eine cubische Construction. Daraus ergiebt sich, dass sich die Constructionen vierten Grades auf Constructionen niedrigeren Grades reduciren lassen. Wir werden uns somit mit den biquadratischen Constructionen nicht weiter zu beschäftigen haben.

Haben wir eine cubische Construction auszuführen, so wird die Gleichung 2) zu:

$$2)\qquad a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 = 0$$

und es sind die drei Punkte der durch 1) gegebenen rationalen Curve R zu construiren, deren Parameter die Wurzeln von 2) sind. Die gemischte Polargleichung von 2) lautet hier:

$$a_0 + \frac{1}{3}a_1(\lambda + \mu + \nu) + \frac{1}{3}a_2(\lambda\mu + \mu\nu + \nu\lambda) + a_3\lambda\mu\gamma = 0.$$

Jedes System von drei Punkten auf R, deren Parameter λ, μ, ν dieser Polargleichung genügen, ist durch irgend zwei seiner Punkte eindeutig bestimmt; jedes solches System von drei Punkten soll ein Tripel heissen, es existiren ∞^2 solcher Tripel, deren Gesammtheit wir eine cubische Involution zweiter Stufe** nennen und durch J^2_3 bezeichnen. Diese J^2_3 ist durch die Coefficienten von 2) gegeben. Es existiren drei Tripel, deren drei Elemente sich in einem Punkte von R vereinigen, dieselben erhält man, wenn man $\lambda = \mu = \nu$ setzt, ihre Parameter genügen der Gleichung 2). Diese drei Punkte, welche wir wieder als die Kernpunkte von J^2_3 bezeichnen, sind also die drei gesuchten Punkte einer cubischen Aufgabe, so dass wir erkennen: Jede cubische Construction lässt sich auf die Construction der drei Kernpunkte einer auf einer rationalen Curve R gegebenen J^2_3 zurückführen. Denken wir uns wieder die Punkte von R auf die Punkte eines Kegelschnitts K projectiv bezogen, so

* cf. Paul Serret: Comptes rendus 87, 2.

** cf. Emil Weyr l. c.

entsprechen den Tripeln von J^2_3 auf R Systeme von je drei Punkten auf K, welche ebenfalls eine J^2_3 bilden. Den Kernpunkten der J^2_3 auf R entsprechen die Kernpunkte der J^2_3 auf K; mit den letzteren sind mithin auch die ersteren aufgefunden. Die drei Kernpunkte einer J^2_3 auf einem Kegelschnitt K werden aber* aus K ausgeschnitten durch einen mit J^2_3 gegebenen Kegelschnitt, von dem ein Schnittpunkt mit K bekannt ist. Somit lässt sich jede cubische Construction auf die Aufgabe zurückführen:

Wenn von zwei gegebenen Kegelschnitten ein Schnittpunkt bekannt ist, die drei letzten Schnittpunkte zu construiren.

Dies ist auch das Problem, auf welches in den beiden oben citirten Preisschriften Stephen Smith und Herr Kortum alle cubischen Aufgaben zurückgeführt haben. Die beiden Aufgaben der Construction der Kernpunkte einer J^2_3 und der drei letzten Schnittpunkte zweier Kegelschnitte sind also äquivalent, sie sind auch leicht auf einander reducirbar.

Wollen wir nun mit Hilfe einer festen Constructionscurve dritter Ordnung unter alleiniger Anwendung des Lineals die cubischen Constructionen ausführen, so haben wir eine dieser beiden eben angegebenen Aufgaben, auf welche alle cubischen Constructionen in letzter Instanz zurückkommen, mit diesen Hilfsmitteln auszuführen. Wir wollen jedoch jede dieser beiden Aufgaben in der angegebenen Weise behandeln, da man bei Constructionen dritten Grades ebenso häufig auf die eine, wie auf die andere dieser Aufgaben geführt wird, und weil die Behandlung dieser beiden Probleme höchst verschieden sich gestaltet und wir in beiden Fällen auf interessante Fragen geführt werden.

Wir denken uns demnach in der Ebene der Zeichnung ein für alle Mal eine Curve dritter Ordnung C hergestellt; wir denken uns dieselbe mit einem Doppelpunkt versehen, was sich für den gedachten Zweck als nothwendig herausstellen wird, im Uebrigen ist jede beliebige rationale Curve dritter Ordnung für unsere Methode verwendbar. In der Regel werden wir C einen Rückkehrpunkt ertheilen, weil dann die Constructionen sich ganz besonders einfach gestalten. Für metrische Constructionen und wegen der sehr einfachen Herstellung empfiehlt es sich, den einen unendlich fernen Punkt mit dem Wendepunkt, die beiden anderen mit den unendlich fernen Kreispunkten zusammenfallen zu lassen, die so entstehende Curve wird die Cissoide des Diocles, deren zeichnerische Herstellung sicher nicht grössere Arbeit verursacht, als die einer allgemeinen Curve zweiter Ordnung, welche bei der Smith-Kortum'schen Methode erforderlich ist.

---

* cf. Le Paige: „Essai de géométrie supérieure du IIIième ordre.“ Mém. de la soc. des scienc. de Liege Sér. II, Tom. 10, p. 85. — Benno Klein: „Theorie der trilinear-symmetrischen Elementargebilde.“ Marburger Habilitationsschrift 1881.

§ 2. Construction der drei letzten Schnittpunkte zweier gegebener Kegelschnitte, von welchen ein Schnittpunkt bekannt ist.

1. Seien K und K' zwei durch eine hinreichende Anzahl von Punkten gegebene Kegelschnitte, und sei einer ihrer Schnittpunkte P bekannt; es sollen die drei letzten Schnittpunkte X, Y, Z von K und K' construirt werden und zwar mit alleiniger Hilfe des Lineals und einer in der Ebene der Zeichnung befindlichen rationalen Curve dritter Ordnung C, der sogenannten Constructionscurve, von der wir annehmen wollen, dass sie einen Rückkehrpunkt R besitze.* Die Construction der drei gesuchten Punkte X, Y, Z wird sich offenbar vollziehen lassen, wenn es gelingt, eine geometrische Verwandtschaft V so zu construiren, dass zu jedem Punkte der entsprechende linear gefunden werden kann, und in welcher dem Kegelschnitt K die feste Curve C, dem Kegelschnitt K' aber eine Gerade G entspricht. Ist nämlich eine solche Verwandtschaft V hergestellt, und denkt man sich die dem Kegelschnitt K' entsprechende Gerade G construirt, so sind die drei Punkte X', Y', Z', welche G aus der Constructionscurve C ausschneidet, die den drei gesuchten Punkten X, Y, Z in Bezug auf V entsprechenden Punkte, und daher X, Y, Z gefunden, wenn man in Bezug auf V zu X', Y', Z' die entsprechenden linear construirt. Die einzige erforderliche cubische Operation besteht darin, mittelst der linear construirten Geraden G die drei Punkte X', Y', Z' aus der festen Constructionscurve C auszuschneiden, und diese wird mit alleiniger Hilfe des Lineals vollzogen, wenn C gezeichnet vorliegt. Die ganze Schwierigkeit besteht demnach in der Auffindung der geometrischen Verwandtschaft V, welche K in C, K' in G überführt, und gleichzeitig linear construirbar sein muss, das heisst zu jedem Punkt den entsprechenden mit alleiniger Hilfe des Lineals aufzufinden gestatten lassen muss. Offenbar wäre es am einfachsten, wenn sich V als eine birationale quadratische Verwandtschaft bestimmen liesse; wir werden dies in der That ausführen, und zwar, indem wir V aus zwei hintereinander angewendeten Verwandtschaften V_2 und V_1 zusammensetzen werden; dabei bedeutet V_2 eine quadratische Verwandtschaft, welche K in eine beliebige Curve dritter Ordnung mit Rückkehrpunkt (C'), K' in eine Gerade (G') überführt, während V_1 eine lineare Verwandtschaft (Collineation) bedeutet, welche C' in die feste Constructionscurve C transformirt, durch V_1 wird dann auch G' wieder in eine Gerade G übergeführt werden, so dass in der That die aus V_2, V_1 zusammengesetzte Verwandtschaft, die wir, wie üblich, symbolisch durch $V_2 \,.\, V_1 = V$ bezeichnen wollen, K in C, K' in G überführt, so dass also V das Gewünschte leistet. Die Verwandtschaft V, welche durch Aufeinanderfolge einer quadratischen Ver-

* Wir denken uns R und ebenso die Tangente in R bekannt, ebenso den dann linear construirbaren Wendepunkt W und seine Tangente.

wandtschaft V_2 und einer linearen V_1 entsteht, ist wieder eine quadratische Verwandtschaft.

2. Lineare Construction der quadratischen Verwandtschaft V_2. Es soll V_2 linear so hergestellt werden, dass der Kegelschnitt K in eine beliebige Curve dritter Ordnung mit Rückkehrpunkt (C'), der Kegelschnitt K' in eine Gerade (G') übergeführt wird. Damit K in eine Curve dritter Ordnung übergehe, muss einer der drei Hauptpunkte der quadratischen Verwandtschaft V_2 sich auf K befinden, damit K' in eine Gerade übergehe, müssen alle drei Hauptpunkte von V_2, welche sich in der Ebene von K, K' befinden, auf K' liegen, daher ist einer dieser drei Hauptpunkte gleichzeitig auf K und K' gelegen; nun ist uns der eine Schnittpunkt P von K und K' bekannt, in ihn verlegen wir somit einen Hauptpunkt von V_2; die beiden anderen Hauptpunkte N und O sind auf K' zu wählen; nimmt man sie daselbst beliebig an, so trifft ihre gerade Verbindungslinie $\overline{NO}$ den Kegelschnitt K in zwei getrennten Punkten M_1, M_2, welchen in Bezug auf V_2 derselbe Punkt P' entspricht, da allen Punkten der Hauptlinie $\overline{NO}$ in Bezug auf V_2 ein und derselbe Hauptpunkt P' des anderen Punktfeldes entspricht; dieser Punkt P' wird somit Doppelpunkt der Curve dritter Ordnung C', in welche der Kegelschnitt K mittelst V_2 transformirt wird. Den beiden Geraden $\overline{PM_1}$ und $\overline{PM_2}$ entsprechen in Bezug auf V_2 die beiden Tangenten im Doppelpunkt P' von C'. Der Doppelpunkt P' von C' wird somit dann und nur dann ein Rückkehrpunkt sein, wie es die Aufgabe erfordert, wenn PM_1 und PM_2, das heisst M_1 und M_2 zusammenfallen, das heisst, wenn die dem Hauptpunkt P gegenüberliegende Hauptlinie den Kegelschnitt K berührt; ist $M_1 = M_2 = M$ der Berührungspunkt, dann ist die der Geraden $\overline{PM}$ in Bezug auf V_2 entpsrechende Gerade die Rückkehrtangente von C'. Wir haben also in der Ebene von K und K' das Hauptdreieck von V_2 so zu wählen, dass der bekannte Schnittpunkt P von K und K' ein Hauptpunkt wird, die diesem gegenüberliegende Hauptlinie $\overline{NO}$ den Kegelschnitt K berührt. Wählen wir daher eine beliebige Tangente von K aus, deren Berührungspunkt M sei, und welche K in N, O schneidet, so ist N, O, P das in der Ebene von K und K' befindliche Hauptdreieck von V_2; andere Voraussetzungen, als diese Wahl des Hauptdreiecks, brauchen wir für V_2 nicht zu machen; jede V_2, welche ein so gewähltes Hauptdreieck besitzt, wird K in eine Curve dritter Ordnung mit Rückkehrpunkt, K' in eine Gerade transformiren. Wir dürfen daher V_2 noch sehr speciell wählen, z. B. als eine Steiner'sche Verwandtschaft*, welche NOP als Fundamentaldreieck besitzt, und in welcher sich je zwei Punkte, welche in Bezug auf ein Kegelschnittbüschel conjugirt sind, entsprechen; das Fundamentaldreieck NOP ist das gemeinsame Poldreieck der Kegelschnitte des Büschels,

* cf. Steiner-Schröter: „Die Kegelschnitte" etc. 2. Auflage. Leipzig 1876. S. 301, 302.

wir dürfen noch einen der vier gemeinsamen Punkte des Büschels willkürlich wählen, dann erst ist das Büschel und damit die Verwandtschaft V_2 vollkommen bestimmt und in einfacher Weise linear construirbar. Es könnte scheinen, als ob zur Herstellung dieser Verwandtschaft eine quadratische Construction erforderlich wäre, indem nämlich die beiden Fundamentalpunkte N und O von der in dem beliebigen Punkte M von K construirten Tangente aus K' ausgeschnitten werden; die Construction von N und O würde in der That eine quadratische Operation erfordern, jedoch sind N und O gar nicht selbst herzustellen nöthig, es genügt zur linearen Construction von V_2, wie eine leichte Ueberlegung ergiebt, vollständig, wenn man die Involution kennt, deren Doppelpunkte N und O sind; diese Involution jedoch ist linear construirbar. Ist V_2 in der angegebenen Weise hergestellt, so construiren wir die Gerade G', welche dem Kegelschnitt K entspricht, sowie die Curve dritter Ordnung C', in welche K transformirt wird, der Rückkehrpunkt R' von C' ist unmittelbar gegeben,* die Rückkehrtangente ist die Gerade, welche der Geraden PM entspricht, wo M der Berührungspunkt der Fundamentallinie NO war; von C' können wir uns eine hinreichende Anzahl von Punkten mittelst der Transformation V_2 verschaffen, und können dann auch den Wendepunkt W' von C' und seine Tangente linear construiren.

3. Herstellung der linearen Verwandtschaft V_1. Es bleibt jetzt nur noch übrig, die lineare Verwandtschaft V_1 (Collineation), welche C' in die ein für alle Mal gezeichnete Constructionscurve C überführt, herzustellen. Durch jede Collineation wird C' wieder in eine Curve dritter Ordnung C'' mit Rückkehrpunkt übergeführt, und zwar entsprechen dem Rückkehrpunkt und Wendepunkt von C' der Rückkehrpunkt und Wendepunkt von C'', ebenso entsprechen der Rückkehr- und Wendetangente von C' Rückkehr- und Wendetangente von C''. Damit nun C' in die feste Constructionscurve C übergehe, haben wir die lineare Verwandtschaft V_1 so zu wählen, dass in ihr entspricht der Rückkehrpunkt R' von C' dem Rückkehrpunkt R von C, der Wendepunkt W' von C' dem Wendepunkt W von C, und dass ferner der Schnittpunkt von Rückkehr- und Wendetangente in beiden Curven einander entsprechen, so dass in Bezug auf V_1 die beiden Dreiecke, deren Ecken von Rückkehrpunkt, Wendepunkt und Schnittpunkt von Rückkehr- und Wendetangente gebildet werden, einander entsprechen. Lässt man noch einen beliebigen Punkt Q' von C' einem beliebigen Punkte Q von C entsprechen, so sind vier Paare entsprechender Punkte von V_1 bekannt, und damit V_1 eindeutig bestimmt und linear construirbar.** In der That leistet die gefundene Collineation V_1 das Gewünschte, dass sie nämlich C' in C überführt, denn die in Bezug auf V_1 der Curve C' ent-

* Bei Verwendung obiger Steiner'scher Verwandtschaft ist es der Punkt P.

** cf. Reye: „Geometrie der Lage", II. Theil, erster Vortrag.

sprechende Curve ist von der dritten Ordnung, besitzt einen Rückkehrpunkt und hat mit C das vom Rückkehrpunkt, Wendepunkt und Schnittpunkt von Rückkehrtangente und Wendetangente gebildete Dreieck gemeinsam, ausserdem aber noch den Punkt Q. Zwei Curven dritter Ordnung und dritter Klasse, welche in Bezug auf Rückkehrpunkt, Wendepunkt, Rückkehrtangente und Wendetangente und noch einen weiteren Punkt übereinstimmen, sind identisch;* also ist C die der Curve C' in Bezug auf V_1 entsprechende Curve. Die Gerade G' wird durch V_1 wieder in eine Gerade G übergeführt. Die Verwandtschaft V_1 leistet also das Gewünschte und ist linear construirbar.

4. Die aus V_2 und V_1 zusammengesetzte Verwandtschaft $V_2 V_1 = V$. Denken wir nun die beiden Verwandtschaften V_2 und V_1 nach einander angewendet, indem wir zu einem Punkte S zunächst in Bezug auf V_2 den entsprechenden S', sodann zu S' den ihm in Bezug auf V_1 entsprechenden S'' construiren, die Punktepaare S, S'' bilden dann Paare entsprechender Punkte in Bezug auf eine quadratische Verwandtschaft, welche wir die aus V_2 und V_1 zusammengesetzte Verwandtschaft nennen und durch $V_2 . V_1 = V$ bezeichnen. Die quadratische Verwandtschaft V ist linear construirbar, da V_2 und V_1 es sind, in ihr entspricht dem Kegelschnitt K die feste Constructionscurve C, dem Kegelschnitt K' die Gerade G, welche linear construirbar ist, und den drei letzten, gesuchten Schnittpunkten X, Y, Z von K und K' die drei Punkte, welche G aus C ausschneidet. Schneiden wir nun G mit der Constructionscurve C in den drei Punkten X', Y', Z' — dies ist die einzige erforderliche cubische Operation — und construiren wir diejenigen drei Punkte X, Y, Z, welchen in Bezug auf V resp. X', Y', Z' entsprechen, so sind die so construirten Punkte X, Y, Z die drei gesuchten letzten Schnittpunkte von K und K', sie sind also mit alleiniger Hilfe des Lineals und der festen Constructionscurve C construirt worden. — Da nun jede cubische Construction auf die Construction der drei letzten Schnittpunkte zweier gegebenen Kegelschnitte zurückkam, so lassen sich alle cubischen Aufgaben mit alleiniger Hilfe des Lineals und einer festen Constructionscurve dritter Ordnung ausführen.

§ 3. Die cubischen Involutionen zweiter Stufe auf der rationalen Curve dritter Ordnung.

1. Obwohl wir im vorigen Paragraphen vollständig den Nachweis geführt haben, dass sich die cubischen Constructionen mit den von uns vor-

* Denn macht man das mehrfach genannte Dreieck zum Coordinatendreieck, so dass der Rückkehrpunkt die Coordinaten $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, der Wendepunkt die Coordinaten $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, der Schnittpunkt von Rückkehrtangente und Wendetangente die Coordinaten $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ hat, und wählt Q als Einheitspunkt, so haben beide Curven die Gleichung $x_2^3 - x_1^2 x_3 = 0$ (cf. Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie I, S. 591), sind also identisch.

geschlagenen constructiven Hilfsmitteln ausführen lassen, so wollen wir in den folgenden Betrachtungen doch noch zeigen, wie die Grundaufgabe, auf welche wir zunächst die cubischen Aufgaben zurückführten, nämlich die Construction der Kernpunkte einer cubischen Involution zweiter Stufe, sich mit der Constructionscurve C und dem Lineal allein erledigen lässt. Wir fügen diesen Nachweis hinzu, weil es auch bei mathematischen Betrachtungen sicher von Vortheil ist, denselben Gegenstand von verschiedenen Seiten zu betrachten, sodann aber, weil die auf diesem Wege erlangten Constructionen einfacher und kürzer sich gestalten, weil ferner sehr viele cubische Aufgaben sich direct auf die Construction jener Kernpunkte zurückführen, und weil schliesslich die dabei zu erlangenden Resultate an sich nicht ohne Interesse sind. Zu diesem Zwecke wird es erforderlich sein, die cubischen Involutionen zweiter Stufe auf der rationalen Curve dritter Ordnung näher zu studiren. Wir verstehen nach Emil Weyr* unter einer cubischen Involution zweiter Stufe eine derartige Beziehung zwischen den Elementen eines rationalen Trägers, dass durch zwei Elemente x_1, x_2 ein drittes x_3 eindeutig bestimmt ist, so zwar, dass zwischen drei in dieser Art zusammengehörigen Elementen x_1, x_2, x_3 vollständige Vertauschungsfähigkeit herrscht. Wir bezeichnen eine solche Involution durch das Zeichen $J^2{}_3$ und nennen drei in Bezug auf $J^2{}_3$ in der gekennzeichneten Art zusammengehörige Elemente „ein Tripel von $J^2{}_3$“, so dass wir eine $J^2{}_3$ auch definiren können als eine zweifache Mannigfaltigkeit von Elemententripeln, von denen jedes durch irgend zwei seiner Elemente eindeutig bestimmt ist. Analytisch wird die $J^2{}_3$ dargestellt durch eine trilinear-symmetrische Gleichung von der Form:

$$a_0 + a_1 (\lambda + \mu + \nu) + a_2 (\lambda\mu + \mu\nu + \nu\lambda) + a_3 \lambda\mu\nu = 0;^{**}$$

wie man aus dieser analytischen Darstellung sieht, existiren drei Tripel, deren drei Elemente in einem einzigen sich vereinigen, sie werden erhalten aus der cubischen Gleichung:

$$a_0 + 3a_1\lambda + 3a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 = 0,$$

welche resultirt, wenn man $\lambda = \mu = \nu$ setzt. Diese drei Elemente, in deren jedem ein Tripel von $J^2{}_3$ vereinigt ist, bezeichneten wir als die Kernelemente der $J^3{}_2$ und sahen, dass jede cubische Construction schliesslich auf die Construction der drei Kernelemente einer $J^2{}_3$ zurückkam. Wir wollen zeigen, wie sich diese drei Kernelemente mittelst unserer Constructionscurve C und dem Lineal allein auffinden lassen. Dazu wird

* cf. Weyr: „Ueber Involutionen n^{ten} Grades k^{ter} Stufe“; Sitzungsberichte der Wiener Akademie 1879, Bd. 79, II.

** cf. Benno Klein: „Theorie der trilinear-symmetrischen Elementargebilde“, Marburger Habilitationsschrift 1881. — Ferner: Le Paige: „Essais sur la géométrie supérieure du troisième ordre“; mém. de la soc. des sciences à Liège, II. Sér., Tom. 10.

es erforderlich sein, die auf der rationalen Curve C selbst befindlichen J^2_3 etwas näher zu studiren.

2. Die auf C befindliche fundamentale J^2_3. Wir setzen C zunächst als eine allgemeine rationale Curve dritter Ordnung voraus, deren Doppelpunkt D zwei getrennte Tangenten besitzt. Jede Gerade G schneidet C in einem Punkttripel, welches wir als ein „gerades Tripel" bezeichnen wollen. Die Gesammtheit der geraden Tripel bildet eine J^2_3, denn durch zwei seiner Punkte ist ein gerades Tripel eindeutig bestimmt; diese J^2_3 ist für die Geometrie auf der rationalen Curve dritter Ordnung von grundlegendster Bedeutung, wir nennen deshalb diese J^2_3 die fundamentale Tripelinvolution von C und geben ihr das Zeichen J. Die Eigenschaften der allgemeinen J^2_3 auf J angewendet ergeben die wesentlichsten Theile der Geometrie auf der rationalen ebenen Curve dritter Ordnung.* Die drei Kernpunkte von J sind die drei Wendepunkte von C, sie liegen in einer Geraden, weil das Kernpunkttripel einer J^2_3 der J^2_3 angehört.** Das neutrale Punktepaar,*** welches gebildet wird von den beiden Punkten, welche mit jedem anderen Punkte des Trägers ein Tripel eines J^2_3 bilden, wird für die fundamentale Involution gebildet J von den beiden im Doppelpunkt vereinigten Punkten; es sei mit D, D bezeichnet. Unter den Punktepaaren, welche einen Punkt P von C zu einem Tripel von J ergänzen, und welche von den Strahlen durch P aus C ausgeschnitten werden, giebt es zwei†, welche in je einem Punkt vereinigt sind, nämlich in jedem der beiden Berührungspunkte P', P'' der von P an C gehenden Tangenten, die Paare P', P'' bilden eine quadratische Involution, deren Doppelpunktpaar das neutrale Paar D, D ist. — Wird der Doppelpunkt D ein Rückkehrpunkt, so ändert sich die Natur der fundamentalen Involution J; denn alsdann fallen zwei der Wendepunkte mit D zusammen, so dass J zwei in D zusammenfallende und nur einen einfachen Kernpunkt besitzt, welcher in dem einen nur noch vorhandenen Wendepunkt sich befindet. Die Punktepaare, welche einen beliebigen Punkt von C zu einem Tripel von J ergänzen, bilden eine Involution, für welche ein Doppelpunkt in D sich befindet, während der andere der Berührungspunkt P' der einzigen von P an C gehenden Tangente ist. Das neutrale Paar besteht jetzt ebenfalls nur aus einem einzigen, doppelt zählenden Punkte, dem Rückkehrpunkt.

3. Die Darstellung der allgemeinen J^2_3 auf C. Ausser der fundamentalen Involution J sind auf C noch andere J^2_3 in dreifacher

* cf. Emil Weyr: „Ueber die Abbildung der ebenen rationalen Curve dritter Ordnung auf einem Kegelschnitt"; Sitzungsberichte der Wiener Akademie Bd. 79, II.

** cf. Le Paige, l. c. p. 52.

*** cf. Emil Weyr: „Ueber Involutionen n^{ter} Ordnung, k^{ter} Stufe"; Sitzungsberichte der Wiener Akademie Bd. 79, II.

† cf. Benno Klein, l. c. § 15, 16.

Mannigfaltigkeit vorhanden; irgend drei Punkte von C kann man willkürlich auswählen, sie bestimmen eindeutig eine J^2_3, welche diese drei Punkte zu Kernpunkten hat, und umgekehrt gehört jede J^2_3 einem solchen Punkttripel, ihrem Kernpunkttripel, zu; die fundamentale J^2_3 ist dadurch charakterisirt, dass ihr Kernpunkttripel von den Wendepunkten gebildet wird. Wir wollen nunmehr die von J verschiedenen J^2_3 auf C untersuchen, und zunächst eine gemeinsame Erzeugung derselben betrachten. Der grösseren Einfachheit wegen setzen wir voraus, dass der Doppelpunkt D ein Rückkehrpunkt sei. Ist N ein beliebiger Punkt von C, und M ein beliebiger Punkt der Ebene, ausserhalb C, dann schneidet jeder Kegelschnitt K durch die drei Punkte D, N, M die Curve C — ausser in D und N — noch in drei weiteren Punkten P_1, P_2, P_3; alle so entstehenden Punkttripel bilden eine zweifache Mannigfaltigkeit, jedes Tripel ist durch zwei seiner Punkte eindeutig bestimmt, so dass (cf. § 3, 1) die Gesammtheit dieser ∞^2 Tripel eine J^2_3 constituiren. Zwei Punkte P_1, P_2 von C werden durch denjenigen i. A. eindeutig bestimmten Punkt P_3 zu einem Tripel ergänzt, in welchem der Kegelschnitt durch D, N, M, P_1, P_2 die Curve C noch schneidet. Sind N_1, N_2 die beiden Punkte, in welchen die Gerade NM die Curve C, abgesehen von N, noch schneidet, so bildet jeder beliebige Punkt von C mit N_1, N_2 ein Tripel der J^2_3, da durch die fünf Punkte D, N, M, N_1, N_2 mehr als ein Kegelschnitt gelegt werden kann; jede Gerade durch D bildet nämlich mit der Geraden NM einen solchen, so dass in der That die obige Construction des Punktes, welcher zwei Punkte von C zu einem Tripel der J^2_3 ergänzt, angewendet auf die beiden Punkte N_1, N_2 ihre Eindeutigkeit einbüsst und jeden beliebigen Punkt von C dem Punktepaar N_1, N_2 zuordnet. Mithin sind (cf. § 3, 2) N_1, N_2 die beiden neutralen Punkte von J^2_3.

Also gilt: Die ∞^2 Kegelschnitte durch den Rückkehrpunkt D, einen beliebigen Punkt N der Curve und einen beliebigen Punkt M der Ebene schneiden die Constructionscurve C noch in ∞^2 Punkttripeln, welche eine J^2_3 bilden, für welche die beiden Punkte N_1, N_2, welche die Gerade MN noch aus C ausschneidet, das neutrale Paar darstellen.

Auf diesem einfachen Wege kann man somit eine unbegrenzte Menge von J^2_3 auf C erhalten, jedem Punktepaar N, M, wo N auf C gelegen ist, entspricht eine J^2_3, im Ganzen erhält man daher eine dreifache Mannigfaltigkeit solcher J^2_3. Andererseits lässt sich jede beliebige J^2_3 auf diesem Wege herstellen; denn ist N_1, N_2 das Paar der neutralen Elemente, und N der dritte Schnittpunkt der Geraden $\overline{N_1, N_2}$ mit C, ist ferner P_1, P_2, P_3 irgend ein Tripel der betrachteten J^2_3, so schneidet der eindeutig bestimmte Kegelschnitt durch D, N, P_1, P_2, P_3 die Gerade $\overline{N_1 N_2}$, abgesehen von N, noch in einem zweiten Punkte M. Die ∞^2 Kegelschnitte durch D, N, M schneiden nach dem Vorigen aus C die Tripel einer J^2_3 aus, welche mit der betrachteten J^2_3 das neutrale Paar N_1, N_2, sowie das Tripel P_1, P_2, P_3 gemein hat, also mit ihr identisch ist.* Demnach kann man jede J^2_3 auf C in der angegebenen Weise erzeugen, indem man nämlich die Tripel von J^2_3 aus C ausschneiden lässt durch die ∞^2 Kegelschnitte, welche durch D, einen Punkt N von C und einen Punkt M der Ebene hindurchgehen. Die Punkte N und M sind für jede J^2_3 eindeutig bestimmbar, so dass jeder J^2_3 ein solches Dreieck DNM zugehört, während andererseits auch jedem derartigen Dreieck eine J^2_3 zugeordnet ist. Wir bezeichnen das Dreieck DMN als das charakteristische Dreieck der J^2_3.

4. Construction des für J^2_3 charakteristischen Dreiecks. Ist von einer J^2_3 das neutrale Paar N_1, N_2 gegeben, und ausserdem ein Tripel, so ist, wie die Betrachtungen im vorigen Artikel lehren, das charakteristische Dreieck unmittelbar construirt. Aber auch in dem Falle, wo N_1, N_2 nicht bekannt sind und J^2_3 etwa durch drei seiner Tripel P_1, P_2, P_3; Q_1, Q_2, Q_3; R_1, R_2, R_3 gegeben ist, lässt sich das Dreieck DMN linear construiren. Denn in diesem Falle kann man die Involution, welche das neutrale Paar N_1, N_2 zum Doppelpunktpaar besitzt, linear auffinden.** Die Strahlen durch N ferner schneiden aus C Punktepaare einer quadratischen Involution aus,*** von welcher der Rückkehrpunkt D und der Berührungspunkt N' der von N ausgehenden Tangente die Doppelpunkte sind. Das neutrale Paar N_1, N_2 gehört dieser Involution an; mithin wird D, N' durch N_1, N_2 harmonisch getrennt und mithin ist in Bezug auf die bekannte quadratische Involution, welche N_1, N_2 zu Doppelpunkten hat, N' der dem Rückkehrpunkt D entsprechende Punkt. Dadurch wird N' linear construirbar, und ebenso sein Tangentialpunkt N. Die Punktepaare auf C, welche mit N in gerader Linie liegen, werden durch denjenigen Punkt O von C zu einem Tripel von J^2_3 ergänzt, in welchem die dem Punkte N gegenüberliegende Seite DM des für J^2_3 charakteristischen Dreiecks die Curve C schneidet. Da man nun, wenn die J^2_3 durch eine hinreichende Anzahl von Bestimmungsstücken — etwa durch drei Tripel — gegeben ist, zu jedem Punktepaar linear den Punkt construiren kann†, welcher das Punktepaar zu einem Tripel von J^2_3 ergänzt, so wird der Punkt O linear construirbar; dann ergiebt sich der dritte Eckpunkt M des gesuchten Dreiecks als Schnittpunkt von DO mit

* cf. B. Klein, l. c. p. 42; Le Paige, l. c. p. 80.

** cf. B. Klein, l. c. p. 50.

*** cf. E. Weyr: „Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde“; Leipzig 1869, S. 100 flg.

† cf. B. Klein, l. c. § 19.

dem Kegelschnitt, welcher D, N mit einem Tripel P_1, P_2, P_3 von J^2_3 verbindet.

5. Die geraden Tripel einer auf C befindlichen J^2_3. Ist DNM das zu einer gegebenen J^2_3 gehörige charakteristische Dreieck, so schneidet jeder diesem Dreieck DNM umschriebene Kegelschnitt ein Tripel von J^2_3 aus. Unter diesen Kegelschnitten giebt es eine einfache Mannigfaltigkeit von Kegelschnitten, welche in Geradenpaare degenerirt sind, die von diesen ausgeschnittenen Tripel von J^2_3 sind von besonderer Wichtigkeit. Die in Geradenpaare zerfallenden Kegelschnitte werden gebildet von den Geradenpaaren, welche bestehen aus einer Seite des Dreiecks DMN und einer Geraden durch die Gegenecke dieser Seite. Somit erhalten wir, den drei Seiten entsprechend, drei Büschel solcher Geradenpaare. Betrachten wir erstens die zerfallenden Kegelschnitte, welche aus der Seite MN und einer Geraden durch den Doppelpunkt D bestehen, so werden die von diesen aus C ausgeschnittenen Punkttripel gebildet durch das neutrale Paar N_1, N_2 und einen beliebigen Punkt von C, wie wir schon (§ 3, 3) erkannten. — Die Geradenpaare zweitens, welche von der Geraden DM und einer Geraden durch N gebildet werden, schneiden aus C Tripel aus, welche bestehen aus dem Punkt O, in welchem DM die Curve C nochmals schneidet, und einem mit N in gerader Linie befindlichen Punktepaar; diese Punktepaare, welche die Strahlen durch N aus C noch ausschneiden, bilden daher die zu O in Bezug auf J^2_3 gehörige quadratische Involution der Punktepaare, welche O zu einem Tripel ergänzen. — Drittens betrachten wir diejenigen zerfallenden Kegelschnitte, welche gebildet werden von der Seite DN und den Geraden durch M, welche aus C (abgesehen von D und N) drei Punkte einer durch M gehenden Geraden ausschneiden; diese Tripel sind demnach die der J^2_3 angehörigen geraden Tripel oder die der J^2_3 mit der fundamentalen Involution J gemeinsamen Tripel; andererseits geht offenbar jedes zu J^2_3 gehörige gerade Tripel durch M, so dass sich ergiebt: Ist auf einer rationalen Curve dritter Ordnung eine J^2_3 gegeben, so befinden sich die in J^2_3 enthaltenen geraden Tripel auf den Strahlen eines Strahlenbüschels, dessen Scheitel diejenige Ecke des charakteristischen Dreiecks ist, welche sich nicht auf der Curve befindet. Daraus ergiebt sich weiter der für das Folgende wichtige Satz:

Sind auf einer ebenen rationalen Curve dritter Ordnung zwei J^2_3: J', J'' gegeben, so wird das ihnen gemeinsame gerade Tripel ausgeschnitten von der Verbindungslinie derjenigen beiden Ecken der zu J', J'' gehörigen charakteristischen Dreiecke, welche sich nicht auf der Curve befinden. Oder:

Zwei auf einer ebenen rationalen Curve dritter Ordnung befindliche J^2_3: J', J'' und die fundamentale Involution J

haben ein gemeinsames Tripel*, welches sich befindet auf der Verbindungslinie der beiden nicht auf C befindlichen Ecken der zu J', J'' gehörigen charakteristischen Dreiecke.

6. Die geradkernigen J^2_3. Unser Endziel ist, zu zeigen, dass sich die drei Kernpunkte einer auf C befindlichen J^2_3 durch das Lineal allein aus C ausschneiden lassen, das wird jedoch nur dann der Fall sein können, wenn diese drei Kernpunkte in einer Geraden liegen; bei einer allgemeinen J^2_3 wird das nicht stattfinden, da drei, nicht in einer Geraden befindliche, beliebige Punkte von C als Kernpunkte einer J^2_3 gewählt werden können. Die J^2_3 auf C, deren Kernpunkte auf einer Geraden liegen, bilden also eine besondere Klasse von J^2_3, welche wir als „die geradkernigen J^2_3" bezeichnen wollen. Wir wollen die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen aufsuchen dafür, dass eine J^2_3 geradkernig sei. Wenn J^2_3 geradkernig ist, so ist das Kerntripel ein gerades Tripel, also der von den geraden Tripeln gebildeten fundamentalen Involution J angehörig. Nun gilt aber der wichtige Satz: „Sind P_1, P_2, P_3; Q_1, Q_2, Q_3 zwei beliebige Punkttripel eines rationalen Trägers, und gehört Q_1, Q_2, Q_3 derjenigen J^2_3 an, welche P_1, P_2, P_3 zu Kernpunkten hat, so gehört umgekehrt auch P_1, P_2, P_3 derjenigen J^2_3 an, welche Q_1, Q_2, Q_3 zu Kernpunkten hat.** Oder mit anderen Worten: Gehört ein Punkttripel einer J^2_3 an, so gehören ihre Kernpunkte derjenigen J^2_3 an, welche jenes Tripel zu Kernpunkten hat. Da nun das Kerntripel jeder geradkernigen J^2_3 der fundamentalen Involution J angehört, so gehört das Kerntripel von J jeder geradkernigen J^2_3 an, und umgekehrt ist stets in diesem Falle J^2_3 geradkernig. Also ergiebt sich: Damit eine J^2_3 auf C geradkernig sei, ist nothwendig und hinreichend, dass das Kerntripel der von den geraden Tripeln gebildeten fundamentalen Involution J der J^2_3 angehört. Das Kerntripel von J wurde aber, im Falle die Tangenten des Doppelpunktes D von C getrennt verliefen, von den drei Wendepunkten von C gebildet (cf. § 3, 2), im Falle die Tangenten von D sich vereinigen, D also ein Rückkehrpunkt wird, so vereinigen sich zwei Punkte dieses Kerntripels in D, der dritte lag in dem einen in diesem Falle vorhandenen Wendepunkt. Somit ergiebt sich: Eine auf einer rationalen Curve dritter Ordnung be-

* cf. Le Paige, l. c. p. 68.

** cf. Benno Klein: „Theorie der Elemententripel eines einstufigen Grundgebildes"; Annali di matematica Serie II, T. 18. Analytisch ergiebt sich der Satz unmittelbar aus der Thatsache, dass für die beiden cubischen Formen, welche resp. P_1, P_2, P_3 und Q_1, Q_2, Q_3 repräsentiren, die lineare simultane Invariante verschwindet, dieselben „conjugirt" sind, und diese Beziehnung eine reciproke ist.

findliche J^2_3 ist dann und nur dann geradkernig, wenn das Tripel der drei Wendepunkte der J^2_3 angehört; besitzt die Curve einen Rückkehrpunkt, so ist J^2_3 dann und nur dann geradkernig, wenn zwei in Rückkehrpunkt vereinigte Punkte und der Wendepunkt ein Tripel von J^2_3 bilden. Es bilden somit die geradkernigen J^2_3 auf C ein J^2_3-System, *welches ein gemeinsames Tripel besitzt*, ein J^2_3-Netz. Eine geradkernige J^2_3 ist daher durch zwei Tripel eindeutig bestimmt.

7. Construction der Kernpunkte einer geradkernigen J^2_3 mittelst des Lineals und der festen Constructionscurve C. Sei eine geradkernige J^2_3 auf C durch zwei ihrer Tripel P_1, P_2, P_3 und Q_1, Q_2, Q_3 gegeben; wir wollen die Gerade linear construiren, auf welcher sich die drei Kernpunkte befinden; diese Gerade schneidet dann aus der festen Constructionscurve C die drei gesuchten Kernpunkte aus. Da das Tripel P_1, P_2, P_3 der vorgelegten J^2_3 angehört, so wird das Kernpunkttripel von J^2_3 nach dem (§ 3, 6) citirten Satze derjenigen J^2_3 angehören, welche P_1, P_2, P_3 zu Kernpunkten hat; dasselbe wird aber auch aus demselben Grunde derjenigen J^2_3 angehören, welche Q_1, Q_2, Q_3 zu Kernpunkten hat; schliesslich aber gehört es, als gerades Tripel, der fundamentalen Involution J an; demnach ergiebt sich: Das Kerntripel einer geradkernigen J^2_3, welcher die Tripel P_1, P_2, P_3 und Q_1, Q_2, Q_3 angehören, ist das gemeinsame Tripel derjenigen beiden J^2_3, welche P_1, P_2, P_3 resp. Q_1, Q_2, Q_3 zu Kernpunkten haben, und der fundamentalen Involution J der geraden Tripel. Durch ihre Kernpunkte P_1, P_2, P_3 resp. Q_1, Q_2, Q_3 sind diese beiden J^2_3 eindeutig bestimmt; wir haben aber (§ 3, 5) gezeigt, dass das gemeinsame Tripel zweier J^2_3 und der fundamentalen Involution J sich befindet auf der linear construirbaren Verbindungslinie der beiden nicht auf C befindlichen Ecken der zu den beiden J^2_3 gehörigen charakteristischen Dreiecke. Damit ist aber gezeigt, wie man die Gerade construirt, welche die Kernpunkte der durch die beiden Tripel P_1, P_2, P_3; Q_1, Q_2, Q_3 bestimmten geradkernigen J^2_3 enthält. Man hat nur nach § 3, 4 die beiden charakteristischen Dreiecke zu construiren für diejenigen beiden J^2_3, welche P_1, P_2, P_3 resp. Q_1, Q_2, Q_3 zu Kernpunkten haben, die Verbindungslinie der beiden nicht auf C befindlichen Ecken ist die gesuchte Gerade.

8. Construction der Kernpunkte einer allgemeinen, auf irgend einem rationalen Träger befindlichen J^2_3 mittels der Constructionscurve C und alleiniger Zuhilfenahme des Lineals. Ist nun auf irgend einer rationalen Curve R eine J^2_3 durch eine hinreichende Anzahl von Bestimmungsstücken, etwa durch drei ihrer Tripel $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$; $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_3$; $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3$ gegeben, so können wir die Construction ihrer Kernpunkte stets auf die im Vorigen gelöste Aufgabe der

Construction der drei Kernpunkte einer auf C befindlichen geradkernigen J^2_3 zurückführen. Denken wir nämlich die rationale Curve R auf die Constructionscurve C projectiv bezogen dadurch, dass wir sie projectiv beziehen auf den Strahlenbüschel durch den Doppelpunkt D von C, der seinerseits projectiv auf C bezogen ist, dann wird jedem Punkt von R eindeutig ein Punkt von C entsprechen, und umgekehrt; den Tripeln von J^2_3 werden Tripel auf C entsprechen, die ebenfalls einer J^2_3 angehören. Wir können aber die projective Beziehung von R und C stets so wählen, dass die auf C befindliche, der ursprünglichen J^2_3 auf R entsprechende J^2_3 geradkernig ist, dazu ist nur nöthig (cf. § 3, 6), dass das Kerntripel der fundamentalen J auf C der auf C befindlichen J^2_3 angehört, in welche wir die ursprüngliche J^2_3 transformirt haben. Besitzt also der Doppelpunkt von C getrennte Tangenten, so haben wir die projective Beziehung zwischen den Punkten von R und C so zu wählen, dass einem Tripel der gegebenen J^2_3 das Tripel der Wendepunkte entspricht, was wir erreichen, wenn wir diese Projectivität so wählen, dass z. B. den drei gegebenen Punkten $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$ die drei Wendepunkte von C zugeordnet werden, wodurch diese Projectivität eindeutig festgelegt ist. Besitzt hingegen C einen Rückkehrpunkt, so muss (cf. § 3, 6) dasjenige Tripel, welches aus dem Wendepunkt und zwei im Rückkehrpunkt vereinigten Punkten besteht, der transformirten J^2_3 angehören. In diesem Falle verschaffen wir uns von der gegebenen J^2_3 ein Tripel, bei welchem zwei Punkte vereinigt liegen, was wir sehr einfach dadurch erreichen, dass wir zu $\mathfrak{R}_1$ noch ein zweites — von $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$ verschiedenes — Punktepaar $\mathfrak{R}'_2$, $\mathfrak{R}'_3$ construiren, welches $\mathfrak{R}_1$ zu einem Tripel von J^2_3 ergänzt, was auf linearem Wege möglich ist*; die sämmtlichen Punktepaare der durch $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$; $\mathfrak{R}'_2$, $\mathfrak{R}'_3$ bestimmten quadratischen Involution ergänzen dann $\mathfrak{R}_1$ zu einem Tripel der gegebenen J^2_3, und mithin auch das Punktepaar, welches aus $\mathfrak{R}_1$ und dem ihm in dieser Involution entsprechenden Punkte $\mathfrak{R}'_1$ besteht, so dass also das Tripel $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}'_1$, bei welchem zwei Punkte in $\mathfrak{R}_1$ vereinigt liegen, ein Tripel von J^2_3 bildet.

Beziehen wir nun die Punkte von R projectivisch so auf die Punkte der Constructionscurve, dass $\mathfrak{R}_1$ dem Rückkehrpunkt, $\mathfrak{R}'_1$ dem Wendepunkt entspricht, so wird die gegebene J^2_3 in eine J^2_3 auf C transformirt, für welche der Wendepunkt und zwei im Rückkehrpunkt vereinigte Punkte ein Tripel bilden, welcher somit das Kerntripel der fundamentalen J angehört, so dass diese transformirte J^2_3 (cf. § 3, 6) geradkernig ist. Bezeichnen wir mit K_1, K_2, K_3 die drei Kernpunkte dieser transformirten J^2_3, so haben wir (§ 3, 7) gezeigt, dass man K_1, K_2, K_3 aus C mittelst einer linear construirbaren Geraden ausschneiden

* cf. Le Paige, l. c.

kann, so dass also K_1, K_2, K_3 mit alleiniger Hilfe des Lineals construirt werden, wenn die Curve C als Constructionscurve fest gezeichnet vorliegt. Construiren wir nun in Bezug auf die Projectivität, mittelst deren die Punkte von C auf die Punkte von R bezogen sind, die zu K_1, K_2, K_3 entsprechenden Punkte $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$, was auf linearem Wege möglich ist, so bilden $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ die gesuchten drei Kernpunkte der auf R gegebenen J^2_3. Mithin lassen sich die Kernpunkte jeder auf einer rationalen Curve befindlichen J^2_3 mit den angegebenen Hilfsmitteln construiren, und da wir (§ 1) sahen, dass jede cubische und biquadratische Construction auf die Construction solcher drei Kernpunkte sich zurückführen lässt, so ergiebt sich auch hier, was wir schon § 2, 4 erkannten, dass sich alle Aufgaben dritten und vierten Grades mit alleiniger Hilfe des Lineals ausführen lassen, wenn eine ein für alle Mal gezeichnete rationale Curve dritter Ordnung vorliegt.

§ 4. Metrische Probleme und graphische Auflösung numerischer cubischer Gleichungen.

1. Behandlung metrischer Probleme mittelst der Cissoide als Constructionscurve. Hat man eine metrische cubische Constructionsaufgabe zu behandeln, so ist stets eine Strecke als Masseinheit gegeben, in Bezug auf welche man drei unbekannte Strecken aufzufinden hat; denkt man sich die Masseinheit auf einer Geraden, von einem bestimmten Nullpunkt nach einer bestimmten Richtung aufgetragen, so entspricht jedem Punkt der Geraden eine bestimmte (positive oder negative) im Nullpunkt beginnende Strecke nebst ihrer Masszahl und umgekehrt jeder vom Nullpunkt ausgehenden Strecke eine bestimmte Masszahl und ein bestimmter Punkt. Eine metrische cubische Aufgabe wird dann durch eine numerische cubische Gleichung gegeben:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

und es sind die drei Punkte der Geraden zu construiren, welche den drei Wurzelwerthen dieser Gleichung entsprechen. Bekanntlich lässt sich durch die Substitution: $x = \lambda - \frac{b}{3a}$ die Gleichung auf die sogenannte reducirte Form:

$$a_1 + a_2\lambda + a_3\lambda^3 = 0$$

bringen. Sind die drei Punkte, welche den Wurzeln dieser reducirten cubischen Gleichung entsprechen, gefunden, so lassen sich mittelst der Beziehung $x = \lambda - \frac{b}{3a}$ die der ursprünglichen linear construiren. Wir wollen nun zeigen, wie sich die drei Wurzelpunkte der reducirten Gleichung mit alleiniger Hilfe des Lineals und unserer festen Constructionscurve dritter Ordnung auffinden lassen.

Wir wählen als Constructionscurve eine zunächst beliebige Curve dritter Ordnung mit Rückkehrpunkt, dann ist die Gleichung dieser Curve, wenn wir den Einheitspunkt beliebig auf der Curve annehmen und als Coordinatendreieck das von der Rückkehrtangente, Wendetangente und der Verbindungslinie von Rückkehrpunkt und Wendepunkt gebildete Dreieck wählen:

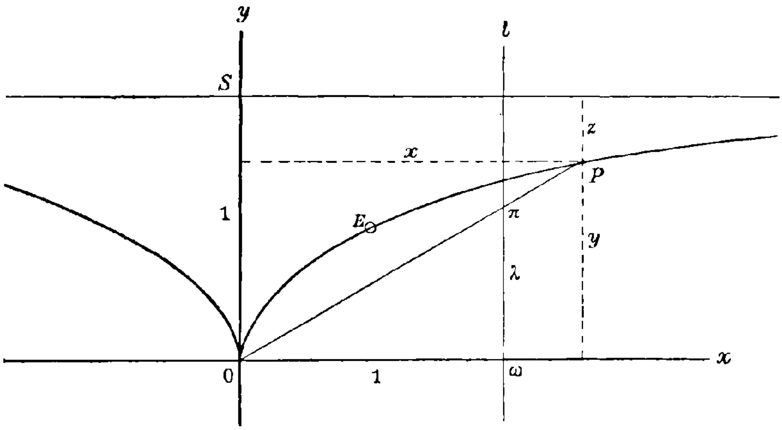
1) $$x^2_1 x_3 - x^3_2 = 0.^*$$

Setzen wir x_1, x_2, x_3 resp. proportional der 0., 1, 3. Potenz einer und derselben Grösse λ, also: $x_1 : x_2 : x_3 = 1 : \lambda : \lambda^3$, so wird die Gleichung 2) identisch für jedes λ erfüllt, so dass wir in:

2) $$\varrho x_1 = 1, \quad \varrho x_2 = \lambda, \quad \varrho x_3 = \lambda^3,$$

wo ϱ einen Proportionalitätsfactor bedeutet, die Parameterdarstellung der Constructionscurve haben. Wir wollen nun die Constructionscurve specialisiren**, indem wir einen ihrer drei unendlich fernen Punkte mit dem Wende-

Fig. 1.



punkt, die beiden anderen mit den beiden unendlich fernen Kreispunkten zusammenfallen lassen, dadurch bekommt einmal die Curve die Rückkehrtangente zur Symmetrieachse, ferner steht die Rückkehrtangente senkrecht auf der Wendetangente und der zu dieser parallelen Verbindungslinie von Rückkehrpunkt und Wendepunkt, und es wird dadurch die absolute Involution linear construirbar, so dass man die metrischen Aufgaben, welche sich auf rechte Winkel beziehen, linear construiren kann in analoger Weise, wie beim Steiner'schen Constructionskreis. Wählen wir noch als Punkt der Curve einen der beiden Punkte, welche von den Seiten des Coordinatendreiecks gleichweit entfernt sind, etwa den Punkt E (Fig. 1), und nehmen

* cf. Clebsch-Lindemann: „Vorlesungen über Geometrie", Bd. I, S. 591

** Die Specialisirung der Constructionscurve geschieht nur, um die praktische Ausführung der Constructionen zu erleichtern, principiell thut jede Curve dritter Ordnung mit Rückkehrpunkt denselben Dienst.

diesen als Einheitspunkt, dann verhalten sich bekanntlich die drei Coordinaten eines Punktes: $x_1 : x_2 : x_3 = x : y : z$,
wo x, y, z die resp. Abstände des Punktes von den drei Seiten $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ des Coordinatendreiecks bedeuten. Die Gleichung unserer Curve lässt sich somit schreiben:

$$x^2 z + y^3 = 0,$$

und da $y + z$ constant gleich dem Abstand OS der Wendetangente von der ihr parallelen Verbindungslinie vom Wendepunkt und Rückkehrpunkt ist, so wird, falls wir OS gleich der Längeneinheit machen, $y + z = 1$, also $z = 1 - y$, und es ist die Gleichung der Curve bezogen auf das rechtwinklige Coordinatensystem, welches den Rückkehrpunkt O zum Coordinatenanfang, die Rückkehrtangente zur y-Achse, die Parallele durch O zur Wendetangente zur x-Achse hat:

$$x^2(1 - y) - y^3 = 0,$$

das ist die Gleichung einer Cissoide.*

Wir wählen mithin als Constructionscurve eine Cissoide, bei welcher der Abstand OS des Rückkehrpunkts von der Wendetangente gleich der Längeneinheit ist (Fig. 1). Diese Wahl hat den Vortheil, dass sich diese Curve besonders einfach herstellen lässt, sowohl punktweise, als auch mittelst eines Mechanismus in einem Zuge*, als auch, weil wir sofort erkennen werden, dass der Parameter der Curvenpunkte eine sehr einfache Interpretation gestattet. Es war nämlich, wenn wir wieder zur homogenen Gleichung 1) $x_1^2 x_3 - x_2^3 = 0$ zurückkehren, die Parameterdarstellung 2):

$$\varrho x_1 = 1, \quad \varrho x_2 = \lambda, \quad \varrho x_3 = \lambda^3;$$

mithin ist

$$\lambda = \frac{x_2}{x_1} = \frac{y}{x}.$$

Ziehen wir nun durch den Punkt ω der positiven x-Achse, für welchen $O\omega = 1$ ist, eine Parallele l zur Rückkehrtangente und projiciren den Cissoidenpunkt P mit den Coordinaten x_1, x_2, x_3 aus dem Rückkehrpunkt O auf l nach π, so ist:

$$\overline{\omega\pi} = \frac{y}{x} = \frac{x_2}{x_1} = \lambda.$$

Mithin ist der Parameter λ eines Punktes P der Cissoide gleich dem Abstand seines Projectionspunktes π von ω. Die Punkte P der Cissoide werden somit eindeutig in ihre Projectionspunkte π auf l abgebildet; dem Punkte π auf l mit dem Abstande λ von ω entspricht der Punkt P auf der Cissoide mit dem Parameter λ.

Es sei nun eine reducirte cubische Gleichung gegeben:

$$a_1 + a_2 \lambda + a_3 \lambda^3 = 0, \tag{3}$$

wir interpretiren λ als den Abstand der Punkte der Geraden l vom Nullpunkte ω aus; es sollen die drei Wurzelpunkte der Gleichung 3) construirt

* cf. Salmon-Fiedler: „Höhere ebene Curven", II. Aufl. Art. 215.

werden. Die drei Punkte auf der Cissoide, in welche die drei gesuchten Punkte aus O projicirt werden, haben als Parameter die drei Wurzeln von 3); betrachten wir nun die Gerade

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$

so schneidet diese die Cissoide in drei Punkten, deren Parameter der Gleichung genügen müssen, die wir erhalten, wenn wir

$$\varrho x_1 = 1, \quad \varrho x_2 = \lambda_1, \quad \varrho x_3 = \lambda^3$$

setzen, das heisst der Gleichung:

$$a_1 + a_2 \lambda + a_3 \lambda^3 = 0,$$

mithin haben die drei Schnittpunkte der Geraden

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

die Wurzeln der reducirten cubischen Gleichung:

$$a_1 + a_2 \lambda + a_3 \lambda^3 = 0$$

zu Parametern, und umgekehrt werden die drei Punkte, deren Parameter die cubische Gleichung $a_1 + a_2 \lambda + a_3 \lambda^3 = 0$ befriedigen, durch die Gerade:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

aus der Curve ausgeschnitten. Den Punkttripeln von l, welche durch eine reducirte cubische Gleichung 3) definirt werden, entsprechen also auf der Cissoide die geraden Tripel und umgekehrt. Um mithin das durch

$$a_1 + a_2 \lambda + a_3 \lambda^3 = 0$$

definirte Punkttripel von l zu construiren, construiren wir die Gerade

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$

was linear möglich ist, wenn die Coefficienten a_1, a_2, a_3 numerisch gegeben sind, bestimmen die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Constructionscurve und projiciren dieselben auf die Gerade l; das so erhaltene Punktetripel ist das gesuchte, welches durch die obige cubische Gleichung dargestellt wird. Somit ergiebt sich, dass man alle metrischen cubischen Probleme in höchst einfacher Weise mit Hilfe unserer Constructionscurve und alleiniger Anwendung des Lineals lösen kann, womit auch gleichzeitig eine graphische Auflösung der cubischen Gleichungen mit den angegebenen Hilfsmitteln gegeben ist. — Wir wollen zum Schluss diese Methode noch auf die beiden schon im Alterthum berühmten cubischen Probleme der Vervielfachung des Würfels und die Trisection des Winkels anwenden.

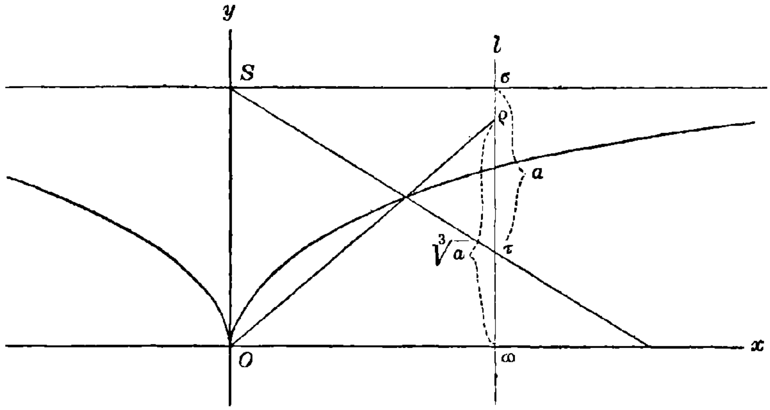
2. Die Vervielfachung des Würfels (Fig. 2). Es soll die Länge λ der Seite eines Würfels gefunden werden, welcher das a-fache eines gegebenen Würfels ist; nehmen wir die Seite des gegebenen Würfels als Längeneinheit, so ist λ durch die cubische Gleichung $\lambda^3 = a$ oder $a - \lambda^3 = 0$ bestimmt, die sich bereits in der reducirten Form befindet; in unserem Falle ist $a_1 = a$, $a_2 = 0$, $a_3 = -1$, und mithin $a x_1 - x_3 = 0$ die Gerade, welche

aus der Cissoide die Punkte ausschneidet, deren Projectionen auf l die gesuchten Punkte sind. Setzen wir an Stelle von x_1, x_2, x_3 die ihnen proportionalen Abstände x, y, z des betreffenden Punktes von den Seiten des Coordinatendreiecks, so ist: $ax - z = 0$, und da $y + z = 1$ ist, so wird:

$$ax + y - 1 = 0$$

die Gleichung der betreffenden Geraden in rechtwinkligen Coordinaten. Diese Gerade enthält den Punkt $x = 0$, $y = 1$, das ist der Punkt S (Fig. 2), sowie den Punkt: $x = 1$, $y = 1 - a$; dieser Punkt τ wird erhalten, wenn man auf l von σ aus nach ω hin $\overline{\sigma\tau} = a$ abträgt. Die Verbindungsgerade $S\tau$ ist die gesuchte; sie trifft die Cissoide in einem Punkte, welcher auf l von O projicirt, den Punkt ϱ liefert, dessen Abstand $\overline{\varrho\omega}$ von ω die gesuchte Strecke ist, $\overline{\varrho\omega} = \sqrt[3]{a}$. Man hat also nur a von σ aus nach ω hin

Fig. 2.



abzutragen, so dass $\overline{\sigma\tau} = a$, dann $S\tau$ mit der Cissoide zu schneiden und den Schnittpunkt aus O auf l nach ϱ zu projiciren; die Strecke $\overline{\omega\varrho} = \sqrt[3]{a}$ ist die gesuchte; der Würfel, welcher diese Strecke zur Seite hat, ist das a-fache des gegebenen Würfels, dessen Seite gleich der Längeneinheit OS ist.

3. Die Trisection des Winkels. Es soll ein gegebener Winkel α in drei gleiche Theile getheilt werden; wir dürfen unbeschadet der Allgemeinheit $0 < \alpha < 90^0$ annehmen, dann wird

$$0 < \frac{\alpha}{3} < 30^0,$$

und es ist $\frac{\alpha}{3}$ bekannt, wenn sein Sinus bekannt ist; dieser Sinus steht aber zum Sinus des ganzen Winkels in der Beziehung:

$$\sin\alpha = 3\sin\frac{\alpha}{3} - 4\sin^3\frac{\alpha}{3}.$$

Setzen wir $\sin\alpha = a$, $\sin\frac{\alpha}{3} = \lambda$, so erhalten wir für λ die cubische Gleichung:

$$a - 3\lambda + 4\lambda^3 = 0.$$

Diese Gleichung hat nicht nur $\lambda = \sin\frac{\alpha}{3}$ zur Wurzel, sondern noch

$$\lambda' = \sin\frac{\alpha + 2\pi}{3}, \quad \lambda'' = \sin\frac{\alpha + 4\pi}{3};$$

die Wurzel $\sin\frac{\alpha}{3} = \lambda$ ist aber — und daran ist sie zu erkennen — die kleinste positive Wurzel obiger Gleichung. Wir wollen die drei Strecken auf der Geraden l construiren, welche von ω um diese Wurzelwerthe entfernt sind; damit ist dann

$$\sin\frac{\alpha}{3}, \quad \sin\frac{\alpha + 2\pi}{3}, \quad \sin\frac{\alpha + 4\pi}{3}$$

gefunden und damit auch die Winkel selbst. Die drei Punkte der Constructionscissoide, welche die drei Wurzeln zu Parametern haben, werden (nach § 4, 1) ausgeschnitten von der Geraden:

$$a x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0,$$

oder, wenn wir statt x_1, x_2, x_3 die diesen Grössen proportionalen senkrechten Abstände x, y, z des betreffenden Punktes von den Seiten des Coordinatendreiecks setzen:

$$ax - 3y + 4z = 0,$$

und da $y + z = 1$ ist, so wird in rechtwinkligen Coordinaten:

$$ax - 7y + 4 = 0$$

die Gleichung der gesuchten Geraden. Diese Gerade lässt sich leicht construiren (indem man z. B. die beiden ihr angehörigen Punkte $x = 0$, $y = \frac{4}{7}$ und $x = -\frac{1}{2a}$, $y = \frac{1}{2}$ construirt). Bringt man diese Gerade mit der Cissoide zum Schnitt, construirt die drei Punkte, in welche diese drei Schnittpunkte aus dem Rückkehrpunkt auf die Gerade l projicirt werden, so sind die Abstände dieser drei Punkte von ω resp.

$$\sin\frac{\alpha}{3}, \quad \sin\frac{\alpha + 2\pi}{3}, \quad \sin\frac{\alpha + 4\pi}{3}$$

und zwar ist $\sin\frac{\alpha}{3}$ die absolut kleinste dieser drei Strecken. Liegt die Strecke $a = \sin\alpha$ gezeichnet vor, so macht die Construction der obigen Geraden und damit von $\sin\frac{\alpha}{3}$ keine Schwierigkeit.

VIII.

Ueber Steiner'sche Kugelketten.

Von

Dr. K. Th. Vahlen

in Berlin.

Im Folgenden soll ein Gegenstand seine Erledigung finden, auf den Steiner durch wiederholt vorgelegte Aufgaben und zu beweisende Lehrsätze die Aufmerksamkeit der Geometer zu lenken suchte.* Diese mehrfachen Aufforderungen hatten meines Wissens nur den Erfolg, dass Clausen die einfachsten dieser Steiner'schen Sätze und auch diese nur vermittelst einer weitläufigen analytischen Methode herleitete, die dem einfachen Gegenstande wenig angemessen erscheint.**

1. Vier Punkte einer Geraden seien mit 0, 1, 2, 3 der Reihe nach so bezeichnet, dass $(01) \geqq (23)$ ist. Wir beschreiben über den Durchmessern $(03) = 2R_2$, $(12) = 2R_1$ in derselben Ebene zwei Kreise mit den Mittelpunkten M_2, M_1, dem Centralabstand $M_2M_1 = A$. In den Ring zwischen diesen beiden Kreisen (M_2) und (M_1) legen wir eine Reihe von Kreisen mit den Mittelpunkten $m, m', m'' \ldots$, und den Radien $r, r', r'' \ldots$, von denen jeder Kreis den vorhergehenden und die beiden gegebenen Kreise (M_2) und (M_1) berührt.

Wir suchen die Bedingung dafür, dass diese Kreiskette sich schliesse, das heisst, dass nach u Umläufen der n^{te} Kreis den ersten berühre. Dass dabei $2u < n$ sein muss, sei gleich hier angemerkt.

Wir bilden, wovon die Möglichkeit leicht einzusehen ist, unsere Figur durch reciproke Radien so ab, dass die beiden gegebenen Kreise (M_1), (M_2)

---

* Théorèmes à démontrer et problèmes à résoudre. Gergonne, Annales de Mathematiques, tome XVIII. Steiner, Werke Bd. I, S. 225—227. — Geometrische Lehrsätze. Crelle's Journal Bd. II, S. 192. Werke Bd. I, S. 135. — Vorgelegte Lehrsätze. Crelle's Journal Bd. II, S. 160. Werke Bd. I, S. 160. — Aufgaben und Lehrsätze, erstere aufzulösen, letztere zu beweisen. Crelle's Journal Bd. II, S. 96. Werke Bd. I, S. 127. — Einige geometrische Betrachtungen. Crelle's Journal Bd. I, S. 256. Werke Bd. I, S. 43. — Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. Aufgaben und Lehrsätze 80 — 84. Werke Bd. I, S. 455 — 458.

** Clausen, Crelle's Journal Bd. VI, S. 88 u. VII, S. 31.

in zwei concentrische übergehen. Für diesen Fall ist die Schliessungsbedingung offenbar:

$$tg^2\frac{u\pi}{n}=\frac{r^2}{R_1R_2}, \text{ das heisst } = \frac{(01)}{(03)}:\frac{(21)}{(23)}.$$

Da bei unserer Abbildung das Doppelverhältniss der vier Punkte 0, 1, 2, 3 unverändert bleibt, so ist die Bedingung allgemein:

$$tg^2\frac{u\pi}{n}=\frac{(01)}{(03)}:\frac{(21)}{(23)}.$$

Sind m_1, m_2 μ_1, μ_2 die Mittelpunkte von Kreisen über den Durchmessern $(23)=2r_1$, $(01)=2r_2$, $(13)=2\varrho_1$, $(02)=2\varrho_2$, so lässt sich die Bedingung in folgende sechs Formen setzen:

$$tg^2\frac{u\pi}{n}=\frac{r_1r_2}{R_1R_2},\quad sec^2\frac{u\pi}{n}=\frac{\varrho_1\varrho_2}{R_1R_2},\quad sin^2\frac{u\pi}{n}=\frac{r_1r_2}{\varrho_1\varrho_2},$$

$$cotg^2\frac{u\pi}{n}=\frac{R_1R_2}{r_1r_2},\quad cosec^2\frac{u\pi}{n}=\frac{\varrho_1\varrho_2}{r_1r_2},\quad cosin^2\frac{u\pi}{n}=\frac{R_1R_2}{\varrho_1\varrho_2}.$$

Berücksichtigt man die Identitäten:

$$\varrho_2-\varrho_1=r_2-r_1=M_2M_1=A,$$
$$R_2+R_1=\varrho_2+\varrho_1=m_2m_1=a,$$
$$r_2+r_1=R_2-R_1=\mu_2\mu_1=\alpha,$$

so lässt sich die Bedingung durch die zwei Radien jedes der drei Kreispaare und den betreffenden Centralabstand ausdrücken; z. B. wird:

$$(R_2-R_1)^2-4R_2R_1tg^2\frac{u\pi}{n}=A^2,$$

in welcher Form die Relation bei Steiner steht; oder es wird:

$$cos\frac{2u\pi}{n}=\frac{2R_1R_2-2r_1r_2}{2\varrho_1\varrho_2}=\frac{\varrho^2{}_1+\varrho^2{}_2-\alpha^2}{2\varrho_1\varrho_2},$$

woraus hervorgeht, dass $\frac{2u\pi}{n}$ dem einen Schnittwinkel der beiden Kreise (μ_1) und (μ_2) gleich sein muss. Also:

Eine beliebige zwischen (M_1) und (M_2) gelegte Kreiskette (m), (m'), (m''),... schliesst sich oder nicht, je nachdem der Schnittwinkel der Kreise (μ_1) und (μ_2) ein rationaler ist oder nicht.

Die beiden Kreise (m_1), (m_2) geben zu einer zweiten Schaar von Kreisketten Anlass. Ist $\frac{U}{N}$ deren Schliessungsverhältniss, so muss $\frac{2U\pi}{N}$ dem anderen Schnittwinkel der Kreise (μ_1), (μ_2) gleich sein. So ergiebt sich zwischen den beiden Schliessungsverhältnissen die Relation:

$$\frac{u}{n}+\frac{U}{N}=\frac{1}{2},$$

auf die wir später zurückkommen werden.

Alle diese, wie auch die folgenden Betrachtungen lassen sich einerseits dadurch ergänzen, dass man die nicht reellen Kreisreihen in Betracht zieht, zu denen die Kreise (μ_1), (μ_2) Anlass geben, andererseits dadurch, aber nur unwesentlich, verallgemeinern, dass man statt der Berührungen durchgehends das Schneiden unter gegebenen Winkeln setzt.

2. Bilden wir unsere Figur durch reciproke Radien ab, dann geht die Gerade 0123 in einen Kreis über und es ergiebt sich der Satz:

> Bestimmen zwei Kreise (M_1) und (M_2) eine geschlossene Kreiskette, so sind auch die durch zwei Berührungskreise von (M_1) und (M_2) bestimmten Kreisketten geschlossen, wenn die vier Berührungspunkte 0, 1, 2, 3 auf einem Orthogonalkreise von (M_1) und (M_2) liegen. Und zwar enthalten beide Schaaren geschlossene oder nicht geschlossene Kreisketten, je nachdem sich die durch $(0, 2)$ und $(1, 3)$ gelegten Berührungskreise von (M_1) und (M_2) in einem rationalen Winkel schneiden oder nicht.

3. Wir construiren eine der Figur von (1.) genau entsprechende und entsprechend bezeichnete sphärische Figur und suchen die Schliessungsbedingung.

Projiciren wir diese Figur stereographisch von einem Punkte des Hauptkreises 0123 in eine Ebene, so ist das Doppelverhältniss der vier Punkte 0, 1, 2, 3 der Projection dem Doppelverhältniss der vier Projectionsstrahlen gleich. Demnach wird die Bedingung:

$$tg^2\frac{u\pi}{n}=\frac{\sin r_1 \,.\, \sin r_2}{\sin R_1 \,.\, \sin R_2}=\frac{\cos A-\cos(R_2-R_1)}{2\sin R_2 \sin R_1}.\,*$$

Alle übrigen Sätze sind wörtlich zu übertragen.

4. Wir kehren zu der ebenen Figur zurück.

Der Mittelpunkt m eines Kreises der Kette liegt auf einer Ellipse mit den Brennpunkten M_1 und M_2 und der Hauptachse $mM_2+mM_1=R_2+R_1$.

Die beiden Berührungspunkte von (m) mit M_1 und M_2 liegen mit dem inneren Aehnlichkeitspunkt S von (M_1) und (M_2) in einer Geraden. Der „potenzhaltende" Kreis um S schneidet jeden Kreis der Kette orthogonal, das heisst, er berührt alle Seiten des Polygons $mm'm''\ldots$

Lassen wir jeden der Kreise (M_1), (M_2), (m), $(m')\ldots$ um einen Durchmesser rotiren, so erhalten wir eine Kugelkette (m), $(m')\ldots$ Dieselbe wird von jeder durch den Kreis (S) gelegten Kugel in einer

---

* s. Steiner a. a. O.

sphärischen Kreiskette geschnitten. Diese hängt mit der ebenen Kreiskette auch durch stereographische Projection zusammen: man hat nur die Ebene des Kreises (s) als Projectionsebene zu wählen.

Ebene und sphärische Kreisketten sind also nur ebene und sphärische Schnitte von Kugelketten.

5. Auf der Ebene der ursprünglichen Figur stehe eine zweite längs der Geraden 0123 senkrecht. In dieser mögen die Mittelpunkte $M, M' \ldots$ von Kugeln liegen, welche die Kugeln (m_1) und (m_2) gleichartig berühren. Die Mittelpunkte M liegen auf einer Hyperbel mit den Brennpunkten m_1 und m_2 und der Hauptachse $Mm_2 - Mm_1 = r_2 - r_1$.

Diese Hyperbel $(m_1 m_2)$ und jene Ellipse $(M_1 M_2)$ sind conjugirte Kegelschnitte, das heisst, irgend zwei Punkte des einen haben in Bezug auf den anderen die Focaleigenschaft. In der That ist der Abstand eines Punktes (x, y) der Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - A^2} = \frac{1}{4},$$

von einem Punkte (X, Y) der Hyperbel:

$$\frac{X^2}{A^2} - \frac{Y^2}{a^2 - A^2} = \frac{1}{4}$$

gleich

$$\sqrt{(X-x)^2 + Y^2 + y^2} = \left| \frac{A}{a} x - \frac{a}{A} X \right|,$$

woraus die Behauptung folgt:

Es ist also z. B.:

$$mM_2 + mM = m_2 M_2 + m_2 M,$$

das heisst

$$mM = R + r,$$

oder jede der Kugeln (M) berührt jede der Kugeln (m): die bekannte Eigenschaft der Dupin'schen Cyklide, von zwei Kugelschaaren umhüllt zu werden.

6. Construiren wir eine Kugelkette (M), (M'), $(M'') \ldots$, so ist das Polygon dem um den äusseren Aehnlichkeitspunkt s der beiden Kreise (m_1) und (m_2) (der zweiten Ebene) zu schlagenden potenzhaltenden Kreis (s) derselben umbeschrieben.

Der Kreis (S) und der Kreis (s) sind einander conjugirt, das heisst, das Doppelverhältniss der vier Abstände irgend zweier Punkte des einen von irgend zweien Punkten des anderen ist der Einheit gleich.

Sind nämlich p und q der grösste und der kleinste Abstand des Punktes s vom Kreise (S), P und Q der grösste und der kleinste Abstand des Punktes S vom Kreise (s), so sind:

$$y^2 = (p - x)(x - q) \quad \text{und} \quad Y^2 = (P - X)(X - Q)$$

die Gleichungen von (S) in Bezug auf s als Anfang der rechtwinkligen Coordinaten x, y, und von (s) in Bezug auf S als Anfang der rechtwinkligen Coordinaten XY. Das Abstandsquadrat eines Punktes (x, y) von einem Punkte (X, Y), nämlich:

$$\left(X + x - \frac{p+q}{2}\right)^2 + Y^2 + y^2,$$

wird wegen $\frac{p+q}{2} = \frac{P+Q}{2}$ und $\left(\frac{p-q}{2}\right)^2 = PQ$ gleich $2Xx$,

woraus sich die Behauptung ergiebt.

7. Zwischen den Schliessungsverhältnissen $\frac{u}{n}$ und $\frac{U}{N}$ der Kugelketten (m), $(m')\ldots$, und (M), $(M')\ldots$, besteht nach 1. die Relation:

$$\frac{u}{n} + \frac{U}{N} = \frac{1}{2},$$

so dass insbesondere beide Kugelketten gleichzeitig geschlossen sind oder nicht.*

Die einfachsten Fälle sind: $\frac{u}{n} = \frac{1}{3}$, $\frac{U}{N} = \frac{1}{6}$ oder umgekehrt, das heisst, in den Raum zwischen drei einander berührenden Kugeln lässt sich eine Kette von sechs Kugeln legen.

Dies ergiebt sich auch unmittelbar durch Abbildung vermittelst reciproker Radien aus dem evidenten Fall, in welchem zwei der drei Kugeln parallele Ebenen sind.

Für $\frac{u}{n} = \frac{1}{4}$, $\frac{U}{N} = \frac{1}{4}$ ergiebt sich:

Bei einer Kette von vier Kugeln besteht auch jede Kette der anderen Schaar aus vier Kugeln.

8. Zwischen den beiden Kugeln (M_1) und (M_2) lassen sich nicht nur die Kugelketten (m), $(m')\ldots$, sondern noch auf mannigfaltige andere Art Kugelketten legen.

Eine beliebige solche Kugelkette berührt die Kugeln (M_1) und (M_2) längs zweier Kreise. Durch diese Berührungskreise lässt sich eine Kugel legen, welche (M_1) und (M_2) unter demselben Winkel φ schneidet. Die Abbildung lehrt, dass die Schliessungsbedingung ausser von R_1, R_2, A, nur noch von φ abhängen kann. In der That ergiebt sich leicht:

$$tg^2 \frac{u\pi}{n} = \frac{R^2{}_2 + R^2{}_1 - 2R_2R_1 \sin^2\varphi - A^2}{4R_2R_1 \sin^2\varphi}.$$

Die in 1. angegebene Bedingung folgt aus dieser für $\varphi = \frac{\pi}{2}$, erhält aber jetzt die allgemeinere Bedeutung als Schliessungsbedingung für eine Kugelkette, deren zwei Berührungskreise nicht speciell in einer Centralebene, sondern allgemeiner in einer Orthogonalkugel von (M_1) und (M_2) liegen.

---

* s. Steiner a. a. O.

9. In den Raum zwischen den beiden Kugeln (M_1) und (M_2) legen wir eine Berührungskugel (μ), mit dem Mittelpunkt μ und dem Radius ϱ. Wir suchen die Schliessungsbedingung für eine Kette von Kugeln, welche die drei Kugeln (M_1), (M_2), (μ) berühren.

Für den Fall concentrischer Kugeln (M_1) und (M_2) ergiebt die unter 2. gegebene Bedingung unmittelbar:

$$tg^2\frac{u\pi}{n}=\frac{sin\,r\,.\,sin\,r}{sin\,r\,.\,sin\,3r}=\frac{1}{3-4\,sin^2 r},$$

wo
$$sin\,r=\frac{\varrho}{\frac{R_1+R_2}{2}}=\frac{R_2-R_1}{R_2+R_1}$$

einzusetzen ist. Die Bedingung wird daher zunächst:

$$4\,sin^2\frac{u\pi}{n}=\frac{(R_1+R_2)^2}{4R_1R_2}$$

also allgemein:
$$4\,sin^2\frac{u\pi}{n}=\frac{(R_1+R_2)^2-A^2}{4R_1R_2},$$

so dass sich die um (μ) gelegte Kugelkette unabhängig von der Lage der Kugel (μ) schliesst oder nicht schliesst.*

Für $\frac{u}{n}=\frac{1}{6}$ ergiebt sich daraus:

$$(R_2-R_1)^2=A^2,$$

das heisst, alle drei Kugeln (M_2), (M_1), (μ) müssen einander berühren, um zu einer Kette von sechs Kugeln Anlass zu geben. Wie unter 5.

Für $\frac{u}{n}=\frac{1}{3}$ ergiebt sich:

$$R^2_1+R^2_2-10R_1R_2=A^2,$$

die Bedingung dafür, dass sich zwischen zwei Kugeln vier einander berührende Kugeln legen lassen.*

10. Ist die unter 9. gegebene Bedingung erfüllt, so lege man um (μ) eine Kette von n Kugeln, um jede dieser Kugeln eine ebensolche Kette, die aber (μ) enthalten möge. Fährt man so fort, so entsteht die Frage, ob diese Doppelkette von Kugeln sich schliesst oder nicht.

Die Abbildung lässt ohne Weiteres erkennen, dass ein Schliessen dann und nur dann stattfindet, wenn ein reguläres Trigonalpolyeder existirt, dessen Ecke die Schliessungszahl $\frac{u}{n}$ besitzt, das heisst, in dessen Ecken n Dreiecke zusammenstossen, welche u Umläufe bilden.

* s. Steiner a. a. O.

Ist das Schliessungsverhältniss ein solches, so ist:

$$4 \sin^2 \frac{u\pi}{n} = \frac{(R_1 + R_2)^2 - A^2}{4 R_1 R_2}$$

die Bedingung dafür, dass sich zwischen den beiden Kugeln (M_1) und (M_2) von jeder Berührungskugel (μ) ausgehend geschlossene Doppelketten von Berührungskugeln legen lassen.

Der Tetraederfall von vier Kugeln, $\frac{u}{n} = \frac{1}{3}$, ist schon in 9. erwähnt.

Für den Oktaederfall von sechs Kugeln, $\frac{u}{n} = \frac{1}{4}$, ist die Bedingung:*

$$R^2_1 + R^2_2 - 6 R_1 R_2 = A^2.$$

Für den Ikosaeder- und Sternikosaederfall von zwölf Kugeln, $\frac{u}{n} = \frac{1 \text{ od. } 2}{5}$, wird:

$$\frac{(R_2 - R_1)^2 - A^2}{4 R_1 R_2} = \frac{3 \mp \sqrt{5}}{2}.$$

11. Zwischen die Kugeln (M_1) und (M_2) werden, von der Berührungskugel (μ) ausgehend, Kugelketten gelegt, die aber nicht, wie in 10., das Schliessungsverhältniss $\frac{1}{3}$, sondern allgemeiner das Schliessungsverhältniss $\frac{u'}{n'}$ haben mögen. Je zwei dieser Kugelketten mögen ausser der Kugel (μ) noch eine diese berührende Kugel gemein haben. Wir suchen die Bedingung dafür, dass nach u Umläufen die n^{te} dieser Kugelketten sich an die erste anschliesse.

In dem Fall concentrischer Kugeln (M_1), (M_2) werden die Kugelketten von der um $M_1 = M_2$ gelegten Kugel mit dem Radius $\sqrt{R_1 R_2}$ in sphärischen Ketten von Kreisen geschnitten, deren sphärischer Radius gleich $\arccos \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{\frac{R_1 + R_2}{2}}$ ist. Die Winkel $\frac{u\pi}{n}$ und $\frac{u'\pi}{n'}$ sind die Winkel eines sphärischen rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete jener Radius ist.

So ist also:

$$\cos^2 \frac{u'\pi}{n'} = \sin^2 \frac{u\pi}{n} : \frac{(R_1 + R_2)^2}{4 R_1 R_2};$$

demnach allgemein:

$$\frac{\sin^2 \frac{u\pi}{n}}{\cos^2 \frac{u'\pi}{n'}} = \frac{(R_1 + R_2)^2 - A^2}{4 R_1 R_2}.$$

Für $\frac{u'}{n'} = \frac{1}{3}$ erhält man die Relation in 9.

---

* s. Steiner a. a. O.

12. Wie unter 10. kann man nun weiter schliessen: die obige Bedingung ist zugleich die Bedingung dafür, dass es eine Doppelkette von Kugeln giebt, die einem Polyeder mit den Schliessungszahlen $\frac{u}{n}$ und $\frac{u'}{n'}$ analog gebildet ist, falls ein reguläres derartiges Polyeder existirt.

Die Fälle $\frac{u'}{n'} = \frac{1}{3}$, $\frac{u}{n} = \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}$ sind oben unter 9. und 10. erledigt.

Für den Hexaederfall von acht Kugeln, $\frac{u'}{n'} = \frac{1}{4}$, $\frac{u}{n} = \frac{1}{3}$ besteht die Bedingung:

$$R^2_1 + R^2_2 - 4R_1R_2 = A^2.$$

Für den Dodekaederfall und den Sterndodekaederfall von 20 Kugeln, $\frac{u'}{n'} = \frac{1 \text{ od. } 2}{5}$, $\frac{u}{n} = \frac{1}{3}$, erhält man:

$$\frac{(R_2 + R_1)^2 - A^2}{4R_2R_1} = \frac{9 \mp \sqrt{5}}{2}.$$

Für die beiden anderen Sterndodekaederfälle von zwölf Kugeln, $\frac{u'}{n'} = \frac{1 \text{ od. } 2}{5}$, $\frac{u}{n} = \frac{2 \text{ od. } 1}{5}$, ergiebt sich:

$$\frac{(R_2 + R_1)^2 - A^2}{4R_2R_1} = \frac{5 \mp \sqrt{5}}{2}.$$

Damit sind alle Fälle erschöpft.

13. Das Polygon $mm'm''\ldots$ in 1. ist einer Ellipse mit dem Parameter p ein-, einem Kreise mit dem Radius r umgeschrieben. Als Bedingung dafür, dass es sich schliesst, ergiebt sich leicht:

$$\cos\frac{u\pi}{n} = \frac{r}{p}.$$

Setzt man an Stelle der Berührungen der Kreise

$$(M_1),\ (M_2),\ (m),\ (m'),\ (m'')\ldots$$

das Schneiden unter constanten Winkeln und verallgemeinert die ganze Figur projectiv, so ergiebt sich das Polygon $mm'm''\ldots$ als einem Kegelschnitt ein-, einem anderen umgeschrieben. Um jedoch auf diesem Wege zu dem Poncelet'schen Theorem und der zugehörigen Schliessungsbedingung zu gelangen, müssten die so erhaltenen beiden Kegelschnitte sich wirklich in allgemeiner Lage befinden. Dieselben befinden sich aber in derjenigen speciellen Lage, dass sie sich in zwei concentrische Kreise projiciren lassen.

Kleinere Mittheilungen.

X. Funktionalgleichungen mit drei von einander unabhängigen Veränderlichen.

Im V. Kapitel seiner Analyse algébrique von 1821 hat Cauchy bekanntlich eine Anzahl von Functionalgleichungen, in welchen x und y vorkommen, ohne Anwendung von Differentialrechnung aufgelöst. Abel hat dann 1827 in Crelle's Journal II, 386—394 in dem Aufsatze „Ueber die Functionen, welche der Gleichung $\varphi(x) + \varphi(y) = \psi[x.f(y) + y.f(x)]$ genugthun" gezeigt, wie solche Aufgaben mit Hilfe von, wenn nöthig, wiederholten partiellen Differentiationen nach x und nach y zu behandeln sind. Schon im I. Bande von Crelle's Journal hatte Abel seine „Untersuchungen der Functionen zweier unabhängigen veränderlichen Grössen x und y wie $f(x, y)$, welche die Eigenschaft haben, dass $f[z, f(x, y)]$ eine symmetrische Function von x, y, z ist" veröffentlicht. Seit der Zeit sind die Cauchy'schen Beispiele bald ohne, bald mit Differentialrechnung behandelt mehrfach in Lehrbücher und Uebungsbücher übergegangen. Beispiele ähnlicher Aufgaben mit mehr als zwei von einander unabhängigen Variabeln sind uns dagegen in der Literatur nicht begegnet. Vielleicht sind deshalb folgende beide sehr einfache Fälle der Veröffentlichung werth.

I. Welche Function genügt der Gleichung

$$1) \qquad \varphi(x, y) + \varphi(y, z) = \varphi(x, z)?$$

Wird in 1) für y der Werth x gesetzt, so entsteht:

$$\varphi(x, x) + \varphi(x, z) = \varphi(x, z),$$

also:

$$2) \qquad \varphi(x, x) = 0.$$

Nimmt z in 1) den Werth x an, so entsteht:

$$\varphi(x, y) + \varphi(y, x) = \varphi(x, x) = 0$$

also:

$$3) \qquad \varphi(y, x) = -\varphi(x, y).$$

Wird nach diesen Vorbemerkungen 1) partiell nach z differentirt, so entsteht

$$\frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial z} = \frac{\partial \varphi(x, z)}{\partial z},$$

das heisst, jeder dieser Differentialquotienten enthält ausschliesslich z und weder x noch y. Letztere Grössen können nur in Gestalt von zu einer

Function von z [etwa zu $\chi(z)$] addirten Functionen [$\psi(x)$ oder $\psi(y)$] vorkommen, das heisst man hat

4) $$\varphi(x, z) = \psi(x) + \chi(z).$$

In Folge dieser Gleichung muss auch sein:

4') $$\varphi(z, x) = \psi(z) + \chi(x).$$

Wegen 3) ist aber

$$\varphi(z, x) = -\varphi(x, z) \quad \text{oder} \quad \psi(z) + \chi(x) = -\psi(x) - \chi(z),$$

beziehungsweise

5) $$\psi(x) + \chi(x) = -[\psi(z) + \chi(z)]$$

und 5) kann nur erfüllt werden, wenn

$$\chi(x) = -\psi(x), \quad \chi(z) = -\psi(z).$$

So geht 4) über in $\varphi(x, z) = \psi(x) - \psi(z)$

und die Aufgabe hat als einzige Lösung:

$$[\psi(x) - \psi(y)] + [\psi(y) - \psi(z)] = [\psi(x) - \psi(z)].$$

II. Welche Function genügt der Gleichung 1):

$$\varphi(x, y) \cdot \varphi(y, z) = \varphi(x, z)?$$

Wird in 1) für y der Werth x gesetzt, so entsteht

$$\varphi(x, x) \cdot \varphi(x, z) = \varphi(x, z),$$

also:

2) $$\varphi(x, x) = 1.$$

Nimmt z in 1) den Werth x an, so entsteht:

$$\varphi(x, y) \cdot \varphi(y, x) = \varphi(x, x) = 1,$$

also:

3) $$\varphi(y, x) = \frac{1}{\varphi(x, y)}.$$

Bringt man jetzt 1) in die Form

$$\frac{\varphi(x, z)}{\varphi(y, z)} = \varphi(x, y)$$

und differentirt partiell nach z, so erhält man:

$$\frac{\varphi(y, z)\dfrac{\partial \varphi(x, z)}{\partial z} - \varphi(x, z)\dfrac{\partial \varphi(y, z)}{\partial z}}{[\varphi(y, z)]^2} = 0,$$

beziehungsweise $$\frac{1}{\varphi(x, z)} \frac{\partial \varphi(x, z)}{\partial z} = \frac{1}{\varphi(y, z)} \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial z},$$

oder:

4) $$\frac{\partial \log \varphi(x, z)}{\partial z} = \frac{\partial \log \varphi(y, z)}{\partial z}.$$

Die beiden Ausdrücke rechts und links vom Gleichheitszeichen in 4) können offenbar weder x noch y enthalten, sondern sind ausschliesslich von z abhängig, etwa $= f(z)$. Die Constante der noch z zu vollziehenden Integration von:

$$\frac{\partial \log \varphi(x, z)}{\partial z} = f(z)$$

wird allerdings x noch enthalten können, z. B. $\log \psi(x)$ sein. Das heisst jene Integration liefert:

$$\log \varphi(x, z) = \log \psi(x) + \int f(z)\, dz = \log \psi(x) + \log \chi(z)$$

und

5) $$\varphi(x, z) = \psi(x) \cdot \chi(z).$$

Ebenso würde man erhalten müssen:

5′) $$\varphi(z, x) = \psi(z) \cdot \chi(x).$$

Wegen 3) ist
$$\psi(x) \cdot \chi(z) = \frac{1}{\psi(z) \cdot \chi(x)}$$
und
$$[\psi(x) \cdot \chi(x)] \cdot [\psi(z) \cdot \chi(z)] = 1.$$

Das kann nur stattfinden, wenn
$$\psi(x) \cdot \chi(x) = \psi(z) \cdot \chi(z) = \pm 1,$$
also
$$\chi(z) = \pm \frac{1}{\psi(z)}$$
ist, beziehungsweise
$$\varphi(x, z) = \frac{\psi(x)}{\psi(z)} \quad \text{oder} \quad \varphi(x, z) = -\frac{\psi(x)}{\psi(z)}.$$

Die letztere Annahme erfüllt aber 1) nicht, ist also unstatthaft, und die einzige Lösung der Aufgabe besteht in:

$$\frac{\psi(x)}{\psi(y)} \cdot \frac{\psi(y)}{\psi(z)} = \frac{\psi(x)}{\psi(z)}.$$

M. Cantor.

XI. Ueber Modellirung von Isogonalflächen.

(Hierzu Tafel II, Fig. 1—4.)

In einem Aufsatz „Ueber gewisse Flächen vierter Ordnung (Isogonalflächen)"* habe ich auf eine Art von Flächen aufmerksam gemacht, die einem äusserst einfachen Problem entspringen, aber nichts desto weniger interessante Formen aufweisen. In Verfolgung des letzteren Gesichtspunktes will ich in den nachstehenden Zeilen angeben, wie man von diesen Flächenformen ein anschauliches Bild gewinnen kann, und die hierzu construirten Modelle und Apparate beschreiben.

Isogonalfläche eines Punktes und einer Geraden.

Da die Isogonalfläche zweier Punkte (a. a. O. § 1) einfach durch Rotation eines Kreises um eine seiner Sehnen entsteht, beginnen wir sogleich mit der Isogonalfläche eines Punktes A und einer Geraden g und

* Crelle's Journ. Bd. 115 (1895) S. 1 flg.

wählen den Winkel der isogonalen Zuordnung $\varphi = 60^0$. Nimmt man dann die Gerade als z-Achse und den Abstand des auf der x-Achse liegenden Punktes A von g, $p = 10$ cm, so ist die Gleichung dieser Fläche (a. a. O. § 2):

$$1)\qquad (x^2+y^2)[(x-10)^2+y^2+z^2]\frac{3}{4}-100y^2=0.$$

Diese Fläche kann so erzeugt werden, dass eine Ebene um die Gerade g rotirt und bei jeder Lage ihr zu A und dem Winkel $\varphi = 60^0$ gehöriger Neigungskreis (der Schnitt der Ebene mit dem Rotationskegel, dessen Spitze A und dessen Seitenlinien mit der Ebene den Winkel 60^0 bilden) construirt wird. Die Gesammtheit dieser Kreise bildet die Fläche. Diese kann deshalb durch ein Modell veranschaulicht werden, bei dem eine Anzahl jener Kreise aus Cartonscheiben hergestellt ist. Die letzteren werden dadurch zusammengehalten, dass jeder, in zwei Halbkreise zerschnitten, von beiden Seiten auf die ebenfalls aus Carton gebildete, durch A senkrecht zu g gelegte Ebene geklebt wird.

Figur 1 zeigt ein nach solchem Cartonmodell hergestelltes Gypsmodell der in Rede stehenden Fläche vierter Ordnung. Punkt A liegt vorn, die Gerade g, längs deren die Fläche sich selbst durchsetzt, vertical auf der Basis hinten.

Isogonalfläche zweier Geraden.

Die Isogonalfläche zweier unter dem Winkel α gekreuzten Geraden $g_1 g_2$ für Winkel φ (a. a. O. § 3) ist eine Regelfläche vierter Ordnung, deren Gestalt wesentlich davon abhängt, ob

$$\alpha \lesseqgtr \varphi.$$

Gerade der Grenzfall, $\alpha = \varphi$, lässt sich verhältnissmässig am einfachsten im Modell darstellen und bietet dann zugleich einen Anhaltspunkt für die Vorstellung der Flächengestalt in den beiden anderen Fällen.

Wir wählen wieder $\alpha = \varphi = 60^0$, die kürzeste Verbindungslinie von g_1 und g_2 als x-Achse, den Abstand der beiden Geraden vom Nullpunkt $p = 3$ und die Halbirungsebene ihres stumpfen Winkels als xy-Ebene. Dann lautet die Gleichung der Fläche:

$$2)\quad \begin{cases} \left[y^2-\frac{z^2}{3}+\frac{2}{3}(x^2-9)\right]^2 \\ -\frac{1}{4}\left[\left(y-\frac{z}{\sqrt{3}}\right)^2+\frac{4}{3}(x-3)^2\right]\left[\left(y+\frac{z}{\sqrt{3}}\right)^2+\frac{4}{3}(x+3)^2\right]=0. \end{cases}$$

Der Schnitt der Fläche mit der xy-Ebene besteht aus der x-Achse als einer Doppelgeraden und aus der Ellipse:

$$3)\qquad \frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{24}=1.$$

Folglich kann die Fläche auch durch eine Gerade, die beständig an den beiden festen Geraden $g_1 g_2$ und an dieser Ellipse entlang gleitet, erzeugt werden.

Es sind daher bei dem in Figur 2 abgebildeten Modell die Geraden $g_1 g_2$ durch Stahlstäbe, die Ellipse E durch einen Messingring und die Erzeugenden durch Seidenfäden dargestellt, welche gleichzeitig an den beiden Stäben und an dem Messingring anliegen, bezw. bei hinreichender Verlängerung anliegen würden. Denn, um das Bild der Fläche übersichtlich zu erhalten, ist immer nur das Stück jeder Erzeugenden, welches von g_1 und g_2 begrenzt wird, angebracht. Eine Ausnahme davon machen natürlich die ebenfalls durch Fäden angedeuteten Erzeugenden, welche zu g_1 oder g_2 parallel sind. Die beiden Schaaren von Erzeugenden, S_1, S_2, sind durch Fäden von verschiedener Farbe gekennzeichnet; sie bilden die beiden Mäntel der Fläche, welche in der Doppel-Erzeugenden (der kürzesten Verbindungslinie von g_1 und g_2) zusammenstossen und dort zugleich stetig in einander übergehen.

Isogonalkegel.

Schneiden sich die beiden Geraden $g_1 g_2$, so ist ihre Isogonalfläche eine Kegelfläche vierter Ordnung, ihr Isogonalkegel (a. a. O. § 4). Seine Gleichung lautet bei derselben Wahl des Coordinatensystems wie vorher, wobei also nun um g_1 und g_2 in der yz-Ebene liegen:

$$4)\qquad \begin{cases} [(y-az)(y+az)+(1-a^2)x^2]^2 \\ -C^2[(y-az)^2+(1+a^2)x^2][(y+az)^2+(1+a^2)x^2]=0, \end{cases}$$

wenn

$$a = tg\frac{\alpha}{2}, \quad C = \cos\varphi,$$

α der Winkel von g_1 und g_2, φ derjenige der isogonalen Zuordnung ist.

Diese Isogonalkegel lassen sich für jeden Winkel α und jeden Winkel φ durch den in Figur 3 abgebildeten Apparat veranschaulichen.

An einer horizontalen kreisförmigen Messingscheibe (yz-Ebene) sind die Geraden $g_1 g_2$ als zwei Durchmesser dargestellt, deren einer (g_2) um den Mittelpunkt M drehbar ist und mit Hilfe einer am Rand der Scheibe angebrachten Gradeintheilung unter jedem beliebigen Winkel α gegen g_1 mittelst Klemmschrauben an seinen Enden festgestellt werden kann. Um jede der Geraden $g_1 g_2$ dreht sich eine Ebene, dargestellt durch einen halbkreisförmigen Stahldraht H_1, H_2. Endlich können diese beiden Ebenen gezwungen werden, bei ihrer Bewegung stets denselben und zwar ganz beliebigen Winkel φ mit einander zu bilden. Hierzu dient ein kleiner Schlitten, der aus zwei unter beliebigem Winkel φ gegen einander festzustellenden Schenkeln $S_1 S_2$ besteht. Indem jeder dieser Schenkel auf einem jener Halbkreise gleitet, werden deren Ebenen beständig unter demselben Winkel φ gehalten. Ein Kautschukfaden K verbindet den Scheitelpunkt des Schlittens mit dem Schnittpunkt M von g_1 und g_2, stellt daher die Schnittgerade der beiden Ebenen durch g_1 und g_2 dar und beschreibt bei der Bewegung den Isogonalkegel.

Um jedoch von der Gestalt der Isogonalkegel auch ein fixirtes Bild zu erhalten, dient eine Vorrichtung, welche gestattet, die auf einer concentrischen Kugel von der Kegelfläche ausgeschnittenen Curven aufzuzeichnen. Nach Aushängung des Kautschukfadens setzt man auf die Kreisscheibe eine Halbkugel aus Messingblech, sodass ihr Mittelpunkt mit M zusammenfällt. Wird die Halbkugel berusst oder mit irgend einem feinen Pulver bestäubt, so zeichnet bei der Bewegung des Schlittens ein genau unter seinem Scheitel befindlicher Schreibstift St auf ihr die genannten Curven auf, die hinlänglich sauber ausfallen, um von der Gestalt der zugehörigen Kegelflächen ein anschauliches Bild zu geben. Nur, wenn die Curven in die Nähe des höchsten Punktes der Halbkugel kommen — was also eintritt, wenn α und φ sehr wenig verschieden oder einander gleich sind — wird ihr Verlauf etwas unsicher durch den Apparat gegeben, weil hier schon eine minimale Aenderung von φ, die auch nach fester Einstellung des Schlittenwinkels unvermeidlich ist, eine erhebliche Abweichung der Curven herbeiführt.

Figur 4 — die in etwas grösserem Massstab als Figur 3 wiedergegeben ist — zeigt die so auf der berussten Kugel aufgezeichneten Kegelflächen, wenn $\alpha = 60^0$ und φ der Reihe nach (von unten an im Bilde) $= 120^0$, 110^0, 100^0, 90^0 (der orthogonale Kegel), 80^0, 70^0, 60^0 (der Grenzfall $\alpha = \varphi$), 50^0, 40^0 genommen ist. Die Curven für $\varphi = 60^0$ und $\varphi = 120^0$ z. B. stellen also zusammen einen Kegel vierter Ordnung dar, von dem noch der symmetrische auf einer unteren Halbkugel ausgeschnittene Theil zu ergänzen wäre. Man erkennt aus diesen Curven sofort den wesentlich verschiedenen Charakter der Kegelflächen, je nachdem

$$\alpha \gtrless \varphi$$

ist, während der Fall $\alpha = \varphi$ den Uebergang von der einen zur anderen Form bildet. Ist $\alpha < \varphi$, z. B. $\varphi = 70^0$, so besteht der Kegel vierter Ordnung aus zwei getrennten Mänteln, die sich in g_1 und g_2 gegenseitig durchsetzen; ist $\alpha > \varphi$, z. B. $\varphi = 50^0$ (wobei die nicht mehr gezeichnete Curve

$$\varphi = 180^0 - 50^0 = 130^0$$

leicht zu ergänzen ist), so besteht der Kegel aus **einem** sich in g_1 und g_2 selbst durchsetzenden Mantel, während der Grenzfall, $\varphi = 60^0$, in dem einen oder anderen Sinn aufgefasst werden kann.

Die vorstehend besprochenen Apparate sind nach meinen Angaben von Herrn Mechaniker Wilhelm Schmidt (Giessen, Seltersweg 30) recht hübsch hergestellt worden und von ihm zu beziehen.

Giessen, den 27. Januar 1896. LOTHAR HEFFTER.

XII. Kraftwirkung eines Magnets auf einen anderen.*

Der Magnet I habe das Potential V, also dass von ihm nach den drei Raumrichtungen die Feldstärken

$$\alpha = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \beta = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad \gamma = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

ausgeübt werden (oder die wirklichen Kräfte auf einen Einheitspol als Aufpunkt).

Magnet II befindet sich in diesem Felde; er sei gegeben durch die magnetischen Momente A, B, C der Volumeinheit, also die Momente des Elementarquaders $d\tau$: $\quad Ad\tau, \quad Bd\tau, \quad Cd\tau,$

wenn dx oder dy oder dz als Magnetachse gilt; oder also auch durch die magnetischen Flächendichtigkeiten

$$A\,dy\,dz, \quad B\,dz\,dx, \quad C\,dx\,dy \ldots{}^{**}$$

Christiansen nennt in dem betreffenden § 71 seiner „Elemente" ABC die Magnetisirungsconstanten, und nimmt dieselben auch weiterhin stillschweigend als constant an; in seinem § 69 gelten sie noch als veränderlich, im § 70 ausdrücklich als constant. Nachdem er aber $\alpha\beta\gamma$ innerhalb II als veränderlich betrachtet, wie die nachher entwickelte Gleichung

$$\text{a)} \qquad X = \int\left(A\frac{\partial \alpha}{\partial x} + B\frac{\partial \alpha}{\partial y} + C\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)d\tau$$

zeigt, musste er auch $\frac{\partial A}{\partial x}\cdots$ berücksichtigen, wie ich nun thun will. Es kommt dabei die magnetische Raumdichte ϱ zur Geltung, welche im § 68 als

$$\text{e)} \qquad \varrho = -\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right)$$

für den Quader $d\tau$ abgeleitet wird.

Wir setzen also die Flächendichten eines $d\tau$ an:

$$\begin{aligned} &-A\,dy\,dz, &&+\left(A + \frac{\partial A}{\partial x}dx\right)dy\,dz, \\ &-B\,dz\,dx, &&+\left(B + \frac{\partial B}{\partial y}dy\right)dz\,dx, \\ &-C\,dx\,dy, &&+\left(C + \frac{\partial C}{\partial z}dz\right)dx\,dy. \end{aligned}$$

---

* Nachfolgende Abhandlungen wurden auch durch Christiansen's theoretische Physik veranlasst, wie S. 111—120 dieses Jahrganges der Zeitschrift.

** Im Buche ist I und II verwechselt mit den Worten: „es soll seine (des II) Wirkung auf den ersten Magnet ermittelt werden".

Multiplicirt man die erste Colonne durchgängig mit α und die zweite beziehungsweise mit

$$\left(\alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx\right), \quad \left(\alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial y} dy\right), \quad \left(\alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial z} dz\right),$$

so haben wir sechs nach der x-Achse gerichtete wirkliche Kräfte (im Sinne des Productes von Masse und Beschleunigung). Und als siebente kommt noch $\varrho\, d\tau . \alpha$ hinzu, so dass vermöge e) die obige Gleichung a) hervorgeht, mit selbstverständlicher Vernachlässigung der Glieder, welche Producte

$$\frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \cdot dx^2 \ldots$$

enthalten.

Analog X ist Y und Z zu bilden durch Vertauschung von α mit β und γ. Auch kann man statt a) schreiben (siehe oben V):

b) $$X = \int \left(A \frac{\partial \alpha}{\partial x} + B \frac{\partial \beta}{\partial x} + C \frac{\partial \alpha}{\partial x}\right) d\tau$$

und für Y und Z statt x das y und z.

Das Gefundene gilt auch, wenn statt I mehrere (active) Magnete das Feld bilden, auf welche insgesammt sich alsdann das V bezieht.*

Nun zu den Momenten L, M, N der Kräfte, welche II um die Achsen der xyz zu drehen bestrebt sind. Um die x-Achse dreht z. B.:

$$- B\, dz\, dx . \gamma y$$

und

$$+ B\, dz\, dx \gamma (y + d.y).$$

„Bei Vernachlässigung kleiner Glieder höherer Ordnung ist das resultirende Moment“

$$B\, dz\, dx \gamma\, dy;$$

ich führte diese Worte des Buches an, weil sie auf die Zusatzglieder in

$$+ \left(B + \frac{\partial B}{\partial y} dy\right) dz\, dx \left(\gamma + \frac{\partial \gamma}{\partial y} dy\right) (y + dy)$$

passen, welche mit den Differentialquotienten behaftet sind, deren eines ich und das andere Christiansen für a) berücksichtigt haben.**

Ebenso dreht noch um die x-Achse

$$- C\, dx\, dy . \beta . dz,$$

so dass

c) $$L = \int (B\gamma - C\beta)\, d\tau$$

und analog M und N.

Consequenter Weise könnte oder müsste das Buch schreiben:

$$L = B \int \gamma\, d\tau - C \int \beta\, d\tau$$

und analog für M und N.

---

* Der Wortlaut des Buches ist so, als ob b) nur für mehrere I gälte.

** In obigem Zusammenhange wäre man geneigt, dy gegen y wegzulassen und bekäme dann $L = 0$. Dagegen könnte man $-B\, dz\, dx \gamma y$ und das y in $(y + dy)$ ganz ersparen.

Aber zur Anwendung dient in demselben als I der Erdmagnetismus, wofür auch $\alpha\beta\gamma$ constant genommen werden, so dass aus a) folgt:

$$X = Y = Z \equiv 0.$$

Wird alsdann das magnetische Moment von II mit M bezeichnet und die Magnet-Achse durch die Cosinusse lmn, so ist beispielsweise

$$Ml = A\int d\tau \text{ (das Buch schreibt } \int A d\tau)$$

und auch $\alpha\beta\gamma$ treten vor das Integralzeichen, so dass

$$L = \mathsf{M}(\gamma m - \beta n), \quad M = \mathsf{M}(\alpha n - \gamma l), \quad N = \mathsf{M}(\beta l - \alpha m).$$

Also $\quad L\alpha + M\beta + N\gamma = 0 \quad$ und $\quad Ll + Mm + Nn = 0,$

das heisst: das resultirende Drehmoment $\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$, welches II durch I erfährt, steht sowohl auf der Feldrichtung von I als auch auf der Magnetachse von II senkrecht.

Wählt man die Inclinationsrichtung zur Achse der x, so ist α die totale Feldstärke des Erdmagnets ($\beta = \gamma = 0$), und ist der Winkel θ, dessen Cosinus gleich l, in der xy-Tafel, so ist auch $n = 0$ und

d) $$L = 0, \quad M = 0, \quad N = -\mathsf{M}\alpha \sin\theta.$$

Dann geht das Buch zur Declinationsnadel über, wo nur statt α die horizontale Feldstärke H des Erdmagnets zu setzen ist; die ruhende, um die verticale Achse in Schwingungen versetzbare Nadel hat dann das vorige $\theta = 0$. Erst, wenn sie horizontal ausgebeugt wird um den horizontalen Winkel ϑ mit H, erfährt sie das ϑ vermindernde Drehmoment:

e) $$-\mathsf{M}H \sin\vartheta = J\ddot{\vartheta},$$

wo J das Trägheitsmoment und $\ddot{\vartheta}$ die Winkelbeschleunigung, so dass für kleine ϑ ($\sin\vartheta$ mit dem Bogen verwechselbar)

f) $$\tau = \pi\sqrt{\frac{J}{\mathsf{M}H}}$$

als Schwingungsdauer hervorgeht (Schluss des § 71).

Dreht man die Nadel-Ebene des Inclinatoriums um 90^0, so bekommt man die mit der Vertical-Intensität schwingende Nadel; und im Falle von 0^0 (Ebene des magnetischen Meridians) die von der vollen Erdstärke in Schwingung versetzte Nadel. Eine in den Büchern gewöhnlich nicht erwähnte Astasie ($L = M = N = 0$) erhält man, wenn man die mechanische Drehachse in die Inclinationsrichtung bringen kann.

XIII. Potentielle Energie eines Magnets.

Als Beispiel wähle ich die Declinationsnadel und schreibe ihr in der Gleichgewichtslage die Energie Null zu; um 90^0 ausgebeugt in der Horizontalebene hat sie alsdann die Energie:

$$\mathsf{M}H,$$

wo M ihr magnetisches Moment und H die horizontale Feldstärke des Erdmagnetismus bedeutet. Die hierbei aufzuwendende Arbeit ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathsf{M} H \sin\theta \, d\theta,$$

wo $\mathsf{M}H$ als constant gilt und θ der jeweilige Ausschlag aus dem magnetischen Meridian ist.

Christiansen lässt im Beispiel seines § 72, der obigen Titel führt, die Energie in der Gleichgewichtslage „eines sehr kleinen Magnets, der sich in der Nähe eines sehr starken Magnets befindet", $-\mathsf{M}H$ sein; er schreibt

$$W = \mathsf{M} H \cos\theta \tag{c}$$

und also Null in der senkrechten Stellung.

Beide Anschauungen sind im Grunde identisch, da es sich bei W stets nur um die Differenzen handelt: die Energie in der senkrechten Stellung ist um $\mathsf{M}H$ grösser als in der Nullstellung.*

Die im Buche vertretene Anschauung der Ueberführung des kleinen Magnets aus dem Unendlichen in das Feld des grossen Magnets vertrete ich, statt die Formel a) oder b) dort abzuleiten, durch die Erklärung, dass das Verbringen der Nadel aus der Unendlichkeit in die Endlichkeit gar keine Arbeit erfordert, in dem die dabei von Null bis H anwachsende Grösse auf beide Nadelpole jeweils gleich stark und entgegengesetzt wirkt. Befindet sich nach dieser Procedur die Nadel in der senkrechten Stellung, so wird sie durch H in die Nullstellung versetzt.

Die Gleichungen a) und b) hat Maxwell im § 389. Christiansen versieht sie noch mit dem Factor $\frac{1}{2}$, indem er die ursprünglichen „Magnetisirungscomponenten" $A B C$, welche auch in meiner vorigen Notiz vorkommen, von Null bis zu $A B C$ anwachsen lässt, so dass kommt

$$W = \frac{1}{2} \int \left(A \frac{\partial V}{\partial x} + B \frac{\partial V}{\partial y} + C \frac{\partial V}{\partial z} \right) d\tau, \tag{d}$$

$$W = -\frac{1}{2} \int (A\alpha + B\beta + C\gamma) \, d\tau \tag{e}$$

in den Bezeichnungen der vorigen Notiz. „Dieselbe Betrachtung zeigt, dass

$$W = \frac{1}{2} \int \sigma V d\omega + \frac{1}{2} \int \varrho V d\tau \tag{f}$$

---

* In gleicher Weise setze ich die potentielle Energie einer „magnetischen Lamelle" (§ 77) gleich Null, wenn sie zur Richtung des Feldes senkrecht steht, und gleich ΦN in der um 90° verdrehten Stellung, während das Buch beziehungsweise $-\Phi N$ und stillschweigend) Null annimmt.

ist", setzt Christiansen sogleich bei; hierbei ist σ die magnetische Dichte des Oberflächen-Elementes $d\omega$ des passiven Magnets, wie ϱ und $d\tau$ schon in meiner vorigen Notiz gebraucht sind.

Statt hierbei ABC, σ, ϱ von Null an wachsen zu lassen, kann man dies auch hinsichtlich V denken, so dass durchschnittlich $\frac{1}{2}V$ resultirt. Ein lehrreiches Beispiel ist die Vernichtung der potentiellen Energie $\frac{1}{2}Qh$, wenn aus einem cylindrischen Gefäss Wasser Q durch eine Oeffnung im Boden sich in der Bodenebene verbreitet, wobei nicht die Wasserhöhe h, sondern $\frac{h}{2}$ in Rechnung kommt. Im Buche folgt unmittelbar nach f):

„Sind V und die ersten Differentialquotienten von V stetig, so ist $\sigma = 0$ und

$$W = \frac{1}{2}\int \varrho V d\tau.\text{“}$$

Statt dessen sagt Kirchhoff in seiner XIV. Vorlesung § 1: „Der bequemeren Darstellung wegen werde angenommen, dass jeder Magnet und jeder Eisenkörper stetig, in dünner Schicht, in die Luft übergehe, so dass die Potentiale mit ihren ersten Differentialquotienten im ganzen Raum stetig sind. Die Uebergangsschichten sollen zu den Magneten gerechnet werden."

Im Texte von Christiansen weiterfahrend wird aus der letzten Gleichung mittelst derjenigen von Laplace-Poisson im § 14:

$$W = -\frac{1}{8\pi}\int V\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) d\tau$$

und durch theilweise Integration über den ganzen unendlichen Raum $\left(\text{weil } \frac{\partial V}{\partial x} \text{ oder } -\alpha \text{ und analog } \beta \text{ und } \gamma \text{ im Unendlichen Null sind}\right)$:

$$\text{g)} \qquad W = \frac{1}{8\pi}\int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, d\tau.$$

„Für die dielektrische Polarisation gelten ganz ähnliche Ausdrücke (§ 61)." Schluss des § 72.

Die Gleichungen d) und e) finden sich nicht in Kirchhoff's Vorlesungen; f) aber ohne den Factor $\frac{1}{2}$ bei Maxwell l. c.; g) betreffend hat der Herausgeber Planck von Kirchhoff's Vorlesungen l. c. in Klammern beigesetzt den Ausdruck, der, wenn man k gleich Null setzt, welches die Vertheilung des Magnetismus in „Eisenkörpern" betrifft, mit g) übereinstimmt. Aber unmittelbar vorher fügt Planck die Note bei, dass durch Kirchhoff's Umformung die soeben von ihm bewiesene Eigenschaft der fraglichen Grösse verloren gehe.

Ich führe das an, um auf das Schwankende und Fragliche in der Theorie hinzuweisen.

XIV. Potential einer magnetischen Kugel.

Man kennt die Raumpotentiale einer Vollkugel (Christiansen § 13):

$$\psi_a = \frac{\psi}{3}\pi\frac{a^3}{r}, \quad \psi_i = 2\pi\left(a^2 - \frac{r^2}{3}\right),$$

allgemein:

a) $$\psi = \int \frac{d\tau}{r}.$$

1. Ist die Kugel ein Stahlmagnet und denkt man sie in kleine Quader zerschnitten, welche die im § 70 der Elemente Christiansen's von mir schon gebrauchten Momente ABC aufweisen, so ist nach dem Ausdrucke [§ 69, a)] für das Potential eines Elementarmagnets

$$M\frac{\cos\theta}{r^2}, \quad r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2,$$

$$\cos\theta = \frac{x-\xi}{r}$$

und beziehungsweise

$$\frac{y-\eta}{r}, \quad \frac{z-\zeta}{r},$$

also nach [§ 69, 6)]:

$$V = A\int d\tau\frac{x-\xi}{r^3} + B\int d\tau\frac{y-\eta}{r^3} + C\int d\tau\frac{z-\zeta}{r^3} \quad (d\tau = d\xi\, d\eta\, d\zeta)$$

das Potential der Magnetkugel, wobei ich, weil ABC als constant angenommen werden, dieselben gleich vor das Integralzeichen setzte. Oder:

b) $$\left\{\begin{aligned} V &= -\left(A\int d\tau\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + B\int d\tau\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + C\int d\tau\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right) \\ &= -\left(A\frac{\partial\psi}{\partial x} + B\frac{\partial\psi}{\partial y} + C\frac{\partial\psi}{\partial z}\right). \end{aligned}\right.$$

Also wird aus a) für einen äusseren Punkt xyz, wenn von jetzt ab der Ursprung im Kugelmittelpunkt liegt,

c) $$V_a = \frac{4}{3}\pi\frac{a^3}{r^3}(Ax + By + Cz)$$

und für einen inneren:

d) $$V_i = \frac{4\pi}{3}(Ax + By + Cz).$$

Hat die Kugel die Magnetachse mit den Cosinussen $\lambda\mu\nu$ orientirt, welche z. B. bei einer durch den Erdmagnetismus temporär magnetisirten Eisenkugel mit der Inclinationsrichtung übereinstimmt, so ist

$$A = J\lambda, \quad B = J\mu, \quad C = J\nu,$$

$$\cos\theta = \lambda\cdot\frac{x}{r} + \mu\frac{y}{r} + \nu\frac{z}{r},$$

also:

e) $$V_a = \frac{4}{3}\pi\frac{a^3}{r^2}J\cos\theta,\quad V_i = \frac{4}{3}\pi J r\cos\theta,$$

wo J das magnetische Moment der Volumeinheit ist. Nach aussen wirkt also die Kugel so, als ob ein kleiner Magnet vom Moment

$$\mathsf{M} = \frac{4}{3}\pi a^3 . J$$

in ihrem Mittelpunkte concentrirt wäre [siehe die auf a) folgende Gleichung].

Kirchhoff hat in seiner XIII. Vorlesung § 3 die Gleichung b) theilweise integrirt, wobei nur der erste Theil, das Flächenintegral verbleibt, weil bei der „gleichmässig“ angenommenen Magnetisirung (ABC constant) das Raumintegral Null wird:

$$V = -\left[A\int\frac{d\omega}{r}\cos(nx) + B\int\frac{d\omega}{r}\cos(ny) + C\int\frac{d\omega}{r}\cos(nz)\right]$$
$$= -J\int\frac{d\omega}{r}\cdot\cos(Jn)\qquad (n \text{ die Flächennormale}).$$

Diese für jeden gleichmässigen Magnet (abgesehen von der Kugelform) geltende Formel weist auf eine einfache Dichtigkeitsvertheilung auf seiner Oberfläche hin, die man statt des Körpers substituiren kann, nämlich diese Dichte σ ist proportional dem $\cos(Jn)$ oder $\cos\theta$.

Am Nordpol ist die Dichte des nordpolaren Magnetismus die grösste und sie nimmt gegen den Aequator des Magnets bis zu Null ab. Verschiebt man den Magnet in der Richtung von J um ein kleines Stück, so kann man sich auch den am Nordpol zugelegten Raum mit positiver, den am Südpol verlorenen Raum mit negativer Flüssigkeit gefüllt denken. Auch Christiansen schreibt $\sigma = J\cos\theta$, aber der Rückweis auf § 68 ist insofern anfechtbar, als dort ABC im Allgemeinen als veränderlich gelten.

Die Feldstärke der Magnetkugel ist in der Richtung der Magnetachse

$$2\cdot\frac{4\pi}{3}a^3\frac{J}{r^3}\quad\text{oder}\quad 2\cdot\frac{\mathsf{M}}{r^3}$$

und unter dem Winkel θ zur Magnetachse (Scheitel im Kugelcentrum)

$$2\frac{\mathsf{M}}{r^3}\cos\theta$$

in dieser Richtung von r.

Aber die dazu senkrecht gerichtete Feldstärke, das ist also, wenn θ noch um $\frac{\pi}{2}$ zunimmt, ist $-2\frac{\mathsf{M}}{r^3}\sin\theta$ und nicht, wie das Buch irrthümlich rechnet, $-\frac{1}{r}\,\frac{\partial V_a}{\partial\theta}$; es hat diese darum auch kein besonderes Interesse, da man alle Feldstärken wie vorher die Flächendichtigkeiten σ proportional dem $\cos\theta$ findet.

Auf einen Punkt im Innern der vollen Magnetkugel wirkt in der Richtung von r und θ die Feldstärke $-\frac{4\pi}{3} J \cos\theta$, also wird bei $\theta < \pi$ ein positiver magnetischer Punkt gegen das Kugelcentrum hingetrieben, und zwar gleichgiltig, was r ist (zwischen Null und a). Und wenn $\theta > \frac{\pi}{2}$, da befindet sich der bewegte Einheitspol (+) in der magnetisch südlichen Hälfte der Kugel und seine Bewegungsrichtung ist vom Kugelcentrum abgewendet, also im Raume die gleiche wie vorhin. Demnach ist diese Feldstärke nur in Bezug auf r constant und nicht durchaus, wie das Buch angiebt in f), wo allerdings $\theta = 0$ angenommen wird.

Für $\theta = \frac{\pi}{2}$, im magnetischen Aequator der Kugel, ist die Feldstärke Null. Kirchhoff bespricht auch noch die Hohlkugel mit wenigen Worten. Für den äusseren Punkt gilt auch die Concentrirung von $M = \frac{4}{3}\pi(a^3 - a^3_1)J$ im Centrum. Und da kann man auch in praktischer Hinsicht viel eher von einem im Innern gelegenen + Einheitspol reden, als vorhin bei der Vollkugel. In der Höhlung ist $\psi = 2\pi(a^2 - a^2_1)$, also V_i gemäss b) gleich Null, mithin auch die Feldstärke Null, wie in der Elektrostatik (auf welche Kirchhoff verweist) und in der Gravitation.

2. Die Magnetisirung (temporär) einer Eisenkugel behandelt Kirchhoff im XIII, § 4 mittelst Kugelfunctionen, Christiansen als Beispiel des § 73; er verweist auf die [im vorletzten Absatze angegebene] Gleichung f), wo die Feldstärke in der Inclinationsrichtung der Erde für das Kugelinnere mit $-\frac{4\pi}{3} J$ bezeichnet wurde. Da er diese Richtung jetzt zur Achse der x macht, so kommt statt J nunmehr A im früheren Sinne dieses Buchstabens. Und statt der vollen Feldstärke der Erde will ich nunmehr das J als Anfangsbuchstaben der Inclination setzen.

Seit Poisson gilt für die Vertheilung

$$A = k\alpha, \quad B = k\beta, \quad C = k\gamma,$$

das heisst, dass die temporäre Magnetisirung der gesammten Feldstärke an der fraglichen Stelle proportional angenommen wird; also kommt für den Nordpol der Magnetkugel

$$A = k\left(J - \frac{4\pi}{3} A\right),$$

woraus

$$A = \frac{kJ}{1 + \frac{4\pi}{3} k}$$

(vergl. Kirchhoff XIII, § 5).

Irgend ein magnetischer Punkt unterliegt, wenn er in der Nähe dieser Eisenkugel sich befindet, dem Einflusse der Erde und der Eisenkugel, wovon in der vorletzten Gleichung schon gehandelt wurde, bei welcher der Aufpunkt am Nordpole der Eisenkugel selbst angenommen wurde. Wird dann das Potential der Erde mit V, das der Eisenkugel mit U bezeichnet, so muss gemäss e) jetzt geschrieben werden:

$$U_a = \frac{4\pi}{3}\frac{a^3}{r^2}A\cos\theta, \quad U_i = \frac{4\pi}{3}Ar\cos\theta,$$

während das von der Erde herrührende Potential

$$V = -Jx,$$

damit die Erdfeldstärke in der Inclinationsrichtung $x = r\cos\theta$ (Ursprung im Mittelpunkte der Eisenkugel)

$$J = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

resultirt. Dass mit wachsendem x das Potential V abnimmt, stimmt damit überein, dass man sich in der Erde Südmagnetismus (auf der nördlichen Hemisphäre) denken muss, damit in der Eisenkugel der unterste Punkt auf der Inclinationslinie ($x = a$) nordmagnetisch erscheine.

Am Schlusse des § 73 steht noch der Satz, dass die letzten drei Potentialwerthe der Gleichung e) des § 73 genügen, welche Probe zutrifft. Da diese Gleichung auch noch im § 76, bei der „magnetischen Induction" vorkommt, soll sie in der nächsten Mittheilung abgeleitet werden.*

XV. Die magnetische Induction

kommt bei Christiansen schon im § 74b) mit den Gleichungen

$$a = \alpha + 4\pi A, \quad b = \beta + 4\pi B, \quad c = \gamma + 4\pi C$$

plötzlich herein; § 76 erst führt obigen Namen; $\alpha\beta\gamma$ und ABC haben dieselbe Bedeutung wie in den früheren Mittheilungen, so dass

$$a = (1 + 4\pi k)\alpha, \quad b = (1 + \pi k)\beta, \quad c = (1 + 4\pi k)\gamma;$$

wobei

$$\mu = 1 + 4\pi k$$

unter vier Benennungen auch diejenige „Inductionscoefficient" nach dem Vorgang von Maxwell u. A. erhalten hat. Kirchhoff führt dieses μ nicht und bleibt bei $1 + 4\pi k$.

Nun zur Erklärung von abc: Hierzu diene wieder das Beispiel der temporären Magnetkugel, deren Centrum der Ursprung, und wobei die x-Achse nach der Inductionsrichtung abwärts gewendet sei. Dann ist A die Flächendichte am Nordpol der Kugel, α die Feldstärke nahe innerhalb des Nordpols auf dem Kugelradius und a diejenige nahe ausserhalb desselben auf dem (wenig) verlängerten Kugelradius.

Denn, man kennt ja den Sprung, den die Feldstärke, oder, wenn man sie mit $+1$ Magnetismus des Aufpunktes multiplicirt, den die mag-

---

* Gelegentlich bemerkt, ist die Figur des § 75 von der Kraftlinie nur halbfertig, als ob nämlich α und β nur vom Nordol des Magnets herrührten. Der Text ist richtig.

netische Kraft macht, sobald dieser Aufpunkt von innen nach aussen die Kugeloberfläche durchschneidet; er ist $4\pi A$, wenn A die locale Flächendichte des Magnetismus bedeutet. Dass $a > \alpha$, ist einzusehen, da in der äusseren Stellung des Aufpunktes der (südliche) Erdmagnetismus (der nördlichen Hemisphäre) und der Nordpol der Eisenkugel den Aufpunkt im gleichen Sinne (nach wachsendem x) beeinflussen, in der anderen Stellung aber im entgegengesetzten Sinne. Christiansen bespricht diesen Sprung auch im § 13, ohne davon beim Magnetismus Gebrauch zu machen.

In allgemeiner Bezeichnung, die auch schon in voriger Mittheilung gebraucht wurde, ist

$$a = -\frac{\partial(V+U)}{\partial x}$$

aussen und

$$\alpha = -\frac{\partial(V+U)}{\partial x}$$

innen, oder, wenn ν_i und ν_a die äussere und innere Normale,

$$\frac{\partial(V+U)}{\partial \nu_a} + \frac{\partial(V+U}{\partial \nu_i} + 4\pi\sigma = 0,$$

wobei die Flächendichte an der fraglichen Stelle σ (statt A) heisst. Man kann da die beiden V auch weglassen, da nach vorigem Texte

$$\frac{\partial V}{\partial \nu_a} + \frac{\partial V}{\partial \nu_i} = 0$$

(ohne solchen Sprung) besteht. Wie $A = k\alpha$, ist auch

$$\sigma = k\frac{\partial(V+U)}{\partial(-x)} = k\frac{\partial(V+U)}{\partial \nu_i};$$

dies in der vorigen Gleichung substituirt, kommt die Gleichung c) des § 73 zu Stande

$$4\pi k\frac{\partial V}{\partial \nu_i} + (1+4\pi k)\frac{\partial U}{\partial \nu_i} + \frac{\partial U}{\partial \nu_a} = 0,$$

wenn man dort die beiden V Glieder weglässt; und wenn man sie nicht weglässt (oder in der letzten Gleichung wieder beisetzt), kommt

$$\mu\frac{\partial(V+U)}{\partial \nu_i} + \frac{\partial(V+U)}{\partial \nu_a} = 0,$$

die letzte Gleichung des § 76. Ist k zwischen 5 und 25 von Weber gefunden worden (Kirchhoff XIII § 3), so ist für Eisen μ mindestens 60; Mach notirt in seiner 2. Auflage der Physik vom Jahre 1892 $\mu = 32$. Im leeren Raum ist $k = 0$, also $\mu = 1$, beim Diamagnetismus ist k negativ, also $\mu < 1$.

Augsburg. Prof. Dr. Kurz.

IX.

Beitrag zur kinematischen Theorie der Gelenkmechanismen.

Von

JOHANN KLEIBER,

Hauptlehrer erster Ordnung der städtischen Handelsschule in München.

Hierzu Tafel III Fig. 1—15.

Im Katalog zur Ausstellung der deutschen Mathematiker-Vereinigung, herausgegeben von Prof. Dr. W. Dyck*, habe ich gelegentlich der Beschreibung von mir ausgestellter Modelle eine Reihe von Sätzen über Gebilde der niederen Kinematik ohne Beweise mitgetheilt, welch' letztere nunmehr im Anschluss an eine planmässige Darstellung gewisser Gebiete der Kinematik ihre Erledigung finden werden. Diese Sätze sind meist die Aussprache einer geometrischen Interpretation der Theorie der linearen Punktfunctionen, welche im ersten Theile der vorliegenden Arbeit näher untersucht werden sollen.

Der zweite Theil dagegen beschäftigt sich mit höheren Punktfunctionen und sucht auf dem reichen Feld der sich bietenden Aufgaben neben einer Theorie der Kreis- und Kugelpunkte besonders die von Herrn Prof. Dr. Burmester** in dieser Zeitschrift aufgeworfene Frage nach der Auftheilung eines Stammvierecks in Fachvierecke in genetischem Zusammenhang mit einer Theorie der Vierecke zu behandeln und bezüglich der letzteren Frage insbesonders den Rationalitätsbereich der bekannten Lösungen klarzulegen.

So viel oder wenig interessant die gewonnenen Resultate vielleicht als Einzelleistungen auch erscheinen mögen, sie waren nicht Hauptziel der Darlegungen, sondern die logisch methodische Durchbildung einer genetisch zusammenfassenden Darstellung im Gebiete der niederen Kinematik, bedacht, mit den geringsten Mitteln grösste Klarheit zu erzielen. Wenn man z. B. den vielen Seiten langen Aufwand von Rechnungen bedenkt, der zum

* Katalog mathematischer und mathem.-phys. Modelle, Apparate und Instrumente. Herausgegeben von Walther Dyck. München 1892 und 1893. Vergl. besonders S. 318 u. flg.

** Dr. L. Burmester: „Die Brennpunktsmechanismen", diese Zeitschr. 38, 4.

ersten Beweis in der von Sylvester* gestellten Frage, die auf die simultan dreifache Erzeugung der Koppelcurve führte, nöthig war und dann vergleichend erwägt, dass derselbe Beweis mit ein paar elementaren Ueberlegungen geometrischer Natur erledigt werden kann; wenn man sich ferner vorstellt, in welch' mannigfachen Formen der Kempe'sche Geradführungsgedanke sich praktisch darstellen lässt,** so wird man unwillkürlich an den Gedanken gebannt, es müsse gelingen, die niedere Kinematik der übergeschlossenen Mechanismen als eine organische Einheit darzustellen. Wir dürfen uns nicht genügen lassen, Einzelresultate zu kennen, zu wissen, wie man sie historisch erlangte; nein, es muss auch offenbar werden, warum wir gerade zu den Resultaten gelangen mussten.

In der That liegen die Arbeiten von Peaucellier, Sylvester, Roberts, Hart, Kempe, wenn auch äusserlich verwandt, doch wie erratische Blöcke vor uns, sich selbst genügend, abgerundet, spröde zu weiterer Behandlung. Nur den Arbeiten von Darboux und Burmester ist es gelungen, organisch an Bestehendes anschliessend, weiter zu bauen. Solche Bausteine sind zum Bau zu fügen, fehlende Zwischenglieder auf zufinden und das Ganze nach durchsichtigem, klar methodischem Plane zu gestalten.

Der Boden, auf dem dieser mathematische Bau sich erheben soll, ist natürlich das Coordinatensystem. Es ist geradezu wunderbar, dass die Forscher Englands, des Landes der Quaternionen, in kinematischen Dingen die so fruchtbare Streckenrechnung fast verschmäht und die meist sterile, nur kundigsten Formern sich gebende Methode der Eliminationen verwendet haben. Fast scheint ein gelinder Zweifel am Platze, dass die verwandte Methode den mühelosen Pfad nicht verdecken sollte, um die Resultate desto leuchtender erscheinen zu lassen. Doch sei dem, wie will, auch die Methode der Elimination, algebraischen Umformung, die sich an die Euklid'sche Geometrie anschliesst, hat zu Zeiten ihre Vortheile. Die Wahl des Coordinatensystems wird den weiteren Umständen zu überlassen sein.

Als Handwerkszeug beim Bauen werden uns gewisse Leitsätze nöthig sein; diese werden in verschiedenen Disciplinen verschieden benannt. In der Geometrie Axiome, in der Mechanik Principe, beim Rechnen Rechnungsvortheile, in der Formentheorie Ränderungen etc.

Solche Leitsätze zu kennen ist auch hier von fundamentaler Wichtigkeit, sie gestatten unter fest bestimmten Voraussetzungen Umformungen unserer kinematischen Apparate in andere und demgemäss die Erkenntniss der Gleichwerthigkeit solcher. Die Sätze werden meist einfacher Natur sein, aber sie müssen eben einmal ausgesprochen werden.

---

* Manvergl. hier: Dr. L. Burmester: „Lehrbuch der Kinematik", Leipzig 1888, wo die einschlägige Literatur ausführlich bezeichnet ist.

** Vergl. auch meine zweite Mittheilung, 36, 6 dieser Zeitschrift, § 2.

Dass das Bestreben nach Vereinheitlichung des bisher Gewonnenen bereits zum Ausdruck gekommen ist, zeigt mindestens das Büchelchen Kempe's: „How to draw a straight line". Dasselbe verfolgt die Sache aber nur in Hinsicht auf die Geradführung, also mehr auf dem Gebiete praktischer Verwerthung, als dem methodischer Durchbildung. Aber das Gebiet der von uns angezogenen niederen Kinematik ist weiter, ihr Programm grösser.

Es kann nicht unsere Aufgabe sein, es hier zu lösen, nur einen Schritt zielbewusst vorwärts zu streben, soll es gelten. Dass meine früheren Mittheilungen dies bereits versuchten, wird einem aufmerksamen Leser nicht entgangen sein. Der vorliegende Aufsatz gelte als systematische Fortsetzung dieser Versuche.

I. Theil.

Gebilde der linearen ganzen Punktfunctionen.

§ 1. Ein Uebertragungsprincip.

Verwandte Punktsysteme. Ist irgend eine Configuration von Punkten P in stetem Werden und Wandel begriffen, gleichsam mit Leben begabt, so wechseln und ändern sich gleichzeitig mit ihr mannigfache andere Gebilde von Punkten Q, die in einem bestimmten Abhängigkeitsverhältnisse zum Systeme der P stehen. Solche Punktgruppen Q mögen „verwandt zur Configuration P" genannt werden.

Zwischen zwei der Punkte P — mögen sie von einander unabhängige oder gegenseitig zwangläufig beeinflusste Bahnen beschreiben — spannt sich eine Punktreihe der Q, die wohl am nächsten den Endpunkten P verwandt gedacht werden können. Um sie in die weitere Betrachtung einzuführen, müssen wir sie coordinatisiren.

Sind die Endpunkte — wir nennen sie etwa P_1 und P_2 — völlig unabhängig von einander, so ist es zweifellos, welches Coordinatensystem zu wählen ist. Es ist das bekannte Coordinatensystem auf der Geraden, wobei jeder Punkt durch sein Abstandsverhältniss $\varkappa : \lambda$ von P_1 und P_2 charakterisirt wird. Es drücken sich dann die gewöhnlichen Coordinaten von Q in folgender Weise aus:

$$\left.\begin{aligned} x_Q &= \varkappa x_1 + \lambda x_2 \\ y_Q &= \varkappa y_1 + \lambda y_2 \\ z_Q &= \varkappa z_1 + \lambda z_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{wobei } x_i y_i z_i \text{ die Coordinaten von } P_i \text{ und } \varkappa + \lambda = 1.$$

Diese Gleichungen kann man zunächst symbolisch in eine einzige verwandeln, nämlich in die folgende:

$$Q = \varkappa P_1 + \lambda P_2 \quad (\varkappa + \lambda = 1).$$

Sie gilt in gleicher Weise für den Raum, wie für die Ebene.

Aufstellung eines Uebertragungsprincipes. Wir können aus dieser einfachen Thatsache einen jener Leitsätze aufstellen, von denen in der Einleitung als von einem Handwerkszeug beim Bau unserer Wissenschaft gesprochen worden ist. Wir bezeichnen diesen Satz als das Uebertragungsprincip. Es lautet:

„Jede Eigenschaft eines ebenen Mechanismus, welche nur mit Hilfe der Gleichungen $Q = \varkappa P_1 + \lambda P_2$ hergeleitet worden ist, gilt auch dann noch, wenn der Apparat räumlich beweglich gedacht wird."

In diesem Falle ist an jeder Stelle, wo zwei Stäbe gelenkig in der Ebene verbunden sind, ein sogenanntes Kugelgelenk zu substituiren.

Voraussetzung. Dabei ist aber wohl darauf zu achten, dass alle Beziehungen von der Form $Q = \varkappa P_1 + \lambda P_2$, welche der ebene Mechanismus aus sich selbst aufwies, beim Uebergang zur räumlichen Beweglichkeit nicht zerstört werden. Diese Einschränkung kann meist dahin ausgesprochen werden, dass jedes im ebenen Mechanismus auftretende Parallelogramm auch bei dem Uebergang zur räumlichen Beweglichkeit des Mechanismus als solches erhalten bleiben muss. Denn bezeichnen etwa Q_1 und Q_2 bez. $P_1 P$ Paare von Gegenecken eines Parallelogrammes, so besteht die Beziehung:

$$Q_1 = P_1 + P_2 - Q_2,$$

diese ist aber von der oben angegebenen Art.

Erweiterung. Da ferner die angezogene Art von Relationen in nichts mit den Bedingungen zusammenhängt, welche die Punkte relativ zwangläufig machen (ausgenommen ist der eben besprochene Fall), so können die Abmessungen der Stablängen im Mechanismus beliebig verändert werden. Dies hat eine weitere wichtige Folge. Die Beweglichkeit mancher ebenen Mechanismen ist vielleicht an die Aehnlichkeit von festen Dreiecksflächen gebunden; man vergleiche den Roberts'schen Apparat der simultan dreifachen Erzeugung der Koppelcurve! (Fig. 1.) Geht man aber zum räumlich bewegten Mechanismus über, so können diese Dreiecke willkürlich gewählt werden.

Beispiel. So wurde von mir früher der Satz bewiesen:

„Sind $S_1 S_2 S_3$ drei entsprechend gelegene Punkte in den drei unter sich ähnlichen Dreiecken

$$\overline{A_1 A_2 P};\quad \overline{B_1 P B_2};\quad \overline{P_1\, C_2 C_2}$$

mit dem Koppelpunkt P, so hat der Gegenpunkt S zu P in dem aus den drei Strecken $\overline{PS_1}$, $\overline{PS_2}$, $\overline{PS_3}$ zu construirenden (ebenen) Parallelepipede zum festen Dreiecke ABC dieselbe Lage, wie irgend ein Punkt S_i in seinem entsprechenden Dreiecke (Fig. 2)."

Aus diesem Satz folgt sofort ein entsprechender für den Raum; wir brauchen blos die Aehnlichkeit der Dreiecke wegzulassen und statt des ebenen ein wirkliches Parallelepiped zu setzen. Der Beweis kann auf symbolische Weise jetzt mit einfacheren Schreibmitteln erfolgen wie früher, und zwar in folgender Weise:

Nach Construction ist:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 - 2P,$$

$$\begin{array}{l|l} S_1 = \varkappa A_1 + \lambda A_2 + \mu P & A = B_3 + C_3 - P, \\ S_2 = \varkappa B_1 + \lambda P + \mu B_3 & B = C_2 + A_2 - P, \\ S_3 = \varkappa P + \lambda C_2 + \mu C_3 & C = A_1 + B_1 - P, \end{array}$$

$$\varkappa_1 + \lambda + \mu = 1.$$

Rechnet man hiernach die Grösse S aus, so folgt:

$$S = \varkappa C + \lambda B + \mu A,$$

womit die Behauptung erwiesen ist.

§ 2. Theorie der Pantagraphe.

Räumlich bewegliche Pantagraphe. Die gewählte Coordinatisirung eignet sich ganz besonders zu Betrachtungen, die im Raume mit beweglichen Punktsystemen anzustellen sind, und die im Wesentlichen in der sogenannten Punkt- bez. Streckenaddition ihren Ausdruck finden. Solchen Betrachtungen sind wohl die primitivsten Apparate, welche gestatten, eine veränderliche Grösse in einem bestimmten Verhältniss zu vergrössern oder zu verkleinern (kurz: mit einer rellen Zahl zu multipliciren) zu verdanken, wie sie von Sylvester unter dem Namen Pantagraph (Storchschnabel, Scheere) angegeben wurden und vielfach in der Praxis Verwendung finden. Auf diese einfachen Apparate soll hier nicht näher eingegangen werden, sondern nur auf analoge Bildungen im Raume, die wohl am Besten als Raumpantagraphe zu bezeichnen sind.

Löst ein Pantagraph nur die oben angedeutete Multiplicationsaufgabe, so heisst er auch einfacher Multiplicator. Ein erweiterter Pantagraph hat die Eigenschaft, zu mehr als zwei Punkten P_i einen solchen Punkt Q zu construiren, der der Gleichung

$$Q = \varkappa_1 P_1 + \varkappa_2 P_2 + \varkappa_3 P_3 + \cdots \quad (\Sigma \varkappa_i = 1)$$

entspricht, worin die $\varkappa_i$ bestimmte reelle Zahlenwerthe haben.

Das Schema eines Pantagraphen. Bei räumlichen Pantagraphen kommen häufig so viele Punkte in Betracht, dass es ziemlich umständlich wäre, ihre Anordnung im Raume, ihre Verbindungen und Beziehungen im Kopfe zu behalten oder einer Textbeschreibung zu entnehmen. Bei den unten behandelten Fällen soll dem durch Aufstellung eines Punkteschemas oder einer symbolischen Gleichung, die auch in eine wirkliche übergehen kann, abgeholfen werden.

Ein solches Schema hat meist folgende Gestalt:

$$\left\| \begin{array}{c|c||c} \ldots T_1 S_1 & A_1 A_2 A_3 \ldots A_n & (a) \\ \ldots T_2 S_2 & B_1 B_2 \ldots\ldots B_n & (b) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \ldots T_\varkappa S_\varkappa & M_1 M_2 \ldots\ldots M_n & (m) \\ \hline \ldots T\, S & X\, Y \ldots\ldots W & (\varrho) \end{array} \right\| = 0.$$

Die Matrix des Schemas ist durch einen Horizontal- bez. Verticalstrich in vier Theile zerlegt. Der Theil rechts oben bezeichnet die dem Apparate eigenthümlichen Grundpunkte, die angrenzende Ränderung die aus den vorhergehenden zu construirenden verwandten Punkte. Jede horizontale Zeile des Systems der Grundpunkte stellt einen „Körper" dar; und zwar sollen diese „Körper" (oben sind deren $\varkappa$ angenommen) so affin auf einander bezogen sein, wie ihre Ecken in den Colonnen unter einander stehen. Diese „Körper" werden in unseren folgenden Betrachtungen zumeist als unveränderlich gross angenommen.

Das in den „Körpern" enthaltene Punktsystem kann durch Zufügen neuer Punktgruppen erweitert werden. Die dem „Körper" der A zugefügten Punkte S_1, $T_1 \ldots$ sind mit den A in gleicher Zeile, links oben in der Matrix zu finden. Die Punktgruppen werden so gewählt, dass die erweiterten Körper immer noch so affin einander zugeordnet bleiben, wie die Colonnen es andeuten.

Rechts unten in der Matrix steht eine Punktreihe X, $Y, \ldots W$. Davon stellt in unseren Anwendungen jeder den Resultantenpunkt eines Additionskörpers vor, der entsteht, wenn man von dem (rechts vom Doppelstrich der Matrix verzeichneten) Punkt ϱ als Haupt die Summe der Strecken, die in einer Colonne stehen, bildet. Eigentlich stehen in der jeweils gewählten Colonne nur die Endbuchstaben der Strecken, die Anfangsbuchstaben stehen — weil allen Colonnen gemeinsam — rechts ausserhalb des Doppelstriches der Matrix. Wir haben also z. B.:

$$\begin{aligned} \overline{\varrho X} &= \overline{a A_1} + \overline{b B_1} + \cdots + \overline{m M_1}, \\ \overline{\varrho Y} &= \overline{a A_2} + \overline{b B_2} + \cdots + \overline{m M_2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overline{\varrho W} &= \overline{a A_n} + \overline{b B_n} + \cdots + \overline{m M_n}. \end{aligned}$$

Im Falle wir ein noch weiter nach unten gerändertes Schema benützen oder aufstellen wollten, hätten wir nur die Summanden mit Factoren $\varkappa_i \lambda_i \mu_i \ldots$ zu versehen. Für jedes i folgt eine Zeile.

Links unten in der Matrix steht eine Punktreihe S, $T, \ldots$, welche wir kurz als den Lehrsatz bezeichnen können. Zu diesen Punkten kann man auf zweierlei Art gelangen. Einmal, indem man die Punktreihe oder den „Körper" $(XY...W)$ durch die Punkte S, T erweitert, die den Punkten $S_i T_i$ der anderen Körper affin entsprechen; oder, indem man die Resultantenpunkte der Additionskörper zu den Colonnen der S_i bez. T_i etc. bildet. Dass man in beiden Fällen auf dieselben Punkte kommt, bildet den Lehrsatz.

Beweis des Lehrsatzes. Wir erweisen die Richtigkeit des Satzes für Punkt S; analog gestaltet er sich für T u. s. w. Da S_1 im „Körper" der A eine bestimmte (affin unveränderliche) Lage haben soll, ferner $S_2, S_3 ... S_\varkappa$ zu S_1 affin homolog sein sollen in den anderen Körpern, so besteht diese Reihe von Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = \varkappa_1 A_1 + \varkappa_2 A_2 + \cdots + \varkappa_n A_n \\ S_2 = \varkappa_1 B_1 + \varkappa_2 B_2 + \cdots + \varkappa_n B_n \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ S_\varkappa = \varkappa_1 M_1 + \varkappa_2 M_2 + \cdots + \varkappa_n M_n \end{array}\right\} (\Sigma \varkappa_i = 1).$$

Nehmen wir nun an, S sei der Resultantenpunkt zu den S_i, so besteht doch die fernere Gleichung:

$$\overline{\varrho S} = \overline{a S_1} + \overline{b S_2} + \cdots + \overline{m S_\varkappa}$$

$$= (S_1 - a) + (S_2 - b) + \cdots + S_\varkappa - m).$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}(S_1 - a) &= (\varkappa_1 A_1 + \varkappa_2 A_2 + \cdots + \varkappa_n A_n) - a \\ &= (\varkappa_1 A_1 + \varkappa_2 A_2 + \cdots + \varkappa_n A_n) - (\varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_n) a \\ &= \varkappa_1 (A_1 - a) + \varkappa_2 (A_2 - a) + \cdots + \varkappa_n (A_n - a) \\ &= \varkappa_1 \overline{a A_1} + \varkappa_2 \overline{a A_2} + \cdots + \varkappa_n \overline{a A_n}.\end{aligned}$$

Substituirt man diesen und die entsprechenden Werthe von

$$(S_2 - a), \ldots (S_k - m)$$

in der Gleichung für $\overline{\varrho S}$, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}\overline{\varrho S} = & (\varkappa_1 \overline{a A_1} + \varkappa_2 \overline{a A_2} + \cdots + \varkappa_n \overline{a A_n}) \\ & + (\varkappa_1 \overline{b B_1} + \varkappa_2 \overline{b B_2} + \cdots + \varkappa_n \overline{b B_n}) \\ & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ & + (\varkappa_1 \overline{m M_1} + \varkappa_2 \overline{m M_2} + \cdots + \varkappa_n \overline{m M_n}).\end{aligned}$$

Addirt man colonnenweise, so folgt:

$$\begin{aligned}\overline{\varrho S} = & \varkappa_1 (\overline{a A_1} + \overline{b B_1} + \cdots + \overline{m M_1}) \\ & + \varkappa_2 (\overline{a A_2} + \overline{b B_2} + \cdots + \overline{m M_2}) \\ & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ & + \varkappa_n (a A_n + \overline{b B_n} + \cdots + m M_n).\end{aligned}$$

Benützt man nun die bereits oben für die Resultantenpunkte $X, Y ... W$ aufgestellten Gleichungen, so folgt zunächst:

$$\overline{\varrho S} = \varkappa_1 \overline{\varrho X} + \varkappa_2 \overline{\varrho Y} + \cdots + \varkappa_n \cdot \overline{\varrho W}.$$

Löst man die Strecken in Punktdifferenzen auf, so folgt:

$$\begin{aligned}(\overline{S-\varrho}) &= \varkappa_1(\overline{X-\varrho}) + \varkappa_2(\overline{Y-\varrho}) + \cdots + \varkappa_n(\overline{W-\varrho}) \\ &= (\varkappa_1 X + \varkappa_2 Y + \cdots + \varkappa_n W) - (\varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_n)\varrho.\end{aligned}$$

Da nun $(\varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_n) = 1$ ist, hebt sich beiderseits ϱ weg und es bleibt:

$$S = \varkappa_1 X + \varkappa_2 Y + \cdots + \varkappa_n W,$$

das heisst, der Punkt S liegt im „Körper" der X, Y, ... W genau so, wie die affin homologen S_i in den ihnen entsprechenden „Körpern" (Horizontalreihen).

Die symbolische Gleichung. Wir haben das Schema der Pantagraphen gleich Null gesetzt. Dies ist zunächst symbolisch zu nehmen. Bilden wir die Matrix aber dadurch um, dass wir statt der Buchstaben der Colonnen die Strecken setzen, deren Endbuchstaben sie bilden (die Anfangsbuchstaben finden sich rechts vom Doppelstrich der Matrix), so muss — unter den oben gemachten Annahmen — jede Unterdeterminante verschwinden, welche wenigstens um eine Zeile oder Colonne weiter ist, als das Schema der Grundpunkte, das heisst:

$$\left\| \begin{array}{cc|ccc} \ldots \overline{aT_1} & \overline{aS_1} & \overline{aA_1} & \overline{aA_2} \ldots & \overline{aA_n} \\ \ldots \overline{aT_2} & \overline{aS_2} & \overline{bB_1} & \overline{bB_2} \ldots & \overline{bB_n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \ldots \overline{aT_\varkappa} & \overline{aS_\varkappa} & \overline{mM_1} & \overline{mM_2} \ldots & \overline{mM_n} \\ \hline \ldots \overline{\varrho T} & \overline{\varrho S} & \overline{\varrho X} & \overline{\varrho Y} \ldots & \overline{\varrho W} \end{array} \right\| = 0.$$

Dies erkennt man leicht, wenn man berücksichtigt, dass die Summe der $\varkappa$ Zeilen der letzten gleich ist, bez. dass die mit bestimmten Factoren $\varkappa_i$ multiplicirten letzten n Colonnen die vor diesen stehenden erzeugen.

Der Koppelpunkt. Findet sich in den Punktreihen, welche zwei der „Körper" charakterisiren, ein gleich bezeichneter Punkt, so ist dieser ein gemeinsamer oder Koppelpunkt der Körper. Findet sich der Name desselben in derjenigen Ecke der Matrix, welche die Grundpunkte enthält, so ist er affin auf andere Punkte bezogen; kommt er aber in der Matrix überhaupt nicht vor, so ist er meist willkürlich wählbar.

Invarianzeigenschaft. Aus dem Beweise des zum Schema des Pantagraphen gehörigen Lehrsatzes kann man entnehmen, dass derselbe von der Wahl derjenigen Punkte unabhängig ist, welche rechts von der Matrix stehen. Dieselben können also bei der Construction von Apparaten beliebig gewählt werden, zuweilen fallen sie in einen Punkt zusammen, der dann meist auch Koppelpunkt der „Körper" ist. Aus dieser Invarianzeigenschaft könnten wieder Schlüsse bezüglich der symbolischen Gleichung gezogen werden, doch führt dies von unserer eigentlichen Aufgabe ab.

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir nun zur Beschreibung einzelner Typen von Pantagraphen übergehen.

Pantagraph a) entspricht dem Schema:

$$\left\|\begin{array}{c|cc||c} S_1 & A_0 & A_1 & (A_0) \\ S_2 & A_1 & A_2 & (A_1) \\ S_3 & A_2 & A_3 & (A_2) \\ S_4 & A_3 & \ldots & (A_3) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_n & A_{n-1} & A_n & (A_{n-1}) \\ \hline S & A_0 & A_n & (A_0) \end{array}\right\| = 0 \quad \text{(Fig. 3)}.$$

Erklärung. Wir haben eine Kette von Stäben, wie aus dem Schema der Grundpunkte (Matrix, rechts oben) zu entnehmen ist. Die Kettenstäbe sind cyklisch affin bezogen und auf ihnen je ein homolog affiner Punkt S_i fixirt. An die Kette ist, vom Haupte A_0 ausgehend, ein Netz von Parallelogrammen gelegt, welches den Additionskörper versinnlicht. Der Endpunkt des letzteren ist ein Punkt S, der auf der Verbindungslinie $\overline{A_0 A_n}$ ebenso liegt, wie irgend ein S_i auf dem zugehörigen Stabe $\overline{S_{i-1} S_i}$.

Diese räumlich bewegliche Kette (Parallelogramme müssen erhalten bleiben!) stellt einen einfachen Multiplicator dar. Dieselbe wurde bereits — allerdings in anderer Form in meiner ersten Mittheilung zum Schluss von § 6 — besprochen. Von diesem Pantagraphen dürfte besonders der Specialfall der dreigliedrigen Kette interessiren.

Pantagraph b) entspricht dem Schema:

$$\left\|\begin{array}{c|ccc||c} S_1 & A & P & P & (P) \\ S_2 & P & B & P & (P) \\ S_3 & P & P & C & (P) \\ \hline S & A & B & C & (P) \end{array}\right\| = 0 \quad \text{(Fig. 4)}.$$

Die Erklärung des Schemas der (rechts oben) stehenden Grundpunkte besagt, dass wir drei vom Koppelpunkt P auslaufende Stäbe haben: PA, PB, PC. Auf jedem dieser Stäbe ist ein Punkt S_1 bez. S_2 bez. S_3 markirt, welche homolog affin entsprechend sind, aber nicht in der Weise, dass jeder Stab vom Punkte im gleichbleibenden Verhältniss getheilt wird, denn es ist ja

$$S_1 = \varkappa A + (\lambda + \mu) P,$$
$$S_2 = \lambda B + (\varkappa + \mu) P,$$
$$S_3 = \mu C + (\varkappa + \lambda) P,$$
$$(1 = \varkappa + \lambda + \mu).$$

Von P aus ist aus den drei Strecken PS_1, PS_2, PS_3 das Additionsparallelepiped construirt, dessen Resultantenpunkt S nach unserem Lehrsatze homolog affin veränderlich mit dem Dreieck ABC ist, das heisst

$$S = \varkappa A + \lambda B + \mu C.$$

Wir haben es also mit einem Pantagraphen zu thun, der zum veränderlichen Dreieck ABC den Theilungspunkt

$$S = \varkappa A + \lambda B + \mu C$$

construirt.

Pantagraph c) entspricht dem Schema:

$$\left\| \begin{array}{c|cccc} S_1 & A & P & P & P \\ S_2 & P & B & P & P \\ S_3 & P & P & C & P \\ S_4 & P & P & P & D \\ \hline S & A & B & C & D \end{array} \right\| \begin{array}{c} (P) \\ (P) \\ (P) \\ (P) \\ \hline (P) \end{array} = 0 \text{ (Fig. 5).}$$

Erklärung: Vom Punkt P gehen vier Stäbe aus nach den Punkten eines veränderlichen Tetraeders A, B, C, D. Auf ihnen sind in gewisser Weise [vergl. oben Fall b)] Punkte S_i markirt und schliesslich aus den von P nach den S_i liegenden Theilstrecken mit dem Haupte P der Additionskörper construirt, der hier ein parallelogrammflächiges Dodekaeder wird. Der Resultantenpunkt S desselben genügt der Formel:

$$S = \varkappa A + \lambda B + \mu C + \nu D$$
$$(1 = \varkappa + \lambda + \mu + \nu).$$

Die Grössen $\varkappa$, λ, μ, ν sind bestimmte, wenn die S_i richtig bestimmt sind.

Satz zu den Pantagraphen b) und c). Ist der Resultantenpunkt S im nicht degenerirten Dreieck $\overline{ABC}$ bez. Tetraeder $\overline{ABCD}$ einmal gewählt, so gehört dazu ein ganz bestimmtes System der S_i. Dann ist nämlich die Reihe $\varkappa$, λ, μ, bez. $\varkappa$, λ, μ, ν fest bestimmt, folglich auch die S_i.

$$S_1 = \varkappa A + (\lambda + \mu)P \text{ etc. für den Pantagraph b),}$$
$$S_1 = \varkappa A + (\lambda + \mu + \nu)P \text{ etc. für den Pantagraph c).}$$

Dieser Satz wird uns später bei Ableitung von übergeschlossenen Raumfiguren nützlich sein.

Pantagraph d) entspricht dem Schema:

$$\left\| \begin{array}{c|ccc} S_1 & A_1 & B_1 & C_1 \\ S_2 & A_2 & B_2 & C_2 \\ \hline S_3 & A_3 & B_3 & C_3 \end{array} \right\| \begin{array}{c} (P) \\ (P) \\ \hline (P) \end{array} = 0 \text{ (Fig. 6).}$$

Erklärung: Wir haben zwei Tetraeder, die in einem Eckpunkt P gekoppelt sind und deren Basisflächen affin einander zugeordnet erscheinen. In denselben befinden sich die homolog affinen Punkte S_1 und S_2. Aus den von P auslaufenden paarweis zugeordneten Tetraederkanten werden Parallelogramme construirt mit den Resultantenpunkten $A_3 B_3 C_3$.

Construirt man in analoger Weise aus den von P nach den Punkten S_1 und S_2 gehenden Strecken das Parallelogramm, so ist dessen Resultantenpunkt S invariabler Theilpunkt der veränderlichen Ebene $A_3 B_3 C_3$ der erst erhaltenen Resultantenpunkte.

Aus dem allgemeinen Pantagraph d) ergiebt sich folgender speciellere Pantagraph d'):

$$\left\|\begin{array}{c|ccc||c} P & A_1 & B_1 & C_1 & (P) \\ S & A_2 & B_2 & C_2 & (P) \\ \hline S & A_3 & B_3 & C_3 & (P) \end{array}\right\| = 0 \quad (\text{Fig. } 7).$$

Erklärung: Der Koppelpunkt P wird beliebig in der Dreiecksfläche $\overline{A_1 B_1 C_1}$ gewählt. Wir haben also nur noch ein Tetraeder, das mit seiner Spitze P um einen Punkt P einer Dreiecksfläche drehbar erscheint. A_3, B_3, C_3 werden wie oben construirt. Der dem Punkt P von $\overline{A_1 B_1 C_1}$ entsprechende Punkt S in der affin zugeordneten Deckfläche $\overline{A_2 B_2 C_2}$ des Tetraeders ist dann auch der feste Theilpunkt des veränderlichen Dreiecks der Resultantenpunkte A_3, B_3, C_3. — Aus dem eben beschriebenen Pantagraphen d) kann durch fortgesetzte Combination desselben Typus ein neuer Pantagraph d'') entwickelt werden, der eine beliebig hohe Beweglichkeit erhalten kann (Fig. 8). Man setze nämlich auf den Pantagraph d') einen zweiten von derselben Art, so dass für letzteren das Deckdreieck $\overline{A_3 B_3 C_3}$ des ersten Apparates zugleich als Grunddreieck erscheint und der Punkt S im Deckdreieck $\overline{A_2 B_2 C_2}$ zur Tetraederspitze des zweiten Apparates wird. Durch gehöriges Anfügen von Parallelogrammen erreicht man dann die Deckfläche des neuen Apparates $\overline{A_5 B_5 C_5}$:

$$\left\|\begin{array}{c|ccc||c} S & A_3 & B_3 & C_3 & (S) \\ T & A_4 & B_4 & C_4 & (S) \\ \hline T & A_5 & B_5 & C_5 & (S) \end{array}\right\| = 0.$$

Der Punkt T der Tetraederfläche $\overline{A_4 B_4 C_4}$ theilt nun wieder das veränderliche Dreieck $\overline{A_5 B_5 C_5}$ ebenso wie S die Tetraederfläche $\overline{A_2 B_2 C_2}$ und P die Dreiecksfläche $\overline{A_1 B_1 C_1}$.

Auf den gewonnenen Apparat werde nun der folgende

$$\left\|\begin{array}{c|ccc||c} T & A_5 & B_5 & C_5 & (T) \\ U & A_6 & B_6 & C_6 & (T) \\ \hline U & A_7 & B_7 & C_7 & (T) \end{array}\right\| = 0$$

gesetzt u. s. f. Auf die bezeichncte Art kann man beliebig viele Tetraeder auf einander bauen; immer gilt der Satz, der für den einfachen Pantagrahhen d′) Geltung hat.

Pantagraph e) entspricht dem Schema:

$$\left\| \begin{array}{c|ccc||c} P & A_1 & B_1 & C_1 & (P) \\ P & A_2 & B_2 & C_2 & (P) \\ \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot & & & \cdot\,\cdot \\ \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot & & & \cdot\,\cdot \\ P & A_n & B_n & C_n & (P) \\ \hline P & A & B & C & (P) \end{array} \right\| = 0 \quad \text{(Fig. 9).}$$

Erklärung: Wir haben n Dreiecke, welche in einem Punkte P gekoppelt sind, der in allen Dreiecken homolog affin entsprechend liegt. Zu den von P ausgehenden Systemen von n Kanten

$$\begin{array}{ll} \overline{PA_1} & PA_2 \ldots PA_n, \\ PB_1 & PB_2 \ldots PB_n, \\ PC_1 & PC_2 \ldots PC_n \end{array}$$

werden die Additionskörper construirt, welche die Resultantenpunkte A, B, C ergeben. Das Dreieck derselben wird dann durch den Punkt P nach festem Verhältniss getheilt. Im Falle wir zwei, drei oder vier Dreiecke gekoppelt haben, ist der Additionskörper ein Parallelogramm, ein Parellelepiped oder ein Dodekaeder.

Pantagraph f) entspricht dem Schema:

$$\left\| \begin{array}{c|cccc||c} P & A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & (P) \\ P & A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & (P) \\ P & A_3 & B_3 & C_3 & D_3 & (P) \\ \hline P & A & B & C & D & (P) \end{array} \right\| = 0 \quad \text{(Fig. 10).}$$

Erklärung: Wir haben drei affin bezogene Tetraeder $A_i B_i C_i D_i$, welche in einem allen „Körpern" affin homologen Punkt P gekoppelt sind. Aus den Kantentripeln

$$\begin{array}{c} PA_1 + PA_2 + PA_3, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ PD_1 + PD_2 + PD_3 \end{array}$$

werden, von P ausgehend, die Additionskörper mit den Resultantenpunkten A, B, C, D gebildet. Der Lehrsatz besagt, dass der Punkt P den „Körper" $ABCD$ nach demselben Verhältnisse theilt, wie irgend eines der gegebenen Tetraeder $A_i B_i C_i D_i$.

Pantagraph g) entspricht dem Schema:

$$\left\| \begin{array}{c|cccc|} S_1 & A_1 & B_1 & C_1 & P \\ S_2 & A_2 & B_2 & P & D_2 \\ S_3 & A_3 & P & C_3 & D_3 \\ S_4 & P & B_4 & C_4 & D_4 \\ \hline S & A & B & C & D \end{array} \right\| \begin{array}{c} (P) \\ (P) \\ (P) \\ (P) \\ \hline (P) \end{array} = 0 \text{ (Fig. 11).}$$

Erklärung: Wir haben vier affin bezogene, cyklisch gekoppelte Tetraeder. Die Resultantenpunkte A, B, C, D, welche zu den Additionskörpern:

$$\begin{array}{l} PA_1 + PA_2 + PA_3 + *, \\ PB_1 + PB_2 + \ * \ + PB_4, \\ PC_1 + \ * \ + PC_3 + PC_4, \\ \ * \ + PD_2 + PD_3 + PD_4 \end{array}$$

gehören (Parallelepipede), enthalten als festen Theilpunkt S, den Resultantenpunkt des zur Summe

$$PS_1 + PS_2 + PS_3 + PS_4$$

gehörigen Dodekaeders.

Einen Pantagraphen g′) derselben Art haben wir bei anderen Erörterungen kennen gelernt. Derselbe entspricht dem Schema:

$$\left\| \begin{array}{c|ccc|} S_1 & A_1 & A_2 & P \\ S_2 & B_1 & P & B_3 \\ S_3 & P & C_2 & C_2 \\ \hline S & C & B & A \end{array} \right\| \begin{array}{c} (P) \\ (P) \\ (P) \\ \hline (P) \end{array} = 0 \text{ (Fig. 2).}$$

(Vergl. auch § 1 Schluss.)

Kürzt man das Schema noch weiter ab:

$$\left\| \begin{array}{c|cc|} S_1 & A & P \\ S_2 & P & B \\ \hline S & A & B \end{array} \right\| \begin{array}{c} (P) \\ (P) \\ \hline (P) \end{array} = 0 \text{ (Fig. 12),}$$

so gelangt man auf den einfachsten aller Multiplicatoren, auf den Sylvester'schen Storchschnabel. Derselbe geht gleichzeitig auch als Specialfall des Pantagraphen a) [Kette mit zwei Gliedern] hervor.

Pantagraph h) entspricht dem Schema:

$$\left\| \begin{array}{c|ccc|} S_1 & A_1 & B_1 & P \\ S_2 & A_2 & P & C_2 \\ S_3 & P & B_3 & C_3 \\ P & A_4 & B_4 & C_4 \\ \hline S & A & B & C \end{array} \right\| \begin{array}{c} (P) \\ (P) \\ (P) \\ (P) \\ \hline (P) \end{array} = 0 \text{ (Fig. 13).}$$

Erklärung: Wir haben vier affin bezogene Ebenen, in jeder derselben vier Punkte festgelegt und schliesslich die ebenen Vierecke cyklisch gekoppelt. Die Resultantenpunkte S, A, B, C der zu den Summen

$$\begin{aligned} &PS_1 + PS_2 + PS_3 + *, \\ &PA_1 + PA_2 + \;*\; + PA_4, \\ &PB_1 + \;*\; + PB_3 + PB_4, \\ &\;*\; + PC_2 + PC_3 + PC_4 \end{aligned}$$

gehörigen, von P auslaufenden Additionskörpern (hier Parallelepipede) liegen in einer Ebene und theilt in dieser der Punkt S das Dreieck der $\overline{ABC}$ nach festem Verhältniss, wie aus dem Schema ersichtlich.

Lassen wir den „Körper" der vierten Zeile in einen Punkt zusammenschrumpfen, so haben wir den Typus des Pantagraphen g') [Fig. 2].

Als Specialfall wäre noch erwähnenswerth:

$$\left\| \begin{array}{c|ccc||c} A_1 & A & A & P & (P) \\ B_1 & B & P & B & (P) \\ C_1 & P & C & C & (P) \\ P & U & V & W & (P) \\ \hline S & X & Y & Z & (P) \end{array} \right. = 0.$$

Pantagraph i) entspricht dem Schema:

$$\left\| \begin{array}{c|ccc||c} P & U & V & W & (P) \\ X' & X & P & P & (P) \\ Y' & P & Y & P & (P) \\ Z' & P & P & Z & (P) \\ \hline S & A & B & C & (P) \end{array} \right. = 0 \quad \text{(Fig. 14)}.$$

Erklärung: Wir haben ein Dreieck UVW und in dessen Ebene einen Punkt P. Von diesem laufen drei Strecken $\overline{PX}$, $\overline{PY}$, $\overline{PZ}$ aus, auf denen in bestimmter Weise die Punkte $X'Y'Z'$ markirt sind. Aus den drei Theilstrecken

$$\overline{PX'},\quad \overline{PY'},\quad \overline{PZ'}$$

wird der Additionskörper (hier Parallelepiped) gebildet, dessen Resultantenpunkt S ist. Derselbe theilt das Dreieck der aus den Parallelogrammen zu

$$\begin{aligned} \overline{PU} + \overline{PX} &= \overline{PA}, \\ \overline{PV} + \overline{PY} &= \overline{PB}, \\ \overline{PW} + \overline{PZ} &= \overline{PC} \end{aligned}$$

gehörigen Resultantenpunkte A, B, C in festem Verhältniss. Dabei spielt S für das Dreieck ABC dieselbe Rolle, wie P für das Dreieck UVW.

Die drei Strecken $\overline{PX}$, $\overline{PY}$, $\overline{PZ}$ sind nicht im gleichen Verhältniss zu theilen; denn es ist ja:

$$X' = \varkappa X + (\lambda + \mu) P$$
$$Y' = \lambda Y + (\varkappa + \mu) P$$
$$Z' = \mu Z + (\varkappa + \lambda) P$$
$$(1 = \varkappa + \lambda + \mu).$$

Statt die Strecke $\overline{PX}$ zu theilen, kann man auch die im Parallelogramm gegenüberliegende Strecke $\overline{UA}$ in gleicher Weise durch einen Punkt A' theilen. Dann kann man auch statt des grösseren Parallelogramms $(\overline{PX}\,\overline{UA})$ das kleinere $(\overline{PX'}\,\overline{UA'})$ benützen, wie in Fig. 14 geschehen.

Pantagraph j) entspricht dem Schema:

$$\left\| \begin{array}{c|cccc|c} P & U & V & W & M & (P) \\ X' & X & P & P & P & (P) \\ Y' & P & Y & P & P & (P) \\ Z' & P & P & Z & P & (P) \\ R' & P & P & P & R & (P) \\ \hline S & A & B & C & D & (P) \end{array} \right\| = 0 \text{ (Fig. 15).}$$

Erklärung. Von einem Punkt P eines Tetraederkörpers $UVWM$ laufen vier Strecken nach den Punkten X, Y, Z, R. Auf diesen Strecken sind in bestimmter Weise Punkte X', Y', Z', R' markirt und aus den Theilstrecken von P nach diesen Punkten der Additionskörper (Dodekaeder) construirt, dessen Gegenpunkt S ist. Dieser theilt in fester Weise das Tetraeder der Resultantenpunkte A, B, C, D von vier Parallelogrammen, welche zu den Summen:

$$\overline{PU} + \overline{PX} = \overline{PA},$$
$$\overline{PV} + \overline{PY} = \overline{PB},$$
$$\overline{PW} + \overline{PZ} = \overline{PC},$$
$$\overline{PM} + \overline{PR} = \overline{PD}$$

gehören. S hat im Tetraeder $\overline{ABCD}$ dieselbe Lage, wie P im Tetraeder $\overline{UVWM}$. Die Theilung auf den Strecken $\overline{PX}$, $\overline{PY}$, $\overline{PZ}$, $\overline{PR}$ erfolgt in der Weise, dass

$$X' = \varkappa X + (\lambda + \mu + \nu) P$$
$$Y' = \lambda Y + (\varkappa + \mu + \nu) P$$
$$Z' = \mu Z + (\varkappa + \lambda + \nu) P$$
$$R' = \nu R + (\varkappa + \lambda + \mu) P$$
$$(1 = \varkappa + \lambda + \mu + \nu).$$

Man ersieht hieraus, dass die Theilpunkte auf drei der Strecken bereits jenen auf der vierten von selbst bestimmen; dadurch ist dann auch der Theilpunkt P des Tetraeders $\overline{UVWM}$, wie der Theilpunkt S des Tetraeders $ABCD$ festgelegt.

Zu jedem Punkt des Tetraeders $\overline{ABCD}$, das man sich festgelegt denken kann, gehört ein bestimmtes System $[\varkappa, \lambda, \mu, \nu]$, also auch eine ganz bestimmte Theilung der von P ausgehenden Stäbe $\overline{PX}$, $\overline{PY}$, $\overline{PZ}$, $\overline{PR}$ und ein bestimmter Punkt P des Tetraeders $\overline{UVWM}$.

Ein Specialfall j') des vorhergehenden Pantagraphen wird erzielt, wenn das Tetraeder $\overline{UVWM}$ in ein ebenes ausartet. In diesem Falle entspricht einem in der Ebene $\overline{UVWM}$ gewählten Punkte P nicht blos ein System von Werthen $[\varkappa, \lambda, \mu, \nu]$, sondern ein ganzes lineares Gebiet $\mathfrak{A}$ von solchen Quadrupeln. Dies zieht nach sich, dass einem Punkte P von $\overline{UVWM}$ nicht blos ein Punkt von $\overline{ABCD}$, sondern eine geradlinige Punktreihe von Punkten S correspondirt. Allerdings werden die Anschlusspunkte X', Y', Z', R' andere, aber die sämmtlichen Additionskörper (Dodekaeder) haben dieselbe gemeinsame Ecke. Unter Ecke ist dabei nicht blos der Punkt P, sondern gleichzeitig die von Flächen begrenzte körperliche Ecke zu verstehen. Diese Thatsache soll später Verwendung finden.

Weitere Pantagraphe könnten noch in grosser Zahl entwickelt werden. Einmal dadurch, dass man zu einer ersten symbolischen Gleichung noch eine oder eine Reihe weiterer hinzufügt, oder auch dadurch, dass man Specialisirungen bei den bereits aufgezählten und analogen eintreten lässt. Solche Specialisirungen sind z. B.:

1. Man lässt den einem „Körper" affin zugeordneten Punkt in einen Eckpunkt, Koppelpunkt fallen.
2. Man lässt den „Körper" nach und nach degeneriren in ein Punktsystem einer Ebene bez. einer Geraden, oder, man lässt den „Körper" in einen Punkt zusammenschrumpfen.

Treten mehrere „Körper" gleichzeitig auf, so kann man die Degeneration in verschiedenen Stufen auf einige derselben oder gleichzeitig auf alle anwenden. Doch soll auf die Ausführung dieses Gedankens nicht weiter eingegangen werden.

§ 3. Mehrfache Erzeugung von Gebilden.

Mehrfache Erzeugung von Kreisen. Man hat zuweilen beim Studium ebener kinematischer Stabgebilde Gelegenheit, zu bemerken, dass Punkte des Mechanismus zwangläufig Kreise beschreiben, ohne dass dabei deren Mittelpunkt und Radius als solche schon vorbedacht angenommen worden waren. Hat man zwei Mechanismen Ω_1 und Ω_2, deren zugehörigen Punkte P_1 bez. P_2 Kreise von gleicher Grösse beschreiben, so kann man die Fixpunkte beider Apparate (hier zufällig auf ∞ viele Arten) so anordnen, dass die von den P beschriebenen Peripherien sich decken, das heisst diese

Punkte P zu einem gekoppelt werden können. Hat man zwei oder mehr Apparate Ω_i solchergestalt gegen einander orientirt und im kreiserzeugenden Punkt gekoppelt, so spricht man von einer simultan mehrfachen Kreiserzeugung. Dieselbe giebt zu übergeschlossenen Mechanismen in vielfacher Art Anlass. Statt z. B. direct die Punkte dreier orientirter Mechanismen zu koppeln, kann man sie an die Eckpunkte eines festen Dreiecks koppeln, das nur der einen Bedingung unterworfen ist, dass sein umschriebener Kreis der von den Mechanismen erzeugte ist u. s. f. u. s. f.

Mehrfache Erzeugung der sogenannten Koppelcurve (Fig. 1 und 2). Roberts zeigte zuerst, dass man nuch die sogenannte Koppelcurve bei der erweiterten three bar motion mehrfach erzeugen kann. Die drei möglichen Mechanismen Ω_i, von denen je zwei einen Fixpunkt gemeinsam haben, geben in ihrer Zusammensetzung (Orientirung und Koppelung) den Anblick der Figur 1. Bisher glaubte man, dass diese drei Mechanismen die einzigen sind, durch welche die Koppelcurve erzeugt werden kann. In meiner ersten Mittheilung habe ich aber gezeigt, dass dem nicht so ist. Nach zwei Richtungen hin wurde der Beweis für diese Behauptung erbracht. An erster Stelle kann man das dort entwickelte Princip vom Austausch von Dreiecken und Parallelogrammen zur Anwendung bringen, wodurch der Aspect der Figur 1 verändert werden kann. An zweiter Stelle wurde gezeigt, dass zum Mechanismus Roberts nach Art der Figur 2 noch ∞^2 Fixpunkten nachgewiesen werden können, welche gleichberechtigt neben den Fixpunkten des Roberts'schen Mechanismus stehen; die letzteren sind nur sozusagen Umrisspunkte zum Gebiet der andern, indem sie als Resultantenpunkte von zu Parallelogrammen degenerirten Parallelepipeden aufzufassen sind. Da aber nur zwei Fixpunkte zur Führung der Koppelcurve nothwendig sind, so würden damit gerade ∞^4 simultan gleichberechtigte Erzeugungsarten der Roberts'schen parallel laufen.

Der Nachweis für die Existenz dieser Erzeugungsarten konnte dort mit den einfachen Mitteln der Punktaddition geführt werden, gehört also in das Gebiet, welches wir soeben mit der Besprechung der Pantagraphen betreten haben. In der That gelingt es hier, den dort aufgestellten Beweis bedeutend zu verallgemeinern und ihn als Specialfall eines umfassenderen Gebietes zu erkennen. Dazu wird uns wieder das Schema der Pantagraphen vorzügliche Dienste leisten.

Nachweis eines Lehrsatzes. Der Lehrsatz, den wir hier nachweisen wollen, hat folgenden Wortlaut:

> „Jeder Mechanismus, der sich durch das Schema eines Pantagraphen darstellen lässt, hat unendlich viele Erzeugungsarten für das von dem Koppelpunkte desselben beschriebenen Raumgebilde."

Wir wollen sofort das verallgemeinerte Schema, wie wir es gelegentlich der Betrachtung der Pantagraphen entwickelt haben, zu Grunde legen.

Dieses lautet:

$$\left\|\begin{array}{ccc|ccc||c} \dots U_1 & T_1 & S_1 & A_1 & A_2 \dots & A_n & (a) \\ \dots U_2 & T_2 & S_2 & B_1 & B_2 \dots & B_n & (b) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots U_\varkappa & T_\varkappa & S_\varkappa & M_1 & M_2 \dots & M_n & (m) \\ \hline \dots U & T & S & X & Y \dots & W & (\varrho) \end{array}\right\| = 0.$$

Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass die Fixpunkte des Mechanismus die Punkte $X, Y \dots W$ seien, und dass sich der Koppelpunkt in der Reihe der $(a)(b) \dots (m)(\varrho)$ befinde. Sollten diese Annahmen nicht zutreffen, so müsste der Beweis einige Modificationen erfahren und eventuell ein Schema benützt werden, das unter dem Horizontalstrich mehr als eine Zeile angesetzt hat.

Der Erklärung gemäss, welche wir früher vom Schema gegeben haben, bedeuten die Punktreihen:

$$\dots U_i, \quad T_i, \quad S_i$$

Punkte im „Körper" derselben Horizontalreihe, welche so homolog affin in den zugeordneten Körpern liegen, wie sie in Colonnen unter einander stehen. Es ist durch den sogenannten Lehrsatz dann nachgewiesen worden, dass die Resultantenpunkte

$$\dots U, \quad T, \quad S$$

der colonnenweis zu bildenden Additionskörper im „Körper" $XY \dots W$ die homologe Lage einnehmen. Da nun angenommen wird, dass die Punkte

$$\dots U_i, \quad T_i, \quad S_i$$

durch ein System von festen Werthen $\varkappa_i$ aus dem System der Grundpunkte (rechts oben) entwickelt werden:

$$S_1 = \varkappa_{11} A_1 + \varkappa_{21} A_2 + \cdots + \varkappa_{n1} A_n \quad \text{u. s. f.}$$
$$T_1 = \varkappa_{12} A_1 + \varkappa_{22} A_2 + \cdots + \varkappa_{n2} A_n \quad \text{u. s. f.}$$
$$U_1 = \varkappa_{13} A_1 + \varkappa_{23} A_2 + \cdots + \varkappa_{n3} A_n \quad \text{u. s. f.},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

so folgt auch für die

$$\dots U, \quad T, \quad S:$$

$$S = \varkappa_{11} X + \varkappa_{21} Y + \cdots + \varkappa_{n1} W$$
$$T = \varkappa_{12} X + \varkappa_{22} Y + \cdots + \varkappa_{n2} W$$
$$U = \varkappa_{13} X + \varkappa_{23} Y + \cdots + \varkappa_{n3} W,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

das heisst, dass die Punkte $S, T, U, \dots$ dann Fixpunkte sind, wenn $X, Y, \dots W$ diese Eigenschaft haben.

Verschwindet die Determinante der $|\varkappa|$ nicht, bez. deren Minoren, dann können wir die Punkte $S, T, U \dots$ als Fixpunkte auffassen, die mit den Fixpunkten des „Körpers“ $\overline{XY\ldots W}$ gleichberechtigt sind. Geometrisch gesprochen, würde das besagen: Zerlegt man die im System der Grundpunkte stehenden „Körper“ in Partialkörper, so dürfen im links des Verticalstriches stehenden Schema nur so viele Punkte diesem speciellen Raume angehören, als im System der Grundpunkte vorgesehen u. s. w.

Im vorliegenden Falle giebt es ∞^{n-1} solcher Punkte S, T, $U\ldots$ Aus ihnen kann man $\infty^{n(n-1)}$ Systeme von Fixpunkten wählen, welche die Fixpunkte $XY\ldots W$ ersetzen. Jede solche Wahl bedeutet für unsere Zwecke eine neue Erzeugungsart.

Beispiel a). Wir wollen dies zuerst an dem uns bekanntesten Fall der Roberts'schen Erzeugung der Koppelcurve illustriren. Der Mechanismus derselben lautet einfach so:

$$\left\| \begin{array}{ccc|c} A_1 & A_2 & P & (P) \\ B_1 & P & B_3 & (P) \\ P & C_2 & C_3 & (P) \\ \hline C & B & A & (P) \end{array} \right\| = 0 \text{ (Fig. 1).}$$

Wir können das Schema erweitern durch Zufügen eines Schemas von affin entsprechenden Punkten:

$$\left\| \begin{array}{ccc|ccc|c} \ldots U_1 & T_1 & S_1 & A_1 & A_2 & P & (P) \\ \ldots U_2 & T_2 & S_2 & B_1 & P & B_3 & (P) \\ \ldots U_3 & T_3 & S_3 & P & C_2 & C_3 & (P) \\ \hline \ldots U & T & S & C & B & A & (P) \end{array} \right\| = 0.$$

Sind die $\ldots U$, T, S unabhängig von einander gewählt, so bilden sie eine Reihe von Fixpunkten, die der Reihe nach für C, B, A gesetzt werden können. Eliminiren wir die letzteren Fixpunkte ganz, so erscheint

$$\left\| \begin{array}{ccc|c} U_1 & T_1 & S_1 & (P) \\ U_2 & T_2 & S_2 & (P) \\ U_3 & T_3 & S_3 & (P) \\ \hline U & T & S & (P) \end{array} \right\| = 0$$

als eine simultan dreifache Erzeugung der Koppelcurve, die gleichberechtigt neben derjenigen Roberts steht.

Beispiel b). Wenn ein Tetraeder gezwungen ist, sich so zu bewegen, dass jede Ecke desselben eine Kugelfläche beschreibt, so beschreibt jeder mit dem Körper des Tetraeders fest verbundene Punkt P ein Stück einer Fläche Φ. Wir können dieser ersten Erzeugungsart der Fläche Φ das folgende Pantagraphenschema zuordnen:

$$\left\| \begin{array}{cccc} U & V & W & M \\ X & P & P & P \\ P & Y & P & P \\ P & P & Z & P \\ P & P & P & R \\ \hline A & B & C & D \end{array} \right\| \begin{array}{c} (P) \\ (P) \\ (P) \\ (P) \\ (P) \\ \hline \\ \end{array} = 0.$$

Wie man demselben entnehmen kann, stellt $\overline{UVWM}$ das Tetraeder, P den Punkt vor, der im Tetraeder die fragliche Fläche Φ beschreiben soll. Von P gehen die vier Stäbe $\overline{PX}$, $\overline{PY}$, $\overline{PZ}$, $\overline{PR}$ aus, welche mit den zugeordneten vier Stäben $\overline{PU}$, $\overline{PV}$, $\overline{PW}$, $\overline{PM}$ zu Parallelegrammen mit den Resultantenpunkten A, B, C, D vervollständigt werden:

$$\begin{aligned} \overline{PX} + \overline{PU} &= \overline{PA}, \\ \overline{PY} + \overline{PV} &= \overline{PB}, \\ \overline{PZ} + \overline{PW} &= \overline{PC}, \\ \overline{PR} + \overline{PM} &= \overline{PD}. \end{aligned}$$

Daraus erkennt man, dass bei festgehaltenen Resultantenpunkten die Ecke U des Tetraeders eine Kugelfläche zum Mittelpunkt A und dem Radius $\overline{PX}$, die Ecke V eine solche zum Mittelpunkt B und dem Radius $\overline{PY}$, die Ecke W eine solche mit Mittelpunkt C und dem Radius $\overline{PZ}$, schliesslich M die Kugelfläche zum Mittelpunkt D und Radius $\overline{PR}$ beschreibt.

Ergänzen wir das Schema zunächst in allgemeinster Weise dadurch, dass wir im Tetraeder $\overline{UVWM}$ neben P noch weitere vier nicht in einer Ebene liegende Punkte annehmen: S', S'', S''', S'''' und suchen zu diesen auf den „Körpern" $\overline{XPPP}$, $\overline{PYPP}$ u. s. f. die entsprechenden Reihen X', X'', X''', X''''; Y', Y'', Y''', Y'''' u. s. f. wie folgt:

$$\left\| \begin{array}{cccc|cccc} S'''' & S''' & S'' & S' & U & V & W & M \\ X'''' & X''' & X'' & X' & X & P & P & P \\ Y'''' & Y''' & Y'' & Y' & P & P & P & P \\ Z'''' & Z''' & Z'' & Z' & P & P & Z & P \\ P & R''' & R'' & R' & P & P & P & R \\ \hline S_4 & S_3 & S_2 & S_1 & A & B & C & D \end{array} \right\| \begin{array}{c} (P) \\ (P) \\ (P) \\ (P) \\ (P) \\ \hline (P) \end{array} = 0,$$

so bilden die Resultantenpunkte S_1, S_2, S_3, S_4 der Additionskörper $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_4$ im Tetraeder der Fixpunkte A, B, C, D ein System von festbleibenden Theilpunkten des letzteren Tetraeders, das homolog affin dem System S', S'', S''', S'''' im Tetraeder $\overline{UVWM}$ ist.

Wir können demnach die Fixpunkte A, B, C, D durch die allgemeineren S_1, S_2, S_3, S_4 ersetzen und erhalten so eine neue Erzeugungsart der Fläche Φ.

Da die Wahl der Punkte S', S'', S''' S'''' beliebig war, so können wir speciellere Annahmen treffen.

Wir können die Punkte auf den Seitenflächen des Tetraeders annehmen und erhalten folgendes Schema:

$$\left\| \begin{array}{cccc|cccc||c} S'''' & S''' & S'' & S' & U & V & W & M & (P) \\ X'''' & X''' & X'' & P & X & P & P & P & (P) \\ Y'''' & Y''' & P & Y' & P & Y & P & P & (P) \\ Z'''' & P & Z'' & Z' & P & P & Z & P & (P) \\ P & R''' & R'' & R' & P & P & P & R & (P) \\ \hline S_4 & S_2 & S_3 & S_1 & A & B & C & D & (P) \end{array} \right\| = 0.$$

Die Additionskörper sind in diesem Falle Dodekaeder. Oder, wir nehmen die Reihe der Punkte S', S'', S''', S'''' auf vier Kanten des Tetraeders $\overline{UVWM}$ an, die einen Linienzug bilden, dann ergiebt sich:

$$\left\| \begin{array}{cccc|cccc||c} S''' & S''' & S'' & S' & U & V & W & M & (P) \\ P & X''' & X'' & P & X & P & P & P & (P) \\ Y'''' & Y''' & P & P & P & Y & P & P & (P) \\ Z'''' & P & P & Z' & P & P & Z & P & (P) \\ P & P & R'' & R' & P & P & P & R & (P) \\ \hline S_4 & S_3 & S_2 & S_1 & A & B & C & D & (P) \end{array} \right\| = 0.$$

Liegen S', S'', S''', S'''' der Reihe nach auf den Kanten $\overline{WM}$, $\overline{MU}$, $\overline{UV}$, $\overline{VW}$ des Tetraeders $\overline{UVWM}$, so liegen die Punkte S_1, S_2, S_3, S_4 der Reihe nach auf den Kanten $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ des Tetraeders $ABCD$ der früheren Fixpunkte. Die Additionskörper sind nun Parallelepipede. Würde man auf zwei Gegenkanten des Tetraeders je ein Paar der S'... wählen, so käme man zu folgendem Anblick:

$$\left\| \begin{array}{cccc|cccc||c} S'''' & S''' & S'' & S' & U & V & W & M & (P) \\ X'''' & X''' & P & P & X & P & P & P & (P) \\ Y'''' & Y''' & P & P & P & Y & P & P & (P) \\ P & P & Z'' & Z' & P & P & Z & P & (P) \\ P & P & R'' & R' & P & P & P & R & (P) \\ \hline S_4 & S_2 & S_3 & S_1 & A & B & C & D & (P) \end{array} \right\| = 0.$$

Es liegen dieser Annahme gemäss S' und S'' auf der Kante $\overline{WM}$. $S'''S''''$ auf der Kante $\overline{UV}$; analog befinden sich dann S_1 und S_2 auf der Kante $\overline{CD}$, S_3 und S_4 auf der Kante AB.

Unter allen Fixpunkten ist aber ein einziger ausgezeichnet, nämlich jener, welcher dem Schema genügt:

$$\left\| \begin{array}{c|cccc||c} P & U & V & W & M & (P) \\ X' & X & P & P & P & (P) \\ Y' & P & Y & P & P & (P) \\ Z' & P & P & Z & P & (P) \\ R' & P & P & P & R & (P) \\ \hline S & A & B & C & D & (P) \end{array} \right\| = 0.$$

Artet das Tetraeder in ein ebenes Viereck aus, so giebt es ∞^1 solcher Fixpunkte S; aus ihrer Reihe können alsdann zwei unabhängige gewählt werden.

Die gegebenen beiden Beispiele mögen genügen, um das Wesen der hier zur Betrachtung gestellten mehrfachen Erzeugungen von Gebilden zu charakterisiren. Der Nachweis stützte sich hierbei wesentlich auf lineare Ausdrücke. Man könnte also die vorangehenden Betrachtungen auch als ein Studium der linearen Umformungen von Erzeugungen bezeichnen. Dann würde sich als Gegenstück gegenüberstellen das Studium von der Umformung der Erzeugungen auf Grund nicht linearer Beziehungen.

(Fortsetzung folgt.)

X.

Die elementaren symmetrischen Functionen und die Potenzsummen einer oder mehrerer Reihen von Veränderlichen.

Von

Dr. FR. JUNKER

in Urach.

I. Einleitung.

Bekanntlich lassen sich die Potenzsummen $s_1 = \Sigma x_1$, $s_2 = \Sigma x_1^2$, $s_3 = \Sigma x_1^3, \ldots$ als ganze Functionen der r Elementarfunctionen $\Sigma x_1 = a_1$, $\Sigma x_1 x_2 = a_2$, $\Sigma x_1 x_2 x_3 = a_3, \ldots, \Sigma x_1 x_2 \ldots x_r = a_r$ von r Veränderlichen $x_1 x_2 \ldots x_r$ und umgekehrt darstellen, eine Aufgabe, die schon Newton gelöst hat. Die hierauf bezüglichen Recursionsformeln heissen deshalb auch die „Newton'schen Formeln" und sind ausgedrückt durch:

$$1)\qquad \begin{cases} s_1 = a_1 \\ s_2 = a_1^2 - 2a_2 \\ s_3 = a_1^3 - 3a_1 a_2 + 3a_3 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{cases}$$

$$2)\qquad \begin{cases} a_1 = s_1 \\ a_2 = \frac{1}{2}(s_1^2 - s_2) \\ a_3 = \frac{1}{6}(s_1^3 - 3s_1 s_2 + 2s_3) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{cases}$$

Wichtiger als diese sind die Endformeln, welche später Waring in seinen Meditationes algebraicae (Editio tertia, pag. 13) entwickelt hat. Durch dieselben ist es möglich, die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, bezw. $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$ der in

$$s_p = \alpha a_1^p + \beta a_1^{p-2} a_2 + \gamma a_1^{p-3} a_3 + \cdots$$
$$a_p = \alpha' s_1^p + \beta' s_1^{p-2} s_2 + \gamma' s_1^{p-3} s_3 + \cdots$$

auftretenden isobaren (vom gleichen Gewichte p) Producte a_1^p, $a_1^{p-3} a_2$, $a_1^{p-3} a_3, \ldots$, bezw. s_1^p, $s_1^{p-2} s_2$, $s_1^{p-3} s_3, \ldots$ direct allgemein zu bestimmen.

Was nun die praktische Anwendung und die Einfachheit des Verfahrens betrifft, so glaube ich, dass auch die in Nr. II u. flg. enthaltene Methode, die auf dem Wege der Differentiation zum gewünschten Ziele führt und meines Wissens vollständig neu ist, es wohl verdienen dürfte, hier mitgetheilt zu werden. Dieselbe beruht in der Lösung der Aufgabe, auf Grund der bekannten Darstellung $\Sigma x_1^p = \varphi(a)$ der Summe der p^{ten} Potenzen durch Elementarfunctionen, bezw. der p-förmigen Elementarfunction $a_p = f(s)$ durch Potenzsummen die Summe der $(p+1)^{\text{ten}}$ Potenzen, bezw. die $(p+1)$förmige Elementarfunction herzuleiten. Ausgehend von der niedrigsten Potenzsumme $s_1 = a_1$, bezw. Elementarfunction $a_1 = s_1$, führt diese Methode vermittelst eines gewissen Differentiationsprocesses successive zur Darstellung aller folgenden Potenzsummen, bezw. Elementarfunctionen.

Sie liefert gleichzeitig auch ein Mittel, die identischen Relationen aufzustellen, welche zwischen den Potenzsummen vorhanden sind.

Treten an Stelle der r Veränderlichen $x_1 x_2 \ldots x_r$ des binären Gebiets r Paare von solchen $x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_r y_r$, wie dies im ternären Gebiet der Fall ist, so hängen die letzteren bekanntlich durch $\sigma = \frac{r}{2}(r+3)$ Elementarfunctionen:

$$3)\quad \begin{cases} \Sigma x_1 = a_1, \quad \Sigma y_1 = a_2, \\ \Sigma x_1 x_2 = a_{11}, \quad \Sigma x_1 y_2 = a_{12}, \quad \Sigma y_1 y_2 = a_{22}, \\ \Sigma x_1 x_2 x_3 = a_{111}, \quad \Sigma x_1 x_2 y_3 = a_{112}, \quad \Sigma x_1 y_2 y_3 = a_{122}, \quad \Sigma y_1 y_2 y_3 = a_{222} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

untereinander zusammen, wo die Reihen x und y bezw. durch die Indices 1 und 2 bezeichnet werden mögen. Den Potenzsummen des binären Gebiets entsprechen hier diejenigen symmetrischen Functionen, welche in jedem Gliede nur die Elemente eines Variablenpaares enthalten. Wir nennen dieselben nach bekannten Vorgängen einförmige symmetrische Functionen oder kurz einförmige Functionen und bezeichnen sie entsprechend den Elementarfunctionen mit dem deutschen Buchstaben $\mathfrak{a}$:

$$4)\quad \begin{cases} \Sigma x_1 = \mathfrak{a}_1, \quad \Sigma y_1 = \mathfrak{a}_2, \\ \Sigma x_1^2 = \mathfrak{a}_{11}, \quad \Sigma x_1 y_1 = \mathfrak{a}_{12}, \quad \Sigma y_1^2 = \mathfrak{a}_{22}, \\ \Sigma x_1^3 = \mathfrak{a}_{111}, \quad \Sigma x_1^2 y_1 = \mathfrak{a}_{112}, \quad \Sigma x_1 y_1^2 = \mathfrak{a}_{122}, \quad \Sigma y_1^3 = \mathfrak{a}_{222} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Höhere Functionen dieser Art, z. B. $\Sigma x_1^\alpha y_1^\beta$, mögen auch durch $\mathfrak{a}_{\alpha,\beta}$ angegeben werden, wo wir unter $p = \alpha + \beta$ das Gewicht der Function $\Sigma x_1^\alpha y_1^\beta$ und unter α bezw. β die Gewichtszahlen derselben hinsichtlich der Reihe $x_1 x_2 \ldots x_r$, bezw. $y_1 y_2 \ldots y_r$, verstehen. Wie nun im binären Gebiet jede Potenzsumme als ganze Function der elementaren Functionen und umgekehrt dargestellt werden kann, so gilt dasselbe auch in gleicher Weise für die einförmigen und elementaren Functionen des ternären Gebiets. Wir werden in III. zeigen, wie sich mit Hilfe weiterer Differentiationsprocesse die hierher gehörigen Formeln direct aus den entsprechenden des binären Gebiets herleiten lassen.

II. Neue Darstellung der Potenzsummen durch Elementarfunctionen und umgekehrt.

a) Darstellung der Potenzsummen s_{p+1} mit Hilfe der Potenzsumme s_p.

Nehmen wir an, es sei auf irgend eine Weise die Summe der p^{ten} Potenzen $s_p = \Sigma x_1^p$ der Veränderlichen $x_1 x_2 \ldots x_r$ (wo r eine endliche Zahl sein soll) durch die Elementarfunctionen $a_1 a_2 \ldots a_r$ derselben ausgedrückt worden und bezeichnen wir diese Darstellung mit:

$$s_p = \varphi(a_1 a_2 \ldots) = \varphi,$$

so gelten offenbar die Gleichungen:

$$5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial s_p}{\partial x_1} = p x_1^{p-1} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \\ \dfrac{\partial s_p}{\partial x_2} = p x_2^{p-1} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{\partial s_p}{\partial x_r} = p x_r^{p-1} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_r}. \end{array} \right.$$

Multiplicirt man dieselben der Reihe nach mit $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_r^2$ und addirt man die erhaltenen Producte, so ergiebt sich die Gleichung:

$$p s_{p+1} = \sum_1^r \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} x_1^2.$$

Die Summe der $(p+1)^{\text{ten}}$ Potenzen ist somit dargestellt durch:

$$6) \qquad s_{p+1} = \frac{1}{p} \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} x_1^2.$$

Da nun φ nach der Voraussetzung eine Function der Elementarfunctionen $a_1 a_2 \ldots a_r$ ist, so ist:

$$\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} x_1^2 = \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} \Sigma \frac{\partial a_1}{\partial x_1} x_1^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} \Sigma \frac{\partial a_2}{\partial x_1} x_1^2 + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial a_r} \Sigma \frac{\partial a_r}{\partial x_1} x_1^2.$$

Ohne Schwierigkeiten ist nun hierin zu erkennen, dass

$$7) \qquad \Sigma \frac{\partial a_1}{\partial x_1} x_1^2 = \Sigma x_1^2, \quad \Sigma \frac{\partial a_2}{\partial x_1} x_1^2 = \Sigma x_1^2 x_2, \ldots, \quad \Sigma \frac{\partial a_i}{\partial x_1} x_1^2 = \Sigma x_1^2 x_2 \ldots x_i$$

ist. Die hier auftretenden symmetrischen Functionen lassen sich sehr einfach durch Elementarfunctionen ausdrücken. Werden nämlich die beiden Functionen a_1 und a_i mit einander multiplicirt, so folgt:

$$\Sigma x_1 \Sigma x_1 x_2 \dots x_i = \Sigma x_1^2 x_2 \dots x_i + (i+1) \Sigma x_1 x_2 \dots x_i x_{i+1},$$

oder:

$$a_1 \,.\, a_i = \Sigma x_1^2 x_2 \dots x_i + (i+1) a_{i+1}.$$

Hieraus ergiebt sich direct die Function:

$$\text{8)} \qquad \Sigma x_1^2 x_2 \dots x_i = a_1 a_i - (i+1) a_{i+1},$$

welche für $i = 1, 2, 3, \dots$ die Gestalt annimmt:

$$\text{9)} \qquad \left\{ \begin{array}{c} \Sigma x_1^2 = a_1^2 - 2a_2 \\ \Sigma x_1^2 x_2 = a_1 a_2 - 3a_3 \\ \Sigma x_1^2 x_2 x_3 = a_1 a_3 - 4a_4 \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Mit Hilfe dieser Functionen geht demnach die Gleichung 6) über in:

$$\text{10)} \qquad \left\{ \begin{aligned} s_{p+1} = \frac{1}{p} \Big\{ & \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} (a_1^2 - 2a_2) + \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} (a_1 a_2 - 3a_3) + \cdots \\ & + \frac{\partial \varphi}{\partial a_r} [a_1 a_r - (r+1) a_{r+1}] \Big\}, \end{aligned} \right.$$

die wir auch in der Form schreiben können:

$$\text{11)} \qquad s_{p+1} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{i=r} \frac{\partial \varphi}{\partial a_i} [a_1 a_i - (i+1) a_{i+1}].$$

Durch diese allgemeine Formel ist die Kenntniss der Potenzsumme s_{p+1} auf die Kenntniss der nächst niedrigeren Summe $s_p = \varphi$ zurückgeführt.

Beispielsweise ist die Summe der vierten Potenzen s_4 von $x_1 x_2 \dots x_r$ ausgedrückt durch:

$$s_4 = a_1^4 - 4a_1^2 a_2 + 2a_2^2 + 4a_1 a_3 - 4a_4.$$

Bildet man hieraus die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_1} = 4a_1^3 - 8a_1 a_2 - 4a_3,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_2} = -4a_1^2 + 4a_2,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_3} = 4a_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a_4} = -4,$$

und setzt dieselben in:

$$\begin{aligned} s_5 = \frac{1}{4} \Big\{ & \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} (a_1^2 - 2a_2) + \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} (a_1 a_2 - 3a_3) + \frac{\partial \varphi}{\partial a_3} (a_1 a_3 - 4a_4) \\ & + \frac{\partial \varphi}{\partial a_4} (a_1 a_4 - 5a_5) \Big\} \end{aligned}$$

ein, so folgt direct:

$$s_5 = a_1^5 - 5a_1^3 a_2 + 5a_1 a_2^2 + 5a_1^2 a_3 - 5a_2 a_3 - 5a_1 a_4 + 5a_5,$$

wie es sein soll.

Ebenso erhalten wir aus $s_1 = \varphi_1 = a_1$ direct:

$$\Sigma x_1^2 = \frac{1}{1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial a_1}(a_1^2 - 2a_2) = a_1^2 - 2a_2$$

und hieraus:

$$\Sigma x_1^3 = \frac{1}{2}\{2a_1(a_1^2 - 2a_2) - 2(a_1 a_2 - 3a_3)\}$$

$$= a_1^3 - 3a_1 a_2 + 3a_3 \quad \text{u. s. w.}$$

Auf diese Weise lassen sich somit, wie diese Beispiele beweisen, von der niedrigsten Potenzsumme $s_1 = a_1$ ausgehend sämmtliche höheren Potenzsummen $s_2 s_3 \dots$ der Reihe nach durch die Elementarfunctionen $a_1 a_2 a_3 \dots$ darstellen.

b) Darstellung der Elementarfunction a_{p+1} mit Hilfe der nächst niedrigeren Function a_p.

Nehmen wir wie in a) an, die Elementarfunction a_p sei auf irgend eine Weise durch die Potenzsummen $s_1 s_2 s_3 \dots$ ausgedrückt und bezeichnen wir diese Darstellung mit

$$a_p = f(s),$$

so gelten offenbar wie dort die Gleichungen:

$$12)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a_p}{\partial x_1} = \Sigma x_2 x_3 \dots x_p = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \\ \dfrac{\partial a_p}{\partial x_2} = \Sigma x_1 x_3 \dots x_p = \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{\partial a_p}{\partial x_r} = \Sigma x_1 x_2 \dots x_p = \dfrac{\partial f}{\partial x_r}. \end{cases}$$

Durch Multiplication derselben mit $x_1^2, x_2^2, \dots, x_r^2$ und Addition ergiebt sich hieraus die symmetrische Function:

$$13)\qquad \sum_1^r \frac{\partial a_p}{\partial x_1} x_1^2 = \Sigma x_1^2 x_2 x_3 \dots x_p = \sum_1^r \frac{\partial f}{\partial x_1} x_1^2,$$

welche nach 8) angegeben ist durch:

$$\Sigma x_1^2 x_2 x_3 \dots x_p = a_1 a_p - (p+1) a_{p+1}.$$

Setzt man diesen Werth in 13) ein und gleichzeitig der Annahme gemäss $a_1 = s_1$, $a_p = f(s)$, so folgt:

$$14)\qquad a_{p+1} = \frac{1}{p+1}\left\{s_1 f(s) - \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_1} x_1^2\right\}.$$

Da nun f eine Function der Potenzsummen s ist, so folgt:

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial x_1} x_1^2 = \frac{\partial f}{\partial s_1} \Sigma \frac{\partial s_1}{\partial x_1} x_1^2 + \frac{\partial f}{\partial s_2} \Sigma \frac{\partial s_2}{\partial x_1} x_1^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial s_{p+1}} \Sigma \frac{\partial s_{p+1}}{\partial x_1} x_1^2.$$

Hierin ist, wie ohne Weiteres einleuchtet,

$$\Sigma \frac{\partial s_1}{\partial x_1} x_1^2 = s_2, \quad \Sigma \frac{\partial s_2}{\partial x_1} x_1^2 = 2 s_3, \quad \Sigma \frac{\partial s_3}{\partial x_1} x_1^2 = 3 s_4, \ldots \Sigma \frac{\partial s_i}{\partial x_1} x_1^2 = i s_{i+1},$$

womit die Gleichung 14) übergeht in:

$$15) \quad a_{p+1} = \frac{1}{p+1} \left\{ s_1 f - \frac{\partial f}{\partial s_1} s_2 - 2 \frac{\partial f}{\partial s_2} s_3 - 3 \frac{\partial f}{\partial s_3} s_4 - \cdots - p \frac{\partial f}{\partial s_p} s_{p+1} \right\},$$

die auch in der Form geschrieben werden kann:

$$15') \qquad a_{p+1} = \frac{1}{p+1} \left\{ s_1 f - \sum_{i=1}^{i=p} i \frac{\partial f}{\partial s_i} s_{i+1} \right\}.$$

Durch diese Formel ist die Darstellung der Elementarfunction a_{p+1} durch die Potenzsummen $s_1 s_2 s_3 \ldots$ zurückgeführt auf die Kenntniss der nächst niedrigeren Elementarfunction $a_p = f$.

Die Elementarfunction vom Gewicht 3 ist beispielsweise angegeben durch:

$$a_3 = f = \frac{1}{6}(s_1^3 - 3 s_1 s_2 + 2 s_3).$$

Bildet man die partiellen Ableitungen derselben:

$$\frac{\partial f}{\partial s_1} = \frac{1}{2}(s_1^2 - s_2), \quad \frac{\partial f}{\partial s_2} = -\frac{1}{2} s_1, \quad \frac{\partial f}{\partial s_3} = \frac{1}{3}$$

nach s_1, s_2 und s_3 und setzt dieselben in

$$a_4 = \frac{1}{4} \left\{ s_1 f - \frac{\partial f}{\partial s_1} s_2 - 2 \frac{\partial f}{\partial s_2} s_3 - 3 \frac{\partial f}{\partial s_3} s_4 \right\}$$

ein, so ergiebt sich:

$$a_4 = \frac{1}{24}(s_1^4 - 6 s_1^2 s_2 + 8 s_1 s_3 + 3 s_2^2 - 6 s_4),$$

wie es sein soll.

Die Function a_4 giebt wieder Gelegenheit zur Bildung der Function a_5, diese Gelegenheit zur Bildung von a_6 u. s. w. Wir sehen somit, dass die Operation 15) ein Mittel darbietet, successive sämmtliche Elementarfunctionen vom Gewicht 1, 2, 3,... durch die Potenzsummen $s_1 s_2 s_3 \ldots$ auszudrücken.

III. Die einförmigen und die elementaren Functionen zweier oder mehrerer Reihen von Veränderlichen.

Hat man nach der Methode in Nr. II die Summen der Potenzen der Elemente $x_1 x_2 \ldots x_r$ durch die Elementarfunctionen der letzteren und umgekehrt dargestellt, so lassen sich hieraus direct die entsprechenden Functionen des ternären, quaternären u. s. w. Gebiets mit Hilfe gewisser Differentialprocesse bilden, die im Folgenden entwickelt werden sollen. Zu diesem Zweck wählen wir aus naheliegenden Gründen die in 3) und 4) angegebene Bezeichnung der elementaren bezw. einförmigen Functionen.

Um sofort die allgemeinsten Formeln zu erhalten, nehmen wir an, es sei die einförmige Function

$$\mathfrak{a}_{\alpha,\,\beta} = \Sigma x_1^\alpha y_1^\beta = x_1^\alpha y_1^\beta + x_2^\alpha y_2^\beta + \cdots + x_r^\alpha y_r^\beta$$

als ganze Function $\varphi(a)$ der Elementarfunctionen $a_1 a_2 a_{11} a_{12} a_{22} \ldots$ ausgedrückt:

$$\mathfrak{a}_{\alpha,\,\beta} = \varphi(a),$$

dann gelten wie oben die Gleichungen:

$$16)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathfrak{a}}{\partial x_1} = \alpha x_1^{\alpha-1} y_1^\beta = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \\ \dfrac{\partial \mathfrak{a}}{\partial x_2} = \alpha x_2^{\alpha-1} y_2^\beta = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{\partial \mathfrak{a}}{\partial x_r} = \alpha x_r^{\alpha-1} y_r^\beta = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_r}. \end{cases}$$

Werden dieselben bezw. mit den Elementen $y_1 y_2 y_3 \ldots y_r$ multiplicirt und hierauf addirt, so erhalten wir eine neue einförmige symmetrische Function:

$$17)\qquad \alpha\,\Sigma x_1^{\alpha-1} y_1^{\beta+1} = \sum_1^r \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} y_1,$$

deren Gewicht hinsichtlich x um 1 kleiner, hinsichtlich y um 1 grösser ist als das der Function $\mathfrak{a}_{\alpha,\,\beta}$. Da nun φ eine Function der Elementarfunctionen $a_1 a_2 a_{11} a_{12} \ldots$ ist, so kann die rechte Seite dieser Gleichung auch in der Form geschrieben werden:

$$\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} y_1 = \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial a_{\varkappa\lambda}} \sum_1^r \frac{\partial a_{\varkappa\lambda}}{\partial x_1} y_1,$$

wo sich das erste Summenzeichen auf alle Elementarfunctionen in φ bezieht, in denen die Reihe $x_1 x_2 \ldots$ enthalten ist. Wendet man nun die Operation $\sum\limits_1^r \dfrac{\partial}{\partial x_1} y_1$ auf eine ternäre Elementarfunction $a_{\varkappa\lambda}$ von den Reihengewichtszahlen $\varkappa$ und λ hinsichtlich x und y an, so geht dieselbe, wie leicht zu sehen, abgesehen von einem Zahlenfactor, in eine andere Elementarfunction $a_{k-1,\,\lambda+1}$ von den Gewichtszahlen $\varkappa - 1$ bezw. $\lambda + 1$ über. Genau ausgeführt erhalten wir:

$$18)\qquad \sum_1^r \frac{\partial a_{k\lambda}}{\partial x_1} y_1 = (\lambda + 1) a_{\varkappa-1,\,\lambda+1}.$$

Mit Hilfe dieser Function nimmt die Gleichung 17) die Gestalt an:

$$19)\qquad \Phi_x^y = \mathfrak{a}_{\alpha-1,\,\beta+1} = \frac{1}{\alpha}\,\Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial a_{k\lambda}}(1+\lambda)a_{\varkappa-1,\,\lambda+1},$$

oder auch, wenn die einzelnen Elementarfunctionen eingeführt werden:

$$19')\left\{\begin{aligned}\Phi_x^y = \mathfrak{a}_{\alpha-1,\beta+1} = \frac{1}{\alpha}\Big\{&\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}a_2+\frac{\partial\varphi}{\partial a_{11}}a_{12}+\frac{\partial\varphi}{\partial a_{111}}a_{112}+\cdots\\ &+2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a_{12}}a_{22}+\frac{\partial\varphi}{\partial a_{112}}a_{122}+\cdots\right)+3\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a_{122}}a_{222}+\frac{\partial\varphi}{\partial a_{1122}}a_{1222}+\cdots\right)\Big\},\end{aligned}\right.$$

womit die einförmige Function $\mathfrak{a}_{\alpha-1,\beta+1}$ durch die Elementarfunctionen ausgedrückt ist.

Vertauscht man hierin x mit y, so folgt der analoge Process:

$$20)\qquad \Phi_y^x = \mathfrak{a}_{\alpha+1,\,\beta-1} = \frac{1}{\beta}\,\Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial a_{\varkappa,\lambda}}(1+\varkappa)a_{\varkappa+1,\,\lambda-1},$$

dem auch die specielle Gestalt entspricht:

$$20')\left\{\begin{aligned}\Phi_y^x = \mathfrak{a}_{\alpha+1,\beta-1} = \frac{1}{\beta}\Big\{&\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}a_1+\frac{\partial\varphi}{\partial a_{22}}a_{12}+\frac{\partial\varphi}{\partial a_{222}}a_{22}+\cdots\\ &+2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a_{12}}a_{11}+\frac{\partial\varphi}{\partial a_{122}}a_{112}+\cdots\right)+3\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a_{112}}a_{111}+\frac{\partial\varphi}{\partial a_{1122}}a_{1112}+\cdots\right)\Big\}.\end{aligned}\right.$$

Mit Hilfe dieser Processe lässt sich jede einförmige Function $\mathfrak{a}_{\alpha,\beta}$ vom Gewicht $\alpha+\beta$ direct in eine andere derartige Function vom gleichen Totalgewicht aber verschiedenen Reihengewichten überführen. Dabei ist nicht nothwendig, dass φ die beiden Reihen $x_1x_2\ldots x_r$, $y_1y_2\ldots y_r$ zugleich enthält. Es genügt, wenn die Darstellung der binären Potenzsumme $\Sigma x_1^p = \varphi(a)$ bekannt ist, um nach wiederholten Anwendungen der Operation 19) auf dieselbe direct zur Darstellung aller übrigen einförmigen Functionen $\Sigma x_1^{p-1}y_1$, $\Sigma x_1^{p-2}y_1^2$, ..., Σy_1^p vom gleichen Gewicht zu gelangen.

Beispielsweise erhalten wir, von der Function

$$\Sigma x_1^4 = a_1^4 - 4a_1^2a_{11} + 2a_{11}^2 + 4a_1a_{111} - 4a_{1111}$$

ausgehend, die weiteren einförmigen Functionen vom Gewicht 4:

$$\Sigma x_1^3y_1 = a_1^3a_2 - 2a_1a_2a_{11} - a_1^2a_{12} + a_{11}a_{12} + a_2a_{111} + a_1a_{112} - a_{1112},$$

$$\left\{\begin{aligned}\Sigma x_1^2y_1^2 = a_1^2a_2^2 + \frac{1}{3}\{&-2a_1^2a_{22} - 2a_2^2a_{11} - 4a_1a_2a_{12} + a_{12}^2\\ &+2a_{11}a_{22} + 2a_1a_{122} + 2a_2a_{112} - 2a_{1122}\}\end{aligned}\right.\quad \text{u. s. w.}$$

Ist umgekehrt die Elementarfunction $a_{k\lambda}$ durch einförmige Functionen $\mathfrak{a}$ ausgedrückt:

$$a_{\varkappa,\lambda} = f(\mathfrak{a}),$$

so erhalten wir auf ähnlichem Wege die Processe:

$$22)\qquad \Psi_x^y = a_{\varkappa-1,\lambda+1} = \frac{1}{\lambda+1}\Sigma\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{\alpha,\beta}}\alpha\,\mathfrak{a}_{\alpha-1,\beta+1},$$

$$23)\qquad \Psi_y^x = a_{\varkappa+1,\lambda-1} = \frac{1}{\varkappa+1}\Sigma\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{\alpha,\beta}}\beta\,\mathfrak{a}_{\alpha+1,\beta-1},$$

die, wenn man die einzelnen einförmigen Functionen einführt, auch die specielle Gestalt annehmen:

$$22')\left|\begin{array}{l}\Psi_x^y = a_{\varkappa-1,\lambda+1} = \dfrac{1}{\lambda+1}\Big\{\dfrac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_1}\mathfrak{a}_2 + \dfrac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{12}}\mathfrak{a}_{22} + \cdots \\ \quad + 2\Big(\dfrac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{11}}\mathfrak{a}_{12} + \dfrac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{112}}\mathfrak{a}_{122} + \cdots\Big) + 3\Big(\dfrac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{111}}\mathfrak{a}_{112} + \dfrac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{1112}}\mathfrak{a}_{1122} + \cdots\Big) + \cdots\Big\},\end{array}\right.$$

$$23')\left|\begin{array}{l}\Psi_y^x = a_{\varkappa+1,\lambda-1} = \dfrac{1}{\varkappa+1}\Big\{\dfrac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_2}\mathfrak{a}_1 + \dfrac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{12}}\mathfrak{a}_{11} + \dfrac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{112}}\mathfrak{a}_{111} + \cdots \\ \quad + 2\Big(\dfrac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{22}}\mathfrak{a}_{12} + \dfrac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{122}}\mathfrak{a}_{112} + \cdots\Big) + 3\Big(\dfrac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{222}}\mathfrak{a}_{122} + \dfrac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{1222}}\mathfrak{a}_{1122} + \cdots\Big) + \cdots\Big\}.\end{array}\right.$$

Die Anwendung dieser Operationen auf die Function $\mathfrak{a}_{\varkappa\lambda} = f(\mathfrak{a})$ gestattet direct, alle möglichen zweireihigen Elementarfunctionen vom gleichen Gewicht durch einförmige Functionen auszudrücken.

Beispielsweise geht durch einmalige Anwendung der Operation 22) auf die Function

$$a_{111} = \frac{1}{6}(\mathfrak{a}_1^3 - 3\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11} + 2\mathfrak{a}_{111})$$

direct die weitere dreiförmige Elementarfunction hervor:

$$a_{112} = \frac{1}{2}(\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{11} - 2\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{12} + 2\mathfrak{a}_{112}).$$

IV. Die identischen Relationen zwischen den Potenzsummen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung.

Hat man eine endliche Anzahl r von Elementen $x_1 x_2 \ldots x_r$, wie dies zum Beispiel immer der Fall ist, wenn dieselben die Wurzeln einer algebraischen Gleichung darstellen, so ist bekanntlich die Anzahl der Elementarfunctionen $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_r$ derselben ebenfalls gleich r, während die der Potenzsummen $s_1 s_2 \ldots s_r\ s_{r+1} \ldots$ unendlich gross ist. Daraus schliessen wir, dass die letzteren nicht unabhängig von einander sein können, sondern durch unendlich viele identische Relationen untereinander zusammenhängen müssen. Um die einfachsten dieser Relationen zu erhalten, mögen zunächst nach Nr. II die Elementarfunctionen $a_1 a_2 a_3, \ldots$ unter der Voraussetzung, dass die Anzahl der Elemente $x_1 x_2 x_3 \ldots$ beliebig gross oder unendlich ist, durch die Potenzsummen $s_1 s_2 s_3 \ldots$ ausgedrückt werden.

Wir wollen diese Darstellungen durch:

$$a_1 = f_1, \qquad a_2 = f_2, \qquad a_3 = f_3, \ldots,$$
$$a_r = f_r, \quad a_{r+1} = f_{r+1}, \quad a_{r+2} = f_{r+2}, \ldots$$

bezeichnen. Gehen wir nun, nachdem dies geschehen ist, wieder auf eine endliche Anzahl von Elementen $x_1 x_2 \ldots x_r$ zurück, so müssen, wie schon oben erwähnt wurde, von der r^{ten} Elementarfunction ab sämmtliche folgenden Functionen $a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots$ identisch verschwinden. Ist dies aber für die Elementarfunctionen der Fall, so müssen offenbar auch die entsprechenden Ausdrücke derselben in den Potenzsummen $f_{r+1}, f_{r+2}, \ldots$ Null werden. Die identischen Relationen zwischen den Potenzsummen $s_1 s_2 s_3 \ldots$ der r Wurzeln einer algebraischen Gleichung r^{ten} Grades sind demnach angegeben durch:

$$\text{24)} \qquad \begin{cases} f_{r+1} = 0 \\ f_{r+2} = 0 \\ f_{r+3} = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

Dieselben sind hinsichtlich der Wurzeln $x_1 x_2 \ldots x_r$ bezw. vom Gewicht $r+1, r+2, \ldots$

Die niedrigste Relation zwischen den Potenzsummen ist vom Gewicht $r+1$.

Da nun die Elementarfunctionen $a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots$ auch für weniger als r Veränderliche verschwinden, so repräsentiren die Ausdrücke $f_{r+1}, f_{r+2}, \ldots$ nicht nur identische Relationen für r, sondern auch solche für $r-1$, $r-2, \ldots, 3, 2, 1$ Veränderliche.

Für die Elementarfunctionen a_2, a_3, a_4, a_5 erhalten wir die Darstellungen:

$$a_2 = \frac{1}{2}(s_1^2 - s_2),$$
$$a_3 = \frac{1}{6}(s_1^3 - 3 s_1 s_2 + 2 s_3),$$
$$a_4 = \frac{1}{24}(s_1^4 - 6 s_1^2 s_2 + 8 s_1 s_3 + 3 s_2^2 - 6 s_4),$$
$$a_5 = \frac{1}{120}(s_1^5 - 10 s_1^3 s_2 + 20 s_1^2 s_3 + 15 s_1 s_2^2 - 30 s_1 s_4 - 20 s_2 s_3 + 24 s_5).$$

Daher ist:

$$f_5 = s_1^5 - 10 s_1^3 s_2 + 20 s_1^2 s_3 + 15 s_1 s_2^2 - 30 s_1 s_4 - 20 s_2 s_3 + 24 s_5 = 0$$

eine identische Relation zwischen den Potenzsummen der Wurzeln einer Gleichung vierten, dritten, zweiten und ersten Grades,

$$f_4 = s_1^4 - 6 s_1^2 s_2 + 8 s_1 s_3 + 3 s_2^2 - 6 s_4 = 0$$

eine solche für die Potenzsummen einer Gleichung dritten, zweiten und ersten Grades u. s. w.

Bei dieser Gelegenheit sei auch erwähnt, dass sich die identischen Relationen zwischen den einförmigen Functionen zweier oder mehrerer Reihen von Veränderlichen unmittelbar mit Hilfe der Operationen 22) und 23) aus denen der Potenzsummen herleiten lassen.

Schreiben wir zu diesem Zweck beispielsweise die niedrigste Relation zwischen den Potenzsummen einer Gleichung dritten Grades $f_4 = 0$ nach der Bezeichnung 4):

$$f_4 = a_1^4 - 6a_1^2 a_{11} + 8a_1 a_{111} + 3a_{11}^2 + 6a_{1111} = 0,$$

so ergeben sich hieraus direct mit Hilfe der Operation 22) die Relationen zwischen den einförmigen Functionen zweier Reihen von Veränderlichen:

$$\begin{aligned} f_{3,1} = {} & a_1^3 a_2 - 3a_1 a_2 a_{11} - 3a_1^2 a_{12} + 2a_2 a_{111} + 6a_1 a_{112} \\ & + 3a_{11} a_{12} - 6a_{1112} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{2,2} = {} & a_1^2 a_2^2 - a_1^2 a_{22} - a_2^2 a_{11} - 4a_1 a_2 a_{12} + 4a_1 a_{122} + 4a_2 a_{112} + 2a_{12}^2 \\ & + a_{11} a_{22} - 6a_{1122} = 0. \end{aligned}$$

Die übrigen Relationen $f_{1,3}$, $f_{0,4}$ erhält man hieraus durch Vertauschung der Indices 1 und 2.

XI.

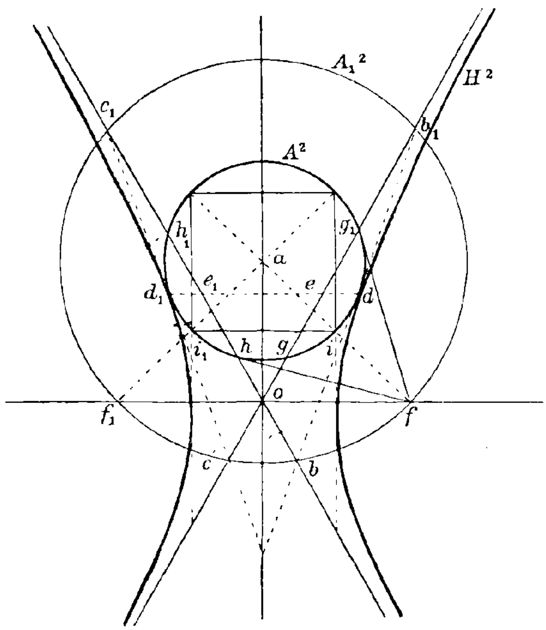
Ueber Kreise, welche einen Kegelschnitt doppelt berühren.

Von

BENEDIKT SPORER
in Cannstatt.

I.

1. An irgend eine Hyperbel H^2 seien zwei zur Nebenachse symmetrische Tangenten bb_1 und cc_1 gezogen, welche also auf den Asymptoten von H^2, von dem Schnittpunkt o der letzteren gerechnet, gleiche Stücke $ob = oc$ und $ob_1 = oc_1$ abschneiden (siehe die Figur). Die Endpunkte b, b_1 und c, c_1 dieser



Tangenten liegen dann immer auf einem Kreise A_1^2, der auch durch die beiden Brennpunkte von H^2 geht. Sind diese f und f_1, so ist nämlich immer

$$of.of_1 = ob.oc_1 = ob_1.oc,$$

und die Mitten d, d_1 der Sehnen bb_1 und cc_1 dieses Kreises A_1^2 liegen mit den Mitten e und e_1 der Sehnen bc_1 und b_1c desselben Kreises auf einer Geraden parallel zur Hauptachse der Hyperbel. Ziehen wir weiter mit dieser Hauptachse irgend eine Parallele, so hat diese mit der Hyperbel und den Asymptoten derselben vier solche Punkte gemein, dass das Product aus den Abschnitten dieser Parallelen zwischen einer Asymptote und der Hyperbel einen constanten Werth hat, es ist nämlich dem Quadrat der halben Hauptachse α, also α^2 gleich. Die Punkte d und d_1 liegen aber als Berührungspunkte obiger Tangenten auf der Hyperbel und es ist also auch:

$$ed \,.\, ed_1 = e_1 d \,.\, e_1 d_1 = \alpha^2.$$

Beschreiben wir aber um den Mittelpunkt a des Kreises A_1^2 einen Kreis A^2, der durch d und d_1 geht, oder der die Hyperbel H^2 in diesen Punkten berührt, so wird dieser auf den Asymptoten Sehnen gg_1 und hh_1 ausschneiden, so dass stets z. B.

ist, das heisst: $$eg \,.\, eg_1 = ed \,.\, ed_1 = \alpha^2, \quad \text{oder} \quad gg_1 = 2\alpha$$

Berührt ein Kreis A^2 eine Hyperbel doppelt und liegt sein Mittelpunkt auf der Nebenachse der Hyperbel, so schneidet er auf den Asymptoten derselben Sehnen gleich deren Hauptachse 2α aus und die Berührungssehne geht durch die Mitten dieser Sehnen.

Liegt der Mittelpunkt des doppelt berührenden Kreises dagegen auf der Hauptachse, so finden wir in ganz gleicher Weise:

Berührt ein Kreis eine Hyperbel doppelt und liegt sein Mittelpunkt auf der Hauptachse der Hyperbel, so bestimmt die Berührungssehne auf den Asymptoten derselben zwei Punkte, von denen an den Kreis Tangenten gleich der halben Nebenachse der Hyperbel gehen.

2. Ist die Entfernung oa des Mittelpunkts a von A^2 vom Mittelpunkt von H^2 gleich λ und bildet eine Asymptote mit der Nebenachse der Hyperbel einen Winkel φ, so erhalten wir für den Halbmesser ϱ des Kreises A^2:

$$\varrho^2 = \lambda^2 \sin^2\varphi + \alpha^2 = \frac{\lambda^2 . \alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha^2 = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2}(\alpha^2 + \beta^2 + \lambda^2) = \frac{\alpha^2}{\gamma^2}(\gamma^2 + \lambda^2),$$

wo γ die Entfernung des Brennpunktes der Hyperbel von ihrem Mittelpunkt ist. Da aber $\gamma^2 + \lambda^2$ das Quadrat der Entfernung des Brennpunktes f vom Mittelpunkt a ist, so folgt daraus:

$$\varrho^2 = \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \cdot af^2, \quad \text{das heisst:} \quad \frac{\varrho}{af} = \frac{\alpha}{\gamma},$$

oder:

Alle Kreise, welche eine Hyperbel doppelt berühren und deren Mittelpunkte auf der Nebenachse liegen, werden von jedem Brennpunkt unter gleichem Winkel gesehen, nämlich unter einem Winkel gleich dem der Asymptoten.*

3. Schneidet die eine Scheiteltangente der Hyperbel die Gerade af in i, so ist $ai : af = \alpha : \gamma$, das heisst $ai = \varrho$, oder jede Scheiteltangente schneidet den Kreis in denselben Punkten wie die Geraden von den Brennpunkten der Hyperbel nach dem Kreismittelpunkt a; oder:

---

* Dieser Satz und einzelne der folgenden sind bereits von Steiner (ohne Beweis) gegeben worden.

Dem Kreis A^2 lässt sich allemal ein Rechteck einbeschreiben, von dem zwei Seiten auf die Scheiteltangenten der Hyperbel fallen und dessen Diagonalen durch die Brennpunkte der Hyperbel gehen.

Die Scheiteltangenten bestimmen zudem noch auf dem Kreise A^2 eine Sehne ii_1 gleich der Hauptachse der Hyperbel und es ist immer der Winkel iag_1 gleich dem Winkel oae, oder fg_1 ist Tangente an A^2 in g_1, somit:

Die Berührungspunkte der vier Tangenten, die sich von den beiden Brennpunkten aus an den Kreis A^2 ziehen lassen, liegen auf den Asymptoten der Hyperbel oder die Endpunkte der Sehnen, die ein Kreis A^2 auf den Asymptoten ausschneidet, sind diese vier Berührungspunkte.

4. Auf die Ellipse sind die obigen Betrachtungen nicht übertragbar, jedoch lassen sich auch für diese entsprechende Eigenschaften doppelt berührender Kreise ableiten.

Fällen wir zunächst von einem Brennpunkt auf die Tangenten einer Ellipse Lothe, so liegen deren Fusspunkte auf einem Kreise, der die Hauptachsen der Ellipse zum Durchmesser hat. Daraus folgt unmittelbar, dass, wenn wir von einem Brennpunkt nach den Tangenten der Ellipse Strahlen ziehen, die mit ihnen gleiche Winkel φ bilden, der Ort der Schnittpunkte dieser Strahlen mit den zugehörigen Tangenten ein Kreis A^2 ist*, dessen Mittelpunkt auf der Nebenachse der Ellipse liegt und zwar derart, dass die Nebenachse der Ellipse mit dem Strahl vom Brennpunkt nach seinem Mittelpunkte einen Winkel φ bildet. Dieser Kreis A^2 berührt aber die Ellipse in zwei Punkten, nämlich in den Punkten, in denen die Brennstrahlen nach dem Berührungspunkt einer Tangente mit dieser den Winkel φ bilden. Da wir diese Berührungskreise auch dadurch entstanden uns denken können, dass der Mittelpunkt des Kreises über der Hauptachse als Durchmesser sich auf der Nebenachse bewegt und sein Halbmesser mit zugleich proportinal der Entfernung vom Brennpunkt ändert, so ist die kleinste Sehne dieses Kreises durch den Brennpunkt ebenfalls proportional dem Kreishalbmesser und der Ort der Endpunkte dieser kleinsten Kreissehnen durch den Brennpunkt besteht aus zwei Senkrechten zur Nebenachse der Ellipse, die, wie wir für den speciellen Fall des Kreises über der Hauptachse als Durchmesser finden, durch die Scheitel der Nebenachse gehen. Wir erhalten dadurch:

Berührt ein Kreis A^2 eine Ellipse doppelt und liegt sein Mittelpunkt auf der kleinen Achse derselben, so ist sein Halbmesser der Entfernung seines Mittelpunkts von den

* Oder vielmehr der Ort besteht aus zwei Kreisen, die zur Hauptachse symmetrisch sind.

Brennpunkten proportional und jedem solchen Kreis lässt sich ein Rechteck einbeschreiben, dessen Diagonalen durch die Brennpunkte gehen und von dem zwei Seiten auf die Tangenten der Ellipse in den Scheiteln der grossen Achse zu liegen kommen. Zieht man in jedem Kreis A^2 die Sehnen, die im Brennpunkt gehälftet werden, so liegen deren Endpunkte auf den Tangenten in den anderen Scheiteln der Ellipse und jeder Kreis A^2 schneidet auf den letzteren zwei Sehnen aus, deren Summe constant ist, nämlich gleich der doppelten Entfernung der Brennpunkte und der Osculationskreis der Ellipse in dem einen Scheitel der kleinen Achse schneidet also auf der Tangente im anderen Scheitel der Achse eine Sehne von dieser selben Länge aus, oder die Brennstrahlen durch den ersten Scheitel schneiden die letztere Scheiteltangente in zwei Punkten des Osculationskreises.

II.

5. Sind weiter zwei Kreise A^2 und B^2 mit den Mittelpunkten a und b gegeben und sollen dieselben von irgend einer Geraden G gleiche Sehnen ausschneiden, oder soll Kreis A^2 mit G die Punkte c, c_1 und Kreis B^2 mit derselben Geraden die Punkte d, d_1 gemein haben und sollen überdies die Strecken cd und $c_1 d_1$ dieselbe Mitte n haben, so liegt diese Mitte auf der Geraden gleicher Potenzen L für beide Kreise A^2 und B^2 und das Loth in n auf G geht durch die Mitte m von ab. Die Endpunkte der obigen Sehnen cc_1 und dd_1 sind also vom Punkte m gleichweit entfernt, und der Ort der Geraden G ist eine Parabel P^2 mit m als Brennpunkt und L als Scheiteltangente.

Hieraus und aus 1. folgt:

Der Ort der Geraden G, aus der zwei feste Kreise A^2 und B^2 gleiche Sehnen ausschneiden, ist eine Parabel P^2, welche die Gerade gleicher Potenzen beider Kreise zur Scheiteltangente hat und deren Brennpunkt die Mitte m der Verbindungslinie der Kreismittelpunkte ab ist, und soll eine Hyperbel die beiden Kreise doppelt berühren und soll die Centrale beider Kreise Nebenachse sein, so ist der Ort der Asymptoten dieser Hyperbel die obige Parabel P^2.

6. Beschreiben wir um m einen beliebigen Kreis M^2, so hat dieser mit dem Kreis A^2 zwei Punkte e und e_1 und mit dem Kreis B^2 zwei Punkte g und g_1 gemein. Verbinden wir einen der Punkte e oder e_1 mit einem der Punkte g oder g_1, so hat die Verbindungslinie ihre Mitte n auf der Geraden L und die Kreise A und B schneiden nothwendig auf dieser Geraden gleiche Sehnen aus, oder, die auf diese Art erhaltenen vier Verbindungslinien berühren die Parabel P^2. Die vier Punkte e, e_1

und g, g_1 haben zudem einen festen Schwerpunkt, nämlich den Schnittpunkt l der Linie L mit der Centrale ab, und die gemeinschaftlichen Sehnen der Kreise A^2 und B^2 mit dem Kreise M^2 stehen von L gleich weit ab und die Tangenten, die wir von e oder e_1 an Kreis B^2 ziehen können, sind gleich den Tangenten von g oder g_1 an Kreis A^2. Wie wir ferner an anderen Orten bereits gezeigt haben, haben die vier Punkte, die ein Kreis mit einem Kegelschnitt gemein hat, einen festen Punkt zum Schwerpunkt, wenn wir den Halbmesser des Kreises beliebig verändern. Beschreiben wir aber um m einen zweiten Kreis M^2, so hat dieser mit A^2 zwei Punkte h, h_1 mit B^2 zwei Punkte i, i_1 gemein. Legen wir weiter durch die Punkte e, e_1; d, d_1; h, h_1 einen Kegelschnitt, so muss dieser mit dem zweiten Kreise noch zwei solche Punkte gemein haben, die mit den Punkten h und h_1 den Punkt l zum Schwerpunkt haben, das heisst der Kegelschnitt muss nothwendig durch die Punkte i und i_1 gehen. Lassen wir die Kreise M^2 in einen einzigen zusammenfallen, so folgt daraus:

Soll ein Kegelschnitt C^2 zwei Kreise A^2 und B^2 doppelt berühren und soll eine Achse des Kegelschnitts auf die Centrale der Kreise fallen, so liegen die Berührungspunkte auf einem Kreise um die Mitte m der Centrale ab beider Kreise und die Berührungssehnen sind zu der Geraden gleicher Potenzen L beider Kreise parallel und stehen von ihr gleich weit ab; die Tangenten von den Berührungspunkten des einen Kreises mit C^2 an den anderen Kreis sind unter sich gleich lang und jede Verbindungslinie eines Berührungspunktes des ersten Kreises A^2 mit einem solchen des zweiten Kreises B^2 bestimmt mit beiden Kreisen gleiche Sehnen und ist Tangente an die obige Parabel P^2. Und berühren zwei Kegelschnitte C^2 die Kreise A^2 und B^2 auf die obige Art doppelt, so liegen die Berührungspunkte beider Kegelschnitte C^2 mit den beiden Kreisen auf einem neuen Kegelschnitt C_1^2 und legen wir durch die vier Berührungspunkte des einen der beiden Kegelschnitte C^2 einen weiteren Kegelschnitt C_2^2, so bestimmt derselbe auf den Kreisen A^2 und B^2 vier weitere Punkte, die gleichfalls Berührungspunkte eines solchen Kegelschnitts C^2 sind, und namentlich liegen auch die Berührungspunkte der vier gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise auf einem Kegelschnitt.

Jeder der obigen Kegelschnitte C^2, C_1^2 oder C_2^2 hat ferner mit wenigstens einem der Kreise M^2 vier Punkte gemein, die l zum Schwerpunkt haben, also mit allen. Daraus erhalten wir aber, dass, wenn ein Kreis M^2 durch zwei gemeinsame Punkte zweier dieser Kegelschnitte geht, er nothwendig auch durch die beiden übrigen gehen muss, oder:

Irgend ein Kegelschnitt C^2, gleichgiltig ob er die beiden Kreise in der oben angegebenen Weise berührt oder durch die acht Berührungspunkte zweier solcher Kegelschnitte geht, schneidet einen zweiten Kegelschnitt C'^2 in vier Punkten q eines Kreises M^2, und unter den Verbindungslinien der vier Punkte q sind allemal zwei Paare solcher, die ihre Mitte auf L, der Geraden gleicher Potenzen der beiden Kreise A^2 und B^2 haben und die Tangenten der obigen Parabel P^2, sowie Asymptoten von Hyperbeln C^2 sind, die die Kreise gleichfalls doppelt berühren. Durch die Punkte q selbst ist ein Büschel von Kegelschnitten bestimmt und jeder Kegelschnitt dieses Büschels schneidet auf A^2 und B^2 zusammen acht Punkte aus, die zu je vier auf zwei Kreisen M^2 liegen, also Berührungspunkte von neuen doppelt berührenden Kegelschnitten C^2 sind.

7. Wie wir oben sahen (1.) werden die Kreise A^2 und B^2 für den Fall, dass ihre Mittelpunkte auf der Nebenachse einer Hyperbel liegen, von einem Brennpunkt der letzteren unter demselben Winkel gesehen. Ebenso war für die Ellipse das Verhältniss des Abstandes vom Mittelpunkt zum Halbmesser des doppelt berührenden Kreises constant. Es gestattet uns dies aber folgenden Satz auszusprechen:

Soll ein Kegelschnitt zwei Kreise A^2 und B^2 doppelt berühren und sollen die Mittelpunkte dieser Kreise auf der Nebenachse des Kegelschnitts gelegen sein, so ist der Ort der Brennpunkte dieser Kegelschnitte ein Kreis N^2, der den Abstand der Aehnlichkeitspunkte beider Kreise zum Durchmesser hat.

Ziehen wir umgekehrt von einem beliebigen Punkt des Aehnlichkeitskreises N^2 an die Kreise A^2 und B^2 Tangenten, so folgt aus 3., dass die Verbindungslinien der Berührungspunkte dieser Tangenten Asymptoten von Hyperbeln sind, die die Kreise A^2 und B^2 doppelt berühren, dass also die Kreise A^2 und B^2 aus diesen Verbindungslinien gleiche Sehnen ausschneiden, oder dass diese Berührungspunkte sich zu zwei Paaren ordnen, die A^2 und B^2 in diesen zwei Punkten doppelt berühren; oder:

Ziehen wir an einen Kegelschnitt C^2, der zwei Kreise A^2 und B^2 auf die oben angegebene Art doppelt berührt, die Tangenten in den vier Berührungspunkten, so liegen von den sechs Schnitten dieser Tangenten zwei X und X_1 auf der Centrale ab der Kreise und die anderen vier liegen auf dem Aehnlichkeitskreis N^2 beider Kreise und die Punkte xx_1 bilden also mit den Aehnlichkeitspunkten beider Kreise A^2 und B^2 vier harmonische Punkte. Ziehen wir ferner von irgend einem Punkte an irgend einen Kegelschnitt C^2 die Tangenten, so verhalten sich deren Längen wie die Abschnitte der Normalen in den Berührungspunkten zwischen diesen und einer Achse des Kegelschnitts.

Legen wir wieder von einem Punkte r des Kreises N^2 zwei Tangenten an die Kreise A^2 und B^2, die zugleich Tangenten eines doppelt berührenden Kegelschnitts C^2 sind, so werden die Winkel dieser Tangenten durch die mit ihnen ein harmonisches Büschel bildenden Geraden von r nach den Aehnlichkeitspunkten der Kreise A^2 und B^2 gehälftet. Diese letzteren halbiren aber auch die Winkel der von r nach den Brennpunkten von C^2 gezogenen Geraden, da diese letzteren mit den Tangenten gleiche Winkel bilden; das heisst wir finden:

Soll ein Kegelschnitt C^2 zwei Kreise A^2 und B^2 doppelt berühren und soll seine Hauptachse auf die Centrale fallen, so bilden die Brennpunkte auf dieser Centrale eine Involution und die Aehnlichkeitspunkte beider Kreise sind Doppelpunkte dieser Involution und das Rechteck aus den Abständen dieser Brennpunkte vom Mittelpunkt des Kreises N^2 hat constanten Inhalt und der Mittelpunkt des Kreises N^2 ist Brennpunkt einer Parabel, die die Kreise A^2 und B^2 doppelt berührt.

III.

8. Berührt ein Kegelschnitt C^2 einen Kreis A^2 in den Punkten a, b doppelt und schneidet irgend eine Sehne $cc_1{}^2$ des Kegelschnitts den Kreis in den Punkten d, d_1 und die Berührungssehne in dem Punkte e, so ist e Doppelpunkt einer Involution, der die Punktepaare c, c_1 um d, d_1 angehören, das heisst es ist:

$$\frac{cd}{ce} : \frac{c_1 d}{c_1 e} = \frac{c_1 d_1}{c_1 e} : \frac{c d_1}{ce}, \quad \text{oder} \quad \frac{cd \,.\, cd_1}{c_1 d \,.\, c_1 d_1} = \frac{ce^2}{c_1 e^2}.$$

Sind die Abstände der Punkte c und c_1 von der Berührungssehne h und h_1 und die Tangenten von c und c_1 an den Kreis A^2 (resp. die halben kürzesten Sehnen dieses Kreises durch c und c_2) gleich t und t_1, so folgt daraus:

$$\frac{t}{t_1} = \frac{h}{h_1}, \quad \text{oder} \quad t = \varepsilon h, \quad t_1 = \varepsilon h_1,$$

wo ε ein bestimmter constanter Factor ist; oder:

Legen wir von verschiedenen Punkten eines Kegelschnitts C^2, der einen Kreis A^2 doppelt berührt, an diesen die Tangenten (resp. ziehen durch diese Punkte die kürzesten Sehnen dieses Kreises), so verhalten sich die Längen dieser Tangenten (Sehnen) wie die Abstände der Punkte von der Berührungssehne des Kreises und des Kegelschnitts.

Sind weiter zwei Kreise A^2 und B^2 gegeben, welche beide denselben Kegelschnitt C^2 berühren und die ihren Mittelpunkt auf derselben Achse dieses Kegelschnitts haben, so fanden wir oben (6.), dass die Tangenten, die wir von den Berührungspunkten des einen Kreises A^2 an den Kreis B^2 ziehen konnten, gleich den Tangenten sind, die wir von den Berührungspunkten von B^2 mit C^2 an A^2 ziehen konnten.

Daraus erhalten wir jedoch:

Die Länge der Tangente von einem beliebigen Punkt von C^2 an Kreis A^2 ist gleich dem mit einer Constanten ε multiplicirten Abstand des Punktes von der Berührungssehne und zwar ist der Werth dieser Constanten derselbe, wenn wir Kreis A^2 durch einen anderen B^2 ersetzen, der C^2 ebenfalls doppelt berührt und der seinen Mittelpunkt auf derselben Achse von C^2 hat.

9. Liegt der Mittelpunkt des Kreises A^2 auf der Hauptachse des Kegelschnittes, so dient zur Bestimmung des Factors ε folgendes. Unter den Kreisen A^2 sind allemal auch zwei solche, die zum Punkte werden, und zwar sind dies die Brennpunkte des Kegelschnitts. Die zugehörige Berührungssehne ist dann Leitlinie des Kegelschnitts und wir erhalten daraus für ε den Werth $\frac{\alpha}{\gamma}$. Für die Parabel speciell ergiebt sich $\varepsilon = 1$.

Liegt dagegen der Kreismittelpunkt von A^2 auf der Nebenachse einer Ellipse, so erhalten wir aus den Umstand, dass jeder doppelt berührende Kreis auf den Tangenten in den Scheiteln der Nebenachse zwei Sehnen ausschneidet, deren Summe $= 4\gamma$ ist für ε den Werth $\frac{\gamma}{\beta}$. Um endlich für die Nebenachse der Hyperbel diesen Werth zu bestimmen, können wir den Mittelpunkt des Kreises mit dem Mittelpunkt der Hyperbel zusammenfallen lassen, oder aber in Bezug auf einen beliebigen Kreis A^2 diese Constante dadurch bestimmen, dass wir von einem unendlich fernen Punkt der Hyperbel an den Kreis die Tangente ziehen und auf die Nebenachse uns ein Loth gefällt denken. In beiden Fällen erhalten wir für ε den Werth $\frac{\gamma}{\beta}$.

10. Die in Obigem gegebenen Entwickelungen gestatten uns, eine Reihe von Eigenschaften doppelt berührender Kreise eines Kegelschnitts aufzustellen, so z. B.:

a) Ziehen wir von irgend zwei festen Punkten eines Kegelschnitts an einen beliebigen doppelt berührenden Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Hauptachse liegt, die Tangenten, so ist die Summe oder Differenz derselben constant, nämlich gleich dem Unterschied der Brennstrahlen von einem der Brennpunkte nach den Punkten. Sind insbesondere diese Punkte die Scheitel der Hauptachse, so ist diese Summe oder dieser Unterschied gleich der Entfernung der beiden Brennpunkte, und ist einer der Punkte Scheitel der Hauptachse, der andere

Scheitel der Nebenachse des Kegelschnitts, so ist dieser constante Werth gleich der halben Entfernung beider Brennpunkte.

b) Berührt ein Kreis eine Ellipse doppelt und liegt sein Mittelpunkt auf der Nebenachse der Ellipse, so ist die Summe der kleinsten Sehnen dieses Kreises durch zwei feste Punkte der Ellipse constant, wenn der Kreis selbst sich ändert.

c) Ziehen wir von irgend einem Hyperbelpunkt an einen doppelt berührenden Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Nebenachse liegt, eine Tangente, so ist deren Länge gleich dem Stück der Asymptote zwischen der Berührungssehne des Kreises und der Hyperbel und einer Parallelen zu dieser Sehne. Und liegt gleicherweise der Mittelpunkt des Kreises auf der Hauptachse, so ist die Länge der Tangente von einem beliebigen Punkt an den Kreis ebenfalls gleich dem Stück der Asymptote zwischen der verlängerten Berührungssehne und einer Parallelen zu ihr. Ziehen wir weiter von einem der Brennpunkte nach zwei beliebigen Hyperbelpunkten die Brennstrahlen, so ist der Unterschied derselben gleich dem Stück einer Asymptote zwischen zwei Parallelen zur Nebenachse der Hyperbel durch die beiden Punkte.

d) Berühren zwei Kreise einen Kegelschnitt doppelt und liegen ihre Mittelpunkte auf derselben Achse des Kegelschnitts, so ist die Summe oder Differenz der Tangenten aus irgend einem Punkte des Kegelschnitts an die Kreise constant. Und zwar ist dieser Unterschied, für den Fall, dass die Kreise ihre Mittelpunkte auf der Hauptachse des Kegelschnitts haben, gleich dem Unterschied der Brennstrahlen von einem der Brennpunkte nach je einem Berührungspunkte der Kreise. Ist der Kegelschnitt eine Hyperbel, so ist diese Summe oder dieser Unterschied gleich dem Stück einer Asymptote zwischen den Berührungssehnen der Kreise und der Hyperbel. Ist der Kegelschnitt endlich eine Ellipse und liegen die Mittelpunkte der Kreise auf der Nebenachse, so treten an Stelle der Tangenten die kürzesten Sehnen eines Ellipsenpunktes in Bezug auf die Kreise.

Ausserdem schneidet der Kegelschnitt auf den gemeinschaftlichen Tangenten zweier doppeltberührender Kreise, die ihren Mittelpunkt auf derselben Achse des Kegelschnitts hat, gleiche Sehnen aus.*

* Alle diese Sätze lassen sich auf Umdrehungsflächen zweiten Grades und längs von Kreisen berührende Kugeln ausdehnen, so folgt z. B. aus Satz d):

Sind einer Rotationsfläche zweiten Grades zwei berührende Kugeln einbeschrieben, deren Mittelpunkte auf der Achse liegen,

11. Wie wir bereits oben bemerkten, haben die je vier Punkte, die irgend ein Kreis mit festem Mittelpunkt mit einem Kegelschnitt gemein hat, einen festen Punkt zum Schwerpunkt. Ziehen wir von den Punkten an einen festen Kreis, der den Kegelschnitt doppelt berührt, die Tangenten, so ist deren Summe gleich der ε-fachen Summe der Abstände der vier Punkte von der Berührungssehne. Da der Schwerpunkt der vier Punkte aber ein unveränderlicher ist, so ist diese Summe constant; das heisst, wir erhalten:

Beschreiben wir um irgend einen festen Punkt m mit beliebigem Halbmesser einen Kreis M^2 und ziehen von den Schnitten dieses Kreises mit einem Kegelschnitt an einen Kreis A^2, der den letzteren doppelt berührt, die Tangenten, so hat deren Summe einen constanten Werth und es ist also auch namentlich die Summe der vier Brennstrahlen nach diesen vier Punkten des Kreises M^2 und des Kegelschnitts constant.

12. Ziehen wir zu irgend einer Sehne eines Kegelschnitts diejenige Sehne, welche zu ihr senkrecht steht und von ihr gehälftet wird und legen durch die Endpunkte dieser zweiten Sehne Kreise, so liegen deren Mittelpunkte auf der ersten Sehne und die Kreise haben mit dem Kegelschnitt noch je zwei Punkte gemein, deren Verbindungslinien parallel sind. Wir schliessen daraus, dass der Ort der Schwerpunkte der vier Punkte, die jeder dieser Kreise mit dem Kegelschnitt gemein hat, eine Gerade ist, oder:

Liegt der Mittelpunkt eines Kreises auf einer Geraden, so ist der Ort des Schwerpunkts der vier Punkte, die er mit dem Kegelschnitt gemein hat, eine zweite Gerade, und ist besonders die erstere Gerade senkrecht zu einer Achse des Kegelschnitts, so ist es auch die zweite.

Und hieraus:

Die obige Summe der vier Tangenten resp. der vier Brennstrahlen bleibt dieselbe, wenn der Mittelpunkt des Kreises M^2 auf einer Parallelen zur Berührungssehne des zweiten Kreises mit dem Kegelschnitt bewegt wird.

Insbesondere finden wir daraus z. B. für die Parabel:

Beschreiben wir um einen beliebigen Punkt einer Senkrechten zur Achse einer Parabel mit beliebigem Halbmesser

---

so ist die Summe oder Differenz der Tangenten von einem Punkte der Fläche an die Kugeln constant.

Und hieraus:

Durchschneiden wir die Fläche durch eine Ebene, die beide Kugeln berührt, so sind die Berührungspunkte Brennpunkte der Schnittfigur.

einen Kreis, so ist die Summe der vier Brennstrahlen nach den vier gemeinsamen Punkten des Kreises und der Parabel gleich dem vierfachen Abstand der Senkrechten vom Brennpunkt, und ebenso ist die Summe der vier Tangenten von diesen vier gemeinsamen Punkten des Kreises und der Parabel an irgend einen doppelt berührenden Kreis der Parabel gleich dem vierfachen Abstand des Mittelpunktes dieses letzteren Kreises von der Senkrechten.

Bei diesen Brennstrahlen und Tangenten ist jedoch genau auf den Umstand zu achten, ob die Punkte, nach denen sie gehen, auf derselben Seite der zum Brennpunkt gehörigen Leitlinie oder Berührungssehne des Kreises mit dem Kegelschnitt liegen oder nicht, indem durch diesen Umstand das Vorzeichen der Brennstrahlen und Tangenten bedingt ist.

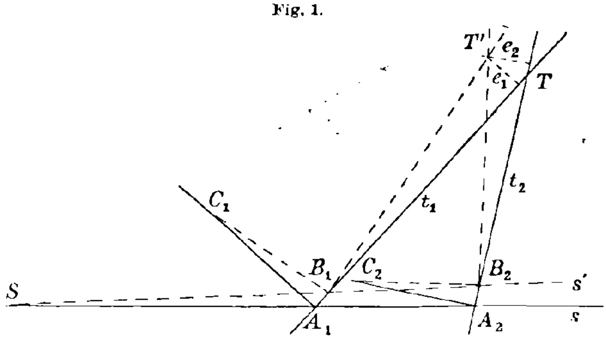
Cannstatt, im November 1895.

Kleinere Mittheilungen.

XVI. Construction der Schmiegungsebenen der Schnittcurve zweier Kegel.

Bei den folgenden Constructionen wird vorausgesetzt, dass die Leitcurven l_1, l_2 der beiden Kegel in einer und derselben Ebene liegen, die als Bildebene genommen wird. Die Verbindungslinie der beiden Kegelspitzen M_1, M_2 habe den Spurpunkt S und eine Hilfsebene durch $M_1 M_2$ habe die Spur s durch S. Schneidet s die Leitcurven in zwei Punkten A_1, A_2, so ist $P = M_1 A_1 \,.\, M_2 A_2$ ein Punkt der Schnittcurve $\mathfrak{R}$ der beiden Kegel. Um die Tangente p von P zu erhalten, legt man in A_1 und A_2 die Tanganten t_1 und t_2 an die Leitcurven; dann ist $T = (t_1 t_2)$ der Spurpunkt von p. Der Ort der Punkte T ist die Spurcurve der Tangentenfläche von $\mathfrak{R}$. Die Spur der Schmiegungsebene in P ist die Tangente t der Spurcurve der Developpabeln in T. Diese Spurcurve ist durch die beiden Leitcurven und den Punkt S vollständig bestimmt.

Fig. 1.



Ersetzt man nun die beiden Kegel durch zwei andere, welche sie längs der Erzeugenden $M_1 A_1$, $M_2 A_2$ osculiren, so hat die Schnittcurve der beiden neuen Kegel in P dieselbe Schmiegungsebene wie $\mathfrak{R}$. Die Spurcurven der neuen Kegel osculiren die Spurcurven der ursprünglichen Kegel in den Punkten A_1, A_2. Wir wählen nun diejenigen osculirenden Kegel, deren Spurcurven die Krümmungskreise der Leitcurven in A_1, A_2 sind.

Die Gerade s werde um S unendlich wenig gedreht in die Lage s' (Fig. 1). Dann erhält man statt der Tangenten t_1, t_2 zwei Tangenten t'_1, t'_2 in B_1, B_2, die sich im Punkte T' unendlich benachbart zu T schneiden. Nun ist die Richtung der Tangente t in T bestimmt, wenn man das Verhältniss der

Entfernungen e_1, e_2 des Punktes T' von t_1 und t_2 angeben kann. Setzt man die unendlich kleinen Winkel $\sphericalangle\, t_1 t'_1 = \tau_1$, $\sphericalangle\, t_2 t'_2 = \tau_2$ und bezeichnet man mit t_1, t_2 auch die Strecken $A_1 T$, $A_2 T$, so ist

$$e_1 = \tau_1 t_1, \quad e_2 = \tau_2 t_2.$$

Seien r_1, r_2 die Radien der beiden Krümmungskreise, deren Mittelpunkte C_1, C_2 sind, und b_1, b_2 die unendlich kleinen Bögen $A_1 B_1$, $A_2 B_2$. Dann ist

$$\tau_1 = \frac{b_1}{r_1}, \quad \tau_2 = \frac{b_2}{r_2},$$

also

$$e_1 : e_2 = \frac{b_1 t_1}{r_1} : \frac{b_2 t_2}{r_2}.$$

Nun lässt sich aber das Verhältniss $b_1 : b_2$ durch endliche Strecken ausdrücken. Betrachtet man s' als eine Transversale des Dreiecks $A_1 A_2 T$, so ist nach dem bekannten Transversalensatz:

$$A_1 S \,.\, T B_1 \,.\, A_2 B_2 = A_2 S \,.\, A_1 B_1 \,.\, T B_2.$$

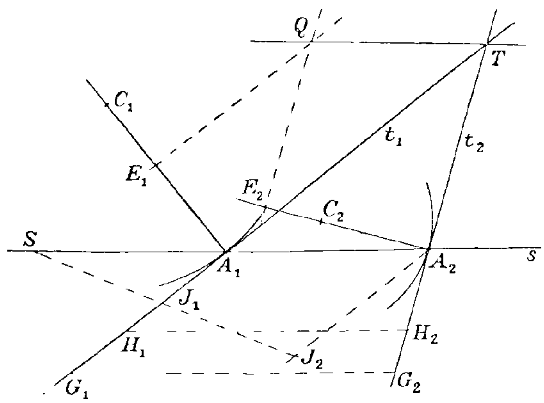
Wir führen noch die Bezeichnung ein: $A_1 S = a_1$, $A_2 S = a_2$. Dann lautet die Gleichung:

$$\left\{ \begin{aligned} & a_1 (t_1 - b_1) b_2 \\ & = a_2 b_1 (t_2 - b_2). \end{aligned} \right.$$

Geht man zur Grenze über, wo b_1, b_2 gegen t_1, t_2 verschwinden, so folgt:

$$b_1 : b_2 = a_1 t_1 : a_2 t_2.$$

Fig. 2.



Damit erhält man nun:

$$1) \qquad e_1 : e_2 = \frac{a_1 t_1^2}{r_1} : \frac{a_2 t_2^2}{r_2} = r_2 : \frac{a_2 t_2^2}{a_1 t_1^2} r_1.$$

Hieraus ergiebt sich folgende Lösung der Aufgabe (Fig. 2): Auf $A_1 C_1$ trägt man von A_1 aus den Radius r_2 nach E_1 auf und durch E_1 zieht man die Gerade $E_1 Q \parallel t_1$. Man macht ferner $A_1 G_1 = r_1$, $G_1 G_2 \parallel s$, $A_1 H_1 = A_2 G_2$, $H_1 H_2 \parallel s$, $A_1 J_1 = A_2 H_2$ und projicirt J_1 von S aus nach J_2 auf die Gerade $A_2 J_2 \parallel t_1$. Endlich macht man $A_2 E_2 = A_2 J_2$ und zieht durch E_2 die Gerade $E_2 Q \parallel t_2$. Dann geht durch den Schnittpunkt Q die gesuchte Tangente t von T.

Welches die entsprechenden Sinne für das Auftragen der Punkte E_1, E_2 sind, erkennt man leicht, indem man sich vorstellt, dass s eine kleine Drehung um S macht.

Setzt man $\sphericalangle t_1 s = \alpha_1$, $\sphericalangle t_2 s = \alpha_2$ und bezeichnet man die Winkel, welche $A_1 C_1$, $A_2 C_2$ mit s einschliessen, mit β_1, β_2, so kann man statt 1) schreiben:

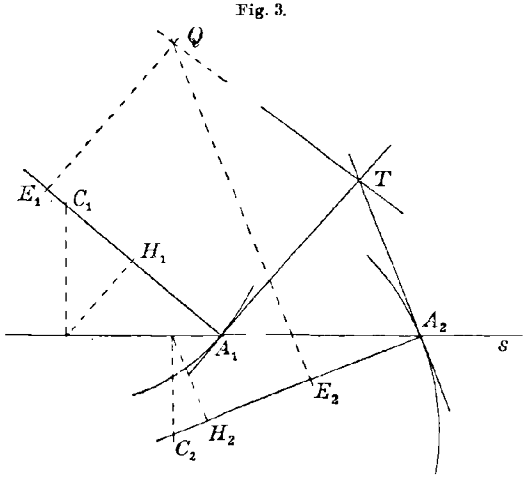
$$e_1 : e_2 = \frac{r_2 \sin^2 \alpha_2}{a_2} : \frac{r_1 \sin^2 \alpha_1}{a_1},$$

oder

2) $$e_1 : e_2 = r_2 \cos^2 \beta_2 : r_1 \cos^2 \beta_1 \cdot \frac{a_2}{a_1}.$$

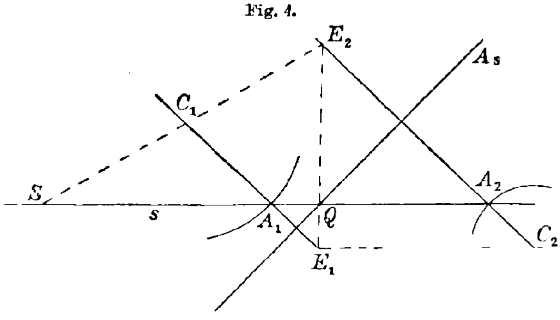
Hieraus könnte man eine Modification der vorigen Construction ableiten. Dieselbe ist in Figur 3 für den Fall dargestellt, wo die beiden Flächen Cylinder sind. Der Punkt S ist dann im Unendlichen und man hat $\frac{a_2}{a_1} = 1$. Es wurde $A_1 E_1 = A_2 H_2$, $A_2 E_2 = A_1 H_1$ gemacht.

Fig. 3.



In einem Schnittpunkt der beiden Leitcurven hat die Spurcurve der Developpabeln eine Spitze. Bei der Construction der Spitzentangente ist wieder $\frac{a_2}{a_1} = 1$. — Wenn ferner der Punkt T unendlich fern ist, so wird in 2) $\beta_1 = \beta_2$. Man hat also von A_1 aus den Radius r_2 nach E_1 aufzutragen, den Radius r_1 von S aus nach $A_2 E_2$ zu projiciren und den Schnittpunkt Q von $E_1 E_2$ mit s zu nehmen. Für Q ist das Verhältniss der Entfernungen von t_1 und t_2 das verlangte und durch Q geht also die gesuchte Asymptote t (Fig. 4).

Fig. 4.



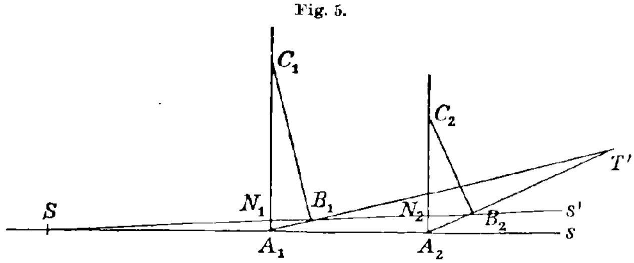
Die unendlich fernen Punkte T werden durch eine Hilfscurve gefunden. Legt man parallele Tangenten an l_1 und l_2 und verbindet die Berührungspunkte auf l_1 mit denen auf l_2, so umhüllen diese Verbindungslinien eine

Curve. Die Tangenten an diese Curve von S aus geben diejenigen Lagen von s, welche zu unendlich fernen Punkten T führen.

Tangenten im Doppelpunkt der Schnittcurve zweier sich berührenden Kegel. Wenn die beiden Kegel eine Tangentialebene gemein haben, also sich im Schnittpunkt P der beiden Berührungserzeugenden $M_1 A_1$, $M_2 A_2$ berühren, so ist P ein Doppelpunkt der Schnittcurve. Um seine beiden Tangenten zu bestimmen, benutzen wir wieder die zwei längs $M_1 A_1$, $M_2 A_2$ osculirenden Kegel, deren Spurcurven die Krümmungskreise der Leitcurven in A_1, A_2 sind. Sollen die Doppelpunktstangenten reell sein, so muss S auf der gemeinschaftlichen Tangente s der Leitlinien ausserhalb oder innerhalb der Strecke $A_1 A_2$ liegen, je nachdem die Leitcurven bei der Berührung mit s auf derselben Seite von s liegen oder nicht.

Denkt man sich s unendlich wenig um S gedreht, so dass beide Leitcurven geschnitten werden, so erkennt man, dass die Doppelpunktstangenten als Gegenseiten eines vollständigen Vierecks mit unendlich benachbarten Ecken zu den beiden im Doppelpunkt sich schneidenden Erzeugenden harmonisch liegen, also ihre Spurpunkte auf s mit A_1, A_2 eine harmonische Gruppe bilden.

Fig. 5.



Auf s', unendlich benachbart zu s, seien B_1, B_2 die zu A_1, A_2 benachbarten Punkte der Leitcurven (Fig. 5). τ_1, τ_2 seien die Winkel, welche die Tangenten in B_1, B_2 mit s bilden. Nun geht für verschwindende τ_1, τ_2 der Schnittpunkt T' der beiden Tangenten in den Spurpunkt T einer der gesuchten Doppelpunktstangenten über und es ist:

$$A_1 T : A_2 T = \tau_2 : \tau_1.$$

Andererseits hat man:

$$\tau_1 = \frac{b_1}{r_1}, \quad \tau_2 = \frac{b_2}{r_2} \quad (A_1 B_1 = b_1, \quad A_2 B_2 = b_2).$$

Wenn nun s' die Geraden $A_1 C_1$, $A_2 C_2$ in den Punkten N_1, N_2 schneidet, die von A_1, A_2 die Entfernungen n_1, n_2 haben, so ist

$$b_1^2 = 2 r_1 n_1, \quad b_2^2 = 2 r_2 n_2.$$

Man hat also:

$$A_1 T : A_2 T = \sqrt{\frac{n_2}{r_2}} : \sqrt{\frac{n_1}{r_1}}.$$

Es ist aber
$$n_2 : n_1 = SA_2 : SA_1 = a_2 : a_1,$$
folglich wird:
$$3)\qquad A_1T : A_2T = \sqrt{r_1 a_2} : \sqrt{r_2 a_1} = r_1 : \sqrt{r_1 \cdot r_2 \frac{a_1}{a_2}}.$$

Die Spurpunkte der beiden Doppelpunktstangenten theilen die Strecke A_1A_2 aussen und innen nach dem Verhältniss der mittleren Proportionalen aus r_1 und a_2, r_2 und a_1. Für zwei Cylinder ist S auf s unendlich fern. Indem dann $\frac{a_1}{a_2} = 1$ wird, erhält man das Resultat: Die Spurpunkte der Doppelpunktstangenten theilen die Strecke A_1A_2 aussen und innen nach dem Verhältniss von r_1 zur mittleren Proportionalen aus r_1 und r_2.

Anzahl der Schmiegungsebenen, welche durch einen beliebigen Punkt an die Schnittcurve zweier algebraischen Kegel gelegt werden können. Wir bezeichnen mit m, n, k, i die Ordnungszahl, Klassenzahl, Zahl der Spitzen und der Inflexionen der Leitcurven unter Beifügung des betreffenden Index. Es soll aus den Singularitäten der Leitcurven die Anzahl der Schmiegungsebenen der Schnittcurve $\mathfrak{R}$ abgeleitet werden, welche durch einen beliebigen Punkt des Raumes gehen.*

Da diese Anzahl dieselbe bleiben muss, wenn man dem Punkt eine specielle Lage giebt, so verlegen wir ihn in die Spitze des ersten Kegels.

Durch M_1 können aber nur die folgenden drei Arten von Schmiegungsebenen gehen:

1. Legt man durch M_1M_2 eine Ebene, welche den zweiten Kegel berührt und den ersten Kegel in m_1 Erzeugenden schneidet, so sind die letzteren Erzeugenden Tangenten von $\mathfrak{R}$ und die zugehörigen Tangentialebenen des ersten Kegels sind offenbar stationäre Schmiegungsebenen von $\mathfrak{R}$.

Solcher stationären Schmiegungsebenen durch M_1 giebt es also $m_1 n_2$. Aber jede derselben ist dreifach zu rechnen unter den durch M_1 gehenden Schmiegungsebenen. Denn durch jeden Punkt einer Tangente von $\mathfrak{R}$ gehen zwei unendlich benachbarte Schmiegungsebenen und eine dritte kommt hinzu, wenn die Schmiegungsebene stationär, ihr Berührungspunkt aber von jenem Punkt verschieden ist.

2. Der erste Kegel hat i_1 Inflexionserzeugende. Jede derselben liefert m_2 Punkte von $\mathfrak{R}$, deren Schmiegungsebenen durch M_1 gehen und einfach zu rechnen sind.

3. Der zweite Kegel hat k_2 Cuspidalerzeugende. Jede derselben liefert m_1 Spitzen von $\mathfrak{R}$, deren Schmiegungsebenen durch M_1 gehen und einfach zu rechnen sind.

* Vergleiche meinen Aufsatz: „Ueber den Schnitt zweier Kegel und über eine Steiner'sche Aufgabe betreffend ebene Curven.“ Vierteljahrsschrift der Naturf. Gesellschaft in Zürich, Bd. XXXVIII.

Durch M_1 gehen also im Ganzen

$$3m_1 n_2 + m_2 i_1 + m_1 k_2$$

Schmiegungsebenen von $\mathfrak{R}$. Die analoge Betrachtung für M_2 ergiebt aber als Anzahl der durch M_2 gehenden Schmiegungsebenen:

$$3m_2 n_1 + m_1 i_2 + m_2 k_1.$$

Da diese beiden Zahlen einander gleich sein müssen, so erhält man eine Beziehung, welche zwischen den Singularitäten irgend zweier algebraischen ebenen Curven bestehen muss:

$$3(m_1 n_2 - m_2 n_1) + m_2 i_1 - m_1 i_2 + m_1 k_2 - m_2 k_1 = 0.$$

Nimmt man nun für den zweiten Kegel einen Kegel zweiter Ordnung, setzt also $m_2 = n_2 = 2$, $i_2 = k_2 = 0$, so geht die Gleichung über in

4) $$i_1 - k_1 = 3(n_1 - m_1).$$

Damit hat man die bekannte Plücker'sche Formel für jede algebraische ebene Curve durch einfache raumgeometrische Betrachtung bewiesen.

Unter Berücksichtigung dieser Formel erhält man schliesslich für die gesuchte Anzahl der Schmiegungsebenen durch einen Punkt:

5) $$3m_1 m_2 + m_1 i_2 + m_2 i_1.$$

Riga, Februar 1896. Prof. Dr. A. Beck.

XVII. Solenoid, Ring- und Kugelspirale.*

Diese drei Beispiele von „Stromsystemen" behandelt Christiansen im § 79, nachdem in den zwei vorausgehenden die magnetische Doppelschicht oder Lamelle $\pm \sigma . \varepsilon$ (Dichte mal Abstand) mit der Intensität des in ihrem Rande verlaufenden Stromes i als gleich erkannt wurde. Es ist dann für das Solenoid von der Länge L und N Windungen:

a) $$\sigma . dz = \pm Nidz : L \quad \text{oder} \quad \sigma = \pm Ni : L$$

und für das Feld γ im Innern des Solenoids, welches längs der Achse gerichtet ist, beziehe ich mich auf den im vorigen Titel schon benutzten Sprung $4\pi\sigma$

b) $$\gamma = 4\pi Ni : L.$$

Da ein magnetischer $+1$ Punkt von dieser Feldstärke oder „Kraft" gegen den Südpol getrieben wird, so sollte man das Minuszeichen beisetzen, wie es der Verfasser in seinem folgenden Beispiele, der umwickelten Kugelfläche, auch thut.

Ich lasse indessen den Ring von Pacinotti oder Gramme vorangehen, weil dieser sich inniger an das Solenoid anschliesst als die Kugel. Das Buch enthält dafür nur die b) entsprechende Formel; ich schreibe beide:

a′) $$\sigma = \pm Ni : 2\pi R,$$

b′) $$\gamma = 2Ni : R,$$

wo R der Abstand des Mittelpunkts des Ringquerschnitts vom Ringmittelpunkt (von der Drehachse des Ringes); γ ist in jenem Mittelpunkt senk-

* Vergl. S. 167 u. flg.

recht zum Querschnitt gerichtet. Mit der letzten Formel schliesst § 79. Kirchhoff hat dieselbe und a′) im § 10 der XV. Vorlesung, kommt aber im § 6 der XVI. nochmals auf a′) zurück, weil er das Drehungsmoment des Ringes (ohne Eisenkern, der die Theorie complicirt) berechnen lehrt: Tritt ein Strom i an den Endpunkten eines (um die Ringbreite erweiterten) Durchmessers $2R$ ein und aus, so haben wir zwei Halbringe oder Solenoide mit $\frac{i}{2}$ und $\frac{N}{2}$ Windungen für die Länge πR vor uns; aber wegen der zwei Solenoide kommt doch wiederum a′) vollends zu Stande als Magnetikum an den genannten Endstellen in der Fläche 1. Ist q der Ringquerschnitt und K das Magnetfeld, in welchem der Ring rotirt (senkrecht zum genannten Ringdurchmesser steht derjenige, in welchem der Ring möglichst nahe an den Polen eines Hufeisenmagnets vorbei rotirt), so erhält man das ganze Drehungsmoment durch Multiplication mit $K2Rq$, also

$$\frac{Nikq}{\pi}.$$

Nun wende ich mich noch zu der nach Parallelkreisen umsponnenen Kugelfläche $4\pi a^2$, wobei N Windungen auf den horizontalen Durchmesser $2a$ treffen, den ich wegen a′) und b′) wieder zur z-Achse wähle (positiv vom Centrum zum Nordpole hingerichtet). Wenden wir uns vom Aequator gegen den Nordpol dieser Kugel hin, so nehmen die Windungen für jedes dz um die Ringbreite dy ab. Es mag nun $\pm s$ die magnetische Flächendichte einer solchen Doppelschicht sein, damit σ die Flächendichte auf der entsprechenden Kugelzone genannt werden kann, welche wir statt jener ringförmigen substituiren gemäss der Gleichung: $$s \,.\, dy = \sigma d(a\theta).$$

Hierin bedeutet θ den Centriwinkel wie in der vorletzten Mittheilung, auf welche wir uns sogleich vollständig beziehen werden (insbesondere den ersten Theil derselben gegen dessen Ende hin). Da $y = a \sin\vartheta$, so kommt

$$s \cos\theta = \sigma.$$

Gemäss a) ist $s = Ni : 2a$, also $\sigma = \frac{Ni}{2a}\cos\theta$; verglichen mit der gerade erwähnten Mittheilung giebt $\frac{Ni}{2a} = J$ die Stärke der Magnetisirung der Kugelfläche an. Die Feldstärke im Innern ist demnach $-\frac{2\pi}{3}\,\frac{Ni}{a}\cos\theta$.

Das Buch giebt nur die Feldstärke auf dem Polardurchmesser ($\theta = 0$) an und schliesst mit den Worten: „Auf diesem Wege kann man ein fast constantes magnetisches Feld herstellen, welches bei der Construction der Messinstrumente zur Bestimmung der elektrischen Stromstärke Anwendung finden kann.“ Dieses Wort „fast“ findet in dem θ seine richtige Deutung: wenn $\theta = 0$, so ist die Feldstärke γ ganz constant im Innern der Kugel; wenn aber θ von Null verschieden, so ist die Feldstärke mit $\cos\theta$ behaftet; von $r (< a)$ ist sie ganz unabhängig. Das Minuszeichen entspricht dem Texte nach b) oben.

Augsburg. Prof. Dr. Kurz.

XVIII. Zur Construction einer Fläche zweiten Grades aus neun Punkten.

Herr Dr. H. Liebmann hat im 41. Jahrgang dieser Zeitschrift S. 120 die Aufgabe gelöst:

Wenn neun Punkte $(NN'P_1 P_2 P_3 Q_1 Q_2 Q_3 Q_4)$ im Raume gegeben sind, auf einer Ebene $\mathfrak{E}$ durch drei derselben $(P_1 P_2 P_3)$ den Kegelschnitt φ zu zeichnen, den die durch die neun Punkte bestimmte Fläche zweiten Grades Φ mit derselben gemein hat.

Wir wollen zeigen, dass das dort angegebene Schema der Behandlung noch der Variation fähig ist, um die angegebene besondere Aufgabe zu lösen, dass es aber im Princip auch ausreicht, um den Kegelschnitt φ in jeder beliebigen Ebene des Raumes zu finden, ohne jede Hilfsconstruction ausserhalb dieser einen Ebene.

Zu dem Ende wollen wir hier kurz die methodischen Eigenheiten der Liebmann'schen Construction hervorheben:

a) Zunächst bemerken wir, dass die neun Punkte in $2+3+4$ Punkte, also in drei Gruppen zertrennt erscheinen. Von den zwei Punkten der ersten Gruppe wird Φ in die Ebene $\mathfrak{E}$ der zweiten Gruppe, also doppelt projicirt. In dieser so doppelt bezogenen Ebene kennt man $3+4$ Paar entsprechender Punkte, wovon die drei ersten Doppelelemente der Beziehung vorstellen (P_1, P_2, P_3). Die weiteren Doppelelemente erfüllen den fraglichen Kegelschnitt φ. Ausserdem giebt es in der Beziehung einen singulären Punkt S, dem je eine Gerade m im anderen System entspricht. Die Construction von φ und m ist gleichwerthig.

b) Als methodisches Hauptmerkmal ist aber die Variation eines der gegebenen Flächenpunkte hervorzuheben. Es wird nämlich irgend ein Punkt Q_4 der dritten Gruppe fortgelassen und dafür ein Punkt P_4 der zweiten Gruppe zugefügt, der bereits in der Ebene des φ liegt und sohin das Problem, φ zu finden, zu vereinfachen geeignet ist. Für diesen neuen Fall wird die Construction dieses Kegelschnittes gezeigt. Wir wollen ihn den angepassten Kegelschnitt nennen und mit $\varphi\begin{bmatrix}Q_4\\P_4\end{bmatrix}$ bezeichnen; analog die ihm eindeutig zugehörige singuläre Gerade mit $m\begin{bmatrix}Q_4\\P_4\end{bmatrix}$, wobei also der obere Buchstabe den im System weggelassenen, der untere den hierfür zugefügten Punkt andeutet.

c) Nun wird auch noch P_4 weggelassen; dann bilden die Flächen Φ, ebenso die Kegelschnitte $\varphi\begin{bmatrix}Q_4\\ *\end{bmatrix}$, wie die singulären Geraden $m\begin{bmatrix}Q_4\\ *\end{bmatrix}$ Büschel. Die noch unbekannten festen Punkte der beiden letztgenannten sind linear zu bestimmen. In der Liebmann'schen Lösung werden statt der φ die gleichwerthigen m betrachtet. Der feste Punkt des Büschels der m möge mit $M\begin{bmatrix}Q_4\\ *\end{bmatrix}$ bezeichnet werden.

d) Zuletzt muss die der nicht variirten Fläche Φ zugehörige m in allen Büscheln $M\begin{bmatrix}Q_i\\ *\end{bmatrix}$ enthalten sein. Es genügt, zwei der letzteren zu construiren und dann ihre M zu verbinden. Mit m ist eindeutig φ zu finden, wodurch die Aufgabe gelöst erscheint.

Unwesentlich an vorstehender Ausführung ist die Art der Vertheilung der neun Punkte von Φ auf die drei Gruppen. Bleiben wir zunächst dabei stehen, dass die Gruppe der Ebene $\mathfrak{E}$ mit drei Punkten bedacht bleiben soll, so stellt sich neben die Liebmann'sche Vertheilung die folgende symmetrische:

$$N_1\, N_2\, N_3\, P_1\, P_2\, P_3\, Q_1\, Q_2\, Q_3.$$

Hiernach wird Φ von drei Punkten N in die Ebene $\mathfrak{E}$ projicirt. Bezeichnet man den Schnitt der Tangentialebene der Fläche Φ in N_1 mit der Ebene $\mathfrak{E}$ durch m, so gestaltet sich die Lösung der Aufgabe nach folgendem Schema. Construire:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} m\begin{bmatrix}N_2\\ P_4\end{bmatrix}\\ m\begin{bmatrix}N_2\\ P'_4\end{bmatrix}\end{array}\right\}\ \text{Schnitt beider: } M\begin{bmatrix}N_2\\ *\end{bmatrix} \\ \left.\begin{array}{l} m\begin{bmatrix}N_3\\ P_4\end{bmatrix}\\ m\begin{bmatrix}N_3\\ P'_4\end{bmatrix}\end{array}\right\}\ \text{Schnitt beider: } M\begin{bmatrix}N_3\\ *\end{bmatrix}\end{array}\right\}\ \text{Verbindung beider: } m\begin{bmatrix}*\\ *\end{bmatrix}.$$

Aus der singulären Geraden m folgt eindeutig φ, wie bei Herrn Liebmann.

Wir wollen nun gleich zu dem allgemeinsten Falle übergehen, der dadurch gekennzeichnet ist, dass die Ebene $\mathfrak{E}$, in welcher φ gezeichnet werden soll, keinen der gegebenen neun Punkte enthält. Die Abtheilung der neun Punkte erfolgt demnach so, dass die erste Gruppe α, die zweite Null, die dritte $(9-\alpha)$ Punkte enthält. Wir wollen hier nur den einen Fall betrachten, wo $\alpha = 2$ ist. Dann erscheint die Ebene $\mathfrak{E}$ doppelt überdeckt. In der hierdurch festgelegten Beziehung kennen wir nun sieben Paare entsprechender Elemente, worunter sich keine Doppelelemente befinden. Die neun Punkte seien bezeichnet mit

$$N N'\, Q_1\, Q_2\, Q_3\, Q_4\, Q_5\, Q_6\, Q_7,$$

der Schnitt der Tangentialebene an Φ in N mit der Ebene $\mathfrak{E}$ wieder mit m. Dann erfolgt die Construction nach folgendem Schema, das wohl unschwer zu lesen sein wird, wenn auch nach den Klammern die Worte: „Schnitt beider“ bez. „Verbindung beider“ weggelassen sind. Von dem Schema, welches in der ersten der acht Colonnen $4.4.4.4 = 256$ Zeilen erfordern würde, ist natürlich nur der Anfang hergesetzt. Wie zu ersehen, sind nicht weniger als 341 Linien m und 170 Punkte M zu construiren.

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
m\begin{bmatrix}Q_4 & Q_5 & Q_6 & Q_7\\ P_4 & P_5 & P_6 & P_7\end{bmatrix}\\
m\begin{bmatrix}Q_4 & Q_5 & Q_6 & Q_7\\ P_4' & P_5 & P_6 & P_7\end{bmatrix}
\end{array}\right\} M\begin{bmatrix}Q_4 & Q_5 & Q_6 & Q_7\\ * & P_5 & P_6 & P_7\end{bmatrix}\\
\left.\begin{array}{l}
m\begin{bmatrix}Q_3 & Q_5 & Q_6 & Q_7\\ P_3 & P_5 & P_6 & P_7\end{bmatrix}\\
m\begin{bmatrix}Q_3 & Q_5 & Q_6 & Q_7\\ P_3' & P_5 & P_6 & P_7\end{bmatrix}
\end{array}\right\} M\begin{bmatrix}Q_3 & Q_5 & Q_6 & Q_7\\ * & P_5 & P_6 & P_7\end{bmatrix}
\end{array}\right\} m\begin{bmatrix}Q_5 & Q_6 & Q_7\\ P_5 & P_6 & P_7\end{bmatrix}\\
\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
m\begin{bmatrix}Q_4 & Q_5 & Q_6 & Q_7\\ P_4 & P_5' & P_6 & P_7\end{bmatrix}\\
m\begin{bmatrix}Q_4 & Q_5 & Q_6 & Q_7\\ P_4' & P_5' & P_6 & P_7\end{bmatrix}
\end{array}\right\} M\begin{bmatrix}Q_4 & Q_5 & Q_6 & Q_7\\ * & P_5' & P_6 & P_7\end{bmatrix}\\
\left.\begin{array}{l}
m\begin{bmatrix}Q_3 & Q_5 & Q_6 & Q_7\\ P_3 & P_5' & P_6 & P_7\end{bmatrix}\\
m\begin{bmatrix}Q_3 & Q_5 & Q_6 & Q_7\\ P_3' & P_5' & P_6 & P_7\end{bmatrix}
\end{array}\right\} M\begin{bmatrix}Q_3 & Q_5 & Q_6 & Q_7\\ * & P_5' & P_6 & P_7\end{bmatrix}
\end{array}\right\} m\begin{bmatrix}Q_5 & Q_6 & Q_7\\ P_5' & P_6 & P_7\end{bmatrix}
\end{array}\right\} M\begin{bmatrix}Q_5 & Q_6 & Q_7\\ * & P_6 & P_7\end{bmatrix}\\
\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
m\begin{bmatrix}Q_4 & Q_2 & Q_6 & Q_7\\ P_4 & P_2 & P_6 & P_7\end{bmatrix}\\
m\begin{bmatrix}Q_4 & Q_2 & Q_6 & Q_7\\ P_4' & P_2 & P_6 & P_7\end{bmatrix}
\end{array}\right\} M\begin{bmatrix}Q_4 & Q_2 & Q_6 & Q_7\\ * & P_2 & P_6 & P_7\end{bmatrix}\\
\left.\begin{array}{l}
m\begin{bmatrix}Q_3 & Q_2 & Q_6 & Q_7\\ P_3 & P_2 & P_6 & P_7\end{bmatrix}\\
m\begin{bmatrix}Q_3 & Q_2 & Q_6 & Q_7\\ P_3' & P_2 & P_6 & P_7\end{bmatrix}
\end{array}\right\} M\begin{bmatrix}Q_3 & Q_2 & Q_6 & Q_7\\ * & P_2 & P_6 & P_7\end{bmatrix}
\end{array}\right\} m\begin{bmatrix}Q_2 & Q_6 & Q_7\\ P_2 & P_6 & P_7\end{bmatrix}\\
\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
m\begin{bmatrix}Q_4 & Q_2 & Q_6 & Q_7\\ P_4 & P_2' & P_6 & P_7\end{bmatrix}\\
m\begin{bmatrix}Q_4 & Q_2 & Q_6 & Q_7\\ P_4' & P_2' & P_6 & P_7\end{bmatrix}
\end{array}\right\} M\begin{bmatrix}Q_4 & Q_2 & Q_6 & Q_7\\ * & P_2' & P_6 & P_7\end{bmatrix}\\
\left.\begin{array}{l}
m\begin{bmatrix}Q_3 & Q_2 & Q_6 & Q_7\\ P_3 & P_2' & P_6 & P_7\end{bmatrix}\\
m\begin{bmatrix}Q_3 & Q_2 & Q_6 & Q_7\\ P_3' & P_2' & P_6 & P_7\end{bmatrix}
\end{array}\right\} M\begin{bmatrix}Q_3 & Q_2 & Q_6 & Q_7\\ * & P_2' & P_6 & P_7\end{bmatrix}
\end{array}\right\} m\begin{bmatrix}Q_2 & Q_6 & Q_7\\ P_2' & P_6 & P_7\end{bmatrix}
\end{array}\right\} M\begin{bmatrix}Q_2 & Q_6 & Q_7\\ * & P_6 & P_7\end{bmatrix}
\end{array}\right\} \text{u. s. w.}$$

. . . .

u. s. w.

München, April 1896. J. Kleiber.

XIX. Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre.

In seiner Habilitationsvorlesung über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, sagt Riemann im § 2, dass es ein wesentliches Kennzeichen einer einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit sei, dass in ihr von einem Punkt nur nach zwei Seiten, vorwärts oder rückwärts, ein stetiger Fortgang möglich sei. — Der Begriff der Stetigkeit wird dabei nicht besonders erklärt, sondern als gegeben betrachtet.

Auf Grund dieser Definition der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit habe ich in meinem im Jahre 1873 erschienenen Abriss einer Theorie der complexen Functionen etc. die Ordnungszahlen, die angeben, wie eine Function einer reellen Veränderlichen x an einer bestimmten Stelle, etwa $x=0$, verschwindet bez. unendlich wird, für eine einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit in Anspruch genommen, die unendlich viel dichter ist, als die Mannigfaltigkeit der gemeinen reellen Zahlen. Es giebt auch Ordnungen, die grösser sind als jede durch eine beliebig grosse reelle Zahl messbare, wie die Ordnung der Function e^{-xx} im Punkte Null, so dass man durch die Ordnungen nicht blos auf actuell unendlich kleine, sondern auch auf actuell unendlich grosse Zahlen geführt wird, wenn man diesen Namen den Ordnungsmaassen zuerkennen will.

Diese Inanspruchnahme der Ordnungszahlen als einer einfach unendlichen Reihe hat nicht überall Beifall gefunden, und es lässt allerdings diese Mannigfaltigkeit eine andere Auffassungsweise zu. Man kann die nicht durch eine gemeine reelle Zahl messbaren Ordnungen als qualitativ von jenen verschieden ansehen und so die Ordnungszahlen als complexe Zahlen auffassen, man kann ihnen eine mehrfache (unendlich-vielfache) Ausgedehntheit zuschreiben. Da aber jeder Analytiker zweifellos in die Lage kommt, die Ordnungszahlen zu ordnen, ihre Grösser und Kleiner festzustellen, und da für keinen Mathematiker der mindeste Zweifel vorhanden sein wird, dass die Ordnung des Verschwindens der Function $l:lg(x^2)$ eine niedere, kleinere ist als die Ordnung von x^ε, wenn ε eine beliebig kleine positiv reelle Zahl ist, so darf man das Riemann'sche Kennzeichen für die Einfachheit der Ausdehnung einer Mannigfaltigkeit, dass überall nur nach zwei Seiten, rückwärts und vorwärts ein Fortgang möglich ist, nicht als ausreichend ansehen. In der That lassen sich auch die zweifach ausgedehnten gewöhnlichen complexen Zahlen durch besondere Bestimmungen in eine einfache, sagen wir eine lineare Reihe anordnen. Lässt man z.B. auf jede reelle Zahl x die Zahlen $x+yi$ folgen, wo y von $-\infty$ bis $+\infty$ stetig fortschreitet, so werden dadurch die complexen Zahlen in eine lineare Reihe geordnet, und es ist bei zwei vorgegebenen Zahlen dieser Art, also bei zwei complexen Zahlen kein Zweifel, welche dieser Anordnung gemäss die grössere und welche die kleinere ist. Der Umstand, dass zu einer Zahl x keine Zahl existirt, die die nächstfolgende ist, ist schon bei den gemeinen Zahlen ebenso vorhanden als bei den linear geordneten complexen. Vielleicht ist eine Bemerkung, die mir ein früh (im Jahre 1885) verstorbener Studirender der Mathematik Namens Ballauf aus Hattingen über diesen Gegenstand machte, im Stande, das Riemann'sche Kennzeichen zu vervollständigen.

„Eine einfach unendliche stetige Mannigfaltigkeit hat die Eigenschaft, dass sich eine abzählbar unendliche Mannigfaltigkeit in ihr überall dicht bestimmen lässt."

Dies ist in der linear geordneten Reihe der complexen Zahlen oder in der Reihe der Ordnungszahlen nicht möglich. Denn bestimmt man die in die Reihe der complexen Zahlen zu legende abzählbare unendliche Mannigfaltigkeit so, dass hinter einem x die ganze Reihe der Zahlen $x+yi\,(-\infty \leqq y \leqq +\infty)$ fehlt, so ist die eingelegte Mannigfaltigkeit nicht überall dicht. Werden aber hinter jede Zahl x Zahlen von der Form $x+y_1 i,\ x+y_2 i,\ x+y_3 i, \ldots$ eingeschaltet, so ist die eingelegte Mannigfaltigkeit von der Mächtigkeit der reellen Zahlen x, und also von höherer als abzählbar-unendlicher Mächtigkeit.

Zum Andenken an Ballauf füge ich noch eine zweite Bemerkung hieran, die einen Gegenstand der Integralrechnung betrifft, und die bereits für die Mitglieder des Seminars im Seminarbericht von 1883 gedruckt Platz gefunden hat.

Dirichlet beweist streng den Satz. Ist $f(x)$ zwischen a und b stetig und $lim[f(x+h)-f(x)]:h$ für positive abnehmende h gleich Null, so ist $f(b)=f(a)$. Ballauf gab hierfür einen directeren Beweis, der eine einfache Correctur des in älteren Lehrbüchern enthaltenen unzulänglichen Beweises ist, wie folgt:

Sind $\sigma, \sigma', \sigma_1, \sigma_2, \ldots$ Grössen, die absolut genommen kleiner oder gleich δ sind, so hat man bei beliebig klein vorgegebenem δ, $a=0$ angenommen:

$$f(h_1)-f(0) \leqq \sigma_1 h_1, \quad f(h_1+h_2)-f(h_1) \leqq \sigma_2 h_2 \ldots,$$

für hinreichend kleine $h_1 h_2 h_3 \ldots$, woraus sich durch Addition ergiebt:

$$\text{I)} \qquad f(h)-f(0) \leqq \sigma h, \quad h_1+h_2+h_3+\cdots = h.$$

Dieser Satz gilt auch noch, wenn $h=b$ ist. Beweis. Da $h_1, h_2, \ldots$ positive Grössen sind, so muss $h_1+h_2+h_3+\cdots$ sich einer Zahl $c<b$ als Grenze nähern, wenn ihre Summe b nicht erreicht. Man kann also μ so gross annehmen, dass $h_1+h_2+\cdots+h_\mu \geqq c-\varepsilon$ wird, wie klein auch ε sein mag. Also ist

$$f(c-\varepsilon)-f(c) \leqq \sigma(c-\varepsilon), \quad f(c-\varepsilon)-f(c) < \delta',$$

worin δ' wegen der vorausgesetzten Stetigkeit mit ε beliebig klein wird.

Hieraus folgt: $\quad f(c)-f(0) \leqq \sigma c - \varepsilon\sigma - \delta'$.

Der Satz I) gilt also noch für $h=c$, und da $f(c+h')-f(c) \leqq \sigma' h'$ gemacht werden kann, so gilt er über c hinaus, so lange $c<b$ ist, er gilt daher bis $h=b$, und es ist $f(b)-f(c) \leqq \delta b$ und also, da δ beliebig klein ist, $f(b)=f(0)$ w. z. b. w.

Jena. J. Thomae.

XII.

Beitrag zur kinematischen Theorie der Gelenkmechanismen.

Von

JOHANN KLEIBER,

Hauptlehrer erster Ordnung der städtischen Handelsschule in München.

Hierzu Tafel V Fig. 1—23.

(Fortsetzung.)

§ 4. Uebergeschlossene Mechanismen.

Directe Bindung zweier Pantagraphe. Einen Pantagraphen haben wir als einen Apparat bezeichnet, der zu einer Reihe von Punkten P_i einen Punkt Q construirt, welcher der Gleichung

$$Q = \varkappa_1 P_1 + \varkappa_2 P_2 + \cdots$$
$$(1 = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots)$$

genügt, worin die $\varkappa_i$ fest vorgegebene reelle Zahlen bedeuten. Fassen wir in einem derartigen Apparate die Punkte P_i als feste auf, so ist auch der Punkt Q fest. Nun haben wir zahlreiche Typen solcher Pantagraphen vorgeführt, aber eines war bei allen zu bemerken, die absoluten Längen von Stäben, Grössen von Dreiecken, Tetraedern, Körpern kamen bei keinem in Betracht. Haben wir also einen ersten Apparat Ω_1 mit den Punkten P_i construirt, so können wir aus diesem sofort eine Unzahl anderer dadurch entwickeln, dass wir die Abmessungen der im ersten Apparat frei gewählten Längen (Grössen) durch beliebige andere ersetzen. Dadurch entstehen Apparate Ω' mit den Punkten P_i', für welche

$$Q' = \varkappa_1 P_1' + \varkappa_2 P_2' + \cdots,$$

wenn

$$Q = \varkappa_1 P_1 + \varkappa_2 P_2 + \cdots$$

Koppelt man die Apparate Ω und Ω' so, dass jedes P_i' mit P_i identisch wird, so muss freiwillig Q' mit Q identisch werden: die Bindung von Q mit Q' nimmt der Apparat bedingungslos an, ohne dass seine Beweglichkeit irgendwie beeinflusst wird. Dadurch gewinnen wir also einen übergeschlossenen Mechanismus.

Am deutlichsten erscheint der Charakter des Mechanismus als übergeschlossener, wenn die Einzelapparate Ω und Ω' schon dann starr, bewegungslos werden, wenn man die gebundenen Punkte $P_i = P_i'$ zu Fixpunkten gewählt hat.

Dies erhellt aus folgenden Beispielen:

Beispiel a) (Fig 1). Wir koppeln zwei Pantagraphen vom Typus b):

$$\Omega \equiv \left\| \begin{array}{c|ccc||c} S_1 & A & P & P & (P) \\ S_2 & P & B & P & (P) \\ S_3 & P & P & C & (P) \\ \hline S & A & B & C & (P) \end{array} \right\| = 0, \quad \Omega' \equiv \left\| \begin{array}{c|ccc||c} T_1 & A & Q & Q & (Q) \\ T_2 & Q & B & C & (Q) \\ T_3 & Q & Q & C & (Q) \\ \hline S & A & B & C & (Q) \end{array} \right\| = 0.$$

Durch das gleichzeitige Bestehen beider Schema, deren letzte Zeilen identisch gemacht wurden, um die Bindung sofort kenntlich zu machen, ist sofort ersichtlich, in welcher Weise die „Körper" und ihre Theilpunkte rechts abhängen von den „Körpern" und Theilpunkten links. Es ergiebt sich, dass

$$S_1 = \varkappa A + (\lambda + \mu) P,$$
$$T_1 = \varkappa A + (\lambda + \mu) Q,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

u. s. f.,

das heisst, dass die sechs Stablängen $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$; $\overline{QA}$, $\overline{QB}$, $\overline{QC}$ beliebig vorgegeben sein können, dass aber immer die Paare von Stäben:

$$\overline{PA},\ \overline{QA}; \quad \overline{PB},\ \overline{QB}; \quad \overline{PC},\ \overline{QC}$$

je im selben Verhältniss

$$\varkappa : (\lambda + \mu) \text{ bez. } \lambda : (\varkappa + \mu) \text{ bez. } \mu : (\varkappa + \lambda)$$

getheilt sind. Geometrisch besagt dies, dass die drei Secanten

$$\overline{S_1 T_1}, \quad \overline{S_2 T_2}, \quad \overline{S_3 T_3}$$

parallel der Secante $\overline{PQ}$ sein müssen.

Beispiel b). Wir benutzen nun zwei Pantagraphe vom Typus c):

$$\Omega \equiv \left\| \begin{array}{c|cccc||c} S_1 & A & P & P & P & (P) \\ S_2 & P & B & P & P & (P) \\ S_3 & P & P & C & P & (P) \\ S_4 & P & P & P & D & (P) \\ \hline S & A & B & C & D & (P) \end{array} \right\| = 0,$$

$$\Omega' \equiv \left\| \begin{array}{c|cccc||c} T_1 & A & Q & Q & Q & (Q) \\ T_2 & Q & B & Q & Q & (Q) \\ T_3 & Q & Q & C & Q & (Q) \\ T_4 & Q & Q & Q & D & (Q) \\ \hline S & A & B & C & D & (O) \end{array} \right\| = 0.$$

Die vier Punkte A, B, C, D bilden ein räumliches Tetraeder, S ist ein mit diesem affin fest verbundener Theilpunkt. Das Tetraeder mit S ist beiden Apparaten gemein bei aller Beweglichkeit der acht beliebig lang zu wählenden Stäbe

$$\overline{PA},\ \overline{PB},\ \overline{PC},\ \overline{PD};\ \ \overline{QA},\ \overline{QB},\ \overline{QC},\ \overline{QD};$$

nur ihre Theilpunkte

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4;\ \ T_1,\ T_2,\ T_3,\ T_4$$

sind Bedingungen unterworfen, die den oberen analog sind; so sind insbesonders

$$S_1T_1 \parallel S_2T_2 \parallel S_3T_3 \parallel S_4T_4 \parallel PQ$$

untereinander parallel etc.

Die in beiden Beispielen aufgeführten Pantagraphen haben die Eigenschaft, dass zu fest angenommenen Punkten A, B, C bez. A, B, C, D festgelegte Punkte P und Q gehören.

Analog könnten durch directe Bindung von Pantagraphen anderer gleicher oder verschiedener Typen die einfachsten übergeschlossenen Mechanismen erzielt werden. Wir wenden uns aber nun zu einer zweiten Methode, solche aufzustellen. Zu dem Ende ist es nothwendig, noch einige Betrachtungen über die Additionskörper vorauszuschicken.

Bildung der Additionskörper. Bisher war es für uns gleichgiltig, in welcher Weise Additionskörper aufgebaut wurden, die folgenden Erörterungen legen es aber nahe, bestimmte Annahmen bei Bildung derselben zu beobachten. Zur Construction des fraglichen Polyeders seien von einem Punkte ausgehend die n Strecken (nach Richtung und Grösse bezeichnet) zur Addition vorgegeben:

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_n.$$

Dieser Reihe entspricht eine bestimmte Art, die Strecken aneinander zu ketten, zu addiren, und wollen wir unter p_1 einen solchen Streckenzug verstehen:

$$p_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Der Anfangspunkt des letzteren sei P_0, der End- oder Resultantenpunkt P_n. Wenn wir uns nun einerseits alle directen, andererseits alle inversen cyklischen Vertauschungen der Reihe p denken, so erhalten wir aus:

$$\begin{array}{ll}
p_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_n & p_{-1} = a_1 + a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 \\
p_2 = a_2 + a_3 + \cdots + a_1 & p_{-2} = a_2 + a_1 + a_n + \cdots + a_3 \\
p_3 = a_3 + a_4 + \cdots + a_2 & p_{-3} = a_3 + a_2 + a_1 + \cdots + a_4 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
p_n = a_n + a_1 + \cdots + a_{n-1} & p_{-n} = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1,
\end{array}$$

im Ganzen $2n$ Streckenzüge zwischen den gemeinsamen Endpunkten P_0 und P_n, welche direct ein parallelogrammflächiches Polyeder vorstellen, das in P_0 und P_n zwei gleichgeartete ausgezeichnete Eckpunkte besitzt.

Um diese Behauptungen zu erweisen, brauchen wir blos zu zeigen, dass die durch die Polygonzüge p_+ definirten Eckpunkte mit jenen, die man aus den Streckenzügen p_- erhalten würde, übereinstimmen. Zu dem Ende bezeichnen wir den Endpunkt der i^{ten} Strecke in einem der Polygone mit $P_i^{\pm\varkappa}$, wobei der obere Index angiebt, auf welchem der Streckenzüge $p_{\pm\varkappa}$ der Punkt genommen werden soll. Dann besteht in der That die Identität:

$$P_i^{+\varkappa} \equiv P_i^{-(\varkappa+i-1)}.$$

Denn es ist $P_i^{+\varkappa}$ der Endpunkt eines von P auslaufenden Zuges, der ein Theil von $p_\varkappa$ ist, nämlich:

$$a_\varkappa + a_{\varkappa+1} + \cdots + a_{\varkappa+i-1}.$$

Kehrt man die Reihenfolge um:

$$a_{\varkappa+i-1} + a_{\varkappa+i-2} + \cdots + a_\varkappa,$$

so ist dies der aus i Summanden bestehende erste Theil des Zuges $p_{-(\varkappa+i-1)}$, wobei die Indices natürlich nur $mod\, n$ zu verstehen sind.

Diese Relation weist unmittelbar darauf hin, dass im Punkt $P_i^\varkappa$ die vier Strecken:

$$a_{\varkappa+i-1}, \quad a_{\varkappa+i}; \quad a_\varkappa, \quad a_{\varkappa-1}$$

zusammenstossen, die paarweise je einem Streckenzug $p_\pm$ angehören.

Ist jedoch $i = 1$ bez. $i = n - 1$, so erkennen wir, dass in einen solchen, den Endpunkten P_0 und P_n benachbarten Punkt blos mehr drei Strecken einmünden.

Sonach hat ein solches Polyeder:

2 Punkte mit je n auslaufenden Kanten (P_0, P_n),

$2n$ Punkte mit je drei auslaufenden Kanten,

$n(n-3)$ Punkte mit je vier auslaufenden Kanten,

das heisst $[n.(n-1)+2]$ Eckpunkte. Diese ordnen sich in Zonen nach dem Index i an. Ist n gerade, so giebt es eine mittlere Zone (Gürtel von n Parallelogrammen). Halten wir i fest, so ordnen sich die Punkte der i^{ten} Zone

$$P_i^1 P_i^2 P_i^3 \ldots P_i^n$$

zu Eckpunkten eines Polygons an, dessen Seiten sich als Diagonalen der das Polyeder begrenzenden Parallelogramme darstellen und das wir dementsprechend als Diagonalpolygon der i^{ten} Zone bezeichnen können.

Die Uebersicht der Anordnung der Kanten und Parallelogramme erhalten wir am besten dadurch, dass wir uns das Polyeder aus den von P_0 aus laufenden n Strecken successive construirt denken, indem wir jeweils zwei consecutive Strecken zu Parallelogrammen ergänzen. Dadurch erhalten wir einen ersten Querzug von Kanten des Polyeders. Aus diesem ergiebt sich ein zweiter, schliesslich ein n^{ter}. Jeder so gewonnene Querzug zeigt $2n$ Strecken, die man dadurch erhalten kann, dass man hinter jedes einzelne Element der Reihe

$$-p_1 = -a_1, \quad -a_2, \quad -a_3 \ldots a_n$$

das entsprechende Element der verschobenen Reihe p_1, das heisst:

$$+p_h = +a_h, \quad +a_{h+1}, \quad +a_{h+2} \cdots + a_{h-1}$$

schaltet, so dass man erhält:

$$-a_1 + a_h - a_2 + a_{h+1} - \cdots - a_n + a_{h+1} \equiv 0.$$

Beim weiteren Aufbau des Polyeders sind dann je eine negativ angeschriebene mit der folgenden positiven zusammen zu je einem weiteren Parallelogramm zu ergänzen, so dass wir nach folgenden Cäsuren

$$-a_1 + a_h \mid -a_2 + a_{h+1} \mid - \cdots \mid a_n + a_{h-1} \mid = 0$$

den Querzug der nächsten Zone durch blose Vertauschung der Glieder in jeder Abtheilung gewinnen. Der $h+1^{\text{te}}$ Querzug lautet also:

$$a_h - a_1 \mid + a_{h+1} - a_2 \mid \cdots \mid a_{h-1} - a_n \mid = 0,$$

oder

$$-a_1 + a_{h+1} - a_2 + a_{h+2} \cdots a_n + a_h = 0,$$

was zudem unsere Regel bestätigt.

Jeder Zug $p_{\pm}$ besitzt n Kanten; da es $2n$ Züge auf dem Polyeder giebt, hätte dieses $2n^2$ Kanten. Davon sind aber die in P_0 und P_n mündenden n Kanten doppelt gezählt, so dass der Additionskörper $2n(n-1)$ Kanten besitzt. Die Zahl der das Polyeder begrenzenden Parallelogramme beträgt $n(n-1)$.

Ist demnach K die Zahl der Kanten, F die der Flächen, E die der Ecken, so erhalten wir hier die bekannte Euler'sche Gleichung:

$$E + F - K = 2.$$

Diese Polyeder an sich betrachtet bilden schon eine gewisse einfachste Klasse von übergeschlossenen Mechanismen. Wir wollen uns aber im Nachstehenden nicht mit dieser Seite ihrer Eigenschaften beschäftigen, sondern suchen, zu unseren Pantagraphen zurückzukehren.

Minoren des Hauptpolyeders. Wird aus einem ersten oder Hauptpolyeder, das zur Summation

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

gehört, unter Beibehaltung des Anfangspunktes P und aller Summanden bis auf einen, an dessen Stelle ein der Richtung nach gleicher, an Länge verkürzter Streckensummand gesetzt, ein anderes Additionspolyeder der gleichen Art gebildet, so soll dieses ein Minor des ersten genannt werden. Solcher Minoren giebt es n Arten, indem die Verkürzung der Reihe nach auf die n Summanden ausgedehnt werden kann.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_1 &\equiv \varkappa_1 a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\
\mathfrak{S}_2 &\equiv a_1 + \varkappa_2 a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\
\mathfrak{S}_3 &\equiv a_1 + a_2 + \varkappa_3 a_3 + \cdots + a_n \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\mathfrak{S}_n &\equiv a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + \varkappa_n a_n \\
\mathfrak{S} &\equiv a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.
\end{aligned}$$

Die vorstehenden Formeln geben in $\mathfrak{S}$ den Hauptkörper, in den $\mathfrak{S}_i$ die Minoren. Jeder Minor lehnt sich längs der gemeinsamen Summanden und der aus ihnen entwickelten Seitenflächen an den Hauptkörper an, zum Theil auch an die anderen Minoren.

Satz: Die Resultantenecke des Hauptpolyeders und die eines hierzu adjungirten Minors liegen auf einer beiden Körpern gemeinsamen Kante.

Nachweis: Schreibt man Hauptkörper $\mathfrak{S}$ und Minor $\mathfrak{S}_i$ in der folgenden Weise:

$$\mathfrak{S} = (a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_n + a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1}) + a_i,$$

$$\mathfrak{S}_i = (a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_n + a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1}) + \varkappa_i a_i,$$

so erkennt man sofort, dass die beiden Polyeder $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_i$ einen ganzen Kantenzug (Theile von p_{i+1} und $p_{i,\,i+1}$)

$$a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_n + a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1}$$

gemein haben; an den Endpunkt dieses Kantenzuges ist bei $\mathfrak{S}$ der Streckensummand a_i, bei $\mathfrak{S}_i$ aber $\varkappa_i a_i$ anzufügen. Beide Streckensummanden stimmen nach Voraussetzung in ihrer Richtung überein, fallen also in eine gemeinsame Gerade. Die Endpunkte Q und Q_i derselben fallen aber nicht zusammen, da die Summanden an absoluter Grösse verschieden sind.

Wir können den vorhergehenden Satz auch so aussprechen:

„Vom Resultantenpunkt Q des Hauptkörpers $\mathfrak{S}$ gehen n Kanten aus; auf jeder derselben liegt der Resultantenpunkt Q_i eines der adjungirten Minoren $\mathfrak{S}_i$."

Die Entfernung QQ_i beträgt dabei:

$$QQ_i = a_i - \varkappa_i a_i = \lambda_i a_i \quad (1 = \varkappa_i + \lambda_i).$$

Bindung von Additionspolyedern zur Erzeugung übergeschlossener Mechanismen. Wir wollen nun die eben entwickelten Sätze zur Bildung von übergeschlossenen Mechanismen verwerthen. Zu dem Ende gehen wir von einem der einfachsten Fälle aus, wie ihn

$$\Theta \equiv \left\|\begin{array}{c||ccc||c} \mathsf{A} & A & P & P & (P) \\ \mathsf{B} & P & B & P & (P) \\ \Gamma & P & P & C & (P) \\ \hline \Sigma & A & B & C & (P) \end{array}\right\| \gtrless 0$$

bezeichnet. Der Doppelstrich (statt des früher gebrauchten einfachen Striches), welcher die Theile der Matrix trennt, soll in unserem Falle andeuten, dass nunmehr die abgetrennten Punkte A, B, Γ, Σ nicht affin sich entsprechend in den auf einander bezogenen rechts angeschriebenen „Körpern" liegen, sondern darin willkürlich gewählt sind. Dementsprechend sagt das Schema oben aus, dass wir auf den drei von P auslaufenden Strecken $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$ drei Punkte A, B, Γ angenommen und aus den Theilstrecken $\overline{P\mathsf{A}}$, $\overline{P\mathsf{B}}$, $\overline{P\Gamma}$ das Additionspolyeder (Parallelepiped) gebildet haben, dessen Resultantenpunkt Σ ist. Dieser Punkt Σ hat zu seiner Horizontalreihe A, B, C ebensowenig eine affine Beziehung, wie die A, B, Γ zu den ihrigen.

Dem obigen Hauptschema können wir aber ein gewöhnliches adjungiren von folgender Gestalt:

$$\Omega = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|c} U' & \mathsf{A} & \mathsf{A} & A & P & P & (P) \\ \mathsf{B} & T' & \mathsf{B} & P & B & P & (P) \\ \Gamma & \Gamma & S' & P & P & C & (P) \\ \hline U & T & S & A & B & C & (P) \end{array} \right\| = 0.$$

Dass dieses möglich ist, liegt daran, dass die „Körper" rechts vom mittleren Verticalstrich degenerirte sind, mit mehrfach zählendem Punkte P.

War etwa

$$\begin{aligned} \mathsf{A} &= \alpha_1 A + \beta_1 P \\ \mathsf{B} &= \alpha_2 B + \beta_2 P \\ \Gamma &= \alpha_3 C + \beta_3 P \\ 1 &= \alpha_i + \beta_i, \end{aligned}$$

so kann man auch schreiben:

$$\begin{aligned} \mathsf{A} &= \alpha_1 A + \alpha_2 P + [1 - \alpha_1 - \alpha_2] P \\ \mathsf{B} &= \alpha_1 P + \alpha_2 B + [1 - \alpha_1 - \alpha_2] P \\ S' &= \alpha_1 P + \alpha_2 P + [1 - \alpha_1 - \alpha_2] C, \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} \mathsf{A} &= \alpha_1 A + [1 - \alpha_1 - \alpha_3] P + \alpha_3 P \\ T' &= \alpha_1 P + [1 - \alpha_1 - \alpha_3] B + \alpha_3 P \\ \Gamma &= \alpha_1 P + [1 - \alpha_1 - \alpha_3] P + \alpha_3 C, \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} U' &= [1 - \alpha_2 - \alpha_3] A + \alpha_2 P + \alpha_3 P \\ \mathsf{B} &= [1 - \alpha_2 - \alpha_3] P + \alpha_2 B + \alpha_3 P \\ \Gamma &= [1 - \alpha_2 - \alpha_3] P + \alpha_2 P + \alpha_3 C, \end{aligned}$$

womit die Punkte S', T', U' definirt sind.

Betrachtet man nun die zu den Colonnen

$$\left\| \begin{array}{c|ccc|c} \mathsf{A} & U' & \mathsf{A} & \mathsf{A} & (P) \\ \mathsf{B} & \mathsf{B} & T' & \mathsf{B} & (P) \\ \Gamma & \Gamma & \Gamma & S' & (P) \\ \hline \Sigma & U & T & S & (P) \end{array} \right\|$$

gehörigen Additionspolyeder $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$, so erkennen wir, dass die drei letzteren die Minoren zum ersten als Hauptpolyeder darstellen. Denn es gehören diese Polyeder zu folgenden Summen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &\equiv \overline{P\mathsf{A}} + \overline{P\mathsf{B}} + \overline{P\Gamma} \\ \mathfrak{S}_1 &\equiv \overline{PU'} + \overline{P\mathsf{B}} + \overline{P\Gamma} \\ \mathfrak{S}_2 &\equiv \overline{P\mathsf{A}} + \overline{PT'} + P\Gamma \\ \mathfrak{S}_3 &\equiv P\mathsf{A} + \overline{P\mathsf{B}} + PS'. \end{aligned}$$

Die drei letzten Summen stimmen in allen Summanden bis auf einen mit der ersten Summe überein, auch ist der abweichende Streckensummand der Richtung nach identisch mit dem ersetzten, wie bei Minoren erforderlich.

Deshalb liegen die Punkte U, T, S der Reihe nach auf den drei von Σ ausgehenden Kanten des Hauptpolyeders $\mathfrak{S}$.

Die Punkte U, T, S liegen aber, wie aus der Pantagrapheneigenschaft des Mechanismus Ω hervorgeht, als invariabel affine Theilpunkte im veränderlichen Dreieck ABC.

Statt demnach für jeden der Punkte U, T, S das Additionsparallelepiped $\mathfrak{S}_i$ zu construiren, markire man in richtiger Weise die Punkte U, T, S auf den von Σ ausgehenden Kanten des einzigen Hauptparallelepipedes $\mathfrak{S}$. Diesen Satz kann man auch so aussprechen:

> „Jedes Parallelepiped $\mathfrak{S}$ zu einer Summe $\overline{P\mathrm{A}} + \overline{P\mathrm{B}} + \overline{P\Gamma}$ schneidet die Ebene ABC mit den vom Resultantenpunkt ausgehenden Kanten in einem Tripel affin unveränderlicher Punkte."

Construiren wir nun zum Apparate

$$\Theta_1 \equiv \left\| \begin{array}{c} \mathrm{A}_I \\ \mathrm{B}_I \\ \Gamma_I \\ \hline \Sigma_I \end{array} \right\| \begin{array}{ccc} A_I & P_I & P_I \\ P_I & B_I & P_I \\ P_I & P_I & C_I \\ \hline A_I & B_I & C_I \end{array} \left\| \begin{array}{c} (P_I) \\ (P_I) \\ (P_I) \\ \hline (P_I) \end{array} \right. \quad \text{(Fig. 2)}$$

noch einen zweiten nach demselben Schema, so dass die Horizontalreihen des neuen Schemas den entsprechenden des alten affin entsprechen,

$$\Theta_2 \equiv \left\| \begin{array}{c} \mathrm{A}_{II} \\ \mathrm{B}_{II} \\ \Gamma_{II} \\ \hline \Sigma_{II} \end{array} \right\| \begin{array}{ccc} A_{II} & P_{II} & P_{II} \\ P_{II} & B_{II} & P_{II} \\ P_{II} & P_{II} & C_{II} \\ \hline A_{II} & B_{II} & C_{II} \end{array} \left\| \begin{array}{c} (P_{II}) \\ (P_{II}) \\ (P_{II}) \\ \hline (P_{II}) \end{array} \right.$$

so existiren auf den Kanten, die von Σ_{II} ausgehen, drei Punkte $U_{II}\,T_{II}\,S_{II}$, die im Dreieck $A_{II}B_{II}C_{II}$ ebenso liegen, als $U_I T_I S_I$ im Dreieck $A_I B_I C_I$.

Bindet man die Ecken der Dreiecke $A_i B_i C_i$:

$$A_I \equiv A_{II} \equiv A,$$
$$B_I \equiv B_{II} \equiv B,$$
$$C_I \equiv C_{II} \equiv C',$$

so fallen auch die Punktpaare der

$$U_I \equiv U_{II} \equiv U,$$
$$T_I \equiv T_{II} \equiv T,$$
$$S_I \equiv S_{II} \equiv S$$

zusammen, das heisst, die von Σ_I und Σ_{II} ausgehenden Kanten der zugehörigen Polyeder schneiden sich in festen Punkten; in diesen kann man also jene Kanten koppeln, ohne die Beweglichkeit der Apparate Θ_I bez. Θ_{II} zu beeinträchtigen. Dadurch gewinnen wir einen übergeschlossenen Mechanismus (Fig. 2).

Weiteres Beispiel. Die Betrachtungen, wie wir sie gerade mit dem einfachen Schema Θ angestellt haben, können wir mit gleichem Erfolg anwenden auf das erweiterte Schema:

$$\Theta = \left\| \begin{array}{c|cccc||c} \mathsf{A} & A & P & P \dots & P & (P) \\ \mathsf{B} & P & B & P \dots & P & (P) \\ \Gamma & P & P & C \dots & P & (P) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta & P & P & P \dots & D & (P) \\ \hline \Sigma & A & B & C \dots & D & (P) \end{array} \right. \gtrless 0.$$

Das Schema führt im Speciellen auf den aus der Combination zweier Mechanismen, die zu einem Schema mit vier Punkten A, B, C, D gehören, hervorgehenden übergeschlossenen Apparat.

Weiteres Beispiel. Bedingung für die Anwendbarkeit der angestellten Betrachtungen ist, dass gewisse Additionspolyeder gemeinsamen Anfangspunkt besitzen, was hie und da erst durch Specialisirungen erreicht werden kann.

Es sei hier auf die Bemerkungen beim Pantagraphen j' verwiesen.

Mehrfache Bindung von Additionspolyedern. Statt im Schema

$$\left\| \begin{array}{cc} A & P \dots \\ P & B \dots \\ \vdots & \vdots \\ \hline A & B \dots \end{array} \right\| \begin{array}{c} (P) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array}$$

links nur ein Additionspolyeder anzufügen, kann man mehr anreihen; für jedes einzelne gilt das oben Abgeleitete.

$$\Theta_{12} = \left\| \begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ \\ \hline \dots \end{array} \right\| \begin{array}{c} \mathsf{A}_2 \\ \mathsf{B}_2 \\ \vdots \\ \hline \Sigma_2 \end{array} \left\| \begin{array}{c} \mathsf{A}_1 \\ \mathsf{B}_1 \\ \vdots \\ \hline \Sigma_1 \end{array} \right\| \begin{array}{cc} A & P \dots \\ P & B \dots \\ \vdots & \vdots \\ \hline A & B \dots \end{array} \left\| \begin{array}{c} (P) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right. \gtrless 0,$$

das heisst auf den von Σ_1 bez. $\Sigma_2 \dots$ ausgehenden Kanten liegen Punkte $U'_1 T'_1 S'_2 \dots$ bez. $U'_2 T' S'_2 \dots$, welche mit dem „Körper" $AB \dots$ affin fest verbunden sind. Construirt man nun zu diesem ersten Apparat $\Theta_{1,2} \dots$ einen „analogen", das heisst einen solchen $\Theta'_{1,2} \dots$, dessen Horizontalzeilen affin verwandt denen von $\Theta_{12} \dots$ sind, so kann man beide Apparate wie oben binden. Es „durchkreuzen" sich dann zugeordnete Polyeder beider Apparate in festen Punkten $U_1 T_1 S_1 \ldots$ bez. $U_2 T_2 S_2 \ldots$, wobei der „Körper" $AB\ldots$ beiden Apparaten gemeinsam wird.

Die links im Schema angefügten Vertikalreihen bezeichnen Polyeder, welche die Ecke P bez. die von ihr ausgehenden Kanten der Richtung nach gemein haben. Diese Polyeder besitzen sonst keine weitere Bindung. Alle Eigenschaften, die sie an sich besassen, bleiben erhalten, wenn man auch von den Fixpunkten $A, B\ldots$ absieht. Wirft man diese in den gekoppelten Apparaten $\Theta_{12}\ldots$ und $\Theta'_{12}\ldots$ ab, so bleiben blos Polyeder $\mathsf{A}_i \mathsf{B}_i \ldots \Sigma_i$ derselben Art in Koppelung und bezeichnen eine weitere Art von übergeschlossenen Mechanismen.

Beispiel. Wählt man einfach:

$$\Theta_{12} \equiv \left\| \begin{array}{c||c||ccc||c} \mathsf{A}_2 & \mathsf{A}_1 & A & P & P & (P) \\ \mathsf{B}_2 & \mathsf{B}_1 & P & B & P & (P) \\ \Gamma_2 & \Gamma_1 & P & P & C & (P) \\ \hline \Sigma_2 & \Sigma_1 & A & B & C & (P) \end{array} \right\| \gtrless 0, \quad \text{(Fig. 2.)}$$

„analog" zu

$$\Theta'_{12} \equiv \left\| \begin{array}{c||c||ccc||c} \mathsf{A}'_2 & \mathsf{A}'_1 & A' & P' & P' & (P') \\ \mathsf{B}'_2 & \mathsf{B}'_1 & P' & B' & P' & (P') \\ \Gamma'_2 & \Gamma'_1 & P' & P' & C' & (P') \\ \hline \Sigma'_2 & \Sigma'_1 & A' & B' & C' & (P') \end{array} \right\| \gtrless 0, \quad \text{(Fig. 2.)}$$

so ergiebt die Koppelung:

$$A \equiv A', \quad B \equiv B', \quad C \equiv C'$$

feste „Kreuzungspunkte" der Polyederkanten, die von Σ_1 und Σ'_1 bez. Σ_2 und Σ'_2 ausgehen. Hält man die Koppelung der Polyeder in den gemeinsamen Ecken P bez. P' aufrecht, so bleibt der combinirte Apparat auch dann noch übergeschlossen, wenn man von den Koppelpunkten $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$ ganz absieht. Das Resultat ist eine eigenthümliche Koppelung von vier Parallelepipeden, wie sie Figur 3 zeigt. Der entsprechende Fall für Parallelogramme ist in Figur 4 gezeichnet.

Es ist hieraus leicht abzusehen, wie sich die Sache gestaltet, wenn man ein erweitertes Schema benützt.

Minoren höherer Ordnung. Obwohl wir nicht beabsichtigen, die folgenden Bemerkungen tiefer zu verfolgen, sei doch wenigstens darauf hingewiesen, dass den oben betrachteten Minoren, welche wir Minoren erster Ordnung nennen könnten, auch solche höherer Ordnung zur Seite zu stellen wären. Bilden wir zum Körper

$$\mathfrak{S} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

einen anderen:

$$\mathfrak{S}_{12} = \varkappa_{11} a_1 + \varkappa_{12} a_2 + a_3 + \cdots + a_n,$$

dessen Summanden der Richtung nach alle, der Grösse nach bis auf zwei mit den Summanden von $\mathfrak{S}$ übereinstimmen, so haben wir einen Minor zweiter Ordnung. Schreibt man beide Polyeder in der Weise:

$$\mathfrak{S} = (a_3 + a_4 + \cdots + a_n) + a_1 + a_2,$$

$$\mathfrak{S}_{12} = (a_3 + a_4 + \cdots + a_n) + \varkappa_{11} a_1 + \varkappa_{12} a_2,$$

so erkennt man, dass die Polyeder sich längs der Summanden

$$(a_3 + a_4 + \cdots + a_n)$$

an einander lehnen, und dass die an diesen Zug sich schliessenden Seitenflächen (Parallelogramme)

$\mathfrak{A}$ aus den Summanden $a_1 + a_2$ von $\mathfrak{S}$,

$\mathfrak{A}'$ „ „ „ $\varkappa_{11} a_1 + \varkappa_{12} a_2$ von $\mathfrak{S}_{12}$

zusammenfallen. Daraus folgt aber wieder, dass der Resultantenpunkt Q' von $\mathfrak{S}_{12}$ erstens in der Seitenfläche $\mathfrak{A}$ des Polyeders fällt, zweitens darin construirbar ist (vergl. Fig. 5).

Zum Polyeder $\mathfrak{S}$ giebt es gerade n Minoren der zweiten (höheren Ordnung), da die aus $\mathfrak{S}$ veränderten Summanden zwei aufeinander folgende sein müssen (vergl. die Construction des Polyeders $\mathfrak{S}$).

Bringt man am Hauptpolyeder $\mathfrak{S}$ die Resultantenpunkte $Q'_{i,i+1}$ an, und lässt den Resultantenpunkt Q von $\mathfrak{S}$ ganz weg, so bekommt man den Anblick (Fig. 6) eines unfertigen Polyeders.

Verwendung von Minoren höherer Ordnung. Hat man, um ein Beispiel anzuführen, etwa ein Punktsystem der folgenden Art gewählt:

$$\left\|\begin{array}{c|cccc||c} \mathsf{A} & A_1 & A_2 & P & P & (P) \\ \mathsf{B} & P & P & B_1 & B_2 & (P) \\ \Gamma & C_1 & C_2 & P & P & (P) \\ \Delta & P & P & D_1 & D_2 & (P) \\ \hline \Sigma & A & B & C & D & (P) \end{array}\right\| \gtrless 0,$$

so kann man diesem unter gewissen, unten näher bezeichneten Bedingungen in einziger Weise folgendes an die Seite stellen:

$$\Psi = \left\|\begin{array}{cccc|cccc||c} \mathsf{A} & \mathfrak{A} & \mathfrak{A}' & \mathsf{A} & A_1 & A_2 & P & P & (P) \\ \mathfrak{B}' & \mathfrak{B} & \mathsf{B} & \mathsf{B} & P & P & B_1 & B_2 & (P) \\ \mathfrak{C}' & \Gamma & \Gamma & \mathfrak{C} & C_1 & C_2 & P & P & (P) \\ \Delta & \Delta & \mathfrak{D}' & \mathfrak{D} & P & P & D_1 & D_2 & (P) \\ \hline Q_4 & Q_3 & Q_2 & Q_1 & A & B & C & D & (P) \end{array}\right\| = 0.$$

Die Punkte Q_i liegen construirbar auf dem Hauptpolyeder mit Σ; um sie zu erhalten, ist es also nicht nöthig, erst die vier zu den Q_i gehörigen Polyeder zu construiren, es genügt die Einführung des Hauptpolyeders Σ in der oben besprochenen unfertigen Form.

Zwei „analoge“ Apparate Ψ und Ψ' können nun in der bekannten Weise längs der Punktreihen

$$\Psi : Q_4\, Q_3\, Q_2\, Q_1\; A\; B\; C\; D;$$
$$\Psi' : Q'_4\, Q'_3\, Q'_2\, Q'_1\, A'\, B'\, C'\, D'$$

gekoppelt werden, um einen übergeschlossenen Mechanismus zu erhalten.

Um zu zeigen, dass die obige Darstellung möglich ist, setzen wir etwa an:

$$\begin{aligned}
\mathsf{A} &= \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + [1 + \alpha_1 - \alpha_2] P,\\
\mathsf{B} &= \beta_1 B_1 + \beta_4 B_2 + [1 + \beta_1 - \beta_4] P,\\
\Gamma &= \gamma_3 C_1 + \gamma_4 C_2 + [1 + \gamma_3 - \gamma_4] P,\\
\Delta &= \delta_2 D_1 + \delta_3 D_2 + [1 + \delta_2 - \delta_4] P.
\end{aligned}$$

Dann kann man schreiben:

$$\begin{aligned}
\mathsf{A} &= \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \beta_1 P + \beta_2 P,\\
\mathsf{B} &= \alpha_1 P + \alpha_2 P + \beta_1 B + \beta_2 P,\\
\mathfrak{C} &= \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \beta_1 P + \beta_2 P,\\
\mathfrak{D} &= \alpha_1 P + \alpha_2 P + \beta_1 D_1 + \beta_2 D_2,
\end{aligned}$$

unter der Voraussetzung der Existenz folgender Relationen:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 &= 1,\\
\alpha_1 + \alpha_2 &= \gamma_3 + \gamma_4,\\
\beta_1 + \beta_2 &= \delta_2 + \delta_3.
\end{aligned}$$

Die Colonnen der anderen Minorpolyeder können dann ähnlich der gegebenen sofort hingeschrieben werden.

§ 5. Das Punktviereck. (Ein erstes Ränderungsprincip.)

Wahl eines geeigneten Coordinatensystems. Das Coordinatensystem, das wir zu Beginn des § 1 gewählt haben, leistete vortreffliche Dienste zur Begründung einer Theorie räumlicher Pantagraphen, seine Verwendung in der Ebene dagegen, wo die Aehnlichkeit von Figuren eine Rolle spielt, führt auf Weitläufigkeiten, die meist auf den Gang der Betrachtungen verdunkelnd einwirken. Das für die folgenden Betrachtungen geeignetste Coordinatensystem wird uns in der sogenannten Gauss'schen Ebene geboten.

In dieser wird jeder Punkt durch eine Coordinate gegeben:

$$\left.\begin{aligned} P &\equiv x + iy \\ &\equiv r e^{i\varphi} \end{aligned}\right\} \text{(vergl. Fig. 7).}$$

Man kann aber auch die Auffassung zulassen, dass die „Grösse P“ einen Streckensummanden bedeutet, dessen Anfangspunkt der Nullpunkt des Coordinatensystems und dessen Endpunkt der fragliche Punkt P ist.

Punktreihe. Wir wollen nun die Coordinaten eines Punktes Q aufstellen, welcher sich auf der Verbindungslinie zweier Punkte: P_1 und P_2 befindet. Es muss dann sein:

$$\frac{QP_1}{QP_2} = -\frac{\lambda}{\varkappa},$$

wobei $\frac{\lambda}{\varkappa}$ reell sein muss. Daraus folgt:

$$\varkappa \overline{QP_1} + \lambda \overline{QP_2} = 0,$$

oder

$$\varkappa (P_1 - Q) + \lambda (P_2 - Q) = 0,$$

oder

$$(\varkappa + \lambda) Q = \varkappa P_1 + \lambda P_2.$$

Setzen wir immer $\varkappa + \lambda = 1$ voraus, so folgt wie früher:

$$Q = \varkappa P_1 + \lambda P_2.$$

Man bemerke aber, dass hier P_1, P_2, Q auch die vom Ursprung nach diesen Punkten gezogenen Strecken bedeuten können.

Anmerkung. Zieht man in Figur 8 durch Q Parallele zu OP_1 und OP_2, so erhält man auf diesen die Punkte W und V und im Ganzen den Aspect des einfachen Sylvester'schen Pantagraphen.

Die allgemeine Formel $Q = \varkappa P_1 + \lambda P_2$; $\varkappa$ und λ complex aber $\varkappa + \lambda = 1$. Lassen wir in der Gleichung

$$\frac{QP_1}{QP_2} = -\frac{\lambda}{\varkappa}$$

λ und $\varkappa$ complex sein und $\varkappa + \lambda = 1$, so ergiebt sich wie oben:

$$Q = \varkappa P_1 + \lambda P_2.$$

Schreiben wir den Ansatz in Form einer Proportion:

$$P_1 Q : QP_2 : P_2 P_1 = \lambda : \varkappa : -1,$$

so erkennen wir, dass der Punkt Q mit der Basis $P_1 P_2$ ein Dreieck formirt, das bei einmal angenommenen Werthen $\varkappa$, λ eine invariable Form für alle Veränderungen von P_1 und P_2 besitzt. Das Dreieck bleibt ähnlich demjenigen, das aus den drei Strecken $\varkappa$, λ, -1 gebildet werden kann (Fig. 9).

Ein erstes Ränderungsprincip. Hat man für ein Punktgebilde Ω von Punkten P_i eine invariable Eigenschaft vermöge der Gleichungen

$$Q = \varkappa P_i + \lambda P_x$$

abgeleitet, wobei die Punkte Q der Einfachheit halber auf der Verbindungslinie $P_i P_x$ angenommen worden waren, so gilt diese auch dann noch, wenn alle verwandten Punkte Q als Spitzen von ähnlich veränderlichen Dreiecken besetzt werden, deren Gestalten nur von den Relationen der $\varkappa\lambda$ beeinflusst sind. Fasst man jede Linie $\overline{P_i P_x}$ als Rand auf, so sind die Q Randpunkte und man kann von einem Ränderungsprincip sprechen. Dabei ist das

Princip im Sinne einer Arbeitskürzung zu verstehen, wie etwa beim Princip von der lebendigen Kraft in der Mechanik, bei dessen Geltung man sofort ein oder mehrere Integrale hinzuschreiben vermag.

Anmerkung. Parallelogramme bleiben bei Anwendung des Ränderungsprincipes erhalten, denn die ihnen zu Grunde liegende Relation enthält weder $\varkappa$ noch λ (ebenso alle Additionskörper).

Beispiel a) zum ersten Ränderungsprincip. Der Pantagraph a) in die Ebene gelegt giebt die Kette von Figur 3 (Taf. III), wobei die Kettenglieder alle cyklisch affin nach demselben Verhältniss $\varkappa : \lambda$ getheilt sind; dann theilt auch der Resultantenpunkt die Strecke $A_0 A_n$ im gleichen Verhältniss. Wenden wir das Ränderungsprincip an, so haben wir an sämmtliche Stäbe $\overline{A_i A_{i+1}}$ ähnliche Dreiecke anzubringen, dann genau wie oben das Netz von Parallelogrammen zu zeichnen, um einen Resultantenpunkt S zu erhalten, der mit $A_0 A_n$ ein den übrigen ähnliches Dreieck bildet.

Anmerkung. Die so gestaltete Kette für zwei Glieder stellt den Sylvester'schen Plagiographen (Schiefschreiber) dar.

Beispiel b). Man könnte in dieser Weise alle bisher behandelten Typen von Pantagraphen in die Ebene legen und rändern; es ist aber wohl zu merken, dass das Ränderungsprincip nur in der Ebene gilt, so dass man nicht mehr in den Raum zurückgehen kann, ohne die gewonnenen Beziehungen zu stören.

I. Satz über das Punktviereck (Fig. 10). Sind $A_0 A_1 A_2 \ldots A_n$ auf der Geraden $A_0 A_n$ und $B_0 B_1 B_2 \ldots B_n$ auf der Geraden $B_0 B_n$ ähnliche Punktreihen und theilt man die entsprechenden Verbindungen $A_i B_i$ durch Punkte C_i im constanten Verhältniss $p : q$, so liegen diese Punkte C_i wieder auf einer Geraden $C_0 C_n$ und zwar ist die von ihnen gebildete Punktreihe ähnlich den beiden gegebenen.

Nachweis. Aus der Aehnlichkeit der Punktreihen A_i und B_i folgt:

$$A_i = \varkappa A_0 + \lambda A_n,$$
$$B_i = \varkappa B_0 + \lambda B_n.$$

Bilden wir auf der Verbindungslinie $A_i B_i$ nach Belieben einen Theilpunkt C_i, so ist:

$$\begin{aligned} C_i &= p A_i + q B_i, \\ &= p \cdot (\varkappa A_0 + \lambda A_n) + q(\varkappa B_0 + \lambda B_n), \\ &= \varkappa (p A_0 + q B_0) + \lambda (p A_n + q B_n), \\ &= \varkappa C_0 + \lambda C_n, \end{aligned}$$

womit die Aehnlichkeit der Reihe C_i zu den Reihen A_i, B_i nachgewiesen ist. Dieser Satz lässt sich auch in Form eines Pantagraphenschemas geben:

$$\left\| \begin{array}{c|cc} C_i & C_0 & C_n \\ \hline A_i & A_0 & A_n \\ B_i & B_0 & B_n \end{array} \right\| = 0,$$

wo die Verticalreihen und Horizontalreihen zwei Systeme affiner Reihen vorstellen. Dies Schema kann natürlich nach zwei Richtungen erweitert werden und gilt ohne Anwendung des Ränderungsprincipes auch im Raume und lautet dann:

$$\left\|\begin{array}{c|c} \ldots V'_2 V'_1 & V_0 \quad V_1 \ldots V_n \\ \ldots U'_2 U'_1 & U_0 \quad U_1 \ldots U_n \\ \hline \ldots A'_2 A'_1 & A_0 \quad A_1 \ldots A_n \\ \ldots B'_2 B'_1 & B_0 \quad B_1 \ldots B_n \\ \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \ldots M'_2 M'_1 & M_0 \quad M_1 \ldots M_n \end{array}\right\| = 0.$$

Modell zum vorigen Satz. Macht man sich aus vier Blechstreifen von genügender Festigkeit ein Gelenkviereck $A_0 A_n B_0 B_n$ und theilt sowohl das eine Paar Gegenseiten $\overline{A_0 A_n}$ und $\overline{B_0 B_n}$ in gleichviel Theile (n), verbindet correspondirende Theilpunkte durch Gummifäden, wiederholt darnach denselben Theilungsprocess (m Theile) für das andere Paar Gegenseiten, verbindet auch hier correspondirende Theilpunkte, wie oben angegeben, so überkreuzen sich die beiden Systeme von Gummifäden in fixen Punkten bei allen möglichen Lagen des Gelenkvierecks (in welchen die Fäden gespannt bleiben). Bei der Dehnung der Gummifäden verzerren sich die Theile derselben so, dass sie unter sich proportional bleiben. Steckt man senkrecht zur Ebene des Vierecks im Kreuzungspunkt der Fäden durch beide eine Nadel, so wird dieselbe keine Zerrung bei den Bewegungen des Gelenkvierecks erfahren und immer senkrecht zur Ebene bleiben.

Macht man aus dem Viereck ein räumlich bewegliches, so überkreuzen sich die gerade bleibenden Fäden noch immer in analoger Weise und bilden die Erzeugenden eines Paraboloids (zwei Schaaren).

Eine gewisse Raumtransformation (Fig. 11). Gegeben sei ein rechteckiges Parallelepipedon $\overline{A_0 A_n B_0 B_n C_0 C_n D_0 D_n}$. Um einen Punkt P darin zu coordinatisiren, denken wir das Prisma durch die drei in P sich treffenden zu den Flächen parallelen Ebenen gespalten. Jede der Ebenen schneidet sämmtliche von ihr getroffenen Kanten in einem bestimmten Verhältniss; so

die Kanten $\overline{A_0 A_n}$, $\overline{B_0 B_n}$, $\overline{C_0 C_n}$, $\overline{D_0 D_n}$ im Verhältniss $\varkappa : \lambda$,
" " $\overline{A_0 B_0}$, $\overline{A_n B_n}$, $\overline{C_0 D_0}$, $\overline{C_n D_n}$ " " $p : q$,
" " $\overline{A_0 C_0}$, $\overline{A_n C_n}$, $\overline{B_0 D_0}$, $\overline{B_n C_n}$ " " $r : s$;

dann sind die Coordinaten von P:

$$P = r[p(\varkappa A_0 + \lambda A_n) + q(\varkappa B_0 + \lambda B_n)] \\ + s[p(\varkappa C_0 + \lambda C_n) + q(\varkappa D_0 + \lambda D_n)].$$

In dieser Formel kommen die Grössen $A_0, A_n, \ldots D_0, D_n$ als Coefficienten vor. Verzerren wir das Gebilde der acht Eckpunkte beliebig im

Raume, so bilden die vier Kanten einer Seitenfläche dann ein allgemeines räumliches Viereck. Vermöge unserer Coordinatisirung (welche bei festbleibenden doch selbst verzerrten Kantenlängen durch unsere Gummifäden nachgebildet werden kann) verwandeln sich sämmtliche Seitenflächen und die zu diesen parallelen Ebenen in Theile von hyperbolischen Paraboloiden. Bemerkenswerth ist bei dieser Transformation, dass die drei Schaaren von Geraden, die den ursprünglichen Kanten parallel waren, als Gerade erhalten bleiben.

Da $r:s$, $p:q$, $\varkappa:\lambda$ als die Coordinaten im ursprünglichen System angesehen werden können, so ist die Transformation

$$P = rp\,.\,\varkappa A_0 + rp\lambda A_n + \cdots + sq\lambda D_n$$

eine trilineare in r, p, $\varkappa$.

Gehen wir zum ursprünglichen System zurück, bestimmen darin zwei Punkte durch ihre Coordinaten:

$$P \equiv \varkappa:\lambda,\quad p:q,\quad r:s,$$
$$P' = \varkappa':\lambda',\quad p':q',\quad r':s',$$

so ist ein Punkt P'' ihrer Reihe bestimmt durch die Werthe:

$$\left\{\begin{array}{lll} K = (\varrho\varkappa + \sigma\varkappa'), & L = (\varrho\lambda + \sigma\lambda'), & \\ P = (\varrho p + \sigma p'), & Q = (\varrho q + \sigma q'), & \varrho + \sigma = 1. \\ R = (\varrho r + \sigma r'), & S = (\varrho s + \sigma s'), & \end{array}\right.$$

Hiernach erkennt man, dass dem transformirten Punkt P'' eine homogene Function dritten Grades in σ, ϱ entspricht. Bedenkt man, dass die Gleichung

$$P = rp\varkappa A_0 + \cdots$$

eigentlich drei Gleichungen vorstellt, indem statt der Zeichen

$$P,\ A_0 A_1 \ldots$$

der Reihe nach ihre Coordinaten in x, y, z zu setzen sind, so erkennt man, dass der Geraden PP' nach der Transformation eine Raumcurve dritter Ordnung entspricht u. s. w.

Die Ränderung zum Satz I über das Punktviereck (Fig. 12) giebt den Satz: Beschreibt man über dem ersten Paar von Gegenseiten eines Vierecks ähnliche Dreiecke von der Form α und mit den Spitzen A_1 und A_2, analog über dem zweiten Paar von Gegenseiten ein anderes Paar von ähnlichen Dreiecken von der Form β mit den Spitzen B_1 und B_2, ferner

über $A_1 A_2$ ein Dreieck von der Form β mit der Spitze B_3,
„ $B_1 B_2$ „ „ „ „ „ α „ „ „ A_3,

so fallen die Spitzen $A_3 B_3$ zusammen.*

* Ueber eine andere Art der Ränderung vergleiche man meinen Aufsatz: „Aphorismen zum Aufgaben-Repertorium" in der Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht XXVII, § 2.

II. **Satz über das Punktviereck** (Fig. 13). Dieser Satz giebt ganz allgemein Aufschluss über die doppelte Erzeugung des Punktfeldes (dreidimensional) eines Vierecks (Tetraeders). Um einen Punkt dieses Feldes festzulegen, bestimmen wir auf $A_0 A_n$ einen Punkt A, auf $B_0 B_n$ einen Punkt B, auf AB einen Punkt P:

$$A = \varkappa A_0 + \lambda A_n, \quad \varkappa + \lambda = 1,$$
$$B = \mathfrak{k} B_0 + \mathfrak{l} B_n, \quad \mathfrak{k} + \mathfrak{l} = 1,$$
$$P = \varrho A + \sigma B, \quad \varrho + \sigma = 1.$$

Wir behaupten nun, dass dieser Punkt auch so erzeugt werden kann, dass man auf $A_0 B_0$ einen Punkt P_0, auf $A_n B_n$ einen Punkt P_n, auf $P_0 P_n$ schliesslich einen Punkt P bestimmt, der mit dem obigen identisch bleibt bei allen Bewegungen des Viereckes, das heisst:

$$P_0 = K A_0 + L B_0, \quad K + L = 1,$$
$$P_n = \mathfrak{K} A_n + \mathfrak{L} B_n, \quad \mathfrak{K} + \mathfrak{L} = 1,$$
$$P = R P_0 + S P_n, \quad R + S = 1.$$

Aus der Identität für P folgt:

$$\begin{cases} \varrho \varkappa A_0 + \varrho \lambda A_n + \sigma \mathfrak{k} B_0 + \sigma \mathfrak{l} B_n \\ \equiv R K A_0 + S \mathfrak{K} A_n + R L B_0 + S \mathfrak{L} B_n, \end{cases}$$

das heisst:

$$\varrho \varkappa = RK, \quad \varrho \lambda = S \mathfrak{K},$$
$$\sigma \mathfrak{k} = RL, \quad \sigma \mathfrak{l} = S \mathfrak{L},$$

wobei die rechten Seiten nur Unbekannte enthalten.

Durch Addition der ersten und dritten bez. der zweiten und vierten Gleichung folgt:

$$R = \varrho \varkappa + \sigma \mathfrak{k},$$
$$S = \varrho \lambda + \sigma \mathfrak{l}.$$

Dies eingesetzt, giebt:

$$K = \frac{\varrho \varkappa}{\varrho \varkappa + \sigma \mathfrak{k}}, \quad L = \frac{\sigma \mathfrak{k}}{\varrho \varkappa + \sigma \mathfrak{k}},$$
$$\mathfrak{K} = \frac{\varrho \lambda}{\varrho \lambda + \sigma \mathfrak{l}}, \quad \mathfrak{L} = \frac{\sigma \mathfrak{l}}{\varrho \lambda + \sigma \mathfrak{l}},$$

womit die Behauptung erwiesen ist.

Ist das Viereck ein räumliches, P ein beliebiger Raumpunkt, so ist bekanntermassen hierdurch ein Hyperboloid $\mathfrak{H}$ bestimmt; durch P gehen zwei Erzeugende von $\mathfrak{H}$, die eine ist $\overline{AB}$, die andere $\overline{P_0 P_n}$. Damit ist die Existenz der doppelten Erzeugung von P auch geometrisch evident.

Zur Construction eines Modelles mittelst Gummifäden und eines Rahmens vergleiche man frühere Bemerkungen. Ist ein Hyperboloid durch beide Erzeugendenschaaren (Gummifäden) für eine Lage des Vierecks construirt, so bleiben dieselben in ihrer Eigenschaft als solche bei allen Veränderungen des Vierecks erhalten, **ohne ihre Kreuzungspunkte zu wechseln.**

Die Ränderung zum Satz II) über das Punktviereck (Fig. 4). Unser Ränderungsprincip besagt, statt die Theilungspunkte A, B, P direct in die Verbindungslinien $\overline{A_0 A_n}$, $\overline{B_0 B_n}$, $\overline{AB}$ zu legen, kann man sie als

Spitzen von Dreiecken über diesen Seiten annehmen. Diese drei Dreiecke sind gestaltlich beliebig, aber bei allen Veränderungen, denen das Punktviereck $A_0 B_0 A_n B_n$ unterworfen wird, muss ihre Gestalt dann invariabel bleiben. Der solchermassen erhaltene Punkt P lässt genau, wie oben angegeben, eine zweite Erzeugung mittelst dreier Dreiecke über den Strecken $\overline{A_0 B_0}$, $\overline{A_n B_n}$, $\overline{P_0 P_n}$ zu, deren Form aber in ganz bestimmter Weise von der Form der zuerst gewählten Dreiecke abhängt.

Leitfigur. Diese Abhängigkeit der sechs Dreiecke wird selbst durch einen ganz bekannten übergeschlossenen Mechanismus (Fig. 15) geometrisch versinnbildlicht, den wir als Leitfigur zum oben betrachteten Apparat bezeichnen wollen.*

Erklärung derselben: OI stellt die Einheit vor; $O\mathfrak{A} + \mathfrak{A}I = 1$ stellt die Gleichung $\varkappa + \lambda = 1$, $O\mathfrak{B} + \mathfrak{B}I = 1$ die Gleichung $\mathfrak{k} + \mathfrak{l} = 1$, $O\mathfrak{C} + \mathfrak{C}I = 1$ die Gleichung $\varrho + \sigma = 1$ vor. Das Dreieck aus $\varrho + \sigma - 1 = 0$, das heisst $O\mathfrak{C}I$ werde kurz mit Δ bezeichnet. Dieses Dreieck ist an den vier Seiten $\varkappa$, λ, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$ des Vierecks $O\mathfrak{A}I\mathfrak{B}$ so angeheftet, wie die Figur 15 zeigt, dann haben nach den Multiplicationsgesetzen in der Gauss'schen Ebene die Seiten der angehefteten Dreiecke die in der Figur eingetragenen Werthe.

Construirt man nun die Parallelogramme aus $\overline{O\mathfrak{A}_1}$ und $\overline{O\mathfrak{B}_1}$ bez. $\overline{I\mathfrak{A}_2}$ und $\overline{I\mathfrak{B}_2}$, so zeigen diese freiwillig den Koppelpunkt $\mathfrak{P}$, wie man sofort erkennen wird.

Die halben Parallelogramme:

Dreieck $O\mathfrak{A}_1\mathfrak{P}$ und Dreieck $I\mathfrak{A}_2\mathfrak{P}$, ferner Dreieck $\overline{O\mathfrak{P}I}$ lösen das Problem, denn die Seiten derselben verhalten sich wie

$$\begin{aligned}
\overline{O\mathfrak{A}_1} : \overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{P}} : \overline{O\mathfrak{P}} &= \varkappa\varrho : \mathfrak{k}\sigma : (\varkappa\varrho + \mathfrak{k}\sigma) = K : L : 1, \\
\overline{I\mathfrak{A}_2} : \overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{P}} : \overline{I\mathfrak{P}} &= \lambda\varrho : \mathfrak{l}\sigma : (\lambda\varrho + \mathfrak{l}\sigma) = \mathfrak{K} : \mathfrak{L} : 1, \\
\overline{O\mathfrak{P}} : \overline{\mathfrak{P}I} : \overline{OI} &= (\varkappa\varrho + \mathfrak{k}\sigma) : (\lambda\varrho + \mathfrak{l}\sigma) : 1 = R : S : 1.
\end{aligned}$$

Da $R + S = 1$, so folgt, dass $\mathfrak{P}$ freiwilliger Koppelpunkt der bezeichneten Parallelogramme sein muss.

Der Punkt $Q = \varkappa P_1 + \lambda P_2 + \mu P_3$, $(\varkappa + \lambda + \mu = 1)$ (Fig. 16). Schreibt man den Werth Q in folgender Weise:

$$\begin{aligned}
Q &= \varkappa P_1 + \lambda P_2 + \mu P_3, \\
&= \varkappa P_1 + (1 - \varkappa - \mu) P_2 + \mu P_3, \\
&= [\varkappa P_1 + (1 - \varkappa) P_2] + [(1 - \mu) P_2 + \mu P_3] - P_2, \\
&= C + A - P_2,
\end{aligned}$$

so erkennt man, dass Q Resultantenpunkt eines Parallelogrammes zur Summe $\overline{P_2 C} + \overline{P_2 A}$ ist, wobei C und A Spitzen von Dreiecken über $\overline{P_1 P_2}$

---

* Dass diese Leitfigur ohne Weiteres als Ellipsograph betrachtet werden kann, scheint noch nicht bekannt zu sein. Der Nachweis soll in einer späteren Mittheilung erbracht werden.

bez. $\overline{P_2P_3}$ sind, deren Gestalt durch die Coefficienten $\varkappa$, λ, μ bedingt ist. Bedenkt man, dass die obige Zerlegung dreimal in verschiedener Art ausgeführt werden kann, so kommt man ohne besondere Mühe auf die simultan dreifache Erzeugung der Koppelcurve Robert's. Die betreffende Curve wird (vergl. Fig. 1 Taf. III) von einem Punkte beschrieben, der den folgenden Gleichungen genügt:

$$Q = \varkappa P_1 + \lambda P_2 + \mu P_3,$$
$$1 = \varkappa + \lambda + \mu,$$

wozu noch kommt, dass die absoluten Werthe von $\varkappa$, λ, μ fest vorgegeben sind.

III. Satz über das Punktviereck (Fig. 17). Die Seiten des Punktvierecks kann man noch in anderer Weise zusammenfassen wie im II. Satz. Zu dem Ende betrachten wir das Viereck als Projection eines Tetraeders. Um einen Punkt P des Tetraederraumes zu bestimmen, theilen wir eine der Ebenen des Tetraeders $\overline{A_{i+1},\ A_{i+2},\ A_{i+3}}$ durch X_i im Verhältniss $\varkappa_i : \lambda_i : \mu_i$ und die Entfernung $X_i A_i$ im Verhältniss $\varrho_i : \sigma_i$. Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned}
X_1 &= \varkappa_1 A_2 + \lambda_1 A_3 + \mu_1 A_4, & P &= \varrho_1 X_1 + \sigma_1 A_1,\\
X_2 &= \varkappa_2 A_3 + \lambda_2 A_4 + \mu_2 A_1, & P &= \varrho_2 X_2 + \sigma_2 A_2,\\
X_3 &= \varkappa_3 A_4 + \lambda_3 A_1 + \mu_3 A_2, & P &= \varrho_3 X_3 + \sigma_3 A_3,\\
X_4 &= \varkappa_4 A_1 + \lambda_4 A_2 + \mu_4 A_3, & P &= \varrho_4 X_4 + \sigma_4 A_4.
\end{aligned}$$

Aus den Identitäten $P \equiv P$ ergiebt sich

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \varrho_2 \mu_2 = \varrho_3 \lambda_3 = \varrho_4 \varkappa_4,\\
\varrho_1 \varkappa_1 &= \quad \sigma_2 \quad = \varrho_3 \mu_3 = \varrho_4 \lambda_4,\\
\varrho_1 \lambda_1 &= \varrho_2 \varkappa_2 = \quad \sigma_3 \quad = \varrho_4 \mu_4,\\
\varrho_1 \mu_1 &= \varrho_2 \lambda_2 = \varrho_3 \varkappa_3 = \sigma_4.
\end{aligned}$$

Nehmen wir an, eine Punktbestimmung, etwa die erste, sei zahlenmässig bekannt, so ergiebt die Auflösung dieses Gleichungssystemes die anderen:

$$\begin{aligned}
\varkappa_2 : \lambda_2 : \mu_2 &= \lambda_1 : \mu_1 : \frac{\sigma_1}{\varrho_1}, & \sigma_2 &= \varrho_1 \varkappa_1,\\
\varkappa_3 : \lambda_3 : \mu_3 &= \mu_1 : \frac{\sigma_1}{\varrho_1} : \varkappa_1, & \sigma_3 &= \varrho_1 \lambda_1,\\
\varkappa_4 : \lambda_4 : \mu_4 &= \frac{\sigma_1}{\varrho_1} : \varkappa_1 : \lambda_1, & \sigma_4 &= \varrho_1 \mu_1.
\end{aligned}$$

Hiernach ist gezeigt, dass eine vierfache Erzeugung des Punktes P in der Ebene des Vierecks $A_1 A_2 A_3 A_4$ möglich ist.

Ränderung zum Satz III. Die Theilungspunkte $a a' b b' c c' d d'$ auf den Seiten des Vierecks $A_1 A_2 A_3 A_4$ von Figur 17, welche die Construction der X_i vermitteln, werden bei der Ränderung zu Spitzen von Dreiecken, die im Allgemeinen sämmtlich verschiedene Gestalt besitzen werden. Doch sind von diesen Dreiecken nur drei von einander unabhängig wählbar, während die übrigen sich aus diesen in bestimmter Weise ergeben. Das

Resultat der Ränderung ist in Figur 18 ersichtlich. Bei allen Bewegungen des Gelenkvierecks $A_1 A_2 A_3 A_4$ projicirt der Punkt P die Längen $\overline{X_i P_i}$ unter gestaltlich invariablen Dreiecken.

Leitfigur (Fig. 19). Um die Abhängigkeit der Dreiecke zu übersehen, construiren wir uns die Leitfigur Figur 19. Dieselbe besteht aus einem Linienzug von folgenden Summanden:

$$\varkappa_1,\ \lambda_1,\ \mu_1 \begin{cases} \varkappa_1,\ \lambda_1, \\ \dfrac{\sigma_1}{\varrho_1},\ \varkappa_1,\ \lambda_1. \end{cases}$$

Ueber den ersten drei Summanden sind Dreiecke beschrieben, welche dem Dreieck $\varrho_1 + \sigma_1 = 1$ ähnlich sind, so dass

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{a}\mathfrak{a}'} &= \varrho_1 \varkappa_1, & \overline{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'} &= \varrho_1 \lambda_1, & \overline{\mathfrak{c}\mathfrak{c}'} &= \varrho_1 \mu_1, \\ &= \sigma_2, & &= \sigma_3, & &= \sigma_4, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{a}'\mathfrak{d}} &= (\varkappa_1 + \lambda_1 + \mu_1) - \overline{\mathfrak{a}\mathfrak{a}'} = 1 - \sigma_2 = \varrho_2, \\ \overline{\mathfrak{b}'\mathfrak{h}} &= (\lambda_1 + \mu_1 + \varkappa_1) - \overline{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'} = 1 - \sigma_3 = \varrho_3, \\ \overline{\mathfrak{c}'\mathfrak{i}} &= (\mu_1 + \varkappa_1 + \lambda_1) - \overline{\mathfrak{c}\mathfrak{c}'} = 1 - \sigma_3 = \varrho_4, \end{aligned}$$

so dass es die Dreiecksformen

$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\mathfrak{d},\quad \mathfrak{b}\mathfrak{b}'\mathfrak{h},\quad \mathfrak{c}\mathfrak{c}'\mathfrak{i}$$

sind, die im Punkte $P(\equiv \mathfrak{a}' \equiv \mathfrak{b}' \equiv \mathfrak{c}')$ gekoppelt erscheinen.

Ferner sind zugeordnet dem Punkte:

$X_2 = \varkappa_2 A_3 + \lambda_2 A_4 + \mu_2 A_1$ das Viereck $\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{e}$ und das Dreieck $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\mathfrak{d}$,
$X_3 = \varkappa_3 A_4 + \lambda_3 A_1 + \mu_3 A_2$ „ „ $\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{e}\mathfrak{f}$ „ „ „ $\mathfrak{b}\mathfrak{b}'\mathfrak{h}$,
$X_4 = \varkappa_4 A_1 + \lambda_4 A_2 + \mu_4 A_3$ „ „ $\mathfrak{d}\mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{g}$ „ „ „ $\mathfrak{c}\mathfrak{c}'\mathfrak{i}$;

denn es verhalten sich die Coefficienten $\varkappa_i : \lambda_i : \mu_i$ wie die drei Streckensummanden, welche jeweils im betreffenden Viereck (vom Anfangsbuchstaben an gerechnet) auftreten.

Um deutlicher zu sein, behandeln wir das erste Viereck etwas ausführlicher:

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{e};\quad \mathfrak{b}\mathfrak{c} : \mathfrak{c}\mathfrak{d} : \mathfrak{d}\mathfrak{e} &= \lambda : \mu : \frac{\sigma_1}{\varrho} \\ &= \varkappa_2 : \lambda_2 : \mu_2. \end{aligned}$$

Nimmt man von diesen drei Streckensummanden je zwei consecutive zu einem Dreieck zusammen, so hat man die an die Seiten $\overline{A_3 A_4}$ und $\overline{A_4 A_1}$ zu fügenden Dreiecke und zwar coincidiren die Punkte, die hier unter einander geschrieben sind:

$$\left\{ \begin{matrix} A_3 A_4, & A_4 A_1 \\ \mathfrak{d}\mathfrak{c}\mathfrak{b}, & \mathfrak{e}\mathfrak{d}\mathfrak{c} \end{matrix} \right\}.$$

IV. Satz über das Punktviereck (Fig. 20). Auch dadurch kann man den Punktraum des Vierecks festlegen, dass man das letztere durch die eine oder andere Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt, in jedem derselben einen Punkt festlegt und auf deren Verbindungslinie irgend einen Theilpunkt P hervorhebt. Dies liefert die Erzeugungen:

$$\begin{array}{l|l} Y_4 = \varkappa A_1 + \lambda A_2 + \mu A_3, & Y_1 = K A_2 + L A_3 + M A_4, \\ Y_2 = \mathfrak{k} A_1 + \lambda A_4 + \mathfrak{m} A_3, & Y_3 = \mathfrak{K} A_2 + \mathfrak{L} A_1 + \mathfrak{M} A_4, \\ P = \varrho Y_4 + \sigma Y_2. & P = R Y_3 + S Y_1. \end{array}$$

Aus der Identität von $P \equiv P$ ergeben sich die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varrho\varkappa + \sigma\mathfrak{k} &= R\mathfrak{L}, \\ \varrho\lambda &= R\mathfrak{K} + SK, \\ \varrho\mu + \sigma\mathfrak{m} &= SL, \\ \sigma\mathfrak{l} &= R\mathfrak{M} + SM. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen erkennt man, dass drei der Punkte Y_i beliebig wählbar sind, wir nehmen an, es seien Y_2, Y_3, Y_4; dann folgt:

$$K : L : M = \left[\varrho\lambda - \frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{L}}(\varrho\varkappa + \sigma\mathfrak{k})\right] : [\varrho\mu + \sigma\mathfrak{m}] : \left[\sigma\mathfrak{l} - \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{L}}(\varrho\varkappa + \sigma\mathfrak{k})\right].$$

Die Ränderung zu Satz IV ergiebt wieder Dreiecke, die im Allgemeinen lauter verschiedene Gestalten aufweisen, aber nur sechs von ihnen sind willkürlich wählbar (Fig. 21).

Verallgemeinerung. Es soll hier nur an einem einzigen Beispiel angedeutet werden, in welcher Weise eine Verallgemeinerung der angestellten Betrachtungen eintreten kann.

Sind z. B. fünf Punkte gegeben, so kann man sie in mehrere Gruppen ordnen, z. B.:

$$\begin{array}{ccc} A_1 A_2 A_3, & A_2 A_3 A_4, & A_3 A_4 A_5 \ldots \\ A_4 A_5, & A_5 A_1, & A_1 A_2 \ldots \end{array}$$

Aus jeder Zeile, die einen Raum vorstellt, nimmt man einen Punkt:

$$X = \varkappa_1 A_1 + \lambda A_2 + \mu A_3,$$
$$Y = \mathfrak{k} A_4 + \mathfrak{l} A_5, \text{ u. s. f.}$$

und bildet daraus einen Punkt P:

$$P = \varrho X + \sigma Y, \quad P = \varrho' X' + \sigma Y'$$

und setzt schliesslich die Werthe von P einander identisch gleich. Daraus ergeben sich dann die Relationen der $\varkappa$, λ, μ, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$, ϱ, σ. Durch Ränderung ist die erhaltene Figur noch weiter auszubilden.

Ein weiteres Problem. Die Sätze I bis IV behandelten im Wesentlichen die Aufgabe:

> „Es sind im Mechanismus des bewegten Vierecks $A_1 A_2 A_3 A_4$ vier solche Punkte $XX'YY'$ anzugeben, so dass die Verbindungslinie XX' von YY' immer im selben (auch complexen) Verhältniss getheilt wird."

Wir können dieser Forderung eine andere entgegenstellen:

> „Es sind im Mechanismus des bewegten Vierecks $A_1 A_2 A_3 A_4$ vier solche Punkte $XX'YY'$ anzugeben, so dass die Verbindungs-

linien XX' und YY' einen festen Winkel einschliessen und in festem Verhältniss stehen."

Beide Probleme erfordern zur Lösung den gleichen Ansatz. Im ersten Fall wurde ein Punkt P so bestimmt, dass $\varrho X + \sigma X' = RY + SY'$ war, wobei

$$\varrho + \sigma = 1, \quad R + S = 1$$

vorausgesetzt würde. Im zweiten Fall soll

$$\varrho \overline{X'X} = R \overline{Y'Y}$$

sein, was man auch schreiben kann:

$$\varrho X + \sigma X' = RY + SY',$$

wenn

$$\varrho + \sigma = 0, \quad R + S = 0$$

angenommen wird. Da aber alle angenommenen Gleichungssysteme für die Sätze I bis IV auch unter diesen Bedingungen lösbar sind — allerdings sind die Schlussresultate andere — so ist die Möglichkeit der Lösung des Problems erwiesen, der Gang zur Behandlung angedeutet.*

§ 6. Aehnlich veränderliche Figuren.

1. Lehrsatz. Wenn die im Schema der Grundpunkte eines ebenen Pantagraphen auftretenden affin bezogenen „Körper" einander so ähnlich werden, wie sie affin auf einander bezogen erscheinen, so ist denselben auch der in der letzten Zeile des Schemas enthaltene „Körper" ähnlich.

Beweis. Sei

$$\begin{array}{c|cccc|c} \ldots & A_1 & B_1 & C_1 & \ldots & (a_1) \\ \ldots & A_2 & B_2 & C_2 & \ldots & (a_2) \\ \ldots & . & . & . & . & \ldots \\ \hline \ldots & A & B & C & \ldots & (a) \end{array} = 0.$$

das Schema, dann ist bekanntlich:

$$\overline{aA} = \overline{a_1 A_1} + \overline{a_2 A_2} + \cdots$$
$$\overline{aB} = \overline{a_1 B_1} + \overline{a_2 B_2} + \cdots$$
$$\overline{aC} = \overline{a_1 C_1} + \overline{a_2 C_2} + \cdots$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

folglich:

$$\overline{AB} = \overline{A_1 B_1} + \overline{A_2 B_2} + \cdots$$
$$\overline{BC} = \overline{B_1 C_1} + \overline{B_2 C_2} + \cdots$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Wegen der vorausgesetzten directen Aehnlichkeit besteht aber für Längen und Richtungen die Proportion:

$$\overline{A_1 B_1} : \overline{B_1 C_1} : \overline{C_1 D_1} \cdots = \overline{A_2 B_2} : \overline{B_2 C_2} : \overline{C_2 D_2} \cdots = \ldots$$

* Vergl. die Fussnote S. 248 dieses Heftes.

Nach dem Satz von der correspondirenden Addition der homologen Glieder kann man dieser fortlaufenden Proportion noch das Glied hinzufügen:

$$= \Sigma \overline{A_i B_i} : \Sigma \overline{B_i C_i} : \Sigma \overline{C_i D_i} : \cdots$$
$$= \overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CD} : \cdots$$

Hiermit ist der Lehrsatz bewiesen.

Einfaches Beispiel. Das Schema

$$\left\| \begin{array}{ccc} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ \hline A & B & C \end{array} \right\| \begin{array}{c} (P) \\ (P) \\ \hline (P) \end{array} = 0 \quad (\text{Fig. } 22)$$

enthalte zwei congruente Dreiecke, deren Ebenen in einem beliebigen, sich nicht entsprechenden Punkt P gekoppelt seien. Ergänzt man die von P nach correspondirenden Punkten A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2 gehenden Strecken zu Parallelogrammen, so werden deren Resultantenpunkte A, B, C ein den gegebenen Dreiecken ähnlich veränderliches Dreieck bilden.

Anmerkung. Lässt man P in zwei cyklisch folgende Punkte, z. B. A_1 und C_2 fallen, so erscheint der Sylvester'sche Plagiograph.

2. Lehrsatz. Ein ähnlich veränderliches Dreieck (Vieleck) kann von den einer Gruppe von Punkten $A, B, C, D \ldots N$ linear verwandten Punkten im Allgemeinen nur erzeugt werden, indem man in den Ebenen der Stäbe $\overline{AB}$, $\overline{BC}, \ldots$ Dreiecke festlegt, die dem zu erzeugenden selber ähnlich sind.

Beweis. Sei XYZ das zu construirende Dreieck, so muss sein:

$$X = \varkappa_1 A + \varkappa_2 B + \varkappa_3 C + \cdots \quad \Sigma \varkappa_i = 1,$$
$$Y = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C + \cdots \quad \Sigma \lambda_i = 1,$$
$$Z = \mu_1 A + \mu_2 B + \mu_3 C + \cdots \quad \Sigma \mu_i = 1.$$

Soll Z die Spitze eines ähnlich veränderlichen Dreiecks über der Basis XY bilden, so muss

$$Z = uX + vY, \quad u + v = 1$$

sein, oder was dasselbe ist, die letzte Zeile muss eine Folge der beiden ersten sein. Daher muss die Matrix

$$\left\| \begin{array}{c} \varkappa_1 \, \varkappa_2 \, \varkappa_3 \, \ldots \\ \lambda_1 \, \lambda_2 \, \lambda_3 \, \ldots \\ \mu_1 \, \mu_2 \, \mu_3 \, \ldots \end{array} \right\|$$

verschwinden. Um die Punkte X, Y, Z zu construiren, benutzen wir das Schema:

$$\left\| \begin{array}{ccc} Z_1 & Y_1 & X_1 \\ Z_2 & Y_2 & X_2 \\ Z_3 & Y_3 & X_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline Z & Y & X \end{array} \right\| \begin{array}{c} A\,B \\ B\,C \\ C\,. \; . \\ \cdots \\ M\,N \\ \hline A\,N \end{array} \left\| \begin{array}{c} (A) \\ (B) \\ \vdots \\ (M) \\ \hline (A) \end{array} \right. = 0.$$

Dabei sind die $X_i Y_i Z_i$ so zu bestimmen, dass

$$\begin{aligned}
X_1 &= \varkappa_1 A + (1-\varkappa_1)B,\\
X_2 &= (\varkappa_2-\varkappa_1)B + (1-\varkappa_2+\varkappa_1)C,\\
X_3 &= (\varkappa_3-\varkappa_2)C + (1-\varkappa_3+\varkappa_2)D,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
Y_1 &= \lambda_1 A + (1-\lambda_1)B,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
Z_1 &= \mu_1 A + (1-\mu_1)B,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Wir wollen nun untersuchen, welche Bedingungen statthaben müssen, damit die den Stäben AB, BC attachirten Dreiecke ähnlich seien. Zu dem Ende müsste die Gleichung bestehen:

$$\frac{X_1-Y_1}{Z_1-Y_1} = \frac{X_2-Y_2}{Z_2-Y_2},$$

oder:

$$\frac{(\varkappa_1-\lambda_1)A+(\varkappa_1-\lambda_1)B}{(\mu_1-\lambda_1)A-(\mu_1-\lambda_1)B} = \frac{(\varkappa_2-\varkappa_1-\lambda_2+\lambda_1)B-(\varkappa_2-\varkappa_1-\lambda_2+\lambda_1)C}{(\mu_2-\mu_1-\lambda_2+\lambda_1)B-(\mu_2-\mu_1-\lambda_2+\lambda_1)C},$$

oder:

$$\frac{\varkappa_1-\lambda_1}{\mu_1-\lambda_1} = \frac{\varkappa_2-\varkappa_1-\lambda_2+\lambda_1}{\mu_2-\mu_1+\lambda_2-\lambda_1},$$

oder:

$$\begin{vmatrix} \varkappa_1-\lambda_1, & \varkappa_2-\lambda_2 \\ \mu_1-\lambda_1, & \mu_2-\lambda_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varkappa_1 & \varkappa_2 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Damit die Gesammtheit der Dreiecke $X_i Y_i Z_i$ ähnlich werde, müsste die Bedingung erfüllt sein:

$$\left\| \begin{matrix} \varkappa_1 & \varkappa_2 & \varkappa_3 \ldots \varkappa_{n-1} & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \ldots \lambda_{n-1} & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \ldots \mu_{n-1} & 1 \end{matrix} \right\| = 0.$$

Dies ist aber mit der Bedingung identisch, die wir oben entwickelt haben, wenn man berücksichtigt, dass $\Sigma \varkappa_i = \Sigma \lambda_i = \Sigma \mu_i = 1$ ist.

Beispiel. Die eben angestellte Betrachtung führt uns gleichzeitig auf die allgemeinste Erzeugung ähnlich veränderlicher Figuren: Man nehme in den Ebenen, die mit den Stäben $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ einer Kette $ABDC\ldots$ verbunden sind, willkürlich feste, einander ähnliche Dreiecke $X_i Y_i Z_i$ an und suche zu den Punkten X_i bez. Y_i bez. Z_i die Resultantenpunkte X, Y, Z zur Kette. Dann formiren diese selber ein den Dreiecken $X_i Y_i Z_i$ ähnlich veränderliches Dreieck.

Da es nun nicht auf die Constanz der Stäbe AB, $BC\ldots$ ankommt, sondern blos auf die Aehnlichkeit der Dreiecke $X_i Y_i Z_i$, so kann man statt des Stabes AB einen Dreistabmechanismus AX_1Y_1B einführen, auf dessen Mittelglied das Dreieck $X_1 Y_1 Z_1$ sitzt u. s. f. Dadurch hat man die Beweglichkeit des Apparates noch erhöht (Fig. 23).

3. Lehrsatz. Nur in Ausnahmefällen ist die Entfernung von zwei Punkten: $P = \varkappa_1 A + \varkappa_2 B + \cdots$ und $Q = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \cdots$ bei der Bewegung des Systemes $A, B, \ldots$ constant.

Beweis: Diese Entfernung ist

$$\overline{PQ} = \overline{\lambda_1 - \varkappa_1}\, A + \overline{\lambda_2 - \varkappa_2}\, B + \cdots$$

Setzen wir der Einfachheit halber ein Viereck $ABCD$ voraus, das von den vier Stäben $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$ gebildet wird, so kann man $\overline{PQ}$ jedenfalls auch so schreiben:

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= (\mathfrak{k}_1 A + \lambda_1 B) - (\mathfrak{k}_2 C + \lambda_2 D) \\ &= X - Y,\end{aligned}$$

das heisst: ein Punkt X der Seite AB müsste von einem Punkte Y der Seite CD eine feste Entfernung haben, was unmöglich ist, es falle denn X und Y mit Ecken A, B, C, D zusammen.

Darans kann man entnehmen, dass zwei Punkte P und Q nur dann eine constante Entfernung von einander besitzen können, wenn ihre Verbindungslinie parallel zu einem der Kettenstäbe bleibt.

(Schluss folgt.)

XIII.

Die Elasticitätscoefficienten und die Wellenbewegungserscheinungen als Functionen der Moleculargewichte und specifischen Wärme.

Von

Dr. Otto Foerster
in Dahme (Mark).

Auf die Beziehungen, welche zwischen den Elasticitätscoefficienten der Metalle einerseits und deren Dichtigkeit und Moleculargewicht andererseits bestehen, ist bereits vor längerer Zeit hingewiesen worden. Poisson* stellte folgende Formel auf:

$$\frac{N}{\delta} = \frac{2\pi}{3} \cdot \sum_{r=\alpha}^{r=\infty} \cdot \frac{r^5}{\alpha^5} \cdot \frac{d\frac{1}{r}fr}{d\,.\,r}.$$

In dieser Formel ist N eine constante, auf die Oberfläche des Körpers lothrecht wirkende Kraft, δ die von ihr bewirkte proportionale lineare Dilatation oder Contraction des Körpers, r der Wirkungsradius eines Molecüls, α der mittlere Abstand zweier benachbarter Molecüle und fr die Function, durch welche man das Gesetz der molecularen Resultante ausgedrückt annimmt. Bei den gewöhnlichen Versuchen wirkt die Kraft nur an den beiden Enden eines Prisma, und wenn das Verhältniss der Kraft zu der erzeugten linearen Verlängerung oder Verkürzung q genannt wird, so ist dasselbe die Hälfte des Vorstehenden. Man hat also:

$$q = \frac{\pi}{3} \cdot \sum_{r=\alpha}^{r=\infty} \cdot \frac{r^5}{\alpha^5} \cdot \frac{d\frac{1}{r}fr}{d\,.\,r},$$

worin $\alpha = \sqrt[3]{\frac{A}{S}}$, nämlich S das specifische Gewicht, A das Moleculargewicht.

Der Werth $q\,.\,\alpha^7$ ist nahezu constant für alle Metalle.**

* Poisson, Mémoire sur les mouvements des corps élastiques. Mémoires de l'Académie des sciences. Paris. T. VIII.

** Wertheim, Annales de chim. et de phys. III.Sér. t. 12. Poggendorff's Annalen. Ergänzungsband II.

Wenn man den Elasticitätscoefficienten mit E bezeichnet, so kann man dem Ausdruck auch die Form $E\left(\sqrt[3]{\frac{A}{S}}\right)^7 = constant$ geben.

In diesem Ausdrucke ist Eins ohne Weiteres verständlich, dass nämlich $\sqrt[3]{\frac{A}{S}}$ ein Maass für die mittleren Abstände zweier benachbarter Molecüle ist, da $\frac{A}{S}$ ein Maass für das Molecularvolum oder besser für den mittleren jedem Molecüle zur Verfügung stehenden Raum ist. Unaufgeklärt aber bleibt die nähere Beziehung zwischen der Höhe der Potenz jenes Abstandes und den Verlängerungen oder Verkürzungen, welche Stäbe verschiedener Metalle von gleicher Länge und gleichem Querschnitt durch ein und dasselbe Gewicht erleiden.

Bekannte Formeln für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung in Stäben sollen zur Entwickelung des Ausdrucks für die constante Grösse $E.\left(\sqrt[3]{\frac{A}{S}}\right)^7$, oder, wenn die jetzt meist üblichen Zeichen eingesetzt werden, $E.\left(\sqrt[3]{\frac{M}{D}}\right)^7$ dienen.

Nach einer jener Formeln ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$C = \sqrt{\frac{g}{\delta}},$$

worin g die Beschleunigung beim freien Falle, δ die Verlängerung eines 1 Meter langen Stabes durch ein dem Gewichte desselben gleiches Gewicht bedeutet.

Eine andere Formel lautet: $C = \sqrt{\frac{E}{D}}$,

worin E den Elasticitätscoefficienten, D die Dichtigkeit des Materials bedeutet, aus welchem die Stäbe gearbeitet sind. Demnach ist

$$\sqrt{\frac{g}{\delta}} = \sqrt{\frac{E}{D}} \quad \text{und} \quad \delta = \frac{g\,.\,D}{E}.$$

Um die Elasticitätscoefficienten der Metalle zu ermitteln, bedarf es daher, abgesehen von der Beschleunigung beim freien Falle, nur noch der Kenntniss der specifischen Gewichte der Metalle, sowie der senkrechten linearen Verlängerung oder Verkürzung, welche die Raumeinheit durch ihr Eigengewicht erfährt.

Die einfache Ueberlegung führt zu dem Schlusse, dass diese Verlängerung oder Verkürzung umgekehrt proportional sein muss der Summe der Centripetalkräfte resp. Centrifugalkräfte der in der Raumeinheit enthaltenen Molecüle.

Den zwischen zwei einzelnen Molecülen wirkenden Centripetalkräften umgekehrt proportional nämlich muss die Vergrösserung oder Verminderung ihres Abstandes durch eine Kraft sein, welche dem Moleculargewichte proportional ist. Der Widerstand, den sämmtliche die Raumeinheit erfüllenden Molecüle ihrer gegenseitigen Entfernung oder Annäherung durch ein ihrer Gesammtmasse proportionales Gewicht entgegensetzen, muss also der Summe der Centripetalkräfte resp. Centrifugalkräfte der die Raumeinheit erfüllenden Molecüle proportional sein. Diesem Widerstande umgekehrt proportional ist die lineare Dilatation oder Contraction der Raumeinheit. Es ist demnach

$$\delta = \frac{R}{S \,.\, M \,.\, v^2},$$

worin S die Summe der die Raumeinheit erfüllenden Molecüle, v ihre Geschwindigkeit bei gleichen Temperaturen, R ihren mittleren gegenseitigen Abstand bedeutet.

Die relative Anzahl der die Raumeinheit erfüllenden Molecüle verschiedener Körper ist umgekehrt proportional dem Molecularvolum, wird also durch $\frac{D}{M}$ ausgedrückt.

Nach Einsetzung der wahren Werthe für R und S wird daher:

$$\delta = \frac{\sqrt[3]{\frac{M}{D}}}{\frac{D}{M} \cdot M \,.\, v^2} = \frac{\sqrt[3]{\frac{M}{D}}}{D \,.\, v^2}.$$

Setzt man nun für δ, mit Vernachlässigung von g als Bestandtheil einer später einzuführenden Constante, den obigen Werth $\frac{D}{E}$, so wird:

$$\frac{D}{E} = \frac{\sqrt[3]{\frac{M}{D}}}{D \,.\, v^2} \quad \text{und} \quad E = D^2 .\, v^2 \sqrt[3]{\frac{D}{M}}.$$

Da nun die Bewegungsgrössen der Molecüle einander gleich sind, wenn sich ihre Geschwindigkeiten umgekehrt wie ihre Massen, also nach dem Gesetze von Dulong und Petit direct wie die specifischen Wärmen bei gleichen Temperaturen verhalten, so kann man für die Geschwindigkeit v die specifische Wärme c setzen, und es wird:

$$E = D^2 .\, c^2 \sqrt[3]{\frac{D}{M}},$$

wofür ohne beachtenswerthen Fehler auch gesetzt werden kann:

$$E = (\sqrt[3]{D \,.\, c})^7,$$

oder auch:

$$E = \left(\sqrt[3]{\frac{D}{M}}\right)^7,$$

womit der obige Ausdruck für die Constante $q \,.\, \alpha^7$ oder

$$E \,.\, \left(\sqrt[3]{\frac{M}{D}}\right)^7$$

hergestellt ist.

Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung entwickelt sich aus

$$C = \sqrt{\frac{E}{D}}$$

und

$$C^2 = \frac{E}{D}$$

die Formel:

$$C^2 = D \,.\, v^2 \sqrt[3]{\frac{D}{M}} = \frac{S \,.\, M \,.\, v^2}{R},$$

das heisst: das Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung ist proportional der Summe der lebendigen Kräfte der in der Raumeinheit enthaltenen Molecüle, umgekehrt proportional dem mittleren Abstande zweier benachbarter Molecüle; oder auch proportional der Summe der Centripetalkräfte resp. Centrifugalkräfte der in der Raumeinheit enthaltenen Molecüle.

Auf weitere Folgerungen aus den so entwickelten Formeln soll hier nicht weiter eingegangen werden.

Die beigegebene Tabelle enthält in den ersten drei Columnen die von Wertheim gegebenen auf experimentellem Wege ermittelten Elasticitätscoefficienten, in der letzten Columne die dem Ausdruck $(K \,.\, D \,.\, c)^{\frac{7}{3}}$ entsprechenden Werthe, worin die Constante K den durch Division der experimentell gefundenen Elasticitätscoefficienten durch $(D \,.\, c)^{\frac{7}{3}}$ erhaltenen Mittelwerth 77,33 repräsentirt.

Die auf die eine oder andere Weise ermittelten Zahlenwerthe zeigen zuweilen namhafte von den Zuständen der Metalle abhängige Abweichungen, die namentlich durch die Verschiedenheit der specifischen Gewichte verursacht werden, aber auch in der Grösse der für die verschiedenen Zustände geltenden Werthe der specifischen Wärmen ihren Grund haben können. Leider sind die specifischen Wärmen für die von Wertheim verwendeten Metalle nicht bekannt. Da diese Unterschiede durch den hohen Exponenten erheblich vergrössert werden, so können die Abweichungen der berechneten Werthe unter sich und von den experimentell ermittelten, sowie der letzteren unter einander kaum auffallen. Im Allgemeinen zeigen die nach der oben entwickelten Formel berechneten höchsten oder niedrigsten Werthe Uebereinstimmung mit mindestens einem der experimentell gefundenen. Grössere Abweichungen kommen bei Zinn und Platin vor, die beim Zinn durch die Eigenart der inneren Structur, beim Platin durch die Verunreinigungen des zu den Versuchen verwendeten Materials vielleicht erklärbar sind. Bekanntlich wird das specifische Gewicht des Platins durch einen Gehalt an Iridium, namentlich in Verbindung mit Osmium sehr wesentlich erhöht, obgleich das specifische Gewicht des letzteren unter Umständen sehr viel niedriger ist.* Natürlich beeinflussen solche Verunreinigungen auch die

* Durch Wasserstoff aus Ueberosmiumsäure reducirtes Osmium hat das specifische Gewicht 10,0.

specifische Wärme und beeinträchtigen die Richtigkeit des für das reine Metall angenommenen Moleculargewichts. Das verarbeitete Platin jener Zeit, in welcher die erwähnten Versuche gemacht wurden, war bekanntlich niemals rein. Auf die Thatsache, dass der Elasticitätscoefficient für ein und dasselbe Metall nicht constant, sondern mit den Umständen, die seine Dichtigkeit beeinflussen, veränderlich ist, hat schon Wertheim hingewiesen.

Namen und Zustand der Metalle.	Elasticitätscoefficienten experimentell ermittelt nach			$(K.D.c)^{\frac{7}{3}}$ $K=77{,}33.$	Maximum und Minimum der specifischen Gewichte der Metalle.
	Längs- schwingungen	Quer- schwingungen	Verlängerung durch gleiche Gewichte.		
Blei, sehr langsam erkaltet, krystallinisch	—	—	—	2320	11,37 (Reich)
„ ebenso	—	—	—	2270	11,254 (Deville)
„ gegossen . . .	1993	1985	1775	—	—
„ ausgezogen . .	2273	1781	1803	—	—
Zinn, geschmolzen . .	—	—	—	3200	7,31
„ durch Electrolyse in tetragonalen Prismen . . .	—	—	—	2860	6,969 (Rammelsberg)
„ ausgezogen . .	4006	3840	—	—	—
„ angelassen . .	4418	3703	—	—	—
Cadmium, gehämmert	—	—	—	4890	8,6944 (Strohmayer)
„ geschmolzen	—	—	—	4700	8,546 (Schröder)
„ ausgezogen	6090	5424	—	—	—
„ angelassen	4241	5313	—	—	—
Silber, gefällt . . .	—	—	—	7550	10,62
„ ausgeglühter, öfter gezogener Draht . . .	—	—	—	7240	10,43 (Lengsdorf)
„ ausgezogen .	7576	7820	7358	—	—
„ angelassen .	7242	7533	7141	—	—

Namen und Zustand der Metalle.	Elasticitätscoefficienten experimentell ermittelt nach			$(K.D.c)^{\frac{7}{3}}$ $K = 77{,}33$.	Maximum und Minimum der specifischen Gewichte der Metalle.
	Längs-	Quer-	Verlängernug durch gleiche Gewichte.		
	schwingungen.				
Gold, durch $FeSO_4$ gefällt	—	—	—	10050	20,689 (G. Rose)
„ geschmolzen .	—	—	—	8510	19,265 (Matthiessen)
„ ausgezogen . .	8599	8645	8132	—	—
„ angelassen . .	6372	5989	5585	—	—
Zink, gewalzt . . .	—	—	—	10560	7,3 (Bolley)
„ käuflich, geschmolzen . .	—	—	—	9140	6,861 (Brisson)
„ destillirt, gegossen in Sand	7536	6778	—	—	—
„ destillirt, gegossen in Form	9338	9423	9021	—	—
Palladium, geschmiedet	—	—	—	10600	11,8 (Cock)
„ geschmolzen	—	—	—	9780	11,4 {Deville u. Debray
„ ausgezogen	—	12395	11759	—	—
„ angelassen	—	11281	9789	—	—
Platin, gewalzt . . .	—	—	—	12860	23,54 (Cloud)
„ feiner Draht geschmolzen . .	—	—	—	10980	21,5 {Wollaston, Deville und Debray
„ dünner Draht .	16176	15928	—	—	—
„ desgleichen angelassen . .	14292	14373	—	—	—
„ mittelstarker Draht . . .	17165	17153	17044	—	—
„ desgleichen angelassen . .	15611	15355	15518	—	—

Namen und Zustand der Metalle.	Elasticitätscoefficienten experimentell ermittelt nach Längs- schwingungen.	Quer- schwingungen.	Verlängerung durch gleiche Gewichte.	$(K.D.c)^{\frac{7}{3}}$ $K = 77{,}33$.	Maximum und Minimum der specifischen Gewichte der Metalle.
Kupfer, unter $NaCl$ geschmolzen, als Draht gehämmert, auch als Blech gewalzt und gehämmert . . .	—	—	—	16610	8,952 (Marchand u. Scharer)
„ unter Glas u. Borax geschmolzen . .	—	—	—	11760	7,72
„ ausgezogen . .	12536	12513	12449	—	—
„ angelassen . .	12540	11833	10519	—	—
Eisen, chemisch rein durch Glühen von Clavierdraht mit Fe_2O_3	—	—	—	19630	7,8439 (Broling)
„ desgleichen durch Auswalzen und Ziehen	—	—	—	18090	7,6
„ ausgezogen . .	19903	18547	20869	—	—
„ angelassen . . .	19925	19410	20794	—	—

XIV.

Zur Maassbestimmung in den einförmigen Grundgebilden.

Von

Dr. Karl Doehlemann,
Privatdocent in München.

Der zur Maassbestimmung in den einförmigen Grundgebilden der neueren Euklidischen Geometrie nothwendige Begriff des Doppelverhältnisses von vier Elementen eines solchen Gebildes scheint mir trotz vielfachster Behandlung* noch einer Darstellung fähig, welche das Dualitätsgesetz etwas schärfer hervortreten lässt, die zwei verschiedenen Bestimmungsarten des Vorzeichens ausdrücklich betont und eine kleine Lücke ausfüllt in dem geometrischen Beweise für den Satz, dass vier Punkte einer Geraden und vier durch sie gehende Strahlen eines Büschels das gleiche Doppelverhältniss liefern. Es wird dies erreicht dadurch, dass von vornherein der Begriff des „Trennungs-Elementes" zur Einführung gelangt.**

I. Der Strahlbüschel.

1. Unter einem Strahlbüschel versteht man den Inbegriff aller Strahlen durch einen Punkt in einer Ebene. Dabei ist unter „Strahl" die Gerade in ihrer ganzen Ausdehnung gemeint. Sie wird durch den Mittelpunkt des Büschels in zwei „Halbstrahlen" zerlegt. Zwei Strahlen a und b bestimmen dann zunächst vier Winkel, die aber paarweise einander gleich sind. Verstehen wir unter ab die Grösse der Drehung, welche a nach b überführt und zwar auch dem Sinne nach, so ist ab der Grösse und dem Sinne nach doppeldeutig (Fig. 1).

* Ich nenne die Lehrbücher von Fiedler: „Geometrie der Lage"; Cremona: „Elemente der projectivischen Geometrie"; sowie Wiener: „Darstellende Geometrie" Bd. 1.

** Professor Pasch gebraucht in seinen „Vorlesungen über neuere Geometrie", Leipzig 1882, die Ausdrücke „Grenzstrahl" „Grenzpunkt". S. 29, S. 15.

2. Nehmen wir jetzt drei Strahlen a, b, c. Dann kann man mittelst derselben einen Drehungs-Sinn definiren: es soll nämlich durch die Aufeinanderfolge abc oder durch den „Sinn abc" die Drehung bezeichnet werden, welche den Strahl a nach b führt, ohne dass dabei c passirt wird (Fig. 2).

3. Will man also, dass zwei Strahlen eines Büschels einen nach Grösse und Sinn eindeutigen Winkel festlegen, dass also ab eindeutig ist, so muss man noch einen weiteren festen Strahl u hinzunehmen und unter ab die im Sinne abu genommene Drehung verstehen. Es ist also ab dann die Drehung, welche nicht über u führt. Wir wollen diesen Hilfsstrahl u

Fig. 1.

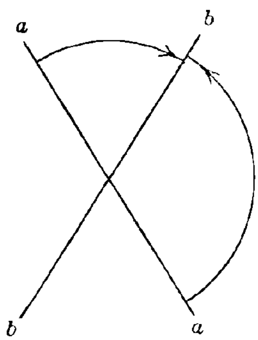
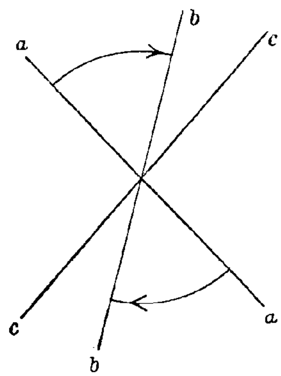


Fig. 2.



den Trennungsstrahl nennen (Fig. 3). Für weitere Strahlen c, $d \ldots m$, n gelten dann die Relationen:

$$ab + ba = 0,$$

$$ab = -ba,$$

$$ab + bc + ca = 0,$$

$$ab + bc + \cdots + mn + na = 0.$$

Wollte man sich weniger genau ausdrücken, so könnte man sagen, dass man durch den Trennungsstrahl den Büschel halbirt und sich bei der Betrachtung auf eine Hälfte, also auf Halbstrahlen beschränkt.

4. Hat man vier Strahlen a, b, c, d und theilt sie in die Gruppen ab und cd, so bestimmen abc und abd je einen Sinn nach 2). Wir definiren jetzt:

„Die vier Strahlen $abcd$ heissen getrennt, wenn die Sinne abc und abd entgegengesetzte sind." Man kann dann von a nicht nach b gelangen, ohne c oder d zu passiren. Kann man von a nach b gelangen, ohne c oder d zu berühren, so trennen sich die Strahlenpaare ab und cd nicht.

5. Nehmen wir jetzt zu den vier obigen Strahlen einen Trennungsstrahl u hinzu, so hat der Doppelquotient

$$\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db}$$

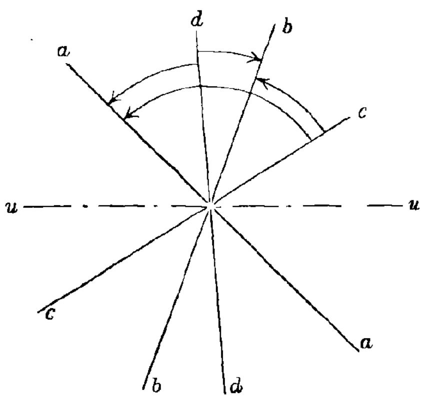
nach Grösse und Vorzeichen einen eindeutigen Werth. Es treten in ihm vier Drehungen auf: Wir rechnen alle entgegengesetzt der Uhrzeigerbewegung sich ausbildenden etwa positiv, die mit dem Uhrzeiger gehenden negativ.*

Für die Rechnung freilich müssen wir statt der Winkel selbst trigonometrische Functionen dieser Winkel einführen und zwar muss die einzuführende Function eine ungerade sein. Wir wählen aus Gründen, die allerdings erst später zu Tage treten, den Sinus. Dann ist auch

$$\frac{\sin ca}{\sin cb} : \frac{\sin da}{\sin db}$$

der Grösse und dem Vorzeichen nach bestimmt, wenn die vier Strahlen und ein fester Trennungsstrahl gegeben sind. Wir nennen diesen Doppelquotienten das Doppelverhältniss der vier Strahlen $abcd$ für den Trennungsstrahl u und schreiben:

Fig. 3.



$$\text{I)} \qquad (abcd)_u = \frac{\sin ca}{\sin cb} : \frac{\sin da}{\sin db}.$$

Hierbei muss also u gegeben sein und zur Vorzeichenbestimmung sind die vier Drehungen zu berücksichtigen. Ist u gegeben und hat man drei Strahlen abc, sowie den Werth $(abcd)$, so ist daraus d eindeutig festgelegt.

6. Es frägt sich jetzt aber: Kann man für vier Strahlen eines Büschels nicht auch einen Doppelquotienten bilden, der von der Wahl eines Trennungsstrahles unabhängig ist? Wird kein Trennungsstrahl angenommen, so sind alle Symbole, wie z. B. ca, nach Grösse und Sinn doppeldeutig (1). Die Doppeldeutigkeit des Winkels machen wir unschädlich, indem wir eine trigonometrische Function des Winkels einführen, welche sich nicht ändert, wenn statt des Winkels sein Nebenwinkel eingeführt wird. Unter den einfachen trigonometrischen Functionen hat diese Eigenschaft blos der Sinus. Es liegt also nahe, diesen einzuführen.

* Die Fixirung eines bestimmten, positiven Drehung-Sinnes ist nicht nothwendig, da das Vorzeichen der Quotienten sich auch ohne ihn bestimmen lässt.

Die Doppeldeutigkeit des Sinnes ferner umgehen wir, indem wir überhaupt alle Winkel positiv nehmen. Dies soll durch $\overline{ca}$ ausgedrückt werden. Dagegen geben wir dem ganzen Doppelquotienten

$$\frac{\sin \overline{ca}}{\sin \overline{cb}} : \frac{\sin \overline{da}}{\sin \overline{db}}$$

das Vorzeichen $+$ oder $-$, je nach dem abc und abd gleichen oder entgegengesetzten Sinn haben, das heisst, je nachdem sich die Paare ab und cd nicht trennen oder trennen.

Wir wollen dies durch die Formel andeuten:

$$\text{II)} \qquad (abcd) = \pm \left| \frac{\sin \overline{ca}}{\sin \overline{cb}} : \frac{\sin \overline{da}}{\sin \overline{db}} \right|.$$

Es ist nun der Werth II) identisch mit I), oder anders ausgedrückt: Der Werth des Doppelverhältnisses von vier Strahlen ist unabhängig von der Wahl des Trennungsstrahles. Um dies zu zeigen, bemerken wir zunächst, dass die Werthe $(abcd)_u$ und $(abcd)$ absolut genommen ohnedies übereinstimmen. Es ist also blos nöthig, die Uebereinstimmung in Bezug auf das Vorzeichen darzuthun. Nehmen wir aber z. B. an, die vier Strahlen ab und cd trennen sich, so wird das Gleiche von den vier Halbstrahlen gelten, die nach Annahme eines Trennungsstrahles zu beiden Seiten desselben auftreten. Dann muss von den Strahlen c und d der eine innerhalb, der andere ausserhalb des Winkels ab liegen. Von den vier Drehungen, die gemäss der Gleichung I) zum Zweck der Vorzeichenbestimmung zu untersuchen sind, sind zwei gleich und zwei entgegengesetzt gerichtet (z. B. ca und cb gleich, da und db entgegengesetzt (Fig. 3), so dass sich das negative Vorzeichen ergiebt. Dies stimmt aber mit der Gleichung II). Analog gestaltet sich der Beweis, wenn ab und cd sich nicht trennen.

Es mag noch bemerkt werden, dass jetzt nach Wegfall eines Trennungsstrahles die Gleichungen von 3) nicht mehr angesetzt werden können.

II. Die Punktreihe.

7. Um auf der Geraden die Continuität der Punkte herzustellen, wie sie der Strahlbüschel in Bezug auf die Strahlen schon zeigt, machen wir die für die Euklidische Geometrie charakteristische Annahme, dass die Gerade einen unendlich fernen (absoluten) Punkt U habe, dem wir uns sowohl in der einen als in der anderen Richtung der Geraden nähern können. Sind jetzt zwei Punkte A und B auf der Geraden gegeben und verstehen wir unter AB die Grösse der Fortbewegung von A nach B, so ist AB sowohl in Bezug auf Grösse als auch Richtung zunächst doppeldeutig, entsprechend dem Umstande, dass man von A auf zwei Wegen nach B kommen kann, entweder auf der endlichen Geraden oder über den unendlich fernen Punkt U. Diese letztere Strecke ist allerdings nicht mehr endlich.

8. Sind drei Punkte auf einer Geraden gegeben A, B, C, so bestimmen sie einen „Sinn ABC". Darunter soll die Bewegung verstanden werden, bei welcher man von A direct nach B gelangt, ohne vorher C zu passiren.

9. Um durch zwei Punkte auf der Geraden eine nach Grösse und Richtung eindeutig bestimmte Strecke festzulegen, müssen wir auch hier wieder ein Trennungselement annehmen, also einen Trennungspunkt. Gleichzeitig werden aber auch unendliche Strecken aus der Betrachtung fern zu halten sein. Beides erreichen wir nur dadurch, dass wir den unendlich fernen Punkt U als Trennungspunkt wählen. Unter dem Symbol AB ist also dann die Bewegung nach Grösse und Sinn zu verstehen, bei welcher man, ohne das Unendliche zu passiren, von A nach B gelangt. Für irgend welche Punkte A, B, C, ... M, N der Geraden gelten dann die Relationen:

$$AB + BA = 0,$$
$$AB = -BA,$$
$$AB + BC + CA = 0,$$
$$AB + BC + \cdots + MN + NA = 0.$$

10. Vier Punkte AB und CD trennen sich, wenn die Sinne ABC und ABD entgegengesetzte sind. Man kann dann von A nicht nach B gelangen, ohne C oder C zu passiren. Wenn umgekehrt die Sinne ABC und ABD übereinstimmen, so trennen sich die Paare AB und CD nicht.

11. Für irgend vier Punkte A, B, C, D, welche in die zwei Gruppen AB und CD getheilt sind, kann man den Doppelquotienten bilden:

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB},$$

der nach Grösse und Vorzeichen vollständig bestimmt ist, da der Trennungspunkt in der Vorstellung gegeben ist. Um das Vorzeichen zu bestimmen, ist das Vorzeichen der vier Theilstrecken zu untersuchen. Die von links nach rechts sich erstreckenden Abmessungen werden z. B. alle positiv, die von rechts nach links sich ausbildenden negativ gerechnet.* Dieser Doppelquotient heisst das Doppelverhältniss der vier Punkte AB, CD und wir schreiben:

$$\text{I)} \qquad (ABCD) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}.$$

Die Gleichung entspricht der analogen von 5. Es gelten hier die Relationen von 9.

12. Beim Strahlbüschel konnten wir uns nun von dem Trennungsstrahl ganz unabhängig machen durch Einführung der Sinusfunction, welche die Doppeldeutigkeit des Winkels ab beseitigte. Die Punktreihe aber wird

* Betrachtet man blos Streckenquotienten oder daraus zusammengesetzte Ausdrücke, so ist die Fixirung einer bestimmten, positiven Richtung nicht nothwendig, da das Vorzeichen eines Streckenquotienten sich schon aus dem gegenseitigen Verhalten der beiden Strecken bestimmen lässt.

erst durch die Vorstellung oder Adjunction des unendlich fernen Punktes zum Continuum und dieser Punkt muss als Trennungspunkt überdies auch deswegen beibehalten werden, um die endliche Strecke AB vor der unendlichen auszuzeichnen, also um unendliche Strecken auszuschliessen. Doch können wir auch hier vermöge einer ähnlichen Betrachtung das Vorzeichen des Doppelverhältnisses bestimmen, ohne die Vorzeichen der einzelnen Strecken berücksichtigen zu müssen. Wir nehmen nämlich alle Strecken absolut, was durch $\overline{CA}$ angedeutet werden mag, dem ganzen Doppelquotienten aber geben wir das Vorzeichen $+$ oder $-$, je nachdem die Punkte AB und CD sich nicht trennen oder trennen. Man erkennt leicht die Uebereinstimmung dieser zweiten Schreibweise mit der ersten.

Es ist also auch:

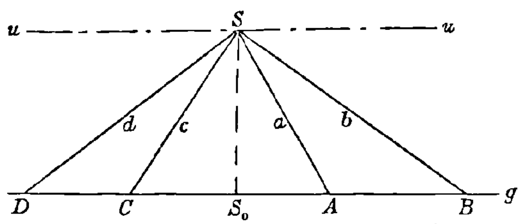
II) $$(ABCD) = \pm \left| \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \right|.$$

Auch diese Gleichung trat ebenso beim Büschel auf (6). Bei der Punktreihe ist aber Gleichung I) vorzuziehen, weil für die Rechnung mit Strecken stets die bequemen Formeln von (9) gelten, während beim Büschel die analogen Relationen (3) blos unter Annahme eines Trennungs-Strahles anzusetzen waren.

III. Strahlbüschel und Punktreihe.

13. Nachdem der Begriff des Doppelverhältnisses für Strahlbüschel und Punktreihe selbstständig entwickelt, wie es die Gleichberechtigung der beiden Grundgebilde verlangt, verbinden wir jetzt beide Betrachtungen. Eine Punktreihe g werde erzeugt (Fig. 4) als Schnitt mit einem Strahlbüschel S. Dadurch, dass dann immer im Büschel S der Halbstrahl ausgezeichnet wird, welcher den Schnittpunkt mit g trägt, erhalten wir im Büschel eine Anordnung nach Halbstrahlen, die genau damit übereinstimmt, dass wir den Parallelstrahl u zu g durch S als Trennungsstrahl des Büschels einführen. Da ferner der unendliche ferne Punkt U der Punktreihe g für diese gleichzeitig der Trennungspunkt, so liegen also bei der perspectiven Lage von Punktreihe und Strahlbüschel auch die Trennungselemente der beiden Gebilde ineinander.

Fig. 4.



Durchlaufen wir jetzt die Punktreihe in einem Sinne, etwa von links nach rechts, was dem positiven Sinn entsprechen möge, so wird sich durch die Bewegung des entsprechenden Strahles im Büschel in diesem ebenfalls ein Sinn ausbilden und dies sei der positive Sinn im Büschel. Ist also

z. B. AB positiv, so ist es auch $\sin ab$, wenn a und b die nach A und B laufenden Strahlen des Büschels, ist BA negativ, so ist es auch $\sin ba$.

Hat man nun vier Strahlen a, b, c, d im Büschel S, welche g in A, B, C, D treffen, ist ferner S_0 der Fusspunkt der von S auf g gefällten Senkrechten, so hat man die Gleichungen:

$$2\Delta SCA = \overline{SA}.\overline{SC}.\sin(c\,a) = \overline{SS_0}.CA,$$
$$2\Delta SCB = \overline{SB}.\overline{SC}.\sin(c\,b) = \overline{SS_0}.CB,$$
$$2\Delta SDA = \overline{SA}.\overline{SD}.\sin(d\,a) = \overline{SS_0}.DA,$$
$$2\Delta SDB = \overline{SB}.\overline{SD}.\sin(d\,b) = \overline{SS_0}.DB.$$

Hierbei sind $\overline{SA}$, $\overline{SB}\ldots\overline{SS_0}$ absolut zu nehmen, die Vorzeichenregulirung besorgt CA und $\sin(ca)$ u. s. f. Dividiren wir diese Gleichungen, so kommt unter Anwendung von Gleichung I) auf der linken Seite das Doppelverhältniss $(abcd)_u$ und es wird

$$(abcd)_u = (ABCD).$$

Nun ist aber weiter das Doppelverhältniss der vier Strahlen unabhängig vom Trennungsstrahl. Es ist also überhaupt:

$$(abcd) = (ABCD).$$

Schneidet eine beliebige andere Gerade g_1 die vier Strahlen in $A_1B_1C_1D_1$, so ist auch

$$(ABCD) = (A_1B_1C_1D_1) = (abcd).$$

Dabei sind dann in den perspectiven Punktreihen g und g_1 die Bewegungsrichtungen als gleiche Sinne zu definiren, welche für den perspectiven Büschel den gleichen Drehungssinn liefern. — Für diesen Beweis scheint mir die Annahme eines Trennungs-Strahles, auch wenn derselbe beim Büschel nur eine vorübergehende Bedeutung hat, doch fast unentbehrlich.

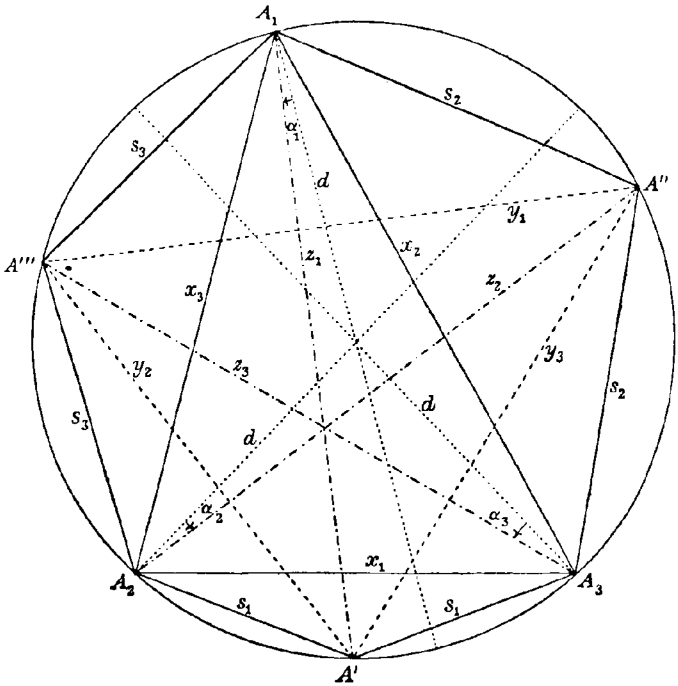
München, December 1895.

Kleinere Mittheilungen.

XX. Ueber algebraische Beziehungen an einem symmetrischen Kreissechseck.

Bei der algebraischen Behandlung gewisser planimetrischer Aufgaben stösst man zuweilen auf Gleichungssysteme höheren Grades, deren Auflösung auf directem Wege zu unübersehbaren Rechnungen führt und deshalb illusorisch wird. Es sei hier nur an die elementare Aufgabe erinnert:

„Aus den drei Winkelhalbirenden eines Dreiecks die Seiten des letzteren zu berechnen.“



Dieses Problem ist zur Zeit noch nicht gelöst, inzwischen aber hat Herr Dr. Heymann im 35. Jahrgange dieser Zeitschrift S. 254 eine ganz verwandte Aufgabe mittelst wiederholter Winkeldreitheilung erledigt und solchergestalt erreicht, dass die der Trisection entsprechenden cubischen Gleichungen in die Rechnung überhaupt nicht eingehen. Jenes Verfahren lässt sich, wie Herr Dr. Heymann dem Endesunterzeichneten gelegentlich mittheilte, auch unmittelbar bei der Berechnung eines symmetrischen Kreissechsecks in Anwendung bringen, und diese möge hier folgen.

Bezeichnen:

$s_i (i = 1, 2, 3)$ die auf einander folgenden, paarweise gleichen Seiten eines symmetrischen Kreissechsecks (siehe die Figur),

x_i bezüglich y_i die je zwei gleiche, bezüglich je zwei ungleiche Sechsecksseiten überspannenden Diagonalen,

z_i die Hauptdiagonalen des Sechsecks, so kann man, da die Figur durch drei von einander unabhängige Stücke bestimmt ist, folgende vier Gruppen von Aufgaben auswählen:

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{I)} & \text{Gegeben: } s_i. \text{ Gesucht: } & \begin{cases} 1)\ x_i \\ 2)\ y_i \\ 3)\ z_i \end{cases} \\
\text{II)} & \text{Gegeben: } x_i. \text{ Gesucht: } & \begin{cases} 1)\ s_i \\ 2)\ y_i \\ 3)\ z_i \end{cases} \\
\text{III)} & \text{Gegeben: } y_i. \text{ Gesucht: } & \begin{cases} 1)\ s_i \\ 2)\ x_i \\ 3)\ z_i \end{cases} \\
\text{IV)} & \text{Gegeben: } z_i. \text{ Gesucht: } & \begin{cases} 1)\ s_i \\ 2)\ x_i \\ 3)\ y_i \end{cases}
\end{array}\right. \quad (i = 1, 2, 3).$$

Die zu den Gruppen II) und III) gehörigen Ausdrücke lassen sich durch einfache planimetrische Betrachtungen ermitteln. Man berücksichtige insbesondere, dass die Hauptdiagonalen z_i in dem von den x_i-Diagonalen gebildeten Dreiecke die Winkelhalbirenden, dagegen in dem von den y_i-Diagonalen gebildeten Dreiecke die Höhen sind, und dass der Ptolemä'sche Satz wiederholt auftritt.

Dann wird man finden:

$$\text{II, 1)} \quad \begin{cases} s_1 = x_1 \sqrt{\dfrac{x_2 x_3}{(x_1 + x_2 + x_3)(-x_1 + x_2 + x_3)}}, \\ s_2 = x_2 \sqrt{\dfrac{x_3 x_1}{(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 - x_2 + x_3)}}, \\ s_3 = x_3 \sqrt{\dfrac{x_1 x_2}{(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 - x_3)}}. \end{cases}$$

$$\text{II, 2)} \quad \begin{cases} y_1 = x_1 \sqrt{\dfrac{x_2 x_3}{(x_1 - x_2 + x_3)(x_1 + x_2 - x_3)}}, \\ y_2 = x_2 \sqrt{\dfrac{x_3 x_1}{(x_1 + x_2 - x_3)(-x_1 + x_2 + x_3)}}, \\ y_3 = x_3 \sqrt{\dfrac{x_1 x_2}{(-x_1 + x_2 + x_3)(x_1 - x_2 + x_3)}}. \end{cases}$$

$$\text{II, 3)} \quad \begin{cases} z_1 = (x_2 + x_3) \sqrt{\dfrac{x_2 x_3}{(x_1 + x_2 + x_3)(-x_1 + x_2 + x_3)}}, \\ z_2 = (x_3 + x_1) \sqrt{\dfrac{x_3 x_1}{(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 - x_2 + x_3)}}, \\ z_3 = (x_1 + x_2) \sqrt{\dfrac{x_1 x_2}{(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 - x_3)}}. \end{cases}$$

$$\text{III, 1)} \qquad \begin{cases} s_1 = \sqrt{d^2 - y_1^2}, \\ s_2 = \sqrt{d^2 - y_2^2}, \\ s_3 = \sqrt{d^2 - y_3^2}. \end{cases}$$

$$\text{III, 2)} \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{2y_1}{d}\sqrt{d^2 - y_1^2} = \frac{y_1}{y_2 y_3}(-y_1^2 + y_2^2 + y_3^2), \\ x_2 = \frac{2y_2}{d}\sqrt{d^2 - y_2^2} = \frac{y_2}{y_3 y_1}(y_1^2 - y_2^2 + y_3^2), \\ x_3 = \frac{2y_3}{d}\sqrt{d^2 - y_3^2} = \frac{y_3}{y_1 y_2}(y_1^2 + y_2^2 - y_3^2). \end{cases}$$

$$\text{III, 3)} \qquad \begin{cases} z_1 = \frac{1}{d}\left[y_2 y_3 + \sqrt{(d^2 - y_2^2)(d^2 - y_3^2)}\right], \\ z_2 = \frac{1}{d}\left[y_3 y_1 + \sqrt{(d^2 - y_3^2)(d^2 - y_1^2)}\right], \\ z_3 = \frac{1}{d}\left[y_1 y_2 + \sqrt{(d^2 - y_1^2)(d^2 - y_2^2)}\right]. \end{cases}$$

In jenen Gleichungen bedeutet d den Durchmesser des Umkreises, also:

$$d = \frac{y_1 y_2 y_3}{2\Delta}, \quad \Delta = \frac{1}{4}\sqrt{-y_1^4 - y_2^4 - y_3^4 + 2y_1^2 y_2^2 + 2y_2^2 y_3^2 + 2y_3^2 y_1^2}.$$

Zu den Gleichungen der Gruppe I) kann man nun gelangen, ausgehend von den goniometrischen Functionen der halben Winkel im x_i-Dreiecke.

Man hat:

$$1) \qquad \sin\frac{A_1}{2} = \frac{s_1}{d}, \quad \sin\frac{A_2}{2} = \frac{s_2}{d}, \quad \sin\frac{A_3}{2} = \frac{s_3}{d}$$

und

$$\cos\frac{A_1 + A_2}{2} = \sin\frac{A_3}{2}.$$

Mithin wird:

$$1 - \sin^2\frac{A_1}{2} - \sin^2\frac{A_2}{2} - \sin^2\frac{A_3}{2} - 2\sin\frac{A_1}{2}\sin\frac{A_2}{2}\sin\frac{A_3}{2} = 0,$$

oder mit Hilfe von 1):

$$2) \qquad d^3 - (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)d - 2s_1 s_2 s_3 = 0.$$

Man erhält dann nach dem Sinussatz, bezüglich nach dem Ptolemä'schen Lehrsatz:

$$\text{I, 1)} \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{2s_1}{d}\sqrt{d^2 - s_1^2}, \\ x_2 = \frac{2s_2}{d}\sqrt{d^2 - s_2^2}, \\ x_3 = \frac{2s_3}{d}\sqrt{d^2 - s_3^2}. \end{cases}$$

$$\text{I, 2)} \qquad \begin{cases} y_1 = \frac{s_2}{d}\sqrt{d^2 - s_3^2} + \frac{s_3}{d}\sqrt{d^2 - s_2^2}, \\ y_2 = \frac{s_3}{d}\sqrt{d^2 - s_1^2} + \frac{s_1}{d}\sqrt{d^2 - s_3^2}, \\ y_3 = \frac{s_1}{d}\sqrt{d^2 - s_2^2} + \frac{s_2}{d}\sqrt{d^2 - s_1^2}. \end{cases}$$

$$\text{I, 3)} \qquad \begin{cases} z_1 = \dfrac{s_2\sqrt{d^2 - s_2^2} + s_3\sqrt{d^2 - s_3^2}}{\sqrt{d^2 - s_1^2}}, \\[2ex] z_2 = \dfrac{s_3\sqrt{d^2 - s_3^2} + s_1\sqrt{d^2 - s_1^2}}{\sqrt{d^2 - s_2^2}}, \\[2ex] z_3 = \dfrac{s_1\sqrt{d^2 - s_1^2} + s_2\sqrt{d^2 - s_2^2}}{\sqrt{d^2 - s_3^2}}. \end{cases}$$

Die eigentlich interessanten und schwierigen Aufgaben enthält nun Gruppe IV), denn sie verlangt, dass man das Gleichungssystem II, 3) nach den x_i, III, 3) nach den y_i und I, 3) nach den s_i auflöse. Dies gelingt, wenn man nach Heymann folgende Hilfswinkel einführt:

Man denke sich von den Ecken A_i des x_i-Dreiecks aus dreimal den Durchmesser d gezogen und bezeichne die im Sinne der Uhrzeigerbewegung genommenen Winkel zwischen d und z_i mit $\alpha_i (i = 1, 2, 3)$, dann ist:

$$3) \qquad z_1 = d\cos\alpha_1, \quad z_2 = d\cos\alpha_2, \quad z_3 = d\cos\alpha_3$$

und

$$4) \qquad 2\alpha_1 = A_2 - A_3, \quad 2\alpha_2 = A_3 - A_1, \quad 2\alpha_3 = A_1 - A_2.$$

Da mithin

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0,$$

so wird:

$$1 - \cos^2\alpha_1 - \cos^2\alpha_2 - \cos^2\alpha_3 + 2\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3 = 0,$$

oder mit Hilfe von 3):

$$5) \qquad d^3 - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)d + 2z_1z_2z_3 = 0.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich der Durchmesser d, aus 3) findet man die Hilfswirkel α_i und mit Hilfe von 4) erhält man die Winkel des x_i-Dreiecks:

$$A_1 = \frac{2}{3}(R - \alpha_2 + \alpha_3), \quad A_2 = \frac{2}{3}(R - \alpha_3 + \alpha_1), \quad A_3 = \frac{2}{3}(R - \alpha_1 + \alpha_2).$$

Hiermit ergeben sich als Lösungen für die Aufgaben der vierten Gruppe unmittelbar:

$$\text{IV, 1)} \qquad \begin{cases} s_1 = d\sin\frac{1}{2}A_1, \\[1ex] s_2 = d\sin\frac{1}{2}A_2, \\[1ex] s_3 = d\sin\frac{1}{2}A_3. \end{cases}$$

$$\text{IV, 2)} \qquad \begin{cases} x_1 = d\sin A_1, \\ x_2 = d\sin A_2. \\ x_3 = d\sin A_3. \end{cases}$$

$$\text{IV, 3)} \quad \begin{cases} y_1 = d \cos \frac{1}{2} A_1, \\ y_2 = d \cos \frac{1}{2} A_2, \\ y_3 = d \cos \frac{1}{2} A_3. \end{cases}$$

M. Stern.

XXI. Zur Uebertragung der Rechnungsarten auf die Geometrie, insbesondere über die Möglichkeit der Multiplication von Strecken mit Strecken.

In den Lehrbüchern der Geometrie stossen die Lehrsätze über die Flächen- und Raumberechnungen auf eine gewisse Schwierigkeit. Enthält in der That ein Rechteck mit zwei anstossenden Seiten von $8m$ und $7m$ Länge einen Fächeninhalt von $56qm$, ein rechtwinkliges Parallelepipedon von $8m$ Länge, $7m$ Breite und $6m$ Höhe einen Rauminhalt von $336cbm$, so lassen sich wohl die bei der Flächen- und Raumberechnung entstandenen Maasszahlen als Producte der Maasszahlen der Seiten bez. Kanten erklären, die neuen Benennungen *qm* und *cbm* jedoch nicht in gleicher Weise als Producte der ursprünglichen Benennungen. Denn, „man kann nie zwei benannte Zahlen multipliciren, es muss vielmehr mindestens der Multiplicator unbenannt sein“ (Schlömilch, Handbuch der Mathematik 1879 S. 244), oder, „man kann von Producten zweier Linien, als benannten Zahlen, im eigentlichen Sinne nicht sprechen“ (Spieker, Lehrbuch der ebenen Geometrie 1894 S. 191) oder „es würde widersinnig sein, Linien mit einander zu multipliciren“ (Koppe, Planimetrie 1880 S. 104) u. s. w. Nur als „üblich gewordene Abkürzung“ wird es daher bezeichnet, zu sagen: „Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist gleich dem Product zweier anstossender Seiten“, indem hierbei die von ihrer Benennung befreiten Maasszahlen multiplicirt gedacht werden und dem Product die neue Maasseinheit als Benennung zugelegt wird (Schlömilch a. a. O.). Auf diese Uebertragung der Rechnungsarten auf die Geometrie kommt auch Schotten in seinem verdienstvollen Buche: „Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts“, dessen I. Band Leipzig 1890 erschienen ist, in einigen kritischen Zeilen (S. 145 u. 146) zu V. Schlegels Ausführungen „Ueber den sogenannten vierdimensionalen Raum“ zu sprechen. Da das Werk Schotten's eine kritische Zusammenstellung der Literatur des planimetrischen Unterrichts sein will und als Nachschlagebuch für alle Fragen auf dem Gebiete des planimetrischen Unterrichts dienen soll, so dürfte es, wiewohl die Flächen- und Raumberechnung erst einem späteren Bande vorbehalten sind, nicht unpassend erscheinen, seine bis jetzt in unserer Frage gegebenen Ansichten zu hören und einer Prüfung zu unterziehen.

Wir lesen (S. 146): „Die Vergleichung der arithmetischen und geometrischen Dimensionen hat sich naturgemäss an die drei Stufen der arithmetischen Rechenoperationen zu halten. Der ersten Stufe des Rechnens, der Addition, entspricht die einfache Ausdehnung nach der Länge, der zweiten Stufe, der Multiplication, die zweifache Ausdehnung nach Länge und Breite, der dritten Stufe, der Potenzirung, die dreifache Ausdehnung nach Länge, Breite und Höhe. Das Resultat der Addition, die Summe, findet ihre geometrische Deutung in der Linie; das Product in der Fläche; die Potenz in dem Körper. Während nun aus der Gleichheit der Summanden das Product, aus der Gleichheit der Factoren die Potenz entsteht und sich auf diese Weise die drei Stufen der arithmetischen Operationen entwickeln, resultirt aus der Vermehrung der Exponenten und der Gleichsetzung von Basis und Exponenten keine weitere Stufe des Rechnens. In Analogie hiermit kann man die Erzeugung geometrischer Gebilde durch Bewegung setzen. Entsprechend dem Stillstand der Rechnung bei der Potenzirung ergiebt sich nichts Neues durch die Bewegung des Körpers". — Im Gegensatz zu dem ersten Theil dieser Auseinandersetzung lesen wir (S. 145): „Die einfache Zahl a stellt die Länge einer gemessenen Linie, die zweite Potenz dieser Zahl a^2 den Flächeninhalt des über der Strecke a als Seite errichteten Quadrates und die dritte Potenz a^3 den Rauminhalt des über diesem Quadrate als Grundfläche errichteten Würfels".

Hier wird die Linie schon durch eine einfache Zahl dargestellt, oben entspricht sie der Addition von Zahlen, die Fläche und der Körper werden hier durch die zweite und dritte Potenz einer Zahl, also beide geometrischen Gebilde durch Potenzirung dargestellt, oben entspricht die Fläche der Multiplication und erst der Körper der Potenzirung. Wir finden so kurz hintereinander einen vollen Widerspruch in der Uebertragung der Rechnungsarten auf die geometrischen Gebilde und doch sind diese einzelnen Vergleichspunkte in allen Lehrbüchern der Geometrie in derselben Weise ausgedrückt. Mir erscheint diese geometrische Deutung rein arithmetischer Ausdrücke überhaupt unhaltbar; dies fühlt, wie Andere, auch Schotten, indem er (S. 145) sagt: „Die Bedeutung eines Productes ist in der Geometrie nach einer ursprünglich willkürlichen Festsetzung die eines Rechtecks..."

Können wir in der That die drei Rechnungsarten mit den drei Dimensionen in der Geometrie vergleichen? Sind die Resultate der Addition, Multiplication und Potenzirung etwas so von einander Verschiedenes, wie die räumlichen Gebilde: Linie, Fläche und Körper?

Bei der Betrachtung der Rechenoperationen handelt es sich selbstverständlich nur um unbenannte, bestimmte oder allgemeine einfache Zahlen, da auf die sogenannten benannten Zahlen sich die Addition nur, wenn sie gleichbenannt sind, die Multiplication mit unbenanntem Multiplicator und das Potenziren gar nicht anwenden lässt. Die Reihe unserer natürlichen Zahlen stellen wir uns geometrisch als Punkte einer Geraden, von einem gewählten Ausgangspunkt aus in gleichen Abständen geordnet, vor; die Zahlenreihe hat also nur eine Ausdehnung, die Länge und einer bestimmten Zahl entspricht dann eine bestimmte Strecke. Die Addition zweier oder mehrerer Zahlen, welche Rechnungsart ursprünglich durch Weiterzählen in der Zahlenreihe vollzogen wird, ergiebt daher auch eine Zahl derselben Reihe ($8+7=15$), das Resultat der Addition von Zahlen ist also geometrisch auch als eine bestimmte Strecke zu deuten; ebenso sind aber auch die Resultate der Multiplication und Potenzirung von Zahlen wieder nur einfache Zahlen ($8.7=56$, $8^7=2097152$), Zahlen derselben Zahlenreihe; sie können daher geometrisch auch nur als Strecken, keinesfalls als Gebilde einer 2fachen oder 3fachen Ausdehnung gedeutet werden. Die drei Rechnungsarten Addition, Multiplication und Potenzirung ergeben immer nur Zahlen der natürlichen Zahlenreihe, nichts Neues, nichts entsprechend den Raumgebilden begrifflich von einander Verschiedenes.

Was sind denn nun aber die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe selbst? Sie sind Begriffe unseres Denkens, Abstractionen von gezählten Gegenständen der uns umgebenden Welt; die verschiedenen Zahlen erhalten wir durch wiederholtes Setzen einer gedachten Einheit, der Zahleinheit. Das Addiren ist ein Aneinandersetzen zweier oder mehrerer Zahlen; sind diese Addenden alle gleich, so wählen wir an Stelle der Addition eine kürzere Schreibweise und erhalten die Rechnungsart der Multiplication, welche zur Ausbildung des Einmaleins und den besonderen Regeln des Multiplicirens geführt hat; ebenso ist die Potenzirung nichts weiter als eine kürzere Schreibweise einer Multiplication von lauter gleichen Factoren und es haben sich aus derselben die besonderen Regeln des Potenzirens entwickelt. Es giebt demnach keine arithmetischen Dimensionen oder Mannigfaltigkeiten, wir können die Resultate der verschiedenen Rechnungsarten überhaupt nicht mit den verschiedenen geometrischen Gebilden vergleichen.

Durch wiederholtes Setzen einer nicht mehr blos gedachten Einheit, der Zahleinheit, sondern eines wirklichen Gegenstandes, erhält die Zahl ihre Benennung, wird eine sogenannte benannte Zahl. Diese benannten Zahlen bedeuten daher oder sind graphische Darstellungen von gezählten Gegenständen; über die nur beschränkte Rechnung mit ihnen ist oben schon gesprochen worden.

Wenden wir uns nun zu den geometrischen Gebilden, den Linien, Flächen und Körpern, mit denen man jene Rechnungsresultate in Verbindung gebracht hat. Was sind sie eigentlich? Es kommen wohl physikalische Körper in der uns umgebenden Welt wirklich vor, eben die zuletzt erwähnten benannten Einheiten oder gezählten Gegenstände; die mathematischen Körper, die Flächen und Linien sind jedoch ebenfalls nur Begriffe unseres Denkens, unserer Raumvorstellung, Abstractionen von den wirklichen Körpern. Wir verstehen unter einem mathematischen Körper den Raum, den ein physikalischer Körper von gleicher Grösse und Gestalt einnimmt, der letztere ist für uns ein Bild des ersteren; die Flächen sind die Begrenzungen eines Körpers vom übrigen Raume, die Linien die Begrenzungen einer Figur von der übrigen Fläche, während eine Strecke von der übrigen Linie durch Punkte begrenzt wird. Durch fortgesetztes Abstrahiren von den wirklichen Gegenständen werden die Punkte, Linien, Flächen und mathematischen Körper für unser Denken nach und nach zu selbstständigen Raumgebilden, entsprechend den einfachen Zahlen;

keinesfalls aber dürfen die in *m*, *qm* oder *cbm* gemessenen Strecken, Flächen oder Körper in gleiche Reihe mit den sogenannten benannten Zahlen, welche gezählte, in Sprachzeichen geschriebene Gegenstände waren, gebracht werden; sie sind nur Begriffe unseres Denkens. Diese in arithmetischer Behandlung der geometrischen Gebilde bis jetzt immer geübte Gleichstellung der letzteren mit den gezählten Gegenständen ist meines Erachtens der Grund zu der anfangs erwähnten Schwierigkeit und es dürfte sich wohl empfehlen, den zu allgemein gebrauchten Ausdruck „benannte Zahlen" nur auf die, durch irgend welche Einheiten gemessenen Begriffe unseres Denkens, nicht aber auf die wirklichen Gegenstände zu beziehen, vielmehr das Rechnen mit letzteren als „Rechnen mit gezählten Gegenständen" zu bezeichnen. Zu den ersteren Rechnungsgrössen müssen neben den geometrischen die zeitlichen und die graduell verschiedenen Grössen, wie wir sie in den Naturwissenschaften antreffen, gerechnet werden.

Hieraus ergiebt sich, dass die erwähnten Einschränkungen der Rechnungsarten bei den sogenannten benannten Zahlen nicht ohne Weiteres auf die Raumgebilde übertragen werden dürfen.

Wie sind wir nun im Stande, jene Vergleichungen zwischen Producten und Flächen u. s. w. zu erklären? Auf einen wichtigen Unterschied bei der Vergleichung der Resultate der Rechenoperationen mit den Raumgrössen muss hier sogleich hingewiesen werden; die einfachen Zahlen sind discontinuirliche, die Raumgrössen continuirliche Grössen; der Unterschied beider charakterisirt sich am Besten durch die Begriffe: „wiederholt setzen" — „sich fortbewegen". Wir können uns nämlich die räumlichen Gebilde als durch Bewegung entstanden denken; so beschreibt ein Punkt, wenn er sich fortbewegt, eine Linie, eine fortbewegte Linie beschreibt entweder wieder eine Linie oder eine Fläche und diese in ihrer Fortbewegung wieder eine Fläche oder einen Körper, während letzterer fortbewegt nur wieder einen Körper beschreibt, nichts Neues erzeugt.

Wie wir die einfachen Zahlen durch wiederholtes Setzen der Zahleinheit in einer bestimmten Richtung uns entstanden dachten, so entstehen durch Fortbewegen eines Punktes in einer bestimmten Richtung bis zu bestimmten Abständen die nach beiden Seiten begrenzten, geraden Linien, die Strecken; durch Fortbewegen einer Strecke in einer bestimmten (nicht der ihr eigenen Richtung) bis zu bestimmten Abständen, die nach allen Seiten begrenzten, ebenen Flächen, die geradlinigen Figuren; durch Fortbewegen einer Figur in einer bestimmten (nicht in ihr selbst gelegenen) Richtung bis zu bestimmten Abständen die nach allen Seiten begrenzten Theile des Raumes, die Körper. Lassen wir dagegen die Strecken sich in ihrer eigenen Richtung, die Figuren in ihrer eigenen Ebene, die Körper im Raume fortbewegen, so wenden wir die Rechnungsart der Addition auf alle drei Arten von Raumgrössen an; d. h., verlängern wir eine Strecke um eine oder mehrere andere Strecken, so bilden wir die Summe dieser Strecken und diese ist wieder eine Strecke; setzen wir an eine Figur in ihrer eigenen Ebene eine oder mehrere andere Figuren an, so bilden wir die Summe dieser Figuren und diese ist wieder eine Figur; fügen wir an einen Körper im Raume einen oder mehrere andere Körper an, so entsteht wieder ein Körper. — Verlängern wir eine Strecke zwei- oder mehrmals um sich selbst, setzen wir eine Figur in ihrer Ebene oder einen Körper im Raume zwei- oder mehrmals aneinander an, so multipliciren wir Strecken, Flächen oder Körper mit einfachen Zahlen und es entstehen wiederum nur Strecken, Flächen oder Körper.

Dem Fortbewegen einer Strecke in anderer Richtung als der ihr eigenen um eine andere Strecke, dem Fortbewegen einer Figur in einer anderen als in ihr gelegenen Richtung um eine Strecke entspricht das Multipliciren einer Strecke mit einer Strecke, das Multipliciren einer Figur mit einer Strecke.

Nehmen wir als Längeneinheit das m, als Flächeneinheit das qm und als Raumeinheit das cbm, so können wir uns die Fläche eines qm entstanden denken durch Fortbewegung einer Strecke von $1\,m$ Länge senkrecht zu ihrer Richtung $1\,m$ weit; den Raum eines cbm durch Fortbewegung der Fläche eines qm senkrecht zu ihrer Ebene $1\,m$ weit. Lassen wir in derselben Weise eine Strecke von $8\,m$ Länge sich senkrecht zu ihrer Richtung $7\,m$ weit bewegen, so beschreibt sie ein Rechteck von $56\,qm = 8\,m \,.\, 7\,m$, wie andererseits eine Quadratfläche von $56\,qm$ senkrecht zu ihrer Ebene $6\,m$ weit fortbewegt gedacht, ein rechtwinkliges Parallelepipedon von $336\,cbm = 56\,qm \,.\, 6\,m$ beschreibt. Wir können so in Folge der dreidimensionalen Ausdehnung des Raumes den rechnerischen Begriff der Multiplication in voller Schärfe auch auf die Multiplication von Strecken mit Strecken und von Flächen mit Strecken ausdehnen; natürlich dürfen wir aber nicht z. B. Flächen mit Flächen oder Körper mit Strecken u. s. w. multipliciren.

Bewegt sich eine Strecke senkrecht zu ihrer Richtung um ihre eigene Länge fort, so beschreibt sie das Quadrat der Strecke, welches der zweiten Potenz dieser Strecke entspricht; bewegt sich dieses Quadrat senkrecht zu seiner Ebene um seine Länge fort, so beschreibt sie den Würfel über dieser Strecke, welcher der dritten Potenz der Strecke entspricht. So sind in ungezwungener Weise, ohne jede Willkür, aus unseren geometrischen Anschauungen heraus die Rechnungsarten auf die geometrischen Gebilde übertragen.

Während jede einfache Zahl durch eine Strecke dargestellt werden kann, muss jede Strecke durch eine mit der Längeneinheit versehene Zahl, eine benannte Zahl oder kurz einen Buchstaben $(8\,m = a)$ bezeichnet werden; das Quadrat einer einfachen Zahl $(8^2 = 64)$ bedeutet nicht den Flächeninhalt des über der Strecke von $8\,m$ Länge errichteten Quadrates, sondern das Quadrat der mit der Längeneinheit versehenen Zahl $[(8\,m)^2 = 64\,qm]$ hat diese Bedeutung; ebenso bedeutet nicht das Product zweier einfacher Zahlen $(8 \,.\, 7 = 56)$ eine Fläche, sondern nur das Product der mit der Längeneinheit versehenen Zahlen $(8\,m \,.\, 7\,m = 56\,qm)$ bedeutet den Flächeninhalt eines Rechtecks u. s. w.

Mit vollem Recht können wir daher sagen: der Flächeninhalt eines Rechtecks ist gleich dem Product zweier anstossender Seiten etc., und ebenso können wir das Product $a \,.\, b$ als ein Rechteck deuten, wenn wir unter den allgemeinen Grössen a und b Zahlen verstehen, die mit einer Längeneinheit versehen sind.

Bautzen. Dr. Hugo Vollprecht.

XV.

Beitrag zur kinematischen Theorie der Gelenkmechanismen.

Von

JOHANN KLEIBER,

Hauptlehrer erster Ordnung der städtischen Handelsschule in München.

Hierzu Tafel VII Fig. 1—12.

(Schluss.)

II. Theil.

Gebilde höherer Punktfunctionen.

§ 7. Der Process δ. Anwendungen.

Ableitung. Die bisher vorgetragene Theorie der Pantagraphe war im Wesentlichen identisch mit einer geometrischen Interpretation einer Theorie der linearen ganzen Functionen der Grundpunkte. Wir wollen nunmehr einen Schritt weiter gehen und auch höhere Functionen der letzteren in den Bereich unserer Betrachtungen ziehen. Zu dem Ende verbleiben wir zunächst in der Ebene. In dieser herrscht bekanntlich die Eigenthümlichkeit, dass congruente Figuren nicht immer durch Schiebung zur Deckung gebracht werden können, sobald eine Drehung der Figur aus der Ebene heraus durch den Raum nicht gestattet wird; man sagt, die Ebene ist zweiseitig. Um die inverse Lage congruenter Figuren in einfacher Weise in unsere Rechnungen einzuführen, werden wir einen symbolisch zu nehmenden Process $\delta \ldots$ benützen.

Wir bezeichnen, wenn

$$P = x + iy = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

mit

$$\delta P = x - iy = re^{-i\varphi} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$

wobei wir P als Punkt oder als die vom Ursprung O der Gauss'schen Coordinatenebene nach diesem Punkt P gehende Strecke auffassen. Die geometrische Interpretation zeigt, dass dann δP den Spiegelpunkt zu P für die x-Achse bedeutet. Algebraisch fordert der Process δ nur den Zeichenwechsel des Factors i.

Mit Einführung dieses Processes $\delta\ldots$ sind wir im Stande, sofort Vector r und Amplitude φ zu bestimmen. Es ergiebt sich:

$$\begin{cases} r^2 = P.\delta P, \\ e^{i2\varphi} = \dfrac{P}{\delta P}. \end{cases}$$

1. Charakterisirung einer Ecke. Geht man von A nach B und von B nach C, so entsteht bei B eine Ecke. Diese Ecke wird durch eine einzige Zahl E charakterisirt:

$$E = \frac{B-C}{A-B}.$$

Man findet für die Grösse des Winkels φ an dieser Ecke:

$$e^{i.2\varphi} = \frac{E}{\delta E},$$

ferner für das Verhältniss der Seiten $a = \overline{AB}$ und $b = \overline{BC}$:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = E.\delta E.$$

2. Aehnlichkeit invers gelegener Polygone. Hat man in

$$A_1 A_2 \ldots A_n$$

ein erstes Polygon und spiegelt es an der X-Achse, so hat das Spiegelbild die Reihe der Ecken $\delta A_1,\ \delta A_2, \ldots \delta A_n$.

Beide Polygone sind invers congruent. Jedes andere Polygon

$$X_1 X_2 X_3 \ldots X_n,$$

das dem ersten ähnlich ist, erfüllt die fortlaufende Gleichung:

$$\overline{A_1 A_2} : \overline{A_2 A_3} : \ldots : \overline{A_n A_1} = \overline{X_1 X_2} : \overline{X_2 X_3} : \ldots : \overline{X_n X_1},$$

denn, da jedes Einzelverhältniss aufeinander folgender Strecken eine Ecke E vollkommen charakterisirt, so folgt aus der Gleichheit dieser Verhältnisse die Aehnlichkeit der Ecken beider Polygone und somit die Aehnlichkeit der letzteren selbst. Sei $Y_1 Y_2 \ldots Y_n$ ein Polygon, das dem inversen zu $A_1 A_2 \ldots A_n$ ähnlich sein soll, so muss als einzige Gleichung bestehen:

$$\overline{Y_1 Y_2} : \overline{Y_2 Y_3} : \ldots : \overline{Y_n Y_1} = \delta \overline{A_1 A_2} : \delta \overline{A_2 A_3} : \ldots : \delta \overline{A_n A_1}.$$

3. Gleichung eines Kreises. Soll die Entfernung a zweier Punkte P und Q berechnet werden, so hat man:

$$(P-Q)\,\delta(P-Q) = a^2$$

oder

$$P\delta P - P\delta Q - \delta P.\,Q + Q\delta Q = a^2.$$

Hält man Q als Mittelpunkt fest, so ist diese Gleichung für ein veränderliches P die Gleichung eines Kreises.

Hiernach ergiebt sich als die Bedingung dafür, dass vier Punkte P, Q, R, S auf einem Kreise liegen:

$$\begin{vmatrix} P\delta P & P & \delta P & 1 \\ Q\delta Q & Q & \delta Q & 1 \\ R\delta R & R & \delta R & 1 \\ S\delta S & S & \delta S & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichung des Kreises kann auch in mancherlei Parameterformen gegeben werden; eine der interessantesten ist die folgende: „Ist das Doppelverhältniss von vier Punkten P, Q, R, S eine reine Zahl m, so liegen die vier Punkte auf einem Kreise". Das heisst:

$$\frac{P-Q}{R-R}:\frac{S-Q}{S-R}=m.$$

Die Einzelverhältnisse stellen Ecken E_1 und E_2 vor, für welche

$$E_1 : E_2 = m,$$

folglich:

$$\delta E_1 : \delta E_2 = \delta m = m,$$

daher durch Division:

$$\frac{E_1}{\delta E_1} = \frac{E_2}{\delta E_2},$$

woraus man auf Winkelgleichheit der Ecken (Peripheriewinkel des Kreises) schliesst. Die letztere Gleichung ist, in P, Q, R, S geschrieben, identisch mit der zuerst aufgestellten Bedingung.

4. Gleichung einer Geraden. Soll in einem Punkte M eine Gerade senkrecht zu $\overline{OM}$ errichtet werden und ist P ein Punkt derselben, so ist die Ecke PMO eine rechtwinklige, das heisst, es muss

$$\frac{E}{\delta E} = e^{i\cdot\pi} = -1$$

sein, woraus folgt:

$$\frac{PM}{MO} + \frac{\delta PM}{\delta MO} = 0,$$

oder:

$$P\delta(M-O) + \delta P.(M-O) = M\delta(M-O) + \delta M.(M-O).$$

Drei Punkte P, Q, R liegen demnach auf einer Geraden, wenn

$$\begin{vmatrix} P & \delta P & 1 \\ Q & \delta Q & 1 \\ R & \delta R & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Sind P, Q, R, S vier Punkte, welche durch Stäbe von den Längen p_1, p_2; q_1, q_2; r_1, r_2; s_1, s_2 mit zwei Fixpunkten U und V verbunden und wird das Ganze nach Art einer Nürnberger Scheere beweglich gedacht, so gelten für P die Gleichungen:

$$P\delta P - (P\delta U + U\delta P) + U\delta U = p_1^2,$$

$$P\delta P - (P\delta V + V\delta P) + V\delta V = p_2^2,$$

also:

$$P\delta(U-V) + \delta P(U-V) + (U\delta U - V\delta V) - (p_2^2 - p_1^2) = 0.$$

19*

Stellt man solche Gleichungen auch für die anderen Punkte auf und eliminirt U und V, so folgt:

$$\begin{vmatrix} P & \delta P & 1 & (p_1^2 - p_2^2) \\ Q & \delta Q & 1 & (q_1^2 - q_2^2) \\ R & \delta R & 1 & (r_1^2 - r_2^2) \\ S & \delta S & 1 & (s_1^2 - s_2^2) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(Fig. 1)};$$

die geometrische Interpretation lautet: Errichtet man in den vier Punkten zu ihrer Ebene Senkrechte von den Längen $(p_1^2 - p_2^2)$, $(q_1^2 - q_2^2) \ldots$, so liegen die erhaltenen Endpunkte P', Q', R', S' bei allen Verzerrungen von U und V in einer neuen Ebene.

5. Spiegelung eines Punktes an einer Geraden. Spiegelt man einen Punkt P an einer Geraden UV, so erhält man einen Punkt Q, dessen Coordinaten berechnet werden sollen. Zu dem Ende bedenke man, dass die Ecken PUV und QUV invers congruent sind, so dass folgt:

$$\delta \frac{PU}{UV} = \frac{QU}{UV},$$

woraus folgt:

$$(Q - U) = \delta (P - U) \cdot \frac{\overline{UV}}{\delta \overline{UV}}.$$

Diese Formeln sprechen sich einfacher aus, wenn es sich darum handelt, eine Strecke $a = \overline{PU}$ an einer Richtung $\dfrac{UV}{\delta UV}$ zu inversiren, die erhaltene Strecke α genügt dann der Gleichung

$$\alpha = \delta a \cdot \frac{\overline{UV}}{\delta UV},$$

das heisst α ist proportional δa.

6. Gleichung der Focalen eines Stammvierecks (Fig. 2). Ist A, B, C, D ein Gelenkviereck von den Seitenlängen a, b, c, d; P ein Punkt, der so gelegen ist, dass die Summe der Winkel $APB + CPD = 180^0$ ist, so ist der Ort von P bekanntermaassen eine Curve dritter Ordnung, der geometrische Ort der Brennpunkte derjenigen Schaar von Kegelschnitten, die dem Stammviereck einbeschrieben sind. Der angegebenen Bedingung entspricht die Gleichung:

$$\frac{E_1}{\delta E_1} \cdot \frac{E_2}{\delta E_2} = e^{2 i \pi} = 1,$$

oder:

$$\frac{P-A}{P-B} \cdot \frac{P-C}{P-D} = \delta \frac{P-A}{P-B} \delta \frac{P-C}{P-D},$$

oder:

$$\begin{vmatrix} (P^2 - P[A+C] + AC) & \delta (P^2 - P[A+C] + AC) \\ (P^2 - P[B+D] + BD) & \delta (P - P[B+D] + BD) \end{vmatrix} = 0,$$

oder:

$$\begin{vmatrix} P^2 & \delta P^2 & 1 \\ (P[A+C] + AC) & \delta (P[A+C] + AC) & 1 \\ (P[B+D] + BD) & \delta (P[B+D] + BD) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Hätte man verlangt, dass die Winkelsumme eine andere als 180^0 sein soll, so würde die Gleichung formal nur unwesentliche Aenderungen erfahren haben, sie würde aber dann vom vierten Grad.

7. Gleichung der Koppelcurve bei der Dreistabbewegung. Wird im Gelenkviereck $ABCD$ der Stab $\overline{AD}$ festgehalten, am Stab $\overline{BC}$ ein Dreieck von der Form $\overline{BP}+\overline{PC}=BC$ oder $\varkappa+\lambda=1$ befestigt, so beschreibt P die Koppelcurve. Dies entspricht den Gleichungen:

$$\begin{aligned}(A-B)\,\delta(A-B)&=a^2\\(B-C)\,\delta(B-C)&=b^2\qquad P=\varkappa C+\lambda B.\\(C-D)\,\delta(C-D)&=c^2\end{aligned}$$

Hieraus wären C und D zu eliminiren. Um diese Elimination symmetrisch zu gestalten, führen wir noch eine Fremdgleichung $Z=C-B$ ein; dann ergiebt sich

$$C=P-\lambda Z,$$
$$B=P-\varkappa Z.$$

Setzt man dies in die drei quadratischen Gleichungen oben ein, so folgt:

$$\begin{aligned}(\varkappa Z-AP)\,\delta(\varkappa Z-AP)&=a^2,\\Z\delta Z&=b^2,\\(\lambda Z-DP)\,\delta(\lambda Z-DP)&=c^2.\end{aligned}$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt:

$$Z\delta Z:-Z:\delta Z:-1=\left\|\begin{matrix}\varkappa\delta\varkappa & -\varkappa\delta\overline{AP} & -\delta\varkappa.\overline{AP} & \overline{AP}\delta\overline{AP}-a^2\\ 1 & 0 & 0 & -b^2\\ \lambda\delta\lambda & -\lambda\delta\overline{DP} & -\delta\lambda DP & \overline{DP}\delta\overline{DP}-c^2\end{matrix}\right\|$$

$$=\left\|\begin{matrix}0 & \varkappa\delta\varepsilon & -\varepsilon\delta\varkappa & \varepsilon\delta\varepsilon-a^2+\varkappa\delta\varkappa b^2\\ 1 & 0 & 0 & -b^2\\ 0 & -\lambda\delta\eta & -\eta\delta\lambda & \eta\delta\eta-c^2+\lambda\delta\lambda b^2\end{matrix}\right\|,$$

wobei $\varepsilon=\overline{AP}$, $\eta=\overline{DP}$. Setzt man hieraus die Werthe $Z\delta Z$, Z, δZ in Relation, so folgt:

$$0=b^2\begin{vmatrix}\varkappa\delta\varepsilon & \varepsilon\delta\varkappa\\ \lambda\delta\eta & \eta\delta\lambda\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\varkappa\delta\varepsilon & \varepsilon\delta\varepsilon-a^2+\varkappa\delta\varkappa b^2\\ \lambda\delta\eta & \eta\delta\eta-c^2+\lambda\delta\lambda b^2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\varepsilon\delta\varkappa & \varepsilon\delta\varepsilon-a^2+\varkappa\delta\varkappa b^2\\ \eta\delta\lambda & \eta\delta\eta-c^2+\lambda\delta\lambda b^2\end{vmatrix}.$$

Anmerkung. Jeder Punkt des Punktfeldes

$$P=\varkappa'A+\lambda'B+\mu'C+\nu'D$$

beschreibt eine Koppelcurve, die einem Curvenindividuum aus der Schaar

$$P=\varkappa C+\lambda B,\quad \varkappa+\lambda=1\ \text{(complex)}$$

ähnlich ist. Der Beweis ergiebt sich aus dem Satz II über das Punktviereck. Die Gleichung wird genau wie oben abgeleitet.

8. Welche festen Winkel können die Diagonalen eines Stammvierecks bei der Bewegung beibehalten? $ABCD$ sei das Stamm-

viereck, $\overline{AC}$ die eine Diagonale, $\overline{BD}$ die andere. Ihr Winkel (Ecke) soll constant sein, daher die Gleichung:

$$\frac{E}{\delta E} = \varkappa \quad \text{oder} \quad \frac{A-C}{B-D} \cdot \frac{\delta(B-D)}{\delta(A-C)} = \varkappa \, (= e^{i\,2\,\varphi}).$$

Addirt man zu den Seiten der letzten Gleichung die Zahl 1, so folgt:

$$\frac{(A\,\delta B + B\,\delta A) + (C\,\delta D + D\,\delta C) - (A\,\delta D + D\,\delta A) - (C\,\delta B + B\,\delta C)}{(B-D)\,\delta(A-C)} = \varkappa + 1.$$

Ist $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$, $\overline{DA} = d$, so schreibt sich der Zähler auch $-(a^2 + c^2 - b^2 - d^2)$, wird also constant, somit

$$(B-D)\,\delta(A-C) = \frac{b^2 + d^2 - a^2 - c^2}{1+\varkappa}.$$

Wird $B - D = R_1 e^{i\varphi_1}$, $A - C = R_2 e^{i\varphi_2}$ gesetzt, so folgt:

$$R_1 \,.\, R_2 e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{b^2 + d^2 - a^2 - c^2}{1+\varkappa}.$$

Als erstes Resultat gewinnen wir also den Satz (R_1, R_2 sind die Längen der Diagonalen, $\varphi_1 - \varphi_2$ ihr Winkel):

„Ist in einem Gelenkviereck der Winkel der Diagonalen constant, so ist auch ihr Product, also auch der Inhalt des Gelenkvierecks constant."

Dieser Satz ist in dem Falle ungiltig, wenn die rechte Seite die Form Null durch Null annimmt; das heisst, wenn

$$\varkappa = -1, \quad b^2 + d^2 = a^2 + c^2.$$

Beide Bedingungen schliessen einander ein und bleibt der Winkel der Diagonalen bei der Bewegung ein rechter.

Um den allgemeinen Fall näher zu untersuchen, hält man die längste Seite des Gelenkvierecks (AD) fest und lässt erstens die Seite AB, zweitens DC in diese fallen, dann ist in beiden Fällen die eine Diagonale $= \overline{AD}$, die anderen müssen also gleich lang sein und mit $\overline{AD}$ gleiche Winkel bilden. Aus dem dadurch entstehenden Parallelogramme folgt dann die Bedingung $a = c$, ferner $b = d$, das heisst, das gesuchte Viereck könnte also nur das Parallelogramm oder das überschlagene Parallelogramm sein. Nur letzteres löst die Aufgabe, dann ist $\varkappa = -1$ und beide Diagonalen sind parallel, der Inhalt ist Null, wie es sein muss, da jedes Gelenkviereck einmal den Inhalt O annimmt und sonach nur Null die Grösse eines constant bleibenden Inhaltes sein kann.

9. Welches Gelenkviereck ist immer Kreisviereck? Sind a, b, c, d vier Strecken nach Grösse und Richtung, und $a + b + c + d = 0$ als geschlossener Streckenzug das Gelenkviereck, so lautet die zu erfüllende Bedingung:

1) $$\frac{a}{b} = \varkappa \cdot \frac{\delta c}{\delta d} \quad \left(\varkappa \text{ reell} = \left|\frac{a\,d}{b\,c}\right|\right).$$

Dies in Parameterform geschrieben:

$$2)\qquad \begin{cases} a = \varkappa\,.\,\sigma\delta c \\ b = 1\,.\,\sigma\delta d. \end{cases}$$

Durch Addition und Berücksichtigung von $a + b = -(c + d)$:

$$3)\qquad (c + d) = -\sigma(\varkappa\delta c + \delta d).$$

Aus 2) und 3) folgen:

$$a\delta a = \varkappa^2\sigma\delta\sigma\,.\,c\delta c,$$
$$b\delta b = \sigma\delta\sigma\,.\,d\delta d,$$
$$(c + d)\delta(c + d) = \sigma.\delta\sigma\,.\,(\varkappa\delta c + \delta d)(\varkappa c + d).$$

Diese Gleichungen können sinngemäss nur bestehen, wenn

$$\sigma\delta\sigma = 1, \quad \varkappa = 1, \quad a\delta a = c\delta c, \quad b\delta b = d\delta d;$$

dann ist

$$\sigma = \frac{c + d}{\delta(c + d)}.$$

Berücksichtigt man die in diesem Paragraphen für die symmetrische Lage von Strecken abgeleiteten Beziehungen, so erkennt man aus 2), dass das gesuchte Viereck nur das überschlagene Parallelogramm sein kann.

10. Wann stehen zwei Linien im Punktfeld

$$P = \varkappa A + \lambda B + \mu C + \nu D$$

auf einander senkrecht? Verbindet die eine Linie die Punkte P und Q, die andere die Punkte R und S, so muss sein

$$\frac{P - Q}{R - S} + \delta\,\frac{P - Q}{R - S} = 0.$$

Setzen wir:

$$P - Q = \varkappa A + \lambda B + \mu C + \nu D, \quad \varkappa + \lambda + \mu + \nu = 0,$$
$$R - S = \mathfrak{k} A + \mathfrak{l} B + \mathfrak{m} C + \mathfrak{n} D, \quad \mathfrak{k} + \mathfrak{l} + \mathfrak{m} + \mathfrak{n} = 0,$$

so geht die Bedingung über in:

$$0 = (\varkappa A + \lambda B + \mu C + \nu D)\,\delta(\mathfrak{k} A + \mathfrak{l} B + \mathfrak{m} C + \mathfrak{n} D)$$
$$+ (\mathfrak{k} A + \mathfrak{l} B + \mathfrak{m} C + \mathfrak{n} D)\,\delta(\varkappa A + \lambda B + \mu C + \nu D).$$

Die Entwickelung liefert für reelle $\varkappa$, $\mathfrak{k}, \ldots$:

$$(\varkappa\mathfrak{l} + \mathfrak{k}\lambda)(A\delta B + B\delta A) + (\lambda\mathfrak{m} + \mu\mathfrak{l})(B\delta C + C\delta B)$$
$$+ (\mu\mathfrak{n} + \nu\mathfrak{m})(C\delta D + D\delta C) + (\nu\mathfrak{k} + \varkappa\mathfrak{n})(D\delta A + A\delta D)$$
$$+ (\varkappa\mathfrak{m} + \mu\mathfrak{k})(A\delta C + C\delta A) + (\lambda\mathfrak{n} + \nu\mathfrak{l})(B\delta D + D\delta B)$$
$$+ 2\varkappa\mathfrak{k} A\delta A + 2\lambda\mathfrak{l} B\delta B + 2\mu\mathfrak{m} C\delta C + 2\nu\mathfrak{n} D\delta D = 0.$$

Berücksichtigt man nun, dass

$$A\delta B + B\delta A = A\delta A + B\delta B - a^2,$$
$$B\delta C + C\delta B = B\delta B + C\delta C - b^2,$$
$$C\delta D + D\delta C = C\delta C + D\delta D - c^2,$$
$$D\delta A + A\delta D = D\delta D + A\delta A - d^2,$$

so ergiebt eine Zusammenziehung des entwickelten Ausdruckes:

$$(\varkappa\mathfrak{m}+\mu\mathfrak{k})[A\delta C+C\delta A-A\delta A-C\delta C]$$
$$+(\lambda\mathfrak{n}+\nu\mathfrak{l})[B\delta D+D\delta B-B\delta B-D\delta D]$$
$$-[(\varkappa\mathfrak{l}+\mathfrak{k}\lambda)a^2+(\lambda\mathfrak{m}+\mu\mathfrak{l})b^2+(\mu\mathfrak{n}+\nu\mathfrak{m})c^2+(\nu\mathfrak{k}+\varkappa\mathfrak{n})d^2]=0.$$

Setzt man das letzte Glied zur Abkürzung $=\Phi$, so kann man auch schreiben: $(\varkappa\mathfrak{m}+\mu\mathfrak{k})\overline{AC}\delta\overline{AC}+(\lambda\mathfrak{n}+\nu\mathfrak{l})\overline{BD}\delta\overline{BD}+\Phi=0,$

das heisst, zwischen den Quadraten der Diagonalen müsste eine lineare Relation eintreten. Hat man ein Viereck, bei dem dies nicht der Fall, so müssen die Coefficienten einzeln verschwinden:

I) $\qquad (\varkappa\mathfrak{m}+\mu\mathfrak{k})=0, \quad (\lambda\mathfrak{n}+\nu\mathfrak{l})=0, \quad \Phi=0.$

Dies ist die allgemeine Lösung. Die singuläre erfolgt für das Parallelogramm, das ja das Viereck ist, für welches eine Relation zwischen den Diagonalquadraten existirt: $(a=c,\ b=d)$

$$\overline{AC}\delta\overline{AC}+\overline{BD}\delta\overline{BD}=a^2+b^2+c^2+d^2.$$

Demnach wird die Bedingung:

$$[(\varkappa\mathfrak{m}+\mu\mathfrak{k})-(\lambda\mathfrak{n}-\nu\mathfrak{l})]AC\delta AC=-\Phi$$
$$-(a^2+b^2+c^2+d^2)(\lambda\mathfrak{n}+\nu\mathfrak{l})=\Phi'$$

und demnach die singuläre Lösung:

II) $\qquad a=c, \quad b=d, \quad (\varkappa\mathfrak{m}+\mu\mathfrak{k})=(\lambda\mathfrak{n}+\nu\mathfrak{l}), \quad \Phi'=0;$

die weitere Discussion der Formeln soll hier nicht gegeben werden.

11. Wann sind zwei Linien im Punktfelde

$$P=\varkappa A+\lambda B+\mu C+\nu D$$

an Länge gleich? Verbindet die eine Linie die Punkte P und Q, die andere die Punkte R und S, so muss sein:

$$(P-Q)\delta(P-Q)=(R-S)\delta(R-S).$$

Setzen wir:

$$P-Q=\varkappa A+\lambda B+\mu C+\nu D, \quad (\varkappa+\lambda+\mu+\nu=0),$$
$$R-S=\mathfrak{k}A+\mathfrak{l}B+\mathfrak{m}C+\mathfrak{n}D, \quad (\mathfrak{k}+\mathfrak{l}+\mathfrak{m}+\mathfrak{n}=0),$$

so geht die Bedingung über in:

$$0\equiv(\varkappa A+\lambda B+\mu C+\nu D)\delta(\varkappa A+\lambda B+\mu C+\nu D)$$
$$=(\mathfrak{k}A+\mathfrak{l}B+\mathfrak{m}C+\mathfrak{n}D)\delta(\mathfrak{k}A+\mathfrak{l}B+\mathfrak{m}C+\mathfrak{n}D),$$

die Entwickelung liefert für reelle $\varkappa$, $\mathfrak{k}$, . . .:

$$(\varkappa\lambda-\mathfrak{k}\mathfrak{l})(A\delta B+B\delta A)+(\lambda\mu-\mathfrak{l}\mathfrak{m})(B\delta C+C\delta B)$$
$$+(\mu\nu-\mathfrak{m}\mathfrak{n})(C\delta D+D\delta C)+(\nu\varkappa-\mathfrak{n}\mathfrak{k})(D\delta A+A\delta D)$$
$$+(\varkappa\mu-\mathfrak{k}\mathfrak{m})(A\delta C+C\delta A)+(\lambda\nu-\mathfrak{l}\mathfrak{n})(B\delta D+D\delta B)$$
$$+(\varkappa^2-\mathfrak{k}^2)A\delta A+(\lambda^2-\mathfrak{l}^2)B\delta B+(\mu^2-\mathfrak{m}^2)C\delta C$$
$$+(\nu^2-\mathfrak{n}^2)D\delta D=0.$$

Berücksichtigt man wieder, dass

$$A\delta B + B\delta A = A\delta A + B\delta B - a^2 \text{ etc.,}$$

so ergiebt eine Zusammenfassung des entwickelten Ausdrucks:

$$\begin{aligned}&(\varkappa\mu - \mathfrak{k}\mathfrak{m})[A\delta C + C\delta A - A\delta A - C\delta C]\\ &+ (\lambda\nu + \mathfrak{l}\mathfrak{n})[B\delta D + D\delta B - B\delta B - D\delta D]\\ &- [(\varkappa\lambda - \mathfrak{k}\mathfrak{l})a^2 + (\lambda\mu - \mathfrak{l}\mathfrak{m})b^2 + (\mu\nu - \mathfrak{m}\mathfrak{n})c^2\\ &+ (\nu\varkappa - \mathfrak{n}\mathfrak{k})d^2] = 0.\end{aligned}$$

Setzt man das letzte Glied zur Abkürzung $= \Psi$, so kann man auch schreiben:

$$(\varkappa\mu - \mathfrak{k}\mathfrak{m})\overline{AC}\delta\overline{AC} + (\lambda\nu - \mathfrak{l}\mathfrak{n})\overline{BD}\delta\overline{BD} + \Psi = 0.$$

Wie oben ergiebt sich auch hier eine allgemeine und eine singuläre Lösung des Problems. Bezüglich der Discussion werde auf den vorigen Fall verwiesen.

Anmerkung. Die Discussion ergiebt, dass es möglich ist, in den Seiten eines Gelenkvierecks Punkte $XYZW$ so festzulegen, dass sie bei allen Verzerrungen des Gelenkvierecks ein Antiparallelogramm bilden.

§ 8. Kreis- und Kugelpunkte.

1. Kreispunkte auf den Seiten des Gelenkvierecks. Wir nehmen auf den Seiten des Stammvierecks $ABCD$ vier Punkte P, Q, R, S an und wollen untersuchen, unter welchen Voraussetzungen dieselben immer auf einem Kreise liegen. Wir wissen, dass die zu erfüllende Gleichung die folgende ist:

$$1)\qquad \begin{vmatrix} P\delta P & P & \delta P & 1\\ Q\delta Q & Q & \delta Q & 1\\ R\delta R & R & \delta R & 1\\ S\delta S & S & \delta S & 1\end{vmatrix} = 0.$$

Setzen wir:

$$2)\qquad \begin{cases} P = \varkappa_1 A + \lambda_1 B, \quad Q = \varkappa_2 B + \lambda_2 C,\\ R = \varkappa_3 C + \lambda_4 D, \quad S = \varkappa_4 D + \lambda_4 A,\end{cases}$$

so muss die Relation 1) unabhängig von den A, B, C, D bestehen. Um diese umzuformen, bedenken wir, dass ($\varkappa_i\lambda_i$ reell) $\varkappa_i + \lambda_i = 1$:

$$3)\qquad \begin{cases} P\delta P = \varkappa_1^2 A\delta A + \lambda_1^2 B\delta B + \varkappa_1\lambda_1(A\delta B + B\delta A),\\ \qquad = \varkappa_1^2 A\delta A + \lambda_1^2 B\delta B + \varkappa_1\lambda_1(A\delta A + B\delta B - a^2),\\ \qquad = \varkappa_1 A\delta A + \lambda_1 B\delta B + \varkappa_1\lambda_1 a^2,\\ Q\delta Q = \varkappa_2 B\delta B + \lambda_2 C\delta C - \varkappa_2\lambda_2 b^2,\\ R\delta R = \varkappa_3 C\delta C + \lambda_3 D\delta D - \varkappa_3\lambda_3 c^2,\\ S\delta S = \varkappa_4 D\delta D + \lambda_4 A\delta A - \varkappa_4\lambda_4 d^2.\end{cases}$$

Soll nun 1) umgeformt mit 2) und 3) unabhängig von den A, B, C, D bestehen, so müssen sich vier Zahlen $u_1 u_2 u_3 u_4$ finden lassen, welche von A, B, C, D unabhängig sind und die Gleichungen:

$$\begin{aligned} u_1 P\delta P &+ u_2 Q\delta Q + u_3 R\delta R + u_4 S\delta S \equiv 0,\\ u_1 P &+ u_2 Q + u_3 R + u_4 S = 0,\\ u_1 \delta P &+ u_2 \delta Q + u_3 \delta R + u_4 \delta S \equiv 0,\\ u_1 &+ u_2 + u_3 + u_4 \equiv 0 \end{aligned}$$

zu identischen machen. Zu dem Ende muss sein:

$$\begin{aligned} u_1 \lambda_1 + u_2 \varkappa_2 &= 0,\\ u_2 \lambda_2 + u_3 \varkappa_3 &= 0,\\ u_3 \lambda_3 + u_4 \varkappa_4 &= 0,\\ u_4 \lambda_4 + u_1 \varkappa_1 &= 0, \end{aligned}$$

$$u_1 \varkappa_1 \lambda_1 a^2 + u_2 \varkappa_2 \lambda_2 b^2 + u_3 \varkappa_3 \lambda_3 c^2 + u_4 \varkappa_4 \lambda_4 d^2 = 0.$$

Oder, es haben die Determinanten der Matrix zu verschwinden:

$$4)\qquad \left\| \begin{matrix} \varkappa_1 \lambda_1 a^2 & \varkappa_2 \lambda_2 b^2 & \varkappa_3 \lambda_3 c^2 & \varkappa_4 \lambda_4 d^2 \\ \lambda_1 & \varkappa_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \varkappa_3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \varkappa_4 \\ \varkappa_1 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{matrix} \right\| = 0.$$

Nach dem Kronecker'schen Satze sind dies zwei Bedingungen. Lässt man die erste Zeile fort, so folgt eine Determinante, welche ausgewerthet lautet:

$$5)\qquad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 = \varkappa_1 \varkappa_2 \varkappa_3 \varkappa_4.$$

Die andere Gleichung würde sich am symmetrischsten ergeben, wenn man die Matrix mit einer beliebigen Zahlenreihe (z. B. 1) rändert, asymmetrisch, wenn man eine Zeile weglässt (z. B. die letzte):

$$6)\quad a^2.\, \lambda_1 \varkappa_1 \varkappa_2 \varkappa_3 \varkappa_4 - b^2.\, \lambda_1 \lambda_2 \varkappa_2 \varkappa_3 \varkappa_4 + c^2.\, \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \varkappa_3 \varkappa_4 - d^2.\, \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \varkappa_4 = 0.$$

Da $\varkappa_i + \lambda_i = 1$, so stellen die zwei Gleichungen für die Unbekannten $\varkappa_1 \varkappa_2 \varkappa_3 \varkappa_4$ geschrieben ein Diophant'sches System dar. Zu je zwei Punkten auf Seiten des Gelenkvierecks können immer noch zwei andere, auf den anderen Seiten gelegen, angegeben werden, die zusammen mit jenen auf einem Kreise liegen.

2. Kreispunkte im Punktfelde $P = \varkappa A + \lambda B + \mu C + \nu D$. Die Lösung erfolgt wie vorhin, nur ist zu setzen:

$$\begin{aligned} P &= \varkappa_1 A + \lambda_1 B + \mu_1 C + \nu_1 D,\\ Q &= \varkappa_2 A + \lambda_2 B + \mu_2 C + \nu_2 D, \quad \varkappa_i + \lambda_i + \mu_i + \nu_i = 1\\ R &= \varkappa_3 A + \lambda_3 B + \mu_3 C + \nu_3 D, \qquad\qquad \text{(reell).}\\ S &= \varkappa_4 A + \lambda_4 B + \mu_4 C + \nu_4 D, \end{aligned}$$

Die nothwendige Umformung von $P\delta P, \ldots$ lautet:

$$P\delta P = \varkappa_1\lambda_1(A\delta B + B\delta A) + \lambda_1\mu_1(B\delta C + C\delta B) + \mu_1\nu_1(C\delta D + D\delta C)$$
$$+ \nu_1\varkappa_1(D\delta A + A\delta D) + \varkappa_1\mu_1(A\delta C + C\delta A) + \lambda_1\nu_1(B\delta D + D\delta B)$$
$$+ \varkappa_1{}^2 A\delta A + \lambda_1{}^2 B\delta B + \mu_1{}^2 C\delta C + \nu_1{}^2 D\delta D.$$

Ersetzt man wieder $A\delta B + B\delta A$ durch $A\delta A + B\delta B - a^2$ u. s. f., so folgt:

$$P\delta P = -\,[\varkappa_1\mu_1\overline{AC}\delta\overline{AC} + \lambda_1\nu_1\overline{BD}\delta\overline{BD}]$$
$$+\,[\varkappa_1 A\delta A + \lambda_1 B\delta B + \mu_1 C\delta C + \nu_1 D\delta D]$$
$$-\,[\varkappa_1\lambda_1 a^2 + \lambda_1\mu_1 b^2 + \mu_1\nu_1 c^2 + \nu_1\varkappa_1 d^2].$$

Bezeichnen wir den letzten Ausdruck in $P\delta P$, $Q\delta Q \ldots$ mit H_1, H_2 H_3, H_4, so ergeben die weiteren, genau wie vorhin zu führenden Betrachtungen als Lösung des Problems das Verschwinden der folgenden Matrix:

$$\left\|\begin{array}{cccc} \varkappa_1 & \varkappa_2 & \varkappa_3 & \varkappa_4 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \nu_4 \\ \varkappa_1\mu_1 & \varkappa_2\mu_2 & \varkappa_3\mu_3 & \varkappa_4\mu_4 \\ \lambda_1\nu_1 & \lambda_2\nu_2 & \lambda_3\nu_3 & \lambda_4\nu_4 \\ H_1 & H_2 & H_3 & H_4 \end{array}\right\| = 0.$$

Die in dieser nach Kronecker enthaltenen vier Gleichungen geben mit den Relationen $\varkappa_i + \lambda_i + \mu_i + \nu_i = 1$ zusammen acht Gleichungen zur Bestimmung von 16 Unbekannten. Wir können demnach immer zu zwei vorgegebenen Punkten des Feldes (auf ∞^2 Arten) noch zwei weitere bestimmen, die mit jenen immer auf einem Kreise liegen.

Eine ausführlichere Discussion soll nicht Platz greifen.

3. Kugelpunkte im Punktfelde $P = \varkappa A + \lambda B + \mu C + \nu D$. Wir denken uns jetzt das Gelenkviereck räumlich beweglich und windschief und fragen, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit fünf Punkte P_i immer auf einer Kugel bleiben.

Wir benützen nunmehr gewöhnliche Coordinaten $x_i y_i z_i$ und haben die Aufgabe, die Bedingung

$$\left|\begin{array}{ccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 & x_i & y_i & z_i & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right| = 0$$

identisch zu erfüllen, ohne Rücksicht auf die besondere Lage der Eckpunkte A, B, C, D des Vierecks. Kommen diesen die Coordinaten $\xi_i \eta_i \zeta_i$ zu und sind die Punkte P_i als

$$\varkappa_i A + \lambda_i B + \mu_i C + \nu_i D$$

definirt:

$$(\varkappa_i + \lambda_i + \mu_i + \nu_i = 1),$$

so ergiebt sich:

$$x_i = \varkappa_i \xi_1 + \lambda_i \xi_2 + \mu_i \xi_3 + \nu_i \xi_4,$$
$$y_i = \varkappa_i \eta_1 + \lambda_i \eta_2 + \mu_i \eta_3 + \nu_i \eta_4,$$
$$z_i = \varkappa_i \zeta_1 + \lambda_i \zeta_2 + \mu_i \zeta_3 + \nu_i \zeta_4.$$

Ferner liefert die Umformung von $x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$ das Folgende:

$$\begin{aligned} x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = {} & 2\varkappa_i\lambda_i(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2) + 2\lambda_i\mu_i(\xi_2\xi_3 + \eta_2\eta_3 + \zeta_2\zeta_3) \\ & + 2\mu_i\nu_i(\xi_3\xi_4 + \eta_3\eta_4 + \zeta_3\zeta_4) + 2\nu_i\varkappa_i(\xi_4\xi_1 + \eta_4\eta_1 + \zeta_4\zeta_1) \\ & + 2\varkappa_i\mu_i(\xi_1\xi_3 + \eta_1\eta_3 + \zeta_1\zeta_3) + 2\lambda_i\nu_i(\xi_2\xi_4 + \eta_2\eta_4 + \zeta_2\zeta_4). \end{aligned}$$

4. Kugelpunkte auf den Seiten des räumlich beweglichen Gelenkfünfecks. $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DE = d$, $EA = e$ seien die Längen der fünf Stäbe, welche das Gelenkfünfeck bilden.

$$P_1 = \varkappa_1 A + \lambda_1 B, \quad P_2 = \varkappa_2 B + \lambda_2 C, \quad P_3 = \varkappa_3 C + \lambda_3 D,$$
$$P_4 = \varkappa_4 D + \lambda_4 E, \quad P_5 = \varkappa_5 E + \lambda_5 A$$

seien Punkte auf diesen Stäben, welche so gewählt werden sollen, dass sie bei allen Bewegungen des Fünfecks auf einer Kugel bleiben sollen. Zu dem Ende muss wieder die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 & & x_i & & y_i & & z_i & & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0$$

umgeformt werden. Es ergiebt sich insbesonders:

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 &= \varkappa_1^2(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2) + \lambda_1^2(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2) + 2\varkappa_1\lambda_1(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2) \\ &= \varkappa_1(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2) + \lambda_1(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2) - \varkappa_1\lambda_1 a^2.* \end{aligned}$$

Analoge Werthe für $x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$. Dies eingeführt ergiebt, wie früher, das Verschwinden der Matrix:

$$\left\| \begin{matrix} \lambda_1 & \varkappa_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \varkappa_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \varkappa_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & \varkappa_5 \\ \varkappa_1 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 \\ H_1 & H_2 & H_3 & H_4 & H_5 \end{matrix} \right\| = 0.$$

Hierbei ist $H_1 = \varkappa_1\lambda_1 a_2$, $H_2 = \varkappa_2\lambda_2 b^2$ u. s. w. Diese zwei Gleichungen im Vereine mit $\varkappa_i + \lambda_i = 1$ bilden sieben Gleichungen zur Bestimmung von acht Unbekannten. Drei der Punkte P_i bestimmen die übrigen:

$$+ \varkappa_i^2(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2) + \lambda_i^2(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2)$$
$$+ \mu_i^2(\xi_3^2 + \eta_3^2 + \zeta_3^2) + \nu_i(\xi_4^2 + \eta_4^2 + \zeta_4^2).$$

* Dies Resultat kann unter Anwendung des Transversalensatzes, den ich in der Zeitschrift für mathem. und naturw. Unterricht XXVII, 2 gegeben habe, direct hingeschrieben werden.

Bedenken wir aber, dass

$$2(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2+\zeta_1\zeta_2)=(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2)+(\xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_2^2)-a^2,$$
$$2(\xi_2\xi_3+\eta_2\eta_3+\zeta_2\zeta_3)=(\xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_2^2)+(\xi_3^2+\eta_3^2+\zeta_3^2)-b^2,$$
$$2(\xi_3\xi_4+\eta_3\eta_4+\zeta_3\zeta_4)=(\xi_3^2+\eta_3^2+\zeta_3^2)+(\xi_4^2+\eta_4^2+\zeta_4^2)-c^2,$$
$$2(\xi_4\xi_1+\eta_4\eta_1+\zeta_4\zeta_1)=(\xi_4^2+\eta_4^2+\zeta_4^2)+(\xi_1^2+\eta_2^2+\zeta_3^2)-d^2,$$

so folgt:

$$\begin{aligned}x_i^2+y_i^2+z_i^2=&-[\varkappa_i\mu_i\overline{AC}\delta\overline{AC}+\lambda_i\nu_i\overline{BD}\delta\overline{BD}]\\&+[\varkappa_i(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2)+\lambda_i(\xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_2^2)\\&+\mu_i(\xi_3^2+\eta_3^2+\zeta_3^2)+\nu_i(\xi_4^2+\eta_4^2+\zeta_4^2)]\\&-[\varkappa_i\lambda_i a^2+\lambda_i\mu_i b^2+\mu_i\nu_i c^2+\nu_i\varkappa_i d^2].\end{aligned}$$

Bezeichnen wir den letzten Klammerausdruck mit H_i, so ergiebt sich als Endbedingniss zur Lösung unserer Aufgabe (die Zwischenrechnungen vollziehen sich wie beim Problem der Kreispunkte) das Verschwinden der Matrix:

$$\left\|\begin{matrix}\varkappa_1&\varkappa_2&\varkappa_3&\varkappa_4&\varkappa_5\\\lambda_1&\lambda_2&\lambda_3&\lambda_4&\lambda_5\\\mu_1&\mu_2&\mu_3&\mu_4&\mu_5\\\nu_1&\nu_2&\nu_3&\nu_4&\nu_5\\\varkappa_1\mu_1&\varkappa_2\mu_2&\varkappa_3\mu_3&\varkappa_4\mu_4&\varkappa_5\mu_5\\\lambda_1\nu_1&\lambda_2\nu_2&\lambda_3\nu_3&\lambda_4\nu_4&\lambda_5\nu_5\\H_1&H_2&H_3&H_4&H_5\end{matrix}\right\|=0.$$

Diese drei und die Gleichungen $\varkappa_i+\lambda_i+\mu_i+\nu_i=1$ stellen acht Gleichungen für 20 Unbekannte vor. Zu je vier Punkten des Feldes kann man also einen Punkt hinzufinden, der mit jenen immer auf einer Kugel liegt.*

§ 9. Linear verwandte Gelenkvierecke.

1. Definition der Verwandtschaft. Ist $ABCD$ ein Gelenkviereck von constanten Längen a, b, c, d seiner Seiten, so ist dasselbe — allerdings nicht eindeutig — bestimmt, wenn die Endpunkte A und D einer Diagonalen fixirt sind. Ist nun etwa eine Lage der Ecken B und D festgestellt, was die Auflösung von zwei quadratischen Gleichungen erfordert und somit zwei Irrationalitäten in den Zahlenbereich unserer Rechnungen einführt, so können die drei anderen möglichen Aspecte des Vierecks linear aus der ersten hergeleitet werden. Zu dem Ende bedenke man, dass dazu nur Spiegelungen an der Diagonale AC nothwendig sind, deren Formeln wir bereits früher abgeleitet haben. Was sich dabei nicht ändern kann, sind die Irrationalitäten, also die Grössen der Ecken bei B und D.

---

* Auser den hier behandelten Kreis- und Kugelpunkten „erster Ordnung", die den Charakter der Affinität haben, kann es noch solche „zweiter Ordnung" geben, die erst auftreten, wenn gewisse Relationen zwischen den Seiten erfüllt sind.

Als linear verwandt zu einem ersten Viereck werden also alle jene Vierecke bezeichnet werden können, welche in einem Paar Gegenwinkel übereinstimmen. Dieses Uebereinstimmen ist aber nicht blos ein Gleichsein der entsprechenden Winkel, sondern kann auch ein Ergänzen solcher zu 180^0 bedeuten, entsprechend der Gleichung:

$$\frac{E_1}{\delta E_1} \cdot \frac{E_2}{\delta E_2} = 1.$$

In der That sind derartige Vierecke von Kempe (allerdings ohne dass diese Verwandtschaft ausgesprochen wurde) aufgestellt und benutzt worden.

2. Das Eliminationsverfahren zur Aufstellung linear verwandter Gelenkvierecke. Bezeichnen wir im vorigen Falle $\overline{AC}$ als Spiegeldiagonale, so stellt Kempe den verallgemeinerten Cosinussatz bezüglich dieser her, indem er $\overline{AC}$ zweimal ausdrückt:

$$\overline{AC}^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos B,$$

$$\overline{AC}^2 = c^2 + d^2 - 2\,cd\cos D,$$

folglich:

$$(a^2+b^2) - (c^2+d^2) = 2\,ab\cos B - 2\,cd\cos D.$$

Hierdurch ist gezeigt, dass die Irrationalitäten $\cos B$ und $\cos C$ selbst linear verbunden sind.

Fügen wir an das erste Viereck $ABCD$ ein zweites $A_1B_1C_1D_1$, welches mit dem ersten so verwandt sei, dass die Ecken D und D_1 sich zu 180^0 ergänzen ($\overline{A_1C_1}$ Spiegeldiagonale), ebenso die Ecken B und B_1, so folgt: $(a_1{}^2+b_1{}^2) - (c_1{}^2+d_1{}^2) = 2\,a_1b_1\cos B_1 + 2\,c_1d_1\cos D_1.$

Aus beiden könnte dann offenbar die Grösse B und D berechnet werden, das heisst, beide Vierecke wären in ihrer Bewegung nur in dem Momente verwandt, wo eben B und D die berechnete Grösse passirten. Sollen aber die Gelenkvierecke immer verwandt bleiben, so muss offenbar die erste Gleichung mit der zweiten innerlich übereinstimmen. Dividiren wir die Gleichungen je mit dem Factor von $\cos B$ bez. $\cos B_1$ und setzen

$$\cos B = -\cos B_1, \quad \text{also} \quad \cos D = -\cos D_1,$$

so folgt:

$$\frac{(a^2+b^2)-(c^2+d^2)}{ab} = \cos B - \frac{cd}{ab}\cos D,$$

$$\frac{(a_1{}^2+b_1{}^2)-(c_1{}^2+d_1{}^2)}{a_1b_1} = -\cos B + \frac{c_1d_1}{a_1b_1}\cos D.$$

Da die Irrationalitäten $\cos B$ und $\cos D$ nicht anderweitig linear zusammenhängen, so kann die Identität der zwei Gleichungen nur erzielt werden, wenn gleichzeitig:

$$\frac{(a^2+b^2)-(c^2+d^2)}{ab} + \frac{(a_1{}^2+b_1{}^2)-(c_1{}^2+d_1{}^2)}{a_1b_1} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{cd}{ab} = \frac{c_1d_1}{a_1b_1}.$$

In diesem Falle sind die Gelenkvierecke in allen Lagen verwandt, wo ein Paar der Winkel B oder D übereinstimmen.

3. Koppel von verwandten Vierecken (Fig. 3). Ist

$$B_1 C_1 C_2 C_3 \dots C_n B_{n+1}$$

ein polygonaler Zug, B_i ein zwischen C_{i-1} und C_i eingeschalteter Punkt und werden von einem Pol A nach allen Punkten B_i Linien gezogen, so entstehen n-Vierecke, die in A gekoppelt erscheinen. Diese Koppel soll eine Koppel von verwandten Vierecken dann genannt werden, wenn der letzte Winkel B_{n+1} mit dem ersten B_1 übereinstimmt.

Zu dem Ende muss ($\overline{B_i C_i} = x_i$, $\overline{C_i B_{i+1}} = y_{i+1}$, $\overline{AB_i} = a_i$):

$$\begin{aligned}
-H_1 &= (a_1^2 + x_1^2) - (a_2^2 + y_2^2) = 2\,a_1 x_1 \cos B_1 - 2\,a_2 y_2 \cos B_2' \\
-H_2 &= (a_2^2 + x_2^2) - (a_3^2 + y_3^2) = 2\,a_2 x_2 \cos B_2 - 2\,a_3 y_3 \cos B_3' \\
-H_3 &= (a_3^2 + x_3^2) - (a_4^2 + y_4^2) = 2\,a_3 x_3 \cos B_3 - 2\,a_4 y_4 \cos B_4' \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
-H_n &- (a_n^2 + x_n^2) - (a_{n+1}^2 + y_{n+1}^2) = 2\,a_n x_n \cos B_n - 2\,a_{n+1} y_{n+1} \cos B'_{n+1}.
\end{aligned}$$

Dabei ist $\cos B_i + \cos B_i' = 0$. Führt man dies in das Gleichungssystem ein, so hat man n-Gleichungen zur Bestimmung von n-Unbekannten $B_1, B_2, \dots B_n, B_{n+1} \equiv B_1$. Soll die letzte „Uebereinstimmung $B'_{n+1} \equiv B_1$" statthaben für alle möglichen Verzerrungen der Vireckskoppel, so muss die Bestimmung der Unbekannten in unbestimmter Form $\frac{0}{0}$ erscheinen. Nun ist

$$+\cos B_1 : -\cos B_2 : +\cos B_3 : \dots : \pm \cos B_n : \mp 1$$

$$= \left\| \begin{matrix} 2a_1x_1 & 2a_2y_2 & 0 & 0 & \dots 0 & H_1 \\ 0 & 2a_2x_2 & 2a_3y_3 & 0 & \dots 0 & H_2 \\ 0 & 0 & 2a_4x_4 & 2a_4y_4 & \dots 0 & H_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2a_{n+1}y_{n+1} & 0 & 0 & 0 & 2a_nx_n & H_n \end{matrix} \right\|$$

Also müssen die sämmtlichen Determinanten der Matrix verschwinden:

$$\left\| \begin{matrix} a_1x_1 & 0 & 0 & \dots a_{n+1}y_{n+1} \\ a_2y_2 & a_2x_2 & 0 & \dots\ 0 \\ 0 & a_3y_3 & a_3x_3 & \dots\ 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots\dots a_nx_n \\ H_1 & H_2 & H_3 & \dots\dots H_n \end{matrix} \right\| = 0.$$

Dies sind zwei Bedingungen. Die eine symmetrische erhalten wir durch Weglassen der letzten Zeile:

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_n x_1 x_2 x_3 \dots x_n = a_{n+1} a_2 a_3 \dots a_n y_{n+1} y_2 y_3 \dots y_n,$$

oder:

$$a_1 x_1 x_2 x_3 \dots x_n = a_{n+1} y_{n+1} y_2 y_3 \dots y_n.$$

Anmerkung. Fällt die letzte Seite a_{n+1} mit der ersten Seite a_1 in allen Fällen zusammen, was z. B. beim Problem der Auftheilung eines

Stammvierecks in Fachvierecke der Fall ist, so stimmt die Matrix der Form nach mit der Matrix für die Kreispunkte eines Vierecks zusammen, aber beide sind nicht identisch.

4. Winkelsatz für die Viereckskoppel. Da in jedem Viereck die Winkelsumme $4R$ beträgt, so folgt:

$$\Sigma \sphericalangle A = 4nR - [(B_1 + B_{n+1}) + \Sigma C_i + \overline{n-1} \,.\, 2R].$$

Für eine Koppel verwandter Vierecke ist $B_1 + B_{n+1} = 180^0$, also

$$\Sigma \sphericalangle A = 2nR - \Sigma \sphericalangle C_i,$$

oder:

$$\Sigma \sphericalangle A + \Sigma \sphericalangle C = 2nR.$$

5. Die conjugirte Koppel (Fig. 4). Die eben abgeleitete Formel besagt schon, dass zwischen den Ecken A und C der Vierecke eine gewisse Vertauschbarkeit besteht. Bezeichnen wir, um diese aufzudecken, das Viereck zur Spiegeldiagonale AC_i mit $\mathfrak{V}_i$, so stossen $\mathfrak{V}_i$ und $\mathfrak{V}_{i+1}$ an der gemeinsamen Kante $\overline{AB_{i+1}} = a_{i+1}$ zusammen, während die Kanten

$$\overline{C_i B_{i+1}} = y_i, \quad \overline{B_{i+1} C_{i+1}} = x_i$$

in eine Gerade fallen. Dreht man die Vierecke so lang, bis die Seiten y_2 und x_2 zusammenfallen, so ergänzen sich die Ecken bei B_i wieder zu 180^0. Da aber y_2 und x_2 im Allgemeinen nicht gleich lang zu sein brauchen, so muss eine Vergrösserung des einen Vierecks eintreten, damit jetzt die Vierecke in den Punkten C_i gekoppelt erscheinen.

Allgemein: Koppelt man die Vierecke $\mathfrak{V}_i$ durch einfache Drehung um die B in den Punkten $C_i = C$, so löst sich A auf in ein Polygon

$$B_1 A_1 A_2 A_3 \ldots A_n B_{n+1},$$

auf dessen Seiten die Punkte B liegen, in denen zwei Vierecke zusammenstossen. Die so erhaltene Koppel der $\mathfrak{V}_i$ soll die zur ersten conjugirte genannt werden. Für beide gilt, dass die Winkel B_1 und B_{n+1}, ebenso $\Sigma \sphericalangle A$ und $\Sigma \sphericalangle C$ unverändert erhalten bleiben.

6. Maassverhältnisse an der conjugirten Koppel. Lassen wir das erste Viereck $\mathfrak{V}_1$ unverändert, so ist das zweite mit dem Factor $\frac{y_2}{x_2}$, das dritte mit $\frac{y_2}{x_2} \cdot \frac{y_3}{x_3}$ u. s. w. zu vergrössern, um den Anschluss der Punkte C zu einem zu erhalten. Das letzte Viereck erfordert den Multiplicator

$$\frac{y_2 \cdot y_3 \cdots y_n}{x_2 \cdot x_3 \cdots x_n} = \frac{a_1 x_1}{a_{n+1} y_{n+1}}.$$

Da seine Seiten a_n, a_{n+1}, y_{n+1}, x_n waren, so werden diese jetzt:

$$\frac{a_n a_1 x_1}{a_{n+1} y_{n+1}}, \quad \frac{a_1 x_1}{y_{n+1}}, \quad \frac{a_1 x_1}{a_{n+1}}, \quad \frac{a_1 x_1 x_n}{a_{n+1} y_{n+1}}.$$

Betrachten wir die neue Koppel im Punkte C, so wird der Winkel $\sphericalangle \Sigma C$ dort gebildet von den Seiten

$$x_1 \text{ von } \mathfrak{B}_1 \quad \text{und} \quad \frac{a_1 x_1}{a_{n+1}} \quad \text{von} \quad \mathfrak{B}_n.$$

Wenden wir nun auf das Ganze eine Vergrösserung $\frac{a_{n+1}}{x_1}$, so werden die den Koppelpunkt C begrenzenden Schenkel:

$$a_{n+1} \quad \text{und} \quad a_1,$$

während in der alten Koppel der Punkt A begrenzt wurde von

$$a_1 \quad \text{und} \quad a_{n+1}.$$

Die Ecken A der alten und C der neuen Koppel haben demnach entsprechend gleichlange Schenkel, während sich ihre Winkel zu einem Vielfachen von $2R$ ergänzen.

7. Die Kempe-Burmester'sche Auftheilung des Stammvierecks* in Fachvierecke besteht in einer Aneinanderreihung zweier conjugirten Koppeln [verwandter Vierecke] (Fig. 5). Legt man die conjugirte (hier zweigliedrige) Koppel in der Ebene um (inversiren), so ergänzen sich die Ecken A der alten und C der neuen Koppel zu $4R$, die Schenkel decken sich der Länge nach und da $B_1 + B_3 = 2R$, so bildet der Umfang beider Koppeln ein Gelenkviereck, das Stammviereck Burmester's. Die Fachvierecke sind diagonal gepaart invers ähnlich, wie es sein muss. Auch stellt unsere Auftheilung den allgemeinsten Fall Burmester'scher Auftheilung vor, da man umgekehrt sofort übersieht, dass jede letztere auf einer Aneinanderreihung zweier conjugirten Koppeln beruht.

Diese Art der Darstellung hat neben dem Vorzug der Kürze wohl auch den grösster Uebersichtlichkeit der Ableitung und der Voraussetzungen über den Rationalitätsbereich.

8. Aneinanderreihung einer Koppel von $2m$ Vierecken und ihrer invers conjugirten (Fig. 6). Wie oben, decken sich hier die Schenkel von A und C der Länge nach, doch ist die Winkelsumme in $A (\equiv C)$ nunmehr $(4R)m$, das heisst, die Ebene wird $m$fach überdeckt. Im Uebrigen gliedern sich wieder an den Anschlusspunkten B_1 und B_{n+1} die Seiten der Koppeln geradlinig aneinander, so dass der Umfang der beiden Koppeln ein die Ebene $m$mal überdeckendes $4m$ Eck vorstellt. Dasselbe erscheint in $4m$ Fachvierecke aufgetheilt und stellt als ein $4m$-Gelenkpolygon einen den obigen analogen übergeschlossenen Mechanismus vor.

Anmerkung. Weist die erste Koppel eine ungerade Zahl von Vierecken auf, so fällt die erste Seite der ersten und die letzte Seite der

* Proceeding of the London Mathematical Society, Vol. IX und Zeitschrift der Mathematik und Physik XXXVIII, 4.

letzten Koppel nicht direct zusammen, sondern bilden die Schenkel eines gestreckten Winkels, in dessen Mitte und Scheitel der Punkt $A(=C)$ liegt (Fig. 7). Der Aspect liefert ebenfalls ein $4m$ Eck, die Auftheilung in Fachviereke erfolgt aber von einem in einer Seite gelegenen Punkt.

9. Decklage einer Koppel und ihrer inversen (Fig. 8).

Bleiben wir etwa bei der zweigliedrigen Koppel verwandter Vierecke $\mathfrak{V}_1$ und $\mathfrak{V}_2$ und nehmen an, dass $a_1 = a_3$ sei, so ist der Winkel A von gleichlangen Schenkeln begrenzt. Legen wir auf diese Koppel die inverse so, dass A und dessen Schenkel gemeinsam erscheinen, so sind beide symmetrisch zur Mittellinie des Winkels A.

Hält man den Schenkel AB_1 fest, so bilden die in B_1 einmündenden Stäbe $\overline{B_1C_1}$ und $\overline{B_1C_2}'$ mit dem festgehaltenen zwei Winkel, die sich zu 180^0 ergänzen, sonach symmetrisch zum Stab $\overline{AB_1}$ sind. Bringt man zwischen die Stäbe $\overline{B_1C_1}$ und $\overline{B_1C_2}'$ eine Kempe'sche Zelle, so beschreibt deren Ecke S eine Gerade, die senkrecht zu $\overline{AB_1}$ verläuft.

Verbindung mehrerer conjugirter Koppeln. Sei mit K_i' die zu K_i invers gelegte conjugirte Koppel, abgesehen von der absoluten Grösse, bezeichnet, so kann man die Reihung von

$$K_1,\ K_1',\ K_2,\ K_2',\ldots$$

versuchen und gelangt zu dem Satze, dass die Koppeln vertauschbar sind und eine Eintheilung eines Polygons in Fachvierecke ergeben, die jedoch hier nicht weiter behandelt werden soll.

10. Coordinatisirung verwandter Vierecke in der Gauss'schen Ebene. Wir setzen voraus, dass die Irrationalitäten des Stammvierecks bekannt seien, dann sind die Strecken a, b, c, d der Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ nach Richtung und Länge bekannt und nur gebunden durch die lineare Relation:

$$a + b + c + d = 0.$$

Ist nun $A'BC'D$ ein dem ersten bezüglich der Spiegeldiagonalen AC, $A'C'$ verwandtes Viereck, so müssen die Winkelpaare $B \backsim B'$, $C \backsim C'$, übereinstimmen. Hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Es herrsche die Winkelgleichheit $B = B'$, $D = D'$. Um diese zu markiren, setzen wir die Seiten

$$\overline{A'B'} = a',\quad \overline{B'C'} = b',\quad \overline{C'D'} = c,\quad \overline{D'A'} = d'$$

versuchsweise den folgenden Termen gleich:

$$\begin{aligned} a' &= \varkappa a \\ b' &= \lambda b \\ c' &= \mu c \,.\, \sigma \\ d' &= \nu d \,.\, \sigma \end{aligned} \qquad [\varkappa,\ \lambda,\ \mu,\ \nu \text{ reell},\ \sigma \text{ complex}].$$

Dann ist jedenfalls $B = B'$ und $D = D'$. Diese vier Strecken sollen ein geschlossenes Viereck bilden, das heisst:

$$a' + b' + c' + d' = 0, \quad \text{oder} \quad -\sigma = \frac{\varkappa a + \lambda b}{\mu c + \nu d};$$

ferner dürfen bei der Bewegung des Stammvierecks die Seiten des verwandten ihre absolute Länge nicht ändern, das heisst: $\sigma\delta\sigma$ muss constant sein. Dies ist aber nur möglich, wenn

$$\frac{ab}{cd} = \frac{a'b'}{c'd'} = \frac{\varkappa\lambda \cdot ab}{\mu\nu \cdot cd \cdot \sigma\delta\sigma},$$

das heisst, wenn

$$\sigma\delta\sigma = \frac{\varkappa\lambda}{\mu\nu}.$$

Aus dieser Bedingung folgt von selbst jene für die $\varkappa\lambda\mu\nu$:

$$\sigma\delta\sigma = \frac{\varkappa\lambda}{\mu\nu} = \frac{(\varkappa a + \lambda b)\delta(\varkappa a + \lambda b)}{(\mu c + \nu d)\delta(\mu c + \nu d)} = \frac{|\varkappa a|^2 + |\lambda b|^2 - \lambda\varkappa(|a|^2 + |b|^2) - \lambda\varkappa\Phi_1}{|\mu c|^2 + |\nu d|^2 - \mu\nu(|c|^2 + |d|^2) - \mu\nu\Phi_2},$$

wobei

$$\Phi_1 = (a + b)\delta(a + b) = \Phi_2 = (c + d)\delta(c + d)$$

ist, folglich im Zähler und Nenner weggelassen werden kann:

$$\sigma\delta\sigma = \frac{\varkappa\lambda}{\mu\nu} = \frac{(\varkappa - \lambda)[\varkappa|a|^2 - \lambda|b|^2]}{(\mu - \nu)[\mu|c|^2 - \nu|d|^2]}.$$

Damit ist die Aufstellung des verwandten Vierecks geleistet, wenn die Winkel bei B und D übereinstimmen.

b) Es soll Winkelergänzung eintreten: $B + B' = 180^0$, $D + D' = 180^0$. Dann hat man wie folgt anzusetzen:

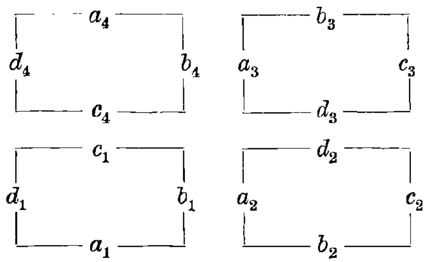
$$\begin{aligned} a' &= -\lambda\delta b \\ b' &= +\varkappa\delta a \\ c' &= -\nu\delta d \cdot \sigma \\ d' &= +\mu\delta c \cdot \sigma \end{aligned} \qquad [\varkappa, \lambda, \mu, \nu \text{ reell}].$$

Durch diesen Ansatz ist die Winkelbeziehung verbürgt. Die einzige Bedingung für σ und $\varkappa\lambda\mu\nu$, wurde bereits oben angegeben:

$$\sigma\delta\sigma = \frac{\varkappa\lambda}{\mu\nu} = \frac{(\varkappa - \lambda)[\varkappa|a|^2 + \lambda|b|^2]}{(\mu - \nu)[\mu|c|^2 + \nu|d|^2]}.$$

Anmerkung. Setzt man statt der Werthe von $a'b'c'd'$ die deltairten, so erscheint das Viereck in der Ebene einfach umgelegt.

11. Anderer Nachweis zur Kempe-Burmester'schen Auftheilung des Stammviereckes in Fachvierecke. Auch dieses Mal soll es sich nicht um eine Auftheilung, sondern um einen Aufbau des Stammvierecks aus den Fachvierecken handeln. Zu dem Ende nehmen wir ein Musterviereck $\mathfrak{V}$ zur Grundlage, dem wir das erste Fachviereck $\mathfrak{V}_1$ direct ähnlich machen. Das zweite $\mathfrak{V}_2$ wählen wir dem $\mathfrak{V}_1$ verwandt an. An dieses reihen wir $\delta\mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V}_3$ und $\delta\mathfrak{V}_2 = \mathfrak{V}_4$ in geeigneter Weise, um schliesslich zu zeigen, dass das Umrahmungsviereck sich lückenlos schliesst. Die Seiten der Vierecke bezeichnen wir in folgender Weise:



Dann ergiebt ein versuchsweiser Ansatz zunächst für die Gestalt der Vierecke (also nicht schon absolute Anschlusslage) die folgenden Proportionen:

im Viereck:	$a_i =$	$b_i =$	$c_i =$	$d_i =$
$\mathfrak{V}_1$	a	b	c	d
$\mathfrak{V}_2$	$\varkappa\,\delta\,a$	$-\lambda\,\delta\,b$	$\mu\,\delta\,c\,.\,\sigma$	$-\nu\,\delta\,d\,.\,\sigma$
$\mathfrak{V}_3$	$\delta\,a$	$\delta\,b$	$\delta\,c$	$\delta\,d$
$\mathfrak{V}_4$	$\varkappa\,a$	$-\lambda\,b$	$\mu\,c\,\delta\,\sigma$	$-\nu\,d\,.\,\delta\,\sigma$

Orientirt man die Vierecke, wie in Figur angedeutet, so erhält man für die wahren Werthe von a_i, b_i, c_i, d_i bis auf constante Factoren:

im Viereck:	$a_i =$	$b_i =$	$c_i =$	$d_i =$
$\mathfrak{V}_1$	a	b	c	d
$\mathfrak{V}_2$	$-\frac{\varkappa}{\lambda}\left\lvert\frac{a}{b}\right\rvert^2 b$	a	$-\frac{\mu}{\lambda}\,a\,\frac{\delta c}{\delta b}\cdot\sigma$	$\frac{\nu}{\lambda}\,a\,\frac{\delta d}{\delta b}\cdot\sigma$
$\mathfrak{V}_3$	$-\frac{\mu}{\lambda}\left\lvert\frac{a}{b}\right\rvert^2 b\,.\,\sigma$	$-\frac{\mu}{\lambda}\,a\,.\,\sigma$	$-\frac{\mu}{\lambda}\cdot a\,\frac{\delta c}{\delta b}\cdot\sigma$	$-\frac{\mu}{\lambda}\,a\,\frac{\delta d}{\delta b}\cdot\sigma$
$\mathfrak{V}_4$	$-\frac{\mu}{\lambda}\,a\,.\,\sigma$	$\frac{\mu}{\varkappa}\cdot b\,.\,\sigma$	$-\frac{\mu}{\nu}\,c$	d

Vergrössern wir die Vierecke der Reihe nach mit den Factoren Θ_0, H_0, K_0, Λ_0 und wählen diese so, dass die aneinander gefügten Vierecke je Seiten der Länge und Richtung nach gemeinsam haben, so dass also

$$b_1 = a_2\,,\quad d_2 = d_3\,,\quad a_3 = b_4\,,$$

wird, so zeigt sich, dass auch das letzte Paar Seiten c_4 und c_1 nach Länge und Richtung zusammenfallen. Dann aber wird der Umfang des Ganzen zum lückenlos geschlossenen Stammviereck für alle vom Musterviereck $\mathfrak{V}$ definirten Bewegungen der Fachvierecke.

Zu dem Ende ergeben sich folgende Werthe von Θ_0, H_0, K_0, L_0:

$$\Theta_0 = \frac{\varkappa}{\lambda}\left|\frac{a}{b}\right|^2 \cdot H_0,$$

$$H_0 = \frac{\mu}{\nu} K_0,$$

$$K_0 = \frac{\lambda}{\varkappa}\left|\frac{b}{a}\right|^2 L_0,$$

$$L_0 = \frac{\nu}{\mu}\Theta_0.$$

§ 10. Ein zweites Ränderungsprincip.

Bedingung dafür, dass sich ein Polygon schliesst (Fig. 3). Gehen wir zur allgemeinen Koppel von Vierecken zurück, wie sie in Figur 5 angedeutet ist. Jede Bewegung des Systems wird im Allgemeinen verursachen, dass die Schlusssseiten $\overline{B_1 A}$ und $\overline{A B_{n+1}}$ sich in ihrer gegenseitigen Lage verändern und nur in discreten Momenten der Bewegung wird ein Zusammenfallen beider Schenkel eintreten. Sollte dagegen dieses Zusammenfallen immer eintreten, bei allen Phasen der Bewegungen, so ist dies eine Forderung für einen übergeschlossenen Mechanismus. Diese Forderung kann algebraisch eingekleidet werden in die sogenannte Schliessungsbedingung, welche besagt, dass die Summe der Umfangsstrecken für die ganze Bewegung identisch verschwindet:

$$1)\quad \overline{B_1 C_1} + (\overline{C_1 B_2} + \overline{B_2 C_2}) + (\overline{C_2 B_3} + \overline{B_3 C_3}) + \cdots + \overline{C_n B_{n+1}} \equiv 0.$$

Dabei bedeutet jeder Summand einen Streckensummanden nach Richtung und Länge und soll zur Schliessung ferner noch vorausgesetzt werden, dass die Längen $\overline{A B_1}$ und $\overline{A B_{n+1}}$ einander gleich sind.

Das Ränderungsprincip. Angenommen, wir hätten irgend einen derartigen Mechanismus Ω nach dem Typus Figur 5 gewonnen, der immer geschlossen bleibt, so dass die Gleichung 1) besteht, so bleibt die Gleichung auch noch richtig, wenn wir folgende Umformung mit ihr vornehmen:

Man multiplicirt die auf das Viereck $\mathfrak{V}_1$ bezüglichen Werthe mit $\mathfrak{G}_1$, die auf das Viereck $\mathfrak{V}_2$ bezüglichen mit $\mathfrak{G}_2$ u. s. f. und erhält ($B_{n+1} \equiv B_1$).

$$2)\quad \begin{cases} \mathfrak{G}_1 \overline{B_1 C_1} + (\mathfrak{G}_1 \overline{C_1 B_2} + \mathfrak{G}_2 \overline{B_2 C_2}) + (\mathfrak{G}_2 \overline{C_2 B_3} + \mathfrak{G}_3 \overline{B_3 C_3}) + \cdots \\ \qquad + \mathfrak{G}_n \overline{C_n B_{n+1}} \equiv 0, \end{cases}$$

wenn man voraussetzt, dass

$$3)\quad \begin{cases} \mathfrak{G}_1 \overline{C_1 B_2} + \mathfrak{G}_2 \overline{B_2 C_2} = \overline{C_1 B_2} + \overline{B_2 C_3} \\ \mathfrak{G}_2 \overline{C_2 B_3} + \mathfrak{G}_3 \overline{B_3 C_3} = \overline{C_2 B_3} + \overline{B_3 C_3} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \mathfrak{G}_n \overline{C_n B_1} + \mathfrak{G}_1 \overline{B_1 C_1} = \overline{C_n B_1} + \overline{B_1 C_1} \end{cases} \quad [\mathfrak{G}_i \text{ complex}].$$

Was bedeutet diese Voraussetzung? Ein Viereck mit einem complexen Factor multipliciren heisst, dasselbe unter Vergrösserung drehen. Es erscheinen also unserer Bedingung gemäss alle Vierecke unseres Mechanismus verdreht. Die in den Gleichungen 3) enthaltene weitere Voraussetzung besagt, dass die Punkte B_i, in denen die neuen Vierecke noch immer gebunden erscheinen, nicht mehr im „Rande" $\overline{C_{i-1}C_i}$ liegen, sondern in der Spitze eines an den „Rand" angeschlossenen Dreiecks. Oder mit anderen Worten: Der neue Mechanismus hat mit dem alten den „Rand" der C_i gemein; die Anschlusspunkte B_i liegen aber nicht mehr direct im Rand, sondern in den mit den Randseiten verbundenen Ebenen in bestimmter Weise. Denn es ist zunächst noch fraglich, ob $\mathfrak{G}_1$ beliebig gewählt werden könne oder gewissen Bedingungen unterliege. Um dies zu untersuchen, bezeichnen wir wieder

$$\overline{B_i C_i} = x_i, \quad \overline{C_i B_{i+1}} = y_{i+1},$$

dann schreiben sich die Gleichungen 2) wie folgt:

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{G}_1 - 1)y_2 + (\mathfrak{G}_2 - 1)x_2 &= 0,\\
(\mathfrak{G}_2 - 1)y_3 + (\mathfrak{G}_3 - 1)x_3 &= 0,\\
\cdots\cdots\cdots&\cdots\\
(\mathfrak{G}_n - 1)y_1 + (\mathfrak{G}_1 - 1)x_1 &= 0.
\end{aligned}$$

Fasst man die $(\mathfrak{G}_i - 1)$ als homogene Unbekannte auf, so ist zunächst erforderlich, dass die Determinante verschwinde:

$$\begin{vmatrix}
y_2 & x_2 & 0 & 0 \ldots 0\\
0 & y_3 & x_3 & 0 \ldots 0\\
0 & 0 & y_4 & x_4 \ldots 0\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots\\
y_1 & 0 & 0 & 0 \ldots x_1
\end{vmatrix} = 0,$$

das heisst:

$$y_1 y_2 y_3 \ldots y_n = x_1 x_2 x_3 \ldots x_n.$$

Diese Gleichung ist aber für den vorausgesetzten übergeschlossenen Mechanismus identisch erfüllt, wie bereits früher abgeleitet wurde. Also ist klar, dass $\mathfrak{G}_1$ willkürlich angenommen werden darf. Das Ränderungsprincip hat allgemeine Giltigkeit.

Um die Drehung der Vierecke um $\mathfrak{G}_i$ praktisch zu bethätigen, schiebt man zwischen je zwei folgende einen Keil von entsprechender Grösse und kettet sie vorschriftsmässig an den Rand.

Der von Kempe* entwickelte übergeschlossene Mechanismus, in welchem die Seiten von zwei Gelenkvierecken in Punkten der mit diesen Seiten verbundenen Ebenen gekoppelt sind, kann sofort mit Hilfe unseres zweiten Ränderungsprincips aus dem Typus (Fig. 5) der Kempe-Burmester'schen Auftheilung des Stamm-

* Vergl. Proceedings of the London Mathematical Society Vol. IX.

vierecks in Fachvierecke angegeben werden (Fig. 9, 10). Die Ableitung gestaltet sich in diesem Falle sogar noch bedeutend elementarer, denn die Randschliessungsgleichung für die besagte Auftheilung wird nach unserer Bezeichnung
$$(a_1 + b_2) + (c_2 + c_3) + (b_3 + a_4) + (d_4 + d_1) \equiv 0,$$
oder die Werthe eingesetzt:
$$(\Theta_0 + H_0) a - (H_0 + K_0) a \, . \, \sigma \cdot \frac{\mu}{\lambda} \frac{\delta c}{\delta b} - (K_0 + L_0) a \sigma \frac{\mu}{\lambda} + (L_0 + \Theta_0) d = 0.$$

Diese Gleichung bleibt unverändert bestehen, wenn wir statt der reellen Werthe O_0, H_0, K_0, L_0 complexe Werthe O, H, K, L setzen, für welche:
$$\begin{aligned}\Theta + H &= \Theta_0 + H_0,\\ H + K &= H_0 + K_0,\\ K + L &= K_0 + L_0,\\ L + \Theta &= L_0 + \Theta_0.\end{aligned}$$

Dass die Determinante des Systems verschwindet, oder mit anderen Worten, die Wahl einer der Grössen Θ, H, K, L beliebig ist, erkennt man, wenn man die Gleichungen mit den Factoren $+1 - 1$, $+1 - 1$ multiplicirt und addirt.

Nun haben wir noch immer die Möglichkeit, die Grösse Θ reell oder complex zu wählen. Wählt man sie reell, so ergiebt sich der Typus von Figur 10, wählt man sie complex, so erscheint der Typus von Figur 9.

Anmerkung. Die Gleichungen, welche die Drehung und Vergrösserung der Fachvierecke charakterisiren, können auch in Parameterform geschrieben werden:
$$\begin{aligned}\Theta &= \Theta_0 + \vartheta,\\ H &= H_0 - \vartheta,\\ K &= K_0 + \vartheta,\\ L &= L_0 - \vartheta,\end{aligned}$$
wobei ϑ irgend eine complexe Zahl bedeuten kann. Wie sich aus den Werthen von Θ_0, H_0, K_0, L_0 ergiebt, sind diese Zahlen durch die Relation verknüpft:
$$\Theta_0 K_0 = H_0 L_0;$$
dies bedingt für die Reihe der Θ, H, K, L, ϑ die Gleichung:
$$(\Theta - \vartheta)(K - \vartheta) = (H + \vartheta)(K + \vartheta),$$
oder:
$$\begin{aligned}(\Theta K - HL) &= \vartheta(\Theta + H + K + L),\\ &= \vartheta(\Theta_0 + H_0 + K_0 + L_0),\\ &= \vartheta \left(1 + \frac{\nu}{\mu}\right)\left(1 + \frac{\varkappa}{\lambda}\left|\frac{a}{b}\right|^2\right).\end{aligned}$$

Da im Allgemeinen ϑ nicht verschwinden soll, so wird auch eine Relation:

$$\Theta K = HL$$

nicht eintreten, das heisst, die Anschlussdreiecke werden im Allgemeinen unter einander nicht ähnlich sein.

Erweiterung des Ränderungsprincips. Hat man einen übergeschlossenen sternförmigen Mechanismus, der aus gekoppelten Vierecken besteht, etwa wie Figur 11 einen solchen giebt (von P gehen eine gerade Zahl von Stäben aus, die cyklisch zu Parallelogrammen vereinigt sind, zwischen deren Gegenseiten sich Dreiecke von fester, aber im Allgemeinen verschiedener Gestalt befinden), so kann man die Frage stellen, ob auch hier eine Umränderung stattfinden kann. Diese Frage lässt sich bejahen und zwar besteht für die Zahl dieser Umränderungsfälle mindestens eine ∞^1fache Mannigfaltigkeit; im angezogenen Beispiele ist sie sogar ∞^2fach, das heisst, die Drehung und Dehnung des ersten Vierecks ist vollkommen beliebig und ergiebt die Ansicht von Figur 12, doch soll auf diese Erweiterungen zunächst nicht weiter eingegangen werden.

XVI.

Ueber die Doppelpunkte der algebraischen Curven.

Von

Dr. Hermann Oppenheimer

in Frankenthal (Rheinpfalz).

Am Eingang der Arbeit genüge ich einer Pflicht der Pietät, indem ich Herrn Professor Dr. Noether in Erlangen für den bewährten Rath, den er mir an manchen Stellen ertheilt hat, meinen tiefsten Dank ausspreche.

Einleitung.

Sind $\frac{(n+m)(n+m+3)}{2}$ beliebige Punkte in der Ebene gegeben, so lässt sich nach der Methode von Chasles mittelst projectiver Büschel n^{ter} und m^{ter} Ordnung durch diese Punkte die C^{n+m} legen. Diese Methode ist aber nicht für jede Form der

$$\frac{(n+m)(n+m+3)}{2}$$

Bedingungen, die eine solche Curve eindeutig bestimmen, zu gebrauchen.

Ist z. B.:
$$\frac{(n+m)(n+m+3)}{2} = 3p + q,$$

und sollen p beliebig liegende Punkte Doppelpunkte, q beliebige Punkte einfache Punkte der C^{m+n} werden, dann lässt sich dieselbe nicht ohne Weiteres anwenden.

Es soll zunächst eine auch für diesen Fall giltige Construction der algebraischen Curven mittelst Absplitterung gegeben werden. Diese wird sodann die Grundlage für die Untersuchung der C^{m+n} mit mehr als p Doppelpunkten bilden.

I.

Aufgabe. Eine C^n zu zeichnen aus p Doppelpunkten $A_1 - A_p$ und q einfachen Punkten $B_1 - B_q$, wobei

$$3p + q = \frac{n(n+3)}{2}$$

sei. Wir zeichnen einen Büschel von $C^{n+1}_{(A_1^2 - A^2_p,\ B_1 - B_q)}$, das heisst einen Büschel von C^{n+1}, die die Punkte $A_1 - A_p$ zu Doppelpunkten und die Punkte $B_1 - B_q$ zu einfachen Punkten haben.

Ein solcher Büschel hat ausserdem noch $[(n+1)^2 - 4p - q]$ Basispunkte $B_{q+1}, B_{q+2}, \ldots B_{(n+1)^2-4p}$. Durch diese und die Punkte $A_1 - A_p$ legen wir eine C^n, C^n_x; jede C^{n+1} des Büschels hat dann mit derselben eben diese $[(n+1)^2 - 4p - q]$ einfachen Basispunkte und die je doppelt zählenden p Basisdoppelpunkte $A_1 - A_p$ gemeinsam, also im Ganzen:

$$[(n+1)^2 - 4p - q + 2p] = [(n+1)^2 - 2p - q]$$

feste Punkte, schneidet also ausserdem noch in

$$\{n(n+1) - [(n+1)^2 - 2p - q]\} = (2p + q - n - 1)$$

weiteren Punkten. Es entsteht also durch den C^{n+1} Büschel auf der C^x_n eine Involution von je $(2p + q - n - 1)$ Punkten. Jede solche Gruppe ergiebt mit den gegebenen p Punkten gerade $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ Punkte, das heisst so viele, als erforderlich sind, um eine C^{n-1} eindeutig zu bestimmen. In der That ist

$$2p + q - n - 1 + p = 3p + q - n - 1 = \frac{n(n+3)}{2} - n - 1$$

$$\left(\text{wegen der Bedingung, } 3p + q = \frac{n(n+3)}{2}\right) = \frac{n(n+3) - 2n - 2}{2}$$
$$= \frac{(n-1)(n+2)}{2}.$$

Eine solche C^{n-1}, durch eine Involutionsgruppe und $A_1 - A_p$ gelegt, schneidet die C^n_x in weiteren $\frac{n^2 - 3n + 2}{2}$ Punkten; es folgt unmittelbar aus dem für adjungirte Curven erweiterten Brill-Noether'schen Restsatz, dass eine durch eine andere Involutionsgruppe veranlasste C^{n-1} ebenfalls durch diese $\frac{n^2 - 3n + 2}{2}$ Punkte geht, und dass diese zwei C^{n-1} einen Büschel bilden, der ebenfalls diese Involution ausschneidet. Dieser erzeugt mit dem Büschel der C^{n+1} die

$$C^n_{(A_1^2 - A_p^2,\ B_1 - B_q)}$$

unter Absplitterung der C^n_x. Dass eine solche Gruppe von:

$$\frac{(n-1)(n+2)}{2}$$

Punkten eine C^{n-1} eindeutig bestimmt, ist deswegen nothwendig, weil, wenn dieselbe erst durch s weitere Punkte bestimmt wäre, diese auf der zugehörigen C^{n+1} angenommen werden könnten. Dann würde die erzeugte C^n auch durch diese s Punkte gehen, also s Bedingungen mehr erfüllen, als nach der Constantenzahl ihrer Gleichung möglich ist. — Diese Construction gilt für ein beliebiges p, das der ganzzahligen Gleichung:

$$\frac{n(n+3)}{2} = 3p + q$$

genügt, z. B. auch für $p = 0$. So lässt sich eine $C^8_{(A_1 - A_{44})}$ z. B. construiren mittelst eines Büschels von $C^9_{(A_1 - A_{44},\ A_{45} - A_{81})}$ und eines dazu projectiven C^7 Büschels unter Absplitterung einer $C^8_{(A_{45} - A_{81})}$. Im Folgenden haben wir es mit Curven zu thun, für die p seinen höchsten Werth hat, q also entweder $= 0$ oder $= 2$ ist.

II.

Die $C^{3n}_{\left(A_1{}^2 - A^2{}_{\frac{3n(n+1)}{2}}\right)}$.

a) Die Construction einer solchen Curve bewerkstelligt sich nach obigem folgendermassen: wir zeichnen einen Büschel von $C^{3n+1}_{\left(A_1{}^2 - A^2{}_{\frac{3n(n+1)}{2}}\right)}$. Durch die $\left(\frac{9n^2}{2} + \frac{3n}{2} + 1\right)$ Basispunkte dieses Büschels, die Basisdoppelpunkte als einfache Punkte gerechnet, gehen im Allgemeinen $\infty^{\frac{3n(3n+3)}{2} - \frac{9n^2}{2} - \frac{3n}{2} - 1} = \infty^{3n-1}$ Curven $3n^{\text{ter}}$ Ordnung. Jede derselben veranlasst in der oben erörterten Weise einen Büschel von C^{3n-1} und gleichzeitig die projective Beziehung desselben auf den C^{3n+1} Büschel, deren Erzeugniss jene C^{3n} und die gewünschte $C^{3n}_{\left(A_1{}^2 - A^2{}_{\frac{3n(n+1)}{2}}\right)}$ ist.

b) Ein Fundamentalsatz der $C^{3n}_{\left(A_1{}^2 - A^2{}_{\frac{3n(n+1)}{2}},\ A^2{}_{\frac{3n(n+1)}{2}+1}\right)}$.

Wir wollen untersuchen, welche gegenseitige Lage $\frac{3n(n+1)}{2}$ Punkte $A_1 - A_{\frac{3n(n+1)}{2}}$ haben müssen, damit eine durch sie gelegte $C^{3n}_{\left(A_1{}^2 - A^2{}_{\frac{3n(n+1)}{2}}\right)}$ einen weiteren Doppelpunkt $A_{\frac{3n(n+1)}{2}+1}$ besitze. Bei der $C^6_{(A_1{}^2 - A_{10}{}^2)}$ ist diese Bedingung bekannt: neun von den zehn Doppelpunkten, $A_1 - A_9$, müssen so gelegen sein, dass durch sie ein Büschel von $C^6_{(A_1{}^2 - A_9{}^2)}$ geht. Es lässt sich nun zeigen, dass dieser Satz allgemein für Curven $3n^{\text{ter}}$

Ordnung gilt: dass durch je $\frac{3n(n+1)}{2}$ von $\left(\frac{3n(n+1)}{2}+1\right)$ Doppelpunkten einer C^{3n} ein Büschel von C^{3n} geht. Zum Beweise dieses Satzes wollen wir von der C^6 ausgehen und zusehen, wie die Eigenschaft, dass durch neun Punkte $A_1{}^2 - A_9{}^2$ ein Büschel von $C^6_{(A_1{}^2 - A_9{}^2)}$ geht, in unserer Constructionsmethode zum Ausdruck kommt.

Wir legen also durch solche neun Punkte einen Büschel von $C^7_{(A_1{}^2 - A_9{}^2)}$; ein solcher hat noch 13 weitere Basispunkte $B_1 - B_{13}$. Zeichnen wir nun irgend eine $C^6_{(A_1 - A_9,\ B_1 - B_{13})}$, so schneidet eine C^7 des Büschels, $C_1{}^7$, dieselbe in weiteren 11 Punkten, $C_1' - C_{11}'$; soll es nun einen Büschel von $C^6_{(A_1{}^2 - A_9{}^2)}$ geben, so ist das nur möglich, wenn durch die Punkte $A_1 - A_9$, $C_1' - C_{11}'$ nicht eine C^5, sondern ein Büschel von C^5 geht. Greifen wir eine Curve dieses Büschels, $C^{5\prime}$, heraus, so wird dieselbe die C^6 ausser in $A_1 - A_9$, $C_1' - C_{11}'$ noch in weiteren zehn Punkten $D_1' - D_{10}'$ schneiden. Eine zweite C^7, $C_2{}^7$, wird eine Punktgruppe $C_1'' - C_{11}''$ veranlassen; nach dem Restsatze giebt es eine $C^5_{(A_1 - A_9,\ C_1'' - C_{11}'',\ D_1' - D_{10}')}$; alle C^7 veranlassen also einen Büschel von $C^5_{(\ldots D_1' - D_{10}')}$ und liefern eine $C^6_{(A_1{}^2 - A_9{}^2)}$. Weil es aber ∞^1 Gruppen $D_1' - D_{10}'$ giebt — ausgeschnitten von allen Curven des C^5 Büschels — so erhalten wir in der That einen Büschel von C^6, wenn wir alle diese Gruppen benutzen. Dieser Bedingung lässt sich noch eine einfachere Form geben. Wir wählen als $C^6_{(A_1 - A_9,\ B_1 - B_{13})}$ eine zerfallene C_6, bestehend aus einer $C^5_{(A_1 - A_9,\ B_1 - B_{11})}$ und der Geraden $B_{12} - B_{13}$. Die Punktgruppe $C_1' - C_{11}'$, ausgeschnitten von der $C^{7\prime}$, vertheilt sich auf dieser C^6 so, dass fünf von den Punkten, $C_1' - C_5'$ auf $B_{12} - B_{13}$ liegen, die andern sechs auf der $C^5_{(A_1 - A_9,\ B_1 - B_{11})}$. Weil es nun aber einen Büschel solcher Curven

$$C^5_{(A_1 - A_9,\ C_1' - C_{11}')}$$

giebt, und fünf Punkte dieses Büschels auf einer Geraden $B_{12} - B_{13}$ liegen, so müssen die übrigen Punkte $A_1 - A_9$, $C_6' - C_{11}'$ auf einer C^4 liegen. Jede C^7 des Büschels veranlasst so eine C^4, und alle C^4 bilden wieder einen Büschel und erzeugen eine $C^6_{(A_1{}^2 - A_9{}^2)}$ unter Absplitterung der $C^5_{(A_1 - A_9,\ B_1 - B_{11})}$. Daraus folgt aber, dass die Punkte B_{12}, B_{13} auch auf der $C^5_{(A_1 - A_9,\ B_1 - B_{11})}$ liegen müssen. Denn als Basispunkte des einen erzeugenden Büschels gehören sie der erzeugten Curve an; würden sie also nicht auf der C^5 liegen, so müssten sie auf dem andern Bestandtheil des Erzeugnisses des C^7Büschels und des C^4Büschels, der C^6, liegen. Es würde also ein Netz von $C^6_{(A_1{}^2 - A_9{}^2)}$ geben; denn die Construction des $C^7_{(A_1{}^2 - A_9{}^2)}$Büschels erlaubt die beliebige Lage der Basispunkte B_{12}, B_{13}. Ein solches Netz kann aber nicht existiren, denn sonst gäbe es einen Büschel von $C^6_{(A_1{}^2 - A_9{}^2,\ P)}$, wenn P irgend ein Punkt ist, d. h. einen C^6Büschel mit 37 Basispunkten. Wir kommen so zu dem Kriterium eines Büschels von $C^6_{(A_1^2-A_9^2)}$: „Ein beliebiger Büschel von $C^7_{(A_1^2-A_9^2)}$ hat 13 weitere Basispunkte B_1-B_{13}; es giebt eine $C^5_{(A_1-A_9,\ B_1-B_{13})}$." Selbstverständlich bekommen wir gleichartige Beziehungen, wenn wir Büschel von Curven höherer Ordnung mit A_1-A_9 als Basisdoppelpunkten wählen. Ein beliebiger Büschel von $C^8_{(A_1^2-A_9^2)}$ z. B. hat 28 weitere Basispunkte B_1-B_{28}. A_1-A_9, B_1-B_{28} liegen auf einer C^7. Diese Relationen nun lassen sich leicht verallgemeinern. Es sei $\frac{3n(n+1)}{2}$ der Kürze wegen $=k$ gesetzt. Legen wir durch k Punkte $A_1, A_2 \dots A_k$ einen Büschel von $C^{3n+1}_{(A_1^2,\ A_2^2 \dots A_k^2)}$ und bestimmen die Zahl seiner weiteren Basispunkte, so finden wir für dieselbe $(3n+1)^2 - 4\cdot\frac{3n(n+1)}{2} = 3n^2+1$; es seien dies die Punkte $B_1-B_{3n^2+1}$; bei beliebiger Lage der Punkte A_1-A_k wird es nun keine $C^{3n-1}_{(A_1-A_k,\ B_1-B_{3n^2+1})}$ geben; denn

$$\frac{3n(n+1)}{2} + 3n^2 + 1 = \frac{(3n-1)(3n+2)}{2} + 2.$$

Ist dieses aber der Fall, dann existirt ein Büschel von $C^{3n}_{\left(A_1^2-A^2_{\frac{3n(n+1)}{2}}\right)}$. Denn jede Curve des Büschels von $C^{3n+1}_{(A_1^2-A_k^2)}$ schneidet die C^{3n-1}

1. in den zweifachen Schnittpunkten A_1-A_k,
2. in den einfachen Punkten $B_1-B_{3n^2+1}$;

die Zahl der weiteren Schnittpunkte beträgt also:

$$(3n+1)(3n-1) - 2\cdot\frac{3n(n+1)}{2} - (3n^2+1) = 3n^2 - 3n - 2;$$

diese weiteren Schnittpunkte seien für irgend eine Curve die Punkte $C_1', C_2', \dots C'_{3n^2-3n-2}$; nun giebt es einen Büschel von

$$C^{3n-2}_{\left(A_1-A_{\frac{3n(n+1)}{2}},\ C_1-C_{3n^2-3n-2}\right)};$$

dementsprechend erhalten wir auch einen Büschel von $C^{3n}_{(A_1^2-A_k^2)}$, wie wir das eben an dem Beispiel der C^6 erläutert haben.

In einem solchen Büschel wird nun auch wohl eine endliche Anzahl von Curven sich befinden, die einen weiteren Doppelpunkt besitzen. Es fragt sich aber, ob diese Curven allgemeine $C^{3n}_{(A_1^2-A^2_{k+1})}$ sind, oder ob dieses Kriterium der Existenz eines Büschels von $C^{3n}_{(A_1^2-A_k^2)}$ nicht vielleicht nur einem bestimmten Typus solcher Curven zukommt.

Wir wollen nun aber — der Kürze wegen an dem Beispiel der $C^9_{(A_1^2-A_{18}^2 A_{19}^2)}$ — zeigen, dass umgekehrt k Doppelpunkte einer gegebenen $C^{3n}_{(A_1^2-A^2_{k+1})}$ die eben erörterte Relation veranlassen, dass die Basispunkte eines Büschels von $C^{3n+1}_{(A_1^2-A_k^2)}$ auf einer $C^{3n-1)}$ liegen. Wir gehen auf die Construction der C^9 zurück, die sich mittelst eines C^{10}- und eines C^8-Büschels unter Absplitterung einer C^9 bewerkstelligt.. Und zwar gehen wir von der gegebenen $C^9_{(A_1^2-A_{18}^2)}$ aus. Nehmen wir einen beliebigen Büschel von $C^{10}_{(A_1^2-A_{18}^2)}$, so schneidet irgend eine Curve desselben, C', die C^9 in 18 weiteren Punkten $B_1'-B_{18}'$. Eine entsprechende C^8 muss durch A_1-A_{18}, $B_1'-B_{18}'$ gehen. Nehmen wir nun 8 beliebige weitere Punkte D_1-D_8 auf der C^9 an, so wird es unter allen Umständen eine

$$C^8_{(A_1-A_{18},\ B_1'-B_{18}',\ D_1-D_8)}$$

geben; dass, wenn die Punkte A_1-A_{18} beliebig liegen, es nicht unendlich viele solcher $C^8_{(A_1-A_{18},\ B_1'-B_{18}',\ D_1-D_8)}$ geben wird, lässt sich leicht erkennen. Würde das nämlich der Fall sein, und würden wir die Punkte D_1-D_8 in einer geraden Linie q liegend annehmen, so würden auch diese Punkte unendlich viele $C^8_{(A_1-A_{18},\ B_1'-B_{18}')}$, also jedenfalls auch einen Büschel solcher Curven veranlassen. Ein solcher C^8 Büschel aber, von dem acht Basispunkte D_1-D_8 auf einer geraden q liegen, enthält eine zerfallene Curve, bestehend aus q und einer $C^7_{(A_1-A_{18},\ B_1'-B_{18}')}$. Wenn aber eine $C^{10}_{(A_1^2-A_{18}^2,\ B_1-B_{18})}$ existirt, deren Schnittpunkte A_1-A_{18}, B_1-B_{18} auf einer C^7 liegen, so ist das nach dem Restsatz bei jeder solchen Curve der Fall; nehmen wir also einen Büschel von $C^{10}_{(A_1^2-A_{18}^2,\ B_1-B_{18})}$, so entspricht ihm ein Büschel von $C^7_{(A_1-A_{18},\ B_1-B_{18})}$. Die Absplitterungscurve ist also eine C^8, die durch sämmtliche 46 Basispunkte des C^{10} Büschels geht. Diese Eigenschaft aber involvirt, wie wir allgemein bewiesen haben, die Existenz eines Büschels von $C^9_{(A_1^2-A_{18}^2)}$. Also: bei beliebiger Lage der Punkte A_1-A_{18} ist das Vorhandensein einer unendlichen Mannigfaltigkeit von $C^8_{(A_1-A_{18},\ B_1-B_{18},\ D_1-D_8)}$ ausgeschlossen. Andererseits involvirt die Existenz dieser Mannigfaltigkeit diejenige Eigenschaft, die wir von der $C^9_{(A_1^2-A_{18}^2,\ A_{19}^2)}$ nachweisen wollen. Indem wir also zunächst Verhältnisse der allgemeinen $C^9_{(A_1^2-A_{18}^2)}$ besprechen, haben wir anzunehmen, dass es eine einzige $C^8_{(A_1^2-A_{18}^2,\ B_1'-B_{18}',\ D_1-D_8)}$ giebt.

Aus dem Restsatz folgt dann, dass, wenn eine Curve C'' des C^{10}-Büschels die Punkte $B_1''-B_{18}''$ ausschneidet, eine $C^8_{(A_1-A_{18},\ B_1''-B_{18}'',\ D_1-D_8)}$ existirt. Die beiden C^8 liefern den erzeugenden C^8 Büschel, von dem die Punkte D_1-D_{18} Basispunkte sind. Nun sind die Punkte D_9-D_{18} durch die eine Curve $C^8_{(A_1-A_{18},\ B_1'-B_{18}',\ D_1-D_8)}$ schon bestimmt; wir kommen so leicht zu dem Satze: wird eine C^p von irgend einer C^q in pq Punkten A_1-A_{pq} geschnitten, und dürfen wir von den weiteren Schnittpunkten einer $C^s_{(A_1-A_{pq})}$ mit der C^p noch r beliebig auf der C^p wählen, die Punkte B_1-B_r, so ist der Rest der Schnittpunkte nur abhängig von der Lage der Punkte B_1-B_r, nicht von der Wahl der C^q. Der Satz lässt noch eine weitere Verallgemeinerung zu. Legen wir einen Büschel von $C^{11}_{(A_1^2-A_{18}^2)}$ durch die Punkte $A_1 - A_{18}$, so schneidet irgend eine Curve C' desselben noch 27 Punkte $B_1' - B_{27}'$ aus. Dann dürfen wir auf der $C^9_{(A_1^2-A_{18}^2)}$ für eine entsprechende $C^9_{(A_1-A_{18},\ B_1'-B_{27}')}$ wiederum acht weitere Punkte $D_1 - D_8$ (und noch einen Punkt ausserhalb der C^9) wählen. Diese acht Punkte $D_1 - D_8$ bestimmen dann wiederum unabhängig von dem C^{11} Büschel die zehn Restpunkte $D_{10} - D_{18}$.

Dass nun diese mit den vorhin behandelten zehn Restpunkten, ausgeschnitten von einer C^8, identisch sein werden, ist mit Rücksicht darauf, dass sie nur von $D_1 - D_8$ abhängig sind, an und für sich wahrscheinlich, unmittelbar ist es aber ersichtlich, wenn wir eine C^{11} betrachten, bestehend aus einer $C^{10}_{(A_1^2-A_{18}^2,\ B_1-B_{18})}$ und einer Geraden $q(Q_1 - Q_9)$; ihr entspricht auch eine zerfallene C^9, bestehend aus q und der $C^8_{(A_1-A_{18},\ B_1-B_{18},\ D_1-D_{18})}$. Es hat also Sinn, von dem Reste einer Anzahl von Punkten $D_1 - D_8$, $B_1 - B_r$ zu sprechen. Was nun die $C^9_{(A_1^2-A_{18}^2,\ A_{19}^2)}$ betrifft, so dürfen, da die Construction der $C^9_{(A_1^2-A_{18}^2)}$ allgemein giltig und unabhängig davon ist, dass die erzeugte Curve mehr Doppelpunkte besitzt, als in das Constructionsarrangement eingehen, auch auf dieser die Basispunkte $D_1 - D_8$ für den erzeugenden Büschel beliebig gewählt werden. Dann werden wir auch einen dieser Basispunkte D_8 dem Doppelpunkt A_{19} beliebig nähern und schliesslich in denselben hineinfallen lassen dürfen. Dann wird auch ein Punkt der Restgruppe, D_9, in A_{19} hineinfallen. Nehmen wir also irgend einen Büschel von $C^{10}_{(A_1^2-A_{18}^2)}$, so werden sich die Curven des zugehörigen $C^8_{(D_1-D_8)}$ Büschels im Punkte A_{19} berühren. Eine C^8 wird in ihm einen Doppelpunkt besitzen, diejenige, welche der $C^{10}_{(\ldots A_{19})}$ entspricht. Nehmen wir nun die Basispunkte $D_1 - D_8$ in specieller Lage an, so zwar, dass wir eine Gerade q durch A_{19} legen, die die C^9 ausserdem in $Q_1 - Q_7$ schneidet, und die Punkte $Q_1 - Q_7$, A_{19} als Punkte $D_1 - D_8$ verwenden, so muss die $C^8_{(Q_1-Q_7,\ A_{19})}$, die der $C^{10}_{(A_1^2-A_{18}^2,\ B_1-B_{16},\ A_{19})}$ entspricht — $B_1 - B_{16}$ seien die einfachen Schnittpunkte mit der C^9 —, weil sie in A_{19} einen Doppelpunkt besitzt, in diese Gerade q und die $C^7_{(A_1-A_{18},\ B_1-B_{16},\ A_{19})}$ zerfallen. Diese C^7 muss also ebenfalls durch die Punkte $D_{10} - D_{18}$, den Rest der Punktgruppe $Q_1 - Q_7$, A_{19} gehen. Also alle möglichen $C^7_{(A_1-A_{18},\ B_1-B_{16},\ A_{19})}$ sind corresidual; die Restgruppe $D_{10} - D_{18}$ ist unmittelbar mit der $C^9_{(A_1^2-A_{18}^2,\ A_{19}^2)}$ gegeben. Es ist nun nach dem Bisherigen klar, dass auch alle möglichen $C^8_{(A_1-A_{18},\ B_1-B_{25},\ A_{19})}$ corresidual sind, wo $B_1 - B_{25}$ die einfachen Schnittpunkte von $C^{11}_{(A_1^2-A_{18}^2,\ A_{19})}$ sein sollen, und dass sie dieselben Punkte $D_{10} - D_{18}$ zum Rest haben.

Die Construction der $C^9_{(A_1^2-A_{18}^2,\ A_{19}^2)}$ mittelst eines solchen Büschels von $C^{11}_{(A_1^2-A_{18}^2,\ A_{19})}$ und des zugehörigen Büschels von $C^8_{(\ldots D_{10}-D_{18})}$ bildet nun den Ausgangspunkt für das zu behandelnde Problem. Legen wir wieder durch A_{19} eine Gerade, p, mit den weiteren Schnittpunkten $P_1 - P_7$ und zeichnen einen Büschel von $C^{11}_{(A_1{}^2 - A_{18}{}^2,\, A_{19},\, P_1 - P_7)}$, von welchem drei weitere Basispunkte P_8, P_9, P_{10} auf p liegen sollen, so wird ihm ein bestimmter Büschel von $C^8_{(A_1 - A_{18},\, P_1 - P_7,\, A_{19})}$ entsprechen. Es müssen also beide Büschel eine zerfallene Curve haben mit p als dem einen Bestandtheil. Nehmen wir einmal an, diese beiden zerfallenen Curven entsprächen einander in der projectiven Zuweisung, dann würde also von der Absplitterungscurve, einer C^{10}, diese Gerade p sich wiederum absplittern, der andere Bestandtheil wäre eine C^9. Diese C^9 müsste

1. durch $A_1 - A_{18}$,
2. durch die einfachen Basispunkte des C^{11} Büschels gehen, ausser den 11 auf der Geraden p befindlichen, ihre Zahl beträgt somit 38, $E_1 - E_{38}$.

Zeichnen wir nun aber diese $C^9_{(A_1 - A_{18},\, E_1 - E_{38})}$, so schneidet jede $C^{11}_{(A_1{}^2 - A_{18}{}^2,\, E_1 - E_{38})}$ diese Curve in weiteren 25 Punkten $N_1 - N_{25}$; nun giebt es aber einen Büschel von $C^8_{(A_1 - A_{18},\, N_1 - N_{25})}$, und dementsprechend auch einen Büschel von $C^9_{(A_1{}^2 - A_{18}{}^2)}$, wie wir das an dem Beispiel der C^6 ausgeführt haben. Noch in einer zweiten Weise folgt dieses Ergebniss aus der Annahme der Zusammengehörigkeit der beiden zerfallenen Curven; die zerfallene C^{11} wird im Allgemeinen eine beliebige $C^{10}_{(A_1{}^2 - A_{18}{}^2)}$ als zweiten Bestandtheil enthalten; denn man kann ja umgekehrt den C^{11} Büschel bilden, indem man eine beliebige $C^{10}_{(A_1{}^2 - A_{18}{}^2)}$ mit p zusammen als zerfallene C^{11} und eine beliebige

$$C^{11}_{(A_1{}^2 - A_{18}{}^2,\, A_{19},\, P_1 - P_7,\, P_8 - P_{10})}$$

wählt. Entspricht aber einer $C^{10}_{(A_1{}^2 - A_{18}{}^2,\, B_1 - B_{18})}$ eine

$$C^7_{(A_1 - A_{18},\, B_1 - B_{18})},$$

so ist das, wie wir eben ausführten, gleichbedeutend mit der Existenz eines Büschels von $C^9_{(A_1{}^2 - A_{18}{}^2)}$. Nun ist aber allgemeiner die Annahme, dass die beiden zerfallenen Curven sich nicht zu entsprechen brauchen, sondern der zerfallenen C^8 eine beliebige C^{11} entspricht und der zerfallenen C^{11} eine beliebige C^8. Wir können nun aber die Existenz solcher C^{11} Büschel nachweisen, bei welchen dieses Entsprecheu der zerfallenen Curven thatsächlich eintritt.

Wir wollen diese C^{11} unseres Büschels (der die zerfallene C^8 entspricht) kurz mit $C_1{}^z$ bezeichnen. Ein zweiter C^{11} Büschel, der den gleichen Bedingungen genügt, nur dass die drei Basispunkte $P_8 - P_{10}$ durch drei andere auf p liegende Punkte $P_8' - P_{10}'$ ersetzt sind, wird ebenfalls eine solche Curve enthalten, der eine zerfallene C^8 entspricht; sie heisse $C_2{}^z$;

C_1^z und C_2^z werden einen Büschel von C^{11} bilden, denen, weil zweien von ihnen zerfallene C^8 mit der Geraden p als dem einen Bestandtheil entsprechen, lauter zerfallene Curven zugehören. Dieser C^7 Büschel wird A_{19} nicht zum Basispunkt haben. Denn die C_1^z z. B., die durch $A_1^2 - A_{18}^2$, $B_1 - B_{18}$, $P_1 - P_7$, A_{19} geht, veranlasst eine $C^7_{(A_1 - A_{18},\ B_1 - B_{18},\ D_{10} - D_{18})}$, die keine weiteren Schnittpunkte mit der C^9 haben kann. Daraus folgt, dass, wenn das Erzeugniss des Büschels der C^z und der zugehörigen C^7 in A_{19} einen Doppelpunkt haben soll, sich die C^z in A_{19} berühren müssen. Es ist nun ein Beweismoment, dass diese Berührung im Allgemeinen keine mehrpunktige ist. Das lässt sich an Beispielen nachweisen. Nehmen wir nämlich irgend eine C_z, C_1^z, und nehmen als zweite Curve für den Büschel der C_z eine Curve, bestehend aus p und einer $C^{10}_{(A_1^2 - A_{18}^2,\ B_1 - B_{16},\ A_{19})}$, so ist das eine zerfallene C^{11} mit Doppelpunkt in A_{19}; ihr entspricht als C_8 p und die $C^7_{(A_1 - A_{18},\ B_1 - B_{16},\ A_{19})}$. — Dass auch die C^8 zerfallen muss, folgt daraus, dass die C^z vier Punkte mit der C^9 in A_{19} gemeinsam hat, also auch die zugehörige C^8 in A_{19} einen Doppelpunkt haben muss. — Weil nun aber die Tangentenrichtung der $C^{10}_{(A_1^2 - A_{18}^2,\ B_1 - B_{16},\ A_{19})}$ in A_{19} beliebig gewählt werden kann, wird im Allgemeinen die C_1^z mit dieser zerfallenen C^{11} nur zwei Punkte in A_{19} gemeinsam haben. Dann werden auch zwei allgemeine C^z nicht nothwendig mehr als zwei Punkte in A_{19} gemeinsam haben müssen. — Die C_1^z und die C_2^z haben gemeinsam:

1. $A_1 - A_{18}$ je vierfach;
2. $P_1 - P_7$;
3. A_{19} zweifach; also haben sie noch weitere 40 Schnittpunkte $E_1 - E_{40}$.

Die Absplitterungscurve, die ausser der $C^9_{(A_1^2 - A_{18}^2\ A_{19}^2)}$ von dem C^{11}- und dem C^7-Büschel erzeugt wird, ist also eine

$$C^9_{(A_1 - A_{18},\ E_1 - E_{40})}.$$

Diese wird nun aber von irgend einer C^z, $C^{z\prime}$, ausser in $E_1 - E_{40}$ und $A_1 - A_{18}$ doppelt, in weiteren 23 Punkten $N_1' - N_{23}'$ geschnitten.

Nun giebt es mindestens ∞^3

$$C^8_{(A_1 - A_{18}',\ N_1' - N_{23}')};$$

greifen wir eine heraus, so schneidet diese die C^9 in einem Rest von weiteren 31 Punkten $R_1 - R_{31}$, und alle C^z des Büschels veranlassen einen Büschel von

$$C^8_{(A_1 - A_{18},\ R_1 - R_{31})};$$

das Erzeugniss der beiden Büschel ist ausser der

$$C^9_{(A_1 - A_{18},\ E_1 - E_{40})} \text{ eine } C^{10}_{(A_1^2 - A_{18}^2,\ P_1 - P_7,\ A_{19})},$$

die t in A_{19} zur Tangente hat. Wir ersehen daraus, dass es ∞^3 solcher Curven $C^{10}_{(A_1^2 - A_{18}^2,\ P_1 - P_7,\ A_{19})}$ giebt. Würde es nun etwa ∞^4 solcher C^{10}

geben, dann würde noch ein Büschel von ihnen durch drei beliebige weitere Punkte S_9, S_{10}, S_{11} auf p gehen; ein solcher Büschel aber müsste, weil elf Basispunkte auf p liegen, in p und einen Büschel von $C^9_{(A_1^2 - A_{18}^2)}$ zerfallen, die wegen der gemeinsamen Tangente t auch noch durch A_{19} gehen müssten. Also abgesehen davon, dass diese Annahme von Haus aus unwahrscheinlich ist, würden ihre Consequenzen unseren Beweis in sich schliessen, ja über das Ziel desselben noch hinausgehen. Nehmen wir also die Existenz von nur ∞^3

$$C^{10}_{(A_1^2 - A_{18}^2,\ P_1 - P_7,\ A_{19})}$$

an, so ist klar, dass alle diese Curven in A_{19} eine gemeinsame Tangente besitzen. Denn, nehmen wir irgend eine

$$C^{10}_{(A_1^2 - A_{18}^2,\ P_1 - P_7,\ A_{19})},$$

C_{10}', und lassen durch zwei beliebige ihrer Punkte S_1, S_2 eine zweite Curve dieser Mannigfaltigkeit hindurchgehen, so wird zu dem Büschel, den die zwei Curven bilden, auch die zerfallene Curve gehören, bestehend aus der Geraden S_1S_2 und der $C^9_{(A_1^2 - A_{19}^2)}$; weil nun diese Curve in A_{19} einen Doppelpunkt hat, so wird die Tangente von $C^{10'}$ in A_{19} alle Curven des Büschels berühren, und weil wir die zweite Curve beliebig gewählt haben, überhaupt alle ∞^3 Curven. Wir haben also folgendes Resultat:

Alle möglichen $\quad C^z,\ C^{11}_{(A_1^2 - A_{18}^2,\ P_1 - P_7,\ A_{19})},$

denen zerfallene C^8 entsprechen, berühren sich im Punkte A_{19} und haben in ihm dieselbe Tangente, wie alle möglichen

$$C^{10}_{(A_1^2 - A_{18}^2,\ P_1 - P_7,\ A_{19})}.$$

Eine Drehung von p um A_{19} wird auch eine Drehung von t im Gefolge haben. Zwei Richtungen giebt es nun jedenfalls, in welchen t und p zusammenfallen: Die Doppeltangenten der C^9 in A_{19}, t_1 und t_2; wählen wir t_1 als Gerade p, dann fällt P_7 in die Nähe von A_{19}, und die

$$C^{10}_{(A_1^2 - A_{18}^2,\ P_1 - P_7,\ A_{19})}$$

werden t_1 zur Inflexionstangente haben; das Gleiche gilt von allen möglichen $C^z_{(t_1)}$. Nehmen wir nun irgend eine nicht zerfallene $C^{11}_{(A_1^2 - A_{18}^2,\ P_1 - P_7)}$, die t_1 in A_{19} berührt und durch drei beliebige Punkte P_8, P_9, P_{10} auf t_1 geht, und nehmen wir als zweite Curve für den erzeugenden C^{11} Büschel eine zerfallene, bestehend aus t_1 und irgend einer

$$C^{10}_{(A_1^2 - A_{18}^2,\ B_1 - B_{18})},$$

so muss auch die C^z dieses Büschels t_1 zur Inflexionstangente in A_{19} haben. Dann kann sie also nur die zerfallene Curve sein, weil sie zwölf Punkte mit t_1 gemeinsam hat. Bei diesem Arrangement also entsprechen sich in der That die zerfallenen Curven; und die Punkte $A_1 - A_{18}$. $B_1 - B_{18}$ liegen auf einer C^7, womit, wie wir sahen, unser Beweis erbracht ist.

Der allgemeine Beweis ist so vollkommen adäquat diesem Beispiel, dass es langweilig wäre, ihn in extenso anzuführen. Wir wollen daher nur einige Zahlen geben. An die Stelle der C^{11}- und der C^7-Büschel treten im allgemeinen Falle C^{3n+2} Büschel und solche von C^{3n-2}. Eine zweite

$$C^{3n+2}_{\left(A_1{}^2 - A^2{}_{\frac{3n(n+1)}{2}}\right)}$$

schneidet im Allgemeinen die

$$C^{3n}_{\left(A_1{}^2 - A^2{}_{\frac{3n(n+1)}{2}},\ A^2{}_{\frac{3n(n+1)}{2}+1}\right)}$$

ausser je vierfach in $A_1{}^2 - A^2_{\frac{3n(n+1)}{2}}$ noch in

$$\left\{3n(n+2) - 4\frac{3n(n+1)}{2}\right\} = 3n^2$$

Punkten $B_1 - B_{3n^2}$; geht aber eine solche Curve durch $A_{\frac{3n(n+1)}{2}+1}$ hindurch, so fallen in diesen Punkt zwei von den Schnittpunkten der beiden Curven. Die Gesammtzahl derselben reducirt sich also um 1.

Nun ist $\dfrac{3n(n+1)}{2} + 3n^2 - 1 = \dfrac{(3n-1)(3n+2)}{2}$;

also geht durch die Schnittpunkte einer solchen Curve eine C^{3n-1}; die Gesammtheit der $C^{3n-1}_{(A_1 - A_{k+1},\ B_1 - B_{3n^2-2})}$ — $k = \dfrac{3n(n+1)}{2}$ —, die in dieser Weise zu einem Büschel von $C^{3n+2}_{(A_1 - A^2_k,\ A_{k+1})}$ gehört, bildet einen Büschel mit demselben Residuum, wie das, das zu den Schnittpunkten A_{k+1}, A_{k+1}, $D_1 - D_{3n-2}$ irgend einer Geraden $p_{(A_{k+1})}$ gehört. Dem Büschel der $C^{11}_{(A_1{}^2 - A_{18}{}^2,\ A_{19},\ P_1 - P_7,\ P_8 - P_{10})}$ entspricht im allgemeinen Falle ein Büschel von $C^{3n+2}_{(A_1{}^2 - A^2_k,\ A_{k+1},\ P_1 - P_{3n-2},\ P_{3n-1},\ P_{3n+1})}$.

c) Eine Eigenschaft aller Curven eines Büschels von

$$C^{3n}_{\left(A_1{}^2 - A^2{}_{\frac{3n(n+1)}{2}}\right)};$$

eine merkwürdige C^{3n-3}.

Es sollen 18 Punkte $A_1 - A_{18}$ so gelegen sein, dass es einen Büschel von $C^9_{(A_1{}^2 - A_{16}{}^2)}$ giebt. Zeichnen wir sodann irgend einen Büschel von $C^{10}_{(A_1{}^2 - A_{18}{}^2)}$ mit den weiteren Basispunkten $B_1 - B_{28}$, so existirt also eine

$$C^8_{(A_1{}^2 - A_{18},\ B_1 - B_{28})}.$$

Auf dieser C^8 bilden die Gruppen von weiteren Schnittpunkten $S_1 - S_{16}$, die die C^{10} des Büschels ausschneiden, eine Involution. Wir erhalten dann eine C^9 des Büschels, wenn wir irgend einen Punkt R_1 auf C^8 annehmen und zu jeder Curve $C^{10}_{(A_1 - A_{18},\ S_1 - S_{16})}$ des Büschels die zugehörige $C^7_{(A_1 - A_{18},\ S_1 - S_{16},\ R_1)}$ zeichnen. Eine C^{10} und ihre entsprechende C^7 schneiden sich ausser in $A_1 - A_{18}$ doppelt und in $S_1 - S_{16}$ noch in 18 Punkten $B_1 - B_{18}$, die der C^9 angehören; also: „eine $C^9_{(A_1{}^2 - A_{18}{}^2)}$ charakterisirt sich dadurch als einem Büschel solcher Curven angehörig, dass sie von einer beliebigen $C^{10}_{(A_1{}^2 - A_{18}{}^2)}$ in 18 Punkten $B_1 - B_{18}$ geschnitten wird, die mit

$A_1 - A_{18}$ auf einer C^7 liegen". Diese Eigenschaft kommt also nicht nur den Curven mit einem 19. Doppelpunkt, sondern jeder Curve eines solchen Büschels zu. Auf jeder dieser Curven giebt es also eine solche Restgruppe $D_1 - D_{18}$, ausgeschnitten von den C^7, die zu den Curven $C^{10}_{(A_1^2 - A_{18}^2,\, B_1 - B_{18})}$ gehören.

Der C^7Büschel hat ausser R_1 noch 21 weitere Basispunkte $R_2 - R_{22}$ auf der C^8. Einer anderen Restgruppe $R_1' - R_{22}'$ entspricht ein anderer C^7Büschel und eine andere $C^9_{(A_1^2 - A_{18}^2)}$. Nehmen wir nun irgend zwei Curven C' und C'' des C^{10}Büschels, die die Punktgruppen $S_1' - S_{16}'$ und $S_1'' - S_{16}''$ ausschneiden möge, und nehmen wir irgend einen Punkt R_1 auf C^8, so wird es sowohl eine $C^7_{(A_1 - A_{18},\, S_1' - S_{16}'\, R_1)}$ als eine

$$C^7_{(A_1 - A_{18},\, S_1'' - S_{16}'',\, R_1)}$$

geben, die Curven schneiden die Basispunktgruppen $R_1 - R_{22}$ aus. Nehmen wir einen anderen Punkt R_1' auf der C^8, so veranlasst der zwei andere Curven

$$C^7_{(A_1 - A_{18},\, S_1' - S_{16}',\, R_1')} \quad \text{und} \quad C^7_{(A_1 - A_{18},\, S_1'' - S_{16}'',\, R_1')};$$

die eine andere Basispunktgruppe $R_1' - R_{22}'$ ausschneiden. Indem wir so die Curven der beiden C^7Büschel andere und andere Basispunktgruppen ausschneiden lassen, beziehen wir sie gleichzeitig projectiv auf einander. Das Erzeugniss ist die C^8 und eine $C^6_{(A_1 - A_{18})}$. Jeder der erzeugenden Büschel hat noch 15 weitere Basispunkte, resp. $S_{35}' - S_{49}'$ und $S_{35}'' - S_{49}''$. Diese liegen auf der C^6. Dieselbe ist also der Ort der weiteren Basispunkte aller Büschel von $C^7_{(A_1 - A_{18},\, S_1 - S_{16})}$, veranlasst durch die einzelnen C^{10}. Denn, dass wir bei anderer Wahl der erzeugenden C^7Büschel dieselbe C^6 erhalten, geht aus der Beziehung hervor, in der dieselbe zu den Curven unseres C^9Büschels steht: auf der C^6 liegen 1. die Restgruppen $D_{10} - D_{18}$ aller C^9; denn, nehmen wir wieder die Büschel der $C^7_{(A_1 - A_{18},\, S_1' - S_{16}')}$ und der $C^7_{(A_1 - A_{18},\, S_1'' - S_{16}'')}$ als erzeugende, und seien wieder $C^7_{(\ldots S_1' - S_{16}',\, R_1)}$ und $C^7_{(S_1'' - S_{16}'',\, R_1)}$ zwei entsprechende Curven, so bilden dieselben doch den erzeugenden C^7Büschel einer bestimmten C^9 und gehen deshalb durch die Restgruppe $D_{10} - D_{18}$ dieser Curve; 2. geht die C^6 durch die weiteren Basispunkte $N_1 - N_9$, die der C^9Büschel ausser den Basisdoppelpunkten $A_1 - A_{18}$ noch hat. Denn, nehmen wir die $C^{10}_{(N_1)}$, die den Büschel der $C^7_{(\ldots S_1^{(n)} - S_{16}^{(n)})}$ veranlassen möge, so ist N_1 offenbar einer der 15 weiteren Basispunkte dieses Büschels, da jede Curve desselben auf der $C^{10}_{(N_1)}$ die Punktgruppen $B_1 - B_{18}$ einer C^9 ausschneidet, alle diese Punktgruppen aber N_1 gemeinsam haben. Also: die neun weiteren Basispunkte $N_1 - N_9$ eines $C^9_{(A_1^2 - A_{18}^2)}$Büschels und die Restgruppen $D_{10} - D_{18}$ aller C^9 desselben liegen auf einer $C^6_{(A_1 - A_{18})}$. Allgemein lauten diese Resultate: Irgend eine C^{3n} ist Individuum eines Büschels von $C^{3n}_{\left(A_1^2 - A^2_{\frac{3n(n+1)}{2}}\right)}$, wenn eine

$C^{3n+1}_{\left(A_1{}^2-A^2{}_{\frac{3n(n+1)}{2}}\right)}$ sie in $3n(n-1)$ weiteren Punkten $B_1 - B_{3n(n-1)}$ schneidet, die mit $A_1 - A_{\frac{3n(n+1)}{2}}$ auf einer C^{3n-2} liegen. Alle diese Punktgruppen $B_1 - B_{3n(n-1)}$ sind corresidual, der Rest besteht aus $3n(n-2)$ Punkten $D_{3n+1} - D_{3n(n-1)}$; jede Curve hat einen solchen Rest. Alle diese Punktgruppen liegen auf einer $C^{3n-3}_{\left(A_1-A_{\frac{3n(n+1)}{2}}\right)}$; dieselbe geht auch durch die $3n(n-2)$ einfachen Basispunkte des Büschels $N_1 - N_{3n(n-2)}$.

d) Um interessante Erweiterungen dieses Satzes kennen zu lernen, betrachten wir das Netz der $C^9_{(A_1{}^2-A_{17}{}^2,\, A_{18})}$. Zeichnen wir irgend eine Curve dieses Netzes, C', so bildet dieselbe offenbar mit jeder $C^9_{(A_1{}^2-A_{18}{}^2)}$ des Büschels selbst einen Büschel, der A_{18} zum Berührungspunkt hat. Das ganze Netz von C^9, das $A_1 - A_{17}$ zu Doppelpunkten und A_{18} zum einfachen Punkte hat, wird so in ∞^1 Büschel zerlegt, deren jeder A_{18} zum Berührungsbasispunkt hat. Nun gehört aber C' allen diesen Büscheln an; ihre Tangente in A_{18} ist somit gemeinsame Tangente aller dieser Büschel. Also: „Hat eine Gruppe von Punkten $A_1 - A_{18}$ die Eigenschaft der Existenz eines Büschels von $C^9_{(A_1{}^2-A_{18}{}^2)}$, so haben alle $C^9_{(A_1{}^2-A_{17}{}^2,\, A_{18})}$ in A_{18} dieselbe Tangente $t_{A_{18}}$".

e) Es lässt sich nun zeigen, dass diese in c) besprochene C^6, veranlasst durch den Büschel der $C^9_{(A_1{}^2-A_{18}{}^2)}$ eine Curve eines Netzes ähnlich definirter C^6 ist, indem aus dem Netze der $C^9_{(A_1{}^2-A_{17}{}^2,\, A_{18})}$ jeder Büschel eine solche C^6 veranlasst.

Das Kriterium dafür, dass durch $\left(\frac{n(n+3)}{2} - 1\right)$ Punkte ein Netz von C^n geht, besteht darin, dass die $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ weiteren Punkte eines Büschels solcher Curven auf einer C^{n-3} liegen (Bacharach, Inauguraldissertation). Aus der Modification dieses Satzes für Curven mit Doppelpunkten folgt, dass, wenn irgend ein Büschel aus dem Netze der $C^9_{(A_1{}^2-A_{17}{}^2,\, A_{18})}$ die weiteren Basispunkte $B_1 - B_{11}$ besitzt, eine $C^6_{(A_1-A_{17},\, B_1-B_{11})}$ existirt. Alle Büschel dieses Netzes veranlassen so ein Netz von C^6, und von diesem Netze ist unsere $C^6_{(A_1-A_{18},\, N_1-N_9)}$ eine specielle Curve.

Nehmen wir nun irgend eine Curve C' aus dem Netze der $C^9_{(A_1{}^2-A_{17}{}^2,\, A_{18})}$, greifen ferner einen Büschel aus demselben heraus, dem C' nicht angehört, mit den weiteren Basispunkten $B_1 - B_{11}$, so lässt sich die C' mit Hilfe dieses Büschels construiren, indem wir irgend einer Curve C'' desselben, die die Punktgruppe $B_1'' - B_{11}''$ auf C' ausschneidet, die $C^6_{(A_1-A_{17},\, B_1''-B_{11}'')}$ entsprechen lassen. Die Absplitterungscurve ist die $C^6_{(A_1-A_{17},\, B_1-B_{11})}$, also selbst wieder eine Curve unserer Mannigfaltigkeit. Was den erzeugenden Büschel der $C^6_{(A_1-A_{17})}$ angeht, so liegen von seinen 19 weiteren Basispunkten neun auf der C', die Restgruppe $D_1 - D_9$. Die übrigen zehn, $Q_1 - Q_{10}$, liegen auf der Absplitterungscurve $C^6_{(A_1-A_{17}, B_1-B_{11})}$.

Daraus folgt:

Das Netz der $C^6_{(A_1-A_{17})}$ hat zehn weitere Basispunkte $Q_1 - Q_{10}$. In der That, construiren wir eine zweite $C^9_{(A_1-A_{17}, A_{18})}$, C''', unter Beibehaltung des C^9 Büschels, so schneiden sich C''' und C' in der Punktgruppe $B_1''' - B_{11}'''$; der C'' erzeugende C^6 Büschel hat also mit dem, der zu C' gehört, die $C^6_{(A_1-A_{17}, Q_1-Q_{10}, B_1'''-B_{11}''')}$ gemeinsam, und weil auch die Absplitterungscurve $C^6_{(A_1-A_{17}, Q_1-Q_{10}, B_1-B_{11})}$ dieselbe bleibt wegen der Beibehaltung des C^9 Büschels, so hat auch der zu C''' gehörige die Basispunktgruppe $Q_1 - Q_{10}$. Aus dieser Erörterung folgt ohne Weiteres: Nehmen wir irgend einen Büschel von $C^9_{(A_1{}^2-A_{17}{}^2, A_{18})}$ mit den weiteren Basispunkten $B_1 - B_{11}$, so geht die zugehörige $C^6_{(A_1-A_{17}, B_1-B_{11})}$ durch die Restgruppen $D_1 - D_9$ aller Curven dieses Büschels. Umgekehrt ist also jede C^6 des Netzes erfüllt von Punktgruppen $D_1 - D_9$; jede dieser Punktgruppen veranlasst eine $C^9_{(A_1{}^2-A_{17}{}^2, A_{18}, D_1-D_9)}$, und alle diese C^9 bilden einen Büschel mit den weiteren Basispunkten $B_1 - B_{11}$, die auf dieser C^6 liegen. Wir gehen nun zu der Betrachtung des Büschels der $C^6_{(A_1-A_{17}, Q_1-Q_{10}, A_{18})}$ über. Nehmen wir die $C^6_{(A_1-A_{17}, A_{18})}$, die zu dem Büschel der $C^9_{(A_1{}^2-A_{17}{}^2, A_{18}{}^2)}$ gehört, so wird eine von den unendlich vielen Punktgruppen $D_1 - D_9$, deren Trägerin sie ist, einen ihrer Punkte in A_{18} liegen haben. Die betreffende C^9 heisst C'. Schneidet also irgend eine $C^{10}_{(A_1{}^2-A_{18}{}^2)}$ C' in den weiteren Punkten $B_1 - B_{18}$, so fallen von den neun weiteren Schnittpunkten der $C^7_{(A_1-A_{18}, B_1-B_{18})}$ noch zwei mit A_{18} zusammen. Diese C^7 hat also mit der C^9 in A_{18} vier Schnittpunkte gemeinsam. — Es ist leicht einzusehen, dass, wenn ein Restpunkt in einen Doppelpunkt hineinfällt, ein zweiter Punkt des Restes sich mit ihm in dem Doppelpunkt vereinigt. — Diese C^7 hat also mit der C^9 in A_{18} vier Schnittpunkte gemeinsam. Wählen wir nun an Stelle der C^{10}, die die Punkte $B_1 - B_{18}$ ausschneidet, eine zerfallene Curve, bestehend aus einer mit C' nicht identischen Curve aus dem Büschel der $C^9_{(A_1{}^2-A_{18}{}^2)}$ und einer Geraden p, so zerfällt die zugehörige C^7 in die $C^6_{(A_1-A_{17}, A_{18})}$ und die Gerade p.

Daraus folgt:

Die C' hat in A_{18} eine singuläre Tangente, die zugleich die Tangente der $C^6_{(A_1-A_{18})}$ in A_{18} ist. Aus dem Umstande nun, dass diese C^6 vier Punkte mit der C' in A_{18} gemeinsam hat, folgt, dass von der Punktgruppe $D_1 - D_9$, zu der A_{18} gehört, zwei in diesen Punkt hineinfallen. Daraus ergiebt sich, dass der Büschel der $C^6_{(A_1-A_{17}, A_{18})}$ A_{18} zum Berührungsbasispunkt hat. Es lässt sich nun weiter zeigen, dass die zugehörige Basistangente $t_{A_{18}}$ die Basistangente des Netzes der $C^9_{(A_1{}^2-A_{17}{}^2, A_{18})}$ ist. Wir erhalten nämlich diesen Büschel, wenn wir durch jeden Punkt von C' den Büschel der $C^9_{(A_1{}^2-A_{17}{}^2,\, A_{18})}$ und die zugehörige C^6 zeichnen. Greifen wir einen der Büschel heraus und nehmen wir an, er hätte elf von A_{18} verschiedene einfache Basispunkte $B_1 - B_{11}$, so müsste, weil die zugehörige C^6 der Ort der Restgruppen $D_1 - D_9$ aller Curven des Büschels ist, A_{18} zweifacher Restpunkt aller C^9 dieses Büschels, also überhaupt jeder C^9 des Netzes sein.

Diese Annahme ist ungereimt und würde z. B. zur Folge haben, dass von dem Büschel der $C^9_{(A_1{}^2-A_{18}{}^2)}$ nicht nur die C', sondern jede Curve mit der $C^6_{(A_1-A_{18})}$ vier Schnittpunkte in A_{18}, also auch in jedem anderen Punkte $A_1 - A_{17}$ hat. Es bleibt nur übrig, dass jede $C^9_{(A_1{}^2-A_{17}{}^2,\, A_{18})}$ mit C' in A_{18} vier Punkte gemeinsam hat, d. h. dass die singuläre Tangente $t_{A_{18}}$ zugleich Basistangente des Netzes der $C^9_{(A_1{}^2-A_{17}{}^2,\, A_{18})}$ ist. Bemerken wir noch, dass das Netz der $C^9_{(A_1{}^2-A_{17}{}^2,\, A_{18})}$ mit dem der

den Büschel der $\begin{array}{l} C^9_{(A_1{}^2-A_{16}{}^2,\, A_{18}{}^2,\, A_{17})} \\ C^9_{(A_1{}^2-A_{17}{}^2,\, A_{18}{}^2,\, N_1-N_9)}, \end{array}$

also auch die $C^6_{(A_1-A_{16},\, N_1-N_9)}$ gemeinsam hat, so kommen wir zu dem Resultate:

„Die Basistangenten t_{A_1}, t_{A_2} ... der Netze der

$$C^9_{(A_2{}^2-A_{18}{}^2,\, A_1)}, \quad C^9_{(A_1{}^2,\, A_3{}^2-A_{18}{}^2,\, A_2)} \cdots$$

sind zugleich Tangenten der $C^6_{(A_1-A_{18},\, N_1-N_9)}$.

f) Wir haben uns nun mit der Frage zu beschäftigen, wie viele von den Doppelpunkten einer $C^9_{(A_1{}^2-A_{19}{}^2)}$ von einander unabhängig sind. — Die Betrachtung der $C^6_{(A_1{}^2-A_{10}{}^2)}$, von deren zehn Doppelpunkten acht eine beliebige Lage haben können, könnte vermuthen lassen, dass analog auch 17 von den Punkten $A_1 - A_{19}$ beliebig liegen. Dass das aber in der That nicht der Fall ist, lässt sich leicht erkennen. Denn, zeichnen wir die Jacobi'sche Curve zu dem Netze der $C^9_{(A_1{}^2-A_{17}{}^2,\, P_1)}$, wenn P_1 ein beliebiger Punkt der Ebene ist, so muss dieselbe durch A_{18} und A_{19} hindurchgehen, weil sowohl der Büschel der $C^9_{(A_1{}^2-A_{17}{}^2,\, A_{18}{}^2)}$, als auch der der $C^9_{(A_1{}^2-A_{17}{}^2,\, A_{19}{}^2)}$ eine Curve durch P senden wird, das heisst, das ganze System der Jacobi'schen Curven aller Netze von $C^9_{(A_1{}^2-A_{17}{}^2)}$ geht durch A_{18}, A_{19}. Das wird aber bei beliebiger Lage der Punkte A_{18}, A_{19} nicht der Fall sein.

Anmerkung. Die Consequenz der Annahme, dass die Jacobi'sche Curve eines Netzes von $C^9_{(A_1{}^2-A_{17}{}^2,\, P)}$ bei beliebiger Lage der Punkte $A_1 - A_{17}$, P durch bestimmte Punkte der Ebene gehen muss, wäre die, dass auch die Jacobi'sche Curve von Netzen, die in anderen Formen, z. B. durch 52 einfache Basispunkte gegeben sind, ähnlichen Bedingungen unterliegen würde, was absurd ist. Die eigenartigen Verhältnisse der C^6 haben vielmehr in der singulären Eigenschaft ihren Grund, dass die

Jacobi'sche Curve eines Netzes von $C^6_{(A_1{}^2-A_8{}^2,\ P)}$ in die doppelt zu rechnende $C^3_{(A_1-A_8,\ P)}$ und eine $C^9_{(A_1{}^3-A_8{}^3)}$ zerfällt.

Dass aber 16 von den Doppelpunkten A_1-A_{16} beliebig liegen können, folgt aus dem Umstand, dass sich zwei Systeme von $C^9_{(A_1{}^2-A_{16}{}^2)}$ angeben lassen, die je sechs weitere Doppelpunkte besitzen. Die C^9, bestehend aus der $C^8_{(A_1{}^2-A_{14}{}^2,\ A_{15},\ A_{16})}$ und der Geraden $A_{15}-A_{16}$ ist eine Curve des einen Systems; die weiteren sechs Schnittpunkte der Geraden $A_{15}-A_{16}$ mit der C^8, S_1-S_6, sind sechs weitere Doppelpunkte dieser C^9. Es giebt folglich einen Büschel von $C^9_{(A_1{}^2-A_{14}{}^2,\ A_{15}{}^2,\ A_{16}{}^2,\ S_1{}^2,\ S_2{}^2)}$, der eine Curve durch einen beliebigen Punkt P sendet.

Solcher Curven giebt es $\frac{16\,.\,15}{1\,.\,2}$. Das zweite System von ebenfalls $\frac{16\,.\,15}{1\,.\,2}$ Curven erhält man, wenn man durch jede Gruppe von 14 Punkten A_1-A_{14} die C^4 und diejenige C^5 legt, die in den übrigen zwei Punkten Doppelpunkte besitzt. $C^4_{(A_1-A_{14})}$ und $C^5_{(A_1-A_{14},\ A_{15}{}^2,\ A_{16}{}^2)}$ bilden wiederum eine zerfallene C^9 mit den sechs weiteren Schnittpunkten der beiden Bestandtheile, $S_1'-S_6'$ als weiteren Doppelpunkten.

Was nun die Frage angeht, wie viele Punkte A_{17} zu einer Gruppe willkürlich liegender Punkte A_1-A_{16} gehören, so lässt sich aus dem Umstande, dass die angegebenen zwei Systeme von Punkten A_{17}, das der S_1-S_6 und das der $S_1'-S_6'$, nicht gleichartig zu A_1-A_{16} gelegen sind, schliessen, dass diese Punkte A_{17} eine Curve erfüllen werden. Denn, würde nur eine endliche Anzahl solcher Punkte existiren, so wäre zu erwarten, dass dieselbe Construction, die eine dieser gleichartig definirten Curven liefert, auch alle anderen ergiebt.

Nehmen wir nun auf dieser Curve $F_{(A_1-A_{16})}$, die zu 16 beliebig liegenden Punkten A_1-A_{16} die fraglichen Punkte A_{17} enthält, irgend einen Punkt A_{17} an und untersuchen die Zahl der Punkte A_{18}, die die Eigenschaft haben, dass es einen Büschel von $C^9_{(A_1{}^2-A_{16}{}^2,\ A_{17}{}^2,\ A_{18}{}^2)}$ giebt, so folgt aus der Existenz dieser Curve ohne Weiteres, dass die Zahl der Punkte A_{18} eine endliche sein muss; denn, würden die Punkte A_{18} eine Curve erfüllen, so müsste diese identisch mit $F_{(A_1-A_{16})}$ sein; dieselbe Curve also, die durch die Punkte A_1-A_{16} schon bestimmt ist, würde eine Definition zulassen, in die irgend ein weiterer ihrer Punkte, A_{17}, einginge. Das ist ungereimt; es würde zur Folge haben, dass die Punkte A_1-A_{16} auch einfache, beliebig liegende Punkte von $F_{(A_1-A_{16})}$ sein müssten; es giebt aber keine Curve, die durch 16 oder 17 beliebige ihrer Punkte eindeutig bestimmt ist.

In der That ist es leicht, die endliche Anzahl dieser Punkte A_{18} zu construiren, wenn die Punktgruppe A_1-A_{17} und einer der gesuchten Punkte, A'_{18}, gegeben ist.

Da diese Punkte auf den Jacobi'schen Curven aller Netze von $C^9_{(A_1{}^2-A_{17}{}^2)}$ gelegen sind, so liegen sie auch auf der, die zu dem Netze der

$C^9_{(A_1^2-A_{17}^2,\ A_{18})}$ gehört. A_{18} ist selbst als Berührungsbasispunkt des Netzes dreifacher Punkt dieser Curve. Nehmen wir sodann einen der neun einfachen Basispunkte N_1-N_9 des Büschels der $C^9_{(A_1^2-A_{17}^2,\ A_{18}^2)}$, so gehört zu dem Netze der $C^9_{(A_1^2-A_{17}^2,\ N_1)}$ eine andere Jacobi'sche Curve; dieselbe enthält natürlich den Punkt A'_{18}, aber dass derselbe nun einfacher Punkt der Curve sein wird, obgleich er als Basisdoppelpunkt ein singulärer Berührungspunkt ist, zeigt uns ein Blick auf die C^6. Zeichnen wir einen Büschel von $C^6_{(A_1^2-A_8^2,\ A_9^2)}$ und irgend eine $C^3_{(A_1-A_8)}$, die nicht durch A_9 geht, so bildet die C^3, wenn man sie doppelt rechnet und als zerfallene C^6 auffasst, mit dem Büschel ein Netz von C^6. Die Jacobi'sche Curve dieses Netzes besteht aus der $(C^3)^2$, von der jeder Punkt ein Doppelpunkt ist, und der $C^9_{(A_1^3-A_8^3)}$, dem Orte der neunten Doppelpunkte nicht zerfallener $C^6_{(A_1^2-A_8^2,\ A_9^2)}$. Von dieser Jacobi'schen Curve aber ist A_9 ein einfacher Punkt. Also wird das Gleiche in unserem Falle auch von dem Punkte A'_{18} gelten. Die beiden Jacobi'schen Curven, die zu dem Netze der $C^9_{(A_1^2-A_{17}^2,\ A_{18})}$ und die zu dem Netz der $C^9_{(A_1^2-A_{17}^2,\ N_1)}$ gehörige, haben als C^{24} 576 Schnittpunkte mit einander. Von diesen zählen

1. A_1-A_{17} als fünffache Punkte beider Curven je 25fach,
2. A'_{18} als dreifacher Punkt der einen Curve dreifach.

Sie haben also noch $576-17.25-3=148$ Punkte gemeinsam, und es ist ohne Weiteres klar, dass diese Punkte

$$A''_{18},\ A'''_{18},\ \ldots A^{(149)}_{18}$$

die weiteren Punkte A_{18} sind. Denn, da A''_{18} auf beiden Jacobi'schen Curven liegt, so giebt es eine

$$C^9_{(A_1^2-A_{17}^2,\ A_{18}',\ A_{18}''^2)} \quad \text{und eine} \quad C^9_{(A_1^2-A_{17}^2,\ N_1,\ A_{18}''^2)}.$$

Fallen nun die beiden Curven in eine zusammen, so hat dieselbe auch in A'_{18} einen Doppelpunkt, weil eine $C^9_{(A_1^2-A_{17}^2)}$, die durch N_1 und A'_{18} geht, zu dem Büschel der $C^9_{(A_1^2-A_{17}^2,\ A_{18}'^2)}$ gehört. Fallen die beiden Curven aber nicht zusammen, so bilden sie ja doch einen Büschel von

$$C^9_{(A_1^2-A_{17}^2,\ A_{18}''^2)}.$$

Die Punkte $A''_{18}\ldots A^{(149)}_{18}$ haben also die Eigenschaft, dass es Büschel von

$$C^9_{(A_1^2-A_{17}^2,\ A_{18}''^2)}\ldots C^9_{(A_1^2-A_{17}^2,\ A_{18}^{(149)\,2})}$$

giebt. Offenbar sind dieselben auch definirt durch die Existenz von

$$C^9_{(A_1^2-A_{17}^2,\ A_{18}'^2,\ A_{18}''^2)}\ldots C^9_{(A_1^2-A_{17}^2,\ A_{18}'^2,\ A_{18}^{(149)\,2})}$$

Denn, würde von den Curven $C^9_{(A_1^2-A_{17}^2,\ A_{18}'^2)}$ eine einen 19. Doppelpunkt A_p haben, der mit keinem Punkte aus der Reihe der $A''_{18}\ldots A^{(149)}_{18}$ identisch wäre, so wäre er eine neue Lösung des Problems, betreffend die Zahl der Punkte A_{18}, die einen Büschel von $C^9_{(A_1^2-A_{17}^2,\ A_{18}^2)}$ veranlassen. Daraus folgt, dass je zwei von den Punkten $A'_{18}, A''_{18}\ldots A^{(149)}_{18}$ weitere Doppelpunkte einer $C^9_{(A_1{}^2-A_{17}{}^2)}$ sind, und dass es $\frac{149 \cdot 148}{1 \cdot 2} = 11026$ Curven $C^9_{(A_1{}^2-A_{17}{}^2)}$ mit zwei weiteren Doppelpunkten giebt. Indem wir ferner A_{17} ersetzen durch einen der 149 Punkte $A'_{18} \ldots A^{(149)}_{18}$ und bemerken, dass es eine

$$C^9_{(A_1{}^2-A_{16}{}^2,\, A_{18}{}''^2,\, A_{17}{}^2,\, A_{18}{}'^2)}, \quad \text{eine} \quad C^9_{(A_1{}^2-A_{16}{}^2,\, A_{18}{}''^2,\, A_{17}{}^2,\, A_{18}{}'''^2)}$$

u. s. w. giebt, erkennen wir folgende Eigenschaft: Von einem solchen Systeme von Punkten

$$A_1{}^2 - A_{17}{}^2,\, A'_{18}{}^2,\, A''_{18}{}^2, \ldots A^{(149)2}_{18}$$

können irgendwelche 17 Punkte als die Ausgangspunkte genommen werden. Das System ist involutorisch und veranlasst im Ganzen $\frac{166 \cdot 165 \ldots 147}{19!}$ Curven mit 19 Doppelpunkten.

Die allgemeinen Resultate lauten:

Soll eine C^{3n} einen Doppelpunkt mehr als $\frac{3n(n+1)}{2}$ Doppelpunkte besitzen, so muss zwischen je $\left(\frac{3n(n+1)}{2} - 1\right)$ von ihnen eine bestimmte Beziehung bestehen. Dann giebt es zu einer solchen Gruppe nicht blos ein Paar von Punkten als weiteren Doppelpunkten einer C^{3n}, sondern alle Paare einer Gruppe von

$$\left\{[3(3n-1)]^2 - 25\left(\frac{3n(n+1)}{2} - 1\right) - 2\right\} = \frac{87n^2 - 183n + 64}{2}$$

Punkten haben diese Eigenschaft; diese Punkte und die

$$\left(\frac{3n(n+1)}{2} - 1\right)$$

anfänglichen bilden ein System von Punkten, in welchen je

$$\left(\frac{3n(n+1)}{2} + 1\right)$$

Punkte Doppelpunkte einer C^{3n} sind.

3. Die Methode der Construction der algebraischen Curven mittelst Absplitterung ist, wie wir sahen, geeignet, die Doppelpunkte der algebraischen Curven zu studiren. Dieselbe lässt sich nun aber auch für die allgemeine C^n fructificiren und liefert Erscheinungen, die mit denen, die aus der allgemeinen Chasles'schen Construction sich ergeben, parallel laufen.

a) Wir beginnen mit einer Definition der C^n, indem wir zur Erläuterung das Beispiel der $C^9_{(A_1{}^2-A_{18}{}^2)}$ vorausschicken.

Zeichnen wir irgend eine $C^9_{(A_1{}^2-A_{18}{}^2)}$ und construiren einen Büschel von

$$C^{10}_{(A_1{}^2-A_{18}{}^2,\, B_1-B_{27}, B_{28}{}')}$$

so, dass einer der 28 einfachen Basispunkte, $B_{28}{}'$, auf der C^9 liegt, dann schneidet jede C^{10} desselben die C^9 in weiteren 17 Punkten $C_1 - C_{17}$, und es ist klar, dass alle diese Punktgruppen $C_1 - C_{17}$ corresidual sind und alle $C^7_{(A_1 - A_{18},\ C_1 - C_{17})}$ einen Büschel angehören, der mit dem C^{10} Büschel die erzeugt. $C^9_{(A_1{}^2 - A_{18}{}^2)}$ und eine $C^8_{(A_1 - A_{18},\ B_1 - B_{27})}$

Die $C^9_{(A_1{}^2 - A_{18}{}^2)}$ lässt sich somit auffassen als der Ort aller Punkte B_{28}' von der Eigenschaft, dass, wenn $B_1 - B_{27}$ die weiteren einfachen Basispunkte eines beliebigen Büschels von $C^{10}_{(A_1{}^2 - A_{18}{}^2,\ B_{18}')}$ sind, eine $C^8_{(A_1 - A_{18},\ B_1 - B_{27})}$ existirt.

Eine solche Definition nun lässt sich von jeder C^n geben: Nehmen wir $\frac{n(n+3)}{2}$ beliebig liegende Punkte $A_1 - A_{\frac{n(n+3)}{2}}$ auf einer C^n, so hat ein Büschel von $C^{n+1}_{\left(A_1 - A_{\frac{n(n+3)}{2}}\right)}$ noch weitere

$$(n+1)^2 - \frac{n(n+3)}{2} = \left(\frac{n(n+1)}{2} + 1\right)$$

Basispunkte $B_1 - B_{\frac{n(n+1)}{2}+1}$; dann ist die C^n der Ort aller Punkte B_1' von der Eigenschaft, dass, wenn wir einen solchen Büschel von

$$C^{n+1}_{\left(A_1 - A_{\frac{n(n+3)}{2}},\ B_1',\ B_2 - B_{\frac{n(n+1)}{2}+1}\right)}$$

construiren, die Punkte $B_2 - B_{\frac{n(n+1)}{2}+1}$ auf einer C^{n-1} liegen.

b) Hat eine Gruppe von Punkten $A_1 - A_{\frac{n(n+3)}{2}}$ die Eigenschaft, dass die weiteren Basispunkte $B_1 - B_{\frac{n(n+1)}{2}+1}$ eines beliebigen Büschels von $C^{n+1}_{\left(A_1 - A_{\frac{n(n+3)}{2}}\right)}$ auf einer C^{n-1} liegen, dann giebt es offenbar einen Büschel von $C^n_{\left(A_1 - A_{\frac{n(n+3)}{2}}\right)}$; denn jede C^{n+1} des Büschels schneidet diese C^{n-1} in weiteren $(n-1)(n+1) - \left(\frac{n(n+1)}{2} + 1\right) = \left(\frac{(n-2)(n+1)}{2} - 1\right)$ Punkten $E_1 - E_{\left(\frac{(n-2)(n+1)}{2} - 1\right)}$.

Alle diese Punktgruppen und ein Punkt P auf C^{n-1} liefern einen Büschel von $C^{n-2}_{\left(E_1 - E_{\frac{(n-2)(n+1)}{2} - 1},\ P\right)}$, der mit dem Büschel der C^{n+1} die C^{n-1} und eine $C^n_{\left(A_1 - A_{\frac{n(n+3)}{2}}\right)}$ erzeugt. Es werden also alle Punkte P von C^{n-1} einen Büschel von $C^n_{\left(A_1 - A_{\frac{n(n+3)}{2}}\right)}$ veranlassen. Dieser Satz ist umkehrbar. Wir wollen der Kürze wegen nur Beispiele anführen. Sind neun Punkte $A_1 - A_9$ Basispunkte eines C^3Büschels und sind die weiteren Basispunkte eines Büschels von $C^4_{(A_1 - A_9)}$ $B_1 - B_7$, so liegen nach diesem

Satze $B_1 - B_7$ auf einem Kegelschnitt; greifen wir eine C^3 des Büschels heraus, und schneidet irgend eine Curve des C^4 Büschels diese C^3 in drei weiteren Punkten $Q_1 - Q_3$, so liegen diese auf einer Geraden; denn, nach dem Restsatze gehen alle $C^4_{(A_1 - A_9,\ Q_1,\ Q_2)}$ auch durch den Punkt Q_3, eine solche C^4 ist aber auch irgend eine andere C^3 des Büschels und die Gerade $Q_1\, Q_2$. Die Gerade $Q_1\, Q_2\, Q_3$, veranlasst durch alle Curven des C^4-Büschels bilden selbst einen Büschel und erzeugen mit jenem die C^3 unter Absplitterung einer $C^2_{(B_1 - B_7)}$. Geht durch die Punkte $A_1 - A_{27}$ ein Büschel von C^6, so liegen die 22 weiteren Basispunkte eines Büschels von $C^7_{(A_1 - A_{27})}$ auf einer C^5. Jede Curve dieses Büschels trifft eine C^6 in 15 weiteren Punkten $C_1 - C_{15}$, die auf einer C^4 liegen, jede solche C^4 schneidet die C^6 in einer solchen Restgruppe $D_1 - D_9$, und die Restgruppen aller Curven des C^6 Büschels liegen auf der C^3, die durch die neun weiteren Basispunkte des C^6 Büschels $A_{28} - A_{36}$, bestimmt ist.

c) Bemerkenswerth sind auch die Beziehungen, betreffend die Schnittpunkte der algebraischen Curven:

Legen wir durch die 19 Doppelpunkte einer $C^9_{(A_1{}^2 - A_{19}{}^2)}$ einen Büschel von $C^{10}_{(A_1{}^2 - A_{19}{}^2)}$ mit den weiteren Basispunkten $B_1 - B_{24}$, so schneidet jede Curve derselben die C^9 in 14 weiteren Punkten $C_1 - C_{14}$. Durch $A_1 - A_{19}$, $C_1 - C_{14}$ und zwei weitere Punkte D_1, D_2 auf der C^9 geht eine

$$C^9_{(A_1 - A_{19},\ C_1 - C_{14},\ D_1,\ D_2)};$$

alle diese C^7 bilden einen Büschel, der mit dem C^{10} Büschel die C^9 erzeugt unter Absplitterung einer $C^8_{(A_1 - A_{19},\ B_1 - B_{24})}$; aber mit Rücksicht auf die beliebige Lage der Punkte D_1, D_2 auf der C^9 giebt es ein Netz solcher C^8. Also: „Sind 19 Punkte $A_1 - A_{19}$ Doppelpunkte einer C^9, und legen wir durch sie einen Büschel von $C^{10}_{(A_1{}^2 - A_{19}{}^2)}$, so geht durch die 43 Basispunkte dieses Büschels ein Netz von C^8". Mit jedem neuen Doppelpunkt nun tritt eine neue derartige Beziehung hinzu: 20 Doppelpunkte $A_1 - A_{20}$ einer C^9 haben die Eigenschaft, dass durch die 40 Basispunkte eines Büchels von $C^{10}_{(A_1{}^2 - A_{20}{}^2)}$ ∞^5 C^8 gehen; hat eine C^9 21 Doppelpunkte $A_1{}^2 - A_{21}{}^2$, so gehen durch die 58 Basispunkte eines Büschels von $C^{10}_{(A_1{}^2 - A_{21}{}^2)}$ ∞^8 C^{10} u. s. w. Wir hätten statt der Büschel von C^{10}, C^{11}, auch Büschel beliebig hoher Ordnung wählen können und hätten analoge Beziehungen erhalten. — Wir wollen noch den Satz für die C^n vom Geschlechte 0 anführen:

„Irgend ein Büschel von C^m, der die

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Doppelpunkte einer C^n vom Geschlechte 0 zu Basisdoppelpunkten hat, hat im Ganzen $\left(m^2 - \frac{3(n-1)(n-2)}{2}\right)$ Basispunkte. Durch diese und X weitere Punkte geht eine $C^{2m-2n+3}$; dabei ist X definirt durch die Gleichung:

$$m^2 - \frac{3(n-1)(n-2)}{2} + X - \frac{(2m-2n+3)(2m-2n+6)}{2}$$
$$= \frac{n^2-9n+20}{2}.$$

Nun sind diese Sätze auch auf zerfallene Curven anwendbar. Sie bilden also auch Kriterien für die Schnittpunkte der algebraischen Curven. Ein C^4 und eine C^5 z. B. schneiden sich in 20 Punkten $A_1 - A_{20}$. Zu 17 von ihnen, $A_1 - A_{17}$, ist A_{18} bestimmt durch die Bedingung, dass die 46 Basispunkte eines Büschels von $C^{10}_{(A_1{}^2 - A_{18}{}^2)}$ auf einer C^8 liegen. Der Punkt A_{19} zeichnet sich dadurch aus, dass durch die 43 Basispunkte eines Büschels von $C^{10}_{(A_1{}^2 - A_{19}{}^2)}$ ein Netz von C^8 geht, u. s. w. Der zu 11 Schnittpunkten $A_1 - A_{11}$ einer C^4 mit einer gegebenen C^3 gehörige zwölfte Punkt A_{12} unterliegt der Bedingung, dass die 28 Basispunkte eines Büschels von $C^8_{(A_1{}^2 - A_{12}{}^2)}$ auf einer C^6 liegen.

Kleinere Mittheilungen.

XXII. Stereometrische Paradoxa.

Im 41. Jahrgange dieser Zeitschrift S. 60 habe ich die Frage zu erledigen gesucht, wie man die drei reellen Wurzeln gewisser in der Stereometrie auftretenden cubischen Gleichungen erklären kann und zwar auch dann, wenn zwei der Wurzeln zur ursprünglichen geometrischen Aufgabe in keiner Beziehung zu stehen scheinen. — Auf streng begrenzter elementarer Lehrstufe wird man kaum anders verfahren können als ich angab. Aber, wenn man die Grenzen erweitert, wenn insbesondere das der Kugel innig verwandte zweischalige Rotationshyperboloid zugelassen wird, auch gelegentlich physikalische Deutungen nicht ausgeschlossen bleiben, so lassen sich die scheinbar paradoxen Anworten erklären, welche die Algebra zuweilen auf die stereometrische Fragestellung ertheilt, und man erkennt, welche Vollkommenheit dem analytischen Anzatz innewohnt.

Aus den mannigfaltigen Aufgaben, welche das Gesagte bestätigen, mögen die nachstehenden hervorgehoben werden.

I. Die Höhe x eines geraden Kreiskegels zu bestimmen, dessen Mantellinie s und Volumen J vorgeschrieben ist.

Auflösung. Bezeichnet man den Grundflächenradius durch r, so wird

$$1)\qquad r^2 = s^2 - x^2,$$

$$2)\qquad J = \frac{\pi}{3}\, x(s^2 - x^2).$$

Diese Aufgabe ist, soweit es sich um die Deutung der zwei positiven Wurzeln handelt, oft behandelt worden. Man erkennt augenblicklich, dass zwei Kegel möglich sind, zwischen welchen ein Maximalvolumen auftritt, welches letztere durch das vorgeschriebene J zunächst nicht überschritten werden darf, wenn reelle Lösungen gewünscht werden.

Aber die Gleichung 2) hat noch eine dritte negative Wurzel, welche grösser als s ausfällt. Diese Lösung ist meines Wissens noch nie erklärt worden, und es sei gleich von vornherein bemerkt, dass die vielleicht nahe liegende Betrachtung des Doppelkegels auf absolut gleiche negative Volumina führt, betreffs der dritten Wurzel aber nicht den geringsten Aufschluss giebt. Beachtet man überhaupt, dass r wegen $x > s$ nach Gleichung 1) imaginär wird, so ist es ja zweifellos, dass eine Erklärung jener Wurzel am „eigentlichen" Kegel ganz unmöglich ist. Aber eben die imaginären

Grundflächenradien sind es, welche darauf hinweisen, dass man die Grundfläche in eine neue Lage zu bringen hat.

In der That, die Formel $J=\frac{\pi}{3}r^2x$ stellt nicht allein ein Kegelvolumen, sondern auch ein Drittel des statischen Moments der Kreisscheibe $r^2\pi$ am Hebelarm x dar. Bei dieser allgemeineren Auffassung dürfen wir den Kreis derartig um seinen Mittelpunkt drehen, dass der Hebelarm x in die Ebene des Kreises zu liegen kommt; an Stelle der Mantellinie s tritt consequenter Weise die durch ihren Berührungspunkt und den freien Endpunkt des Hebelarms x begrenzte Kreistangente. Nun wird

1a) $$r^2 = x^2 - s^2,$$

2a) $$J' = \frac{\pi}{3}x(x^2 - s^2),$$

und also entspricht die negative Wurzel der Gleichung 2) genau der positiven Wurzel von 2a). Sollen die beiden negativen Wurzeln der Gleichung 2a) erklärt werden, so muss man die Kreisebene wieder senkrecht zum Hebelarm stellen und der Strecke s die Bedeutung einer Mantellinie beilegen. Man bemerke auch, dass J in der Momentenaufgabe beliebig gross gegeben werden darf und weiter, dass in dem Auftreten negativer Hebelarme nichts Befremdliches liegt, denn man verlangt positive Momente, obgleich die Scheibe nach der Umklappung negativ wird.

Zahlenbeispiel: $$s = \sqrt{7}, \quad J = 2\pi.$$

$$x^3 - 7x + 6 = 0; \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -3.$$

II. Die Höhe x einer sehr dünnen homogenen Kugelschale zu bestimmen, welche in einer gegebenen Flüssigkeit schwimmend mit ihrem Rande genau bis an den Flüssigkeitsspiegel einsinkt. Gegeben sei der Radius a der Kugel, das Gewicht p der Flächeneinheit der Schale und das Gewicht q der Volumeneinheit der Flüssigkeit.

Auflösung. Das Gewicht der Schale beträgt $G = 2a\pi xp$, dasjenige eines Flüssigkeitssegments, welches von der Schale verdrängt wird, ist

$$G' = \frac{\pi}{3}x^2(3a - x)q.$$

Wäre G' unveränderlich vorgeschrieben, so würden der veränderten Aufgabe drei Werthe von x entsprechen, von welchen nur einer für das Segment passt, während die anderen beiden ganz unverständlich bleiben. — Modificirt man jedoch die Aufgabe, wie oben geschehen, so folgt wegen $G = G'$ die Gleichung:

3) $$2apx = \frac{1}{3}qx^2(3a - x).$$

Hier scheidet sich zunächst die Wurzel $x=0$ aus, welcher zwar ein positiver Sinn in physikalischer Hinsicht nicht beigelegt werden kann, die aber jedenfalls auch keinen Widerspruch in sich birgt.

Die anderen beiden Wurzeln ergeben sich aus

$$x^2 - 3ax + 6\lambda a = 0, \tag{4}$$

wobei $\lambda = \frac{p}{q}$ eine lineare Grösse vorstellt, und diese Gleichung besitzt zwei reelle positive Wurzeln, falls $\lambda \leqq \frac{3}{8}a$. Da die grössere dieser Wurzeln den Werth $2a$ nicht übersteigen darf, so möge weiter $\lambda \geqq \frac{1}{3}a$; hiernach liegt λ zwischen den engen Grenzen:

$$\frac{1}{3}a \leqq \lambda \leqq \frac{3}{8}a. \tag{5}$$

Für $\lambda = \frac{1}{3}a$ erhält man speciell $x_1 = a$, $x_2 = 2a$, und hierin liegt die unmittelbar einleuchtende Thatsache, dass, wenn die hohle Halbkugel schwimmend bis zu ihrem Rande eintaucht, die gleich schwere andere Halbkugel, auf erstere dicht aufgesetzt, eine hohle Vollkugel ergiebt, welche soweit einsinkt, dass sie vom Flüssigkeitsspiegel tangirt wird. Für $\lambda = \frac{3}{8}a$ erhält man eine einzige Schale mit der Höhe $x = \frac{3}{2}a$. Für alle λ zwischen den angeführten Grenzen ergeben sich zwei verschiedene Schalen, was physikalisch so zu erklären ist, dass auf die kleinere Schale stets eine entsprechende schwere Zone angefügt werden kann, vermöge welcher die vergrösserte Schale wiederum bis zum Rande in die Flüssigkeit gedrückt wird.

Zahlenbeispiel:

$$a = 5{,}4^{cm}, \quad p = 2^{gr/qcm}, \quad q = 1^{gr/cbcm}, \quad \lambda = 2^{cm}.$$

$$x^2 - 16{,}2x + 64{,}8 = 0; \quad x_1 = 7{,}2^{cm}, \quad x_2 = 9^{cm}.$$

Wir haben hier das anscheinend paradoxe Auftreten der drei Wurzeln bei Bestimmung eines Kugelsegments durch eine sehr wesentliche Modification der eigentlichen Fundamentalaufgabe zu erklären versucht; indessen ist auch eine rein geometrische Erledigung der letzteren möglich und soll nun folgen.

III. Die Höhe x eines Kugelsegments zu bestimmen, wenn der Radius a der Kugel und das Volumen J des Segments vorgeschrieben ist.

Auflösung. Bezeichnet man den Radius der Grundfläche des Segments mit y, so wird:

$$y^2 = x(2a - x), \tag{6}$$

$$J = \frac{\pi}{3}x^2(3a - x). \tag{7}$$

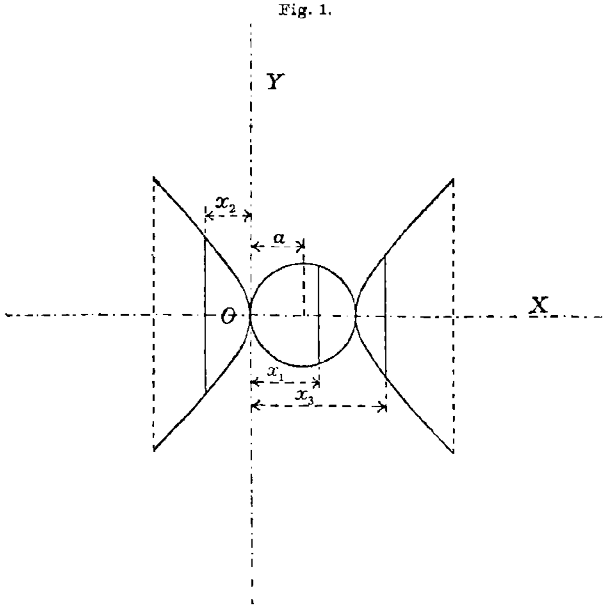
Die letzte Gleichung liefert, wenn J selbstverständlich kleiner als das Kugelvolumen vorgeschrieben wird, drei reelle Werthe von x, von welchen einer grösser als der Kugeldurchmesser, ein anderer negativ ausfällt, so dass zunächst nur der dritte präcisen geometrischen Sinn behält.

Man fasse jetzt die Kugel als Rotationskörper auf und zwar entstanden vermöge Drehung eines Kreises, dessen Gleichung durch 6) gegeben ist. Diesem Kreis möge sich eine gleichseitige Hyperbel anschliessen mit der reellen Halbachse a, welche den Kreis mit ihren Scheiteln auf der X-Achse berührt und also durch die Gleichung:

6a) $y^2 = x(x-2a)$

bestimmt wird (Fig. 1). Denkt man sich endlich auch das zweischalige Rotationshyperboloid durch Drehung der Hyperbel um die X-Achse erzeugt, so haben wir mit der Kugel zusammen ein continuirliches Volumen, für welches sämmtliche Wurzeln der Gleichung 7) erklärt werden können.

Fig. 1.



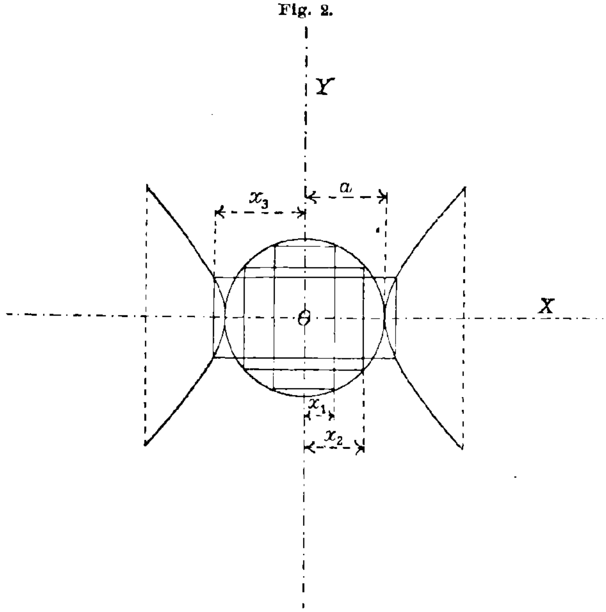
Das Volumen eines Hyperboloidsegments ist durch die Formel

$$J' = \frac{\pi}{3} x^2 (3a + x) \tag{7a}$$

gegeben, wobei die Höhe x von dem zugehörigen Scheitel aus gemessen wird; mithin gilt die frühere Gleichung 7) nicht blos für ein Kugelsegment, sondern ganz allgemein für ein Segment des gesammten in Betracht stehenden continuirlichen Volumens, wenn für das vom Scheitel (Coordinatenanfang) O aus zu messende x positive wie negative Werthe zugelassen werden. — Man wolle hierbei beachten, dass, wenn auch die Grundflächenradien der Segmente, das heisst die Ordinaten y beim Uebertritt von der Kugel in das Hyperboloid, also beurtheilt nach Gleichung 6), imaginär werden, immer noch die das Volumen erzeugenden Querschnitte, nämlich die Parallelkreise $y^2\pi$, reell bleiben.

Wir finden demgemäss: Für die kleinere positive Wurzel ein bestimmtes Kugelsegment J; für die negative Wurzel ein gleich grosses Hyperboloidsegment; für die grössere positive Wurzel ein zusammengesetztes Volumen, bestehend aus der positiven Vollkugel und dem sich rechts anschmiegenden Hyperboloidsegment. Letzteres erlangt einen negativen Werth und vermindert das Kugelvolumen, so dass abermals der Werth J erreicht wird. — Für $x = 2a$ erlangt das Volumen seinen Maximalwerth, es wird zur Vollkugel; für $x > 2a$ nimmt es wieder ab, erlangt für $x = 3a$ zum zweiten Mal den Werth Null und geht dann ins Negative über.

Fig. 2.



Zahlenbeispiel:

$a = 7,$

$J = 324\pi.$

$x^3 - 21x^2 + 972 = 0;$

$x_1 = 9,$

$x_2 = -6,$

$x_3 = 18.$

IV. Die Höhe $2x$ eines geraden Kreiscylinders zu bestimmen, wenn dessen Volumen J, sowie der Radius a der umschriebenen Kugel gegeben ist.

Auflösung. Bezeichnet man den Radius der Grundfläche des Cylinders mit y, so wird:

8) $$y^2 = a^2 - x^2,$$

9) $$J = 2\pi x (a^2 - x^2).$$

Es ist unmittelbar einleuchtend, dass zwei Cylinder in der Kugel vorhanden sind, falls J ein gewisses Maximalvolumen, welches zwischen den genannten Cylindern erreicht wird, nicht übertrifft. Diesen Cylindern entsprechen jene beiden positiven Wurzeln der Gleichung 9), welche kleiner als a ausfallen. Die dritte Wurzel, welche grösser als a und negativ wird, lässt sich wieder durch das der Kugel angeschriebene zweischalige Hyperboloid erklären, welches durch Rotation der gleichseitigen Hyperbel

8a) $$y^2 = x^2 - a^2$$

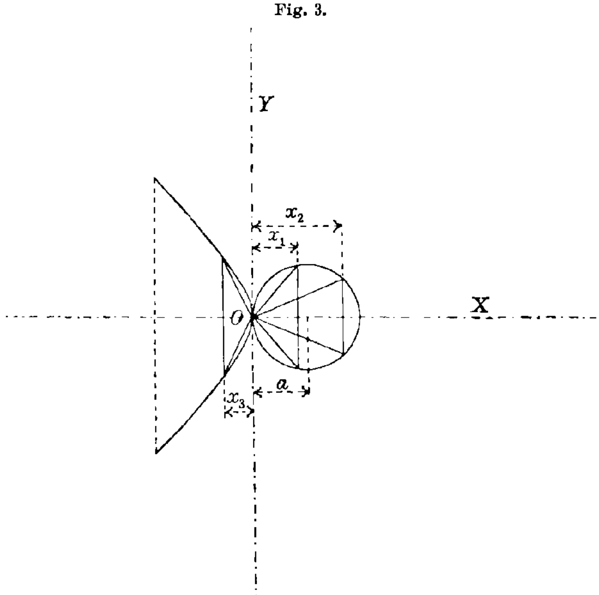
um die X-Achse, welche zugleich Cylinderachse sein möge, entsteht (Fig. 2).

Das Volumen des dem Hyperboloid eingeschriebenen Cylinders wird durch die Formel

$$J' = 2\pi x(x^2 - a^2) \tag{9a}$$

dargestellt, und die positive Wurzel jener Gleichung entspricht genau der negativen von 9). Die in die Schalen des Hyperboloids eintretenden Cylindergrundflächen sind negativ; ihre Radien — jedoch nur nach Gleichung 8) beurtheilt — werden imaginär. Für den aus der Kugel heraustretenden Cylinder kann J beliebig gross vorgeschrieben werden, er ist immer vorhanden, und da J positiv gedacht wird, so gehören zu den negativen Grundflächen nothwendig negative Höhen.

Fig. 3.



Zahlenbeispiel:

$a = \sqrt{7}$,

$J = 12\pi$.

$x^3 - 7x + 6 = 0$;

$x_1 = 1$,

$x_2 = 2$,

$x_3 = -3$.

Soll statt des Cylinders ein gerader Kreiskegel mit bestimmtem Volumen in eine gegebene Kugel eingeschrieben werden, so sind wesentlich neue Betrachtungen nicht erforderlich. Nur sei darauf aufmerksam gemacht, dass hier, falls J positiv sein soll, nur eine der beiden Schalen des Hyperboloids gebraucht wird, nämlich diejenige, welche die negative X-Achse enthält und deren Scheitel also mit der Kegelspitze zusammenfällt (Fig. 3). Bezeichnet a den Kugelradius, x die Kegelhöhe, so ist

$$J = \frac{\pi}{3} x^2 (2a - x). \tag{10}$$

Zahlenbeispiel:

$$a = 7, \quad J = 96\pi.$$

$$x^3 - 14x^2 + 288 = 0;$$

$$x_1 = 6, \quad x_2 = 12, \quad x_3 = -4.$$

Chemnitz. Dr. W. Heymann.

XXIII. Eine neue Ableitung der harmonischen Eigenschaften des Vierecks.

In seinem Lehrbuch der niederen Sphärik definirt Gudermann als parallele Hauptbogen einer Kugel zwei begrenzte Hauptbogen, die sich auf entgegengesetzten Seiten eines dritten Hauptbogens befinden und deren vier Endpunkte von diesem Hauptbogen gleichen Abstand haben; das sphärische Parallelogramm wird sodann definirt als ein Kugelviereck, dessen jede zwei Gegenseiten parallel sind.

Diese Definition ist sehr gekünstelt; ich halte es für zweckmässiger, den Begriff paralleler Linien auf gerade Linien zu beschränken.

Die Definition des sphärischen Parallelogramms in dem Lehrbuch der elementaren Sphärik von Schulz lautet: „Das sphärische Parallelogramm ist dasjenige Viereck, welches zwischen zwei Paar Gegenkreisen liegt — oder: dessen Ecken Durchschnittspunkte zweier Gegenkreise mit zwei anderen Gegenkreisen sind, ohne dass das Viereck in einem dieser Kreise liegt."

Lässt man den Begriff „parallele Hauptbogen" fallen, so empfiehlt es sich, auch den Namen „sphärisches Parallelogramm" fallen zu lassen und die oben als solche definirte Figur mit dem Namen „Kugelraute" zu bezeichnen.

Eine einfache Definition der Kugelraute ist folgende:

„Kugelraute heisst ein sphärisches Viereck, dessen Ecken die Endpunkte zweier sich gegenseitig halbirender Hauptbogen sind." Diese sich halbirenden Hauptbogen sind die Diagonalen der Raute; ihr Schnittpunkt der Diagonalschnitt derselben.

Aus der Congruenz der sich am Diagonalschnitt gegenüber liegenden Dreiecke folgt dann sofort die Gleichheit der gegenüber liegenden Seiten; hieraus ferner die Congruenz der beiden Dreiecke, in die die Raute durch eine Diagonale zerlegt wird, und hieraus die Gleichheit der gegenüber liegenden Winkel der Raute.

Verlängert man ein Paar gegenüber liegender Seiten einer Kugelraute, so entsteht ein sphärisches Zweieck. Wir wollen als Mittelpunkt eines Zweiecks die Mitte der Winkelhalbirenden desselben bezeichnen. Dann gilt für das sphärische Zweieck der Satz:

„Jeder durch den Mittelpunkt des Zweiecks gelegte Hauptkreis zerlegt denselben in zwei congruente Theile, woraus folgt, dass der Mittelpunkt des Zweiecks die Mitte aller durch ihn gelegten, von den Seiten des Zweiecks begrenzten Hauptbogen ist."

Ist also in Figur 1 $DC = CE$, $FC = CG$, so ist $FDGE$ eine Kugelraute. Durch Verlängerung des gegenüber liegenden Seitenpaares FD und

EG erhält man das Zweieck $FAEB$, dessen Mittelpunkt, wie leicht nachzuweisen, C ist. Ebenso ist C der Mittelpunkt des durch Verlängerung von DG und FE entstandenen Zweiecks, dessen in der Figur sichtbarer Theil $DGHF$ ist.

Es ist also der Schnittpunkt der Diagonalen der Raute gemeinsamer Mittelpunkt der beiden Kugelzweiecke. Wir wollen ihn deshalb als Mittelpunkt der Raute bezeichnen.

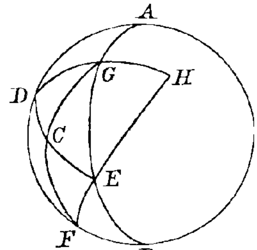
Daraus folgt weiter:

„Der Mittelpunkt der Raute ist die Mitte aller durch ihn gelegten, von einem Paar Gegenseiten oder deren Verlängerungen begrenzten Hauptbogen."

Es lassen sich ferner leicht folgende Sätze beweisen:

1. Haben zwei Kugelzweiecke den Mittelpunkt gemeinsam, so ist der ihnen gemeinsame Theil der Kugelfläche eine Kugelraute.

Fig. 1.

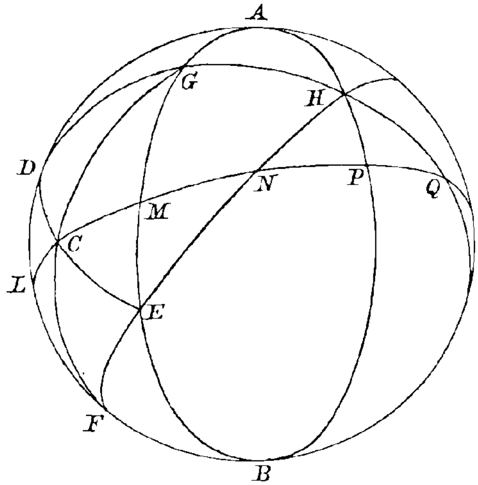


2. Die Ecken aller Kugelzweiecke, welche den Mittelpunkt gemeinsam haben, liegen auf einem Hauptkreise, demjenigen, dessen Pol jener Mittelpunkt ist.

3. Für alle Kugelrauten mit demselben Mittelpunkt liegen die Durchschnitte je zweier Gegenseiten auf dem Hauptkreise, welcher jenen Mittelpunkt zum Pol hat.

Führen wir nun für die Schnittpunkte der Gegenseiten einer Kugelraute die Bezeichnung „Spitzen der Raute", für den Hauptkreis, der durch die Spitzen gelegt ist, die Bezeichnung „Spitzenlinie" ein, so ist der Mittelpunkt der Raute der Pol zur Spitzenlinie.

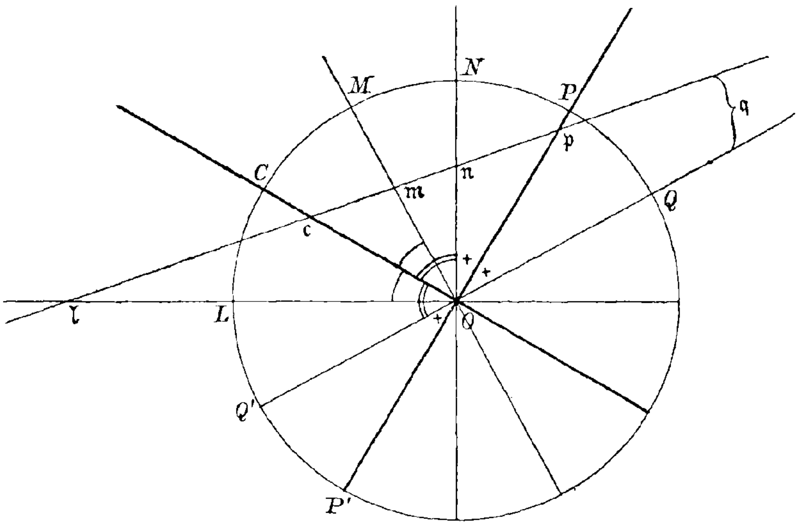
Fig 2.



Wir legen nun (Fig. 2) durch C einen beliebigen Hauptkreis, der das eine Paar von Gegenseiten in L und M, das andere in N und Q, und die Spitzenlinie in P schneidet. Die Ebene dieses Hauptkreises wird durch Figur 3 dargestellt.

Am Kugelmittelpunkt bildet oC gegen oP einen rechten Winkel; da $LC = CM$, so bilden oL und oM gegen oC gleiche Winkel, und da ferner $NC = CQ'$, wo Q' der Gegenpunkt von Q, so bilden auch oQ' und oN gegen oC, sowie, wie sich aus der Figur ergiebt, oN und oQ gegen oP gleiche Winkel.

Fig. 3.



Aus dieser Figur schöpfen wir die Definition harmonischer und involutorischer Elemente:

„Unter vier harmonischen Hauptstrahlen verstehen wir zwei Strahlenpaare eines Büschels, deren eines ein senkrechtes ist, deren anderes gegen einen Strahl des senkrechten Paares (also auch gegen den anderen) gleiche Winkel bildet."

„Vier Punkte einer Geraden oder vier Strahlen eines Strahlbüschels heissen harmonische Punkte oder Strahlen, wenn sie zu vier harmonischen Hauptstrahlen projectivisch sind."*

* Um einem etwaigen Bedenken gegen diese Definition der harmonischen Elemente, die in einer sehr bedeutenden Anzahl von Fällen, besonders auch in der Theorie der Kegelschnitte, harmonische Elemente auf Grund der Definition sofort als solche erkennen lässt, vorzubeugen, bemerke ich hier, dass die harmonische Theilung oder Trennung und die projectivische Geometrie zwei unabhängig von einander bestehende Lehren sind, woran die künstliche Verbindung beider zur Ableitung der Grundlagen der Geometrie der Lage einen Zweifel aufkommen lassen könnte. Die harmonischen Elemente sind auch hier definirt durch eine gewisse Lage: die Lage ist aber durch die Beziehung der Winkel mit einem bestimmten Maass verknüpft.

In der projectivischen Geometrie sehe ich die Lehre von den Eigenschaften der projectivischen Figuren, oder genauer: die Lehre von den Eigen-

Ordnet man die Strahlen eines Strahlbüschels derart zu Paaren, dass jedes Paar aus den zu einem festen Paar harmonischen Strahlen besteht, so nennt man jedes derartige Strahlenpaar ein Paar einer hyperbolischen Involution innerhalb des Büschels.

Ein ausgezeichneter Strahlbüschel in hyperbolischer Involution ist ein solcher, bei welchem die Strahlen des festen Paares zu einander senkrecht stehen. Bei diesem bildet jedes Paar der Involution mit dem festen Paare ein System harmonischer Hauptstrahlen, es bilden also die Strahlen eines jeden Paares gleiche Winkel gegen den einen Strahl des festen Paares, und ebenso auch gegen den anderen.

Hieraus geht hervor, dass, wenn von zwei projectivischen Strahlbüscheln die Strahlen des einen involutorisch gepaart sind, auch die entsprechenden Strahlen des anderen innerhalb desselben involutorisch gepaart sein müssen.

Wird ferner ein involutorischer Strahlbüschel von einer Geraden geschnitten, so nennt man die Durchschnittspunkte eines Strahlenpaares der Involution mit dieser Geraden ein Punktpaar einer Involution auf dieser Geraden.*

Wir kehren nun zur Kugelraute zurück und projiciren die ganze Figur vom Kugelmittelpunkt o aus auf eine beliebige Ebene. Denn projiciren sich sämmtliche Hauptkreise als Gerade, die Ecken der Raute als

---

schaften, welche Figuren zukommen, insofern sie projectivisch sind. Diese Lehre habe ich in einem besonderen Schriftchen als ein in sich abgeschlossenes Kapitel darzustellen versucht.

Zur Begründung dieser Lehre lässt sich, wenn wir die Geometrie der Lage nicht in unsere Erörterung ziehen, der Satz von der Gleichheit entsprechender Doppelverhältnisse nicht entbehren; der Specialfall, wo dieses Doppelverhältniss den Werth -1 annimmt, ist bei der Behandlung der Projectivität ebenso wenig erforderlich, als der Specialfall, wo das Verhältniss entsprechender Seiten der Einheit gleich ist, bei der Behandlung der Lehre von der Aehnlichkeit der Figuren.

* Eine elliptische Involution innerhalb eines Strahlbüschels wird in analoger Weise definirt:

> „Ordnet man die Strahlen eines Strahlbüschels in der Weise zu Paaren, dass jedem Strahl der zu ihm senkrechte conjugirt ist, bezeichnet sodann auf irgend einer den Strahlbüschel schneidenden Geraden die Schnittpunkte je zweier conjugirter Strahlen als conjugirte Punkte, so nennen wir je zwei conjugirte Punkte der Geraden ein Paar einer elliptischen Involution auf dieser Geraden."

Diese Bennenung wird sodann übertragen auf die entsprechenden Elemente in allen zu dieser Geraden projectivischen Strahlbüscheln und Geraden.

Uebrigens scheint mir die Bezeichnung der Involution als „hyperbolische" und „elliptische" nicht glücklich gewählt.

Ecken eines Vierecks, die Spitzen der Raute als die Durchschnitte zweier Gegenseiten des Vierecks, die wir entsprechend als Spitzen des Vierecks bezeichnen u. s. w. Benennen wir mit $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, ... die Projectionen von C, D, E, F, ..., so wird $\mathfrak{c}$ der Diagonalschnitt des Vierecks $\mathfrak{d}\mathfrak{g}\mathfrak{e}\mathfrak{f}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{h}$ seine Spitzenlinie. oC ist die Normale zur Ebene AoH, also bildet oC einen rechten Winkel gegen jede von o nach einem Punkte von AH oder $\mathfrak{a}\mathfrak{h}$ gezogene Gerade; legt man somit durch oC irgend eine projicirende Ebene, so bildet deren Durchschnitt mit AoH stets mit oC ein senkrechtes Strahlenpaar. Ferner bildet in dieser Ebene oC gegen oL und oM gleiche Winkel, also sind diese vier Strahlen zwei Paare harmonischer Hauptstrahlen und ihre Durchschnitte mit der Ebene der Projection, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, vier harmonische Punkte. Daraus ergeben sich unter Berücksichtigung, dass jedes Viereck sich mit dem durch Projection der Kugelraute entstandenen projectivisch legen lässt, die Sätze:

1. „Der Durchschnitt der Diagonalen eines Vierecks bildet mit einem beliebigen Punkte der Spitzenlinie das eine Paar, die Schnittpunkte der hindurch gelegten Geraden mit einem Paar Gegenseiten das andere Paar harmonischer Punkte."

   Zusatz. Auf jeder durch den Diagonalschnitt eines Vierecks gehenden Geraden bilden die Schnittpunkte mit jedem Paar Gegenseiten des Vierecks ein Punktpaar einer hyperbolischen Involution, deren Doppelpunkte der Diagonalschnitt und der Durchschnitt jener Geraden mit der Spitzenlinie sind.

2. „In einem Viereck ist jedes Paar Gegenseiten das eine Paar harmonischer Strahlen, deren anderes Paar die Verbindungslinie ihres Schnittpunktes mit dem Diagonalpunkte und die Spitzenlinie ist" (da die vier Geraden durch vier harmonische Punkte gelegt sind).

3. „Die Diagonalen eines Vierecks sind ein Paar conjugirter harmonischer Strahlen, deren anderes Paar die Verbindungslinien des Diagonalpunktes mit den Spitzen desselben sind."

Kreuznach. Dr. August Wilhelm Velten.

Historisch-literarische Abtheilung

der

Zeitschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch und **Dr. M. Cantor.**

41. Jahrgang.

Leipzig,
Verlag von B. G. Teubner.
1896.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt.

I. Abhandlungen.

II. Recensionen.

Geschichte der Mathematik.

Arithmetik, Analysis, Algebra.

Synthetische und analytische Geometrie.

Geodäsie, Geographie, Astronomie.

Mechanik, Physik.

Historisch-literarische Abtheilung.

Die Grassmann'sche Ausdehnungslehre.

Ein Beitrag
zur
Geschichte der Mathematik in den letzten fünfzig Jahren.

Von

Dr. V. Schlegel,
Professor an der Gewerbeschule in Hagen.

Im Jahre 1844 erschien im Verlage von Otto Wigand in Leipzig das Werk eines Stettiner Realschullehrers Hermann Grassmann, ein 280 Seiten starker Band, mit dem Titel: „Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik, dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert." Eine kurze orientirende Uebersicht über das Wesen und die Hauptbegriffe der Ausdehnungslehre folgte ein Jahr später in Grunert's Archiv. Nach weiteren zwei Jahren wies der Verfasser in einer von der Jablonowsky'schen Gesellschaft gekrönten Preisschrift nach, dass seine neue Disciplin nichts Geringeres sei, als die Verwirklichung der schon von Leibniz geforderten und in ihrer ausserordentlichen Bedeutung für die Geometrie vollständig gewürdigten „geometrischen Analysis". Gleichzeitig gab er weitere Anwendungen derselben auf Geometrie und Mechanik. Sodann legte Grassmann im Laufe der ersten zwölf Jahre nach dem Erscheinen des Hauptwerkes in einer ganzen Reihe von Abhandlungen im Crelle'schen Journale wichtige neue Entdeckungen im Gebiete der Curven- und Flächentheorie nieder, die er lediglich seiner Analysis verdankte, darunter besonders die später nach ihm benannten Erzeugungsweisen der algebraischen Curven und Flächen. Im Jahre 1862 erschien bei Adolf Enslin in Berlin der durch einen Doppeltitel des Werkes von 1844 bereits in Aussicht gestellte zweite Band: „Die Ausdehnungslehre, vollständig und in strenger Form bearbeitet." Dieser Band vereinigte den nach euklidischer Methode umgearbeiteten Inhalt des ersten, in mehr philosophischer Darstellung gehaltenen Theiles mit einer Fortsetzung der Theorie, durch welche, kurz gesprochen, die Analysis der drehenden Bewegungen derjenigen der Verschiebungen hinzugefügt wurde. — Trotz alledem blieb das Hauptwerk von 1844 nahezu ein Vierteljahrhundert lang vollständig unverstanden und unbeachtet, ebenso alles Uebrige, was Grassmann zu seiner Erläuterung oder Erweiterung geschrieben hatte, mit alleiniger Ausnahme der oben genannten Erzeugungsweisen von Curven und Flächen, die von der Wissenschaft adoptirt wurden, jedoch ohne dass Jemand sich die Mühe genommen hätte, in die Methode einzudringen, welche diese schönen Resultate geliefert hatte. Des minimalen Absatzes wegen hatte der Verleger das Werk von 1844 endlich einstampfen lassen. Grassmann selbst hatte sich, da der Erfolg des zweiten Theils womöglich noch geringer war als der des ersten, von der mathematischen Arbeit gänzlich zurückgezogen und in Sanskritstudien ein Feld gefunden, auf welchem ihm rückhaltlose Anerkennung zu Theil wurde. Die Ausdehnungslehre war verschollen und vergessen. Da trat Ende der sechziger Jahre der Umschwung ein, welchen Grassmann, überzeugt von der Lebenskraft seines Werkes, am Schluss der Vorrede des zweiten Theils vorher gesagt hatte. Auf dem antiquarischen Büchermarkte erschien der erste und bald darauf auch der vergriffene zweite Theil mit rasch in die Höhe gehenden Preisen. Kurz nach Grassmann's Tode (1878) erschien auch ein Neudruck des Werkes von 1844, zu welchem er selbst noch die Vorrede hatte schreiben können. Und heute liegt dasselbe Werk vor uns, vereint mit der obengenannten Preisschrift, als erster Band einer von der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften veranstalteten Gesammtausgabe von Grassmann's mathematischen und physikalischen Werken, veröffentlicht im B. G. Teubner'schen Verlage im Jahre 1894 zum 50jährigen Jubiläum seines ersten Erscheinens. Dies sind in kurzen Zügen die Geschicke des Lebenswerkes eines deutschen Gelehrten, dessen Name, wenn auch spät, und nicht ohne wesentliche Mitwirkung des Auslandes, endlich die ihm gebührende Stelle neben denen der ersten mathematischen Grössen seines Jahrhunderts gefunden hat.

Die Entwickelung und Ausbreitung der Ausdehnungslehre in den letzten 25 Jahren hat nur wenige Zweige der Mathematik unberührt gelassen, bei mehreren derselben hat sie sich als mächtiger Hebel der Forschung erwiesen und nach verschiedenen Richtungen hin anregend und befruchtend gewirkt. Dagegen sind alle diese Arbeiten und Bestrebungen, in Ermangelung eines Sammelplatzes, wie ihn die Schulen anderer bahnbrechender Forscher in einzelnen Zeitschriften oder an einzelnen Hochschulen zu besitzen pflegen, räumlich ungemein zerstreut. Es dürfte daher eine zusammenfassende und orientirende Uebersicht über die Entwickelung und Ausbreitung der Ausdehnungslehre, wie die folgenden Zeilen sie zu bieten suchen, gerade jetzt, wo die Jubiläums-Ausgabe von Grassmann's Lebenswerk dasselbe auch den ferner stehenden Mathematikern wieder vor Augen rückt, in weiteren Kreisen willkommen sein.

Der Schreiber dieser Zeilen, einst jüngerer Freund und kurze Zeit Amtsgenosse des damals schon gealterten und seinem eignen Werke entfremdeten H. Grassmann, hat, in fester Ueberzeugung von der hohen Bedeutung, welche dieses Werk noch auf lange Zeit hinaus für die Entwickelung der mathematischen Wissenschaft haben würde, seit 26 Jahren einen grossen Theil seiner wissenschaftlichen Nebenarbeit diesem Werke zugewendet, dasselbe dem Verständnisse zugänglicher zu machen und die demselben sich widmenden Kräfte zu sammeln und zu einander in Beziehung zu setzen gesucht. Er ist daher, vielleicht mehr als Andere, in der Lage gewesen, mit dem Entwickelungsprocesse des Grassmann-schen Werkes in beständiger Fühlung zu bleiben, und für den fehlenden Sammelpunkt der dasselbe betreffenden Bestrebungen wenigstens so lange einen bescheidenen Ersatz zu leisten, bis Grassmannn's Werk aus eigener Kraft seinen Eroberungszug durch das Ausland vollenden und im Glanze dieser Erfolge auch in Deutschland allgemeinere Aufmerksamkeit neben den Leistungen anderer mathematischer Schulen sich erringen konnte. So hofft er, dem Leser aus einem ungemein reichhaltigen, wenn auch nicht lückenlosen Materiale, so weit es der Raum gestattet, wenigstens die charakteristischen Züge der Geschichte der Ausdehnungslehre und ihres Zusammenhanges mit anderen Zweigen der Mathematik zu bieten. Andererseits gedenkt er, bei dieser Gelegenheit zu den die Jubiläums-Ausgabe einleitenden Vorbemerkungen des dem Grassmann'schen Werke im Wesentlichen fern stehenden Herrn Herausgebers manche ihm nothwendig scheinende Ergänzungen zu liefern. Er unterzieht sich dieser Aufgabe um so lieber, da in der gegenwärtigen Gesammtausgabe von Grassmann's mathematischen und physikalischen Schriften nur das dem letzten Bande hinzuzufügende Literaturverzeichniss ihm Gelegenheit bieten wird, seine Mitarbeit an dieser Ausgabe, die seinen und vieler anderer Fachgenossen längst gehegten Wunsch erfüllt, zu bethätigen.

Die Ausdehnungslehre ist ein consequent ausgebildetes System von Rechnungsoperationen, welches allen auf Geometrie und Mechanik bezüglichen Untersuchungen die einfachste, weil naturgemässe analytische Grundlage liefert. — Die analytische Geometrie trägt durch die Coordinaten ein dem eigentlichen Gegenstande der Untersuchung gänzlich fremdes Element in dieselbe hinein. Ihre Methode macht Umwege, verliert die Fühlung mit dem Probleme und lässt seine Lösung immer nur wie durch einen Schleier erkennen. Die mit der Complicirtheit des Gegenstandes sich unverhältnissmässig steigernde Weitschweifigkeit und Verwickelung ihrer Rechnungen und Formeln nöthigt zur Aufstellung immer neuer Coordinatensysteme, die bestimmt sind, speciellen Problemen sich möglichst anzuschmiegen, und zur Erfindung immer neuer Symbole der Abkürzung, wodurch die ganze ursprünglich einheitliche und consequente Methode in ihrer Ausbildung der Planlosigkeit verfallen ist. — Die synthetische Geometrie (im Sinne Steiner's) ist von diesen Mängeln frei; aber sie entäussert sich mit der Rechnung des mächtigsten und bequemsten

Werkzeuges der Untersuchung, von welchem F. Klein in seinen „Vergleichenden Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen“ so treffend sagt, dass ein gut angelegter Formalismus der Weiterforschung den nicht zu unterschätzenden Vortheil leistet, dass er gewissermassen dem Gedanken vorauseilt. Die Arbeitslast, welche sie dem Verstande abnimmt, bürdet sie der viel schwächeren und beschränkteren Anschauung auf; an die Stelle der bequemen Formelsprache setzt sie die schwerfällige Wortsprache. Darum ist die Zahl ihrer Anhänger auch immer nur eine beschränkte gewesen, und ihr Werth wird voraussichtlich mit der Zeit mehr und mehr zu einem propädeutischen werden. — Die Ausdehnungslehre operirt, wie die synthetische Geometrie, direct mit den geometrischen Gebilden, unterwirft dieselben aber den ihr eigenen Rechnungsoperationen. Sie legt die einfachsten Beziehungen der Gebilde zu einander rechnerisch fest und leitet vermittelst gesetzmässiger Umformungen systematisch, sicher und auf kürzestem Wege zu neuen Beziehungen, da, wo andere Methoden ermüdende Umwege machen oder die Vermeidung derselben durch künstliche Gedankencombinationen erstreben müssen. Dabei bedeutet jeder Schritt der Rechnung eine sofort verständliche geometrische Transformation, und der unerschöpfliche Reichthum der möglichen Umformungen bildet eine ebenso unerschöpfliche Quelle neuer Sätze. Die Ausdehnungslehre charakterisirt sich hiernach als eine zur systematischen Auffindung geometrischer Wahrheiten geeignete directe Methode, welche als sichere Führerin in der unendlichen Fülle der räumlichen Gebilde und ihrer Beziehungen zu einander das System und die Zusammenhänge klarlegt. Doch ist ihre Bedeutung hiermit bei Weitem nicht erschöpft. Die in die Rechnungen eingeführten Elemente können von vornherein in allgemeiner Bedeutung aufgefasst und nachträglich sammt den erzielten Resultaten in verschiedenem Sinne gedeutet werden. So können z. B. dieselben Formeln Sätze der Geometrie und der Mechanik oder Sätze der Linien- und der Kugelgeometrie ausdrücken. Ebenso können ihre Operationen und Methoden auf Räume mit beliebiger Dimensionenzahl ausgedehnt werden und sind sogar ursprünglich von Grassmann überhaupt in dieser grössten Allgemeinheit entwickelt worden. In diesem umfangreichen und wohlgeordneten abstracten Systeme finden aber auch alle analytischen Hilfsmittel der Geometrie ihre besondere Stellung und gelangen in diesem Zusammenhange zu einer wesentlich vervollkommneten und vereinfachten Darstellung. Dies gilt insbesondere von der Theorie der Determinanten, der ganzen sogenannten neueren Algebra und der Theorie der analytischen Functionen. Auch verschiedene Zweige der angewandten Mathematik haben Nutzen aus diesen Methoden gezogen. — Die Grundlage für alle diese Reformen bilden zwei von Grassmann als „äussere“ und „innere“ Multiplication der Elemente bezeichnete Operationen, jene mit dem Grundgesetz $(e_1 e_2) = -(e_2 e_1)$, woraus sogleich $(e_1 e_1) = 0$ folgt, diese mit den Grundgesetzen $(e_1 | e_2) = 0$, $(e_1 | e_1) = 1$. Aus diesen unscheinbaren Anfängen entwickelt sich ein ungeahnter Reichthum methodischer Hilfsmittel, der Seitens der Grassmann'schen Schule noch manche Erweiterungen erfahren hat, dessen ganze Tragweite wir aber auch heut noch nicht übersehen können, wie denn auch noch grössere Abschnitte der abstracten Grassmann'schen Theorie der Specialisirung und Fruchtbarmachung harren. Es mag hier sogleich bemerkt werden, dass die Anwendung der Ausdehnungslehre sich auf die Theorie derjenigen Transformationsgruppen (im Sinne von Lie) beschränkt, welche sich mit der Geometrie im gewöhnlichen Sinne, einschliesslich der mehrdimensionalen und nicht euklidischen, decken. Die Werthschätzung der Ausdehnungslehre bezüglich ihrer Tragweite wird sich also nach der Bedeutung richten, welche man dieser gewöhnlichen Geometrie und Mechanik im Vergleich mit den zu anderen Transformationsgruppen gehörigen Geometrien bezw. Invariantentheorien beilegt. In dieser Hinsicht sagt Study[1] sehr richtig: „Ob aber das betreffende Zahlensystem eine erheblichere Bedeutung gewinnen kann, wird wiederum davon abhängen, welchen Platz die zugehörigen Gruppen in dem Ganzen der mathematischen Wissenschaft einnehmen."

Die Ausdehnungslehre ist keineswegs mit dem Anspruch aufgetreten, den regelrechten Gang der Entwickelung der mathematischen Wissenschaft störend zu durchbrechen. So isolirt auch ihre Stellung, und so fremdartig und undurchsichtig das Gewand war, in welchem sie zuerst erschien, es fehlte nicht an vorbereitenden Erscheinungen, welche auf sie hinwiesen. Sie trat rechtzeitig in die Erscheinung, um auf die weitere Entwickelung wichtiger mathematischer Disciplinen einen fördernden Einfluss zu üben. Und wenn dieser Einfluss Jahrzehnte lang durch die gänzliche Verborgenheit, in der sie stecken blieb, nicht zur Geltung kam, so hat doch, wie wir jetzt nach 50 Jahren überblicken können, jene Entwickelung ganz von selbst, unablässig und an den verschiedensten Orten, auf die Grassmann'schen Ideen hingearbeitet. Und die vermeintlichen Entdeckungen neuer Ideen, die nichts anderes waren, als Principien der Ausdehnungslehre, neuer Sätze geometrischen und analytischen Inhalts, die sich als Corollare viel allgemeinerer Sätze der Ausdehnungslehre erwiesen, haben da, wo man die letztere noch nicht genügend kennt, bis auf die neueste Zeit fortgedauert.

Als Vorläufer der Ausdehnungslehre sind ausser Leibniz' oben erwähnter „Geometrischer Charakteristik"[2] zu betrachten: J. Grassmann's[3] Auffassung der Parallelogramm-Fläche als geometrisches Product zweier anstossender Seiten, Möbius'[4] geometrische Addition der Punkte und Strecken, Bellavitis'[5] Aequipollenzen-Rechnung, die später von Houel als logische Consequenz aus der allgemeinen Ausdehnungslehre, wie auch der Quaternionen-Rechnung, nachgewiesen wurde, wogegen Bellavitis allerdings protestirte.[6]

Mit einzelnen charakteristischen Operationen der Ausdehnungslehre, aber völlig unbeeinflusst von ihr, stimmen überein: St. Venant's[7] Multiplication der Strecken, Cauchy's[8] Clefs algébriques, O'Brien's[9] Symbolische Formen (= äussere Producte), Gauss'[10] geometrisches (= inneres) Product, Bunkofer's[11] Zahlenbüschel (= der Addition unterworfene Strecken), Résal's[12] geometrisches (= inneres) Product in der Mechanik, adoptirt von Somoff[13], Lipschitz'[14] Primitivzeichen, die mit den Grassmann'schen Einheiten identisch sind und denselben Multiplicationsgesetzen unterliegen wie diese. Ferner die von Kronecker und Weierstrass[15] abkürzungsweise eingeführten Bezeichnungen der Determinanten, die lediglich als Vorstufen für die systematische Darstellung derselben durch Grassmann erscheinen, Möbius'[16] Auffassung des negativen halben Quadrats der Entfernung zweier Punkte als (inneres) Product derselben, Badorff's[17] Auffassung der gemeinschaftlichen Potenz zweier Kugeln als (inneres) Product derselben, Méray's[18] Assemblages binaires de la taxe k, ein specieller Fall von Grassmann's extensiven Grössen, welche aus $k+1$ Einheiten abgeleitet sind und algebraische Multiplication zulassen[19]; Chapman's[20] die Quaternionensymbole S und V als Specialfälle umfassendes Symbol ω_k, welches eine Ausdehnung der Quaternionentheorie auf n Einheiten ermöglicht, aber nichts weiter ist als ein Symbol für die äussere Multiplication, ebenso ein weiterer Versuch Chapman's, die Quaternionentheorie zu verbessern[21]; ferner Genty's[22] Auffassung des Quaternionensymbols $S(ab)$ als „projectivisches" (= inneres) Product der Vectoren a und b, und Sylvester's[23] „Nivellator", ein Symbol, welches von gleichem Gesichtspunkt aus gebildet ist, wie der „Lückenausdruck" der Ausdehnungslehre. — Wie sehr auch die Symbolik der neueren Algebra sich den Darstellungsweisen der letzteren genähert hat, ohne deren sachgemässen Charakter zu erreichen, zeigt besonders deutlich die Gleichnng $\alpha_x^n = 0$, welche sagt, dass ein Punkt x die Curve n^{ter} Ordnung α beschreibt, aber links nichts weiter als eine zur Abkürzung hergestellte willkürliche Zusammenstellung dreier Buchstaben aufweist, während die dasselbe ausdrückende Gleichung $\alpha x^n = 0$ der Ausdehnungslehre das äussere Product der Curve α mit der algebraischen Potenz x^n enthält, also, anstatt eines zu seiner Umformung und Nutzbarmachung neue symbolische Operationen erfordernden Conglomerates, einen in den Organismus des Systems sich einfügenden und mittelst desselben weiter zu behandelnden Ausdruck. Einen weiteren Beweis dafür, dass die in der modernen Algebra benutzten Symbole sich sehr einfach und mit grösstem Vortheil für die Flüssigkeit der Rechnungen und die geometrische Deutung der Resultate durch Grassmann'sche Productbildungen ersetzen lassen, bildet die von Wälsch[24] ausgeführte Darstellung der in der Liniengeometrie üblichen Strahlen- und Achsencoordinaten als äussere Producte. Endlich sei bemerkt, dass die abkürzenden Symbole, durch welche Hesse der analytischen Geometrie ihre längst entbehrte

Einfachheit und Eleganz gab, diejenige Entwickelungsstufe dieser Wissenschaft kennzeichnen, von welcher der nächste Fortschritt zu den Methoden der Ausdehnungslehre führt.

Demgegenüber haben die Analytiker strenger Observanz sich lange gegen die Nothwendigkeit oder sogar Zulässigkeit solcher Operationen gesträubt, welche, wie die Grassmann'schen Multiplicationen, anderen Gesetzen gehorchen als denen der gewöhnlichen Arithmetik. Jedenfalls beschränkte man diese Operationen auf die niederen Anwendungsgebiete der Geometrie und Mechanik. Zur Charakteristik dieser beschränkten Auffassung vergleiche man Study's[1] Ausführungen (a. a. O. S. 177 flg., S. 213). Um so interessanter ist es, dass neuerdings rein analytische Processe auf derartige Operationen geführt haben. Eigentlich gehören hierher von älteren Resultaten bereits die Grassmann'sche Determinantendarstellung, Cauchy's Clefs algébriques und Lipschitz' Primitivzeichen. Sodann fand Frobenius[25], dass, wenn A und B zwei bilineare Formen der Variablen $x_1 \dots x_n$, $y_1 \dots y_n$ sind, das Product

$$AB = \Sigma \frac{\partial A}{\partial y_k} \frac{\partial B}{\partial x_k}$$

im Allgemeinen von BA verschieden ist. Neuerdings hat Study[1] gezeigt, dass die Theorie der Gruppen linearer Transformationen im engsten Zusammenhange mit der Theorie der höheren complexen Zahlen steht. Zur Beurtheilung dieser letzteren Zahlensysteme sind hierdurch weit umfassendere Gesichtspunkte gewonnen, als sie die auf den engen Kreis ihrer elementaren Operationen sich zurückziehende „höhere Analysis" bieten kann.

Die Grassmann'sche Ableitung einer Ausdehnungsgrösse (Punkt oder Strecke) aus Einheiten (Punkten oder Strecken) mittelst Zahlen, die man als Coordinaten jener Grösse betrachten kann, findet sich wieder in einer Reihe von selbstständig erdachten Coordinatensystemen, deren Coordinaten sich nur durch constante Factoren von den Grassmann'schen unterscheiden, aber, wie alle derartigen Systeme, hinter dem Grassmann'schen darin zurückstehen, dass bei ihrer Anwendung nur mit den von den Fundamentalpunkten losgelösten Coordinaten gerechnet wird, während die Gleichungen der Ausdehnungslehre gerade diesen Punkten und den zwischen ihnen waltenden Rechnungsgesetzen ihre grosse Einfachheit und die Leichtigkeit und Durchsichtigkeit ihrer Transformationen verdanken. Solche Systeme sind: Möbius'[26] barycentrische Coordinaten, Chasles' Schnittverhältniss-Coordinaten, Schendel's[27] Trilinearcoordinaten, ferner die von Kindel[28] bei einer reciproken Zuordnung der räumlichen Elemente benutzten Coordinaten und d'Ocagne's[29] Tetraeder-Coordinaten, welche letztere wieder als specielle Fälle einerseits die Cartesischen und Plücker'schen, andererseits die parallelen Punkt- und Tangenten-Coordinaten in sich enthalten.

Ohne wesentliche Aenderung fügen sich in das System der Ausdehnungslehre ein: Argand's[30] und Gauss'[31] Darstellung der imaginären Grössen durch Vectoren, Siebeck's[32] Punktcalcül, sowie die von Möbius und Björling[33] gegebenen Darstellungen des Imaginären in der Ebene bezw. im Raume.

Auch an umfassenderen, in der Grassmann'schen Tendenz sich bewegenden und der Ausdehnungslehre verwandten Unternehmungen, um eine besondere Analysis, namentlich für die Zwecke der Geometrie oder Physik, zu schaffen, hat es nicht gefehlt. Hier ist vermöge ihrer reichen Ausgestaltung und des Ansehens, welches sie erlangt hat, in erster Linie Hamilton's Quaternionentheorie zu nennen, von welcher noch weiter unten die Rede sein wird. Aber vermöge der Beschränktheit ihrer Hilfsmittel und ihres natürlichen Anwendungsgebietes, sowie der abschreckenden Schwerfälligkeit und Unzweckmässigkeit ihrer Bezeichnungen steht sie weit hinter der Ausdehnungslehre zurück, und alle ihr zugewiesenen Aufgaben finden eine angemessenere, oft auch kürzere Erledigung in der letzteren, welche, wie schon Grassmann[32] nachwies, ihre Methoden mit umfasst. Ebenfalls unabhängig gelangte Gibbs[35] von dem Ausgangspunkte der Quaternionentheorie zu seiner im Wesentlichen mit Methoden der Ausdehnungslehre übereinstimmenden Vector Analysis. Auch Cayley's[36] Memoir on the theory of matrices, Peirce's[37] Linear associative Algebra, nach seinem Tode fortgesetzt von seinem Sohne, und Sylvester's[38] Lectures on the principles of Universal Algebra bewegen sich durchaus in der Richtung der Grassmann'schen Ideen. Neuerdings hat Macfarlane[39] in seiner Algebra of physics eine Analysis herzustellen gesucht, welche die Methoden der Ausdehnungslehre, der Quaternionen und der Determinanten im Interesse physikalischer Anwendungen in sich vereinigen soll.

In der Tendenz theilweise mit Grassmann übereinstimmend, jedoch auf wenig praktikable Wege führend, erweist sich ein älterer Versuch des Prager Professors Doppler, geometrische Gebilde direct in die Rechnungen einzuführen, und Scheffler's „Situationscalcül".

Ueberblicken wir diese lange Reihe mathematischer Bestrebungen, welche alle dem fast ausnahmslos schon vor ihnen vorhandenen System der Ausdehnungslehre wie einem Brennpunkte zustreben, so können wir uns dem Eindrucke nicht entziehen, dass dieses System eine bleibende Stelle in der Entwickelungsgeschichte der Mathematik einzunehmen bestimmt ist. Gleichzeitig aber müssen wir uns sagen: Welche Unsumme überflüssiger geistiger Arbeit wäre der Mathematiker-Generation der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts erspart geblieben, wenn dieselbe rechtzeitig von dem vorhandenen Systeme Grassmann's Besitz ergriffen hätte, anstatt dasselbe mühsam und mit allerlei Fehlversuchen ein halbes Jahrhundert lang neu aufzubauen! Denn, erreicht sind die Principien dieses Systems nur stückweise und von Wenigen, darüber hinausgekommen ist Niemand, und nur um unwesentliche formale Verbesserungen oder um Fortbildungen im Sinne dieses Systems und Anwendungen desselben hat es sich in denjenigen Arbeiten gehandelt, die über Grassmann's eigne Leistungen hinausgehen.

Da drängt sich von selbst die Frage auf: Wie kam es, dass diese Leistungen so lange unbeachtet schlummern konnten? Eine Hauptursache hierfür war die Form, welche Grassmann selbst seinem Werke gegeben hatte. Indem er das denkbar allgemeinste und abstracteste System aufstellte, aus welchem Geometrie und Mechanik sich erst als Anwendungen specieller Fälle deduciren liessen, erhielten ganz von selbst Inhalt und Begründung dieses Systems ein weit mehr philosophisches als mathematisches Gepräge, und die Proben der praktischen Verwendbarkeit für die Mathematik waren viel zu spärlich und versteckt, um einen Mathematiker zum Studium eines Werkes aufzumuntern, welches sich im Uebrigen weitab von den gewohnten Bahnen mathematischer Untersuchungen bewegte. Wenn selbst der den Ideen des Werkes weitaus am nächsten stehende Möbius[40] beim Studium desselben seines philosophischen Charakters wegen erlahmte, so ist erklärlich, dass im Uebrigen kaum der mathematische Gehalt des Werkes, geschweige seine Bedeutung erkannt wurde. Die warme Aufnahme, die dasselbe bei Möbius, und der Achtungserfolg, den es bei Grunert fand, waren Ausnahmen. Die im herablassenden, selbstgefälligen Tone des Olympiers gehaltene Aeusserung von Gauss[40], der das Werk des unbedeutenden Lehrers einer flüchtigen Durchsicht würdigte, und dessen Interesse sich nur darauf lenkte, inwieweit des Verfassers Tendenzen sich etwa mit den seinigen berührten, dürfte, nach Abzug jenes Tones, für die damalige Aufnahme der Ausdehnungslehre im Allgemeinen charakteristisch sein.*

Schwerer zu verstehen ist, dass auch die rein mathematische Preisschrift[41] und besonders die Abhandlungen in Crelle's Journal[42] damals keine Beachtung fanden, obwohl die letzteren auf dem allgemein interessirenden Gebiete der Curven- und Flächentheorie neue Resultate zu Tage förderten, die doch später für wichtig genug erachtet wurden, in Verbindung mit Grassmann's Namen weiter zu leben, wenn auch die Methode, der diese Resultate ihre Entstehung verdankten, vergessen blieb. So konnte z. B. Plücker im 34. Bande des Crelle'schen Journals behaupten, es gebe noch keine allgemeine geometrische Definition einer Curve dritter Ordnung, während bereits im 31. Bande desselben Journals Grassmann eine solche Definition gegeben und als allgemein nachgewiesen hatte. Man kann zur Erklärung nur annehmen, dass damals selbst die Publicität des Crelle'schen Journals nicht genügte, hervorragenden Leistungen die verdiente Anerkennung zu sichern, wenn der Autor sich, wie Grassmann, in einer wissenschaftlich untergeordneten äusseren Stellung befand.

---

* Als einzige Frucht seines Werkes nennt Grassmann in der Vorrede zur „Ausdehnungslehre von 1862“ eine kleine Abhandlung von Kysäus[179].

Uebrigens ging es, beiläufig bemerkt, anderen Entdeckungen Grassmann's nicht besser. Das elektrodynamische Gesetz über die Einwirkung zweier Stromtheile, welches Grassmann 1845 in „Poggendorff's Annalen" veröffentlichte, wurde erst bekannt, als Clausius[43] im Jahre 1876 dasselbe von Neuem fand. Dabei war die kurze, durchsichtige Formulirung Grassmann's den verwickelten Gleichungssystemen von Clausius wesentlich überlegen. — Die Theorie der Vocaltöne, welche Grassmann 1854, allerdings an der entlegenen Stelle eines Stettiner Schulprogramms, veröffentlicht hatte, wurde 1859 von Helmholtz nur wiedergefunden. Ob der von Grassmann[44] 1877 gelieferte Beweis, dass die Grundlage der Helmholtz'schen Theorie über die physikalische Natur der Sprachlaute unrichtig ist, Beachtung gefunden hat, ist dem Schreiber dieses nicht bekannt. — Im Jahre 1853 widerlegte Grassmann[45] die von Helmholtz zwei Jahre früher aufgestellte Theorie der Farbenmischung und leitete für dieselbe mittelst der Methoden der (mehrmals citirten) Ausdehnungslehre ein die empirische Regel Newton's bestätigendes Gesetz ab, welches auch von Helmholtz später in seiner „Physiologischen Optik" adoptirt wurde. Aber auch Helmholtz fand, trotz des nahen Zusammenhanges zwischen der Ausdehnungslehre und seinen eignen Speculationen, keine Veranlassung, von Grassmann's Buche Kenntniss zu nehmen.

Die „Ausdehnungslehre von 1862",* welche den Inhalt des früheren Werkes in gänzlich veränderter, nach Euklid'schem Muster gearbeiteter Darstellung enthielt und einen zweiten Theil hinzufügte, sollte in der Form dem Mathematiker mehr entgegenkommen. Bedenkt man aber, dass die Leistungsfähigkeit der dogmatischen Euklid'schen Methode im Wesentlichen auf die Elemente der Geometrie beschränkt ist, und dass diese Methode auf dem Gebiete der elementaren Arithmetik nur wie der Rest eines mittelalterlichen Bauwerks in unsere Zeit hineinragt, so wird man begreifen, wie unwillig sich der umfassende Stoff des Grassmann'schen Systems in die Zwangsjacke dieser Darstellung hineinpressen liess. Das neue Gewand stand denn auch dem Werke derart übel zu Gesicht, dass selbst Grunert bei aller Anerkennung des von Grassmann bewiesenen Scharfsinnes im sichtlichen Gefühle der Enttäuschung erklärte, keinen eigentlich wissenschaftlichen Fortschritt in dem Werke zu finden, und es ablehnte, eine Recension darüber zu veranlassen. So war denn trotz der unendlichen auf die Darstellung verwandten Mühe ein Werk zu Stande gekommen, welches mit seinen seitenlangen ermüdenden abstracten Beweisen die Geduld des Lesers noch in weit höherem Maasse auf die Probe stellte wie der erste Theil. Die neue Arbeit blieb denn auch noch unbekannter als die erste, ihr Inhalt ein Schatz, versteckt in Disteln und Dornen.

* Beide Ausgaben der „Ausdehnungslehre" werden in der Folge durch die Bezeichnungen A_1 und A_2 unterschieden werden.

Angesichts dieser Thatsachen wird man fragen, ob denn Grassmann überhaupt nicht fähig war, seinen weitausschauenden genialen Conceptionen, seinen logisch scharfen und klar durchdachten Gedankenreihen eine angemessene Form zu geben. Nun, seine Lehrbücher der Algebra und besonders der Trigonometrie beweisen das Gegentheil. Beide, in Deutschland fast unbekannt, besser gewürdigt in Amerika, sind noch heut, trotz Euklid'scher Aeusserlichkeiten, unübertroffene Muster von wissenschaftlicher Strenge, Klarheit, Kürze und praktischer Durchbildung der Methode. Dafür hatte Grassmann aber auch Gelegenheit gehabt, die beste Darstellung der hier behandelten Stoffe im Unterrichte aufzusuchen und zu erproben. Und diese Gelegenheit blieb ihm hinsichtlich seiner eignen Schöpfung verschlossen, weil er niemals auf den ihm als theoretischem Forscher wie als praktischem Lehrer gleichmässig gebührenden Platz an einer Hochschule gelangte. Dort allein hätte er vermocht, im Besitz ausreichender Musse, in der Entfaltung einer entsprechenden Lehrthätigkeit, im lebendigen Verkehr mit Collegen und Schülern, sein System auch äusserlich in einer den Ansprüchen der modernen Wissenschaft genügenden Weise auszugestalten und die Vortheile desselben ins rechte Licht zu setzen. Die Vorlesungen, welche er im Jahre 1842 in einem befreundeten kleinen Kreise über sein Werk hielt[46], beweisen ebenso wie das Zusammenarbeiten mit seinem Bruder Robert an der A 2[47], wie sehr er die Wichtigkeit einer mündlichen Darbietung und Durcharbeitung des Stoffes zu schätzen wusste. Haben doch auch später Docenten an Hochschulen in Vorlesungen über die Ausdehnungslehre das beste Mittel gefunden, in Geist und Wesen derselben einzudringen. Die Schritte, welche er that, um an eine solche Stelle zu gelangen, fanden bei der Regierung wohlwollendes Entgegenkommen, und als 1868 eine Professur in Greifswald frei wurde, unterstützte ihn anfangs auch Grunert mit seinem Rath in dem Bemühen, diese Stelle (trotz erheblicher pecuniärer Einbusse) zu erlangen. Als sich jedoch aus der Mitte der Facultät gegen Grassmann's Berufung schwerwiegender Einspruch erhob, hervorgegangen aus dem Wunsche, die Stelle mit einer Lehrkraft Riemann'scher Richtung besetzt zu sehen, war dieser Plan, und mit ihm die Krönung von Grassmann's Lebenswerk, als gescheitert zu betrachten. Man hat Grassmann Vorwürfe gemacht, nicht nur hinsichtlich der Form seiner Darstellung, sondern auch wegen seiner Productionsweise, weil er, obwohl reich an originellen Gesichtspunkten, keine der Fragen, zu denen diese Gesichtspunkte von selbst hinführen, ernstlich zu erledigen unternommen habe. Man vergisst dabei, dass auch das ausdauerndste Streben erlahmen muss, wenn ihm die nöthige Lebensluft und jede Spur von Anerkennung fehlt. (Darin war Hamilton glücklicher, dessen Quaternionentheorie rechtzeitig ordentlicher Lehrgegenstand an der Dubliner Universität wurde.) Von Rücksicht auf Grassmann's Forschung durch Erleichterung der Amtsthätigkeit war vollends keine Rede; denn Mathematik war schon als Unterrichtsgegenstand eine damals in den massgebenden behördlichen Kreisen Stettin's wenig geschätzte Wissenschaft, um wie viel weniger als Nebenbeschäftigung eines Lehrers! Andererseits muss gesagt werden, dass auch Grassmann es an der in seiner isolirten Stellung doppelt nöthigen Rührigkeit fehlen liess, durch Pflege bestehender und Anknüpfung neuer wissenschaftlicher Beziehungen sein Werk dem Interesse seiner mathematischen Zeitgenossen näher zu bringen. Davon zeugt schon die erstaunliche Geringfügigkeit seines mathematischen Briefwechsels. So wandte er sich denn in Ermangelung jeglichen Erfolges schliesslich selbst von der Ausdehnungslehre ab, nachdem er sie in den Grundzügen vollendet, einer späteren Zeit den Ausbau überlassend.

In der That hatte sich bis zum Jahre 1869 Niemand mehr ernstlich und eingehend mit der Ausdehnungslehre beschäftigt, Hankel ausgenommen, der 1867 in seiner „Theorie der complexen Zahlensysteme“ auch auf Grassmann's Theorie einging und ihr die wärmsten Empfehlungen angedeihen liess, wenn auch ohne sichtbaren Erfolg. Im Uebrigen sind nur drei Fachmänner, freilich Namen ersten Ranges, zu verzeichnen, welche wenigstens die Bedeutung einzelner Theile der Ausdehnungslehre mehr oder weniger klar erkannten. Cremona wies schon 1860 in einer Abhandlung[48] auf sie hin, bemühte sich, in sie einzudringen und empfahl sie seinen Freunden als Gegenstand des Studiums. — Weierstrass führte seine Zuhörer gelegentlich in einige Anschauungen der Ausdehnungslehre ein, machte auch auf den Nutzen des inneren Productes in der Geometrie aufmerksam. — Clebsch wusste die Bedeutung der Ausdehnungslehre für Geometrie und Algebra vollkommen zu würdigen, gab in seiner Gedächtnissschrift für Plücker[49] dieser Werthschätzung beredten Ausdruck und hinterliess dieselbe bei seinem eignen frühen Tode seinen Schülern als Vermächtniss.

Aber alle diese Hinweise und Empfehlungen, wenn auch von noch so massgebender Stelle her, konnten nicht genügen, die Ausdehnungslehre in verdientem Maasse ans Licht zu ziehen, und ihr vor allen Dingen denjenigen praktischen Einfluss auf die weitere Entwickelung der Wissenschaft zu verschaffen, der ihr schon längst gebührt hatte. Denn, was half alle Bewunderung, so lange die Wenigsten sie verstanden und Niemand damit arbeitete! — Es bedurfte einer Darstellung, die, den entgegengesetzten Weg wie Grassmann einschlagend, statt mit den abstracten Begriffen und Sätzen des n-dimensionalen Gebietes zu beginnen, die Methoden der Ausdehnungslehre innerhalb der gewöhnlichen Raumgebiete darlegte. Von dem Hintergrunde der gewohnten Raumanschauungen mussten die Eigenheiten der Ausdehnungslehre um so wirksamer sich abheben, an dem bekannten geometrischen Inhalte ihre fremdartigen, aller Gewohnheit widersprechenden Formen um so eher verständlich und dem Leser geläufig werden. Aus diesem Gesichtspunkte entstand des Verfassers „System der

Raumlehre",* dessen erster Theil (1872) sich inhaltlich auf die Elemente der Geometrie beschränkte, während der zweite Theil (1875)** die Lehren der neueren (ebenen) Geometrie und Algebra in Grassmann'scher Darstellung gab. Ueber die Entstehung dieses Werkes habe ich in Grassmann's Biographie[50] berichtet, über seine Bedeutung für die Ausdehnungslehre Grassmann selbst in der Vorrede zur zweiten Auflage der A1.[51] Alle Hilfsmittel der Ausdehnungslehre wurden hier ab ovo entwickelt und mit ihnen die genannten Disciplinen inhaltlich in dem von den Lehrbüchern innegehaltenen Umfange dargestellt. Hiermit waren die Anknüpfungspunkte für die Darstellung weiterer Resultate und die Ausführung selbstständiger Forschungen gegeben, gleichzeitig aber war auch ein auf das Studium der allgemeinen Ausdehnungslehre vorbereitendes Werk geschaffen. Der Erfolg bewies die Richtigkeit dieser Erwägungen. Die „Raumlehre" vermittelte in jährlich wachsendem Maasse die Bekanntschaft mit der Ausdehnungslehre. Es fanden sich in zunehmender Zahl Mathematiker, welche, im Gefühle innerer wissenschaftlicher Unabhängigkeit, die Ausdehnungslehre nicht nur studirten und bewunderten, sondern auch damit arbeiteten, sie weiter auszubilden und zugänglicher zu machen suchten. Die nächste Frucht dieser Erfolge war die erneute Theilnahme Grassmann's an den damaligen mathematischen Bestrebungen; dieselbe fand noch in den letzten Jahren seines Lebens ihre Bethätigung in einer kurzen aber werthvollen Reihe von Arbeiten über das Verhältniss der Ausdehnungslehre zur neueren Geometrie und Algebra, den Quaternionen, der Mechanik, der Farbentheorie und Elektrodynamik. Eine weitere Frucht war nach Grassmann's Zeugniss das Zustandekommen der zweiten Auflage der A1, während die noch vorhandenen Exemplare der A2 in wenigen Jahren erschöpft wurden. Und heute, nachdem seit Beginn dieser Periode weitere 25 Jahre verflossen sind, sehen wir eine ganze Reihe von Zweigen der mathematischen Forschung, in deren Entwickelung die Ausdehnungslehre mehr oder weniger umfangreich eingegriffen hat, und die ihr verbesserte Forschungsmethoden und neue Resultate verdanken.

Die Grundsätze der allgemeinen Formenlehre, wie sie durch Grassmann geschaffen und von Hankel, später auch von Noth[52] ausführlicher dargestellt wurden, haben zu einer wesentlich tieferen Erfassung der arithmetischen Grundoperationen geführt und sind heute Gemeingut der Mathematiker.

Die Auffassung der Geometrie als einer angewandten Wissenschaft hat zuerst Grassmann ausgesprochen und ihre praktischen Consequenzen gezogen. Hiermit aber hängt auf's Engste zusammen die Trennung der

* Jedoch nicht auf Veranlassung von Clebsch, wie Kraft im Vorwort seines Werkes (siehe Note 170) irrthümlich berichtet.

** Beide Theile werden in der Folge durch die Bezeichnungen R1 und R2 unterschieden werden.

Vorstellung des Erfahrungsraumes von dem abstracten Begriff des dreidimensionalen ebenen Raumes und die Subsumirung des letzteren unter den allgemeinen Raumbegriff, Verstandesoperationen, mit welchen die ganze mehrdimensionale und die nichteuklidische Geometrie steht und fällt.

In der elementaren Geometrie wurde durch die R1 der Grund gelegt zu einer neuen, die Bewegung der geometrischen Gebilde als wesentliches Werkzeug der Untersuchung einführenden Darstellung, im Gegensatze zu der dogmatischen, nur an starren Gebilden operirenden Methode Euklid's.* Dabei erwiesen sich die Operationen der Ausdehnungslehre als das naturgemässeste rechnerische Werkzeug auf dem ganzen Gebiete der Geometrie. Sie lieferten gleichzeitig Beziehungen der Lage und des Maasses, führten mit spielender Leichtigkeit bis in die sonst nur mühsam zugänglichen entlegeneren Gebiete der Dreiecks-, Kreis- und Kugelgeometrie[54] und erwiesen sich brauchbar zum Lösen von Aufgaben und zum Beweisen vorgelegter Sätze.[55] Eine Weiterbildung Grassmann'scher Ideen stellt dar die vom Verfasser mittelst des Drehfactors i^n durchgeführte Metrik der Elementargeometrie[56], welche in naher Beziehung zur Theorie der Hyperbelfunctionen steht.[57] Ebenso die Auffassung imaginärer Schnittpunkte als reeller Punkte, deren Schnittpunkt-Eigenschaft durch eine andere ersetzt ist[58], eine Auffassung, zu der auch Laguerre und Tarry[59] und in ähnlicher Weise Molenbroek[60] gelangten. Das vielumstrittene Parallelen-Axiom wurde von Günther[61] auf Grund des mit dem Drehfactor zusammenhängenden Beweises von der Winkelsumme des Dreiecks[62] auf ein einfacheres, direct eine Fundamental-Eigenschaft der Ebene ausdrückendes Axiom zurückgeführt, und dadurch die Unhaltbarkeit aller Beweisversuche klargelegt. Ebenfalls auf dem Boden der Ausdehnungslehre bewegten sich die Untersuchungen Eichler's[63] über unsere Raumauffassung und Pilgrim's[64] über Gebietstheilungen. Dass die mit Unrecht als Domäne der Quaternionentheorie angesehene sphärische Trigonometrie ihre natürlichste Begründung in der Ausdehnungslehre findet, hatte schon Grassmann[65] dargelegt; neuerdings kam Carvallo[66] auf anderem Wege zu demselben Resultate. Die Aequivalenz des unendlich fernen Punktes mit der begrenzten Strecke, die besonders für die Mechanik wichtige Unterscheidung der Strecke von dem ausser durch Richtung und Länge noch durch bestimmte Lage charakterisirten „Linientheil" sind geometrische Neuerungen der Ausdehnungslehre, die sich von wesentlichem Nutzen erwiesen haben.

Im Gebiete der Zahlenlehre hat zunächst Stolz[67] den von Grassmann aufgestellten Grössenbegriff als den allgemeinsten seinen arithmetischen Arbeiten zu Grunde gelegt. Von ungleich grösserer Tragweite

* Die aus den Anschauungen der Ausdehnungslehre fliessenden Grundsätze dieser Darstellung sind ohne die eigentlichen Methoden derselben später in des Verfassers „Lehrbuch der elementaren Mathematik"[53] übergegangen, aus welchem vieles Wesentliche in neuere Lehrbücher übernommen worden ist.

aber ist die allgemeine Grundlage, auf welche Grassmann[68] die Zahlenlehre durch Aufstellung eines allgemeinen Systems von n von einander unabhängigen Einheiten und aller zwischen denselben möglichen Multiplicationsgattungen gestellt hat, während Hamilton zu der reellen und der imaginären Einheit nur noch zwei neue imaginäre Einheiten hinzufügte. Den naheliegenden Gedanken, die Quaternionentheorie hiernach auf ein System von n Einheiten auszudehnen, führte Clifford[69] aus. — Ferner gehören hierher Simony's[70] zwei universelle Verallgemeinerungen der algebraischen Grundoperationen nebst der einfachsten Formulirung des Functionsbegriffes für ein n-fach complexes variables Argument, eine wesentlich von den Anschauungen der Ausdehnungslehre getragene Arbeit. Auf derselben Grundlage bewegen sich Dyck's[71] gruppentheoretische Studien vermöge der Annahme einer Reihe von Einheiten und Aufstellung gewisser Multiplicationsregeln für dieselben; ferner Dedekind's[72] Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen, deren mehrwerthige Einheiten aus den gewöhnlichen Zahlen hervorgehen und Rechnungsgesetzen gehorchen, welche complicirter sind als die der äusseren und inneren Multiplication, eine Theorie, durch welche — in Widerlegung der Weierstrass'schen Anschauung von der Nichtzugehörigkeit der allgemeinen complexen Grössen zur Arithmetik — diesen Grössen gerade eine specielle Bedeutung gegeben wurde, vermöge deren sie unabweisbar dem Boden der gewöhnlichen Arithmetik entstammen. Im Anschluss an diese Untersuchungen stellte dann Petersen[73] die allgemeine Bedingung fest, unter welcher ein System von Operationsgleichungen zwischen n Haupteinheiten eine zulässige Algebra charakterisirt. Endlich gehören hierher Study's[74] Verallgemeinerungen der Grassmann'schen Begriffe „Ableitung“ und „Numerischer Werth“, wodurch diesen Begriffen alle Arten der Geometrie als Anwendungsgebiet unterworfen und gleichzeitig ihre Beziehungen zu den Raumtheorien von Riemann, Helmholtz und Klein festgestellt wurden; ebenso desselben Autors Untersuchungen über Systeme von höheren complexen Zahlen und über die Beziehungen derselben zu gewissen continuirlichen Transformationsgruppen, worin alle verschiedenen, gewissen Grundbedingungen genügenden Typen von Zahlsystemen mit $2-4$, und einige mit mehr Grundzahlen aufgesucht, und schliesslich die complexen Zahlen als abkürzende Bezeichnungen für bilineare Formen charakterisirt werden, welche gewisse Formen von linearen Transformationen darstellen.

Auf Grund der vorstehend geschilderten Zusammenhänge wird man es erklärlich finden, dass auch die höhere Analysis und Functionentheorie der Ausdehnungslehre keineswegs so fern stehen, wie es nach der Weierstrass'schen Absage scheinen könnte. Grassmann selbst hat fast die Hälfte der A 2 diesem Gegenstande gewidmet, wobei die Zurückführung eines Systems von n Functionen beliebig vieler Variablen auf eine Function einer Variablen den Ausgangspunkt bildet, und die Hauptprobleme der unendlichen Reihen, der Differential- und Integralrechnung behandelt werden. Doch sind in diese schwer zugänglichen Kapitel der längst vergriffenen A2 nur erst wenige Forscher eingedrungen, diese freilich mit dem Gewinn der Ueberzeugung von ihrer grossen Bedeutung. Die Grundlagen dieser Theorie sind in der R2 dargestellt worden. Ihre Bedeutung für die angewandte Integralrechnung (in der Mechanik) hat Mehmke erkannt, während Simony mittelst einer dritten der oben erwähnten Verallgemeinerungen der algebraischen Grundoperationen zur gesetzmässigen Auffindung particulärer Integrale der Gleichung

$$\Sigma \frac{d^2 W}{d x_r^2} = 0, \quad (r = 1, \ldots n)$$

gelangte. Aehnlich gelang es Seydler[75], durch Erweiterung der complexen Multiplication Grassmann's auf vier Einheiten für die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 V}{d x^2} + \frac{d^2 V}{d y^2} + \frac{d^2 V}{d z^2} = 0$$

eine ebenso symmetrische Lösung zu finden, wie sie für dieselbe Gleichung mit zwei Variablen bekannt war. Die aus jenen vier Einheiten abgeleiteten Grössen erwiesen sich beiläufig als äquivalent mit Hamilton's complanaren Biquaternionen und liessen sich mit Nutzen zur Ausdehnung von Resultaten der ebenen Geometrie auf den Raum verwenden. Am ausführlichsten wurde das in Rede stehende Gebiet von Gibbs[35] behandelt, welcher eine detaillirte Darstellung der Differential- und Integralrechnung der Vectoren gab, unter Anderem die Transformation bestimmter Integrale, Minimalwerthe von Integralen u. s. w. in den Kreis der Betrachtung zog, und den Nutzen hervorhob, welcher auch für die Behandlung rein analytischer Gegenstände aus den Methoden der Ausdehnungslehre erwächst.

Besonders tiefgreifend und gleichzeitig leicht verständlich ist der Einfluss der Ausdehnungslehre auf die Determinantentheorie. Die Determinante wird in der A2 (Nr. 62) als Zahlfactor in einem äusseren Producte von n aus den Einheiten $e_1 \ldots e_n$ abgeleiteten Zahlgrössen erklärt. Die Determinante an sich, losgelöst von diesen Einheiten und deren Rechnungsgesetzen, ist ein schwerfälliges, unbequem zu handhabendes und zu transformirendes Gebilde. In jenem Zusammenhange aber erhalten die Operationen mit ihr einen überraschenden Grad von Flüssigkeit. Dieser Gegenstand hat denn auch, seit zuerst in der R2 eine ausführlichere Darstellung dieser Determinantentheorie gegeben wurde, eine verhältnissmässig grosse Anziehungskraft ausgeübt. Die neue Darstellung fand zuerst eine Stelle in Günther's Lehrbuch der Determinantentheorie, wurde grundlegend und systematisch verwendet in dem Lehrbuche von Scott[76], und neuerdings wieder von Niemöller[77] mit zahlreichen Anwendungen auf Subdeterminanten, Auflösung von Gleichungen, Substitutionen, Resultanten, Reduction binärer Formen auf die canonische Form etc. vorgeführt. Ebenso von

Carvallo[78], dessen Urtheil über diesen Gegenstand in dem Ausspruche gipfelte: La vérité est que la méthode de Grassmann supprime la théorie des déterminants, en se substituant à elle.[79] — Caspary[80] gelangte auf einfachstem Wege zu den Umformungen der früher von Hunyady, Mertens, Pasch behandelten Kegelschnitts-Determinanten und derjenigen Determinanten, deren Verschwinden die Bedingung für die perspectivische Lage zweier Dreiecke ist. Mehmke[81] zeigte, dass ein von Kronecker der Berliner Akademie 1882 mitgetheilter Determinantensatz in dem Satze der A2 Nr. 183 als specieller Fall enthalten, übrigens in seiner gewöhnlichen Form für die Ableitung von Sätzen der Punktgeometrie weit weniger brauchbar ist als der Grassmann'sche. Aus den in jenem Kronecker-schen Satze enthaltenen Relationen hat aber Caspary[82] das Weierstrass-sche Fundamentaltheorem für die Sigmafunction mehrerer Argumente abgeleitet. Man wird aus diesem Beispiel eine Vorstellung von der Tragweite der Grassmann'schen Sätze erhalten und von dem Nutzen, den die Mathematik aus dem gründlichen Studium der Ausdehnungslehre schon längst hätte ziehen können. — Mit welcher Leichtigkeit entlegnere Determinantensätze durch die Grassmann'schen Methoden gewonnen werden, zeigen unter Anderem zwei vom Verfasser[83] gegebene Beispiele.

Unmittelbar mit den Determinanten hängt zusammen die Theorie der Matrices, für welche Cayley[84] in seinem vielbewunderten Memoir on the theory of Matrices die Grundlage geschaffen hat. Allein diese Theorie deckt sich völlig mit der schon in der A1[85] entwickelten Theorie der offenen Producte (Lückenausdrücke) und der verallgemeinerten Quotienten der A2[86]. Der erweiterte Quotient

$$Q = \frac{b_1 b_2, \ldots b_n}{a_1 a_2, \ldots a_n}$$

ist ein Ausdruck, welcher, mit irgend einem seiner Nenner multiplicirt, den darüber stehenden Zähler liefert; der Lückenausdruck eine Summe von Producten, aus welcher ein gemeinsamer Factor herausgesetzt, aber, da die Factoren jedes Productes in bestimmter Reihenfolge stehen, überall durch eine Lücke [l oder ( )] ersetzt ist. Der Zusammenhang beider Ausdrücke ist in der A2 S. 246 auseinander gesetzt. Der vom Verfasser in den „Fortschr. d. Math."[87] bekannt gegebene Zusammenhang zwischen Matrices und Lückenausdrücken ist auch anderweitig mehrfach bemerkt und erörtert worden. So erkannte Gibbs[35] die Uebereinstimmung der „dyadischen Ausdrücke" seiner Vector analysis mit den allgemeinsten Producten Grassmann's und diejenige der Matrices mit Lückenausdrücken und Quotienten; auch zeigte er, übereinstimmend mit R2, Nr. 72, wie sich die Erweiterung des Quotientenbegriffes mit Vortheil auf Differentialquotienten ausdehnen lasse. Dieselben Zusammenhänge entdeckten Mehmke und Buchheim[88], welcher letztere eine ausführlichere Theorie der Matrices vom Grassmann'schen Gesichtspunkte aus gab.

Besonders fruchtbar erwies sich endlich der gleichzeitig von Scott[89] und von Escherich[90] ausgeführte Gedanke, auch die Determinanten höheren Ranges, mit denen sich zuerst Zehfuss[91] beschäftigt hatte, mit den Mitteln der Ausdehnungslehre darzustellen und zu untersuchen. Wer die neuere Algebra nach den Lehrbüchern von Fiedler, Salmon und Clebsch studirt hat, wird einerseits die Fortschritte der der Reihe nach darin verwendeten Methoden bewundert, andererseits aber auch die Verschiedenheit der von den Autoren für dieselben Grössen und Operationen gewählten Symbole bedauert und überdies den Eindruck gewonnen haben, dass diese ganze Symbolik, wie geistreich auch erdacht, doch im Grunde aus willkürlich gewählten, einer einheitlichen Grundlage entbehrenden Abkürzungen zusammengesetzt ist. — Nun hatte schon Clebsch[49] bemerkt, dass ein grosser Theil der Grundvorstellungen der neueren Algebra bereits in der A1 enthalten sei. In ähnlichem Sinne äusserte sich Gibbs[92], ohne die damals schon vorliegenden einschlägigen Resultate zu kennen. Grassmann[93] selbst hatte die Grundideen dieses Zusammenhanges noch in den letzten Lebensjahren in mehreren Abhandlungen entwickelt. Schon seine ersten Resultate wiesen mit aller Bestimmtheit darauf hin, dass die Ausdehnungslehre es sei, in welcher für die Behandlung der neueren Algebra die vermisste natürliche und einheitliche Grundlage gesucht werden müsse. In der That gelang es zunächst in der R2[94], die Theorie der binären (bis zum 4. Grade) und der ternären Formen (bis zum 2. Grade) mit den Mitteln der äusseren und der algebraischen Multiplication in der gewünschten Weise zu erledigen, wobei in der Einfachheit der Rechnungen und der Leichtigkeit der geometrischen Deutungen überall entschiedene Vortheile gegenüber den früheren Darstellungen hervortraten. Dasselbe zeigte sich bei der noch nicht publicirten Ausdehnung dieser Untersuchungen auf die ternären cubischen Formen (gegenüber der von Aronhold gegebenen) und auf die weiteren in dem Clebsch-Lindemann'schen Werke behandelten einschlägigen Gegenstände. Immerhin machte sich diese Darstellung hinsichtlich der Bildung complicirterer Formen von den Unzuträglichkeiten der bestehenden Methode noch nicht genügend frei. Das allgemeine Verfahren, invariante und covariante Bildungen jeder Art durch eine einheitliche und unabhängige Methode mit den Mitteln der Ausdehnungslehre herzustellen, verdanken wir erst von Escherich's[90] oben erwähnter Arbeit, welche zeigte, dass jede Ueberschiebung zweier binärer Formen eine Determinante höheren Ranges ist, und dass die weiteren Bildungen für ternäre, quaternäre und Formen höheren Ranges sich unter Benutzung schon gebildeter Formen als Aggregate solcher Determinanten darstellen und discutiren lassen. Schendel[95] behandelte mit gleichem Erfolge in verschiedenen Abhandlungen die Theorie der Resultanten, stellte (in Uebereinstimmung mit von Escherich) die r-stufige Determinante n^{ten} Grades als Product von n Determinanten und Aggregat von $(r!)^n$ Gliedern dar, welche in einem

Raume von $(n+1)$ Dimensionen einen $(n+1)$-dimensionalen Würfel erfüllen, und gab[96] in Buchform eine geordnete Darstellung aller Theile dieses Gebietes. Besondere Beachtung verdient hier die Ersetzung des zur Herstellung neuer Formen üblichen Differentiationsprocesses durch Einführung der sogenannten Hyperdeterminanten. Buchheim[97] endlich gründete eine neue Darstellung der Clifford'schen Theory of Graphs auf die Darstellung einer linearen Form durch ein äusseres Product. — Im Ganzen aber fehlt es noch an einer auf die Ausdehnungslehre gegründeten Bearbeitung der neueren Algebra, welche, auf dem in der R2 gemachten Anfange sich aufbauend, unter Verwerthung der verbesserten Methoden eine inhaltlich dem Stande der Theorie entsprechende systematische Darstellung geben und formell die Vortheile dieser Darstellung in das rechte Licht setzen müsste. Es hat daher diese Anwendung der Ausdehnungslehre noch bei Weitem nicht die verdiente Beachtung gefunden.

Literatur.

(Abkürzungen nach dem „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik".)

1. Study, Complexe Zahlen u. Transformationsgruppen, Lpz. Ber. 1889 S. 213 flg. S. 177 flg. — **2.** Vergl. Schlegel, Hermann Grassmann, Lpz. 1878, S. 28 flg., oder H. Grassmann's Ges. math. u. phys. Werke I1, 417. — **3.** J. Grassmann, Raumlehre II, Berlin 1824; Trigonometrie, Berlin 1835. — **4.** Möbius, Der barycentrische Calcül, Lpz. 1827; Mechanik des Himmels, Lpz. 1843. — **5.** Bellavitis, Annali delle scienze del regno Lomb. Ven. 1835, 1837; Calcolo delle Equipollenze, Padova 1835. — **6.** Bellavitis, Sulle origini del metodo delle equipollenze, Ven. Ist. Mem. XIX (1877). — **7.** St. Venant, C. R. XXI, 620 flg. (1845). — **8.** Cauchy, C. R. XXXVI, 70, 129, 161 (1853). — **9.** O'Brien, Phil. Mag. 1847 S. 139; Lond. Phil. Trans. CXLII, 161 (1852). — **10.** Gauss, Ges. Werke II, 305. — **11.** Bunkofer, Zahlenbüschel etc., Prog., Bruchsal 1878. — **12.** Résal, Traité de cinématique pure 1862 S. 64. — **13.** Somoff, Kinematik; deutsch v. A. Ziwet, 1878. — **14.** Lipschitz, Principes d'un calcul algébrique etc., C. R. XCI (1880). Vergl. Ref. in „Fortschr. d. Math." oder Schlegel, Einige geom. Anwendungen der Grassmann'schen Ausdehnungslehre, Prog., Waren 1882. — **15.** Vergl. Niemöller, Anwendungen der linealen Ausdehnungslehre auf d. Theorie der Determinanten, Prog., Osnabrück 1891. — **16.** Möbius, Ges. Werke IV, Ueber geometrische Addition u. Multiplication. — **17.** Badorff, Beitrag zur Geometrie des Kreises u. d. Kugel, Prog., Baden 1877. — **18.** Meray, Essai sur le calcul des quantités associées en systèmes etc., Ann. de l'Éc. Norm. (2) VIII (1879). — **19.** A2 S. 233. — **20.** Chapman, On some applications of the Units of an n-fold Space, American J. X (1888). — **21.** Chapman, On the matrix which represent a vector, American J. XIII (1891). Vergl. Ref. in „Fortschr. d. Math." — **22.** Genty, Applications mécaniques du calcul des quaternions, Journ. de Math. (3) VII (1881). — **23.** Sylvester, Sur la résolution générale de l'équation en matrices. C. R. IC (1884). — **24.** Wälsch, Zur Invariantentheorie der Liniengeometrie, Wien. Ber. XCVIII (1889). — **25.** Frobenius, Ueber lineare Substitutionen u. bilineare Formen, Crelle J. LXXXIV (1878). — **26.** Ueber dieses und die beiden folgenden Systeme vergl. Schlegel, Ueber neuere geom. Methoden etc., Schlömilch's Zeitschr. XXIV (1879). — **27.** Schendel, Die Bernoullischen Functionen und das Taylor'sche Theorem etc., Jena 1876. — **28.** Kindel, Eine reciproke Zuordnung der räumlichen Elemente, Prog., Berlin (Kölln. G.) 1887. — 29. d'Ocagne, Sur la corrélation etc., Nouv. Ann. (3) XI (1892). Vergl. Ref. in „Fortschr. d. Math." — 30. Vergl. Böklen, Die Rechnung mit Vectoren, Correspondenzbl. f. Gel. u. Realsch. 1882. — 31. Gauss, Götting. Gelehrte-Anz. 1831. — 32. Siebeck, Ueber die graphische Darstellung imaginärer Funct., Crelle's J. 1858. Zu dieser und der folgenden Nr. s. auch Citat 26. — 33. Björling, Ueber eine vollständige geom. Darstellung einer Gleichung zwischen zwei veränderlichen Grössen, Stockholm 1875. — 34. Grassmann, Der Ort der Hamilton'schen Quaternionen in der Ausdehnungslehre, Math. Ann. XII (1877). S. auch Citat 26. — 35. Gibbs, Elements of Vector Analysis, New-Haven 1881—84; On multiple algebra, Americ. Assoc. XXXV (1886). — 36. Cayley, Memoir on the theory of matrices, Lond. Phil. Trans. CXLVIII (1858). — 37. Peirce, Linear associative Algebra, American J. IV (1881). — 38. Sylvester, Lectures on the principles of Universal Algebra, Annals of Math. VI (1884), und verschiedene Aufsätze in den C. R. XCVIII und IC. S. auch Cayley, On double Algebra, Lond. M. S. Proc. XV (1884). — 39. Macfarlane, Principles of the algebra of physics, Americ. Assoc. XL (1891). — 40. S. Schlegel, Hermann Grassmann, Lpz. 1878, S. 22 flg., wo überhaupt über die erste Periode in der Geschichte der Ausdehnungslehre Ausführlicheres zu finden ist. — 41. Grassmann, Geometrische Analyse etc., Lpz. 1847. — 42. Crelle's J., Bd. 24, 25, 31, 36, 42, 44, 49, 52. — 43. Clausius, Crelle's J. LXXXII, 85 flg. (1876). — 44. Grassmann, Ueber die physikalische Natur d. Sprachlaute, Wiedemann's Ann. I (1877). — 45. Grassmann, Zur Theorie der Farbenmischung, Pogg. Ann. LXXXIX (1853). — 46. S. Citat 40 S. 15. — 47. S. R. Grassmann, Die Ausdehnungslehre, Stettin 1891, S. IV bis VI. — 48. Cremona, Nouv. Ann. 1860, S. 356. — 49. Clebsch, Zum Gedächtniss an J. Plücker, Gött. Abh. XV (1872). — 50. S. Citat 40 S. 61, Fussnote. — 51. Grassmann, Die Ausdehnungslehre von 1844 (1878), S. XVII. — 52. Noth, Die vier Species in den Elementen der Geometrie, Prog., Freiberg 1874, 1879. — 53. Schlegel, Lehrbuch der elem. Math., Wolfenbüttel 1878—80. — 54. Schlegel, Einige geom. Anwendungen der Grassmann'schen Ausdehnungslehre, Prog., Waren 1882; R_2 S. 59—121; Mehmke, Geometrie der Kreise in der Ebene, Schlömilch's Zeitschr. XXIV (1879); Anwendung der Grassmann'schen Ausdehnungslehre auf die Geometrie der Kreise in der Ebene, Diss., Tübingen 1880; Cox. Application of Grassmann's A. to properties of circles, Quart. J. XXV (1890); Müller, Die Kugelgeometrie nach den Principien der Grassmannschen Ausdehnungslehre, Monatsh. f. Math. III, IV (1892, 1893). — 55. Schlegel, Die Ausdehnungslehre als Mittel zur Analysis elem. geom. Aufgaben, Hoffmann's Z. XIV. 81—86, 517, 518, 520 (1883). — 56. Schlegel, R_1 S. 35—70; Einige geom. Anwendungen der Grassmann'schen Ausdehnungslehre. S. 20. S. auch Citat 30, S. 5 und 30, Schlussbemerkung. — 57. Einige geom. Anwendungen der Grassmann'schen Ausdehnungslehre, S. 3. — 58. Schlegel, R_2 S. 111; Ueber die geom. Darstellung des Imaginären etc., Schlömilch's Zeitschr. XXIII (1878). — 59. Tarry, Nouvel essai sur la géom. imaginaire, Assoc. franç. 1888; Géométrie générale, Ibid. 1889. — 60. Molenbroek, Theorie der Quaternionen, Leiden 1891 S. 131. — 61. Günther, Der Thibaut'sche Beweis für d. 11. Axiom, Prog., Ansbach 1877, S. 11, 12, Fussnote. — 62. R_1 S. 43. — 63. Eichler, Verallgemeinernde Betrachtungen über unsere Raumauffassung, Prog., Lingen 1874. — 64. Pilgrim, Ueber die Anzahl der Theile etc., Schlömilch's Zeitschr. XXIV (1879). — 65. S. Citat 34 S. 384. — 66. Carvallo, Sur une généralisation du théorème des projections, Nouv. Ann. (3) X (1891). — 67. Stolz, Zur Geometrie der Alten etc., Math. Ann. 1883; Vorlesungen über allg. Arithmetik, Leipz. 1885, 86. — 68. Grassmann, Sur les différents genres de multiplication, Crelle's J. IL (1854). — 69. Clifford, Applicat. of Grassmann's extension Algebra, American J. I (1878). — 70. Simony, Ueber zwei universelle Verallgem. d. algebr.

Grundoperationen, Wien. Ber. XCI (1885). — 71. Dyck, Gruppentheoretische Studien, Math. Ann. XX (1882). — 72. Dedekind, Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen, Gött. Nachr. 1885, 1887. — 73. Petersen, Ueber n-dimensionale complexe Zahlen, Gött. Nachr. 1887. — 74. Study, Ueber die Maassbestimmung extensiver Grössen, Diss., München 1885; Ueber Systeme von complexen Zahlen, Gött. Nachr. 1889; Complexe Zahlen u. Transformationsgruppen, Leipz. Ber. 1889. — 75. Seydler, Zur Theorie der complanaren Biquaternionen, Prag. Ber. 1881. — 76. Scott, A treatise on the theory of Determinants, Cambridge 1880. — 77. S. Citat 15. — 78. Carvallo, Théorie des déterminants; Multiplication des déterm., Nouv. Ann. (3) X (1891). — 79. Carvallo, Théorèmes de mécaniques, Nouv. Ann. (3) XII (1893). — 80. Caspary, Ueber die Umformung gewisser Determinanten etc., Crelle's J. XCII (1882); Ueber einige Determinanten-Identitäten etc., Crelle's J. XCV (1883). — 81. Mehmke, Bemerkung über d. Subdeterminanten symmetr. Systeme, Schlömilch's Zeitschr. XXX (1885). — 82. Caspary, Ableitung des Weierstrass'schen Fundamentaltheorems etc., Crelle's J. XCVI (1884). — 83. Schlegel, Aufl. d. Aufg. 637, Hoffmann's Z. XVII (1886); Progreso mat. IV. — 84. S. Citat 36. — 85. A_1 S. 266 flg.; A_2 S. 228; Auch R_2 S. 14. — 86. A_2 S. 241, Auch R_2 S. 76. — 87. S. Citat 23 und Referat in d. „Fortschr. d. Math." — 88. Buchheim, On the theory of matrices, Lond. M. S. Proc. XVI (1885). — 89. Scott, On cubic determinants etc., Lond. M. S. Proc. XI (1880); On some forms of cubic determ. Ibid. XIII (1882). — 90. v. Escherich, Die Determinanten höheren Ranges etc., Wien. Ber. XLIII (1880). — 91. Zehfuss, Ueber eine Erweiterung des Begriffs der Determinanten, Frankfurt a. M. 1868. — 92. Gibbs, On multiple Algebra, Americ. Assoc. XXXV (1886) S. 11. — 93. Grassmann, Ueber zusammengehörige Pole und ihre Darstellung durch Producte, Gött. Nachr. 1872; Die neuere Algebra und die Ausdehnungslehre, Math. Ann. VII (1874); Verwendung der Ausdehnungslehre für die allgemeine Theorie der Polaren etc., Crelle's J. LXXXIV (1877). — 94. R_2 S. 156–250; S. Bemerkung S. 172 u. S. 102 flg. — 95. Schendel, Schlömilch's Zeitschr. 1885, 1886, 1887, — 96. Schendel, Grundzüge d. Algebra nach Grassmann'schen Principien, Halle 1885. — 97. Buchheim, On Clifford's Theory of Graphs, Lond. M. S. Proc. XVII (1886).

(Schluss folgt.)

Das Geburtsjahr von Johannes Hudde.

Von

D. J. Korteweg
in Amsterdam.

In meiner Schrift „Ueber die Blüthezeit der mathematischen Wissenschaften in den Niederlanden“ (Het bloeitydperk der wiskundige Wetenschappen in Nederland. Amsterdam 1894. Referat in dieser Zeitschrift, Bd. 40, Histor.-lit. Abth. S. 53) glaubte ich berechtigt zu sein, das immer noch unsicher gebliebene Geburtsjahr des bekannten Mathematikers und Amsterdamer Bürgermeisters Johannes Hudde auf 1623 oder 1624 festzustellen, weil, nach einer mir von befugter Seite gemachten Mittheilung, Hudde am 26. Januar 1673 in einem Kirchenregister als 49jähriger Bräutigam der Debora Blaeuw eingeschrieben sei.

So wohlbegründet diese Angabe scheinen mochte, so hat sie sich doch als irrthümlich erwiesen. Sie ist auch in das Referat in dieser Zeitschrift übergegangen, und deshalb ist es wohl wünschenswerth, hier die Verbesserung mitzutheilen.

Das Geburtsjahr Hudde's ist nämlich nicht 1623, sondern 1628 und dass wir das jetzt wissen, verdanken wir dem cand. litt. K. O. Meinsma. Bei Untersuchungen über die Zeitgenossen und Correspondenten Spinoza's hatte er sich auch mit Hudde beschäftigt und fand er Ursache, an der Richtigkeit meiner Angabe zu zweifeln. Beim Nachschlagen des betreffenden Kirchenregisters ergab es sich ihm dann, dass man, nöthigenfalls, statt 49 auch 44 oder 99 für das Alter Hudde's lesen könnte. Er hat dann im Amsterdamer Taufregister das Jahr 1628 nachgesucht und da liest man auf den 23. April:

Gerrit Hudden
Maritje Witsen } Joannes.
Grietje Claes

Wahrscheinlich ist nun auch der Student, der am 1. Mai 1654 als „Johannes Hudde, Amstelodamensis, 25, Medicus“, im Leidener Album Academicum eingeschrieben wurde, identisch mit dem späteren Amsterdamer Bürgermeister. Ganz zweifellos ist das aber nicht, nicht so sehr, weil das

Alter nicht ganz stimmt (der am 23. April 1628* getaufte Hudde war am 1. Mai 1654 seit einigen Tagen 26 Jahr), denn in den Leidener Einschreibungen sind mehrere Fehler, welche wohl dadurch veranlasst wurden, dass die Studenten sich nicht selbst einschrieben, sondern dass der Rector die Feder führte; aber, was wichtiger ist, es giebt nach demselben Taufregister noch einen zweiten Joannes Hudde, der am 13. August 1628 getauft wurde (Eltern: Henrick Hudde und Clara Nys; Zeuge: Henrick van Marckel).

So muss es denn, leider! vorläufig noch unsicher bleiben, ob Hudde jemals in Leiden studirt hat, und also auch im engeren Sinne ein Schüler des Frans van Schooten der Jüngere war.

* Schon seit 1583 wurde in den Taufregistern die Greg. Zeitr. benutzt.

Recensionen.

Erwiderung auf die Recension über „Eine allgemeinere Integration der Differentialgleichungen“ von E. Puchberger. I. Heft, in der historisch-literarischen Abtheilung für Mathematik und Physik. 40. Jahrg. 1895, 5. Heft.

1. Der Referent bemerkt, dass die Behauptung: „die Methode des Verfassers sei auf alle Differentialgleichungen anwendbar“, im ersten Hefte nicht bewiesen werde. Hinsichtlich der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen ist der Beweis in der Einleitung des ersten Heftes enthalten und in den Ausführungen des 15. und 16. Beispieles des zweiten Heftes in Uebereinstimmung mit Baltzer's Determinantentheorie (§ 9) näher begründet, daselbst auch auf die gewöhnlichen nicht-linearen Differentialgleichungen — ferner im zweiten Hefte S. 32, 33, im 37. und 46. Beispiel auf die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, endlich im demnächst erscheinenden dritten Hefte auf die partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung ausgedehnt. Der Verfasser hält es nicht für genügend — wie der Referent meint —, wenn die Methode an einzelnen Beispielen zum Ziele führt, um ihre Allgemeingiltigkeit zu behaupten; er hat vielmehr die inneren Gründe der Methode vorgeführt und sieht in der Summe dieser inneren Gründe einen ausreichenden Beweis, dessen Kraft selbstverständlich ausserordentlich dadurch erhöht wird, dass eine Unzahl der nur theilweise veröffentlichten Beispiele aller Arten die Anwendbarkeit der Methode bestätiget hat. Freilich, einen Beweis für die allgemeine Anwendbarkeit der Methode, so klipp und klar und einfach wie etwa für 1 mal 1 ist 1, kann man bei dem ungeheuren Umfange des Stoffes kaum verlangen, ein solcher ist weder möglich noch nöthig. Schützte doch der angeblich exacte Beweis die berühmte specielle Methode des Laplace nicht vor der nachträglichen Correctur Spitzer's! (Herr Lehrb. d. h. Anal. II. Bd. 1864 § 521).

2. Diese Methode ist auf alle bis heute bekannten Differentialgleichungen anwendbar. Da man dies von keiner anderen Methode sagen kann, so ist sie allerdings heute die allgemeinste; sie heisst jedoch nur „Eine allgemeinere“, d. h. allgemeiner anwendbare, weil ja Functionen entdeckt werden können, die sich dieser Methode nicht fügen. Es besteht also der im Referate gerügte Widerspruch nicht.

3. In allen Beispielen wird genau nach der Methode verfahren. Sind die Coefficienten Functionen von x und lx, so ist die erste Ableitung von $lx : x^{-1}$; nach dem klaren Wortlaute meiner Definition des Principes müssen sowohl die gegebenen Gleichungscoefficienten als auch deren n erste Ableitungen mit unbestimmten Constanten — Coefficienten und Exponenten — versehen, also verallgemeinert werden, somit wird aus x^{-1} allgemein x^{b_m} und das symbolische Integral wird $y = a_m x^{b_m} . (lx)^{c_m}$.

$$\frac{d^2}{dx^2} \cdot x = 0 = const = x^0 = x^b; \quad \frac{d^2}{dx^2} \cdot lx = -x^{-2} = x^c,$$

also wird y wie oben.

Diesen Umstand hat der Referent übersehen und sein Vorwurf der Ungenauigkeit ist unbegründet.

4. „Der Nachweis der Convergenz der betreffenden Integralreihen werde niemals erbracht." Alle Integralreihen des ersten Heftes convergiren. Jene des zweiten also auch siebenten Beispieles erstes Heft convergiren, wie im 25. Beispiel zweites Heft ausgeführt ist. Jene des fünften Beispieles erstes Heft convergiren, weil sie fallen und das Zeichen regelmässig wechseln. Das Integral des achten Beispieles erstes Heft convergirt für alle x, dies ist in jedem Leitfaden zu lesen, ebenso convergirt die Reihe des neunten Beispieles erstes Heft, wenn sie reell gemacht wird. Derlei Dinge gehören in die Elemente. Im 15. Beispiele zweites Heft ist auch angegeben, warum die nach meiner Methode resultirenden Integralreihen immer convergiren können und müssen.

5. Der Verfasser hat nicht übersehen, dass die Reihe des zehnten Beispieles erstes Heft gleich $(y + x)^{c_1}$ ist; er sagt dies selbst auf Seite 5 des zweiten Heftes. Wenn auch hier $\varphi(x+y)$ gleich ist $\varphi(x + y)^{c_1}$, so hat das zehnte Beispiel erstes Heft doch gezeigt, dass die Methode auch auf partielle Differentialgleichungen anwendbar ist. Darin lag für den Verfasser das überraschende Resultat. [$\varphi(x + y)^{c_1}$ für allgemeiner zu halten als $\varphi(x + y)$ wäre übrigens nur eine ganz nebensächliche, das Wesen meiner Methode nicht berührende Meinung]. Erst das dritte Heft wird entscheiden, ob diese Methode nicht auch zu allgemeineren Integralen führt als bisher.

Der Titel: „Allgemeinere Integration der Differentialgleichungen" gebührt meiner Methode schon jetzt deshalb, weil es keine andere Methode giebt, welche alle Differentialgleichungen des ersten und zweiten Heftes nach einem Principe löst. Dies wird um so eclatanter, wenn das dritte Heft zeigen wird, dass auch die partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung durch dieselbe Methode gelöst werden.

Hiermit sind die Bemängelungen des Referates erledigt; ich bin von Letzterem insofern befriedigt, als es die Behauptung, dass meine Methode neu, richtig und thatsächlich auf alle vorkommenden Gleichungen anwendbar ist, nicht im mindesten erschüttert. Misslich war es jedoch, dass über das erste Heft allein, also nur über einen kleinen Theil des Ganzen abgesondert referirt wurde; die Beurtheilung konnte leicht eine schiefe werden. Schliesslich erlaube ich mir, den Referenten auf die an alle Skeptiker ergangene Einladung des Vorwortes des zweiten Heftes hinzuweisen.

EMANUEL PUCHBERGER.

Cours de géométrie analytique à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques spéciales et des candidats aux écoles du Gouvernement par B. NIEWENGLOWSKI, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand, membre du Conseil supérieur de l'Instruction publique. Tome I. Sections coniques. Paris 1894. Gauthier-Villars et fils. VI, 483 S. Tome II. Construction des courbes planes. — Compléments relatifs aux coniques. Ebenda 1895. 292 S.

Der Verfasser hat dem I. Bande ein Vorwort vorausgeschickt, in welchem er über seine Absicht sich äussert. Er habe, sagt er, vereinigt, was für die Zulassung zur École polytechnique ebenso wie zur École normale an Vorkenntnissen in der analytischen Geometrie zunächst der Kegelschnitte verlangt werde und mehr als das. Es sei aber für junge Leute, welche einem Wettbewerbe sich aussetzen (bekanntlich findet alljährlich nur eine beschränkte Anzahl neuer Schüler Aufnahme in jene höheren Unterrichtsanstalten), unumgänglich nöthig, mehr zu wissen, als von ihnen verlangt werde, und sich darnach zu richten, dass das Mehr das Weniger einschliesse. Er ist dieser Absicht durchaus gerecht geworden. Der uns vorliegende I. Band kann seiner Vollständigkeit nach als Handbuch der Kegelschnitte bezeichnet werden, ohne über diese Vollständigkeit dem Wesen eines Lehrbuches untreu zu werden, und nach unserem Geschmacke wenigstens erhebt er sich dadurch noch über ähnliche Werke in anderen Sprachen, denen er ein gefährlicher Nebenbuhler zu werden droht. Wenn auch die Kegelschnitte hauptsächlich behandelt sind, so hat sich Herr Niewenglowski doch keineswegs versagt, allgemeinere Auffassungen zum Ausdrucke kommen zu lassen, welche dem II. Bande, der den ebenen Curven überhaupt gewidmet werden soll, bereits erheblich vorarbeitet. Nach einer Einleitung, welche fast $3\frac{1}{2}$ Bogen stark schon ziemlich viel umfasst, namentlich mit mehr Arten von Coordinatensystemen bekannt macht, als es sonst der Fall ist, wird die gerade Linie mit Einschluss der imaginären Gebilde dieser Art behandelt, erst einzeln, dann nach Vorausschickung des Wissenswürdigsten über homogene und trilineare Coordinaten und weniger Invariantensätze in ihrem Auftreten als Strahlen-bündel. Die Vereinigung zweier Geraden führt zu einer ersten besonderen quadratischen Gleichung, und ihr gegenüber tritt eine zweite besondere quadratische Gleichung, die des Kreises. Schon die soweit erworbenen Kenntnisse lassen in einem Kapitel mit der Ueberschrift *Geometrische Oerter* manche Aufgabe lösen. Nun erscheinen im VIII. Kapitel die Curven zweiten Grades. Bei ihrer Discussion werden, wie vorher bei der Geraden, wie beim Kreise, wie in allen Kapiteln des ganzen Bandes die imaginären und anderen Entartungen mit besonderem Geschick in den Vordergrund gezogen. Eine Lehre von den Mittelpunkten, von den Durchmessern von Curven folgt. Nach einigen weiteren Kapiteln mit Gleichungsumformungen, Sätzen über Durchmesserlängen, Collineationsbetrachtungen kommen Tangenten und Normalen im Allgemeinen zur Sprache und gestatten die Auffindung der Kegelschnittsgleichung in Liniencoordinaten, deren ausführlichere Behandlung noch an die Polareigenschaften und die reciproken Figuren anknüpft. Nun werden Kegelschnitte durch Punkte ebensowohl als durch Tangenten bestimmt; ihre nicht genügende Bestimmung leitet zur Lehre von den Kegelschnittbüscheln über. Noch zwei Kapitel, ein XIX. und XX., erscheinen. In jenen ist von Brennpunkten im Allgemeinen die Rede, von Plücker's Auffassung derselben als Mittelpunkte von den Kegelschnitt doppelt berührenden Nullkreisen. In diesem ist von der Gleichung $f + \lambda . f_1 = 0$ der Angang genommen, wo f und f_1 Polynome zweiten Grades darstellen, und von den Bedingungen, welche λ erfüllen muss, damit jene Gleichung ein Linienpaar bedeute; man könnte das ganze Kapitel als das von der Gleichung in λ benennen. Wir haben damit eine nur allzuflüchtige Inhaltsübersicht gegeben, welche dem Fachmanne eine annähernde Ahnung von der Reichhaltigkeit des I. Bandes verleihen mag. Die Ausstattung ist eine vorzügliche, der Druck scheint nahezu fehlerfrei. Dürfen wir zum Schlusse eine Nebensache rügen, welche uns beim Lesen unangenehm aufgefallen ist? Herr Niewenglowski benutzt fortwährend die gleichen Typen derselben Buchstaben A, B, C..., um Punkte und Coefficienten zu bezeichnen. Auf einer und derselben Zeile wechselt oft die Bedeutung, so dass man sich die Frage stellen muss, was bedeutet A hier? Die Antwort auf diese Frage ist nicht grade schwer zu finden, aber wir meinen, die Nothwendigkeit sie zu stellen hätte vermieden werden sollen. Der II. Band ist dem I. überraschend schnell nachgefolgt. Sein Titel weist ihm die Construction ebener Curven und Ergänzungen der Lehre von den Kegelschnitten zu. Man sieht daraus, und der Umfang des Bandes, der nur $^3/_5$ der Stärke des I. Bandes erreicht hat, bestätigt es, dass der Verfasser keineswegs beabsichtigt hat, einen vollständigen Lehrgang der höheren ebenen Curven zu schreiben. Manches wird an einen solchen erinnern, aber in vielen anderen Theilen weicht der Band wesentlich von dem Werke Salmon's z. B. ab. Herr Niewenglowski legt ein Hauptgewicht auf die annähernd richtig gezeichnete Gestalt einer Curve. Die Art der Wölbung, ihre Veränderung in Inflexionspunkten, Singularitäten werden zuerst erörtert, dann die Grösse der Krümmung einer Curve, bei welcher Gelegenheit wir die Besprechung des Falles eines verschwindenden Krümmungshalbmessers ungern vermisst haben. Das Newton-Puiseux'sche Parallelogramm findet eingehende Benutzung. Nun kommen die gradlinigen Asymptoten. Ein Kapitel über die metrischen Sätze, welche Newton, Maclaurin, Carnot eingeführt haben, unterbricht einigermassen den Zusammenhang. Der Verfasser wollte sie offenbar nicht weglassen, wusste aber keinen geeigneten Ort, sie unterzubringen. Nun wendet er sich zu besonderen Curven. Hilfscurven $y = \varphi(x)$ und $y = \psi(x)$ als Uebergang zu den Curen $y = \varphi(x) + \psi(x)$, asymptotische Curven, Unicursalcurven definirt durch ihre beiden Parametergleichungen, bestimmte Curven dritten und vierten Grades treten auf. War in diesen neun ersten Kapiteln ausschliesslich von gradlinigen Coordinaten Gebrauch gemacht, so zeigt das zehnte Kapitel die Anwendung von Polarcoordinaten. Nun folgen die im Titel zugesagten Ergänzungen zur Kegelschnittslehre in fünf Kapiteln. Joachimsthal's Sätze über die von einem Punkte ausgehenden Normalen, das Pascal'sche und das Brianchon'sche Sechseck, Bestimmung eines Kegelschnittes durch dazu genügende Elemente treten in den Vordergrund. Zwei kurze Kapitel über graphische Gleichungsauflösungen und über die Lehre von den Equipollenzen nach Bellavitis beschliessen den Band. Auch in ihm fehlt es nicht an Ausblicken in Gebiete, deren genauere Durchforschung Herr Niewenglowski sich versagt hat, und noch weniger an geistreichen Einzelheiten, an sogenannten Kunststückchen, welche den Leser anregen und unterhalten.

Cantor.

Lezioni di Calcolo infinitesimale dettate da Ernesto Pascal, professore nella R. Università di Pavia. Parte I. Calcolo Differenziale, IX, 316 pag. Parte II. Calcolo Integrale, VI, 318 pag. Ulrico Hoepli. Milano 1895.

Die Hoepli'sche Verlagshandlung in Mailand giebt unter der gemeinsamen Ueberschrift als „Manuali Hoepli" handliche und ungemein wohlfeile kleine Bändchen heraus, welche als Lehrbücher der verschiedensten Wissensgebiete dienen sollen. Die beiden Bändchen Infinitesimalrechnung z. B. kosten zusammen nur sechs Lire! Ihre Herstellung ist buchhändlerisch nur unter der Voraussetzung eines aussergewöhnlich starken Absatzes denkbar, und dieser wieder mag wohl zum Theil durch den billigen Preis verbürgt sein, aber sicherlich doch nur dann, wenn der Inhalt sich als empfehlenswerth bewährt. Die mathematischen Bändchen lassen auch Letzteres durch die Namen ihrer Verfasser, welche keinem Leser italienischer Zeitschriften unbekannt sind, erwarten, und Herr Pascal insbesondere hat sich der ihm gestellten Aufgabe in den heute vor uns liegenden Bändchen vollständig gewachsen gezeigt. Er wollte, so sagt die Vorrede, dasjenige bringen, was in einem gewöhnlichen Lehrgange der Infinitesimalrechnung enthalten zu sein pflegt, während er von dem Versuche, sogleich complexe Veränderliche zu wählen und dadurch der Functionentheorie vorzuarbeiten, Abstand nahm. Wir können nach beiden Richtungen nur unser Einverständniss aussprechen. Die Lehre von den reellen Veränderlichen verdient didactisch und sachlich noch immer eine besondere Behandlung, wenn auch der Geist dieser Behandlung wesentlich strenger geworden es nicht verleugnen kann noch will, welchen Einfluss die Functionentheoretiker des XIX. Jahrhunderts geübt haben. Herr Pascal erklärt ferner in seiner Vorrede, welche Schriftsteller er insbesondere sich zum Muster genommen habe, und die Namen Lipschitz, Gilbert, Mansion, Stolz, Dini, Peano, Harnack stellen eine Auswahl dar, aus welcher man keinen einzigen entfernen möchte, wenn auch der Eine diesen, der Andere jenen Namen noch überdies genannt wünschen könnte. Die Zerlegung des Stoffes in zwei Bändchen hat zur Folge, dass die Integration von der Differentiation scharf gesondert ist. Die meisten Vorlesungen halten die gleiche Sonderung für nothwendig. Nach dem Vorgange eines gelehrten Freundes pflegt Referent anders zu verfahren und hat nur gute Erfahrungen damit gemacht. Die unbestimmten Integrationen können sehr wohl zwischen die Differentiationen eingeschoben werden. Das hat den grossen Vorzug, dass man das Handwerkmässige und Langweilige auf einmal los wird und nicht zu befürchten braucht, den durch die Anwendungen der Differentialrechnung bereits in seinen Anforderungen an interessante Gegenstände gesteigerten Schüler nachträglich zu enttäuschen. Freilich entfernt sich dieser Lehrgang wesentlich von dem Althergebrachten, aber, wer Neuerungen anderer Art nicht scheut, wird vielleicht auch an dieser Gefallen finden. CANTOR.

Questions d'algèbre à l'usage des élèves des classes de mathématiques spéciales et des candidats aux écoles polytechnique, normale, centrale etc. par GEORGES MAUPIN, licencié ès sciences mathématiques et physiques, membre de la société mathématique de France. Avec une préface de M. C. A. LAISANT, docteur ès sciences. Paris 1895. Librairie Nony et Cie. VII, 292 pag.

Sind Aufgaben, ohne Angabe ihrer Auflösung gesammelt und im Drucke vereinigt, von wirklichem Nutzen? Herr Laisant ist dieser Ansicht, sonst hätte er nicht eine ganze Reihe solcher Sammlungen bei Gauthier-Villars herausgegeben. Auch Herr Maupin schliesst sich seinem Beispiele theilweise an, allerdings nur theilweise, denn in jedem Kapitel sind wenigstens einige Musteraufgaben aufgelöst. Referent kann den Nutzen nicht recht begreifen, den solche Sammlungen stiften sollen. Bei der Strittigkeit der Frage unterdrücken wir jedoch unsere abweichende Ansicht und berichten nur kurz über den Inhalt der Fragen. Sie gehören der Algebra, der algebraischen Analysis, der Differential- und Integralrechnung an, auch die Combinatorik und die Wahrscheinlichkeitsrechnung sind berücksichtigt. Die Auswahl ist recht hübsch getroffen und vielfach auf gradezu fesselnde Fragen gefallen. Herr Maupin verschmäht es nicht, geschichtliche Bemerkungen einzustreuen. Wir freuen uns dessen, würden uns aber noch mehr freuen, wenn Herr Maupin in seinen darauf bezüglichen Studien auch Werke benutzt hätte, die später als Montucla erschienen sind. Wir versäumen keine Gelegenheit, anzuerkennen, was Montucla geleistet hat, aber seit hundert Jahren ist doch auch die Geschichte der Mathematik um ein Merkliches vorwärts gekommen, und Manches, was damals als richtig galt, hat sich als irrig erwiesen. Bei Aufgaben ohne Auflösung ist die Richtigkeit des Druckes von ganz besonderer Wichtigkeit. Nach manchen Stichproben bei den aufgelösten Aufgaben, z. B. auf pag. 152 bis 156, ist allerdings nicht überall mit der nothwendigen Sorgfalt verfahren worden.

CANTOR.

Die eiförmigen Curven. Inauguraldissertation zur Erlangung der Doctorwürde vorgelegt der hohen philosophischen Facultät der Universität Bern von FRITZ MÜNGER aus Kirchlindach (Bern). Bern 1894. 46 S. 5 Figurentafeln.

Schneidet man einen gegebenen Kreis durch eine von einem gegebenen Strahlencentrum ausgehende Secante, projicirt einen Schnittpunkt auf die Abscissenachse und den so gewonnenen Punkt der Abscissenachse auf die Secante, so bildet bei Drehung der Secante um das Strahlencentrum ihr vorbestimmter Punkt eine Curve sechsten Grades, welche Herr Münger eiförmige Curve nennt. Die gegenseitige Lage des Kreises und des Strahlencentrums bedingt selbstverständlich andere und andere Gestaltungen, welche eingehend erörtert und durch Figuren verdeutlicht werden. Herr Münger hat seine Untersuchung auch auf andere Curven ausgedehnt, welche mit den Eilinien in irgend welcher Verbindung stehen.

CANTOR.

Praktische Hilfstabellen für logarithmische und andere Zahlenrechnungen von JOSEF HRABÁK, kaiserl. königl. Oberbergrath und Professor. Dritte abgekürzte Ausgabe. Leipzig 1895. B. G. Teubner. V, 253 S.

Sollen wir das wesentlich unterscheidende Merkmal dieser Tabellen von anderen kurz bezeichnen, so dürfen wir sagen, die meisten Tabellenwerke umfassen neben den Logarithmen auch Anderes, das von Hrabák neben Anderem auch Logarithmen. Mit Hilfe einer auf eine hinlängliche

Zahl von Decimalstellen ausgerechneten Logarithmentafel kann man ja unzweifelhaft das von Herr Hrabák fürsorglich Gerechnete jeden Augenblick selbst herstellen, aber eine wesentliche Bequemlichkeit gewährt es doch, sofort die reciproken Werthe aller vierziffrigen Zahlen oder zweite und dritte Potenzen und Wurzeln, Vielfache von π, wirkliche Längen trigonometrischer Linien im Einheitskreise und dergleichen mehr aufschlagen zu können. Diese Möglichkeit bietet aber das uns vorliegende Buch nebst einer hinreichenden Gewährleistung für die Richtigkeit der Ergebnisse, da, wie das Vorwort ausdrücklich betont, in den etwa zwanzig Jahren seit dem erstmaligen Drucke der stereotypirten Tafeln nach vielseitigem Gebrauche kein einziger Fehler entdeckt worden ist. Die genannten Hilfstabellen für die reciproken Werthe liefern sechs Decimalstellen. Auch die Briggischen Logarithmen der Zahlen und der trigonometrischen Linien sind auf sechs Decimalstellen angegeben, mithin in grösserer Anzahl, als es neuerdings üblich ist. Die Ausstattung befriedigt die weitestgehenden Wünsche.

Cantor.

Elementarbuch der Differential- und Integralrechnung mit zahlreichen Anwendungen aus der Analysis, Geometrie, Mechanik, Physik etc. für höhere Lehranstalten und den Selbstunterricht bearbeitet von Friedrich Autenheimer, Maschinen-Ingenieur, gew. Professor und Director des zürcherischen staatlichen Technikums zu Winterthur, Herausgeber von „Bernoulli's Vademekum des Mechanikers“, von „Bernoulli's Dampfmaschinenlehre“ und von „Aufgaben über mechanische Arbeit“. Vierte verbesserte Auflage. Mit 157 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Weimar 1895. Bernhard Friedrich Voigt. VIII, 535 S.

Wir haben Bd. XXXIII dieser Zeitschrift, Historisch-literarische Abtheilung S. 22, unsere Ansicht über die dritte Auflage ausgesprochen, und die vierte Auflage hat unser Urtheil nicht verändert. Wir wissen aus dem abermals nöthig gewordenen Neudrucke, dass das Elementarbuch Käufer findet, wir wissen, dass es insbesondere in der Schweiz beliebt ist, dass der verstorbene Rudolf Wolf es in seinem Handbuche der Astronomie, ihrer Geschichte und Literatur I, 108, in seinem Literaturnachweise erwähnt. Wir wissen ferner, dass die Aufgaben aus der Mechanik, welche wir als Vorzug der dritten Auflage erwähnt haben, noch um Aufgaben über Quantität der Bewegung, Potential- und mechanische Wärmetheorie vermehrt worden sind. Wir wissen endlich, um keinen Vorzug unerwähnt zu lassen, dass der Preis von 9 Mk. ein verhältnissmässig sehr niedriger ist. Aber wir wissen auch, dass die neue Auflage bezüglich der Strenge der vorgetragenen Beweise sich nicht im Geringsten von der um acht Jahre älteren Auflage unterscheidet, und dass der Leser und Benutzer nach wie vor darauf angewiesen ist, Vieles auf Treu und Glauben anzunehmen.

CANTOR.

Aufgaben zur Differential- und Integralrechnung nebst den Resultaten und den zur Lösung nöthigen theoretischen Erläuterungen von Dr. H. DÖLP, weiland Professor am Polytechnikum zu Darmstadt. Sechste verbesserte Auflage. Giessen 1895. J. Ricker'sche Buchhandlung. II, 209 S.

Es giebt Bücher, welche man nicht mehr lobt, sondern bei welchen man sich damit begnügt, das Erscheinen einer neuen Auflage anzuzeigen. Zu diesen gehört *„der Dölp"*, wie die Studierenden das Buch kurzweg zu nennen pflegen. Dölp selbst hat nur die erste Auflage 1869 erscheinen sehen. Während des Druckes der zweiten Auflage von 1874 starb er. Hattendorff besorgte alsdann 1878 die dritte Auflage. Die vierte und fünfte Auflage von 1884 und 1891 sind keiner neuen Bearbeitung unterzogen worden und sind, da manche Druckfehler sich einschlichen, hinter der dritten Auflage zurückgeblieben, wenn auch, wie der fortgesetzte Absatz beweist, ohne die Brauchbarkeit einzubüssen. Für die sechste Auflage hat die Verlagshandlung, wie wir mit Bestimmtheit wissen, sich die Beihilfe eines bekannten Mathematikers zu sichern gewusst, den wir allerdings zu nennen uns nicht berechtigt fühlen, da sein Name weder auf dem Titelblatte noch als Unterschrift eines Vorwortes vorkommt. Vielleicht verzichtet er bei einem späteren abermaligen Abdrucke auf den der Durchsichtigkeit nicht entbehrenden Mantel der Anonymität. CANTOR.

Grundriss der Differential- und Integral-Rechnung. I. Theil: Differential-Rechnung. Von Dr. LUDWIG KIEPERT, Professor der Mathematik an der technischen Hochschule zu Hannover. Siebente vollständig umgearb. und verm. Auflage des gleichnamigen Leitfadens von weil. Dr. MAX STEGEMANN. Mit 160 Figuren im Texte. Hannover 1895. Helwing'sche Verlagsbuchhandlung. XVI, 638 S.

Die Vorrede zur fünften Auflage ist vom Juli 1887 datirt, die zur sechsten vom 15. November 1892, die zur siebenten vom 21. Mai 1895. Die sechste Auflage wurde folglich in der halben Zeit vergriffen, welche zum Verkaufe der ihr unmittelbar vorhergehenden erforderlich war. Die Kritik kann nicht immer mit der Gunst des Publikums übereinstimmen, aber dem Kiepert'schen Grundrisse gegenüber ist die Berechtigung jener Gunst allgemein zugestanden. Referent hat wiederholt mit Fachgenossen von Universitäten und von technischen Hochschulen darüber gesprochen, welches Werk sie wohl dem Anfänger am Liebsten empfehlen, und fast regelmässig wurde ihm in den letzten Jahren Kiepert genannt und damit sein eigenes Urtheil bestätigt. In der siebenten Auflage hat das Werk nun auch den Titel erhalten, welchen es vollständig verdient. Von der alten Stegemann'schen Differentialrechnung ist so gut als Nichts mehr vorhanden, Herr Kiepert hat sie neu verfasst und musste als Verfasser auf dem Titelblatte erscheinen, vermuthlich nicht zum letzten Male.

CANTOR.

Anwendung der Differentialrechnung auf die ebenen Curven, nebst 425 gelösten Aufgaben, 164 Figuren und 138 Erklärungen. Für das Selbststudium und den Gebrauch an Lehranstalten bearbeitet nach dem System Kleyer von Prof. Dr. AUGUST HAAS. Stuttgart 1894. Verlag von Julius Maier. VIII, 272 S. (Dritter Theil des Lehrbuches der Differentialrechnung.)

Referent hat nicht die Absicht, das „System Kleyer" einer Beurtheilung zu unterwerfen. Ein einzelnes Bändchen liegt uns zur Besprechung vor, und von diesem können wir mit gutem Gewissen sagen, dass es zweckmässig gewählte Aufgaben der Curvenlehre in grosser Anzahl enthält und sich durch diese dem Lehrer, der nach Beispielen sucht, empfehlen dürfte. Angenehm dürfte es für diesen auch sein, dass die Figuren sorgfältige Zeichnung verrathen und an der Tafel zum Muster gebraucht werden können. Die Rechnungen wird man freilich jeweils zu prüfen haben, denn allein in den 80 ersten Seiten, bei welchen wir keineswegs alle Aufgaben prüften, sind uns auf S. 20, 21, 23, 36, 37, 47, 71, 80 Irrthümer aufgefallen. Nachsendung eines vollständigen Druckfehlerverzeichnisses von Seiten des Herrn Verfassers, dem die Mühe einer vollständigen Nachrechnung in erster Linie zuzumuthen ist, würde dem Bändchen zum Vortheile gereichen.

CANTOR.

M. BÔCHER, **Ueber die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie.** Mit einem Vorwort von F. KLEIN. Leipzig 1894. B. G. Teubner. VIII und 258 S.

Die philosophische Facultät der Göttinger Universität hatte 1890 folgende Preisaufgabe gestellt: „Man kann die Mehrzahl der in der Potentialtheorie auftretenden Reihenentwickelungen und Integraldarstellungen unter einheitlichem Gesichtspunkt ableiten, indem man die sämmtlichen bei diesen Darstellungen in Betracht kommenden Orthogonalsysteme als Ausartungen des Systems confocaler Cykliden betrachtet und unter Zugrundelegung des letzteren zunächst für einen von sechs confocalen Cykliden begrenzten Körper geeignete Reihenentwickelungen aufstellt. Die Facultät wünscht, dass der hiermit bezeichnete Gedanke ins Einzelne durchgeführt, auch von der ganzen Theorie eine zusammenhängende Darstellung gegeben werde." Der Preis wurde der Schrift des Verfassers „Ueber die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie", Göttingen 1891 (vergl. F. d. M. S. 996—1000), zuerkannt. Das vorliegende Buch ist als Umarbeitung und Weiterführung jener Preisarbeit anzusehen.

Aus den Problemen der Potentialtheorie wird ein einziges herausgegriffen, die sogenannte Randwerthaufgabe, und die Frage aufgeworfen, ob sich diese nicht für einen Körper so allgemeiner Art lösen lasse, dass sämmtliche bis jetzt behandelten Körper als Ausartungen desselben angesehen werden können. Ein solcher Körper ist das Cyklidensechsflach, d. h. ein von sechs confocalen Cykliden begrenzter Körper. Der Behandlung der Randwerthaufgabe ist daher eine Darstellung der von den Herren Montard und Darboux begründeten Theorie der Cykliden vorausgeschickt worden.

Der erste Abschnitt beginnt mit einem Kapitel über einige Methoden und Gründsätze der projectiven Geometrie (Kap. I). Kapitel II handelt von der Geometrie der reciproken Radien der Ebene, welche ihren adäquaten analytischen Ausdruck in der Verwendung tetracyklischer Coordinaten findet. In diesen Coordinaten wird das allgemeine orthogonale System confocaler cyklischer Curven dargestellt. Um die Resultate auf den Raum zu übertragen, werden die pentasphärischen Coordinaten eingeführt und die Gleichung des allgemeinen dreifach orthogonalen Systems confocaler Cykliden aufgestellt, wobei die Definition zu Grunde gelegt wird: Cykliden heissen alle Flächen, welche durch eine homogene Gleichung zweiten Grades zwischen pentasphärischen Coordinaten dargestellt werden. Da für das Folgende die Kenntniss der Ausartungen der allgemeinen Cykliden von Wichtigkeit ist, so bringt das nächste Kapitel (III) eine Methode, mit deren Hilfe man sämmtliche Ausartungen systematisch aufzählen kann. Diese Methode liefert die Weierstrass'sche Theorie der Elementartheiler, welche dazu benutzt wird, das volle System der Invarianten einer linearen Schaar quadratischer Formen zu erhalten. Auf dieses algebraische Problem kommt eben die Classification der Cykliden, bei Anwendung der Geometrie der reciproken Radien, zurück. Es ergiebt sich eine Eintheilung der Cykliden in 26 Arten, eine Anzahl, die sich verringert, wenn man, wie es die Physik verlangt, ein reelles pentasphärisches Coordinatensystem zu Grunde legt. Hieran schliesst sich eine Aufzählung der reellen Systeme confocaler Cykliden. In Kapitel IV wird die Gestalt der verschiedenen Cyklidenschaaren näher beschrieben und, soweit dies ohne Modell möglich ist, der Anschauung zugänglich gemacht.

Nachdem der Verfasser noch in Kapitel V die von Herrn Darboux definirten cyklidischen Coordinaten einer näheren Besprechung unterzogen hat, wird in den beiden folgenden Abschnitten gezeigt, wie dieselben bei der Behandlung der Randwerthaufgabe zu verwerthen sind. Diese Frage wird im zweiten Abschnitt für allgemeine, im dritten Abschnitt für ausgeartete Cyklidensechsflache erledigt.

Vorausgeschickt werden einige allgemeine Erörterungen, die sich auf die Lamé'schen Gleichungen beziehen. Für diese wird nach dem Vorgange von Herrn Klein eine verallgemeinerte Definition aufgestellt, und zwar wird als Lamé'sche Gleichung „eine überall reguläre homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten bezeichnet, deren im Endlichen gelegene singuläre Punkte $e_1, \ldots e_n$ sämmtlich die Exponenten $0, \frac{1}{2}$ besitzen, und die im Unendlichen nur einen uneigentlich singulären Punkt aufweist." Die allgemeine Lamé'sche Gleichung lautet hiernach:

$$4f(x)y'' + 2f'(x)y' + \frac{n-4}{4(n-1)} f''(x)y = \varphi(x) \cdot y,$$

wo

$$f(x) = (x-e_1)(x-e_2) \ldots (x-e_n),$$

$$\varphi(x) = ax^{n-4} + bx^{n-5} + \cdots + m$$

und $a, b, \ldots m$ beliebige Constanten bezeichnen. Jede Lösung einer solchen Lamé'schen Gleichung wird, ebenfalls in Uebereinstimmung mit Herrn Klein, eine Lamé'sche Function genannt. Um auch noch die Singularität im Unendlichen wegzuschaffen, werden homogene Variablen eingeführt.

Hiernach wird auf geometrischem Wege ein merkwürdiges, von Sturm für Differentialgleichungen mit einem Parameter entdecktes, von Herrn Klein auf solche mit zwei Parametern ausgedehntes Theorem für den reellen Verlauf der Lamé'schen Functionen aufgestellt, welchem Herr Klein den Namen „Oscillationstheorem" gegeben hat. Der Verfasser beschränkt sich auf den Fall $n = 5$, der für die Randwerthaufgabe allein in Betracht kommt. Das Theorem lautet: „Die accessorischen Parameter a und b einer Lamé'schen Gleichung $n = 5$ können stets und nur auf eine Weise so bestimmt werden, dass eine erste Particularlösung existirt, welche in einem ersten beliebigen Segmente $m_1 m_2$ eines Intervalles der reellen x-Achse genau m Halboscillationen ausführt, und dass gleichzeitig eine andere Particularlösung existirt, welche in einem beliebigen Segmente $n_1 n_2$ eines anderen Intervalles genau n Halboscillationen ausführt."

In Kapitel III des zweiten Abschnittes kommt der Verfasser endlich auf die ursprüngliche physikalische Fragestellung zurück, nachdem er die Potentialgleichung mit Hilfe cyklidischer Coordinaten umgeformt hat. Die Frage, ob sich ein Lamé'sches Product, das der eben genannten Differentialgleichung genügt, von der Form

$$\psi(\mu, \nu, \varrho) = E'(\mu) E''(\nu) E'''(\varrho)$$

finden lässt, wird jetzt, auf Grund der Untersuchungen der Herren Wangerin und Darboux, dahin entschieden: „Wir können ein Lamé'sches Product bilden, indem wir die drei Factoren desselben als irgend welche Lamé-sche Functionen annehmen, die Particularlösungen einer und derselben Lamé'schen Gleichung $n=5$ sind, welche die Punkte $e_1, \ldots e_5$ als einfache singuläre Punkte besitzt. Die accessorischen Parameter der Lamé-schen Gleichung sind dabei keinerlei Beschränkungen unterworfen."

Hiernach ist man im Stande, für jedes allgemeine System cyklidischer Coordinaten ∞^5 Potentiale in der Form verallgemeinerter Lamé'scher Producte

$$V = T \,.\, E'(\mu) E''(\nu) E'''(\varrho)$$

zu bilden. Diese Potentiale entsprechen an sich keinen besonders einfachen oder wichtigen physikalischen Problemen. Aus ihnen lassen sich aber durch Addition allgemeinere Potentiale zusammensetzen, und mit Hilfe dieser wird die in Rede stehende Randwerthaufgabe zur Lösung gebracht.

Zunächst betrachtet der Verfasser Körper, die von sechs allgemeinen confocalen Cykliden „durchaus rechtwinklig" begrenzt sind, und führt folgende schematische Bezeichnung derselben ein: „Das allgemeine Cyklidensechsflach wird durch ein Schema charakterisirt, welches aus drei Segmenten $m_1 m_2$, $n_1 n_2$, $r_1 r_2$ besteht, die bezw. in den Intervallen μ, ν, ϱ der reellen x-Achse liegen, aber diese Intervalle, oder Theile derselben, beliebig oft überdecken können". Wird dann noch ein Lamé'sches Product, das auf fünf Seitenflächen eines Cyklidensechsflachs verschwindet, als zu dem Sechsflach „gehörend" bezeichnet, so übersieht man leicht, dass die Lamé'schen Functionen, aus welchen sich diese zugehörigen Lamé'schen Producte zusammensetzen, geradezu durch das Oscillationstheorem zu bestimmen sind. Mit Benutzung dieser Producte wird nun die Randwerthaufgabe gelöst. Diese Lösung ist allerdings, wie der Verfasser selbst zugiebt, nur formal richtig. Für die wirkliche Anwendung fehlen: 1. der Convergenzbeweis der Reihenentwickelungen, 2. eine übersichtliche und brauchbare Darstellung gewisser Fundamentalzweige einer beliebigen Lamé'schen Function, 3. die numerische Bestimmung der accessorischen Parameter a, b der Lamé'schen Differentialgleichung durch die gegebenen Oscillationseigenschaften, 4. Methoden zur bequemen Auswerthung der Doppelintegrale, die in den Coefficienten der Reihenentwickelungen vorkommen.

Der dritte Abschnitt behandelt die Randwerthaufgabe der Potentialtheorie für ausgeartete Cyklidensechsflache. Auch hier geht ein mathematisches Kapitel voran. Dasselbe bezieht sich auf die Specialfälle der Lamé'schen Gleichung und des zugehörigen Oscillationstheorems. Zunächst wird dargelegt, dass bei einem ν-fachen singulären Punkt e_k einer Lamé'schen Gleichung für $\nu \geqq 3$ im Allgemeinen irreguläres Verhalten eintritt. Ist aber e_k zugleich eine μ-fache Wurzel ($\mu \leqq \nu - 2$) von $\varphi(x) = 0$, so arten die Lamé'schen Functionen $E(x)$ in das Product

$$(x - e_k)^{-\frac{\mu}{4}} \bar{E}(x)$$

aus, unter $\bar{E}(x)$ eine Lamé'sche Function verstanden, die im Punkte e_k

einen $(\nu - \mu)$fachen singulären Punkt, sonst aber dieselben Singularitäten wie $E(x)$ besitzt.

Um sodann für diese Specialfälle das Oscillationstheorem zu gewinnen, unterscheidet der Verfasser zwischen allgemeinen und specialisirten Segmenten, von denen die letzteren einen singulären Punkt der Lamé'schen Gleichung als Endpunkt haben. Für allgemeine Segmente bei specialisirter Gleichung ist der Ansatz zum Beweis des Oscillationstheorems in keiner Weise zu ändern. Ebensowenig tritt eine Modification desselben ein bei specialisirten Segmenten, sobald der Endpunkt des Segments ein einfach singulärer Punkt ist. Sobald indessen dieser Endpunkt eine höhere Singularität hat, ist das Oscillationstheorem nicht mehr allgemein aufrecht zu erhalten.. So ist ein Fall, in welchem es seine Giltigkeit verliert, der, wo sich das Segment von einem mehrfachen Punkt e_k zu einem anderen mehrfachen Punkt e_{k+1} einfach erstreckt, das ist der Fall, wo die Lamé'sche Gleichung die Gestalt annimmt:

$$\frac{d^2y}{dt_1^{\,2}} = (Ax + B)y,$$

wenn

$$t_1 = \int \frac{dx}{2\sqrt{f_1(x)}}, \quad f_1(x) = \frac{f(x)}{(x - e_k)^\nu}.$$

Hiernach studirt der Verfasser die zu beliebigen Ausartungen des cyklidischen Coordinatensystems gehörigen Lamé'schen Producte, welche übrigens bereits von früheren Autoren angegeben worden sind. Dazu wird die früher aufgestellte Tabelle aller dreifach orthogonalen Flächensysteme benutzt, die sich als Ausartungen des allgemeinen cyklidischen Systems ansehen lassen. Zunächst findet der Verfasser: Wenn e_k ein mehrfacher Punkt ist, welchem drei verschiedene Elementartheiler entsprechen, so müssen die accessorischen Parameter dieser Lamé'schen Function in der Weise specialisirt werden, dass die Lamé'sche Function nach Abtrennung des Factors $(x-e_k)^{-\frac{1}{2}}$ in den Fall $n=4$ ausartet. Ausser diesen Lamé'schen Functionen $n=4$, die sich stets durch trigonometrische Functionen ausdrücken lassen, und den allgemeinen Lamé'schen Functionen $n=5$ ergeben sich noch fünf Specialfälle: 1. die Functionen der dreiachsigen Flächen zweiten Grades, 2. die Functionen des Rotationskegels (Kugelfunctionen eines Arguments mit unbeschränktem Index), 3. die Functionen der zweiachsigen Cylinder zweiten Grades, 4. die Functionen des Rotationscylinders (Bessel'sche Functionen), 5. die Functionen des parabolischen Cylinders. Dieselbe Art Lamé'scher Functionen kann bei sehr verschiedenen Flächensystemen auftreten. So treten die Functionen der dreiachsigen Flächen zweiten Grades bei a) den allgemeinen Flächen zweiten Grades, b) den Kegeln zweiten Grades, c) den Rotationsringcykliden, d) den zweitheiligen, e) den eintheiligen Rotationscykliden; die Functionen des Rotationskegels bei a) den Rotationskegeln, b) den Kreisringen, c) den Rotationsflächen zweiten Grades (abgeplattete Ellipsoide und einschalige Hyperboloide; verlängerte Ellipsoide und zweischalige Hyperboloide); die Functionen der zweiachsigen Cylinder zweiten Grades bei a) den Cylindern zweiten Grades, b) den allgemeinen Paraboloiden; die Functionen des Rotationscylinders bei a) den Rotationscylindern, b) den Rotationsparaboloiden; endlich die Functionen des parabolischen Cylinders bei den parabolischen Cylindern auf. Diese Gruppirung verschiedenartiger Flächen findet, wie Verfasser hervorhebt, durch die hier dargelegte Klein'sche Theorie eine höchst anschauliche, einheitliche Erklärung aus einem obersten Princip. Ein kurzer historischer Bericht über die Theorie der Lamé'schen Producte (vergl. Byerly, Fourier's Series and Spherical, Cylindrical and Ellipsoidal Harmonics. Boston) beschliesst dieses Kapitel.

Das letzte Kapitel des dritten Abschnittes handelt von den Cyklidenvielflachen, die weniger als sechs Seitenflächen haben, und giebt eine Lösung der zugehörigen Randwerthaufgabe. Des historischen Interesses wegen wird der Fall des Vollellipsoids in einem besonderen Paragraphen vorgeführt. Hier vereinfacht sich die allgemeine Lösung wesentlich. Es wird bewiesen, dass die Lamé'schen Functionen, welche in den zum Vollellipsoid gehörigen Lamé'schen Producten auftreten, algebraisch sind, und zwar, bis auf etwa vorkommende Factoren $\sqrt{x-e_3}$, $\sqrt{x-e_4}$, $\sqrt{x-e_5}$, rational. Und diese Eigenschaft des Vollellipsoids, das hier das Oscillationstheorem auf (ganze) rationale. Functionen führt, ermöglicht die algebraische Bestimmung der accessorischen Parameter. Der Parameter A ergiebt sich hier gleich $N(N+1)$, wo N eine ganze positive Zahl bedeutet.

Es folgen noch Lösungen der Randwerthaufgabe für Körper, welche durch ausgeartete Cykliden begrenzt sind, deren Schemata aber nur allgemeine Segmente, und solche, deren Schemata specialisirte Segmente enthalten. Eine historische Uebersicht über die hauptsächlichsten bis jetzt aufgestellten Reihen-Entwickelungen der Potentialtheorie (Legendre, Laplace, Fourier, Poisson, Green, Lamé, Heine, Liouville, F. Neumann, C. Neumann, Riemann, Thomson und Tait, Mehler, Mathieu, H. Weber, C. Baer, F. Klein) beschliesst den letzten Abschnitt.

Ein Anhang versucht noch, die bisherigen Resultate auf R_n zu übertragen, um einen besseren Ueberblick über die für den dreidimensionalen Raum entwickelte Theorie zu gewinnen.

E. Jahnke.

Bibliographie

vom 16. October bis 30. November 1895.

Periodische Schriften.

Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1894. Abth. Sachsen. 1. Hälfte, Nr. 1 u. 2. Herausgegeben von P. Schreiber. Chemnitz, Bülz. 10 Mk.

Veröffentlichungen des königl. preuss. meteorologischen Instituts. Herausgegeben von W. v. Bezold. Niederschlagsbeobachtungen im Jahre 1893. Berlin, Asher. 10 Mk.

Abhandlungen der physikalisch-technischen Reichsanstalt. 2. Bd. Berlin, Springer. 30 Mk.

Acta nova societatis Upsaliensis. Seriei III, vol. XV, fasc. II. Upsala, Akad. Buchhandlung. 18 Mk.

Bulletin de l'académie de St. Pétersbourg. 5. série, tome II, Nr. 3—5. Leipzig, Voss. 2 Mk. 50 Pf.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Zeuthen, G., Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter. Kopenhagen, Höst. 6 Mk.

Bosscha, J., Christ. Huygens. Rede zum 200jährigen Gedächtnisstage seines Lebensendes. Aus dem Holländischen von Th. Engelmann. Leipzig, Engelmann. 1 Mk. 60 Pf.

Ostwald, W., Elektrochemie, ihre Geschichte und Lehre. Berlin, Veit & Co. 30 Mk.

Reine Mathematik.

Krause, M., Theorie der doppeltperiodischen Functionen einer veränderlichen Grösse. 1. Bd. Leipzig, B. G. Teubner. 12 Mk.

Kantor, S., Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen in der Ebene. Berlin, Mayer & Müller. 5 Mk.

Wirtinger, W., Untersuchungen üb. Thetafunctionen. Leipzig, B. G. Teubner. 9 Mk.

Angewandte Mathematik.

Grossmann, L., Anleitung zur Berechnung der Constanten der Bessel'schen Formel für den täglichen und jährlichen Gang periodischer Elemente. Altona, Schlüter. 1 Mk.

Hartmann, W., Dynamische Theorie der Dampfmaschine. Berlin, Springer. 5 Mk.

Fuhrmann, A., Die Nivellirinstrumente, ihre Benutzung, Prüfung und Berichtigung. Leipzig, Seemann. 1 Mk. 25 Pf.

Höhenbestimmungen in Württemberg. 5. Heft, Bezirk Cannstatt. Bearbeitet von C. Regelmann. Herausgegeben vom statistischen Landesamt. Stuttgart, Lindemann. 50 Pf.

Biese, A., Theorie der Fernrohre mit continuirlich variabeler Vergrösserung. Berlin, Fussinger. 2 Mk.

Löffelholz v. Colberg, C., Die Drehungen der Erdkruste in geologischen Zeiträumen. München, Finsterlin. 5 Mk.

Physik und Meteorologie.

Meyer, V., Probleme der Atomistik. Vortrag. Heidelberg, Winter. 1 Mk.

Fuchs, G., Anleitung zur Molekulargewichtsbestimmung nach Beckmann-scher Gefrier- u. Siedepunktsmethode. Leipzig, Engelmann. 1 Mk. 20 Pf.

Walter, B., Die Oberflächen- oder Schillerfarben. Braunschweig, Vieweg. 3 Mk. 60 Pf.

Steinworth, H., Zur Frage n. d. Irrlichtern. Lüneburg, Herold & Wahlstab. 1 Mk.

Grunmach, L., Lehrbuch der magnetischen und elektrischen Maasseinheiten, Messmethoden und Apparate. Stuttgart, Enke. 16 Mk.

Mann, R., Ueber Entmagnetisirungsfactoren kreiscylindrischer Stäbe (Dissertation). Berlin, Mayer & Müller. 1 Mk. 20 Pf.

Frank, M., Das thermo-elektrische Potential. München, Finsterlin. 1 Mk. 50 Pf.

Historisch-literarische Abtheilung.

Die Grassmann'sche Ausdehnungslehre.

Ein Beitrag
zur
Geschichte der Mathematik in den letzten fünfzig Jahren.

Von

Dr. V. Schlegel,
Professor an der Gewerbeschule in Hagen.

Schluss.

Zur Untersuchung der algebraischen Curven und Flächen liefert die Ausdehnungslehre mehrere charakteristische Methoden. Die erste verfolgt die Entstehung einer Curve oder Fläche aus festen und beweglichen Elementen, stellt dieselbe durch ein gleich Null gesetztes „planimetrisches" bezw. „stereometrisches" Product dar (welches übrigens in einen beliebigen Coordinatenausdruck verwandelt werden kann) und führt zu einer rein geometrischen Theorie auch der allgemeinsten unter jenen Gebilden. Sie unterscheidet sich von der Steiner'schen Behandlung wesentlich dadurch, dass sie in jenen gesetzmässig gebildeten Producten und deren ebenso gesetzmässigen Umformungen unmittelbare charakteristische Darstellungen der Gebilde selbst, ihrer Eigenschaften und Umformungen besitzt, und alle diese Gegenstände einem von der Anschauung unabhängigen einfachen Systeme von Operationen unterwirft. So vereinigt sie in sich die Vortheile der analytischen und der synthetischen Behandlungsweise. Grassmann selbst fand auf diesem Wege die allgemeinsten Sätze über die Erzeugung von Curven und Flächen[98] und gab in einer Reihe von Abhandlungen[99] ausführliche Darstellungen der allgemeinen Theorie und ihrer Anwendung auf Curven und Flächen zweiter und dritter, sowie auf Curven vierter Ordnung. Eine weitere Verwerthung fand diese Methode in einer Arbeit des Verfassers[100] über eine Fläche dritter Ordnung und ihre Reciprokalfläche, deren stereometrische Gleichungen und Eigenschaften sich in unmittelbarster Weise ergaben, die übrigens später von Eckardt[101] bezw. Bauer[102] noch mit Coordinaten-Methoden untersucht wurden. Ferner führte der Verfasser[103] eine Erweiterung des Grassmann'schen Princips dadurch aus, dass den als Constructionselemente benutzten Geraden und Punkten eine feste Curve hinzugefügt wurde. Dingeldey[104] gab auf Grund Grassmann'scher Bewegungs-Mechanismen eine sehr einfache Erzeugungsweise der C_3 mit Doppelpunkt und eine Construction der Wendepunktslinie, und zeigte, wie jener Mechanismus zu modificiren sei, um C_4 mit 1—3 Doppelpunkten zu erhalten, und wie die Elemente desselben liegen müssen, um eine gegebene C_4 zu erzeugen. Gleichzeitig gab Kölmel[105] die besondere Lage der Elemente für C_3 mit Doppelpunkt an, und ein einfaches Verfahren zur Bestimmung des Grades einer beliebigen mittelst eines Grassmann'schen Mechanismus erzeugten Curve. Fritz[106] dehnte die erste Grassmann'sche Erzeugungsweise der C_3 auf den Raum aus, Sturm[107] benutzte die Grassmann'schen Erzeugungsweisen der Curven dritter Ordnung und Klasse, um die Ausartungszahlen der Homologie zweier ebener Felder zu bestimmen, Caspary[108] dehnte die Grassmann'sche Erzeugungsart der ebenen Curven auf Raumcurven aus und leitete daraus ihre wesentlichen Eigenschaften, wie auch neue Constructionen ab. Endlich gab von Escherich[109] auf derselben Grundlage allgemeine Methoden, um algebraische Curven und Flächen beliebiger Ordnung aus der Anzahl der sie bestimmenden Punkte mittelst reciproker linearer Systeme höherer Stufe zu construiren, eine Aufgabe, die vorher für Flächen von höherer als vierter Ordnung noch nicht gelöst worden war. — Es hat dieser Methode nicht an Gegnern gefehlt. So musste schon Grassmann[110] die von Bellavitis ausgesprochene Behauptung widerlegen, dass seine Methoden nur specielle Arten der C_3 lieferten. Schröter[111] machte die an sich ja interessante Bemerkung, dass die drei Grassmann'schen Erzeugungsweisen der C_3 durch Umformung aus den Chasles'schen und Cayley-Hesse'schen Methoden erhalten werden können. Unzutreffend war aber die hieran geknüpfte Bemerkung, dass die Grassmann'schen Methoden hierdurch überflüssig geworden seien; denn man hat es hier thatsächlich nur mit zwei gleichberechtigten Formulirungen desselben Grundgedankens zu thun, einer projectivischen und einer mechanischen. Ebenso konnte Schröter nur in Unkenntniss der oben erwähnten schon vorhandenen Literatur behaupten, aus den Grassmann'schen Definitionen ginge nicht hervor, wie der einer gegebenen Curve zu Grunde zu legende Mechanismus herzustellen sei, und diese Definition sei daher für die wirkliche Erzeugung der C_3 und die Herleitung ihrer Eigenschaften unfruchtbar geblieben.

Eine zweite Methode stellt Curven und Flächen als Functionen eines variablen Gebildes (Punkt, Gerade, Ebene) dar und lehrt durch rechnerische Verbindung dieser Functionen die Beziehungen zwischen Curven und zwischen Flächen aufzufinden und darzustellen. Diese Methode eröffnet den einfachsten und natürlichsten Weg zur Theorie der Polaren, der Systeme von Curven und Flächen und ihrer Verwandtschaftsbeziehungen. Die Grundzüge dieser Theorie gab Grassmann[112] in mehreren Abhandlungen, die, zum Theil anknüpfend an Arbeiten von Clebsch und Reye über Polenpaare einer C_3, über die Polarentheorie algebraischer Flächen etc. die bisherigen Methoden ausserordentlich vereinfachten und neue Gesichtspunkte, neue Wege für die Erweiterung dieser Theorien eröffneten. Die weitere Ausbildung dieser Methode führte dann direct in die schon oben besprochene Darstellung der neueren Algebra mit ihrem geometrischen Interpretationsgebiet, wobei noch die von Schendel[113] in seinem oben citirten Werk gegebenen geometrischen Anwendungen zu erwähnen sind.

Ein dritter Weg führt in die Krümmungstheorie. Derselbe benutzt in gewohnter Weise die Hilfsmittel der Differentialrechnung, operirt aber unter Vermeidung der Coordinaten mit den Gebilden (Strecken, Bogen und ihren Differentialen etc.) selbst und verwendet im Uebrigen die Regeln der Streckenrechnung und der für die Ausdehnungslehre charakteristischen Multiplicationen. Diese Theorie ist in allen ihren Theilen von H. Grassmann (jr.)[114] ausführlich dargestellt worden. Im Anschluss hieran gab Carvallo[115] einen einfachen Beweis des Satzes, dass die Summe der Krümmungen einer Minimalfläche in jedem Punkte Null ist. Mehmke[116] untersuchte auf derselben Grundlage die Eigenschaften der linearen Punkttransformationen, Berührungstransformationen und ähnliche Probleme[117], und gab eine allgemeine Construction der Krümmungsmittelpunkte ebener Curven, eine neue Begründung der Fundamentalsätze der Flächentheorie und vereinfachte Beweise von Sätzen über Raumcurven. — Auch Peano[118] erörterte diese Gegenstände eingehend in seinen Lehrbüchern der Grassmann'schen Geometrie und leitete mit denselben Methoden eine Reihe von Sätzen über geometrische Maxima und Minima und über Normalen an Curven und Flächen ab. Cesaro[120] gab eine Vereinfachung der Codazzi'schen Formeln über geodätische Krümmung und Torsion von Curven auf einer Oberfläche. Hierher gehört auch die vom Verfasser[121] gegebene Lösung eines erweiterten Steiner'schen, auch von Sturm behandelten Problems über Punkte kleinster Abstandssumme. Endlich verdanken wir Fine[122] eine mit den Methoden der Ausdehnungslehre ausgeführte Theorie der Singularitäten der Raumcurven.

Geometrische Verwandtschaften und Transformationen lassen sich nach Grassmann[123] besonders vortheilhaft mittelst der (schon oben erwähnten) erweiterten Quotienten behandeln. Hierauf gründet sich die vom Verfasser[124] und von Hyde[125] weiter ausgebaute Theorie der transformirenden Factoren, nämlich des Verschiebungsfactors $\varDelta$ (bei Hyde $\mathfrak{r}$) für Punkte, und des Drehungsfactors i^m (bei Hyde $\mathfrak{v}$) für Strecken, Begriffe, die sich in der Theorie der projectivischen und collinearen Beziehungen, wie bei der Darstellung von Curven, mit Vortheil verwerthen lassen, und deren Ueberlegenheit den Hilfsmitteln der Quaternionen gegenüber von Hyde zweifellos dargethan wurde.

Zweifacher Art ist der schon frühzeitig von Klein vermuthete und vom Verfasser[126] in der R2 in den Grundzügen dargelegte Zusammenhang zwischen den Principien der Ausdehnungslehre und den Gesichtspunkten der neueren projectivischen Geometrie, wie sie namentlich durch

Clebsch vertreten war. Erstens liefert die Methode, räumliche Gebilde aus anderen mittelst Zahlfactoren abzuleiten, gleichzeitig Beziehungen des Maasses und der Lage. In diesen Zahlfactoren berührt sich die Grassmann'sche Methode mit den projectivischen Coordinaten Fiedler's. Zweitens führt die oben erwähnte Darstellung der Invariantentheorie ohne jede Maassbeziehung in das Gebiet der projectivischen Geometrie. Dass diese Zusammenhänge den einfachsten Zugang zur projectivischen Geometrie im n-dimensionalen Raume darbieten, hatte schon Clifford[69] erkannt. Nur den ersteren Zusammenhang hatte Study[127] im Auge, als er auf dem Gebiete der projectivischen Geometrie dem symbolischen Rechnen den Vorzug vor der Ausdehnungslehre gab, und letztere in ihren Anwendungen auf das Gebiet der Mechanik beschränkt wissen wollte. Aber auch die erste der beiden Methoden hat für die Zwecke der Geometrie der Lage eine Weiterbildung durch Beseitigung der Maassbeziehungen erfahren. Durch Einführung der projectivischen Addition und Subtraction, sowie der projectivisch-arithmetischen Multiplication und Division gelang es Noth[128], die einfachste Analysis für die Geometrie der Lage, und insbesondere für die Theorie der Möbius'schen geometrischen Netze einen Rechnungsmechanismus herzustellen, der nach Noth's nicht publicirten hinterlassenen Notizen auch für die geometrische Darstellung zahlentheoretischer Beziehungen nützlich zu werden verspricht.

Auch die Liniengeometrie verdankt der Ausdehnungslehre neue Methoden und Resultate. Sturm[129] fand unter Anwendung der äusseren Multiplication den Zusammenhang zwischen den Wirkungslinien im Gleichgewicht befindlicher Kräfte und linearen Complexen und Congruenzen. Buchheim[130] zeigte, dass, wenn a eine aus vier Einheiten gebildete allgemeine Form zweiten Grades ist, die Gleichung $(ax) = 0$ einen linearen Complex und gleichzeitig eine Schraubenbewegung darstellt. Zu demselben Resultate gelangte Hyde[131] unter Hinweis auf die daraus resultirende wesentliche Vereinfachung der Plücker'schen Behandlung linearer Complexe. Ausführlicher wurde diese Vereinfachung von Wälsch[24] vorgenommen (auf Grundlage eines schon oben erwähnten Verfahrens), und das ganze Verfahren mit gleichem Vortheil auf höhere Complexe ausgedehnt. Endlich fand Müller[132], dass die von Grassmann nur formal definirte geometrische Summe zweier Linientheile im Raume den durch sie bestimmten linearen Complex darstellt, und gründete hierauf eine vereinfachte Darstellung der Complexe, zeigte auch, wie jede erhaltene Formel sowohl im Sinne der Kugel- wie der Liniengeometrie gedeutet werden könne.

In der modernen Forschung nimmt die n-dimensionale Geometrie einen jährlich wachsenden Raum ein, da, abgesehen von dem Interesse an dem Gegenstande selbst, von hier aus neues Licht auf Gegenstände und Methoden der gewöhnlichen Geometrie fällt. Hier nun ist die Ausdehnungslehre mit der Allgemeinheit ihrer Methoden als bestes Werkzeug der Untersuchung verschiedentlich anerkannt worden. In der A1 wie in der A2 sind denn auch geradezu die analytischen Grundlagen dieser Wissenschaft enthalten, und es bedarf, um diese Grundlagen in Worten zu erhalten, nur einer Uebersetzung der allgemeinen Begriffe in die Sprache der Geometrie. Auch im Einzelnen sind auf diesem Wege verschiedene Erweiterungen geometrischer Sätze auf mehrdimensionale Räume vorgenommen worden. Vom Verfasser[133] wurden die Sätze über Mittellinien und Schwerpunkte des Dreiecks und Tetraeders, über das vollständige Viereck, Hexaeder und Oktaeder, über harmonische Punktgruppen und Aehnliches auf Räume mit n Dimensionen ausgedehnt, und rückwärts durch Projection neue Sätze für die niederen Gebiete abgeleitet. Auch gelang auf diesem Wege die Klassification der Punktgruppen in Räumen mit beliebiger Dimensionenzahl.[134] Dieselbe Erweiterung führte Mehmke[135] aus für den Euler'schen Dreiecksatz und die Sätze über den Höhenschnittpunkt des Dreiecks und den Kreis der neun Punkte. Clifford[69] machte auf die Möglichkeit aufmerksam, eine allgemeine projectivische Geometrie von n Dimensionen auf Grassmann'scher Grundlage aufzubauen. Dagegen muss bemerkt werden, dass die für die oben erwähnten Erweiterungen mehrfach wichtige Theorie der mehrdimensionalen regelmässigen Körper bis jetzt ausserhalb des Anwendungsgebietes der Ausdehnungslehre steht.

Auch die von Cayley[136] aufgestellte Theorie des analytischen Ursprungs der metrischen Relationen, auf welcher die Unterscheidung der nichteuklidischen Geometrien von der euklidischen beruht, findet, wie schon in der R2[137] gezeigt wurde, mittelst der Grassmann'schen Productbildungen ihre einfachste Darstellung. Dieselbe Bemerkung machten später Buchheim[138] und Cox[139], welcher letztere eine ausführliche Ableitung der Grundformeln für alle drei Hauptarten der Geometrie gab, auch zeigte, wie aus dem Begriff der Ableitung eines Punktes aus Punkten alle descriptiven und projectiven Eigenschaften von Curven folgen, deren Punkte gewissen Gleichungen genügen. Uebrigens zeigte schon Grassmann[140], dass die Principien der Ausdehnungslehre auch zum Aufbau der nichteuklidischen Geometrie vollständig ausreichen.

Mit Hilfe der Ausdehnungslehre gefunden, wenngleich nur theilweise in ihrer Sprache dargestellt, sind auch die schönen Resultate im Gebiete der Thetafunctionen, welche Caspary[141] in einer Reihe von Arbeiten veröffentlicht hat, und von welchen das eine, mit den Determinanten zusammenhängende, schon oben (Note 82) erwähnt wurde. So gelang es Caspary u. A., mit Hilfe einer gebrochenen linearen Substitution, das elliptische Differential $dy:\sqrt{f(y)}$ in die Weierstrass'sche Normalform zu transformiren, und daraus neuere, von Hermite gefundene Gleichungen abzuleiten, geometrisch zu deuten und zu vermehren. Dann wurde gezeigt, wie die neun Coefficienten einer orthogonalen Substitution sich identisch durch Θ-Functionen ausdrücken lassen, und als Anwendung eine einfache

Lösung von Rotationsproblemen gegeben. Hierbei stellte sich heraus, dass Relationen, welche Jakobi[142] mittelst elliptischer Functionen gefunden hatte, mittelst der Ausdehnungslehre ohne dieselben abgeleitet werden konnten, und sich zum Theil als absolute Identitäten erwiesen, zum anderen Theil mit Hilfe quadratischer Transformationen der Θ-Functionen in solche verwandelt werden konnten. Auch die Euler'schen Winkel ϑ, φ, ψ und ihre trigonometrischen Functionen wurden mit Hilfe von zwei beliebigen Argumenten durch die vier Jakobi'schen Θ-Functionen, und mit Hilfe von vier beliebigen Argumenten durch die ungeraden Θ-Functionen allein ausgedrückt. Mit den Euler'schen Winkeln sind natürlich durch einfache Beziehungen auch die Winkel α, β, γ verbunden, welche beim Beweise des Gauss'schen Fundamentalsatzes der Axonometrie mittelst Grassmann'scher Methoden[143] auftreten. So fällt auch die ganze Theorie der Orthogonalsysteme, Rodrigues'schen Transformationen u. s. w. einfach in das Gebiet der „Haupteinheiten" der Ausdehnungslehre, wie dies zum Theil schon aus den einschlägigen Abschnitten der R2[144] hervorgeht. — Ein weiteres Ergebniss bildete die Ableitung verschiedener Formeln und Sätze, wie der Weierstrass'schen Formel für Producte aus je vier Θ-Functionen, des Jakobi'schen Fundamentaltheorems, der Cayley'schen Gleichung u. s. w. aus algebraischen Identitäten.[145] Es würde zu weit führen, die zahlreichen Resultate dieser Art, welche das ganze Gebiet der Θ-Functionen und der mit ihnen zusammenhängenden Gegenstände als natürliche Domäne der Grassmann'schen Methoden erscheinen lassen, auch nur zu erwähnen, und es muss hier der Hinweis auf das Literaturverzeichniss in Note 145 genügen. Nur hinsichtlich der hyperelliptischen Functionen sei noch bemerkt, dass die Theorie derselben identisch ist mit der geometrischen Theorie von vier Tetraedern, welche die besondere Lage haben, dass jedes von ihnen den drei anderen zugleich ein- und umbeschrieben ist. Im Uebrigen mag als abschliessendes Resultat aller dieser Untersuchungen noch hervorgehoben werden, dass der einfachste Eingang schon zur Theorie der elliptischen Functionen weder durch die Integral-Definitionen führt, noch durch die Periodicitätseigenschaften, ebenso wenig wie der zur Theorie der Theta- oder Sigmafunctionen durch die Entwickelung nach Potenzen der Variablen. Es sind vielmehr geometrische, mit Hilfe der Ausdehnungslehre darzustellende und weiter zu entwickelnde Beziehungen, auf welchen die einfachste Einführung in diese Gegenstände beruht. — Hiermit wäre denn auch eine schon vor langen Jahren von Klein ausgesprochene Ueberzeugung bestätigt, dass nämlich zwischen der Grassmann'schen Erzeugung der algebraischen Gebilde und der von Clebsch begründeten geometrischen Anwendung der Abel'schen Functionen eine tiefe Verbindung bestehe. Diese Verbindung im weitesten Umfange nachgewiesen zu haben, ist Caspary's Verdienst; den für beide Theorien, die analytische wie die geometrische, daraus zu erhoffenden Gewinn weiter ans Licht zu fördern, ist Aufgabe der Zukunft.

Am augenfälligsten sind die Vortheile der Ausdehnungslehre in der Mechanik zu Tage getreten. Während in der reinen Mathematik der Cartesische Standpunkt durch Fortbildung der analytischen und Neugestaltung der synthetischen Geometrie doch längst überholt war, lastete auf der Darstellung der Mechanik schon bei den einfachsten Beziehungen noch immer das Bleigewicht der Coordinaten. Probleme der Mechanik sind denn auch, wie Grassmann selbst in der Vorrede zur A1 erzählt, der Ausgangspunkt jener Untersuchungen gewesen, welche sich allmählich zu dem Systeme der Ausdehnungslehre verdichteten. Bei der Umarbeitung von Lagrange's Mécanique analytique stellte sich zuerst heraus, dass alle Entwickelungen dieses Werkes mit Hilfe der auf den Begriff des äusseren Products gegründeten neuen Analyse sich so einfach gestalteten, „dass oft die Rechnung mehr als zehnmal kürzer ausfiel, als sie in jenem Werke geführt war". Ebenso liessen sich die oft sehr verwickelten und unsymmetrischen Formeln, welche in Laplace's Mécanique céleste (Buch IV) der Theorie der Ebbe und Fluth zu Grunde gelegt sind, in höchst einfache und symmetrische Formeln umsetzen, wobei die Art ihrer Entwickelung stets dem Begriffe zur Seite ging. „In der That konnte nicht nur jede Formel, welche im Gange der Entwickelung sich ergab, aufs Leichteste in Worte gekleidet werden, und drückte dann jedesmal ein besonderes Gesetz aus, sondern auch jeder Fortschritt von einer Formel zur andern erschien unmittelbar nur als der symbolische Ausdruck einer parallel gehenden begrifflichen Beweisführung. Bei der sonst üblichen Methode zeigte sich durch die Einführung willkürlicher Coordinaten, die mit der Sache nichts zu schaffen haben, die Idee gänzlich verdunkelt, und die Rechnung bestand in einer mechanischen, dem Geiste nichts darbietenden und darum Geist tödtenden Formelentwickelung. Hingegen hier, wo die Idee, durch nichts Fremdartiges getrübt, überall durch die Formeln in voller Klarheit hindurchstrahlte, war auch bei jeder Formelentwickelung der Geist in der Fortentwickelung der Idee begriffen." Mit diesen Worten hat Grassmann die Methode der Ausdehnungslehre nicht nur in ihrer Anwendung auf Mechanik, sondern ganz allgemein auf das Treffendste charakterisirt. Denn Mechanik, Kinematik und Geometrie sind hier nichts Anderes, als Interpretationen derselben Entwickelungen und Resultate in verschiedenen Anwendungsgebieten. Die Ueberlegenheit der Ausdehnungslehre auf dem Gebiete der Mechanik anderen Methoden gegenüber ist denn auch oft anerkannt, niemals angezweifelt worden. Die Resultate von Grassmann's eignen Arbeiten auf diesem Gebiete sind sehr zerstreut. Auch die beiden, speciell die Mechanik behandelnden Aufsätze[146] geben im Ganzen nur die Principien und Proben der Anwendung neben Andeutungen und Ausblicken. Leider sind diese Arbeiten, die Grassmann noch in der letzten Zeit seines Lebens wieder aufnahm, nicht vollendet worden; das Vorhandene genügt aber ohne Zweifel als Fundament für den Weiterbau. Gesammelt und systematisch zusammengestellt findet sich alles Wesentliche der Grassmann'schen Mechanik in einer neueren Arbeit des Verfassers.[147] Einschlägige Proben aus der A1 gab schon Hankel[148], Sturm[129] erledigte auf diesem Wege den allgemeinen Fall des Gleichgewichts von n Kräften im Raume und leitete daraus die speciellen Resultate von Spottiswoode, Chelini, Möbius, Cayley und Sylvester her. Cremona[149] benutzte die Ausdehnungslehre in seiner Darstellung des graphischen Calcüls zur Construction von Resultanten und Schwerpunkten, Bunkofer[11] zu Untersuchungen über die Erhaltung und Ortsveränderung des Mittelpunktes eines bewegten Punktsystems und über den Centrifugaldruck einer rotirenden Scheibe, Favaro[150] würdigte sie in ihrer Bedeutung für graphische Statik als Hilfsmittel des technischen Unterrichts; einfache Ableitungen von Schwerpunktsätzen gab der Verfasser[151], ferner Caspary in Vorträgen in der Soc. math. de France (1887) Beweise einer Reihe ebensolcher Sätze von Laisant, Darboux, André und Fouret. Carvallo[152] fand mittelst der Grassmann'schen Darstellung von Resultirenden und Schwerpunkten eine Reihe allgemeiner Sätze über Kräfte, die an Körpern wirken und über Gleichwerthigkeit zweier Kraftsysteme. Ebenso Peano[119] Sätze über Kräfte, Complexe und Schwerpunkte, zum Theil neu, zum Theil von Poinsot, Serret, Steiner ausgesprochen. Eine ausführliche Bearbeitung der Statik auf gleicher Grundlage verdanken wir E. Müller[153], während Lüroth's[154] Grundriss der Mechanik zwar auch durchweg auf den Anschauungen der Ausdehnungslehre fusst, aber, nicht zum Vortheil der Sache, in die Sprache und Bezeichnungsweise der Quaternionen übersetzt erscheint. Burmester fand, dass die Hauptsätze seiner kinematischen Abhandlungen[155] spielend aus den Principien der Ausdehnungslehre hervorgehen. Die Umarbeitung dieser Untersuchungen, sowie verschiedene andere kinematische Arbeiten mit der Ausdehnungslehre führte Mehmke[156] durch, ebenso auch eine neue vereinfachte Theorie der Trägheitsmomente[157] unter Mitberücksichtigung der speciellen Probleme. Abbé zeigte in seinen Vorlesungen über die Mechanik fester Körper, dass die Anschauungen der Ausdehnungslehre es gestatten, den Begriff der krummlinigen Bewegung unmittelbar und nicht als Verbindung geradliniger Bewegungen zu erfassen, und stellte insbesondere die Beschleunigung eines Systempunktes nach Lage und Grösse als den geometrischen Unterschied zweier auf einander folgenden unendlich kleinen Rotationen dar. Die hieraus sich ergebenden Bewegungsgleichungen wurden von Kircher[158] zur Lösung einer Reihe von Problemen benutzt, die wesentlich eleganter und übersichtlicher ausfiel, als mit Hilfe der Euler-schen Bewegungsgleichungen. Das gleiche Resultat lieferte die von Allé[159] gegebene Darstellung des d'Alembert'schen Princips und der Gleichungen der drehenden Bewegung in der Sprache der Ausdehnungslehre. Buchheim[130] zeigte, dass für die ganze Theorie der Schraubenbewegungen die Ausdehnungslehre den einfachsten und adäquatesten Rechnungsmechanismus liefert. Insbesondere gab er eine neue und vollständige Theorie der Schraubenbewegung im positiv gekrümmten Raume gegenüber der von Clifford und Ball nur fragmentarisch und zum Theil beweislos gegebenen Darstellung mittelst Biquaternionen; ferner dehnte er die für unendlich kleine Bewegungen gefundenen Formeln auf endliche Bewegungen aus, und zwar für alle Arten des dreidimensionalen Raumes; endlich erweiterte er die ganze Theorie auf den n-dimensionalen Raum. Auf demselben Gebiete und mit denselben Mitteln arbeitete Cox[159], der namentlich die Schraubenbewegungen im hyperbolischen Raume und das Cylindroid untersuchte, und Hyde[131], der ebenfalls zeigte, „wie ausserordentlich Ball's Theorien an Einfachheit und Durchsichtigkeit gewinnen, wenn man die Begriffe und Methoden der Ausdehnungslehre auf sie anwendet."[160] Trotzdem ignorirte die Darstellung der Ball'schen Theorien, welche Gravelius in seiner Theoretischen Mechanik starrer Systeme (1889) gab, diesen Fortschritt vollständig, woran sich der Rath eines Recensenten knüpfte, das Werk einer vollständigen Umarbeitung in obigem Sinne zu unterziehen.[160] Auch Study[161] schloss seine Betrachtungen über die Parameterdarstellung der Gruppe der Drehungen eines starren Körpers um einen festen Punkt noch an die Quaternionen an. — Endlich behandelte Gibbs[35] die Theorie der Potentiale und anderer für specielle Probleme der mathematischen Physik wichtigen Functionen durchweg mit den Productbildungen der Ausdehnungslehre. Entsprechende Arbeiten anderer Fachmänner aus den Gebieten der Elasticitätslehre und der Hydrodynamik harren noch der Veröffentlichung.

Auch in Grassmann's schon oben erwähnter Theorie der Elektrodynamik[162] spielen die Methoden der Ausdehnungslehre eine wesentliche Rolle, ebenso nach neueren noch nicht publicirten Untersuchungen in der speciellen Theorie der Transformatoren. Dasselbe ist der Fall mit der Grassmann'schen Theorie der Farbenmischung[163] und der von Preyer[164] aufgestellten Theorie der reinen Empfindungslehre, an welche sich eine ebensolche Arbeit von Wundt[165] über die Theorie der sogenannten Localzeichen anschloss. Einige Anwendungen der Ausdehnungslehre auf Krystallographie und die Lehre vom Magnetismus gab Grassmann selbst in der A1. (Ueber die noch der Zukunft vorbehaltene Anwendung der höheren complexen Zahlen auf die Chemie ist Näheres bei Hankel[166] zu finden.) Wesentliche Vereinfachungen mittelst der Ausdehnungslehre sind auch bei astronomischen Rechnungen erzielt worden. Gibbs[167] gab mit Anwendung der Streckenrechnung und der inneren und äusseren Multiplication ein neues Verfahren an, aus drei vollständigen Beobachtungen die elliptischen Bahnen von Weltkörpern zu berechnen und wandte dasselbe auf die Bahnbestimmung der Ceres an. Dieses Verfahren gab nicht nur bessere Resultate, als die Methoden von Gauss und Oppolzer, sondern reducirte auch ganz bedeutend die Arbeit, welche erforderlich ist, um die Fundamentalgleichung zur Lösung vorzubereiten. Im Anschluss hieran führten Beebe und Phillips[168] eine vollständige Berechnung der Bahn des Swift'schen Kometen (1880, V) aus.

Neben den vorstehend genannten Specialarbeiten sind nun eine ganze Reihe von Schriften zu verzeichnen, welche lediglich bezwecken, den Leser mit den Methoden der Ausdehnungslehre in grösserem oder geringerem Umfange bekannt zu machen und ihn zum Studium derselben anzuregen. Ausser Grassmann's eigner orientirender Arbeit[169] und des Verfassers „System der Raumlehre" sind in dieser Hinsicht Arbeiten folgender Autoren zu nennen[170]: in Deutschland: Hankel, Mahler, H. Grassmann jr., R. Grassmann, Peano, Kraft; in England: Henrici, Cox; in Amerika: Beman, Clifford, Hyde, Gibbs; in Frankreich: Caspary, Carvallo; in Spanien (neben einer Arbeit des Verfassers): Galdeano; in Italien Peano; in Russland: Boguslavsky.

Als einen für die Verbreitung der Ausdehnungslehre sehr nützlichen Factor hat sich die Quaternionentheorie erwiesen, welche aus den schon oben beleuchteten Gründen zunächst in England weit schnellere und grössere Beachtung fand, als die Ausdehnungslehre in Deutschland, sodann aber auch verhältnissmässig rasch über die Grenzen ihrer Heimath hinausdrang. An ihr lernten die Mathematiker Amerikas, Frankreichs und Deutschlands, sich mit den neuen geometrischen Rechnungsoperationen zu befreunden, die man wenigstens in Deutschland so unerhört und unbequem fand; Uebersetzungen der Hamilton'schen Originalwerke, sowie eine ganze Anzahl kleinerer und grösserer Leitfäden und Lehrbücher, namentlich in deutscher Sprache, räumten in weiten Kreisen mit dem Vorurtheil gegen die den Mathematikern zugemutheten Neuerungen auf und arbeiteten der Ausdehnungslehre vor. Gross war dann allerseits die Ueberraschung, wenn sich herausstellte, dass die den Quaternionen aufgezwungenen Probleme mittelst der Ausdehnungslehre viel bequemer und schneller zu behandeln waren. Diese Anerkennung kam am unumwundensten und schnellsten in Amerika, neuerdings auch in Frankreich zum Ausdruck. Hyde[171] zeigte durch Gegenüberstellung von Ableitungen derselben Sätze mittelst der Quaternionen und der Ausdehnungslehre in drastischer Weise die Ueberlegenheit der letzteren hinsichtlich der Kürze des Verfahrens, Gibbs[172] that diese Ueberlegenheit in seinen bereits citirten Schriften mit Eifer und Nachdruck und in überzeugendster Weise dar und vertheidigte dieselbe auch gegenüber Tait's auf missverständlicher Auffassung beruhenden Angriffen, Clifford[69] kam durch vergleichende Betrachtung beider Disciplinen zu demselben Resultate, Carvallo[173] endlich gab durch seine vervollkommnete Darstellung der von Laguerre (1867) begründeten Theorie der linearen Vectorfunctionen auch den wichtigsten Methoden der Quaternionenrechnung eine Gestalt, von welcher der nächste Fortschritt zur Ausdehnungslehre führte. Im Uebrigen wies Padelletti[174] in seiner Darstellung der

Elemente der Quaternionen wenigstens auf die Grassmann'schen Bezeichnungen hin, und Stephanos[175] auf die Anwendung der Grassmann-schen Streckenrechnung zur Darstellung der bilinearen binären Formen mit Hilfe schwerer Punkte. — In Deutschland hatte schon früher Unverzagt[176] Quaternionen und Ausdehnungslehre gleichmässig gegen die Angriffe Scheffler's zu vertheidigen gehabt; später sprach sich Study[177] mit Nachdruck und Unparteilichkeit über den Nutzen der nicht algebraischen Algorithmen und das zulässige Anwendungsgebiet der Quaternionen aus und zeigte, wie unberechtigt die der Abneigung gegen diese Algorithmen zu Grunde liegenden Vorurtheile seien.

Der Ausdehnungslehre speciell ist verschiedentlich vorgeworfen worden, 1. sie benutze willkürliche, den Gesetzen des gewöhnlichen Rechnens zuwiderlaufende Methoden, 2. sie wolle alles in den mathematischen Methoden Bestehende umstürzen und sich überall eindrängen, 3. es könne durch sie nichts geleistet werden, was nicht ohne sie „ebensogut“ gelänge, 4. es fehle an „neuen Resultaten“, die durch sie gefunden worden seien, sie sei überhaupt durch die gewaltigen seit Grassmann's Zeiten gemachten Fortschritte der Mathematik überflüssig geworden, da kein wesentlicher Unterschied mehr zwischen ihr und anderen neueren Methoden bestehe. — Solchen Vorwürfen gegenüber bemerkt Study[177] treffend: „Wer den Gebrauch der Quaternionen oder ähnlicher Algorithmen grundsätzlich missbilligt, wird, wenn er folgerecht verfahren will, auch alle die schönen (sc. mit dem analytisch-geometrischen Algorithmus der Functionen einer complexen Variablen gefundenen. Anm. d. Verf.) Untersuchungen über conforme Abbildung, Minimalflächen und dergleichen verwerfen müssen, durch welche die Wissenschaft seit den Arbeiten von Gauss und Riemann eine wahrhafte Bereicherung erfahren hat. Einer solchen Erkenntniss hat sich auch Gauss[178] selbst nicht verschliessen können, obwohl er den zu seiner Zeit vorliegenden analytisch geometrischen Algorithmen von Haus aus abgeneigt war. Man beruft sich also mit Unrecht auf seine Autorität, um die oben genannten Anschauungen zu stützen.“ Und an anderer Stelle: „Es ist die historische Entwickelung der Wissenschaft, die Macht einer durch Generationen gepflegten Gewohnheit, die uns das als natürlich erscheinen lässt, was wir uns in den ersten Studienjahren eingeprägt haben. Tiefer blickende Geister, wie Leibniz und dann vor Allen Hermann Grassmann, haben uns gelehrt, dass wir dabei nicht stehen bleiben dürfen. Freilich sind wir noch lange nicht soweit, überall nach den Principien verfahren zu können, die uns Grassmann als ein werthvolles Vermächtniss hinterlassen hat. In der Theorie der Bewegungen jedoch, wie in der elementaren Geometrie überhaupt sind wir dazu im Stande.“ — Wenn Analytiker der älteren Generation, z. B. der feinsinnige Heine, von der Ausdehnungslehre nicht viel hielten, sei es aus Princip, oder weil sie keine Ursache fanden, sich näher mit ihr bekannt zu machen, so ist das angesichts ihrer damaligen Unzugänglichkeit und isolirten Stellung zu begreifen. Heutzutage kann oberflächliche oder bruchstückweise Kenntniss ihrer Methoden nicht mehr als Entschuldigungsgrund angesehen werden für so unbegründete, absprechende Urtheile darüber, wie sie oben zusammengestellt wurden. Diese immer nur sporadisch zum Ausdruck gekommenen Urtheile können aber auch thatsächlich heut zu Tage als abgethan gelten, oder bestehen wenigstens nur noch in einzelnen Kreisen, die, einer speciellen wissenschaftlichen Richtung huldigend, die Ausdehnungslehre bedauerlicher Weise und ohne reelle Ursache im Lichte einer gegnerischen Bestrebung ansehen. — Allerdings heisst es in den vom Herausgeber der gegenwärtigen Jubelausgabe von Grassmann's Werken unterzeichneten „Vorbemerkungen“: „Es giebt zwar jetzt eine ganze Reihe von Mathematikern, die nahezu ausschliesslich mit Grassmann'schen Methoden arbeiten; aber der grossen Mehrheit aller Mathematiker ist er bis auf den heutigen Tag ganz fremd geblieben: man begnügt sich im günstigsten Falle, seinen Namen mit einer gewissen Hochachtung zu nennen, aber an seinen Werken geht man achselzuckend vorüber.“ Allein angesichts der in den vorstehenden Mittheilungen niedergelegten Thatsachen dürfte dieses Urtheil wohl vielen Lesern allzu pessimistisch angehaucht erscheinen. Ja, die obigen Mittheilungen über Entwickelung und Ausbreitung der Ausdehnungslehre, auch wenn sie auf Vollständigkeit Anspruch machen dürften, erschöpfen noch keineswegs den Einfluss, welchen die Ausdehnungslehre bisher auf die Entwickelung der Mathematik gehabt hat. Es würden z. B. hinzuzurechnen sein Arbeiten, welche thatsächlich mit den Methoden der Ausdehnungslehre durchgeführt, aber nach Erlangung der Resultate umgearbeitet und in den allgemein üblichen Formen der Darstellung publicirt wurden, entweder, weil die Autoren bei ihren Lesern nicht das genügende Verständniss für die Grassmann'sche Darstellung voraussetzten, oder, weil sie die Erfahrung machen mussten, dass die Umarbeitungen den Weg von dem Redactionstisch einer Zeitschrift bis zur Druckerei viel schneller zurücklegten, als die Originalarbeiten. — Weit mehr aber fällt der Umstand ins Gewicht, dass die neuere Forschung auf den Gebieten der Geometrie und Mechanik ersichtlich mehr und mehr von dem Geiste der Ausdehnungslehre sich durchdringen lässt, auch da, wo den Methoden derselben noch eine mehr oder weniger ablehnende Haltung entgegengebracht wird. Die ganze Entwickelung dieser Forschung drängt nicht nur, wie schon oben bemerkt wurde, mehr und mehr auf die durch die Ausdehnungslehre geschaffene äussere Form hin, sondern bewegt sich auch in ihrem Streben nach Auffindung allgemeiner Gesichtspunkte und allgemeinster Gesetze, nach Klarlegung der Zusammenhänge zwischen anscheinend sich fernstehenden, aber innerlich als organisch verwandt zu betrachtenden Gegenständen, nach übersichtlicher Ordnung der Resultate, besserer Fundamentirung der Principien, endlich in der geringeren Werthschätzung detaillirter Resultate, die keinen Fortschritt in den erwähnten Richtungen erkennen lassen, überall im Geiste der Ausdehnungslehre vorwärts. Da ist es denn allerdings nicht zu verwundern, wenn man heut zu Tage die Ausdehnungslehre ebenso natürlich, den übrigen Forschungsmethoden verwandt, und in Folge dessen überflüssig findet, wie man sie vor 25 Jahren unnatürlich, den übrigen Forschungsmethoden widersprechend, und in Folge dessen überflüssig fand. Der Vollständigkeit wegen muss auch diese mitunter vorkommende Auffassung registrirt werden. Vielleicht wird in späteren Zeiten klarer als heute zu erkennen sein, dass die Mathematik fin de siècle in viel höherem Grade von Geist und Methode der Ausdehnungslehre beeinflusst war, als ihre Vertreter selber ahnten.

Andererseits liegen von den Mathematikern verschiedenster Länder — darunter die angesehensten Namen — Urtheile vor, die mit seltener Einmüthigkeit, oft in begeisterter Weise, die vereinfachende, ordnende, leitende Kraft und die ausserordentliche Tragweite der Grassmann'schen Methoden anerkennen, dieser Methoden, die bei aller Einfachheit sich überall dem Gegenstande der Untersuchung aufs Engste anschmiegen, niemals in unwegsame Rechnungen sich verlieren, um auf Umwegen zu einem einfachen Ziele zu gelangen, und die dem Forscher nur den Verzicht auf das Vorurtheil zumuthen, als beruhe alles Heil in der Mathematik auf den Rechnungsarten der Arithmetik oder speciell in der Geometrie auf Steiner's System. Eine auch nur auszugsweise Mittheilung jener Urtheile würde den Rahmen dieser Arbeit wesentlich überschreiten, auch wohl hier und da die Meinung erwecken, als bedürfe die Ausdehnungslehre heute noch besonderer öffentlicher Empfehlung seitens anerkannter Autoritäten. — Uebrigens ist die Bewunderung der Ausdehnungslehre keineswegs eine so platonische geblieben, wie man nach der oben mitgetheilten Stelle der „Vorbemerkungen" vielleicht annehmen könnte. Nicht nur haben Autoritäten ersten Ranges, namentlich im Auslande, schon seit Jahren sich ihre Verbreitung angelegen sein lassen, sie ist auch längst Gegenstand besonderer Vorlesungen an Hochschulen geworden. Sie wurde z. B. (nach den hier zu Gebote stehenden Mittheilungen) theils in ihren Principien, theils in Anwendungen verschiedenster Art, vorgetragen von Burmester in München, von Mehmke in Stuttgart und Darmstadt, von v. Escherich in Czernowitz, von Kraft in Zürich, von Hyde in Cincinnati; auch im mathematischen Studienplane der Universität Leipzig hat sie eine Stelle gefunden. Von Interesse für die Ausdehnungslehre und die ihr verwandten Methoden giebt auch eine von der Dutch Society of Sciences für das Jahr 1894 gestellte Preisaufgabe Kunde, in welcher die Vergleichung der Methoden von Grassmann, Hamilton, Cauchy mit Rücksicht auf ihre Verwerthbarkeit für die Physik gefordert wurde. Ueberhaupt ist das Interesse an der Ausdehnungslehre gerade in Amerika stets ein besonders reges gewesen; demgemäss musste auch der Wunsch, die schwer zugänglichen Arbeiten

Grassmann's in einer Gesammtausgabe vereinigt zu sehen, in Amerika naturgemäss besonders lebhaft empfunden werden.

Ueber das Zustandekommen dieser Gesammtausgabe, zu der wir nun mit einigen Schlussbemerkungen zurückkehren wollen, verbreiten sich die bereits citirten „Vorbemerkungen" mit dankenswerther Offenheit. Herr Klein-Göttingen that im Einverständniss mit Grassmann's Familie die einleitenden Schritte dazu, indem er in der Person des Herrn Engel-Leipzig einen ebenso umsichtigen wie gewissenhaften Herausgeber und in der Mathematisch-physischen Klasse der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften eine ebenso liberale wie ansehnliche Interessentin an der Förderung des Unternehmens zu gewinnen wusste. Indem Herr Klein seine eigene Thätigkeit für das Zustandekommen der Ausgabe mit diesem Erfolge im Wesentlichen als beendet erachtete, führte Herr Engel, in Fühlung mit einer von oben genannter Gesellschaft ad hoc eingesetzten Commission, durch Anwerbung von Mitarbeitern, Verhandlungen wegen bestehender Verlagsrechte und durch Vertrag mit der B. G. Teubner'schen Buchhandlung wegen Uebernahme des Verlages, die Vorarbeiten zu einem günstigen Abschluss.

Aber auch um die textkritische Behandlung des ersten Bandes, von welchem der erste Theil, die A1 und die „Geometrische Analyse" enthaltend, vollendet vorliegt, hat sich Herr Engel, zum Theil im Verein mit Herrn Study, in hohem Masse verdient gemacht. Zu der Schwierigkeit des Verständnisses kam bisher in beiden Ausgaben der A1, wie in der „Geometrischen Analyse", der Mangel an genügender Gliederung und die daraus folgende Unübersichtlichkeit des Textes. Diesem Uebelstande hat Herr Engel, unbeschadet der vollständigen Genauigkeit der Wiedergabe, durch wohlerwogene Benutzung aller verwendbaren typographischen Hilfsmittel gründlich abgeholfen. Sodann erforderte eine grosse Anzahl kleiner redactioneller Aenderungen, die Grassmann selbst gelegentlich der zweiten Auflage der A1 vorgenemmen hatte, genaue Vergleichung, Prüfung und Entscheidung. Ueber die theils hierdurch, theils durch allerlei kleine Incorrectheiten der ersten Drucke nöthig gewordenen Abweichungen vom Originaltext geben gesonderte Verzeichnisse für die A1 und die „Geometrische Analyse" genaue Auskunft. Von besonderer Wichtigkeit und grossem Interesse ist ferner eine lange Reihe zum Theil auch von Study herrührender Anmerkungen erklärenden, kritischen und historischen Inhalts, die in letzterer Hinsicht namentlich über Hamilton's Stellung zur Ausdehnungslehre Neues bringen und in dankenswerther Weise auch den mit der Ausdehnungslehre so nahe zusammenhängenden Leibniz'schen „Essay" vollständig wiedergeben. Den Schluss des Bandes bildet ein für beide Werke gemeinsames sehr ausführliches Sachregister, welches bei der im Text auftretenden Menge neuer Begriffe und Beziehungen hier doppelt werthvoll und um so mehr am Platze ist, da bisher nur für die A1 ein kurzes

Verzeichniss der neu eingeführten Ausdrücke vorlag. Durch Hinzufügung der Seitenzahlen der früheren Ausgaben ist es ermöglicht, Citate aus jenen auch in dem vorliegenden Neudruck mit Sicherheit aufzufinden.

Die nach allen Richtungen hin erkennbare liebevolle Sorgfalt, mit welcher der Herr Herausgeber seine mühsame Aufgabe erfasst und durchgeführt hat, verdient um so grössere Anerkennung, da er nach eignem Geständniss „nie ein einseitiger Parteigänger Grassmann's gewesen ist und das auch nie werden wird." Nun, wenn das von dem Herrn Herausgeber trotzdem bekundete Interesse für Grassmann und sein Werk über die trennende Grenzlinie hinaus eine Hingabe an dieses Werk zu zeitigen vermag, wie sie der eifrigste Anhänger desselben nicht besser documentiren könnte, dann sicher kämpfen die einseitigen Parteigänger — wenn es solche giebt — wenigstens für keine geringe Sache! — Dass Druck, Correctur und Ausstattung des Bandes den besten Leistungen der B. G. Teubner'schen Firma gleichstehen, braucht kaum gesagt zu werden; wohl aber ist zu erwähnen, dass auch ein treffliches Bildniss Grassmann's nebst Facsimile eine Zierde des Bandes bildet. Möge der Herr Herausgeber aus der ohne Frage allseitigen Anerkennung seines Verdienstes um die Sache Grassmann's Kraft und Geduld zur Fortführung und zum Abschluss des mühsamen Unternehmens schöpfen.

Die Bedeutung dieser Gesammtausgabe für die weitere Entwickelung und Verbreitung der Ausdehnungslehre dürfte allerdings nicht darin zu suchen sein, dass sie etwa eine neue Aera derselben inaugurirte und einen bis dahin nur wenigen Anhängern bekannten Gelehrten plötzlich auf das Piedestal des von aller Welt anerkannten Ruhmes zu stellen geeignet wäre. Wie wenig in dieser Hinsicht zu thun übrig ist, das beweisen die vorstehend mitgetheilten bisherigen Erfolge der Ausdehnungslehre. Für das Ausland liegt die Bedeutung der Gesammtausgabe darin, dass sie mit der Sammlung der theils vergriffenen, theils zerstreuten Werke Grassmann's einem bereits allgemein in den Kreisen der hervorragendsten Mathematiker gefühlten Bedürfniss entgegenkommt. In Deutschland ist die Ausdehnungslehre nunmehr unter der Aegide einer hochansehnlichen wissenschaftlichen Körperschaft endlich als gleichberechtigter Zweig der Forschung neben anderen Schulmethoden anerkannt, und diese Anerkennung wird allerdings nicht verfehlen, ihre werbende Kraft auch unter unseren Landsleuten zu üben. Nur möge man nicht glauben, dass mit dieser Publication jede Schwierigkeit beseitigt sei. In dem 25jährigen Zeitraume des bisherigen Aufschwunges der Ausdehnungslehre fehlte auf dem Büchermarkte die A1 während der ersten 10 Jahre, fehlt die der A1 durch ihren Reichthum an Begriffen und ihre rechnerische Entwickelung so sehr überlegene A2 seit langer Zeit bis auf den heutigen Tag. Kein Commentar wird auch künftig die Schwierigkeiten ganz heben können, welche sich dem Studium der Grassmann'schen Originalwerke vermöge ihrer eigenartigen Darstellung immer entgegenstellen werden. Bis eine ganz neue Bearbeitung des Stoffes den heutigen Anforderungen an Kürze der Diction, an Durchsichtigkeit und Uebersichtlichkeit der Darstellung entspricht, werden pädagogisch wohldurchdachte Vorlesungen und die in die Elemente der Ausdehnungslehre einführenden Schriften, wie bisher, so auch weiter, das leichteste und bequemste Mittel des Lehrens und Lernens bilden. Erst nach dieser Vorbereitung wird, wenigstens von der Mehrzahl der Mathematiker, das Studium beider Theile der Ausdehnungslehre mit Aussicht auf Gewinn und Befriedigung vorzunehmen sein.

Mit dieser Gesammtausgabe stattet aber auch Deutschland den Manen eines als genialer Forscher wie als edler Charakter gleich ausgezeichneten Mannes den so lange geschuldeten Dank ab, in Erfüllung der prophetischen Worte, mit denen Grassmann vor 34 Jahren die Vorrede zur A2 schloss: „Ich bin der festen Zuversicht, dass die Arbeit, welche ich auf die hier vorgetragene Wissenschaft verwandt habe, und welche einen bedeutenden Zeitraum meines Lebens und in demselben die gespannteste Anstrengung meiner Kraft in Anspruch genommen hat, nicht verloren sein werde. Zwar weiss ich wohl, dass die Form, die ich der Wissenschaft gegeben, eine unvollkommene ist und sein muss. Aber ich weiss auch und muss es aussprechen, auch auf die Gefahr hin, für anmassend gehalten zu werden —, ich weiss, dass, wenn auch dies Werk noch neue 17 Jahre oder länger hinaus müssig liegen bleiben sollte, ohne in die lebendige Entwickelung der Wissenschaft einzugreifen, dennoch eine Zeit kommen wird, wo es aus dem Staube der Vergessenheit hervorgezogen werden wird, und wo die darin niedergelegten Ideen ihre Frucht tragen werden. Ich weiss, dass, wenn es mir auch nicht gelingt, in einer bisher vergeblich von mir ersehnten Stellung einen Kreis von Schülern um mich zu sammeln, welche ich mit jenen Ideen befruchten und zur weiteren Entwickelung und Bereicherung derselben anregen könnte, dennoch einst diese Ideen, wenn auch in veränderter Form, neu erstehen und mit der Zeitentwickelung in lebendige Wechselwirkung treten werden. Denn die Wahrheit ist ewig, ist göttlich; und keine Entwickelungsphase der Wahrheit, wie geringe auch das Gebiet sei, was sie umfasst, kann spurlos vorübergehen; sie bleibt bestehen, wenn auch das Gewand, in welches schwache Menschen sie kleiden, in Staub zerfällt."

Literatur.

(Abkürzungen nach dem „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik".)

98. A1 S. 224 flg.; A2 S. 189 flg. — 99. S. Citat 42. — **100.** Schlegel, Untersuchungen über eine Fläche dritter Ordnung, Progr., Waren 1871. — **101.** Eckardt, Beitrag zur anal. Geometrie des Raumes etc., Math. Ann. V (1872). — **102.** Bauer, Ueber Flächen vierter Ordnung etc., Münch Ber. (1888). — **103.** Schlegel, Ueber die mechanische Erzeugung von Curven, Math. Ann. VI (1873). — **104.** Dingeldey, Ueber C_3 mit Doppelpunkten, Math. Ann. XXVII (1886); Ueber die Erzeugung von C_4 durch Bewegungsmechanismen. Diss. Leipzig 1885. — **105.** Kölmel, Die Grassmann'sche Erzeugungsweise von ebenen C_3. Diss. Tübingen 1886. — **106.** Fritz, Ueber die erste Grassmann'sche Erzeugungsweise der ebenen C_3 und deren Analogon im Raum, Progr., Darmstadt 1889. — **107.** Sturm, Ueber Collineation und Correlation, Math. Ann. XXII (1883). — **108.** Caspary, Ueber die Erzeugung algebr. Raumcurven durch veränderliche Figuren, Crelle's J. C (1887); Sur les cubiques gauches, Darboux Bull. (2) XI (1887). — **109.** v. Escherich, Die Construction der algebr. Curven und Flächen etc., Wien. Ber. LXXXV (1882); Die Construction der algebr. Flächen etc., Wien. Ber. (1884). — **110.** Grassmann, Die lineale Erzeugung von C_3, Crelle's J. LII (1856). — **111.** Schröter, Zurückführung der Grassmannschen Definitionen der C_3 etc., Crelle's J. CIV (1889). — **112.** Grassmann, Die höhere Projectivität in der Ebene, dargestellt durch Functionsverknüpfung Crelle's J. XLII (1851); Ueber zusammengehörige Pole etc., Gött. Nachr. 1872; Verwendung der Ausdehnungslehre für die allgemeine Theorie der Polaren etc., Crelle's J. LXXXIV (1877). — **113.** S. Citat 96. — **114.** H. Grassmann jr., Anwendung der Ausdehnungslehre auf die allgemeine Theorie der Raumcurven und Oberflächen, Progr., Halle 1886, 1888, 1893; Punktrechnung und projective Geometrie, Festschr., Halle 1894. — **115.** Carvallo, Sur les surfaces minima, Darboux Bull. (2) XVIII (1894). — **116.** Mehmke, Ueber zwei ... charakt. Eigenschaften der linearen Punkttransformation, Schlömilch's Z. XXXVI (1891); Untersuchungen über die ... Eigenschaften der Berührungstransformation. Ibid. XXXVIII (1893); Kleine Beiträge zu den Anwendungen der Methoden von Grassmann. Ibid. XXXVII (1892). — **117.** Ibid. XXXVII (1892). — **118.** Peano, Calcolo geometrico secondo l'A. di H. G., Turin 1888; Gli elementi di calcolo geom., Turin 1891. — **119.** Peano, Teoremi su massimi e minimi geom. etc., Palermo Rend. II (1888). — **120.** Cesaro, I numeri di G. in geometria intrinseca, Rom Acc. L. Rend. (5) III (1894). — **121.** Schlegel, On the problem of the minimum sum of the distances of a point from given points, American M. S. Bull (2) I; Démonstration d'un théorème de Steiner, Progreso mat. IV, 174 (1894). — **122.** Fine, On the singularities of curves of double curvat, American J. VIII (1886). — **123.** A2 S. 241 flg. — **124.** R2 S. 75; R1 S. 49; S. auch Citat 57, S. 21. — **125.** Hyde, Geometric division of non congruent quantities, Annals of Math. IV (1888). — **126.** R2 S. 59–104, S. 156–250. — **127.** Study, Ueber die Geometrie der Kegelschnitte, Habilit.-Schr. Leipz. 1885. — **128.** Noth, Die vier Species in den Elementen der Geom., Progr., Freiberg i. S. 1874, 1879; Die Arithmetik der Lage, Leipz. 1882. — **129.** Sturm, Sulle forze in equilibrio, Annali di Mat. (2) VII (1876). — **130.** Buchheim, On the theory of screws in elliptic space. Lond. M. S. Proc. XIV, XVI, XVII, XVIII (1884–87). — **131.** Hyde, The directional theory of screws, Annals of Math. IV (1888); She screw as a unit in a Grassmannian system of the sixt order. Annals of Mat. VIII (1894). — **132.** Müller, Die Liniengeometrie nach den Principien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre, Monatsh. f. Math. II (1891). — **133.** Schlegel, Quelques théorèmes de géométrie

à n dimens., S. M. F. Bull. X (1882). — **134.** Schlegel, Ueber die verschiedenen Formen von Gruppen etc., Hoppe's Arch. (2) X (1891). — **135.** Mehmke, Ausdehnung einiger elem. Sätze über das ebene Dreieck etc., Hoppe's Arch. LXX (1884). — **136.** Cayley, Sixth memoir upon Quantics, Lond. Phil. Trans. CIL (1859). — **137.** R2 S. 5—12, S. 250 flg. — **138.** S. Citat 130, S. 89. — **139.** Cox, On the application of quaternions and G. A. to different kinds of uniform space, Cambr. Proc. IV (1882). — **140.** Grassmann, Ueber das Verhältniss der nichteuklidischen Geometrie zur Ausdehnungslehre, Anhang I zur A1 (1878). — **141.** Caspary, Extrait d'une lettre à M. Hermite, Journ. de Math. (4) V (1889). — **142.** Jacobi, Ges. Werke, II, 505. — **143.** Schlegel, Zum Gauss'schen Fundamentalsatz der Axonometrie, Hoffmann's Z, XVIII (1887). — **144.** R2 S. 132 flg. — **145.** Caspary, Ueber die Verwendung algebraischer Identitäten etc., Math. Ann. XXVIII (1887); Ueber einen einfachen Beweis der Rosenhain'schen Fundamentalformeln, Math. Ann. XXX (1887); Sur les systèmes orthogonaux, formés par les fonctions Θ; Sur une méthode élément. pour obtenir le théorème fondamental de Jacobi etc.; Sur les théorèmes d'addition des fonctions Θ; C. R. CIV (1887); Sur une manière d'exprimer... les coefficients de 3 systèmes orthogonaux etc.; Sur l'application des fonctions Θ... aux problèmes de la rotation, C. R. CVII (1888); Sur les expressions des angles d'Euler... au moyen des fonctions Θ etc.; Darb. Bull. (2) XIII (1889); Sur les relations qui lient les éléments d'un syst. orthog. aux fonctions Θ et σ etc., Journ. de Math. (4) VI (1890); Sur une nouvelle méthode d'exposition de la théorie des fonctions Θ etc., C. R. CXI (1890); Sur une méth. élém. pour établir les équations différentielles dont les fonctions Θ forment les intégrales; Sur deux systèmes d'équations différentielles dont les fonctions hyperelliptiques de 1re esp. forment les intégrales; Sur les deux formes sous lesquelles s'expriment ... les coord. de la surface du 4me degré etc.; Nouvelles manières d'exprimer... les coord. de la surf. du 4me degré, C. R. CXII (1891); Sur une nouvelle manière d'établir les relations algébriques qui ont lieu entre les fonct. hyperellipt. de 1re espèce, Ann. de l'Éc. Norm. (3) X (1893). — **146.** Grassmann, Grundriss der Mechanik, Progr., Stettin 1867; Die Mechanik nach den Principien der Ausdehnungslehre, Math. Ann. XII (1877). — **147.** Schlegel, Die Hauptmethoden der Grassmann'schen Ausdehnungslehre, in ihrer Anwendung auf die Mechanik, Civiling, XL (1894). — **148.** Hankel, Theorie der complexen Zahlensysteme, Leipz. 1867. — **149.** Cremona, Elemente des graphischen Calcüls, übersetzt von Curtze (1875). — **150.** Favaro, La statica grafica nel insegnamento superiore, Venezia 1873. — **151** Schlegel, Zwei Sätze vom Schwerpunkt, Schlömilch's Z. XXI (1876); Sur le théorème de M. Laisant etc., S. M. F. Bull. X (1883); Sur le théorème de M. Haton de la Goupillière etc., Ibid. XXI (1893). — **152.** Carvallo, Théorèmes de mécanique; Nouveau théorème de mécanique, Nouv. Ann. (3) XII (1893). — **153.** Müller, Neue Methode z. Ableitung der statischen Gesetze, Mittheil. d. kaiserl. königl. Technol. Gewerbemuseums, Wien, Neue Folge III (1893). — **154.** Lüroth, Grundriss der Mechanik, München 1881. — **155.** Burmester, Kinematisch geom. Theorie der Bewegung d. affin veränderl.... Systeme, Schlömilch's Z. XXIII (1878); Ueber den Beschleunigungszustand ähnl. veränderl. und starrer ebener Systeme, Civiling. XXIV (1878). — **156.** Mehmke, Ueber die Geschwindigkeiten beliebiger Ordnung etc., Civiling. XXIX (1883); Eine kinematische Aufgabe, Darmstadt 1886; Ueber die Bewegung eines starren ebenen Systems in seiner Ebene, Schlömilch's Z. XXXV (1890); Ueber den geometrischen Ort der Punkte ohne Normalbeschleunigung etc., Civiling. XXIX (1883). — **157.** Mehmke, Ueber die Bestimmung von Trägheitsmomenten mit Hilfe Grassmann'scher Methoden, Math. Ann. XXIII (1884); Einfache Darstellung der Trägheitsmomente von Körpern, Schlömilch's Z. XXVIII (1883). — **158.** Kircher, Ein Beitrag zur Bewegung unveränderlicher ebener Systeme, Progr., Meiningen 1887. — **159.** Allé, Ueber die

Ableitung der Gleichungen der drehenden Bewegung eines starren Körpers nach der Grassmann'schen Analyse, Prag. Math. Ges. (1892). – **160.** Mehmke, Recension von „Gravelius, Theoretische Mechanik starrer Systeme“ in der Deutschen Literaturztg. 1890, Nr. 14. – **161.** Study, Ueber die Bewegungen des Raumes, Lpz. Ber. 1890, S. 354. – **162.** Grassmann, Neue Theorie d. Elektrodynamik, Poggend. Ann. LXIV (1845); Zur Elektrodynamik, Crelle's J. LXXXIII (1877). – **163.** Grassmann, Zur Theorie der Farbenmischung, Poggend. Ann. LXXXIX (1853); Bemerkungen zur Theorie der Farbenempfindungen (Anhang zu dem unter Nr. 164 citirten Werk). – **164.** Preyer, Elemente der reinen Empfindungslehre, Jena 1877. – **165.** Wundt, Revue philosophique (1878). – **166.** S. Citat 148, S. 104. – **167.** Gibbs On the determination of elliptic orbits from three complete observations, Mem. National Acad. of sciences IV (1890). – **168.** Beebe und Phillips, The orbit of Swift's Comet 1880, V, determined by Gibbs Vector Metod., Astronom. Journ. Nr. 207–208 (1890). – **169.** Grassmann, Kurze Uebersicht über das Wesen der Ausdehnungslehre, Grunert's Arch. VI (1845). – **170.** Hankel, Theorie der complexen Zahlensysteme; Mahler, Einleitung in die Grassmann'sche Ausdehnungslehre, Progr., Ulm 1884; H. Grassmann jr., Punktrechnung und projective Geometrie, Festschr. Halle 1894; R. Grassmann, Die Ausdehnungslehre oder die Wissenschaft von den extensiven Grössen etc., Stettin 1891; Die Folgelehre od. Functionenlehre, Stettin 1894; Peano, Die Grundzüge des geometrischen Calcüls, Uebersetzung von Schepp, Leipz. 1891; Kraft, Abriss des geometrischen Calcüls, Leipz. 1893; Henrici, Encyclopäd. britannica (1880); Cox, On the application of quaternions and G. A. etc.; Cambr. Proc. IV (1882); Beman, A brief account of the essential features of Grassmann's extension algebra, Anal. VIII (1881). (Uebersetzung von Nr. 169); Clifford, Applications of Grassmann's extension algebra, American. J. I (1878); Hyde, The directional calculus, based upon the methods of H. G., Boston 1890; Gibbs, On multiple algebra, Americ. Assoc. XXXV (1886); Caspary, Sur une méthode de géométrie qui forme le lien etc., Darboux Bull. (2) XIII (1889); Carvallo, Exposition d'une méthode de M. Caspary pour l'étude des courbes gauches, S. M. F. Bull. XV (1887); La méthode de Grassmann, Nouv. Ann. (3) XI (1889); Schlegel, Introduction aux méthodes géométriques de H. G., Progreso mat. II, III (1892. 1893); Galdeano, Teoremas, problemas y métodos geom., Progreso mat. IV (1894), Geometria generál. Zaragoza 1895; Peano, Calcolo geom. secondo l'A. di H. G., Turin 1888; Gli elementi di calcolo geom., Turin 1891; Boguslawsky, Algebra der Ebene und des Raumes oder Calculus Situs, Mosk. Math. Samml. XIV–XVI, Moskau 1891 (Russisch). – **171.** Hyde, Calculus of direction and position, Americ. J. VI (1883). – **172.** Gibbs, Quaternions and the A. Nature, Mai 1891, S. 79; Siehe auch On the Rôle of Quaternions in the Algebra of Vectors, Ibid. April 1891; Quaternions and the Algebra of Vectors, Ibid. März 1893; Quaternions and Vector Analysis, Ibid. August 1893. — **173.** Carvallo, Sur les systèmes linéaires etc., Monatsh. f. Math. II (1891). — **174.** Padelletti, Principii della teoria dei quaternioni etc., Batt. G. XX (1882). — **175.** Stephanos, Sur la théorie des quaternions, Math. Ann. XXII (1883). — **176.** Unverzagt, Ueber die Grundlagen der Rechnung mit Quaternionen, Progr., Wiesbaden 1881. — **177.** Study, Complexe Zahlen und Transformationsgruppen, Leipz. Ber. 1889, § 9; Ueber die Bewegungen des Raumes, Ibid. 1890, S. 354. — **178.** Gauss, Briefwechsel mit Schumacher, IV, 147, Nr. 833; Siehe auch Citat 10 und 31. — **179.** Kysäus, Bedeutung und Anwendung der Zahlen in der Geometrie, Progr., Siegen 1850.

Recensionen.

F. Klein. **Ueber Arithmetisirung der Mathematik.** Sonderabdruck aus den „Nachrichten der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Geschäftliche Mittheilungen. 1895. Heft 2.

In der Mathematik wurde in unserem Jahrhundert immer mehr und mehr die Forderung betont, dass die unbedingte Giltigkeit der Sätze der höheren Analysis nicht durch Berufung auf die Anschauung, sondern durch Zurückgehen auf die ersten Begriffe und Definitionen der Zahlenlehre dargethan werden müsse. In der vorliegenden Rede scizzirt Klein seine Auffassung der Stellung, die Geometrie und Physik dieser Arithmetisirung der Mathematik gegenüber einzunehmen haben. Indem er in ihr wesentlich eine logische Verschärfung der Deduction erblickt, verlangt Klein zwar eine Uebertragung der grösseren Strenge auf jene anderen Disciplinen, betont aber auch zugleich, dass der Anschauung trotzdem ihre Bedeutung in weitem Umfang bewahrt bleiben müsse. Die analytisch-geometrische Deutung der neueren analytischen Entwickelungen; der Nachweis, inwieweit der Raum als eine Zahlenmannigfaltigkeit aufgefasst werden kann; die Untersuchung, wann eine Menge von Punkten eine Fläche oder eine Curve bildet; die Präcisirung von Grenzübergängen in der Infinitesimalgeometrie: das sind einige Aufgaben der Geometrie, die einer strengeren Lösung harren. In der Physik wird genauer zu untersuchen sein, inwieweit die Hypothese, dass die Materie den Raum continuirlich erfüllt, mit der Annahme von discreten Molecülen gleichwerthig ist; oder ob Sätze über das Gleichgewicht und die Bewegung elastischer Körper oder der Elektricität, die der physikalischen Anschauung entnommen sind, wirklich richtig sind. Neue Naturerkenntnisse werden durch die Antworten auf solche Fragen nicht gewonnen, sondern es werden nur unsere Auffassungen der Erscheinungen, die Idealisirungen der Natur, die wir nothwendig vornehmen müssen, um sie studiren zu können, geklärt und präcisirt. Daneben soll aber der Anschauung ihr Recht bleiben, nicht nur der geometrischen, sondern auch dem mechanisch-physikalischen Gefühl, wie es ein erfahrener Physiker oder Techniker hat über das Spiel der Kräfte, die bei seinen Apparaten oder Constructionen auftreten, das ihn lehrt mit Sicherheit zu erkennen, welche Vernachlässigungen des Details möglich sind, ohne die grossen Züge einer Erscheinung zu verfälschen.

Diese Anschauung ist es, die den Fortschritt der Wissenschaft anbahnt, indem sie eine Idealisirung vollzieht, deren Tragweite nachher die streng logische Deduction zu untersuchen hat.

Auch beim Unterricht ist die Anschauung nicht zu vernachlässigen: bei der ersten Einführung in die höhere Analysis, wo der Einzelne den Weg gehen soll, den die Wissenschaft im Grossen gegangen ist, und besonders bei Schülern, deren Denken, ihrer Vorbildung und Beschäftigung gemäss, mehr anschauungsmässig ist.

Anschauung und Deduction getrennt, bilden aber nicht die Wissenschaft, ihr Leben beruht vielmehr auf der Wechselwirkung beider Theile.

Die vorstehenden Zeilen geben einen Versuch, den Inhalt der sehr gedankenreichen und anregenden Rede zu scizziren, um damit weitere mathematische Kreise auf sie aufmerksam zu machen. Die Rede ist als kleine Broschüre im Buchhandel erschienen.

J. Lüroth.

T. Preston. **Ueber das gegenseitige Verhältniss einiger zur dynamischen Erklärung der Gravitation aufgestellten Hypothesen.** Inaugural-Dissertation. München 1894. 20 S.

Der erste Versuch einer mechanischen Gravitationserklärung geht auf Le Sage zurück. Doch befriedigte dieselbe wegen ihrer vielen willkürlichen Annahmen nur wenig. Auf die corpuscules ultramondains von Le Sage stützte ein Jahrhundert später Lord Kelvin eine neue Erklärung, indem er die Atome als elastisch voraussetzte, so dass die Aetheratome ausser ihrer kinetischen Energie noch eine potentielle Energie besitzen sollten. Im Gegensatz zu Lord Kelvin nahm Herr Isenkrahe einen unelastischen Stoss an und baute seine Gravitationstheorie auf der kinetischen Gastheorie auf. Zwei Jahre vorher hatte Verfasser der vorliegenden Inaugural-Dissertation eine andere Erklärung aufgestellt, die hier weiter ausgestaltet, in abgeschlossener Form vorgetragen wird.

Während Le Sage und Lord Kelvin willkürlich Atomströme annehmen, wird hier eine Bewegung der als elastisch vorausgesetzten Atome zu Grunde gelegt, welche der von der kinetischen Gastheorie angenommenen genau analog ist. Hieraus gewinnt der Verfasser eine Erklärung für die Annahmen, welche der von Le Sage und Lord Kelvin aufgestellten Theorie zu Grunde liegen, im Besonderen für die Annahme, dass die symmetrische Bewegung der Atome unter dem beständigen Wechsel ihrer Richtungen, welchen die Zusammenstösse mit der groben Materie verursachen, bestehen bleibt. Dabei wird vorausgesetzt, dass die mittlere Weglänge eines Aetheratoms gross sei gegen die Entfernungen, für welche das Newton'sche Gesetz genau gilt. Demnach ergiebt sich als eine Folgerung dieser Theorie, dass „die Tragweite der Schwerkraft durch die Weglänge der Atome bedingt ist“.

Im zweiten Theile der Arbeit geht Verfasser auf den Krystallbau ein. Schon Le Sage hatte die Annahme einer sehr porösen Structur der groben Materie als nothwendig für die Erklärung der Gravitation erkannt, und Lord Kelvin hatte diese Annahme übernommen. Hier wird versucht, diese Vorstellung genauer zu präcisiren, so dass sie zur Erklärung der Cohäsion, Adhäsion und chemischen Verwandtschaft geeignet erscheint.

E. Jahnke.

C. Dumesnil. **Tableau métrique de logarithmes.** Instruction. — Notes et problèmes divers. Arithmétique. Changes. Intérêts composés. Annuités. 42 p. C. Dumesnil. Tableau métrique de logarithmes. Atlas élémentaire. 8 p. Paris 1894. Hachette.

Die vorliegende fünfstellige Logarithmentafel ist von einfachster Form. Sie besteht aus vier Seiten, deren jede zwanzig Doppelzeilen enthält. Jede obere Zeile führt die vierstelligen Logarithmen in rothen, jede untere die entsprechenden Zahlen in schwarzen Ziffern. Um die Bestimmung der fünften Decimale möglichst zu erleichtern, werden fünf Zeichen eingeführt, die je nach ihrer leicht zu merkenden Stellung 0, 1, 2, 3, 4 bezw. 5, 6, 7, 8, 9 bezeichnen.

Die Handhabung der Tafel wird an einer Reihe von Beispielen aus der Wechsel- und Zinseszinsrechnung vorgeführt.

Die Ausstattung ist eine vorzügliche. E. Jahnke.

H. Laurent. **Traité d'algèbre.** Compléments. IV^e partie. Théorie des polynomes à plusieurs variables. Paris 1894. Gauthier-Villars. 56 p. 1,50 Fr.

Ziel des vierten Theiles ist es, die elementare Algebra durch das Studium der fundamentalen Eigenschaften der Polynome mit mehreren Variablen zu vervollständigen und die bekannten Eigenschaften der Polynome mit einer Variablen zu verallgemeinern. Der Verfasser giebt, ausgehend von einem Jacobi'schen Theorem, eine vollständige Theorie der Elimination und der symmetrischen Functionen.

Die von Herrn H. Marchand besorgte vierte Auflage unterscheidet sich nur wenig von der vorhergehenden. E. Jahnke.

F. Buka. **Grundzüge der darstellenden Geometrie.** Wissenschaftliche Beilage zum Programm des Charlottenburger Realgymnasiums. 1894. XII und 24 S.

Bis vor Kurzem noch war die darstellende Geometrie das Stiefkind des mathematischen Unterrichtes auf höheren Schulen. Dieses Verhältniss hat sich neuerdings gebessert; verschiedentlich ist das Bestreben hervorgetreten, die Kraft der darstellenden Geometrie für die Schule voll auszunutzen. Zum Belege hierfür sei auf die „Raumlehre" von Herrn Martus verwiesen, deren zweiter Theil die Grundlehren der Centralperspective in **drei**, oder, wenn man will, in **zwei** Sätzen erledigt, und deren Figuren noch vielen der bisher erschienenen stereometrischen Lehrbüchern als Vorbild dienen können. Auch die Arbeiten des Herrn Holzmüller (1. Einführung in das stereometrische Zeichnen, 2. Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik) verfolgen den Zweck, der Schule die darstellende Geometrie mehr als bisher zugänglich zu machen. Das Vorwort der vorliegenden Programmabhandlung bietet eine eingehende Kritik der von Herrn Holzmüller empfohlenen Methode zur Einführung in das stereometrische Zeichnen. (Vergl. hierzu noch Hoppe's Besprechung in seinem Archiv.)

Die Abhandlung selbst zerfällt in drei Abschnitte. In dem ersten werden die Grundzüge der Orthogonalperspective gelehrt, die räumlichen Gebilde werden auf eine einzige Grundebene bezogen. 20 Uebungsaufgaben, entnommen dem von Herrn Hauck herausgegebenen Lehrbuch der Stereometrie von Kommerell, sind beigegeben. Der zweite Abschnitt: Construction stereometrischer Bilder lehrt die Cavalierperspective. Die Methode der Centralperspective ist als für die Schule überflüssig und zu weitgehend nicht herangezogen. Wenn übrigens Verfasser des weiteren die Ansicht aufstellt, die Herstellung centralperspectivischer Bilder erfordere einen beträchtlichen Apparat von Hilfssätzen, so wird diese Behauptung, zum Theil wenigstens, durch die obige Bemerkung widerlegt, wonach es möglich ist, in den Anfangsgründen mit drei Hilfssätzen auszukommen, die man noch auf **zwei** reduciren kann. Im dritten Abschnitt wird gezeigt, wie sich die vorhergehenden Sätze in der Kegelschnittlehre und in der mathematischen Geographie verwerthen lassen.

Die Abhandlung ist in hohem Masse geeignet, dem im Anfange betonten Zwecke neue Anhänger zu gewinnen, und möchte sich Referent erlauben, sie den Herren Fachgenossen angelegentlichst zur Berücksichtigung zu empfehlen.

E. Jahnke.

H. Hartl. **Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra**. Reichenberg 1894. Fritsche. IV und 271 S. 4 Mk. Resultate 1,60 Mk.

Eine neue Aufgabensammlung, welche ausser dem in allen Sammlungen wiederkehrenden Stamme von Aufgaben wirklich neue, brauchbare bietet, trägt die Berechtigung ihres Erscheinens in sich. Das vorliegende Buch, welches nur Aufgabensammlung sein, kein Lehrbuch ersetzen will, bringt eine Fülle neuer Aufgaben. Unter den eingekleideten mag besonders auf eine Reihe geographischer sowie auf die interessanten Geschoss-Aufgaben hingewiesen werden. Dagegen sind einzelne Kapitel verhältnissmässig dürftig bedacht, so unter Anderem das Kapitel vom Rationalmachen der Brüche, das Kapitel der Rentenrechnung. Ferner ist es nicht zu billigen, dass hergebrachte, durchaus praktische Bezeichnungen der Zinsrechnung willkürlich abgeändert werden.

E. Jahnke.

K. Schwering und W. Krimphoff. **Anfangsgründe der ebenen Geometrie.** Freiburg i. Br. 1894. Herder. V und 132 S.

Es geschieht nicht eben häufig, dass Mathematiker, die neben ihrer Schulthätigkeit eine wissenschaftliche Thätigkeit entfalten, sich mit der Herausgabe eines Lehrbuches der elementaren Mathematik befassen. Und doch ist es wünschenswerth, gerade aus solcher Hand Darstellungen der Anfangsgründe zu besitzen. Um so dankenswerther ist die vorliegende Bearbeitung.

Die Verfasser stellen sich auf den Standpunkt, die Raumlehre so vorzutragen, „wie sie von dem jugendlichen Geiste am Leichtesten erfasst und verstanden werden kann, nicht aber zugleich allen wissenschaftlichen Anforderungen zu genügen". Demnach wird für den Unterricht der ersten Stunden mit Recht das Hauptgewicht auf die Anschauung gelegt. Hierbei ist nicht der Anschauung von Körpern der Vorzug gegeben, sondern der Auffassung von ebenen Figuren, die der Schüler selbst durch Zeichnung herstellt.

Hervorgehoben zu werden verdient ferner die Ausscheidung der Lehre von den incommensurablen Grössen aus der schulgemässen Behandlung (vergl. Ref. Bd. 37), in der richtigen Erwägung, dass die in fast allen Lehrbüchern auftretende Darstellung weder den Anforderungen der Wissenschaft noch denen des Unterrichts völlig gerecht wird.

Aus der neueren Geometrie bringt das Buch nur die Sätze des Ceva und Menelaus, sowie die ähnliche und umgekehrte Abbildung.

Dass der Verfasser der „100 Aufgaben aus der niederen Geometrie" eine Fülle interessanter Lehrsätze und Aufgaben eingestreut hat, bedarf keiner besonderen Erwähnung.

Der Lehrstoff ist nach Klassen eingetheilt, wobei die Bedürfnisse des Gymnasiums und Realgymnasiums massgebend gewesen sind. Auf der Oberrealschule und Realschule dürfte der Stoff von der Quarta bis zur Obertertia bewältigt werden können, ohne dass Ueberbürdung zu befürchten wäre.

E. Jahnke.

R. Müller. **Planimetrische Constructionsaufgaben nebst Anleitung zu deren Lösung** für höhere Schulen. 3. Aufl. Oldenburg 1894. Stalling. 68 S. 1,20 Mk.

Die Aufgabensammlung ist durch zwei Eigenthümlichkeiten charakterisirt, einmal durch die Beschränkung des Stoffes dem Umfange nach — Theilungs-, Verwandlungs- und Berechnungsaufgaben sind nicht aufgenommen —, zweitens durch die beigefügte Anleitung zur Auflösung der Aufgaben. Da das geschickt zusammengestellte Büchelchen in Fachkreisen Aufnahme gefunden hat, so sei hier in Bezug auf den zweiten Punkt noch bemerkt, dass die strenge Durchführung des hergebrachten Schemas bei der Behandlung sämmtlicher Aufgaben nicht wünschenswerth erscheint; bei den meisten Aufgaben ist entweder Analysis oder Beweis zu verlangen. Auch empfiehlt sich für die Constructionen ein knapperer Text, der sich durch Einführung geeigneter mathematischer Zeichen erreichen lässt.

E. Jahnke.

E. Wrobel. **Leitfaden der Stereometrie nebst einer grossen Anzahl von Uebungsaufgaben.** 2. Aufl. Rostock 1895, Werther. 104 S. 1,40 Mk.

Im Gegensatz zu einer neuerdings hervorgetretenen Auffassung steht der als Herausgeber einer ausgezeichneten Aufgabensammlung bekannte Verfasser auf dem Standpunkt, dass zwar eine übersichtliche, aber doch lückenlose Anordnung des Stoffes, wo zu jeder Behauptung auch ein Beweis gehört, geboten werden müsse. Nur an einer Stelle wird, in Uebereinstimmung mit anderen Lehrbüchern hiervon abgewichen, das ist bei der Heranziehung des Cavalerischen Princips zur Raumberechnung. Als besondere Empfehlung des vorliegenden Leitfadens ist noch zu erwähnen, dass ihm eine Sammlung von grösstentheils neuen Aufgaben — es sind 140 — angehängt ist. Den Aufgaben sind am Schluss der Sammlung die Resultate angefügt.

Was die Figuren anbetrifft, so lässt deren Anschaulichkeit auch in der zweiten Auflage bei manchen noch zu wünschen übrig. E. Jahnke.

Die Lehre von der Elektricität. Von Gustav Wiedemann. Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage. Zugleich als vierte Auflage der Lehre vom Galvanismus und Elektromagnetismus. Zweiter Band. Mit 163 Holzstichen und einer Tafel. Braunschweig 1894. Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn. 1126 S.

Der zweite Band beginnt mit den beiden letzten Kapiteln der Nichtleiter, wovon das grössere die dielektrische Ladung der Körper zum Gegenstand hat, während in dem kleineren die durch das Elektrisiren hervorgebrachten physikalischen Eigenschaften, wie das Tönen, die Aenderung des Volumens, der Gestalt, der Elasticität und des optischen Verhaltens zusammengestellt sind. — Der nunmehr in drei Kapitel zerfallende dritte Theil über die Beziehungen zwischen Elektricität und Wärme vertauscht den Inhalt der ursprünglich zwei Kapitel, so dass zuerst die thermischen und mechanischen Wirkungen des elektrischen Stromes kommen und hierauf die Thermoelektricität folgt, von welcher das Kapitel über die Elektricitätserregung in Krystallen durch Temperaturänderungen und Druck abgezweigt worden ist. Die Gruppirung und Benennung der Unterabtheilungen sind wesentlich verschieden gegenüber der ersten Auflage, so dass der bisher vorhandene Raum auch um ein Drittel überschritten worden ist. Solche Veränderungen finden wir nicht in dem den grössten Theil des Buches in Anspruch nehmenden vierten Theil, welcher die Elektrochemie umfasst; die Gruppirung des Stoffes blieb dieselbe, und die Ueberschriften der einzelnen Abtheilungen weisen im Ganzen nur geringe Abweichungen auf. Gleichwohl hat der Stoff durch die Literaturergänzung bis zur Mitte des Jahres 1893 eine nicht unwesentliche Zunahme erhalten; denn gerade auf diesem Gebiet war die wissenschaftliche Thätigkeit in den letzten zehn Jahren angeregt durch die Erfolge der physikalischen Chemie. — Je rascher die weiteren Bände erscheinen, um so willkommener sind sie für den forschenden Physiker und Chemiker, denen dieses Werk ungeheure Dienste leistet. — Die Ausstattung von Seiten der Verlagsbuchhandlung entspricht ihrem bewährten Ruf.

B. Nebel.

Joh. Müller's **Lehrbuch der kosmischen Physik.** Fünfte umgearbeitete und vermehrte Auflage von B. F. W. Peters. Ergänzungsband zu sämmtlichen Auflagen von Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik. Mit 447 eingedruckten Holzstichen und 25 dem Texte beigegebenen, sowie einem Atlas von 60 zum Theil in Farbendruck ausgeführten Tafeln. Braunschweig 1894. Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn. 907 S. Preis 26 Mk.

Für Jeden, der Interesse an den um ihn her vorgehenden Erscheinungen der Natur hat, muss es ein wahres Vergnügen sein, dieses herrliche, von dem Königsberger Astronomen in neuer Auflage herausgegebene Werk zu studiren, das durch geschickte Darstellung auch einem grösseren Leserkreis ohne tiefere mathematische Kenntnisse zugänglich gemacht ist. Das Interesse wird noch gesteigert durch die zahlreichen, zum Theil in Farben ausgeführten Abbildungen, deren Anblick dem Genuss eines naturwissenschaftlichen Theaters gleichkommt. An diesem Werke ist deutlich zu erkennen, dass die ungeheuren Fortschritte in den gesammten Naturwissenschaften während der letzten 25 Jahre auch auf dem Gebiete der kosmischen Physik zu verzeichnen sind. Dahin gehören die Entdeckungen bezüglich der Rotation des Merkur und der Venus, der Monde, des Mars und Jupiter, der veränderlichen Sterne vom Algol-Typus, und der Erklärung ihres Lichtwechsels durch Pickering, sowie deren Bestätigung durch die photographischen und spectralanalytischen Arbeiten Vogel's. Auf Grund dieser neuen streng wissenschaftlichen Erkenntnisse mussten die früheren Anschauungen auf ihre Richtigkeit geprüft und das als irrig Erkannte ausgeschieden werden, wie z. B. die frühere Ansicht über die Constitution des Erdinnern. Wesentliche Veränderungen verursachte die starke Entwickelung der Meteorologie, so dass die Abschnitte über Ebbe und Fluth, sowie über die Ursachen und Erscheinungen des Erdmagnetismus einer gründlichen Bearbeitung unterzogen wurden. — Da das Buch nicht nur als Lehrbuch, sondern auch als Nachschlagebuch namentlich von Laien benützt wird, so wurde durch ein reichhaltigeres Register diesem Bedürfniss abgeholfen. — Dieses ausgezeichnete Werk bedarf keiner weiteren Empfehlung. B. NEBEL.

Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik und Meteorologie. Neunte umgearbeitete und vermehrte Auflage von LEOPOLD PFANDLER, unter Mitwirkung von OTTO SUMMER. Zweiter Band. Erste Abtheilung. Erste Lieferung. Braunschweig 1894. Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn. 292 S. Preis 4 Mk.

Die grösste Veränderung gegenüber der achten Auflage hat die Optik aufzuweisen; denn es sollten die bahnbrechenden Forschungen Abbe's auf dem Gebiete der Mikroskopie, seine Lehre von der Abbildung nicht selbstleuchtender Objecte und die sich daran anschliessenden Folgerungen aufgenommen werden, was zum ersten Mal in einem allgemeinen Lehrbuch der Physik der Fall ist. Auch die praktische Optik hat eine Reihe von Fortschritten zu verzeichnen, so dass nicht nur eine vollständige Umgestaltung und Erweiterung erfolgen musste, sondern auch die Bearbeitung dieses neuen Stoffes in die Hand eines Schülers von Abbe, der sich auch auf dem Gebiete der praktischen Optik schon hervorgethan hat, gelegt wurde. Die Natur der Sache brachte es mit sich, dass die Optik, nicht wie die anderen Bände, geschlossen herausgegeben werden konnte, sondern dass die zwei Abtheilungen selbst noch in Lieferungen erscheinen werden, von denen zur Zeit die erste vorliegt. — Es würde zu weit führen, wenn wir auf den reichen Inhalt noch eingehender hinweisen würden. Wie sehr man bestrebt war, schon durch äussere Mittel ein übersichtliches Bild von den vorgetragenen Lehren zu geben, dafür sprechen die farbigen Strahlen bei der Farbenzerstreuung. — Im Interesse der schnelleren Einführung dieses Werkes bei der studirenden Jugend wäre es erwünscht, dass die weiteren Lieferungen möglichst rasch erscheinen, zumal das Suchen ohne Index sehr zeitraubend ist. B. NEBEL.

Lehrbuch der praktischen Geometrie. Von CH. AUGUST VOGLER. Zweiter Theil. Höhenmessungen. Erster Halbband. Anleitung zum Nivelliren oder Einwägen. Mit 90 Holzstichen, Vier Nachbildungen durch Zinkätzung und fünf Tafeln. Braunschweig 1894. Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn. 420 S. Preis 11 Mk.

Jahr auf Jahr wurde die Fortsetzung des vorliegenden Werkes erwartet, endlich, nach acht Jahren, ist es dem mit Berufsarbeit überhäuften Verfasser gelungen, den ersten Halbband des zweiten Theiles herauszugeben, dem hoffentlich in kürzerer Zeit die zweite Hälfte folgen wird. — Als Einleitung für das Höhenmessen oder Nivelliren werden die Nivellirmethoden mitgetheilt, die zu einer geschichtlichen Betrachtung und Besprechung der ersten Instrumente die Veranlassung geben. Nachdem die beiden Grundformen des Nivellirinstrumentes und deren Prüfung erläutert und ihr Werth gegenseitig abgewogen worden ist, wird zu den Hauptaufgaben des Einwägens übergegangen. — Der zweite Abschnitt betrachtet das Einwägen mit Hilfsvorrichtungen, deren verschiedene Typen zunächst beschrieben werden. Dem Einwägen mit Distanzmessung sind zwei besondere Kapitel gewidmet. Der dritte und letzte Abschnitt umfasst die Feinnivellements und deren Ausgleichung, wobei die einzelnen Aufgaben durch geeignete Zahlenbeispiele näher durchgeführt werden. Die kritische Betrachtung, insbesondere der Instrumente, ist für den jungen Geometer von grossem Werth; denn was nützen die fleissigsten Beobachtungen, wenn der Betreffende über die Fehler und Eigenthümlichkeiten seines Instrumentes nicht völlig im Klaren ist und sie deshalb nicht in Rechnung zieht. Der Geometer muss Herr der Situation sein, nur darin kann er sich auch von dem besten Messgehilfen unterscheiden. B. Nebel.

Die Arbeit der Muskeln und die lebendige Kraft des menschlichen Körpers. Habilitationsschrift. Von Otto Fischer. Leipzig 1893. Breitkopf und Härtel. 83 S.

Die geschichtliche Einleitung lässt erkennen, dass eine Reihe von Vorarbeiten wohl durchgeführt sind, dass aber die Thätigkeit der Muskeln im Zusammenhang noch keine Lösung gefunden hat. Die mühevoll anzustellenden experimentellen Arbeiten reichen nicht aus, den Bewegungszustand eines Körpers völlig zu ergründen, um ihn in seinem mathematischen Gewand als kinetische Energie oder lebendige Kraft festzuhalten. Der Grund liegt in der Complicirtheit des Systems. Im Vorliegenden wird daher der Versuch gemacht, den Ausdruck für die lebendige Kraft eines für die Mechanik so sehr verwickelten Massensystems ausfindig zu machen; und zwar wird zunächst von einem besonders einfachen Körpersystem ausgegangen, um die Methode aufzusuchen, mittelst deren man zunächst möglichst einfach den Ausdruck für die lebendige Kraft erhält und sodann die Beziehungen zwischen den Aenderungen derselben und den Elementararbeiten der wirksamen Kräfte feststellen kann. Da dieser besondere Fall so gewählt ist, dass er Aehnlichkeit mit dem beim Gehen und Laufen der Menschen hat, so wird dadurch der Uebergang zu diesen Bewegungen selbst, sowie zu dem allgemeinsten Fall der Bewegung des menschlichen Körpers wesentlich erleichtert. Ausgegangen wird von einem System von drei Körpern, die wie eine Kette hinter einander durch Gelenke verbunden sind. — Die Untersuchung liefert eine Reihe von Sätzen und schliesslich mehrere mathematische Formeln für specielle Fälle, deren Wiedergabe hier zu weit führen würde. Mit diesem System dreier durch Gelenke mit einander verbundener Körper schliesst die vorliegende Abhandlung, die ergänzt werden soll durch eine weitere, zur Zeit schon fertige, sich auf die Ableitung der Resultate des allgemeinsten Bewegungsfalles beziehende Veröffentlichung. Somit ist der kühne Anfang gemacht, in ein bisher als unüberwindlich bezeichnetes Gebiet einzudringen. Wie weit dasselbe aufgehellt, und ob jemals das Ziel erreicht wird, muss die Zukunft lehren. B. Nebel.

Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen. Von Th. Albrecht. Dritte umgearbeitete und vermehrte Auflage. Leipzig 1894. Verlag von Wilhelm Engelmann. 344 S. Preis 17 Mk.

Gegenüber der zweiten Auflage weist die vorliegende dritte Auflage nicht nur eine Umarbeitung, sondern auch eine ganz bedeutende Vermehrung auf, die über 100 Seiten beträgt. Der Verfasser war dabei bestrebt, den Stationen erster Ordnung ein Hilfs- und Handbuch für astronomisch-geographische Stationsbeobachtungen zu liefern, welches allen daselbst in Frage kommenden Beobachtungen sammt den dazu gehörenden Rechnungen gerecht zu werden vermag. Es dürfte überflüssig sein, das neu Hinzugekommene besonders zu erwähnen, da es dem Fachmanne sofort aus dem Inhaltsverzeichniss entgegentritt. Dieser allein versteht, derartige Werke voll und ganz zu schätzen, zumal wenn sie in übersichtlicher Weise ausgeführt sind, wie dies im vorliegenden Fall zutrifft. B. Nebel.

Lehrbuch der geometrischen Optik. Von R. S. Heath. Deutsche autorisirte und revidirte Ausgabe von R. Kanthack. Mit 155 in den Text gedruckten Figuren. Berlin 1894. Verlag von Julius Springer. 386 S. Preis 10 Mk.

Der Verfasser war bestrebt, die Fortschritte auf dem Gebiet der geometrischen Optik, die wesentlich Gauss, Listing, Maxwell, Helmholtz und Abbe zu verdanken sind, einheitlich zusammenzufassen, um sie schon dem Studirenden in seinem ersten Semester zugänglich zu machen. In den Fällen, welche besser mit höherer Mathematik durchgeführt werden, wie z. B. bei der Gauss'schen Theorie der Linsen, ist zuerst ein elementar-geometrischer Weg eingeschlagen worden, dem unmittelbar darauf die eigentliche Entwickelung folgt. Bei der Uebersetzung ins Deutsche wurden auch Aenderungen vorgenommen, um das Verständniss des Buches zu erleichtern. Zur Orientirung für den deutschen Leser möchte ich in dem Titel das „geometrisch" durch den Zusatz „mathematisch" ergänzen; denn wir verstehen unter geometrischer Optik schlechtweg die Construction der Haupt- und Brennpunkte von Linsensystemen auf zeichnerische Weise ohne Mathematik. Es ist erfreulich, dass wir Deutsche in der neueren Zeit auch in der Optik Werke für den Unterricht bekommen, die sich ergänzen, wie wir dies in der Elektricitätslehre reichlich zur Verfügung haben. Das Buch kann den Studirenden bestens empfohlen werden. B. Nebel.

Ueber den Einfluss des elektrostatischen Feldes auf das optische Verhalten piëzoelektrischer Krystalle. Von F. Pockels. Mit 14 Figuren im Text. Eine von der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen mit dem vollen Preise gekrönte Arbeit. Göttingen 1894. Dieterich'sche Verlagsbuchhandlung. 204 S. — Sonderabdruck aus dem 39. Bande (mathematisch-physikalische Klasse) der Abhandlungen der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

Die Versuche von Röntgen und Kundt über die Aenderung der Doppelbrechung des Quarzes durch dielektrische Polarisation in einem elektrischen Felde, dessen Kraftlinien senkrecht zur krystallographischen Hauptachse verlaufen, legten die Frage nahe, ob die elektrooptischen Erscheinungen in piëzoelektrischen Krystallen nur die Folge der im elektrischen Felde eintretenden Deformation sind, oder ob auch eine directe Einwirkung der elektrostatischen Kräfte auf die Lichtbewegung dabei stattfindet. Die auf Grund von quantitativen Messungen an Natriumchlorat, Quarz, Turmalin und Seignettesalz gefundenen Resultate in der vorliegenden Arbeit bejahen die letztere der beiden Fragen, so dass also die elektrostatischen Kräfte einen directen Einfluss auf die Lichtbewegung in piëzoelektrischen Krystallen ausüben. Die Versuche wurden noch auf eine Reihe weiterer Krystalle ausgedehnt, die aber zu keinem positiven Ergebniss geführt haben, theils, weil sie zu klein hinsichtlich ihrer Dimensionen waren, theils, weil die starke anormale Doppelbrechung die Spuren einer elektrooptischen Wirkung verdeckte. Bezüglich der angewandten Untersuchungsmethode und der weiteren Einzelheiten sei auf das Original verwiesen.

B. Nebel.

Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektricität. Mit einem einleitenden Abschnitte über das Rechnen mit Vectorgrössen in der Physik. Von A. Föppl. Mit Figuren im Text. Leipzig 1894. Verlag von B. G. Teubner. 413 S. Preis 10 Mk.

Je mehr sich die Maxwell'sche Theorie verbreitet und je mehr sie sich auch in Deutschland Eingang verschafft, um so mehr tritt das Bedürfniss auf, den Inhalt der Werke Maxwell's, welche für den die Materie noch nicht beherrschenden Anfänger mit grosser Schwierigkeit zu lesen sind, in eine solche Form zu bringen, wie sie für den Studirenden von Nutzen ist. Boltzmann suchte dies Ziel zu erreichen, indem er sein Hauptaugenmerk auf die Ableitung der Gleichungssysteme des Feldes aus der Theorie der Cykeln richtete. Diesen Weg hält der Verfasser indessen für nicht so bequem, er vermeidet die mechanischen Analogien und sieht von der Heranziehung der Energiebeziehungen zur Ableitung der Grundgesetze ganz ab, vielmehr stützt er sich unmittelbar nur auf die Erfahrungsthatsachen und führt den Nachweis über die Erfüllung des Energieprincips erst am Schluss. Da nur die Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung vorausgesetzt werden, so muste in dem ersten Abschnitt gleichsam als Einleitung die Algebra und Analysis der Vectoren vorangestellt werden, da der Vectorencalcul in Deutschland bei Weitem nicht so verbreitet ist, wie in England. Der Verfasser hat glücklicher Weise auf die Häufung von Formeln verzichtet und daher mehr Text verwendet, was um so zweckmässiger ist, da die Vectoren-Gleichungen in ihrer einfachen Gliederung gleichsam die Rolle der Stenographie vertreten. — Je rascher die Studirenden mit der Maxwell'schen Theorie vertraut gemacht werden, um so schneller lernen sie diesen Stoff beherrschen, der zur Zeit in der Physik von der grössten Bedeutung ist. — Das Buch sei daher Allen, die sich mit der Elektricitätslehre und den jetzigen Anschauungen hierüber beschäftigen, empfohlen.

B. Nebel.

Handbuch der Vermessungskunde. Von Dr. W. Jordan. Zweiter Band. Feld- und Landmessung. Vierte verbesserte und erweiterte Auflage in zwei Lieferungen. Stuttgart 1893. J. B. Metzler'scher Verlag. 754 S. nebst einem Anhang von 55 S.

Aus Gründen des Vertriebes wurde der zweite Band vor dem ersten in neuer Auflage der Oeffentlichkeit übergeben, welch' letzterer in Bälde folgen soll. Unter solchen Umständen schien es angezeigt, die einzelnen Bände möglichst unabhängig zu gestalten, daher wurde dem vorliegenden Band ein Kapitel über die Grundzüge der Ausgleichungsrechnung vorausgeschickt, so dass den gewöhnlichen Bedürfnissen, wie sie bei der einfachsten Feld- und Landmessung vorkommen, Rechnung getragen wird. Im Uebrigen muss der der Methode der kleinsten Quadrate gewidmete erste Band zu Rathe gezogen werden. Die Aufnahme selbst neuer Abschnitte, wie diejenigen über Stadt-Triangulirung, Eisenbahnvorarbeiten, Photogrammetrie, Topographie, nebst sonstigen Erweiterungen, konnte bei wesentlicher Innehaltung des gegebenen Raumes nur durch Kürzungen in früheren Abschnitten erreicht werden. Diese Auflage zeigt wiederum, wie sehr der Verfasser bestrebt ist, sein Buch stets auf der den Zeitverhältnissen entsprechenden Höhe zu halten, weshalb es auch auf diesem Gebiet zu den ersten Werken in Deutschland gezählt wird und sowohl der studirenden Jugend, als auch den Fachleuten aufs Beste zu empfehlen ist.

B. Nebel.

Vorlesungen über mathematische Physik. Gehalten an der Universität Königsberg. Von Franz Neumann. Siebentes Heft. Vorlesungen über die Theorie der Capillarität. Herausgegeben von A. Wangerin. Mit Figuren im Text. Leipzig 1894. Verlag von B. G. Teubner. 234 S. Preis 8 Mk.

Erst vor Kurzem hat der geistvolle Physiker Franz Neumann, der ein Mittelpunkt für mathematische Physiker gewesen ist, die Augen geschlossen. Seine berühmten Vorlesungen wurden aber noch zu seinen Lebzeiten von seinen Schülern in zwanglosen Heften herausgegeben, die überall freudigst aufgenommen wurden. — Das vorliegende Heft erhielt seine Grundlage durch eine Vorlesung im Sommer 1864, die durch solche aus der Zeit von 1857—1873 ergänzt wurde. Neumann giebt in diesen Vorlesungen nicht nur die Theorien der Capillarität von Laplace und Gauss wieder, sondern er theilt darin auch seine Arbeiten auf diesem Gebiet mit, namentlich die Anwendung der Theorie auf specielle Fälle. Während der Herausgeber sich in Bezug auf den Stoff streng an das von Neumann Gegebene hält, so glaubte er hinsichtlich der Darstellung in einem Punkte, nämlich bei der Ableitung der Variation einer Fläche, abweichen zu müssen, um durch die Betrachtung der Laplace'schen Sätze in voller Allgemeinheit von der gesonderten Behandlung verschiedener Fälle absehen zu können. — Ein schöneres Denkmal als durch die Herausgabe dieser Hefte hätten die Schüler ihrem unvergesslichen Lehrer nicht setzen können, wodurch diese höchst erspriesslichen Vorlesungen auch Solchen zugänglich werden, die nicht den Genuss hatten, dem Meister zu Füssen zu sitzen. B. Nebel.

Vorlesungen über mathematische Physik. Von Gustav Kirchhoff. Vierter und letzter Band. Theorie der Wärme. Herausgegeben von Professor Dr. Max Planck. Mit 17 Figuren im Text. Leipzig 1894. Verlag von B. G. Teubner. 210 S.

Die Herausgabe dieses vierten und letzten Bandes ist genau nach denselben Grundsätzen, wie bei dem vorhergehenden erfolgt. Benützt wurde das von Kirchhoff selbst verfasste und wiederholt umgearbeitete Manuscript, das er seinen Vorlesungen von 1876 bis 1884 zu Grunde gelegt hat. Der Herausgeber sah daher seine Aufgabe darin, die in Folge der häufigen Aenderungen verursachte Störung der Einheitlichkeit zu beseitigen, für die äussere Form, insbesondere bezüglich der Bezeichnung, Sorge zu tragen und unbedeutende Lücken auf Grund von Zuhörerheften auszufüllen. Hier und da sah sich der Herausgeber veranlasst, die gedrängte Darstellungsweise durch beigefügte Anmerkungen dem Bedürfniss des Lesers mehr anzupassen. — Mit diesem Band hat ein Werk seinen Abschluss erreicht, das für das Studium der theoretischen Physik von hohem Werthe ist. B. Nebel.

Die Terrainlehre, Terraindarstellung und das militärische Aufnehmen. Mit Berücksichtigung der neuesten Bestimmungen der königl. preussischen Landesaufnahme bearbeitet von Kossmann. Mit mehr als 100 Figuren in Holzstich. Sechste Auflage. Potsdam 1891. August Stein. 280 S. Preis 4 Mk.

Die Neuauflage des in erster Linie für militärische Zwecke geschriebenen Buches ist einer einheitlicheren Bearbeitung unterzogen worden. Die drei Theile, in welche das Buch zerfällt, nämlich Terrainlehre, das militärische Planzeichnen und das militärische Aufnehmen, sind äusserlich mit einer durchgehenden Paragrapheneintheilung versehen worden. Dabei ergab sich die Streichung von Wiederholungen, die nach dem ursprünglichen Charakter des Buches nicht leicht zu umgehen waren. Einiges musste auch ausgeschieden werden, in Folge der Herausgabe der fünften Auflage der Musterblätter für die topographischen Arbeiten der königl. preussischen Landesaufnahme vom Jahre 1885. Sowohl die Bestimmungen der neuen Felddienstordnung, als auch die Verbesserungen der Aufnahme-Instrumente gaben zu weiteren, hier nicht näher zu berührenden Veränderungen Anlass.

B. Nebel.

Praktische Anleitung zur Ausführung thermochemischer Messungen. Von M. Berthelot. Autorisirte Uebersetzung von Prof. G. Siebert. Leipzig 1893. Verlag von Johann Ambrosius Barth (Arthur Meiner). 111 S. Preis 2 Mk.

Die Fortschritte auf dem Gebiete der physikalischen Chemie waren in den letzten Jahren von solcher Bedeutung, dass die Erfolge sowohl für die Physik, als auch für die Chemie fruchtbringend wirken. Die Anerkennung hierfür gab sich äusserlich durch die Errichtung einer Reihe von Lehrstühlen für physikalische Chemie an den Universitäten zu erkennen. Das Gesetz von der Erhaltung der Energie, welches bei dem Unterricht in der Physik schon seit Jahren das Fundament bildet, ist wegen seiner Wichtigkeit bei dem Chemie-Unterricht bisher stiefmütterlich behandelt worden. In der Thermochemie, welche zur Zeit den meisten Stoff für die Vorlesungen in physikalischer Chemie liefert, bricht sich dieses Fundamentalgesetz Bahn, um in Bälde auch das ganze Gebiet der Chemie zu gewinnen. Bis vor Kurzem wurde nur von Wenigen die Thermochemie durch umfangreichere Arbeiten gefördert. Zu den bedeutendsten gehört der Verfasser, der nach zahlreichen, schon veröffentlichten Arbeiten nunmehr auch die von ihm benützten Messinstrumente und Messmethoden in einem besonderen Bändchen vereinigt, damit auch Anderen von der langjährigen Erfahrung eine erprobte praktische Unterweisung zu Theil wird. Der erste und zwar kürzeste Theil enthält die allgemeinen Principien, in dem zweiten werden die thermochemischen Apparate, deren Behandlung und Verwendbarkeit beschrieben, während der letzte und überwiegend grösste Theil den thermochemischen Operationen gewidmet ist.

Eine Reihe von Abbildungen geben Aufschluss über den Aufbau der Apparate, die sich meistens mit sehr einfachen Mitteln zusammenstellen lassen. Das Büchlein dürfte ein treuer Berather bei der Thätigkeit im Laboratorium sein, wozu auch die äussere Anordnung des Stoffes wesentlich beiträgt.

B. Nebel.

Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften. Nr. 52. Abhandlung über die Kräfte der Elektricität bei der Muskelbewegung. Von ALOISIUS GALVANI (1791). Herausgegeben von A. J. VON ÖTTINGEN. Mit 21 Figuren auf vier Tafeln. Leipzig 1894. Verlag von Wilhelm Engelmann. 76 S. Preis 1,40 Mk.

Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften. Nr. 53. Die Intensität der erdmagnetischen Kraft auf absolutes Maass zurückgeführt. Von CARL FRIEDRICH GAUSS (1832). In der Sitzung der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen am 15. December 1832 vorgelesen. Herausgegeben von E. DORN. Leipzig 1894. Verlag von Wilhem Engelmann. 62 S. Preis 1 Mk.

Die beiden Bändchen sind entsprechend den früheren nach Form und Inhalt. Zunächst werden die betreffenden Abhandlungen in deutscher Sprache wiedergegeben, worauf am Schluss die Herausgeber unter „Anmerkungen" theils geschichtliche, theils sonstige den Stoff betreffende Erläuterungen beifügen. — Nach welchen Gesichtspunkten erfolgt die Herausgabe der einzelnen Aufsätze? Eine geschichtliche Reihenfolge ist nicht zu erkennen; eine Zusammenstellung der epochemachendsten Arbeiten der einzelnen Klassiker findet auch nicht statt; denn die Namen Gauss, F. Neumann, Galileo Galilei treten zum Beispiel an verschiedenen Stellen auf. Es kann doch unmöglich der wissenschaftliche Werth der einzelnen Arbeiten massgebend sein; denn darüber würden die Ansichten jeder Zeit auseinander gehen. Uns fehlt eine äussere Ordnung, zumal in einer Zeit, in welcher sich die Literatur so rasch häuft. Je grösser die Menge ist, um so peinlicher muss für eine klare Uebersicht gesorgt sein, sonst leidet der Nutzen darunter; denn zum Suchen mangelt die Ruhe in unserer schnelllebigen und anspruchsvollen Zeit.

B. NEBEL.

Theorie des Fernrohrs auf Grund der Beugung des Lichts. Von KARL STREHL. I. Theil. Mit einer Tafel. Leipzig 1894. Verlag von Johann Ambrosius Barth (Arthur Meiner). 135 S. Preis 4 Mk.

Nachdem Abbe durch die Theorie des Mikroskops auf Grund der Beugung des Lichts einen neuen Impuls auf dem Gebiete der Optik gegeben und daher bahnbrechend gewirkt hat, giebt sich eine grössere wissenschaftliche Thätigkeit in der Lehre vom Licht zu erkennen, welches durch den ungeheuren Aufschwung der Elektricitätslehre eine Zeit lang etwas hintangesetzt war. Ein Analogon zu Abbe's Theorie des Mikroskops bildet des Verfassers Theorie des Fernrohrs auf Grund der Beugung des Lichts, welche für die Construction und insbesondere für die Beobachtung von grosser Wichtigkeit ist. Bisher fehlte es an einem derartigen geschlossenen Werke, das die zerstreuten Abhandlungen zusammenfasst und sie in solcher Weise wiedergiebt, dass den mathematischen Anforderungen vollkommen

Genüge geleistet wird. Der erste Theil umfasst daher die eigentliche, auf mathematischen Entwickelungen fussende Theorie, während der zweite mehr der Praxis gewidmet ist und sich daher mit den eigentlichen astronomischen Beobachtungen und den hierzu nöthigen Tabellen und Formeln zu beschäftigen hat. Der Verfasser hat aber nicht allein kritisch gesammelt, sondern auch productiv gewirkt, namentlich weist er auf die Fruchtbarkeit der Bessel'schen Functionen hin, worin sich sein Verkehr mit Prof. von Lommel wiederspiegelt, und macht die Mathematiker auf die Bedürfnisse der Physiker aufmerksam, welche sie in Bezug auf den Ausbau dieses Gebietes der Functionentheorie haben. — Es dürfte wohl überflüssig sein, darauf hinzuweisen, dass dieses Werk, namentlich nach seiner Vollendung, ein wichtiger Baustein sein wird für ein Handbuch der gesammten Optik auf Grund der modernen Anschauungen.

B. Nebel.

Aufgaben über Elektricität und Magnetismus. Für Studirende an Mittel- und Gewerbeschulen, zum Selbststudium für angehende Elektrotechniker, Physiker u. A. Von Eduard Maiss. Mit 58 Figuren im Text. Wien 1893. Verlag von A. Pichler's Witwe und Sohn. 159 S. Preis 2,40 Mk. (1,20 fl.).

Diese Aufgabensammlung ist genau den Bedürfnissen der österreichischen Mittel- und Gewerbeschulen angepasst und eignet sich sehr gut zur Einübung und Einprägung der im Unterricht vorgetragenen Gesetze. Das absolute Maass-System ist durchweg zur Anwendung gelangt, so dass der Schüler schon frühzeitig mit demselben vertraut gemacht wird. Früher war die Unterweisung hierin den Hochschulen vorbehalten, weil man es zum eigentlichen Fachstudium rechnete. Die allgemeine Verwendung der Elektricität im praktischen Leben zwingt, dass auch der Laie wenigstens weiss, was ein Ampère, Volt und Ohm bedeutet, dass es demnach zur allgemeinen Bildung gehört, darüber orientirt zu sein. Der Stoff ist in 15 Gruppen eingetheilt, so dass man sehr leicht orientirt ist. Am Schluss der Aufgabensammlung finden sich einige wichtige Tabellen, sowie eine Uebersicht über die wichtigsten elektrischen Einheiten. Den zweiten Theil bilden die Lösungen, sowie kurze Andeutungen zu denselben, damit das Buch auch zum Privatstudium geeignet wird. Tüchtig einüben an Beispielen ist die Hauptsache, um sich einen Stoff ganz eigen zu machen. In erhöhtem Maass gilt dies von der schnell fortschreitenden praktischen Elektricitätslehre.

B. Nebel.

Magnetische Beobachtungen an der Unterelbe. Angestellt im Jahre 1893. Von A. Schück. Selbstverlag des Verfassers. Hamburg. 16 S.

Nach einer kurzen Einleitung über die Art, wodurch die vorstehenden Beobachtungen ermöglicht worden sind, werden die Hilfsmittel und Beobachtungs-Instrumente beschrieben, mit welchen die in Tabellen wiedergegebenen Beobachtungen ausgeführt worden sind. Den Nutzen derselben werden zunächst die von und nach Hamburg gehenden Schiffe haben; denn ihrer ist bei der Auswahl der Punkte in erster Linie Rechnung getragen worden.

B. Nebel.

Elementare Rechnungen aus der mathematischen Geographie. Für Freunde der Astronomie in ausgewählten Kapiteln gemeinverständlich begründet und vorgeführt von O. Weidefeld. Mit einer Figurentafel. Berlin 1894. Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung. 64 S.

Das Werkchen ist für Solche bestimmt, die Interesse an der Astronomie haben und sich mit der Lösung einfacherer Aufgaben beschäftigen. Von mathematischen Vorkenntnissen wird nur ebene Trigonometrie und die Kenntniss der Rechnung mit Logarithmen verlangt und selbst in diesen Dingen finden sich Hinweise zur Auffrischung des Gedächtnisses. Der Verfasser zeigt, was sich unter solchen Umständen erreichen lässt, wodurch das Interesse für solche Arbeiten auch in weiteren Kreisen geweckt werden soll.

B. Nebel.

On the astigmatism of Rowland's concave gratings. By J. L. Sicks. Verhandelingen der Koninklijke Akademie von Wetenschappen te Amsterdam. (Erste Sectie.) Deel II Nr. 6 (With one Plate). Amsterdam 1894. Johannes Müller. 7 S.

Der Verfasser führt den Nachweis, dass der Astigmatismus bei den Concavgittern kein Hinderniss sein kann und darf für die sonst so äusserst werthvolle Beobachtung mit solchen.

B. Nebel.

Das Delische Problem von Professor Ambros Sturm. Programmbeilage des Gymnasiums in Seitenstetten in Niederösterreich. Linz 1895. Verlag des kaiserl. königl. Gymnasiums Seitenstetten. 56 S.

Referent hat den Namen des Verfassers zuerst durch Briefe kennen gelernt, in welchen ihm jener in liebenswürdigster Weise Bemerkungen zu den bisher erschienenen Abschnitten der Vorlesungen über Geschichte der Mathematik mittheilte. Die meisten Bemerkungen, auch wo es sich nicht blos um von uns übersehene Druckfehler handelte, waren zutreffend und werthvoll und werden bei einer neuen Auflage die verdiente Berücksichtigung erfahren. Mit um so gespannterer Erwartung begrüssten wir die Programm-Abhandlung, über welche wir heute berichten; und unsere Erwartung wurde voll befriedigt. So breitgetreten der behandelte Gegenstand nachgerade ist, Herr Sturm hat dennoch vermocht, Neues zu geben, und wo er nur wiederholt, was von Vorgängern, die er mit pünktlichster Gewissenhaftigkeit nennt, schon bemerkt worden war, wusste Herr Sturm die Form so reizvoll zu gestalten, dass wir nicht daran zweifeln, er werde in diesem und den nächstjährigen Programmen leisten, was seine Absicht ist: Etwas zu schaffen, was auch seine erwachsenen Schüler mit Interesse und Nutzen lesen können. Wir wollen einige wenige Einzelheiten hervorheben. Bei Gelegenheit der Verse eines unbekannten Dichters, in welchem Manche Euripides vermuthen, durch die der Aufgabe der Würfelverdoppelung grössere Verbreitung erwuchs, wird (S. 7 Note 3) darauf aufmerksam gemacht, dass nur wenige Jahrzehnte nach Euripides ein anderer dramatischer Dichter, Aristophanes, in seinen Vögeln 1005 von einer anderen geometrischen Aufgabe, der Quadratur des Kreises, redet. Beim Hinweise auf den Bericht des Valerius Maximus, über das Delische Problem wird (S. 11 Note 3) bemerkt, dort sei irriger Weise erzählt, Plato habe die Delier an Euklid gewiesen, was nur als Verwechslung mit Eudoxus zu erklären sei. Herr Sturm hätte hinzufügen können, diese Verwechslung selbst sei nur dadurch möglich gewesen, dass Valerius Maximus den Euklid von Megara für den Geometer hielt. Eine weitere Verwechslung wird (S. 23 Note 2) in dem bekannten Verse des Horaz *numeroque carentis arenae mensorem* vermuthet, welcher zur buchstäblichen Wahrheit wird, wenn Horaz an Archimed dachte, während er über Archytas schrieb. Dass Plato im Timaeus zweier mittleren Proportionalen gedenkt (S. 19 Note 3), indem er Feuer zu Luft, wie Luft zu Wasser, wie Wasser zu Erde sich verhalten lässt, war uns nie aufgefallen. Die Worte des Eutokius über die Würfelverdoppelung des Eudoxus waren allgemein so aufgefasst worden, als mache Jener Diesem Vorwürfe. Herr Sturm zeigt (S. 33 Note 4) an der Hand einer wortgetreuen Uebersetzung, so weit wir wissen, zum ersten Male, dass Eutokius vielmehr die als Eudoxisch überlieferte Auflösung verwarf und mit Stillschweigen überging, weil sie fehlerhaft war, was von der echten Auflösung des Eudoxus unmöglich angenommen werden könne. Der Platonischen Würfelverdoppelung wird (S. 54 u. 55) ausführlicher gedacht und dabei die benutzte Vorrichtung in ihrer mechanischen Entstehung aus zwei getrennten Winkelhaken erörtert. Herr Sturm beruft sich in seiner Bescheidenheit dafür auf Bretschneider, aber seine Darstellung ist gerade an diesem Orte so viel klarer und durch Unterstützung mittelst einer Figur so viel deutlicher in die Sinne fallend, dass er sie als Eigenthum hätte in Anspruch nehmen dürfen. Bis zu Plato reicht das diesjährige Programm, das nächste soll sich in erster Linie mit der Würfelverdoppelung der Alexandriner beschäftigen.

Cantor.

Monge, der Begründer der darstellenden Geometrie als Wissenschaft. Eine mathematisch-historische Studie von Prof. Ferdinand Jos. Obenrauch. Schluss. Brünn 1895. 44 S.

Der zweite Abschnitt, welchen wir Band XL (Histor.-lit. Abthlg S. 106) angezeigt haben, lehrte uns, wie wir dort sagten, die *Géométrie déscriptive* kennen. Der dritte Abschnitt schildert neben den späteren Lebensverhältnissen Monge's vornehmlich seine *Applications de l'Analyse à la Géométrie*, das grundlegende Werk für die analytische Geometrie der Oberflächen, in welchem jene Lehren wurzeln, welche nachmals durch Einführung der superficiellen Coordinaten von Gauss riesig anwuchsen, aber deren Ursprung die Geschichte der Mathematik niemals vergessen darf noch wird. Fast Alles, was auf die Krümmung von Oberflächen sich bezieht, ist im Keime bei Monge vorhanden, und viele der heute noch üblichen Kunstausdrücke — in erster Linie die *Krümmungscurven* — sind wie das, was sie bedeuten, von Monge erfunden. Nicht minder gehören Monge die partiellen Differentialgleichungen wichtiger Flächenfamilien und deren Integration an, und auch von Lagrange's partieller Differentialgleichung der Minimalflächen hat er Integrale aufzufinden gewusst. Herr Obenrauch hat in seinem Auszuge der *Applications etc.* stets auf spätere, oft auf neueste Arbeiten hingewiesen, welche Monge's Untersuchungen fortsetzen. Er hat darin für unseren Geschmack insoweit einen Missgriff gemacht, als das Bild von Monge's Thätigkeit unter diesen Einschaltungen leidet. Wir hätten jene späteren Arbeiten lieber in einem besonderen Schlussparagraphen vereinigt gesehen, doch geben wir bereitwilligst zu, dass das eine Geschmackssache ist. Etwas von unserem Gefühle muss indessen auch in dem Verfasser wach geworden sein, da er noch eine besondere Abhandlung über die wissenschaftliche Pflege der darstellenden und der projectiven Geometrie in Oesterreich als demnächst zu veröffentlichend in Aussicht stellt.

Cantor.

Bibliographie

vom 1. December 1895 bis 31. Januar 1896.

Periodische Schriften.

Abhandlungen der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Mathem.-physik. Classe. 22. Bd. Leipzig, Hirzel. 20 Mk.

Sitzungsberichte der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften. 1895. 2. Heft. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissenschaften. Mathem.-naturw. Classe. Abth. IIa und IIb. 104. Bd. Wien, Gerold. 10 Mk. 20 Pf.

Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturw. Classe. 62. Bd. Ebendaselbst. 76 Mk.

Verhandlungen der kaiserl. Leopold.-Carol. Akademie. Bd. 63 u. 64. Leipzig, Engelmann. 70 Mk.

Tageblatt der 67. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Lübeck im September 1895, Fünf Nummern. Lübeck, Schmersahl. 3 Mk. 30 Pf.

Verhandl. d. deutsch. Naturforscher u. Aerzte. 67. Versamml. in Lübeck, 16. bis 20. Sept. 1895. Theil I. Die allgem. Sitzungen. Leipzig, Vogel. 4 Mk.

Preisschriften der Fürstl. Jablonowski'schen Gesellschaft zu Leipzig. Nr. XXXI. Die säcularen Veränderungen der Bahnen der grossen Planeten. Von P. Harzer. Leipzig, Hirzel. 12 Mk.

Mittheilungen des siebenbürgischen Vereins für Naturwissenschaft. 44. Jahrg. Hermannstadt, Michälis. 6 Mk.

Vorträge und Aufsätze aus der Comenius-Gesellschaft. 3. Jahrgang. 1. Stück. (Comenius und die Akademien der Naturphilosophen des 17. Jahrh. Von L. Keller.) Münster, Bredt. 2 Mk. 25 Pf.

Bericht des internationalen meteorologischen Comité's etc. Versammlung zu Upsala. 1894 Berlin, Asher. 1 Mk. 50 Pf.

Deutsches meteorolog. Jahrbuch. Jahrg. 1894. Beobachtungen in Württemberg, bearb. von Mack und Meyer. Stuttgart, Metzler. 3 Mk. 60 Pf.

Jahrbuch des kaiserl. königl. hydrographischen Centralbureaus. 1. Jahrgang 1893. Wien, Braumüller. 10 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. 30. Jahrgang. 3. Heft Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Fortschritte der Physik im Jahre 1889. Dargestellt von der physik. Gesellschaft in Berlin. 45. Jahrgang. 3. Abth. (Physik der Erde, redigirt von Assmann). Braunschweig, Vieweg. 30 Mk.

—— Dasselbe im Jahr 1894. 50. Jahrgang. 1. Abth. (Physik der Materie, redigirt von Börnstein.) Ebendaselbst. 22 Mk. 50 Pf.

—— Dasselbe. 2. Abth. (Physik des Aethers, redigirt von Börnstein). Ebendaselbst. 30 Mk.

—— Dasselbe. 3. Abth. (Kosmische Physik, red. v. Assmann). Ebend. 25 Mk.

Veröffentlichungen der königl. Sternwarte zu Bonn. Nr. 1. Beobachtungen an Nebelflecken, von Dr. Mönnichmeyer. Bonn, Cohen. 6 Mk.

Sammlung von Schriften der Gesellschaft Urania. Nr. 36. Wissenschaftl. Ballonfahrten. Von R. Süring. Nr. 37. Die Milchstrasse. Von H. Samter. Berlin, Paetel. 1 Mk. 60 Pf.

Bulletin de l'académie des sc. de St. Pétersbourg. V. série, tome III, No. 1—4. Leipzig, Voss. 2 Mk. 50 Pf.

Mémoires de l'académie des sc. de St. Pétersbourg. VII. série, tome XLII, Nr. 13. Ebendaselbst. 7 Mk. 50 Pf.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte d. Mathematik. 3. (Schluss-) Band. 2. Abth. von 1700 bis 1726. Leipzig, B. G. Teubner. 6. Mk.

Volkmann, P., Franz Neumann, gest. am 23. Mai 1895. Dem Andenken an d. Altmeister d. mathem. Physik gewid. (m. Bildniss). Ebend. 2 Mk. 40 Pf.

Rosenberger, F., Newton und seine physikalischen Principien. Leipzig, Barth. 13 Mk. 50 Pf.

Reine Mathematik.

Göpel, A., Theorie d. Abel'schen Transcend. erster Ordn., übers. v. A. Witting. (Ostwald's Klassiker Nr. 67.) Leipzig, Engelmann. 1 Mk.

Abel, N., Untersuchungen über die Binomialreihe, herausgegeben von A. Wangerin. (Ostwald's Klassiker Nr. 71.) Ebendaselbst. 1 Mk.

Puchberger, E., Allg. Integr. d. Differentialgl. 3. Heft. Wien, Gerold. 1 Mk. 60 Pf.

Loewy, A., Ueb. die Transformationen einer quadrat. Form in sich selbst mit Anwend. a. Linien- u. Kugelgeometrie. Leipzig, Engelmann i. Comm. 3 Mk.

Holzmüller, G., Methodisches Lehrbuch d. Elementarmathematik, Gymnasialausgabe, 1. Theil b. Ende v. Untersek. Leipzig, B. G. Teubner. 2 Mk. 40 Pf.

Bork, H., Mathem. Hauptsätze für Gymnasien. 2. Theil. Pensum d. Obergymnasiums (bis zur Reifeprüfung). Leipzig, Dürr. 2 Mk. 40 Pf.

Angewandte Mathematik.

Friedrich, G., Mathematische Theorie d. reichsgesetzlichen Invaliditäts- und Altersversicherung. Leipzig, Barth. 4 Mk.

Nies, A., Allgem. Krystallbeschreibung nach vereinf. Methode des Krystallzeichnens u. d. Anfert. v. Netzen u. Modellen. Stuttg., Schweizerbart. 4 Mk.

Plassmann, J., Beob. veränderl. Sterne. 4. Thl. Warendorf, Schnell. 3 Mk.

Physik und Meteorologie.

Plücker, J., Ges. phys. Abhandl., herausg. v. F. Pockels. Leipz., Teubner. 30 Mk.

Schwartze, Th., Grundgesetze der Molecularphysik. Leipzig, Weber. 4 Mk.

Turner, A., Die zerstreute Materie. Leipzig, Thomas. 1 Mk. 50 Pf.

Boltzmann, L., Vorles. üb. Gastheorie. 1. Thl. Gase m. einatom. Molekülen, deren Dimensionen gegen d. mittl. Weglänge verschwinden. Leipzig, Barth. 6 Mk.

Handbuch der Physik. 27. Lieferung. Breslau, Trewendt. 3 Mk. 60 Pf.

Kaiser, L., Die internationalen absoluten, insbes. die magnetischen und elektrischen Maasse. Vorträge. Wiesbaden, Bergmann. 1 Mk. 60 Pf.

Schmitz-Dumont, O., Naturphilosophie als exacte Wissenschaft, mit besond. Berücksichtig. der math. Physik. Leipzig, Duncker & Humblot. 12 Mk.

Landauer, J., Die Spectralanalyse. Braunschweig, Vieweg. 4 Mk.

Seebeck, J., Magnet. Polarisation d. Metalle durch Temperaturdiff.; herausg. von A. v. Oettingen. (Ostw. Klassiker Nr. 70.) Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Neumann, C., Untersuchungen über das Newton'sche Princip der Fernwirkungen. Leipzig, B. G. Teubner. 10 Mk.

Maxwell, J., Ueber Faraday's Kraftlinien; herausgeg. von L. Boltzmann. (Ostwald's Klassiker Nr. 69.) Leipzig, Engelmann. 2 Mk

Weber, L., Repetitorium der Experimentalphysik für Studirende auf Hochschulen. München, Dr. E. Wolff. 4 Mk. 20 P.

Schreiber, P., Das Klima des Königreichs Sachsen. Amtliche Publication. III. Heft. Chemnitz, Bülz. 4 Mk.

Wild, H., Das Konstantinow'sche magnetische und meteorologische Observatorium in Pawlowsk bei Petersburg. Leipzig, Voss. 7 Mk. 50 Pf.

Historisch-literarische Abtheilung.

Ueber die sogenannte Regel Ta Yen in Europa.

Von

MAXIMILIAN CURTZE

in Thorn.

Heute die Mittheilung, dass die ta yen Regel schon Anfang des 13. Jahrhunderts bekannt gewesen ist. Es ist Ihnen, wie mir, bei dem Studium des liber abbaci von **Leonardo Pisano** vorläufig entgangen, dass dieser schon die besagte Regel in Anwendung bringt. Seite 304 der Boncompagnischen Ausgabe heisst es (Z. 6—29):

De eodem, cum numerus excogitatus non sit ultra 105:

Dividat excogitatum numerum per 3, et per 5, et per 7; et semper interroga, quot ex unaquaque divisione superfuerit. Tu vero ex unaquaque unitate, que ex divisione ternarii superfuerit, retine 70; et pro unaquaque unitate, que ex divisione quinarii superfuerit, retine 21; et pro unaquaque unitate, que ex divisione septenarii superfuerit, retine 15. Et quotiens numerus superexcreverit tibi ultra 105, eicias inde 105; et quod tibi remanserit, erit excogitatus numerus. Verbi gratia ponatur, quod ex divisione ternarii remaneant 2; pro quibus retineas bis septuaginta, id est 140; de quibus tolle 105, remanent tibi 35. Et ex divisione quinarii remaneant 3; pro quibus retine ter 21, id est 63, que adde cum predictis 35, erunt 98. Et ex divisione septenarii remaneant 4; pro quibus quater 15 retinebis, id est 60; que adde cum 98 predictis, erunt 158; ex quibus eice 105, remanebunt tibi 53; que erant excogitatus numerus.

Procedit ex hac regula pulcrior divinatio, videlicet ut si quis tecum noverit hanc regulam; et aliquis ei privatim dixerit aliquem numerum, tunc ille tuus consocius, non interrogatus, tacite dividat numerum sibi dictum per 3, et per 5, et per 7, predicta ratione; et quod ex qualibet divisione remanserit, per ordinem tibi dicat, et sic poteris scire numerum sibi privatim dictum.

Aliter. De eodem, cum numerus non ascendet ultra 315.

Praecipe, ut numerum, quem in corde suo posuerit, dividat per 5, et per 7, et per 9 ad modum antecedentis regule; et singulariter interroga, quid ex unaquaque divisione remaneat et pro unaquaque unitate, que ex divisione quinarii remanserit, retine 126; et pro qualibet unitate, ex septenario remanente, 225; et pro qualibet ex novenario, 280; et semper cum summa excreverit, ita ut possit inde extrahere 315, eice ea inde quotiescumque poteris; et quod tibi in fine remanserit, erit quesitus numerus.

Damit ist also die Regel ta yen genau in dem Umfange, welchen die Chinesen kannten, aber ohne Beweis, als **Leonardo** bekannt nachgewiesen. Jedenfalls würde bei genauerer Kenntniss der zwischen ihm und **Frater Fridericus** vorhandenen arithmetischen Handschriften sich nachweisen lassen, dass diese Kenntniss auch nicht verloren gegangen ist, wie sie ja bei den Byzantinern des angehenden XV. Jahrhunderts bekannt war. Ob **Leonardo** sie den Arabern entlehnte, ob er sie wie seine übrigen Divinationes Früheren, so z. B. nachweislich **Beda**, entlehnt hat, muss vorläufig dahingestellt bleiben, bis auch hier eingehenderes Studium der Handschriften Klarheit schafft. Hätte aber **Leonardo** sie selbst gefunden, würde er sicherlich dies anzugeben nicht unterlassen haben, wie so manche andere Stellen — ich erinnere nur an die Cubikwurzelausziehung — es zeigen. Er würde dann auch seine Regel zu beweisen nicht unterlassen haben.

Vandermondes Vornamen.

Von

Dr. HEINRICH SIMON

in Berlin.

Vandermonde — geboren zu Paris am 28. Februar 1735, gestorben ebenda am 1. Januar 1796 — ist nach verschiedenen Richtungen hervorgetreten. Er hat sich nicht nur als Mathematiker, sondern auch als Musiktheoretiker und Technolog, ja sogar in der Staatsverwaltung bethätigt. Er war Mitglied der Académie des Sciences seit 1771, bis sie in der Revolutionszeit aufgelöst wurde. In das am 20. November 1795 neubegründete Institut national wurde er bereits am 13. December desselben Jahres als Mitglied der Klasse Sciences physiques et mathématiques hineingewählt. Seit seinem kurz darauf erfolgten Tode sind eben 100 Jahre vergangen, und da ist es einigermassen verwunderlich, dass sich nur mit Mühe Aufschluss über seine Vornamen gewinnen lässt.

Auf den ersten Blick scheint das allerdings nicht der Fall zu sein. Nennen doch die „Abhandlungen aus der reinen Mathematik", die 1888 bei J. Springer in Berlin deutsch erschienen sind, als Verfasser „N." Vandermonde. Schlagen wir aber, um uns über die Bedeutung dieses „N." näher zu unterrichten, Poggendorff's Biographisch-literarisches Handwörterbuch nach, so finden wir die Angabe, Vandermonde habe Charles Auguste geheissen; und wenden wir uns zur Aufklärung dieses Widerspruchs an Vandermondes Landsmann Marie, so werden wir belehrt,* dass seine Vornamen Abnit-Théophile lauteten.

Dieser Sachverhalt reizte zu weiteren Nachforschungen, wobei denn sogleich zu Tage kam, dass Poggendorff's Angabe auf einer Verwechselung unseres Mathematikers mit einem älteren Verwandten gleichen Namens, dem namhaften Mediciner Charles Augustin Vandermonde zurückzuführen ist, obwohl Poggendorff's Quelle, die Biographie universelle (Paris, Michaud 1811—1828), den beiden Vandermondes zwei getrennte Artikel widmet und bei dem Mathematiker keinen Vornamen nennt.

Das „N." der deutschen Uebersetzung stammt vermuthlich aus Hoefer's Nouvelle Biographie générale, T. 45 (Paris 1866), die „(N...)" schreibt

* Histoire des sciences math. et phys. T. 9. Paris 1886.

und ihrerseits wohl aus einem der älteren biographischen Wörterbücher* geschöpft hat, wo sich ein (N.) findet. Ich möchte glauben, dass dieses N. ursprünglich nicht den Anfangsbuchstaben, sondern überhaupt die Unkenntniss des Vornamens bedeuten sollte, wie man denn auch in Oettinger's Moniteur des dates in unserem Falle und ähnlichen den Vermerk (N...N...) liest. Bestärkt werde ich in dieser Annahme durch den Umstand, dass in der Biographie nouv. des contemporains das (N.) mehrfach gerade da steht, wo die Vornamen thatsächlich nicht mit N. beginnen, also dem Verfasser unbekannt waren.** Allerdings kommen daneben auch Artikel ganz ohne Vornamen, also auch ohne jenes (N.) vor; das lässt sich aber bei einem derartigen Sammelwerk aus einer Ungleichmässigkeit der Redaction erklären. Für meine Auffassung des N. spricht auch, dass in dem Lexikon von Chalmers*** ausdrücklich hervorgehoben wird, der Vorname Vandermonde's sei nicht zu ermitteln gewesen†, trotzdem der Verfasser doch sicherlich die französischen Biographien, die das N. aufweisen, zu Rathe gezogen hat.

Die von Vandermonde selbst veröffentlichten Arbeiten tragen vor seinem Namen nur das übliche M. = Monsieur, und es ist schon glücklich, dass der Uebersetzer nicht diesem M. zum Opfer gefallen ist, wie es bei französischen Autoren nur zu oft geschieht. Mancher Leser dieser Zeitschrift kennt wahrscheinlich die gleichfalls bei Springer in Berlin erschienenen deutschen Ausgaben der Wärmetheorie „von M. Fourier" und der Theorie der partiellen Differentialgleichungen „von Dr. M. Paul Mansion"; Fourier hiess aber Jean Baptiste Joseph, und auf dem Titel des anderen Buches steht im Original „par M. Paul Mansion, professeur" etc. Besonders erheiternd wirkt dies Versehen bei dem Titel „Bericht des Herrn M. V. Cousin über den Zustand des öffentlichen Unterrichts" u. s. w. (Altona 1832 bis 1833), wo der allzuhöfliche Uebersetzer das unerkannte „Monsieur" noch durch ein „Herr" verstärkt hat. — In der That bedeutet das M. vor dem Namen eines lebenden Autors im Französischen fast nie den Vornamen, während es andererseits Regel ist, verstorbene Schriftsteller durch Weglassung des M. gleichsam über das Bereich irdischer Höflichkeit hinauszuheben. Bei der Seltenheit schriftlicher Belege für derartige Bräuche sei noch gestattet, auf eine Stelle hinzuweisen, wo sich der alte Lacroix einmal darüber auslässt. In der Vorrede zur zweiten Auflage des dritten Bandes seines grossen Traité du calcul différential et intégral (Paris 1819) sagt er: „Le titre de Monsieur ne se joignant pas au nom des savans

* Chaudon et Delandine, Nouv. Dict. hist. T. 12. Lyon 1804. — Dictionnaire biogr. et bibliogr., portatif, des personnages illustres... par L. G. P. Tome 3. Paris 1815. — Arnault, Jay, Jouy etc., Biographie nouv. des contemporains. T. 20. Paris 1825.

** So bei Pierre Jean Simon Van Eupen, Raimond Verninac de St. Maur, Pierre Charles Jean Baptiste Silvestre Villeneuve.

*** A. Chalmers, The general biograph. dictionary. New ed. Vol. 30. London 1816.

† „Vandermonde, a learned member of the French Institute, whose Christian name we have not been able to discover."

illustres pour lesquels la postérité a commencé, j'ai dû ne plus le placer devant ceux de Lagrange et de Monge..." —

Das missverstandene N. spukt indessen nicht nur in unserer deutschen Ausgabe des Vandermonde, sondern auch das in Frankreich sehr verbreitete Dictionnaire universel d'histoire et de géographie von M.-N. Bouillet hat es noch in seiner 19. Auflage (Paris 1863). Von den späteren Auflagen war mir nur die 28. vom Jahre 1884 zugänglich, und hier taucht plötzlich, als vierte Version, der Name Alex. auf, eine Abkürzung, die Alexandre oder auch Alexis bedeuten kann.

Das grosse Französische und Deutsche Wörterbuch von Sachs-Villatte, das sich mit Recht encyklopädisch nennt und selten versagt, hat zwar keinen Artikel „Vandermonde", füllt aber in seinem Supplement vom Jahre 1894 diese Lücke aus und stellt uns dabei vor eine fünfte Lesart der Vornamen, nämlich Alexis-Théophile. Als wahrscheinliche Quelle dieser Angabe bezeichnet mir die Langenscheidt'sche Verlagshandlung den Grand Dictionnaire universel du 19. siècle von P. Larousse; leider konnte ich das Werk nicht einsehen.

Die meiste Wahrscheinlichkeit hat indessen eine sechste Form für sich, die sich in dem Werke von Alfred Potiquet, L'Institut national de France, ses diverses organisations, ses membres, ses associés et ses correspondants (Paris 1871) findet. Dies Buch enthält unter anderem Listen der Mitglieder nach den Klassen und Sectionen geordnet, mit Vornamen, Geburts- und Todestag, dem Datum der Ernennung oder Wahl u. s. w. und ist augenscheinlich nach den Acten der Akademie gearbeitet. Und hier führt Vandermonde die Vornamen **Alexandre Théophile.** Dieselben Namen hat eine directe Anfrage beim Secretariat des Instituts ergeben.*

Ob Herr Marie, der an Vandermonde's Geburtsorte lebte, für die von ihm angegebenen Namen Abnit-Théophile eine bessere Quelle gehabt hat, etwa Kirchenbücher, habe ich nicht feststellen können. Bis auf Weiteres dürften demnach die Namen Alexandre-Théophile als die richtigen anzusehen sein, zumal es mir nicht gelungen ist, einen Namen Abnit irgendwo aufzufinden. Denkbar bleibt allerdings, Vandermonde habe ursprünglich diesen Namen geführt und ihn, gerade seiner Seltsamkeit wegen, später — etwa beim Eintritt in die Akademie — durch den gleichfalls mit A anfangenden Namen Alexandre ersetzt. Es wäre erwünscht, darüber endgiltig Klarheit zu verschaffen, denn die Angaben des Marie'schen Werkes bürgern sich bereits in neueren Büchern ein. So in Cajori, A history of mathematics, New-York 1894 und in Ball, A short account of the history of mathematics, London 1888, wo (Seite 369) „Abnit" Vandermonde, zudem noch mit den unrichtigen Jahreszahlen 1736—1793, aufgeführt ist.

* Auch Franqueville, Le premier siècle de l'Institut de France, T. 1 (Paris 1895), bestätigt diese Vornamen, wie ich nachträglich sehe.

Recensionen.

Die Folgelehre oder Functionenlehre. Streng wissenschaftlich in strenger Formelentwicklung von Robert Grassmann. Stettin 1895.

Formelbuch der Folgelehre oder Functionenlehre von Robert Grassmann. Stettin 1895.

Der Verfasser will eine die bisherigen Lehrbücher übertreffende strenge Darstellung der Functionenlehre geben. Seine Reformbestrebungen erstrecken sich zunächst auf die gebräuchlichen Bezeichnungen; so führt er für Function das Wort Folge, für Differentialquotient Diff, für Potenz Höhe, für Integriren Integern, für Product Zeug, für n Faculät n Tausche und noch eine Menge derartiger Neuerungen ein, die wir hier nicht alle aufzählen können. Ausserdem befürchtet er Gefahren für die Richtigkeit der Schlüsse aus den jetzigen mathematischen Bezeichnungen, deshalb muss der Unterschied zwischen eindeutigen und mehrdeutigen Functionen deutlicher hervorgehoben werden, indem nur die ersteren den Namen Functionen oder Folgen, die letzteren Functional oder Gefolge erhalten.

Den Ausgangspunkt seiner Darlegungen bilden die Betrachtungen über die Stetigkeit, und er will diesen Begriff nicht aus geometrischen Betrachtungen, sondern aus zahlentheoretischen Erwägungen ableiten, da die Functionentheorie ein höherer Zweig der Analysis ist. Eine solche stetige Zahlenreihe bilden die unendlichen Decimalbrüche.

Für eine Functionentheorie ist vor allem die grundlegende Erklärung des Functionsbegriffs massgebend, und diese wird in folgender Weise gegeben: „Die Folge oder Function von x heisst eine einwerthige Formel von x, welche durch Knüpfungen der Rechenlehre entstanden ist und in welcher die Folge ihre Werthe ändert, wenn x sie ändert.“ Der Betrachtung dieser einwerthigen Functionen wird nun der Satz zu Grunde gelegt: „Jede reelle Function von x, welche in den Grenzen des x von a bis b stets wächst, bez. stets abnimmt, wenn die Grösse x wächst, ist, sofern x stetig wächst, auch eine stetig wachsende bez. eine stetig abnehmende Grösse.“ Die Entwicklung der Functionenlehre geschieht mit Hilfe der Potenz- oder Höhenreihe, bei welcher sich der Verfasser hauptsächlich auf den Satz stützt: „Die steigende Höhenreihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = S a_a x^a$ ist stets echt, wenn x^2 kleiner als Eins, und zugleich keine der Vorzahlen unendlich ist.“ In erster Linie ist hier aber der Beweis für die Entwickelbarkeit einer Function in einer Reihe nothwendig, und dieser ist nicht sehr streng geführt. Der Verfasser spricht den Satz in folgender Weise aus: „Jede stetige reelle Function von x kann, sofern $x^2 < 1$ ist, einer steigenden Höhenreihe von x gleichgesetzt werden und diese ist, sofern in ihr nicht eine der Vorzahlen unendlich wird, eine echte Reihe.“ Zur Begründung desselben wird einfach angeführt, da die Reihe unendlich viele Vorzahlen hat, kann man die Vorzahlen so bestimmen, dass die Reihe für jeden bestimmten Werth von x auch dem entsprechenden Werthe der einwerthigen Formel von x gleich ist. Ob und wie das hierbei entstehende System von unendlich vielen Gleichungen aufgelöst werden kann, darüber verlautet weiter kein Wort. Auf dieser Reihenentwicklung ruht nun auch die Erklärung der Differentialquotienten. Eine Function von $x + y$ wird nach Potenzen von y entwickelt, und der Coefficient von $\frac{y_a}{a!}$ gleich der a^{ten} Ableitung von fx gesetzt. Wenn der Verfasser diese Entwicklung als strenger und einfacher als diejenigen aller anderen Mathematiker bezeichnet, so ist das schon deshalb nicht richtig, weil die Entwicklung auf den oben angeführten Satz über die Darstellung einer Function in einer Reihe beruht.

Auch bei der Integralrechnung glaubt der Verfasser neue Wege einschlagen zu müssen. Er macht hier einen Unterschied zwischen Integre und Integral. Die Integre geht dadurch aus dem Integral hervor, dass die willkürlichen Constanten gleich Null gesetzt werden; da die Mathematiker dieses allein wissenschaftliche Verfahren nicht kannten, so war es nach der Meinung des Verfassers nicht möglich, höhere Integrale zu behandeln. Es scheint ihm also nicht bekannt zu sein, dass man ein wissenschaftlich viel brauchbareres Verfahren besitzt, welches man auch immer bei der Behandlung von Differentialgleichungen anwendet, indem man einem bestimmten Werth der Unabhängigen bestimmte Werthe der Integrale zuordnet.

Aus dem hier Angeführten kann der Leser wohl zur Genüge ersehen, ob das Werk das, was es verspricht, wirklich hält. Max Meyer.

Einleitung in die Theorie der Gammafunction und der Euler'schen Integrale von Dr. phil. J. H. Graf, Professor der Mathematik an der Universität Bern. Druck und Verlag von K. J. Wyss. Bern 1895.

Die unter dem obigen Titel erschienene kleine Schrift soll keine erschöpfende Darstellung der Gammafunction sein, sondern will den Studirenden in dieses Gebiet einführen. Den Ausgangspunkt nimmt die Untersuchung von der Definition der Gammafunction als Grenzwerth eines Quotienten, daran schliesst sich die Verwandlung der Gammafunction in ein bestimmtes Integral und die Aufstellung der verschiedenen Formen der Euler'schen Integrale. Besonders wird die Formel:

$$f(a, b) = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

zur Ableitung der Resultate verwendet, wie z. B. bei der Auswerthung bestimmter Integrale und bei der Berechnung von $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ und $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$. Ausserdem mögen aus dem übrigen Inhalte noch die Schätzung der Gammafunction für grosse Argumente, sowie der Integral-Logarithmus erwähnt werden.

Die Darstellung ist im Allgemeinen verständlich, nur wäre vielleicht eine grössere Deutlichkeit bei der Untersuchung der Integrale in der Umgebung singulärer Punkte wünschenswerth. Es ist daher den Studirenden, die das Werk benutzen wollen, die Beschäftigung mit diesem Gebiete, sowie auch für einige Stellen die Bekanntschaft mit den elliptischen Integralen zu empfehlen; alsdann wird das Werk zur Einführung in die Theorie der Gammafunction sehr wohl geeignet sein. MAX MEYER.

Untersuchungen zur Variations-Rechnung. Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doctorwürde von der Philosophischen Facultät der Friedrich Wilhelm-Universität zu Berlin von ERNST ZERMELO. Verlag von Mayer & Müller, Berlin.

Diese Dissertation ist eine Erweiterung eines Theiles der Untersuchungen des Herrn Weierstrass. Dieser legte seinen Betrachtungen Integrale von der Form:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(x,\ y;\ x',\ y')\,dt$$

zu Grunde, während der Verfasser Integrale von der Form:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(x,\ x', \ldots x^{(n)};\ y,\ y', \ldots y^{(n)})\,dt$$

einer Untersuchung unterzieht.

Im ersten Abschnitt wird die Frage erörtert, unter welchen Bedingungen das Integral von der in gewisser Beziehung willkürlichen Darstellung der Coordinaten der Curve als Functionen des Parameters t unabhängig ist. Soll für ein beliebig vorgeschriebenes Curvenstück 1, 2

$$x = \varphi(\vartheta),\ y = \psi(\vartheta), \qquad (\vartheta_1 \leqq \vartheta \leqq \vartheta_2)$$

das Integral:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(x^{(\mu)},\ y^{(\mu)})\,dt$$

einen bestimmten, von der besonderen Form der Darstellung unabhängigen Werth besitzen, so darf es nach Fixirung der Functionen φ, ψ nur von den Endwerthen ϑ_1 und ϑ_2 der Function $\vartheta = \vartheta^{(t)}$ abhängen.

Es werden in Folgendem einige Abkürzungen eingeführt:

$$\frac{\partial F}{\partial x^{(\mu)}} = X_\mu, \quad \frac{\partial F}{\partial y^{(\mu)}} = Y_\mu,$$

$$P_\mu = \sum_{\varkappa=0}^{n-\mu} (-1)^\varkappa D^\varkappa X_{\mu+\varkappa}, \qquad (\mu = 0, 1 \ldots, n, P_0 = P),$$

$$\Xi_\nu = \sum_{\mu=\nu}^{n} \binom{\mu}{\nu} X_\mu x^{(\mu-\nu+1)}.$$

Der P_μ entsprechende Ausdruck werde mit Q_μ und der dem Ξ_ν mit H_ν bezeichnet, dann ergiebt sich folgendes System von Bedingungsgleichungen:

$$\Xi_\nu + H_\nu = \sum_{\mu=\nu}^{n} \binom{\mu}{\nu} \left\{ X_\mu x^{(\mu-\nu+1)} + Y_\mu y^{(\mu+\nu+1)} \right\} = e_{\nu,1} F,$$

wo $e_{\nu,1} = 1$ oder 0 ist, je nachdem ν gleich 1 oder von Letzterem verschieden ist.

Gelegentlich benutzt der Verfasser mit Vortheil folgendes System von Veränderlichen:

$$\alpha_1 = arctg \frac{y'}{x'}$$

$$\alpha_2 = \frac{x' y'' - y' x''}{(x'^2 y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

allgemein:

$$\alpha_\mu = \frac{d^{\mu-1} \alpha_1}{d s^{\mu-1}},$$

dann ergiebt sich, dass jede Function, die von der Wahl des Parameters unabhängig ist, eine Function von x, y, α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_n$ ist.

Im zweiten Abschnitt wird nun die Frage untersucht, eine Curve zu finden, für welche das Integral

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F dt$$

ein Minimum ist. Es werden hierbei folgende Voraussetzungen gemacht: Alle zulässigen Curven sollen an beiden Grenzen der Integration $t = t_1$ und $t = t_2$ in gegebenen Punkten zwei gegebene analytische Curven von $n - 1^{\text{ter}}$ Ordnung berühren. Ferner soll sich das ganze Intervall $t_1 \ldots t_2$ jedesmal in eine endliche Anzahl von Theilen zerlegen lassen, in deren jedem $x^{(\mu)}$ und $y^{(\mu)}$ eindeutige und stetige Functionen von t sind. Ausserdem soll für $r \geqq 1$ die Bedingung bestehen: $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) > 0$. Auch der von Herrn Weierstrass eingeführte Begriff der benachbarten Curven wird für die folgenden Betrachtungen erweitert. Von einer Curve soll behauptet werden, sie liefere ein Minimum in einer „Nachbarschaft n^{ter} Ordnung", falls sich für irgend eine Darstellung $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ der Curve positive Grössen g, $g_1 \ldots g_m$ so angeben lassen, dass alle erlaubten Curven $x = \overline{\varphi}(\lambda)$, $y = \overline{\psi}(\lambda)$, die den Bedingungen:

$$|D^{\mu}\overline{\varphi}(\lambda) - \varphi^{(\mu)}(\varkappa)| < g_{\mu}, \quad |D^{\mu}\overline{\psi}(\lambda) - \psi^{(\mu)}(\varkappa)| < g_{\mu},$$
$$(\mu = 0, 1, 2, \ldots m)$$

genügen, Integrale liefern:

$$J(\bar{a}) > J(a).$$

Führt man eine Variation aus, indem man:

$$x = \varphi(t) + \varepsilon\xi(t), \quad y = \psi(t) + \varepsilon\eta(t)$$

setzt, so ergiebt sich zunächst folgender Satz: Wenn einem der Gesammtheit der erlaubten Curven angehörenden Curvenstück ein Minimum des Integrals entsprechen soll, so muss vor allen Dingen die „erste Variation" immer verschwinden für beliebige den vorgeschriebenen Bedingungen genügende Functionen $\xi(t)$ und $\eta(t)$, und hieraus geht hervor, dass für den Fall eines Minimums P und Q in dem ganzen Intervall verschwinden müssen. Die Curven, welche ein Minimum ergeben, genügen der Differentialgleichung $Px' + Qy' = 0$.

Für ein Curvenstück, das ein Minimum des Integrals liefern soll, dürfen $P_1, \ldots P_n$ und $Q_1, \ldots Q_n$ keine endlichen Sprünge erleiden, wenn P und Q stetig sind; ebenso wird auf Grund der ferneren Untersuchungen die Stetigkeit der Ableitungen von x und y bis zur $n-1^{\text{ten}}$ Ordnung vorausgesetzt.

Analog dem Verfahren des Herrn **Weierstrass** gelangt man auch hier durch eine geeignete Variation zu einer Function:

$$E = F(\overline{p}, \overline{q}) - F(p, q) - \frac{\partial F(p, q)}{\partial p}(\overline{p} - p) - \frac{\partial F(p, q)}{\partial q}(\overline{q} - q),$$

wo $p = x^{(n)}$, $q = y^{(n)}$; $\overline{p} = \overline{x}^{(n)}$, $\overline{q} = \overline{y}^{(n)}$ gesetzt werden und $\overline{x}$ und $\overline{y}$ die Werthe auf einer benachbarten Curve sind.

Soll ein unseren bisherigen Voraussetzungen entsprechendes Stück einer Lösung der Differentialgleichung des Problems ein wirkliches Minimum des Integrals liefern, so darf die Function E an keiner Stelle des ganzen Intervalles für irgend welchen Werth der Grössen $\overline{p}$, $\overline{q}$ negativ werden können. Durch eine Umformung von E ergiebt sich auch hieraus Folgendes: Wenn ein wirkliches Minimum vorhanden sein soll, so darf in der ganzen Ausdehnung des Curvenstückes die Function

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^{(n)^2}} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)^2}}$$

nirgendwo negative Werthe annehmen. Es ergeben sich hier gegenüber dem von Herrn **Weierstrass** behandelten Fall bemerkenswerthe Unterschiede. So kann z. B. bei dem allgemeinen Falle, auch wenn E eine rationale Function ist, sehr wohl ein Minimum existiren, während das in dem besonderen Falle, der nur die ersten Ableitungen enthält, nicht möglich ist.

Im letzten Abschnitte werden nun auch die hinreichenden Bedingungen für die Existenz eines Minimums aufgesucht, und es ergiebt sich hierbei folgendes Resultat: Eine particuläre Lösung der Differentialgleichung des Problems liefert zwischen den Werthen t_1 und t_2 des Parameters, wenn in diesem Stück der Curve keine conjugirten Punkte existiren, ein Minimum:

1. in einer Nachbarschaft $n-1^{\text{ter}}$ Ordnung, wenn gleichzeitig die Function $E(t)$ im ganzen Intervall nur positive Werthe besitzt und auch an den Stellen, wo sie etwa verschwindet, ihr Vorzeichen nicht wechseln kann;
2. in einer Nachbarschaft $m = n^{\text{ter}}$ Ordnung, wenn statt dessen die Function:
$$f_1 = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^{(n)}\, \partial x^{(n)}} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)}\, \partial y^{(n)}}\right) : (x'^2 + y'^2)$$
im ganzen Intervall nur positiv ist und, auch wo sie verschwindet, ihr Zeichen nicht wechseln kann.

Hierdurch ist bis auf gewisse Ausnahmefälle, die der Verfasser am Schluss seiner Arbeit zusammenstellt, die Frage nach der Existenz eines Minimums immer zu entscheiden.

Dies möge als kurze Inhaltsangabe der Dissertation dienen, die eine sehr interessante Erweiterung der Variationsrechnung bietet.

Max Meyer.

Grundlagen für die geometrische Anwendung der Invariantentheorie von Dr. P. Muth. Mit einem Begleitworte von M. Pasch. Druck und Verlag von B. G. Teubner. Leipzig 1895.

Die Anwendung der Invariantentheorie auf die analytische Geometrie vorzubereiten ist der eigentliche Zweck dieses Buches. Es werden hierbei nur wenige Kenntnisse aus der analytischen Geometrie und der Determinantenlehre vorausgesetzt. Ausgehend von dem Begriff des Doppelverhältnisses bringt dasselbe zunächst die Einführung der homogenen Coordinaten der Geraden, Punktreihen und Strahlenbüschel, schreitet sodann zur Einführung linearer Coordinaten der Ebene fort und erweitert dann die Coordinatendarstellung für den Raum. Es werden bei diesen Betrachtungen auch imaginäre Werthe der Elemente berücksichtigt, wie auch die Dualität in den Formeln immer hervorgehoben wird.

Die folgenden Abschnitte enthalten die allgemeine Coordinatentransformation, projective Gebilde, Collineation und Reciprocität, sowie schliesslich die involutorischen Gebilde. Den weitaus grössten Theil des Werkes nehmen also Betrachtungen über den Coordinatenbegriff ein, und es fragt sich, ob dieselben nicht vielleicht doch eine zu grosse Ausdehnung gewonnen haben. Ebenso wäre bei manchen Ableitungen ein deutliches

Hervortreten der ihnen zu Grunde liegenden geometrischen Anschauungen erwünscht. Dafür entschädigt allerdings die Gründlichkeit der Ableitung der einzelnen Sätze, welche dem Studirenden die vor allen Dingen nothwendige Sicherheit in den Elementen giebt, und darum dürfte dieses Werk Demjenigen gute Dienste leisten, der in das in Rede stehende Gebiet eingeführt werden will.

MAX MEYER.

Das grösste Problem der Rechenkunst gelöst. Rationelle und an Einfachheit unübertreffbare Methode zur Auflösung von numerischen Gleichungen beliebigen Grades. — Mit Anhang: Ein neuer Satz der Planimetrie. Der muthmassliche Schlüssel zum Malfatti'schen Problem. Herausgegeben von AUG. OTTO.

Der angeführte Titel ist schon von vornherein geeignet, einiges Misstrauen zu erwecken. Diese rationelle und an Einfachheit unübertreffbare Methode ist ein einfaches Interpolationsverfahren, das zwar sehr umständlich, aber darum keineswegs klar auseinandergesetzt ist. Von dieser Weitschweifigkeit giebt die Behandlung der Gleichungen ersten Grades ein gutes Beispiel. Der Verfasser theilt dieselben unnöthiger Weise in zwei ganz verschiedene Gruppen:

$$px + qx = a$$

und

$$px - qx = a.$$

Auch der neue Satz der Planimetrie entpuppt sich als specieller Fall eines guten alten Bekannten. Er lautet nämlich: Die Schnittpunkte der drei Tangentenpaare, welche gemeinschaftlich an je zwei von drei ungleich grossen Kreisen, deren jeder die beiden anderen berührt, gezogen werden können, liegen in einer geraden Linie. — Dieser Satz soll auch zu einer von dem Verfasser selbst noch nicht gefundenen Lösung des Malfatti'schen Problems, welches er als das mathematische Problem des 19. Jahrhunderts bezeichnet, führen. Die Begründung hierfür ist so charakteristisch, dass wir uns nicht versagen können, einiges davon anzuführen: „In der zu dem angeführten Satze gehörigen Figur liegt auch diejenige des Malfatti'schen Problems, in ein Dreieck drei Kreise so einzuzeichnen, dass jeder derselben zwei Seiten des Dreiecks und die beiden anderen Kreise berührt, vor uns. Die Möglichkeit, den vorliegenden Satz mit diesem Problem in Verbindung bringen zu können, kann deshalb nicht bestritten werden. „Das Malfatti'sche Problem tritt hiermit unzweifelhaft in ein neues Stadium seiner geschichtlichen Entwickelung."

MAX MEYER.

Die logischen Grundoperationen der Mathematik. Ein Repetitionsmittel für obere Gymnasial- und Realschulklassen von Friedrich Mann, k. Professor und Rector der Kreisrealschule Würzburg. A. Deichersche Verlagsbuchhandlung Nachf. (Georg Böhme). Erlangen und Leipzig 1895. Preis 1 Mk.

Der Verfasser dieser Schrift will die mathematische Repetition in der Schule dazu benutzen, um die Schüler bei dieser Gelegenheit in die Anfangsgründe der Logik einzuführen. In allen mathematischen Betrachtungen kehren fast immer verschiedene logische Grundoperationen wieder, die der Schüler, ohne sich über ihre Bedeutung klar zu sein, ausführt, und die ihm nunmehr zum Bewusstsein gebracht werden sollen. Es lässt sich nicht leugnen, dass dies ein sehr beachtenswerther Weg ist, den Bildungswerth der Mathematik zu erhöhen. Man muss indessen berücksichtigen, dass, wenn das Verfahren mit Erfolg angewendet werden soll, schon eine gewisse Sicherheit in dem rein mathematischen Gebiete vorhanden sein muss. In diesem Falle würde der Lehrer wohl auch Zeit finden, dasselbe an einzelnen Aufgaben durchzuführen, und wären Versuche in dieser Beziehung gewiss erwünscht.

In dem vorliegenden Heftchen wird das Verfahren nur auf die Planimetrie angewendet, obgleich seiner Ausdehnung auf andere Gebiete nichts im Wege steht. Die Schrift zerfällt in zwei Unterabtheilungen: „Anschauliches“ und „Begriffliches“. In Wirklichkeit kommen zwar Anschauung und Begriff in der Planimetrie nie völlig getrennt vor, die Eintheilung ist vielmehr nach dem in diesen Betrachtungen vorherrschendem Gebiet getroffen worden. Weniger glücklich ist die Eintheilung in primäre und secundäre Aufgaben, weil derselben kein genügendes Princip zu Grunde liegt. Der ergiebigste Abschnitt ist derjenige, welcher den Titel „Logische Vorübungen“ führt. Hier giebt besonders die Frage nach der Umkehrbarkeit der Lehrsätze Stoff zu lehrreichen logischen Betrachtungen.

Max Meyer.

Die geometrische Theilung des Winkels von Max Koenig, Regierungsbaumeister. Mit 44 Abbildungen auf zwei lithographirten Tafeln. Berlin. Verlag von Georg Siemens. 1894.

Der Verfasser will in dieser Schrift das Problem der Theilung eines Winkels in eine beliebige Anzahl von Theilen gelöst haben. Die Begründung der Construction ist so unklar, dass Referent nicht im Stande ist, den derselben zu Grunde liegenden Gedankengang zu erkennen. Es möge nur erwähnt werden, dass die Theilung des Winkels in n Theile mit Hilfe einer Theilung in $n+1$ Theile gelöst werden soll.

Max Meyer.

P. Appell et E. Goursat. **Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales.** Paris (Gauthier-Villars) 1895; h, X und 530 Seiten.

Das in der Ueberschrift genannte Lehrbuch der Theorie der algebraischen Functionen, welches von Herrn Hermite mit einer interessanten Vorrede versehen ist, dürfte für uns Deutsche von besonderem Interesse sein. Während nämlich in Deutschland nun bereits seit geraumer Zeit die Ideen Riemann's zur Grundlage einer schnell vorwärts treibenden Entwickelung der Functionentheorie geworden sind, war in Frankreich die Kenntniss der Grundsätze und allgemeinen Ergebnisse der Riemann'schen Theorie der algebraischen Functionen nicht in gleichem Masse Gemeingut der Mathematiker geworden. Dies ist nun in neuerer Zeit anders geworden, und zumal in dem vorliegenden Werke der Herren Appell und Goursat werden die Riemann'schen Anschauungsweisen in ausgedehnter Weise zur Grundlage der Theorie der algebraischen Functionen gewählt, womit in der Einbürgerung Riemann's in die französische Lehrbuchliteratur ein wichtiger Schritt vorwärts gethan wird. Es ist aber freilich auch nur erst ein Schritt in dieser Richtung geschehen; denn die volle und reine Darlegung des Riemann'schen Standpunktes, wie man sie übrigens nach den ausführlichen Vorbereitungen in der ersten Hälfte des Werkes hätte erwarten sollen, wird hier nicht gegeben. Es ist bei den klangvollen Namen der Herren Verfasser gar nicht zu bezweifeln, dass sie den eben jetzt vorliegenden Bedürfnissen der Studirenden ihres Landes in richtiger Weise entgegenkamen, indem sie die Riemann'schen Ergebnisse in dem von ihnen gewählten Umfange übermittelten. Aber es muss an vorliegender Stelle doch die Frage sein, inwieweit das Werk der Herren Appell und Goursat dem bei uns diesseits leider sehr fühlbaren Mangel an einem brauchbaren Handbuche der Functionentheorie abzuhelfen vermag. In dieser Hinsicht sind aber verschiedene Bedenken zu äussern, die allerdings erst nach einem ausführlichen Referat über den Inhalt des Werkes discutirt werden können. Eine kurze Einleitung, in welcher einige bekannte Grundsätze von Cauchy u. A. zusammengestellt werden, kann hier ausser Acht gelassen werden.

In den drei ersten Kapiteln, welche nahehin ein Drittel des ganzen Buches ausmachen, sind die zweiblättrigen Riemann'schen Flächen und damit die hyperelliptischen Gebilde behandelt.

Im ersten Kapitel wird im Anschluss an die Quadratwurzel:

$$\sqrt{(z-e_1)(z-e_2)\ldots(z-e_n)}$$

in anschaulicher und interessanter Weise ein Bild von der Eigenart der zugehörigen zweiblättrigen Riemann'schen Fläche entworfen, die Verzweigungspunkte und unendlich ferne Stelle werden untersucht, sowie auch betreffs der zugehörigen Functionen allgemeine Theoreme entwickelt (Seite 39).

Das Geschlecht p wird nach Weierstrass dahingehend definirt, dass bei einer algebraischen Function, die nur an einer einzigen Stelle unstetig wird, die Ordnung dieses Unstetigkeitspunktes im Minimum $(p+1)$ ist. Einige Vorentwicklungen zum späteren allgemeinen Riemann-Roch'schen Satze schliessen sich hier an.

Das zweite Kapitel ist einer sehr gründlichen Untersuchung der hyperelliptischen Integrale gewidmet. Aber es handelt sich hier nur erst darum, die Integrale einzeln in beschränkten Bereichen auf ihre Entwicklungsfähigkeit in Potenzreihen, auf ihre Art etwa vorkommender Unstetigkeiten etc. zu untersuchen. Die Gesammtauffassung des Verlaufs der Integrale über die ganze Fläche hin, welche in der Erkennung des Periodenverhaltens gipfelt, bleibt hier noch ausserhalb. Gemäss des in Kapitel I begründeten Ansatzes wird an der einmal gewählten Riemannschen Fläche dauernd festgehalten. Dies ist allerdings bei zweiblättrigen Flächen (nicht aber für eine allgemeinere Auffassung) bis zum gewissen Grade gerechtfertigt, insofern bei Transformation wieder in eine zweiblättrige Fläche die Verzweigungspunkte hier ausnahmsweise den Charakter der Invarianz besitzen. Natürlich müssen nun alle bei den Integralen möglichen Vorkommnisse für die Verzweigungspunkte und für die unendlich fernen Punkte besonders discutirt werden.

Im Kapitel III folgt die Lehre vom Zusammenhang und der Zerschneidung der zweiblättrigen Flächen und damit die nothwendige Ergänzung der Theorie der hyperelliptischen Integrale.

In weiteren neun Kapiteln werden nun die bei den hyperelliptischen Flächen gewonnenen Anschauungen zur allgemeinen Theorie erweitert, wobei übrigens die eingehende und erschöpfende Behandlung, welche die zunächst folgenden Kapitel besonders auszeichnet, später mehr und mehr zurücktritt.

Die Kapitel IV und V liefern die hauptsächlichen Grundlagen des weiteren Aufbaues der Theorie. Dort finden wir die wesentlichen Eigenschaften der algebraischen Functionen allgemein entwickelt, die Art ihrer Unstetigkeitspunkte, ihr Verhalten gegenüber der Monodromie der unabhängigen Variabelen, ihre Verzweigungspunkte und deren Aufsuchung (nach Puiseux), die Construction ihrer Riemann'schen Flächen, von denen die allgemeinste als Grenzfall einer Fläche mit nur zweiblättrigen Verzweigungspunkten hingestellt wird (Seite 216). Hier (im Kapitel V) finden wir die Lehre vom Zusammenhang und der Zerschneidung der Flächen ausgeführt, die canonischen Schnittsysteme (nach Riemann) entwickelt und die Anwendung auf die Integrale gegeben.

Zur Veranschaulichung der allgemeinen Sätze werden hier die zu binomischen Gleichungen von der Gestalt $u^m = R(z)$ gehörenden m-blättrigen Flächen im Einzelnen verfolgt. Es sind dies sogenannte reguläre

Riemann'sche Flächen, und sie lassen stets m Transformationen in sich zu, analytisch durch:

$$u' = e^{\frac{2k\pi i}{m}} u, \quad z' = z$$

gegeben, bei denen sich die Blätter der Fläche permutiren. Uebrigens wird Seite 240 in dem mit den Worten: „On appelle ainse les surfaces…“ beginnenden Satze der Begriff der regulären Flächen (wenigstens nach dem deutschen Sprachgebrauch) nicht hinreichend scharf gefasst. Die Regularität einer Fläche ist neben der Lage und Anzahl der Verzweigungspunkte durchaus auch mit von der Abfolge der Blätter bedingt. In der Fortsetzung der Entwickelung bis Seite 244 bringt dieser Mangel in der Begriffsbestimmung der Regularität mehrere Inconvenienzen mit sich.

In dem folgenden Kapitel, über birationale Transformationen, findet eine entschiedene Abwendung von Riemann statt, worauf wir noch weiter unten zu sprechen kommen. Es wird hier nicht an die Gesammtauffassung aller zur Fläche gehörenden algebraischen Functionen angeknüpft, sondern die rationale Transformation wird als etwas Neues unvermittelt eingeführt. Die Folge ist, dass die Aussonderung der birationalen Transformation, der Beweis für die Erhaltung des Geschlechtes bei den letzteren Transformationen etc. vom Standpunkt einer consequenten Durchführung der Riemann'schen Denkweise als umständlich erscheinen müssen; man vergleiche nur etwa den ersten Beweis für die Erhaltung der Zahl p, welcher sich auf den Gebrauch der Riemann'schen Flächen stützt (Seite 261), mit dem zweiten rein analytischen Beweise dieses Satzes (Seite 261—266). Ueberhaupt gewinnen nun durchaus die Vorstellungen der Clebsch'schen Schule Geltung, und namentlich kommen die wichtigen Theoreme von Noether über die Erniedrigung der Singularitäten der ebenen Curven u. a. zur Behandlung. Eine zuerst durch Halphen gebrauchte, Seite 276 besprochene Transformation erweist sich hier als besonders nützlich. Die curventheoretische Definition des Geschlechtes p wird nun gegeben, und am Schlusse des Kapitels werden zur Anwendung der entwickelten Ansätze die wohlbekannten Sätze über Transformation der Curven des Geschlechtes $p = 0$ und $p = 1$ in sich entwickelt.

Es folgt ein ausserordentlich inhaltreiches Kapitel über Normalintegrale, welches durchaus im Sinne des bekannten Clebsch-Gordan-schen Standpunktes fundirt ist. Das heisst, hier herrscht einstweilen gar nicht mehr die Vorstellung einer Riemann'schen Fläche als Trägerin eines Systems mit einander zusammenhängender algebraischer und transcendenter Functionen, sondern unter Zugrundelegung einer particulären Relation $F(u, z) = 0$, welche natürlich geometrisch als Curve gedeutet wird, entspringen die Integrale, als längs dieser Curve hin erstreckt. Diese Auffassung, welche in der Geschichte der Theorie der Abel'schen Functionen eine so hervorragende Rolle gespielt hat, ist selbstverständlich an sich vollberechtigt. Es ist aber durchaus die Frage, ob in der hier gewählten Wendung der Entwicklung nicht eine Inconsequenz gegenüber der bisherigen Disposition zu erblicken ist; wir kommen darauf weiter unten zurück. Uebrigens ist bemerkenswerth, dass hier überall nicht die homogene Schreibweise gebraucht wird, welche doch den projectiven Charakter der Entwicklung auch äusserlich zum Ausdruck gebracht hätte. Die transcendente Normirung der Integrale und ihre Periodeneigenschaften können nun sehr kurz behandelt werden (S. 320—322) dank des Umstandes, dass bereits im vorigen Kapitel die Zerschneidung der Fläche ausführlich behandelt wurde. Zu besonders schönen Einzelausführungen giebt der Begriff eines Fundamentalsystems von $2p$ Integralen der ersten und zweiten Gattung Anlass, ein Begriff, der auch in der Theorie der Differentialgleichungen, der Correspondenztheorie und anderen Gebieten grundlegend ist. Es kommen hier namentlich die Arbeiten neuerer französischer Forscher zur Geltung. Auch die Probleme der algebraischen Ausführbarkeit der Integrale, der Reduction Abel'scher Integrale auf elliptische kommen hier zur Discussion.

Weit knapper sind die Entwicklungen des achten Kapitels gehalten, die eindeutigen Functionen auf einer Riemann'schen Fläche betreffend. Es wird die Darstellung der algebraischen Functionen durch die Integrale zweiter Gattung entwickelt und im Anschluss daran der Riemann-Roch'sche Satz und der Brill-Noether'sche Reciprocitätssatz dargestellt. Einige Sätze über das Verschwinden der Riemann'schen φ-Functionen werden aufgestellt (der hier zu Grunde liegenden allgemeinen Auffassung entsprechend natürlich in der Sprechweise der Geometrie der ebenen Curven); weiter folgt die Besprechung einer Reihe hyperelliptischer Besonderheiten. Die Herren Verfasser verfahren hier überall nicht mit derselben Ausführlichkeit, wie in den früheren Theilen des Werkes. Es wäre doch besonders interessant gewesen, wäre z. B. ein so wichtiger Begriff, wie der der Specialfunctionen, an Beispielen, die nicht mehr den aller niedersten Fällen p angehören, erläutert.

Es folgt nun in einem besonderen Kapitel (dem neunten) eine schöne Behandlung des Abel'schen Theorems (natürlich in der Sprechweise Clebsch-Gordan's). Zu erwähnen sind dabei noch die Anwendungen auf Integration eines Systems Abel'scher Differentialgleichungen, sowie auf Additionstheoreme für die Integrale erster Gattung.

Das Umkehrproblem ist (im Kapitel X) seinem elementaren Theile nach ausführlich und interessant entwickelt. Es handelt sich hierbei um die Inversion eines einzelnen Integrales in eine eindeutige oder endlichdeutige Function, wobei man bekannter Weise auf die Fälle $p = 0$ und $p = 1$ eingeschränkt ist. Besonders eingehend wird natürlich die Inversion des elliptischen Integrals erster Gattung behandelt. Als eine Anwendung bietet sich hier die Frage, in wie weit Differentialgleichungen erster Ordnung $f\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$ durch eindeutige Functionen integrirt werden können, ein Problem, dem bekannte Untersuchungen von Briot und Bouquet gewidmet sind. Auch die Integrationsmethode von Hermite kommt hierbei zur Darstellung. Betreffs des allgemeinen Jacobi'schen Umkehrproblems und seiner Behandlung durch Weierstrass u. A. werden nur einige kurze Andeutungen gegeben; von einer systematischen Behandlung sehen die Verfasser ab.

Das elfte Kapitel (Normalcurven und Moduln) beginnt mit dem bekannten Theorem von Schwarz, dass nur die zu $p = 0$ und $p = 1$ gehörenden Curven continuirliche Gruppen von Transformationen in sich zulassen. Für $p > 1$ wird aus der Discontinuität und dem algebraischen Charakter der Gruppe ein nahe liegender Schluss auf deren Endlichkeit gezogen. Einige weitere Ausführungen schliessen sich hier an, wobei übrigens die schönen, auf diesen Gegenstand bezogenen Ergebnisse von Hurwitz nur kurz unter dem Texte erwähnt werden. Es werden des weiteren zwei Arten von Normalcurven besprochen, nämlich einmal die ebene Curve $(p+1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit $\frac{p(p-3)}{2}$ Doppelpunkten (Clebsch-Gordan), sodann die in einem Raume von $(p-1)$ Dimensionen gelegene Noether'sche Normalcurve der φ. Diese Benennung, welche sich übrigens Herr Noether selbst verbittet, erscheint gleichwohl nicht ungerechtfertigt; man dankt den Noether'schen Untersuchungen principielle Sätze über die fragliche Curve, wie namentlich betreffs der Darstellung derselben durch quadratische und höhere Relationen zwischen den φ, wenngleich die Curve als solche explicite bei Noether nicht auftritt; vor Allem nehmen auch die erste Erkennung des invarianten Charakters der Curve gegenüber eindeutigen Transformationen die Herren Brill und Noether für sich in Anspruch.

Die im letzten Kapitel behandelten Anwendungen des Abel'schen Theorems auf die Geometrie halten sich durchaus innerhalb der allgemeiner bekannten Gebiete und betreffen die ebenen Curven dritter und vierter Ordnung und die Raumcurven vierter Ordnung. —

Es sind nur wenige Bemerkungen, welche wir hier am Schluss noch anzuführen haben. Bereits im Verlaufe des vorstehenden Berichtes wurde hervorgehoben, dass nach Meinung des Referenten die Herren Verfasser gegenüber den verschiedenartigen Strömungen innerhalb der Functionentheorie eine folgerichtige Stellungnahme vermieden haben. Es ist ja ein oft gehörter Einwurf, welcher von Seiten der Nachfolger Clebsch's gegen Riemann's Begründung der algebraischen Functionen erhoben wird, die Vorstellung der Riemann'schen Fläche sei etwas zu Ungenaues, und dürfe eben dieser Ungenauigkeit halber nicht zum Fundament einer Theorie gewählt werden. Letztere müsse vielmehr an eine concret vorgelegte Gleichung $f(u, z) = 0$ angeschlossen werden, für welche alsdann die geometrische Interpretation durch eine ebene Curve nahe liegt. Das hiermit gekennzeichnete Bedenken kann aber unmöglich in einem Buche vorliegen, dessen Hauptwerth in der minutiösen Einzeldurchbildung der Anschauung der Riemann'schen Flächen zu suchen ist. In der That muss hier der Uebergang zu den Vorstellungsweisen der Clebsch'schen Schule das Bedenken erwecken, dass ein sorgsam vorbereitetes Hilfsmittel fast ungebraucht in den Hintergrund gedrängt wird.

Man wird ja sagen können, dass die Verfasser nichts von den wichtigen Errungenschaften der curventheoretischen Denkweise hätten entbehren wollen. Aber dann hätte doch diese Denkweise als natürliches Glied in den Ausbau der Riemann'schen Grundlagen eingeordnet werden sollen. Die Brill-Noether'sche Theorie der corresidualen Punktgruppen, welche hier zu einer Theorie der äquivalenten Punktsysteme auf einer Riemann-schen Fläche geworden wäre, hätte den natürlichen Zugang dargeboten.

Es muss endlich dem Einwurf begegnet werden, dass die Riemann'sche Theorie ihres transcendenten Charakters wegen den Methoden der Geometer nachzustellen sei. In einer Theorie, in welcher das einfachste Element (die Primfunction oder Primform) transcendent ist, führen naturgemäss transcendente Methoden vielfach auf einem weit kürzeren und durchsichtigeren Wege zum Ziel; die Correspondenztheorie bietet hierfür ein glänzendes Beispiel. Es würde zumal in einem Lehrbuch unpädagogisch sein, wollte man transcendente Methoden, wo es immer möglich ist, aus Princip vermeiden, selbst wenn sie auf kürzerem Wege zum Ziele führen.

Die vorstehenden Bemerkungen gegen die curventheoretische Richtung wolle man übrigens durchaus nicht im absoluten Sinne fassen (obwohl diese Richtung in einer gewissen sogleich noch zu berührenden Hinsicht unzulänglich sein würde). Unsere Bemerkungen sind durchaus nur mit Rücksicht auf das hier in Rede stehende Lehrbuch gemacht, welches auf seinem Titelblatte den Passus führt: „Etude des fonctions analytiques sur une surface de Riemann.“ —

Es muss endlich die Frage beantwortet werden, in wie weit das in Rede stehende Lehrbuch ein geeignetes Mittel vorstellt, den Zugang zum augenblicklichen Stande der deutschen Forschung zu gewinnen. Wir würden in dieser Hinsicht das vorliegende Lehrbuch mit Freude begrüssen können, wären nicht zwei der principiellsten Gesichtspunkte vernachlässigt bez. gänzlich in den Hintergrund gestellt, die wir allerdings in keiner Weise entbehren können.

Einmal ist es die Vorstellung der Gleichberechtigung aller zu einer Riemann'schen Fläche gehörenden algebraischen Functionen, welche hier nicht hinreichend entwickelt scheint. Es ist wohl keine Frage, dass diese Auffassung tiefere theoretische Einsicht vermittelt; und vor Allem gewinnt man durch Uebergang von der einen Riemann'schen Fläche zu einer anderen auf sie conform bezogenen eine zugkräftige Methode zur Erledigung zahlreicher Probleme, zumal die rationale Transformation betreffend.

Fürs Zweite müssen die Existenztheoreme der Functionen auf einer nach Willkür gewählten Riemann'schen Fläche, welche im vorliegenden Lehrbuche nur ganz beiläufig erwähnt werden, für besonders wichtig angesehen werden. Diese Theoreme Riemann's sind bekanntlich durch die Methoden von Schwarz und Neumann auf eine ausreichende und sichere Basis gestellt. Das Studium dieser Gegenstände ist namentlich auch zum Verständniss der in neuerer Zeit sich entwickelnden Fortsetzung der Riemann'schen Functionentheorie unentbehrlich.

Robert Fricke.

Charles Henry. **Abrégé de la théorie des fonctions elliptiques.** Paris 1895. 126 Seiten.

Dieses Buch ist (nach der eigenen Angabe des Verfassers) im Wesentlichen ein Auszug aus der letzten Ausgabe von C. Jordan's Cours d'analyse; der Verfasser stellte diesen Auszug zunächst für eigene Studienzwecke her, um ihn sodann zum allgemeinen Gebrauch für Studirende zu publiciren. Ein solches Unternehmen hat immer sein Missliches. Einmal fehlen ja bei dem Herausgreifen eines einzelnen Kapitels aus einem grösseren Werke alle die Prämissen, welche in den vorangegangenen Theilen entwickelt wurden. Vor Allem lassen sich bei nur erst kürzerer Beschäftigung mit einem Gegenstande die Spuren der Unreife nur schwer überwinden, welche bei längerem und öfter wiederholten Studium von selbst verschwunden sein würden.

Ueber den allgemeinen Standpunkt des Buches mögen die folgenden Angaben orientiren. Die Grundlagen der Theorie der Functionen einer complexen Variabelen gelten als bekannt. Es handelt sich hierbei um die früher in Frankreich vorherrschende Fassung dieser Theorie, welche im Wesentlichen auf Cauchy und Puiseux zurückgeht; die Denkweisen Riemann's sind dem vorliegenden Buche fremd. Die Theorie der elliptischen Functionen wird in der Weise entwickelt, dass zunächst die Weierstrass'sche Fassung voransteht, jedoch unter allzu starker Vernachlässigung des algebraischen Fundamentes und unter einseitiger Bevorzugung der Function $p(u)$.

Die Darstellung ist hier im Einzelnen vielfach unvollständig und ungleichmässig, wie durch einige Einzelangaben zu belegen ist. Als grundlegende Definition der elliptischen Functionen (S. 9) wird gegeben „toute fonction analytique uniforme doublement périodique, n'ayant pas d'autres singularités que des pôles." Der wesentlich singuläre Punkt ist also hier nicht mit in die Definition hineingenommen. — Beim Beweise, dass es keine eindeutige dreifach periodische Function einer Veränderlichen giebt, ist der arithmetische Theil erschöpfend, der functionentheoretische aber zu kurz behandelt. — Der Versuch, bereits hier im Anfang die Transformation erster und höherer Ordnung zu begründen, darf als misslungen angesehen werden. Die Begründung der Transformation höherer Ordnung lässt sich übrigens weit durchsichtiger gestalten; der vorläufige Gebrauch der p-Function an dieser Stelle kann nicht recht verständlich sein. — Als eine besonders auszeichnende Eigenschaft der p-Function gegenüber den Functionen Abel's und Jacobi's wird weiterhin die bezeichnet, dass p bei linearen Transformationen der Perioden invariant sei, was von jenen Functionen nicht gelte. In dieser Gestalt muss der Satz nothwendig zu Vorstellungen führen, welche sich mit dem Verhalten der Jacobi'schen Functionen bei linearer Transformation nicht decken. — Im Theorem 8 S. 25 ist Ausdrucksweise und Beweisverfahren unzulänglich. — Bei den Potenzentwicklungen von ζ und σ hätten wohl auch die Ausdrücke der Coefficienten in g_2 und g_3 gegeben werden können. — Dass S. 48 u. fg. das über die Curve C erstreckte Integral stets verschwindet, ist irrthümlich.

Bemerkungen dieser Art würden wir leicht noch weiter häufen können.

Betreffs der Vertheilung des behandelten Stoffes mögen folgende Angaben genügen. Der erste Theil des Buches bringt allgemeine Betrachtungen über Perioden und Transformation, sowie functionentheoretische Ansätze. Im zweiten Theile sind die Functionen p, ζ, σ behandelt und einige Andeutungen über Addition, Multiplication und Division gemacht. Im dritten Theile folgen die Functionen $su\,(u)$, $cu\,(u)$, $du\,(u)$ und im vierten die ϑ-Functionen. Den Vorwurf, mannigfache und wichtige Entwickelungen ausgelassen zu haben, kann der Verfasser durch die Bemerkung ablehnen, nur einen Auszug haben liefern zu wollen. Ob freilich dieser Umstand zur Empfehlung des Buches dienen kann, ist eine andere Frage.

Robert Fricke.

Diophanti Alexandrini Opera omnia cum graecis commentariis edidit et latine interpretatus est Paulus Tannery. Volumen I. Diophanti quae exstant omnia continens. Lipsiae 1893. B. G. Teubner. IX, 481 pag. Volumen II continens pseudoepigrapha, testimonia veterum, Pachymerae paraphrasin, Planudis commentarium, scholia vetera, omnia fere adhuc inedita, cum prolegomenis et indicibus. Lipsiae 1895. B. G. Teubner. XLVII, 298 pag.

Eine neue Diophantausgabe gehörte längst zu den berechtigten Wünschen, und die Teubner'sche Bibliothek griechischer und römischer Schriftsteller war die Sammlung, innerhalb deren dem Wunsche Befriedigung werden musste. Herr Paul Tannery hat sich auf Grundlage der ältesten vorhandenen Handschrift, eines Madrider Codex aus dem XIII. Jahrhundert, und unter wesentlicher Mitbenutzung eines dem XV. Jahrhundert entstammenden Codex der Marciana in Venedig, desselben Codex, welchen Regiomontan 1464 in Venedig sah, der Herausgabe unterzogen. Der I. Band von 1893 brachte den griechischen Text mit gegenüberstehender lateinischer Uebersetzung, mithin die Hauptsache für solche Leser, welche kennen zu lernen beabsichtigten, was von Diophant sich erhalten hat. Der II. Band von 1895 ist sehr vermischten Inhaltes, wie aus dem ausführlichen Titel entnommen werden kann. Ohne dem I. Bande an Wichtigkeit gleich zu kommen, bietet er dennoch dem Berichterstatter mehr des Erwähnenswerthen, weil in ihm vielfach Neues veröffentlicht ist, und weil die drei Druckbogen füllende Einleitung des Herausgebers eine ganze Anzahl geschichtlich bedeutsamer Fragen theils anregt, theils zur Erledigung bringt. Wann hat Diophant gelebt? Diese für die Beurtheilung der Leistungen eines Schriftstellers unerlässliche Vorfrage beantwortet Herr Tannery dahin, Diophant habe etwa das Jahr 250 als Mittelpunkt seines Lebens gehabt. Aehnlich hat sich Herr Tannery schon im XXXVII. Bande dieser Zeitschrift, Histor.-literar. Abthlg. S. 44—45 ausgesprochen, und wir wollen die theilweise neuen Gründe kennen lernen, auf welche er seine Meinung stützt. Nach wie vor ist Theon von Alexandria der älteste Schriftsteller, der Diophant nennt, Hypsikles der späteste, der von Diophant genannt wird. Mag Hypatia, Theons Tochter, einen Commentar zu Diophant geschrieben haben oder nicht, so wirft dieser Umstand kein neues Licht auf unsere Frage. Beiläufig vertritt Herr Tannery gegen Nesselmann die Ansicht, Suidas habe einen Commentar der Hypatia zu Diophant erwähnt, und Spuren davon seien noch nachzuweisen. Ein Schriftsteller, auf den man sich mitunter beruft, um für Diophant's Leben ein weiteres Zeugniss zu besitzen, ist Metrodorus als Verfasser des bekannten Epigrammes, in welchem Diophant's Verheirathung mit 33 Jahren, sein Tod mit 84 Jahren mitgetheilt ist. Lebte dieser Metrodorus zur Zeit als Konstantin der Grosse regierte (306—337), so ist das etwa 30 Jahre vor Theon, und der *terminus ad quem* ist nun eben so viel heraufgerückt. Jacobs vertrat diese Meinung in seiner Ausgabe der Anthologie. Herr Tannery dagegen schreibt jenes Epigramm einem anderen Metrodorus zu, einem Grammatiker, der nach Fabricius in der Regierungszeit der Kaiser Anastasius und Justinus (491—527) lebte, und dann ist wieder Nichts gewonnen. Nun hat aber Herr Tannery einen Brief des Psellus aufgefunden, der gleichlautend in Handschriften in Madrid und in Florenz vorhanden ist, von welchem er den ganzen Wortlaut in den II. Band des Diophant (S. 37—42) aufgenommen hat, während er die Hauptstelle schon in dem obenerwähnten

XXXVII. Bande dieser Zeitschrift zum Abdruck brachte. Darnach hat Anatolius den Potenzen des Unbekannten andere Namen gegeben als Diophant. Hieraus schliesst Herr Tannery, wie uns scheint mit Recht, in der Meinung des Psellus sei Anatolius jünger als Diophant gewesen. Er geht aber weiter, Psellus habe seine Kenntniss zweifellos einem alten Commentare zu Diophant entnommen, und das werde wohl der Commentar der Hypatia gewesen sein, Schlüsse, die uns möglich, aber nicht zweifellos erscheinen. Hat Herr Tannery Recht, und hat er auch darin Recht, es habe nur einen Anatolius gegeben (La géométrie grecque S. 42 Note 3), der um 270 lebte, so ist die Datirung Diophants einigermassen sicher gestellt. Wir haben gegen Letztere weniger einzuwenden als gegen die Einheit des Anatolius. Der Bischof von Laodicea sollte die heidnisch-mystischen Dinge geschrieben haben, welche auf den Lehrer des Jamblichus zurückgeführt werden? Das will uns nicht recht in den Kopf. Eine andere Frage von grosser Wichtigkeit ist die nach den Diophantischen Zeichen für die Unbekannte und für die Subtraction. Letzteres glaubt Herr Tannery als *sanpi* deuten zu sollen, während Ersteres ein umgekehrtes *digamma* sei, und andere mathematische Handschriften als Compendium für ἀριθμός ein *Koppa* benutzen. Mit anderen Worten, die griechischen Logistiker sollen, vielleicht lange Zeit vor Diophant ausser Uebung gekommene Buchstaben als algebraische Zeichen benutzt haben. Wie verhält es sich mit den 13 Büchern von Diophant's Arithmetik? Herr Tannery glaubt, allen anderen Geschichtsschreibern der Mathematik entgegen, an das Verlorensein von sieben letzten Büchern, deren Inhalt man, weil sie eben verloren sind, nicht bestimmen könne; vielleicht habe in ihnen Alles gestanden, was bei Indern, bei Arabern, bei Leonardo von Pisa sich vorfinde und in den erhaltenen sechs Büchern Diophant's fehle. An eine grosse Lücke zwischen dem ersten und zweiten Buche, in welcher gut drei Bücher Platz finden, welche den drei Formen unreiner quadratischer Gleichungen gewidmet gewesen sein können, mit welchen Diophant sich beschäftigt haben muss, glaubt Herr Tannery dagegen nicht. Jene quadratischen Gleichungen, meint er, seien in Porismen zur 27. und 30. Aufgabe des ersten Buches abgehandelt worden. Und aus diesen kurzen Porismen, entgegnen wir, sollen bei Arabern und deren Nachfolger drei ganze Bücher geworden sein? Für so selbständig halten wir die Araber nicht. Schade, dass Abû'l Wafâ's Commentar zu Diophant unwiederbringlich verloren scheint, er hätte vielleicht Licht in das Dunkel gebracht. Wir haben diese Behauptungen, denen wir nicht einfach zuzustimmen vermögen, hervorgehoben, um die ganze Bedeutsamkeit der Tannery'schen Einleitung erkennen zu lassen. Unter den sonstigen Bestandtheilen des II. Bandes nennen wir jene Rechnungsanweisung für Sexagesimalzahlen, welche durch Herrn C. Henry einst mangelhaft herausgegeben war. Wir nennen heronische Bruchstücke, welche in der Handschrift, der sie entstammen, sicherlich irrig, wie auch Herr Tannery erklärt, unter dem Namen Diophant's erscheinen. Wir nennen einen Commentar zu Diophant von Georg Pachymeres (1242 — nach 1308), dem grössten byzantinischen Polyhistor, wie er in Krumbacher's Byzantinischer Literaturgeschichte heisst, der aber jenes ehrende Beiwort ganz gewiss nicht um dieses damals noch nicht herausgegebenen Commentares willen erhalten würde. In den heronischen Bruchstücken sind S. 16 lin. 18 — S. 17 lin. 2 zwei in Zusammenhang stehende, uns aber unverständliche Aufgaben mitgetheilt. Herr Tannery verweist in einer Anmerkung auf Aehnliches in der Heronausgabe von Hultsch, Geometria 101, 9. Sollte das nicht ein Druckfehler für 101, 11 sein? An letzterem Orte finden sich wenigstens die in dem neuen Bruchstücke vorkommenden Zahlen wieder. Cantor.

Musici Scriptores Graeci. Aristoteles. Euclides. Nicomachus. Bacchius. Gaudentius. Alypius et Melodiarum veterum quidquid exstat. Recognovit, prooemiis et indice instruxit Carolus Janus. (Bibliotheca scriptorum graecorum et romanorum Teubneriana.) Lipsiae MDCCCXCV in aedibus B. G. Teubneri. XCIII, 503 pag. Annexae sunt tabulae.

Jede Kunst, vielleicht am meisten die Musik, hat eine Wissenschaft zur Begleiterin. Es wird wohl geschichtlich so gegangen sein, dass zuerst die Kunst ihre wankenden Schritte erfahrungsmässig regeln lernte, dass dann die Wissenschaft sich zu ihr gesellte und in Gesetzesform kleidete, auch schärfer begründete, was bis dahin nur Uebung war. Ob dann weiterhin dem Praktiker, ob dem Theoretiker die eigentliche Führung zufiel, das wird bei verschiedenen Völkern und in verschiedenen Zeiten sich selbst so verschieden verhalten haben, dass eine einheitliche Beantwortung der Frage zur Unmöglichkeit wird. Unter den griechischen Schriftstellern über Musik, welche wir kennen, waren Männer strenger Wissenschaft, ihre Schriften waren Theile der Mathematik, und so kommt es, dass eine Sammlung griechischer Musikschriftsteller an diesem Orte besprochen werden darf, von uns besprochen werden darf, wiewohl wir über keine der beiden Eigenschaften verfügen, durch welche H. Carl von Jan so recht eigentlich zum Herausgeber der Sammlung bestimmt war, philologisches Wissen und musikalisches Können. In dem Bande der *Musici scriptores Graeci* sind keineswegs alle griechischen Schriftsteller vereinigt, welche man hier suchen könnte. Wenn Westphal 1865 die Plutarch zugeschriebene Schrift, Marquard 1868 den Aristoxenus, Hiller 1878 den Theon von Smyrna, C. von Jan selbst 1882 den Aristides herausgab, wenn Ptolemaeus, Porphyrius in guten alten Ausgaben vorhanden sind, so bot dieses eine Veranlassung, die betreffenden Schriften wegzulassen, ohne dass dadurch der Band aufhörte, eine erhebliche Stärke zu besitzen. Manches haben zu diesem Umfange die Einleitungen beigetragen, welche der Herausgeber den Einzelschriften vorausschickte, und in welchen die Fragen nach den einzelnen Verfassern sowie nach der Herkunft ihrer Lehren nicht weniger genau als die der Textgeschichte erörtert sind, wenn auch die Letztere schon der umfassenden Einleitung zum ganzen Bande als Inhalt dient. Der Herausgeber hat an die Spitze gestellt, was an Stellen über Musik sich zerstreut bei Aristoteles findet. Dann folgen die sogenannten musikalischen Probleme des Aristoteles, die aus verschiedenen Quellen zusammengeflossen sein mögen; der Herausgeber vermuthet in Theophrant, in Heraklides Persönlichkeiten, welche bei der Formgebung der Aufgaben mitgewirkt haben. Der Mathematiker wird mit Vorliebe bei den 20 Sätzen des Euklid verweilen, welche die Form von dessen Elementen so genau nachbilden, dass man sich nur wundert, das *Was zu beweisen war* oder *Was zu machen war* zu vermissen. In der Einleitung zur euklidischen Schrift ist ein sinnentstellender Druckfehler leicht zu verbessern. Seite 125 Note 2 muss es *dodecaedrum* statt *icosaedrum* heissen. Die früher für euklidisch gehaltene Einführung in die Harmonielehre εἰσαγωγὴ ἁρμονική ist aufgenommen. Als Verfasser ist Kleonides angegeben, und in der That ist die Wahrscheinlichkeit, dass damit das Richtige getroffen wurde, sehr gross. In einer Handschriftenfamilie findet sich dieser Verfassername, und als Bestätigung dienen Randglossen zu einer Handschrift des Aristoxenus, in welchen für Dinge, die genau in gleicher Reihenfolge in der Einführung in die Harmonielehre erscheinen, auf Kleonides verwiesen ist. Das Handbüchelchen des Nikomachus giebt Gelegenheit zu einer Einleitung (S. 211—234), welche das Wissen von diesem trefflichen Arithmetiker in manchen Theilen ergänzt. Der Herausgeber spricht dabei (Seite 212 und 232) eine Ansicht aus, welche auch Referent in der ersten Ausgabe des I. Bandes seiner Geschichte der Mathematik kundgab, in der zweiten Ausgabe aber strich, weil ein hochachtbarer Philologe brieflich die Unmöglichkeit behauptete, die Ansicht nämlich, die von Ast herausgegebenen Θεολογούμενα ἀριθμητικά könnten von Jamblichus herrühren. Die noch weiter aufgenommenen Schriften eines Bacchius, Gaudentius, Alypius gehören späteren Zeiten an, die bei Kaiser Konstantin beginnen. Mit grossem Interesse wird man am Schlusse des Bandes die altgriechischen Melodien, welche in einem Papyrus und bei Ausgrabungen in Delphi aufgefunden sind, in heutiger Notenschrift abgedruckt finden. CANTOR.

Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss. Eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie in Gemeinschaft mit FRIEDRICH ENGEL herausgegeben von PAUL STÄCKEL.

Mit 145 Figuren im Text und der Nachbildung eines Briefes von Gauss. Leipzig 1895, bei B. G. Teubner. X, 325 Seiten.

„Dieses Buch, so sagen die Herausgeber in dem Vorwort, soll nicht eine Geschichte der Parallelentheorie sein... Nur einen Beitrag dazu wollen wir geben, indem wir die älteren Untersuchungen über die Parallelentheorie daraufhin betrachten, in wie weit sie für die nichteuklidische Geometrie von Bedeutung sind.“ Wir können mit gutem Gewissen sagen, dass diese in sehr bescheidenen Grenzen sich haltende Ankündigung mehr als nur erfüllt wird, und dass wir überrascht waren, wie viel Neues und Wichtiges Herr Stäckel aufzufinden wusste. Wir sagen Herrn Stäckel, da ihm augenscheinlich der Gedanke des Buches angehört, ihm aber auch der Löwenantheil an der Ausarbeitung, und wir sind überzeugt im Sinne des Mitarbeiters selbst zu reden, wenn wir der grösseren Leistung auch den Hauptantheil an dem verdienten Lobe zuweisen. Ein Bericht über den Inhalt ist nur in zwei Formen möglich, entweder sehr ausführlich oder sehr kurz, und man wird es dem Herausgeber dieser Abtheilung der Zeitschrift, in dessen Redactionsmappe zahlreiche Beiträge des Abdruckes harren, um so weniger verübeln, wenn er die kürzere Form wählt, als er für die ganze Schrift recht viele Leser wünscht und erhofft. Es sei uns daher gestattet, uns mit den wenigen Angaben zu begnügen, dass in dem Bändchen folgende Arbeiten zum Abdrucke gelangten: 1. Die 32 ersten Sätze des I. Buches der euklidischen Elemente. 2. Der Parallelenbeweis von Wallis. 3. Die geraume Zeit in Vergessenheit gerathene Schrift von Saccheri, welche erstmalig die Folgen erörtert, welche sich daran knüpfen würden, wenn die fünfte euklidische Forderung nicht erfüllt würde, allerdings ohne das Eintreffen dieser Voraussetzung für möglich zu halten. 4. Lambert's Theorie der Parallellinien von 1766 (veröffentlicht 1786), die darin über Saccheri hinausgeht, dass sie auf der Kugel und auf der imaginären Kugel zwei Voraussetzungen erfüllt sieht, welche auf der Ebene unmöglich sind. 5. Die geringfügigen Bruckstücke, welche Gauss über den Gegenstand zu Papier brachte. 6. Die Theorie der Parallellinien von Taurinus, deren Druck 1825 vollzogen wurde, die aber doch von Herrn Stäckel erst, man darf wohl sagen, entdeckt worden ist, ein Vorläufer der absoluten Geometrie im ganzen Sinne des Wortes. Zwischen diesen Veröffentlichungen zieht sich eine fortwährende Erzählung durch das ganze Bändchen, in welcher der Leser auf die Bedeutung der einzelnen Stücke hingewiesen wird und die eigentliche Geschichte der nichteuklidischen Geometrie kennen lernt.

Cantor.

Bibliographie

vom 1. Februar bis 31. Mai 1896.

Periodische Schriften.

Abhandlungen der mathem.-physik. Klasse der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 40. Bd. 1894 und 1895. Göttingen, Dietrich. 18 Mk. 60 Pf.

Publicationen des astrophysik. Observatoriums in Potsdam. Nr. 34 (XI. Bd., 1. Stück). Beobachtungen des Mars, von O. LOHSE. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Sitzungsanzeiger der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathem.-naturw. Klasse. Jahrg. 1896. Nr. 1 und 2. Wien, Gerold. compl. 3 Mk.

Astronomisches Jahrbuch für 1898. Herausgegeben vom Recheninstitute der königl. Sternwarte zu Berlin unter Verantwortung von P. LEHMANN. Berlin, Dümmler. 12 Mk.

Die veränderlichen Tafeln des astron. u. chronolog. Theils der königl. preuss. Normalkalenders für 1897. Herausgegeben von FOERSTER, LEHMANN und BLENCK. Berlin, statist. Bureau. 5 Mk.

Mittheilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg. 3. Bd. 6. Heft. Leipzig, B. G. Teubner. 80 Pf.

Deutsches meteorologisches Jahrbuch, XVII. Jahrg. Beobachtungen von 1894. Herausgegeben von d. deutschen Seewarte. Hamburg, Friedrichsen & Co. 13 Mk.

Jahrbuch der Astronomie und Geophysik. Herausgegeben von J. KLEIN. 6. Jahrgang. 1895. Leipzig, Mayer. 7 Mk.

Gezeitentafeln für das Jahr 1897. Herausgegeben vom Reichsmarineamt, redigirt vom Observatorium in Wilhemshaven. (Nordsee, engl. Canal und irische See.) Berlin, Mittler. 1 Mk. 50 Pf.

Aus dem Archiv der deutschen Seewarte. Herausgegeben von der Direction. Jahrg. XVIII, 1895. Hamburg, Friedrichsen. 15 Mk.

Astronomische Arbeiten des kaiserl. königl. Gradmessungsbureau. 7. Bd. Längenbestimmungen. Herausgegeben von E. WEISS und R. SCHRAM. Leipzig, Freytag in Comm. 16 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. 29. Jahrg. Supplement. Generalregister von Bd. 1—25. Leipzig, Engelmann. 5 Mk.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. 25. Bd. Herausgegeben von LAMPE. 1. Heft. Berlin, G. Reimer. 21 Mk.

Fortschritte der Physik im Jahre 1894, dargestellt von der physikalischen Gesellschaft in Berlin. 50. Jahrgang. 2. Abtheilung. Physik des Aethers; von BERNSTEIN. Braunschweig, Vieweg. 30 Mk.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaft. Herausgegeben von B. Schwalbe und F. Pietzker. 2. Jahrg. 1896. Nr. 1. Braunschweig, Salle. compl. 3 Mk.

Annalen des russ. physikal. Centralobservatoriums. Jahrg. 1894. 2 Theile. Herausgegeben von H. Wild. Petersburg und Leipzig, Voss. 25 Mk.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Königsberger, L., Helmholtz's Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik und Mechanik. Leipzig, B. G. Teubner. 2 Mk. 40 Pf.

Tischer, E., Die Begründung der Infinitesimalrechnung durch Newton und Leibniz (Programm). Leipzig, Hinrichs. 1 Mk.

Reine Mathematik.

Grassmann's, H., Gesammelte Werke, herausgegeben von F. Engel. 1 Bd. 2. Theil. (Die Ausdehnungslehre von 1862). Leipzig, B. G. Teubner. 16 Mk.

Lie, S., Geometrie der Berührungstransformationen. Dargestellt von L. und G. Scheffers. 1. Bd. Ebendaselbst. 24 Mk.

Stolz, O., Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. 2. Theil. (Schluss.) Ebendaselbst. 8 Mk.

Minkowski, H., Geometrie der Zahlen. 1. Lief. Ebendaselbst. 8 Mk.

Blasendorff, M., Die Theilung d. Kreisbogens (Progr.). Berlin, Gärtner. 1 Mk.

Bochow, K., Einheitliche Theorie d. regelm. Vielecke. Magdeburg, Fock. 1 Mk.

Hermes, O., Verzeichniss der einfachsten Vielflache (Programm). Berlin, Gärtner. 1 Mk.

Traub, K., Der verjüngte Magister matheseos. Ein Beitrag zur Sphärik und absoluten Geometrie. Lahr, Schauenburg. 50 Pf.

Euler, L., Sphärische Trigonometrie 1753 und 1779, übersetzt von E. Hammer. (Aus Ostwald's Classiker der exacten Wissenschaften.) Leipzig, Engelmann. 1 Mk.

Pflieger, W., Elemente der Arithmetik für die mittleren und oberen Klassen höherer Lehranstalten. Strassburg, Bull. 1 Mk. 80 Pf.

Angewandte Mathematik.

Göller, A., Lehrbuch der Schattenconstruction und Beleuchtungskunde. Stuttgart, Neff. 12 Mk.

Goldscheider, F., Ueber die Gauss'sche Osterformel. 1. Theil (Programm). Berlin, Gärtner. 1 Mk.

Jordan, W., Barometrische Höhentafeln. Hannover, Helwing. 2 Mk.

Nivellements-Ergebnisse der trigonometrischen Abtheilung der königl. preuss. Landesaufnahme. 1. und 2. Heft. Berlin, Mittler. 2 Mk.

Harzer, P., Geographische Ortsbestimmungen ohne astronomische Instrumente. Berlin, Dümmler. 1 Mk. 20 Pf.

Hollender, J., Neue graphische Methode der Zusammensetzung von Kräften zur Bestimmung von Inhalten, Schwerpunkten, Momenten etc. ebener Gebilde. Leipzig, B. G. Teubner. 3 Mk.

Seidemann, C., Ein mechanisches Doppelproblem (mittelst ellipt. Functionen gelöst). Halle, Kaemmerer & Co. 3 Mk.

Keck, W., Vorträge über Mechanik als Grundlage für Bau- und Maschinenwesen. 1. Theil. Mechanik starrer Körper. Hannover, Helwing. 10 Mk.

Hettwer, O., Die Bewegung eines schweren Punktes auf der krummen Linie $r^m = a^m \cos m\vartheta$ (Programm). Berlin, Gärtner. 1 Mk.

Bauschinger, J., Untersuchungen über die astronomische Refraction und Bestimmung der Polhöhe von München etc. München, Franz. 12 Mk.

Riem, J., Ueber die Bahn des grossen Kometen 1881, III (Leop.-Carol. Akad.). Leipzig, Engelmann. 15 Mk.

Handwörterbuch d. Astronomie. 2. u. 3. Lief. Breslau, Trewendt. 7 Mk. 20 Pf.

Physik und Meteorologie.

Johannesson, P., Das Beharrungsgesetz (Progr.). Berlin, Gärtner. 1 Mk.

Liebisch, Th., Grundriss der physikalischen Krystallographie. Leipzig, Veit & Co. 13 Mk. 40 Pf.

Mewes, R., Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwerkraftstrahlen. Berlin, Fischer's techn. Verl. 2 Mk.

Koppe, C., Photogrammetrie und internationale Wolkenmessung. Braunschweig, Vieweg. 7 Mk.

Dunker, E., Die Wärme im Innern der Erde und ihre möglichst fehlerfreie Bestimmung (herausgegeben von R. Brauns). Stuttgart, Schweizerbart. 5 Mk.

Zepf, K., Einführung in die Grundlehren vom elektrischen Strom mit Hilfe leicht aufzubauender Apparate. Freiburg i. Br., Ragoczy. 3 Mk.

Thompson, S., Mehrphasige elektrische Ströme und Wechselstrommotoren. Uebersetzt von K. Strecker. Halle, Knapp. 12 Mk.

Glazebrook, T., Grundriss der Wärme für Studirende. Deutsch von O. Schönrock. Berlin, Calvary. 3 Mk. 60 Pf.

Chacau, J., Ein Beitrag zur Lichttheorie, zugleich ein Vorschlag zur Ergründung der Röntgen-Strahlen. Zittau, Pahl. 40 Pf.

Abbildungen von Röntgen's X-Strahlen, in Lichtdruck ausgeführt. 10 Blatt. Leipzig, Renger. 5 Mk.

Kaiser, W., Die Technik des modernen Mikroskops. Wien, Perles. 4 Mk.

Riecke, E., Lehrbuch der Experimentalphysik. 1. Bd. (Mechanik, Akustik, Optik.) Berlin, Veit. 8 Mk.

Handbuch der Physik. 28. u. 29. Lief. Breslau, Trewendt. 7 Mk. 20 Pf.

Winkelmann, A., Handbuch der Physik. 29. u. 30. Lief. (Schluss). Breslau, Trewendt. à 3 Mk. 60 Pf.

Voigt, W., Compendium der theoretischen Physik. 2. Bd. Leipzig, Veit & Co. 18 Mk.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1895.

Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.

A.

Abbildung.

1. Ueber die conforme Abbildung der Lemniscatenoberfläche auf das Innere eines Kreises. Fr. Schilling. Zeitschr. Math. Phys. XL, 370.
2. Conforme Abbildungen, welche von der ξ-Function vermittelt werden. J. C. Kluyver. Zeitschr. Math. Phys. XL, 129.

Absolute Geometrie.

3. Sur les premiers principes de la metagéométrie et de la géométrie Riemannienne. P. Mansion. Mathesis Sér. 2, V, 63.
4. Essai d'exposition élémentaire des principes fondamentaux de la géométrie non Euclidienne de Riemann. P. Mansion. Mathesis Sér. 2, V, Supplément.
5. Sur la Géométrie non Euclidienne. Ch. J. de la Vallée Poussin; De Tilly. P. Mansion. Mathesis Sér. 2, V, Supplément.

Analytische Geometrie der Ebene.

6. Theorie der eindeutigen periodischen Transformationen in der Ebene. S. Kantor. Crelle CXIV, 50.
7. Sur un cas remarquable des transformations centrales. G. de Longchamps. Mathesis Sér. 2, V, 186 [vergl. Bd. XXXVI, Nr. 76].
8. Sur une transformation centrale. L. Meurice. Mathesis Sér. 2, V, 194.
9. Ueber eine Behandlung einer Curve vierter Ordnung und der allgemeinen Curven dritter Ordnung mittelst Kegelschnittcoordinaten. H. Oppenheimer. Grun. Archiv 2. R. XIII, 84.
10. Ueber eine allgemeine Eigenschaft der Curven der reciproken Ordinaten. W. Rulf. Grun. Archiv 2. R. XIII, 214.
11. Bemerkungen zu den aus einer Curve abgeleiteten Curven. W. Rulf. Grun. Archiv 2. R. XIII, 324.
12. Ueber successive Fusspunktspolygone. H. Schotten. Grun. Archiv 2. R. XIII, 65.
13. Sur deux paraboles semi-cubiques ayant même axe et même point de rebroussement. Retali. Mathesis Sér. 2, V, 98.
14. Sur deux cissoïdes ayant même point de rebroussement et leurs axes perpendiculaires. Déprez. Mathesis Sér. 2, V, 236. — Droz-Farny, Hacken, Cristescu, J. Jonesco, Vanderstegen ibid. 237. — H. Mandart ibid. 237.
15. Ellipse et courbe du 6. degré engendrées au moyen d'une circonférence et d'un de ses diamètres. H. Brocard. Mathesis Sér. 2, V, 47. — Barisien ibid. 48.
16. Neuer Satz über die Cykloïde. W. Rulf. Grun. Archiv 2 R. XIII, 92.
17. Sur deux courbes trèscompliquées construites au moyen d'une circonférence avec un diamètre fixe. Déprez. Mathesis Sér. 2, V, 170. — Poort ibid. 171.

Vergl. Ellipse. Hyperbel. Kegelschnitte. Parabel. Winkeltheilung. Wurzelausziehung.

Analytische Geometrie des Raumes.

18. Conditions pour qu'un système de trois axes soit trirectangle. F. Dauge. Mathesis Sér. 2, V, 250 [vergl. Bd. XL Nr. 18].
19. Bedingung, unter der vier von einem Punkte aus gesehene Punkte in einem Raume liegen. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. XIII, 100.
20. Bemerkungen über die Frenet-Serret'schen Formeln und die analytische Unterscheidung rechts und links gewundener Raumcurven. Ad. Kneser. Crelle CXIII, 89.

Vergl. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung.

Astronomie.

21. Sur le développement approché de la fonction perturbatrice dans le cas des inégalités d'ordre élévé. Maur. Hamy. Journ. Math. Sér. 4, X, 391.

B.

Bernoulli'sche Zahlen.

22. Sur les nombres de Bernoulli. Ch. Hermite. Mathesis Sér. 2, V, Supplément.

Bestimmte Integrale.

23. Berechnung bestimmter Integrale aus der Summendefinition. E. Netto. Zeitschr. Math. Phys. XL, 183.
24. Ueber Formelpaare der mechanischen Quadratur. Rud. Skutsch. Grun. Archiv 2. R. XIII, 78.
25. Ueber den zweiten Mittelwerthsatz. E. Netto. Zeitschr. Math. Phys. XL, 180.

C.

Cubatur.

26. Ueber den Flächen- und Rauminhalt der durch Bewegung von Curven und Flächen erzeugten Flächen- und Raumgrössen. Chr. Nehls. Grun. Archiv. 2. R. XIII, 225, 337.
27. Volume d'une surface engendrée par la développée de la section d'un ellipsoïde par un plan. Vladimirescu, Hacken, Absolonne. Mathesis Ser. 2, V, 20.

D.

Determinanten.

28. Ueber reguläre Determinanten und die aus ihnen abgeleiteten Systeme. K. Hensel. Crelle CXIV, 25.
29. Erweiterung des Laplace'schen Determinantenzerlegungssatzes. Eug. Netto. Crelle CXIV, 345.
30. Ein neuer Satz über die Determinanten einer Matrix. W. Ahrens. Zeitschr. Math. Phys. XL, 177.
31. Zur Theorie der Determinanten höheren Ranges. N. v. Szüts. Zeitschr. Math. Phys. XL, 113.

Differentialgleichungen.

32. Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude des intégrales réelles des équations différentielles ordinaire. E. Lindelöf. Journ. Math. Ser. 4, X, 117.
33. Zur Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung mit unbestimmten Coefficienten. G. Bohlmann. Crelle CXIII, 207.
34. Zur Briot-Bouquet'schen Theorie der Differentialgleichungen erster Ordnung. J. Horn. Crelle CXIII, 50.
35. Integrable Fälle der Differentialgleichung $(p_5 y + p_4)\frac{dy}{dx} + p_3 y^3 + p_2 y^2 + p_1 y + p_0 = 0$. Wold. Heymann. Crelle CXIII, 84.
36. Ueber die Gauss'sche und Bessel'sche Differentialgleichung und eine neue Integralform der letzteren. P. Schafheitlin. Crelle CXIV, 31.
37. Sur les invariants des équations différentielles linéaires. Mittag-Leffler. Crelle CXIV, 306.
38. Anwendung der Theorie der Differentialinvarianten auf die Untersuchung der algebraischen Integrirbarkeit der linearen homogenen Differentialgleichungen. G. Wallenberg. Crelle CXIII, 1.
39. Untersuchung der durch die eine homogene Relation $y_1{}^p - y_2 y_3 y_4 \ldots y_{p+1} = 0$ verbundenen Integrale einer homogenen linearen Differentialgleichung. G. Wallenberg. Crelle CXIV, 181.
40. Bemerkungen zur Theorie der Differentialgleichungen. Ludw. Schlesinger. Crelle CXIV, 143.
41. Ueber die Hamburger'schen Untergruppen, in die das zu einem singulären Punkte der Bestimmtheit einer homogenen linearen Differentialgleichung gehörige kanonische Fundamentalsystem zerfällt. Ludw. Schlesinger. Crelle CXIV, 159, 309.
42. Ueber die von Poincaré gegebene Erweiterung des Cauchy'schen Satzes von der Existenz der Integrale gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme. L. Königsberger. Crelle CXIII, 115.

43. Zu Bour's Methode der Integration eines Systemes simultaner partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. E. Schultz. Grun. Archiv 2. R. XIII, 316.
44. Zur Transformation eines Systems linearer partieller Differentialgleichungen. Ernst Schultz. Zeitschr. Math. Phys. XL, 302.
45. Ueber die partiellen Differentialgleichungen, denen die symmetrischen Functionen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung genügen. E. Netto. Zeitschr. Math. Phys. XL, 375 [vergl. Bd. XXXIX Nr. 22].
46. Ueber Transformationen partieller Differentialgleichungen. P. Stäckel. Crelle CXIV, 116.
47. Zur fünften Form der Integrabilitätsbedingungen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung. E. Schultz. Grun. Archiv 2. R. XIII, 311.

Vergl. Formen 77. Mechanik 188.

Dreiecksgeometrie.

48. Sur la transformation continue. E. Liénard. Mathesis. Sér. 2, V, 115.
49. Sur la droite réunissant l'orthocentre et le point de Lemoine d'un triangle. Anderson. Mathesis Sér. 2, V, 229. — Déprez ibid. 230.
50. Triangles doublement orthologiques. E. Lemoine. J. Neuberg. Mathesis Sér. 2, V, 198, 227.
51. Sur les centres isogones. H. Mandart. Mathesis Sér. 2, V, 153.
52. Sur 4 points situés sur une circonférence. E. Lemoine. Mathesis Sér. 2, V, 53. — Déprez ibid. 54.
53. Sur l'axe d'homologie du triangle fondamental et du triangle de Brocard. G. Tarry. Mathesis Sér. 2, V, 5.
54. Ellipse passant par six points d'un triangle. Droz-Farny. Mathesis Sér. 2, V, 258.
55. Sur quelques coniques du plan d'un triangle ABC. J. Neuberg. Mathesis Sér. 2, V, 60. — A. C. ibid. 117. — Droz-Farny ibid. 126.
56. Sur un article de M^r. Neuberg. Droz-Farny. Mathesis Sér. 2, V, 226.
57. Sur une conique contenant six points se rapportant à un triangle. Déprez. Mathesis Sér. 2, V, 21.
58. Conditions pour l'égalité des bissectrices. Soons. Mathesis Sér. 2, V, 261.
59. Théorèmes de géométrie élémentaire. B. Jonesco. Mathesis Sér. 2, V, 157.
60. Note sur le triangle. Juan y Duran Loriga. Mathesis Sér. 2, V, 85.
61. Construire un triangle avec diverses données de la géométrie récente du triangle. Déprez. Mathesis Sér. 2, V, 203.

E.

Ellipse.

62. Tangentes à l'ellipse tirées d'un point quelconque d'une diagonale du rectangle de ses axes. Hacken, Droz-Farny. Mathesis Sér. 2, V, 74. — E. Lemoine ibid. 75.
63. Sur une courbe décrite au moyen d'une ellipse. Vladimirescu. Mathesis Sér. 2, V, 72.
64. Sur une certaine enveloppe. Desaint. Mathesis Sér. 2, V, 8.
65. Resumé des propriétés concernant les triangles d'aire maximum inscrits dans l'ellipse. E. N. Barisien. Mathesis Sér. 2, V, 42. — Déprez ibid. 81. — Tzitzéica ibid. 83.
66. Sur deux ellipses ε, ε' dont ε' a pour sommets les points de rebroussement de la développée de ε. Bastin u. Droz-Farny. Mathesis Sér. 2, V, 22.
67. Quatre ellipses homothétiques passant par un point. Cl. Servais, Barisien, Droz-Farny, Déprez. Mathesis Sér. 2, V, 167.

Vergl. Dreiecksgeometrie 54. Kreis 174. Krümmung 183.

Elliptische Transcendenten.

68. Partialbruchzerlegungen in der Theorie der elliptischen Functionen. P. Günther. Crelle CXIII, 262.
69. Entwicklung von $\sin E_n(\varepsilon, \varphi)$ in eine nach Potenzen von $\sin \varphi_n$ fortschreitende Reihe. C. Benz. Grun. Archiv 2. R. XIII, 102.
70. Recursionsformel zur Rectification der Ellipse. C. Benz. Grun. Archiv 2. R. XIII, 104.
71. Reihe zur numerischen Berechnung eines Ellipsenbogens. C. Benz. Grun. Archiv 2. R. XIII, 105.

Vergl. Abbildung 2.

F.

Factorenfolge.

72. Développement du produit $(1+x\sqrt{-1})\,(1+x^2\sqrt{-1})\,(1+x^4\sqrt{-1})\,(1+x^8\sqrt{-1})\ldots$ E. Fauquembergue. Mathesis Sér. 2, V, 165.

Formen.

73. Ueber indefinite ternäre quadratische Formen. A. Meyer. Crelle CXIII, 186. CXIV, 233.
74. Ueber das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen. G. Frobenius. Crelle CXIV, 187.
75. Ueber die Classification der nicht homogenen quadratischen Formen und der Oberflächen zweiter Ordnung. K. Hensel. Crelle CXIII, 303.
76. Ueber die Elementartheiler componirter Systeme. K. Hensel. Crelle CXIV, 109.
77. Remarques sur une note de Mr Paul Vernier. L. Fuchs. Crelle CXIV, 231.

Vergl. Zahlentheorie 251.

Functionen.

78. Sur une quantité constante mais dépendante en apparence de x et y, lesquels vérifient la condition $x + y = m$. Cristescu u. J. Jonesco. Mathesis Sér. 2, V, 19.
79. Sur les limites de a^n et de $\frac{a^n}{n!}$. E. Cesaro. Mathesis Sér. 2, V, 155.

Vergl. Bernoulli'sche Zahlen. Bestimmte Integrale. Determinanten. Differentialgleichungen. Elliptische Transcendenten. Factorenfolge. Formen. Gleichungen. Hyperelliptische Transcendenten. Imaginäres. Invariantentheorie. Irrationalzahlen. Kettenbrüche. Reihen. Wurzelausziehung. Zahlentheorie.

G.

Geodäsie.

80. Eine Hypothese über das Gesetz der Dichtigkeit im Innern der Erde. Em. Oekinghaus. Grun. Archiv 2. R. XIII, 55.

Geometrie (descriptive).

81. Projective Lösung einer Aufgabe über die Schraubenlinie. W. Rulf. Grun. Archiv 2. R. XIII, 89.

Vergl. Perspective.

Geometrie (höhere).

82. Anwendung des Ameseder'schen Nullsystems. H. Oppenheimer. Grun. Archiv. 2. R. XIII, 268.
83. Die Steiner'schen Polygone. E. Czuber. Crelle CXIV, 312.
84. Sur quelques points de la théorie des courbes et des surfaces algèbriques. G. Humbert. Journ. Math. Sér. 4, X, 169. — P. Painlevé ibid. 203.
85. Sur les courbes algèbriques. Gob. Mathesis Sér. 2, V, 183.
86. Construction der Focalcurve aus sechs gegebenen Punkten. R. Müller. Zeitschr. Math. Phys. XL, 337.
87. Ueber ebene Curven dritter Ordnung. E. Kötter. Crelle CXIV, 170.
88. Constructionen der Curven dritter Ordnung aus neun gegebenen Punkten und Construction des neunten Punktes zu acht Grundpunkten eines Büschels von Curven dritter Ordnung. Chr. Beyel. Zeitschr. Math. Phys. XL, 99.
89. Ueber einige besondere Curven des dritten Grades und solche der dritten Klasse. B. Sporer. Zeitschr. Math. Phys. XL, 159.
90. Metrische Eigenschaften der cubischen Raumcurven. R. Sturm. Zeitschr. Math. Phys. XL, 1.
91. Metrische Strahlencongruenzen bei einer cubischen Raumcurve. H. Krüger. Zeitschr. Math. Phys. XL, 193.
92. Metrische Eigenschaften der cubischen Raumcurven. R. Mehmke. Zeitschr. Math. Phys. XL, 211.
93. Sur le mouvement de deux points sur deux courbes données assujetti à la loi que les droites menées de ces points M, M' à un point donné O divisent harmoniquement un angle donné AOB. L. Meurice. Mathesis Sér. 2, V, 143. — Cl. Servais ibid. 145.
94. Ueber den Dreiecksinhalt und sein duales Analogon. E. Busche. Crelle CXIV, 1.

95. Si deux triangles homologiques ont leurs côtés perpendiculaires, l'axe d'homologie divise en deux parties égales le distance des deux orthocentres. Sondat. Mathesis Sér. 2, V, 265.
96. Triangles orthohomologiques. J. Neuberg. Mathesis Sér. 2, V, 267.
97. Ueber doppelt-centrische Vierecke. Chr. Beyel. Zeitschr. Math. Phys. XL, 372.
Vergl. Absolute Geometrie. Dreiecksgeometrie. Ellipse. Kegelschnitte. Kinematik. Kreis. Krümmung. Mehrdimensionale Geometrie. Oberflächen. Singularitäten. Topologie.

Geschichte der Mathematik.

98. Der Unterricht in der Geschichte der Mathematik an der technischen Hochschule in München. A. v. Braunmühl. Biblioth. math. 1895, 89.
99. Mathématiques et mathématiciens. P. Mansion. Mathesis Sér. 2, V, 184.
100. Sur la publication de vocabulaires mathématiques. P. Mansion. Mathesis Sér. 2, V, 86.
101. Die Frauen in den exacten Wissenschaften. G. Valentin. Biblioth. math. 1895, 65.
102. Ptolemaeus de Analemmate. J. L. Heiberg. Zeitschr. Math. Phys. XL, Suppl. 1.
103. Historische Miscellen. A. Wittstein. Zeitschr. Math. Phys. XL. Hist.-liter. Abthlg. 1.
104. Aus Manuscripten und einer früheren Publication. A. Wittstein. Zeitschr. Math. Phys. XL. Hist.-liter. Abthlg. 121, 223.
105. Zur Geschichte des Sinus. Jul. Ruska. Zeitschr. Math. Phys. XL. Hist.-liter. Abthlg. 126.
106. Zur Geschichte des Jacobsstabes. H. Suter. Biblioth. math. 1895, 13.
107. Ueber einen Satz des Nasîr-Eddîn. M. Curtze. Biblioth. math. 1895, 33.
108. Die Mathematik bei den Juden. M. Steinschneider. Biblioth. math. 1895, 19, 43, 97 [vergl. Bd. XL Nr. 113].
109. Zur Geschichte der vollkommenen Zahlen. M. Curtze. Biblioth. math. 1895, 39.
110. Weiteres über das Josephsspiel. M. Curtze. Biblioth. math. 1895, 34.
111. Anonyme Abhandlung über das Quadratum geometricum. M. Curtze. Zeitschr. Math. Phys. XL. Hist.-liter. Abthlg. 161.
112. Ueber die Heimath von Johannes de Lineriis. M. Curtze. Biblioth. math 1895, 105.
113. Der Algorismus des Sacrobosco. M. Curtze. Biblioth. math. 1895, 36.
114. Zur Geschichte der Progressionen im Mittelalter. M. Curtze. Biblioth. math. 1895, 113.
115. Dominicus Parisiensis. M. Curtze. Biblioth. math. 1895, 107.
116. Die Handschrift Nr. 14836 der Königl. Hof- und Staatsbibliothek in München. M. Curtze. Zeitschr. Math. Phys. XL, Suppl. 75.
117. Mathematisch-Geschichtliches aus dem Cod. lat. Monacensis Nr. 14908. M. Curtze. Grun. Archiv 2. R. XIII, 388.
118. Arithmetische Scherzaufgaben aus dem XIV. Jahrh. M. Curtze. Biblioth. math. 1895, 77.
119. Alte Scherzaufgaben in deutscher Sprache. M. Curtze. Biblioth. math. 1895, 110.
120. Zur Geschichte der Mathematik im XIV. und XV. Jahrh. M. Curtze. Biblioth. math. 1895, 1.
121. Zur Zahlentheorie aus dem XV. Jahrh. M. Curtze. Biblioth. math. 1895, 37.
122. Ein Beitrag zur Geschichte der Algebra in Deutschland im XV. Jahrh. M. Curtze. Zeitschr. Math. Phys. XL, Suppl. 32.
123. Die abgekürzte Multiplication. M. Curtze. Zeitschr. Math. Phys. XL. Hist.-liter. Abthlg. 7.
124. Per Leon Battista Alberti. Gino Loria. Biblioth. math. 1895, 9.
125. Desargues a la geometria numerativa. Gino Loria. Biblioth. math. 1895, 51.
126. Sur l'Euclide de Henrion de 1676. P. Mansion. Mathesis Sér. 2, V, Supplément.
127. Citations de Laplace. J. Massau. Mathesis Sér. 2, V, 156, 157.
128. Nikol Iwanow. Lobatschefskij. A. Wassiljef (Friedr. Engel). Zeitschr. Math. Phys. XL Suppl. 205.
129. Autobiographie von Gotthold Eisenstein. F. Rudio. Zeitschr. Math. Phys. XL, Suppl. 142.
130. Briefe von G. Eisenstein an M. A. Stern. A. Hurwitz und F. Rudio. Zeitschr. Math. Phys. XL, Suppl. 169.

131. Wilhelm Stahl (8./IX. 1846—19./IV. 1894). Th. Reye. Crelle CXIV, 45.
132. Hermann von Helmholtz † 8./IX. 1894. L. Fuchs. Crelle CXIV, 353.
133. Arthur Cayley (16./VIII. 1821—26./I. 1895). P. Mansion. Mathesis Sér. 2, V, 84.
134. Pour le 80. anniversaire de Mr Weierstrass. Mathesis Sér. 2, V, 273.

Gleichungen.

135. Ueber die Zerlegung ganzer, ganzzahliger Functionen in irreductible Factoren. M. Mandl. Crelle CXIII, 252.
136. Ueber Transformation und numerische Lösung der cubischen Gleichung. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. XIII, 95.
137. Réalité des racines de l'équation

$$\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}+\frac{1}{x+c}=\frac{3}{x}.$$

E. Barbette etc. Mathesis Sér. 2, V, 277. — Poort ibid. 278. — Mandart ibid. 278.
138. Sur l'équation bicarrée. L. Hermite. Mathesis Sér. 2, V, 11.
139. Theorie der An- und Umläufe und Auflösung der Gleichungen vierten, fünften und sechsten Grades mittelst goniometrischer und hyperbolischer Functionen. Wold. Heymann. Crelle CXIII, 267.
140. On the Sextic resolvent equations of Jacobi and Kronecker. A. Cayley. Crelle CXIII, 42.
141. Problème d'arithmétique. J. N. Noel. Mathesis Sér. 2, V, 140.
142. Kurze Ableitung der Bedingungen, dass zwei algebraische Gleichungen mehrere Wurzeln gemein haben. J. Lüroth. Zeitschr. Math. Phys. XL, 247.
143. Ueber den Grad der Eliminations-Resultante eines Gleichungssystems. K. Th. Vahlen. Crelle CIXIII, 348.
144. Zwei algebraische Aufgaben mit Lösungen. Amthor. Grun. Archiv 2. R. XIII, 407, 423. — C. Davids ebenda 416, 430.
145. Élimination de trois quantités entre trois équations du 3. degré et une équation du 1. degré Fauquembergue. Mathesis Sér. 2, V, 91, 207.

Vergl. Invariantentheorie 153.

Graphische Statik.

146. Ueber die reciproken Figuren der graphischen Statik. Friedr. Schur. Zeitschr. Math. Phys. XL, 48.

H.

Hydrodynamik.

147. Études sur l'emploi des percussions dans la théorie du mouvement d'un solide plongé dans un solide. H. Willotte. Journ. Math. Sér. 4, X, 93 [vergl. Bd. XL Nr. 475].

Hyperbel.

148. Ueber eine Erzeugungsweise der Hyperbel als Enveloppe. W. Rult. Grun. Archiv 2. R. XIII, 90.
149. Sur l'hyperbole équilatère passant par 4 points donnés au moyen d'une ellipse. Gillet. Mathesis Sér. 2, V, 147. — Cl. Servais ibid. 149.

Hyperelliptische Transcendenten.

150. Ueber die von Herrn Fuchs gegebene Ausdehnung der Legendre'schen Relation auf hyperelliptische Integrale. K. Th. Vahlen. Crelle CXIV, 47.

I.

Imaginäres.

151. Additionslogarithmen für complexe Grössen. R. Mehmke. Zeitschr. Math. Phys. XL, 15.

Invariantentheorie.

152. Biegungscovarianten und Differentialparameter. P. Stäckel. Crelle CXIII, 58.
153. Sur le sous-discriminant (ou covariant biquadratique lié à l'avant-dernier terme de l'équation aux carrés des différences. R. Perrin. Journ. Mathem. Sér. 4, X, 129.

Vergl. Differentialgleichungen 37. Formen. Mehrdimensionale Geometrie 192.

Irrationalzahlen.

154. Sur le produit unique de deux nombres irrationnels. E. Cesaro. Mathesis Sér. 2, V, 156.

K.

Kegelschnitte.

155. Anwendung eines Abbildungsprincips zur Untersuchung von Curven zweiten Grades. St. Glaser. Grun. Archiv 2. R. XIII, 113.
156. Ueber die Anzahl der Kegelschnitte, welche durch Punkte, Tangenten und Normalen bestimmt sind. A. Wiman. Zeitschr. Math. Phys. XL, 296.
157. Thèorèmes de Garnier, Timmermanns, Quetelet, Dandelin sur les coniques. Mathesis Sér. 2, V, 197.
158. Sur un théorème de Poncelet. J. Neuberg. Mathesis Sér. 2, V, 13.
159. Eigenschaften der imaginären Brennpunkte der Centralkegelschnitte. Fr. Rogel. Grun. Archiv 2. R. XIII, 297.
160. Cercle et parabole ainsi que cercle et hyperbole joissant de la propriété que la polaire réciproque de la conique par rapport au cercle est aussi la polaire réciproque du cercle par rapport à la conique. Cl. Servais. Mathesis Sér. 2, V, 233.
161. Sur un groupe de coniques inscrites un circonscrites à un triangle. N. Ch. Spijker. Mathesis Sér. 2, V, 105, 176.
162. Conique se rapportant à un quadrilatère. Lemoine, Mandart, Droz-Farny, Fairon. Mathesis Sér. 2, V, 173. — Barisien, J. Jonesco ibid. 174.
163. Trouver une conique telle que les polaires des sommets d'un quadrilatère donné forment un quadrilatère égal à un second quadrilatère donné. Cl. Servais. Mathesis Sér. 2, V, 274.
164. Ueber den Schwerpunkt der gemeinschaftlichen Punkte eines Kegelschnittes und einer Curve dritten Grades. B. Sporer. Zeitschr. Math. Phys. XL, 381.
165. Enveloppe et trajectoires orthogonales de certaines circonférences. Brocard, Collette. Mathesis Sér. 2, V, 209.
166. Lieu d'un point tel que les axes des deux paraboles passant par les points d'incidence des normales menées de ce point à une ellipse donnée se coupent sur cette ellipse. Gillet, Droz-Farny, J. Jonesco, Cristescu. Mathesis Sér. 2, V, 212.

Vergl. Dreiecksgeometrie 54. 55. 56. 57. Ellipse. Hyperbel. Krümmung 182. 183. Parabel.

Kettenbrüche.

167. Sur la généralisation des fractions continues algébriques. H. Padé. Journ. Mathem. Sér. 4, X, 291.

Kinematik.

168. Ueber die Wendepole einer kinematischen Kette. F. Wittenbauer. Zeitschr. Math. Phys. XL, 91.
169. Ueber den Beschleunigungspol der zusammengesetzten Bewegung. F. Wittenbauer. Zeitschr. Math. Phys. XL, 151.
170. Die Beschleunigungspole der kinematischen Kette. F. Wittenbauer. Zeitschr. Math. Phys. XL, 278.
171. Trouver par des considèrations cinématiques ou infinitésimales la tangente d'une certaine courbe. G. de Longchamps. Mathesis Sér. 2, V, 230. — Meurice ibid. 232. — C. Servais ibid. 233.
172. Ueber die mechanische Erzeugung der orthogonalen Projectionen ebener Curven, der Ellipsen und der Trochoiden. M. Delaunay. Zeitschr. Math. Phys. XL, 242.
173. Ueber eine gewisse Klasse von übergeschlossenen Mechanismen. R. Müller. Zeitschr. Math. Phys. XL, 257.

Kreis.

174. Propriétés des cercles de Chasles. E. N. Barisien. Mathesis. Sér. 2, V, 129, 158, 241.
175. Quelques propriétés angulaires des cercles. A. Poulain. Mathes. Sér. 2, V, Supplément.
176. 13 Auflösungen des Malfatti'schen Problems. C. Davids. Grun. Archiv 2. R. XIII, 10.

177. Points d'une circonférence formant un groupe équianharmonique. Cl. Servais. Mathesis Sér. 2, V, 167, 169. — Déprez ibid. 168, 170. — Droz-Farny ibid. 170.
178. Triangle polaire à aire minimum d'un triangle donné. Droz-Farny, Hacken. Mathesis. Sér. 2, V, 172. — Déprez ibid. 173.
179. Inscrire dans un cercle donné un quadrilatère dont on connait les trois diagonales. Mathesis Sér. 2, V, 12.
180. Sur deux circonférences décrites au moyen d'une corde fixe et d'une corde mobile de longueur invariable d'une circonférence donnée: Poort, Droz-Farny, J. Jonesco, Déprez, Retali. Mathesis Sér. 2, V, 52.

Vergl. analyt. Geometrie d. Ebene 15. 17. Dreiecksgeometrie 52. Quadratur 215.

Krümmung.

181. Sur la courbure du contour apparent d'une surface. M. d'Ocagne. Mathesis Sér. 2, V, Supplément.
182. Constructionen der Krümmungsmittelpunkte von Kegelschnitten. Kinkelin. Zeitschr. Math. Phys. XL, 58.
183. Beweis eines Satzes von Jacob Steiner über die Krümmungskreise einer Ellipse. B. Sporer. Zeitschr. Math. Phys. XL, 123.
184. Constructions linéaires du centre de courbure des podaires. M d'Ocagne. Mathesis Sér. 2, V, 87.

Vergl. Mehrdimensionale Geometrie 193. Oberflächen 197.

M.

Magnetismus.

185. Allgemeine Lösung d. Magnetisirungsgleichungen für den Ring. Ign. Schütz. Crelle CXIII, 161.

Mechanik.

186. Ueber den Fall der Statik, in welchem das virtuelle Moment einen negativen Werth besitzt. L. Henneberg. Crelle CXIII, 179.
187. Ueber den analytischen Ausdruck des Huygens'schen Princips. A. Gutzmer. Crelle CXIV, 333.
188. Mémoire sur la transformation des équations de la dynamique. P. Painlevé. Journ. Mathem. Ser. 4, X, 5. — R. Liouville ibid. 287.
189. Ueber permanente Rotationsachsen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt. O. Staude. Crelle CXIII, 318.
190. Untersuchungen über die Attraction zweier homogener Körper. Em. Liebenthal. Grun. Archiv 2. R. XIII, 39.
191. Ueber die Verspätung des Fluthmaximums in Bezug auf die Culmination des Mondes. C. Benz. Grun. Archiv 2, R. XIII, 35.

Vergl. Astronomie. Geodäsie. Hydrodynamik. Kinematik. Magnetismus. Optik. Schwerpunkt. Wärmelehre.

Mehrdimensionale Geometrie.

192. Ueber Biegungen von n fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten. P. Stäckel. Crelle CXIII, 102 [vergl. Bd. XXXIX Nr. 311].
193. Zur Theorie der Krümmungen eindimensionaler in höheren Mannigfaltigkeiten enthaltener Gebilde. G. Landsberg. Crelle CXIV, 338.

O.

Oberflächen.

194. Détermination des éléments linéaires doublement harmoniques. L. Raffy. Journ. Mathém. Sér. 4, X, 331.
195. Ueber eine besondere Fläche dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten. H. Thieme. Zeitschr. Math. Phys. XL, 362.
196. Sur la surface de Kummer. G. Humbert. Journ. Mathem. Sér. 4, X, 473 [vergl. Bd. XL Nr. 574].
197. Die Schraubenflächen constanter mittlerer Krümmung. Heckhoff. Zeitschr. Math. Phys. XL, 313.

Vergl. Cubatur. Geometrie (höhere) 84.

Oberflächen zweiter Ordnung.

198. Propriété de l'hyperboloïde réglé. J. Neuberg, Franel. Mathesis Sér. 2, V, 101.
199. Propriété de deux hyperpoloïdes réglés. J. Neuberg. Mathesis Sér. 2, V, 102.

Vergl. Formen 75.

Optik.

200. Homocentrische Brechung des Lichtes durch das Prisma. L. Burmester. Zeitschr. Math. Phys. XL, 65.
201. Zur homocentrischen Brechung des Lichtes im Prisma. Wilsing. Zeitschr. Math. Phys. XL, 353.
202. Homocentrische Brechung des Lichtes durch die Linse. L. Burmester. Zeitschr. Math. Phys. XL, 321.

P.

Parabel.

203. Propriété de la directrice d'une parabole. Cl. Servais. Mathesis Sér. 2, V, 24 [vergl. Bd. XL Nr. 207].
204. Sur les podaires de parabole. P. F. Schmitz. Mathesis Sér. 2, V, 196.
205. D'un point fixe situé sur la tangente au sommet d'une parabole on mène une sécante. Les normales aux points d'intersection de cette sécante avec la parabole se coupent sur une autre parabole. H. Brocard. Mathesis Sér. 2, V. 28. — Cristescu ibid 29.
206. Propriété de deux paraboles égales. Déprez. Mathesis Sér. 2, V, 273.

Perspective.

207. Zur Perspective des Kreises. O. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XL, 56.
208. Zwei Aufgaben aus der Perspective. Chr. Beyel. Zeitschr. Math. Phys. XL, 255.

Planimetrie.

209. Soient dans un même plan trois droites OX, OY, OZ. On prend sur OX deux points fixes A, B, sur OY un point variable C. CA, CB rencontrent OZ en A', B', il s'agit de démontrer $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OB'} = const.$ M. A. L. Mathesis Sér. 2, V, 274. — J. Jonesco etc. ibid. 275. — Verdeyen ibid. 276. — Servais, Bastin ibid. 276.
210. Propriétés d'une figure consistant en 4 triangles et 6 carrés. Déprez, François. Mathesis Sér. 2, V, 95. — Van Aubel ibid. 97.
211. Propriété des pseudocarrés, c'est à dire des quadrilatères dont les diagonales sont égales et perpendiculaires. Absolonne etc. Mathesis Sér. 2, V, 118.
212. Les centres des carrés construits extérieurement sur les côtés d'un quadrilatère convexe sont les sommets d'un pseudocarré. Absolonne etc. Mathesis Sér. 2, V, 123.
213. Sur une suite de polygones. Absolonne. Mathesis Sér. 2, V, 93.

Vergl. Dreiecksgeometrie. Kreis.

Q.

Quadratur.

214. Le stang-planimètre. A. Poulain. Mathesis Sér. 2. V, Supplément.
215. Quadrature approchée du cercle. Postula. Mathesis Sér. 2, V, 87.

Vergl. Bestimmte Integrale 24.

R.

Reihen.

216. Le somme de $2m+1$ nombres triangulaires successifs. Fauquembergue. Mathesis Sér. 2, V, 211. — Petrescu, Hacken, J. Jonesco ibid. 212.
217. Sur la sommation des puissances semblables des n premiers nombres triangulaires. E. Barbette. Mathesis Sér. 2, V, 111.
218. Bemerkungen zur Summenformel für die Potenzreihe der natürlichen Zahlen. St. Glaser. Grun. Archiv 2. R. XIII, 106.
219. Sur la série $\sum \frac{1}{(4n-3)^4 (4n-1)^4}$. Cristescu. J. Jonesco. Poort. Mathesis Sér. 2, V, 50.
220. Sur deux séries trigonométriques. E. Barbette. Mathesis Sér. 2, V, 135.

Vergl. Elliptische Transcendenten.

S.

Schwerpunkt.

221. Sur les centres de gravité. L. Desaint. Mathesis Sér. 2, V. 88.

Vergl. Kegelschnitte 164. Tetraeder.

Singularitäten.

222. Das Verhalten der Steiner'schen, Cayley'schen und anderer covarianter Curven in singulären Punkten der Grundcurve. E. Wölffing. Zeitschr. Math. Phys. XL, 31.

Sphärik.

223. Einige quantitative Fragen über zwölf Kugeln, die eine Kugel berühren. R. Hoppe. Grun. Archiv 2, XIII, 439.
224. Extraits de la correspondance mathématique et physique de Garnier et de Quetelet sur la geométrie de la sphère. Mathesis Sér. 2, V, 139, 158, 195.
225. Der dem pythagorischen Lehrsatz entsprechende Satz der Sphärik. A. W. Velten. Zeitschr. Math. Phys. XL, 312.
226. Sur une formule de trigonometrie sphèrique. Cristescu. Mathesis Sér. 2, V, 206.

Stereometrie.

227. Einachsige Polyeder von kleinster Oberfläche bei constantem Inhalt. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. XIII, 69.
Vergl. Tetraeder.

T.

Tetraeder.

228. Sur deux tétraèdres les sommets de l'un étant les centres de gravité de masses attachées aux sommets de l'autre. Quint. Mathesis Sér. 2, V, 70.

Topologie.

229. Ueber ebene zusammenhängende Liniengebilde. O. Steinert. Grun. Archiv 2, R. XIII, 220.

Trigonometrie.

230. Démonstration de l'inégalité $x - \sin x < \frac{1}{4} x^3$. M. Fouché. Mathesis Sér. 2, V, 117.
231. Résondre l'équation $[\sin (x - \alpha) + \cos (x + 2\alpha). \sin \alpha]^2 = 4 \sin \alpha \cos x \sin (x + \alpha)$. C. J. François. Maihesis Sér. 2, V, 100.
232. Herleitung der trigonometrischen Formel für die Tangente des halben Winkels aus den Seiten des Dreiecks. O. Specht. Grun. Arch. 2. R. XIII, 223.
233. Relations entre les éléments de tout triangle. Lemoine. Mathesis Sér. 2, V, 238. — Barisien ibid. 239.
234. Verhalten sich die Dreiecksseiten $a : b : c = 4 : 5 : 6$, und sind α, β, γ die gegenüberliegenden Winkel, so ist $\gamma = 2\alpha$. F. Specht. Grun. Archiv 2. R. XIII, 222.
235. Solution élémentaire d'une question de maximum. Mathesis Sér. 2, V, 33.
Vergl. Reihen 220. Sphärik.

W.

Wärmelehre.

236. Commentaire aux principes de la thermodynamique. P. Duhem. Journ. Math. Sér. 4, X, 207 [vergl. Bd. XL Nr. 649].
237. Ueber den Bunsenbrenner. H. Kurtz. Zeitschr. Math. Phys. XL, 60.

Winkeltheilung.

238. Zur Trisection des Winkels. E. Fischer. Grun. Archiv 2. R. XIII, 210.
239. Zur Lösung des Problems der Dreitheilung des Winkels. Loth. v. Köppen. Grun. Archiv 2. R. XIII, 446.

Wurzelausziehung.

240. Sur les valeurs principales des radicaux. De Tilly. Mathesis Sér. 2, V, 177, 217.
241. Sur un moyen graphique d'extraire la racine cubique d'un nombre. G. Vanderstegen. Mathesis Sér. 2, V, 146. — Déprez ibid. 147. — Barbarin ibid. 228.

Z.

Zahlentheorie.

242. Untersuchung der Fundamentalgleichung einer Gattung für eine reelle Primzahl als Modul und Bestimmung der Theiler ihrer Discriminanten. K. Hensel. Crelle CXIII, 61.

243. Arithmetische Untersuchungen über die gemeinsamen ausserwesentlichen Discriminantentheiler einer Gattung. K. Hensel. Crelle CXIII, 128.
244. Zu Riemann's Abhandlung über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse. H. v. Mangoldt. Crelle CXIV, 255.
245. Ueber die Bestimmung der Anzahl der Primzahlen bis zu einer gegebenen Zahl N mit Hilfe der Primzahlen, welche kleiner als $\sqrt{N}$ sind. H. Vollprecht. Zeitschr. Math. Phys. XL, 118.
246. Combinatorischer Beweis des Wilson'schen Lehrsatzes. Ad. Schmidt. Zeitschr. Math. Phys. XL, 124.
247. Ueber eine Verallgemeinerung der Euler'schen φ Function. K. Th. Vahlen. Zeitschr. Math. Phys. XL, 126.
248. Unrichtigkeit eines von Legendre ausgesprochenen zahlentheoretischen Satzes. Piltz. Zeitschr. Math. Phys. XL, 125.
249. Arithmetische Studien über den „letzten" Fermat'schen Satz, welcher aussagt, dass die Gleichung $a^n = b^n + c^n$ für $n > 2$ in ganzen Zahlen nicht auflösbar ist. E. Wendt. Crelle CXIII, 335.
250. Beweis des Fermat'schen Satzes von der Unmöglichkeit der Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für rationale Zahlen und $n > 2$. G. Korneck. Grun. Archiv 2. R. XIII, 1, 263.
251. Die Transformation der quadratischen Formen. K. Th. Vahlen. Zeitschr. Math. Phys. XL, 127.
252. Questions d'arithmologie. De Rocquigay. Mathesis Sér. 2, V, 57.
253. Ueber einen zahlentheoretischen Satz des Herrn Schubert. W. Ahrens. Zeitschr. Math. Phys. XL, 245.
254. Trouver pour A et B des valeurs entières telles que les racines de $x^2 + Ax + B = 0$ soient rationnelles. Fauquembergue. Mathesis Sér. 2, V, 125.
255. Sur un nombre entier dans le système dont la base est B. Fauquembergue. Mathesis Sér. 2, V, 125.
256. Fundamentalauflösungen der Pell'schen Gleichung. G. Speckmann. Grun. Archiv 2. R. XIII, 327.
257. Ueber die Auflösung der Pell'schen Gleichung. G. Speckmann. Grun. Archiv 2. R. XIII, 330.
258. Nombres dont on peut démontrer qu'ils sont la somme de quatre, soit de troistriangulaires. Fauquembergue, Cristescu. Mathesis Sér. 2, V, 150.
259. Sur une valeur de x qui rende l'expression $(x + a^2)(x + b^2)(x + c^2)$ carré parfait. Fauquembergue. Mathesis Sér. 2, V, 76.
260. Le carré de la somme de n carrés est aussi la somme de n carrés. Fauquembergue. Mathesis Sér. 2, V, 101 [vergl. Bd. XL, Nr. 282].
261. La somme $-1^4 + 3^4 - 5^4 + 7^4 - \ldots + (4x - 1)^4$ n'est ni un carré, ni le double, ni le triple d'un carré. E. Fauqembergue. Mathesis Sér. 2, V, 213.
262. Pour quelle valeur de n la somme des boulets des n premières piles à base carrée est elle un carré parfait? E. Fauquembergue. Mathesis Sér. 2, V, 175.
263. Ueber die Zerlegung der Zahlen von der Form $4n + 1$ in zwei Quadrate. G. Speckmann. Grun. Archiv 2 R. XIII, 333.
264. Mettre $n^2 + (2n - 1)^2 + (2n + 1)^2$ sous la forme d'une somme de deux nombres triangulaires. H. Brocard. Mathesis Sér. 2, V, 23.
265. Sur un thèoréme d'arithmétique. Nauticus. Mathesis Sér. 2, V, 37. — L. Meurice ibid. 64.
266. Ueber die Potenzen der Zahlen von der Form $xn \mp 1$. G. Speckmann. Grun. Archiv 2. R. XIII, 216.
267. Potenzcongruenzen. G. Speckmann. Grun. Archiv 2. R. XIII, 217.
268. Congruenzen. G. Speckmann. Grun. Archiv 2. R. XIII, 219.
269. Si $8q + 7$ est premier, $2^{4q+3} - 1$ ne l'est pas. Fauqembergue. Mathesis Sér. 2, V, 126.
270. Ueber die Reihensysteme, deren Modul ein vielfaches von 6 ist. G. Speckmann. Grun. Archiv 2. R. XIII, 334.
271. Eine arithmetische Scherzaufgabe. Benz. Grun. Archiv 2. R. XIII, 336.
Vergl. Formen.

Historisch-literarische Abtheilung.

Das Problem der kürzesten Dämmerung.

Von

Dr. Karl Zelbr

in Brünn (Mähren).

Hierzu Tafel IV Figur 1—13.

Das Problem der kürzesten Dämmerung verdankt seine Berühmtheit nicht so sehr seiner Bedeutung im Bereiche der Gegenstände der theoretischen Astronomie, als vielmehr dem Umstande, dass sich nach der Erfindung der Differential- und Integralrechnung eine Reihe der hervorragendsten Mathematiker mit demselben beschäftigten, aus deren Reihe es genügen dürfte, die Namen eines Joh. Bernoulli, Euler, Lambert und Monge herauszuheben. Nachdem es so mit der Entwickelungsgeschichte der Mathematik in einem gewissen Zusammenhange steht, scheint es nicht unzweckmässig, einen Ueberblick über die bei der Auflösung angewendeten Methoden zu geben, zumal dieselben vom pädagogischen Standpunkte aus sehr werthvoll sind; denn es wechseln dabei synthetische mit analytischen Behandlungen; häufig wird die Aufgabe blos mit Hilfe der Formeln der sphärischen Trigonometrie gelöst, ja selbst die Methode der darstellenden Geometrie wurde von Monge zur Auflösung des Problems benützt.

Um indessen Wiederholungen zu vermeiden, seien hier die Bedeutungen einiger häufig wiederkehrenden Grössen angegeben; es bedeutet immer

φ die Polhöhe oder geographische Breite,

δ die Declination der Sonne oder des Gestirnes,

a das Azimuth und zwar a_1 für den Aufgang oder Untergang der Sonne, a_2 für den Beginn der Morgendämmerung oder das Ende der Abenddämmerung,

t den Stundenwinkel; t_1 und t_2 wieder die Stundenwinkel für die zwei eben angeführten Epochen,

p den sogenannten parallactischen Winkel; p_1 und p_2 dessen Werthe für dieselben Epochen,

$\tau = t_2 - t_1$ die Dauer der Dämmerung,

h die Höhe des Gestirnes, insbesondere

$-c$ die Höhe des Dämmerungskreises.

I.

Bekanntlich versteht man unter Dämmerung jenen Zeitabschnitt des astronomischen Tages, der zwischen Sonnenuntergang und dem Eintritte der vollständigen Dunkelheit oder zwischen der ersten Erhellung des östlichen Horizontes und dem Sonnenaufgange verfliesst. Nun sind die Begriffe „vollständige Dunkelheit“ und „erste Erhellung“ etwas unbestimmt, und man findet deshalb auch wirklich für die Dauer der Dämmerung, oder, was dasselbe ist, für die Höhe des Dämmerungskreises bei den verschiedenen Schriftstellern sehr abweichende Angaben.

Nach Houzeau, Vade-mecum de l'astronome (Bruxelles 1882) und Kämtz, Lehrbuch der Meteorologie 3. Bd. (Leipzig 1836) sind die wichtigsten die folgenden:

Jahreszahl.	Autor und Titel des Werkes.	c
— 80 ca.	Posidonius (nach Plinius, Historia naturalis, lib. II. cap. 32)	19°
...	Strabo, Rerum geographic. libri XVII. Parisiis 1620. pag. 135	17°30
130 ca.	Ptolemäus, Apparentiæ inerrantium stellarum. Urbini 1592	18°
1088 ca.	Alhazen, De causis crepusculorum (nach „Nonius, De crepusculis.“ Olyssipone 1542)	19
Ende des 13. J.	Vitellio, Optica. Basileæ 1572; lib. X. prop. 60 . . .	19
1542	Nonius, De crepusculis. Olyssipone; par. II. prop. 18 .	16
1550	Cardan, De subtilitate. Norimbergæ; lib. IV	19
1556	Gemma Frisius, De astrolabo catholico. Antuerpiæ; suppl.	18
1567	Scultetus, Phænomena novilunii ecliptici. Gorliciæ; lib. II	19
1578	Clavius, Commentarius in sphæram J. de Sacro-Bosco. Romæ 1606; pag. 131	19
1585	Barocius, Cosmographia. Venetiis; pag. 198	19
1588	Rothmann (Brahæus, Epistolarum astronomicarum libri duo. Francofurti 1610). Ende der astronomischen Dämmerung	24
1589	Stevinus, Cosmographia pars II. geograph. lib. III. prop. 2	19
16..	Conimbricensis, De coelo; lib. III. cap. 5. quæst. 2 . .	19
1602	Tycho Brahe, Astronomiæ instauratæ progymnasmata (1610) I, 95, 733 und II, 410	16—17
1602	Magini, Tabulæ primi mobilis. Venetiis; lib. XI. prob. 30.	18
1606	Clavius, De crepusculis	18
1618	Kepler, Epitome astronomiæ copernicanæ; lib. III. pars 5	18
1619	Snellius, Descriptio cometæ, qui anno 1618 effulsit. Lugduni Batavorum	19

Jahreszahl.	Autor und Titel des Werkes.	c
1620	Blancanus, Sphæra mundi. Bononiæ; lib. VI. cap. 5; lib. X cap. 15	18°
1621	Roggembach (nach Tanner, Dissertatio peripatetico-theologica de coelis. Ingolstadii; quæst. 7) . . .	19
1622	Longomontanus, Astronomia danica. Amstelodami; sphærica lib. II. cap. 11	20
1624	Glorioso, De cometis dissertatio astronomico-physica. Venetiis lib. II. cap. 2	18
1644	Resta, Meteorologia de igneis, aëreis aqueisque corporibus; lib. II. trac. I. cap. 2	19
1644	Wendelin, Luminarcani. Antuerpiæ; præf. pag. 5 . .	19
1644	Cabaeus, Philosophia experimentalis. Romæ	16—17
....	Cottunius, Meteorologica; lib. I. lect. 33	19
1647	Gassendi, Institutio astronomica. Parisiis; lib. I. cap. 18	18
1651	Ricciolus, Almagestum novum Bononiæ. I. 39;	
	in den Aequinoctien Morgens	16
	„ „ „ Abends	20° 30′
	„ dem Sommersolstitium Morgens	21 25
	„ „ Wintersolstitium Abends	17 25
1692(?)	J. D. Cassini (nach Lalande, Astronomie II. 1792), Ende der astronomischen Dämmerung	15°
1751	La Caille, Histoire de l'académie des sciences. Paris (nach Beobachtungen am Meere)	16° 55′
1760	Lambert, Photometria. Aug. Vindelic. Ende der Dämmerung	18 30
1859	Liais, Comptes rendus hebdomadaires. Paris; tome XLVIII, pag. 110	18 18
1865	J. Schmidt, Astronomische Nachrichten Bd. LXIII, Seite 105. Ende der astronomischen Dämmerung .	15 55

Ein Blick auf diese Zahlen lässt die ausserordentliche Schwierigkeit der Beobachtung in der Unsicherheit der Angaben erkennen. Wenn wir auch immerhin den älteren Beobachtungen kein besonderes Vertrauen schenken, so schwanken doch selbst die von geübten Beobachtern angegebenen Werthe in ziemlich weiten Grenzen, wie dies auch bei dem nach Klima und Jahreszeit wechselndem Zustande der Atmosphäre nicht anders möglich ist. Wir können uns daher auch heute noch mit dem bisher adoptirten Mittelwerthe der Sonnendepression am Ende der astronomischen Abenddämmerung

$$c = -18^{0}$$

behelfen; gleichzeitig wollen wir das Ende der astronomischen Abenddämmerung in jenen Zeitpunkt versetzen, in dem die schwächsten, dem unbewaffneten Auge eben noch erkennbaren Sterne am Himmel deutlich sichtbar werden. Freilich haftet auch dieser Definition noch eine bedeutende Unsicherheit an, indem die Durchsichtigkeit der Atmosphäre, sowie die Uebung und Scharfsichtigkeit des Beobachters dabei eine grosse Rolle spielen; indessen liegt diese Unsicherheit in der Natur der Erscheinung und ist im Grunde genommen für das Folgende von wenig Belang. Als Ende der bürgerlichen Abenddämmerung wird gewöhnlich der Zeitpunkt angegeben, zu dem man die Arbeiten im Freien einzustellen pflegt; es ist dies allerdings wiederum ein sehr undeutlich begrenzter Begriff; indessen wird man erfahrungsgemäss nicht weit fehlgehen, wenn man am Ende der Abenddämmerung die Depression der Sonne zu $6-8^0$ annimmt.*

II.

Als im Zeitalter der Entdeckungen die Portugiesen an der Westküste von Afrika gegen den Aequator vordrangen, setzte sie die ausserordentlich kurze Dämmerung in Erstaunen, und Cardinal-Infant Heinrich (der nachmalige König von Portugal 1578—1580) beauftragte seinen Lehrer Pedro Nunnez (Petrus Nonius), sich mit den näheren Umständen dieser Erscheinung und ihrer Erklärung zu beschäftigen. Dieser Aufgabe entledigte sich Nonius in dem Werke:

„Petri Nonii Salaciẽsis de Crepusculis Liber unus nunc recẽs natus et editus. Item Allacen, Arabis vetustissimi, de causis Crepusculorum Liber unus, à Gerardo Cremonensi jam olim Latinitate donatus, nunc vero omniũ primum in lucem editus. Ollyssipone 1542.“

Nachdem er zunächst den Depressionswinkel der Sonne am Ende der Abenddämmerung für Lissabon zu 16^0 bestimmt, weist er (prop. XVII) nach, dass die Dämmerung zur Zeit des Wintersolstitiums nicht die kürzeste sei, sondern von dort gegen die Aequinoctien hin abnehme. Zur Zeit der Aequinoctien sei sie aber schon im Wachsen begriffen, und es lasse sich eine negative Declination der Sonne angeben, die eine ebenso lange Dämmerung bewirke, wie zur Zeit der Aequinoctien. Er sucht hierauf den Zusammenhang zwischen den Elongationen der Sonne vom Ost- oder Westpunkte des Horizontes und ihrer Declination am Tage der kürzesten Dämmerung und beweist schliesslich den Satz, dass am Tage der kürzesten Dämmerung der Aequator den Depressionsbogen halbirt.

Figur 1 stelle die stereographische Projection der Himmelskugel vom Südpol auf die Ebene des Aequators vor; $AhQH$ ist der Aequator, hOH der Horizont mit dem Mittelpunkte in m; xSl der Almucantarat mit dem Depressionswinkel c (-18^0) und mit dem Mittelpunkte in n.

* Die ausführlichsten Beobachtungen über die Dämmerung hat W. Bezold in den „Annalen d. Physik u. Chemie von J. C. Poggendorff“ Bd. 123 (1864) veröffentlicht.

Beschreibt man aus P (dem Nordpol) mit dem Radius Pm einen Bogen und ebenso aus n mit dem Radius $nS - mO$, so mögen sich diese Bogen in C schneiden; verbindet man C mit n und verlängert diese Gerade bis zum Durchschnitte mit xSl in a, so ist a ein Punkt des Parallelkreises der Sonne am Tage der kürzesten Dämmerung. Zum Beweise ziehe man den Umfassungskreis der Circumpolarsterne $BRDO$ und die von der Sonne zu verschiedenen Zeiten beschriebenen Parallelkreise tw, fh, ag, po, xz etc. Aus C mit dem Radius $mO = Ca$ werde der Kreis $queaiy\ldots$ beschrieben, so wird derselbe den pSl in a und den Umfassungskreis der Circumpolarsterne $BRDO$ in q berühren, gleichzeitig sind

$$\sphericalangle aeh = \sphericalangle Ohe,$$

wie sich aus den Eigenschaften der stereographischen Projection nachweisen lässt. Die Bogen tw, fh, ag, po, $xz\ldots$ sind den Zeiten der bezüglichen Dämmerungen proportional, und so ist es leicht ersichtlich, dass die Dämmerung zur Zeit der Aquinoctien nicht die kürzeste ist, ebensowenig wie die Dämmerung zur Zeit des Wintersolstitiums, welcher etwa der Bogen xz entsprechen mag. Zieht man den Höhenkreis Za, der den Aequator in r schneidet, so lässt sich aus der Gleichheit der Winkel der beiden sphärischen Dreiecke drh und ade auf ihre Congruenz schliessen; daraus folgt, dass

$$ad = dr$$

ist, das heisst, dass der Depressionsbogen am Tage der kürzesten Dämmerung vom Aequator halbirt wird.

Die weiteren Resultate des Nonius* sollen nun nach Delambre's Vorgange in die moderne Zeichensprache übertragen werden. Dazu ist es nothwendig, zuerst den nachstehenden Hilfssatz zu beweisen (Fig. 2):

„Werden zwei sich schneidende grösste Kreise RS und RQ von einem grössten Kreise $E\beta$ und einem Kleinkreise $H\zeta$, aus demselben Mittelpunkte O beschrieben, so geschnitten, dass die abgeschnittenen Bogen DE und $H\zeta$ ähnlich sind (das heisst gleichen Centriwinkeln angehören), so ist

$$\sphericalangle HDE = \sphericalangle \zeta E\beta$$

und

$$\text{Bogen } (RD + RE) = 180^0.\text{“}$$

Zieht man die Radien $OH\delta$ und $O\zeta\beta$, so ist

$$\text{Bogen } H\zeta \text{ ähnlich Bogen } \delta\beta;$$

allein nach der Voraussetzung ist

$$\text{Bogen } H\zeta \text{ ähnlich Bogen } DE,$$

daher, da Bogen $\delta\beta$ und Bogen DE auf demselben Kreise liegen:

$$\text{Bogen } \delta\beta = \text{Bogen } DE.$$

* „De Nonius, de ses formules pour les crépuscules.“ Connaissance des tems pour l'an 1818. Paris 1815.

Da ferner
$$H\delta = \beta\zeta$$
$$\sphericalangle\delta = \sphericalangle\beta = 90^0,$$
so wird
$$\Delta DH\delta \cong \Delta\beta E\zeta,$$
und mithin
$$\sphericalangle HDE = \sphericalangle\zeta E\beta.$$

Allein es gilt die Relation:
$$\sin RD : \sin RE = \sin HDE : \sin \zeta E\beta,$$
daher:
$$RD = 180^0 - RE.$$

Wir gehen nun zu Delambre's Beweis über. Es sei in Figur 3 HR der Horizont, LP der Parallelkreis der Sonne zu irgend einer Zeit vom Horizonte bis zum Dämmerungskreise; der Bogen des Aequators EQ das Mass der Dämmerung $= \tau$; nach dem gerade bewiesenen Satze sind:
$$\sphericalangle REQ = \sphericalangle(180^0 - EQR) = 90^0 - \varphi$$
und
$$\text{Bogen } (RE + RQ) = 180^0,$$
was wir dadurch berücksichtigen wollen, dass wir setzen:
$$RQ = 90^0 - m, \quad RE = 90^0 + m.$$

Aus ΔREQ folgt dann:
$$\cos R = \cos\tau \cos^2\varphi + \sin^2\varphi$$
oder
$$\alpha)\qquad \sin\frac{R}{2} = \sin\frac{\tau}{2}\cos\varphi.$$

Dazu bemerkt Delambre, dass sowohl Nonius als auch Clavius und Keill die Bedeutung des Winkels R und des Dreieckes REQ für die Auflösung des Problemes übersahen; denn es gestaltet sich nun die Auflösung sehr einfach; aus demselben Dreiecke folgt:
$$\sin R : \sin\tau = \cos\varphi : \cos m$$
$$\cos m = \frac{\sin\tau \cos\varphi}{\sin R},$$
oder, mit Berücksichtigung der Gleichung α),
$$\beta^*)\qquad \cos m = \frac{\cos\frac{\tau}{2}}{\cos\frac{R}{2}}.$$

Halbirt man den Bogen EQ in m', so wird auch der Winkel R halbirt, und es ist
$$\text{Bogen } Rm' = 90^0.$$

Wir erhalten also auch zur Bestimmung von m die schärfere Formel:
$$\beta)\qquad tg\, m = tg\frac{\tau}{2}\sin\varphi.$$

Fällt man Py senkrecht auf LR, so folgt aus dem Dreiecke RyP, $Py = c$ gesetzt:

$$\gamma) \qquad sin PR = \frac{sin\, c}{sin R} = \frac{sin\frac{c}{2}\, cos\frac{c}{2}}{sin\frac{R}{2}\, cos\frac{R}{2}} = cos n,$$

daher:

$$PR = 90^0 \pm n.$$

Es ist aber $PQ = PR - QR = 90^0 \pm n - (90^0 - m)$,

oder

$$\delta) \qquad PQ = m \pm n.$$

Fällt man von P eine Senkrechte auf den Aequator EQ, so erhält man aus dem resultirenden rechtwinkligen Dreiecke:

$$\varepsilon) \qquad sin\, \delta = sin\,(m \pm n)\, cos\, \varphi,$$

und dies sind die zwei gleichen Sonnendeclinationen des Nonius, welche gleiche Dauer der Dämmerung bewirken.

Rechnet man aus den bekannten Formeln:

$$cos\, t_2 = -\frac{sin\, c}{cos\, \varphi\; cos\, \delta} - tg\, \varphi\; tg\, \delta$$

$$cos\, t_1 = -\, tg\, \varphi\; tg\, \delta$$

die Stundenwinkel der Sonne zu Beginn der Morgendämmerung t_2 und bei Sonnenaufgang t_1, so ergiebt sich die Dauer in Zeit:

$$\zeta) \qquad \tau = \frac{1}{15}(t_2 - t_1).$$

Fallen die Declinationen in eine einzige zusammen, und dies ist der Fall für

$$n = 0^0,$$

so erhält man die Formeln des Nonius für die kürzeste Dämmerung:

$$\eta) \qquad cos\, n = \frac{sin\, c}{sin R} = 1, \quad c = R,$$

und nach α):

$$\vartheta) \qquad sin\frac{\tau}{2} = \frac{sin\frac{R}{2}}{cos\, \varphi} = \frac{sin\frac{c}{2}}{cos\, \varphi}.$$

Denn, aus dem Dreiecke PRy folgt:

$$sin R = \frac{sin\, c}{cos\, n},$$

und es ist offenbar R am kleinsten, wenn

$$n = 0^0, \text{ also } R = c.$$

Die Dämmerung ist aber nach α) am kürzesten, wenn R seinen kleinsten Werth erhält. Es erübrigt nur noch, aus diesen Formeln den Werth der Declination am Tage der kürzesten Dämmerung zu ermitteln, um die Uebereinstimmung mit den später gefundenen Lösungen zu beweisen.

Aus Gleichung ε) folgt:

$$\sin\delta = \sin m \cos\varphi,$$

aus Gleichung β^*) und β):

$$\sin m = \frac{\sin\frac{\tau}{2}}{\cos\frac{R}{2}} \sin\varphi,$$

oder für den gegebenen Fall, da $R = c$ ist:

$$\sin m = \frac{\sin\frac{\tau}{2}}{\cos\frac{c}{2}} \sin\varphi$$

und somit nach Gleichung ε) und ϑ):

$$\sin\delta = \sin\varphi \, tg\frac{c}{2},$$

oder, wenn man berücksichtigt, dass c eine essentiel negative Grösse ist

$$\sin\delta = -\sin\varphi \, tg\frac{c}{2}.$$

Diese Gleichung wird im weiteren Verlaufe immer als Auflösung des vorgelegten Problemes erscheinen.

Ist die Declination gleich Null, so fällt der Bogen PL mit den Aequatorbogen EQ zusammen; Qx wird dann $-c$, und es ist:

$$-\sin c = \sin RQ \sin R = \cos m \sin R, \quad -\sin c = \sin\tau \cos\varphi,$$

woraus

$$\iota) \qquad \sin\tau = -\frac{\sin c}{\cos\varphi}$$

die Dauer der Dämmerung zur Zeit der Aequinoctien, die ebenfalls einer Formel des **Nonius** entspricht. Aber diese Dauer entspricht nach **Nonius** noch einer anderen negativen Declination der Sonne, welche aufgesucht werden soll; aus den allgemeinen Formeln folgt:

$$\sin\frac{R'}{2} = \sin\frac{\tau'}{2}\cos\varphi,$$

$$\cos m' = \frac{\cos\frac{\tau'}{2}}{\cos\frac{R'}{2}} = \frac{\sin\tau'\cos\varphi}{\sin R'} = -\frac{\sin c}{\sin R'},$$

$$\cos n' = -\frac{\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}{\sin\frac{R'}{2}\cos\frac{R'}{2}},$$

$$\sin\delta = -\sin(n' + m')\cos\varphi = -\sin 2m'\cos\varphi.$$

Wir haben uns mit der Auflösung des **Nonius** eingehender beschäftigt, einmal, weil dies die erste Lösung des Problemes überhaupt war, dann auch, weil der Beweis erbracht werden sollte, dass **Nonius** das

Problem in gewissem Sinne vollständig erledigte. Wenn wir im Folgenden einzelne eigenartige Auflösungen eingehender darlegen werden, so wollen wir doch im Allgemeinen einen mehr referirenden Standpunkt einnehmen.

III.

In den nächsten Jahrzehnten nach dem Erscheinen von Nonius' Werke scheint kein wesentlicher Fortschritt in Bezug auf das vorgelegte Problem erfolgt zu sein; grössere und weit wichtigere Aufgaben nahmen die Aufmerksamkeit der Astronomen in Anspruch; das Erscheinen der Werke von Copernicus, Kepler, Galilei und Newton lenkte von den geringfügigeren Problemen der sphärischen Astronomie ab, wenn ich auch nicht gerade behaupten will, dass keines der damaligen Werke der sphärischen Astronomie etwas von dem Probleme der kürzesten Dämmerung enthielt; selbst der bekannte gelehrte Jesuit C. Clavius brachte in seinem Commentar zu Sacro-Bosco* die Sache wenigstens nach Delambre's** Urtheil um keinen Schritt weiter. Auch die von Lulofs*** citirte Stelle aus Clavius Opera tomus III pag. 272 scheint eben nichts Anderes, als eine Reproduction des Verfahrens von Nonius zu sein, da davon weiter keine Erwähnung gethan wird.

Erst nach der Erfindung der Differentialrechnung begannen sich die Mathematiker mit der Aufgabe wieder intensiver zu beschäftigen. Zunächst ist es Johann Bernoulli, der im „Journal des savans" für 1693 schreibt:

„J'ai résolu le problème, de trouver géométriquement le jour du plus petit crépuscule; ce qui a occuppé mon frére, professeur de mathématique à Bâle (Jacob Bernoulli), et moi depuis plus de cinq ans, sans en pouvoir venir à bout. Ce problème est d'autant plus curieux, que je demeure par ma méthode de maximis et minimis (qui est pourtant une des plus courtes), dans un calcul prolixe et embarassé, qui se laisse à la fin réduire à une petite équation quarrée, que je transforme en cette simple proportion géométrique: Comme le rayon, à la tangente de la moitié de l'arc crêpusculaire (qu'on suppose ordinairement de 18 degrés); ainsi le sinus de l'élevation du pole, au sinus de la déclinaison méridionale cherchée du soleil. Quand on a sa déclinaison, on a aussi le lieu dans l'ecliptique; et partant le jour de l'année auquel se fait le plus court crépuscule. Supposé doncl'arc crépusculaire de 18 degrés, et la latitude de 48 degrés 51 minutes, qui est celle de Paris; on trouve, selon la règle que je viens de donner, que le plus petit crépuscule se fait à Paris, quand le soleil décline vers le midi de 6 degr. 50 min. Si on cherche maintenant le lieu dans l'ecliptique, on

* C. Clavius, In sphæram J. de Sacro-Bosco commentarius. Romæ 1606.

** Delambre in Connaissance des tems pour l'an 1822. Paris 1818.

*** In Bezug auf das Werk von Lulofs siehe die Literaturangabe am Schlusse der Abhandlung.

trouvera que le soleil doit être éloigné d'un des points équinoxiaux de de 17 degr. 25 minutes, c'est-a-dire, qu'on aura le plus petit crépuscule à Paris le 18 jour avant le premier équinoxe, et le 18 jour après l'autre équinoxe."*

Leider besitzen wir ausser dieser kurzen Notiz keine nähere Angabe über die Art, wie J. Bernoulli zu dem einfachen Resultate durch eine umständliche Rechnung gelangt ist. Man ist daher auf Hypothesen angewiesen, und so hat T. S. Davies in „The London and Edinburgh philosophical magazine and journal of science III. ser. 3 vol. London. Juli-December 1833" versucht, die Bernoulli'sche Lösung wieder herzustellen; der Titel der Abhandlung ist:

„On Bernoulli's solution of the problem of shortest twilight."

Nach einer kurzen Einleitung über die Geschichte des Problemes, welche übrigens nicht ganz verlässlich ist, stellt sich der Verfasser die folgende Aufgabe:

Gegeben sind zwei Almucantars; es ist die Polardistanz zu finden, bei welcher der Parallelkreis der Sonne zwischen den beiden Almucantars den kleinsten Bogen beschreibt.

Es seien in Figur 4: Z das Zenith,

P der Pol,

$LMNP'$ der Parallel zum Aequator,

LTN, ΠSR, MUP' drei Almucantars.

Setzt man

$$\sphericalangle TPN = t_1,$$
$$\sphericalangle TPP' = t_2,$$
$$ZN = 90^0 - h_1,$$
$$ZP' = 90^0 - h_2,$$
$$ZP = 90^0 - \varphi,$$
$$PN = 90^0 - \delta,$$

so ergeben die bekannten Formeln der sphärischen Astronomie:

$$t_1 = arc\cos\left[\frac{\sin h_1 - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta}\right],$$

$$t_2 = arc\cos\left[\frac{\sin h_2 - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta}\right]$$

und da

$$t_2 - t_1$$

ein Minimum werden soll, so muss:

* J. Bernoulli, Opera omnia. Lausannæ et Genevæ 1742. Tom. I. Aus Journal des Savans 1693. 3e Journal du 19. Janv. pag. 25 édit. de Paris.

$$\left\{\begin{array}{c}\dfrac{d(t_2-t_1)}{d\delta}=0\\[2mm] \dfrac{-\sin\varphi\cos^2\delta\cos\varphi+(\sin h_1-\sin\varphi\sin\delta)\cos\varphi\sin\delta}{\cos^2\varphi\cos^2\delta\sqrt{1-\left(\dfrac{\sin h_1-\sin\varphi\sin\delta}{\cos\varphi\cos\delta}\right)^2}}\\[2mm] -\dfrac{-\sin\varphi\cos^2\delta\cos\varphi+(\sin h_2-\sin\varphi\sin\delta)\cos\varphi\cos\delta}{\cos^2\varphi\cos^2\delta\sqrt{1-\left(\dfrac{\sin h_2-\sin\varphi\sin\delta}{\cos\varphi\cos\delta}\right)^2}}=0.\end{array}\right.$$

$$\frac{(\sin\varphi-\sin h_1\sin\delta)\sec\delta}{\sqrt{\cos^2\varphi-\sin^2h_1+2\sin\varphi\sin\delta\sin h_1-\sin^2\delta}}-\frac{(\sin\varphi-\sin h_2\sin\delta)\sec\delta}{\sqrt{\cos^2\varphi-\sin^2h_2+2\sin\varphi\sin\delta\sin h_2-\sin^2\delta}}=0$$

quadrirt und reducirt man die Gleichung, so ergiebt sich:

$$\left\{\begin{array}{l}\Big\{\sin^4\delta-2\sin\varphi\sin^3\delta\,\dfrac{1+\sin h_2\sin h_1}{\sin h_2+\sin h_1}-\cos^2\varphi\sin^2\delta\\[2mm] \qquad+2\sin\varphi\sin\delta\,\dfrac{1+\sin h_2\sin h_1}{\sin h_2+\sin h_1}-\sin^2\varphi\Big\}\sec^2\delta=0\end{array}\right.$$

oder

$$\left\{\begin{array}{l}\Big\{\sin^2\delta-\sin^2\delta\cos^2\delta+2\sin\varphi\sin\delta\,\dfrac{1+\sin h_2\sin h_1}{\sin h_2+\sin h_1}\cos^2\delta\\[2mm] \qquad-1+\cos^2\delta-\cos^2\delta\sin^2\varphi\Big\}\sec^2\delta=0\end{array}\right.$$

und daraus

$$\cos^2\delta\,.\sec^2\delta\left\{\sin^2\delta-2\sin\varphi\sin\delta\,\frac{1+\sin h_2\sin h_1}{\sin h_2+\sin h_1}+\sin^2\varphi\right\}=0,$$

woraus sich für $\sin\delta$ die beiden Werthe ergeben:

$$\sin\delta_1=\sin\varphi\,\frac{\cos\frac{1}{2}(h_2-h_1)}{\sin\frac{1}{2}(h_2+h_1)},$$

$$\sin\delta_2=\sin\varphi\,\frac{\sin\frac{1}{2}(h_2+h_1)}{\cos\frac{1}{2}(h_2-h_1)}.$$

Dies ist nach Davies die Lösung von Johann Bernoulli; weil aber dieser sowohl, als auch D'Alembert den Factor $\sec\delta$ zu frühzeitig fortliessen, erhielten dieselben eine Gleichung vierten Grades, welche die beiden nicht zum Probleme gehörigen Wurzeln

$$\sin\delta=\pm 1$$

enthält. Ich möchte aber sehr bezweifeln, dass dies wirklich die Auflösung der Aufgabe von Bernoulli ist; denn ausser einigen rein algebraischen Transformationen, die keine Schwierigkeit darbieten, und wegen deren Bernoulli wohl kaum so viel Worte vergeudet hätte, bietet diese Auflösung keine schwer einzusehenden Folgerungen; dagegen möchte ich mir die folgende Bemerkung erlauben: Zur Zeit Bernoulli's lagen sowohl die analytische Geometrie als auch die sogenannte sphärische Astronomie noch sehr in den Anfängen; in jenen Zeiten war man gewohnt, die Probleme der sphärischen Astronomie mit Hilfe von Betrachtungen über die Lage und Schnitte der Kreise auf der Kugel zu lösen, mit anderen Worten: die sphärische Astronomie war damals eine Art Geometrie der Kugeloberfläche; wer jemals Gelegenheit hat, ältere Werke dieser Art zu studiren, wird meine Bemerkung bestätigt finden und bald erkennen, wie sehr die einfachsten Aufgaben zu Complicationen führen, die wir heute mit Hilfe der sphärischen Trigonometrie mit einigen Zeilen erledigen. In der That werden wir im weiteren Verlaufe dieser Abhandlung sehen, wie sich die Auflösungen in dem Grade vereinfachen, als die Entwicklung der sphärischen Trigonometrie fortschreitet.

Die weiteren Bemerkungen von Davies übergehen wir hier, einmal, weil dieselben gegen die Arbeiten seiner Vorgänger nichts Neues enthalten, dann auch, weil dieselben viel an Klarheit und Durchsichtigkeit zu wünschen übrig lassen, und kehren wieder zum Beginn des 18. Jahrhunderts zurück.

IV.

Die ersten Jahrzehnte des 18. Jahrhunderts bringen fast keinen Fortschritt. Zum grössten Theile waren es nur mehr oder minder modificirte Reproductionen der synthetischen Methode von Nonius, die man mit dem modernen Hilfsmittel der Differentialrechnung zu vereinfachen trachtete; als Beispiel dafür wollen wir die Behandlung der Aufgabe nach l'Hôpital* durchführen. Scherffer, dessen „Institutiones astronomiæ theoreticæ" wir dieselbe entnehmen, bezeichnet ausdrücklich l'Hôpital als Gewährsmann.

Es sei in Figur 5: HO der Horizont, QT der Dämmerungskreis, AB der Aequator, ED ein Theil des Parallelkreises zum Aequator am Tage der kürzesten Dämmerung, ed ebenfalls ein Theil eines Parallelkreises, dem ED unendlich nahe, P der Südpol,

$$CK = \sin\delta, \quad OV\,(\perp CP) = \sin\varphi, \quad QX = \sin c.$$

Soll nun ED ein ausgezeichneter Werth sein, so muss sein:

$$Mm = Nn, \quad RE = SD, \quad Re = Sd, \quad \sphericalangle R = \sphericalangle S = 90^0;$$

daher $\triangle ERe \cong \triangle DSd$ und

$$Ee = Dd, \quad Gg = Ff, \quad \sqrt{Dd^2 - Gg^2} = DG - dg, \quad \sqrt{Ee^2 - Ff^2} = fe - FE;$$

ferner ist:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dy^2\left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right], \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}, \quad ds = dy\frac{r}{x},$$

es ist also: $r = CO = 1, \quad x = CG, \quad s = Dd, \quad dy = DG - dg,$

* F. G. de l'Hôpital (l'Hospital), Analyse des infiniment petits. Paris 1696.

$$\alpha)\quad CO : CG = Dd : DG - dg = JQ : JF = CO + JQ : CG + JF,$$

oder

$$1 : x = ds : dy = r' : x' = OX : GL.$$

Nun ist aber $\triangle COV \sim \triangle CKG \sim \triangle GFL$ und daher:

$$CO : CG = OV : GK, \quad GK : GL = CK : FL = CK : QX,$$

also da ist: $CG = \frac{GK}{\sin\varphi}, \quad GL = -\frac{GK \sin c}{CK} = -\frac{GK \sin c}{\sin\delta},$

so wird die Gleichung α):

$$1 : \frac{GK}{\sin\varphi} = 1 + \cos c : -\frac{GK \sin c}{\sin\delta}, \quad \sin\delta = -\sin c\, tg\, \frac{\varphi}{2}.$$

Diese Art der Beweisführung scheint auch in „J. Keill, Introductio ad veram astronomiam, Oxoniæ 1718" enthalten zu sein und ebenso in „P. C. Le Monnier, Institutions astronomiques ou leçons élémentaires d'astronomie, Paris 1746", das übrigens nur eine Uebersetzung des vorhergehenden ist.* Beide Werke waren mir ebenso unzugänglich wie eine Lösung von Emmerson, die Davies in seiner früher erwähnten Abhandlung citirt, ohne das Werk anzugeben, wo sich dieselbe befindet. Da nun Emmerson mehrere Werke verfasste, in denen das Problem enthalten sein kann, so ist es schwer, das Citat aufzufinden. Ebenso habe ich „P. L. M. de Maupertuis, Astronomie nautique, ou élémens d'astronomie, Paris 1743, übergehen zu dürfen geglaubt, da derselbe nach Delambre (Connaissance des tems pour 1818, Paris 1815) die Keill'sche Formel:**

$$\sin\delta = -\sin\varphi\, tg\, \frac{c}{2}$$

auf Grund einer Analyse findet, der er selbst nicht viel Vertrauen schenkte, weshalb er dieselbe in den folgenden Auflagen des angeführten Werkes unterdrückte. Auch das Werk „A. R. Mauduit, Principes d'astronomie sphérique, Paris 1765", scheint keinen Fortschritt in Bezug auf das Problem der kürzesten Dämmerung aufzuweisen, da Delambre diese Auflösung nur nebenbei erwähnt.

In den Berichten der Berliner Akademie für 1752 behandelt J. Kies die Aufgabe: „Trouver la déclinaison du soleil, ou il s'abaisse à un almucantarat donné audessous de l'horizont le temps le plus court". Histoire de l'Académie des sciences et belles lettres de Berlin, avec les Mémoires tirés des registres de cette Académie, Berlin 1752.

Der Verfasser findet aus den beiden Formeln

$$\cos t_1 = -\, tg\,\varphi\, tg\,\delta,$$

$$\cos t_2 = \frac{-\sin c - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta},$$

---

* Poggendorff giebt in seinem „Biograph.-literar. Handwörterbuch" für die erste Auflage „1745" als Jahreszahl an.

** So wenigstens nennt Delambre diese Formel ohne Rücksicht auf die Priorität Bernoulli's.

setzend:

$$\frac{d(t_2 - t_1)}{d\delta} = 0$$

$$sin\,\delta_1 = -\,sin\,\varphi\,tg\frac{c}{2},$$

$$sin\,\delta_2 = -\,sin\,\varphi\,ctg\frac{c}{2}.$$

Das Verfahren ist in vielen Punkten jenem von Davies ähnlich, so dass, wenn dieses wirklich die Bernoulli'sche Lösung darstellen würde, dies umsomehr von der Kies'schen Abhandlung gelten müsste, da dieselbe noch vielfach in der schwerfälligen Weise der älteren trigonometrischen Aufgaben die Auflösung giebt.

Eine ziemlich vollständige Zusammenfassung alles dessen, was über das Problem der kürzesten Dämmerung etwa bis zur Mitte des 18. Jahrhunderts geleistet wurde, giebt das Werk: „Joh. Lulofs, Einleitung zur mathematischen und physikalischen Kenntniss der Erdkugel. Aus dem Holländischen übersetzt von A. G. Kästner, Göttingen und Leipzig 1755." Darin wird zunächst in synthetischer Weise das Verfahren des Nonius dargestellt und bis zur Gleichung

$$sin\,\delta = -\,sin\,\varphi\,tg\,\frac{c}{2}$$

durchgeführt. Hierauf folgt ein kurzer historischer Ueberblick über die Arbeiten von Nonius, Clavius, Gregorius (D. Gregory, Astronomiæ physicæ et geometricæ elementa, Oxonoiæ 1702), Keill und l'Hôpital, die zum Theile schon von uns erledigt wurden. Am Schlusse fügt Kästner eine analytische Auflösung hinzu mit Hilfe der Formeln aus „Maupertuis, Discours sur la figure des astres (Paris 1742)." Dass Kästner es für nothwendig findet, einige einfache Relationen der sphärischen Astronomie, die heute in jedem Lehrbuche stehen, als aus einem Specialwerke entlehnt anzugeben, beweist, wie gering entwickelt noch in der Mitte des 18. Jahrhunderts die sphärische Trigonometrie war. Die Auflösung Kästner's ist wenig verschieden von jener, die Kies gegeben, und führt auf die bekannte Gleichung vierten Grades, worin die beiden Wurzeln

$$sin\,\delta = \pm 1$$

als unmöglich für die Sonne ausgeschlossen werden; er findet endlich als einzig mögliches Resultat:

$$sin\,\delta = -\,sin\,\varphi\,tg\frac{c}{2}.$$

Uebrigens macht Kästner den Versuch, analytisch zu entscheiden, ob ein Maximum oder Minimum vorliegt; doch ist diese Auseinandersetzung sehr wenig durchsichtig.

J. H. Lambert hat in seiner „Photometria sive de mensura et gradibus luminis colorum et umbræ, Augustæ Vindelicorum, 1760" die Auflösung insofern zu einem gewissen Abschlusse geführt, als er alle Eigenschaften der Seiten und Winkel des charakteristischen Dreiecks Zenith-Pol-Sonne am

Tage der kürzesten Dämmerung ableitet. Die Inhaltsangabe der betreffenden Paragraphen wird diese Aeusserung beweisen:

§ 987. Enthält Angaben über die Grösse c, sowie die daraus abgeleitete Höhe der Atmosphäre nach Varenius (gest. 1660) und Halley (gest. 1724).

§§ 988, 989, 990 und 991. Es wird zuerst die Fassung der Aufgabe aufgestellt und dann durch infinitesimale Betrachtungen bewiesen, dass die parallaktischen Winkel am Anfang und Ende der Morgendämmerung gleich sind. Da dieser Satz bisher noch nicht vorkam, wollen wir denselben an dieser Stelle beweisen.

Es sei in Figur 5: $HZON$ der Meridian, P und Q die Pole, ADE der Aequator, HDO der Horizont, $MSRL$ Parallel zum Aequator, $msrl$ Parallel dem früheren unendlich nahe, $HC = OK = -c$, CSK Parallel zum Horizonte.

Man ziehe die Meridiane

$$PrRQ \quad \text{und} \quad PsSQ.$$

Die Zeit, in welcher RS zurückgelegt wird, wird gemessen durch den Winkel RPS oder die Anzahl Grade, die der Centriwinkel zu rs fasst; für den Bogen $mrsl$ wird tv dieselbe Grösse sein. Nach der Natur der Maxima und Minima muss sein $rs = tv$, daher $rt = sv$.

Es ist aber $\quad Ss = Rr, \quad \sphericalangle vsS = \sphericalangle trR = 90^0,$

daher $$\Delta vsS \cong \Delta trR.$$

Zieht man die Höhenkreise

$$ZSN \quad \text{und} \quad ZRN,$$

so werden $$\sphericalangle PSZ = \sphericalangle PRZ = \sphericalangle rtR = \sphericalangle svS \sphericalangle p_1 = \sphericalangle p_2,$$

das heisst **die parallaktischen Winkel zu Beginn und am Ende der Morgendämmerung sind gleich.** Oder

$$\sphericalangle NSQ = \sphericalangle NRQ,$$

daher folgt, da $$NR = 90^0, \quad QR = QS,$$

$$\cos NQ = \cos QR \cos NRQ,$$

$$\cos NQ = \cos NS \cos QS + \sin NS \sin QS \cos NRQ;$$

setzt man beide Werthe von $\cos NRQ$ einander gleich und für die einzelnen Bogen und Winkel ihre usuellen Bezeichnungen, so wird

$$\sin \varphi = \sin c \sin \delta + \cos c \sin \varphi$$

und daraus, da δ eine negative Declination ist,

$$\sin \delta = -\sin \varphi \, tg \frac{c}{2}.$$

§ 992. In den Dreiecken PSZ und PRZ ist

$$PS = PR,$$

$$\sphericalangle PSZ = \sphericalangle PRZ,$$

daher $$\sin SZP = \sin RZP;$$

da aber diese Winkel, die Azimuthe, nicht gleich sein können, so muss nothwendig sein $SZP = 180^0 - RZP$, $a_2 = 180^0 - a_1$,

ferner $\sphericalangle SZP = \sphericalangle RZE$, $HG = RO$, $GD = DR$.

Die Höhenkreise, zwischen denen der Bogen RS liegt, den die Sonne am Tage der kürzesten Dämmerung durchläuft, stehen von Osten und Westen gleich weit ab.

§ 993. Aehnlich wird

$$\sin PZ : \sin PRZ = 1 : \sin ZPR = \sin ZS : \sin ZPS,$$

oder

$$\cos\varphi : \sin p_1 = 1 : \sin t_1 = \cos c : \sin t_2,$$

daher

$$\sin t_2 = \cos c \sin t_1.$$

Es ist aber $\cos t_1 = -\,tg\varphi\, tg\delta$ und aus diesen beiden Gleichungen erhält man die Dauer der kürzesten Dämmerung: $\tau = t_2 - t_1$.

§ 994. Es ist ferner, da

$$\sphericalangle aSb = \sphericalangle cRd \quad \text{und} \quad \sphericalangle Sab = \sphericalangle Rcd = 90^0,$$

ferner

$$Sa = Rc \quad \text{auch} \quad \Delta aSb \cong \Delta cRd,$$

daher

$$ab = cd, \quad ac = bd, \quad Sb = Rd.$$

§ 995. Allein es ist nach § 992

$$GD = DR, \quad \sphericalangle GDb = \sphericalangle RDd, \quad \sphericalangle bGD = \sphericalangle dRD = 90^0,$$

mithin $\Delta GDb \cong \Delta dRD$, also $Db = Dd$, $Gb = Rd$,

nach § 994 war $Rd = Sb$,

folglich

$$Sb = Gb = \frac{1}{2} SG = \frac{c}{2},$$

das heisst, der Aequator schneidet am Tage der kürzesten Dämmerung den Depressionsbogen in zwei gleiche Theile,* so dass wegen § 991

$$\sin aS = \cos PZ\, tg\, bS.$$

§ 996. Da aber $ac = bd$ (§ 994), $Db = Dd$ (§ 995),

so ist

$$ac = 2Db.$$

Es ist also in dem rechtwinkligen Dreiecke GDb die Hypotenuse die halbe Dauer der Dämmerung $\frac{\tau}{2}$, die Kathete $Gb = \frac{c}{2}$ und die andere Kathete GD gleich dem halben Bogen der Azimuthaldifferenz; wir erhalten somit, da der Winkel $ADH = 90^0 - \varphi$ ist,

$$\sin\frac{\tau}{2} = \frac{\sin\frac{c}{2}}{\cos\varphi}.$$

---

* Diese Eigenschaft hat bereits Nonius gekannt.

Auch Leonhard Euler hat sich mit der Aufgabe, die er „famosissimum problema" nennt, beschäftigt. Dieselbe befindet sich im XX. Bande der „Novi commentarii academiæ scientiarum Petropolitanæ pro anno 1765" und führt den Titel: „De trajectu citissimo stellæ per duos circulos almicantarath datos pro qualibet elevatione poli." Wegen ihrer ausserordentlichen Kürze und, weil das Prinzip, auf dem dieselbe basirt, auch in den folgenden Auflösungen häufig in Anspruch genommen wird, möge sie hier Platz finden.

In Figur 7 sei: $BAZPab$ der Meridian, Z das Zenith, P der Pol, $AmMa$ und $BnNb$ die beiden Almucantars, $ZB = Zb = h_2$, $ZA = Za = h_1$, $AB = h_2 - h_1 = c$.

Man sucht den Stern S, der am schnellsten von M nach N infolge der täglichen Bewegung gelangt; es sei:

$$PZ = 90^0 - \varphi, \quad \sphericalangle MPN = \tau.$$

Dies vorausgeschickt scheidet Euler zunächst jene Fälle aus, wo der Stern entweder nur einen oder gar keinen der beiden Almucantars durchschneidet; hierauf zieht er smn unendlich nahe SMN und es muss dann nach der Bedingung des Maximums oder Minimums sein:

$$\sphericalangle mPn = \sphericalangle MPN = \tau,$$

daher:

$$\sphericalangle MPm = \sphericalangle NPn = d\tau,$$

da ferner

$$PM = PN = 90^0 - \delta, \quad Pm = Pn = 90^0 - (\delta + d\delta),$$

so ist

$$\Delta MPm \cong \Delta NPn,$$

und somit

$$\sphericalangle PMm = \sphericalangle PNn;$$

subtrahirt man beiderseits die rechten Winkel

$$\sphericalangle SMP = \sphericalangle SNP = 90^0,$$

so folgt

$$\sphericalangle SMm = \sphericalangle SNn,$$

das heisst, am Tage der kürzesten Dämmerung schneidet der Kreis der täglichen Bewegung die beiden Almucantars unter gleichem Winkel.

Mit dieser Bedingung sind wir sofort in der Lage, das Problem aufzulösen. Es sei Figur 8: $\sphericalangle SMA = \sphericalangle SNB,$

und daher auch $\sphericalangle SMZ = \sphericalangle SNZ,$

da ferner $\sphericalangle PMS = \sphericalangle PNS = 90^0,$

so ist auch $\sphericalangle ZMP = \sphericalangle ZNP,$

das heisst: die parallaktischen Winkel sind gleich.

Es ist auch

$$ZM = ZA = h_1, \quad ZN = ZB = h_2, \quad PM = PN = 90^0 - \delta.$$

Die Dreiecke ZMP und ZNP haben also die Seite

gemeinsam; ferner ist
$$PZ = 90^0 - \varphi$$
$$PM = PN \quad \text{und} \quad \sphericalangle ZMP = \sphericalangle ZNP.$$

Schneiden wir also ab $NQ = MZ = h_1$, so wird $ZQ = h_2 - h_1 = c$, und da $\Delta PZM \cong \Delta QPN$, auch $ZP = PQ = 90^0 - \varphi$.

Ferner ist wegen
$$\sphericalangle ZPM = \sphericalangle QPN,$$
wenn man beiderseits den Winkel QPM subtrahirt:
$$\sphericalangle ZPQ = \tau.$$

Zieht man in dem gleichschenkligen Dreiecke die Winkel- und Basishalbirende PO, so folgt aus einem der rechtwinkligen Dreiecke z. B. ZOP:
$$\sin\frac{\tau}{2} = \frac{\sin\frac{c}{2}}{\cos\varphi}.$$

Um auch δ zu erhalten, betrachten wir das Dreieck PQO, woraus folgt:
$$\cos PQO = \frac{tg\frac{c}{2}}{ctg\,\varphi}, \quad \text{allein da} \quad \cos PQN = -\cos PQO = -\frac{tg\frac{c}{2}}{ctg\,\varphi},$$
so folgt aus Dreieck PQN:
$$\sin\delta = \sin\varphi\cos h_1 - \cos\varphi\sin h_1\, tg\frac{c}{2}\, tg\,\varphi, \quad \sin\delta = \frac{\sin\varphi}{\cos\frac{c}{2}}\cos\left(h_1 + \frac{c}{2}\right)$$
und da
$$h_2 - h_1 = c,$$
so ist
$$h_1 + \frac{c}{2} = \frac{h_2 + h_1}{2}, \quad \text{daher} \quad \sin\delta = \sin\varphi\frac{\cos\frac{h_2+h_1}{2}}{\cos\frac{h_2-h_1}{2}}.$$

In der französischen Encyclopädie* giebt D'Alembert eine Lösung des Problemes im Artikel „Crépuscule". Die Auflösung ist analytisch. Setzt man $\sin c = k$, $\sin\delta = s$, $\sin\varphi = h$, so findet man aus Fig. 9, wo wieder HZP der Meridian, Z das Zenith und P der Pol ist, wenn HO den Horizont, ho den Dämmerungskreis, ECR den Aequator, ecS den Parallel des Gestirnes vorstellen,
$$\Delta CcT \sim \Delta CPN, \quad \Delta CQR \sim \Delta CPN$$
und daraus
$$cT = \frac{sh}{\sqrt{1-h^2}}, \quad CR = \frac{k}{\sqrt{1-h^2}}.$$
Es ist aber
$$cS = cT + TS = cT + CR$$
und daher
$$cS = \frac{sh+k}{\sqrt{1-h^2}}.$$

cS ist der Sinus des Stundenwinkels am Ende der Abenddämmerung weniger 6^h; cT der Sinus des Stundenwinkels beim Untergange weniger 6^h,

* Encyclopédie au dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers. Berne et Lausanne 1782.

beide Werthe für den Radius $ce = \cos\delta = \sqrt{1-s^2}$. Setzt man diese Winkel t_2 und t_1, so wird

$$\sin(t_2 - 6^h) = \frac{sh + k}{\sqrt{1-h^2}\sqrt{1-s^2}} = u_2, \quad \sin(t_1 - 6^h) = \frac{sh}{\sqrt{1-h^2}\sqrt{1-s^2}} = u_1,$$

und es soll sein $\arcsin u_2 - \arcsin u_1 =$ ein Minimum, oder

$$\frac{du_2}{ds\sqrt{1-u_2^2}} - \frac{du_1}{ds\sqrt{1-u_1^2}} = 0.$$

Daraus ergiebt sich

$$s^4 + \frac{2h}{k}s^3 + (h^2-1)s^2 - \frac{2h}{k}s - h^2 = 0,$$

oder

$$(s^2-1)\left(s^2 + \frac{2hs}{k} + h^2\right) = 0.$$

Da die Wurzeln $s_{1,2} = \pm 1$ oder $\delta_{1,2} = \pm 90^0$ für die Sonne unmöglich sind, so folgt aus der übrig bleibenden quadratischen Gleichung:

$$s_{3,4} = -\frac{h}{k}(1 \mp \sqrt{1-k^2}),$$

$$\sin\delta_{3,4} = -\frac{\sin\varphi}{\sin c}(1 \mp \cos c),$$

$$\sin\delta_3 = -\sin\varphi\, tg\frac{c}{2},$$

$$\sin\delta_4 = -\sin\varphi\, ctg\frac{c}{2}.$$

Nachdem dann D'Alembert auf Grund einer nicht ganz einwurfsfreien Analyse nachweist, dass der Werth

$$\sin\delta = -\sin\varphi\, ctg\frac{c}{2}$$

unzulässig ist, indem er weder ein Maximum noch ein Minimum bedeutet*, stellt er als einzig mögliche Lösung den Werth

$$\sin\delta = -\sin\varphi\, tg\frac{c}{2}$$

auf. Noch hat Nicolaus v. Fuss im Berliner astronomischen Jahrbuche für 1787 (eingesendet wurde die Abhandlung 1784) die Aufgabe unter dem Titel behandelt:

„Leichte Methode, die Epochen und die Dauer der kleinsten oder kürzesten Dämmerung zu finden."

Das Verfahren ist wesentlich dasselbe, wie das von D'Alembert; auch v. Fuss findet die Gleichung vierten Grades, verwirft die Wurzeln

$$\sin\delta = \pm 1,$$

weil die Sonne niemals die Declination $\pm 90^0$ erreichen kann, sowie die Wurzel

$$\sin\delta = -\sin\varphi\, ctg\frac{c}{2},$$

weil dieselbe die Polhöhe in zu enge Grenzen einschliesst und nur so lange Giltigkeit hat, als

* Wir werden im späteren Verlaufe sehen, dass diese Ansicht unrichtig ist.

$$\sin\varphi \, ctg\frac{c}{2} < \sin 23\frac{1}{2}^0$$

bleibt. Es erübrigt also nur die Relation

$$\sin\delta = -\sin\varphi \, tg\frac{c}{2},$$

welche für jede Polhöhe eine bestimmte Bedeutung hat; endlich lehrt er die Dauer der Dämmerung durch dieselben Betrachtungen kennen, wie wir sie bereits bei Euler gefunden haben.

Zum Schlusse dieses Abschnittes wollen wir die analytische Methode von d'Arrest beifügen, weil dieselbe in gewissem Sinne die analytischen Lösungen abschliesst, wiewohl wir chronologisch etwas voraneilen; denn d'Arrest's Aufsatz befindet sich in „Astronomische Nachrichten" Bd. 46 Nr. 1085 (Altona 1857).

Die Bedingung für das Maximum oder Minimum der Dämmerung ist bekanntlich:

$$\frac{dt_2}{d\delta} - \frac{dt_1}{d\delta} = 0.$$

Betrachtet man die beiden Dreiecke Pol — Zenith — Sonne, so erhält man:

$$\odot) \qquad -\sin c = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t_2; \quad \cos t_1 = -tg\varphi \, tg\delta,$$

und

$$☾) \quad \begin{cases} \sin t_2 \cos\varphi = \sin p_2 \cos c; \quad \sin\varphi = -\sin\delta\sin c + \cos\delta\cos c\cos p_2 \\ \cos c\cos p_2 = \sin\varphi\cos\delta - \cos\varphi\sin\delta\cos t_2, \end{cases}$$

und für $c = 0$, also bei Sonnenaufgang:

$$♂) \; \sin t_1\cos\varphi = \sin p_1; \sin\varphi = \cos\delta\cos p_1; \quad \cos p_1 = \sin\varphi\cos\delta - \cos\varphi\sin\delta\cos t_1.$$

Aus den Gleichungen $\odot$) folgt:

$$\frac{dt_1}{d\delta} = \frac{tg\varphi}{\cos^2\delta\sin t_1}, \quad \frac{dt_2}{d\delta} = \frac{\sin\varphi\cos\delta - \cos\varphi\sin\delta\cos t_2}{\cos\varphi\cos\delta\sin t_2},$$

und mit Hilfe der Gleichungen ☾) und ♂):

$$\frac{dt_1}{d\delta} = \frac{ctg p_1}{\cos\delta}, \quad \frac{dt_2}{d\delta} = \frac{ctg p_2}{\cos\delta},$$

daher als Bedingung des Maximums oder Minimums: $p_1 = p_2$.

Dazu macht d'Arrest die Bemerkung, dass dieser Winkel nur zu den beiden Epochen Sonnenaufgang und Beginn der Morgendämmerung gleiche Werthe besitze, nicht aber während der ganzen Dauer der Dämmerung, wie dies Lalande in seiner Astronomie annehme. Aus der Bedingungsgleichung $p_1 = p_2$ findet man mit Hilfe von

$$\sin\varphi = -\sin\delta\sin c + \cos\delta\cos c\cos p \quad \text{und} \quad \cos p = \frac{\sin\varphi}{\cos\delta}$$

leicht die bekannte Formel:

$$\sin\delta = -\sin\varphi \, tg\frac{c}{2}.$$

Wir fanden:

$$\frac{d(t_2 - t_1)}{d\delta} = \frac{ctg p_2 - ctg p_1}{\cos\delta}.$$

Bildet man den zweiten Differentialquotienten, so wird

$$\frac{d^2(t_2-t_1)}{d\delta^2}=-\frac{1}{\cos^2\delta}\left[\frac{\cos\delta}{\sin^2 p_2}\frac{dp_2}{d\delta}-\frac{\cos\delta}{\sin^2 p_1}\frac{dp_1}{d\delta}-\sin\delta\,(ctg p_2-ctg p_1)\right].$$

Aus $\mathfrak{c}$) und $\mathfrak{d}$) folgt

$$\frac{dp_2}{d\delta}=-tg\,c\,cosec\,p_2-tg\,\delta\,ctg\,p_2,\quad \frac{dp_1}{d\delta}=-tg\,\delta\,ctg\,p_1,$$

daher

$$\frac{d^2(t_2-t_1)}{d\delta^2}=\frac{tg\,c}{\cos\delta\sin^3 p_2}+\frac{\sin\delta}{\cos^2\delta}\left[ctg\,p_2\left(1+\frac{1}{\sin^2 p_2}\right)-ctg\,p_1\left(1+\frac{1}{\sin^2 p_1}\right)\right],$$

also für

$$p_1=p_2,\quad \frac{d^2(t_2-t_1)}{d\delta^2}=\frac{tg\,c}{\cos\delta\sin^3 p},$$

der zweite Differentialquotient wird positiv, also findet ein Minimum statt.

Noch ergeben sich einige bemerkenswerthe Relationen; zunächst die schon von Lambert bewiesene Relation der Azimuthe: $a_1=180^0-a_2$, welche nach d'Arrest Delambre unrechtmässiger Weise für sich in Anspruch nimmt. Ferner findet man aus den Gleichungen:

$$\cos\varphi\sin t_2=\cos c\sin p_1=\cos c\cos\varphi\sin t_1,\quad \sin t_2=\cos c\sin t_1$$

eine Relation, die ebenfalls schon in Lambert's Photometria vorkommt.

Die Dauer der Dämmerung findet d'Arrest:

$$\sin^2\frac{t_2-t_1}{2}=\frac{1+\cos c\cos 2a_1}{2\cos^2\delta},*$$

es ist aber

$$\cos a_1=-\frac{\sin\delta}{\cos\varphi},\quad \sin\delta=-\sin\varphi\,tg\,\frac{c}{2},\ \text{und damit}\ \sin\frac{t_2-t_1}{2}=\frac{\sin\frac{c}{2}}{\cos\varphi}.$$

d'Arrest nennt diese Formel die Cagnoli'sche; ich weiss nicht, mit welchem Rechte, da sich dieselbe schon bei Lambert und Euler jedenfalls vor Cagnoli findet.

Zum Schlusse leitet d'Arrest aus der Gleichung:

$$\cos t_2-\cos t_1=-\frac{\sin c}{\cos\varphi\cos\delta}\ \text{und aus}\ \sin\frac{t_2-t_1}{2}=\frac{\sin\frac{c}{2}}{\cos\varphi}$$

die Relation ab:

$$\sin\frac{t_2+t_1}{2}=\frac{\cos\frac{c}{2}}{\cos\delta}.$$

V.

In diesem Abschnitte wollen wir Delambre's Arbeiten in Bezug auf die Dämmerung im Allgemeinen und das Problem der kürzesten Dämmerung insbesondere im Zusammenhange besprechen. Dieselben sind enthalten in den Werken:

---

* Diese Relation ergiebt sich leicht aus den Fundamentalformeln:

$$\sin\delta=\sin\varphi\sin h-\cos\varphi\cos h\cos a,\quad \cos\delta\cos t=\cos\varphi\sin h+\sin\varphi\cos h\cos a,$$
$$\cos\delta\sin t=\qquad\cos h\sin a.$$

1. Astronomie théorique et pratique. Paris 1814. tome I. chap. XIV.
2. Connaissance des temps pour l'an 1818. Paris 1815. Formules générales et nouvelles pour calculer les deux déclinaisons, qui correspondent à une durée donnée du crépuscule. Nouvelle démonstration du plus court crépuscule. De **Nonius**, de ses formules pour les crépuscules.
3. Connaissance des temps pour l'an 1822. Paris 1820. Kritik des Werkes: „Delle primarie formole spettanti alla luce crepuscolare, e del loro uso nella soluzione di diversi problemi di G. Calandrelli. Romæ 1818."

Was 1) anbelangt, so giebt **Delambre** darin zunächst eine unzulängliche Lösung, indem er in der betrachteten Gleichung die Declination der Sonne constant annimmt; er scheint diese Unzulänglichkeit selbst empfunden zu haben, obwohl dieselbe ein richtiges Endresultat liefert, weil er sich bemüssigt sieht, eine zweite, wie er selbst sagt, genauere Auflösung zu liefern, die sich auf die Eigenschaft der täglichen Bewegung stützt.

Es sei Figur 10: P der Weltpol, Z das Zenith des Beobachters, A die Sonne, $ZA = 90 + c$; für den Beobachter, der das Zenith Z hat, beginnt die Morgendämmerung; durch die scheinbare tägliche Bewegung möge der Declinationskeis PA mit seinem Ende A in den Horizont nach S gelangen; nimmt man indessen den Himmel als unbeweglich an, so nähert sich das Zenith dem Sonnenorte auf dem Kleinkreise ZmQ mit dem Pole in P, so dass

$$PZ = Pm = Pb = Pn = PQ.$$

Gelangt das Zenith von Z aus nach m, so dass $mA = 90^0$ ist, so geht die Sonne offenbar auf und die Morgendämmerung endet; es ist also der Bogen Zm des Kleinkreises ZmQ oder auch der $\sphericalangle ZPm = \tau$ dem Masse der Dämmerung gleich. Um denselben zu finden, ziehen wir den Bogen des grössten Kreises ZBm und fällen $PB \perp Zm$; dann ist

$$\sin\frac{\tau}{2} = \frac{\sin\frac{Zm}{2}}{\cos\varphi},$$

aber ΔZmA giebt:

$$Am + mZ > AZ, \quad 90^0 + mZ > 90^0 + c, \quad \frac{mZ}{2} > \frac{c}{2},$$

Setzt man also $\frac{mZ}{2} = \frac{c}{2} + x$, so ist:

$$\sin\frac{\tau}{2} = \frac{\sin\frac{c}{2}\cos x + \cos\frac{c}{2}\sin x,}{\cos\varphi}, \quad \sin\frac{\tau}{2} = \frac{\sin\frac{c}{2} + \cos\frac{c}{2}\sin x - 2\sin\frac{c}{2}\sin^2\frac{x}{2}}{\cos\varphi},$$

$$\sin\frac{\tau}{2} = \frac{\sin\frac{c}{2}}{\cos\varphi} + \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{c+x}{2}}{\cos\varphi}.$$

Da nun $\frac{c}{2}$ und $\frac{x}{2}$ kleine positive Winkel sind und jedenfalls

$$\frac{c}{2} + \frac{x}{2} < 90^0, \quad \text{so ergiebt sich } \sin\frac{\tau}{2} > \frac{\sin\frac{c}{2}}{\cos\varphi}$$

und die kleinste Dämmerung findet offenbar für $x = 0$ statt; dies geschieht, wenn sich das Dreieck ZmA auf den Bogen des grössten Kreises ZA reducirt; es ist dann $Zm = c$, $mA = 90^0$ und die halbe Dauer der Dämmerung:

$$\sin\frac{\tau}{2} = \frac{\sin\frac{c}{2}}{\cos\varphi}.$$

Die weiteren Entwickelungen sind für die Methode ohne Belang und können um so eher übergangen werden, weil sie Lambert gegenüber keinen Fortschritt bezeichnen, wiewohl Delambre gern eine oder die andere Eigenschaft für sich in Anspruch nehmen möchte.

Die Abhandlung 2 betreffend, gebührt Delambre unstreitig das Verdienst, die Sätze des Nonius in die Sprache der modernen Trigonometrie übertragen zu haben, wie dies gelegentlich der Arbeit von Nonius entsprechend gewürdigt wurde. Sonst enthält der Aufsatz noch eine Anzahl Formeln, das Problem der kürzesten Dämmerung betreffend, die entweder von minderem Belange oder schon anderswo angeführt sind.

Die dritte und letzte Abhandlung endlich ist rein polemischer Natur, und es findet sich darin kein irgendwie hervorzuhebendes Resultat.

Hier dürfte es am Platze sein, der Auflösungen des Problemes zu gedenken, die sich in dem Sammelwerke:

„The mathematical questions proposed in the Ladies' Diary and their original answers together with some new solutions from its commencement in the year 1704 to 1816. By Thomas Leybourn. London 1817. 4 vols."
vorfinden.

Die Aufgabe, die kürzeste Dämmerung für eine gegebene Polhöhe zu finden, taucht zuerst als Question 271 im Jahrgange 1746—1747 auf; die beiden Beantwortungen, die darauf einliefen, sind jedoch unzulänglich.

Ein anderes Mal wird die Aufgabe als Question 564 im Jahrgange 1766 bis 1767 vorgebracht und in befriedigender Weise mit Hilfe der stereographischen Projection gelöst; wir haben davon gelegentlich der Besprechung von Nonius Arbeit theilweise Gebrauch gemacht.

Im Appendix endlich finden sich noch Auflösungen von Wallace und zweier anonymen Verfasser „β Cygni" und „Astronomicus".*

Die Auflösung von Wallace ist rein synthetisch. In Figur 11 sei HO der Horizont, TW der Dämmerungskreis; Z das Zenith, P der Pol und RS der Bogen des Parallels am Tage der kürzesten Dämmerung. Man ziehe die grössten Kreise PR, PS und ZS und mit P als Pol beschreibe man den Kreisbogen ZNV; hierauf mache man $\sphericalangle ZPV = \sphericalangle RPS$ und verbinde die Punkte R und V durch einen grössten Kreisbogen. Addirt man zu den gleichen Winkeln ZPV und RPS den Winkel SPV, so ist $\sphericalangle RPV = \sphericalangle SPZ$; es ist aber auch $RP = SP$, $PV = PZ$ und daher

* Ich vermuthe, dass unter einem dieser Pseudonyme der bekannte englische Astronom J. Ivory sich verbirgt.

$\Delta RPV \cong \Delta SPZ$; daraus folgt, dass $RV = SZ = 90^0$ und es soll nun nach der Natur des Problemes der Winkel RPS oder VPZ ein Minimum werden; dies kann nur stattfinden, wenn der Bogen VNZ, der dem betreffenden Winkel proportional ist, seinen kleinsten Werth erhält, und dies ist wiederum nur der Fall (da RV eine constante Grösse $= 90^0$ besitzt), wenn er mit dem Bogen RV zusammenfällt; denn in jedem anderen Falle wäre nach der Eigenschaft der Dreiecke $ZV + VR > ZV + 90^0$ die Summe zweier Seiten grösser als die dritte; damit ist die Aufgabe erledigt, denn die Dauer der kürzesten Dämmerung und die Declination der Sonne ergeben sich wie bei Euler.

Die Auflösung von „β Cygni" ist principiell von der vorhergehenden nicht verschieden, weshalb wir von der Reproduction absehen. Anders verhält es sich mit der Auflösung des anderen Anonymus „Astronomicus". Diese Auflösung ist entlehnt aus „New Series of the Mathematical Repository", vol. I, art. XI, part. II. Sie ist so eigenartig und instructiv, dass wir eine kurze Darstellung nicht umgehen können.

Problem I. Für eine gegebene Polhöhe den Tag der kürzesten Dämmerung zu finden. Es sei Figur 12 P der Pol, Z das Zenith, $NPZS$ der Meridian, $HONS$ der Horizont, pq ein Theil des Dämmerungskreises. Es sei ferner H der Punkt, wo Morgens die Sonne aufgeht, K der Punkt, wo Abends die Dämmerung endet; durch H und K ziehe man den grössten Kreis $KOmH$, der in m halbirt werde, so dass also ist: $Km = mH$; da gleichzeitig PK und PH gleich sind der Poldistanz der Sonne am Tage der kürzesten Dämmerung, also wenn man von der Aenderung der Declination in der Zwischenzeit absieht, $PK = PH = 90^0 - \delta$, so steht Pm senkrecht auf KmH.

Aus dem Dreiecke ZPH folgt $0 = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t_1$, und aus dem Dreiecke ZPK $-\sin c = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t_2$, und es ist offenbar $t_2 - t_1 = \tau$; durch Subtraction der obigen Gleichungen findet man

$$\frac{1}{2}\sin c = \cos\varphi \cos\delta \sin\frac{t_2 - t_1}{2} \cdot \sin\frac{t_2 + t_1}{2},$$

oder

$$\frac{1}{2}\sin c = \cos\varphi \cos\delta \sin\frac{\tau}{2} \sin\frac{t_2 + t_1}{2}.$$

Es ist aber

$$\sphericalangle KPm = \sphericalangle \frac{KPZ + HPZ}{2}$$

und aus Dreieck KPm ergiebt sich:

$$\sin PK \sin KPm = \sin Km = \sin\frac{KH}{2} \quad \text{oder} \quad \sin\frac{KH}{2} = \cos\delta \sin\frac{t_2 + t_1}{2};$$

wir haben also sofort

$$\sin\frac{\tau}{2} = \frac{\sin c}{2\cos\varphi \sin\frac{KH}{2}}.$$

Ferner ist offenbar Bogen $HO = 180^0$, also $KH = 180^0 + KO$, und daher

$$\sin\frac{\tau}{2} = \frac{\sin c}{2\cos\varphi\cos\frac{KO}{2}}.$$

Aus dieser Gleichung ist unmittelbar ersichtlich, dass $\sin\frac{\tau}{2}$ ein Minimum wird, wenn $\cos\frac{KO}{2}$ sein Maximum erreicht oder der Winkel KO seinen kleinsten Werth erhält; es wird also die Dämmerungsdauer am kleinsten, wenn HOK senkrecht auf dem Horizonte $HSON$ steht oder durch das Zenith Z geht, das heisst, wenn das Azimuth der Sonne bei Sonnenaufgang dasselbe ist, als bei dem Ende der Abenddämmerung.

Zieht man $Pu \perp ZK$, so ist wegen

$$KP = HP \quad uK = \frac{KZH}{2} = 90^0 + \frac{c}{2},$$

und aus dem Dreiecke KPZ ergiebt sich:

$$\cos Zu : \cos uK = \cos PZ : \cos PK; \quad \cos\frac{c}{2} : -\sin\frac{c}{2} = \sin\varphi : \sin\delta,$$

$$\sin\delta = -\sin\varphi\, tg\frac{c}{2}.$$

Problem II. Die Polhöhe zu finden, unter welcher an einem gegebenen Tage das Minimum der Dämmerung stattfindet.

Ist in Figur 13: Z das Zenith, NS der Horizont, H der Ort des Sonnenunterganges, K der Ort des Endes der Abenddämmerung, $\gamma\lambda$ der Dämmerungskreis; ist ferner P der Pol, so ziehe man zu K und H die Declinationskreise und die Höhenkreise, sowie den grössten Kreis KH.

Da der Jahrestag bekannt ist, so kennen wir auch die Declination der Sonne und damit auch $PH = PK = 90^0 - \delta$. In dem Dreiecke HPK wird demgemäss sein $\sphericalangle HPK = \tau$ und dieser wird um so kleiner, je kleiner die Basis HK wird; in dem Dreiecke HZK wird aber HK am kleinsten, wenn sich dieses Dreieck auf einen Bogen des grössten Kreises reducirt, das heisst, wenn der Bogen $HK = c$ ist. Es wird also die Dämmerung am kürzesten sein, wenn der Pol eine solche Lage p hat, dass H auf den Punkt L fällt.

Zieht man $pm \perp KL$, so folgt aus dem Dreiecke pZK:

$$\cos mK : \cos pK = \cos mZ : \cos pZ, \quad \cos\frac{c}{2} : \sin\delta = -\sin\frac{c}{2} : \sin\varphi,$$

$$\sin\varphi = -\sin\delta\, tg\frac{c}{2}.$$

Um endlich noch die Länge der kürzesten Dämmerung zu finden, betrachten wir die Relation:

$$\sin Kpm = \frac{\sin Km}{\sin Kp}, \quad \text{oder} \quad \sin\frac{\tau}{2} = \frac{\sin\frac{c}{2}}{\cos\delta}.$$

(Schluss folgt.)

Recensionen.

A. Brill und M. Noether. **Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit.** Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Dritter Band. Berlin 1894. S. 107—566.

Als im September 1890 die Deutsche Mathematiker-Vereinigung ihren Anfang nahm, wurden in den Bremer Beschlüssen als wünschenswerth bezeichnet „ausführliche Referate über gemeinsam interessirende Gebiete der Mathematik". Skeptiker fragten damals, wer unter den Fachgenossen einer so mühevollen und selbstverleugnenden Arbeit sich unterziehen würde. Aber gleich in der folgenden Versammlung (Halle 1891) fand jener Wunsch Verwirklichung: Franz Meyer (Clausthal) erstattete einen mit Beifall aufgenommenen Bericht über die Fortschritte der projectiven Invariantentheorie im letzten Vierteljahrhundert. In Halle beschloss man, nunmehr ein Referat über die Theorie der algebraischen Functionen in Aussicht zu nehmen, und es wurde mit Freude begrüsst, dass Brill in Tübingen und Noether in Erlangen, die an der Entwickelung dieser Theorie während der letzten 25 Jahre einen hervorragenden Antheil gehabt hatten, zu diesem Berichte sich bereit erklärten.

Jetzt liegt der Bericht von Brill und Noether in dem dritten Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung vor, deren grössten Theil er bildet, umfasst er doch nicht weniger als XXIII u. 460 Seiten. Schon aus dieser Angabe geht hervor, welch' gewaltigen Stoff die Verfasser zu bearbeiten hatten. Und doch findet man sich in ihrem Berichte sehr leicht zurecht. Es ist das dadurch erreicht, dass dem Ganzen eine ausgezeichnete Disposition zu Grunde liegt und dass in typographischer Hinsicht Alles gethan ist, was dem Leser die Orientirung erleichtern kann. Ebenso wohlthuend berührt die ausserordentliche Sorgfalt und Gewissenhaftigkeit der Verfasser, die sich bis auf die kleinsten Einzelheiten in den Literaturangaben erstreckt; nur wer selbst geschichtliche Studien gemacht hat, weiss, welche mühevolle und zeitraubende Arbeit oft in wenigen Zeilen oder in einer Wendung des Ausdruckes verborgen ist.

Von dem überaus reichen Inhalte des Berichtes eine Vorstellung zu geben, ist an dieser Stelle unmöglich. Ich muss mich darauf beschränken, die Ueberschriften der zehn Abschnitte anzugeben, in die der Bericht getheilt ist, um daran einige Bemerkungen zu knüpfen. Diese Ueberschriften lauten:

I. Anfänge einer Theorie der algebraischen Curven und der Elimination: Von Descartes bis Euler und Bézout.

II. Periode der Begründung einer Theorie der Functionen: Lagrange, Gauss, Cauchy, Puiseux.

III. Das Abel'sche Theorem und das Umkehrproblem der hyperelliptischen Functionen: Abel bis Weierstrass.

IV. Riemann's Theorie der Abel'schen Functionen und ihr Ursprung.

V. Die geometrisch-algebraischen Richtungen (Plücker, Jacobi, Aronhold, Hesse, Riemann, Roch, Clebsch, Brill, Noether).

VI. Die Theorie der singulären Punkte (Cayley, Kronecker, Weierstrass, Hamburger, Noether, Halphen, Brill).

VII. Die Weierstrass'sche Richtung (Weierstrass, Christoffel).

VIII. Darstellung des Gebildes, seiner Formen und Functionen in invarianter Gestalt (H. Weber, Noether, Christoffel, F. Klein).

IX. Wurzelfunctionen und Wurzelformen. (Die Literatur ist zu gross, als dass hier Namen angegeben werden könnten.)

X. Algebraische Correspondenzen und ausgezeichnete Gruppen (Cayley, Zeuthen, Brill, Hurwitz).

Vermissen wird man in diesem Verzeichniss die auf den Begriffsbildungen der neueren Zahlentheorie beruhenden Theorien von Kronecker und Dedekind-Weber. Dass sie fehlen, ist so gekommen. Im Jahre 1891 hatte Kronecker sich bereit erklärt, durch Vermittelung einer jüngeren ihm nahestehenden Kraft, bei dem Unternehmen mitzuwirken, aber leider hat sein rasches Ende diesem Plane ein Ziel gesetzt, und bei der Fülle des Stoffes mussten die Verfasser sich entschliessen, diese Lücke unausgefüllt zu lassen. Sie haben indessen an den Stellen, wo die Untersuchungen jener Forscher mit andern Richtungen in der Theorie der algebraischen Functionen zusammentreffen, die bezüglichen Arbeiten berücksichtigt, und was fehlt, bildet ein in sich geschlossenes Ganze, das sehr gut für ein späteres, selbstständiges Referat geeignet wäre. Entsprechendes gilt in Bezug auf die neueren geometrisch-algebraischen Untersuchungen der Italiener (Segre, Castelnuovo etc.), die ebenfalls in dem Referate keinen Platz gefunden haben.

Weit eher ist zu befürchten, dass Mancher ein Zuviel finden wird in dem ersten Abschnitte, vielleicht sogar in den drei ersten Abschnitten des Berichtes. In der That hatten Brill und Noether, wie sie in der Vorrede berichten, ursprünglich beabsichtigt, eine kritisch-vergleichende Besprechung der verschiedenen Auffassungen zu geben, die gegenwärtig in der Theorie der algebraischen Functionen um die Herrschaft streiten. Jedoch hat dieser Plan im Laufe der Arbeit wesentliche Abänderungen erfahren, die zu verfolgen sehr lehrreich ist; handelt es sich doch hier um Fragen, die für die Gestaltung der weiteren Berichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung von entscheidender Bedeutung sind.

Zunächst stellte sich heraus, dass eine solche Vergleichung der verschiedenen Systeme „ohne den Rückhalt einer vorausgehenden knappen Darstellung ihres Inhaltes und ihrer Hilfsmittel, ihrer Grundlagen und Ziele gegenstandslos“ wäre, und so rückte die objective Berichterstattung in den Vordergrund. Jetzt handelte es sich darum, zu ermitteln, in welchem Verhältnisse die neu auftretenden Theorien zu den alten standen und welche wesentlich neuen Ideen sie brachten. „Indem wir einer Untersuchung solcher Beziehungen“, äussern sich die Verfasser, „und einer Erforschung der Quellen, aus denen die Autoren geschöpft haben, nicht auswichen, sahen wir uns zu rückwärtsgreifenden geschichtlichen Studien genöthigt, die um so mehr Bedürfniss und andererseits um so zeitraubender waren, als ein Werk, in welchem die Geschichte der Functionentheorie — etwa von dem Zeitpunkt der Erfindung der Differentialrechnung an — in einem für unsere Zwecke ausreichendem Umfange berücksichtigt wird, nicht existirt.“

Eine allgemeine Geschichte der neueren Mathematik, in diesem Sinne verstanden, kann gegenwärtig noch nicht geschrieben werden; in weiser Beschränkung hat Moritz Cantor erklärt, dass sein grosses Werk mit dem Auftreten Lagranges abbrechen solle. Unerlässliche Vorbedingung sind zusammenfassende Berichte über die Geschichte der einzelnen Disciplinen, Berichte derart, wie sie uns Brill und Noether für die algebraischen Functionen in meister- und musterhafter Weise gegeben haben.

Hoffen wir, dass sie Nachfolger finden! Paul Stäckel.

H. Poincaré. **Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste.** T. II: Méthodes de MM. Newcomb, Gyldén, Lindstedt et Bohlin. VIII et 479 pag. gr. 8°. Paris 1893. Gauthier-Villars.

Wir haben schon in der Besprechung des I. Bandes* das Ziel angegeben, welches sich der Verfasser für den II. Band steckt: eine kritische

* S. diese Zeitschrift, Hist.-liter. Abtheilung, Bd. 38, 1893, S. 58. Auf jene erste Besprechung muss ich bez. der hier gebrauchten Ausdrücke, wie „periodische“, „asymptotische“ Lösungen etc. und bez. der Eigenschaften dieser Lösungen verweisen. Bd. II ist mir erst 1896 zur Hand gekommen. N.

Discussion der von den Astronomen in den letzten zwei Decennien vorgeschlagenen und theilweise bereits in ausgedehntem Masse praktisch bewährten Reihenentwicklungen im Problem der drei Körper, und zwar auf ihren Vergleich, ihre mathematische Einordnung unter allgemeine Theorien über Differentialgleichungen und auf die Art ihrer Convergenz hin. Diese Discussion liegt nun in eingehender Weise vor, von den Gesichtspunkten geleitet, welche der Verfasser in jenem I. Bande theoretisch entwickelt hatte. Sie wird nicht nur den Mathematikern erwünscht sein, welche einen Einblick in die scheinbar sehr mannigfaltigen, neueren Rechnungsoperationen der Astronomen erhalten wollen, sondern den Letzteren selbst, die bei der Zielsicherheit ihrer Resultate die mathematische Berechtigung und Tragweite ihrer Methoden nicht ebenso sicher gestellt haben.

Die neueren Methoden haben das gemeinsam, dass sie die „säcularen" Glieder, welche die Zeit ausserhalb der trigonometrischen Zeichen enthalten und welche in den alten Theorien durch die als erste Näherung ungeeignete Kepler'sche Bewegung und dann durch Entwicklung nach ganzen Potenzen der störenden Masse μ entstanden waren, völlig haben verschwinden lassen: ein bedeutender Fortschritt, den man zunächst Hill, Newcomb und Gyldén verdankt. Die Methoden unterscheiden sich durch die Art der ersten Näherungsbahn, welche der Rechnung zu Grunde gelegt wird, durch die eingeführten Argumente, durch die Wahl der kleinen Parameter μ, nach deren Potenzen entwickelt werden soll, vor Allem durch die grössere oder geringere Freiheit, welche bei den successiven Näherungen obwaltet. In letzterer Beziehung zeichnet sich vor Allem das Gyldén'sche Verfahren aus, das auch da, wo die Newcomb-Lindstedt'schen Reihen versagen, noch anwendbar bleibt, nämlich im Fall einer nahezu ganzzahligen linearen Relation zwischen den eingeführten mittleren Bewegungen, und das auch die für diesen Fall berechneten Delaunay-Bohlin'schen Reihen im Punkte der Convergenz zu übertreffen gestattet. Aber während die bezeichneten Methoden in einem allgemeinen Fall der Dynamik zu absolut convergenten Entwicklungen führen würden, hat das Problem der drei Körper — wie Poincaré von den zu periodischen Lösungen „asymptotischen" Lösungen im Bande I nachgewiesen hat und wie er in diesem Bande wiederum von den genannten Reihen, welche übrigens im Wesentlichen mit den „asymptotischen" Lösungen identisch sind, einzeln nachweist — die besondere Eigenschaft, dass die Entwicklungen nach einem kleinen Parameter μ nur semiconvergent werden; nämlich, dass eine solche mit wachsender Gliederzahl bei festem μ sich nicht einem bestimmten Werthe nähert, wohl aber, wenn man an einem festen p^{ten} Gliede abbricht, sich von einem bestimmten Werthe nur um eine Grösse der Ordnung μ^{p+1} unterscheidet. Es nehmen nämlich die Coefficienten dieser Potenzreihen in μ die Gestalt an:

$$B = \sum_{m_1,\ldots m_n} \frac{B_m}{\sum_k m_k n_k^0} \cos(m_1 w_1 + \cdots + m_n w_n + h),$$

wo $w_i = n_i t + \omega_i$ ist, die ω_i und n_i Constanten sind, welch' letztere, die mittleren Bewegungen, selbst wieder von μ abhängen, n_i^0 die Werthe der n_i für $\mu = 0$ und wo die m_i ganze Zahlen sind; die Grösse h hängt von den n_i ab. Schon bei jedem Durchgang durch commensurable Werthe der n_i (periodische Lösungen), also bei kleinsten Aenderungen von μ, schwankt aber eine solche Reihe B in ihrer Convergenz hin und her, eine Reihe von Gliedern mit kleinen Nennern $\Sigma m_k n_k^0$ kann jedesmal, mindestens durch kleine Aenderungen der n_k^0, beliebig gross gemacht werden, so dass B eine ganz unstetige Function der n_i, also von μ wird, und die Potenzreihe in μ jedenfalls nicht gleichmässig convergiren kann.

Herr Poincaré entwickelt solche Verhältnisse besonders deutlich in Kapitel XVII, Nummer 189 an einem von Herrn Gyldén behandelten Fall einer besonderen linearen Differentialgleichung 2ter Ordnung mit Coefficienten, die nicht-periodische Functionen der Zeit sind, im Zusammenhang mit einer mathematisch interessanten, im functionentheoretischen Sinne vollständigen Erledigung der bekannten Gleichung mit irregulären Integralen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (q^2 + q_1 \cos 2t)\, x = 0,$$

wie auch an einer Reihe allgemeinerer Gleichungen im folgenden Kapitel XVIII. Von den übrigen Theilen des Buches heben wir aus Kapitel IX—XV, welche den sehr brauchbaren Newcomb-Lindstedtschen Reihen (von der vorhin bezeichneten Form) gewidmet sind, die Verallgemeinerungen auf Fälle hervor, die von den Urhebern nicht direct der Methode eingeordnet waren: es geschieht immer dadurch, dass den neu vorkommenden kleinen Grössen eine Ordnung in Bezug auf μ gegeben und nun von Neuem nach Potenzen von μ geordnet sind. Aus den letzten Kapiteln XIX—XXI, Bohlin'sche Reihen, nennen wir die Darstellung des Uebergangs von jenen Lindstedt'schen Reihen zu den Bohlin'schen, indem, im Falle einer für $\mu = 0$ genau, für kleine μ nahezu erfüllten ganzzahligen linearen Relation $\sum_k p_k n_k = 0$ zwischen den mittleren Bewegungen n_i, auch noch die Brüche $\frac{1}{\Sigma m_k n_k}$ eines Ausdrucks wie B nach Potenzen von μ entwickelt werden; und, wie schon in Acta Math. XIII, die geometrisch-anschauliche Discussion der dabei zu unterscheidenden drei Fälle, je nachdem die Winkelgrösse $\sum_k p_k y_k$ alle Werthe durchlaufen kann, oder zwischen zwei Grenzen schwankt (Libration), oder der Uebergangsfall eintritt. Bemerkenswerth ist dabei, dass Poincaré bei der Ausdehnung der Methode im Kapitel XXI, wie Gyldén und Bohlin, in dem Näherungsverfahren von selbst auf elliptische Functionen stösst, deren Periodenverhalten jene drei Fälle charakterisiren, so dass die Einführung dieser Functionen nicht nur als Kunstgriff erscheint. Ueber die Gyldén'schen Methoden selbst, deren Principien darin bestehen, einmal möglichst Alles auf lineare Differentialgleichungen zu reduciren, sodann darin, alle Glieder, welche sehr gross werden und die Convergenz verlangsamen würden, jeweils schon in die vorhergehende Näherung aufzunehmen, geben die Kapitel XVI—XVIII und XXI Aufschluss: so weittragend sie sind, hält sie Poincaré noch nicht für so innerlich befriedigend, als die übrigen der genannten Methoden. Das Kapitel XXI musste zwar noch ziemlich unvollständig bleiben, es knüpft aber glücklich an die Theorie der asymptotischen Lösungen des letzten Kapitels des I. Bandes an; insbesondere bringt es am Schluss ein ausgeführtes Beispiel, mit dessen Studium, wie mit dem einiger anderer Beispiele (Kapitel XVI—XIX), man am besten den Band beginnen wird, wenn man über die Schwierigkeiten des Gegenstandes und der Schreibweise des Verfassers leichter hinwegkommen will. — Zu dem Kapitel VI des ersten, XIV und XV des zweiten Bandes sind inzwischen schon weitere Ausführungen von mehreren Seiten her in den C. R. der Pariser Akad. erschienen.

M. NOETHER.

Bibliographie

vom 1. Juni bis 31. Juli 1896.

Periodische Schriften.

Physikalische Abhandlungen der preuss. Akademie der Wissenschaften. Aus dem Jahre 1895. Berlin, G. Reimer. 24 Mk. 50 Pf.

Sitzungsberichte der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften. Mathem.-physik. Classe 1896, Heft 1. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

Abhandlungen der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften. Mathem.-physik. Classe. 19. Band. Ebendaselbst. 12 Mk.

Nivellements-Ergebnisse der trigonometrischen Abtheilung der preuss. Landesaufnahme. 3. Heft (Pommern), 6. Heft (Posen). Berlin, Mittler & Sohn. à 1 Mk.

Landes-Triangulation von Preussen. 13. Theil (Regierungsbezirk Potsdam). Ebendaselbst. 12 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. 30. Jahrgang IV und 31. Jahrgang I. Leipzig, Engelmann. à 2 Mk.

Jahrbuch des königl. sächs. meteorologischen Instituts. 1894, zweite Hälfte. Chemnitz, Bülz. 10 Mk.

Meteorologische Beobachtungen der Magdeburger Wetterwarte. Bd. XIV, 1894. Magdeburg, Faber. 6 Mk.

Fortschritte der Physik im Jahre 1890, Jahrgang 46 (Physik der Materie, von Bernstein). Braunschweig, Vieweg. 20 Mk.

Reine Mathematik.

Schwering, K., Aufgaben aus der Arithmetik. Drei Lehrgänge. Freiburg i. B., Herder. compl. 2 Mk.

Schubert, H., Arithmetik und Algebra (Göschen-Sammlung). Leipzig, Göschen. 80 Pf.

Bürklen, O., Formelsammlung der Mathematik (Göschen-Sammlung). Leipzig, Göschen. 80 Pf.

Schmid, K., Hundert gelöste geometrische Aufgaben bayerischer Lehrer-Anstellungsprüfungen. München, Kellerer. 2 Mk. 20 Pf.

Rohn, K. und Papperitz, E., Lehrbuch der darstellenden Geometrie. 2 Bd. Leipzig, Veit & Co. 14 Mk.

Schlotke, J., Lehrbuch der darstellenden Geometrie. IV. Theil. Dresden, Kühtmann. 5 Mk.

Angewandte Mathematik.

Heger, R., Die Erhaltung der Arbeit. Hannover, Helwing. 8 Mk.

Friedländer, B. und J., Absolute oder relative Bewegung? Berlin, Simion. 1 Mk.

Rechenberg, G., Definitive Bahnbestimmung des Kometen 1835, I (Dissertation). Breslau, Schletter. 1 Mk.

Physik und Meteorologie.

Riecke, E., Lehrbuch der Experimentalphysik. 2. Bd. Leipzig, Veit & Co. 10 Mk.

Kerber, A., Beiträge zur Dioptrik. 2. Heft. Leipzig, Fock. 50 Pf.

Petri, R., Das Mikroskop. Berlin, Schoetz. 8 Mk.

Ebert, H., Magnetische Kraftfelder. 1. Theil. Leipzig, Barth. 8 Mk.

Weise, W., Die Kreisläufe der Luft. Berlin, Springer. 3 Mk.

Historisch-literarische Abtheilung.

Das Problem der kürzesten Dämmerung.

Von

Dr. KARL ZELBR

in Brünn (Mähren).

Hierzu Tafel VI Figur 1—16.

(Schluss.)

VI.

Mit der Einführung von Monge's Géométrie descriptive beginnt auch für die Behandlung astronomischer Probleme auf graphischem Wege eine neue Epoche. Man hatte zwar auch vor dieser Zeit die stereographische Projection zur Auflösung einzelner Aufgaben hier und da benützt, und namentlich die Engländer wussten diese Art vorzüglich in Anwendung zu bringen, wie ein flüchtiger Einblick in das schon einmal citirte Werk „Ladies' Diary" beweist; seit dem Auftreten von Monge wurde aber dieses Hilfsmittel sozusagen ausschliesslich zur Auflösung der verschiedensten Aufgaben gebraucht, und man kann sich von der Richtigkeit dieser Angabe am besten überzeugen, wenn man die leider mit dem dritten Bande abgeschlossene „Correspondance sur l'école impériale polytechnique" durchsieht, wobei man gleichzeitig einen Einblick in die ausserordentliche Fruchtbarkeit der Principien der darstellenden Geometrie erhält. In dem eben citirten Journale giebt Monge (tome I, pag. 148 ss.) dem Probleme der kürzesten Dämmerung die folgende Fassung: „Es werde eine gemeinsame Tangentialebene an zwei gerade Kegel gezogen, von denen der erste zur Achse die Verticale des Ortes hat, für den man die kürzeste Dämmerung sucht, und zur Basis den Almucantarat, in welchem die Sonne anfängt, die Dämmerung zu bewirken; der zweite Kegel hat zur Achse die Weltachse und ist die umhüllende Fläche des Raumes, welchen der Horizont bei der täglichen Bewegung beschreibt; die Berührungslinie an dem ersten Kegel schneidet die Basis in einem Punkte; errichtet man in diesem Punkte eine senkrechte Ebene auf die Weltachse, so wird diese Ebene den Declinationskreis der Sonne am Tage der kürzesten Dämmerung enthalten. Die beiden Kegel, an welche die gemeinsame Tangentialebene gezogen wird, haben ihre Spitze in A (Fig. 1); der erste Kegel hat zum Durchmesser der Basis bc; der zweite zur Erzeugenden die Gerade AB um die Achse AP."

Das Problem ist in der Form einer Aufgabe gestellt und die Élèven der école polytechnique werden von Hachette aufgefordert, den Beweis für die Richtigkeit der Auflösung zu liefern, während a. a. O. nur die Construction mit der geringsten Anzahl von Constructionslinien gegeben ist.

Es sei PQR der Meridian, BC der Horizont, bc der Dämmerungskreis und AP die Weltachse.

Man ziehe den Radius $AC = 1$ gesetzt die Tangente cd, welche die Verticale in d trifft, mache $Af = cd$ und $fe \perp Ad$, verlängere fe bis zum Durchschnitt mit der verlängerten Geraden AP in e; verbindet man e mit d, zieht $dl \perp ed$ und fällt von l die Gerade lg senkrecht auf AP, so ist RQ der Parallel der Sonne am Tage der kürzesten Dämmerung.

Beweis:

$$Af = cd = ctg\, c^*, \quad Ad = \frac{1}{sin\, c^*}, \quad fd = \frac{1 - cos\, c^*}{sin\, c^*},$$

$$ef = ctg\, c^*\, ctg\, \varphi, \quad dm = Ad - Am = \frac{1}{sin\, c^*} - sin\, c^* = \frac{cos^2 c^*}{sin\, c^*},$$

$$km = sin\, c^*\, ctg\, \varphi, \quad kA = \frac{sin\, c^*}{sin\, \varphi}.$$

Es ist aber $\Delta efd \sim \Delta lmd$, woraus:

$$ef : fd = md : lm, \quad lm = \frac{fd \,.\, md}{ef} = \frac{(1 - cos\, c^*)\, cos\, c^*}{sin\, c^*}\, tg\, \varphi,$$

$$kl = km + lm = sin\, c^*\, ctg\, \varphi + \frac{(1 - cos\, c^*)\, cos\, c^*}{sin\, c^*}\, tg\, \varphi,$$

$$kl = \frac{1}{sin\, \varphi\, cos\, \varphi\, sin\, c^*} \left\{ sin^2 c^*\, cos^2 \varphi + cos\, c^*\, sin^2 \varphi - cos^2 c^*\, sin^2 \varphi \right\},$$

$$kl = \frac{1}{sin\, \varphi\, cos\, \varphi\, sin\, c^*} \left\{ sin^2 c^* - sin^2 \varphi\, (1 - cos\, c^*) \right\}.$$

Aus dem Dreiecke kgl folgt:

$$kg = kl\, cos\, \varphi = \frac{1}{sin\, \varphi\, sin\, c^*} \left\{ sin^2 c^* - sin^2 \varphi\, (1 - cos\, c^*) \right\},$$

daher

$$Ag = Ak - kg = \frac{sin\, c^*}{sin\, \varphi} - \frac{1}{sin\, \varphi\, sin\, c^*} \left\{ sin^2 c^* - sin^2 \varphi\, (1 - cos\, c^*) \right\},$$

$$Ag = sin\, \varphi\, tg\, \frac{c^*}{2}.$$

Da ich nirgend den von Hachette geforderten Nachweis finden konnte, habe ich denselben in den „Astronomischen Nachrichten" Bd. 109 (1884) geliefert.*

Der Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems liege im Centrum der Erde; die positive X-Achse sei im Horizonte gegen den Südpunkt, die positive Y-Achse ebenfalls im Horizonte gegen den Westpunkt

* K. Zelbr: Ueber das Problem der kürzesten Dämmerung. Astron. Nachr. Bd. 109, Nr. 2602.

gerichtet; die positive Z-Achse endlich nach dem Zenith des Ortes; dann ist die Gleichung des ersten Kegels, der den Almucantarat $(-c)$ zur Basis hat,

$$z^2 \operatorname{ctg}^2 c = x^2 + y^2. \tag{1}$$

Der zweite Kegel, welcher die Umhüllende sämmtlicher Stellungen des Horizontes ist und dieselbe Spitze besitzt, hat zur Gleichung:

$$(x \cos\varphi + z \sin\varphi)^2 = (x^2 + y^2 + z^2)\cos^2\varphi. \tag{2}$$

Bei der Lösung des vorliegenden Problemes handelt es sich nicht so sehr um die Gleichung der Berührungsebene an beide Kegel, als um den Punkt der Basis des ersten Kegels, in welchem dieser von der Ebene berührt wird. Die Sache erledigt sich dann einfach so:

Man sucht zunächst den Durchschnitt der zweiten Kegelfläche mit der Leitlinienebene des ersten. Die Leitlinienebene hat zur Gleichung:

$$z = -\sin c. \tag{3}$$

Substituirt man diesen Werth in 2), so erhält man als Durchschnittscurve eine Parabel

$$y^2 - 2x \operatorname{tg}\varphi \sin c + \sin^2 c(1 - \operatorname{tg}^2\varphi) = 0 \quad \text{oder } y^2 - Ax + B = 0. \tag{4}$$

Es seien nun auf dem Almucantarat $(-c)$ zwei unendlich nahe Punkte mit den Azimuthen α_1 und α_2 gegeben, so ist allgemein

$$x = \cos c \sin\alpha, \quad y = \cos c \cos\alpha, \quad z = \sin c.$$

Legen wir durch die Punkte, deren Azimuthe α_1 und α_2 sind, eine Secante, so lautet deren Gleichung:

$$y = -\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1)\,x + \cos c\,\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)}. \tag{5}$$

Lässt man diese Secante zur Tangente werden, setzt also $\alpha_1 = \alpha_2$, so wird

$$y = -\operatorname{ctg}\alpha\, x + \frac{\cos c}{\sin\alpha} \quad \text{oder } y = -mx + n. \tag{6}$$

Sucht man die Bedingung, unter welcher diese Tangente auch die Parabel berührt, so erhält man $4mnA + A^2 - 4m^2B = 0$.

Substituirt man die Werthe für die angezeigten Grössen, so erhält man nach einigen Transformationen $\cos\alpha = \operatorname{tg}\varphi\,[\operatorname{ctg} c \pm \operatorname{cosec} c]$, und daher:

$$\begin{cases} \cos\alpha' = +\operatorname{tg}\varphi \operatorname{ctg}\frac{c}{2} \\ \cos\alpha'' = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\frac{c}{2}. \end{cases} \tag{7}$$

Der Kreis durch jeden dieser Punkte auf die Weltachse senkrecht gezogen ist ein Declinationskreis und man erhält seine Gleichung, wenn man aus den bekannten Relationen:

12*

$$sin\,h = sin\,\varphi\, sin\,\delta + cos\,\varphi\, cos\,\delta\, cos\,t$$
$$cos\,h\, cos\,a = - cos\,\varphi\, sin\,\delta + sin\,\varphi\, cos\,\delta\, cos\,t$$

den Stundenwinkel t eliminirt; es wird

$$sin\,\delta = - cos\,\varphi\, cos\,a\, cos\,h + sin\,\varphi\, sin\,h,$$

und da $h = - c$, so wird zunächst

$$sin\,\delta = - cos\,\varphi\, cos\,a\, cos\,c - sin\,\varphi\, sin\,c.$$

Substituirt man hierin die gefundenen Werthe von a, α' und α'' nach Gleichung 7), so ergiebt sich:

$$sin\,\delta' = - sin\,\varphi\, ctg\frac{c}{2}, \quad sin\,\delta'' = - sin\,\varphi\, tg\frac{c}{2}.$$

Im Folgenden sollen zunächst die graphischen Methoden erledigt werden. Zunächst folgt:

„G. Dandelin, Problème du plus court crépuscule. Correspondance mathématique et physique publiée par Garnier et Quetelet. Tome II, pag. 97—100. Gand. 1826.

Es sei Figur 2 die Himmelskugel stereographisch von einem Pole auf den Aequator projicirt und alle Parallelkreise, welche von der Sonne beschrieben werden, sind concentrisch mit demselben aus dem Centrum A' beschrieben. C' und H' sind bezüglich die Mittelpunkte des Dämmerungskreises und des Horizontes. Ist $\alpha\gamma$ der von der Sonne beschriebene Parallel, so ist offenbar $\sphericalangle\, \alpha' A' \gamma'$ proportional der Dauer der Dämmerung; ein zweiter unendlich naher Parallelkreis sei $\beta' \delta' \varphi'$. Soll der Winkel $\alpha' A' \gamma'$ ein Minimum sein, so müssen dessen Differentiale gleich sein, also

$$\sphericalangle\, \alpha' A' \beta' = \sphericalangle\, \gamma' A' \delta', \quad \text{und daher auch} \quad \Delta\, \alpha' A' \beta' \cong \Delta\, \gamma' A' \delta',$$

daraus folgt, dass

$$\sphericalangle\, \alpha' \beta' A' = \sphericalangle\, \gamma' \delta' A', \quad \text{und damit auch} \quad \sphericalangle\, \alpha' \beta' \delta' = \sphericalangle\, \gamma' \delta' \varphi',$$

das heisst: **Der gesuchte Parallelkreis muss den Horizont und den Dämmerungskreis unter gleichen Winkeln schneiden** (Euler 1765).

Um denselben zu finden, lege man durch den Horizont und den Dämmerungskreis einen Doppelkegel, dessen Spitze zwischen den beiden Kreisen liegt, während diese die Grundlinien der Kegel bilden, der Scheitelwinkel des Achsenschnittes beider Kegel ist gleich; durch die Spitze dieser Kegel lege man eine Ebene parallel zum Aequator, so wird dieselbe den Parallelkreis enthalten, weil er den Horizont und den Dämmerungskreis unter gleichen Winkeln schneidet. Der Beweis soll hier der Kürze wegen übergangen werden, da er in der folgenden ausführlichen Abhandlung von Liagre neben mehreren anderen geliefert wird. J. B. J. Liagre hat seine Arbeit in den „Nouveau mémoires de l'académie royale des sciences, des lettres et des beaux arts de Belgique, Tome XXX, Bruxelles 1857" veröffentlicht unter dem Titel: „Problème des crépuscules."

Nachdem in der Einleitung die Verdienste von Nonius (1573)*, Joh. und Nic. Bernoulli (1693), l'Hôpital, Le Monnier und Keill eine kurze Besprechung gefunden, bemerkt Liagre, dass Cagnoli mit Hilfe der höheren Analysis die Dauer der kürzesten Dämmerung bestimmte, indem er wie Mauduit von dem Satze Gebrauch machte, dass der parallaktische Winkel zu Beginn der Dämmerung und am Schlusse derselben gleich sei.

Die zweite Lösung des Problemes

$$sin\,\delta = -\,sin\,\varphi\;ctg\,\frac{c}{2}$$

bezieht Liagre auf eine Erscheinung, welche er Dämmerungscomplement (complément crépusculaire) nennt und zeigt, wie man sich von dem Vorhandensein dieser Wurzel a priori überzeugen kann; die analytische Lösung verlangt nämlich, dass der Parallelbogen der Sonne zwischen dem Horizonte und dem Dämmerungskreise ein Minimum sei; allein die Sonne passirt den Dämmerungskreis etwa nach Sonnenuntergang zweimal; einmal am Ende der Abenddämmerung und dann ist die Höhe der Sonne $-\,c$; dann aber auch zu Beginn der Morgendämmerung, wobei die Höhe gewissermassen

$$-\,(180^0 - c)$$

gesetzt werden kann; setzt man diesen zweiten Werth in die bekannte Formel für den Sinus der Declination am Tage der kürzesten Dämmerung ein, so erhält man in der That:

$$sin\,\delta = -\,sin\,\varphi\;tg\,\frac{180^0 - c}{2}, \quad sin\,\delta = -\,sin\,\varphi\;ctg\,\frac{c}{2}.$$

Weiter polemisirt Liagre gegen die Bemerkung d'Alembert's, als ob zur Zeit des Sommersolstitiums die längste Dämmerung existire. Dies hat, fährt er fort, nur so lange Geltung, als die Dämmerung noch vor Mitternacht endigt; es hört sofort auf richtig zu sein, sobald die Dämmerung imaginär wird, das heisst die Sonne die Höhe $-\,18^0$ nicht mehr erreicht. In diesem Falle rechnet Liagre die Abenddämmerung von Sonnenuntergang bis Mitternacht und die Morgendämmerung von Mitternacht bis Sonnenaufgang. Es sei beispielsweise $\varphi = 51^0$, so ist für

$$\delta = +\,23^0 27'$$

der halbe Tagbogen $8^h\,9^m\!.6$ und damit die Abend- oder Morgendämmerung, wenn man von der Zeitgleichung absieht,

$$12^h - 8^h\,9^m\!.6 = 3^h\,50^m\!.4,$$

während die längste Dämmerung dann stattfindet, sobald, abgesehen von Refraction, Sonnenhalbmesser und Parallachse, die Sonnendeclination den Werth erreicht:

$$\delta = 90^0 - \varphi - c = 21^0.$$

* Die Jahresangabe scheint sich, wenn kein Irrthum vorliegt, auf eine spätere Ausgabe von Nonius „De crepusculis" zu beziehen.

Dies findet beiläufig am 25. Mai und am 18. Juli statt. Delambre, sagt Liagre weiter, findet in seiner Astronomie ausser der Epoche der kürzesten Dämmerung noch deren Dauer nach Cagnoli,* ferner die Eigenschaften der Azimuthe und des parallaktischen Winkels; dagegen vermisst man, wie uns wenigstens scheint, die charakteristische Eigenschaft, dass zur Zeit des Minimums der Parallel der Sonne den Horizont und den Dämmerungskreis unter gleichen Winkeln schneidet, welche Dandelin in der „Correspondance mathématique et physique (1826)" gefunden hat.**

Die Deutung der zwei Wurzeln des Problemes

$$\sin\delta_1 = -\sin\varphi\, tg\frac{c}{2}, \quad \sin\delta_2 = -\sin\varphi\, ctg\frac{c}{2}$$

führt Liagre auf die Einführung zweier neuen Perioden; die Periode „physischer Tag (jour physique)" umfasst den astronomischen Tag und seine zwei Dämmerungen; die bereits erwähnte Periode „Dämmerungscomplement (complement crépusculaire)" ist der Ueberschuss des physischen Tages über eine Dämmerung. Die Aenderungen in der Länge des astronomischen Tages befolgen nicht dasselbe Gesetz, wie die der Dämmerungen, und so fällt die kürzeste Dämmerung nicht mit dem Wintersolstitium zusammen, da in gewissen geographischen Breiten die Aenderungen der Dämmerung jene des astronomischen Tages vernichten können. Dasselbe ist mit dem Dämmerungscomplement der Fall, das wieder nicht auf die Epoche des kürzesten physischen Tages fällt, weil das Dämmerungscomplement nur eine Dämmerung, der physische Tag deren zwei enthält.

Das Problem lässt sich geometrisch in voller Allgemeinheit etwa in folgende Worte fassen:

„Das Minimum der Dämmerung, des Dämmerungscomplementes und des physischen Tages wird für eine gegebene geographische Breite durch die Betrachtung dreier gerader Kegel erhalten, welche zur Achse die Verticale des gegebenen Ortes haben. Die ersten beiden Kegel gehen durch den Dämmerungsbogen und den Horizont und der eine von ihnen hat die Spitze ausserhalb, der andere innerhalb der beiden Leitebenen; der dritte Kegel ist eine Tangentialfläche an die Himmelskugel längs des Dämmerungskreises. Legt man durch die Spitzen dieser drei Kegel parallele Ebenen zum Aequator, so schneiden dieselben die Himmelskugel in drei Parallel-

* Auch hier findet sich der Irrthum, als ob Cagnoli die schon von Lambert gefundene Formel $\sin\frac{\tau}{2} = \frac{\sin\frac{c}{2}}{\cos\varphi}$ zuerst aufgestellt hätte.

** Auch hier liegt ein Irrthum Liagre's vor, da diese Eigenschaft, wie wir auch seinerzeit angezeigt haben, eine Entdeckung Euler's (1765) ist.

kreisen; den ersten beschreibt die Sonne am Tage des kürzesten Dämmerungscomplementes; den zweiten am Tage der kürzesten Dämmerung; den dritten zur Zeit des kürzesten physischen Tages."

In der ersten Epoche macht der Parallel mit dem Horizonte und dem Dämmerungskreise supplementäre Winkel; in der zweiten sind die Winkel gleich; in der dritten schneidet der Parallelkreis den Horizont und Dämmerungskreis unter rechten Winkeln. So oft der eine oder der andere Durchschnitt nicht stattfindet, bedeutet dies, dass die betreffende Erscheinung für den gegebenen Ort imaginär ist.

Die verschiedenen sich darbietenden Fragen sind die folgenden:

a) Für einen gegebenen Ort und Tag die Azimuthe und Stundenwinkel zu finden, welche dem Anfange und dem Ende der Dämmerung entsprechen, sowie die ganze Dauer der Erscheinung zu bestimmen.

b) Für eine gegebene geographische Breite die Epochen der längsten und kürzesten Dämmerung, sowie ihre Dauer und die Azimuthe und Stundenwinkel zu Beginn und am Ende der Dämmerung zu finden.

c) Die geographische Breite des Ortes zu bestimmen, wo für einen gegebenen Tag die längste oder kürzeste Dämmerung stattfindet.

d) Die Dauer des physischen Tages und des Dämmerungscomplementes zu finden, das ist für einen gegebenen Ort die Dauer des astronomischen Tages vermehrt um seine zwei Dämmerungen oder auch nur um eine zu bestimmen; die kürzeste Dauer dieser Grössen für den betreffenden Ort zu suchen.

Es sei Figur 3: Z das Zenith, P der Pol, HO der Horizont, CR der Dämmerungskreis, EQ der Aequator, eq der Parallel der Sonne; die Dreiecke ZPS und ZPS' ergeben dann folgende Relationen:

$$1)\qquad \cos a_1 = \frac{\sin\delta}{\sin\varphi},$$

$$2)\qquad \cos a_2 = \frac{\sin\delta + \sin\varphi\sin c}{\cos\varphi\cos c},$$

$$3)\qquad \cos t_1 = -\,tg\,\varphi\, tg\,\delta,$$

$$4)\qquad \cos t_2 = -\,tg\,\varphi\, tg\,\delta - \frac{\sin c}{\cos\varphi\cos\delta},$$

und daher

$$5)\qquad \sin a_1 = \frac{\sqrt{\sin^2\varphi - \sin^2\delta}}{\cos\varphi},$$

$$6)\qquad \sin a_2 = \frac{\sqrt{\cos^2 c - \sin^2\delta - \sin^2\varphi - 2\sin\delta\sin c\sin\varphi}}{\cos\varphi\cos c},$$

$$7)\qquad \sin t_1 = \frac{\sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\delta}}{\cos\varphi\cos\delta},$$

$$8)\qquad \sin t_2 = \frac{\sqrt{\cos^2 c - \sin^2\varphi - \sin^2\delta - 2\sin c\sin\varphi\sin\delta}}{\cos\varphi\cos\delta}.$$

Aus Gleichung 3) und 4), 7) und 8) erhält man leicht:

$$\cos t_1 - \cos t_2 = \frac{\sin c}{\cos\varphi\cos\delta},$$

$$\sin t_1 \pm \sin t_2 = \frac{\sqrt{\cos^2\varphi - \cos^2\delta}}{\cos\varphi\cos\delta} \pm \frac{\sqrt{\cos^2 c - \sin^2\varphi - \sin^2\delta - 2\sin c\sin\varphi\sin\delta}}{\cos\varphi\cos\delta},$$

woraus durch Division:

$$9)\quad tg\frac{t_2 - t_1}{2} = \frac{\sin c}{\sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\delta} + \sqrt{\cos^2 c - \sin^2\varphi - \sin^2\delta - 2\sin c\sin\varphi\sin\delta}},$$

$$10)\quad tg\frac{t_2 + t_1}{2} = \frac{\sin c}{\sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\delta} - \sqrt{\cos^2 c - \sin^2 - \varphi\sin^2\delta - 2\sin c\sin\varphi\sin\delta}}.$$

Nun untersucht Liagre zunächst mit Hilfe der Gleichung 9), welche Bedingungen für eine reelle Dämmerung stattfinden müssen, wo eine längste Dämmerung stattfinden kann und ähnliche Fragen, wie sie zum Theil schon von Euler erledigt wurden.

Durch Differentiation und Annullirung der Gleichung 9) erhält er hierauf die beiden bekannten Wurzeln für den Sinus der Declination:

$$11)\quad \sin\delta_1 = -\sin\varphi\, tg\frac{c}{2},$$

$$12)\quad \sin\delta_2 = -\sin\varphi\, ctg\frac{c}{2}.$$

Die Gleichung 10) giebt auf gleiche Weise die Wurzeln für das Minimum des Dämmerungscomplementes:

$$11^*)\quad \sin\delta_1 = -\sin\varphi\, tg\frac{c}{2},$$

$$12^*)\quad \sin\delta_2 = -\sin\varphi\, ctg\frac{c}{2}.$$

Die Formel 11) wird sodann wegen ihrer Giltigkeit für jede Polhöhe als Lösung des Problems angenommen und dann als Dauer der kürzesten Dämmerung gefunden:

$$13)\quad \sin\frac{t_2 - t_1}{2} = \frac{\sin\frac{c}{2}}{\cos\varphi}.$$

Für den Aequator ($\varphi = 0^0$) ergiebt sich

$$t_2 - t_1 = c = 1^h\,12^m,$$

die kürzeste Dämmerung, die überhaupt auf der Erde stattfinden kann.

Mit Hilfe des Ausdruckes

$$\sin\delta_1 = -\sin\varphi\, tg\frac{c}{2}$$

findet Liagre aus den Formeln 1) und 2) die Relation $a_1 + a_2 = 180^0$, sowie aus den Dreiecken ZPS und ZPS'

$$S = S',$$

die Gleichheit der parallaktischen Winkel, woraus wieder folgt, dass der Parallel der Sonne den Horizont und Dämmerungskreis unter gleichen

Winkeln schneidet; dieser Satz, den Liagre für Dandelin in Anspruch nimmt, ist, wie bekannt, bereits von Euler gefunden worden.

Wir haben bereits zu Anfang der Abhandlung von Liagre nachgewiesen, dass die zweite Wurzel

12) und 12*) $$\sin\delta_2 = -\sin\varphi \, ctg\frac{c}{2}$$

für das Minimum des Dämmerungscomplementes gilt, wie sich dies auch aus der analytischen Behandlung ergiebt. Mit Hilfe derselben ergiebt sich aus den Formeln 1) und 2) $a_1 = a_2$ und aus den Dreiecken ZPS und ZPS' (Fig. 4):

$$\sin S = \sin S', \quad tg\,S = \sin a_1 \, ctg\,\varphi, \quad tg\,S' = -\sin a_2 \, ctg\,\varphi,$$

daher

$$S = 180^0 - S'.$$

Berücksichtigt man, dass SZ und SZ' senkrecht auf HO und CR stehen, so folgt daraus, dass die beiden Winkel, unter denen der Parallel der Sonne am Tage des kürzesten Dämmerungscomplementes den Horizont und den Dämmerungskreis schneidet, sich zu 180^0 ergänzen.

Um endlich die dritte Frage nach dem Minimum des physischen Tages zu erledigen, betrachten wir die Gleichung

$$-\cos T = \frac{\sin\varphi\sin\delta + \sin c}{\cos\varphi\cos\delta},$$

woraus sich durch Differentiation und Annullirung ergiebt:

$$\sin\varphi + \sin\delta\sin c = 0$$

und daher:

14) $$\sin\delta = -\frac{\sin\varphi}{\sin c}.$$

Für die Dauer des kürzesten physischen Tages erhalten wir:

15) $$tg\,T = -\frac{ctg\,c}{\cos\delta},$$

als Azimuthalbedingung besteht:

$$\cos a_1 : \cos a_2 = 1 : \cos c = \cos 0^0 : \cos c,$$

das heisst, die Cosinus der Azimuthe verhalten sich wie die Radien des Horizontes und des Dämmerungskreises. Endlich findet man noch, dass das Dreieck ZPS' rechtwinklig ist in S'; denn

$$\cos a_2 = -\frac{tg\,\varphi}{tg\,c} \quad \text{und} \quad \sin T = \frac{\cos c}{\cos\varphi},$$

$$\cos a_2 = -\sin T\frac{\sin\varphi}{\sin c} = \sin T \sin\delta.$$

Wir übergehen hier die zum Theile neuen und interessanten Relationen, die sich an die Bedingung dieser drei Minima knüpfen und kommen zum Schlusse zu den geometrischen Constructionen:

1. Um den Parallel der Sonne zur Zeit der kürzesten Dämmerung zu construiren, ziehe man in Figur 5 mit den bekannten Bezeichnungen die Geraden HR und CO, die sich in K schneiden; dann ist K die Spitze des Doppelkegels mit den Leitlinien HO und CR; zieht man KF senk-

recht auf die Weltachse PD, so ist diese Senkrechte ein Stück des Parallels eq (Dandelin 1826).

Denn da $\sphericalangle HOC = \frac{c}{2}$, $\sphericalangle PDO = \varphi$, so folgt aus dem rechtwinkligen Dreiecke FDK, $DO = 1$ gesetzt:

$$FD = DK \sin\varphi = \sin\varphi \, tg \frac{c}{2},$$

FD aber ist der Sinus der Declination und negativ also:

$$\sin\delta = - \sin\varphi \, tg \frac{c}{2}.$$

Man sieht gleichzeitig, dass eq den Dämmerungskreis nur so lange schneidet, als

$$90^0 - \varphi > \frac{c}{2}.$$

In Figur 6 sei irgend eine Erzeugende des Doppelkegels GKG' gezogen; construirt man den Kreis, welchen der Durchschnitt der Himmelskugel mit der durch GKG' gelegten Ebene bildet, so soll nachgewiesen werden, dass die Winkel α und α'' gleich sind. Zunächst ist klar, dass die Winkel in G und G' durch die Tangenten gemessen werden, welche man an die bezüglichen Kreise zieht. Die Tangenten an die Leitlinienkreise in G und G' sind parallel und folglich die von diesen Tangenten und der sie schneidenden Sehne GG' gebildeten Winkel einander gleich, insofern dieselben auf verschiedenen Seiten liegen, wie etwa α und α''; andererseits sind auch die von den Tangenten in G und G' an den Kreis $GG''G'$ und von der Sehne GG' gebildeten Winkel einander gleich, mithin auch deren Differenzen

$$\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha', \quad \text{und da} \quad \sphericalangle \alpha' = \sphericalangle \alpha'', \quad \text{so ist} \quad \sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha''.$$

2. Um den Parallel am Tage des kürzesten Dämmerungscomplementes zu construiren, sei in Figur 7 die Bedeutung der Buchstaben die bekannte. Der Kegel mit der Spitze in K umfasst als Leitlinien HO und CR. Man ziehe Kqe senkrecht auf die Weltachse PD, so ist eq der Parallelkreis der Sonne am Tage des kürzesten Dämmerungscomplementes. Es ist, wie leicht einzusehen, $DF = DK \sin\varphi$, $DK = ctg \frac{c}{2}$, also, DO wieder gleich eins gesetzt, $\sin\delta = - \sin\varphi \, ctg \frac{c}{2}$.

Was die Beweisführung für $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha'$ anlangt (Fig. 8), so ist dieselbe analog der früher gegebenen, kann also der Kürze halber übergangen werden; auch hier ist es einleuchtend, dass ein Durchschnitt der beiden Kreise HO und CR mit dem Parallel nur stattfinden kann, wenn $\varphi < \frac{c}{2}$ ist.

3. Es erübrigt noch, den Fall des kürzesten physischen Tages zu betrachten.

In diesem Falle (Fig. 9) ziehe man die Tangente KR an den Dämmerungskreis CR; es ist dann:

$$DK = DR \operatorname{cosec} c, \quad DF = DK \sin\varphi = \frac{\sin\varphi}{\sin c}.$$

Die Gerade Ke wird die beiden Geraden HO und CR nur so lange schneiden, als die Relation gilt: $\varphi < c$.

Dass der Parallel der Sonne eq den Dämmerungskreis rechtwinklig schneidet, ist ohne weiteren Beweis aus der Construction zu entnehmen.

In dem von Moigno herausgegebenen Journal „Les Mondes, revue hebdomadaire des sciences et de leurs applications, Paris 1864, vol. V" hat E. Barbier eine Construction, das Problem der kürzesten Dämmerung betreffend, gegeben, die sich nicht wesentlich von der Liagre's unterscheidet, weshalb wir davon hier Umgang nehmen und dieselbe nur der Vollständigkeit wegen anführen. Endlich hat H. Cranz unter dem Titel: „Zur geometrischen Theorie der Dämmerung" eine Abhandlung im 31. Jahrgange (1886) der „Zeitschrift für Mathematik und Physik" veröffentlicht. Mit Hilfe der stereographischen Projection werden dort die Aufgaben über die kürzeste Dämmerung gelöst; doch bietet der Aufsatz nichts wesentlich Neues gegen seine Vorgänger.

VII.

In diesem Abschnitte soll noch einer Reihe älterer Methoden gedacht werden, die aus irgend einem Grunde in den vorhergehenden Abtheilungen keinen Platz finden konnten, und gleichzeitig sollen die rein trigonometrischen Auflösungen ihre Erledigung finden.

Wir haben seiner Zeit den Bericht über die rein analytischen Methoden mit der Arbeit von d'Arrest abgeschlossen, sowie die zum Theile synthetischen Methoden mit den Arbeiten von Delambre, um die constructiven Auflösungen Monge's und seiner Nachfolger zu besprechen.

Mit den Arbeiten von Delambre ungefähr gleichzeitig, ja sogar etwas früher, erschien die „Astronomie" von J. G. F. v. Bohnenberger (Tübingen 1811), worin die Auflösung des Problemes der kürzesten Dämmerung in folgender Form gegeben ist:

Es sei in Figur 10: Z das Zenith, P der Pol, H der Punkt, wo die Sonne aufgeht, S der Punkt, wo die Morgendämmerung beginnt, also:

$$PH = PS; \text{ es werde angenommen: } \sphericalangle PHZ = \sphericalangle PSZ.$$

Construirt man nun den Punkt S' so, dass

$$ZS = ZS', \quad \sphericalangle S'PH' = \sphericalangle SPH, \quad PH' = PS'$$

und verbindet H mit H' und S mit S' durch Bogen grösster Kreise, so ist

$$\sphericalangle SPS' = \sphericalangle HPH'$$

und daher

$$\Delta PSS' \cong \Delta PHH', \quad \sphericalangle PSS' = \sphericalangle PHH'.$$

Nach der Annahme ist aber

$$\sphericalangle ZHP = \sphericalangle ZSP, \quad \text{also} \quad \sphericalangle ZSS' = \sphericalangle ZHH'.$$

Man mache $S\nu = ZH$, so ist

Es ist aber $\Delta ZHH' \cong \Delta \nu SS'$, also $\nu S' = ZH'$.

$$Z\nu + \nu S = Z\nu + ZH = ZS = ZS' < Z\nu + S'\nu < Z\nu + ZH', \; ZH < ZH'.$$

Da aber $\sphericalangle S'PH' = \sphericalangle SPH$, so gelangt die Sonne S in derselben Zeit von S nach H als von S' nach H'; allein wegen $ZH < ZH'$ liegt H' noch unter dem Horizonte, deshalb wird S' mehr Zeit brauchen, denselben zu erreichen, als S; ebenso wird der Beweis für ein Gestirn geführt, dessen Polardistanz $PS'' < PS$

Es ergiebt sich daraus, dass ein Gestirn in der kürzesten Zeit von S nach dem Horizonte H gelangt, wenn die parallaktischen Winkel gleich sind:

$$\sphericalangle PSZ = \sphericalangle PHZ.$$

Da aber $ZH = S\nu$, $PH = PS$, $\sphericalangle PZS = \sphericalangle PHZ$, so ist

$$\Delta PHZ \cong \Delta \nu SP.$$

Es ist aber $P\nu = PZ = 90^0 - \varphi$, $\sphericalangle HPZ = \sphericalangle \nu PS$.

Fällt man $PR \perp Z\nu$, so halbirt diese Senkrechte die $Z\nu$ und den Winkel $ZP\nu$; wir erhalten aus dem rechtwinkligen Dreiecke ZPR, wenn Winkel $ZPR = \frac{\tau}{2}$, $ZR = \frac{1}{2}(ZS - S\nu) = \frac{c}{2}$ gesetzt wird:

$$\sin\frac{\tau}{2} = \frac{\sin\frac{c}{2}}{\cos\varphi},$$

und aus dem Dreiecke ZPS:

$$\sin\varphi : \sin\delta = \cos\frac{c}{2} : -\sin\frac{c}{2},$$

$$\sin\delta = -\sin\varphi \, tg\frac{c}{2}.$$

In der Neubearbeitung von „J. S. T. Gehler's Physikalischem Wörterbuche“ beschäftigt sich H. W. Brandes im 2. Bande, Artikel: „Dämmerung“ mit dem Probleme (Leipzig 1826). Brandes findet zunächst, dass der parallaktische Winkel bei gleicher Declination und Polhöhe das Maximum erreicht, wenn das Azimuth $= 90^0$ ist, was aus

$$\sin p = \frac{\sin a}{\cos\delta}\cos\varphi$$

unmittelbar folgt.

Bei gleicher Declination und Polhöhe ist ferner die Höhenänderung dem Sinus des parallaktischen Winkels proportional; denn:

$$\sin h = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t, \quad \cos h\, dh = -\cos\varphi\cos\delta\sin t\, dt,$$

$$dh = -\sin p\cos\delta\, dt.$$

Wäre also Figur 11 bei S' der grösste Werth des parallaktischen Winkels und $SS' = S'S''$, so wäre die Höhenänderung in S und S'' gleich;

macht man ferner $S''T'' = ST$, also $SS'' = TT''$, so ist die Höhenänderung im Intervalle SS'' rascher als im Intervalle TT'' (der Stundenwinkel ändert sich fortwährend gleichförmig), und daher gelangt die Sonne am schnellsten zum Dämmerungskreis, wenn die parallaktischen Winkel am Anfang und Ende der Dämmerung gleich sind; es ist aber aus Dreieck PZS' und PZS:

$$\cos p = \frac{\sin\varphi - \sin h \sin\delta}{\cos h \cos\delta}, \quad \cos p = \frac{\sin\varphi}{\cos\delta},$$

mithin

$$\sin\delta = -\sin\varphi \, tg \frac{c}{2}.$$

In anderer Form behandelt J. C. E. Schmidt in seinem „Lehrbuch der mathematischen und physischen Geographie, Göttingen 1829", die Aufgabe. Aus den bekannten Gleichungen:

$$-\sin c = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t_2,$$
$$0 = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t_1$$

folgt durch Addition und Subtraction:

$$-\frac{1}{2}\sin c = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos\frac{t_2+t_1}{2}\cos\frac{t_2-t_1}{2},$$
$$+\frac{1}{2}\sin c = \cos\varphi\cos\delta\sin\frac{t_2+t_1}{2}\sin\frac{t_2-t_1}{2}.$$

Setzt man $t_2 + t_1 = 2v$, $t_2 - t_1 = 2u$, so findet ein Minimum statt, wenn ist

$$\frac{d(t_2-t_1)}{d\delta} = \frac{du}{d\delta} = 0.$$

Es ist also:

$$0 = \sin\varphi\cos\delta - \cos\varphi\sin\delta\cos v\cos u - \cos\varphi\cos\delta\cos u\sin v\frac{dv}{d\delta}.$$

$$0 = \quad -\cos\varphi\sin\delta\sin v\sin u + \cos\varphi\cos\delta\sin u\cos v\frac{dv}{d\delta},$$

und wenn $\frac{dv}{d\delta}$ eliminirt wird:

$$0 = \cos\delta\sin\varphi\cos v - \sin\delta\cos\varphi\cos u;$$

ferner findet man aus den Grundgleichungen

$$\sin^2 u = \frac{\sin^2 c}{4\cos^2\delta\cos^2\varphi\sin^2 v}$$

und aus der letztgefundenen Minimumbedingung:

$$\cos^2 u = \frac{\cos^2\delta\sin^2\varphi\cos^2 v}{\sin^2\delta\cos^2\varphi},$$

mithin durch Addition:

$$\alpha)\quad 4\cos^2\delta\sin^2\delta\cos^2\varphi\sin^2 v = 4\cos^4\delta\sin^2\varphi\sin^2 v\cos^2 v + \sin^2 c\sin^2\delta.$$

Aus der Minimumbedingung folgt ferner

$$\cos u\cos v = \frac{\cos\delta\sin\varphi\cos^2 v}{\sin\delta\cos\varphi}$$

und aus den Grundgleichungen

$$\cos u\cos v = -\frac{\sin c + 2\sin\varphi\sin\delta}{2\cos\varphi\cos\delta},$$

woraus durch Gleichsetzung:

$$\frac{\cos\delta \sin\varphi \cos^2 v}{\sin\delta \cos\varphi} = -\frac{\sin c + 2 \sin\varphi \sin\delta}{2 \cos\varphi \cos\delta}$$

und

$$\cos^2 v = -\frac{(\sin c + 2 \sin\varphi \sin\delta) \sin\delta}{2 \cos^2\delta \sin\varphi}.$$

Ferner ist

$$\sin^2 v = \frac{2 \sin\varphi + \sin c \sin\delta}{2 \cos^2\delta \sin\varphi}.$$

Setzt man diese Werthe in α) ein, so ergiebt sich nach einigen Reductionen:

$$\sin^2\delta + \frac{2 \sin\varphi}{\sin c} \sin\delta = -\sin^2\varphi$$

und damit:

$$\sin\delta_1 = -\sin\varphi \, ctg \frac{c}{2},$$

$$\sin\delta_2 = -\sin\varphi \, tg \frac{c}{2}.$$

Die Dauer der Dämmerung wird nach Berechnung der Werthe t_1 und t_2 aus den Grundgleichungen gefunden:

$$\tau = t_2 - t_1.$$

Zum Schlusse dieser Abtheilung seien noch einige rein trigonometrische Auflösungen angeführt.

F. F. E. Brünnow lieferte in dem von ihm herausgegebenen Journale „Astronomical notices" vol. I. Ann-Arbor. 1861 eine äusserst kurze trigonometrische Auflössung.

Die bekannten Gleichungen:

$$\cos\varphi \cos t_2 = -\sin c \cos\delta - \cos c \sin\delta \cos p_2,$$

$$\cos\varphi \cos t_1 = -\sin\delta \cos p_1,$$

$$\cos\varphi \sin t_2 = \sin p_2 \cos c,$$

$$\cos\varphi \sin t_1 = \sin p_1$$

liefern sofort

$$\cos^2\varphi \cos(t_2 - t_1) = \sin c \cos\delta \sin\delta \cos p_1 + \cos c \cos(p_2 - p_1)$$
$$- \cos c \cos^2\delta \cos p_1 \cos p_2.$$

Allein es ist

$$\cos p_2 = \frac{\sin\varphi + \sin c \sin\delta}{\cos c \cos\delta}, \quad \cos p_1 = \frac{\sin\varphi}{\cos\delta},$$

daher

$$\cos^2\varphi \cos(t_2 - t_1) = \cos c \cos(p_2 - p_1) - \sin^2\varphi,$$

$$\sin^2 \frac{t_2 - t_1}{2} = \frac{1 - \cos c \cos(p_2 - p_1)}{2 \cos^2\varphi}.$$

Diese Gleichung wird aber ein Minimum für $p_1 = p_2$, daher

$$\sin\frac{\tau}{2} = \frac{\sin\frac{c}{2}}{\cos\varphi}$$

und durch Gleichsetzung der parallaktischen Winkel:

$$\sin\delta = -\sin\varphi \, tg \frac{c}{2}.$$

In seinem „Lehrbuche der sphärischen Astronomie, 3. Aufl., Berlin 1871“ behandelt Brünnow die Aufgabe folgendermassen:

$$-\sin c = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos(t_1+\tau)$$

$$\cos(t_1+\tau) = -\frac{\sin c + \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi\cos\delta}.$$

Setzt man $H = 90 - \varphi + \delta$, so ist:

$$\sin\frac{t_1+\tau}{2} = \frac{\sqrt{\sin\frac{1}{2}(H+c)\cos\frac{1}{2}(H-c)}}{\cos\varphi\cos\delta},$$

woraus τ folgt, wenn t_1 gegeben ist.

Nennt man Z' den Punkt der Himmelskugel, der im Zenith ist zur Zeit des Sonnenunterganges, Z denjenigen, der im Zenith ist zur Zeit der Abenddämmerung, so ist in dem Dreiecke zwischen diesen beiden Punkten und dem Pole der Winkel am Pole τ* und man hat

$$\cos ZZ' = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi\cos\tau.$$

Aus dem Dreieck $ZZ'S$ folgt $\cos ZZ' = \cos c \cos S$, und man hat

$$\sin^2\frac{\tau}{2} = \frac{1-\cos c\cos S}{2\cos^2\varphi},$$

worin, wie leicht einzusehen, $S = p_2 - p_1$ der Unterschied der parallaktischen Winkel ist; daraus folgt, dass die Dämmerung am kürzesten wird für $S = 0$, also

$$\sin\frac{\tau}{2} = \frac{\sin\frac{c}{2}}{\cos\varphi},$$

die parallaktischen Winkel sind also einander gleich. Unter dieser Voraussetzung folgt aus

$$\cos p_1 = \frac{\sin\varphi}{\sin\delta},\quad \cos p_2 = \frac{\sin\varphi + \sin c\sin\delta}{\cos c\cos\delta},\quad \sin\delta = -\sin\varphi\, tg\,\frac{c}{2}.$$

Bezeichnet man mit a_1 und a_2 die Azimuthe, so folgt $\sin a_1 = \sin a_2$, woraus, da a_1 nicht gleich a_2 sein kann, $a_1 = 180 - a_2$ sich ergiebt.

Aus den beiden Gleichungen:

$$-\sin c = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos(t_1+\tau),$$
$$0 = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t_1$$

findet man

$$\sin\left(t_1+\frac{\tau}{2}\right)\sin\frac{\tau}{2} = \frac{\cos\frac{c}{2}}{\cos\delta}\cdot\frac{\sin\frac{c}{2}}{\cos\varphi},\quad \text{also}\quad \sin\left(t_1+\frac{\tau}{2}\right) = \frac{\cos\frac{c}{2}}{\cos\delta},$$

diese Formel hat schon Liagre gefunden.

Eine ziemlich ausführliche Arbeit rein trigonometrischer Natur lieferte noch Stoll in der „Zeitschrift für Mathematik und Physik“, Jahrg. 28 (1883) unter dem Titel: „Stoll, das Problem der kürzesten Dämmerung.“

* Siehe die Auflösungen von Euler und Delambre.

Der Verfasser stellt sich folgende zwei Aufgaben:

I. Unter welcher Polhöhe kommt ein Stern, dessen Declination gegeben ist, am schnellsten von einem gegebenen Almucantarat h_1 zu einem zweiten h_2?

II. Wie gross muss die Declination eines Sternes sein, damit derselbe an einem Orte von gegebener Polhöhe φ am schnellsten von einem gegebenen Almucantarat h_1 zu einem zweiten h_2 gelange?

Von den Gleichungssystemen:

$$\text{I)}\qquad \begin{cases} \cos h_1 \sin a_1 = \cos\delta \sin t_1 \\ \cos h_2 \sin a_2 = \cos\delta \sin t_2, \end{cases}$$

$$\text{II)}\qquad \begin{cases} \sin h_1 = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t_1 \\ \sin h_2 = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t_2, \end{cases}$$

$$\text{III)}\qquad \begin{cases} \sin\delta = \sin h_1 \sin\varphi - \cos h_1 \cos\varphi \cos a_1 \\ \sin\delta = \sin h_2 \sin\varphi - \cos h_2 \cos\varphi \cos a_2 \end{cases}$$

ausgehend, findet der Verfasser zunächst durch Multiplication je zweier zusammengehöriger:

$$1)\quad \cos h_1 \cos h_2 \sin a_1 \sin a_2 = \cos^2\delta \sin t_1 \sin t_2,$$

$$2)\quad (\sin h_1 - \sin\varphi \sin\delta)(\sin h_2 - \sin\varphi \sin\delta) = \cos^2\varphi \cos^2\delta \cos t_1 \cos t_2,$$

$$3)\quad \cos h_1 \cos h_2 \cos^2\varphi \cos a_1 \cos a_2 = (\sin h_1 \sin\varphi - \sin\delta)(\sin h_2 \sin\varphi - \sin\delta).$$

Aus 1), 2) und 3) ergiebt sich:

$$\begin{cases} \cos^2\varphi \cos h_1 \cos h_2 \cos(a_1 \mp a_2) + (\sin h_1 - \sin\varphi \sin\delta)(\sin h_2 \sin\varphi - \sin\delta) \\ \qquad = \cos^2\varphi \cos^2\delta \cos(t_1 \mp t_2) + (\sin h_1 \sin\varphi - \sin\delta)(\sin h_2 \sin\varphi - \sin\delta) \end{cases}$$

und daraus nach einigen Reductionen:

$$4)\qquad \cos^2\delta \sin^2\frac{t_2 - t_1}{2} = \cos h_1 \cos h_2 \sin^2\frac{a_1 - a_2}{2} + \sin^2\frac{h_1 - h_2}{2},$$

$$5)\qquad \cos^2\delta \sin^2\frac{t_2 + t_1}{2} = \cos h_1 \cos h_2 \sin^2\frac{a_1 + a_2}{2} + \sin^2\frac{h_1 - h_2}{2}.$$

Aus den Gleichungen II) folgt weiter:

$$\cos\varphi \cos\delta \sin\frac{t_2 - t_1}{2} \sin\frac{t_2 - t_1}{2} = \sin\frac{h_1 - h_2}{2} \cos\frac{h_1 + h_2}{2}$$

und daraus in Verbindung mit 5):

$$6)\qquad \cos^2\varphi \sin\frac{t_2 - t_1}{2} = \frac{\sin^2\dfrac{h_1 - h_2}{2} \cos^2\dfrac{h_1 + h_2}{2}}{\cos h_1 \cos h_2 \sin^2\dfrac{a_1 + a_2}{2} + \sin^2\dfrac{h_1 - h_2}{2}}.$$

Aus Gleichung 4) ergiebt sich für ein constantes δ das Minimum von $\frac{t_2 - t_1}{2}$ für $a_1 = a_2$, dasselbe wird:

$$7)\qquad \sin\frac{t_2 - t_1}{2} = \frac{\sin\dfrac{h_1 - h_2}{2}}{\cos\delta}$$

und ist nur giltig, so lange $\dfrac{h_1 - h_2}{2} < 90^0 - \delta$.

Aus den Gleichungen III) erhält man die Polhöhe, wenn man darin $a_1 = a_2$ setzt:

$$8)\qquad \sin\varphi = \frac{\sin\dfrac{h_1 + h_2}{2}}{\cos\dfrac{h_1 - h_2}{2}}\sin\delta$$

und ferner

$$9)\qquad \cos a = -\operatorname{ctg}\frac{h_1 + h_2}{2}\operatorname{tg}\varphi.$$

Die Gleichung 4) deutet auch ein Maximum von $\dfrac{t_2 - t_1}{2}$ an für

$$a_2 = 180^0 + a_1;$$

die dadurch erlangte Zeit bezieht sich auf den zweiten Durchgang durch den zweiten Almucantarat, und es ist

$$10)\qquad \sin(t_2 - t_1) = \frac{\cos\dfrac{h_1 + h_2}{2}}{\cos\delta}.$$

Diese Gleichung gilt wieder nur so lange $\delta < h_1 + h_2$ ist; ähnlich, wie früher, wird aus III):

$$11)\qquad \sin\varphi = \frac{\cos\dfrac{h_1 - h_2}{2}}{\sin\dfrac{h_1 + h_2}{2}}\sin\delta$$

und

$$12)\qquad \cos a = \mp\operatorname{tg}\frac{h_1 - h_2}{2}\operatorname{tg}\varphi.$$

Um die zweite Aufgabe zu erledigen, nämlich die Bedingung des Minimums für eine constante Polhöhe zu finden, wenden wir uns an die Gleichung 6); diese giebt für das Minimum von $(t_2 - t_1)$ die Bedingung

$$a_1 + a_2 = 180^0$$

und damit

$$13)\qquad \sin\frac{t_2 - t_1}{2} = \frac{\sin\dfrac{h_1 - h_2}{2}}{\cos\varphi};$$

dies ist nur möglich, so lange $\dfrac{h_1 - h_2}{2} < 90^0 - \varphi$.

Für $\cos a_1 = -\cos a_2$ findet man aus III):

$$14)\qquad \sin\delta = \frac{\sin\dfrac{h_1 + h_2}{2}}{\cos\dfrac{h_1 - h_2}{2}}\sin\varphi$$

und

$$15)\qquad \cos a = \pm\operatorname{tg}\frac{h_1 - h_2}{2}\operatorname{tg}\varphi.$$

Für das Maximum von $(t_2 - t_1)$ muss sein

$$a_1 + a_2 = 0.$$

Die Gleichung 6) giebt dann

16) $$\sin\frac{t_2 - t_1}{2} = \frac{\cos\frac{h_1 + h_2}{2}}{\cos\varphi},$$

was nur möglich ist unter der Bedingung:

$$\frac{h_1 + h_2}{2} > \varphi.$$

Hier ist wieder unter $t_2 - t_1$ der Zeitraum verstanden, der vom ersten Durchgang durch den ersten Almucantarat bis zum zweiten Durchgang durch den zweiten Almucantarat verfliesst.

Ferner wird aus III:

17) $$\sin\delta = \frac{\cos\frac{h_1 - h_2}{2}}{\sin\frac{h_1 + h_2}{2}} \sin\varphi$$

und

18) $$\cos a = -\operatorname{ctg}\frac{h_1 + h_2}{2} \operatorname{tg}\varphi.$$

Die Stellung, in welcher der Stern am raschesten seine Höhe ändert, giebt die Gleichung 14; setzt man darin $h_1 = h_2$, so wird

$$\sin\delta = \sin h \sin\varphi$$

und aus III):

$$\cos a = 0, \quad a = 90^0,$$

das heist, der Stern muss im ersten Vertical stehen.

Die Gleichung 13) giebt:

$$\frac{\sin\frac{h_1 - h_2}{2}}{\sin\frac{t_2 - t_1}{2}} = \cos\varphi$$

und da für $h_1 = h_2$ auch $t_1 = t_2$ wird, so ist das Sinken des Sternes im ersten Vertical dem Cosinus der Polhöhe proportional und es muss die Ungleichung bestehen $0 < \delta < \varphi$. Im ersten Falle (bei südlicher Declination) erreicht der Stern den ersten Vertical erst unter dem Horizonte im zweiten Falle,

$$\delta > \varphi \quad \text{wäre} \quad \sin h > 1,$$

das heisst, der Stern erreicht den ersten Vertical über dem Horizonte nicht.

In den „Astronomischen Nachrichten" Bd. 110 (1884) hat „T. J. Stieltjes, Note sur le problème du plus court crépuscule" aus Anlass meiner zwei Aufsätze den Beweis geliefert, dass sich das Problem nicht wesentlich complicirt, wenn man den Sonnenhalbmesser und die Refraction berücksichtigt. Ich füge der Vollständigkeit wegen diese Betrachtung hier an.

Es sei der Beginn bezüglich das Ende der Morgendämmerung bei der Depression der Sonne $c = 18^0$ und d.

In Figur 12 sei Z das Zenith, P der Pol, S und S' die Positionen der Sonne zu Beginn und am Ende der Morgendämmerung, so ist

$$PS = PS' = 90^0 - \delta, \quad ZS = 90^0 + c, \quad ZS' = 90^0 + d.$$

Für das Minimum besteht bekanntlich die Relation

$$\sphericalangle PSZ = \sphericalangle PS'Z.$$

Setzen wir

$$ZA = \frac{1}{2}(c-d)$$

und verlängern $S'Z$ bis A', so dass

$$ZA' = ZA = \frac{1}{2}(c-d)$$

wird, und ziehen die grössten Kreisbogen PA und PA', so ist

$$SA = S'A' = 90^0 + \frac{1}{2}(c+d)$$

und daher $\Delta PSA \cong \Delta PS'A'$, also $PA = PA'$, $\sphericalangle PAS = \sphericalangle PA'S'$.

Da aber ist $PA = PA'$, so muss auch sein $\Delta PZA \cong \Delta PZA'$ und mithin $\sphericalangle S'A'P = \sphericalangle ZAP = \sphericalangle SAP$.

Es ist also $\sphericalangle SAP = \sphericalangle S'A'P = 90^0$

und man erhält A und A', wenn man an den Kleinkreis aus Z mit dem Radius $\frac{c-d}{2}$ Tangenten aus P fällt.

Es ist ferner Azimuth $PZS =$ Azimuth $(180^0 - PZS')$ und

$$\tau = \sphericalangle SPS' = \sphericalangle APA'.$$

Aus den Dreiecken PAZ und PAS folgt:

$$\cos PA = \frac{\sin\varphi}{\cos\frac{c-d}{2}}, \quad \cos\delta = \cos PA \cos SA = -\cos PA \,.\, \sin\frac{c+d}{2},$$

$$\sin\delta = -\sin\varphi\frac{\sin\frac{c+d}{2}}{\cos\frac{c-d}{2}}.$$

Es ist aber $\sphericalangle ZPS = t_2, \quad \sphericalangle ZPS' = t_1,$

$$\sphericalangle APZ = \frac{\tau}{2} = \frac{t_2-t_1}{2}, \quad \sphericalangle S'PA' = \frac{t_2+t_1}{2}$$

und daraus ergiebt sich:

$$\sin\frac{t_2-t_1}{2} = \frac{\sin\frac{c-d}{2}}{\cos\varphi}, \quad \sin\frac{t_2+t_1}{2} = \frac{\cos\frac{c+d}{2}}{\cos\delta}$$

und

$$\cos PZS = -\cos PZS' = \cos a = tg\,\varphi\, tg\frac{c-d}{2}.$$

VIII.

In eigenthümlicher und origineller Weise hat d'Arrest in seiner bereits angeführten Abhandlung (Astronomische Nachrichten Bd. 46) das Problem der kürzesten Dämmerung behandelt. Nachdem er die wichtigsten Eigenschaften derselben, wie wir bereits gesehen haben, im Zusammenhange vorgeführt hatte, stellt er sich die Frage nach dem geometrischen Orte der Stände der Sonne am Tage der kürzesten Dämmerung für alle einem und demselben Längengrade zugehörigen Polhöhen. Diese Curve ist, wenn man die sphärischen Kegelschnitte zum zweiten Grade rechnet, vom vierten Grade und besteht aus zwei gesonderten Ovalen an der Himmelskugel; sie besteht aus acht congruenten Quadranten, besitzt vier conjugirte Punkte und lässt sich in geschlossenen Ausdrücken weder rectificiren noch quadriren; doch hängt dieselbe mit dem grössten Kreise und der Ellipse zusammen.* Zieht man durch den Ost- und Westpunkt der Himmelskugel zwei grösste Kreise, welche den Aequator unter den Winkeln $\pm c$ schneiden, so ist ihre Gleichung:

$$1)\qquad \sin t = \sqrt{tg^2\frac{c}{2} - tg^2\delta} : tg\frac{c}{2}.$$

Denn nach Figur 13 folgt aus dem rechtwinkligen Dreiecke mit den Katheten δ und $90^0 - t$ und dem der Kathete δ gegenüberliegenden Winkel $\pm c$

$$\pm \cos t\, tg\frac{c}{2} = tg\,\delta,$$

woraus obige Formel leicht abzuleiten ist.

Die sphärische Ellipse mit den Halbachsen

$$\frac{\pi}{c} - c \quad \text{und} \quad \frac{c}{2}$$

hat zur Gleichung:

$$2)\qquad \sin t = \frac{\cos c\sqrt{tg^2\frac{c}{2} - tg^2\delta}}{tg\frac{c}{2}}.\,^{**}$$

Bezieht man nämlich die Gleichung der Ellipse auf ein System zweier sich rechtwinklig schneidender Grösskreise und zieht durch die Pole P und Π dieser grössten Kreise Figur 14 und durch einen Ellipsenpunkt M grösste Kreisbogen, welche auf den als Coordinatenachsen geltenden Kreisen die Stücke $OX = \xi$, $OY = \eta$ abschneiden, so lautet die Gleichung der sphärischen Ellipse mit den Halbachsen a und b:

$$tg^2 a\, tg^2\eta + tg^2 b\, tg^2\xi = tg^2 a\, tg^2 b.$$

Ist nun $OA = a = \frac{\pi}{2} - c$, $OB = b = \frac{c}{2}$, so ergiebt das Dreieck ΠYM:

$$ctg\,\eta = ctg\,\delta\cos t, \quad \xi = t$$

und damit aus der Ellipsengleichung:

$$\frac{tg^2\delta}{\cos^2 t}ctg^2 c + tg^2\frac{c}{2}\,tg^2 t = tg^2\frac{c}{2}\,ctg^2 c,$$

woraus nach einigen einfachen Reductionen die obige Ellipsengleichung sich ergiebt.

---

* Für das Verständniss der folgenden Betrachtungen ist ein Einblick in „G. Gudermann, Grundriss der analytischen Sphärik, Köln 1830", unerlässlich.

** K. Zelbr, „Bemerkung zum Problem der kürzesten Dämmerung", Astronomische Nachrichten Bd. 108 Nr. 2575 (1884), worin d'Arrest's Abhandlung erläutert ist.

Um Missverständnissen vorzubeugen, mag hier noch angemerkt werden, dass die Coordinatensysteme in Figur 13 und 14 um einen Winkel von 90^0 gegen einander gedreht erscheinen, um eine grössere Anschaulichkeit zu ermöglichen; während der Meridian des Ortes in der ersten Figur 13 in die Ebene des Papiers fällt, ist er in Figur 14 senkrecht darauf gedacht. Um die Gleichung der Curve für die kürzeste Dämmerung zu finden, berücksichtige man die bekannten Relationen für die Declination am Tage der kürzesten Dämmerung und den Stundenwinkel bei Sonnenaufgang oder Untergang:

$$\sin\delta = -\,tg\frac{c}{2}\sin\varphi, \quad \cos t_1 = -\,tg\,\varphi\,tg\,\delta.$$

Eliminirt man daraus die Polhöhe, so erhält man nach einigen Reductionen

$$\sin t_1 = \frac{\sqrt{tg^2\frac{c}{2} - tg^2\delta}}{\sqrt{tg^2\frac{c}{2} - \sin^2\delta}};$$

allein es besteht für diesen Stundenwinkel und jenen am Anfange bezüglich Ende der kürzesten Dämmerung die schon von Lambert gefundene Relation

$$\sin t_2 = \sin t_1 \cos c,$$

daher die Gleichung der gesuchten Curve:

$$3) \qquad \sin t_2 = \frac{\cos c\sqrt{tg^2\frac{c}{2} - tg^2\delta}}{\sqrt{tg^2\frac{c}{2} - \sin\delta}}.$$

Wie leicht einzusehen, hätte man diese Gleichung auch erhalten können, wenn man aus

$$\sin\delta = -\sin\varphi\,tg\frac{c}{2} \quad \text{und} \quad -\sin c = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t_2$$

die Polhöhe φ eliminirt hätte.

Differentiirt man die Gleichung 3) in logarithmischer Form, so folgt:

$$4) \qquad \frac{dt_2}{d\delta}\cos\delta = \sin\delta\,tg\,t_2\left\{\frac{\cos^2\delta}{tg^2\frac{c}{2} - \sin^2\delta} - \frac{\sec^2\delta}{tg^2\frac{c}{2} - tg^2\delta}\right\}.$$

Der Mittelpunkt der Gegencurve der Ellipse ist um 180^0 abstehend vom Mittelpunkte der Ellipse; die Endpunkte der kleinen Achse der Gegencurve sind bezüglich $180^0 - c$ und $180^0 + c$. Beachtet man, dass aus der Gleichung 3) der Dämmerungscurve für $t_2 = 0$ folgt:

$$tg\,\delta = \pm\,tg\frac{c}{2},$$

so kann δ die vier Werthe erhalten:

$$\pm\frac{c}{2} \quad \text{und} \quad 180^0 \pm \frac{c}{2}.$$

Jedem positiven oder negativen δ entsprechen zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von $\sin t_2$, denen als Winkelgrössen entsprechen:

$$\pm t_2 \quad \text{und} \quad 180^0 \pm t_2.$$

Man sieht also, dass die Figur aus zwei getrennten Ovalen besteht, die unter einander congruent aus je vier congruenten Quadranten bestehen, und dass diese Ovalen die Ellipse und deren Gegencurve in den Scheiteln berühren. Man kann diese Ovalen mit Hilfe der beiden Kreise und der sphärischen Ellipse punktweise construiren; d'Arrest lehrt aber auch ein Verfahren, wodurch jede in einem Zuge hergestellt werden kann. Lässt man einen sphärischen rechten Winkel, dessen eine Kathete $\frac{c}{2}$ über den rechten Winkel hinaus um $\frac{1}{2}(\pi + c)$ verlängert ist, sich dergestalt bewegen, dass die Hypotenuse stets mit dem Meridiane zusammenfällt, während die andere Kathete durch den Weltpol geht, so beschreibt das Ende der verlängerten Kathete die in Rede stehende Linie.

Es sei Figur 15 AA' der Aequator und PFA' der Meridian; das rechtwinklige Dreieck, dessen Hypotenuse $PF = b$ im Meridiane liegt, sei PQF; die Kathete $QF = \frac{c}{2}$, die Verlängerung derselben $CQ = 90^0 + \frac{c}{2}$; die andere Kathete $PQ = \mu$, so folgt aus den Dreiecken PQF und PQC:

$$\cos b = \cos\mu \cos\frac{c}{2}, \quad \sin\delta = -\cos\mu \sin\frac{c}{2}.$$

Ferner aus Dreieck PCF:

$$-\sin c = \sin\delta \cos b + \cos\delta \sin b \cos t,$$

daher:

$$-\sin c = \sin\delta \cos\mu \cos\frac{c}{2} + \cos\delta \sqrt{1 - \cos^2\mu \cos^2\frac{c}{2}}\, \cos t,$$

$$-\sin c = -\sin^2\delta\, ctg\,\frac{c}{2} + \cos\delta\, ctg\,\frac{c}{2}\sqrt{tg\,\frac{c}{2} - \sin^2\delta}\, \cos t.$$

Führt man die nothwendigen Reductionen durch, so erhält man schliesslich:

$$\sin t = \frac{\cos c \sqrt{tg^2\frac{c}{2} - tg^2\delta}}{\sqrt{tg^2\frac{c}{2} - \sin^2\delta}}.$$

Aus den Gleichungen 1) bis 4) findet man die ausserhalb der von der Curve umschlossenen Räume befindlichen vier conjugirten Punkte, deren Coordinaten sind:

5) $$t_2 = \pm\frac{\pi}{2}, \quad \cos\delta = \sqrt{\cos c}.$$

Für den Durchschnitt der Curve mit den Kreisen 1) findet man

6) $$\sin\delta^* = 2\sin^2\frac{c}{2},$$

während aus der Gleichung 5) folgt:

$$\sin\delta = \sin\frac{c}{2}\sqrt{2}.$$

„Die conjugirten Punkte sind übrigens, obgleich sie geometrisch zur Auflösung gehören, keine Punkte der kürzesten Dämmerung; welche Beziehung sie astronomisch zum Probleme haben, möchte kaum leicht zu ermitteln sein.“

Mit diesen Worten schliesst d'Arrest seinen Aufsatz über die kürzeste Dämmerung, und es scheint, als ob — kleine Modificationen ausgenommen — kaum etwas wesentlich Neues für die Behandlung der Aufgabe beigebracht werden könnte.

Im folgenden Abschnitte sollen noch die auf das Problem bezüglichen Thatsachen zusammengestellt und eine übersichtliche Darstellung der benützten Quellen gegeben werden.

IX.

Formeln von Nonius (1542):

$$\sin\frac{R}{2} = \sin\frac{\tau}{2}\cos\varphi, \quad tg\, m = tg\frac{\tau}{2}\sin\varphi, \quad \cos n = \frac{\sin c}{\sin R},$$

$$\sin\delta = \sin(m \pm n)\cos\varphi, \quad \cos t_2 = -\frac{\sin c}{\cos\varphi\cos\delta} - tg\,\varphi\, tg\,\delta$$

für $n = 0^0$ fallen die Declinationen in eine zusammen, und man erhält für die kürzeste Dämmerung:

$$\sin\frac{\tau}{2} = \frac{\sin\frac{c}{2}}{\cos\varphi}, \quad \sin\delta = \sin m \cos\varphi.$$

Ausserdem findet sich schon hier die Bemerkung, dass der Aequator am Tage der kürzesten Dämmerung den Depressionsbogen c halbirt.

Formel von Johann Bernoulli (1693) und John Keill (1718):

$$\sin\delta = -\, tg\frac{c}{2}\sin\varphi.$$

In J. H. Lambert's Photometria (1760) finden sich die folgenden Eigenschaften:

§ 990. $$p_1 = p_2,$$

§ 992. $$a_1 = 180^0 - a_2,$$

§ 993. $$\begin{cases} \cos t_1 = -\, tg\,\varphi\, tg\,\delta, \\ \sin t_2 = \cos c \sin t_1, \\ \tau = t_2 - t_1. \end{cases}$$

L. Euler (1775) findet, dass der Parallelkreis der Sonne am Tage der kürzesten Dämmerung den Horizont und Dämmerungskreis unter gleichen Winkeln schneidet; bei ihm findet sich auch zuerst das für das Problem charakteristische gleichschenklige Dreieck mit einer Seite Zenith — Pol, das also als gleiche Seiten $90^0 - \varphi$ als eingeschlossenen Winkel τ besitzt, auf dessen Betrachtung eine grosse Anzahl der späteren Auflösungen beruht.

G. Monge (1804) giebt eine elegante constructive Lösung des Problems.

Th. St. Davies (1833) versucht mit Hilfe des zweiten Differentialquotienten zu entscheiden, ob ein Maximum oder Minimum vorliegt; doch sind seine Betrachtungen ebenso, zum mindesten gesagt, unverständlich, wie die von H. G. Kästner (1755) und J. d'Alembert (1752).

J. B. J. Liagre (1857) hat zuerst die Bedeutung der zweiten Wurzel des Problemes

$$\sin\delta = -\sin\varphi \, ctg \frac{c}{2}$$

richtig erklärt. Er führt neben der kürzesten Dämmerung das kürzeste Dämmerungscomplement und den kürzesten physischen Tag in das Problem ein; der physische Tag umfasst den astronomischen Tag mit seinen beiden Dämmerungen, das Dämmerungscomplement ist der Ueberschuss des physischen Tages über eine Dämmerung; dadurch finden die meisten Schwierigkeiten der analytischen Auflösung ihre Erklärung. Aus der reichhaltigen Formelsammlung, die Liagre seiner Arbeit beigegeben hat, möge hier als neu Platz finden:

$$tg \frac{a_1 - a_2}{2} = tg \frac{t_2 - t_1}{2} \sin\varphi.$$

Hierauf folgen geometrische Betrachtungen über die Minima dieser drei Epochen an drei Kegeln. Der erste, ein Doppelkegel, hat seine Spitze zwischen dem Horizonte und dem Dämmerungskreise und zu Leitlinien diese beiden Kreise; der zweite Kegel hat zur Leitlinie den Horizont und umfasst den Dämmerungskreis als Parallelschnitt zur Basis; die Spitze liegt daher ausserhalb der Himmelskugel; der dritte Kegel endlich hat zur Leitlinie den Dämmerungskreis und berührt die Himmelskugel in diesem Kreise. Fällt man von den Spitzen dieser Kegel senkrechte Ebenen auf die Weltachse, so enthalten diese den jedesmaligen Parallelkreis der Sonne, den sie zur Zeit dieser kürzesten Epochen beschreibt. Findet kein Durchschnitt dieser Ebene mit der Weltachse innerhalb der Himmelskugel statt, so ist das ein Beweis, dass das betreffende Minimum für den gegebenen Ort nicht stattfindet.

H. L. d'Arrest (1857) endlich betrachtet das Problem vom Standpunkte der analytischen Sphärik, indem er den Ort der Sonnenstände am Tage der kürzesten Dämmerung unabhängig von der Polhöhe sucht. Er gelangt zu der Gleichung einer sphärischen Curve vierten Grades und betrachtet den Zusammenhang derselben mit zwei grössten Kreisen, die unter den Winkeln $\pm c$ gegen den Aequator geneigt sind, sowie mit der sphärischen Ellipse deren Halbachsen:

$$\frac{\pi}{2} - c \quad \text{und} \quad \frac{c}{2}$$

sind. Zum Schlusse findet er für den behandelten Ort eine elegante geometrische Construction in einem Zuge.

Literatur.

P. Nonius (Nuñez), De crepusculis. Olyssipone 1542.

C. Clavius, In sphæram Joannis de Sacro-Bosco commentarius. Romæ 1606.

Joh. Bernoulli, Journal des Savans. Paris 1693.

F. G. de l'Hôpital, Analyse des infiniment petits. Paris 1696.

D. Gregory, Astronomiæ physicæ et geometricæ elementa. Oxoniæ 1702.

J. Keill, Introductio ad veram astronomiam seu lectiones astronomicæ habitæ in schola astronomica academiæ Oxoniensis. Oxoniæ 1718.

P. L. M. de Maupertuis, Astronomie nautique. Paris 1743.

P. C. Le Monnier, Institutions astronomiques. (Eine Uebersetzung von Keill's Introductio ad veram astronomiam.) Paris 1746.

J. Turner, Required the time of the year, when there is the shortest twilight. Ladies' Diary 1746—1747. London.

Farrer . . ., Required the time of the year, when there is the shortest twilight. Ladies' Diary 1746—1747.

J. le Rond d'Alembert, Encyclopédie ou dictionnaire raisonnée des sciences, des arts et des métiers. Neufchâtel. Paris 1751—1752.

J. Kies, Trouver la déclinaison du soleil, où il s'abaisse a un almucantarat donné au-dessous de l'horizon dans le temps le plus court. Histoire de l'Académie des sciences et belles lettres de Berlin. 1752.

J. Lulofs, Einleitung zu der mathematischen und physikalischen Kenntniss der Erdkugel. Deutsch von A. G. Kästner. Göttingen. Leipzig 1755.

J. H. Lambert, Photometria. Augustæ Vindelicorum 1760.

A. R. Mauduit, Principes d'astronomie sphérique. Paris 1765.

W. Toft, To find the time of the shortest twilight in any given latitude, and its duration by stereographic projection Ladies' Diary 1766—1767. London.

L. Euler, De trajectu citissimo stellæ per duos circulos almicantarath datos pro qualibet elevatione poli. Novi commentarii academiæ scientiarum. Petropolitanæ. Tomus XX pro anno 1765. Petropoli 1767.

C. Scherffer, Institutiones astronomiæ theoreticæ. Vindobonæ 1777.

A. Cagnoli, Trigonometria piana e sferica. Paris 1786. In diesem so häufig citirten Werke habe ich in § 1475 blos die bekannte Formel:

$$sin\,\delta = -\,tg\,\frac{c}{2}\,sin\,\varphi$$

gefunden; es wird dort auf die „Enciclopedia methodica" verwiesen; ich konnte indessen in der „Encyclopédie méthodique" (Paris 1816) über Artikel „Crépuscule" nichts finden.

N. v. Fuss, Leichte Methode, die Epochen und die Dauer der kleinsten oder kürzesten Dämmerung zu finden. Berliner astronomisches Jahrbuch für 1787 (eingesendet 1784).

G. Monge, Du plus petit crépuscule. Correspondance sur l'école impériale polytechnique par J. N. P. Hachette. Paris 1805.

J. G. F. Bohnenberger, Astronomie. Tübingen 1811.

J. B. J. Delambre, Astronomie théorique et pratique. Paris 1814.

J. B. J. Delambre, De Nonius; de ses formules pour le crépuscule. Connaissance des tems pour l'an 1818 Paris 1815.

Th. Leybourne, Mathematical questions proposed in the Ladies' Diary. London 1817. Darin im Appendix (vol. IV) die Auflösungen von „Astronomicus",* „β Cygni"** und W. Wallace.

J. B. J. Delambre, Kritik der Schrift: „Delle primarie formole spettanti alla luce creposcolare e del loro uso nella soluzione di diversi problemi di G. Calandrelli. Romæ 1818." Connaissance des tems pour l'an 1822. Paris 1820.

H. W. Brandes, Artikel „Dämmerung" in „J. S. T. Gehler's Physikal. Wörterbuch. Neu bearbeitet von Brandes, Gmelin, Muncke, Horner, Pfaff und Littrow. 2. Bd. Leipzig 1826.

G. P. Dandelin, Problème du plus court crépuscule. Correspondance mathématique et physique par Garnier et Quetelet Gand 1826.

J. C. E. Schmidt, Lehrbuch der mathematischen u. phys. Geographie. 1. Bd. Göttingen 1829.

T. S. Davies, On Bernoulli's solution of the problem of shortest twilight. The London and Edinburgh Philosophical Magazine and Journal of Science. III. ser. vol. 3. London, Juli-December 1833. (Darin sind auch Auflösungen von Ivory und Skene angeführt. Indessen konnte ich in den Besitz der ausserhalb Englands wenigstens seltenen Zeitschriften nicht gelangen, in denen sich die Auflösungen befinden sollen.)

J. B. J. Liagre, Problème des crépuscules. Nouveaux mémoires de l'académie de Bruxelles; vol. XXX. Bruxelles 1857.

H. L. d'Arrest (Ueber die kürzeste Dämmerung), Astronomische Nachrichten Bd. 46. Altona 1857.

F. F. E. Brünnow, On the probleme of the shortest twilight. Astronomical notices I. Ann-Arbor 1861.

E. Barbier, Construction très simple du crépuscule de moindre durée. Les Mondes, revue hebdomadaire des sciences et leurs applications par Moigno; tome V. Paris 1864.

F. F. E. Brünnow, Lehrbuch der sphärischen Astronomie. 3. Aufl. Berlin 1871.

Stoll, Das Problem der kürzesten Dämmerung. Zeitschrift für Mathematik und Physik. 28. Jahrg. Leipzig 1883.

K. Zelbr, Ueber das Problem der kürzesten Dämmerung. Astronom. Nachr. Bd. 108 und 109. Kiel 1884.

J. T. Stieltjes, Note sur le problème du plus court crépuscule. Astronom. Nachrichten. Bd. 110. Kiel 1884.

H. Cranz, Zur geometrischen Theorie der Dämmerung. Zeitschrift für Mathematik und Physik. 31. Jahrg. Leipzig 1886.

* Die Auflösung von „Astronomicus" stammt aus „New Series of the Mathematical Repository" vol. I art. XI.

** Die Auflösung von „β Cygni" stammt aus „The mathematical companion" Nr. 8.

Zusatz zu Monge's Lösung des Problemes der kürzesten Dämmerung.

Da es mir von Werth war, den Ideengang anzugeben, auf welchem Monge zu seiner von Hachette auseinander gesetzten Lösung des Problems der kürzesten Dämmerung gelangt sein dürfte, so ersuchte ich Herrn Otto Rupp, Professor der darstellenden Geometrie an der k. k. technischen Hochschule in Brünn, sich mit dem Probleme in dieser Richtung zu beschäftigen; die Darstellung, welche ich ihm verdanke, ist so kurz und präcis, dass dieselbe sehr leicht dem Ideengange Monge's entsprechen dürfte; ich gebe dieselbe mit seinen eigenen Worten wieder:

„Die Bestimmung des Parallelkreises der kürzesten Dämmerung deckt sich mit nachstehender Aufgabe der reinen Geometrie:

In einer Schaar von Parallelkreisen (Fig. 16) $P_1 P_2 P_3$ etc. jenen zu finden, dessen Bogen $a_1 b_1$, $a_2 b_2 \ldots$ zwischen zwei festen Kreisen H und W den kleinsten Centriwinkel (Stundenwinkel) besitzt.

Die Parallelkreise $P_1 P_2 \ldots$ können beschrieben gedacht werden von den einzelnen Punkten $a_1 a_2 \ldots$ des Kreises H um die Achse A. Denkt man sich den letzteren als starres Gebilde um A gedreht, so beschreiben für jede Lage während der Drehung alle Punkte a Kreisbogen von gleichem Centriwinkel.

Bei fortgesetzter Drehung des Kreises H und seiner Ebene E_h um A wird ein Augenblick eintreten, in welchem die Ebene E_h den Kreis W berührt, z. B. in b_1, so dass b_1 als gedrehte Lage eines gewissen Punktes a_1 von H (und der Ebene E_h!) erscheint, jenes Punktes, der unter allen Punkten a des kleinsten Drehungswinkels bedarf, um auf den Kreis W zu gelangen (würde die Drehung fortgesetzt, das heisst, der Drehwinkel und Centriwinkel vergrössert, so würden der Reihe nach andere Punkte von H auf den Kreis W zu liegen kommen).

Es ist mithin klar, dass $a_1 b_1$ jenen fraglichen Parallelkreisbogen darstellt, und es kommt nur darauf an, den Punkt b_1 zu finden. Die Ebene E_h verbleibt während der Drehung um A Tangentialebene eines Rotationskegels, dessen Achse A, dessen Scheitel C und dessen Scheitelwinkel 2φ ist, und welcher K_1 heissen möge. In der geforderten Lage berührt die Ebene E_h nach erfolgter Drehung den Kreis W in b_1; mithin ist dieselbe auch die Berührungsebene eines zweiten Rotationskegels, dessen Scheitel C und dessen Basis W ist und der K_2 heissen möge.

Man bestimme also die gemeinschaftliche Tangentialebene an die beiden Kegel K_1 und K_2; der Punkt b_1, in welchem dieselbe den Kreis W berührt, ist ein Punkt des gesuchten Parallelkreises P_1."

Recensionen.

Leopold Kronecker's Werke. Herausgegeben auf Veranlassung der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften von K. Hensel. Erster Band. Leipzig 1895. 483 S.

Mit dem vorliegenden Bande beginnt die Herausgabe der gesammelten Abhandlungen Leopold Kronecker's, ein Unternehmen, welches sich den früher von der Berliner Akademie der Wissenschaften veranlassten Sammlungen mathematischer Werke anschliesst. Der Herausgeber, Herr K. Hensel, hat, um den inneren Zusammenhang der einzelnen Abhandlungen besser hervortreten zu lassen, die rein chronologische Anordnung aufgeben zu sollen gemeint und es vorgezogen, die sämmtlichen Publikationen in drei grosse Abtheilungen zu sondern, innerhalb deren die zeitliche Aufeinanderfolge des Erscheinens das ordnende Princip abgiebt. Die erste dieser Abtheilungen umfasst alle diejenigen Aufsätze, welche in das Gebiet der von Kronecker sogenannten „allgemeinen Arithmetik“ fallen. Darunter sind diejenigen Untersuchungen verstanden, welche sich auf rationale Functionen beliebig vieler Veränderlicher beziehen und ihrem Wesen nach formaler Natur sind, während der Grössenbegriff in ihnen gar keine oder nur eine accidentelle Rolle spielt. Die zweite Abtheilung hingegen soll diejenigen algebraisch-arithmetischen Abhandlungen enthalten, in welchen der Limesbegriff ein wesentliches methodisches Hilfsmittel bildet, sie zerfällt ihrerseits in zwei Abschnitte. Im ersten sollen die auf den „Affect“ der algebraischen Gleichungen bezüglichen Untersuchungen vereinigt werden, während im zweiten die Aufsätze ihre Stelle finden, in welchen von den Dirichlet'schen analytischen Methoden der Zahlentheorie Gebrauch gemacht ist; in jenen ist es der Wurzelbegriff, in diesen der Grenzwerth einer unendlichen Summe, welcher neu hinzutritt. Schliesslich sollen den Inhalt der dritten Abtheilung die auf Functionen- und Potentialtheorie bezüglichen Untersuchungen Kronecker's bilden und hieran soll sich eine Uebersicht der Ergebnisse anschliessen, welche sich in dem reichen und wohlgeordneten Nachlasse vorfinden. Mochte bei dieser Eintheilung die Einfügung mancher einzelnen Abhandlung wohl auf Schwierigkeiten stossen, so wird der Zusammenhang der Untersuchungen doch immerhin besser gewahrt, als wenn die rein chronologische Anordnung festgehalten worden wäre.

Der vorliegende erste Band enthält von den Abhandlungen der ersten Abtheilung diejenigen, welche sich auf den Zeitraum von 1845—1874 erstrecken. Es sind dies, um die wichtigsten hervorzuheben, die zahlentheoretischen Arbeiten Kronecker's, welche sich auf die Irreductibilität der Kreistheilungsgleichungen, auf die complexen Einheiten und auf die Klassenanzahl idealer complexer Zahlen beziehen; sodann die Untersuchungen dieser Periode über bilineare und quadratische Formen, mit welchen die Theorie der Sturm'schen Reihen und die wichtigen Untersuchungen über die Charakteristik von Functionensystemen aus dem Jahre 1869 in Zusammenhang stehen. Die zur Ergänzung erforderlichen Anmerkungen sollen erst am Ende der Abtheilung ihre Stelle finden. Georg Landsberg.

J. C. **Poggendorff's Biographisch-literarisches Handwörterbuch** zur Geschichte der exacten Wissenschaften, enthaltend Nachweisungen über Lebensverhältnisse und Leistungen von Mathematikern, Astronomen, Physikern, Chemikern, Mineralogen, Geologen, Geographen u. s. w. aller Völker und Zeiten. III. Band (die Jahre 1858 bis 1883 umfassend). Herausgegeben von Dr. B. W. Feddersen und Prof. Dr. A. J. von Oettingen. Leipzig 1896, bei Johann Ambrosius Barth. 1. Lieferung: d'Abancourt — Beilstein. 96 S.

Für Jeden, der irgendwie auf dem Gebiete der Geschichte der exacten Wissenschaften sich umgethan hat, ist Poggendorff's Wörterbuch eine nur selten versagende Quelle der nothwendigsten Art geworden. Wir wüssten nicht, wie ohne dieses Werk zahlreiche andere Schriften mit dem Anspruch auf einige Vollständigkeit hätten entstehen können. Aber einen Fehler wird Poggendorff's Wörterbuch nie abstreifen: dass es 1863 erschienen ist! Ein Drittel Jahrhundert ist seitdem dahingegangen, ein Drittel Jahrhundert reich an wissenschaftlichen Leistungen ersten Ranges, welche in den beiden Bänden von 1863 nicht vorkommen konnten, weil sie noch nicht existirten. Die Moral aus dieser Thatsache ist leicht zu ziehen. Poggendorff's Werk bedarf, wenn es auch kommenden Geschlechtern noch Dienste leisten soll, der Ergänzungsbände, und ein solcher erster Ergänzungsband ist es, dessen erste Lieferung uns vorliegt. Dr. W. Feddersen hat ihre Bearbeitung begonnen. Sein noch unvollendetes Manuscript ging Ende 1894 an Prof. von Oettingen über, der die Fertigstellung so viel als möglich vollzog. Wir sagen absichtlich *so viel als möglich*, denn in der Natur der Sache ist es begründet, dass dem emsigsten Forscher recht Vieles unbekannt bleiben muss. Ergänzungen zu den beiden ersten Bänden waren deshalb auch innerhalb der von ihnen behandelten Zeit nothwendig, und sie finden sich zahlreich in der jetzt erschienenen Lieferung. Der dritte Band soll aus etwa 15 solcher Lieferungen bestehen, wird also annähernd ebenso stark werden, wie jeder der beiden ersten. Als Zeitgrenze setzt er 1883, während die Zeit von 1884 bis 1900 einem vierten Bande vorbehalten ist.

CANTOR.

Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter. Vorlesungen von H. G. ZEUTHEN, Professor an der Universität Kopenhagen (deutsche Uebersetzung von Prof. v. FISCHER-BENZON). Kopenhagen 1896, bei Andr. Fred. Höst & Sön. VII, 342 S.

Das dänische Original erschien 1893, fand aber so gut wie keine Beachtung. Die Mathematiker unserer Zeit müssen mit vielen Sprachen bekannt sein, wenn sie auf dem Laufenden ihrer Wissenschaft bleiben wollen. Deutsche, englische, französische, italienische, lateinische Bücher und Abhandlungen müssen sie lesen. Ist es ihnen zuzumuthen, auch noch böhmisch, dänisch, holländisch, norwegisch, polnisch, portugiesisch, russisch, schwedisch, spanisch, ungarisch zu lernen, weil Mathematiker unter den Völkern sich befinden, die jene Sprachen als ihre Muttersprachen reden? Der Eine oder der Andere mag durch Zufall oder durch Liebhaberei getrieben über die Fünfzahl der Sprachen, welche wir zuerst nannten, hinaus ein eifriger und verständnissvoller Leser sein, möglicherweise vermehrt die Zukunft auch noch die Zahl der für unerlässlich geltenden Sprachen, aber fürs Erste ist es so, dass eine nicht in einer der fünf Hauptsprachen veröffentlichte Arbeit nur halbwegs als veröffentlicht betrachtet werden kann. Herr Zeuthen hat wohl selbst die Empfindung dieser Thatsache gehabt, und nachdem er in durchaus begreiflichem Nationalgefühle zuerst dänisch schrieb, hat er in Herrn v. Fischer-Benzon einen Uebersetzer gesucht und gefunden, der eine deutsche Ausgabe des geistvollen Bändchens veranstaltete.

Ein geistvolles Bändchen nannten wir Herrn Zeuthen's Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter, und dieser Bezeichnung thut es keinen Abbruch, dass wir den Ergebnissen mit dem entschiedensten Misstrauen gegenüber stehen. Das kommt wohl daher, dass wir die alten Schriftsteller, über welche wir Bericht zu erstatten haben, anders als Herr Zeuthen lesen. Wir lesen sie ihrem Wortlaute nach, und wo dieser zweifelhaft oder unklar erscheint, fragen wir den Schriftsteller selbst oder seine nächsten Zeitgenossen, ob diese nicht an anderen Stellen Erklärungen abgegeben haben, welche die Zweifel heben können. Nur wenn auch dieses Mittel sich als unzureichend herausstellt, wagen wir es, eigene Hypothesen zu versuchen, die stets nur als solche von uns verwerthet werden. Anders Herr Zeuthen. Er liest mit grösster Genauigkeit die Werke der hervorragendsten Schriftsteller, im griechischen Alterthume etwa Euklid, Archimed, Apollonius, und, wenn er sie gelesen hat, überlegt er, was er selbst sich wohl dabei gedacht haben würde, wenn er genau die gleichen Sätze in gleicher Reihenfolge zu Papier gebracht hätte. Das Ergebniss dieser Nach-erfindung ist ihm dann griechische Mathematik. Uns will scheinen, dass dabei nur ein Mangel ist. Der Geist des XIX. Jahrhunderts ist nicht der gleiche wie der der vorchristlichen Zeit. Unsere Denkweise ist, auch wenn wir die gleichen Wege einschlagen, im Laufe von zwei Jahrtausenden eine andere und immer andere geworden. Wir wissen es nicht einmal, wie himmelweit anders unsere Schlüsse sind, als die der Griechen, und verfallen dadurch in nach unserer persönlichen Meinung irrige Auffassungen. Wir glauben uns zu antikisiren, und wir modernisiren die Alten. Wir verfahren auf geometrischem Gebiete nicht viel anders, als wenn wir beim Anblick jener altägyptischen Bilder von Figuren, deren Körper trotz der bedeckenden Kleidung in deutlichen Umrissen gezeichnet ist, an eine Benutzung von X-Strahlen dächten.

Wer dieses unser geschichtliches Glaubensbekenntniss nicht theilt, wird Herrn Zeuthen's kleines aber inhaltreiches Buch mit wahrem Entzücken lesen, wird in Euklid, in Archimed, in Apollonius Mathematiker unserer Zeit wiedererkennen mit gleichem Bestreben nach unverbrüchlicher Strenge, mit fast gleichen Mitteln diese Strenge erzwingend. Es muthet uns an wie das weise Jahrhundert, an welches Simon Stevin, an welches Albert Girard glaubten. Vor der Sintfluth wusste man Alles; erst allmählich kam das ursprüngliche Wissen in Vergessenheit und musste mit höchster Geistesanstrengung neu entdeckt werden. Von manchen Resultaten hat man (so sagt Herr Zeuthen wörtlich auf S. 291) — und das auch nicht einmal immer — erst erkennen können, dass die Griechen es besessen haben, nachdem man es selbst in einer anderen Form wiedergefunden hatte. Es war eben ein allgemeiner Niedergang im mathematischen Denken eingetreten, der nach Herrn Zeuthen weit früher begonnen zu haben scheint, als man sonst annimmt, und für welchen er (S. 239) die Thatsache verantwortlich macht, dass die grossen Schriftsteller sich zwar mit ausserordentlicher Sorgfalt durch bestimmte Formen der logischen Unanfechtbarkeit versicherten, aber wegen dieser Alles bei Seite setzten, was die Zugänglichkeit erleichtern, einen Ueberblick verschaffen, oder die Absichten bei den einzelnen Operationen verdeutlichen konnte.

Die Richtigkeit dieser letzten Thatsache ist nicht anzuzweifeln. Aus ihr zu folgern, dass man nach mehr als zwei Jahrtausenden besser im Stande sei, alte Gedanken noch einmal zu denken, als nach wenigen Jahrhunderten, so weit zu gehen, fühlen wir uns ausser Stande. CANTOR.

A primer of the History of Mathematics by W. W. ROUSE BALL, Fellow and tutor of Trinity College, Cambridge. London and New-York 1895. Macmillan & Co. 146 pag.

Eine Geschichte der Mathematik in 146, genauer gesprochen in 137 Seiten, da deren 9 durch ein alphabetisches Inhaltsverzeichniss in

Anspruch genommen sind! Der Verfasser selbst bemerkt in der Einleitung, eine solche Skizze könne nur die Umrisse des Gegenstandes enthalten und sei naturgemäss nicht für Leser bestimmt, die mit demselben vertraut sind. Aber für mit den wesentlichen Thatsachen unbekannte Leser werde, so hoffe er, auch eine blose Skizze nicht ohne Interesse sein. Für die benutzten Quellen und für genauere Ausführungen verweise er auf seine grössere Geschichte der Mathematik. Wir unsererseits hoffen, die zweite Auflage jener grösseren Geschichte, welche wir nicht aus eigenem Augenschein kennen, möge besser, als es mit der ersten Auflage der Fall war, jene Verweisung rechtfertigen, aber immerhin ist uns eine jede Skizze von der Art der uns vorliegenden bedenklich. Sie verlangt denn doch von dem Leser ein sehr grosses Maass des Zutrauens zu dem Verfasser und von dem Verfasser ein noch grösseres Maass der Zurückhaltung bei allen einigermassen streitigen Fragen, will er nicht persönliche Annahmen als Wahrheiten verbreiten. Auch die Form *J believe*, ich glaube, deren Herr Rouse Ball sich in solchen Fällen zu bedienen pflegt, ist kein hinreichender Schutz des unwissenden und unbefangenen Lesers, wenn ihm nicht gesagt wird, was Andere glauben. Welche Schriftsteller der Verfasser als der Nennung bedürftig, welche er als Vergessenheit zulassend erachtet, ist gleichfalls nicht ohne Bedeutung, und wenn auch die Erwähnung weniger hervorragender Persönlichkeiten unschädlich ist, so erscheint um so unbegreiflicher, dass Bradwardin, Oresme, Michael Stifel, Del Ferro, Gabriel Cramer, Fagnano, Robert Simson, Möbius überhaupt nicht genannt und dementsprechend ihre Erfindungen anderen Schriftstellern zugewiesen sind.

CANTOR.

Christian Huygens. Rede, am 200. Gedächtnisstage seines Lebensendes gehalten von J. BOSSCHA, Secretär der Hollandsche Maatsschappij der Wetenschappen zu Haarlem, mit erläuternden Anmerkungen vom Verfasser. Aus dem Holländischen übersetzt von TH. W. ENGELMANN, Professor in Utrecht. Leipzig 1895. Verlag von Wilhelm Engelmann. 77 S.

An 44 Seiten Text schliessen 33 Seiten Anmerkungen an. Die Rede selbst, jene erste Abtheilung, ist ein kleines Meisterwerk volksthümlicher Darstellung. Sie fesselt und erwärmt und flösst Bewunderung für den grossen Gelehrten ein, zu dessen Lob sie gehalten worden ist; aber gleich den meisten an weitere Kreise sich wendenden Ausführungen fordert sie einen gewissen Glauben der Hörer an die Berechtigung der Worte des Redners. Beweise für seine Behauptungen hat Herr Bosscha in den Anmerkungen aufgestapelt, und dadurch sind diese zu dem erwähnten Umfange gelangt. Der wissenschaftlich vorbereitete Leser wird vorzugsweise die Anmerkungen studiren und sicherlich Neues aus ihnen entnehmen. Herr Bosscha hat die bisher erschienenen sechs Bände des Huygens'schen Briefwechsels gründlich für seine Zwecke ausgebeutet, daneben aber auch benutzt, was in anderen Briefwechseln für die Bedeutung von Huygens von Wichtigkeit sein konnte. Uns interessirte namentlich der Nachweis, wie viel Newton dem *Horologium oscillatorium* zu verdanken hatte, da wir selbst auf rein mathematischem Gebiete zu genau gleichem Ergebnisse gelangt waren. Die Uebersetzung von Herrn Engelmann konnte bei dessen genauer Bekanntschaft mit der holländischen wie mit der deutschen Sprache nur tadellos ausfallen.

CANTOR.

Isaac Newton und seine physikalischen Principien. Ein Hauptstück aus der Entwickelungsgeschichte der modernen Physik. Von Professor Dr. FERD. ROSENBERGER. Leipzig 1895, bei Johann Ambrosius Barth (Arthur Meiner), VI, 536 S. mit 25 Abbildungen.

Wir stehen nicht an, unseren kurzen Bericht mit den Worten zu beginnen, dass wir, um dem Werthe des Buches zu genügen, viel ausführlicher sein müssten, und dass nur äussere Umstände uns die Beschränkung auferlegen. Herr Rosenberger kennt Newton durch und durch. Sein Bestreben geht dahin, auch bei seinen Lesern eine solche Kenntniss entstehen zu lassen, und wir zweifeln kaum, dass ihm ausserhalb England allgemein, und auch in England von unbefangenen Gelehrten das Zeugniss werde ausgestellt werden, seinen Zweck erreicht zu haben. Eine Monographie war dazu unbedingt erforderlich. Eine Geschichte der Physik, der Philosophie, der Mathematik können eine jede nur diese oder jene Leistung des Geistesriesen schildern, der ein Jahrhundert hindurch den nicht ohne Kampf errungenen Herrscherthron in den Wissenschaften einnahm. Ihn von allen Seiten zu schildern, vermag nur die Einzelforschung. Freilich wird diese durch die Menge verschiedenartigen Wissens, welche sie von dem Forscher verlangt, wesentlich erschwert, und es ist ein ganz besonderes Lob, welches Herr Rosenberger sich verdient hat, dass auch der Mathematiker nicht unbefriedigt von dem von einem Physiker verfassten Buche scheidet. Die Optik, die Astromechanik, die Infinitesimalrechnung und deren Entwickelungsgeschichte musste der Verfasser sich gleichmässig aneignen, um seinem Helden gerecht zu werden, und, so weit unser Urtheil reicht, hat er sich auf der Höhe seiner Aufgabe zu halten gewusst. Das war nicht leicht, wenn man erwägt, dass Newton's wissenschaftliches Leben aus einer Reihe von Kämpfen bestand, dass also ausser Newton's eigenen Schriften, ausser denen seiner englischen Anhänger, auch die seiner zahlreichen Gegner studirt werden mussten. Ist doch der Streit über das Wesen des Lichtes, über den Ursprung der Gravitation, also der Streit zwischen Emissions- und Undulationslehre, zwischen Vertretern der Fernwirkung und solchen der mittelbaren durch ein Agens sich fortsetzenden Bewegung neben dem Prioritätsstreite über die Infinitesimalrechnung zu schildern gewesen! Wir wiederholen, dass nur ein sehr umfassender Bericht zeigen könnte, wie sehr Herr Rosenberger sich in alle einschlägigen Fragen einzuleben wusste. Höchstens vermissen wir ein Eingehen auf Newton's politische Parteistellung im Gegensatze zu Leibniz, welche Herr Rosenberger uns zu leicht bei Seite zu schieben scheint. Dass die Bewunderung für Newton's Genialität sich mit dem Gefühle des Aergers über so manche seiner Handlungen verbindet, ist nicht die Schuld des Verfassers. Die an Newton's Grabe gehaltene Leichenrede schilderte ihn als Inbegriff aller persönlichen Tugenden. Das Urtheil unbefangener Geschichtsforschung kann sich dem nicht anschliessen.

CANTOR.

Erd- und Himmelsgloben, ihre Geschichte und Construction. Nach dem Italienischen MATTEO FIORINI'S frei bearbeitet von SIEGMUND GÜNTHER. Mit neun Textfiguren. Leipzig 1895, bei B. G. Teubner. VI, 137 S.

Seit wann hat man Kugeln angefertigt, welche dazu bestimmt sind, die Lagenverhältnisse der einzelnen Orte und Länder auf der Erdoberfläche, der Gestirne am Himmelsgewölbe in übersichtlicher Weise zur Kenntniss zu bringen? Wie ist man zu verschiedenen Zeiten bei dieser Anfertigung verfahren? Welchen Schwierigkeiten ist man begegnet, und wie ist man ihrer Herr geworden? Das sind die Fragen, welche Herr Fiorini sich stellte und beantwortete, so beantwortete, dass Herr Günther dem Reize nicht widerstehen konnte, mit Einwilligung des Verfassers eine freie Bearbeitung seiner im *Bolletino della società geografica italiana* erschienenen Abhandlung zu unternehmen. Wir kennen das Original nicht, wissen also nicht zu sagen, welchen Antheil der italienische, welchen der deutsche Gelehrte zu beanspruchen hat. Dass man dieses der deutschen Bearbeitung nicht anmerkt, zeugt jedenfalls für das einheitliche Gepräge, welches Herr Günther ihr zu verleihen wusste. Zwei Hauptabschnitte sind, wenn auch nicht räumlich hervorgehoben, in der Geschichte der Globen zu unterscheiden: die Zeit, in welcher man auf die fertige Kugel Zeichnungen auftrug oder einritzte, und die Zeit, in welcher schon fertiggestellte ebene Streifen der Kugel aufgeklebt wurden. Kapitel I—VI behandeln den ersten, Kapitel VII bis XVII den zweiten Abschnitt. Die zweite Anfertigungsart gestattet, vermöge der ebenen Bedruckung der Streifen, deren vollkommenere Herstellung, hat aber mit zwei grossen Schwierigkeiten zu kämpfen, der mehr zufälligen von der Ausdehnung und Zusammenziehung der Streifen im feuchten und im getrockneten Zustande und der wesentlichen, dass die Kugel keine abwickelbare Oberfläche ist, dass also eine Ueberziehung der Kugel mit ebenen Streifen ohne Faltung unmöglich ist. Der letzteren Schwierigkeit suchte man dadurch zu begegnen, dass man die Streifen nicht als sphärische durch halbe Grösstekreise begrenzte Zweiecke dachte, sondern andere Begrenzungcurven der Zweiecke benutzte, entweder Kreisbogen von anderem Halbmesser als dem der Kugel, oder Sinuslinien, und ferner dadurch, dass man an den Polen, wo sämmtliche Zweiecke aneinander stossen, eine kreisförmige Deckscheibe anwandte, deren Faltung durch Herausschneiden zweier symmetrischer Sectoren vermieden ist. Noch immer sind die Vorschriften unübertroffen, welche Altmütter in dem 15. Bande der Jahrbücher des k. k. polytechnischen Institutes in Wien für die Verfertigung von Erd- und Himmelsgloben gab, und welche nahe daran waren, in Vergessenheit zu gerathen, als Herr Fiorini auf ihre Trefflichkeit aufmerksam machte.

Cantor.

Ein Versuch, die mathematische Analysis auf die Theorien der Elektricität und des Magnetismus anzuwenden. Von George Green (1828) [Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften Nr. 61]. Herausgegeben von A. J. von Oettingen und A. Wangerin. Leipzig 1895, bei Wilhelm Engelmann. 140 S.

Die Potentialtheorie hat sich seit beiläufig 70 Jahren aus einem Kapitel der Mechanik zu einem eigenen Wissensgebiete ausgebildet, und an der Spitze dieser Entwickelung steht die Abhandlung des englischen Müllerssohnes, deren erste deutsche Uebersetzung gegenwärtig erschienen ist. Allerdings kann man das von uns gebrauchte Wort, Green's Abhandlung habe an der Spitze der Entwickelung der Lehre vom Potential gestanden, fast nur in zunächst unbewusstem Sinne rechtfertigen. Nicht blos in Frankreich und Deutschland, auch in England selbst, wo Green's Abhandlung gedruckt war, blieb dieselbe durchaus unbekannt. Ihre Ergebnisse wurden, namentlich von Gauss, zum zweiten Male entdeckt, und erst seit 1850 wurden Green's Erstlingsrechte, in Folge abermaliger Veröffentlichung des Aufsatzes von 1828 in Crelle's Journal, geltend gemacht und bereitwilligst zugestanden. Green selbst war schon 1841 gestorben. Die genannte Abhandlung hat den ehrenden Beinamen einer klassischen Arbeit erhalten, als sie bereits überholt war und wenig oder keine Wirkung mehr ausüben konnte. Die Aufnahme unter die Klassiker der exacten Wissenschaften ist darum nicht weniger gerechtfertigt. Cantor.

Plane and solid geometry by Wooster Woodruff Beman, Professor of mathematics in the university of Michigan and David Eugene Smith, Professor of mathematics in the Michigan state normal school. Boston U. S. A. and London 1895 published by Ginn & Co. IX, 320 pag.

Die beiden Verfasser haben sich zur Aufgabe gestellt, ein elementares Lehrbuch der Planimetrie und Stereometrie zu schreiben, welches die modernen Begriffe anwendet, deren erfolgreichste Wirkung allerdings erst in der höheren synthetischen Geometrie zu Tage tritt. In deutscher Sprache haben Henrici und Treutlein ein Vorbild geliefert, an welches die Herren Beman und Smith sich erfolgreich anschlossen, indem sie auch noch die Schriften von Rouché und De Comberousse, von Petersen, von Faifofer, von Nixon, Harpur, Mackay, Hall und Stevens, also das Beste, was in deutscher, französischer, italienischer und englischer Sprache vorhanden war, mit benutzten. Wir bemerken dazu beiläufig, dass Prof. Julius Henrici fortwährend am Gymnasium in Heidelberg wirkt und nicht mit dem gleichnamigen Mathematiker in London verwechselt werden darf, ein Irrthum, der dem Verfasser S. 310 begegnete, ebenso wie dort das Citat S. 86 durch 36 zu ersetzen ist. Die Henrici-Treutlein'sche Darstellung dürfte unseren Lesern genügend bekannt sein, so dass eine ausführliche Schilderung des Beman-Smith'schen Lehrbuches nicht nöthig fällt. Wir heben nur sehr wenige Einzelheiten hervor. Die Umkehrung der Sätze (*converse theorems*) ist zulässig, sofern folgende drei Beziehungen bewiesen worden sind, dass, sofern $A \lesseqgtr B$ ist, auch $X \lesseqgtr Y$ sein muss (S. 29). Als Princip der Continuität wird (S. 51) ausgesprochen, dass an einer Figur als wahr bewiesene Sätze wahr bleiben, so lange die allgemeinen Bedingungen sich nicht ändern, mögen auch einzelne Grössen null oder negativ werden. Der Satz von dem Grenzübergang (S. 144) sagt aus, dass zwei veränderliche Grössen, deren jede einer Grenze zustrebt, sofern sie fortwährend in einem gewissen Verhältnisse stehen, diesem Verhältnisse auch mit ihren Grenzwerthen genügen. Das sind, wie man sieht, Anschauungen, welche man ehedem dem Anfänger nicht zu bieten wagte. Die Verfasser legen, um die Schwierigkeit der geforderten Abstractionen zu mildern, von Anfang an das grösste Gewicht auf Aufgaben und Uebungen, zu welchen fortwährend kürzer werdende Anleitungen gegeben werden. Petersen's Vorbild leuchtet hier durch, namentlich aber S. 131—137, wo von Methoden der Beweisführung die Rede ist. Die Ausstattung und insbesondere die Figuren der stereometrischen Abschnitte sind musterhaft.

CANTOR.

Vorlesungen über einzelne Theile der höheren Analysis, gehalten am königl. sächs. Polytechnikum zu Dresden. Von Dr. OSKAR SCHLÖMILCH, königl. sächs. Geheimrath a. D., Mitglied der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, der königl. schwedischen Akademie zu Stockholm, der kaiserl. Leopoldinischen Akademie etc. 4. Auflage. Schlömilch's Compendium der höheren Analysis. II. Band. Mit in den Text eingedruckten Holzschnitten. Braunschweig 1895, bei Friedrich Vieweg & Sohn. X, 546 S.

Neunundzwanzig Jahre trennen das Erscheinen der ersten und der vierten Auflage dieses Werkes. Eine wesentliche Umarbeitung ist, wie der Herr Verfasser in den auf einander folgenden Vorreden selbst erklärt, und wie durch den nur um einen halben Druckbogen verstärkten Umfang bestätigt wird, nicht eingetreten. Herr Schlömilch hat nicht beabsichtigt, in ein Lehrbuch zu vereinigen, was nach Aneignung der Elemente der Differential- und Integralrechnung als höhere Stufe überhaupt vorhanden ist, und was seit 1866 ungeheuer anwuchs; er wollte und will nur eine Einführung in die höheren Theorien der Analysis geben, soweit sie in die Gedankenkreise der Physiker und Ingenieure Eingang gefunden haben. In diesem Sinne und als Zusammenstellung von Ergebnissen, zu deren Gewinnung Herr Schlömilch selbst viel beigetragen hat, sind die Vorlesungen heute noch wie in der ersten Auflage empfehlenswerth. Cantor.

Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. Kurzgefasstes Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung mit besonderer Berücksichtigung der Chemie von W. Nernst, a. ö. Professor der physikalischen Chemie und A. Schönflies, o. o. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen. Mit 61 im Text befindlichen Figuren. München und Leipzig 1895. Wissenschaftlicher Verlag von Dr. E. Wolff. XI, 309 S.

Wir erinnern unsere Leser an Fuhmann's Naturwissenschaftliche Anwendungen der Differentialrechnung und Integralrechnung (Berlin 1888 und 1890), welche wir im XXXIV. und XXXVI. Bande dieser Zeitschrift einer empfehlenden Besprechung unterzogen. In dem Referate im XXXVI. Bande erlaubten wir uns zwei Bemerkungen. Wir fragten, ob es nicht möglich sei, als Seitenstück zu Dölp, ein aus Formelableitung und Formelanwendung vereinigt hergestelltes Buch für die Anwendungen der Infinitesimalrechnung auf die Naturwissenschaften anzufertigen; wir forderten die Chemiker auf, ihre Schüler zu veranlassen, beziehungsweise ihnen die Zeit zu gestatten, sich mit Infinitesimalrechnung zu beschäftigen. Das uns heute vorliegende Buch entspricht unserem ersten Wunsche, und die Vereinigung eines Chemikers mit einem Mathematiker zu dessen Ausarbeitung zeugt, dass auch zur Erfüllung des zweiten Wunsches ein grosser Schritt vorwärts nunmehr geschehen ist. Der Nernst-Schönflies, wie das Buch zunächst von dem Buchhändler, bald vielleicht auch von den jüngeren Chemikern genannt wird, verdient gewiss nach seinen beiden Seiten besprochen zu werden. In dieser Zeitschrift dürfte es genügen, wenn nur von dem Mathematischen desselben die Rede ist. Herr Schönflies, der für diesen Theil die Verantwortung trägt, beansprucht keineswegs ein vollständiges Lehrbuch geschrieben zu haben. Wer genauere Kenntniss der Infinitesimalrechnung anstrebt, den verweist er auf Kieper oder Serret-Harnack, die beiden Werke, welche heute wahrscheinlich jeder Lehrer zum gleichen Zwecke empfiehlt. Aber was Herr Schönflies bietet, das ist genügend, um die im Buche enthaltenen Anwendungsbeispiele zu erledigen, ist knapp gehalten, ohne an Verständlichkeit zu verlieren und entbehrt auch nicht einer gewissen Strenge. Man kann in letzterer Beziehung vielleicht sagen, es sei so streng, als es für den im Auge gehabten Leserkreis sein darf. Nur zwei Fragen gestatten wir uns. Warum ist auf S. 175 flg. immer $f(xy)$, $f(xyz)$ gedruckt statt $f(x, y)$, $f(x, y, z)$? Warum sind S. 76 auch die Decimalbrüche durch nachfolgende Punkte zu unendlichen gestempelt, bei welchen die letzte Stelle erhöht ist, und die deshalb schon bei endlicher Stellenzahl eine obere Grenze darstellen? Beispielsweise steht $\frac{1}{3!} = 0{,}16667\ldots$, während doch $\frac{1}{3!} < 0{,}16667$ ist.

Cantor.

Esercizi e note critiche di calcolo infinitesimale (calcolo differenziale e integrale) di Ernesto Pascal, professore nella R. Università di Pavia, S. C. del R. Instituto Lombardo. XIX, 371 pag. Ulrico Hoepli. Milano 1895.

Wir haben im 41. Bande dieser Zeitschrift, Hist.-lit. Abthlg. S. 28 bis 29, die beiden Bändchen angezeigt, in welchen Herr Pascal die Differential- und Integralrechnung behandelte. Das heute uns vorliegende Doppelbändchen ist als deren Ergänzung zu betrachten, und zwar in folgendem Sinne. Seit man sich gewöhnt hat, an die mathematische Strenge immer grössere Anforderungen zu stellen, ist man zur Ueberzeugung gelangt, dass viele ehedem als unbezweifelt wahr angenommenen Sätze nur bedingungsweise gelten, dass sich mindestens Ausnahmefälle bilden lassen, in welchen dieser oder jener Satz aufhört, richtig zu sein. Meistens hat man diese Ueberzeugung gerade an besonderen Beispielen gewonnen, deren zufällige oder absichtliche Auffindung den verschiedensten Mathematikern angehört. Als ganz allgemein bekannte Einzelbeispiele nennen wir nur die Cauchy'sche Function $e^{-\frac{1}{x^2}}$, welche nicht in eine nach steigenden Potenzen von x geordnete Reihe entwickelt werden kann, und die Weierstrass'sche Function ohne Differentialquotienten. Herr Pascal hat alle solche Ausnahmen sorgfältig gesammelt und erörtert, eine Sammlung, welche bis jetzt einzig in der mathematischen Literatur dasteht und gewiss zahlreiche Wünsche befriedigt. Namentlich für mit den Vorlesungen verbundene Seminarübungen gewährt das handliche Buch eine Fülle von Stoff werthvollster Art, den man bisher nur mit grosser Mühe den Originalarbeiten entnehmen konnte. Als ein weiteres Verdienst ist anzuerkennen, dass Herr Pascal eben jene Originalarbeiten genau angiebt, so dass deren Auffindung ein Leichtes ist.

Cantor.

Bibliographie

vom 1. August bis 15. September 1896.

Periodische Schriften.

Veröffentlichungen des königl. preuss. meteorologischen Instituts, zugleich deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1892. III. Heft. Berlin, Asher. 9 Mk.

Landes-Triangulation des Königreichs Preussen. Hauptdreiecke. 8. Theil. Berlin, Mittler & Sohn. 15 Mk.

Jahresbericht des Grossherzoglich Baden'schen Centralbureaus für Meteorologie etc. IV. Theil. Karlsruhe, Braun. 6 Mk.

Beobachtungen aus dem magnetischen Observatorium der kaiserl. Marine in Wilhelmshaven. 4. Theil. (Stündliche Beobachtungen der Declination in den Jahren 1889—1895.) Berlin, Mittler & Sohn. 2 Mk. 50 Pf.

Beobachtungen des Tiflisser physikalischen Observatoriums im Jahre 1894. Petersburg, Eggers & Co. 10 Mk.

Jahrbuch des königl. sächs. meteorologischen Institutes 1895. Drei Theile. Chemnitz, Bülz. 20 Mk.

Nautisches Jahrbuch für 1899. Berlin, Heymann. 1 Mk. 50 Pf.

Preisschriften der Fürstlichen Jablonowski'schen Gesellschaft. Nr. XXXII. Leipzig, Hirzel. 6 Mk.

Sitzungsberichte der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. Mathem.-naturw. Klasse. Jahrg. 1895. Prag, Rivnac. 18 Mk.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. 25. Bd., 1893 und 1894. 2. Heft. Berlin, G. Reimer. 11 Mk.

Fortschritte der Physik im Jahre 1890. (Kosmische Physik von Assmann.) 46 Bd., Abth. III. Braunschweig, Vieweg. 30 Mk.

Katalog der astronomischen Gesellschaft. 1. Abth. 11 Stück. Leipzig, Engelmann. 30 Mk.

Geschichte der Mathematik.

Briefwechsel zwischen J. Steiner und L. Schläfli. Herausgegeben von H. Graf. Bern, Wyss. 2 Mk. 60 Pf.

Reine Mathematik.

BOEHM, K., Allgemeine Untersuchungen über die Reduction partieller Differentialgleichungen auf gewöhnliche Differentialgleichungen; mit einer Anwendung auf die Theorie der Potentialgleichung. Leipzig, B. G. Teubner. 2 Mk.

SPECKMANN, G., Arithmetische Studien. Dresden, Koch. 1 Mk.

GOEBEL, K., Die Zahl und das Unendlichkleine. Leipzig, Fock. 1 Mk. 20 Pf.

HOLZMÜLLER, G., Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik. Gymnasial-Ausgabe. 2. Theil. Leipzig, B. G. Teubner. 3 Mk.

WEBER, H., Lehrbuch der Algebra. 2. Bd. (Schluss). Braunschweig, Vieweg. 20 Mk.

Angewandte Mathematik.

SPORER, B., Ueber den Schwerpunkt der gemeinschaftlichen Punkte zweier algebraischen Curven (Dissertation). Tübingen, Fues. 1 Mk.

EBSEN, J., Azimuth-Tabellen für die Sonne, von 10 Zeitminuten zwischen den Breiten von 70° N. bis 70° S. Hamburg, Eckardt & Messdorf. 7 Mk. 50 Pf.

FUHRMANN, A., Die Theodolite, ihre Einrichtung, Anwendung, Prüfung und Berichtigung. Leipzig, Seemann. 3 Mk.

—— Die Kippregeln, deren Verwendung, Prüfung und Berichtigung. Ebendaselbst. 1 Mk. 25 Pf.

Physik und Meteorologie.

VOLKMANN, P., Erkenntnisstheoretische Grundzüge der Naturwissenschaften. Leipzig, B. G. Teubner. 6. Mk.

BEBBER, J. VAN, Die Beurtheilung des Wetters auf mehrere Tage voraus. Stuttgart, Enke. 1 Mk.

Historisch-literarische Abtheilung.

Extraction des racines carrées dans la Grèce Antique.

Par

V. V. Bobynin

in Moskau.

La question des moyens dont en s'est servi dans la Grèce antique pour l'extraction des racines carrées appartient à celles qui ont depuis longtemps attiré l'attention des mathématiciens. De nos jours les tentatives à en trouver la solution forment une littérature assez vaste. Non obstant toutefois la multitude variée de ces essais, on s'aperçoit aisément qu'ils tendent vers un seul et même but, celui de démontrer que la méthode employée par les mathématiciens grecs pour l'extraction approximative des racines carrées coïncide avec la méthode actuelle des fractions continues.* Ces recherches n'ont point abouti à des resultats satisfaisants, car la plupart des valeurs approximatives de la racine carrée que nous font connaître les oeuvres mathématiques des Grecs ne coïncident exactement avec aucune des approximations fournies par la méthode des fractions continues. C'est pourquoi la question n'en reste pas moins à résoudre, et c'est ainsi qu'elle est envisagée par des savants qui, comme M. Cantor lui-même, traitent avec une indulgence particulière les tentatives pour en trouver la solution.** Serait-il donc raisonnable de s'en tenir encore aux procédés dont l'inefficacité paraît suffisament prouvée, et ne vaudrait-il pas mieux de recourir aux moyens nouveaux pour résoudre la question épineuse? Il va sans dire que la recherche de ces moyens doit être précédée par une connaissance détaillée de ce que nous fournit à ce sujet la littérature mathématique des Grecs. Nous ne tardons pas à voir que l'extraction approximative des racines carrées en est l'objet principal, comme faisant indubitablement parti du domaine des investigations.

Parmi les oeuvres spécialement mathématiques, celle d'Archimède sur la „Mesure du cercle" (*Κύκλου μέτρησις*) est la première qui contienne un assez grand nombre de racines carrées approximativement extraites de

---

* Cantor. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, I. Bd. (Leipzig 1880), S. 272—273.

** Cantor, l. c. S. 273.

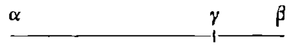
carrés inexacts. On y voit les nombres $591\frac{1}{8}$, $1172\frac{1}{8}$, $2339\frac{1}{4}$, $3013\frac{3}{4}$, $1838\frac{9}{11}$, $1009\frac{1}{6}$, $2017\frac{1}{4}$ figurer comme racines carrées des nombres 349450, $1373943\frac{33}{64}$, $5472132\frac{1}{16}$, 9082321, 3380929, 1018405, $4069284\frac{1}{36}$. Et pour $\sqrt{3}$ on y trouve ces approximations qui la contiennent

$$\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}.$$

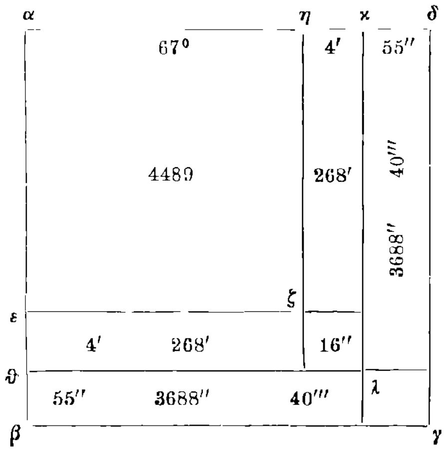
Le livre d'Archimède ne présentant point de calculs amenant à ces racines et ne faisant mention d'aucune connaissance relative à elles, attira tout d'abord l'intérêt des mathématiciens à l'extraction des racines carrées dans la Grèce Antique. Le commentaire de la „Mesure du cercle" par Eutocius d'Ascalon ne nous en dit pas plus long. Il donne assez de détails sur les procédés employés par les mathématiciens grecs pour l'addition, la soustraction et la multiplication des nombres entiers et des nombres fractionnaires, mais il n'a que ces lignes insignifiantes pour l'extraction des racines carrées: „In diesem Satze wird uns beständig aufgegeben, von einer gegebenen Zahl die Quadratwurzel zu finden. Diese aber bei einer Zahl, die kein Quadrat ist, genau zu finden, ist unmöglich. Denn, eine Zahl mit sich selbst multiplicirt giebt eine Quadratzahl; aber eine Zahl und ein Bruch in sich selbst multiplicirt geben keine ganze Zahl, sondern auch einen Bruch. Wie man aber eine Wurzel findet, deren Quadrat einer gegebenen Zahl sehr nahe gleich kommt, ist von Hero in den *Μετρικοῖς*, und von Pappus, Theon und Anderen, welche die *Μεγάλη Σύνταξις* von Klaudius Ptolemäus commentirt haben, gelehrt worden. Daher haben wir nicht nöthig Untersuchungen hierüber anzustellen, da Freunde der Wissenschaft bei jenen nachsehen können."* Parmi les oeuvres énumérées par Eutocius il n'y a que le commentaire à l'Almageste de Ptolemée par Théon d'Alexandrie qui soit arrivé jusqu'à nous. L'extraction des racines carrées y est représentée de la manière suivante: „Hierauf dürfte es an der Reihe sein zu bemerken, wie wir, wenn ein quadratischer Raum gegeben ist, der keine in der Länge rationale Seite hat, die Seite desselben durch Annäherung berechnen können. Die Sache ist für ein Quadrat, welches eine rationale Seite hat, aus dem vierten Satze des zweiten Buchs der Elemente klar, der so lautet: Wenn eine gerade Linie beliebig geschnitten wird, so ist das Quadrat der ganzen Linie gleich den Quadraten der beiden Abschnitte und dem doppelten Rechtecke, welches von den Abschnitten gebildet wird. Denn, wenn wir eine gegebene Quadratzahl, z. B. 144, haben, welche eine rationale Wurzel hat, etwa die Linie $\alpha\beta$, und wir nehmen ein Quadrat, welches kleiner ist

* Nesselmann, Die Algebra der Griechen (Berlin 1842), S. 111.

als jenes, etwa 100, dessen Seite 10 ist, und nehmen $\alpha\gamma$ gleich 10 an, und verdoppeln es, weil das Rechteck der Abschnitte doppelt sein soll, und dividiren mit den so entstandenen 20 in den Rest 44, so wird der Rest 4 das Quadrat von $\beta\gamma$, dieses selbst aber in der Länge 2 sein. Es war aber $\alpha\gamma = 10$, also wird die ganze Linie $\alpha\beta$ gleich 12 sein, was bewiesen werden sollte.



Damit uns aber an einer in der Syntaxis vorkommenden Zahl das Wesen dieses theilweisen Wegnehmens vor Augen geführt werden, so wollen wir die Darstellung an der Zahl 4500 durchführen, deren Wurzel dort gleich $67^0 4' 55''$ gesetzt wurde. Es liege ein quadratischer Raum $\alpha\beta\gamma\delta$ vor, allein im Quadrat rational, dessen Inhalt 4500 Grade sein soll, und es werde verlangt, die Quadratwurzel desselben durch Annäherung zu berechnen. Da nun das der Zahl 4500 nächstliegende Quadrat mit rationaler Wurzel gleich 4489 ganzen Graden und dessen Seite gleich 67^0 ist, so werde von dem Quadrat $\alpha\beta\gamma\delta$ das Quadrat $\alpha\zeta$ gleich 4489 Graden, dessen Seite 67^0 ist, weggenommen. Der Rest also, das heisst der Gnomon $\beta\zeta\delta$ wird gleich 11 Graden sein. Diese lösen wir in Minuten auf



und erhalten 660′. Dann nehmen wir $\varepsilon\zeta$ doppelt, weil zwei Rechtecke auf $\varepsilon\zeta$ stehen, da $\varepsilon\zeta$ gleich $\zeta\eta$ ist, und durch das Resultat 134 dividiren wir die 660 Minuten und durch den Quotienten, 4 Minuten, erhalten wir jede der beiden Linien $\varepsilon\vartheta$, $\eta\varkappa$; und wenn wir die Parallelogramme $\vartheta\zeta$, $\zeta\varkappa$ ausfüllen, so finden wir sie gleich 536 Minuten, oder jedes von ihnen gleich 268 Minuten. Nun lösen wir abermals die restirenden 124 Minuten in 7440 Secunden auf, und subtrahiren auch das Ergänzungsquadrat $\zeta\lambda$, welches 16 Secunden beträgt, so dass wir, wenn wir um das vorige Quadrat $\alpha\zeta$ den Gnomon herumsetzen, das Quadrat $\alpha\lambda$ erhalten, dessen Seite $67^0 4'$, das also selbst gleich $4497^0\, 56' 16''$ ist. Nun bleibt noch der Gnomon $\beta\lambda\delta$ gleich $2^0 3' 44''$ oder $7424''$ übrig. Wir nehmen also wieder $\vartheta\lambda$ doppelt, weil $\vartheta\lambda$ gleich $\lambda\varkappa$ ist, und dividiren durch diese $134^0 8'$ die 7424 Secunden, und erhalten in dem Quotienten, 55 Secunden, jede der beiden Linien $\vartheta\beta$, $\varkappa\delta$. Und wenn wir die Parallelogramme $\beta\lambda$, $\lambda\delta$ ausfüllen, so erhalten wir dieselben gleich 7377 Secunden 20 Tertien, und jedes derselben gleich $3688'' 40'''$; es bleiben als Rest $46'' 40'''$, welchen nahe kommt das Quadrat $\lambda\gamma$, dessen Seite

55 Secunden ist, und so haben wir die Seite des Quadrats $\alpha\beta\gamma\delta$, welches gleich 4500 Graden ist, nahe gleich $67^0 4' 55''$. Und im Allgemeinen, wenn wir die Quadratwurzel irgend einer Zahl suchen, so nehmen wir zuerst die Wurzel der zunächstliegenden Quadratzahl, dann verdoppeln wir diese und dividiren damit in den Rest, nachdem wir denselben in erste Sechzigtheile aufgelöst haben, und subtrahiren das Quadrat des Quotienten; dann lösen wir wieder den Rest in zweite Sechzigtheile auf und dividiren ihn durch die doppelten Grade und Minuten, so erhalten wir nahe die gesuchte Zahl für die Seite des quadratischen Raumes".*

Cette description de l'extraction approximative des racines carrées ne doit pas cependant nous mener à croire que les Grecs en aient fait l'opération toujours et partout au moyen du système sexagésimal. Ce dernier, exclusivement adopté par l'astronomie grecque, y serait difficilement introduit avant Hipsicles d'Alexandrie, c'est à dire 200—100 ans avant J. C. La plus large application en eut lieu dans l'Almageste de Ptolemée dont les commentateurs, Théon d'Alexandrie y compris, furent bien forcés d'extraire les racines carrées, à l'aide du système sexagésimal. Avant que celui-ci ne fut introduit en Grèce, et toujours dans les mathématiques qui ne l'admirent point, l'extraction approximative des racines carrées dut s'opérer dans toutes les fractions et même de préférence dans les fractions au numérateur 1.

Les mathématiciens grecs de quels moyens se sont-ils donc servis afin d'extraire approximativement les racines carrées dans toutes les fractions? Eutocius semble nous donner une réponse en indiquant Héron comme l'auteur qui expose le moyen, décrit plus tard par Théon d'Alexandrie et les autres commentateurs de l'Almageste. Mais si ces derniers avaient opéré d'après le procédé du gnomon, appliqué suivant l'auteur commenté au système sexagésimal, Héron qui ne s'en était jamais servi, et qui avait toujours employé, que nous sachions, les fractions au numérateur 1, Héron, disons-nous, n'aurait pu avoir recours au procédé du gnomon qu'en l'appliquant à ces fractions là. Nous pouvons donc envisager ce procédé comme également appliqué par les mathématiciens grecs à l'extraction des racines carrées dans tous les cas, peu importe dans quelles fractions en fusse exigée l'approximation. Avant d'entreprendre les recherches tendant à découvrir l'extraction approximative des racines carrées dans la forme commune aux Grecs et suivant le procédé du gnomon, nous devons faire une plus ample connaissance de la nature et des qualités générales de ce dernier. Nous commencerons par le voir appliqué à l'extraction de la racine carrée d'un nombre donné avec l'approximation de l'unité.

---

* Nesselmann, l. c. S. 144—146.

Ainsi que nous le montre la description de Théon, citée plus haut, le procédé du gnomon a pour base la formule d'une somme des deux nombres élevée au carré. Il touche par là au procédé de l'extraction employé dans les cours élémentaires actuels, en même temps qu'il en diffère. En effet, représentant une méthode, parfaitement adaptée aux lois et aux exigences du système décimal, celle des manuels de nos jours définit à part chaque chiffre de la racine carrée, en se servant ainsi de la formule d'une somme de plusieurs nombres élevée au carré. Certains cours cherchent seulement à masquer la chose dans un but didactique en employant artificiellement l'expression de la somme des deux nombres élevée au carré. De cette manière la méthode de nos manuels ne saurait coïncider avec le procédé du gnomon qu'en cas d'une racine à deux chiffres. Dans tous les autres cas les deux procédés font deux méthodes différentes et il est à regretter qu'on l'ait quelquefois perdu de vue.

D'après ce que dit Théon le procédé du gnomon employé par les mathématiciens grecs exige que la racine à trouver du nombre c soit décomposée en deux nombres inégaux a et b, de manière à ce que le carré du moindre, par exemple celui de b, équivale au reste de la division $(c - a^2) : 2a$, ou y soit contenu. La demande en est satisfaite moyennant un tel choix de nombres dans la décomposition qui présenterait le carré du plus petit moindre que le plus grand nombre doublé, ainsi qu'on voit dans l'égalité

$$1) \qquad \frac{c - a^2}{2a} = b + \frac{b^2 + r}{2a},$$

où r est le reste de la racine carrée, extraite du nombre donné avec l'approximation de 1. On conçoit que dans chaque cas particulier de l'extraction de la racine carrée ce nombre moindre peut-être représenté par les nombres les plus différents, et que la décomposition de la racine cherchée en binome, exigée par le procédé du gnomon, est une question indéfinie et le nombre des solutions qu'elle admet doit être plus ou moins grand. C'est la une différence marquée entre la méthode du gnomon et celle de nos cours élémentaires, et même le cas particulier quand les deux méthodes coïncident, c'est à dire pour la racine à deux chiffres, n'y fait point exception. En effet, la décomposition de la racine présentée dans ce dernier cas par la méthode de nos manuels ne fait qu'une solution entre mille, fournies par la décomposition générale de la racine en n'importe quels deux nombres inégaux. Afin de trouver l'une des décompositions en binome de la racine carrée que l'on cherche et qui eusse répondu à la condition énoncée, on employa la méthode des tâtonnements. Il n'est pas difficile de reconnaître que dans le cas indiqué l'application en fut nécessairement reduite à la partie qui trace les limites mêmes des tâtonnements. Pour en connaître les procédés prenons quelque cas particulier, par exemple le nombre 349450, cité par Archimède. Les limites des tâtonnements immédiatement aperçues et servant à découvrir la racine carrée de ce nombre sont 100 et 1000. Celles qui suivent, les nombres 500 et 600 avec leurs carrés de 250000 et 360000 sont trouvées aussitôt, si l'on songe que tout nombre de centaines élevé au carré donne des dizaines de mille dans une quantité qui en égale le carré. L'observation faite que le nombre donné approche de plus près la supérieure de ces limites permet d'en remplacer l'inférieure par le nombre plus proche de 550 avec son carré de 302500. La même observation reitérée après ce changement nous laisse élever le nombre 550 à 575. On peut s'arrêter à cette augmentation, car elle introduit tout droit la décomposition en binome de la racine cherchée dans le domaine de celles qui repondent à la condition indiquée, adaptée au procédé du gnomon. Et toute décomposition en binome des nombres contenus entre 550 et 600 y répondra en effet, si le moindre en est 33 ou quelque autre nombre inférieur qui le suit, les carrés en étant moindres que les grands nombres correspondants doublés. Le nombre 575 lui-même, transformé en 600 rien que par l'addition de 25 peut donc être le nombre supérieur à l'une des décompositions en binome de la racine à définir. Si ensuite on applique à ce nombre comme possédant la qualité indiquée, en même temps qu'au nombre donné, la règle du gnomon exprimée par la formule 1), on s'aperçoit aussitôt que le nombre inférieur à la décomposition cherchée est 16 et consequamment la racine carrée à trouver est 591, ainsi que nous le montre le calcul suivant.

$$
\begin{array}{r|l}
349450 & \\
\underline{330625} & \\
18825 & \underline{1150} \\
1150 & 16 \\
\underline{6900} & \\
425 & \\
\underline{256} & \\
169 &
\end{array}
$$

La limite inférieure des tâtonnements, semblable dans ses qualités à celle que nous venons d'établir a pu être trouvée encore moyennant les réflexions suivantes. Entre les nombres 500 et 600 qui ont servi de limites aux tâtonnements il y a 10 intervalles représentés par les dizaines successives. Il y en a 10 autres, à 11000 chacun, entre les carrés des mêmes limites, 250000 et 360000. Le nombre donné se trouve dans le dernier de ces intervalles, donc la racine carrée en doit être dans le dernier des intervalles correspondants, contenus entre 500 et 600. La limite inférieure peut être élevée pour cette raison à 590, qui fait le nombre primitif du dernier des intervalles cités. Se servant alors de ce nombre, suffisant aux conditions indiquées, comme du nombre supérieur de la racine décomposée en binome, on a trouvé que le nombre inférieur en était 1, ainsi que le montre le calcul suivant.

$$
\begin{array}{r|l}
349450 & \\
\underline{348100} & \\
1350 & \underline{1180} \\
\underline{1180} & 1 \\
170 & \\
\underline{1} & \\
169 &
\end{array}
$$

Remarquons pour conclure que même en cas d'un choix mal réussi pour la décomposition en binome de la racine cherchée, c'est à dire quand le carré du membre inférieur est plus grand que le membre supérieur doublé, le membre moindre pourrait être trouvé par la diminution du quotient, obtenu par l'application de la règle du gnomon. La limite de cette diminution devient sans doute le reste qui renferme le carré du dernier quotient. En prenant par exemple le nombre 550, comme le membre supérieur de la racine décomposée en binome et que l'on cherche, on trouve qu'il faut diminuer le quotient (42) d'une unité. Le nombre supérieur de la décomposition étant 500, il faut diminuer de 8 le quotient 99 pour arriver au même but etc.

Pour appliquer le procédé du gnomon à l'extraction approximative de la racine carrée dans toutes les fractions indiquons dans l'expression de la somme des deux nombres élevée au carré

$$2)\qquad c = (a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$$

par a la dernière des approximations trouvées de la racine carrée, c'est à dire l'exprimant au commencement de l'opération avec l'approximation de 1, et ensuite dans n'importe quelles parties de l'unité, en exprimant par x la différence entre cette approximation et la vraie valeur de la racine. Il n'est pas difficile de reconnaître que cette différence est toujours moins que 1. En négligeant dans l'équation

$$3)\qquad x + \frac{x^2}{2a} = \frac{c - a^2}{2a}$$

le nombre $\frac{x^2}{2a}$, ainsi qu'il en a été fait dans l'application précédente du procédé du gnomon, on trouve l'approximation de x excédant sa vraie valeur et rendue par la formule

$$4)\qquad x = \frac{c - a^2}{2a}.$$

Le calcul de x d'après cette formule le présente pour la plupart comme une somme de deux fractions dont on peut omettre la moindre. Si cette diminution ne suffit pas à annuler l'augmentation qui la précède ou si elle n'a point eu lieu, la quantité x donnée par la formule 4) n'en garde pas moins son augmentation, mais descend jusqu'à être au dessous de sa grandeur véritable, en vertu de la condition que le carré du quotient obtenu par la formule 4) doit se trouver dans le reste donné par la même division. La quantité x calculée de cette manière et que nous nommerons x_1 sera toujours moindre que sa valeur réelle et $a + x_1$ moindre que la valeur véritable de la racine. La substitution de x_1 à x dans l'égalité 2) en en diminuant la seconde partie en fait l'inégalité

$$c > a^2 + 2ax_1 + x_1^2$$

dont la différence des membres

$$5)\qquad c - a^2 - 2ax_1 - x_1^2$$

présente évidemment le reste de l'extraction de la racine carrée fournissant l'approximation cherchée. Pour définir celle qui suit, il faut diviser le reste faisant la différence entre le nombre donné et le carré de l'approximation trouvée, par l'approximation $a+x_1$ trouvée et doublée et continuer ainsi de suite. Puisque dans la formule 4) $c-a^2$ est toujours moindre que $2a$, cette division ne saurait être possible à moins que $c-a^2$ ne fût partagée en des parties aliquotes dont le nombre excèderait $2a$. Le choix des parties aliquotes se trouvant parfaitement arbitraire, et l'application des formules indiquées tout à fait illimitée, permettent de trouver en les employant toutes sortes d'approximations de la racine cherchée, peu importe quels qu'en soient le nombre et les parties aliquotes.

Appliquons maintenant le procédé du gnomon dans sa forme que nous venons d'examiner à la découverte des approximations des racines carrées, moindres que leur valeur véritable et fournies par les oeuvres des mathématiciens grecs arrivées jusqu'à nous. Commençons par celles qui ont les plus simples dénominateurs. Telles sont les trois premières approximations d'Archimède citées plus haut et la fraction $\frac{7}{5}$ signifiant l'approximation de $\sqrt{2}$, trouvée dans le livre de Héron d'Alexandrie „sur l'agriculture“ et pouvant être obtenue aussi comme on le sait par le procédé des fractions continues. Pour le premier et le quatrième de ces cas nous avons déjà les racines carrées avec l'approximation de 1, voire le nombre 591 cité plus haut et le nombre 1 directement aperçu. Pour le second et le troisième cas les racines semblables sont trouvées par le même procédé, à l'aide des calculs suivants

$$\begin{array}{r|l} 1373943 & \\ 1322500 & \\ \hline 51443 & 2300 \\ \cline{2-2} 4600 & 22 \\ 4600 & \\ \hline 843 & \\ 484 & \\ \hline 359 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 5472132 & \\ 5290000 & \\ \hline 182132 & 4600 \\ \cline{2-2} 13800 & 39 \\ 41400 & \\ \hline 2732 & \\ 1521 & \\ \hline 1211 & \end{array}$$

Les limites des tâtonnements pour le premier nombre sont 1150 et 1200, pour le second 2300 et 2400; les membres supérieurs des décompositions en binôme de la racine corréspondent à 1150 et à 2300; les résultats obtenus dans le premier cas $1150+22=1172$ et dans le second $2300+39=2339$. Quant aux parties fractionnaires de ces nombres données par Archimède $\left(\frac{33}{64} \text{ et } \frac{1}{16}\right)$, on peut en omettre l'examen, ou leur incapacité évidente d'influer sur l'approximation qui vient d'être trouvée ainsi que sur celle qui suit.

Là-dessus, pour tous les quatre nombres passés en revue nous trouvons successivement: d'après la formule 2):

$$349450 = (\ 591 + x)^2 = \ 349281 + 1182x + x^2$$
$$1373943 = (1172 + x)^2 = 1373584 + 2344x + x^2$$
$$5472132 = (2339 + x)^2 = 5470921 + 4678x + x^2$$
$$2 = (1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2$$

d'après la formule 4)

$$x = \frac{169}{1182} = \frac{169.8}{1182.8} = \frac{1352 : 1182}{8} \text{ ou } x_1 = \frac{1}{8}$$
$$x = \frac{359}{2344} = \frac{359.8}{2344.8} = \frac{2872 : 2344}{8} \text{ ou } x_1 = \frac{1}{8}$$
$$x = \frac{1211}{4678} = \frac{1211.4}{4678.4} = \frac{4844 : 4678}{4} \text{ ou } x_1 = \frac{1}{4}$$
$$x = \frac{1}{2} = \frac{5}{5} : 2 = \frac{2}{5} + \frac{1}{10} \text{ ou } x_1 = \frac{2}{5}$$

d'après la formule 5)

$$349450 - 349281 - \frac{1182}{8} - \frac{1}{64} = 169 - \frac{1182}{8} - \frac{1}{64} = \frac{169.8 - 1182}{8}$$
$$- \frac{1}{64} = \frac{170}{8} - \frac{1}{64} = \frac{170.8 - 1}{64} = \frac{1359}{64}$$

$$1373943 - 1373584 - \frac{2344}{8} - \frac{1}{64} = 359 - \frac{2344}{8} - \frac{1}{64} = \frac{359.8 - 2344}{8}$$
$$- \frac{1}{64} = \frac{528}{8} - \frac{1}{64} = \frac{528.8 - 1}{64} = \frac{4223}{64}$$

$$5472132 - 5470921 - \frac{4678}{4} - \frac{1}{16} = 1211 - \frac{4678}{4} - \frac{1}{16} = \frac{1211.4 - 4678}{4}$$
$$- \frac{1}{16} = \frac{166}{4} - \frac{1}{16} = \frac{166.4 - 1}{16} = \frac{663}{16}$$

$$2 - 1 - \frac{4}{5} - \frac{4}{25} \quad 1 - \frac{4}{5} - \frac{4}{25} = \frac{1.5 - 4}{5} - \frac{4}{25} = \frac{1}{5} - \frac{4}{25}$$
$$= \frac{1.5 - 4}{25} = \frac{1}{25}.$$

Les valeurs approximatives des racines carrées $591\frac{1}{8}$, $1172\frac{1}{8}$, $2339\frac{1}{4}$, $\frac{7}{5}$, obtenues après l'application de la formule 4) se trouvent de cette manière parfaitement coïncidentes avec celles que donnent Archimède et Héron.

Tous les calculs qui viennent d'être présentés sous les formes actuelles des fractions peuvent être réunis d'après le schème déjà employé pour l'extraction de la racine carrée avec l'approximation de 1, et alors telle en est la forme

349450		1373943		5472132		2	
− 349281		− 1373584		− 5470921		− 1	
169		359		1211		1	
× 2		× 2		× 2		× 5	
338		718		2422		5	2
× 2		× 2		× 2		4	2
676		1436		4844	4678	1	
× 2		× 2		4678	1	× 5	
1352	1182	2872	2344	166		5	
1182	1	2344	1	× 4		− 4	
170		528		664		1	
× 8		× 8		− 1			
1360		4224		663			
− 1		− 1					
1359		4223					

Dans les oeuvres des mathématiciens grecs, arrivés jusqu'à nous on ne rencontre qu'un seul cas, dans lequel l'approximation de la racine carrée moindre que sa valeur véritable est exprimée par la fraction au dénominateur assez compliqué. Ce cas unique est la moindre des approximations de $\sqrt{3}$ citées plus haut $\left(\frac{265}{153}\right)$, qui contiennent dans l'intervalle entre elles suivant Archimède la véritable grandeur de cette racine. On voit aisément que cette approximation ne peut être obtenue par le procédé du gnomon qu'à la condition de ce que les nombres fractionnaires en aient pour dénominateurs les facteurs premiers du dénominateur 153 possédé par l'approximation cherchée, ou les nombres qui en sont composés. L'application successive des formules 2), 4) et 5) avec l'emploi du facteur premier 3 donne

$$3 = (1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2$$

$$x = \frac{3-1}{2} = \frac{2\,.\,3}{3} : 2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \text{ ou } x_1 = \frac{2}{3}$$

$$3 - 1 - \frac{4}{3} - \frac{4}{9} = 2 - \frac{4}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2\,.\,3}{3} - \frac{4}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{3} - \frac{4}{9}$$

$$= \frac{6}{9} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}.$$

L'approximation trouvée est $1+x_1=1\frac{2}{3}$; son introduction dans les mêmes formules et avec l'emploi du facteur premier 17 donne

$$3=\left(\frac{5}{3}+x\right)^2=\frac{25}{9}+\frac{10}{3}x+x^2$$

$$x=\left(3-\frac{25}{9}\right):\frac{10}{3}=\frac{2}{9}:\frac{10}{3}=\frac{2}{3}:10=\frac{2\,.\,17}{3\,.\,17}:10=\frac{3}{51}+\frac{4}{510}\quad\text{ou}\quad x_1=\frac{3}{51}$$

$$3-\frac{25}{9}-\frac{30}{3\,.\,51}-\frac{9}{(51)^2}=\frac{2}{9}-\frac{30}{3\,.\,51}-\frac{9}{(51)^2}=\frac{2\,.\,17}{9\,.\,17}-\frac{30}{3\,.\,51}-\frac{9}{(51)^2}$$

$$=\frac{34}{9\,.\,17}-\frac{30}{3\,.\,51}-\frac{9}{(51)^2}=\frac{4}{3\,.\,51}-\frac{9}{(51)^2}$$

$$=\frac{4\,.\,17}{(51)^2}-\frac{9}{(51)^2}=\frac{68-9}{(51)^2}=\frac{59}{(51)^2}.$$

L'approximation nouvelle est $\frac{5}{3}+\frac{3}{51}=\frac{88}{51}$. Son introduction dans les formules avec l'emploi du facteur premier 3 amène aux résultats suivants

$$3=\left(\frac{88}{51}+x\right)^2=\frac{7744}{2601}+\frac{176}{51}x+x^2$$

$$x=\left(3-\frac{7744}{2601}\right):\frac{176}{51}=\frac{59}{(51)^2}:\frac{176}{51}=\frac{59}{51}:176=\frac{59\,.\,3}{51\,.\,3}:176$$

$$=\frac{177}{51\,.\,3}:176=\frac{1}{153}+\frac{1}{153\,.\,176}\quad\text{ou}\quad x_1=\frac{1}{153}$$

$$3-\frac{7744}{2601}-\frac{176}{51\,.\,153}-\frac{1}{(153)^2}=\frac{59}{(51)^2}-\frac{176}{51\,.\,153}-\frac{1}{(153)^2}$$

$$=\frac{59\,.\,3}{(51)^2.\,3}-\frac{176}{51\,.\,153}-\frac{1}{(153)^2}=\frac{177-176}{(51)^2.\,3}-\frac{1}{(153)^2}$$

$$=\frac{1}{(51)^2.\,3}-\frac{1}{(153)^2}=\frac{3}{(153)^2}-\frac{1}{(153)^2}=\frac{2}{(153)^2}.$$

L'approximation obtenue $\left(\frac{88}{51}+\frac{1}{153}=\frac{265}{153}\right)$ étant celle d'Archimède il n'est pas nécessaire d'appliquer plus longuement les formules. Tous les calculs opérés et réunis d'après le schème connu prennent la forme réduite que voici.

En somme, en examinant cette évaluation des approximations de la racine carrée moindres que sa vraie grandeur on peut en résumer ainsi le procès. Du nombre dont on veut évaluer la racine carrée on soustrait le plus grand carré entier contenu dans ce nombre.

Le reste obtenu est d'abord multiplié par le dénominateur des nombres fractionnaires (parties aliquotes) choisis pour l'approximation cherchée. Il est divisé ensuite par la double racine du plus grand carré entier contenu dans le nombre. Le reste de cette division est multiplié par le dénominateur en question et le carré du quotient soustrait au produit obtenu. La racine du plus grand carré entier contenu dans le nombre ajoutée au quotient fera l'approximation cherchée. Pour obtenir la suivante on multipliera le reste de la dernière soustraction par n'importe quel multiplicateur et on en divisera le produit par le double numérateur de l'approximation trouvée. Le quotient en sera la fraction dont le dénominateur est le produit de celui de l'approximation précédente et du multiplicateur choisi. On multipliera ce reste par le même multiplicateur, et l'on soustraira du produit le carré du quotient nouveau. L'approximation précédente ajoutée au quotient nouveau sera l'approximation nouvelle. Toutes celles qui suivent quels qu'en soient le nombre et les dénominateurs peuvent être trouvées de la même manière.

$$\begin{array}{r|l}
3 & \\
-1 & \\
\hline
2 & \\
\times 3 & \\
\hline
6 & 2 \\
4 & \overline{2} \\
\hline
2 & \\
\times 3 & \\
\hline
6 & \\
-4 & \\
\hline
2 & \\
\times 17 & \\
\hline
34 & 10 \\
30 & \overline{\ 3} \\
\hline
4 & \\
\times 17 & \\
\hline
68 & \\
-9 & \\
\hline
59 & \\
\times 3 & \\
\hline
177 & 176 \\
176 & \overline{\ \ 1} \\
\hline
1 & \\
\times 3 & \\
\hline
3 & \\
-1 & \\
\hline
2 &
\end{array}$$

Conformément à ce qui vient d'être exposé, la méthode du gnomon donnant les approximations de la racine carrée moindres que sa valeur véritable et cela dans toutes sortes de fractions, il s'en suit que l'application à chaque cas particulier en peut avoir un nombre infini de voies. Afin de trouver celle qu'avait adoptée l'auteur ancien en cherchant l'approximation de quelque racine carrée, il faut en décomposer le dénominateur en facteurs premiers et ne se servir que de ces derniers pour la multiplication des restes que fournit l'application du gnomon. Dans le dernier cas passé en revue en décomposant le dénominateur 153 de l'approximation donnée par Archimède pour $\sqrt{3}$, en ses facteurs premiers 3, 3 et 17, nous avions la voie toute tracée pour appliquer la méthode du gnomon dont nous avons fait usage.

L'extraction approximative des racines carrées, telle que nous la trouvons chez les Grecs ne nous ayant occupés jusqu'à ce moment que dans les cas, où les résultats en sont moindres que la valeur véritable de la racine, il nous reste à passer aux cas où les résultats en sont plus grands. Ces derniers l'emportent sur les premiers quant au nombre de leur application, mais il serait difficile d'en expliquer la cause autrement que par le hasard et on n'avancerait pas à en soulever la question, ou l'absence complète de matériaux pour la résoudre. Elle n'a d'ailleurs pour nous qu'une importance secondaire, notre but étant de trouver les procédés employés dans la Grèce Antique pour l'extraction des racines carrées. Afin d'y arriver dans le cas présent nous n'avons qu'une indication indirecte chez Eutocius et qui ne suffit pas. En nommant les auteurs qui ont traité de l'extraction approximative des racines carrées, Eutocius en applique l'énumération indifféremment à tous les cas de cette extraction, trouvés chez Archimède. Il s'en suit en effet que dans le cas présent l'extraction de la racine carrée était aussi opérée d'après la méthode du gnomon; mais de quelle manière? Parmi les oeuvres citées par Eutocius le commentaire de Théon d'Alexandrie est bien la source unique dont nous puissions disposer et il ne dit rien sur le cas qui nous intéresse pour le moment, donc l'indication indirecte d'Eutocius se trouve insuffisante à en résoudre la question. La forme de la méthode du gnomon que nous avons examinée plus haut et qui ne peut fournir immédiatement que les approximations de la racine carrée au dessous de sa valeur, ne saurait être appliquée immédiatement aux cas où ces approximations excéderaient sa valeur véritable. Pour s'en tenir à la voie directement tracée par Eutocius, en évitant cependant toute explication contradictoire ou forcée, il nous reste à supposer que la méthode du gnomon dans son cas présent avait affaire au carré de la différence des deux nombres et non au carré de leur somme comme dans le cas précédent. Nous allons voir que cette supposition tranche complètement la question dans toutes ses parties et tous ses détails.

En prenant le carré de la différence des deux nombres

6) $$c = (a - x)^2 = a^2 - 2ax + x^2$$

et en y entendant par a la dernière des approximations trouvées de la racine carrée, plus grandes que sa valeur véritable, et par x la différence entre cette approximation et la valeur véritable de la racine nous trouvons

7) $$x - \frac{x^2}{2a} = \frac{a^2 - c}{2a},$$

où x est une quantité moindre que 1, car la valeur de a, commençant l'application de la formule examinée, est représentée par la racine du premier carré exact, proche au nombre c et plus grand que lui, qui exprime la racine cherchée avec l'approximation de 1, c'est à dire en l'excédant de moins que de 1. Mais la grandeur de x diminuera successivement, à mesure que le nombre a équivaudra à d'autres valeurs, dans ses approximations suivantes et qui approcheront toujours davantage la vraie valeur de la racine. En omettant dans l'égalité 7) le membre $\frac{x^2}{2a}$, comme nous l'avons fait pour la forme précédente de la méthode du gnomon, on trouve l'approximation de x moindre que sa grandeur véritable et rendue par la formule

$$x = \frac{a^2 - c}{2a}; \tag{8}$$

x calculé d'après cette formule est représenté ainsi que dans la forme précédente par la somme des deux fractions dont la moindre peut être négligée. Ces deux diminutions rendant parfois la valeur x apte au changement dans la marche du calcul, mais, contrairement à la forme du gnomon examinée, seulement quant à son augmentation et non quant à sa diminution. Nommons x_1 l'approximation de x, fournie par la formule 7). La substitution de x_1 à x dans l'égalité 6) en augmente le second membre et en fait l'inégalité $c < a^2 - 2ax_1 + x^2_1$ dont la différence des membres

$$a^2 - c - 2ax_1 + x^2_1 \tag{9}$$

présente évidemment le reste de l'extraction approchée de la racine carrée dans le cas présent. Pour définir l'approximation suivante de la racine à trouver, il faut diviser ce reste conformément aux formules précédentes par la double approximation trouvée $a - x_1$ et continuer comme auparavant. Puisque x_1 est bien le résultat des diminutions de x citées plus haut, les approximations de la racine carrée, obtenues par l'application successive de la forme du gnomon examinée en excéderont toujours la valeur véritable. Cette forme devient ainsi un moyen suffisant pour définir un nombre infini d'approximations de la racine carrée que l'on cherche, approximations excédant sa valeur véritable et rendues par n'importe quelles fractions. Voyons maintenant à quels résultats en aboutit l'application à l'extraction approximative de la racine carrée dans des cas correspondants chez les mathématiciens grecs.

Les plus simples cas de ce genre sont représentés par les quatre nombres d'Archimède, cités plus haut. Pour y appliquer la méthode du gnomon dans sa forme examinée il faut tout d'abord définir les racines des plus proches d'entre les carrés exacts qui les excèdent. On l'obtient en augmentant de 1 les racines des plus proches d'entre les carrés moindres exacts et trouvés suivant la manière précédente. L'évaluation de ces racines comme celle d'un sujet assez connu peut se borner à l'indication des calculs qui s'y rapportent

9082321		3380929		1018405		4069284	
− 9000000		− 3240000		− 1000000		− 4000000	
82321	6000	140929	3600	18405	2000	69284	4000
6000	13	10800	38	18000	9	4000	17
18000		28800		405		29284	
4321		4129		− 81		28000	
− 169		− 1444		324		1284	
4152		2685				− 289	
						995	

Les limites des tâtonnements pour ces nombres sont 3000 et 3100, 1800 et 1900; 1000 et 1100; 2000 et 2100. Les membres supérieurs des décompositions en binome des racines cherchées sont 3000, 1800; 1000 et 2000. Les racines cherchées des moindres carrés exacts les plus proches aux nombres donnés sont $3000 + 13$, $1800 + 38$, $1000 + 9$, $2000 + 17$. En augmentant chacune de ces racines de 1, nous obtiendrons les racines des plus grands carrés exacts, les plus proches aux nombres donnés, nommément 3014, 1839, 1010 et 2018.

Ce sont les nombres a que nous avons dans les décompositions en binome des racines cherchées, représentées par la formule 6). Afin de trouver les nombres x correspondantes il faut opérer les calculs désignés par la formule 8). Puisque les divisions qui en sont exigées ne sauraient être opérées en nombres entiers, les différences obtenues doivent être préalablement transformées en nombres fractionnaires, indiquées par les dénominateurs des approximations d'Archimède décomposés en facteurs premiers, ou la première différence en 2-mes et en 4-mes parties, la seconde-en 11-mes, la troisième-en 6-mes et la quatrième-en 4-mes. En produisant tous ces calculs et en négligeant au dernier nombre la fraction comme n'exerçant aucune influence sur l'approximation cherchée nous avons

$$\begin{array}{r} 9084196 \\ -\,9082321 \\ \hline 1875 \\ \times 2 \\ \hline 3750 \\ \times 2 \\ \hline \begin{array}{r|l} 7500 & 6028 \\ \cline{2-2} 6028 & 1 \end{array} \\ \hline 1472 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3381921 \\ -\,3380929 \\ \hline 992 \\ \times 11 \\ \hline 992 \\ 992 \\ \hline \begin{array}{r|l} 10912 & 3678 \\ \cline{2-2} 7356 & 2 \end{array} \\ \hline 3556 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1020100 \\ -\,1018405 \\ \hline 1695 \\ \times 6 \\ \hline \begin{array}{r|l} 10170 & 2020 \\ \cline{2-2} 10100 & 5 \end{array} \\ \hline 70 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4072324 \\ -\,4069284 \\ \hline 3040 \\ \times 4 \\ \hline \begin{array}{r|l} 12160 & 4036 \\ \cline{2-2} 12108 & 3 \end{array} \\ \hline 52 \end{array}$$

Les seconds nombres dans les binomes des racines carrées se trouvent de la sorte équivalant à $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{11}$, $\frac{5}{6}$ et $\frac{3}{4}$. La soustraction donne les approximations des racines carrées cherchées

$$3014 - \frac{1}{4} = 3013\frac{3}{4}, \quad 1839 - \frac{2}{11} = 1838\frac{9}{11},$$

$$1010 - \frac{5}{6} = 1009\frac{1}{6}, \quad 2018 - \frac{3}{4} = 2017\frac{1}{4},$$

parfaitement coïncidentes avec celles d'Archimède. Ensuite, pour définir les derniers restes, obtenus avec les extractions approximatives qui viennent d'être décrites il faut recourir aux opérations, désignées par la formule 9). Les deux soustractions qu'elle exige ayant déjà été faites comme on définissait le second membre du binome, il nous reste à ajouter le carré de celui-ci au reste obtenu à cette définition. On réduit le reste au même dénominateur avec le nombre fractionnaire dont il est augmenté, en le multipliant par son propre dénominateur, car le carré en fait justement le dénominateur du nombre fractionnaire additionné. Les calculs nouveaux, exigés par toutes ces opérations, prendront donc la forme que voici et qui fait suite aux calculs précedents

$$\begin{array}{r} 1472 \\ \times 4 \\ \hline 5888 \\ +1 \\ \hline 5889 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3556 \\ \times 11 \\ \hline 3556 \\ 3556 \\ \hline 39116 \\ +4 \\ \hline 39120 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 70 \\ \times 6 \\ \hline 420 \\ +25 \\ \hline 445 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 52 \\ \times 4 \\ \hline 208 \\ +9 \\ \hline 217 \end{array}$$

Parmi les cas les plus simples pour l'extraction approximative de la racine carrée aux résultats excédant sa valeur véritable et présentés par certaines oeuvres des mathématiciens grecs, nous trouvons chez Théon de Smyrne $\sqrt{2}$ rendue par $\frac{3}{2}$. La racine carrée du plus grand des carrés exacts, proches à 2 est 2. Ensuite, d'après la formule 6) $2 = 4 - 4x + x^2$, d'après la formule

$$8) \qquad x = \frac{4-2}{4} = \frac{2}{4} = \frac{2.2}{2} : 4 = \frac{1}{2}, \text{ d'où } 2 - x = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

ou à l'approximation donnée par Théon de Smyrne. Enfin, le reste fourni par l'extraction de la racine carrée est d'après la formule

$$9) \qquad 4 - 2 - 2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Outre cette approximation Théon de Smyrne en donne une autre dans le même livre et qui excède la valeur de $\sqrt{2}$, nommément $\frac{17}{12}$. On l'obtient en continuant l'extraction précédente de la racine carrée. Effectivement, ayant le nombre $\frac{3}{2}$ en qualité de premier nombre dans le binome de la racine, la formule 6) en fait $2 = \frac{9}{4} - \frac{6}{2}x + x^2$ et la formule 8) avec l'application des 6-mes, exigée par le dénominateur 12 décomposé en ses facteurs premiers en font $x = \left(\frac{9}{4} - 2\right) : \frac{6}{2} = \frac{1}{4} : \frac{6}{2} = \frac{1}{2} : 6 = \frac{6}{2.6} : 6 = \frac{1}{12}$, d'où $\frac{3}{2} - \frac{1}{12} = \frac{17}{12}$, ce qui est l'approximation de Théon. Quant au reste de l'extraction opérée il est d'après la formule 9)

$$\frac{9}{4} - 2 - \frac{6}{2.12} + \frac{1}{12^2} = \frac{1}{4} - \frac{6}{2.12} + \frac{1}{12^2} = \frac{6-6}{2.12} + \frac{1}{12^2} = \frac{1}{144}.$$

Tous ces calculs réunis suivant le schème employé plus haut pour les approximations d'Archimède, prennent la forme que voici:

$$\begin{array}{r|l} 4 & \\ -2 & \\ \hline 2 & \\ \times 2 & \\ \hline 4 & 4 \\ 4 & \overline{4} \\ \hline 0 & \\ +1 & \\ \hline 1 & \\ \times 6 & \\ 6 & 6 \\ 6 & \overline{1} \\ \hline 0 & \\ +1 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

L'extraction de la racine carrée aux résultats excédant sa valeur véritable nous en donne un cas plus compliqué chez Héron d'Alexandrie dans sa Géometrie, où il rend $\sqrt{3}$ au moyen de la fraction $\frac{26}{15}$. En notant que la racine carrée du plus grand des carrés exacts proche à 2, est 2, et que pour le dénominateur de l'approximation examinée les facteurs premiers sont 5 et 3, on trouve suivant les formules 6) et

8) $3 = 4 - 4x + x^2$ et $x = (4-3):4 = 1:4 = \frac{5}{5}:4 = \frac{1}{5} + \frac{1}{20}$,

ou, en omettant la fraction moindre, $x_1 = \frac{1}{5}$, en vertu de quoi l'approximation cherchée sera exprimée par le nombre $2 - \frac{1}{5} = \frac{9}{5}$. Enfin le reste de l'extraction de la racine carrée, défini selon la formule 9), est

$$4 - 3 - \frac{4}{5} + \frac{1}{25} = 1 - \frac{4}{5} + \frac{1}{25} = \frac{5-4}{5} + \frac{1}{25} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} = \frac{6}{25}.$$

Là-dessus, pour calculer l'approximation suivante on emploie celle qui est déjà trouvée comme le premier nombre de la racine en binome, en se gardant d'oublier que parmi les facteurs premiers du dénominateur 15 on ne s'était point servi du facteur 3 et l'on obtient suivant les formules 6), 8) et 9)

$$3 = \left(\frac{9}{5} - x\right)^2 = \frac{81}{25} - \frac{18}{5}x + x^2;$$

$$x = \left(\frac{81}{25} - 3\right) : \frac{18}{5} = \frac{6}{25} : \frac{18}{5} = \frac{6}{5} : 18 = \frac{6.3}{5.3} : 18 = \frac{1}{15};$$

$$\frac{81}{25} - 3 - \frac{18}{5.15} + \frac{1}{15^2} = \frac{6}{25} - \frac{18}{5.15} + \frac{1}{15^2} = \frac{18-18}{5.15} + \frac{1}{15^2} = \frac{1}{15^2}.$$

On reçoit ainsi dans cette nouvelle approximation celle de Héron. La réunion des calculs d'après le schème connu en fait:

$$\begin{array}{r|l} 4 & \\ -3 & \\ \hline 1 & \\ \times 5 & \\ \hline 5 & 4 \\ -4 & \overline{1} \\ \hline 1 & \\ \times 5 & \\ \hline 5 & \\ +1 & \\ \hline 6 & \\ \times 3 & \\ \hline 18 & 18 \\ 18 & \overline{1} \\ \hline 0 & \\ +1 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

Un cas encore plus compliqué est présenté par la plus grande des approximations dans l'intervalle desquelles Archimède a renfermé $\sqrt{3}$, ou par le nombre $\frac{1351}{780}$. Afin de distinguer l'approximation examinée d'entre le nombre infini des approximations possibles et suivant ce qui a été dit plus haut, il faut dans le procès même de l'extraction se servir de fractions dont les dénominateurs sont composés de facteurs premiers du nombre 780 ou de 2, 2, 3, 5 et 13. Guidés par cette observation nous en venons vraiment à l'approximation d'Archimède après une quadruple application des formules 6), 8) et 9), comme on le voit dans les calculs suivants, présentés d'après les exemples précédents sous les formes actuelles des fractions, ou sous celle du schème connu en réduction

$$\begin{array}{r|l} 4 & \\ -3 & \\ \hline 1 & \\ \times 6 & \\ \hline 6 & 4 \\ 4 & 1 \\ \hline 2 & \\ \times 6 & \\ \hline 12 & \\ +1 & \\ \hline 13 & \\ \times 5 & \\ \hline 65 & 22 \\ 44 & 2 \\ \hline 21 & \\ \times 5 & \\ \hline 105 & \\ +4 & \\ \hline 109 & 106 \\ 106 & 1 \\ \hline 3 & \\ +1 & \\ \hline 4 & \\ \times 26 & \\ \hline 104 & 104 \\ 104 & 1 \\ \hline 0 & \\ +1 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$3=(2-x)^2=4-4x+x^2;\quad x=(4-3):4=1:4=\frac{6}{6}:4=\frac{1}{6}+\frac{2}{24}$$

$$\text{ou } x_1=4-3-\frac{4}{6}+\frac{1}{36}=1-\frac{4}{6}+\frac{1}{36}=\frac{6-4}{6}+\frac{1}{36}=\frac{2}{6}+\frac{1}{36}=\frac{13}{36}.$$

L'approximation trouvée est $2-\frac{1}{6}=\frac{11}{6}$.

$$3=\left(\frac{11}{6}-x\right)^2=\frac{121}{36}-\frac{22}{6}x+x^2$$

$$x=\left(\frac{121}{36}-3\right):\frac{22}{6}=\frac{13}{36}:\frac{22}{6}=\frac{13}{6}:22=\frac{13.5}{6.5}:22=\frac{65}{30}:22$$

$$=\frac{2}{30}+\frac{21}{660}\quad\text{ou}\quad x_1=\frac{2}{30}.$$

$$\frac{121}{36}-3-\frac{22.2}{6.30}+\frac{4}{(30)^2}=\frac{13}{36}-\frac{44}{180}+\frac{4}{(30)^2}=\frac{13.5-44}{180}+\frac{4}{(30)^2}$$

$$=\frac{21}{180}+\frac{4}{(30)^2}=\frac{109}{900}.$$

L'approximation trouvée est $\frac{11}{6}-\frac{2}{30}=\frac{53}{30}$.

$$3=\left(\frac{53}{30}-x\right)^2=\frac{2809}{900}-\frac{106}{30}x+x^2,$$

$$x=\left(\frac{2809}{900}-3\right):\frac{106}{30}=\frac{109}{900}:\frac{106}{30}=\frac{109}{30}:106=\frac{1}{30}+\frac{1}{1060}$$

$$\text{ou } x_1=\frac{1}{30}.$$

$$\frac{2809}{900}-3-\frac{106}{900}+\frac{1}{900}=\frac{3}{900}+\frac{1}{900}=\frac{4}{900}.$$

L'approximation trouvée est $\frac{53}{30}-\frac{1}{30}=\frac{52}{30}$.

$$3=\left(\frac{52}{30}-x\right)^2=\frac{2704}{900}-\frac{104}{30}x+x^2,$$

$$x=\left(\frac{2704}{900}-3\right):\frac{104}{30}=\frac{4}{900}:\frac{104}{30}=\frac{4}{30}:104=\frac{4.26}{30.26}:104=\frac{1}{780},$$

$$\frac{2704}{900}-3-\frac{104}{30^2.26}+\frac{1}{(30.26)^2}=\frac{4}{900}-\frac{104}{30^2.26}+\frac{1}{(30.26)^2}$$

$$=\frac{104-104}{30^2.26}+\frac{1}{(30.26)^2}=\frac{1}{(780)^2}.$$

L'approximation trouvée est $\frac{52}{30}-\frac{1}{780}=\frac{1351}{780}$

$$\text{ou } 2-\frac{1}{6}-\frac{2}{30}-\frac{1}{30}-\frac{1}{780}=\frac{1351}{780},$$

qui fait celle d'Archimède.

Quant à leurs procès du calcul composant le procédé du gnomon dans sa forme examinée les approximations de la racine carrée excédant sa valeur véritable peuvent être résumées dans la règle suivante qui est au fond une forme abrégée de ces procès leur étant communiquée par le schème précédement accepté. Le nombre dont il faut extraire la racine carrée est soustrait du plus proche des carrés qui l'excèdent. Le reste en est multiplié par le dénominateur des fractions choisies pour l'approximation cherchée et divisé par la double racine carrée du plus proche carré. Ce deuxième reste en est multiplié par le même dénominateur et le produit augmenté du carré du quotient. La racine carrée du plus proche carré indiqué, diminué par le quotient fera l'approximation cherchée. Pour trouver celle qui suit il faut multiplier la somme précédemment obtenue par n'importe quel multiplicateur et en diviser le produit par le double numerateur de l'approximation trouvée. Le quotient en sera la fraction dont le dénominateur est le produit de celui de l'approximation précédente et du multiplicateur choisi. Le reste en est ensuite multiplié par le même multiplicateur et le produit ajouté au nouveau quotient. La différence d'entre l'approximation précédente et le nouveau quotient sera justement la nouvelle approximation cherchée. On a recours aux mêmes opérations pour trouver les approximations suivantes dont le nombre et les dénominateurs sont arbitrairement choisis.

Moskau, 18. Februar 1895.

Recensionen.

Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Von J. Schlotke, Lehrer der allgemeinen Gewerbeschule in Hamburg. Zweite vermehrte und verbesserte Auflage. Dresden 1893—1896. Verlag von Gerhard Kühtmann.

Von J. Schlotke's Lehrbuch der darstellenden Geometrie liegt die zweite völlig umgearbeitete und bedeutend erweiterte Auflage nunmehr vollendet vor.

Sie zerfällt in vier Theile:

I. Specielle darstellende Geometrie (Parallelprojection), mit 165 Figuren, 142 S.;

II. Schatten- und Beleuchtungslehre, mit 79 Figuren, 60 S.;

III. Perspective (Centralprojection), mit 133 Figuren, IV, 133 S.;

IV. Projectivische Geometrie (Zusammenhang mit der darstellenden Geometrie und Verwendung derselben; projectivische Eigenschaften der Kegelschnitte und Flächen zweiter Ordnung), mit 223 Figuren, IV, 177 S.

Hierbei ist zu bemerken, dass Theil II sich nur auf parallelprojectivische Darstellung und die Annahme paralleler Lichtstrahlen bezieht, und die Beleuchtungslehre nur gegeben ist, so weit sie sich folgern lässt aus dem Satze: „Die Helligkeit ist proportional dem Cosinus des Einfallswinkel der parallelen Strahlen."

Der Schattenconstruction in centralprojectivischen Bildern, ebenfalls unter Annahme paralleler Lichtstrahlen ist noch ein eigener, fünfter Abschnitt in Theil III gewidmet. Das Lehrbuch ist in einem wohlthuend klaren und übersichtlichen Style geschrieben. Diese Eigenschaft äussert sich besonders auch in den einleitenden Bemerkungen der Theile und Abschnitte, in denen das Wesen der folgenden Materie kurz dargelegt, sozusagen der gemeinsame Factor vor die Klammer gesetzt wird.

Klar und übersichtlich sind auch die dem Text in grosser Fülle eingefügten Figuren, bei denen im ersten Theile häufig Anwendung von der die Anschauung so sehr erleichternden schiefen Projection gemacht wird.

Eine Anzahl Uebungsaufgaben ist dem Texte theils eingefügt, theils angehängt.

Die vollkommene Trennung des Theiles IV von den anderen Theilen bietet den äusseren Vortheil, das Buch den bald beschränkteren, bald weitergehenden Anforderungen der verschiedensten Schulen und Leserkreise anpassungsfähig zu machen. Sachlich könnte sie von manchem Beurtheiler verworfen werden. Aber die Darstellung der Grundlagen in Theil I und III nimmt durch diese Trennung einen friedlicheren, einheitlicheren Charakter an, der dem Lernenden wohlthut. Abgesehen von der Anwendung weniger elementar geometrischer Sätze, die Jedem geläufig sind, basirt nun Alles auf anschaulichen Daten und Operationen. Denn die Gestalten der geometrischen Elemente, die bei Projection und Drehung derselben auftretenden Erscheinungen und gezeichnet vorliegende Linien sind anschaulich, auch in dem Sinne, dass ihre Vorstellung dem Gedächtniss eingeprägt und ohne Modell reproducirt werden kann. Den Methoden der neueren Geometrie lässt sich Anschaulichkeit nicht durchweg nachrühmen; da Doppelverhältnisse und besonders Doppelverhältnissgleichheiten innerhalb unendlicher Reihen nichts Anschauliches sind, kann z. B. die Erzeugung räumlicher Gestalten durch projectivisch auf einander bezogene Gebilde von der Einbildungskraft nicht mitgemacht werden, vielmehr werden projectivische Beziehungen erst umgekehrt durch diese Erzeugnisse anschaulich.

Wir halten daher die in dem Werke vorgenommene Trennung der elementaren Behandlungsweise von der synthetisch-geometrischen für vortheilhaft, obwohl sie den ersten Theilen des Buches manche Beschränkung im Stoffe auferlegt, und einzelne Probleme zweimal, erst in engerem, dann in weiterem Sinne behandelt werden müssen. Es werden in Theil IV zuerst die ebene und räumliche Collineation, dann die projectivischen Elementargebilde und ihre Erzeugnisse vorgenommen. Ein besonderes Kapitel ist schliesslich dem Princip der reciproken Radien und den Polarfiguren gewidmet. Es erscheinen damit die Cykliden als der Darstellung leicht zugängliche Flächen; die merkwürdigste Form der Cyklide wird auf einer hübschen Tafel mit Lichtgleichen und Schlagschatten wiedergegeben.

Es ist kein Zweifel, dass Schlotke's Lehrbuch der darstellenden Geometrie die in weiteren Kreisen bereits gewonnene Beliebtheit in seiner neuen Gestalt nicht nur sich erhalten, sondern neue Freunde gewinnen werde.

Hermann Brunn.

Darstellende Geometrie mit Einschluss der Perspective, insbesondere zum Gebrauche an Fortbildungs- und Baugewerkschulen, sowie zum Selbstunterricht von F. Faber, Lehrer für darstellende Geometrie und Bauconstruction. Nach dem Tode des Verfassers herausgegeben von Otto Schmidt, Architekt und Lehrer der königl. Baugewerkschule in Posen. Mit 41 Tafeln in Lithographie. In zwei Theilen.

I. Theil: Text (VII, 129 S.). II. Theil: Tafeln. Dresden 1894. Verlag von Gerhard Kühtmann.

Das vorliegende Werk ist nach den Worten des Herausgebers lediglich als eine Schöpfung des verstorbenen Verfassers zu betrachten, die sich druckreif in dessen Nachlass vorfand. Faber's Vorrede schliesst mit den Worten: „Bei der Beurtheilung der nachstehenden Arbeit bitte ich zu berücksichtigen, dass dieselbe keine theoretisch mathematische, sondern eine rein praktischen Zwecken dienende sein soll.“ Das Ziel, das sich der Verfasser gesteckt hat, hat er erreicht. Es entspricht dem praktischen Zwecke des Buches, dass es von Weiterungen rein wissenschaftlicher Natur freigehalten, dagegen mit den Abbildungen nicht gespart ist, so dass sich das Text- und Tafelbändchen schon rein äusserlich das Gleichgewicht halten. Andererseits hat der Verfasser die Bedeutung des textlichen Theiles doch durchaus nicht unterschätzt, sondern erkannt, wie das, was wir Ausbildung der Anschauung zu nennen pflegen, ebenso von der Bildung klarer Begriffe als vom Schauen und Zeichnen abhängt, ja, die Eigenartigkeit des Menschenmaterials, das er auf der Baugewerkschule in Eckernförde durch 22 Jahre hindurch zu bilden hatte, veranlasst ihn, auf die begriffliche Schulung, die Schulung im Ausdruck in verschiedentlichen Ermahnungen einen besondern Ton zu legen.

Die Darstellung erweist den besonnenen Lehrer mit praktischem Blick. In einzelnen Kleinigkeiten ist sie verbesserungsfähig.

Behandelt werden die rechtwinklige Projection, die Bestimmung von Durchstosspunkten, Spuren und Winkeln, die Durchdringungen, die Schattirung der rechtwinkligen Projectionen, die Perspective nebst kurzer Anleitung zur Schattirung von perspectivischen Bildern.

Was Flächen und Körper anlangt, so ist nirgends über die Rotationskörper hinausgegangen, meist die Betrachtung auf Kugel, Kegel und Cylinder beschränkt.

Hervorheben möchten wir die weitgehende Verwendung der dritten Tafel, welche zur Bildung einer vollkommeneren Anschauung von den dargestellten Gegenständen sehr dienlich ist.

Bei den Beleuchtungsconstructionen wird mit Recht auf die relativen, das heisst die dem Auge zur Erscheinung kommenden Helligkeiten ausgegangen, und zwar unter der Annahme, dass die den reflectirten Strahl direct ins Auge sendenden Flächenstellen am hellsten erscheinen und die Helligkeitsabnahme proportional ist der Abweichung des reflectirten Strahles von der Sehstrahlenrichtung. Es sei noch besonders auf die in Farbdruck hergestellten schattirten Abbildungen einer Kugel und eines Ringes hingewiesen.

Faber befleissigt sich eines ihm eigenthümlichen, übrigens consequent durchgeführten Verfahrens sowohl in der Bezeichnung der Objecte durch Buchstaben, als in der Zeichnung derselben mittelst durchbrochener, punktirter etc. Linien, damit der Beschauer sofort zuverlässige Anhaltspunkte für das Verständniss der Figuren habe, auch wenn der erklärende Text hinweg-gedacht wird. Der vom Text vollkommen getrennte Band der Abbildungen kann daher von Jemand, der die Theorie erfasst hat, auch allein durchstudirt werden, was eine heilsame Repetition und Interpretationsübung darstellt.

Hermann Brunn.

Der Coordinatenbegriff und einige Grundeigenschaften der Kegelschnitte. Zunächst eine Ergänzung der Neubearbeitung der Planimetrie von Kambly. Zum Gebrauche an Gymnasien nach den neuen preussischen Lehrplänen bearbeitet von Hermann Röder, Oberlehrer am Lyceum I zu Hannover. Mit 36 Figuren. Ferdinand Hirt, Königl. Universitäts- und Verlagsbuchhandlung. Breslau 1893.

Das Büchlein enthält auf 55 Seiten, was der Titel besagt, wenn man den „Coordinatenbegriff" im engsten Sinne als Begriff der rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten auffasst, und sieben Paragraphen, welche sich mit Punkten und geraden Linien beschäftigen, hinzurechnet. Die Broschüre wird ihrem Zweck in der Schule durchaus entsprechen und empfiehlt sich Jedem, der eine erste Ahnung von analytischer Geometrie bekommen will, durch geringen Umfang und Billigkeit. Von den Curven zweiter Ordnung werden Mittelpunkts- und Scheitelgleichungen, sowie mechanische Constructionen angegeben, ferner Tangenten, Normalen und Brennpunktseigenschaften behandelt. Den Schluss bildet der Nachweis, dass bei ebenen Schnitten eines Kreiskegels die besprochenen Curven zu Tage treten.

Man kann nur zustimmen, wenn gewisse elementare Sätze nicht aus einer speciellen Figur abgelesen werden, sondern auf die für das Vorzeichen der Coordinatengrössen wichtigen Verschiedenheiten der möglichen Lage des Objects aufmerksam gemacht wird (siehe z. B. § 3, § 4, § 5).

Vielleicht würde sich aus diesem Grunde auch S. 46 Zeile 5 von oben auf der rechten Seite der Hyperbelgleichung das doppelte Vorzeichen:

$$\sqrt{x_1 + e)^2 + y_1^2} - \sqrt{(x_1 - e)^2 + y_1^2} = \pm\, 2a,$$

oder eine Bemerkung über die Zweideutigkeit der Wurzeln empfehlen. Nachdem vorher unter „Tangente" stets die unbegrenzte Gerade verstanden wurde, würden wir in § 18 nicht sagen: „Jede Tangente wird durch die Scheiteltangente halbirt." Auch die Wendung: „Aus der Mittelpunktsgleichung des Kreises (der Ellipse etc.) die Gestalt desselben zu finden" würden wir lieber durch eine andere ersetzen, insofern nicht die genaue Herstellung der Gestalt, sondern nur die Angabe einiger, zum grössten Theil sehr allgemeiner Charakteristika verlangt wird. Doch dies ist schliesslich Geschmackssache, und es würde der von uns vorgeschlagenen Wendung: „die Gestalt der Curve zu charakterisiren" vermuthlich aus Sprachreinigungsgründen der Eintritt in die preussischen Gymnasien verwehrt sein.

Hermann Brunn.

Grossherzoglich Mecklenburgische Landes-Vermessung. V. Theil. Die conforme Kegelprojection und ihre Anwendung auf das trigonometrische Netz erster Ordnung. Herausgegeben von W. JORDAN, KARL MAUCK, R. VOGLER.

Die Triangulation der beiden Grossherzogthümer von Mecklenburg, die unter Paschen's Leitung geplant und 1874 vollendet wurde, ist 1890 von Neuem aufgenommen worden, um das Netz zweiter und dritter Ordnung zu vervollständigen. Von Paschen, der ein Schüler von Gauss war und die Ideen von Gauss bei seinem Plane verwerthete, ist die conforme Kegelprojection zur ebenen Abbildung des Landes gewählt worden. Die Herausgeber haben diesen Plan bis ins Einzelne durchgeführt, so dass nunmehr die Vortheile der conformen ebenen Abbildung bis herab zu den Katasterkarten nutzbar gemacht werden können. Von W. Jordan sind zu dem Zweck Potenzreihen entwickelt worden, erstens um den Uebergang von den geographischen Coordinaten zu den rechtwinkligen Coordinaten der ebenen Abbildung und umgekehrt bequemer als die von Paschen schon gegebenen geschlossenen Formeln zu vermitteln, und zweitens, um aus den rechtwinkligen Coordinaten zweier Punkte die Länge und die Azimuthe der sie verbindenden geodätischen Linie direct zu berechnen. Die Herausgeber haben die rechtwinkligen Coordinaten des Netzes erster Ordnung von Neuem berechnet und aus den ebenen Coordinaten alle Richtungswinkel und Entfernungen des Netzes erster Ordnung.

Es wird dem Mathematiker erwünscht sein, in diesem Werke zu sehen, wie sich die praktische Durchführung gestaltet. Die verwendeten mathematischen Hilfsmittel sind verhältnissmässig elementar und ich sollte meinen, dass dies dem Werke zum Vortheil gereicht. C. RUNGE.

Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichtsanstalten und zur praktischen Benutzung von JACOB STEINER (1833) [Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften Nr. 60]. Herausgegeben von A. J. v. OETTINGEN. Leipzig 1895. Bei Wilhelm Engelmann. 84 S. mit 25 Textfiguren.

Das Jahr 1832 brachte das unter dem abgekürzten Titel *Systematische Entwickelung* berühmt gewordene Hauptwerk Jacob Steiner's, das Jahr 1833 seine *Geometrischen Constructionen.* Beide Schriften wurden 1881 im I. Bande von Steiner's gesammelten Werken neu gedruckt. Die trotzdem erfolgte Aufnahme der beiden Steiner'schen Schriften in die Klassiker der exacten Wissenschaften dürfte durch Gründe der Wohlfeilheit sich rechtfertigen, da die beiden Bände der gesammelten Werke allzu kostspielig sind, um eine grosse Verbreitung erreichen zu können. Fürs Erste ist die dem Datum nach spätere Schrift in der billigen Ausgabe erschienen. CANTOR.

Bibliographie

vom 16. September bis 31. October 1896.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der Wiener Akademie. 1. Abth., 105. Bd., 1.—4. Heft. Wien, Gerold. 7 Mk. 20 Pf.

—— Abth. IIa, 105. Bd., 2.—4. Heft. Ebendaselbst. 3 Mk. 60 Pf.

—— Abth. IIb, 105. Bd., 3.—4. Heft. Ebendaselbst. 2 Mk. 40 Pf.

Verhandlungen d. 11. allgem. Conferenz d. internation. Gradmessung. I. Theil: Sitzungsberichte. II. Theil: Landesber. XXIII. Berlin, G. Reimer. 12 Mk.

Veröffentlichung d. königl. preuss. geodätischen Instituts. Bestimmung d. Polhöhe und der Intensität der Schwerkraft auf 22 Stationen von der Ostsee bei Kolberg biz zur Schneekoppe. Berlin, Stankiewicz. 15 Mk.

—— Die europäische Längengradmessung in 52^0 Breite von Greenwich bis Warschau. 2. Heft. Geodätische Linien, Parallelbogen u. Lothabweichungen zwischen Feaghmain und Warschau. Ebendaselbst. 13 Mk. 50 Pf.

Veröffentl. d. Grossherzogl. Sternw. z. Karlsruhe. 5. H. Karlsruhe, Braun. 20 Mk.

Annalen d. kaiserl. Univers.-Sternwarte in Strassburg. 1. Bd. Ebendas. 20 Mk.

Vierteljahrsschr. d. astron. Gesellsch. 31. Jhg. 2. Heft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Abhandlungen d. königl. sächs. meteorol. Instituts. 1. Heft. Leipzig, Felix. 4 Mk.

Fortschritte d. Physik i. J. 1895. Dargestellt von d. physikal. Gesellsch. in Berlin. 51. Jahrg. 1. Abth. (Physik der Materie.) Braunschweig, Vieweg. 20 Mk.

Zeitschrift der österr. Gesellschaft für Meteorologie. Register zu Bd. I (1866) bis XX (1885). Wien, Hölzel. 4 Mk. 50 Pf.

Geschichte der Mathematik.

Wertheim, G, Die Arithmetik des Elia Misrachi. Braunschweig, Vieweg. 3 Mk.

Reine Mathematik.

Jacobi, J., Ueb. d. Bild. u. d. Eigensch. d. Determinant. Aus d. Latein. in Crelle's Journ., übers. v. P. Stäckel (Osw. Klass. Nr. 77). Leipz., Engelm. 1 Mk. 20 Pf.

—— Ueber die Functionaldeterminanten. Aus dem Lateinischen übersetzt von P. Stäckel. Nr. 78. Ebendaselbst. 1 Mk. 20 Pf.

Dedoff, Th., Unters. üb. quadr. Formen (Diss.). Leipz., B. G. Teubner. 2 Mk. 80 Pf.

Netto, E., Vorlesungen über Algebra. 1. Bd. Ebendaselbst. 12 Mk.

Markoff, A., Differenzenrechnung. Uebersetzt von Th. Friesendorff und E. Prümm, mit Vorwort von R. Mehmke. Ebendaselbst. 7 Mk.

Stahl, H., Theorie der Abel'schen Functionen. Ebendaselbst. 12 Mk.

Bianchi, L., Vorlesungen über Differentialgeometrie. Deutsch von M. Lukat. 1. Lieferung. Ebendaselbst. 12 Mk.

Binder, W., Theorie der unicursalen Plancurven vierter bis dritter Ordnung in synthetischer Behandlung. Ebendaselbst. 12 Mk.

Lilienthal, R.v., Grundl. einer Krümmungsl. d. Curvenschaaren. Ebendas. 5 Mk.

Staude, O., Die Focaleigensch. d. Flächen zweiter Ordnung. Ebendas. 7 Mk.

Sturm, R., Die Gebilde ersten u. zweiten Grades d. Liniengeometrie in synth. Behandl. 3. Theil (Schluss). Die Strahlencompl. zweit. Gr. Ebendas. 18 Mk.

Puchberger, E., Eine allgemeinere Integration der Differentialgleichungen. Supplementheft. Wien, Gerold. 1 Mk. 60 Pf.

Servus, H., Lehrb. d. eb. Trigonometrie. Berlin, Friedberg & Mode. 1 Mk. 50 Pf.

—— Trigonometr. Nachschlagebuch. Eine Formelsammlung. Ebendas. 2 Mk.

Funcke, H., Methodisch geordnete Aufgaben zu Mehler's Hauptsätzen der Elementargeometrie. Berlin, G. Reimer. 60 Pf.

Scheffler, H., Das Wesen d. Mathematik u. d. Aufbau d. Welterkenntniss auf mathematischer Grundlage. 2 Bände. Braunschweig, Wagner. 10 Mk.

Angewandte Mathematik.

Helmholtz, H. v., Zwei hydrodyn. Abhandlungen. I. Ueber Wirbelbewegungen. II. Ueb. discontinuirl. Flüssigkeitsbewegungen. Herausgeg. v. A. Wangerin (Ostwald's Klassiker Nr. 79). Leipzig, Engelmann. 1 Mk. 20 Pf.

Hegemann, E., Uebungsbuch für die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die praktische Geometrie. Berlin, Parey. 5 Mk.

Cranz, C., Compendium d. theor. äuss. Ballistik. Leipzig, B. G. Teubner. 20 Mk.

Handwörterbuch der Astronomie. 5. Lieferung. Breslau, Trewendt. 3 Mk. 60 Pf.

Physik und Meteorologie.

Encyclopädie d. Naturwissenschaften. I. Abth., 70 Lief. Breslau, Trewendt. 3 Mk.

—— III. Abtheilung, 35. Lieferung. Ebendaselbst. 3 Mk.

Meyer, P., Die Doppelkraft des Lichts u. ihre Metamorphose. Ein monistisch-antimerialistisches Natursystem. Leipzig, Mutze. 5 Mk.

Tannert, C., Der Sonnenstoff als Zukunftslicht und Kraftquelle. Eine physikalische Entdeckung. Neisse, Tannert. 2 Mk.

Neumann, E., Theorie der doppelten Strahlenbrechung. Herausgeg. von A. Wangerin (Ostwald's Klassiker Nr. 76). Leipzig, Engelmann. 80 Pf.

Forbes, G., Elektrische Wechselströme und unterbrochene Ströme. Deutsch von J. Kollert. Leipzig, Quandt & Händel. 2 Mk. 50 Pf.

Ferraris, G. u. Arno, R., Ein neues System zur Vertheilung elektr. Energie durch Wechselströme. Uebers. v. C. Heim. Weimar, Steinert. 1 Mk. 35 Pf.

Reiff, R., Theorie molecular-elektr. Vorgänge. Freiburg i. B., Mohr. 6 Mk.

Körner, F., Lehrbuch der Physik für höhere Lehranstalten und zum Selbstunterricht. Wien, Deuticke. 6 Mk. 60 Pf.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1895.

Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.

A.

Abbildung.

272. Ueber conforme Abbildung. A. Voss. Mathem. Annal. XLVI, 133.
273. Ueber Abbildungen. P. Stäckel. Mathem. Annal. XLIV, 553.

Absolute Geometrie.

274. Démonstration nouvelle des équations fondamentales de la géométrie de l'espace de courbure constante négative. H. Kagan, N. ann. math. Sér. 3, XIV, 20.
275. Sur une formule bien connue de la géométrie imaginaire. B. Kagan. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 251.

Vergl. Geschichte der Mathematik 404.

Akustik.

276. Die Bewegung gezupfter Saiten. O. Krüger-Menzel & A. Raps. Berl. Akad. Ber. 1893, II, 509.
277. An attempt at a quantitative theory of the telephone. Lord Rayleigh. Phil. Mag. Ser. 5, XXXVIII, 295.
278. Zu den Theorien der Schallphänomene bei Meteoritenfällen. E. Mach und B. Doss. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) CII, 248.

Analytische Geometrie der Ebene.

279. Ueber Curvensysteme und die zugehörigen Differentialgleichungen. Eman. Czuber. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) CII, 1141.
280. Neue Theorie der eindeutigen periodischen Transformationen in der Ebene. S. Kantor. Acta Math. XIX, 115 (Vergl. Nr. 6).
281. Note sur les équations en λ de la géométrie. L. Sauvage. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 369.
282. Sur les podaires successives d'une courbe. E. Barisien. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 89, 157, 207, 233, 463.
283. Sur une courbe en quatrième ordre et de la troisième classe dont l'équation tangentielle est $u^3 + v^3 - uvw = o$. Raym. Sée. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 272.
284. Courbe du 4. ordre décrite au moyen d'une circonférence et d'une droite portant deux divisions homographiques. Moret-Blanc N. ann. math. Sér. 3, XIV, Exerc. 8.
285. Sur les applications des propriétés de la strophoide And. Cazamian. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 192.
286. Sur l'orthogénide $\varrho^{-\frac{1}{3}} = a^{-\frac{1}{3}} \sin(-\frac{1}{3}\omega)$. E. Fauquembergue. N. ann. math. Sér. 3, XIV, Exerc. 5.
287. Sur deux spirales logarithmiques semblables Moret-Blanc N. ann. math. Sér. 3, XIV, Exerc. 10.

Vergl. Elliptische Transcendenten 347. Kegelschnitte. Krümmung.

Analytische Geometrie (des Raumes).

288. Ueber algebraische Raumcurven. P. Stäckel. Mathem. Annal. XLV, 341. [Vergl. Bd. XL Nr. 227.]
289. Ueber den allgemeinen Complex zweiten Grades. Rud. Sturm. Berl. Akad. Ber. 1894, II, 697.
290. Étude geométrique d'un complexe du second ordre. R. S. N. ann. math Sér. 3, XIV, 433.

Vergl. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung.

Ausdehnungslehre.

291. Sur l'emploi de la multiplication extérieure en algèbre. H. Fehr. N. ann. math. Sér. 3. XIV, 74.

B.

Bernoulli'sche Zahlen.

292. Ueber die zu einer Fundamentaldiscriminante gehörigen Bernoulli'schen Zahlen. L. Gegenbauer. Wien. Akad. Ber. (Abth. IIa) CII, 1059.

Bestimmte Integrale.

293. On the theory of Riemann's integrals. H. F. Baker. Mathem. Annal. XLV, 118. K. Hensel ebenda 598.
294. Sur une intégrale définie qui représente la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. M. Lerch. Chicago. Math. Pap.* 165.
295. Eine Anwendung der Zahlentheorie auf die Integralrechnung. L. Gegenbauer. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) CII, 927.

Vergl. Integrator.

D.

Determinanten.

296. Ueber das Multiplicationstheorem der allgemeinen Determinanten. L. Gegenbauer. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) CII, 560.
297. Quelques formules relatives aux opérations de polaire. A Capelli. Chicago. Math. Pap. 35.
298. Ueber die Elementartheiler der Determinanten. G. Frobenius. Berl. Akad. Ber. 1894, I, 31.
299. On the expressibility of a determinant in terms of its coaxial minors. Thom. Muir. Phil. Mag. Ser. 5, XXXVIII, 537.
300. Ueber die Resultante. P. Gordan. Mathem. Annal. XLV, 405.
301. Théorème d'algèbre. E. Amigues. N. ann math. Sér. 3, XIV, 496.
302. Zur Theorie der orthogonalen Determinanten. E. Netto. Acta Math. XIX, 105.
303. Sur les déterminants dont les éléments principaux varient en progression arithmétique. Alf. Capelli. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 62.
304. Verschwindende Determinanten 3 Grades aus ternären linearen Formen. M. Pasch. Mathem. Ann. XLIV, 89.

Differentialgleichungen.

305. Sur les points singuliers des équations différentielles du premier ordre. Em. Picard. Mathem. Annal. XLVI, 521.
306. Theorie der Flächenelemente höherer Ordnung des Raumes von 3 Dimensionen. Ed. v. Weber. Mathem. Annal. XLIV, 458.
307. Ueber die numerische Auflösung von Differentialgleichungen. C. Runge. Mathem. Annal. XLVI, 167.
308. Ueber angewandte Mathematik. C. Runge. Mathem. Annal. XLIV, 437.
309. Ueber die Differentialgleichungen der F-Reihen dritter Ordnung. L. Pochhammer. Mathem. Annal. XLVI, 584.
310. Die neueren Fortschritte in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Loth. Heffter. Chicago. Math. Pap. 96.
311. Autographirte Vorlesungshefte. Ueber lineare homogene gewöhnliche Differentialgleichungen der zweiten Ordnung. Fel. Klein. Mathem. Annal. XLVI, 77.

* Unter Chicago Math. Pap. verstehen wir den 1896 bei Macmillan & Co. in New-York erschienenen Band: Mathematical Papers read at the international mathematical congress held in connection with the World's Columbian Exposition Chicago 1893.

312. Ueber lineare Differentialgleichungen, welche von Parametern unabhängige Substitutionsgruppen besitzen. L. Fuchs. Berl. Akad. Ber. 1893, II, 975. 1894, II, 1117.
313. Ueber die Abhängigkeit der Lösungen einer linearen Differentialgleichung von den in den Coefficienten auftretenden Parametern. L. Fuchs. Berl. Akad Ber. 1895, 905.
314. Die Irreducibilität der homogenen linearen Differentialgleichungen. Eman. Beke. Mathem. Annal. XLV, 278.
315. Die symmetrischen Functionen bei den linearen homogenen Differentialgleichungen. Eman. Beke. Mathem Annal. XLV, 295.
316. Ueber die allgemeinste Differentialresolvente der homogenen linearen Differentialgleichungen. Eman. Beke. Mathem. Annal. XLVI, 557.
317. Beiträge zur Auflösung von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten sowie von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, denen gewisse bestimmte Integrale genügen. J. H. Graf. Mathem. Annal. XLV, 235.
318. Ueber unverzweigte lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung auf ebenen Curven vierten Grades. P. Gordan. Mathem. Annal. XLVI, 606.
319. Ueber mathematische Resultate neuerer astronomischer Untersuchungen, insbesondere über irreguläre Integrale linearer Differentialgleichungen. H. Burkhardt. Chicago. Mathem. Pap. 13.
320. Ueber die vollständigen Integrale partieller Differentialgleichungssysteme. L. Königsberger. Mathem. Annal. XLIV, 17.
321. Ueber die Existenz irreductibler partieller Differentialgleichungen. L. Königsberger. Berl. Akad. Ber. 1894, II, 989.
322. Die singulären Lösungen der partiellen Differentialgleichungen mit drei Variabeln. Ed. v. Weber. Mathem. Annal. XLVI, 1.
323. Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre, et sur la théorie des intégrales intermédiaires. E. Goursat. Acta Math. XIX, 285.
324. Ueber die partielle Differentialgleichung des Problems $\delta \int\int V(p, q)\, dx \,.\, dy = 0$. Jos. Kürschák. Mathem. Annal. XLIV, 9.
Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 279.

Dreiecksgeometrie.

325. Sur un problème de géométrie plane. Rom. Blazeiewski. N. ann. math. Sér. 3. XIV, 49, 385, 442. [Vergl. Bd. XL Nr. 390.]
326. Règle des analogies dans le triangle et transformation continue. Em. Lemoine. Chicago. Math. Pap. 155.

E.

Elasticität.

327. On the vibrations of a loaded spiral spring. L. R. Willerforce. Phil Mag. Ser. 5, XXXVIII, 386.
328. Note relative à la théorie mathématique de l'élasticité. L. Bossut. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 141.

Elektricität.

329. Folgerungen aus Maxwell's Theorie über die Bewegungen des reinen Aethers. H. v. Helmholtz. Berl. Akad. Ber. 1893, II, 649.
330. Absorption und Emission elektrischer Wellen durch Resonanz. M. Planck. Berl. Akad. Ber. 1895, I, 289.
331. Ueber die Wirkung gleichgerichteter sinusartiger elektromotorischer Kräfte in einem Leiter mit Selbstinduction. J. Puluj. Wien. Akad. Ber. [Abthlg. IIa] LII, 219.
332. Ueber die Phasendifferenz zwischen der elektromotorischen Gesammtkraft und der Spannungsdifferenz an einer Verzweigungsstelle des Stromkreises bei Anwendung harmonischer Wechselströme. J. Puluj. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) CII, 361.
333. Eine Methode zur Messung der Phasendifferenz von harmonischen Wechselströmen und deren Anwendung zur Bestimmung der Selbstinduction. J. Puluj. Wien. Akad. Ber. [Abthlg. II, a] CII, 356.

334. A new electrical theorem. Th. H. Blakesley. Phil. Mag. Sér. 5, XXXVII, 418.
335. Electrical notes. Arth. Schuster. Phil. Mag. Sér. 5. XXXIX, 175.
336. Calculation of the coefficient of self-induction of a circular current of given aperture and cross-section. G. M. Minchin. Phil. Mag. Ser. 5, XXXVII, 300.
337. Graphic representation of currents in a primary and a secondary coil. G. M. Minchin. Phil. Mag. Ser. 5, XXXVII, 406.
338. On the self-induction and on the gravity-potential of a ring. W. M. Hicks. Phil. Mag. Ser. 5, XXXVIII, 456.
339. Zur Theorie der Herstellung hochgespannter Ströme von hoher Frequenz mittelst oscillatorischer Condensatorenentladungen. Jos. Tuma. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) CII, 1352.
340. Some experiments with alternating currents. Alb. Griffiths. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIX, 229.
341. Erklärung des Ferranti'schen Phänomens. J. Schulka. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) CII, 793.
342. On the behaviour of on air-core transformer when the frequency is below a certain critical value. E. C. Rimington. Phil. Mag. Ser. 5, XXXVII, 394.
343. A modification of the ballistic-galvanometer method of determining the electromagnetic capacity of a condenser. F. Womack. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIX, 172.

Ellipse.

344. Enveloppe des circonférences ayant pour diamètre les droites qui joignent les extrémités de deux rayons conjugués d'une ellipse. Moret-Blanc. N. ann. math. Sér. 3, XIV, Exerc. 11.

Vergl. Kegelschnitte 454.

Ellipsoid.

345. Propriété de l'ellipsoide. J. Franel. N. ann. math. Sér. 3, XIV, Exerc. 29.

Elliptische Transcendenten.

346. Ueber die analytische Darstellung elliptischer Functionen mittelst rationaler Functionen einer Exponentialfunction. H. A. Schwarz. Berl. Akad. Ber. 1894, II, 1187.
347. Sur la définition des fonctions elliptiques d'après G. H. Halphen. Vlad. Varicak. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 14.
348. Sur quelques propositions fondamentales de la théorie des fonctions elliptiques. Ch. Hermite. Chicago. Math. Pap. 105.
349. Formulary for an introduction to elliptic functions. Irv. Stringham Chicago. Math. Pap. 350.

F.

Factorenfolge.

350. Ueber bedingte Convergenz unendlicher Producte. A. Pringsheim. Mathem. Annal. XLIV, 413.

Formen.

351. Ueber die Structur der Discriminanten und Resultanten von binären Formen. Fr. Meyer. Acta Math. XIX, 385.
352. Ueber das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen. G. Frobenius. Berl. Akad. Ber. 1894, I, 241, 407.
353. Ueber die Reduction der binären quadratischen Formen. A. Hurwitz. Mathem. Annal. XLV, 85.
354. Ueber die Reduction der binären quadratischen Formen. A. Hurwitz. Chicago. Math. Pap. 125.
355. Das vollständige Formensystem dreier cubischen binären Formen. v. Gall. Mathem. Annal. XLV, 207.

Functionen.

356. Ueber arithmetische Eigenschaften analytischer Functionen. P. Stäckel. Mathem. Ann. XLVI, 513.
357. Ueber die Bestimmung eines Fundamentalsystems für einen gegebenen Gattungsbereich algebraischer Functionen einer veränderlichen x. F. Mertens. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. II, a) CII, 497.

358. Aufstellung eines vollständigen Systems von Differentialen erster Gattung in einem cubischen Functionenkörper. L. Baur. Mathem. Annal. XLVI, 31 [Vergl. Bd. XL. Nr. 270.]
359. Résumé de quelques résultats relatifs à la théorie des systèmes récurrents de fonctions. S. Pincherle. Chicago. Math. Pap. 278.
360. Beweis eines Satzes von Bertini über lineare Systeme ganzer Functionen. J. Lüroth. Mathem. Annal. XLIV, 539. [Vergl. Bd. XL, Nr. 83.]
361. Ueber einen Lüroth-Gordan'schen Satz. Eug. Netto. Mathem. Annal. XLVI, 310.
362. Autographirte Vorlesungshefte. Riemann'sche Flächen. Fel. Klein Mathem. Annal. XLV, 140.
363. Ueber die Ordnungen der Verzweigungspunkte einer Riemann'schen Fläche. K. Hensel. Berl. Akad. Ber. 1895, II, 932.
364. Ueber die Verzweigung der drei- und vierblättrigen Riemann'schen Flächen. K. Hensel. Berl. Akad. Ber. 1895, II, 1103.
365. Beiträge zur geometrischen Theorie der Schwarz'schen s-Function. Fr. Schilling. Mathem. Annal. XLIV, 161.
366. Die geometrische Theorie der Schwarz'schen s-Functionen für complexe Exponenten. Fr. Schilling. Mathem. Annal. XLVI, 62, 529.
367. Die multiplicativen Formen auf algebraischen Gebieten beliebigen Geschlechts mit Anwendung auf die Theorie der automorphen Formen. E. Ritter. Mathem. Annal. XLIV, 261.
368. Die Stetigkeit der automorphen Functionen bei stetiger Abänderung des Fundamentalbereichs. E. Ritter. Mathem. Annal. XLV, 473. XLVI, 200.
369. Die Theorie der automorphen Functionen und die Arithmetik. R. Fricke. Chicago. Math. Pap. 72.
370. Ueber die Transformationstheorie der automorphen Functionen. Rob. Fricke. Mathem. Annal. XLIV, 97.
371. On the automorphic linear transformation of an alternate bilinear form. H. Taber. Mathem. Annal. XLVI, 561.
372. Autographirte Vorlesungshefte. Die hypergeometrische Function. Fel. Klein. Mathem. Annal. XLV, 149.
373. Zur Theorie der hypergeometrischen Function. M. Winston. Mathem. Annal. XLVI, 159.
374. Sur les fonctions de n variables complexes. P. Cousin. Acta Math. XIX, 1.
375. Die symmetrischen Functionen und die Relationen zwischen den Elementarfunctionen derselben. Fr. Junker. Mathem. Annal. XLV, 1. [Vergl. Bd. XL, Nr. 85.]
376. Démonstration d'un théorème relatif aux fonctions symétriques. E. Amigues. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 494.
377. Ueber die Umkehrung der Systeme von Functionen reeller Variabeln. Ad. Kneser. Mathem. Annal. XLV, 446.

Vergl. Ausdehnungslehre. Bernoulli'sche Zahlen. Bestimmte Integrale. Determinanten. Differentialgleichungen. Elliptische Transcendenten. Factorenfolge. Formen. Gleichungen. Hyperelliptische Transcendenten. Imaginäres. Invariantentheorie. Kettenbrüche. Kugelfunctionen. Mannigfaltigkeiten. Potential. Quaternionen. Reihen. Substitutionen. Thetafunctionen. Transformationsgruppen. Wurzelausziehung. Zahlentheorie.

G.

Geodäsie.

378. Densities in the earth's crust. O. Fisher. Phil. Mag. Ser. 5, XXXVII, 375.
379. On the effect of sphericity in calculating the position of a level of no strain within a solid earth and on the construction theory of mountains. O Fisher. Phil. Mag. Ser. 5, XXXVIII, 131.
380. Densities in the earth's crust. J. J. Blake. Phil. Mag. Ser. 5, XXXVIII, 413.
381. Density in the earth's crust. J. Brill. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIX, 93.
382. An examination into the physical consequences of the local attraction of the material of isotropic spheres or sperical shells under uniform surface pressure. C. Chree. Phil. Mag. Ser. 5, XXXVIII, 161.
383. On the rigidity of the earth. P. Rudski. Phil. Mag. Ser. 5, XXXVIII, 218.

Geometrie (höhere).

384. Autographirte Vorlesungshefte. Höhere Geometrie. Fel. Klein. Mathem. Annal. XLV, 145.
385. Ueber die Erweiterung eines Grundbegriffs der Geometrie der Lage. Gust. Kohn. Mathem. Annal. XLVI, 285.
386. Das Zerfallen der Curven in gerade Linien. P. Gordan. Mathem. Annal. XLV, 410.
387. Ueber Kreisbogendreiecke und Kreisbogenvierecke. A. Schönflies. Mathem. Annal. XLIV, 105 [vergl. Bd. XL, Nr. 98].
388. Die Kreisbogenvierseite und das Princip der Symmetrie. Rob. Fricke. Mathem. Annal. XLIV, 565.
389. Zum Beweis des Hauptsatzes über die Endlichgleichheit zweier ebenen Systeme. Mor. Réthy. Mathem. Annal. XLV, 471.
390. Ueber die focalen Eigenschaften collinearer Gebilde. Th. Reye. Mathem. Annal. XLVI, 423.
391. Ueber eine algebraische Theorie der Schaaren nichtadjungirter Berührungscurven, welche zu einer algebraischen Curve gehören. W. Weiss. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) CII, 1025.
392. Zur Theorie der trilinearen Verwandtschaft dreier einstufiger Grundgebilde. Fr. London. Mathem. Annal. XLIV, 375.
393. Sulla razionalità delle involuzioni plane. Gui. Castelnuovo. Mathem. Annal. XLIV, 125.
394. Trasformazione di una curva algebrica in un altra con soli punti doppi. E. Bertini. Mathem. Annal. XLIV, 158.
395. Sur les cubiques unicursales. And. Cazamian. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 297.
396. Note sur une méthode nouvelle de transformation et sur les quartiques unicursales. G. Leinekugel. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 391.
397. Sur quelques propriétés des cubiques gauches. And. Cazamian. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 108.
398. Die Raumcurve 6. Ordnung vom Geschlechte 1 als Erzeugniss trilinearer Grundgebilde. Fr. London. Mathem. Annal. XLV, 545.

Vergl. Absolute Geometrie. Dreiecksgeometrie. Gleichungen 423. Kinematik. Mehrdimensionale Geometrie. Singularitäten. Topologie.

Geschichte der Mathematik.

399. Ueber das physikalische System des Straton. H. Diels. Berl. Akad. Ber. 1893, I, 101.
400. Ueber die Alphonsinischen Tafeln und die im Besitze der k. k. Hofbibliothek in Wien befindlichen Handschriften derselben. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) CII, 99.
401. Ueber Kometenerscheinungen in früheren Jahrhunderten. B. M. Lersch. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) CII, 1245.
402. Comparative review of some dynamical theories of gravitation. S. Tolver. Preston. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIX, 145.
403. On Helmholtz's electrochemical theory and some conclusions deduced from the same. F. Richarz. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIX, 529.
404. Some salient points in the history of non-euclidean and hyper-spaces. G. B. Halsted. Chicago. Math. Pap. 92.
405. The present state of mathematics. Fel. Klein. Chicago. Math. Pap. 133, 136.
406. Einleitung zu dem für den mathematischen Theil der deutschen Universitätsausstellung ausgegebenen Specialkatalog. W. Dyck. Chicago. Math. Pap. 44.
407. Ueber die arithmetisch-algebraischen Tendenzen Leopold Kroneckers. E. Netto. Chicago. Math. Pap. 243.
408. Arthur Cayley (16. VIII. 1821 – 26. I. 1895). M. Nöther. Mathem. Annal. XLVI, 462.
409. Antrittsrede in der Berliner Akademie von H. Schwarz. Berl. Akad. Ber. 1893, II, 623.
410. Antrittsrede in der Berliner Akademie von G. Frobenius. Berl Akad. Ber. 1893, II, 626.

411. Antwort auf die Antrittsreden der Herren Schwarz und Frobenius in der Berliner Akademie. A. Auwers. Berl. Akad. Ber. 1893, II, 628.
412. Antrittsrede in der Berliner Akademie von M. Planck. Berl. Akad. Ber. 1894, II, 641.

Gleichungen.

413. Sur le théorème d'Alembert. V. Jamet. N. ann. math. Ser. 3, XIV, 437.
414. Ueber den Eisenstein'schen Satz von der Irreductibilität algebraischer Gleichungen. L. Königsberger. Berl. Akad. Ber. 1894, II, 1135.
415. Ueber reductible Binomen. K. Th. Vahlen. Acta Math. XIX, 195.
416. Sur les expressions algébriques. D. Sélivanoff. Acta Math. XIX, 73.
417. Ueber symmetrische Functionen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung. Gust. Kohn. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. II, a) CII, 199.
418. Ueber die in recurrirender Weise gebildeten Grössen und ihren Zusammenhang mit den algebraischen Gleichungen. Fr. Cohn. Mathem. Annal. XLIV, 473.
419. Zur Theorie der ganzzahligen algebraischen Gleichungen. H. Weber. Chicago. Math. Pap. 401.
420. Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt. A. Hurwitz. Mathem. Annal. XLVI, 273.
421. Formule de Cardan modifiée par Cayley. H. Weber. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 347.
422. Nomographie. M. d'Ocagne. Chicago. Math. Pap. 258.
423. Démonstration algébrique d'un théorème relatif à l'intersection de deux courbes. E. Amigues. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 447.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 281. Ausdehnungslehre. Determinanten. Logikcalcul.

Graphische Methoden.

424. Modern graphical developements. H. T. Eddy. Chicago. Math. Pap. 58.

H.

Hydrodynamik.

425. Ueber die kinetische Theorie der inneren Reibung der Flüssigkeiten. Gust. Jäger. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. II, a) CII, 253.
426. Ueber den Einfluss des Windes auf die Gestalt der Meereswellen. W. Wien. Berl. Akad. Ber. 1894, II, 509.
427. Ueber die Gestalt der Meereswellen. W. Wien. Berl. Akad. Ber. 1895, I, 343.
428. On the highest wave of permanent type. J. Mc. Cowan. Phil. Mag. Ser. 5, XXXVIII, 351.
429. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves. D. J. Korteweg & G. De Vries. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIX, 422.
430. Strahlformen incompressibler reibungsloser Flüssigkeiten. M. Réthy. Mathem. Annal. XLVI, 249.
431. On the resistance of a fluid to a plane kept moving uniformly in a direction inclined to it at a small angle. Lord Kelvin. Phil. Mag. Ser. 5, XXXVIII, 409.
432. The viscosity of liquids. O. G. Jones. Phil. Mag. Ser. 5, XXXVII, 451.

Hyperbel.

433. Propriétés de certaines hyperboles équilatères. J. Lemaire. N. ann. math. Sér. 5, XIV, 280.

Hyperelliptische Transcendenten.

434. On Weierstrass' systems of hyperelliptic integrals of the first and second kind. O. Bolza. Chicago. Math. Pap. 1.
435. Zur Transformation 5. Grades der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. M. Krause. Chicago. Math. Pap. 137.

Vergl. Oberflächen 504.

I.

Imaginäres.

436. Aeltere und neuere Untersuchungen über Systeme complexer Zahlen. E. Study. Chicago. Math. Pap. 367.
437. Remarque sur la valeur de i^i. Vlad. Varicak. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 258.
438. Sur les exponentielles imaginaires. G. Farry. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 269.
Vergl. Quaternionen.

Integrator.

439. On a new harmonic analyser. O. Henrici. Phil. Mag. Ser. 5, XXXVIII, 110. — Perry ibid. 125.
440. Harmonic analyser giving direct readings of the amplitude and epoch of the various constituent simple harmonic terms. Arch Sharp. Phil. Mag. Ser. 5, XXXVIII, 121.
441. The Hatchet planimeter. F. W. Hill. Phil. Mag. Ser. 5, XXXVIII, 265.
442. On a simple form of harmonic analyser. G. U Yule. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIX, 367.

Interpolation.

443. On interpolation Formulae and their relation to infinite series. W. H. Echols. Chicago. Math. Pap. 52.
Vergl. Reihen 529.

Invariantentheorie.

444. Ueber die Theorie der algebraischen Invarianten. D. Hilbert. Chicago. Math. Pap. 116.
445. Ueber eine Eigenschaft der Invarianten von Covarianten. Gust Kohn. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. II, a) C II, 801.
446. Zur Invariantentheorie. A. Hurwitz. Mathem. Annal. XLV, 381.
Vergl. Geometrie (höhere) 388. Transformationsgruppen 549.

K.

Kegelschnitt.

447. Ueber die Siebensysteme von Kegelschnitten, welche durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Ordnung gehen. M. Noether. Mathem. Annal. XLVI, 545
448. Étude sur un faisceau de coniques. Meyer. N. ann. math. Sér. 3 XIV, 291.
449. Les propriétés focales des coniques obtenues au moyen de la méthode des polaires réciproques. M. d'Ocagne. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 353.
450. Sur quelques propriétés des coniques. P. Sondat. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 309, 507.
451. Faisceau de droites construites au moyen de deux coniques et dont quatre quelconques consécutives ont des rapports anharmoniques constants. Cam. de Polignac. N. ann. math. Sér. 3, XIV, Exerc. 13.
452. Sur les coniques $x^2+2\lambda xy-2\lambda bx-4(a-b)\,y=0$ où a, b sont deux constantes et λ un paramètre variable. J. Lemaire. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 63.
453. Propriété des paraboles ayant leur foyer au centre d'une conique donnée. G. Leinekugel. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 173.
454. Propriété d'une parabole, d'une ellipse et d'un point donnés dans un plan. G. Leinekugel. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 146.
Vergl. Ellipse. Hyperbel. Kreis. Krümmung 466, 467. Parabel.

Kettenbrüche.

455. Deux démonstrations de la convergence de certaines fractions continues. And. Markoff. Acta Math. XIX, 93.
456. Sur les réduites des fractions continues symétriques G. Musso. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 70.

Kinematik.

457. Sur deux théorèmes classiques de cinématique. Em. Picard. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 177.
458. Sur le mouvement d'une figure dans un plan. Moret-Blanc. N. ann. math. Sér. 3, XIV, Exerc. 22.

Kreis.

459. Cas d'impossibilité de la construction par un point donné et deux circonférences données d'une sécante telle que la différence des cordes soit égale à une longueur donnée. Moret-Blanc. N. ann. math. Sér. 3, XIV, Exerc. 22.
460. Les 5 circonférences circonscrites aux triangles formés chacun par 3 côtés consécutifs d'un pentagone convexe déterminent par leurs intersections 5 points situés sur une circonférence. P. Terrier. N. ann. math. Sér. 3, XIV, Exerc. 1.

Vergl. Formen 353.

Krümmung.

461. Sur le centre de courbure des podaires. M. d'Ocagne. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 111.
462. Constructions du centre de courbure d'une podaire. N. ann. math. Sér 3, XIV, 190.
463. Sur le centre de courbure des podaires. E. N. Barisien. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 471.
464. Sur le rayon de courbure de la projection d'une courbe. J. Caron. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 138. — Mannheim ibid. 349.
465. Sur la courbure du contour apparent d'une surface projetée orthogonalement. M. d'Ocagne. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 262.
466. Sur le rayon de courbure des coniques. And. Cazamian. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 365.
467. Lieu du centre de courbure d'une conique variable dans un point variable. Moret-Blanc. N. ann. math. Sér. 3, XIV, Exerc. 24. — Mannheim ibid. 27.

Vergl. Absolute Geometrie 274. Oberflächen 493.

Kugelfunctionen.

468. Das Additionstheorem der Functionen $C_n^\nu(X)$. L. Gegenbauer. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) CII, 942.

L.

Logikcalcul.

469. Bemerkung zur Algebra der Logik. A. Korselt. Mathem. Annal. XLIV, 156.
470. Nota über die Algebra der binären Relative. E. Schröder. Mathem. Annal. XLVI, 144.

M.

Magnetismus.

471. Ueber die Lösung des Magnetisirungsproblems durch Reihen. A. Wassmuth. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) CII, 65.
472. Ueber Isanomalen des erdmagnetischen Potentials. W. v. Bezold. Berl. Akad. Ber. 1895, I, 363.
473. Der normale Erdmagnetismus. W. v. Bezold. Berl. Akad. Ber. 1895, I, 1119.
474. On the magnetic shielding of concentric spherical stells. A. W. Rücker. Phil. Mag. Ser. 5, XXXVII, 95.
475. Magnetic shielding by a hollow iron cylinder. J. Perry. Phil. Mag. Ser. 5, XXXVIII, 270.
476. Calculation of the magnetic field of a current running in a cylindrical coil. G. M. Minchin. Phil. Mag. Ser. 5, XXXVII, 204.
477. On electromagnetic induction in plane, cylindrical and spherical current-sheets and its representation by moving troils of images. G. H. Bryan. Phil. Mag. Ser. 5, XXXVIII, 198.
478. A method for comparing the values of the specific inductive capacity of a substance under slowly and rapidly changing fields. Edw. F. Northrup. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIX, 78.

Mannigfaltigkeiten.

479. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. G. Cantor. Mathem. Annal. XLVI, 481.

Maxima und Minima.

480. Die Maxima und Minima der Functionen von mehreren Veränderlichen. O. Stolz. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) CII, 85. [Vergl. Bd. XXXVIII Nr. 458.]

Vergl. Oberflächen 494.

Mechanik.

481. Ueber den Hauptpunkt einer beliebigen Axe eines materiellen Punktsystems. Jos. Finger. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) CII, 592. [Vergl. Bd. XXXIX Nr. 295.]
482. Sur le théorème de la conservation des aires. A. de Saint-Germain. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 184. [Vergl. Bd. XL Nr. 552, 553.]
483. Sur la définition des masses et des forces. Vaschy. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 5.
484. Formales de la statique d'un corps solide en axes obliques. Et. Pomey. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 449.
485. Sur les équations de la dynamique. R. Lionville. Acta Math. XIX, 251.
486. Mouvement d'un triangle équilatéral homogène et pesant. A. de Saint-Germain. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 406.
487. Mouvement d'un cône droit mobile autour de son centre de gravité supposé fixe. P. Rigollet. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 415.
488. Mémoire sur le pendule de longueur variable. L. Lecornu. Acta Math. XIX, 201.

Vergl. Akustik. Elasticität. Elektricität. Geodäsie. Geschichte der Mathematik 402. Graphische Methoden. Hydrodynamik. Kinematik. Magnetismus. Molekularphysik. Optik. Potential. Schwerpunkt. Wärmelehre.

Mehrdimensionale Geometrie.

489. Allgemeine Anzahlfunctionen für Kegelschnitte, Flächen und Räume zweiten Grades in n-Dimensionen. H. Schubert. Mathem. Annal. XLV, 153.
490. Der pythagoräische Lehrsatz in mehrdimensionalen Räumen. V. Schlegel. Chicago. Math. Pap. 337.

Vergl. Geschichte der Mathematik 404.

Molekularphysik.

491. The attraction of unlike molecules. W. Sutherland. Phil. Mag. Ser. 5, XXXVIII, 1, 188.
492. Further studies on molecular force. W. Sutherland. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIX, 1.

O.

Oberflächen.

493. Ueber Flächen constanter Krümmung. Em. Wälsch. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) CII, 1317.
494. Theorie der Minimalflächen, deren Begrenzung aus geradlinigen Strecken besteht. H. A. Schwarz. Berl. Akad. Ber. 1894, II, 1237.
495. Ueber isometrische Flächen. A. Voss. Mathem. Annal. XLVI, 97.
496. Aufstellung eines neuen dreifach orthogonalen Flächensystems. Ant. Puchta. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) CII, 1197.
497. Ueber die Bedingung, unter der eine Flächenschaar einem dreifach orthogonalen Flächensysteme angehört. R. v. Lilienthal. Mathem. Annal. XLIV, 449.
498. Sur la surface de Fresnel. Vahlen. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 344.
499. Einige Constructionen bezüglich der Schraubungsflächen. J. Sobotka. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) LII, 1204.
500. Ueber die Steiner'sche Fläche. K. Th. Vahlen. Acta Math. XIX, 199.
501. Sur la théorie générale des surfaces unicursales. G. Humbert. Mathem. Annal. XLV, 428.
502. Sur l'équation différentielle des surfaces réglées. D. Sintsof. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 58.
503. Ueber die Doppelcurve auf den geradlinigen Flächen. A. Wiman. Acta Math. XIX, 63.

504. Sui sistemi lineari di superficie algebriale ad intersezioni variabili iperellittiche. Feder. Enriques. Mathem. Annal. XLVI, 179.
505. Sur une classe des surfaces. P. Svéchnicoff. N. ann. math. Sér. 3. XIV, 501.
506. Ueber Tangentencongruenzen einer Fläche. Em. Wälsch. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) LII. 757.
507. On ridge-lines and lines connected with them. J. Mc. Cowan. Phil. Mag. Ser. 5, XXXVII, 227.
508. Sur l'équation des lignes géodésiques. Ed. Weyr. Chicago. Math. Pap. 408.
509. Sur les surfaces gauches dont une même courbe plane est à la fois ligne de striction et ligne de courbure. E. Amigues. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 491.

Vergl. Abbildung. Differentialgleichungen 306. Functionen 362, 363, 364.

Oberflächen zweiter Ordnung.

510. Sur les surfaces du second degré qui contiennent trois droites données. G. Fouret. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 266, 497. — L. Lévy ibid. 329. — M. d'Ocagne ibid. 339.

Vergl. Ellipsoid.

Optik.

511. Zur Theorie der astronomischen Refraction. J. v. Hepperger. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) CII, 321.
512. On interference phenomena. Arth. Schuster. Phil. Mag. Ser. 5, XXXVII, 509.
513. Fixed-arm spectroscopes. F. L. O. Wadsworth. Phil. Mag. Ser. 5, XXXVIII, 337.

Vergl. Oberflächen 498.

P.

Parabel.

514. Sur les paraboles qui passent par un point fixe du plan et qui admettent comme directrice une droite fixe. G. Leinekugel. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 112.

Planimetrie.

515. Ueber die geraden Linien als kürzeste Verbindung zweier Punkte. Dav. Hilbert. Mathem. Annal. XLVI, 91.
516. Cansidérations générales sur la géométrographie. Em. Lemoine. Chicago. Math. Pap. 143.
517. Sur la théorème de Carnot. And. Cazamian. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 30.
518. Théorèmes sur les transversales. Franc. Ferrari. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 41.

Vergl. Dreiecksgeometrie.

Potential.

519. Ueber symmetrische Potentialfunctionen. L. Gegenbauer. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) CII, 555.

Q.

Quaternionen.

520. Geometrical interpretation of *log Uq*. Alex. Macfarlane. Phil. Mag. Ser. 5, XXXVIII, 143.
521. Notice respecting the outlines of quaternions by H. W. L. Hime. Phil. Mag. Ser. 5, XXXVIII, 499.
522. On Colonel Himes Outlines of quaternions. Alex. Macfarlane. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIX, 135.

R.

Rechnen.

523. Allgemeine Theorie der Divergenz und Convergenz von Reihen mit positiven Gliedern. A. Pringsheim. Chicago. Math. Pap. 305.
524. Ueber Functionen, welche in gewissen Punkten endliche Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung, aber keine Taylor'sche Reihenentwickelung besitzen. A. Pringsheim. Mathem. Annal. XLIV, 41. [Vergl. Bd. XL, Nr. 228.]

525. Ueber die notwendigen und hinreichenden Bedingungen des Taylor'schen Lehrsatzes für Functionen einer reellen Variablen. A. Pringsheim. Mathem. Annal. XLIV, 57.
526. Ueber die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Entwickelbarkeit von Functionen einer reellen Variablen nach der Taylor'schen Reihe und über nicht-entwickelbare Functionen mit durchweg endlichen Differentialquotienten. A Pringsheim. Chicago. Math. Pap. 288.
527. Ueber Riemann's Convergencriterium. A. Hurwitz. Mathem. Annal. XLIV, 83.
528. Des conditions pour que l'échelle d'une suite récurrente soit irréductible. Ed. Maillet. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 152, 197.
529. Sur le problème de l'interpolation dans les suites récurrentes. Ed. Maillet. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 473.
530. Sur une généralisation de la formule $\frac{\varphi}{2} = \frac{\sin\varphi}{1} - \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 3\varphi}{3} - \cdots$ C. Störmer. Acta Math. XIX, 341.

Vergl. Differentialgleichungen 309. Interpolation.

S.

Schwerpunkt.

531. Einige Sätze vom Schwerpunkt. V. Schlegel. Chicago. Math. Pap. 331.

Singularitäten.

532. The practical determination of the deficiency (Geschlecht) and adjoint φ-curves for a Riemann surface. H. F. Baker. Mathem. Annal. XLV, 133.

Vergl. Geometrie (höhere) 394, 395, 396, 398. Kegelschnitte 447 Oberflächen 501, 503.

Stereometrie.

533. Une nouvelle définition du plan. E. Balluc. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 56.
534. Ronayne's cubes. H. Hennessy. Phil. Mag. Sér. 5, XXXIX, 183.

Substitutionen.

535. On orthogonal substitution. H. Taber. Chicago. Math. Pap. 395.
536. Verallgemeinerung zweier Sätze aus der Theorie der Substitutionengruppen. P. Hoyer. Mathem. Annal. XLVI, 539. [Vergl. Bd. XL Nr. 242.]

T.

Tetraeder.

536. Relations existentes entre les éléments de certains tétraèdres. A. Leinekugel. N. ann. math. Sér. 3, XIV, Exerc. 16.

Thetafunctionen.

538. Die quadratische Transformation der Thetafunctionen. A. Krazer. Mathem. Annal. XLVI, 442.

Topologie.

539. Le problème des labyrinthes. G. Tarry. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 187.

Transformationsgruppen.

540. Sur les groupes de transformations des équations différentielles linéaires. Em. Picard. Mathem. Annal. XLVI, 161. [Vergl. Bd. XL Nr. 643.]
541. Ueber endliche Gruppen. G. Frobenius. Berl. Akad. Ber. 1895, I, 163.
542. Ueber auflösbare Gruppen. G Frobenius. Berl. Akad. Ber. 1893, I, 337, 1895, II, 1027.
543. Verallgemeinerung des Sylow'schen Satzes. G. Frobenius. Berl. Akad. Ber. 1895, II, 981.
544. Tabellen von endlichen continuirlichen Transformationsgruppen. W. Fr. Meyer. Chicago. Math. Pap. 187.
545. Bildung zusammengesetzter Gruppen. O. Hölder. Mathem. Annal. XLVI, 321.
546. Gruppentheorie und Krystallographie. A. Schönflies. Chicago. Math. Pap. 341.
547. On a certain simple group. F. N. Cole. Chicago. Math. Pap. 40.
548. A doubly-infinite system of simple groups. El. Hast. Moore. Chicago. Math. Pap. 208.

549. The invariants of a group of 2168 linear quaternary substitutions. Heinr. Maschke. Chicago. Math. Pap. 175.
550. A construction of Galois' group of 660 elements. Jos. de Perott. Chicago. Math. Pap. 273.

Trigonometrie.

551. Sur une application de la formule de multiplication des arcs. E. Goursat. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 245.
552. Some researches in spherical trigonometry. E. Study. Chicago. Math. Pap. 382.

Vergl. Reihen 530.

W.

Wärmelehre.

553. The second law of thermodynamics. S. H. Burbury. Phil. Mag. Ser. 5, XXXVII, 574.
554. Ueber einige particuläre Lösungen der Differentialgleichung für die Wärmeleitung in einem Kreiscylinder und deren Anwendung. E. Kobald. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) CII, 1361.
555. Zur analytischen Theorie der Wärmeleitung. A. Sommerfeld. Mathem. Annal. XLV, 263.
556. Die Theorie der Wärmeleitung der Flüssigkeiten. Gust. Jäger. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. II a) CII, 483.
557. On the kinetic interpretation of the dissipation function. Lad. Natanson. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIX, 455.
558. On the kinetic energy of the motion of heat and the corresponding dissipation function. Lad. Natanson. Phil Mag. Ser. 5, XXXIX, 501.
559. On the law of distribution of energy. S. H. Burbury. Phil. Mag. Ser. 5, XXXVII, 143.
560. On an approximative law of the variation in the pression of saturated vapours. K. D. Kraevitch. Phil. Mag. Ser. 5, XXXVII, 38.
561. On the relation between the coefficients of pressure in thermometry. C. Chree. Phil. Mag. Ser. 5, XXXVIII, 371.
562. Luftbewegungen in einer rotirenden Sphäroidschale. M. Margules. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. II a) CII, 11, 1369. [Vergl. Bd. XXXIX Nr. 354.]
563. On a simple graphic illustration of the determinantal relation of dynamics. G. H. Bryan. Phil. Mag. Ser 5, XXXIX, 531.
564. On the thermodynamics of the sun. P. Rudski. Phil. Mag. Ser. 5, XXXVII, 304.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

565. Sur la combinaison des écarts. M. d'Ocagne. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 133.

Wurzelausziehung.

566. Ueber einen Algorithmus zur Berechnung der n-Wurzel aus a. C. Schmidt. Mathem. Annal. XLV, 301.

Z.

Zahlentheorie.

567. Ueber Eigenschaften von ganzen Zahlen, die durch räumliche Anschauung erschlossen sind. H. Minkowski. Chicago. Math. Pap. 201.
568. Ueber die Zerlegung der Ideale eines Zahlenkörpers in Primideale. Dav. Hilbert. Mathem. Annal. XLIV, 1.
569. Ueber die Dirichlet'schen biquadratischen Zahlkörper. Dav. Hilbert. Mathem. Annal. XLV, 309.
570. Ueber die angenäherte Darstellung der Zahlen durch rationale Brüche. A. Hurwitz. Mathem. Annal. XLIV., 417.
571. Ueber die Anzahl der Classen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante. A. Hurwitz. Acta Math. XIX, 351.
572. On fifth power numbers whose sum is a fifth power. Art. Martin. Chicago. Math. Pap. 168.
573. Concerning arithmetical operations involving large numbers. T. M. Pervouchine. Chicago. Math. Pap. 277.

574. Auszug aus einer Arbeit unter dem Titel: Zu Riemann's Abhandlung „über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse". H. v. Mangoldt. Berl. Akad. Ber. 1894, II, 883.
575. Auszug aus einem Briefe von L. Kronecker an R. Dedekind. Berl. Akad. Ber. 1895, I, 115.
376. Ueber Systeme von Congruenzen mit einer Unbekannten in Bezug auf einen Primzahlmodul. L. Gegenbauer. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. II a) CII, 549.
577. Ueber ein Theorem des Herrn Baker. L. Gegenbauer. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. II, a), CII, 951.
578. Ueber eine Relation des Herrn Nasimof. L. Gegenbauer. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. II a), CII, 1265.
579. Anzahl der Zerlegungen einer ganzen rationalen Zahl in Summanden. J. Hermes. Mathem. Annal. XLV, 371.
580. Théorie générale du plus grand commun diviseur et du plus petit multiple commun des nombres commensurables. P. Barrieu. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 95, 165, 214.
581. Note sur la formation des carrés des nombres. J. Pichot. N. ann. math. Sér. 3, XIV, 489.

Vergl. Bestimmte Integrale 295. Formen. Functionen 356.

Tafel I.

Fig. 1.

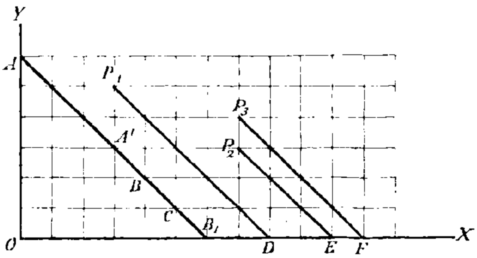


Fig. 3.

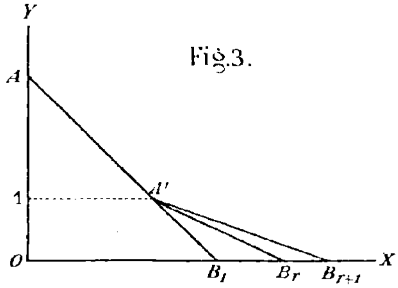


Fig. 2.

Fig. 4.

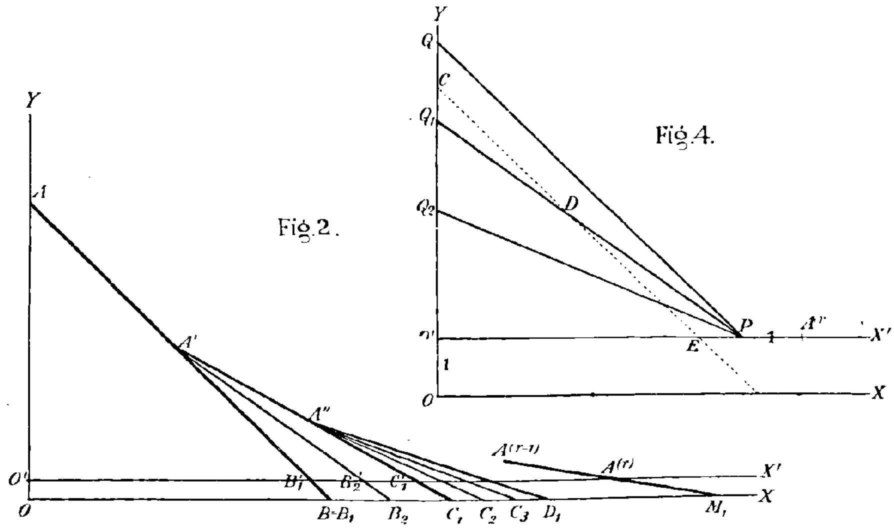


Fig. 5.

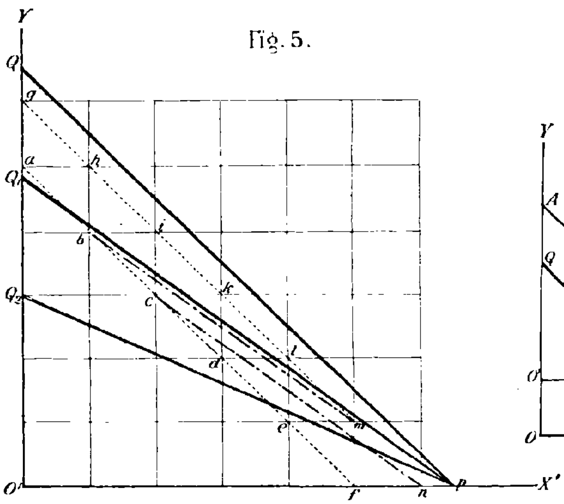
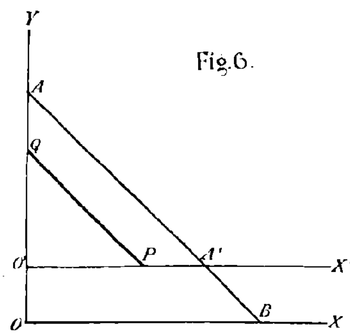


Fig. 6.



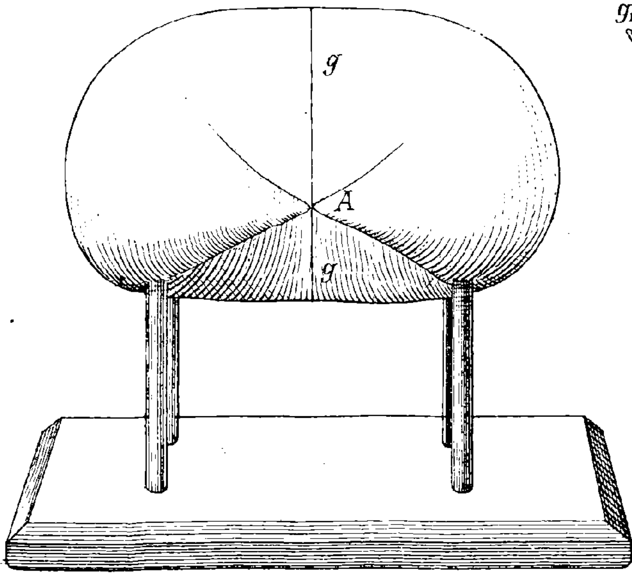


Fig. 1.

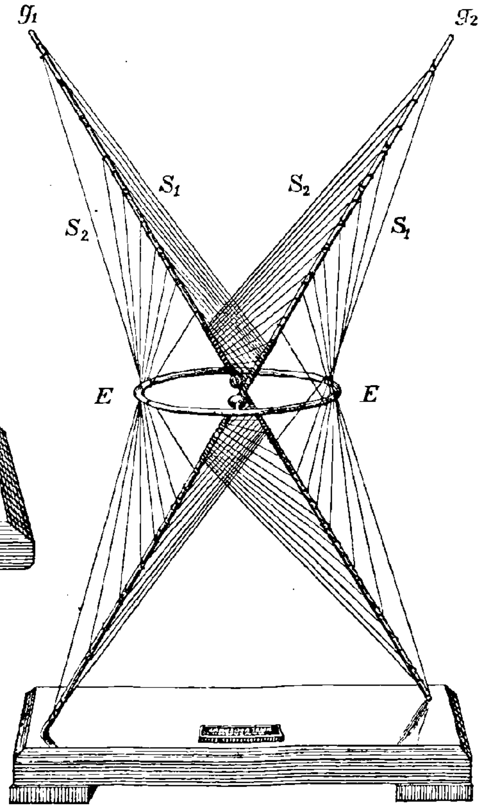


Fig. 2.

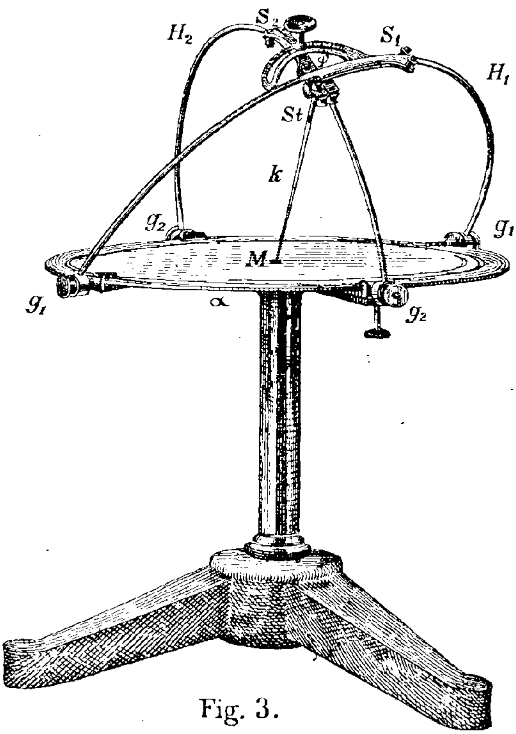


Fig. 3.

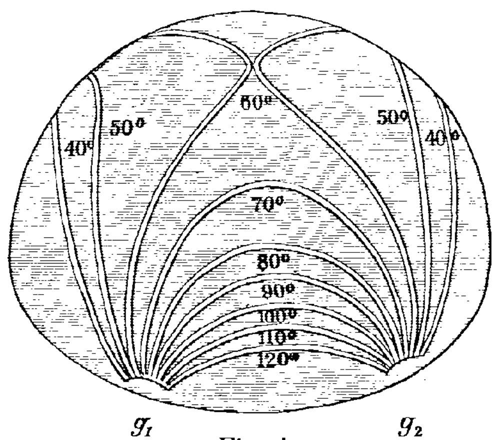


Fig. 4.

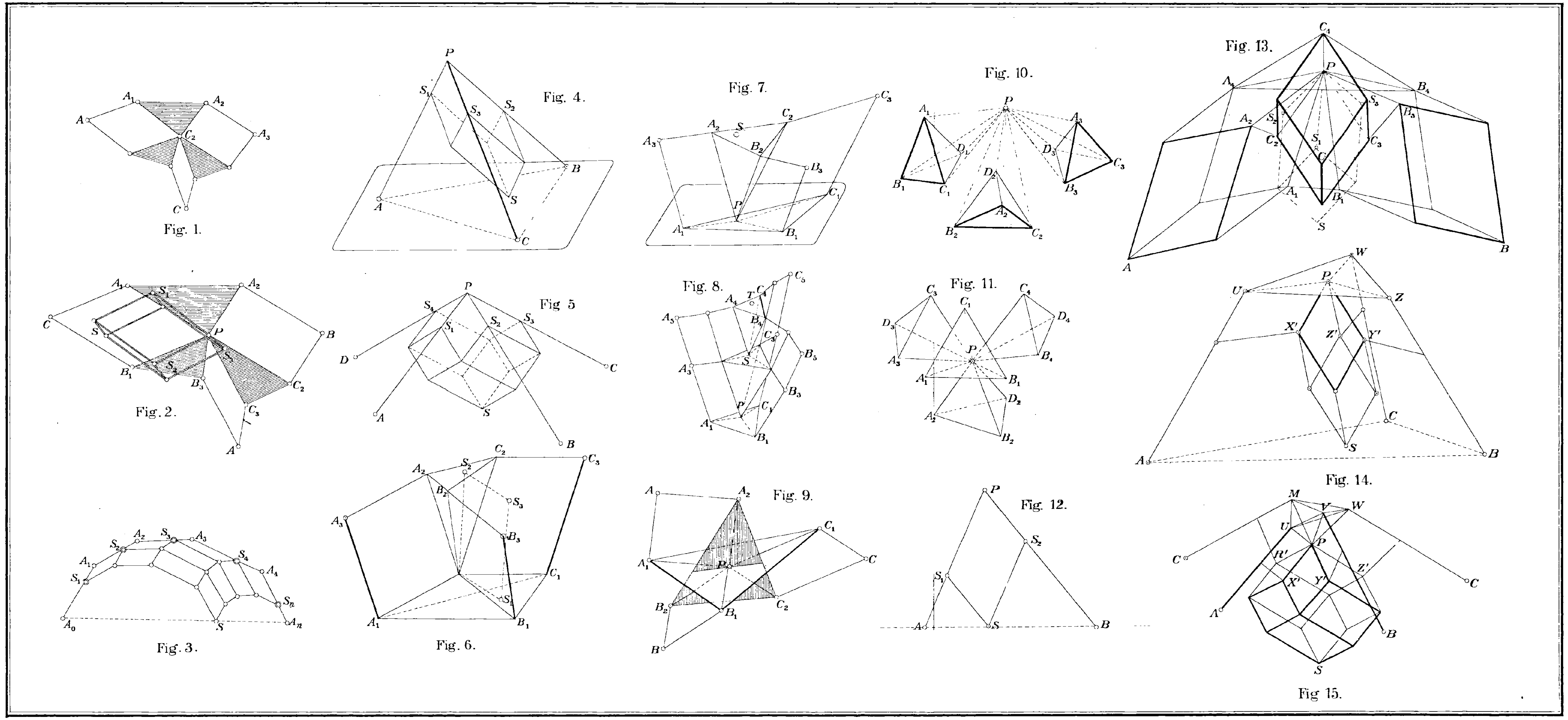


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig 5
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig 15.

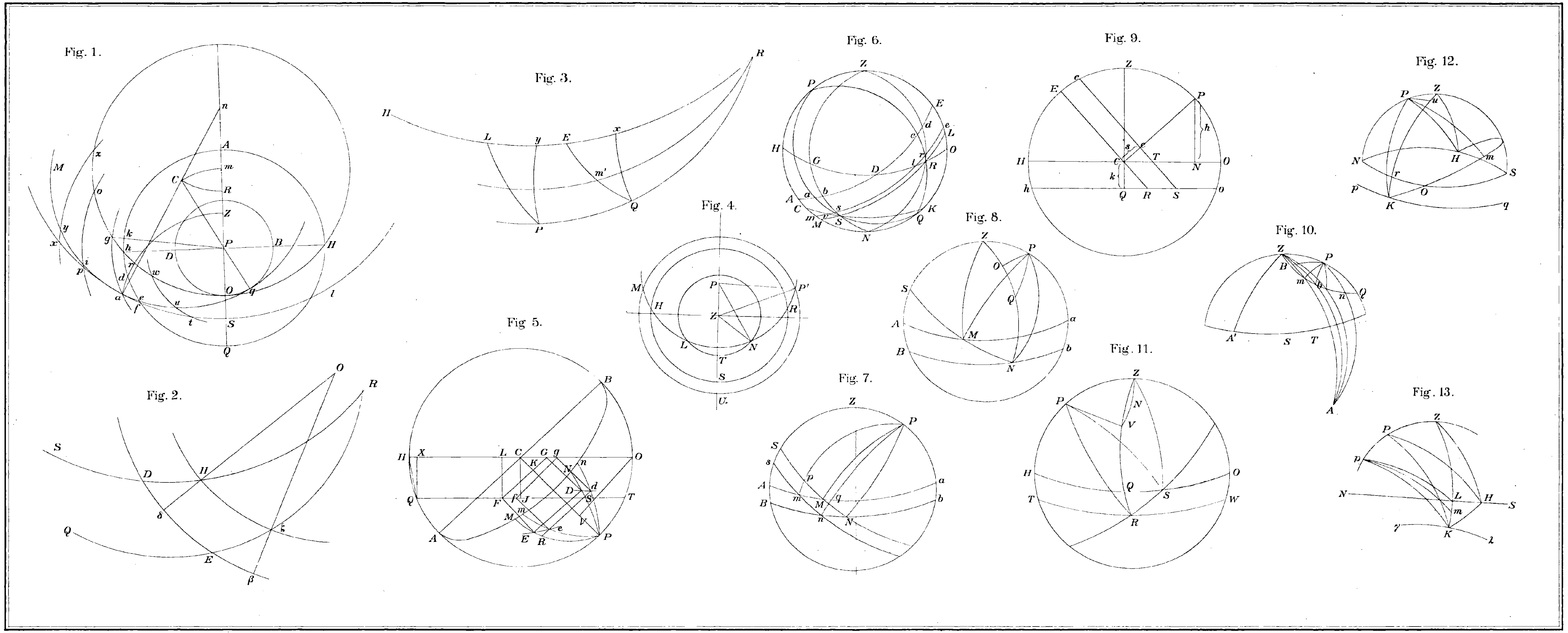


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.

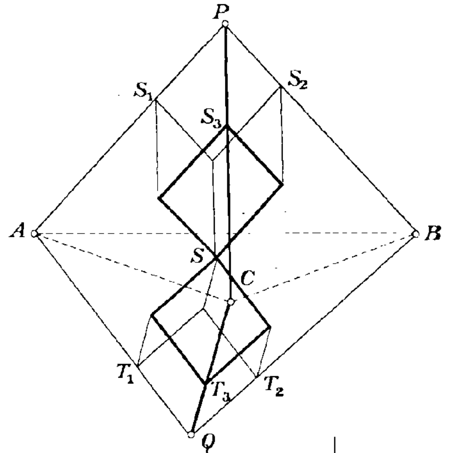


Fig. 1.

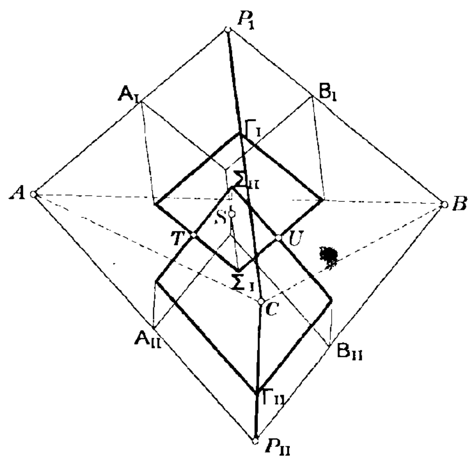


Fig. 2.

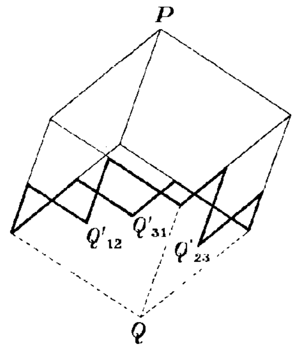


Fig. 6.

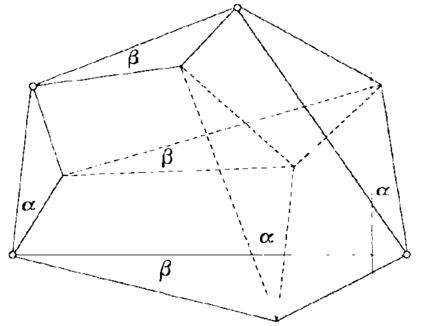


Fig. 12.

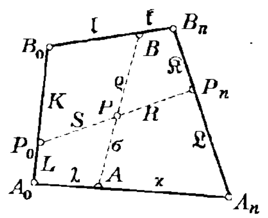


Fig. 13.

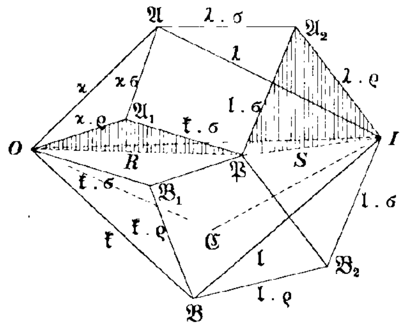


Fig. 15.

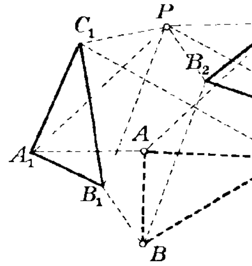


Fig. 22.

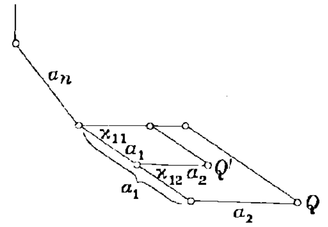


Fig. 5.

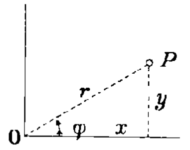


Fig. 7.

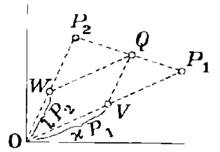


Fig. 8.

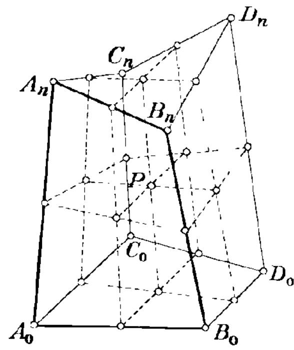


Fig. 11.

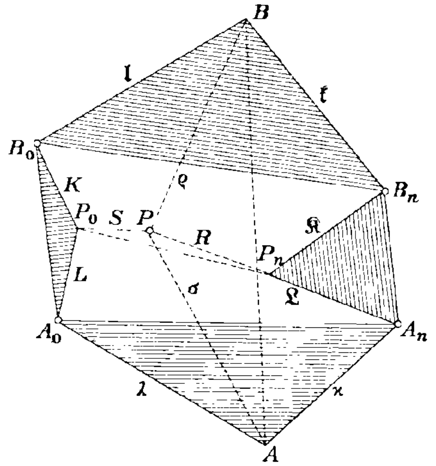


Fig. 14.

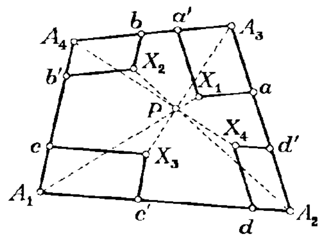


Fig. 17.

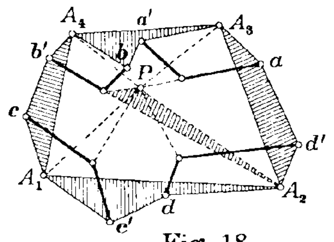
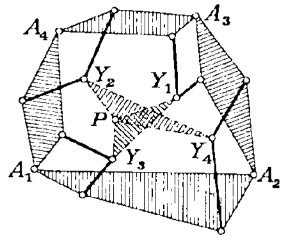


Fig. 18.

Fig. 21.



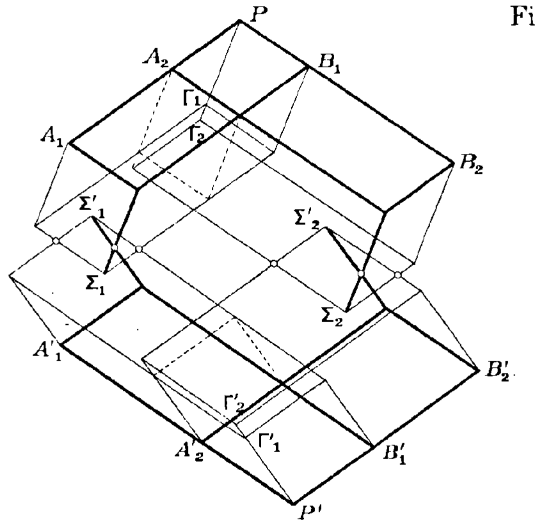


Fig. 3.

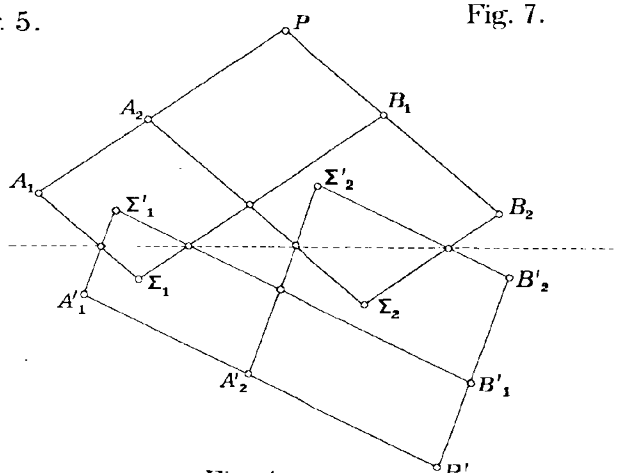


Fig. 4.

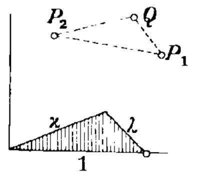


Fig. 9.

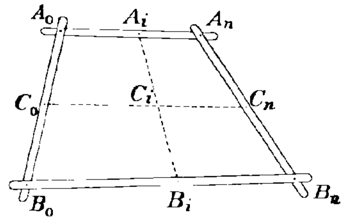


Fig. 10.

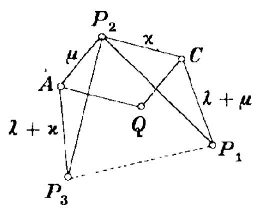


Fig. 16.

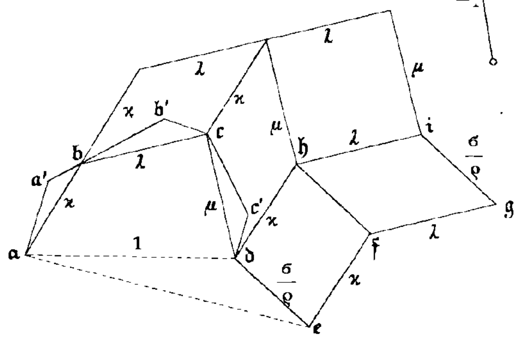


Fig. 19.

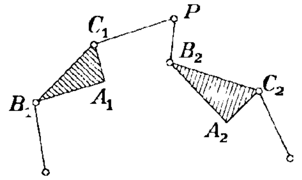


Fig. 23.

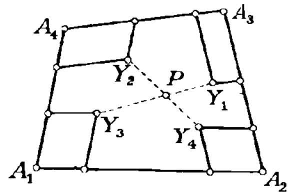


Fig. 20.

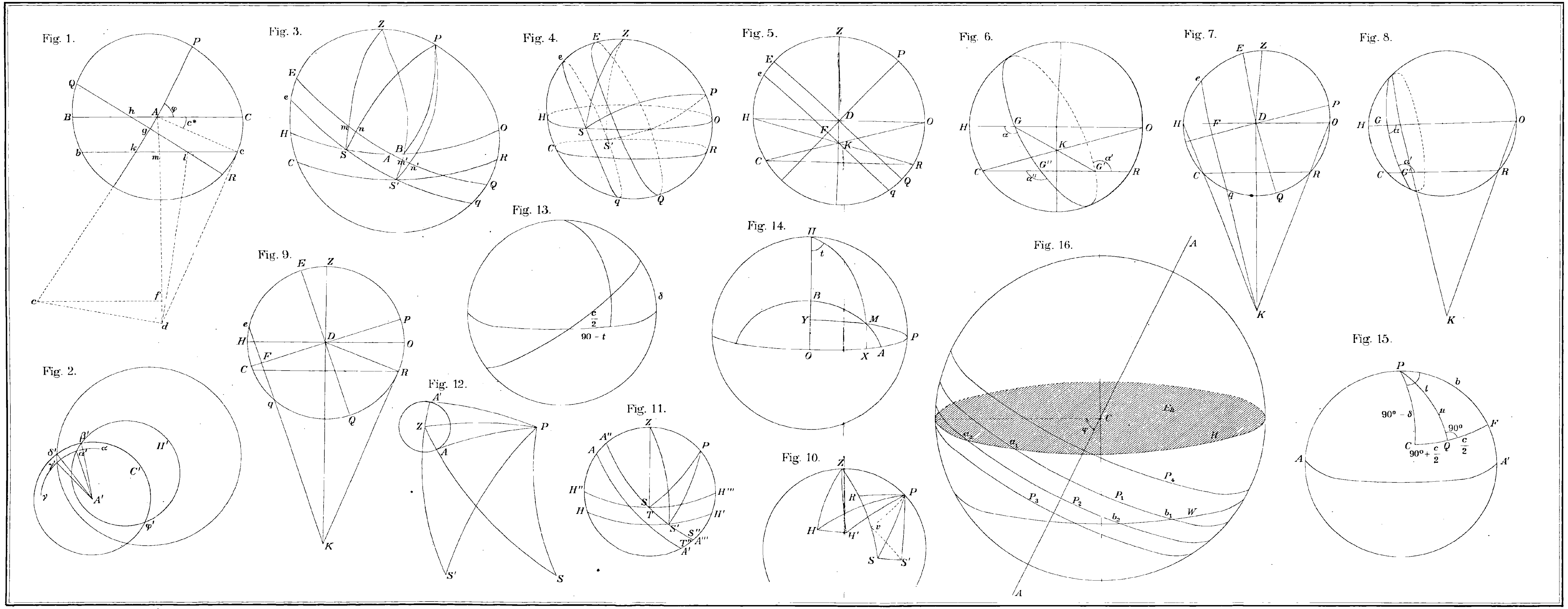


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.

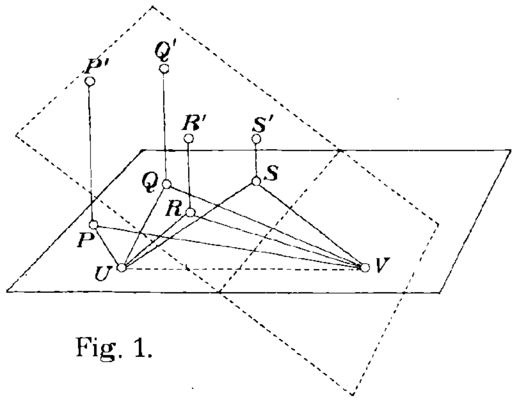


Fig. 1.

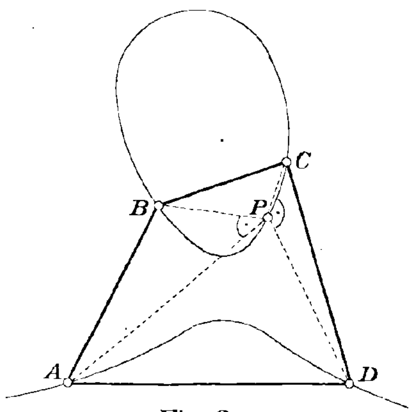


Fig. 2.

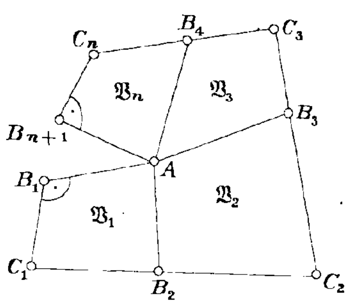


Fig. 3.

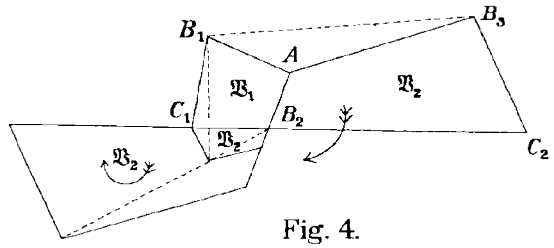


Fig. 4.

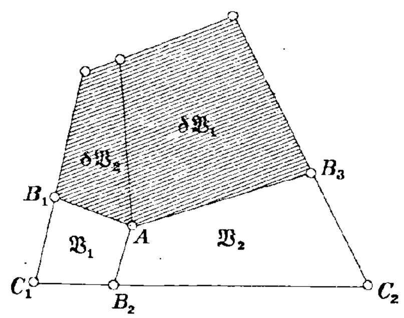


Fig. 5.

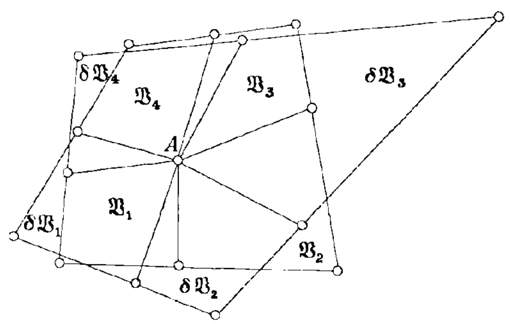


Fig. 6.

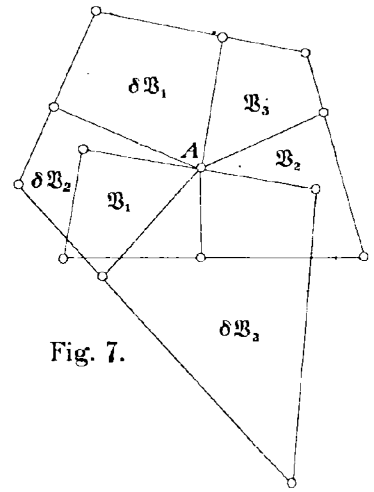


Fig. 7.

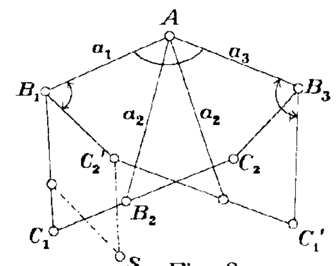


Fig. 8.

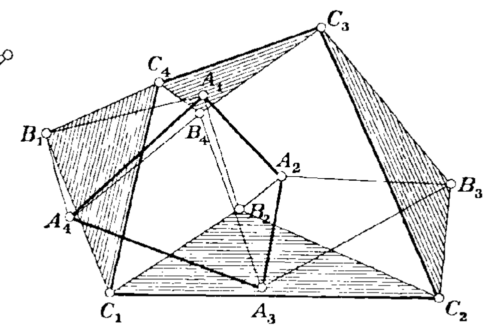


Fig. 9.

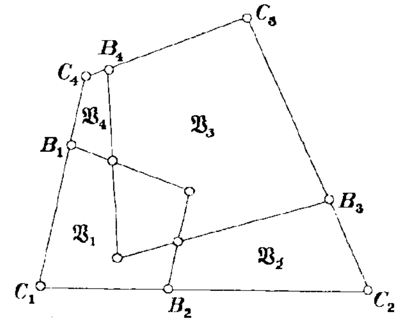


Fig. 10.

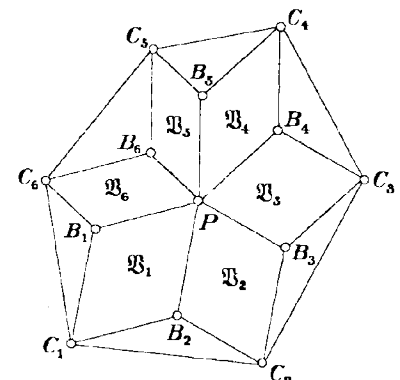


Fig. 11.

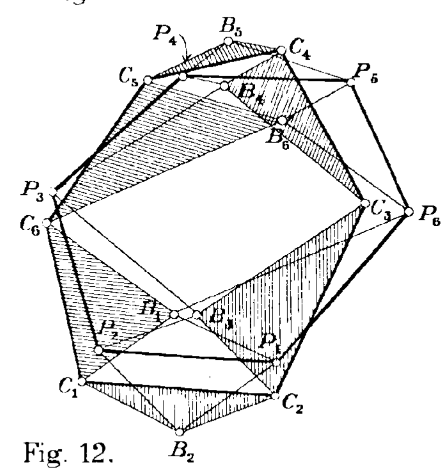


Fig. 12.